



HAL
open science

Algèbre de Rees et Fibre spéciale

Minh Lam Ha

► **To cite this version:**

Minh Lam Ha. Algèbre de Rees et Fibre spéciale. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00179342

HAL Id: tel-00179342

<https://theses.hal.science/tel-00179342>

Submitted on 15 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbre de Rees et Fibre spéciale

HA Minh Lam

*Je dédie cette thèse à mon grand-père, M. NGUYEN Tai Can, à l'occasion
de son 80^{ème} anniversaire.*

Remerciements

Tout d'abord, je veux remercier mon directeur de thèse, Marcel Morales, pour sa disponibilité, pour son aide scientifique et humaine qu'il a su m'offrir le long des cinq années que j'ai passé en France.

Je remercie Charles Walter pour avoir accepté d'être rapporteur et membre du jury de cette thèse.

Un merci particulier va à Ngô Viêt Trung pour avoir lu ce travail en détail et avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, et surtout pour ses leçons en Algèbre qu'il m'a donné à l'université.

C'est aussi un honneur pour moi d'avoir dans les membres du jury Michel Brion et Chris Peters. Je les remercie et particulièrement à la lecture attentive de Michel Brion qui m'a permis d'améliorer la première version de cette thèse.

Un grand merci au personnel de l'Institut Fourier qui est toujours très souriant et sympathique.

Le dernier merci, le plus important va à ma famille : mon époux, ma mère et ma soeur pour ses soutiens illimités ; et mon père pour m'avoir transmis sa passion pour les mathématiques.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 9 |
| 2 | Idéal de réseau, générateurs, codimension deux | 15 |
| 2.1 | Nombres de Betti, syzygies | 15 |
| 2.1.1 | Le cas d'un idéal de réseau de codimension 2 | 18 |
| 2.2 | Graphe associé à un idéal de réseau de codimension 2 | 20 |
| 2.2.1 | Le graphe des syzygies | 20 |
| 2.2.2 | Graphe des syzygies, point de vue algébrique | 25 |
| 3 | Fibre spéciale d'idéal de réseau de codimension deux | 27 |
| 3.1 | Anneau de Rees, fibre spéciale, relation de Plücker | 27 |
| 3.2 | Idéaux binômiaux à trois ou quatre générateurs | 28 |
| 3.2.1 | Idéaux binômiaux à trois générateurs | 29 |
| 3.2.2 | Idéaux binômiaux à quatre générateurs | 30 |
| 3.2.3 | Algèbre symétrique | 35 |
| 3.3 | Relations quadratiques dans l'anneau de Rees | 36 |
| 3.3.1 | Conditions pour que $P = 1$ ou $Q = 1$ | 36 |
| 3.3.2 | Les relations quadratiques | 45 |
| 3.4 | Relations dans la fibre spéciale | 46 |
| 4 | Idéaux binômiaux simpliciaux | 55 |
| 4.1 | Définitions et notations | 55 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1.1 | Idéaux simpliciaux et binômiaux simpliciaux | 56 |
| 4.2 | Décomposition primaire | 58 |
| 4.3 | Arbres, “Scrollers” ou “small variety” | 60 |
| 4.4 | Nombre de réduction 1 | 67 |

Chapitre 1

Introduction

L'éclatement d'un idéal dans un anneau quotient d'un anneau de polynômes est un outil très important en Géométrie Algébrique, principalement en Théorie des Singularités, où on éclate souvent des idéaux maximaux. En Algèbre Commutative, D.Rees a introduit l'algèbre de Rees d'un idéal, dont le Proj est l'éclatement de cet idéal. La fibre spéciale de cet idéal est la fibre de l'éclatement au dessus de l'origine.

Il y a très peu de situations où l'algèbre de Rees et la fibre spéciale peuvent être données explicitement. Dans sa thèse, P. Gimenez a calculé la dimension de la fibre spéciale pour un idéal torique simplicial de codimension 2. Ce travail a ensuite été complété dans [GMS] et [BM2], où une présentation de la fibre spéciale est donnée.

Le premier objectif de cette thèse a été d'étendre tous les résultats de [GMS] et [BM2] au cas d'un idéal de réseau de codimension 2. A cet effet, remarquons que les idéaux toriques sont les idéaux de réseaux premiers. Les méthodes développées dans [GMS] et [BM2] ne s'appliquent pas ici, et nous avons dû faire une preuve plus conceptuelle. Il en résulte que la fibre spéciale d'un idéal de réseau de codimension 2 est une variété projective Cohen–Macaulay de degré minimal.

Les équations des variétés Cohen–Macaulay de degré minimal ont été étudiées par M. Barile et M. Morales dans [BM3], [BM4]. Ce qui nous a amené naturellement à étudier une classe d'idéaux binômiaux introduite par M. Morales, et appelée *idéaux binômiaux simpliciaux*. Il s'avère que les idéaux binômiaux simpliciaux correspondant à un arbre généralisé définissent ce que dans [BM4] est appelé un “*scroller*” et dans [EGHP] une “*small variety*”, et qui ont des propriétés très intéressantes. Plus généralement, nous donnons une large classe d'idéaux binômiaux simpliciaux pour lesquels le nombre de

réduction est 1.

Nous sommes persuadés que toutes les propriétés des idéaux de Stanley–Reisner s’étendent aux idéaux binômiaux simpliciaux. Par exemple, nous sommes en train d’étendre le résultat de [EGHP] sur la propriété $N_{2,p}$ des idéaux de Stanley–Reisner.

La thèse est construite comme suit :

Soit \mathcal{L} un réseau positif dans \mathbb{Z}^n , i.e. tout vecteur non nul dans \mathcal{L} a des coordonnées positives et négatives. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l’anneau de polynômes à n variables sur le corps \mathcal{K} . L’idéal de réseau $I_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{R}$ associé à \mathcal{L} est l’idéal binomial :

$$I_{\mathcal{L}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \text{ et } \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L}),$$

où $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ pour $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Les idéaux toriques sont ceux associés à un réseau saturé, et ce sont des idéaux de réseau premiers.

La résolution libre d’un anneau gradué \mathcal{R}/I est toujours un outil important en Algèbre Commutative. C’est une suite exacte

$$\mathbb{F} : \cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\Phi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\Phi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}} \cdots \longrightarrow \mathcal{R}/I$$

de modules libres F_i gradués et d’applications $\Phi_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ homogènes.

La résolution est *linéaire* si toutes les applications Φ_i sont linéaires, et elle est *2-linéaire* si de plus I est engendré par des formes quadratiques. On dit que I satisfait la condition $N_{2,p}$ si I est engendré par des formes quadratiques, et Φ_i est linéaire pour $i \leq p$.

Campillo–Marijuan [CM] et Bruns–Herzog [BH] ont démontré que l’on peut décrire les modules de syzygies combinatoirement à partir du réseau \mathcal{L} . Pour le cas des idéaux de réseau de codimension 2, I. Peeva et B. Sturmfels ont défini entièrement la résolution libre de $\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}}$ de façon combinatoire. En particulier, les générateurs de $I_{\mathcal{L}}$ sont en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 (la base de Hilbert de $I_{\mathcal{L}}$).

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques définitions et les résultats de [PS] pour les idéaux de réseau de codimension 2, et nous définissons le *graphe de syzygies*. C’est un graphe planaire, dont les sommets correspondent aux générateurs de $I_{\mathcal{L}}$, et les arrêts donnent des informations sur les syzygies. Le complexe simplicial de dimension 2 engendré par ce graphe est appelé le *complexe de syzygies*. C’est un complexe “shellable”, dont les triangles donnent les premières syzygies, et deux triangles avec une arête commune donnent une seconde syzygie.

Dans le chapitre 3, nous allons étudier l'algèbre de Rees et la fibre spéciale d'un idéal de réseau de codimension deux.

Soit $I \subset \mathcal{R}$ un idéal engendré minimalement par n éléments $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$. L'anneau de Rees de I est l'anneau gradué

$$\mathcal{R}[It] = \bigoplus_{k \geq 0} I^k t^k.$$

La fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$ de I est le quotient $\mathcal{R}[It]/\mathfrak{m}\mathcal{R}[It]$, avec \mathfrak{m} l'idéal maximal irrélevant de \mathcal{R} . La dimension de la fibre spéciale est appelée "l'analytic spread" de I .

Introduisons m variables indépendantes sur \mathcal{R} , appelées $\{T_i\}_{1 \leq i \leq m}$, et considérons l'idéal $\mathcal{J} = \ker \pi$, où

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}[\mathbf{T}] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{R}[It] \longrightarrow 0 \\ T_i & \longrightarrow & f_i t \end{array}.$$

On obtient une présentation $\mathcal{R}[It] \simeq \mathcal{R}[\mathbf{T}]/\mathcal{J}$ de l'anneau de Rees.

De la présentation de l'anneau de Rees on déduit une présentation de la fibre spéciale $\mathcal{F}(I) \simeq \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{J}}$, où $\tilde{\mathcal{J}}$ est l'image de \mathcal{J} modulo $\mathfrak{m}\mathcal{R}[\mathbf{T}]$.

Par conséquent, toute relation entre les générateurs $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$, de I à coefficients dans l'anneau $\mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ donne un élément de \mathcal{J} , et la même relation modulo \mathfrak{m} donne un élément de $\tilde{\mathcal{J}}$.

Dans la section 3.2, nous étudions une classe d'idéaux binômiaux engendré par au plus quatre éléments, qui contient les idéaux de réseau ayant quatre générateurs. Les anneaux de Rees et les fibres spéciales sont décrits explicitement.

Dans les sections 3.3 et 3.4, considérons un idéal de réseau I de codimension 2 ayant au moins cinq générateurs. A partir du graphe de syzygies, nous déterminons un ensemble d'éléments \mathcal{A} dans l'idéal de présentation de l'anneau de Rees $\mathcal{R}(I)$. Puis, nous étudions de façon combinatoire l'idéal $(\tilde{\mathcal{A}})$ des images de ces éléments dans la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$. Nous démontrons

Théorème 1.0.1 (Théorème 3.4.12, et Théorème 3.4.15).

$$2 \leq \dim(\mathcal{F}(I)) \leq 3.$$

Dans le cas où \mathcal{K} est infini et I est un idéal radical qui n'est pas une intersection complète, nous avons $\dim(\mathcal{F}(I)) = 3$, et $(\tilde{\mathcal{A}})$ est l'idéal de présentation de $\mathcal{F}(I)$. Par conséquent, la fibre $\mathcal{F}(I)$ est Cohen-Macaulay, réduite, de degré minimal.

Nous en déduisons aussi des propriétés pour l'anneau de Rees :

Théorème 1.0.2 (Théorème 3.4.19). *L'anneau $\mathcal{R}(I)$ est Cohen–Macaulay, et engendré par des formes de degré au plus deux.*

De plus, à partir du complexe de syzygies, nous pouvons décrire explicitement une réduction de $\mathcal{F}(I)$, et montrer que son nombre de réduction est 1.

Nous rappelons la notion de réduction d'un anneau \mathcal{R}/J .

Soit $J \subset \mathcal{R}$ un idéal gradué homogène pour la graduation standard et $d = \dim \mathcal{R}/J$. Un ensemble de formes linéaires $\{g_1, g_2, \dots, g_d\}$ est une réduction de \mathcal{R}/J , si

$$(g_1, g_2, \dots, g_d)\mathfrak{m}^\rho = \mathfrak{m}^{\rho+1} \pmod{J}$$

où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de l'anneau de polynômes \mathcal{R} . Le plus petit nombre ρ lorsque l'on considère toutes les réductions possibles est appelé *le nombre de réduction* de \mathcal{R}/J .

Le théorème suivant de Eisenbud–Goto caractérise les variétés de degré minimal.

Théorème 1.0.3. [EG] *Soit R un anneau gradué standard réduit, définissant une variété algébrique projective. Alors nous avons la suite suivante d'implications :*

- (1) R est un anneau de Cohen–Macaulay et $e(R) = 1 + \text{codim } R$, où $e(R)$ est la multiplicité de R et $\text{codim } R$ sa codimension ;
- \Rightarrow (2) R a une résolution 2–linéaire ;
- \Rightarrow (3) $r(R) = 1$;
- \Rightarrow (4) $e(R) \leq 1 + \text{codim } R$

D'autre part, si R est un anneau de Cohen–Macaulay, alors les quatre implications sont des équivalences.

Dans le quatrième chapitre, nous étendons les propriétés des anneaux Cohen–Macaulay de degré minimal apparaissant dans l'étude de la fibre spéciale. Plus précisément, à partir d'un complexe simplicial Δ , nous définissons un idéal *binomial simplicial* \mathcal{B}_Δ . Les idéaux binomiaux simpliciaux sont une généralisation des idéaux monomiaux de Stanley–Reisner. L'idéal de présentation de la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$ est un cas particulier.

Pour les idéaux de Stanley–Reisner, Fröberg [Fr] a démontré les théorèmes suivants :

Théorème 1.0.4. *L’anneau de Stanley–Reisner d’un complexe simplicial Δ est un anneau Cohen–Macaulay de degré minimal si et seulement si*

1. *Le graphe $G(\Delta)$ est un d –arbre, et*
2. *Δ est le clique complex de $G(\Delta)$, i.e. $\Delta = \Delta(G(\Delta))$.*

Théorème 1.0.5. *L’anneau de Stanley–Reisner d’un complexe simplicial Δ a une résolution 2–linéaire si et seulement si*

1. *Le graphe $G(\Delta)$ est un d –arbre généralisé, et*
2. *$\Delta = \Delta(G(\Delta))$.*

Nous rappelons qu’un d –arbre généralisé sur un ensemble V de sommets est un graphe défini récursivement par les propriétés suivantes :

- (a) Un graphe complet de $d + 1$ éléments de V est un d –arbre généralisé.
- (b) Soit G un graphe sur un ensemble V de sommets. Supposons qu’il existe un sommet $v \in V$ tel que :
 1. La restriction G' de G à $V' = V \setminus \{v\}$ est un d –arbre généralisé,
 2. Il y a un sous-ensemble $V'' \subset V'$ ayant exactement $1 \leq j \leq d$ sommets, telle que la restriction de G to V'' soit un graphe complet, et
 3. G est le graphe engendré par G' et le graphe complet sur $V'' \cup \{v\}$.

Si $j = d$ dans la définition ci-dessus, alors nous dirons que G est un d –arbre.

Nous pouvons en partie étendre les résultats de Fröberg pour les idéaux binômiaux simpliciaux :

Théorème 1.0.6 (Théorème 4.3.9, et Proposition 4.4.11). *Si Δ est un arbre généralisé, alors \mathcal{B}_Δ définit un “scroller” (ou une “small variety” selon [EGHP]), et une réduction de \mathcal{B}_Δ est décrite explicitement.*

Une généralisation des “scrollers” est formée des variétés pour lesquelles le nombre de réduction est 1. La proposition 4.4.7 nous donne une classe de complexes simpliciaux Δ , qui ne sont pas des arbres généralisés, pour lesquels le nombre de réduction de \mathcal{B}_Δ est 1.

Chapitre 2

Idéal de réseau, générateurs, codimension deux

2.1 Nombres de Betti, syzygies

Dans cette section, nous allons donner quelques résultats sur les syzygies et les nombres de Betti des idéaux de réseau. Ces résultats ont été démontrés pour les idéaux toriques dans [CM], [BH]. Pour les idéaux de réseaux ces résultats se trouvent dans [PS] et [ES].

Soit \mathcal{L} un réseau positif dans \mathbb{Z}^n , i.e. tout vecteur non nul dans \mathcal{L} a des coordonnées positives et négatives. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'anneau de polynômes à n variables sur le corps \mathcal{K} . L'idéal de réseau $I_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{R}$ associé à \mathcal{L} est l'idéal binomial :

$$I_{\mathcal{L}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \text{ et } \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L}),$$

où $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ pour $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Remarquons que la codimension de $I_{\mathcal{L}}$ est égale au rang de \mathcal{L} .

Soit $H = \mathbb{Z}^n / \mathcal{L}$. L'anneau $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ainsi que son quotient $\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}}$ sont munis d'une H -graduation. La proposition suivante est bien connue, nous renvoyons le lecteur à [ES] :

Proposition 2.1.1. *\mathcal{R} admet une structure naturelle de H -anneau gradué, de plus toute variable est non diviseur de zéro, et $\dim_{\mathcal{K}}(\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}})_{\mathbf{h}} = 1$ pour tout $\mathbf{h} \in H$. Si M est un H -module gradué de type fini sur \mathcal{R} , alors les résolutions libres de M sont H -graduées, et tout module de syzygies de M est H -gradué.*

Nous reprenons ci-dessous le résultat principal de [BH].

Soit I un idéal monomial de \mathcal{R} . On note $\mathcal{B} = I + I_{\mathcal{L}}$. La résolution libre \mathbb{F} de \mathcal{R}/\mathcal{B} admet une structure H -graduée et le module F_i se décompose en somme directe $\bigoplus_{\mathbf{h} \in H} \mathcal{R}(-\mathbf{h})^{\beta_{i\mathbf{h}}}$ (ici, les $\beta_{i\mathbf{h}}$ sont les nombres de Betti de \mathcal{R}/\mathcal{B}). Alors, on a :

$$\mathrm{Tor}_i(\mathcal{K}, \mathcal{R}/\mathcal{B}) \cong \bigoplus_{\mathbf{h} \in H} \mathcal{K}(-\mathbf{h})^{\beta_{i\mathbf{h}}}.$$

De plus, la résolution libre minimale de \mathcal{K} sur \mathcal{R} est donnée par le complexe de Koszul $\mathbb{K}(\mathbf{x}, \mathcal{R})$, et comme Tor peut être calculé à partir d'une résolution libre de \mathcal{K} ou de \mathcal{R}/\mathcal{B} , le nombre de Betti $\beta_{i\mathbf{h}}$ est aussi déterminé par le complexe de Koszul. En effet,

$$H_i(\mathbb{K}(\mathbf{x}, \mathcal{R}/\mathcal{B})_{\mathbf{h}}) = \bigoplus_{\mathbf{h} \in H} \mathcal{K}(-\mathbf{h})^{\beta_{i\mathbf{h}}}.$$

Nous calculons le nombre de Betti $\beta_{i\mathbf{h}}$ en utilisant des complexes simpliciaux.

Définition 2.1.2. Pour chaque degré $\mathbf{h} \in H$, nous définissons un complexe simplicial $\Delta_{\mathbf{h}}$ comme suit : un sous-ensemble F de $\{1, 2, \dots, n\}$ est une face de $\Delta_{\mathbf{h}}$ si et seulement s'il existe un élément non-négatif \mathbf{a} dans la classe d'équivalence \mathbf{h} tel que le support $\mathrm{supp}(\mathbf{a}) := \{i : a_i \neq 0\}$ contient F . Le complexe simplicial $\Gamma_{\mathbf{h}}$ est un sous-complexe de $\Delta_{\mathbf{h}}$ défini comme suit :

$$\Gamma_{\mathbf{h}} = \{F \in \Delta_{\mathbf{h}} \text{ tel que } \exists \mathbf{a} \in \mathbf{h}, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{x}^F} \in I\}.$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.3. Soit $\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_{\mathbf{h}}, \mathcal{K})$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma_{\mathbf{h}}, \mathcal{K})$) le complexe d'homologie simpliciale réduite de $\Delta_{\mathbf{h}}$ (resp. de $\Gamma_{\mathbf{h}}$), et $\tilde{H}(\Delta_{\mathbf{h}}, \Gamma_{\mathbf{h}}; \mathcal{K})$ l'homologie relative du couple $(\Delta_{\mathbf{h}}, \Gamma_{\mathbf{h}})$. Alors, nous avons :

1. $\mathbb{K}(\mathbf{x}, \mathcal{R}/\mathcal{B})_{\mathbf{h}} \cong \left(\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_{\mathbf{h}}, \mathcal{K}) / \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma_{\mathbf{h}}, \mathcal{K}) \right) (-1)$.
2. $\beta_{i\mathbf{h}} = \dim_{\mathcal{K}} \tilde{H}_{i-1}(\Delta_{\mathbf{h}}, \Gamma_{\mathbf{h}}; \mathcal{K})$.

Remarquons que dans le cas des idéaux de réseau, $I = (0)$, et le complexe $\Gamma_{\mathbf{h}} = \emptyset$ pour tout $\mathbf{h} \in H$. Donc, le nombre de Betti $\beta_{i\mathbf{h}}$ est $\beta_{i\mathbf{h}} = \dim_{\mathcal{K}} \tilde{H}_{i-1}(\Delta_{\mathbf{h}}; \mathcal{K})$.

Corollaire 2.1.4. Le binôme $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ est un générateur de $I_{\mathcal{L}}$ si et seulement si $\Delta_{\mathbf{h}}$ n'est pas connexe pour $\mathbf{h} = [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$.

Définition 2.1.5. Le plus grand nombre i tel que $\beta_{i\mathbf{h}} \neq 0$ pour un $\mathbf{h} \in H$ est appelé la dimension projective de $\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}}$, noté $\text{projdim}(\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}})$.

La proposition suivante nous donne une borne de la dimension projective de $\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}}$. Cette proposition est fait dans [PS]; on a préféré reprendre ici la preuve.

Proposition 2.1.6.

$$\text{projdim}(\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}}) \leq 2^{\text{codim}(I_{\mathcal{L}})} - 1.$$

PREUVE : Rappelons que \mathcal{L} est de rang r . On a aussi que $r = \text{codim}(I_{\mathcal{L}})$. Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ la base de \mathcal{L} . Supposons que $\text{projdim}(\mathcal{R} / I_{\mathcal{L}}) = l$ et $\mathbf{h} \in H$ tel que $\beta_{l\mathbf{h}} \neq 0$. Remarquons que la classe d'équivalence \mathbf{h} est une translation du réseau \mathcal{L} , donc pour tout élément $\mathbf{a} \in \mathbf{h}$, on peut écrire \mathbf{a} comme :

$$\mathbf{a} = \mathbf{h} + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{Z} \forall i$.

Nous notons mod_2 l'homomorphisme $\mathbb{Z}^r \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

Soient F_1, F_2, \dots, F_s les facettes de $\Delta_{\mathbf{h}}$. Alors, il existe s éléments $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ dans $\mathbf{h} \cap \mathbb{N}^n$ tel que $\text{supp}(\mathbf{a}_i) = F_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, s$. Nous allons démontrer que $s \leq 2^r$.

Supposons au contraire que $s > 2^r$. Dans ce cas, il existe deux éléments \mathbf{a}_i et \mathbf{a}_j tels que

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{h} + \lambda_{1i} \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{ri} \mathbf{v}_r,$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{h} + \lambda_{1j} \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{rj} \mathbf{v}_r,$$

avec $\text{mod}_2(\lambda_{ui}) = \text{mod}_2(\lambda_{uj})$ pour tout $u = 1, 2, \dots, r$. Considerons le point $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j)$. Comme $\frac{1}{2}(\lambda_{ui} + \lambda_{uj}) \in \mathbb{Z}$ pour tout u , on a aussi que $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Il est évident que $\mathbf{b} \in \mathbf{h}$. Ceci implique que $\text{supp}(\mathbf{b})$ est une face de $\Delta_{\mathbf{h}}$. De plus, le support de \mathbf{b} est égal à la union du support de \mathbf{a}_i et le support de \mathbf{a}_j , i.e. $\text{supp}(\mathbf{b}) = F_i \cup F_j$. C'est une contradiction avec la fait que F_i et F_j sont des facettes de $\Delta_{\mathbf{h}}$.

Nous avons donc que le complexe $\Delta_{\mathbf{h}}$ a au plus 2^r facettes. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, nous avons que $\tilde{H}_i(\Delta_{\mathbf{h}}; \mathcal{K}) = 0$ pour tout $i \geq 2^r - 1$. D'où la proposition. \square

Exemple 2.1.7. Considérons l'idéal $I_{\mathcal{L}}$ de définition de la courbe $(x = s^4, y = s^3t, z = st^3, w = t^4)$:

$$I_{\mathcal{L}} = (yz - xw, z^3 - yw^2, y^3 - x^2z, xz^2 - y^2w).$$

Sa résolution libre est :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ w \\ x \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \begin{pmatrix} xz & yw & y^2 & z^2 \\ 0 & -x & 0 & -y \\ -w & 0 & -z & 0 \\ -y & z & -x & w \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \longrightarrow I_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0.$$

– Les monômes

$$xyz^2, y^3w, x^2zw$$

sont tous de même degré $\mathbf{h} = [(1, 1, 2, 0)]$ dans H . Donc $\Delta_{\mathbf{h}}$ est le complexe simplicial :

$$\Delta_{\mathbf{h}} = \text{supp}(xyz) \cup \text{supp}(yw) \cup \text{supp}(xzw),$$

et il est immédiat que $\dim_{\mathcal{K}} \tilde{H}_1(\Delta_{\mathbf{h}}, \emptyset; \mathcal{K}) = 1$. D'où $\beta_{2, \mathbf{h}} = 1$ qui correspond à la première colonne de la matrice des premières syzygies apparaissant ci-dessus.

– Les monômes

$$xyz^3, xy^2w^2, y^3zw, x^2z^2w$$

sont tous de même degré $\mathbf{g} = [(1, 1, 3, 0)] \in H$. Donc $\Delta_{\mathbf{g}}$ est le complexe simplicial :

$$\Delta_{\mathbf{g}} = \text{supp}(xyz) \cup \text{supp}(xyw) \cup \text{supp}(yzw) \cup \text{supp}(xzw)$$

qui n'est autre que la sphère de sommets x, y, z, w , dont nous savons que $\dim_{\mathcal{K}} \tilde{H}_2(\Delta_{\mathbf{g}}, \emptyset; \mathcal{K}) = 1$. D'où $\beta_{3, \mathbf{g}} = 1$ qui correspond exactement à la dernière syzygie apparaissant ci-dessus.

2.1.1 Le cas d'un idéal de réseau de codimension 2

Dans cette partie, nous allons étudier plus en détails les syzygies d'un idéal de réseau de codimension 2.

Soit $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^n$ un réseau positif de dimension 2. Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{Z}^n$ une base de \mathcal{L} . Soit B la matrice dont ses vecteurs colonnes sont \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Posons $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Nous avons $\mathcal{L} = \{B\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2\}$.

Un élément $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ peut être écrit uniquement comme $\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-$, où \mathbf{a}_+ et \mathbf{a}_- sont deux vecteurs dans \mathbb{N}^n et $\text{supp}(\mathbf{a}_+) \cap \text{supp}(\mathbf{a}_-) = \emptyset$.

Soit $I = I_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'idéal de réseau associé à \mathcal{L} , nous avons $I = (\mathbf{x}^{(B\mathbf{u})_+} - \mathbf{x}^{(B\mathbf{u})_-} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2)$.

