



HAL
open science

ESTIMATION DES PROPRIETES POROMECANIQUES EFFECTIVES DES ARGILITES: APPORT DES METHODES D'HOMOGENEISATION

Quoc Vu Huynh

► **To cite this version:**

Quoc Vu Huynh. ESTIMATION DES PROPRIETES POROMECANIQUES EFFECTIVES DES ARGILITES: APPOINT DES METHODES D'HOMOGENEISATION. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2006. Français. NNT : . tel-00180319

HAL Id: tel-00180319

<https://theses.hal.science/tel-00180319>

Submitted on 18 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy
Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages
Ecole Doctorale RP2E

THESE

Présentée à l'IN.P.L.
en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'INPL

en Génie Civil - Hydrosystèmes - Géotechnique

par

HUYNH Quoc Vu

Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d'homogénéisation

*Soutenue publiquement le 06 décembre 2006
devant la Commission d'Examen*

A. MOLINARI	Professeur, Université de Metz	Président
D. KONDO	Professeur, Université des Sciences et Technologie de Lille	Rapporteur
L. DORMIEUX	Professeur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées	Rapporteur
F. HOMAND	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine	Examineur
K. SU	Ingénieur de Recherche, HDR, Andra	Examineur
A. GIRAUD	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse
D. HOXHA	Dr. HDR, Institut National Polytechnique de Lorraine	Co-Directeur de thèse

*À ma famille,
À mon père, à ma mère,
À la mémoire de ma grand-mère*

Remerciements

Je suis à la fin d'un pas important de mon parcours scientifique, c'est le moment où je peux exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé pendant trois années de thèse. Ce sont les gens sans qui ce travail n'aurait pas pu avoir lieu.

Je tiens tout d'abord à remercier sincèrement et profondément mon directeur de thèse, le Pr. Albert Giraud qui m'a donné beaucoup de connaissances et de conseils efficaces dans les domaines du calcul numérique et de l'homogénéisation. Je n'oublierai sans doute jamais nos nombreuses discussions scientifiques si enrichissantes pour moi, ainsi que les corrections et critiques de mon manuscrit. Je voudrais lui exprimer toute ma reconnaissance. Je tiens également à remercier vivement mon co-directeur, Monsieur Dashnor Hoxha (HDR d'INPL, chercheur au LaEGO) pour m'avoir donné le goût de la recherche et pour les connaissances, la confiance et les conseils qu'il m'a apporté. C'est lui, avec son caractère, qui m'a tout simplement appris à être un scientifique. Je lui exprime ma gratitude profonde.

Je voudrais adresser mes remerciements au Pr. Françoise Homand, directrice du LaEGO, qui m'a accueilli au sein de son équipe de recherche, m'a donné des conseils et a accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens ensuite à exprimer ma sincère reconnaissance au Pr. Alain Molinari qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma thèse. Je souhaiterais remercier très vivement les Pr. Luc Dormieux et Djimédo Kondo pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs, ainsi que pour leurs remarques, qui ont contribué à l'amélioration de mon manuscrit. Un grand remerciement est destiné à Monsieur Kun Su (HDR, ingénieur de recherche de l'ANDRA) pour le temps qu'il a consacré à parcourir le manuscrit et pour sa disponibilité.

J'exprime ma reconnaissance à l'INPL pour le soutien financier qui m'a été apporté durant ce travail.

Je remercie l'ensemble du personnel du LaEGO. Je tiens tout particulièrement à remercier Cosmin et Phi, mes deux collègues de l'équipe "modélisation numérique". Je n'oublierais jamais nos discussions, leurs disponibilité, leur bonne humeur et surtout, l'amitié qu'ils m'ont prouvée dans plusieurs situations. Je vous souhaite, mes deux vrais amis, une grande réussite sur le chemin de la recherche. Un merci aussi particulier à Elie pour son soutien dans le domaine de la géologie, pour ses conseils de "savoir-vivre" et pour son amitié. Un grand merci à mes amis qui m'ont apporté du bonheur et de nombreux moments de détente : Fabrice, "mon fils" Jon, Sébastien, Sergey "danse", Sergey "foot", Vincent, Dragan, Richard, Laurent, Mohamad, Jérôme, J-B, Frank, Tatiana...

Je n'oublie pas les amis vietnamiens qui ont partagé des moments difficiles de la vie quotidienne à Nancy : Diep, Linh, Tung, Hung, Yen,... Un remerciement spécial adressé à Phuong Anh pour

toute l'aide qu'elle m'a apporté.

On garde le meilleur pour la fin, je dois beaucoup à ma famille, à mes parents et ma soeur. Ma reconnaissance la plus sincère est destinée à mes parents, merci de m'avoir soutenu, rassuré et motivé durant toutes ces années d'études. Merci à ma soeur, Uyen, qui m'a fait confiance et m'a soutenu sans condition.

Table des matières

Introduction générale	11
Chapitre I Homogénéisation du comportement poroélastique linéaire	15
I.1 Introduction	15
I.2 Approche d'homogénéisation	16
I.2.1 Introduction à la micromécanique des matériaux	16
I.2.2 Méthodologie de l'homogénéisation	17
I.3 Homogénéisation des milieux linéaires élastiques à l'état initial naturel	17
I.3.1 L'étape de représentation	18
I.3.2 L'étape de localisation	18
I.3.3 L'étape d'homogénéisation	22
I.3.4 Application au matériau poreux sec	23
I.4 Homogénéisation des milieux linéaires élastiques à l'état non naturel	25
I.4.1 Théorème de Levin	25
I.4.2 Application au matériau poreux saturé	28
I.5 Méthodes d'estimation classiques	30
I.5.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby	31
I.5.2 Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby	33
I.5.3 Le schéma dilué ou le schéma d'Eshelby	35
I.5.4 Le schéma de Mori-Tanaka	36
I.5.5 Le schéma autocohérent	38
I.5.6 Schéma Ponte Castaneda et Willis (PCW)[66]	40
I.6 Quelques outils pour la description de la géométrie des inclusions	41
I.6.1 Systèmes de coordonnées définissant l'orientation de l'inclusion	41
I.6.2 Fonction de distribution en orientation (ODF) de pores	44
I.7 Applications aux roches poreuses	46
I.7.1 Propriétés des constituants	46
I.7.2 L'influence du schéma d'homogénéisation sur les propriétés poroélastiques	49
I.7.3 L'effet de la morphologie de pores sur les propriétés poroélastiques	52
I.7.4 Une modélisation de la déconnexion de l'espace poreux	55

I.8	Conclusions	58
Chapitre II Effet de l'anisotropie de la matrice sur le comportement macroscopique		61
II.1	Introduction	61
II.2	Tenseur de Hill pour une inclusion sphérique dans un milieu isotrope transverse	62
II.2.1	Calcul de la solution	62
II.2.2	Validation des résultats obtenus	65
II.3	Détermination des propriétés poromécaniques	66
II.3.1	Tenseur de Biot du milieu poreux isotrope transverse	67
II.3.2	Schéma d'homogénéisation et propriétés effectives	68
II.3.3	Effet de la géométrie du pore sur les propriétés poroélastiques	70
II.4	Conclusions	72
Chapitre III Matrice isotrope transverse et inclusions à orientations arbitraires		77
III.1	Introduction	77
III.2	Tenseur de Hill pour une inclusion ellipsoïdale aplatie orientée arbitrairement dans un milieu isotrope transverse	79
III.2.1	Solution du tenseur de Hill dans le repère <i>intermédiaire</i>	79
III.2.2	Tenseur de Hill dans le repère global	84
III.3	Distributions des inclusions ellipsoïdales dans une matrice isotrope transverse	86
III.3.1	Distribution isotrope des inclusions ellipsoïdales	87
III.3.2	Distribution d'orientation (ODF) des inclusions ellipsoïdales	90
III.4	Application à l'estimation des propriétés poroélastiques effectives d'une roche poreuse	91
III.4.1	Schémas d'homogénéisation et les propriétés poroélastiques effectives	91
III.4.2	Un schéma d'homogénéisation à deux étapes pour l'estimation des propriétés poroélastiques effectives	92
III.5	Résultats et discussions	95
III.6	Conclusions	97
Conclusion générale et perspectives		103
Bibliographie		107
Annexe A Composantes des tenseurs d'Eshelby dans un milieu isotrope		115
A.1	Inclusion sphérique dans un milieu isotrope	115
A.2	Inclusion "penny shape" dans un milieu isotrope [61]	116
A.3	Inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope	116
Annexe B Constantes élastiques de la matrice isotrope transverse		119

Annexe C	Fonction de Green du matériau isotrope transverse [64]	121
C.1	Force appliquée parallèle au plan isotrope	121
C.2	Force normale appliquée au plan isotrope	121
Annexe D	Expression du tenseur g	125
Annexe E	Calcul intégral I	127

Introduction générale

Les lois de comportement des matériaux sont établies, selon l'approche phénoménologique classique, sur la base des résultats d'essais sur éprouvettes supposées homogènes : essais de compression et de traction, essais de résistance en compression et de résistance en traction des bétons etc... Cette approche permet de prévoir la réponse mécanique des matériaux donnés aux sollicitations de service. Ses applications sont très larges et efficaces. Cependant, elle possède aussi ses limites. Les changements des conditions nominales de service poseront un problème : une augmentation des charges mécaniques, l'apparition des facteurs extérieurs non tenus compte au cours de l'identification du comportement du matériau (corrosion, réactions chimiques, humidité, rayonnements...) risqueront de mettre le matériau à l'état en dehors de son domaine d'identification. Une approche complémentaire, dite *approche micromécanique* ou *approche de changement d'échelle d'espace* est développée depuis quelques décennies. Son intérêt est de relier les réponses macroscopiques des matériaux étudiés à leurs microstructures. Un des objectifs de la méthode d'homogénéisation est de remplacer un matériau réel hétérogène par un matériau fictif homogène équivalent, tel que les lois de comportement macroscopiques de deux matériaux soient les mêmes. Dans cette approche, il est nécessaire de choisir une échelle de départ, appelé l'échelle d'un *Volume Élémentaire Représentatif* (V.E.R), à adopter pour assurer que, d'une part, on peut caractériser le comportement du V.E.R par une loi homogène et d'autre part, la structure peut être considérée comme un milieu continu.

Les géomatériaux étudiés dans cette thèse, des roches poreuses isotropes ou anisotropes, sont hétérogènes à différentes échelles : à l'échelle des ouvrages profonds (puits, galeries, tunnels) ou à l'échelle des éprouvettes testées au laboratoire (éprouvettes de dimensions centimétriques). A titre d'exemple, on observe une variabilité spatiale parfois importante des résultats d'essais géomécaniques pour des éprouvette prélevées dans une même cellule (soit à quelques centimètres de distance). Un des buts poursuivis dans cette thèse est de développer l'approche micromécanique pour tenter d'expliquer certains phénomènes observés à l'échelle des éprouvettes de laboratoire et tenter de les relier à la microstructure. Dans le cas des roches poreuses étudiées au LAEGO, on tentera de relier les coefficients mécaniques et poromécaniques mesurés à laboratoire à la micro-

structure : porosité et structure de l'espace poreux, teneurs en inclusions minérales (quartz, calcite ...), influence de l'anisotropie de la matrice solide ... L'échelle des éprouvettes de laboratoire sera l'échelle *macroscopique* de notre approche et l'on tentera de prendre en compte dans l'analyse des informations obtenues aux échelles inférieures.

La méthodologie de l'approche micromécanique comporte trois étapes. Tout d'abord, on décrit le matériau hétérogène à l'échelle microscopique. Ensuite, on détermine les relations des paramètres mécaniques et physiques entre les deux échelles, microscopique et macroscopique, en utilisant la solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby. Enfin, le comportement macroscopique du matériau réel est identifié par les opérations moyennes sur les solutions de l'étape précédente. Cette méthode a été appliquée dans de nombreux domaines.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre débute par une présentation de la méthodologie et des caractères généraux de l'approche micromécanique. On introduit ensuite certains outils de modélisation pour décrire la morphologie des inclusions comme la fonction de distribution en orientation (*ODF-Orientation Distribution Function*) du système des pores. Ensuite une étude de sensibilité sur la morphologie, la forme et la distribution en orientation des pores, a été effectuée. Enfin, une hypothèse de déconnexion d'une partie de l'espace poreux saturé sous la sollicitation appliquée [9], [20] dans le but d'interpréter l'évolution du coefficient de Biot est examinée en détail. Le matériau étudié est une roche poreuse composée d'une matrice et d'inclusions solides et/ou poreuses. Le schéma d'estimation est celui de Mori-Tanaka qui permet de tenir compte de l'interaction entre les inclusions. La démarche micromécanique est mise en oeuvre dans le but d'évaluer l'influence de la morphologie de l'espace poreux sur le degré d'anisotropie effectif macroscopique du matériau.

Dans le deuxième chapitre on introduit un nouveau facteur, l'anisotropie de la matrice. L'anisotropie globale ou effective est due à la morphologie de l'espace poreux et à l'anisotropie de matrice. Par comparaison avec le premier chapitre, l'espace poreux est simplifié. On ne considère qu'une classe de pores de type inclusions ellipsoïdales aplaties. Ces inclusions sont alignées dans les direction de symétrie du matériau. On présente dans un premier temps la solution analytique d'une inclusion sphérique isolée dans une matrice isotrope transverse infinie. Cette solution est très utile pour les roches sédimentaires de type *matrice-inclusion*. A titre d'exemple, dans le cas des argilites, l'approximation sphérique est utilisée pour représenter des inclusions de calcite et de quartz (voir également [78]). Dans d'autres types de matériaux, l'inclusion sphérique pourra représenter des inclusions solides et des pores. Le problème de l'inclusion sphérique dans une matrice isotrope transverse est un cas particulier du problème plus général de l'inclusion ellipsoïdale aplatie dans le milieu élastique isotrope transverse, résolu par [81]. L'approche analytique, analogue à celle

d'Eshelby dans le cas isotrope [21, 23], et de Withers dans le cas isotrope transverse, est basée sur l'intégration analytique de la fonction de Green pour le matériau isotrope transverse, obtenue par [64]. Comparés à d'autres méthodes, les résultats obtenus sont plus compacts et explicites. Ici, la solution est utilisée pour étudier les propriétés poroélastiques effectives des matériaux poroélastiques isotropes transverses. En particulier, les influences respectives de la *matrice* (ou *particule solide*) anisotrope et de la morphologie des pores sur l'anisotropie effective du milieu poreux à l'échelle macroscopique sont évaluées.

Le cas du matériau hétérogène isotrope transverse avec la matrice isotrope a été présenté dans le premier chapitre. Dans ce cas, l'anisotropie effective observée est seulement induite par la distribution en orientation des inclusions immergées. Le deuxième chapitre a été consacré à traiter le cas des inclusions sphériques immergées dans le milieu isotrope transverse. Le problème étudié dans le troisième chapitre est plus complexe : la matrice est supposée que isotrope transverse et la distribution en orientation des inclusions peut être alignée, isotrope ou à orientation préférentielle (ODF). Les résultats obtenus sont connus seulement dans le cas d'une inclusion dont la normale coïncide avec l'axe de révolution de la matrice ; ils sont nouveaux dans le cas général d'un système de pores arbitrairement orientés. Aucun résultat analytique n'a été fourni dans ce cas général ainsi des méthodes numériques doivent être employées pour évaluer du tenseur de Hill \mathbb{P} (et/ou du tenseur d'Eshelby \mathbb{S}^E). La méthode numérique employée dans ce chapitre est basée sur l'intégration numérique de la fonction exacte de Green qui est donnée par [64] et corrigée par [67]. En effectuant cette intégration numérique au repère *intermédiaire* respectant la symétrie du matériau, on constate alors que la description du tenseur de Hill dépend seulement d'un angle d'Euler (l'angle entre l'axe symétrique de l'inclusion et l'axe symétrique de la matrice). La description de ce tenseur au système de coordonnées global fixe du matériau est alors déduit par un règle simple de transformation entre les deux repères *intermédiaire* et *global*. Cette méthode peut être employée comme une alternative à la méthode générale basée sur la transformée de Fourier dans le cas particulier du milieu isotrope transverse. Le tenseur de Hill obtenu est alors employé pour évaluer les propriétés poroélastiques effectives par la méthode d'homogénéisation. Les résultats obtenus sont utilisés pour étudier l'effet de l'anisotropie de matrice, des systèmes de pores et des paramètres microstructure-connectés sur les propriétés poroélastiques macroscopiques effectives dans les roches isotropes transverses. Le schéma d'estimation dans ce chapitre est celui de Mori-Tanaka.

Chapitre I

Homogénéisation du comportement poroélastique linéaire

I.1 Introduction

A partir des limites de l'approche classique de la mécanique des solides fondée sur l'expérience, depuis les années cinquantes, on a développé la méthode de changement d'échelle. Le principe de cette méthode est *un passage du microscopique au macroscopique*, c'est-à-dire, par les outils d'homogénéisation, on caractérise le champ des propriétés mécaniques et le comportement du matériau à l'échelle macroscopique à partir d'une description de ses constituants à l'échelle microscopique[1, 55, 85].

Ce chapitre est dédié d'une part à présenter la méthodologie et les caractères généraux de l'approche de changement d'échelle, y compris certains outils pour décrire la morphologie des inclusions comme le tenseur de transformation et la fonction de distribution en orientation (*ODF-Orientation Distribution Function*) système des pores ; d'autre part, à analyser d'influence du schéma d'homogénéisation et d'effet de la morphologie des inclusions sur le comportement macroscopique du matériau. En outre, une estimation de l'évolution des propriétés poromécaniques d'une roche poreuse sous l'action de chargement a été aussi introduite. Tout d'abord, la condition de Hill-Mandel qui relie les quantités de déformation et de contrainte entre les deux échelles par des opérations moyennes est introduite pour homogénéiser d'un milieu à l'état initial naturel. Afin d'élargir ce résultat à l'homogénéisation des matériaux à constituants élastiques linéaires avec précontrainte ou déformation initiale, la théorème de Levin est présentée. A la suite de la solution d'Eshelby, on présente les quatre méthodes d'estimation classiques pour construire des estimations des modules effectives (ou homogénéisés) à partir des modèles morphologiques simples. Ensuite, on va réaliser une analyse de l'influence des quatre schémas sur les paramètres poromécaniques macroscopiques

, dans laquelle, on a considéré les deux cas très simples de géométrie des pores, les sphères et les ellipsoïdes alignés. Ensuite, une étude de sensibilité sur la morphologie, la forme et la distribution en orientation des pores, est effectuée. Les pores sont décrits par des inclusions de forme sphéroïdale aplatie ($a = b > c$, $\epsilon_p = c/a$). Quatre rapports d'aspect des pores ϵ_p , de la sphère $\epsilon_p = 1$ aux pores aplatis $\epsilon_p = 0.1 - 0.05 - 0.01$ et quatre cas de distribution en orientation de l'espace poreux, deux cas de répartition en ODF avec $\sigma = 8$ et $\sigma = 50$, deux cas limites, les pores alignés et les pores à répartition isotrope ont été pris en compte. Enfin, une hypothèse de déconnexion d'une fraction de l'espace poreux saturé sous chargement mécanique [9, 20] sera examinée en fonction de la géométrie et de la répartition des pores. L'approche micromécanique présentée dans ce mémoire et son application aux milieux poreux est basée sur les travaux récents de L. Dormieux et co-auteurs [10, 15, 17, 18, 16].

I.2 Approche d'homogénéisation

I.2.1 Introduction à la micromécanique des matériaux

La structure de tous les matériaux hétérogènes peut être caractérisée par les trois échelles différentes, nanoscopique - microscopique - macroscopique. Dans le cadre de la micromécanique, les deux dernières échelles sont envisagées. L'échelle macroscopique, l'objet de recherche de l'approche classique de la mécanique des solides, qui est correspondante à la taille des ouvrages. L'échelle microscopique permet de décrire des domaines occupés des phases différentes qui considèrent comme homogènes. Avec cette échelle, on peut tenir compte des phénomènes qui ont lieu au sein du matériau comme l'interaction entre les inclusions, le changement de phase (liquide - vapeur), les réactions chimiques etc... Un matériau au niveau microscopique est caractérisé par d , la taille des hétérogénéités et par L , la taille de la structure au niveau macroscopique. Entre ces deux tailles, on convient de fixer la taille du V.E.R du matériau, caractérisée par l . L'objectif de la méthode d'homogénéisation est de remplacer un matériau réel hétérogène par un matériau fictif homogène équivalent, tel que les lois de comportement macroscopique de deux matériaux soient les mêmes. Cette méthode est validée si les trois longueurs caractéristiques ci-dessus sont satisfaites à la double condition $d \ll l \ll L$. La première condition $d \ll l$ est nécessaire pour que l'on puisse caractériser le comportement du volume élémentaire représentatif par une loi homogène. La deuxième condition $l \ll L$ est une condition classique qui permet de traiter la structure comme un milieu continu.

I.2.2 Méthodologie de l'homogénéisation

Quand les conditions de séparation d'échelle sont bien vérifiées, on applique une méthodologie de trois étapes successives proposée par Zaoui [85] pour traiter des matériaux hétérogènes :

L'étape de **représentation** qui permet de décrire le matériau à l'échelle microscopique : définition des phases, description de chacune de ces phases (forme, distribution spatiale...) et caractéristiques mécaniques des constituants.

L'étape de **localisation** qui permet de modélisation mécanique et détermination les relations entre les quantités définies à l'échelle microscopique ($\sigma, \epsilon...$) et les quantités définies macroscopiques équivalentes ($\Sigma, E...$).

L'étape d'**homogénéisation** qui permet d'identifier le comportement macroscopique grâce à des opérations moyennes sur les solutions de l'étape de la localisation.

I.3 Homogénéisation des milieux linéaires élastiques à l'état initial naturel

On s'intéresse ici à une structure dont le matériau constitutif est élastique linéaire homogène. On suppose que cette structure est à l'état initial naturel : les champs de contrainte et de déformation sont nuls en tout point en l'absence de chargement extérieur. La loi de comportement de ce matériau s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy et $\boldsymbol{\varepsilon}$ désigne le tenseur des déformations. Le tenseur de modules élastiques \mathbb{C} et le tenseur de souplesses \mathbb{S} sont inverses l'un de l'autre :

$$\mathbb{C}(\underline{z}) : \mathbb{S}(\underline{z}) = \mathbb{I} \quad (\text{I.2})$$

avec \mathbb{I} est le tenseur d'identité du quatrième ordre.

Les tenseurs \mathbb{C} et \mathbb{S} sont symétriques mineurs et majeurs [70]

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \\ S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{jilk} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{klij} \\ S_{ijkl} = S_{klij} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Au total, compte tenant des relations de symétrie (I.3) et (I.4), \mathbb{C} (ou \mathbb{S}) n'ont que 21 composantes indépendantes.

I.3.1 L'étape de représentation

On doit tout d'abord disposer d'une description à l'échelle microscopique du système étudié. Pour le faire, on doit recenser le nombre des phases et déterminer la nature des paramètres permettant la description des phases correspondantes. Ensuite, on doit caractériser le comportement mécanique de chaque phase, qui est prise comme un milieu homogène et continu (les coefficients d'élasticité, les directions d'anisotropie, la nature des interactions entre phases,...). On doit enfin décrire la géométrie de chacun de ces phases (la forme, la manière de distribution spatiale,...).

En général, il est évident qu'il est impossible de caractériser complètement et précisément le matériau étudié. A cause de cette difficulté, on a développé des méthodes d'estimation applicables dans les situations où le matériau n'est pas complètement connu.

Maintenant, on considère à l'intérieur d'une structure constituée d'un matériau élastique linéaire hétérogène un V.E.R occupant le domaine Ω , de frontière $\partial\Omega$ tel que la double condition $d \ll l \ll L$ est satisfaite. Supposant que le champ des tenseurs d'élasticité \mathbb{C} est complètement connu dans le domaine Ω . On supposera également qu'il y a l'adhérence parfaite entre les phases accolées du matériau.

I.3.2 L'étape de localisation

Les relations entre les grandeurs microscopiques et macroscopiques sont obtenues par la résolution d'un problème posé sur le domaine Ω occupé par le V.E.R. On formule un problème soit de contraintes homogènes (solicitation homogène en contrainte) soit de déformations homogènes (solicitation homogène en déformation) au contour $\partial\Omega$ du V.E.R.