Une conséquence directe de la proposition 2.1.6 est que $\beta_{i\mathbf{h}} = 0$ pour tout $i \geq 4$ et tout $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n / \mathcal{L}$. De plus, si $\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}}$ a une $i^{\text{ième}}$ syzygie de degré \mathbf{h} , alors la preuve de la proposition 2.1.6 implique aussi que le complexe $\Delta_{\mathbf{h}}$ a deux, ou trois, ou quatre facettes. Pour avoir plus de propriétés de $\Delta_{\mathbf{h}}$, nous considérons d'abord l'ensemble des monômes de même degré \mathbf{h} . Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{h} \cap \mathbb{N}^n$. Considerons le polygône

$$P_{\mathbf{a}} := \text{conv}(\{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid B\mathbf{u} \leq \mathbf{a}\}).$$

Grâce à l'application $P_{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbb{N}^n$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{a} - B\mathbf{u}$, chaque point \mathbf{u} de $P_{\mathbf{a}}$ nous donne un monôme de degré \mathbf{a} . Remarquons que si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux éléments dans \mathbf{h} , alors l'un de $P_{\mathbf{a}}$ et $P_{\mathbf{b}}$ est une translation de l'autre. Nous pouvons donc prendre $P_{\mathbf{h}}$ comme la classe d'équivalence de $P_{\mathbf{a}}$ par la translation. L'ensemble des monômes de degré \mathbf{a} peut être identifié au polygône $P_{\mathbf{h}}$.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.8. [PS] *Supposons que $\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}}$ ne soit pas une intersection complète, et qu'il a une $i^{\text{ième}}$ syzygie de degré \mathbf{h} . Alors, le complexe $\Delta_{\mathbf{h}}$ est équivalent à la sphère \mathbb{S}^{i-1} de dimension $i - 1$, et $P_{\mathbf{h}}$ est primitif (i.e. son intérieur ne contient pas de points entiers).*

Si $i = 1$ alors $P_{\mathbf{h}}$ est un segment; si $i = 2$ alors $P_{\mathbf{h}}$ est un triangle; si $i = 3$ alors $P_{\mathbf{h}}$ est un quadrilatère.

Dans la proposition précédente, quand $i = 2$ nous appelons $P_{\mathbf{h}}$ un *triangle de syzygies*; quand $i = 3$ nous appelons $P_{\mathbf{h}}$ un *quadrilatère de syzygies*.

Dans la suite, nous allons donner une description des générateurs de l'idéal $I_{\mathcal{L}}$. Le cas où $I_{\mathcal{L}}$ est simplicial est traité par Marcel Morales [M1] (ici, "simplicial" veut dire qu'il y a un ensemble des variables qui est un système de paramètres pour I). Dans [PS] est donnée une description dans le cas général.

Définition 2.1.9. Soient $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ les vecteurs lignes de B . Pour un vecteur $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\mathbf{u}^* = (-y, x)$. L'ensemble $\mathbf{G}_{\mathcal{L}}^* = \{\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*\}$ est appelé le *diagramme dual de Gale*. Après re-numérotation des ces vecteurs, nous pouvons supposer qu'on peut les placer dans un plan de façon cyclique, i.e. aucun des vecteurs de $\mathbf{G}_{\mathcal{L}}^*$ n'est dans l'intérieur du cône

$$\text{pos}(\mathbf{b}_i^*, \mathbf{b}_{i+1}^*) = \{\lambda \mathbf{b}_i^* + \mu \mathbf{b}_{i+1}^* : \lambda \geq 0, \mu \geq 0\},$$

où nous avons posé $\mathbf{b}_{n+1}^* = \mathbf{b}_1^*$.

Définition 2.1.10. Soit H_i la base de Hilbert (système de générateurs minimal) du monoïde $\text{pos}(\mathbf{b}_i^*, \mathbf{b}_{i+1}^*) \cap \mathbb{Z}^2$. La *base de Hilbert* de $\mathbf{G}_{\mathcal{L}}^*$ est l'ensemble :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = \{u \in \mathbb{Z}^2; \text{ telle que } u \text{ et } -u \in H_1 \cup \dots \cup H_n\} / \sim,$$

où \sim est l'équivalence donnée par $u \sim -u$.

Théorème 2.1.11. [PS] Pour un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$, $[\mathbf{u}]$ est dans la base de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ si et seulement si $\mathbf{x}^{(B\mathbf{u})+} - \mathbf{x}^{(B\mathbf{u})-}$ fait partie d'une base minimale de $I_{\mathcal{L}}$. De plus, si $I_{\mathcal{L}}$ n'est pas une intersection complète, $I_{\mathcal{L}}$ a un unique système minimal de générateurs (à signe près), qui se trouvent en correspondance biunivoque avec les éléments de $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$.

L'anneau $\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}}$ n'est pas Cohen–Macaulay si et seulement si le nombre de générateurs de $I_{\mathcal{L}}$ est au moins 4. Dans ce cas, un quadrilatère primitif $[0, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}]$ est un quadrilatère de syzygies si et seulement si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ sont dans la base de Hilbert de $I_{\mathcal{L}}$. Ce quadrilatère est noté $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Dans l'ensemble des quadrilatères de syzygies $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, nous allons construire un arbre en définissant des arêtes orientées de $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ à $[\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}]$ et de $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ à $[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}]$. Cet arbre est appelé *arbre d'homologie* de $I_{\mathcal{L}}$, noté $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ (voir [PS]).

A partir de maintenant, nous allons supposer que $\mathcal{R}/I_{\mathcal{L}}$ n'est pas Cohen–Macaulay, donc $I = I_{\mathcal{L}}$ admet un système minimal unique de générateurs binômiaux. Ces générateurs correspondent à la base de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} .

2.2 Graphe associé à un idéal de réseau de codimension 2

2.2.1 Le graphe des syzygies

Dans la suite, nous allons introduire un graphe, noté \mathcal{G} , associé à I .

Rappelons que chaque classe dans la base de Hilbert de I a deux éléments u et $-u$ dans \mathbb{Z}^2 . Par la suite, nous allons noter simplement, sans qu'il y ait d'ambiguïté, la classe de u par u , et cette classe sera vue de façon naturelle comme un vecteur dans \mathbb{Z}^2 .

Soit $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ la base de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$. Le graphe \mathcal{G} est construit comme suit :

- Pour chaque point $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}$, nous aurons un sommet de \mathcal{G} , appelé aussi u .
- Soient u, v deux sommets de \mathcal{G} . Le segment $\langle u, v \rangle$ est une arête de \mathcal{G} si et seulement si les points u, v correspondants dans la base de Hilbert satisfont la condition $|\det(u, v)| = 1$ (i.e. u et v forment une base de \mathbb{Z}^2). Si c'est le cas, nous dirons que u et v sont des *voisins* dans \mathcal{G} .

Définition 2.2.1. Le graphe \mathcal{G} est appelé *le graphe associé à I* .

Par construction, le nombre des sommets de \mathcal{G} est égal au nombre des générateurs m de l'idéal I , et il existe une correspondance naturelle biunivoque entre les sommets de \mathcal{G} et les points dans la base de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$. Donc, nous pouvons considérer la combinaison linéaire $au + bv$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) de deux sommets u, v dans \mathcal{G} comme la combinaison linéaire de deux points dans \mathbb{Z}^2 .

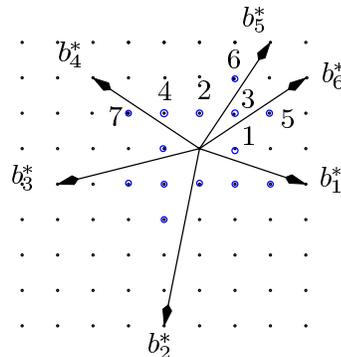
Remarquons que \mathcal{G} ne contient que des points primitifs, c.-à-d. des points dont les coordonnées sont premières entre elles.

Remarque 2.2.2. Soient u, v deux voisins dans \mathcal{G} . Alors il existe au plus deux points $u + v$ et $u - v$ qui peuvent être des voisins à la fois de u et de v . Dans le cas où les deux vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont dans \mathcal{G} , on notera par $[u, v, u + v, u - v]$ le quadrilatère réunion de deux triangles $[u, v, u - v]$ et $[u, v, u + v]$.

Remarque 2.2.3. Pour un degré $\mathbf{h} \in H$ donné, on a vu que chaque syzygie de second ordre est représentée par un quadrilatère, noté $[u, v]$, de l'arbre d'homologie $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ tel que les points $u, v, u + v, u - v$ sont dans la base de Hilbert de I ; et [PS, Corollary 4.7] montre que le nombre de quadrilatères de $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ est $m - 3$. Donc, le nombre de quadrilatères $[u, v, u + v, u - v]$ de \mathcal{G} est au moins $m - 3$. Cependant, la remarque 2.2.2 implique que le nombre de quadrilatères $[u, v, u + v, u - v]$ est au plus $m - 3$. Ainsi, le nombre de quadrilatères $[u, v, u + v, u - v]$ est $m - 3$, et nous avons une correspondance biunivoque entre les quadrilatères $[u, v, u - v, u + v]$ de \mathcal{G} et les quadrilatères de syzygies $[u, v]$. Ceci implique que pour deux voisins u , et v dans \mathcal{G} , au moins $u + v$ ou $u - v$ est dans \mathcal{G} .

Définition 2.2.4. Soient u et v deux voisins dans \mathcal{G} . On dit que $\langle u, v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} si et seulement si seul l'un des deux points $u + v$ et $u - v$ est dans \mathcal{G} , i.e. l'arête $\langle u, v \rangle$ n'appartient qu'à un triangle dans \mathcal{G} .

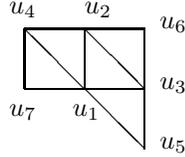
Exemple 2.2.5. Considérons l'idéal $I_{\mathcal{L}} \subset k[a, b, c, d, e, f]$ associé au réseau $\mathcal{L} = \{v_1, v_2\}$, où ${}^t v_1 = (-1, -5, -1, 2, 3, 2)$, et ${}^t v_2 = (-3, 1, 4, 3, -2, -3)$. Le diagramme dual de Gale ainsi que la base de Hilbert sont présentés dans la figure suivante :



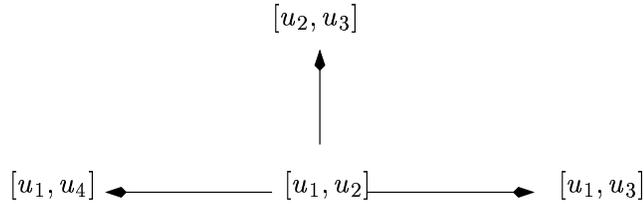
La base de Hilbert de I est donc

$$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, 1), (2, 1), (1, 2), (-2, 1)\}.$$

Donc, le graphe \mathcal{G} est comme suit :



et l'arbre d'homologie est :

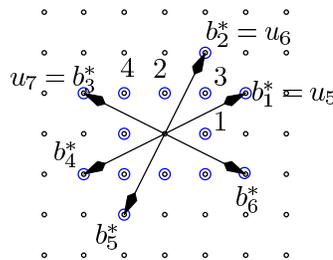


Les générateurs de $I_{\mathcal{L}}$ correspondants à la base de Hilbert sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ab^5c - d^2e^3f^2, & \alpha_2 &= a^3e^2f^3 - bc^4d^3, \\ \alpha_3 &= a^4b^4f - c^3d^5e, & \alpha_4 &= a^2e^5f^5 - b^6c^5d, \\ \alpha_5 &= a^5b^9 - c^2d^7e^4f, & \alpha_6 &= a^7b^3ef^4 - c^7d^8, \\ \alpha_7 &= ade^8f^7 - b^{11}c^6. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.6. Considérons l'idéal $I_{\mathcal{L}} \subset k[a, b, c, d, e, f]$ associé au réseau $\mathcal{L} = \{v_1, v_2\}$, où ${}^t v_1 = (1, 2, 1, -1, -2, -1)$, et ${}^t v_2 = (-2, -1, 2, 2, 1, -2)$. La base de Hilbert de I est aussi

$$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, 1), (2, 1), (1, 2), (-2, 1)\}.$$



Donc, le graphe \mathcal{G} est le même que dans l'exemple précédent.

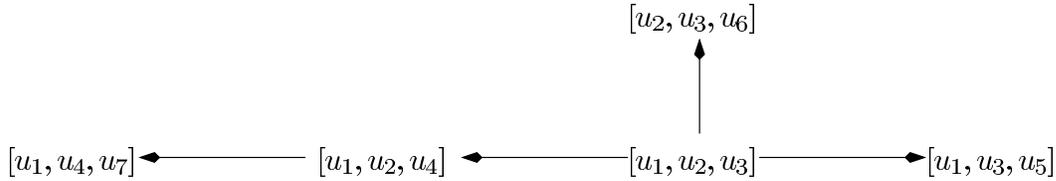
Les générateurs de $I_{\mathcal{L}}$ correspondant à la base de Hilbert sont :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= ab^2c - de^2f, & \alpha_2 &= a^2bf^2 - c^2d^2e, \\ \alpha_3 &= aef^3 - bc^3d, & \alpha_4 &= a^3b^3f - cd^3e^3, \\ \alpha_5 &= b^3c^4 - e^3f^4, & \alpha_6 &= a^3f^5 - c^5d^3, \\ \alpha_7 &= a^4b^5 - d^4e^5.\end{aligned}$$

Ces deux exemples ont la même base de Hilbert, le même graphe des syzygies et le même arbre d'homologie, mais comme nous le verrons plus loin, leurs fibres spéciales sont non isomorphes.

A partir de \mathcal{G} , on construit un graphe \mathcal{T} dont les sommets sont les triangles de \mathcal{G} , et deux sommets de \mathcal{T} sont liés si leurs triangles correspondants ont une arête commune. Remarquons que l'on peut construire \mathcal{T} de l'arbre d'homologie $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ en y ajoutant une feuille. Alors \mathcal{T} est aussi un arbre. Ceci implique que $|\mathcal{G}|$ est contractible, et \mathcal{G} n'a pas de circuit de triangles.

Exemple 2.2.7. L'arbre \mathcal{T} associé au graphe \mathcal{G} dans les exemples 2.2.5 et 2.2.6 est :



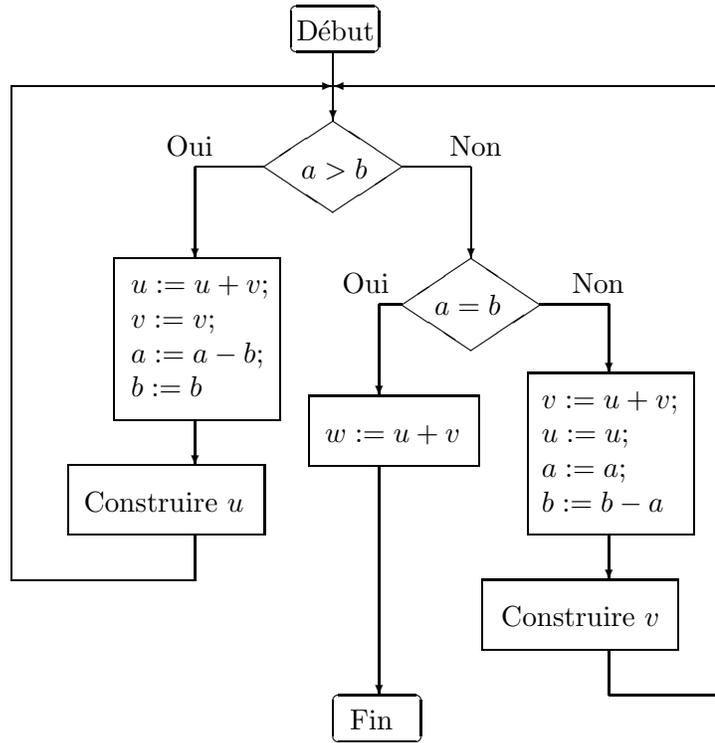
Le complexe simplicial associé à \mathcal{G} , noté $\Delta(\mathcal{G})$, dont les faces maximales sont les sous-ensembles F de l'ensemble des sommets de \mathcal{G} tels que le graphe complet sur F est un sous-graphe de \mathcal{G} , est appelé le *complexe simplicial des syzygies* de I .

Il est facile de calculer le nombre des arêtes et le nombre des triangles de \mathcal{G} , et nous avons que :

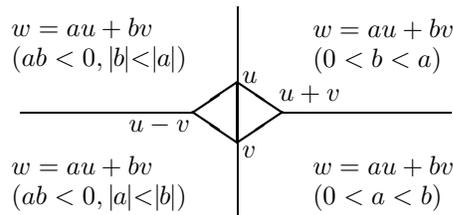
Lemme 2.2.8. *Le graphe \mathcal{G} a $2m - 3$ arêtes et $m - 2$ triangles, et $\Delta(\mathcal{G})$ est "shellable". Donc, l'anneau de Stanley-Reisner de $\Delta(\mathcal{G})$ est Cohen-Macaulay.*

LE CHEMIN EUCLIDIEN : Soient u et v deux voisins dans \mathcal{G} . Comme \mathcal{G} est une chaîne contractible de triangles, pour tout point $w \in \mathcal{G}$ il existe une chaîne qui lie $\langle u, v \rangle$ et w , et donc il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $w = au + bv$.

Puis, comme \mathcal{G} n'a pas de circuit de triangles, cette chaîne est unique. Nous pouvons l'obtenir en utilisant l'algorithme d'Euclide pour calculer le p.g.c.d de a et b . Dans le diagramme suivant, on donne un algorithme pour construire la chaîne dans le cas où $a, b \geq 0$. Les autres cas sont déduits de ce cas en changeant le signe de u ou de v , sans changer la géométrie de \mathcal{G} .



Remarque 2.2.9. Le graphe planaire \mathcal{G} est divisé en quatre parties comme dans la figure suivante :



Nous en déduisons que pour chaque arête $\langle u, v \rangle$, s'il existe un point $w = au + bv \in \mathcal{G}$ avec $ab > 0$ (resp. $ab < 0$), alors le point $u + v$ (resp. $u - v$) est dans \mathcal{G} .

Remarque 2.2.10. Le dessin dessus prouve également que \mathcal{T} est un arbre.

2.2.2 Graphe des syzygies, point de vue algébrique

Maintenant, nous étudions algébriquement le graphe \mathcal{G} . Soit $\langle u, v \rangle$ une arête dans \mathcal{G} . Notons f_u et f_v générateurs correspondants à u et v . Nous avons :

$$\begin{aligned} f_u &= x^p x^t x^{\mu+} - x^r x^s x^{\mu-}, \\ f_v &= x^p x^s x^{\nu+} - x^r x^t x^{\nu-}, \end{aligned} \quad (\dagger)$$

avec

x^p le p.g.c.d du premier terme de f_u et du premier terme de f_v ,

x^t le p.g.c.d du premier terme de f_u et du deuxième terme de f_v ,

x^r le p.g.c.d du deuxième terme de f_u et du deuxième terme de f_v ,

x^s le p.g.c.d du deuxième terme de f_u et du premier terme de f_v .

Remarque 2.2.11. – Les monômes x^p, x^t, x^r, x^s sont premiers entre eux, et les supports de p, t, r, s sont disjoints.

– Les monômes $x^{\mu+}, x^{\mu-}, x^{\nu+}, x^{\nu-}$ sont premiers entre eux, et les supports de $\mu_+, \mu_-, \nu_+, \nu_-$ sont disjoints.

Notation 2.2.12. Pour éviter toute ambiguïté, utilisons les notations plus précises :

$$T(u, v) := p.g.c.d(x^{(Bu)_+}, x^{(Bv)_-})$$

$$S(u, v) := p.g.c.d(x^{(Bu)_-}, x^{(Bv)_+})$$

$$P(u, v) := p.g.c.d(x^{(Bu)_+}, x^{(Bv)_+})$$

$$R(u, v) := p.g.c.d(x^{(Bu)_-}, x^{(Bv)_-}).$$

Lemme 2.2.13. Soit u un point primitif dans \mathbb{Z}^2 . Si u n'est pas dans \mathcal{G} , alors le binôme $f_u = x^{Bu_+} - x^{Bu_-}$ correspondant à u est dans l'idéal $\mathfrak{m}I$, où $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'idéal maximal irrelevant de \mathcal{R} .

PREUVE : C'est une conséquence directe du fait que I est un idéal gradué et que I a un système minimal unique de générateurs binômiaux correspondant à la base de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$. \square

Remarque 2.2.14. Avec les notations définies dans (\dagger) , nous avons des représentations des générateurs correspondant à $u + v$ et à $u - v$ comme suit :

$$\begin{aligned} f_{u+v} &= x^{2p} x^{\mu+} x^{\nu+} - x^{2r} x^{\mu-} x^{\nu-} \\ f_{u-v} &= x^{2t} x^{\mu+} x^{\nu-} - x^{2s} x^{\mu-} x^{\nu+} \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

De plus, si $[u, v, u + v, u - v]$ est un quadrilatère de \mathcal{G} , i.e $[u, v]$ est un quadrilatère de syzygies de I , alors la résolution libre minimale est (voir Construction 5.2 dans [PS]) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \begin{pmatrix} -x^s \\ x^t \\ x^r \\ -x^p \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \begin{pmatrix} x^{\nu+}x^p & x^{\nu-}x^r & -x^{\nu-}x^t & -x^{\nu+}x^s \\ x^{\mu-}x^r & x^{\mu+}x^p & x^{\mu-}x^s & x^{\mu+}x^t \\ -x^t & -x^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^p & x^r \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \begin{pmatrix} f_u & f_v & f_{u+v} & f_{u-v} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Lemme 2.2.15. *Soient u et v deux voisins dans le graphe \mathcal{G} . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\langle u, v \rangle$ n'est pas sur le bord de \mathcal{G} .
2. Dans (\dagger) , les termes x^p , x^t , x^r , x^s sont dans \mathfrak{m} , et les supports de p , t , r , s sont disjoints.

Autrement dit, l'arête $\langle u, v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} si et seulement si $x^p = 1$, ou $x^r = 1$, ou $x^t = 1$, ou $x^s = 1$.

PREUVE : Remarquons que $\langle u, v \rangle$ n'est pas sur le bord de \mathcal{G} si et seulement si $u+v$ et $u-v$ sont dans \mathcal{G} . Donc le quadrilatère primitif $Q = [u, v] \in \mathbb{Z}^2$ est un quadrilatère de syzygies et l'implication (\Rightarrow) suit du Corollaire 4.3 de [PS]. En fait, les monômes $m_1 = x^{\mu+}x^{\nu+}x^{2p}x^s x^t$, $m_2 = x^{\mu-}x^{\nu+}x^p x^r x^{2s}$, $m_3 = x^{\mu+}x^{\nu-}x^p x^r x^{2t}$, et $m_4 = x^{\mu-}x^{\nu-}x^{2r}x^s x^t$ sont de même degré $C = \mu_+ + \nu_+ + 2p + s + t \in \mathbb{Z}/\mathcal{L}$. En effet, nous avons $\frac{m_2}{m_1} = -Bu$, $\frac{m_3}{m_1} = -Bv$, $\frac{m_4}{m_1} = -B(u+v)$, et Δ_C est le complexe simplicial dont les facettes (i.e. les faces maximales) sont les supports des monômes m_1 , m_2 , m_3 , et m_4 .

(\Leftarrow) Selon l'exactitude du complexe présentée dans la remarque 2.2.14, si l'un des quatre monômes $\{x^p, x^r, x^t, x^s\}$ est une unité, alors soit f_{u+v} ou soit f_{u-v} engendré par f_u et f_v . Donc, $u+v$ ou $u-v$ n'est pas dans la base de Hilbert de I , i.e. $\langle u, v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} .

Le lemme est prouvé. □

Chapitre 3

Fibre spéciale d'idéal de réseau de codimension deux

3.1 Anneau de Rees, fibre spéciale, relation de Plücker

Dans cette section nous allons étudier l'algèbre de Rees et la fibre spéciale d'un idéal de réseau de codimension deux. Nous allons mettre en évidence quelques éléments de l'idéal de présentation de l'algèbre de Rees ; pour cela, nous aurons besoin des relations de Plücker. D'abord, nous considérerons le cas où l'idéal I est engendré par trois ou quatre éléments, dans lequel nous pouvons décrire l'algèbre de Rees et la fibre spéciale par générateurs et relations, ainsi que l'algèbre symétrique. Ensuite, nous traiterons le cas général ; nous décrirons la fibre spéciale par générateurs et relations, et trouverons des propriétés de l'algèbre de Rees.

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'anneau de polynômes sur le corps \mathcal{K} . Soit I un idéal engendré minimalement par m éléments $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$.

Définition 3.1.1. L'*anneau de Rees* de I est l'anneau gradué

$$\mathcal{R}[It] = \bigoplus_{k \geq 0} I^k t^k.$$

La *fibre spéciale* $\mathcal{F}(I)$ de I est le quotient $\mathcal{R}[It]/\mathfrak{m}\mathcal{R}[It]$, avec \mathfrak{m} l'idéal maximal irrélevant de \mathcal{R} .

La dimension de la fibre spéciale est appelée "*l'analytic spread*" de I .

Introduisons m variables indépendantes sur \mathcal{R} , appelées $\{T_i\}_{1 \leq i \leq m}$, et

considérons l'idéal $\mathcal{J} = \ker \pi$, où

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}[\mathbf{T}] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{R}[It] \longrightarrow 0 \\ T_i & \longrightarrow & f_i t \end{array} .$$

On obtient une présentation $\mathcal{R}[It] \simeq \mathcal{R}[\mathbf{T}]/\mathcal{J}$ de l'anneau de Rees.

De la présentation de l'anneau de Rees on déduit une présentation de la fibre spéciale $\mathcal{F}(I) \simeq \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{J}}$, où $\tilde{\mathcal{J}}$ est l'image de \mathcal{J} modulo $\mathfrak{m}\mathcal{R}[\mathbf{T}]$.

Par conséquent, toute relation entre les générateurs $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$, de I à coefficients dans l'anneau $\mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ donne un élément de \mathcal{J} , et la même relation modulo \mathfrak{m} donne un élément de $\tilde{\mathcal{J}}$.

Notons $\mathcal{J}(1)$ l'ensemble des relations linéaires entre les générateurs $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$ de I , i.e. les premières syzygies de I . L'algèbre symétrique de I est par définition $\text{Sym}(I) = \mathcal{R}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{J}(1)$.

Considérons une matrice 2×4 à coefficients dans un anneau commutatif quelconque et notons par $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la sous-matrice formée des colonnes i, j , alors nous avons la *relation de Plücker* :

$$\Delta_{1,2}\Delta_{3,4} - \Delta_{1,3}\Delta_{2,4} + \Delta_{1,4}\Delta_{2,3} = 0.$$

3.2 Idéaux binômiaux à trois ou quatre générateurs

Nous allons étudier dans cette section, l'anneau de Rees et l'algèbre symétrique pour une classe d'idéaux binômiaux engendrés par quatre éléments. Les idéaux de réseau feront partie de cette classe.