I.3.2.1 Sollicitation homogène en déformation

Pour établir le lien entre les deux comportements, microscopique et macroscopique, on définit le chargement appliqué au V.E.R à partir des grandeurs macroscopiques. Alors, dans ce cas, on implique la condition de déplacement affine $\underline{u}(\underline{z}) = \underline{E} \cdot \underline{z}$ sur $\partial\Omega$ avec \underline{E} la déformation macroscopique homogène et $\underline{u}(\underline{z})$ le champ de déplacement à l'échelle microscopique. Comme les efforts de volume et les quantités d'accélération doivent être des infiniments petits du second ordre pour que

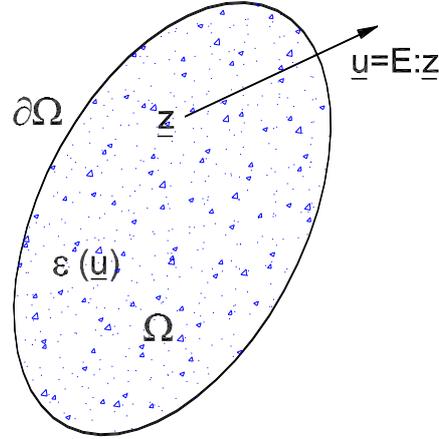


FIGURE I.1: Conditions de déformations homogènes au contour

l'on puisse définir un comportement homogénéisé [85], donc $\underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0$ sur Ω . La sollicitation appliquée sur Ω s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E}:\underline{z} & (\partial\Omega) \\ \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

A partir de (I.5), compte tenu de la relation entre déplacement $\underline{u}(\underline{z})$ et déformation $\varepsilon(\underline{z})$ et aussi du théorème de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{i,j} + u_{j,i}) d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (u_i n_j + u_j n_i) dS = \frac{1}{2} \left[E_{ik} \int_{\partial\Omega} z_k n_j dS + E_{jk} \int_{\partial\Omega} z_k n_i dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[E_{ik} \int_{\Omega} z_{k,j} d\Omega + E_{jk} \int_{\Omega} z_{k,i} d\Omega \right] = |\Omega| E_{ij} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Alors, on a

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) d\Omega = \mathbf{E} \quad (\text{I.7})$$

où $\langle \bullet \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne sur Ω . Pour un V.E.R occupant le domaine géométrique Ω , la moyenne d'une variable sur Ω est définie par :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(\underline{z}) d\Omega \quad (\text{I.8})$$

L'interprétation mécanique de la formule (I.7) : les déformations homogènes macroscopiques \mathbf{E} , appliquées sur le contour du V.E.R sont égales à la moyenne spatiale des déformations locales dans

le V.E.R. Pour les contraintes, on définira les contraintes macroscopiques Σ par la relation :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\underline{z}) d\Omega \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas du matériau élastique linéaire considéré ici, le problème de localisation est le problème d'élasticité linéaire à la force de volume nulle et au déplacement imposé sur $\partial\Omega$ suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon(\underline{z}) & (\Omega) \\ \text{div } \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{I.10})$$

Ce problème est linéaire et admet une unique solution. Le champ de déformation microscopique ε associé au champ de déplacement dépend linéairement de la valeur du tenseur de déformation homogène macroscopique appliqué \mathbf{E} , ce qui s'écrit :

$$\varepsilon(\underline{z}) = \mathbb{A} : \mathbf{E} \quad (\text{I.11})$$

où \mathbb{A} est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur de localisation en déformation. On peut démontrer en reportant (I.11) dans la relation (I.7), que la moyenne du tenseur \mathbb{A} est un tenseur identique d'ordre quatre $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$. En plus, \mathbb{A} est symétrique mineur $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk}$ mais pas symétrique majeur $A_{ijkl} \neq A_{klij}$.

I.3.2.2 Sollicitation homogène en contrainte

On impose ici la condition en effort $\underline{T} = \Sigma \cdot \underline{n}$ sur $\partial\Omega$ avec Σ homogène, représentant le tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique. Dans ce cas, la sollicitation appliquée sur Ω s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}) = \Sigma \cdot \underline{n}(\underline{z}) & (\partial\Omega) \\ \text{div } \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{I.12})$$

A partir de (I.12) et du théorème de Gauss, on montre :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} (\sigma_{ik} z_j)_{,k} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ik} z_j n_k) dS = \Sigma_{ik} \int_{\partial\Omega} z_j n_k dS \\ &= \Sigma_{ik} \int_{\Omega} z_{j,k} d\Omega = |\Omega| \Sigma_{ik} \delta_{jk} = |\Omega| \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Alors, on a

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\underline{z}) d\Omega = \Sigma \quad (\text{I.14})$$

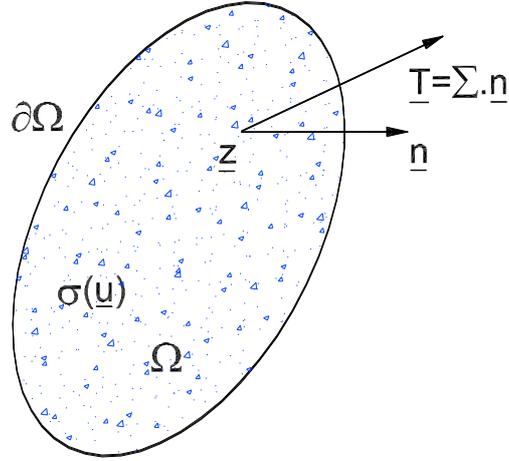


FIGURE I.2: Conditions de contrainte homogènes au contour

L'interprétation mécanique de la formule (I.13) : les contraintes homogènes macroscopiques $\underline{\Sigma}$ appliquées sur le contour $\partial\Omega$ du V.E.R sont égales à la moyenne spatiale des contraintes locales dans le V.E.R. Pour les déformations, on définira les déformations macroscopiques \underline{E} par la relation :

$$\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{z}) d\Omega \quad (\text{I.15})$$

Comme le cas de la déformation homogène au contour, le problème d'élasticité posé sur le V.E.R s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \underline{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega) \\ \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\sigma}(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{z}) & (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{I.16})$$

De la même façon du problème précédent, on trouve que :

$$\underline{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{B}(\underline{z}) : \underline{\Sigma} \quad (\text{I.17})$$

où \mathbb{B} est un tenseur d'ordre quatre, appelé le tenseur de localisation en contrainte. Comme le tenseur \mathbb{A} , la moyenne du tenseur \mathbb{B} est un tenseur identité d'ordre quatre $\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I}$. D'autre part, il possède la symétrie mineure $B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk} = B_{jilk}$ mais il n'est pas symétrique majeur $B_{ijkl} \neq B_{klij}$.

I.3.3 L'étape d'homogénéisation

On va identifier maintenant le comportement macroscopique à partir de l'étape précédent. Pour cela, il faut introduire la condition de Hill-Mandel ci-dessous.

I.3.3.1 Condition de Hill-Mandel

Soit $\boldsymbol{\sigma}(\underline{z})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z})$ deux champs respectifs de contrainte statiquement admissible ($\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0$) et de déformation cinématiquement admissible avec $\mathbf{E}(\underline{u}(\underline{z})) = \mathbf{E} \cdot \underline{z}$ sur $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z})$ sur Ω , si $\boldsymbol{\sigma}(\underline{z})$ vérifie des conditions de contrainte homogènes au contour $\partial\Omega$ ou si $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z})$ vérifie des conditions déformations homogènes sur $\partial\Omega$, on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \mathbf{E} \quad (\text{I.18})$$

En définissant la contrainte macroscopique par la relation $\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, on en déduit

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} \quad (\text{I.19})$$

Cette condition assure l'égalité entre le travail macroscopique ($\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}$) et la moyenne spatiale du travail microscopique ($\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$).

I.3.3.2 Homogénéisation

Supposons que les deux tenseurs de localisation \mathbb{A} et \mathbb{B} sont connus. On s'intéresse ici à l'identification de la loi de comportement macroscopique.

Dans le cas de la sollicitation en déformation, on associe à toute valeur du tenseur des déformations macroscopiques \mathbf{E} une valeur du tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$ en utilisant les relations (I.9), (I.11) et la loi de comportement (I.1) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{I.21})$$

On peut utiliser une approche énergétique pour résoudre le problème d'élasticité posé sur le V.E.R défini par les équations (I.10) :

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} : \mathbb{A}^T : \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle \mathbb{A}^T : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}'_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (\text{I.22})$$

avec

$$\mathbb{C}'_{\text{hom}} = \langle \mathbb{A}^T : \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{I.23})$$

Par la condition de Hill-Mandel, on obtient immédiatement :

$$\mathbb{C}'_{\text{hom}} = \mathbb{C}_{\text{hom}} \quad (\text{I.24})$$

Cette identité permet de montrer la symétrie majeure du tenseur homogénéisé $(\mathbb{C}_{\text{hom}})_{ijkl} = (\mathbb{C}_{\text{hom}})_{klij}$. La symétrie mineur de ce tenseur est démontrée dans [85].

Considérant maintenant le cas de sollicitation en contrainte, de la même façon, on peut montrer que

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{I.25})$$

avec

$$\mathbb{S}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \quad (\text{I.26})$$

Par la manière analogue, en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire pour le problème défini par (I.16), on obtient :

$$\Psi^*(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{B}^T : \mathbb{S} : \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \langle \mathbb{B}^T : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}'_{\text{hom}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{I.27})$$

avec

$$\mathbb{S}'_{\text{hom}} = \langle \mathbb{B}^T : \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \quad (\text{I.28})$$

Par la condition de Hill-Mandel, on démontre également l'identité des modules \mathbb{S}_{hom} et \mathbb{S}'_{hom} . Alors, le tenseur \mathbb{S}_{hom} est symétrique majeur :

$$(\mathbb{S}_{\text{hom}})_{ijkl} = (\mathbb{S}_{\text{hom}})_{klij} \quad (\text{I.29})$$

\mathbb{S}_{hom} et \mathbb{C}_{hom} ne sont pas rigoureusement inverses l'un de l'autre. Si la condition de séparation des échelles $d \ll l$ est satisfaite, on admet que les deux types de sollicitation sont équivalents [83],[85].

I.3.4 Application au matériau poreux sec

On s'intéresse à la caractérisation du comportement d'un matériau poreux sec par une méthode d'homogénéisation. On présente ici le cas d'une sollicitation homogène en déformation.

Le matériau poreux sec est constitué d'une phase solide et de pores occupant respectivement les domaines Ω_s et Ω_p . On suppose que le solide est élastique linéaire homogène et la frontière du

V.E.R est constitué seulement de la phase solide. Donc, le problème d'élasticité posé sur la phase solide s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega_s) \\ \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}) = 0 & (\omega_{sp}) \end{array} \right. \quad (\text{I.30})$$

où ω_{sp} désigne l'interface entre la phase solide et les pores et \underline{n} le vecteur unitaire normal extérieur au domaine Ω_s le long de ω_{sp} .

On remplace le problème ci-dessus par un problème d'homogénéisation défini sur le V.E.R :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega_\alpha, \alpha = s, p) \\ \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot \underline{n} = 0, \quad \|\underline{u}\| = 0 & (\omega_{sp}) \end{array} \right. \quad (\text{I.31})$$

où $\|v\|$ désigne le saut de la grandeur v à la traversée de la surface entre la phase solide et des pores. Le comportement macroscopique s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (\text{I.32})$$

avec

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \sum_{\alpha=s,p} f_\alpha \mathbb{C}_\alpha : \langle \mathbb{A} \rangle_\alpha = (1 - f_p) \mathbb{C}_s : \langle \mathbb{A} \rangle_s \quad (\text{I.33})$$

où f_α désigne la fraction volumique du domaine occupé par la phase α . $\langle \mathbb{A} \rangle_\alpha$ désigne la moyenne de l'opérateur \mathbb{A} sur le domaine occupé par la phase α .

On élargit ce résultat dans le cas d'un milieu hétérogène à r phases différentes, donc l'estimation du tenseur élastique macroscopique devient

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \quad (\text{I.34})$$

avec \mathbb{A}_i est la moyenne du tenseur de localisation sur le domaine occupé par la phase i .

I.4 Homogénéisation des milieux linéaires élastiques à l'état non naturel

On présente le théorème de Levin qui permet d'aborder l'homogénéisation des matériaux à constituants élastiques linéaires avec précontrainte ou déformation initiale.

I.4.1 Théorème de Levin

Le théorème de Levin permet d'étendre les résultats des méthodes d'homogénéisation valables pour les matériaux élastiques linéaires aux situations où doivent être pris en compte des déformations initiales à contrainte nulle (champ de déformation d'origine thermique par exemple) ou des précontraintes à déformation nulle (contrainte résiduelle en plasticité par exemple). Le comportement à l'échelle microscopique s'écrit dans le cas d'un V.E.R constitué d'un matériau élastique linéaire à précontrainte non nulle :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{z}) \quad (\text{I.35})$$

Et dans le cas d'un V.E.R constitué d'un matériau élastique linéaire à déformation initiale non nulle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) = \mathbb{S}(\underline{z}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) + \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{z}) \quad (\text{I.36})$$

On obtient les relations entre les champs de précontrainte et de déformation initiale :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(\underline{z}) = -\mathbb{C}(\underline{z}) : \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{z}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{z}) = \mathbb{S}(\underline{z}) : \boldsymbol{\tau}(\underline{z}) \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

On s'intéresse tout d'abord dans le cas d'un V.E.R constitué d'un matériau élastique linéaire à précontrainte non nulle (I.35). Pour déterminer le comportement macroscopique dans ce cas, on utilise la sollicitation en déformation homogène. Le problème à résoudre sur le V.E.R s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{z}) & (\Omega) \\ \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

On montre qu'à l'échelle macroscopique, le comportement est du type élastique linéaire avec pré-contraintes [85] :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{I.39})$$

avec \mathbb{C}_{hom} est calculé comme dans le cas du comportement linéaire sans précontrainte.

En effet, afin de résoudre le problème (I.38), on décompose ce problème noté (P) en deux problèmes élémentaires notés respectivement (P') et (P''). Le premier problème (P') correspond au problème élastique linéaire sans précontrainte que l'on a présenté au paragraphe précédent. Le deuxième problème (P'') correspond au problème avec précontrainte, à déformation macroscopique imposée nulle. Les relations entre les trois problèmes sont présentées ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \boldsymbol{\sigma}'(\underline{z}) = \boldsymbol{\sigma}''(\underline{z}) & (\Omega) \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma}'(\underline{z}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma}''(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \underline{u}'(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z}, \quad \underline{u}''(\underline{z}) = 0 & (\partial\Omega) \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \mathbf{E}, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle = 0 & \end{array} \right. \quad (\text{I.40})$$

où $\boldsymbol{\sigma}(\underline{z})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z})$, $\underline{u}(\underline{z})$ sont respectivement les contraintes, les déformations et les déplacements du problème (P) ; $\boldsymbol{\sigma}'(\underline{z})$, $\boldsymbol{\varepsilon}'(\underline{z})$, $\underline{u}'(\underline{z})$ sont les mêmes grandeurs pour le problème (P') et $\boldsymbol{\sigma}''(\underline{z})$, $\boldsymbol{\varepsilon}''(\underline{z})$, $\underline{u}''(\underline{z})$ sont les mêmes grandeurs pour le problème (P'').

La solution du problème (P') :

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (\text{I.41})$$

Alors, on a :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}'' \quad (\text{I.42})$$

La solution du problème complet (P) se ramène au calcul de $\boldsymbol{\Sigma}'' = \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle$ La solution en contrainte du problème (P'') s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma}''(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{z}) \quad (\text{I.43})$$

Puisque le champ de déformations cinématiquement admissible $\boldsymbol{\varepsilon}'$ du problème (P') associe au champ de déformation macroscopique \mathbf{E} et le champ de contraintes statiquement admissible $\boldsymbol{\sigma}''$

du problème (P'') associée au champ de contrainte macroscopique Σ , en appliquant la condition de Hill-Mandel au couple $(\sigma'' - \varepsilon')$, on trouve :

$$\langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle = \langle \sigma'' \rangle : \langle \varepsilon' \rangle = \Sigma'' : \mathbf{E} \quad (\text{I.44})$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle &= \langle \mathbb{C} : \varepsilon'' : \varepsilon' \rangle + \langle \tau : \varepsilon' \rangle = \langle \varepsilon'' : \mathbb{C} : \varepsilon' \rangle + \langle \tau : \varepsilon' \rangle \\ &= \langle \varepsilon'' : \sigma' \rangle + \langle \tau : \mathbb{A} : \mathbf{E} \rangle = \langle \tau : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

A partir de (I.44) et (I.45), on trouve que

$$\Sigma'' = \langle \tau : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{I.46})$$

Finalement, on obtient la solution macroscopique (I.39) du problème complet (P) en contrainte :

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \langle \tau : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{I.47})$$

Dans la situation où il existe un champ de déformation initiale ε_L en l'absence de chargement mécanique, pour déterminer le comportement macroscopique, on applique une sollicitation homogène en contrainte sur le V.E.R. Alors, le problème à résoudre sur le V.E.R s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(\underline{z}) = \mathbb{S}(\underline{z}) : \sigma(\underline{z}) + \varepsilon_L(\underline{z}) & (\Omega) \\ \text{div } \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \sigma(\underline{z}) = \Sigma \cdot \underline{n}(\underline{z}) & (\partial\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{I.48})$$

De la même manière, on montre que le comportement à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \Sigma + \langle \varepsilon_L : \mathbb{B} \rangle \quad (\text{I.49})$$

Les deux points de vue (homogénéisation en déformation avec précontrainte ou homogénéisation en contrainte avec déformation initiale) peuvent être rapprochés dès que les deux tenseurs d'élasticité vérifient la condition $\mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbb{S}_{\text{hom}} = \mathbb{I}$. Dans ce cas, on montre que les deux tenseurs de localisation vérifient la propriété :

$$\mathbb{B} = \mathbb{C} : \mathbb{A} : \mathbb{S}_{\text{hom}} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} = \mathbb{S} : \mathbb{B} : \mathbb{C}_{\text{hom}} \quad (\text{I.50})$$

A partir de cela, on montre que les deux lois macroscopiques (I.39) et (I.49) sont reliées l'une à l'autre de la même façon que les deux lois microscopiques (I.35) et (I.36) :

$$\tau = -\mathbb{C} : \varepsilon_L \quad \rightarrow \quad \Sigma'' = -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \langle \varepsilon_L : \mathbb{B} \rangle \quad (\text{I.51})$$

I.4.2 Application au matériau poreux saturé

Le lecteur se reportera aux références [16, 17] pour des présentations détaillées de la *micro-poromécanique* des milieux saturés et non saturés. Le théorème de Levin permet de compléter les résultats donnés pour le matériau poreux dans la partie précédente en prenant en compte les effets de la pression de fluide dans le cas saturé. Ici, on considère un V.E.R de milieu poreux dont la matrice est constitué d'un matériau solide élastique linéaire homogène occupant le domaine Ω_s et dont l'espace poreux est saturé par un seul liquide occupant le domaine Ω_l . On suppose toujours que la frontière du V.E.R est constituée seulement de la phase solide.

Comme on s'intéresse ici uniquement à la part du comportement liée aux déformations du squelette solide et non pas aux phénomènes de transport de la phase liquide par rapport au squelette, les efforts intérieurs à l'échelle microscopique dans le fluide sont représentés par un champ de pression uniforme. On néglige les contraintes visqueuses ainsi que les fluctuations de la pression de fluide. Les forces de volume doivent être négligeables à cette échelle. Le problème d'élasticité posé sur la phase solide s'écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_s(\underline{z}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega_s) \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) \cdot \underline{n} = -p_l \underline{n} & (\omega_{sl}) \end{array} \right. \quad (\text{I.52})$$

où ω_{sl} désigne l'interface entre la phase solide et la phase liquide. p_l est la pression de phase liquide. Pour utiliser les résultats précédents, on remplace le problème d'élasticité (I.52) posé sur le domaine Ω_s par un problème d'élasticité avec précontrainte posé sur le domaine Ω :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau}_\alpha & (\Omega_\alpha, \alpha = s, l) \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{u}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot \underline{n} = 0, \quad \|\underline{u}\| = 0 & (\omega_{sl}) \end{array} \right. \quad (\text{I.53})$$

avec

$$\mathbb{C}_l = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_l = -p_l \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = 0 \quad (\text{I.54})$$

où $\boldsymbol{\delta}$ désigne le tenseur identité du second ordre.

Appliquer le résultat (I.39), on trouve à l'échelle macroscopique le comportement du matériau

poreux saturé considéré ici s'écrit :

$$\Sigma = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \Sigma'' \quad (\text{I.55})$$

où $\mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle$ désigne le tenseur d'élasticité drainé du matériau et $\Sigma'' = \langle \boldsymbol{\tau}_\alpha : \mathbb{A} \rangle$ le tenseur de précontrainte à l'échelle macroscopique. En utilisant la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$, on a démontré que

$$\Sigma = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \mathbf{B} \quad (\text{I.56})$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{C}_{\text{hom}} = (1 - \phi) \mathbb{C}_s : \langle \mathbb{A} \rangle_s \\ \mathbf{B} = \phi \boldsymbol{\delta} : \langle \mathbb{A} \rangle_l = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}_{\text{hom}}) \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

où \mathbf{B} désigne le tenseur de Biot et \mathbb{S}_s le tenseur des complaisances élastiques de la phase solide. Dans le cas où le squelette est constitué d'une matrice incompressible ($\boldsymbol{\delta} : \mathbb{S}_s = 0$), donc le tenseur de Biot est égal à l'identité du second ordre. Le comportement élastique du matériau s'écrit :

$$\Sigma = \Sigma' - p_l \boldsymbol{\delta} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.58})$$

où Σ' désigne la contrainte effective de Terzaghi.

Alors, on retrouve la loi de Terzaghi [75].

La variation du volume de l'espace poreux fait l'objet de la seconde équation d'état macroscopique.

La variation de porosité est de [16] :

$$\phi - \phi_0 = \phi \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \phi \boldsymbol{\delta} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \phi \boldsymbol{\delta} : (\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_l + \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_l) \quad (\text{I.59})$$

où ϕ_0 et ϕ désignent respectivement la porosité lagrangienne à l'état initial et à l'état actuel. D'une part, on déduit de (I.57) que :

$$\phi \boldsymbol{\delta} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \phi \boldsymbol{\delta} : \langle \mathbb{A} \rangle_l : \mathbf{E} = \mathbf{B} : \mathbf{E} \quad (\text{I.60})$$

D'autre part, on a

$$\Sigma'' = -p_l \mathbf{B} \quad (\text{I.61})$$

et

$$\Sigma'' = (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_s + \phi \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_l = (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_s + \phi p_l \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.62})$$

On en déduit,

$$\phi \boldsymbol{\delta} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = -(1 - \phi) \boldsymbol{\delta} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_s = p_l \boldsymbol{\delta} : \mathbb{S}_s : (\mathbf{B} - \phi \boldsymbol{\delta}) = \frac{p_l}{N} \quad (\text{I.63})$$

avec

$$\frac{1}{N} = \boldsymbol{\delta} : \mathbb{S}_s : (\mathbf{B} - \phi \boldsymbol{\delta}) \quad (\text{I.64})$$

Alors, la variation de porosité s'écrit sous la forme :

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{pl}{N} \quad (\text{I.65})$$

Dans le cas particulier d'un comportement isotrope du solide (modules de compression k_s et de cisaillement μ_s) et d'un comportement macroscopique isotrope (modules de compression macroscopique k_{hom} et de cisaillement macroscopique μ_{hom}), le tenseur de Biot devient

$$\mathbf{B} = b \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.66})$$

avec

$$b = 1 - \frac{k_{hom}}{k_s} \quad (\text{I.67})$$

Et la forme isotrope du tenseur de contrainte macroscopique :

$$\underline{\Sigma} = k_{hom} \text{tr} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\delta} + 2 \mu_{hom} \mathbf{E}_d - b pl \boldsymbol{\delta} \quad (\text{I.68})$$

où \mathbf{E}_d est la partie déviatorique de la déformation macroscopique \mathbf{E} .

La variation du volume de l'espace poreux dans ce cas :

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{pl}{N} = b \text{tr} \mathbf{E} + \frac{pl}{N} \quad (\text{I.69})$$

avec

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi}{k_s} \quad (\text{I.70})$$

On trouve que la solution macroscopique dépend le tenseur des modules d'homogénéisation \mathbb{C}_{hom} et le tenseur de Biot. Autrement dire, elle dépend les valeurs des tenseurs de localisation. Dans la partie suivante, on présente les méthodes d'estimations classiques pour estimer ces tenseurs.

I.5 Méthodes d'estimation classiques

Le problème de l'inclusion d'Eshelby est un problème de base en mécanique des milieux hétérogènes parce qu'il est relatif à la situation élémentaire d'hétérogénéité entre une inclusion et son environnement. En fait, Eshelby a cherché l'effet de l'apparition d'une *déformation libre homogène* ε_L à l'intérieur d'un domaine borné (I) de forme ellipsoïdale, qui est noyé dans un milieu infini élastique linéaire homogène en supposant que les modules élastiques de l'inclusion coïncident ceux

de la matrice. Et puis, on a élargi ce résultat pour le cas où le tenseur d'élasticité du domaine (I) est différent de celui de la matrice (problème de l'inhomogénéité). La solution du deuxième problème est permis d'estimer les valeurs de tenseur de localisation \mathbb{A}_α de chaque phase.