Soit f_u et f_v deux binômes quelconques dans l'anneau de polynômes $\mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, tels que le p.g.c.d des deux termes de chaque binôme est 1. Notons

- x^p le p.g.c.d du premier terme de f_u et du premier terme de f_v ;
- x^t le p.g.c.d du premier terme de f_u et du deuxième terme de f_v ;
- x^r le p.g.c.d du deuxième terme de f_u et du deuxième terme de f_v ;
- x^s le p.g.c.d du deuxième terme de f_u et du premier terme de f_v .

Nous avons :

$$\begin{aligned} f_u &= \alpha_1 x^p x^t x^{\mu+} - \beta_1 x^r x^s x^{\mu-} \\ f_v &= \alpha_2 x^p x^s x^{\nu+} - \beta_2 x^r x^t x^{\nu-} \end{aligned} \quad (\dagger)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des éléments non nuls dans le corps \mathcal{K} .

Remarque 3.2.1. La remarque 2.2.11 est valable aussi dans ce cas. Plus précisément, nous avons :

- Les monômes x^p, x^t, x^r, x^s sont premiers entre eux, et les supports de p, t, r, s sont disjoints.
- Les monômes $x^{\mu+}, x^{\mu-}, x^{\nu+}, x^{\nu-}$ sont premiers entre eux, et les supports de $\mu+, \mu-, \nu+, \nu-$ sont disjoints.
- $(x^t, x^{\mu-}) = (x^t, x^{\nu+}) = 1$, et $(x^s, x^{\mu+}) = (x^s, x^{\nu-}) = 1$, et $(x^p, x^{\mu-}) = (x^p, x^{\nu-}) = 1$, et $(x^r, x^{\mu+}) = (x^r, x^{\nu+}) = 1$.

Considérons deux nouveaux binômes, notés f_{u+v} et f_{u-v} , obtenus de f_u et de f_v comme suit :

$$\begin{aligned} f_{u+v} &= \alpha_1 \alpha_2 x^{2p} x^{\mu+} x^{\nu+} - \beta_1 \beta_2 x^{2r} x^{\mu-} x^{\nu-} \\ f_{u-v} &= \alpha_1 \beta_2 x^{2t} x^{\mu+} x^{\nu-} - \alpha_2 \beta_1 x^{2s} x^{\mu-} x^{\nu+} . \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

Considérons l'idéal $I = (f_u, f_v, f_{u+v}, f_{u-v})$. Dans la suite, nous allons décrire explicitement l'anneau de Rees et l'algèbre de symétrie de I .

3.2.1 Idéaux binômiaux à trois générateurs

Proposition 3.2.2. *Si l'un dans quatre termes x^p, x^t, x^r, x^s est une unité, alors I est de codimension 2, et soit I est une intersection complète (i.e. I est engendré par deux éléments) soit I est une intersection presque complète (i.e. I est engendré par trois éléments). Dans tous les cas, l'anneau de Rees et l'algèbre symétrique sont isomorphes.*

PREUVE : Supposons que l'un des quatre termes x^p, x^t, x^r, x^s est une unité. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $x^p = 1$. Dans ce cas, nous avons $f_{u-v} = \beta_2 x^{\nu-} x^t f_u - \beta_1 x^{\mu-} x^s f_v$, et I devient l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \beta_2 x^{\nu-} x^r & -\alpha_2 x^{\nu+} \\ \alpha_1 x^{\mu+} & -\beta_1 x^{\mu-} x^r \\ -x^s & x^t \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc les relations suivantes :

$$\beta_2 x^{\nu-} x^r f_u + \alpha_1 x^{\mu+} f_v - x^s f_{u+v} = 0,$$

$$\alpha_2 x^{\nu+} f_u + \beta_1 x^{\mu-} x^r f_v - x^t f_{u+v} = 0.$$

Remarquons que si de plus $x^s = 1$ ou $x^t = 1$, alors I est une intersection complète, engendrée par f_u et f_v . D'où $\mathcal{R}(I) = \text{Sym}(I) = \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/(f_u T_v - f_v T_u)$.

Considérons le cas où x^s et x^t ne sont pas des unités. Dans ce cas, l'anneau \mathcal{R}/I est Cohen-Macaulay de codimension deux par le théorème de Burch. Posons

$$\begin{aligned} L_1 &= \beta_2 x^{\nu^-} x^r T_u + \alpha_1 x^{\mu^+} T_v - x^s T_{u+v}, \\ L_2 &= \alpha_2 x^{\nu^+} T_u + \beta_1 x^{\mu^-} x^r T_v - x^t T_{u+v}. \end{aligned}$$

Nous avons que L_1 et L_2 sont les premières syzygies de I , d'où $\text{Sym}(I) = \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/(L_1, L_2)$; et L_1 et L_2 sont dans l'idéal de présentation \mathcal{J} de l'anneau de Rees de I . Notons \mathcal{A} l'idéal (L_1, L_2) . Remarquons de plus, que L_1, L_2 est une suite régulière dans $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]$, car s'il y avait une relation non triviale : $PL_1 + QL_2 = 0$, cela donnerait une seconde syzygie pour I , ce qui est impossible par le théorème de Burch. Donc $\text{codim}(\mathcal{A}) = \text{codim}(\mathcal{J}) = 2$, et l'idéal \mathcal{A} n'a pas de composantes primaires immergées.

Nous allons prouver que \mathcal{A} n'est pas contenu dans l'idéal (x^t, x^s) . Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathcal{A} \subset (x^t, x^s)$. Notons x^{t_1} le p.g.c.d. de x^t et de x^{ν^-} , et notons x^{t_2} le p.g.c.d. de x^t et x^{μ^+} . Comme x^{μ^+} et x^{ν^-} sont premiers entre eux, les termes x^{t_1} et x^{t_2} le sont aussi. Écrivons $x^{t_3} = \frac{x^t}{x^{t_1} x^{t_2}}$, $x^{\nu^-} = \frac{x^{\nu^-}}{x^{t_1}}$, $x^{\mu^+} = \frac{x^{\mu^+}}{x^{t_2}}$. Comme $L_1 \in (x^t, x^s)$, nous avons :

$$\beta_2 x^{\nu^-} x^{t_1} x^r T_u = -\alpha_1 x^{\mu^+} x^{t_2} T_v + ax^s + bx^{t_1} x^{t_2} x^{t_3},$$

avec certains $a, b \in \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]$. Si $x^{t_1} \neq 1$, alors en annulant 0 toutes les variables dans x^{t_1} et toutes celles dans x^s , nous avons $-\alpha_1 x^{\mu^+} x^{t_2} T_v = 0$. C'est une contradiction. Donc $x^{t_1} = 1$. De même, nous avons $x^{t_2} = 1$. Ceci implique que x^{μ^+} , x^{ν^-} , x^t sont premiers entre eux. De plus, en annulant toutes les variables dans le monôme x^t et toutes celles dans x^s , on obtient $\beta_2 x^{\nu^-} x^r T_u = -\alpha_1 x^{\mu^+} T_v$. Or les deux termes de ce binôme sont premiers entre eux; nous avons une contradiction. D'où l'affirmation.

Considérons un idéal premier minimal \mathfrak{p} de \mathcal{A} . Nous avons $\mathfrak{p} \not\subseteq (x^t, x^s)$. Supposons que $x^s \notin \mathfrak{p}$. Après localisé en \mathfrak{p} , x^s devient une unité. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{J}_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, $\mathcal{A} = \mathcal{J}$. \square

3.2.2 Idéaux binômiaux à quatre générateurs

Dès maintenant, nous supposons que x^p , x^r , x^t , x^s ne sont pas des unités, et donc I est minimalement engendré par quatre éléments $(f_u, f_v, f_{u+v}, f_{u-v})$.

Considérons la suite suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \begin{pmatrix} -x^s \\ x^t \\ x^r \\ -x^p \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \begin{pmatrix} \alpha_2 x^{\nu+} x^p & \beta_2 x^{\nu-} x^r & -\beta_2 x^{\nu-} x^t & -\alpha_2 x^{\nu+} x^s \\ \beta_1 x^{\mu-} x^r & \alpha_1 x^{\mu+} x^p & \beta_1 x^{\mu-} x^s & \alpha_1 x^{\mu+} x^t \\ -x^t & -x^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^p & x^r \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{R}^4 \xrightarrow{I} \mathcal{R}.$$

Il est facile de vérifier que cette suite est exacte (voir par exemple [BE2]). Donc c'est une résolution libre minimale de I .

La première matrice de syzygies nous donne les relations de l'idéal \mathcal{J} :

$$\begin{aligned} L_1 &:= \alpha_2 x^{\nu+} x^p T_u + \beta_1 x^{\mu-} x^r T_v - x^t T_{u+v}, \\ L_2 &:= \beta_2 x^{\nu-} x^r T_u + \alpha_1 x^{\mu+} x^p T_v - x^s T_{u+v}, \\ L_3 &:= -\beta_2 x^{\nu-} x^t T_u + \beta_1 x^{\mu-} x^s T_v + x^p T_{u-v}, \\ L_4 &:= -\alpha_2 x^{\nu+} x^s T_u + \alpha_1 x^{\mu+} x^t T_v + x^r T_{u-v}. \end{aligned}$$

De plus, en calculant la relation de Plücker de la matrice

$$\begin{pmatrix} x^p & \beta_1 x^s x^{\mu-} & \beta_2 x^t x^{\nu-} & \beta_1 \beta_2 x^r x^{\mu-} x^{\nu-} \\ x^r & \alpha_1 x^t x^{\mu+} & \alpha_2 x^s x^{\nu+} & \alpha_1 \alpha_2 x^p x^{\mu+} x^{\nu+} \end{pmatrix},$$

nous obtenons $\alpha_2 \beta_2 x^{\nu+} x^{\nu-} f_u^2 - \alpha_1 \beta_1 x^{\mu+} x^{\mu-} f_v^2 - f_{u+v} f_{u-v} = 0$. Ainsi, nous avons que

$$Q := \alpha_2 \beta_2 x^{\nu+} x^{\nu-} T_u^2 - \alpha_1 \beta_1 x^{\mu+} x^{\mu-} T_v^2 - T_{u+v} T_{u-v}$$

est aussi dans \mathcal{J} .

Théorème 3.2.3. *L'anneau de Rees $\mathcal{R}(I)$ est égal à $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/(L_1, L_2, L_3, L_4, Q)$, i.e.*

$$\mathcal{J} = (L_1, L_2, L_3, L_4, Q).$$

Pour démontrer ce théorème, nous considérons d'abord l'idéal $\mathcal{A} = (L_1, L_2, L_3, L_4, Q)$. Nous allons trouver quelques propriétés de \mathcal{A} , et puis nous démontrerons que $\mathcal{A} = \mathcal{J}$.

Remarquons que

$$x^s L_1 - x^t L_2 = x^r L_3 - x^p L_4 = f_v T_u - f_u T_v.$$

Donc, le polynôme $f_v T_u - f_u T_v$ est dans \mathcal{A} . Posons $L_5 = f_v T_u - f_u T_v$.

Lemme 3.2.4. *L'ensemble $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, Q\}$ est une base de Gröbner de \mathcal{A} , par rapport à l'ordre lexicographique $<$:*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < T_u < T_v < T_{u-v} < T_{u+v}.$$

PREUVE : Avec cet ordre $<$, les termes dominants sont $in(Q) = T_{u+v}T_{u-v}$, $in(L_1) = x^tT_{u+v}$, $in(L_2) = x^sT_{u+v}$, $in(L_3) = x^pT_{u-v}$, $in(L_4) = x^rT_{u-v}$ et $in(L_5) = in(f_u)T_v$. Il est facile de voir que $F, G \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, Q\}$, et que le terme $s(F, G) := \frac{in(F)G - in(G)F}{p.g.c.d.(in(F), in(G))}$ est dans $\mathcal{A} = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, Q)$. Selon l'algorithme de Buchberger, il découle que $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, Q\}$ est une base de Gröbner de \mathcal{A} . \square

Proposition 3.2.5. *L'anneau $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}$ est Gorenstein de codimension 3.*

PREUVE : Rappelons que n est le nombre de variables de l'anneau de polynômes \mathcal{R} . Comme l'anneau de Rees $\mathcal{R}(I) = \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{J}$ est de dimension $n + 1$, nous avons :

$$codim(\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{J}) = (n + 4) - (n + 1) = 3.$$

Or, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{J} \longrightarrow 0$$

est exacte. On en déduit que $codim(\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}) \leq 3$.

Cependant, $in(L_5) = in(f_u)T_v$ est le terme dominant de $\alpha_1 x^p x^t x^{\mu+} T_v - \beta_1 x^r x^s x^{\mu-} T_v$. Supposons que $in(L_5) = x^p x^t x^{\mu+} T_v$. Les monômes $x^s T_{u+v}$, $x^r T_{u-v}$ et $x^p x^t x^{\mu+} T_v$ forment une suite régulière de l'idéal initial $in(\mathcal{A})$, car ce sont des monômes à support disjoints (c.f. 3.2.1). De même, si $in(L_5) = x^r x^s x^{\mu-} T_v$, l'ensemble $\{x^t T_{u+v}, x^p T_{u-v}, x^r x^s x^{\mu-} T_v\}$ forme une suite régulière de l'idéal initial $in(\mathcal{A})$. Dans tous les cas nous avons que

$$codim(\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/in(\mathcal{A})) \geq 3,$$

et la codimension de $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}$ l'est aussi.

Nous avons donc $codim(\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}) = 3$.

De plus, c'est facile de vérifier que \mathcal{A} est engendré par les Pfaffians 4×4 de la matrice 5×5 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -T_{u+v} & \beta_1 x^{\mu-} T_v & -\beta_2 x^{\nu-} T_u & x^p \\ T_{u+v} & 0 & \alpha_2 x^{\nu+} T_u & -\alpha_1 x^{\mu+} T_v & -x^r \\ -\beta_1 x^{\mu-} T_v & -\alpha_2 x^{\nu+} T_u & 0 & -T_{u-v} & x^t \\ \beta_2 x^{\nu-} T_u & \alpha_1 x^{\mu+} T_v & T_{u-v} & 0 & -x^s \\ -x^p & x^r & -x^t & x^s & 0 \end{pmatrix}.$$

Dû à [BE1], nous avons $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}$ est Gorenstein. \square

Par conséquent, nous avons :

Corollaire 3.2.6. *\mathcal{A} n'a pas de composantes primaires immergées. Plus précisément, toute composante primaire \mathfrak{q} de \mathcal{A} est de hauteur 3.*

Maintenant, nous allons prouver le théorème 3.2.3. Remarquons que la [EH, Proposition 2.9] ne s'applique pas ici .

La démonstration du Théorème 3.2.3 :

Le théorème sera prouvé si l'on peut démontrer que les localisations de \mathcal{A} et de \mathcal{J} en un idéal premier quelconque \mathfrak{p} coïncident. Soit \mathfrak{p} un idéal premier associé à \mathcal{A} . Il suffit de prouver que $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{J}_{\mathfrak{p}}$. L'idéal (x^p, x^t, x^r, x^s) est de hauteur 4 dans $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]$ car x^p, x^t, x^r, x^s ne sont pas des unités et premiers entre eux. Rappelons que la hauteur de toute composante primaire \mathfrak{p} de \mathcal{A} est 3. On en déduit que $\mathfrak{p} \not\supseteq (x^p, x^t, x^r, x^s)$. Le fait que $ht(x^p, x^t, x^r, x^s) = 4$ implique ainsi que l'un de ces quatre monômes est un non zéro-diviseur dans $\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/\mathcal{A}$. Supposons que x^s l'est. On a donc $x^s \notin \mathfrak{p}$. Après localisant à \mathfrak{p} , le terme x^s devient une unité. Or on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x^s L_1 &= x^t L_2 + x^r L_3 - x^p L_4, \\ x^s Q &= T_{u-v} L_2 - x^{\mu+} T_v L_3 - x^{\nu-} T_u L_4. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} = (L_2, L_3, L_4)_{\mathfrak{p}}$, et

$$(\mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/(L_2, L_3, L_4))_{(x^s)} \cong (\mathcal{K}[\mathbf{x}, T_u, T_v, T_{u-v}]/(L_3, L_4))_{(x^s)}. \quad (*)$$

Puis, considérons l'idéal $I' := (f_u, f_v, f_{u-v})$. Puisque I' est engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\alpha_2 x^{\nu+} x^s & -\beta_2 x^{\nu-} x^t \\ \alpha_1 x^{\mu+} x^t & \beta_1 x^{\mu-} x^s \\ x^r & x^p \end{pmatrix},$$

on a I' est Cohen–Macaulay de codimension 2. D'après la proposition 3.2.2, l'anneau de Rees et l'algèbre symétrique sont isomorphes :

$$\text{Sym}(I') \cong \mathcal{R}(I') =: \mathcal{K}[\mathbf{x}, T_u, T_v, T_{u-v}]/\mathcal{J}'.$$

Remarquons que $\text{Sym}(I') = \mathcal{K}[\mathbf{x}, T_u, T_v, T_{u-v}]/(L_3, L_4)$. On obtient que $(L_3, L_4) = \mathcal{J}'$. Ainsi, l'idéal (L_3, L_4) est premier dans $\mathcal{K}[\mathbf{x}, T_u, T_v, T_{u-v}]$. Donc (*) implique que $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ est premier. Comme $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{J}_{\mathfrak{p}}$ sont des idéaux premiers de même codimension, et $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{J}_{\mathfrak{p}}$, ils coïncident. \square

Corollaire 3.2.7. “L’analytic spread” de I est 3, et la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$ est

$$\mathcal{F}(I) = \mathcal{K}[T_u, T_v, T_{u+v}, T_{u-v}]/(\tilde{Q}),$$

où \tilde{Q} est l’image modulo \mathfrak{m} de Q .

Remarque 3.2.8. Des résultats similaires à la proposition suivante apparaissent dans [Va], et dans [HRZ], mais notre preuve est directe, sans aucune hypothèse sur \mathcal{K} .

Exemple 3.2.9. Dans \mathbb{Z}^4 , considérons le réseau

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

engendré par deux vecteurs $u = (2, 2, -2, -2)$, et $v = (4, 0, -3, -1)$. L’idéal $I_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{K}[x, y, z, w]$ associé à ce réseau est de codimension 2.

Dans la section suivante, on étudie les idéaux radicaux de réseau de codimension 2 dans le cas où le corps \mathcal{K} est infini, et on prouve que ses anneaux de Rees sont Cohen-Macaulay et engendrés par des formes de degré 2 au plus, et “l’analytic spread” est 3.

Dans cet exemple, grâce au théorème 3.2.3, nous avons toujours que “l’analytic spread” de $I_{\mathcal{L}}$ est 3 indépendamment de la caractéristique et du cardinal de \mathcal{K} , et même dans le cas où $I_{\mathcal{L}}$ n’est pas radical. En fait, si $\text{char}(\mathcal{K}) = 2$, alors $\sqrt{I_{\mathcal{L}}} = I_{\mathcal{L}_{\text{sat}}}$, où le dernier est l’idéal de réseau associé au réseau saturé \mathcal{L}_{sat} de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_{\text{sat}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, l’idéal $I_{\mathcal{L}_{\text{sat}}}$ est l’idéal de définition de la courbe (s^4, s^3t, st^3, t^4) , et

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{L}_{\text{sat}}} &= (yz - xw, z^3 - yw^2, y^3 - x^2z, xz^2 - y^2w). \\ I_{\mathcal{L}} &= (xz^2 - y^2w, y^2z^2 - x^2w^2, z^4 - xw^3, y^4 - x^3w). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 3.2.3, on obtient en toute caractéristique et sans conditions sur le corps \mathcal{K} que

$$\mathcal{R}(I) = \mathcal{K}[x, y, z, t, T_1, T_2, T_3, T_4]/\mathcal{J},$$

où l’idéal \mathcal{J} est engendré par

$$z^2T_1 + wT_2 + xT_3, y^2T_1 + xT_2 + wT_4,$$

$$\begin{aligned} & xw^2T_1 + z^2T_2 + y^2T_3, \\ & x^2wT_1 + y^2T_2 + z^2T_4, \\ & xwT_1^2 + T_2^2 + T_3T_4. \end{aligned}$$

Il découle que

$$\mathcal{F}(I) = \mathcal{K}[T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_2^2 + T_3T_4).$$

3.2.3 Algèbre symétrique

Nous savons que l'algèbre symétrique de I est

$$\text{Sym}(I) = k[\mathbf{x}, \mathbf{T}]/(L_1, L_2, L_3, L_4).$$

Notons $\mathcal{J}(1)$ l'idéal de présentation (L_1, L_2, L_3, L_4) de $\text{Sym}(I)$. Remarquons que $\mathcal{J}(1) \subset \mathcal{J} \cap (x^p, x^t, x^r, x^s)$. Le but de cette section est de prouver l'égalité.

Théorème 3.2.10. *L'idéal de présentation de l'algèbre symétrique de I admet une décomposition primaire comme suit :*

$$\mathcal{J}(1) = \mathcal{J} \cap (x^p, x^t, x^r, x^s).$$

En particulier, nous avons $\dim(\text{Sym}(I)) = n + 1 = \dim(\mathcal{R}(I))$.

PREUVE : Il suffit de prouver que $(x^p, x^t, x^r, x^s) \cap (Q) \subset (L_1, L_2, L_3, L_4)$.

Choisissons un élément quelconque $a \in k[\mathbf{x}, \mathbf{T}]$ tel que $aQ \in (x^p, x^t, x^r, x^s)$. Nous avons

$$\begin{aligned} aQ &= a_p x^p + a_t x^t + a_s x^s + a_r x^r \text{ avec } a_p, a_t, a_r, a_s \in k[\mathbf{x}, \mathbf{T}]. \\ \iff aQ - a_p x^p - a_t x^t - a_s x^s - a_r x^r &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Considérons l'idéal $\mathfrak{a} = (Q, x^p, x^t, x^r, x^s)$. Il est facile de vérifier que $\{Q, x^p, x^t, x^r, x^s\}$ est une base de Gröbner par rapport à l'ordre $<$ défini dans la section 2 de \mathfrak{a} . Alors $(*)$ est un syzygies de \mathfrak{a} . Du fait que $\text{in}(Q)$, x^p , x^t , x^r et x^s sont premiers entre eux et de l'algorithme de Buchberger, on déduit que $a \in (x^p, x^t, x^r, x^s)$. C'est à dire $a = b_p x^p + b_t x^t + b_s x^s + b_r x^r$ avec $b_p, b_t, b_r, b_s \in k[\mathbf{x}, \mathbf{T}]$. Considérons le terme $x^p Q$:

$$\begin{aligned} x^p Q &= x^p(\alpha_2 \beta_2 x^{\nu+} x^{\nu-} T_u^2 - \alpha_1 \beta_1 x^{\mu+} x^{\mu-} T_v^2 - T_{u+v} T_{u-v}) \\ &= -T_{u+v} L_3 - x^{\mu-} T_v L_2 + x^{\nu-} T_u L_1 \end{aligned}$$

Alors $x^p Q$ est dans (L_1, L_2, L_3, L_4) .

Pour $x^r Q$, $x^t Q$, et $x^s Q$, nous obtenons des situations similaires. Ainsi $aQ \in (L_1, L_2, L_3, L_4)$. Ceci implique que

$$(x^p, x^t, x^r, x^s) \cap (Q) \subset (L_1, L_2, L_3, L_4).$$

□

3.3 Relations quadratiques dans l'anneau de Rees

Le cas où \mathcal{G} n'a que quatre sommets a été traité dans la section précédente. Ici, nous allons traiter le cas général.

Dans cette section, nous considérons une arête $\langle u, v \rangle$ qui n'est pas sur le bord de \mathcal{G} , et $w = au + bv$ un sommet de \mathcal{G} . Nous allons construire des relations quadratiques entre f_u, f_v et f_w .

Remarquons qu'il suffit de considérer le cas où $0 < a \leq b$. Les autres cas sont déduits de ce cas en changeant le rôle de u par v ou en changeant le signe de u ou de v . A partir de maintenant, dans cette section, nous supposons que $0 < a \leq b$.

Dans [GMS, Prop 4.1], il a été établi qu'il existe une matrice 2×4 telle que f_u, f_v, f_{w-u}, f_w apparaissent comme les mineurs 2×2 de cette matrice, puis en prenant la relation de Plücker, les auteurs obtiennent la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. [GMS, Prop 4.1] *Il existe une relation quadratique :*

$$(3.1) \quad G_{[u \ v \ (u-v) \ w]} := Qf_u f_{w-v} - Pf_v f_{w-u} - f_{u-v} f_w = 0,$$

où P et Q sont des monômes dans S :

$$P = \frac{p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a+1)t}x^{\mu_+})}{p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t})} \times \frac{p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a+1)s}x^{\mu_-})}{p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a)s})},$$

et

$$Q = x^{\nu_+} x^{\nu_-} \frac{p.g.c.d.(x^{a\mu_+} x^t, x^{(b-a)t})}{p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t})} \times \frac{p.g.c.d.(x^{a\mu_-} x^s, x^{(b-a)s})}{p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a)s})}.$$

Remarque 3.3.2. Les relations $G_{[u \ v \ (u-v) \ w]}$ donnent des éléments dans l'idéal de présentation de l'anneau de Rees $\mathcal{R}(I)$, leurs images modulo \mathfrak{m} sont des éléments dans l'idéal de présentation de la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$. Notre but consiste à donner ces images exactes dans $\mathcal{F}(I)$. Les conditions (pour que $P = 1$ et pour que $Q = 1$) qui nous permettent de le faire sont présentées dans le théorème 3.3.15.

3.3.1 Conditions pour que $P = 1$ ou $Q = 1$.

Lemme 3.3.3. $P = 1$ si et seulement si w satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}) & = x^{a\mu_+} \\ p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a)s}) & = x^{a\mu_-} \end{cases} \quad (*)$$

PREUVE : (\Leftarrow) est claire.

(\Rightarrow) Si $P = 1$ alors

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a+1)t}x^{\mu_+}) = p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}), & (i) \\ p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a+1)s}x^{\mu_-}) = p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a)s}). & (ii) \end{cases}$$

De (i) nous avons que $\forall x_i \in \text{supp } \mu_+$:

$$x_i \mid x^{\mu_+} \mid p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a+1)t}x^{\mu_+}) = p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}) \mid x^{(b-a)t}.$$

Or $x_i \in \text{supp } t$. Ceci implique que $\text{supp } \mu_+ \subset \text{supp } t$. Alors

$$\begin{aligned} p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a+1)t}x^{\mu_+}) &= \prod_{x_i \in \text{supp } \mu_+} x_i^{\min\{a \deg_{\mu_+} x_i, (b-a+1) \deg_t x_i + \deg_{\mu_+} x_i\}} \\ &\text{divisible par } \prod_{x_i \in \text{supp } \mu_+} x_i^{\min\{a \deg_{\mu_+} x_i, (b-a) \deg_t x_i\}} \\ &= p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}). \end{aligned}$$

Nous avons l'égalité si et seulement si pour tout $x_i \in \text{supp } \mu_+$,

$$\min\{a \deg_{\mu_+} x_i, (b-a+1) \deg_t x_i + \deg_{\mu_+} x_i\} = \min\{a \deg_{\mu_+} x_i, (b-a) \deg_t x_i\},$$

i.e $\min\{a \deg_{\mu_+} x_i, (b-a) \deg_t x_i\} = a \deg_{\mu_+} x_i$ pour tout $x_i \in \text{supp } \mu_+$.

C'est-à-dire que $x^{a\mu_+} \mid x^{(b-a)t}$, i.e $p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}) = x^{a\mu_+}$.

De la même façon, nous avons (ii). Le lemme est prouvé. \square

Lemme 3.3.4. $Q = 1$ si et seulement si $x^{\nu_+} = x^{\nu_-} = 1$ et w satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{a\mu_+}, x^{(b-a)t}) = x^{(b-a)t} \\ p.g.c.d.(x^{a\mu_-}, x^{(b-a)s}) = x^{(b-a)s} \end{cases} \quad (**)$$

PREUVE : C'est pratiquement la même que la preuve du lemme 3.3.3. \square

Lemme 3.3.5. Si $x^{\nu_+} = x^{\nu_-} = 1$ alors le point u a exactement trois voisins : $u - v$, et v , et $u + v$.

PREUVE : Avec les mêmes notations dans (†) et dans (††), si $x^{\nu_+} = x^{\nu_-} = 1$ alors les binômes correspondant aux u , v , $u - v$ et $u + v$ deviennent

$$\begin{aligned} f_u &= x^p x^t x^{\mu_+} - x^r x^s x^{\mu_-}, & f_v &= x^p x^s - x^r x^t, \\ f_{u-v} &= x^{2t} x^{\mu_+} - x^{2s} x^{\mu_-}, & f_{u+v} &= x^{2p} x^{\mu_+} - x^{2r} x^{\mu_-}. \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$T(u, u - v) = p.g.c.d.(x^p x^t x^{\mu_+}, x^{2s} x^{\mu_-}) = 1,$$

$$S(u, u - v) = p.g.c.d.(x^r x^s x^{\mu-}, x^{2t} x^{\mu+}) = 1.$$

Nous déduisons du lemma 2.2.15 que $\langle u, u - v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} , donc $u - 2v$ n'est pas dans \mathcal{G} . De même pour $u + v$, nous avons aussi que $\langle u, u + v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} , et $u + 2v \notin \mathcal{G}$. Donc, u a exactement trois voisins : $u - v, v, u + v$. \square

Lemme 3.3.6. *Nous avons les affirmations suivantes :*

1. $T(u, v), S(u, v), P(u, v), R(u, v) \neq 1$ si et seulement si $\langle u, v \rangle$ n'est pas sur le bord de \mathcal{G} .
2. Conditions (*) implique que $T(v, w) = S(v, w) = 1$ et $\text{supp } w_{\pm} \subset \text{supp } v_{\pm}$.
3. Si $x^{\nu+} = x^{\nu-} = 1$ alors (**) implique que $T(u, w) = S(u, w) = 1$ et $\text{supp } w_{\pm} \subset \text{supp } u_{\pm}$.

PREUVE : La première affirmation est déduite directement de 2.2.15.

Pour démontrer la deuxième, remarquons d'abord que les conditions (*) impliquent que :

$$f_w = \frac{x^{(a+b)p} x^{b\nu+} x^{(b-a)s}}{x^{a\mu-}} - \frac{x^{(a+b)r} x^{b\nu-} x^{(b-a)t}}{x^{a\mu+}}.$$

Alors $\text{supp } w_{\pm} \subset \text{supp } v_{\pm}$, et donc $T(v, w) = S(v, w) = 1$.

Il est similaire pour les conditions (**). \square

Maintenant considérons la relation $G_{[u,v,(u-v),w]}$ dans la proposition 3.3.1.

Lemme 3.3.7. *Dans le cas $a = b$, la relation $G_{[u,v,(u-v),w]}$ est un trinôme avec $P = Q = 1$ seulement si $\text{card}(\mathcal{G}) = 4$. En particulier, si \mathcal{G} contient au moins 5 sommets alors soit $P \neq 1$, ou soit $Q \neq 1$.*

PREUVE : Comme \mathcal{G} ne contient que des points primitifs, la condition $a = b$ implique que $a = b = 1$, et on a alors :

$$G_{[u,v,w]} = G_{[u,v,u-v,u+v]} = x^{\nu+} x^{\nu-} f_u f_{w-v} - x^{\mu+} x^{\mu-} f_v f_{w-u} - f_{u-v} f_w.$$

- $Q = x^{\nu+} x^{\nu-} = 1 \Leftrightarrow x^{\nu+} = x^{\nu-} = 1 \xrightarrow{\text{Lem3,3.5}}$ u a exactement trois voisins $u - v, v, u + v$.
- $P = x^{\mu+} x^{\mu-} = 1 \Leftrightarrow x^{\mu+} = x^{\mu-} = 1 \xrightarrow{\text{Lem3,3.5}}$ v a exactement trois voisins $u - v, u, u + v$.

Donc, si $G_{[u,v,u-v,u+v]}$ est un trinôme avec $P = Q = 1$ alors le graphe \mathcal{G} contient exactement quatre sommets $u, v, u - v, u + v$; et si \mathcal{G} contient au moins cinq sommets alors soit $P \neq 1$ soit $Q \neq 1$. Remarquons que le premier cas est traité complètement dans la section précédente. \square

Dès maintenant supposons toujours qu'il y a au moins cinq sommets dans \mathcal{G} .

Définition 3.3.8. Soient u, v et w trois sommets dans \mathcal{G} . On dit que w est engendré par u et v s'il existe deux nombres entiers a et b ($a \geq 0, b \geq 0$) tels que $w = au + bv$.

Considérons un point $w = au + bv \in \mathcal{G}$, avec $b > a > 0$:

$$\begin{aligned} w &= au + bv = a(u + v) + (b - a)v \\ &\vdots \\ &= a(u + pv) + (b - pa)v = \underbrace{r}_{>0}(u + (p + 1)v) + \underbrace{(a - r)}_{>0}(u + pv), \end{aligned}$$

où p, r sont entiers tels que $b = pa + r$ ($0 < r < a$).

Ainsi, en suivant le chemin euclidien pour aller à w dans \mathcal{G} , nous devons passer les points : $u, v, u + v, \dots, u + pv$ et $u + (p + 1)v$. Nous avons de plus que le point w est engendré par $u + pv$ et $u + (p + 1)v$. Ceci implique qu'il existe une présentation de w : $w = w_1 + w_2$, où w_1 et w_2 sont deux voisins de w dans \mathcal{G} tels que $w' = a_1u + b_1v$ ($0 \leq a_1 \leq b_1$) et $w'' = a_2u + b_2v$ ($0 \leq a_2 \leq b_2$), avec $a_1 + a_2 = a$, et $b_1 + b_2 = b$.

A) Conditions sur w quand $P = 1$.

Lemme 3.3.9. Si $P = 1$ alors nous pouvons choisir une chaîne de points dans \mathcal{G}

$$\mathcal{C} : w = w_0, w_1, \dots, w_k = v$$

telle que

- L'arête $\langle w_i, w_{i+1} \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} , $\forall i = 0, 1, \dots, k - 1$.
- w_i satisfait les conditions (*), $\forall i = 0, 1, \dots, k - 1$.

PREUVE : Nous avons deux cas :

Cas 1 : w est dans l'éventail d'origine v . Dans ce cas $w = u + bv$, et les conditions (*) deviennent :

$$\begin{cases} x^{\mu_+} & | & x^{(b-1)t} \\ x^{\mu_-} & | & x^{(b-1)s} \end{cases} .$$

D'après le lemme 3.3.6, nous avons $T(v, w) = S(v, w) = 1$, alors $[v, w]$ est sur le bord de \mathcal{G} . Choisissons la chaîne \mathcal{C} comme suit : $w_0 = w$, $w_1 = v$. \square

Cas 2 : w n'est pas dans l'éventail d'origine v . Dans ce cas nous avons $a > 1$, et $w', w'' \neq v$. Donc $a_1, a_2 > 0$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.10. *Si w satisfait les conditions (*), alors soit w' ou soit w'' satisfait les conditions (*).*

PREUVE : Comme $a = a_1 + a_2$, et $b = b_1 + b_2$, nous avons $b - a = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$. Parce que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, deux quotients $\frac{b_1 - a_1}{a_1}$ et $\frac{b_2 - a_2}{a_2}$ sont bien-définis. Quand w' et w'' sont dans la base de Hilbert de I , nous avons que $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$. Alors $\frac{b_1 - a_1}{a_1} \neq \frac{b_2 - a_2}{a_2}$. Supposons que $\frac{b_1 - a_1}{a_1} > \frac{b_2 - a_2}{a_2}$. On en déduit que $a_2 b_1 > a_1 b_2$. Ainsi,

$$\frac{b_1 - a_1}{a_1} > \frac{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)}{a_1 + a_2} = \frac{b - a}{a} > \frac{b_2 - a_2}{a_2}.$$

$$\Rightarrow a(b_1 - a_1) > (b - a)a_1. \quad \Rightarrow x^{(b-a)a_1 t} | x^{(b_1 - a_1)at}.$$

De plus, le premier ligne de (*) implique que $x^{aa_1\mu_+} | x^{(b-a)a_1 t}$. Or,

$$x^{a_1\mu_+} | x^{(b_1 - a_1)t}.$$

De même, du deuxième ligne de (*), on déduit que $x^{a_1\mu_-} | x^{(b_1 - a_1)s}$.

Ainsi, nous avons $\text{supp } w'_+ \subset \text{supp } v_+$, et $\text{supp } w'_- \subset \text{supp } v_-$, et w' satisfait les conditions (*). D'où le lemme. \square

Pour prouver le lemme 3.3.9, nous utilisons le lemme 3.3.10. Nous supposons que w' satisfasse les conditions (*). Comme w et w' satisfont les conditions $\text{supp } w_{\pm} \subset \text{supp } v_{\pm}$, et $\text{supp } w'_{\pm} \subset \text{supp } v_{\pm}$, nous avons que $\text{supp } w_{\pm} \cap \text{supp } w'_{\mp} = \emptyset$. Alors $T(w, w') = S(w, w') = 1$. D'après le lemme 2.2.15, l'arête $\langle w', w \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} .

La chaîne \mathcal{C} est construit par récurrence :

$$w_0 = w, w_1 = w', \dots, w_k = v.$$

□

B) Conditions sur w quand $Q = 1$.

Maintenant, nous étudions les conditions (**). Les arguments développés dans A) sont aussi utilisés pour ce cas.

Lemme 3.3.11. *Si w satisfait les conditions (**), alors soit w' soit w'' satisfait les conditions (**). Nous pouvons supposer que ce soit w' . De plus, si $x^{\nu+} = x^{\nu-} = 1$, alors l'arête $\langle w, w' \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} .*

PREUVE : La preuve est presque identique à celle du lemme 3.3.10. □

Ce lemme implique facilement le résultat suivant :

Lemme 3.3.12. *Si $Q = 1$ alors*

1. $x^{\nu+} = x^{\nu-} = 1$, et donc u a exactement trois voisins : $u - v$, v , $u + v$.
2. Il existe une chaîne dans \mathcal{G}

$$\mathcal{C} : w = w_0, w_1, \dots, w_k = u$$

telle que :

- L'arête $\langle w_i, w_{i+1} \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} , $\forall i = 0, 1, \dots, k - 1$.
- w_i satisfait les conditions (**), $\forall i = 0, 1, \dots, k - 1$.

PREUVE : La première assertion découle du lemme 3.3.5. La deuxième est similaire au lemme 3.3.9. □

Puis, étudions la propriété de la forme quadratique $G_{[u,v,w]}$ correspondant à une arête $\langle u, v \rangle$ qui n'est pas sur le bord de \mathcal{G} et un point $w = au + bv$ ($b \geq a > 0$). Dans le cas où $a = b$ nous avons $a = b = 1$ et

$$G_{[u,v,w]} = G_{[u, v, u-v, u+v]} = Qf_u^2 - Pf_v^2 - f_{u-v}f_{u+v}$$

où soit $Pf_v \in \mathfrak{m}I$ soit $Qf_u \in \mathfrak{m}I$. Nous allons démontrer que l'assertion similaire est aussi valide pour le cas où $b > a$. Considérons $G_{[u, v, u-v, w]}$.

Proposition 3.3.13. *Avec les mêmes notations que dans la proposition 3.3.1, nous avons*

$$Pf_{w-u} \in \mathfrak{m}I.$$

PREUVE : Remarquons d'abord que, d'après le lemme 2.2.13, le binôme f_{w-u} est dans $\mathfrak{m}I$ si et seulement si $w - u \in \mathcal{G}$. Alors $Pf_{w-u} \notin \mathfrak{m}I$ si et seulement si $P = 1$ et $w - u \notin \mathcal{G}$. Séparons le problème en trois cas.

Cas 1 : $a = 1$ i.e. $w = u + bv$ est dans l'éventail d'origine v . Dans cette situation, nous avons $w - u = bv$. Comme \mathcal{G} ne contient que de points dans la base de Hilbert de I , le point bv est dans \mathcal{G} si et seulement si $b = 1 = a$. Ceci contredit l'hypothèse que $a < b$. Alors $w - u \notin \mathcal{G}$. Donc $f_{w-u} \in \mathfrak{m}I$, et Pf_{w-u} l'est aussi.

Cas 2 : $a \geq 2$. Supposons l'opposition. Comme $f_{w-u} \in \mathfrak{m}I$ si et seulement si $w - u \notin \mathcal{G}$ (selon la remarque 2.2.13), nous avons que $P = 1$ et $w - u \in \mathcal{G}$. Grâce au lemme 3.3.9, il existe une chaîne \mathcal{C}_1 , qui est une partie du bord de \mathcal{G}

$$\mathcal{C}_1 : \quad w_0^1 = w, \quad w_1^1, \dots, \quad w_{k_1-1}^1 = \xi_1, \quad w_{k_1}^1 = v.$$

On a vu que w est engendré par $u + pv$ et $u + (p+1)v$, où $b = pa + r$ avec $0 < r < a$. Rappelons une représentation de f_w

$$f_w = \frac{x^{(a+b)p} x^{bv+} x^{(b-a)s}}{x^{a\mu-}} - \frac{x^{(a+b)r} x^{bv-} x^{(b-a)t}}{x^{a\mu+}}$$

et les conditions (*) pour w

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{a\mu+}, x^{(b-a)t}) & = x^{a\mu+} \\ p.g.c.d.(x^{a\mu-}, x^{(b-a)s}) & = x^{a\mu-} \end{cases} .$$

Comme $x^{a\mu+} \mid x^{(b-a)t} = x^{(pa+r-a)t} = x^{[(p-1)a+r]t}$ selon (*), et $x^{[(p-1)a+r]t} \mid x^{pat}$ car $(p-1)a + r < pa$, nous avons $x^{a\mu+} \mid x^{pat}$. Alors on a $x^{\mu+} \mid x^{pt}$. De même, nous avons $x^{\mu-} \mid x^{ps}$. Donc $u + (p+1)v$ satisfait les conditions (*). Ceci implique que $\langle u + (p+1)v, v \rangle$ est sur le bord de \mathcal{G} (voir le cas 1 de A). Ainsi $u + (p+2)v \notin \mathcal{G}$. On conclut que $w_{(k_1-1)}^1 = \xi_1 = u + (p+1)v$.

Puis, considérons $w - u$.

$$\begin{aligned} w - u &= (a-1)u + bv = (a-1)(u+v) + (b-a+1)v \\ &\vdots \\ &= (a-1)(u+pv) + (b-pa+p)v \\ &= (a-1)(u+pv) + (r+p)v \\ &= \begin{cases} \underbrace{(r+p-a+1)}_{>0}(u+(p+1)v) + \underbrace{(a-1)}_{>0}(u+pv), & \text{si } a-1 < r+p \\ \underbrace{(r+p)}_{>0}(u+(p+1)v) + \underbrace{(a-1-r-p)}_{>0}(u+pv), & \text{si } a-1 > r+p \\ \underbrace{(r+p)}_{>0}(u+(p+1)v), & \text{si } a-1 = r+p \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux premiers cas, le point $w - u$ est engendré par $u + (p + 1)v$ et $u + pv$. Dans le dernier cas, nous avons que $a - 1 = r + p$. Donc $w - u = (a - 1)[(u + pv) + v]$. De plus, parce que \mathcal{G} ne contient que de points dans la base de Hilbert de I , le point $w - u \in \mathcal{G}$ si et seulement si $a - 1 = 1$, i.e. $a = 2$. Ceci implique que $r = 1, p = 0$ et alors $b = 1 < 2 = a$. Contradiction à l'hypothèse que $a < b$.

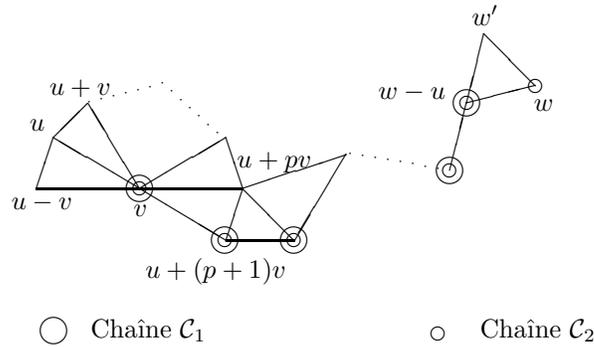
Les conditions (*) impliquent aussi que :

$$\begin{array}{l} x^{\mu+} \quad | \quad x^{(b-a)t} \quad | \quad x^{(b-a+1)t}, \\ \text{et } x^{\mu-} \quad | \quad x^{(b-a)s} \quad | \quad x^{(b-a+1)s}, \end{array}$$

i.e. $w - u$ satisfait les conditions (*) aussi. D'après la proposition 3.3.9, il existe une autre chaîne :

$$\mathcal{C}_2 : \quad w_0^2 = w - u, w_1^2, \dots, w_{k_2-1}^2 = \xi_2, w_{k_2}^2 = v,$$

sur le bord de \mathcal{G} . Parce que $\langle v, \xi_1 \rangle$ et $\langle v, \xi_2 \rangle$ sont sur le bord de \mathcal{G} , et de plus, dans la même direction de v aux points avec coordonnées positives par rapport à (u, v) , ils doivent coïncider et coïncident à $u + (p + 1)v$. Et les deux points suivants dans les deux chaînes coïncident aussi. On en déduit que soit $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ ou soit $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. On conclut que $w - u$ et w sont dans la même chaîne commençant de v et passant $u + (p + 1)v$. Parce que $(a - 1, b) \prec_{lex} (a, b)$, le point $w - u$ doit être dans le chemin de v à w . Alors il existe un voisin $w' = cu + dv$ ($c, d \geq 0$) de $w - u$ tel que $w = \alpha(w - u) + \beta w'$ avec $\alpha, \beta > 0$.



Il découle que

$$\begin{cases} a = \alpha(a - 1) + \beta c = \alpha a - \alpha + \beta c \\ b = \alpha b + \beta d \geq b \end{cases} .$$

On a l'égalité dans la deuxième ligne si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta d = 0$. On conclut que $a = a - 1 + \beta c$. Donc, $\beta = 1$ et $c = 1, d = 0$, i.e. $w' = u$.

Alors w et $w - u$ sont dans l'éventail d'origine u . Ainsi, il existe un nombre entier $a \geq 1$ tel que $w = au + v$. C'est une contradiction. D'où la proposition. \square

Pour le terme Qf_{w-v} nous avons une proposition similaire.

Proposition 3.3.14. *Si $Qf_{w-v} \in I \setminus \mathfrak{m}I$, alors $Q = 1$ et il existe $w - v \in \mathcal{G}$. De plus, les points u , $u - v$, w , $w - v$ sont dans l'éventail d'origine v , et tout le point dans cet éventail entre u et $w - v$ a exactement trois voisins.*

PREUVE : De même à la démonstration de la proposition 3.3.13, l'égalité $Q = 1$ implique que w et $w - v$ satisfont les conditions (**). Grâce à la proposition 3.3.12, nous pouvons construire deux chaînes :

$$\mathcal{C}_1 : \quad w_0^1 = w, w_1^1, \dots, w_{k_1-1}^1 = \xi_1, w_{k_1}^1 = u,$$

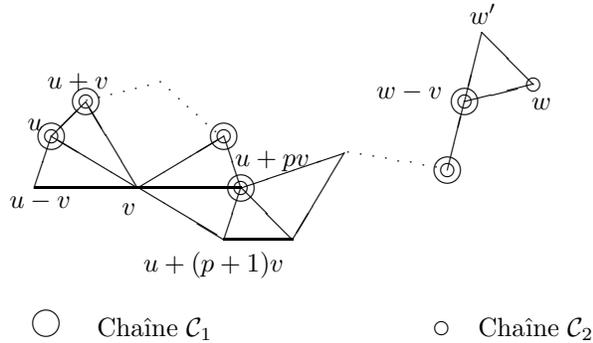
$$\mathcal{C}_2 : \quad w_0^2 = w - u, w_1^2, \dots, w_{k_2-1}^2 = \xi_2, w_{k_2}^2 = u,$$

qui sont sur le bord de \mathcal{G} , dont les points ξ_1 et ξ_2 sont des voisins de u et satisfont (**).

Remarquons que $u + v$ satisfait (**) aussi, car

$$\begin{cases} 1 = x^{(1-1)t} = p.g.c.d.(x^{\mu+}, x^{(1-1)t}) \\ 1 = x^{(1-1)s} = p.g.c.d.(x^{\mu-}, x^{(1-1)s}) \end{cases} .$$

Alors $[u + v, u]$ est sur le bord de \mathcal{G} . Nous avons donc $\xi_1 = \xi_2 = u + v$. Ainsi, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont les mêmes deux premiers points. On conclut que w et $w - v$ sont dans la même chaîne.



Nous pouvons déduire qu'ils sont dans le même éventail d'origine v avec u et $u - v$. Une conséquence est que la chaîne \mathcal{C}_1 est celle contenant des points de cet éventail : u , $u + v, \dots, w - u, w$. Comme celle-ci est une partie du bord de \mathcal{G} , tout point u , $u + v, \dots, w - u$ a exactement trois voisins. \square

3.3.2 Les relations quadratiques

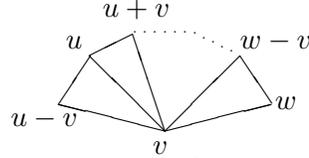
Nous allons résumer les résultats techniques que nous venons de démontrer. D'après la proposition 3.3.13 et la proposition 3.3.14, nous obtenons :

Proposition 3.3.15. *Soit $[u, v, u - v]$ un triangle de \mathcal{G} , et $w = au + bv$ ($0 < a \leq b$) un point quelconque de \mathcal{G} . Alors il existe une relation*

$$G_{[u,v,w]} = Qf_u f_{w-v} + Pf_v f_{w-u} - f_{u-v} f_w = 0,$$

où P, Q sont des monômes dans \mathcal{R} tels que :

- $Pf_{w-u} \in \mathbf{m}I$.
- $Qf_{w-v} \in I$.
- Si $Qf_{w-v} \in I \setminus \mathbf{m}I$, alors $Q = 1$ et le point $w - v$ est dans \mathcal{G} . De plus, les points $u - v, u, w - v, w$ sont dans un éventail d'origine v , et tout point entre u et $w - v$ a exactement trois voisins.



Pour le cas général, en changeant le signe de $v \mapsto -v$ ou de $u \mapsto -u$, s'il est nécessaire, nous pouvons nous ramener au cas où $0 < a \leq b$. On obtient que :

Théorème 3.3.16. *Soit $\langle u, v \rangle$ une arête qui n'est pas sur le bord de \mathcal{G} , et $w = au + bv$ un point quelconque de \mathcal{G} , ($w \neq u, w \neq v$). Alors*

- Si $|a|=|b|$, alors $|a|=|b|=1$ et il existe une relation

$$G_{[u,v,w]} = G_{[u,v,u-v,u+v]} = x^{\mu^+} x^{\mu^-} f_u^2 - x^{\nu^+} x^{\nu^-} f_v^2 - f_{u-v} f_{u+v},$$

où soit $x^{\mu^+} x^{\mu^-}$ soit $x^{\nu^+} x^{\nu^-}$ est dans \mathbf{m} .

- Si $|a| \neq |b|$, alors il existe une relation

$$G_{[u,v,w]} = Qf_u f_{w*v} + Pf_v f_{w*u} + f_{u*v} f_w = 0,$$

où $u * v = u - v$ si $ab > 0$, et $u * v = u + v$ si $ab < 0$; et $w * u = w - \text{sign}(a)u$, $w * v = w - \text{sign}(b)v$. De plus, soit Qf_{w*v} ou soit Pf_{w*u} est dans $\mathbf{m}I$, et

- Si $Qf_{w*v} \notin \mathbf{m}I$, alors $|a| < |b|$ et $|Q|=1$; et $w * v$ est dans \mathcal{G} tel que $u * v, u, w * v, w$ sont dans l'éventail d'origine v , dont tout point entre u et $w * v$ a exactement trois voisins.
- Si $Pf_{w*u} \notin \mathbf{m}I$, alors $|b| < |a|$ et $|P|=1$; $w * u$ est dans \mathcal{G} tel que $u * v, v, w * u, w$ sont dans l'éventail d'origine u , dont tout point entre v et $w * u$ a exactement trois voisins.

3.4 Relations dans la fibre spéciale

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'anneau de polynômes sur le corps \mathcal{K} . Soit I un idéal engendré minimalement par m éléments $\{f_i\}_{1 \leq i \leq m}$. L'anneau de Rees de I est l'anneau gradué $\mathcal{R}[It] = \bigoplus_{k \geq 0} I^k t^k$. La fibre spéciale de I est le quotient $\mathcal{R}[It]/\mathfrak{m}\mathcal{R}[It]$, où $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'idéal maximal irrélevant de \mathcal{R} . Introduisons m variables indépendantes sur \mathcal{R} , appelées $\mathbf{T} = \{T_i\}_{1 \leq i \leq m}$, et considérons l'idéal $\mathcal{J} = \ker \pi$, où

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}[\mathbf{T}] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{R}[It] & \longrightarrow & 0 \\ T_i & \longrightarrow & f_i t & & \end{array} .$$

On obtient une présentation $\mathcal{R}[It] \simeq \mathcal{R}[\mathbf{T}]/\mathcal{J}$ de l'anneau de Rees. D'où, on déduit une présentation de la fibre spéciale $\mathcal{R}[It]/\mathfrak{m}\mathcal{R}[It] \simeq \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{J}}$, où $\tilde{\mathcal{J}}$ est l'image de \mathcal{J} modulo $\mathfrak{m}\mathcal{R}[\mathbf{T}]$.