Eshelby a exprimé analytiquement ce tenseur dans le cas de la matrice isotrope [21, 22, 23, 61]. Faivre a développé ce résultat dans le cas du matériau cubique [25]. Le cas du milieu isotrope transverse comportant des inclusions ellipsoïdes alignées dont leurs axes coïncident à ceux du milieu a été largement étudié. Certains auteurs comme Withers [81] a trouvé la solution analytique de ce problème; Sevostianov et al [73], Kirilyuk et Levchuk [51] ont présenté la solution pour les inhomogénéités différentes de forme noyées dans un milieu isotrope transverse. Dans cette thèse, on va présenter la solution pour les inclusions ellipsoïdes orientées arbitraires, immergées dans une matrice isotrope transverse. Le procédé est fondé sur les propriétés de la fonction de Green et de la transformée de Fourier.

I.5.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

On considère l'influence d'une *déformation libre homogène* ε_L imposé à l'intérieur d'un domaine borné (I) noyé dans un milieu infini élastique linéaire homogène Ω en supposant que les modules élastiques de l'inclusion coïncidents ceux de la matrice. La *déformation libre homogène* désigne la déformation qui ne serait pas accompagnée de contraintes si elle régnait dans un élément isolé. On impose des déplacements nuls à l'infini. La solution du problème de l'inclusion satisfait le système d'équations :

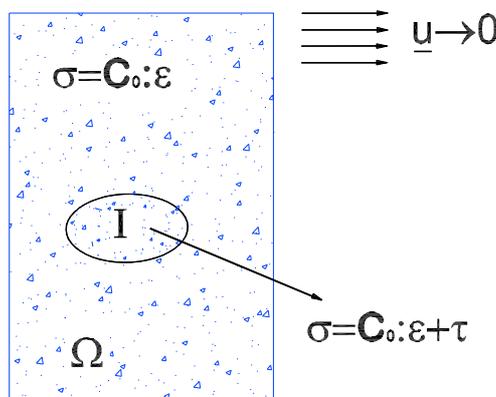


FIGURE I.3: Problème de l'inclusion d'Eshelby

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) - \boldsymbol{\varepsilon}_L] & (I) \\ \underline{u} \rightarrow 0 & (\underline{z} \rightarrow \infty) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| = 0 \text{ et } \|\underline{u}\| = 0 & (\partial I) \end{array} \right. \quad (\text{I.71})$$

où \mathbb{C}_1 est le tenseur élastique de la matrice et $\|f\|$ désigne le saut de la grandeur f sur l'interface de l'inclusion (I) .

Eshelby a montré en 1957 [21] que, si l'inclusion est de la forme ellipsoïdale, le champ de déformation est uniforme à l'intérieur de l'inclusion (I) . Prise en compte de la linéarité du problème (I.71), le champ de solution est dépendu linéairement des valeurs du paramètre de chargement $\boldsymbol{\varepsilon}_L$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) = \boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbb{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}_L, \quad \forall \underline{z} \in (I) \quad (\text{I.72})$$

où \mathbb{S}^E est un tenseur d'ordre quatre, appelé le tenseur d'Eshelby qui dépend du tenseur des modules d'élasticité \mathbb{C}_1 ainsi que de la forme et de l'orientation de l'ellipsoïde (I) . Il faut bien noter aussi que, si la symétrie des deux tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ impose une symétrie mineur du tenseur d'Eshelby dans un repère orthonormé $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$, on n'a pas forcément, dans le cas général, la symétrie majeur $S_{ijkl} = S_{klij}$. Par contre, puisque le domaine (Ω) est infini, \mathbb{S}^E ne dépend pas de la taille de l'inclusion (I) .

Pour la suite, il est commode d'écrire l'équation de comportement dans l'inclusion $\boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) - \boldsymbol{\varepsilon}_L]$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau} & (I) \\ \boldsymbol{\tau} = -\mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_L & (I) \end{array} \right. \quad (\text{I.73})$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur de polarisation, dû à la précontrainte dans l'inclusion. Grâce à cette transformation, on peut récrire la solution d'Eshelby (I.72) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_I = -\mathbb{P} : \boldsymbol{\tau} \\ \mathbb{P} = \mathbb{S}^E : \mathbb{C}_1^{-1} = \mathbb{S}^E : \mathbb{S}_1 \end{array} \right. \quad (\text{I.74})$$

avec \mathbb{S}_1 et \mathbb{P} désignent respectivement le tenseur de souplesse du milieu et le tenseur de Hill. Comme le tenseur d'Eshelby, le tenseur de Hill \mathbb{P} est un tenseur d'ordre quatre qui dépend du tenseur des modules d'élasticité \mathbb{C}_1 ainsi que de la forme et de l'orientation de l'inclusion (I) mais il ne dépend pas sa taille. Dans le cas général, le tenseur de Hill est plus commode d'utilisation que celui d'Eshelby car il contient la symétrie mineure et majeure [85],[63]. La solution analytique de ces deux tenseurs est connue dans certains cas, Eshelby a présenté l'expression du tenseur \mathbb{S}^E pour l'inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu isotrope [61], [85], les autres auteurs ont présenté la solution du tenseur de Hill \mathbb{P} pour des inhomogénéités ellipsoïdes alignés (sphérique, de forme "penny-shaped", aplati) dans la matrice isotrope transverse [33], [73],[81]. L'expression du tenseur d'Eshelby dans le cas plus simple d'une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice isotrope, est rappelé dans l'annexe A.

I.5.2 Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby

Maintenant, on élargit les résultats du problème d'Eshelby ci-dessus pour le problème où les modules élastiques de l'inclusion différents ceux de la matrice. On considère ici le problème d'une structure hétérogène occupant un domaine infini constitué d'un matériau élastique linéaire homogène de caractéristique \mathbb{C}_I à l'intérieur d'un domaine ellipsoïdal (I) et de caractéristique \mathbb{C}_1 à l'extérieur du domaine (I). Les autres conditions sont les mêmes pour le problème d'Eshelby. Donc, les équations de ce problème s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau} & (I) \\ \underline{\text{div}}\boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\mathbf{u}}(\underline{z}) \rightarrow 0 & (\underline{z} \rightarrow \infty) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| = 0 \text{ et } \|\underline{\mathbf{u}}\| = 0 & (\partial I) \end{array} \right. \quad (\text{I.75})$$

Le comportement dans l'inclusion peut écrire

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau}' \quad (I) \quad (\text{I.76})$$

avec

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.77})$$

Alors, la solution de (I.74) associée à $\boldsymbol{\tau}'$ est la solution du problème (I.75). Après quelque manipulations, la déformation dans l'inclusion s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)]^{-1} : (-\mathbb{P} : \boldsymbol{\tau}) \quad (I) \quad (\text{I.78})$$

Maintenant, on impose à l'infini une déformation macroscopique homogène \mathbf{E} , le problème (I.75) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) + \boldsymbol{\tau} & (I) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{z}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\underline{z} \rightarrow \infty) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| = 0 \text{ et } \|\underline{u}\| = 0 & (\partial I) \end{array} \right. \quad (\text{I.79})$$

On montre que le champ de déformation solution de (I.79) est la superposition de la solution du problème (I.75) et d'un champ de déformation homogène en tout point. Alors, la solution du problème (I.79) est de

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)]^{-1} : (\mathbf{E} - \mathbb{P} : \boldsymbol{\tau}) \quad (I) \quad (\text{I.80})$$

Dans le cas où la déformation initiale ou la précontrainte sont nulles, (I.80) se restreint à la formule suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (I) \quad (\text{I.81})$$

Dans le cas d'une inhomogénéité sphérique constituée d'un matériau à comportement élastique linéaire isotrope (de caractéristiques μ_I et k_I), noyée dans une matrice élastique linéaire isotrope (de caractéristiques μ_1 et k_1), la formule (I.81) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_I = \frac{1}{1 + \frac{\beta(\mu_I - \mu_1)}{\mu_1}} \mathbf{E}_d \\ \boldsymbol{\theta}_I = \frac{1}{1 + \frac{\alpha(k_I - k_1)}{k_1}} \boldsymbol{\theta} \end{array} \right. \quad (\text{I.82})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{3k_1}{3k_1 + 4\mu_1} \\ \beta = \frac{6(k_1 + 2\mu_1)}{5(3k_1 + 4\mu_1)} \end{array} \right. \quad (\text{I.83})$$

où \mathbf{e}_I et $\boldsymbol{\theta}_I$ désignent respectivement les parties déviatorique et sphérique du champ de déformation dans l'inclusion. \mathbf{E}_d et $\boldsymbol{\theta}$ désignent respectivement les parties déviatorique et sphérique du champ de

déformation homogène appliqué \mathbf{E} .

La solution du problème de l'inclusion d'Eshelby nous fournit un outil efficace pour estimer les tenseurs de localisation \mathbb{A}_α de chaque phase. On va présenter les quatre schémas de calcul, dans le cas biphasique.

I.5.3 Le schéma dilué ou le schéma d'Eshelby

On considère un matériau constitué des inhomogénéités élastiques linéaires homogènes occupées des domaines de même forme et de même orientation (phase 2, caractérisé par \mathbb{C}_2), immergées dans une matrice élastique linéaire homogène (phase 1, caractérisé par \mathbb{C}_1). On suppose que la concentration en inclusions de matériau 2 est suffisamment faible pour négliger les interactions entre les inclusions. Pour simplifier ce problème, on estime la moyenne de la déformation dans chaque inclusion par celle qui s'établit dans une inclusion (phase 2) noyée dans une matrice de matériau 1 soumise à l'infini à une déformation macroscopique homogène \mathbf{E} . Cette définition correspond exactement au problème de l'inhomogénéité d'Eshelby, à partir de (I.79) et de (I.11), la moyenne du tenseur de localisation dans la phase 2 est donnée par

$$\mathbb{A}_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \quad (\text{I.84})$$

La moyenne du tenseur de localisation dans la phase 1 est déterminée à partir de (I.84) et de la relation $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$:

$$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{f_1} \left(\mathbb{I} - f_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right) \quad (\text{I.85})$$

En remettant ces résultats dans la relation (I.34), on obtient directement l'estimation du tenseur élastique macroscopique

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dil} &= \mathbb{C}_1 + f_2 (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) \right]^{-1} \\ &= \mathbb{C}_1 + f_2 \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.86})$$

On étend ce résultat dans le cas d'un milieu hétérogène à r phases où toutes les inclusions de chaque phase sont de même forme et de même orientation. L'estimation du tenseur élastique macroscopique s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{dil} &= \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \\ &= \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^r f_i \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)^{-1} \right]^{-1} = \mathbb{C}_1 + \langle \mathbb{T} \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.87})$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} \rangle &= \sum_{i=2}^r f_i \mathbb{T}_i \\ \mathbb{T}_i &= \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.88})$$

f_i désigne la fraction de la phase i .

Dans le cas particulier du matériau biphasique où les matériaux de la matrice et des inclusions sont isotropes et où la forme des inclusions est sphérique, on obtient une estimation des caractéristiques macroscopiques également isotrope :

$$k_{dil} = k_1 \left(1 + f_2 \frac{k_2 - k_1}{k_1 + \alpha(k_2 - k_1)} \right), \quad \mu_{dil} = \mu_1 \left(1 + f_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \beta(\mu_2 - \mu_1)} \right) \quad (\text{I.89})$$

où k_{dil} et μ_{dil} désignent respectivement les modules de compression et de cisaillement à l'échelle macroscopique. En posant $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on obtient les modules de compression macroscopique et de cisaillement macroscopique dans le cas du milieu poreux sec

$$k_{dil} = k_1 \left(1 - f_2 \frac{3k_1 + 4\mu_1}{4\mu_1} \right), \quad \mu_{dil} = \mu_1 \left(1 - f_2 \frac{15k_1 + 20\mu_1}{9k_1 + 8\mu_1} \right) \quad (\text{I.90})$$

En bref, ce schéma est très simple car on a négligé l'interaction entre les inclusions. C'est la raison pour laquelle, les estimations (I.86), (I.87), (I.89) et (I.90) ne sont valables que pour les faibles concentrations en inclusions. Selon Xu [83], ce schéma est efficace si la concentration ne dépasse pas la dizaine de pour cent. En outre, le tenseur des modules d'élasticité macroscopique est satisfait les propriétés d'un module d'élasticité dans toutes les situations [24].

I.5.4 Le schéma de Mori-Tanaka

Le schéma Mori-Tanaka va tenir compte de l'interaction entre les inclusions dans le processus d'estimation des modules d'élasticité macroscopique. Pour cela, on estime la moyenne de déformation dans les inclusions par celle qui s'établit dans une inclusion de même forme et de même caractéristiques élastiques immergée dans une matrice de matériau 1 soumise à l'infini à une déformation moyenne dans la matrice \mathbf{E}_1 .