Dans notre cas où I est un idéal de réseau de codimension 2, les m éléments f_i correspondent à m points, dits $\{u_i\}_{1 \leq i \leq m}$, du graphe \mathcal{G} . Rappelons que toute relation $G_{[u,v,w]} = Qf_u f_{w*v} + Pf_v f_{w*u} + f_{u*v} f_w$ déduite du théorème 3.3.16 nous donne un élément dans l'idéal \mathcal{J} , et son image $\tilde{G}_{[u,v,w]}$ modulo $\mathfrak{m}\mathcal{R}[\mathbf{T}]$ est dans l'idéal $\tilde{\mathcal{J}}$. On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $\langle u, v \rangle$ un arête qui n'est pas sur le bord de \mathcal{G} , et soit $w = au + bv$ un point quelconque de \mathcal{G} ($w \neq u, w \neq v$). Alors la relation suivante est dans l'idéal de présentation $\tilde{\mathcal{J}}$ de la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$ de I :*

$$\tilde{G}_{[u,v,w]} = \varepsilon_u T_u T_{w*v} + \varepsilon_v T_v T_{w*u} - T_{u*v} T_w, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}$$

où $\varepsilon_u \varepsilon_v = 0$, et de plus

- si $\varepsilon_u \neq 0$, alors $u * v$, u , $w * v$, w est dans l'éventail d'origine v , dont tout point entre u et $w * v$ a exactement trois voisins.
- si $\varepsilon_v \neq 0$, alors $u * v$, v , $w * u$, w est dans l'éventail d'origine u , dont tout point entre v et $w * u$ a exactement trois voisins.

Notons S l'ensemble des $\tilde{G}_{[u,v,w]}$ précédentes. Remarquons que tout élément dans S soit de type $T_u T_v$ avec u, v non-voisins dans \mathcal{G} , soit de type $T_u T_{w-v} - T_{u-v} T_w$ avec $u - v$, u , $w - v$, $w = au + bv$ ($a, b \in \mathbb{Z}_{>0}^2$) dans le même éventail d'origine v (après un changement des signes de u , de v et de w , s'il est nécessaire).

Lemme 3.4.2. *Si $u - v$, u , $w - v$ et $w = u + bv$ sont dans le même éventail F d'origine v de \mathcal{G} tels que :*

$$\tilde{G}_{[u,v,u-v,w]} = T_u T_{w-v} - T_{u-v} T_w,$$

alors pour tout point $P = u + cv \in F$, et $Q = u + dv$ ($b \geq d > c \geq 0$) $\in F$, nous avons :

$$\tilde{G}_{[P,v,P-v,Q]} = T_P T_{Q-v} - T_{P-v} T_Q \in S.$$

PREUVE : On a vu que pour tout point $P = u + \alpha v \in F$, le binôme f_P correspondant à P est

$$f_P = \frac{x^{(\alpha+1)p} x^{\mu+} x^{\alpha\nu+} x^{(\alpha-1)s} - x^{(\alpha+1)r} x^{\mu-} x^{\alpha\nu-} x^{(\alpha-1)t}}{p.g.c.d.(x^{\mu+}, x^{(\alpha-1)t}) p.g.c.d.(x^{\mu-}, x^{(\alpha-1)s})}.$$

Pour le point $w = u + bv$, car $\tilde{G}_{[u,v,u-v,w]} = T_u T_{w-v} - T_{u-v} T_w$, nous avons $x^{\nu+} = x^{\nu-} = 1$ et

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{\mu+}, x^{(b-1)t}) &= x^{(b-1)t} \\ p.g.c.d.(x^{\mu-}, x^{(b-1)s}) &= x^{(b-1)s} \end{cases}.$$

Alors pour $0 < \alpha \leq b$,

$$\begin{cases} p.g.c.d.(x^{\mu+}, x^{(\alpha-1)t}) &= x^{(\alpha-1)t} \\ p.g.c.d.(x^{\mu-}, x^{(\alpha-1)s}) &= x^{(\alpha-1)s} \end{cases}.$$

Donc $f_{u+\alpha v} = \frac{x^{(\alpha+1)p} x^{\mu+}}{x^{(\alpha-1)t}} - \frac{x^{(\alpha+1)r} x^{\mu-}}{x^{(\alpha-1)s}}$ pour tout $P = u + \alpha v$ ($0 \leq \alpha \leq b$).
Considérons le point $P = u + cv$ et le point $Q = u + dv$ ($0 \leq c < d \leq b$).
Nous étudions la matrice 2×4 suivante :

$$\begin{pmatrix} x^p & \frac{x^{cr} x^{\mu-}}{x^{(c-1)s}} & x^t & \frac{x^{dr} x^{\mu-}}{x^{(d-1)s}} \\ x^r & \frac{x^{cp} x^{\mu+}}{x^{(c-1)t}} & x^s & \frac{x^{dp} x^{\mu+}}{x^{(d-1)t}} \end{pmatrix}.$$

Calculons tous ses mineurs 2×2 , nous avons $\Delta_{1,2} = f_{u+cv} = f_P$, et $\Delta_{1,3} = f_v$, et $\Delta_{1,4} = f_{u+dv} = f_Q$, et $\Delta_{2,3} = f_{u+(c-1)v} = f_{P-v}$, et $\Delta_{2,4} = x^{cp} x^{cr} \frac{x^{\mu-}}{x^{(d-1)s}} \frac{x^{\mu+}}{x^{(d-1)t}} f_{dv} \in mI$, et $\Delta_{3,4} = f_{u+(d-1)v} = f_{Q-v}$. La relation de Plücker nous donne $\tilde{G}_{[P,v,P-v,Q]} = T_P T_{Q-v} - T_{P-v} T_Q \in S$. \square

Lemme 3.4.3. Soient $u - v$, u , $w - v$ et $w = u + bv$ quatre points dans la même éventail F de \mathcal{G} satisfont la même condition comme dans le lemme 3.4.2. Supposons aussi qu'il existe une relation quadratique $T_w^2 - T_{w-} T_{w+} \in S$, où w_- et w_+ sont deux voisins de w dans \mathcal{G} . Alors $w_- = w - v$, et $w_+ = w + v$, et la relation $\tilde{G}_{[u,v,u-v,w+v]} = T_u T_w - T_{u-v} T_{w+v} \in S$.

PREUVE : Comme $\tilde{G}_{[w,V,w-V,w+V]} = T_w^2 - T_{w-}T_{w+} \in S$, nous pouvons supposer que $w_- = w - V$ et $w_+ = w + V$, avec un voisin V de w . Le lemme 3.3.4 et le lemme 3.3.5 impliquent que w a exactement trois voisins. Comme $w - v$ et v sont aussi des voisins de w , et $w - v$ n'a que trois voisins : $w - 2v$, v et w , on conclut que $v = V$. Ainsi, $w_- = w - v$ et $w_+ = w + v = u + (b+1)v$. Nous avons alors :

$$f_{w+v} = \frac{x^{(b+2)p}x^{\mu_+}}{x^{bt}} - \frac{x^{(b+2)r}x^{\mu_-}}{x^{bs}}.$$

Considérons la matrice 2×4 suivante :

$$\begin{pmatrix} x^p & x^s x^{\mu_-} & x^t & \frac{x^{(b+1)r}x^{\mu_-}}{x^{bs}} \\ x^r & x^t x^{\mu_+} & x^s & \frac{x^{(b+1)p}x^{\mu_+}}{x^{bt}} \end{pmatrix}.$$

La relation de Plücker nous donne $\tilde{G}_{[u,v,u-v,w+v]} = T_u T_w - T_{u-v} T_{w+v} \in S$. \square

Remarque 3.4.4. Après le changement de signe $v \mapsto -v$, nous avons ce qui suit :

S'il existe une relation quadratique $T_{u-v}^2 - T_{(u-v)-} T_{(u-v)+} \in S$, où $(u-v)_-$ et $(u-v)_+$ sont deux voisins de $u-v$ dans \mathcal{G} , alors $(u-v)_- = u - 2v$, et $(u-v)_+ = u$. De plus, la relation $\tilde{G}_{[u-v,v,u-2v,w]} = T_{u-v} T_{w-v} - T_{u-2v} T_w$ est dans S .

Définition 3.4.5. Une chaîne $u - v$, u , $u + v, \dots, u + bv$ de longueur plus grande que possible telle que la relation quadratique $T_u T_{u+(b-1)v} - T_{u-v} T_{u+bv}$ est dans S est appelée un *éventail binomial* d'origine v de \mathcal{G} .

Exemple 3.4.6. Pour les exemples 2.2.5 et 2.2.6, le seul sommêt de \mathcal{G} est $u_4 = (-1, 1)$. Donc, nous devons considérer la relation $\tilde{G}_{[u_4, u_1, u_2, u_7]}$ dans les deux exemples. Les autres relations n'engendrent que des monômes.

– Pour l'exemple 2.2.5, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ab^5c - d^2e^3f^2, & \alpha_2 &= a^3e^2f^3 - bc^4d^3, \\ \alpha_7 &= ade^8f^7 - b^{11}c^6, & \alpha_4 &= a^2e^5f^5 - b^6c^5d. \end{aligned}$$

Donc, la matrice associée à ces binômes est

$$\begin{pmatrix} a & de^3f^2 & b^6c^5 & bc^4d^2 \\ d & b^5c & ae^5f^5 & a^2e^2f^3 \end{pmatrix}.$$

La relation de Plücker nous donne : $abc^4e^2f^3\alpha_1^2 - d\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_7 = 0$. D'où, la relation T_2T_7 est dans l'idéal de la fibre spéciale, et

$$S_1 = \{T_1T_6, T_2T_5, T_3T_4, T_3T_7, T_4T_5, T_4T_6, T_5T_6, T_5T_7, T_6T_7, T_2T_7\}.$$

– Pour l'exemple 2.2.6, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ab^2c - de^2f, & \alpha_2 &= a^2bf^2 - c^2d^2e, \\ \alpha_7 &= a^4b^5 - d^4e^5, & \alpha_4 &= a^3b^3f - cd^3e^3. \end{aligned}$$

Donc, la matrice associée à ces binômes est

$$\begin{pmatrix} ab^2 & f & cd^2e & d^3e^3 \\ de^2 & c & a^2bf & a^3b^3 \end{pmatrix}.$$

La relation de Plücker nous donne : $a^2bd^2e\alpha_1^2 - \alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_7 = 0$. D'où, la relation $-T_4^2 + T_2T_7$ est dans l'idéal de la fibre spéciale, et

$$S_2 = \{T_1T_6, T_2T_5, T_3T_4, T_3T_7, T_4T_5, T_4T_6, T_5T_6, T_5T_7, T_6T_7, T_2T_7 - T_4^2\}.$$

Donc les fibres spéciales de deux exemples sont non isomorphes.

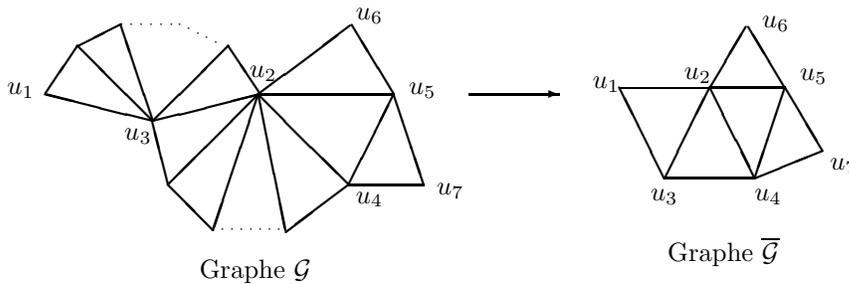
Remarque 3.4.7. Remarquons que l'ensemble complet des relations quadratiques concernant T_{u-v} , T_u , T_{u+v} , \dots , $T_{u+bv} = T_w$ sont données par les mineurs 2×2 de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} T_{u-v} & T_u & T_{u+v} & \dots & T_{u+(b-1)v} \\ T_u & T_{u+v} & T_{u+2v} & \dots & T_{u+bv} \end{pmatrix}.$$

De plus, il n'existe pas de relation de type $T_{u-v}^2 - T_{(u-v)_-}T_{(u-v)_+}$ ou de type $T_w^2 - T_{w_-}T_{w_+}$ dans S .

En fait, comme on va voir dans la suite, chaque éventail binomial est caractérisé par son origine et ses deux extrêmes.

Définition 3.4.8. Le graphe $\tilde{\mathcal{G}}$, qui est obtenu de \mathcal{G} en remplaçant chaque éventail binomial de \mathcal{G} par un triangle construit par son origine et ses deux extrêmes, est appelé *le graphe réduit* de \mathcal{G} .



- Remarque 3.4.9.** 1. Pour chaque couple de deux non-voisins u, v dans $\tilde{\mathcal{G}}$, on a $T_u T_v$ est un monôme dans S .
2. Nous pouvons colorer $\tilde{\mathcal{G}}$ par trois couleurs comme suit :
- Choisissons un triangle \mathcal{T} quelconque de $\tilde{\mathcal{G}}$, et colorons chaque sommet de ce triangle par une couleur.
 - Deux non-voisins u et v , qui sont dans le même quadrilatère de $\tilde{\mathcal{G}}$, ont la même couleur.
- Ainsi, les sommets de chaque triangle de $\tilde{\mathcal{G}}$ ont des couleurs différentes.

Notons Γ_i l'ensemble des sommets de couleur i dans $\tilde{\mathcal{G}}$, et prenons

$$g_i = \sum_{u \in \Gamma_i} T_u, \quad i = 1, 2, 3.$$

On remarque que g_1, g_2 , et g_3 sont indépendantes algébriquement sur \mathcal{K} .

Considérons l'idéal $\tilde{\mathcal{A}}$ engendré par S . Comme dans le théorème 3.4.1, nous avons $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{J}}$. Le but de cette section est de prouver l'égalité. Afin de démontrer que $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{F}(I)$, nous allons indiquer d'abord qu'ils ont la même normalisation de Noether.

Théorème 3.4.10. Prenons $J = (g_1, g_2, g_3)$, et soit \mathfrak{m}_T l'idéal maximal de $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$. Alors

$$(\mathfrak{m}_T)^2 = J\mathfrak{m}_T.$$

PREUVE : Remarquons que c'est une conséquence de la proposition 4.4.7. En fait, la coloration précédente est bonne, et que le graphe $\tilde{\mathcal{G}}$ fabrique un arbre généralisé. \square

Théorème 3.4.11. Soit $A := \mathcal{K}[g_1, g_2, g_3]$. Alors A est la normalisation de Noether de $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$.

PREUVE : Il découle directement du théorème 3.4.10 que $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$ est intégralement clôt sur A . Alors l'application $A \hookrightarrow \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$ satisfait le théorème Going-up. Donc, $\dim(\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}) = \dim(A) \leq 3$. (Vois [Ma, Theorem 20] pour les détails.)

En fait, comme nous verrons dans le chapitre suivant, nous pouvons démontrer que :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcap_{\tau \text{ un triangle dans } \tilde{\mathcal{G}}} \tilde{\mathcal{A}}_{\tau},$$

où $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau}$ est l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} T_{u-v} & T_u & T_{u+v} & \cdots & T_{u+(b-1)v} \\ T_u & T_{u+v} & T_{u+2v} & \cdots & T_{u+bv} \end{pmatrix},$$

et par les variables T_u avec $u \in \overline{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{T}$, si le triangle $\mathcal{T} = [u-v, v, u+bv]$ avec $\{u-v, u, \dots, u+bv\}$ est un éventail binomial de \mathcal{G} , et $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{T}} = (T_u \mid u \in \overline{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{T})$ sinon (c'est une conséquence de la proposition 4.2.1).

Il est connu que $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{T}}$ est un idéal premier de dimension trois pour tout \mathcal{T} . Ainsi, $\dim(\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}) = 3$. On en déduit que g_1, g_2, g_3 sont algébriquement indépendants sur $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$.

De plus, $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$ est un A -module de type fini, et engendré par 1, et par les T_u où $u \in \overline{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{T}$ avec un triangle \mathcal{T} quelconque de \mathcal{G} . \square

Considérons la composition des applications :

$$A \hookrightarrow \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{F}(I),$$

où le dernier est un épimorphisme canonique. Alors, $\mathcal{F}(I)$ est le quotient de $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$, et $\dim(\mathcal{F}(I)) \leq \dim(\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}) = 3$. Par suite, c'est connu qu'en général on a $\dim \mathcal{F}(I) \geq \text{codim}(I) = 2$. Dans le cas où le corps \mathcal{K} est infini et I est radical, on a l'égalité si et seulement si I est une intersection complète (voir [CN]).

Théorème 3.4.12.

$$2 \leq \dim(\mathcal{F}(I)) \leq 3.$$

Dans le cas où \mathcal{K} est infini et I est un idéal radical qui n'est pas une intersection complète, nous avons $\dim(\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}) = \dim(\mathcal{F}(I)) = 3$.

Dans la suite, nous allons considérer en détail le dernier cas, c.-à-d. le cas où l'idéal I est radical, et I n'est pas une intersection complète, et \mathcal{K} est infini. Nous rappelons d'abord la définition du nombre de réduction d'un anneau.

Définition 3.4.13. Soit \mathcal{R} un anneau de polynômes en n variables sur un corps k . Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ un idéal gradué homogène pour la graduation standard et $d = \dim \mathcal{R}/\mathcal{I}$. Un ensemble de formes linéaires $\{g_1, g_2, \dots, g_d\}$ est une réduction de \mathcal{R}/\mathcal{I} , si

$$(g_1, g_2, \dots, g_d)\mathfrak{m}^\rho = \mathfrak{m}^{\rho+1} \pmod{\mathcal{I}}$$

où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de l'anneau de polynômes \mathcal{R} .

Le plus petit nombre ρ lorsque l'on considère toutes les réductions possibles est appelé le nombre de réduction de \mathcal{R}/\mathcal{I} .

Remarquons que l'égalité entre les dimensions ainsi que le lemme 3.2 [BM2] impliquent que A est la normalisation de Noether de $\mathcal{F}(I)$ par rapport à la composition. Parce que $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$ est engendré par des formes linéaires comme un A -module, son quotient $\mathcal{F}(I)$ l'est aussi. Ceci implique que le nombre de réduction $r(\mathcal{F}(I)) = 1$.

Puis, considérons le resultat suivant de Cortadellas et Zarzuela :

Lemme 3.4.14. [CZ] *Soit $(\mathcal{R}, \mathfrak{m})$ est un anneau noetherian local, et soit I un idéal engendré minimalement par m éléments de \mathcal{R} . Supposons que I est une intersection complète générique (i.e. $I_{\mathfrak{p}}$ est une intersection complète pour tout \mathfrak{p} idéal premier minimal associé à I), et l'analytique spread est $l := \dim \mathcal{F}(I) = \text{hauteur}(I) + 1$. Si $r(\mathcal{F}(I)) = 1$, alors $\mathcal{F}(I)$ est Cohen – Macaulay. De plus, la fonction de Hilbert de $F(I)$ est*

$$H_{\mathcal{F}(I)}(t) = \frac{1 + (m - l)t}{(1 - t)^l}.$$

On conclut que :

Théorème 3.4.15. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'anneau de polynômes sur \mathcal{K} . Soit I un idéal de réseau de codimension 2. Supposons que I n'est pas une intersection complète. Alors*

$$\mathcal{F}(I) = \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}.$$

PREUVE : Le théorème 3.4.12 implique que $l := \dim \mathcal{F}(I) = 3$. Soit m le nombre de générateurs de I . En utilisant le lemme 3.4.14, nous avons

$$\frac{1 + (m - 3)t}{(1 - t)^3} = H_{\mathcal{F}(I)}(t) \leq H_{\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}}(t).$$

Choisissons un triangle $\mathcal{T} := [T_{m-2}, T_{m-1}, T_m]$ de \mathcal{G} . Grâce au théorème 3.4.11, l'application suivante est un épimorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \bigoplus_{i=1}^{m-3} & \bigoplus & A[-1] & \longrightarrow & \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow 0 \\ e_0 & & & & \mapsto & 1 & \\ & & & e_i & \mapsto & T_i & \end{array}$$

Alors

$$H_{\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}}(t) \leq H_{A \oplus \bigoplus_{i=1}^{m-3} A[-1]}(t) = \frac{1 + (m - 3)t}{(1 - t)^3}.$$

Donc, les anneaux $\mathcal{F}(I)$ et $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$ ont la même fonction de Hilbert. Or $\mathcal{F}(I)$ est un quotient de $\mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$, on en déduit que $\mathcal{F}(I) = \mathcal{K}[\mathbf{T}]/\tilde{\mathcal{A}}$. \square

Corollaire 3.4.16. – $\mathfrak{m}I$ est intégralement clôt.
 – $I^{(2)} \subset \mathfrak{m}I$, où $I^{(2)}$ est la deuxième puissance symbolique de I .

PREUVE : La première assertion découle facilement de la démonstration de la proposition 3.11 [Hü], car la fibre spéciale $\mathcal{F}(I)$ est réduite, et l'idéal I est radical.

Pour la deuxième, remarquons d'abord que dans $\mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, la démonstration de [Hü, Théorème 1.2, (iii) \Rightarrow (i)] est aussi valable indépendamment du caractère de \mathcal{K} . Puis, la démonstration de la proposition 3.11 dans cet article est aussi applicable. \square

Corollaire 3.4.17. Posons $q_i = \sum_{u \in \Gamma_i} f_u$, ($i = 1, 2, 3$), et soit $Q = (q_1, q_2, q_3)$ un sous-idéal de I . Alors

$$(QI)_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}^2.$$

Ceci implique que

$$I_{\mathfrak{m}} = Q_{\mathfrak{m}} = \sqrt{(q_1, q_2, q_3)},$$

et $\text{ara}(I_{\mathfrak{m}}) \leq 3$.

Pour le cas où I est l'idéal de définition d'une variété monômiale de codimension 2, Barile et Morales [BM2] ont prouvé que l'idéal de présentation de l'anneau de Rees $\mathcal{R}(It)$ est engendré par des formes de degré 2 au plus. En appliquant le théorème précédent, nous obtenons le même résultat pour un cas plus général. Le résultat crucial est dû à Huckaba et Huneke :

Lemme 3.4.18. [HH, Theorem 2.9 et 4.5] Soit \mathcal{R} un anneau Cohen-Macaulay local, et soit I un idéal de hauteur $d \geq 1$, et "analytic spread" $l(I) = d + 1$. Supposons que les idéaux premiers de \mathcal{R}/I sont tous de même hauteur, et que les idéaux premiers associés de \mathcal{R}/I sont de hauteur au plus $d + 1$. De plus, supposons que I est une intersection complète générique, et qu'il existe une réduction minimale J de I telle que $r_J(I_Q) \leq 1$ pour tout idéal premier ($I \subseteq Q$) avec $\text{codim}(Q/I) = 1$. Finalement, supposons que $\text{depth}(\mathcal{R}/I) \geq \dim(\mathcal{R}/I) - 1$. Alors, l'idéal de présentation de l'anneau de Rees $\mathcal{R}(It)$ de I est Cohen-Macaulay, et défini par des éléments de degré au plus deux.

En outre, il est prouvé dans la proposition 2.1.6 que pour tout idéal de réseau I nous avons :

$$\text{projdim}(\mathcal{R}/I) \leq 2^{\text{codim}I} - 1.$$

En particulier, si I est un idéal de réseau de codimension 2, alors :

$$\text{depth}(\mathcal{R}/I) = \dim R - \text{projdim}(\mathcal{R}/I) \geq \dim R - 3 = \dim(\mathcal{R}/I) - 1.$$

Ainsi l'idéal de réseau I remplit tous les hypothèses du lemme 3.4.18 si I n'est pas une intersection complète de codimension 2. Ceci implique que :

Théorème 3.4.19. *Soit I un idéal de réseau radical, de codimension 2, et I n'est pas une intersection complète dans $\mathcal{R} = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_r]$, où le corps \mathcal{K} est infini. Alors, l'idéal de présentation de l'anneau de Rees $\mathcal{R}[It]$ de I est Cohen–Macaulay, et engendré par des formes de degré deux au plus.*

Cependant, nous n'avons pas répondu aux questions suivantes :

Question 3.4.1. Est-ce que l'idéal de présentation de l'algèbre de Rees est engendré par les relations linéaires et les relations quadratiques introduites dans ce chapitre ?

Dans tous les exemples que nous avons calculé, la réponse à cette question est positive.

Question 3.4.2. Si \mathcal{K} est un corps fini, pour tout I idéal de réseau radical de codimension 2, a-t-on que "l'analytic spread" $l(I)$ est toujours 3 ?

Chapitre 4

Idéaux binômiaux simpliciaux

4.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre, \mathcal{G} signifie un graphe simple fini. On note respectivement $V_{\mathcal{G}}$ et $E_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des sommets, et des arêtes de \mathcal{G} . Le graphe est complet si $E_{\mathcal{G}} = (\langle u, v \rangle \mid u \neq v \in V_{\mathcal{G}})$, où $\langle u, v \rangle$ est l'arête des sommets u, v .

Soit S un sous-ensemble de $V_{\mathcal{G}}$. Notons $\mathcal{G} \setminus S$ le sous-graphe de \mathcal{G} obtenu de \mathcal{G} en effaçant les sommets de S et les arêtes incidentes. De même, on note \mathcal{G}_S le graphe induit de \mathcal{G} sur S .

Un sous-graphe \mathcal{C} induit de \mathcal{G} est appelé un *cycle* si l'ensemble des sommets peut être ordonné, $V_{\mathcal{C}} := \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ et $x_i x_{i+1} \in E_{\mathcal{G}}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, l$ (où $x_{l+1} = x_1$), il sera noté $\mathcal{C} = (x_1 x_2 \dots x_l x_1)$. Le nombre l est la longueur de \mathcal{C} . Le cycle \mathcal{C} a une *corde* s'il existe un nombre $j \neq i+1 \pmod{l}$ tel que $x_i x_j \in E_{\mathcal{G}}$. Appelons \mathcal{C} un *cycle minimal* si \mathcal{C} est de longueur au moins 4 et \mathcal{C} n'a pas de cordes.

Un complexe simplicial Δ sur un ensemble des sommets $V_{\Delta} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une collection de sous-ensembles de V_{Δ} telle que :

- Pour tout i , l'ensemble $\{x_i\}$ est dans Δ ,
- Si $F \in \Delta$ et $G \subset F$, alors $G \in \Delta$.

Un élément d'un complexe simplicial Δ est appelé une *face* de Δ . La dimension d'une face F de Δ , noté par $\dim F$, est définie par $|F| - 1$, où $|F|$ signifie le nombre des sommets de F . La dimension de Δ , noté $\dim \Delta$, est définie par la dimension maximale des faces de Δ . Les faces maximales, pour l'inclusion, dans Δ sont appelées les *facettes* de Δ .

Remarquons qu'en prenant toutes les faces de dimension 0 et 1 de Δ , i.e. les sommets et les arêtes, on associe à Δ un graphe simple \mathcal{G}_{Δ} . Une

facette F de Δ devient un sous-graphe complet de \mathcal{G}_Δ , et est appelée aussi un $|F|$ -clique de \mathcal{G}_Δ .

4.1.1 Idéaux simpliciaux et binômiaux simpliciaux

La notion d'idéal simplicial a été introduite par Marcel Morales. Elle consiste à associer un idéal à un complexe simplicial et à une famille d'idéaux indexée par l'ensemble des facettes. La notion d'idéal simplicial généralise celle d'idéal de Stanley–Reisner. Dans ce chapitre, nous allons considérer quelques cas particuliers et étudier quelques propriétés de ces idéaux simpliciaux.

A chaque ensemble des sommets $V_\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on associe un anneau de polynômes $R = \mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (ici, par abus de notation, x_i désigne un sommet dans V_Δ et aussi une variable dans l'anneau de polynômes). Il est connu que à chaque complexe Δ sur cet ensemble des sommets, on associe un idéal, appelé *idéal de Stanley – Reisner*, défini comme suit :

$$\mathcal{I}_\Delta = (x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_r} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\} \notin \Delta).$$

Cet idéal est engendré par des monômes.

Maintenant, nous allons présenter la définition d'un p -complexe et d'idéal simplicial.

Définition 4.1.1. A chaque facette F_l de Δ , ajoutons quelques points $\{y_{ij}^{(l)}\}$, avec i, j dans un ensemble E_l . Les points $y_{ij}^{(l)}$ sont appelés *points marqués*, et le simplexe sur l'ensembles $F_l \cup \{y_{ij}^{(l)}, (i, j) \in E_l\}$ est une p -*facette*. Par abus de notation et par ce qu'il n'y aura pas de confusion, nous appellerons F_l la p -facette obtenue à partir de F_l .

Un p -*complexe* $\overline{\Delta}$ associé à Δ est le complexe simplicial dont les facettes sont les p -facettes ou les facettes de Δ n'ayant pas de points marqués.

On associe à un p -complexe $\overline{\Delta}$ un graphe, noté $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$.

Pour chaque facette F , on note F° l'ensemble des points de $\overline{\Delta}$, qui appartiennent uniquement à la facette F de $\overline{\Delta}$.

Soit $\overline{\Delta}$ un p -complexe construit par Δ et par un ensemble des points marqués. On associe à $\overline{\Delta}$ l'anneau de polynômes $\mathcal{R} = \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ (ici, $x, y_{ij}^{(l)}$ désigne un sommet dans $\overline{\Delta}$ et aussi une variable dans l'anneau de polynômes).

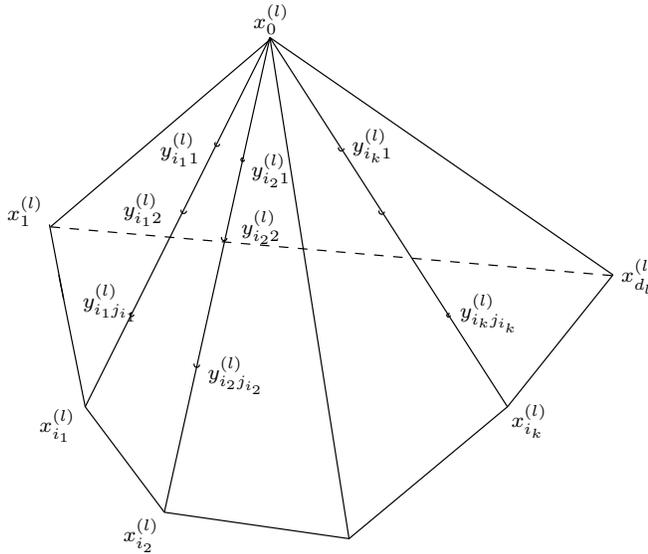
Notation 4.1.2. Nous noterons (E) (resp. $\mathcal{K}[E]$) l'idéal engendré par E (resp. l'anneau des polynômes dont les variables sont les éléments de E).

Définition 4.1.3. Pour chaque p -facette F_l , on se donne un idéal premier $\mathcal{I}_l \subset (F_l)$ de l'anneau $\mathcal{K}[V_{\overline{\Delta}}]$ tel que $\mathcal{I}_l \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$ pour toute p -facette F_i de $\overline{\Delta}$ distincte de F_l .

L'idéal simplicial $\mathcal{P}_{\overline{\Delta}}$ associé au p -complexe $\overline{\Delta}$ est défini comme suit :

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta}} = \left(\sum_{F_l \text{ } p\text{-facette de } \overline{\Delta}} \mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{\overline{\Delta}} \right),$$

où $\mathcal{I}_{\overline{\Delta}}$ est l'idéal de Stanley – Reisner du complexe simplicial $\overline{\Delta}$.



La p -facette F_l

Nous allons considérer une classe particulière d'idéaux simpliciaux engendrés par des binômes :

Une facette F de dimension d de Δ est dite *propre* si F contient q arêtes $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_2 \rangle, \dots, \langle x_0, x_q \rangle$ appartenant uniquement à la facette F . Dans ce cas, ces arêtes sont appelées les *arêtes propres* de F .

Définition 4.1.4. Considérons un p -complexe $\overline{\Delta}$. Soit \mathcal{I}_l l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice :

$$M_l := \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} x_0^{(l)} & y_{i_1 1}^{(l)} & \cdots & y_{i_1 j_{i_1}}^{(l)} & y_{i_2 1}^{(l)} & \cdots & y_{i_2 j_{i_2}}^{(l)} & \cdots & y_{i_{k_l} 1}^{(l)} & \cdots & y_{i_{k_l} j_{i_{k_l}}}^{(l)} \\ y_{i_1 1}^{(l)} & y_{i_1 2}^{(l)} & \cdots & x_{i_1}^{(l)} & y_{i_2 2}^{(l)} & \cdots & x_{i_2}^{(l)} & \cdots & y_{i_{k_l} 2}^{(l)} & \cdots & x_{i_{k_l}}^{(l)} \end{array} \right).$$

Nous appellerons *idéal binomial simplicial* $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ l'idéal simplicial associé à $\overline{\Delta}$ et aux idéaux \mathcal{I}_l correspondant aux p-facettes F_l .

Nous avons que $I_l \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$ pour toute p-facette F_l de $\overline{\Delta}$ distincte de F_l . En effet, tout d'abord remarquons que $(F_l^\circ) \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$ et ensuite $x_0^{(l)} x_{i_s}^{(l)} \in (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$, parce que nous avons que $x_0^{(l)} \in V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l$ ou $x_{i_s}^{(l)} \in V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l$, car dans le cas contraire $x_0^{(l)}$ et $x_{i_s}^{(l)}$ sont dans F_l , ce qui impliquerait que l'arête $\langle x_0^{(l)}, x_{i_s}^{(l)} \rangle \in F_l$, en contradiction avec la définition d'arête propre.

On va démontrer dans la suite que la classe des idéaux est une extension de la classe des idéaux de Stanley – Reisner associé à un complexe simplicial.

4.2 Décomposition primaire

Il est connu que l'idéal de Stanley – Reisner d'un complexe simplicial admet une décomposition en idéaux premiers correspondant aux facettes du complexe, où chaque idéal est engendré par des variables qui ne sont pas dans la facette correspondante. Dans cette section, on va prouver la même propriété pour l'idéal $\mathcal{P}_{\overline{\Delta}}$.

Soit $\mathcal{P}_{\overline{\Delta}}$ l'idéal associé au p-complexe $\overline{\Delta}$. On définit d'abord les idéaux premiers associés aux facettes de $\overline{\Delta}$.

Considérons une facette F_l de $\overline{\Delta}$. On associe à F_l un idéal premier \mathcal{J}_l comme suit :

- $\mathcal{J}_l = (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$, si F_l n'a pas de point marqués (en fait dans ce cas $\mathcal{I}_l = 0$).
- $\mathcal{J}_l = (\mathcal{I}_l, (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l))$, sinon.

Notons que $V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l$ désigne l'ensemble des sommets de $\overline{\Delta}$ qui ne sont pas dans F_l . Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.2.1.

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta}} = \bigcap_{F_l \text{ facette de } \overline{\Delta}} \mathcal{J}_l.$$

PREUVE : Tout d'abord, rappelons le fait bien connu que si I, J sont des ensembles de variables disjoints et $\mathcal{I} = (I), \mathcal{J} = (J)$ alors $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = (pq \mid p \in I, q \in J)$.

On va prouver la proposition par récurrence sur le nombre l des facettes de $\overline{\Delta}$. Notons $\overline{\Delta}'$ le p-complexe construit par les $l - 1$ premières facettes du

p-complexe $\overline{\Delta}$ et $\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}}$ l'idéal associé au p-complexe $\overline{\Delta'}$, et \mathcal{J}'_i l'idéal premier associé à la $i^{\text{ème}}$ facette de $\overline{\Delta'}$. Remarquons que $\mathcal{J}_i = (\mathcal{J}'_i, x \mid x \in F_l^\circ)$ pour tout $(i = 1, 2, \dots, l-1)$. Par récurrence, nous avons $\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}} = \bigcap \mathcal{J}'_i$. Soit F_l la $l^{\text{ème}}$ facette, si F_l n'a pas de points marqués nous poserons $\mathcal{I}_l = 0$. Nous avons que $\mathcal{J}_l = (\mathcal{I}_l, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$, et

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}} = \left(\sum_{1 \leq k \leq l-1} \mathcal{I}_k, \mathcal{I}_{\overline{\Delta'}} \right), \text{ et } \mathcal{P}_{\overline{\Delta}} = \left(\sum_{1 \leq k \leq l} \mathcal{I}_k + \mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{\overline{\Delta}} \right).$$

Pour l'idéal monomial de Stanley–Reisner $\mathcal{I}_{\overline{\Delta}}$, nous savons que :

$$(\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ) \bigcap (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l) = \mathcal{I}_{\overline{\Delta}}. \quad (\alpha)$$

D'autre part, parce que $\mathcal{I}_k \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$ pour tout $k \neq l$, nous avons :

$$\sum_{1 \leq k \leq l-1} \mathcal{I}_k \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l). \quad (\beta)$$

De plus, parce que $\mathcal{I}_l \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_{l'})$ pour toute facette $F_{l'} \neq F_l$ dans $\overline{\Delta}$, on a :

$$\mathcal{I}_l \subset \bigcap_{l' \neq l} (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_{l'}) = (\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ). \quad (\gamma)$$

On en déduit que :

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta}} \subset (\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ) \bigcap (\mathcal{I}_l, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l).$$

On va démontrer l'autre inclusion :

$$\text{soit } r \in (\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ) \bigcap (\mathcal{I}_l, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l),$$

alors $r = u + v = p + q$, avec $u \in \sum_{1 \leq k \leq l-1} \mathcal{I}_k$, $v \in (\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ)$, $p \in \mathcal{I}_l$, et $q \in (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$. D'après (β) et (γ) , on a

$$v - p = q - u \in (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l) \cap (\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ) \stackrel{(\alpha)}{=} \mathcal{I}_{\overline{\Delta}}.$$

Donc

$$r = u + (v - p) + p \in \sum_{1 \leq k \leq l-1} \mathcal{I}_k + \mathcal{I}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{I}_l = \mathcal{P}_{\overline{\Delta}}.$$

D'où, on a :

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta}} = (\mathcal{P}_{\overline{\Delta'}}, F_l^\circ) \bigcap (\mathcal{I}_l, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l).$$

De l'hypothèse de récurrence on déduit que

$$\mathcal{P}_{\overline{\Delta}} = \left(\bigcap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}'_i, F_l^\circ \right) \cap \mathcal{J}_l = \bigcap_{i=1}^{l-1} (\mathcal{J}'_i, F_l^\circ) \cap \mathcal{J}_l = \bigcap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_l.$$

La proposition est prouvée. \square

Corollaire 4.2.2. *Pour l'idéal binomial simplicial $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ associé au p -complexe $\overline{\Delta}$ nous avons :*

- $\mathcal{J}_l = (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$ si F_l n'a de points marqués.
- $\mathcal{J}_l = (2 \times 2 \text{ mineurs de la matrice } M_l ; (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l))$, sinon.

La décomposition primaire de $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ est

$$\mathcal{B}_{\overline{\Delta}} = \bigcap_{F_l \text{ facette de } \overline{\Delta}} \mathcal{J}_l.$$

Remarque 4.2.3. Pour toute facette F_l , l'idéal \mathcal{J}_l est premier et de dimension $1 + d_l$, où d_l est la dimension de F_l .

On en déduit un corollaire sur la dimension de $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ comme suit :

Corollaire 4.2.4. $\dim(\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}) = 1 + \dim(\overline{\Delta}) = \dim(\mathcal{I}_{\Delta})$.

4.3 Arbres, “Scrollers” ou “small variety”

Dans cette section, nous allons étudier quelques propriétés géométriques des idéaux simpliciaux selon le point de vue abordé dans plusieurs articles récents par Barile–Morales, Eisenbud–Green–Hulek–Popescu, et M. Morales.

D'abord, nous rappelons le théorème suivant de [EG] :

Théorème 4.3.1. *Soit R un anneau gradué standard réduit, définissant une variété algébrique projective. Alors nous avons la suite suivante d'implications :*

- (1) R est un anneau de Cohen-Macaulay et $e(R) = 1 + \text{codim } R$, où $e(R)$ est la multiplicité de R et $\text{codim } R$ sa codimension ;
- \Rightarrow (2) R a une résolution 2-linéaire ;
- \Rightarrow (3) $r(R) = 1$;
- \Rightarrow (4) $e(R) \leq 1 + \text{codim } R$

D'autre part, si R est un anneau de Cohen–Macaulay, alors les quatre implications sont des équivalences.

La définition suivante a été considérée par [BM3] et [EGHP] :

Définition 4.3.2. Une suite (ordonnée) $X_1, \dots, X_l \subset \mathbb{P}^r$ de sous variétés projectives irréductibles est *linéairement jointe* si pour tout $i = 1, \dots, l - 1$ nous avons :

$$X_{i+1} \cap (X_1 \cup \dots \cup X_i) = \text{span}(X_{i+1}) \cap \text{span}(X_1 \cup \dots \cup X_i)$$

où $\text{span}(X)$ est le plus petit sous-espace linéaire de \mathbb{P}^r contenant X .

Cette notion a été considérée dans [BM3] de façon algébrique et dans le cadre suivant :

Dans l'anneau de polynômes $\mathcal{K}[\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}^{(m)}, m = 1, \dots, l]$ muni de la graduation standard, soit \mathcal{I}_m l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$M_m := \begin{pmatrix} x_0^{(m)} & y_{i_1 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_1 j_{i_1}}^{(m)} & y_{i_2 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_2 j_{i_2}}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} j_{i_{k_m}}}^{(m)} \\ y_{i_1 1}^{(m)} & y_{i_1 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_1}^{(m)} & y_{i_2 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_2}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_{k_m}}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Soit X'_m la variété projective (non dégénérée) définie par l'idéal \mathcal{I}_m dans l'anneau des polynômes, dont les variables sont les entrées de la matrice M_m ; et soit X_m la variété projective X'_m plongée dans l'espace projectif associé à l'anneau de polynômes $\mathcal{K}[\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}^{(m)}, m = 1, \dots, l]$. L'idéal de définition \mathcal{J}_m de X_m peut s'écrire $\mathcal{J}_m = (\mathcal{I}_m, Q_m)$. Remarquons que Q_m est l'idéal définissant la variété linéaire $\text{span}(X_m)$.

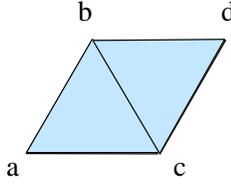
Notation 4.3.3. Dans cette section, pour un ensemble $Q \subset \mathcal{K}[\mathbf{x}^{(l)}, \mathbf{y}^{(l)}]$, la notation $\langle Q \rangle$ signifie le \mathcal{K} -espace vectoriel de $\mathcal{K}[\mathbf{x}^{(l)}, \mathbf{y}^{(l)}]$ engendré par Q , et (Q) est l'idéal engendré par Q .

Pour établir que la suite $X_1, \dots, X_l \subset \mathbb{P}^r$ de sous-variétés projectives irréductibles est linéairement jointe, d'après [BM3, page 163], il suffit d'établir que pour tout $k = 1, \dots, l$:

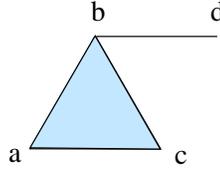
$$\mathcal{J}_k + \cap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_i = (Q_k) + (\cap_{i=1}^{k-1} \langle Q_i \rangle).$$

Dans cette situation, nous dirons que les idéaux $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_l$ sont *linéairement joints*.

Exemple 4.3.4. Considérons les complexes simpliciaux $\overline{\Delta}$ suivants, nous allons démontrer que les idéaux premiers associés à $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ sont linéairement joints.



(4,1)



(4,2)



(4,3)

– Dans les deux cas (4, 1) et (4, 2), nous avons deux facettes F_1, F_2 et

$$V_{\overline{\Delta}} \setminus F_1 = F_2^\circ, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_2 = F_1^\circ.$$

Selon 4.2.2, l'idéal $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ a deux composantes irréductibles :

$$\mathcal{B}_{\overline{\Delta}} = (\mathcal{I}_1, F_2^\circ) \cap (\mathcal{I}_2, F_1^\circ).$$

Donc avec les notations ci-dessus, nous avons $Q_1 = F_2^\circ$, et $Q_2 = F_1^\circ$. D'autre part, par définition de \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , nous avons que $\mathcal{I}_1 \subset (F_1^\circ)$, et $\mathcal{I}_2 \subset (F_2^\circ)$. Il en suit que

$$(\mathcal{I}_1, F_2^\circ) + (\mathcal{I}_2, F_1^\circ) = (F_2^\circ) + (F_1^\circ) = (Q_1) + (Q_2).$$

– Dans le cas (4, 3), nous avons trois facettes F_1, F_2, F_3 , et

$$V_{\overline{\Delta}} \setminus F_1 = F_2^\circ \cup F_3^\circ \cup \{c\},$$

$$V_{\overline{\Delta}} \setminus F_2 = F_1^\circ \cup F_3^\circ,$$

$$V_{\overline{\Delta}} \setminus F_3 = F_1^\circ \cup F_2^\circ \cup \{b\}.$$

Soient $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$, les idéaux engendré par les mineurs 2×2 des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & x_1 & \dots & x_s \\ x_1 & x_2 & \dots & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & y_1 & \dots & y_t \\ y_1 & y_2 & \dots & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & z_1 & \dots & z_u \\ z_1 & z_2 & \dots & d \end{pmatrix},$$

La proposition 4.2.2 implique que $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ a trois composantes irréductibles :

$$\mathcal{B}_{\overline{\Delta}} = (\mathcal{I}_1, F_2^\circ, F_3^\circ, c) \cap (\mathcal{I}_2, F_1^\circ, F_3^\circ) \cap (\mathcal{I}_3, F_1^\circ, F_2^\circ, b).$$

Donc avec les notations ci-dessus, nous avons

$$Q_1 = F_2^\circ \cup F_3^\circ \cup \{c\}, Q_2 = F_1^\circ \cup F_3^\circ, Q_3 = F_1^\circ \cup F_2^\circ \cup \{b\}.$$

D'autre part, par définition de $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ nous avons que $\mathcal{I}_1 \subset (F_1^\circ)$, $\mathcal{I}_2 \subset (F_2^\circ) + (b)$, $\mathcal{I}_2 \subset (F_2^\circ) + (c)$, $\mathcal{I}_3 \subset (F_3^\circ)$, il en suit que

$$(\mathcal{I}_1, F_2^\circ, F_3^\circ, c) + (\mathcal{I}_2, F_1^\circ, F_3^\circ) = (F_2^\circ) + (F_1^\circ) + (c) + (F_3^\circ) = (Q_1) + (Q_2),$$

et

$$\begin{aligned} & (\mathcal{I}_3, F_1^\circ, F_2^\circ, b) + (\mathcal{I}_1, F_2^\circ, F_3^\circ, c) \cap (\mathcal{I}_2, F_1^\circ, F_3^\circ) = \\ & = (\mathcal{I}_3, F_1^\circ, F_2^\circ, b) + (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, F_3^\circ, (F_1^\circ) \cap (F_2^\circ, c)) \\ & = (F_1^\circ, F_2^\circ, b, F_3^\circ). \end{aligned}$$

D’autre part,

$$(Q_3) + (\langle Q_1 \rangle \cap \langle Q_2 \rangle) = (F_1^\circ \cup F_2^\circ \cup \{b\}) + (F_3^\circ)$$

D’où, finalement on a

$$(\mathcal{I}_1, F_2^\circ, F_3^\circ, c) + (\mathcal{I}_2, F_1^\circ) = (Q_3) + (\langle Q_1 \rangle \cap \langle Q_2 \rangle)$$

ce qui complète la preuve.

Il est à remarquer que le cas (4,3) avait été traité par [BM2].

Définition 4.3.5. Un d -arbre généralisé sur un ensemble V de sommets est un graphe défini récursivement par les propriétés suivantes :

- (a) Un graphe complet de $d + 1$ éléments de V est un d -arbre généralisé.
- (b) Soit G un graphe sur un ensemble V de sommets. Supposons qu’il existe un sommet $v \in V$ tel que :
 1. La restriction G' de G à $V' = V \setminus \{v\}$ est un d -arbre généralisé,
 2. Il y a un sous-ensemble $V'' \subset V'$ ayant exactement $1 \leq j \leq d$ sommets tel que la restriction de G to V'' soit un graphe complet, et
 3. G est le graphe engendré par G' et le graphe complet sur $V'' \cup \{v\}$.

Le sommet v dans la définition ci-dessus sera appelé *extremal*.

Si $j = d$ dans la définition ci-dessus, alors nous dirons que G est un d -arbre.

Remarque 4.3.6. Soit $\Delta(G)$ le “clique complexe” de G , i.e. le complexe simplicial dont les sommets sont les sommets de G et les facettes sont les simplexes à support les sous-graphes complets de G . Dans [M2], M. Morales associe à $\Delta(G)$ un graphe $H(G)$ dont les sommets sont les facettes de $\Delta(G)$ et deux facettes sont liées par une arête si et seulement si leur intersection est non vide. Il démontre que G est un d -arbre généralisé si et seulement si $H(G)$ est un arbre.

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants du à Fröberg [Fr] :

Théorème 4.3.7. *L'anneau de Stanley–Reisner d'un complexe simplicial Δ est un anneau Cohen-Macaulay de degré minimal si et seulement si*

1. *Le graphe $G(\Delta)$ est un d -arbre, et*
2. *Δ est le clique complex de $G(\Delta)$, i.e. $\Delta = \Delta(G(\Delta))$.*

Théorème 4.3.8. *L'anneau de Stanley–Reisner d'un complexe simplicial Δ a une résolution 2-linéaire si et seulement si*

1. *Le graphe $G(\Delta)$ est un d -arbre généralisé, et*
2. *$\Delta = \Delta(G(\Delta))$.*

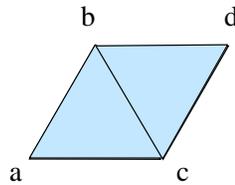
Nous pouvons en partie étendre ces résultats pour les idéaux binômiaux simpliciaux :

Théorème 4.3.9. *Supposons que \mathcal{G}_Δ soit un d -arbre généralisé, ayant l facettes. Pour chaque p -facette F_m ayant des arêtes propres $\langle x_0^{(m)}, x_{i_1}^{(m)} \rangle, \dots, \langle x_0^{(m)}, x_{i_{k_m}}^{(m)} \rangle$, on se donne l'idéal premier \mathcal{I}_m dans l'anneau $\mathcal{K}[F_m]$, engendré par les mineurs 2×2 de la matrice M_m . Soit $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ l'idéal de $\mathcal{K}[\overline{\Delta}]$ associé au p -complexe $\overline{\Delta}$. Alors il y a un ordre dans les idéaux premiers associés de $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ de sorte qu'ils sont linéairement joints. De plus, l'idéal $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ admet une résolution 2-linéaire.*

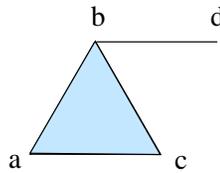
PREUVE : D'après la proposition 4.2.1, les idéaux premiers associés à $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ sont $\mathcal{J}_m = (\mathcal{I}_m, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_m)$, pour $m = 1, \dots, l$. Nous allons démontrer qu'il existe un ordre dans les facettes de $\overline{\Delta}$, de sorte que la suite des idéaux $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_l$ soit linéairement jointe. La preuve est fortement inspirée de [M2], elle se fera par récurrence sur le nombre n de sommets de \mathcal{G}_Δ . Nous allons également démontrer par récurrence la propriété suivante qui sera utile dans la démonstration :

$$\bigcap_{i=1}^l \langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_i \rangle = 0. \quad (*_{\overline{\Delta}})$$

Les premiers cas non triviaux sont pour $n = 4$



(4,1)



(4,2)



(4,3)

Dans ces cas, nous avons vérifié le théorème cas par cas dans l'exemple 4.3.4. Cependant, il nous reste à vérifier dans chacun des cas la condition $(*_{\overline{\Delta}})$.

- Dans les deux cas (4, 1) et (4, 2), nous avons deux facettes F_1, F_2 et

$$\langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_1 \rangle \cap \langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_2 \rangle = \langle F_2^\circ \rangle \cap \langle F_1^\circ \rangle = 0.$$

- Dans le cas (4, 3), nous avons trois facettes F_1, F_2, F_3 et

$$\begin{aligned} & \langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_1 \rangle \cap \langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_2 \rangle \cap \langle V_{\overline{\Delta}} \setminus F_3 \rangle \\ &= \langle F_2^\circ \cup F_3 \rangle \cap \langle F_1^\circ \cup F_3^\circ \rangle \cap \langle F_1 \cup F_2^\circ \rangle \\ &= \langle F_3^\circ \rangle \cap \langle F_1 \cup F_2^\circ \rangle = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que le théorème et la condition $(*\overline{\Delta})$ soient vrais pour n , nous montrons les pour $n + 1$. Parce que c’est un d -arbre généralisé il existe un sommet extremal z_0 . Soit F la facette de $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$, contenant z_0 . Soit l le nombre de facette de $\overline{\Delta}$, notons les F_1, \dots, F_{l-1}, F_l avec $F_l = F$. Soit $\overline{\Delta}'$ le complexe simplicial dont les facettes sont F_1, \dots, F_{l-1} , et $\overline{\Delta}'$ le p -complexe correspondant.