La déformation moyenne dans la phase 2 est calculée à partir du résultat du problème d'Eshelby en remplaçant \mathbf{E} par \mathbf{E}_1 :

$$\langle \varepsilon \rangle_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbf{E}_1 \quad (\text{I.91})$$

Pour la matrice, on a

$$\langle \varepsilon \rangle_1 = \mathbf{E}_1 \quad (\text{I.92})$$

La relation $\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}$ permet de calculer la valeur du tenseur \mathbf{E}_1 en fonction de \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}_1 = \left[f_1 \mathbb{I} + f_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right]^{-1} : \mathbf{E} \quad (\text{I.93})$$

On en déduit les estimations de la moyenne des tenseurs de localisation

$$\mathbb{A}_1 = \left[f_1 \mathbb{I} + f_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.94})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_2 &= [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \\ &= [\mathbb{I} + f_1 \mathbb{P} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.95})$$

En remettant ces résultats dans la relation (I.34), on obtient directement l'estimation de Mori-Tanaka du tenseur élastique macroscopique

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{MT} &= \mathbb{C}_1 + f_2 (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : \mathbb{A}_2 \\ &= \mathbb{C}_1 + f_2 [f_1 \mathbb{P} + (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.96})$$

On peut retrouver ici l'estimation d'Eshelby du tenseur élastique macroscopique quand f_2 tend vers 0 (f_2 développée en premier ordre). C'est le cas des faibles concentrations en inclusions. On élargit ce résultat dans le cas d'un milieu hétérogène à r phases où toutes les inclusions de chaque phase sont de même forme et de même orientation mais la forme et l'orientation des inclusions de deux phases différentes peuvent être différentes. Les tenseurs de localisation de chaque phase et l'estimation du tenseur élastique macroscopique sont respectivement

$$\mathbb{A}_1 = \left[f_1 \mathbb{I} + \sum_{i=2}^r f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.97})$$

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \quad (\text{I.98})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{MT} &= \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \\ &= \mathbb{C}_1 + \langle \mathbb{T} \rangle : \left[f_1 \mathbb{I} + \sum_{i=2}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)^{-1} : \mathbb{T}_i \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.99})$$

Si l'on se restreint dans le cas de toutes les inclusions ont le même tenseur d'élasticité \mathbb{C}_I , les formules des tenseurs de localisation de chaque phase et l'estimation du tenseur élastique macroscopique sont respectivement

$$\mathbb{A}_1 = \left[f_1 \mathbb{I} + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)^{-1} : \langle \mathbb{T} \rangle \right]^{-1} \quad (\text{I.100})$$

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \quad (\text{I.101})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{MT} &= \mathbb{C}_1 + \langle \mathbb{T} \rangle : \left[f_1 \mathbb{I} + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)^{-1} : \langle \mathbb{T} \rangle \right]^{-1} \\ &= \mathbb{C}_1 + \left[f_1 \langle \mathbb{T} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

$\langle \mathbb{T} \rangle$ et \mathbb{T}_i sont présentés dans (I.88).

Dans le cas particulier des inclusions sphériques immergés dans la matrice isotrope, le comportement du matériau à l'échelle macroscopique est encore isotrope :

$$k_{MT} = k_1 \left(1 + f_2 \frac{k_2 - k_1}{k_1 + f_1 \alpha (k_2 - k_1)} \right), \quad \mu_{MT} = \mu_1 \left(1 + f_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + f_1 \beta (\mu_2 - \mu_1)} \right) \quad (\text{I.103})$$

En mettant $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on obtient l'estimation de Mori-Tanaka des modules de compression macroscopique et de cisaillement macroscopique dans le cas milieu poreux sec

$$k_{MT} = k_1 \left(1 - f_2 \frac{3k_1 + 4\mu_1}{3f_2 k_1 + 4\mu_1} \right), \quad \mu_{MT} = \mu_1 \left(1 - f_2 \frac{15k_1 + 20\mu_1}{(9 + 6f_2)k_1 + (8 + 12f_2)\mu_1} \right) \quad (\text{I.104})$$

Le coefficient de Biot correspondant ne dépend que du coefficient de Poisson du matériau 1 (se reporter également à [16])

$$b_{MT} = \frac{3f_2(1 - \nu_1)}{f_2(1 + \nu_1) + 2(1 - 2\nu_1)} \quad (\text{I.105})$$

En effet, le schéma Mori-Tanaka permet de tenir compte l'interaction entre les inclusions, il améliore ainsi les résultats du schéma dilué qui a négligé cette interaction. Bornert [6] a constaté que l'estimation du schéma de Mori-Tanaka donne les résultats satisfaisants jusqu'à 20% de la concentration. Cependant, il reste quelques problèmes qui sont difficiles à interpréter comme la non-symétrie majeure, dans certains cas, du tenseur homogénéisé macroscopique correspondant au de schéma Mori-Tanaka [72].

I.5.5 Le schéma autocohérent

Les deux schémas précédents sont bien adaptés à une structure constituée d'une matrice continue et d'hétérogénéités. Le schéma autocohérent permet d'estimer les situations où aucune phase continue ne peut être identifiée. Ce schéma a été introduit par Hershey [35] pour le matériau polycristal et reformulé par Hill [36] pour le matériau comportant des inclusions ellipsoïdales. Le

principe du schéma autocohérent consiste à supposer que chaque inclusion soit entourée par toutes les autres phases et donc par le milieu moyen homogénéisé. La déformation dans le milieu moyen *loin* de l'inclusion est notée \mathbf{E}_0 . En cas du matériau biphasique, la déformation moyenne dans l'inclusion i , ($i = 1, 2$) prend la forme suivante

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} : \mathbf{E}_0 \quad (\text{I.106})$$

La valeur de \mathbf{E}_0 est déterminée à partie de la relation $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$. Dans le cas d'inhomogénéités de la même forme et de la même orientation, on montre que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ [85]. On en déduit l'estimation des tenseurs de localisation par phase

$$\mathbb{A}_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} \quad (\text{I.107})$$

L'estimation autocohérente du tenseur d'élasticité macroscopique s'obtient en résolvant l'équation suivante

$$\mathbb{C}_{AC} = f_1 \mathbb{C}_1 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom} : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} + f_2 \mathbb{C}_2 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} \quad (\text{I.108})$$

Si le matériau constitué des grains sphériques dont chaque matériau est homogène isotrope, l'équation tensorielle (I.108) est équivalente deux équations scalaires suivantes

$$\begin{cases} f_1 \frac{k_1 - k_{hom}}{k_{hom} + \alpha_{hom} (k_1 - k_{hom})} + f_2 \frac{k_2 - k_{hom}}{k_{hom} + \alpha_{hom} (k_2 - k_{hom})} = 0 \\ f_1 \frac{\mu_1 - \mu_{hom}}{\mu_{hom} + \beta_{hom} (\mu_1 - \mu_{hom})} + f_2 \frac{\mu_2 - \mu_{hom}}{\mu_{hom} + \beta_{hom} (\mu_2 - \mu_{hom})} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.109})$$

avec

$$\alpha_{hom} = \frac{3 k_{hom}}{3 k_{hom} + 4 \mu_{hom}}, \quad \beta_{hom} = \frac{6 (k_{hom} + 2 \mu_{hom})}{5 (3 k_{hom} + 4 \mu_{hom})} \quad (\text{I.110})$$

En posant $k_2 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on obtient l'estimation autocohérente des modules de compression macroscopique et de cisaillement macroscopique dans le cas milieu poreux sec

$$k_{hom} = \frac{4 (1 - f_2) k_1 \mu_{hom}}{3 f_2 k_1 + 4 \mu_{hom}} \quad (\text{I.111})$$

avec μ_{hom} est la solution positive unique de l'équation du second degré suivante :

$$8 \mu_{hom}^2 - [(8 - 20 f_2) \mu_1 - (9 - 3 f_2) k_1] \mu_{hom} - (9 - 18 f_2) k_1 \mu_1 = 0 \quad (\text{I.112})$$

La formule homogénéisé correspondante au schéma autocohérent (I.108) est une équation implicite, on la résout par le calcul itératif

$$\mathbb{C}_{AC}^{i+1} = f_1 \mathbb{C}_1 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom}^i : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_{AC}^i)]^{-1} + f_2 \mathbb{C}_2 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{hom}^i : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^i)]^{-1} \quad (\text{I.113})$$

Le calcul (I.113) est arrêté à la condition de

$$\left| \frac{\mathbb{C}_{mnpq,AC}^{i+1} - \mathbb{C}_{mnpq,AC}^i}{\mathbb{C}_{mnpq,AC}^{i+1}} \right| < \varepsilon_{er} \quad (\text{I.114})$$

avec $\mathbb{P}_{hom}^i = \mathbb{P}_{hom}^i(\mathbb{C}_{AC}^i)$ et ε_{er} est l'erreur relative maximale autorisée. En fait, afin d'éviter le long calcul, on peut utiliser les résultats (les tenseurs des modules d'élasticité macroscopiques) associés au schéma dilué ou au schéma de Mori-Tanaka comme les valeurs démarrées du calcul (I.113).

Comme pour le schéma de Mori-Tanaka, ce schéma n'assure pas la symétrie majeure du tenseur d'élasticité macroscopique.

I.5.6 Schéma Ponte Castaneda et Willis (PCW)[66]

Ponte Castaneda et Willis proposent une méthode d'estimation des propriétés effectives du matériau composite dans laquelle on a pris en compte les effets de distribution spatiale et les interactions entre les inclusions. L'idée principale de cette méthode consiste à introduire deux fonctions indépendantes, l'une associée à la forme de l'inclusion, l'autre à la forme de la fonction de répartition spatiale. Le développement de cette méthode se pose sur la formulation variationnelle de Hashin et Shtrickman [34] dans laquelle le tenseur d'élasticité du matériau de référence est choisie égal à celui de la matrice. On considère un matériau constitué des inclusions ellipsoïdales élastiques linéaires homogènes (la famille de l'inclusion i), immergées dans une matrice élastique linéaire homogène (phase 1). On suppose que toutes les inclusions ont la même distribution spatiale (ellipsoïdale), le tenseur de localisation des déformation dans ce cas peut prendre la forme suivante [66, 87] :

$$\mathbb{A}_i^{PCW} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \quad (\text{I.115})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= \left[f_1 \mathbb{I} + \sum_{i=2}^r f_i [\mathbb{I} + (\mathbb{P}_i - \mathbb{P}_d) : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)] : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right]^{-1} \\ &= [\mathbb{I} - \mathbb{P}_d : \langle \mathbb{T} \rangle]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.116})$$

dans lesquelles $\langle \mathbb{T} \rangle$ et \mathbb{T}_i sont donnés dans (I.88). \mathbb{P}_i désigne le tenseur de Hill relatif à la forme de la famille de l'inclusion i . \mathbb{P}_d est le tenseur de Hill associé à la fonction de distribution spatiale (ϵ_d). Le choix de la forme des ellipsoïdes entourant les inclusions doit être satisfait la condition limite de volume, c'est-à-dire la fraction volumique des ellipsoïdes ne dépasse pas à 1.

Introduction de (I.115) dans l'expression (I.34) conduit à [29] :

$$\mathbb{C}_{PCW} = \mathbb{C}_1 + \left(\langle \mathbb{T} \rangle^{-1} - \mathbb{P}_d \right)^{-1} \quad (\text{I.117})$$

Dans le cas biphasique avec toutes les inclusions de la même forme et de la même orientation, (I.117) peut s'écrire

$$\mathbb{C}_{PCW} = \mathbb{C}_1 + \left[\frac{1}{f_2} \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)^{-1} \right] - \mathbb{P}_d \right]^{-1} \quad (\text{I.118})$$

A partir de (I.118), on peut démontrer que dans le cas de toutes les inclusions de la même forme et de la même orientation, le choix de $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}$ fait des résultats du schéma de PCW correspondants au celui de Mori-Tanaka [66], [87]. Contrairement au schéma autocohérent et schéma de Mori-Tanaka, la propriété de symétrie, mineur et majeur, du tenseur homogénéisé \mathbb{C}_{PCW} est assurée. Cependant, un point faible de ce schéma est le risque de non déterminer du tenseur \mathbb{C}_{PCW} , c'est-à-dire $\left(\langle \mathbb{T} \rangle^{-1} - \mathbb{P}_d \right)$ est non inversible. Le lecteur pourra se reporter, pour plus détail sur ce problème, à la référence [6]. La discussion des liens entre le schéma de PCW et les autres schémas peut trouver aux références [39] et [40].

I.6 Quelques outils pour la description de la géométrie des inclusions

La présentation qui suit s'inspire de l'ouvrage de référence [62] dont on a, en particulier, repris les notations.

I.6.1 Systèmes de coordonnées définissant l'orientation de l'inclusion

On présente ici la méthode de calcul d'un tenseur d'ordre quatre, cohérent aux inclusions ellipsoïdes orientées arbitraires dans le repère du matériau ou le repère global.

Nous considérons dans cette section une inclusion orientée arbitraire. On introduit d'abord la matrice de rotation entre les coordonnées globales z_i définissant l'anisotropie de matrice (z_3 est l'axe de symétrie de la matrice isotrope transverse) et les coordonnées locales z_i^α définissant l'orientation d'une inclusion centrée à l'origine des coordonnées (z_3^α est l'axe de symétrie de l'inclusion ellipsoïde). Le tenseur orthogonal d'ordre deux \mathbf{Q}^α transforme les composantes du repère de coordonné α dans celui de coordonnées (z_1, z_2, z_3) . En dénotant le vecteur unitaire dans la direction z_i^α par \underline{e}_i^α , le tenseur \mathbf{Q}^α est défini par (cf [62] page 124) :

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad , \quad (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{e}_k = R_{kl}^\alpha \underline{e}_l^\alpha \quad , \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{I.119})$$

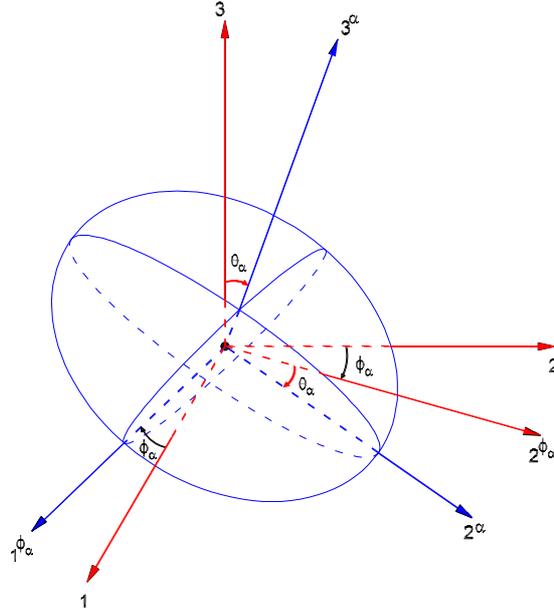


FIGURE I.4: L'orientation de l'inclusion

car \mathbf{Q}^α est une matrice de rotation, son inverse \mathbf{R}^α est simplement la matrice transposée :

$$R_{kl}^\alpha = Q_{lk}^\alpha \quad (\text{I.120})$$

et les règles correspondantes de transformation (I.119) pour le vecteur et les composantes du tenseur d'ordre quatre s'écrivent :

$$A_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha A_j \quad , \quad A_i = Q_{ji}^\alpha A_j^\alpha \quad (\text{I.121})$$

$$B_{ijkl}^\alpha = Q_{ip}^\alpha Q_{jq}^\alpha Q_{kr}^\alpha Q_{ls}^\alpha B_{pqrs} \quad , \quad B_{ijkl} = Q_{pi}^\alpha Q_{qj}^\alpha Q_{rk}^\alpha Q_{sl}^\alpha B_{pqrs}^\alpha \quad (\text{I.122})$$

L'orientation d'une inclusion aplatie ($a = b > c$) est définie par deux angles et puis deux rotations successives de l'axe global fixe du matériau. L'angle entre les axes z_1 et z_1^α est ϕ_α ($0 \leq \phi_\alpha \leq 2\pi$) et l'angle entre les axes z_3^α et z_3 est θ_α ($0 \leq \theta_\alpha \leq \pi$) :

$$\mathbf{Q}^{\theta_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_\alpha) & -\sin(\theta_\alpha) \\ 0 & \sin(\theta_\alpha) & \cos(\theta_\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.123})$$

$$\mathbf{Q}^{\phi_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_\alpha) & -\sin(\phi_\alpha) & 0 \\ \sin(\phi_\alpha) & \cos(\phi_\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.124})$$

$$\mathbf{Q}^\alpha = \mathbf{Q}^{\theta_\alpha} \cdot \mathbf{Q}^{\phi_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_\alpha) & -\sin(\phi_\alpha) & 0 \\ \cos(\theta_\alpha) \sin(\phi_\alpha) & \cos(\theta_\alpha) \cos(\phi_\alpha) & -\sin(\theta_\alpha) \\ \sin(\theta_\alpha) \sin(\phi_\alpha) & \cos(\phi_\alpha) \sin(\theta_\alpha) & \cos(\theta_\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.125})$$

Dans le cas de la matrice isotrope, le calcul du tenseur de Hill \mathbb{P} (et/ou du tenseur d'Eshelby \mathbb{S}^E et) sera effectué dans le système des coordonnées locales de l'inclusion (z_i^α , ou \underline{e}_i^α). Les composantes correspondantes, dénotées P_{pqrs}^α et les composantes P_{ijkl} du tenseur de Hill dans le système des coordonnées globales fixes déduisent des relations (I.122) :

$$P_{ijkl} = Q_{pi}^\alpha Q_{qj}^\alpha Q_{rk}^\alpha Q_{sl}^\alpha P_{pqrs}^\alpha \quad (\text{I.126})$$

On définit un système des coordonnées *intermédiaire* obtenu par la première rotation d'un angle ϕ_α autour de l'axe symétrique du matériau isotrope transverse :

$$\underline{e}_i^{\phi_\alpha} = Q_{ij}^{\phi_\alpha} \underline{e}_j \quad , \quad \begin{pmatrix} \underline{e}_1^{\phi_\alpha} = \cos(\phi_\alpha) \underline{e}_1 - \sin(\phi_\alpha) \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2^{\phi_\alpha} = \sin(\phi_\alpha) \underline{e}_1 + \cos(\phi_\alpha) \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3^{\phi_\alpha} = \underline{e}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.127})$$

Les coordonnées locales attachées aux inclusions ellipsoïdes orientées arbitraires peuvent être définies par :

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^{\theta_\alpha} \underline{e}_j^{\phi_\alpha} \quad , \quad \begin{pmatrix} \underline{e}_1^\alpha = \underline{e}_1^{\phi_\alpha} \\ \underline{e}_2^\alpha = \cos(\theta_\alpha) \underline{e}_2^{\phi_\alpha} - \sin(\theta_\alpha) \underline{e}_3^{\phi_\alpha} \\ \underline{e}_3^\alpha = \sin(\theta_\alpha) \underline{e}_2^{\phi_\alpha} + \cos(\theta_\alpha) \underline{e}_3^{\phi_\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{I.128})$$

ou :

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad (\text{I.129})$$

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1^\alpha = \cos(\phi_\alpha) \underline{e}_1 - \sin(\phi_\alpha) \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2^\alpha = \cos(\theta_\alpha) \sin(\phi_\alpha) \underline{e}_1 + \cos(\theta_\alpha) \cos(\phi_\alpha) \underline{e}_2 - \sin(\theta_\alpha) \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3^\alpha = \sin(\theta_\alpha) \sin(\phi_\alpha) \underline{e}_1 + \cos(\phi_\alpha) \sin(\theta_\alpha) \underline{e}_2 + \cos(\theta_\alpha) \underline{e}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.130})$$

Le calcul du tenseur de \mathbb{P} , dans le cas de la matrice isotrope transverse au chapitre III sera effectué dans le système des coordonnées *intermédiaire* ($z_i^{\phi_\alpha}$, ou $\underline{e}_i^{\phi_\alpha}$). Les composantes correspondantes, dénotées $P_{pqrs}^{\phi_\alpha}$ et les composantes P_{ijkl} du tenseur de Hill dans le système des coordonnées globales fixes seront déduites des relations (I.122) :

$$P_{ijkl} = Q_{pi}^{\phi_\alpha} Q_{qj}^{\phi_\alpha} Q_{rk}^{\phi_\alpha} Q_{sl}^{\phi_\alpha} P_{pqrs}^{\phi_\alpha} \quad (\text{I.131})$$

On peut noter qu'une méthode basée sur les fonctions Green obtenues par [64] pour le matériau isotrope transverse implique le choix d'un système des coordonnées avec un axe fixé : l'axe de symétrie z_3 . Deux axes orthogonaux définissant le plan d'isotropie peuvent être choisis arbitrairement. Le système des coordonnées *intermédiaire* remplit les conditions pour employer la méthode de la fonction de Green : l'axe de symétrie du matériel z_3 coïncide avec la direction $z_3^{\phi_\alpha}$, et deux directions transversales $z_1^{\phi_\alpha}$ et $z_2^{\phi_\alpha}$ sont attachées à l'ellipsoïde par l'angle ϕ_α . En terme d'exactitude des calculs et également des coûts informatiques, il est important de noter que l'intégration dans les coordonnées *intermédiaire* est effectuée seulement sur un angle θ_α (voir également au chapitre III).

I.6.2 Fonction de distribution en orientation (ODF) de pores

Les propriétés et l'anisotropie élastiques des promatériaux sont fortement influencées par le degré d'alignement préférentiel des pores qui est caractérisé par une fonction de distribution en orientation. Pour plus de détail, on pourra se reporter aux références [43, 44, 45, 47, 48, 71, 78]. En général, l'orientation d'une inclusion de repère local ($\underline{e}_1^\alpha, \underline{e}_2^\alpha, \underline{e}_3^\alpha$) est liée au repère global ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) par les trois angles d'Euler ($\theta_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha$) où θ_α est l'angle entre les deux axes z_3 et z_3^α ($0 \leq \theta_\alpha \leq \pi$), ϕ_α est une rotation du repère global autour de l'axe z_3 ($0 \leq \phi_\alpha \leq 2\pi$) et ψ_α est une rotation de l'inclusion autour de l'axe z_3^α ($0 \leq \psi_\alpha \leq 2\pi$). Une valeur de l'ODF $W(\theta_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha)$ donne la densité de probabilité pour une orientation particulière. L'ODF $W(\theta_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha)$ doit vérifier l'équation suivante :

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi_\alpha=0}^{2\pi} W(\theta_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha d\phi_\alpha d\psi_\alpha = 1 \quad (\text{I.132})$$

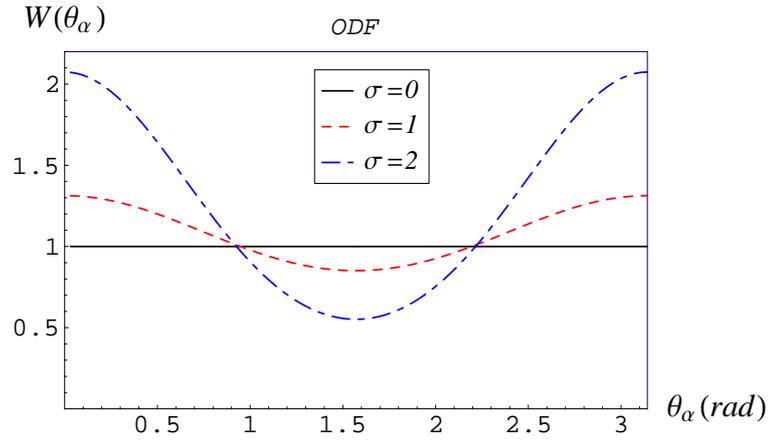


FIGURE I.5: L'influence de σ sur la fonction de distribution en orientation des pores ($0 \leq \sigma \leq 2$)

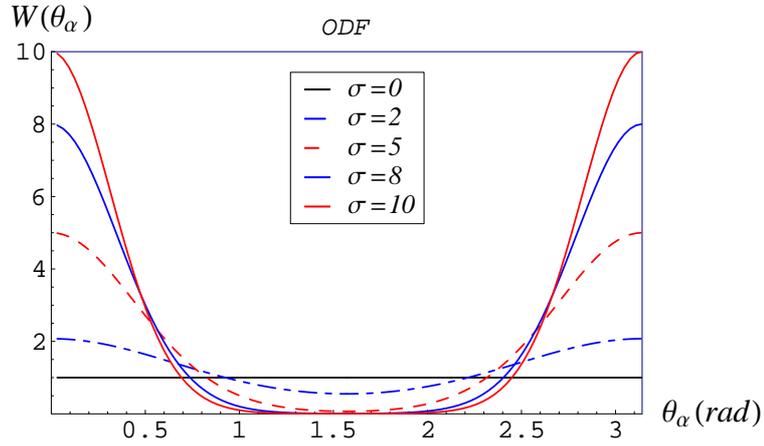


FIGURE I.6: L'influence de σ sur la fonction de distribution en orientation des pores ($0 \leq \sigma \leq 10$)

On limitera ici la discussion à la répartition isotrope transverse des inclusions avec l'axe z_3 comme l'axe de symétrie. Ceci implique que $W(\theta_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha)$ est indépendant de ϕ_α et de ψ_α . L'équation (I.132) devient

$$\int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} W(\theta_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha = 2 \quad (\text{I.133})$$

Une fonction de distribution en orientation peut être employée pour décrire l'alignement de pores, qui est caractérisé, dans la pratique, par deux coefficients θ_α, σ . θ_α est un angle orienté de l'inclusion, illustré dans la figure I.4. σ est un paramètre présentant le degré d'alignement des pores. $\sigma = 0$ signifie une distribution en orientation isotrope de pores, $\sigma > 0$ induit une deuxième source d'anisotropie dans le modèle de micromechanics du matériau (la première source d'anisotropie

vient de la matrice), σ tend vers l'infini, présentant une distribution alignée de pores. L'influence de σ à l'ODF, ou au degré d'anisotropie du matériau est présenté dans les figures I.5 et I.6. A titre d'exemple, pour les argilites, cette fonction a été présentée par Sayers [71], elle est un outil important pour expliquer une distribution non-uniforme de l'orientation des pores [46]. La fonction suivante (voir [71, 44, 78])

$$W(\theta_\alpha, \sigma) = \sigma \operatorname{Cosh}(\sigma \operatorname{Cos} \theta_\alpha) \operatorname{Csch} \sigma \quad (\text{I.134})$$

est choisie, elle vérifie les conditions (I.133).