Par hypothèse de récurrence, il y a un ordre dans les facettes F_1, \dots, F_{l-1} de $\overline{\Delta}'$ tel que la suite des idéaux premiers associés à $\overline{\Delta}'$ soit linéairement jointe. Nous allons conclure en reprenant la démonstration de 4.2.1.

Pour toute facette (ou p -facette) F_m de $\overline{\Delta}$, l’idéal correspondant \mathcal{J}_m est $\mathcal{J}_m = (\mathcal{I}_m, V_{\overline{\Delta}} \setminus F_m)$, et pour toute facette (ou p -facette) F_m de $\overline{\Delta}'$, l’idéal correspondant \mathcal{J}'_m est

$$\mathcal{J}'_m = (\mathcal{I}_m, V_{\overline{\Delta}'} \setminus F_m).$$

D’où, pour $m = 1, \dots, l - 1$ on a :

$$\mathcal{J}_m = (\mathcal{J}'_m, F_l^\circ).$$

Nous rappelons que, par convention, $\mathcal{I}_m = 0$ si F_m n’a pas des points marqués.

Par hypothèse de récurrence, pour tout $k = 1, \dots, l - 1$:

$$\mathcal{J}'_k + \cap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}'_i = (Q'_k) + (\cap_{i=1}^{k-1} \langle Q'_i \rangle)$$

avec $Q'_k = V_{\overline{\Delta}'} \setminus F_k$. Or $Q_k = V_{\overline{\Delta}} \setminus F_k = V_{\overline{\Delta}'} \setminus F_k \cup F_l^\circ$, donc il en suit immédiatement que pour tout $k = 1, \dots, l - 1$:

$$\mathcal{J}_k + \cap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_i = (Q_k) + (\cap_{i=1}^{k-1} \langle Q_i \rangle).$$

Il nous reste à démontrer que

$$\mathcal{J}_l + \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i = (Q_l) + (\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle).$$

Mais

$$\mathcal{J}_l + \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i = \mathcal{I}_l + (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l) + \cap_{i=1}^{l-1} (\mathcal{J}'_i, (F_i^\circ)),$$

et par hypothèse $\mathcal{I}_l \subset \cap_{i=1}^{l-1} (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_i) \subset \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i$, donc

$$\mathcal{J}_l + \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i = (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l) + \cap_{i=1}^{l-1} (\mathcal{J}'_i, (F_i^\circ)).$$

Or $\mathcal{B}_{\overline{\Delta'}} + (F_l^\circ) = \cap_{i=1}^{l-1} (\mathcal{J}'_i, (F_i^\circ))$, par la décomposition. De plus, par définition $\mathcal{B}_{\overline{\Delta'}} = \sum_{i=1}^{l-1} \mathcal{I}_i + \mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}$. D'abord, par hypothèse $\sum_{i=1}^{l-1} \mathcal{I}_i \subset (V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$, ensuite l'idéal monomial $\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}$ est inclus dans $(V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l)$, car autrement il y aurait un monôme générateur M de $\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}$ dont le support H serait inclus dans $F_l \cap V_{\overline{\Delta'}}$ et par définition d'un arbre le simplexe de support H est une face aussi bien de F_l que de $\overline{\Delta'}$, ce qui contredit le fait que M est un générateur de $\mathcal{I}_{\overline{\Delta'}}$.

D'où

$$\mathcal{J}_l + \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i = (V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_l) + (F_l^\circ)$$

D'autre part,

$$Q_l = V_{\overline{\Delta}} \setminus F_l = V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_l \text{ et pour } i = 1, \dots, l-1, Q_i = V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_i \cup F_l^\circ.$$

D'où

$$\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle = \cap_{i=1}^{l-1} \langle V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_i \cup F_l^\circ \rangle$$

$$\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle = \cap_{i=1}^{l-1} \langle V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_i \rangle + \langle F_l^\circ \rangle.$$

Comme la condition $(*_\overline{\Delta})$ est vraie, nous avons $\cap_{i=1}^{l-1} \langle V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_i \rangle = 0$. D'où

$$\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle = \langle F_l^\circ \rangle$$

et finalement

$$\langle Q_l \rangle \cap \cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle = \langle V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_l \rangle \cap \langle F_l^\circ \rangle = 0,$$

qui est la propriété $(*_\overline{\Delta})$ pour le p-complexe $\overline{\Delta}$. Puis, on a

$$(Q_l) + (\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle) = (V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_l) + (F_l^\circ).$$

Nous pouvons conclure que

$$\mathcal{J}_l + \cap_{i=1}^{l-1} \mathcal{J}_i = (Q_l) + (\cap_{i=1}^{l-1} \langle Q_i \rangle) = (V_{\overline{\Delta'}} \setminus F_l) + (F_l^\circ),$$

ce qui termine la preuve de la récurrence et du théorème.

En particulier, la variété algébrique définie par l'idéal binomial simplicial $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$ est un "scroller" (selon Barile-Morales [BM3]) ou "small" (selon Eisenbud et als. [EGHP]), et a une résolution 2-linéaire.

4.4 Nombre de réduction 1

Définition 4.4.1. Soit \mathcal{R} un anneau de polynômes en n variables sur un corps \mathcal{K} . Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ un idéal gradué homogène pour la graduation standard et $d = \dim \mathcal{R}/\mathcal{I}$. Un ensemble de formes linéaires $\{g_1, g_2, \dots, g_d\}$ est une *réduction* de \mathcal{R}/\mathcal{I} , si

$$(g_1, g_2, \dots, g_d)\mathfrak{m}^\rho = \mathfrak{m}^{\rho+1} \pmod{\mathcal{I}}$$

où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de l'anneau de polynômes \mathcal{R} .

Le plus petit nombre ρ lorsque l'on considère toutes les réductions possibles est appelé *le nombre de réduction* de \mathcal{R}/\mathcal{I} .

Dans [BM1], Barile et Morales ont décrit une classe des complexes simpliciaux dont l'idéal de Stanley–Reisner a le nombre de réduction 1. Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition 4.4.2. Une $(d+1)$ -*coloration* d'un graphe \mathcal{G} est une partition de l'ensemble des sommets $V_{\mathcal{G}}$ en $d+1$ sous-ensembles, appelés classes de couleurs, telle que deux voisins dans \mathcal{G} appartiennent à deux classes de couleurs différentes. Pour chaque sommet $x \in \mathcal{G}$, notons $\mathcal{C}(x)$ la classe contenant x .

Une $(d+1)$ -coloration de \mathcal{G} est *bonne* si les sommets de chaque cycle appartiennent à au moins trois classes de couleurs différentes. Remarquons que cette définition a du sens uniquement pour $d \geq 2$.

Proposition 4.4.3. [BM1, Theorem 1.1] Soit Δ un complexe simplicial de dimension d . Notons R_Δ son anneau de Stanley–Reisner. Supposons que Δ admet une bonne $(d+1)$ -coloration. Notons $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{d+1}$ les classes de couleurs et pour chaque $i = 1, 2, \dots, d+1$, posons

$$g_i = \sum_{x_i \in \mathcal{C}_i} x.$$

Alors g_1, g_2, \dots, g_{d+1} est un système de paramètres de R_Δ . En particulier, le nombre de réduction de R_Δ est 1.

Dans cette section, nous allons généraliser ce résultat pour les idéaux binômiaux simpliciaux.

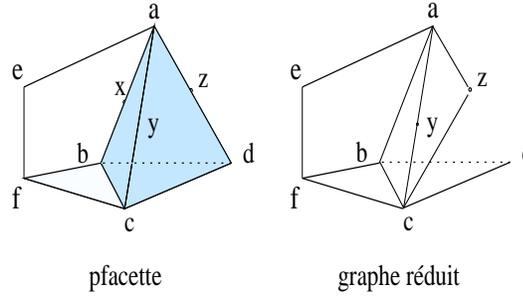
Notation 4.4.4. Soit $F_l = \{x_0^{(l)}, x_{i_1}^{(l)}, \dots, x_{i_{k_l}}^{(l)}, \dots, x_{i_{d_l}}^{(l)}\}$ une p -facette de Δ . Notons $\{\langle x_0^{(l)}, x_{i_1}^{(l)} \rangle, \dots, \langle x_0^{(l)}, x_{i_{k_l}}^{(l)} \rangle\}$ l'ensemble des arêtes propres avec des points marqués de F_l , et $I_l = \{x_0^{(l)}, x_{i_1}^{(l)}, \dots, x_{i_{k_l}}^{(l)}\}$.

Pour les idéaux binômiaux simpliciaux, on n'a pas besoin de colorer tout $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$. En effet, pour chaque p -facette F_l , il suffit de colorer des points extrémaux dans chaque bloc de la matrice associé à F_l . On construit un nouveau graphe

Définition 4.4.5. Le *graphe réduit*, noté $\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}$, de $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$ est donné par :

- L'ensemble des sommets $V_{\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}}$ se compose des points de Δ et des points marqués $y_{i_{j-1}}^{(l)}$ (avec $j \geq 2$) pour toute p -facette F_l .
- L'ensemble des arêtes $E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}}$ se compose des arêtes sans points marqués de $\overline{\Delta}$ et des arêtes $\langle x_0^{(l)}, x_{i_1}^{(l)} \rangle$, $\langle y_{i_{j-1}}^{(l)}, x_0^{(l)} \rangle$, et $\langle y_{i_{j-1}}^{(l)}, x_{i_2}^{(l)} \rangle$ (avec $j = \overline{2, k_l}$) pour toute p -facette F_l .

Exemple 4.4.6. Considerons le p -complexe suivant :



La p -facette $F = [a, b, c, d]$ a des arêtes propres $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$, et $\langle a, d \rangle$. La matrice associé à F est

$$M = \left\{ \begin{array}{cc|cc} a & x & y & z \\ x & b & c & d \end{array} \right\}.$$

Alors, le graphe réduit associé à cette p -facette est comme dans la figure.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.4.7. *Supposons que $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$ admette une bonne $(d+1)$ -coloration. Si pour chaque p -facette F_l avec des arêtes propres $\langle x_0^{(l)}, x_1^{(l)} \rangle$, $\langle x_0^{(l)}, x_2^{(l)} \rangle$, \dots , $\langle x_0^{(l)}, x_{k_l}^{(l)} \rangle$, le point $x_0^{(l)}$ n'appartient qu'à la facette F_l de $\overline{\Delta}$, alors $\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}$ admet une $(d+1)$ -coloration telle qu'il n'y a pas de cycle de deux couleurs (en fait, pas de cycle colorié par deux couleurs dans $E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}} \cap E_{\Delta}$), et pour chaque p -facette F_l on ait :*

1. $\mathcal{C}(x_0^{(l)}) = \mathcal{C}(x_{i_2}^{(l)})$,
2. $\mathcal{C}(y_{i_{j-1}}^{(l)}) = \mathcal{C}(x_{i_{j+1}}^{(l)})$ pour tout $(j = \overline{2, k_l - 1})$

3. $\text{card}(\mathcal{C}(y_{i_{k_l}^{(l)}}) \cap F_l) = 1$.

Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{d+1}$ les classes des couleurs. Posons

$$g_i = \sum_{x_i \in \mathcal{C}_i} x_i.$$

Alors, on a :

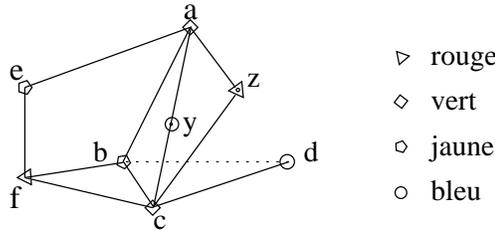
$$(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}} = \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}^2,$$

où $\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est l'idéal maximal de l'anneau de polynômes $\mathcal{R} := \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

En particulier, le nombre de réduction de \mathcal{R}/\mathcal{B} est 1.

Avant de démontrer la proposition, on considère un exemple.

Exemple 4.4.8. Le graphe réduit du p -complexe dans l'exemple 4.4.6 admet une bonne 4-coloration comme suit :



Une bonne 4 – coloration

Les formes linéaires sont $g_1 = a + c$, $g_2 = b + e$, $g_3 = d + y$, et $g_4 = f + z$. Pour le monôme ab dans \mathfrak{m}^2 , on a : $ab = ag_2 - ae \equiv ae = eg_1 - ec$. Comme $ec \in \mathcal{B}$, on a $ae \in (g_1, g_2, g_3, g_4)\mathfrak{m} + \mathcal{B}$. D'où, le monôme ab est dans $(g_1, g_2, g_3, g_4)\mathfrak{m} + \mathcal{B}$ aussi.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.4.7 : Pour avoir une $(d+1)$ -coloration pour $\overline{\Delta}$, il suffit de colorer $x_0^{(l)}$ par la couleur de $x_{i_2}^{(l)}$ et colorer $y_{i_{j_1}^{(l)}}$ par la couleur de $x_{i_{j+1}^{(l)}}$. Comme le point $x_0^{(l)}$ n'appartient qu'à une facette F_l , ce changement ne touche pas l'hypothèse sur les couleurs des cycles dans $E_{\tilde{g}_{\overline{\Delta}}} \cap E_{\overline{\Delta}}$.

Considérons un monôme $xy \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}^2$. On doit démontrer que :

$$xy \in (g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}. \quad (*)$$

La démonstration est divisée en plusieurs cas, qui couvriront tous les cas. Nous noterons la $m^{\text{ième}}$ p -facette par $F_m = \{x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_{d_m}^{(m)}\}$; et

rappelons que \mathcal{I}_m est l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice :

$$M_m := \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} x_0^{(m)} & y_{i_1 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_1 j_{i_1}}^{(m)} & y_{i_2 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_2 j_{i_2}}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} 1}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} j_{i_{k_m}}}^{(m)} \\ y_{i_1 1}^{(m)} & y_{i_1 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_1}^{(m)} & y_{i_2 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_2}^{(m)} & \cdots & y_{i_{k_m} 2}^{(m)} & \cdots & x_{i_{k_m}}^{(m)} \end{array} \right).$$

Pour un point x , nous notons g_x la somme des variables dans la même classe de couleur de x .

- 0-a)** Si x et y ne sont pas dans une même p -facette alors $xy \in \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$.
- 0-b)** Si $\text{card}\mathcal{C}(x) = 1$ et $y \in F^\circ$, alors $xy \equiv g_x y \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$. Donc, le monôme xy vérifie (*). Ainsi, pour toute p -facette F_l , et pour tout $p \in F_l^\circ$ et $0 \neq j \notin I_l$, les monômes $x_{i_1}^{(l)} p$ et $x_j^{(l)} p$ et $y_{i_{k_l}}^{(l)} p$ vérifient (*).
- I)** F_l est une p -facette quelconque, et $x \neq y$ apparaissent dans la matrice M_l associé à F_l et $xy \neq x_i x_{i_m}$ pour $1 \leq l < m \leq k_l$.
- II)** $x \neq y$ sont deux points coloriés dans $\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}$ tels que $\langle x, y \rangle \in E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}} \cap E_{\Delta}$. i.e. xy est l'un des monômes $x_l x_m$ pour $1 \leq l < m \leq d_l$.
- III)** Pour une variable quelconque $x = y$, .

Le cas I : Dans ce cas, puisque xy n'est pas l'un des monômes $x_{i_l} x_{i_m}$ avec $1 \leq l < m \leq k_l$, on peut supposer que x est un point sur l'arête $\langle x_0^{(l)}, x_{i_m}^{(l)} \rangle$ et y est un point sur l'arête $\langle x_0^{(l)}, x_{i_n}^{(l)} \rangle$ avec $1 \leq m \leq n \leq k$. On va démontrer (*) par une récurrence descendante sur m et n .

- I-a)** Si $m = 1$ et $n = k$, alors en utilisant les relations binomiales de la matrice M_l , on se ramène aux cas :
 - $xy \equiv x_{i_1}^{(l)} p$, avec p un point marqué dans F_l° ; ce cas a été traité dans 0 - b),
 - $xy \equiv p y_{i_{k_l}}^{(l)}$, avec p un point marqué dans F_l° ; ce cas a été traité dans 0 - b),
 - $xy = x_0^{(l)} y_{i_{k_l}}^{(l)}$, on remplace $y_{i_{k_l}}^{(l)}$ par $g_{y_{i_{k_l}}^{(l)}}$. Comme $x_0^{(l)}$ n'appartient qu'à F_l et par la coloration, $\mathcal{C}_{y_{i_{k_l}}^{(l)}} \cap F_l = \{y_{i_{k_l}}^{(l)}\}$, on a :

$$xy = x_0^{(l)} y_{i_{k_l}}^{(l)} = x_0^{(l)} g_{y_{i_{k_l}}^{(l)}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

Donc (*) est vraie pour le cas $m = 1$ et $n = k$.

- I-b)** Supposons qu'il existe un couple $m < n$ tel que (*) soit vraie pour tous les couples (m_0, n_0) où $1 \leq m_0 \leq m < n \leq n_0 \leq k$, nous allons prouver que (*) est vraie pour $(m+1, n)$ et pour $(m, n-1)$.
- I-b1)** On va traiter d'abord, le cas $(m+1, n)$. En utilisant les relations binômiales de la matrice M_l , on se ramène aux cas :

- $xy = x_{i_{(m+1)}}^{(l)} p$ avec $p \in F_l^\circ$ un point sur l'arête $\langle x_0^{(l)}, x_{i_n}^{(l)} \rangle$.

Dans ce cas, on a $\mathcal{C}(x_{i_{(m+1)}}^{(l)}) \cap F_l = \{y_{i_m}^{(l)}, x_{i_{m+1}}^{(l)}\}$. Alors :

$$x_{i_{(m+1)}}^{(l)} p = g_{x_{i_{(m+1)}}^{(l)}} p - y_{i_m}^{(l)} p + \mathcal{B}_{\Delta}.$$

Par récurrence, (*) est vraie pour le couple (m, n) . D'où, le monôme $y_{i_m}^{(l)} p$ est dans $(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta}$, donc $x_{i_{(m+1)}}^{(l)} p$ l'est aussi.

- $xy = qy_{i_n}^{(l)}$ avec q un point non colorié sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{m+1}}^{(l)} \rangle$,
- $xy = y_{i_{m+1}}^{(l)} y_{i_n}^{(l)}$, qui ne peut pas être réduit par les relations binômiales

Nous traitons ces deux cas en même temps, dans le deuxième cas nous posons $q = y_{i_{m+1}}^{(l)}$. Nous avons $qy_{i_n}^{(l)} = qg_{y_{i_n}^{(l)}} - qx_{i_{(n+1)}}^{(l)} + \mathcal{B}_{\Delta}$. Puis à nouveau en utilisant les relations binomiales de la matrice M_l , le monôme $qx_{i_{(n+1)}}^{(l)}$ est équivalent à $x_{i_{(m+1)}}^{(l)} p'$ où p' est un point marqué sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{(n+1)}}^{(l)} \rangle$, ou à $q'y_{i_{(n+1)}1}^{(l)}$ avec q' un point marqué sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{(m+1)}}^{(l)} \rangle$. Le monôme $x_{i_{(m+1)}}^{(l)} p'$ modulo $(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta}$, devient $y_{i_m}^{(l)} p'$, qui vérifie (*) (parce que, par récurrence, (*) est vraie pour la couple $(m, n+1)$). Il nous reste à traiter le cas $q'y_{i_{(n+1)}1}^{(l)}$ avec q' un point marqué sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{(m+1)}}^{(l)} \rangle$, qui après le même argument se ramènera au cas $q'y_{i_{(n+2)}1}^{(l)}$ avec q' un point marqué sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{(m+1)}}^{(l)} \rangle$, et ainsi de suite, comme le cas $qy_{i_k}^{(l)}$ a été traité dans 0-b), on en déduit que xy vérifie (*).

Ainsi, (*) est vraie pour $(m+1, n)$.

I-b2) C'est pratiquement la même démonstration pour le couple $(m, n-1)$. En utilisant les relations binomiales de la matrice M_l , on se ramène au cas : $xy = x_{i_m}^{(l)} p$ avec $p \in F_l^\circ$ un point sur l'arête $\langle x_0^{(l)}, x_{i_{(n-1)}}^{(l)} \rangle$, ou $xy = qy_{i_{(n-1)}1}^{(l)}$ avec q un point non colorié sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_m}^{(l)} \rangle$, ou $xy = y_{i_m}^{(l)} y_{i_{n-1}}^{(l)}$, ou $xy = x_0^{(l)} y_{i_{n-1}}^{(l)}$ si $m=1$. Avec les arguments presque identiques au cas du couple $(m+1, n)$, on peut vérifier aussi que les trois premiers monômes satisfont (*). Pour le monôme $xy = x_0^{(l)} y_{i_{n-1}}^{(l)}$, comme $x_0^{(l)}$ n'appartient qu'à F_l , en remplaçant $y_{i_{n-1}}^{(l)}$ par $g_{y_{i_{n-1}}^{(l)}}$, on a :

$$xy = x_0^{(l)} y_{i_{n-1}}^{(l)} \equiv x_0^{(l)} x_{i_n}^{(l)} \pmod{\mathcal{B}_{\Delta}}.$$

Par récurrence, (*) est vraie pour le couple $(1, n)$, donc $x_0^{(l)} x_{i_n}^{(l)}$ vérifie (*). D'où, le monôme $x_0^{(l)} y_{i_{n-1}}^{(l)}$ vérifie (*) aussi. Ainsi, (*) est vraie pour $(m, n-1)$.

Le cas II : xy est l'un des monômes $x_l x_m$ pour $1 \leq l < m \leq d_l$. On remplace x par g_x

$$xy = g_x y - \sum_{z \in \mathcal{C}(x), zy \notin \mathcal{B}_{\Delta}} zy \pmod{((g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathbf{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta})}$$

D'après les cas 0) et I) seuls restent dans la somme les monômes yz , avec y et z dans une même p -facette F_m , pour lesquels $\langle y, z \rangle \in E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}} \cap E_{\Delta}$. On va continuer de remplacer tous les termes yz par $g_y z$ en modulo $(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathbf{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta}$:

$$\begin{aligned} xy &= \sum_{\substack{z \in \mathcal{C}(x) \\ yz \notin \mathcal{B}_{\Delta}}} \sum_{\substack{y_1 \in \mathcal{C}(y) \\ zy_1 \notin \mathcal{B}_{\Delta}}} y_1 z \pmod{((g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathbf{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta})} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Où à nouveau, d'après les cas 0) et I) seuls restent dans la somme les monômes $y_1 z$, avec y_1, z dans une même p -facette F_t , pour lesquels $\langle z, y_1 \rangle \in E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}} \cap E_{\Delta}$. S'il existe encore de monômes dans la somme, on va continuer de développer. On va démontrer que l'algorithme se termine après quelques étapes. Supposons au contraire que l'algorithme ne se termine jamais. Alors, il existe une chaîne infinie de monômes $xy, yz, zy_1, y_1 z_1, \dots$. Comme le nombre de variables est finie, il faut avoir un cycle dans cette chaîne, c.-à-d. on a un cycle dans $E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}} \cap E_{\Delta}$. De plus, chaque point de ce cycle est colorié par la couleur de x ou par la couleur de y (ici, on a $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(y)$ parce que x et y forment une arête de $\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}$), donc on obtient un cycle colorié par deux couleurs dans $E_{\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}} \cap E_{\Delta}$. C'est une contradiction avec le fait que $\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}$ admet une bonne coloration.

D'où, l'algorithme se termine, c.-à-d. :

$$xy \in (g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathbf{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta}.$$

Le cas III) : Pour terminer la démonstration, on considère le cas $x = y$.

- *Le cas III-a)* : x est un point marqué $y_{i_j m}^{(l)}$ avec $m \geq 2$.

En utilisant les relations binômiales, on se ramène au cas $y_{i_j 1}^{(l)} p$, ou au cas $p x_{i_j}^{(l)}$ avec p un point marqué sur $\langle x_0^{(l)}, x_{i_j}^{(l)} \rangle$. Donc on revient sur les cas précédents.

- *Le cas III-b)* : $x = y_{i_j 1}^{(l)}$ pour un $j \in I_l$.

On a :

$$(y_{i_j 1}^{(l)})^2 = g_{y_{i_j 1}^{(l)}} y_{i_j 1}^{(l)} - x_{i_{j+1}}^{(l)} y_{i_j 1}^{(l)} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

De nouveau, le cas I) implique que $x_{i_{j+1}}^{(l)} y_{i_j 1}^{(l)}$ vérifie (*), donc $(y_{i_j 1}^{(l)})^2$ vérifie (*) aussi.

- *Le cas III-c) : $x = x_j$.*

On remplace x_j par g_{x_j} :

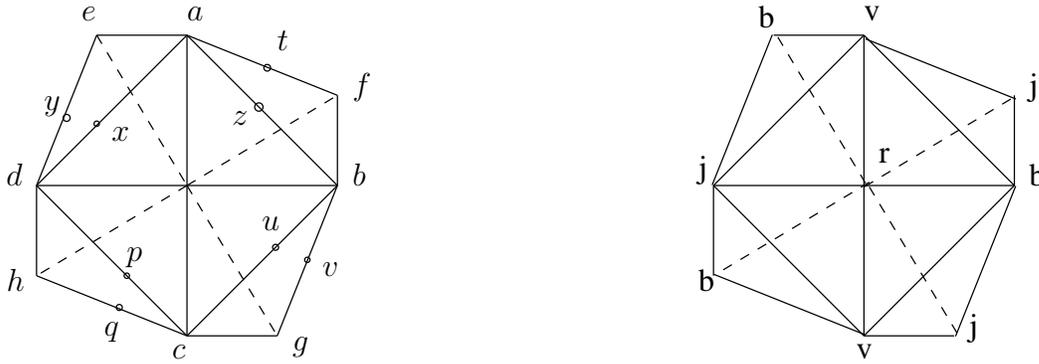
$$x^2 = x_j g_{x_j} - \sum_{p \in \mathcal{C}(x_j), x_j p \notin \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}} x_j p + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

Parce que p et x_j sont de même couleur et se trouvent dans une même p-facette, ils ne forment pas une arête de $\tilde{\mathcal{G}}_{\overline{\Delta}}$. Donc $p x_j$ a été considéré dans le cas I). Ainsi, on a x^2 vérifie (*).

La proposition est donc prouvée. \square

Remarque 4.4.9. La démonstration précédente étend au cas des idéaux binômiaux simpliciaux le principal résultat de [BM2]. Le problème rencontré dans cette extension consiste dans la compatibilité entre la coloration d'un complexe simplicial et les matrices M_l .

Exemple 4.4.10. Sans l'hypothèse que $x_0^{(l)}$ n'appartient pas qu'à F_l , la proposition précédente n'est plus valable. Considérons le p-complexe suivant :



Les matrices associées aux p-facettes sont :

$$M_1 := \left(\begin{array}{cc|c} a & y & x \\ y & h & d \end{array} \right)$$

associée à la p-facette $[o, a, h, d]$ avec des point marqués x, y ;

$$M_2 := \left(\begin{array}{cc|c} b & t & z \\ t & e & a \end{array} \right)$$

associée à la p -facette $[o, b, e, a]$ avec des point marqués z, t ;

$$M_3 := \left(\begin{array}{cc|c} c & v & u \\ v & f & b \end{array} \right)$$

associée à la p -facette $[o, c, f, b]$ avec des point marqués u, v ; et

$$M_4 := \left(\begin{array}{cc|c} d & q & p \\ q & g & c \end{array} \right)$$

associée à la p -facette $[o, d, g, c]$ avec des point marqués p, q .

Il est facile de vérifier que la coloration de Δ par 4 couleurs : rouge (r), vert (v), bleu (b), et jaune (j) précédent est bonne.

Cependant, s'il existe une coloration pour $\bar{\Gamma}$ qui satisfait l'hypothèse de la proposition 4.4.7, alors les points a, b, c, d sont forcément de même couleur, et la classe de couleur de o ne contient qu'un point unique : o . Donc, nous disposons seulement de deux couleurs pour colorer les points e, f, g, h, x, z, u , et p . D'où, entre ces huit points il existe au moins quatre points de même couleur, notons les $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. De plus, il faut noter que les couleurs de e et z sont différentes. Ainsi que les couleurs de f et u , de g et p , de h et x . Cela implique que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ appartiennent à quatre p -facettes différentes. Alors, les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, et a, b, c, d fabriquent un cycle qui est colorié par deux couleurs. On a une contradiction avec la définition de bonne coloration. C'est-à-dire, il n'existe pas une bonne 4-coloration pour $\bar{\Gamma}$. \square

Dans la section précédente, on a vu que si \mathcal{G}_Δ est un d -arbre généralisé, alors $\mathcal{B}_{\bar{\Delta}}$ admet une résolution 2-linéaire, et donc le nombre de réduction de \mathcal{R}/\mathcal{B} est 1. Le but de la proposition suivante est de donner une expression explicite de la réduction.

Proposition 4.4.11. *Supposons que \mathcal{G}_Δ soit un d -arbre généralisé. Alors $\tilde{\mathcal{G}}_{\bar{\Delta}}$ admet une bonne $(d+1)$ -coloration telle que pour chaque p -facette F_l de $\bar{\Delta}$, on ait :*

1. $\mathcal{C}(x_0^{(l)}) = \mathcal{C}(x_{i_2}^{(l)})$,
2. $\mathcal{C}(y_{i_j}^{(l)}) = \mathcal{C}(x_{i_{j+1}}^{(l)})$ pour tout $(j = \overline{2, k_l - 1})$
3. $\text{card}(\mathcal{C}(y_{i_{k_l}}^{(l)}) \cap F_l) = 1$.

Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{d+1}$ les classes des couleurs. Posons

$$g_i = \sum_{x_i \in \mathcal{C}_i} x.$$

De plus, on a :

$$(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}} = \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}^2,$$

où $\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est l'idéal maximal de l'anneau de polynômes $\mathcal{R} := \mathcal{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

PREUVE : On va démontrer la proposition par récurrence sur le nombre l de facettes de $\overline{\Delta}$.

• $l = 1$: La proposition est évidente si la facette n'a pas de points marqués. Supposons que c'est une p -facette $F = \{x_0, x_1, \dots, x_d\}$ avec les points marqués y_{jm} sur les arêtes $\langle x_0, x_j \rangle$ ($j = \overline{1, k}$ avec $1 \leq k \leq d$). Dans ce cas, les classes de couleurs sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{x_1\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{x_0, x_2\}, \\ \mathcal{C}_j &= \{y_{(j-1)1}, x_j\}, \text{ pour tout } j = \overline{3, k}, \\ \mathcal{C}_{k+1} &= \{y_{k1}\}, \\ \mathcal{C}_n &= \{x_{n-1}\}, \text{ pour tout } n = \overline{k+2, d+1}. \end{aligned}$$

Ce cas a été traité dans [BM2]. D'où, la proposition est vraie pour $l = 1$.

• Supposons que la proposition soit vraie pour $l \geq 1$, montrons la pour $l + 1$. Comme $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}}$ est un d -arbre généralisé, il possède un sommet extremal, notons le u . Soit F la facette de $\overline{\Delta}$ contenant u . Considerons $\overline{\Delta}'$ le p -complexe construit par les l facettes différentes de F dans $\overline{\Delta}$. On pose $U = F \cap V_{\overline{\Delta}'}$. D'après la remarque 4.3.6, le graphe $\mathcal{G}_{\overline{\Delta}'}$ est aussi un d -arbre généralisé. Par récurrence, le graphe $\widetilde{\mathcal{G}_{\overline{\Delta}'}}$ admet une bonne $(d + 1)$ -coloration comme dans la proposition, et pour tout $xy \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}'}^2$, on a :

$$xy \in (g'_1, g'_2, \dots, g'_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}'} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}'},$$

où \mathcal{C}'_i, g'_i sont la $i^{\text{ème}}$ classe de couleur et la somme correspondante. Nous avons deux cas :

1. F est une facette sans points marqués de $\overline{\Delta}$.
2. F est une p -facette de $\overline{\Delta}$ et les points marqués sont sur les arêtes liés à x_0 , notons-les $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_0, x_l \rangle$ ($1 \leq l \leq d$).

Pour chaque cas, on va colorier u ainsi que les points dans F° (si F est une p -facette), et on va définir les sommes g_i .

Premier cas : On peut supposer que $F = \{u, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, et $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($1 \leq n \leq k \leq d$), et $x_i \in \mathcal{C}'_i$ pour tout $i = \overline{1, n}$. Pour obtenir une $(d+1)$ -coloration vérifiant la proposition, il suffit de colorier u et les points $x_i \notin U$ par des couleurs quelconques \mathcal{C}'_j avec $j > n$. Par

exemple, on peut colorier x_i par la $i^{\text{ème}}$ couleur ($\forall i = \overline{n+1, k}$), et u par la $(d+1)^{\text{ème}}$ couleur. Donc, on a :

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}'_i \text{ et } g_i = g'_i \text{ pour tout } i = \overline{1, n} \text{ ou } i = \overline{k+1, d},$$

$$\mathcal{C}_j = \mathcal{C}'_j \cup \{x_j\} \text{ et } g_j = g'_j + x_j, j = \overline{n+1, k},$$

$$\mathcal{C}_{d+1} = \mathcal{C}'_{d+1} \cup \{u\} \text{ et } g_{d+1} = g'_{d+1} + u.$$

Remarquons que pour tout j le support de $g_j - g'_j$ est inclus dans F° .
Considérons un monôme $xy \in \mathfrak{m}_{\Delta}^2$. Il faut démontrer que

$$xy \in (g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\Delta} + \mathcal{B}_{\Delta}. \quad (*)$$

Traitons précisément toutes les situations.

- $x, y \in F^\circ := \{u, x_{n+1}, \dots, x_k\}$. Alors, $\mathcal{C}(x) \cap F$ ne contient que x .
Donc on a $yp \in \mathcal{B}_{\Delta}$ pour tout $p \in \mathcal{C}(x)$ et $p \neq x$. Ceci implique que $xy = yg_x + \mathcal{B}_{\Delta}$. C'est-à-dire xy vérifie (*).
- $x \in F^\circ$ et $y \notin F^\circ$: Dans ce cas $xy \in \mathcal{B}_{\Delta}$ sauf si $y = x_i \in U$. Si c'est le cas, parce que $\mathcal{C}_i \cap F = \{x_i\}$ et $x \in F^\circ$, on a aussi que $xy = xx_i = xg_i + \mathcal{B}_{\Delta}$.
- $x, y \notin F^\circ$: Alors x et y sont dans $\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta'}$. Par récurrence, on a :

$$xy = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i \pmod{\mathcal{B}_{\Delta'}},$$

avec $m_i \in \mathfrak{m}_{\Delta'}$.

Mais

$$\sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g_i - \sum_{i=1}^{d+1} m_i (g_i - g'_i).$$

Or $m_j \in \mathfrak{m}_{\Delta'}$, et d'après le cas précédent nous avons yz vérifie (*) pour tout $y \in V_{\Delta'}, z \in F^\circ$. Ainsi, le monôme xy aussi vérifie (*).

On termine donc le cas où F n'est pas une p -facette.

Deuxième cas : On peut supposer que $F \cap V_{\Delta} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ($1 \leq l \leq k \leq d$). D'abord, il faut remarquer que les arêtes propres de F n'appartiennent pas à $\overline{\Delta'}$, c.à-d. soit $x_0 \in F^\circ$, soit $x_i \in F^\circ$ pour tout $i = \overline{1, l}$. La matrice associée à F est de la forme

$$M := \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} x_0 & y_{11} & \cdots & y_{1j_1} & y_{21} & \cdots & y_{2j_2} & \cdots & y_{l1} & \cdots & y_{lj_l} \\ y_{11} & y_{12} & \cdots & x_1 & y_{22} & \cdots & x_2 & \cdots & y_{l2} & \cdots & x_l \end{array} \right).$$

- a) $x_0 \in F^\circ$, i.e $x_0 \notin U$: Pour colorier $\tilde{\mathcal{G}}_{\Delta}$, on donne à chaque point x dans $V_{\Delta} \setminus \{U, x_0\}$ une couleur qui n'est pas utilisée pour U , et on donne :

- à x_0 la couleur de x_2 ;
- à $y_{(j-1)1}$ la couleur de x_j pour tout $j = \overline{3, l}$.
- à y_{l1} la $(k+1)^{\text{ième}}$ couleur.

On peut supposer que $x_i \in \mathcal{C}'_i$ pour tout $i = \overline{1, k}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
g_2 &= g'_2 + x_0, \text{ si } x_2 \in U, \\
g_2 &= g'_2 + x_2 + x_0, \text{ si } x_2 \notin U; \\
g_j &= g'_j + y_{(j-1)1} \text{ pour tout } j = \overline{3, l} \text{ et } x_j \in U; \\
g_j &= g'_j + x_j + y_{(j-1)1} \text{ pour tout } j = \overline{3, l} \text{ et } x_j \notin U; \\
g_n &= g'_n + x_n \text{ pour tout } n = 1, n = \overline{l+1, k} \text{ et } x_n \notin U; \\
g_i &= g'_i \text{ pour les autres couleurs;} \\
g_{k+1} &= g'_{k+1} + y_{l1}.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout j le support de $g_j - g'_j$ est inclus dans F° .

Comme dans le cas précédent, on va vérifier (*) pour tout monôme $xy \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}^2$. Nous avons les cas suivants :

- $x \neq y$, x et y apparaissent dans M et $xy \neq x_m x_n$: Remarquons que l'on a $x_0 \in F^\circ$, donc les arguments utilisés dans la démonstration de la proposition précédente sont applicables ici. Alors, ce cas est vérifié.
- $x \neq y$, $x \in F^\circ$, et y n'apparaît pas dans M : Il suffit de vérifier le cas où $y = x_j$ avec $k \geq j \geq l+1$, car sinon on a $y \notin F$, donc $xy \in \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$. Soit $y = x_j$, alors la classe de couleur \mathcal{C}_j de x_j ne contient pas d'autre point de F autre que x_j , alors, on a :

$$xy = xg_j + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

Ceci implique que xy vérifie (*).

- $x, y \in V_{\overline{\Delta}}$: Par récurrence, on a :

$$xy = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}},$$

avec $m_i \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}$. D'où,

Par récurrence, on a :

$$xy = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}},$$

avec $m_i \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}$.

Mais

$$\sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g_i - \sum_{i=1}^{d+1} m_i (g_i - g'_i).$$

Or $m_j \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta^l}}$, et d'après le cas précédent nous avons yz vérifie (*) pour tout $y \in V_{\overline{\Delta^l}}, z \in F^\circ$. Ainsi, le monôme xy aussi vérifie (*).

- $x = y \in F^\circ$: Dans ce cas, si de plus x n'est pas colorié, en utilisant les relations binômiales de M , on se ramène aux cas précédents. Si x est colorié, on remplace x par la somme g_x de toutes les variables dans la classe de couleurs de x , on se ramène au cas $x \neq y$: $xy = g_x y - \sum_{p \in \mathcal{C}(x), p \neq x} p y$. On en déduit que xy vérifie (*).
- b) $x_0 \notin F^\circ$: Alors, $x_i \in F^\circ$ pour tout $i = \overline{1, l}$. On peut supposer que $U = \{x_0, x_m, \dots, x_k\}$ avec $l < m \leq k$, et que $x_j \in \mathcal{C}_j$ pour tout $j = \overline{m, k}$, et $x_0 \in \mathcal{C}_2$. On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{C}'_1 \cup \{x_1\}; \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{C}'_2 \cup \{x_2\}; \\ \mathcal{C}_i &= \mathcal{C}'_i \cup \{x_i, y_{(i-1)1}\} \text{ pour tout } i = \overline{3, l}; \\ \mathcal{C}_n &= \mathcal{C}'_n \cup \{x_n\} \text{ pour tout } n = \overline{l+1, m-1}; \\ \mathcal{C}_j &= \mathcal{C}'_j \text{ pour tout } j \geq m; \\ \mathcal{C}_{k+1} &= \mathcal{C}'_{k+1} \cup \{y_{l1}\}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} g_1 &= g'_1 + x_1; \\ g_2 &= g'_2 + x_2; \\ g_i &= g'_i + x_i + y_{(i-1)1} \text{ pour tout } i = \overline{3, l}; \\ g_n &= g'_n + x_n \text{ pour tout } n = \overline{l+1, m-1}; \\ g_j &= g'_j \text{ pour tout } j \geq m \text{ et } j \neq k+1; \\ g_{k+1} &= g'_{k+1} + y_{l1}. \end{aligned}$$

Maintenant, on va vérifier (*) pour tout monôme $xy \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta}}^2$. Comme dans le cas a), nous avons les cas suivants :

- $x \neq y$, x et y apparaissent dans M : Supposons que x est dans le $m^{\text{ème}}$ bloc, et que y est dans le $n^{\text{ème}}$ bloc ($1 \leq m \leq n \leq l$) de la matrice M . On va démontrer (*) par récurrence sur m et n .
 - Si $m = 1$ et $n = k$, alors en utilisant les relations binômiales de la matrice M , on a
 - soit $xy \equiv x_1 p$,

- soit $xy \equiv py_{l1}$ avec p est un point marqué dans F° ;
- ou $xy = x_0y_{l1}$,
- ou $xy = x_1x_l$.
- Dans le premier cas, comme $\mathcal{C}_1 \cap F = \{x_1\}$ et que $p \in F^\circ$, on a : $qp \in \mathcal{B}_{\overline{\Delta}} \forall q \in \mathcal{C}_1$ et $q \neq x_1$. Donc $x_1p \equiv g_1p \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$.
- De même pour le deuxième cas, comme $\mathcal{C}_{k+1} \cap F = \{y_{l1}\}$, on a aussi que $py_{l1} \equiv pg_{k+1} \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$.
- Pour le monôme $xy = x_0y_{l1}$, on remplace x_0 par g_2 . Car $y_{l1} \in F^\circ$ et par a coloration, $\mathcal{C}_2 \cap F = \{x_0, x_2\}$, on a :

$$xy = g_2y_{l1} - x_2y_{l1} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

Mais on a aussi que $x_2 \in F^\circ$, donc $x_2y_{l1} \equiv x_2g_{k+1} \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$. Ainsi, le monôme x_0y_{l1} vérifie (*).

- Pour le monôme x_1x_l . Parce que $x_l \in F^\circ$ et $\mathcal{C}_1 \cap F = \{x_1\}$, on a $x_1x_l \equiv g_1x_l \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$.

D'où (*) est vraie pour le cas $m = 1$ et $n = k$.

- Supposons que (*) soit vraie pour le couple $(1, m)$ ($1 < m \leq l$), nous allons prouver que (*) est vraie pour $(1, m-1)$. En utilisant les relations binômiales de la matrice M , on se ramène aux cas :
 - $xy = x_1p$ avec $p \in F^\circ$ un point marqué dans le bloc $m-1$,
 - ou $xy = qy_{(m-1)1}$ avec $q \in F^\circ$ un point non colorié dans le premier bloc,
 - ou $xy = x_0y_{(m-1)1}$,
 - ou $xy = x_1x_{m-1}$.
 - Pour le premier et le dernier cas où $x = x_1$, comme p et x_{m-1} sont dans F° , et que $\mathcal{C}_1 \cap F = \{x_1\}$ on a : $xy = x_1y \equiv g_1y \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$.
 - Pour le deuxième cas, en remplaçant $y_{(m-1)1}$ par g_m , comme $q \in F^\circ$, on a : $qy_{(m-1)1} \equiv qg_m - qx_m \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$, tandis que qx_m vérifie (*) par récurrence.
 - Pour le troisième monôme, parce que $y_{(m-1)1} \in F^\circ$, on a :

$$x_0y_{(m-1)1} \equiv g_2y_{(m-1)1} - x_2y_{(m-1)1}.$$

Puis, parce que $x_2 \in F^\circ$, on a :

$$x_2y_{(m-1)1} \equiv x_2g_m - x_2x_m.$$

Mais on a aussi que $x_m \in F^\circ$, donc $x_2x_m \equiv x_mg_2 - x_0x_m$. Par récurrence, on a que x_0x_m vérifie (*). Ainsi, le monôme $x_0y_{(m-1)1}$ vérifie (*) aussi.

Remarquons que le cas $m - 1 = 1$ nécessite quelques notations adéquates, mais se traite de la même façon.

D'où (*) est vraie pour $(1, m - 1)$.

- Supposons qu'il existe un couple (m, n) avec $m < n$ tel que (*) est vraie pour (m, n) , nous allons prouver que (*) est vraie pour $(m + 1, n)$.

En utilisant les relations binomiales de la matrice M , on se ramène aux cas :

$xy = x_{(m+1)}p$ avec $p \in F^\circ$ est un point dans le $n^{\text{ème}}$ bloc,

ou $xy = qy_{n1}$ avec $q \in F^\circ$ est un point marqué dans le $(m + 1)^{\text{ème}}$ bloc,

ou $xy = x_{m+1}x_n$.

- Dans le premier cas, on a $\mathcal{C}_{m+1} \cap F = \{y_{m1}, x_{(m+1)}\}$. Alors :

$$x_{(m+1)}p = g_{m+1}p - y_{m1}p + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}.$$

Par récurrence, (*) est vraie pour le couple (m, n) . D'où, le monôme $y_{m1}p$ est dans $(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$, donc $x_{i_{(m+1)}}^{(l)}p$ vérifie (*) aussi.

- Dans le deuxième cas, on remarque que $qy_{n1} = qg_{n-1} - qx_{(n+1)} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$. Puis à nouveau après modulo $\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$, le monôme $qx_{(n+1)}$ est équivalent à $x_{(m+1)}p'$ avec p' un point marqué dans le $(n + 1)^{\text{ème}}$ bloc, ou à $q'y_{(n+1)1}$ avec q' un point marqué dans le $(m + 1)^{\text{ème}}$ bloc. Après modulo

$(g_1, g_2, \dots, g_{d+1})\mathfrak{m}_{\overline{\Delta}} + \mathcal{B}_{\overline{\Delta}}$, le monôme $x_{(m+1)}p'$ devient $y_{m1}p'$, qui vérifie (*) (parce que, par récurrence, (*) est vraie pour la couple $(m, n + 1)$). Comme $qy_{l1} = qy_{k+1} \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$, on en déduit que xy vérifie (*).

- Dans le dernier cas, parce que $x_n \in F^\circ$, après remplaçant x_{m+1} par g_{m+1} , on a : $x_{m+1}x_n = g_{m+1}x_n - y_{m1}x_n \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$. Par récurrence, le monôme $y_{m1}x_n$ vérifie (*). On déduit que $x_{m+1}x_n$ vérifie aussi (*).

Ainsi, (*) est vraie pour $(m + 1, n)$.

- $x \neq y, x \in F^\circ$ et y n'apparaît pas dans M : Il suffit de considérer le cas $y = x_i$ avec $i > l$. On a alors $\mathcal{C}_i \cap F = \{x_i\}$. Donc, en remplaçant x_i par g_i , on obtient $xy \equiv xg_i \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta}}}$.
- $x = x_0$ et $y = x_i$ avec $l + 1 \leq i \leq m - 1$: Dans ce cas $y \in F^\circ$, donc $xy \equiv g_2y - x_2y$. On revient sur le cas précédent où $x \in F^\circ$ et y n'apparaît pas dans M .

- $x, y \in V_{\overline{\Delta'}}$: Par récurrence, on a :

$$xy = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta'}}},$$

avec $m_i \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta'}}$. D'où,

Par récurrence, on a :

$$xy = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i \pmod{\mathcal{B}_{\overline{\Delta'}}},$$

avec $m_i \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta'}}$.

Mais

$$\sum_{i=1}^{d+1} m_i g'_i = \sum_{i=1}^{d+1} m_i g_i - \sum_{i=1}^{d+1} m_i (g_i - g'_i).$$

Or $m_j \in \mathfrak{m}_{\overline{\Delta'}}$, et d'après le cas précédent nous avons yz vérifie (*) pour tout $y \in V_{\overline{\Delta'}}, z \in F^\circ$. Ainsi, le monôme xy aussi vérifie (*).

- $x = y \in F^\circ$: Dans ce cas, si de plus x n'est pas colorié, en utilisant les relations binômiales de M , on se ramène aux cas précédents. Si x est colorié, on remplace x par la somme g_x de toutes les variables dans la classe de couleurs de x , on se ramène au cas $x \neq y$: $xy = g_x y - \sum_{p \in \mathcal{C}(x), p \neq x} p y$. On en déduit que xy vérifie (*).

D'où la proposition. □

Bibliographie

- [BM1] Barile M., Morales M., *On Stanley-Reisner Rings of Reduction Number One*, Ann. Sc.Nor. Sup. Pisa, Serie IV. Vol. **XXIX** Fasc. 3. (2000), 605 – 610.
- [BM2] Barile M., Morales M., *On certain algebras of reduction number one*, J. Algebra **206** (1998), 113 – 128.
- [BM3] Barile M., Morales M., *On unions of scrolls along linear spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **111** (2004), 161 – 178.
- [BM4] Barile M., Morales M., *On the equations defining minimal varieties*, Comm. Alg., **28** (2000), 1223 – 1239.
- [Br] Bresinsky H., *Free resolutions of monomial curves in \mathbb{P}^3* , Linear Algebra and Appl. **59** (1984), 121 - 129.
- [BH] Bruns W., Herzog J., *Semigroup rings and simplicial complexes*, J. Pure and Applied Algebra **122** (1997), 185 – 208.
- [BE1] Buchsbaum D. , Eisenbud D., *Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977), 447 - 485.
- [BE2] Buchsbaum D., Eisenbud D., *What makes a complex exact ?* J. Algebra **25** (1973), 259 - 268.
- [CM] Campillo A., Marijuan C., *Higher order relations for a numerical semigroup*, Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (2) **3** (1991), 249–260.
- [CZ] Cortadellas T. and Zarzuela S., *On the depth of the fiber cone of filtrations*, J. Algebras **198** (1997), 428 - 445.
- [CN] Cowsik R.C., Nori M.V., *On the fibers of blowing up*, J. of the Indian Math. Soc., **40** (1976), 217 - 222.
- [DRV] D’Cruz C., Raghavan K. N, Verma J. K., *Cohen-Macaulay fiber cones*, Commutative algebra, algebraic geometry, and computational methods (1996), 233–246, Springer, Singapore (1999).

- [EGHP] Eisenbud D., Green M., Hulek K., Popescu S., *Restricting linear syzygies : algebra and geometry*, Compos. Math. **141** (2005), no. 6, 1460–1478.
- [EG] Eisenbud D., Goto S., Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra **88** (1984), 89 – 133.
- [EH] Eisenbud D., Huneke C., *Cohen-Macaulay Rees algebras and their specialization*, J. Algebra **81** (1983), no. 1, 202 - 224.
- [ES] Eisenbud D., Sturmfels B., *Binomial ideals*, Duke Math. J. **84** (1996), no. 1, 1–45.
- [Fr] Fröberg R., *On Stanley – Reisner rings*, Banach Center Publ. **26**, Part 2 (1990), 57 – 70.
- [GMS] Gimenez Ph., Morales M., Simis A., *The analytical spread of the ideal of codimension 2 monomial varieties*, Result. Math. Vol **35** (1999), 250 - 259.
- [HRZ] Herrmann M., Ribbe J., Zazuela S., *On Rees and Form rings of almost complete intersections*, Com. in Algebra, **21(2)** (1993), 647 - 664.
- [He] Herzog J., *Generators and relations*, Manuscr. Math. **3** (1970), 23 - 26.
- [HH] Huckaba S., Huneke C., *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 373 - 402.
- [Hü] Hübl R., *Evolutions and valuations associated to an ideal*, J. reine angew. Math. **517** (1999), 81 - 101.
- [Ma] Matsumura H., *Commutative Algebra*, Math. Lecture Notes Series, 1980.
- [M1] Morales M., *Equations des variété monomiales en codimension deux*, J. Algebra **175** (1995), 1082 - 1095.
- [M2] Morales M., *Set theoretic complet intersection for monomial and binomial ideals*, en préparation.
- [MS] Morales M., Simis A., *Symbolic Powers of Monomial Curves in \mathbb{P}^3 lying on a Quadric Surface*, Comm. in Algebra **20(4)** (1992), 1109 - 1121.
- [PS] Peeva I., Sturmfels B., *Syzygies of codimension 2 lattice ideals*, Mathematische Zeitschrift **229** (1998), 163 - 194.
- [St] Stanley R.P., *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics, Vol **41**, Birkhauser.
- [Va] Valla G., *On the Symmetric and Rees algebras of an ideal*, Manuscripta Math. **30** (1980), 239 - 255.

-
- [Vas] Vasconcelos W. V., *Arithmetic of Blow-up Algebras*, London Math. Soc., Lecture Note Series **195**, Cambridge Uni. Press, Cambridge (1994).