I.7 Applications aux roches poreuses

I.7.1 Propriétés des constituants

En réalité, les propriétés de tous les constituants des géomatériaux ne sont pas bien connues à l'heure actuelle. Dans de nombreuses situations, seules les propriétés *macroscopiques*, ou *effectives*, mécaniques ou poromécaniques ont été caractérisées grâce à des essais de laboratoire tel que des essais géomécaniques (essai triaxial de compression et essai triaxial déviatorique) réalisés à l'échelle macroscopique. Même à l'échelle macroscopique, il est très difficile de caractériser les coefficients poromécaniques, tels que le tenseur \mathbf{B} de Biot et des coefficients de rigidité drainé pour les géomatériaux à faibles perméabilité. Le problème à résoudre peut être considéré comme un problème inverse, c'est à dire à partir des propriétés expérimentales macroscopiques et un modèle microstructural proposé, on calcule les propriétés microscopiques des constituants des géomatériaux par l'approche micromécanique. Par exemple, les propriétés *homogénéisées* ou *effectives* et la structure spatiale de pore sont plus ou moins connus et l'inconnu peut être les propriétés de la matrice. Dans cette section, on applique un schéma à deux étapes d'homogénéisation pour retrouver les propriétés mécaniques de la matrice :

- a. Tout d'abord, on enlève les inclusions minérales sphériques (le quartz et la calcite) dans le V.E.R pour déterminer un milieu, appelé *le milieu I* qui se comporte de la matrice et de la microporosité de forme aplatie. Le résultat est un milieu isotrope transverse dénoté \mathbb{C}^I , obtenu par le calcul itératif correspondant au schéma de Mori-Tanaka. En inversant la relation (I.99) dans laquelle la donnée est le tenseur élastique non drainé *effectif* ou *macroscopique* \mathbb{C}_{MT} , \mathbb{C}_{qu} , \mathbb{C}_{ca} , f_{qu} , f_{ca} et l'inconnu est le tenseur \mathbb{C}^I , on obtient le problème non linéaire à

résoudre

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{n+1}^I &= \mathbb{C}_{MT} - \left(\sum_i f_i \mathbb{T}_n^i \right) : \left[f_1 \mathbb{I} + \sum_i f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_n^I)^{-1} : \mathbb{T}_n^i \right]^{-1} \\ \mathbb{T}_n^i &= \left[\mathbb{P}_n + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_n^I)^{-1} \right]^{-1}, \quad i = qu, ca \\ f_1 &= f_a + f_p\end{aligned}\tag{I.135}$$

où \mathbb{P}_n désigne le tenseur de Hill, à l'étape n , pour les inclusions minérales sphériques dans le milieu isotrope transverse \mathbb{C}_n^I . La solution analytique de ce tenseur est présentée au chapitre II.

Par l'algorithme itératif, (I.135) est résolu avec l'erreur relative $\epsilon_r < 10^{-5}$ et la condition initiale :

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{|\mathbb{C}_{1111,n+1}^I - \mathbb{C}_{1111,n}^I|}{\mathbb{C}_{1111,n+1}^I} + \frac{|\mathbb{C}_{1122,n+1}^I - \mathbb{C}_{1122,n}^I|}{\mathbb{C}_{1122,n+1}^I} + \frac{|\mathbb{C}_{1133,n+1}^I - \mathbb{C}_{1133,n}^I|}{\mathbb{C}_{1133,n+1}^I} \\ &+ \frac{|\mathbb{C}_{3333,n+1}^I - \mathbb{C}_{3333,n}^I|}{\mathbb{C}_{3333,n+1}^I} + \frac{|\mathbb{C}_{2323,n+1}^I - \mathbb{C}_{2323,n}^I|}{\mathbb{C}_{2323,n+1}^I}\end{aligned}\tag{I.136}$$

$$\mathbb{C}_0^I = (1 - f_{qu} - f_{ca})\mathbb{C}_{MT}\tag{I.137}$$

Le résultat de la première étape est de $E_1^I = 4.357 \text{ GPa}$, $E_3^I = 3.133 \text{ GPa}$, $\nu_{12}^I = 0.16$, $\nu_{31}^I = 0.21$, $G_{13}^I = 1.264 \text{ GPa}$.

- b. Ensuite, on continue d'enlever le système de pores non drainés, distribué de la manière isotrope transverse, dans *le milieu I* pour estimer les propriétés mécaniques de la matrice en supposant que la matrice est isotrope. Puisque la géométrie de l'espace poreux, notamment la distribution en orientation de pores, est encore inconnue, on ne peut pas déterminer le tenseur d'élasticité de la matrice par la méthode de calcul itératif comme à l'étape 1. Même si l'on connaît l'ODF de pores, il resterait aussi, à l'heure actuelle les difficultés du calcul itératif parce que la solution numérique du tenseur de Hill pour les inclusions orientées dans la matrice isotrope transverse est très lourde. Ce sont les raisons pour lesquelles, on doit faire un jeu des paramètres de la matrice (E_a , ν_a) et de la distribution en orientation de pores (σ) dans le but de retrouver le tenseur d'élasticité du *milieu I*. Le problème à résoudre est obtenu par la relation (I.102) :

$$\mathbb{C}^I = \mathbb{C}_a + \left[(1 - f_p) \langle \mathbb{T} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_a)^{-1} \right]^{-1}\tag{I.138}$$

où $\langle \mathbb{T} \rangle$ est déterminé par la relation (I.88)

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i^p \mathbb{T}_i = \sum_i f_i^p \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_a)^{-1} \right]^{-1}\tag{I.139}$$

f_p est la fraction de pores occlus $f_p = \sum_i f_i^p$ avec f_i^p est celle de la famille i . La fraction f_p dans ce calcul est pris par la valeur de $f_p/(f_a + f_p) = 25\%$. \mathbb{P}_i désigne le tenseur de Hill qui dépend du rapport d'aspect de pores ϵ_{op} , de la matrice \mathbb{C}_a et de l'orientation de chaque famille de pores $(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$. Ce tenseur est déterminé par la relation (I.126) où \mathbb{P}^α est le tenseur de Hill dans le repère local de l'inclusion. La contribution de toutes les familles i des pores au tenseur de rigidité macroscopique et au tenseur de Biot est rendue compte par une intégration sur la sphère unitaire, en introduisant la fonction de distribution en orientation $W(\theta_\alpha, \sigma)$, la relation (I.139) peut s'écrire

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \frac{f_p}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} W(\theta_\alpha, \sigma) [\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_a)^{-1}]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \quad (\text{I.140})$$

En fait, la détermination analytique de l'intégration du tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ ci-dessus est difficile car les formules intégrales sont compliquées. C'est pour cette raison que l'on choisit une méthode d'intégration numérique de type Gauss. A titre d'exemple, l'intégrale d'une fonction de deux variables $f(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$ sera approchée par :

$$\int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} f(\theta_\alpha, \phi_\alpha) d\theta_\alpha d\phi_\alpha = \sum_{u=1}^{N_{\theta_\alpha}} \sum_{v=1}^{N_{\phi_\alpha}} \omega_{\theta_\alpha}^u \omega_{\phi_\alpha}^v f(\theta_\alpha^u, \phi_\alpha^v) \quad (\text{I.141})$$

où N_{θ_α} et N_{ϕ_α} désignent respectivement le nombre de points d'intégration de θ_α et ϕ_α . $\omega_{\theta_\alpha}^u$ et $\omega_{\phi_\alpha}^v$ désignent respectivement le poids associé au $u^{\text{ième}}$ point d'intégration de θ_α et le poids associé au $v^{\text{ième}}$ point d'intégration de ϕ_α .

Alors, en utilisant la méthode d'intégration numérique de type Gauss, (I.140) devient

$$\langle \mathbb{T} \rangle \approx \frac{f_p}{4\pi} \sum_{u=1}^{N_{\theta_\alpha}} \sum_{v=1}^{N_{\phi_\alpha}} \omega_{\theta_\alpha}^u \omega_{\phi_\alpha}^v W(\theta_\alpha^u, \sigma) [\mathbb{P}(\theta_\alpha^u, \phi_\alpha^v) + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_a)^{-1}]^{-1} \sin \theta_\alpha^u \quad (\text{I.142})$$

où N_{θ_α} et N_{ϕ_α} désignent respectivement le nombre de points de Gauss dans les intervalles de $[0, \pi]$ et de $[0, 2\pi]$. $\omega_{\theta_\alpha}^u$ et $\omega_{\phi_\alpha}^v$ désignent respectivement le poids associé au $u^{\text{ième}}$ point d'intégration de θ_α et le poids associé au $v^{\text{ième}}$ point d'intégration de ϕ_α , θ_α^u et ϕ_α^v sont les coordonnées de Gauss-Legendre correspondantes.

Dans les formules (I.138-I.139-I.142), la donnée est les propriétés de pores occlus \mathbb{C}_{op} , la porosité f_p , le rapport d'aspect de pores $\epsilon_{op} = 0.05$ et le tenseur d'élasticité du milieu I \mathbb{C}_{MT}^I . A cette étape, on change les trois paramètres (E_a, ν_a, σ) de sorte que le tenseur \mathbb{C}_{MT}^I qui est trouvé par (I.138) soit proche du résultat de l'étape 1. Les valeurs convenables à choisir sont de $E_a = 7.4 \text{ GPa}$, $\nu_a = 0.1$, $\sigma = 8$, correspondantes à un minimum de point de Gauss de $N_{\theta_\alpha} = 30$, $N_{\phi_\alpha} = 60$. Un test de précision de la méthode d'intégration de Gauss pour 5 composantes non nulles indépendantes du tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ qui a la forme isotrope transverse est aussi présenté dans le tableau I.1.

TAB. I.1: Composantes du tenseur $\langle \mathbb{T} \rangle$ (test de précision de la méthode d'intégration de Gauss), $\sigma = 8$, $E_a = 7400$ MPa, $\nu_a = 0.1$, $\epsilon_{op} = 0.05$,

$$N_{\phi_\alpha} = 2 N_{\theta_\alpha}$$

N_{θ_α}	10	20	30	100
$\langle \mathbb{T} \rangle_{1111}$	8.29372×10^{-6}	1.70773×10^{-11}	1.40467×10^{-15}	5.17983×10^3
$\langle \mathbb{T} \rangle_{1122}$	6.97163×10^{-5}	1.64095×10^{-12}	2.27752×10^{-15}	1.39767×10^3
$\langle \mathbb{T} \rangle_{1133}$	2.3167×10^{-5}	3.73924×10^{-11}	5.00481×10^{-16}	1.81724×10^3
$\langle \mathbb{T} \rangle_{3333}$	4.8682×10^{-5}	2.52703×10^{-11}	2.576×10^{-15}	4.23678×10^3
$\langle \mathbb{T} \rangle_{2323}$	8.59317×10^{-5}	4.90587×10^{-11}	3.44433×10^{-15}	1.18825×10^3

Colonnes $N_{\theta_\alpha} = 10 - 20 - 30$: $\left| \frac{\langle \mathbb{T} \rangle_{ijkl} - \langle \mathbb{T} \rangle_{ijkl}^{100}}{\langle \mathbb{T} \rangle_{ijkl}^{100}} \right|$ (les erreurs relatives)

Colonne $N_{\theta_\alpha} = 100$: $\langle \mathbb{T} \rangle_{ijkl}^{100}$

I.7.2 L'influence du schéma d'homogénéisation sur les propriétés poroélastiques

On considère maintenant l'effet du schéma de calcul sur les propriétés poroélastiques la roche poreuse. Un schéma à deux étapes d'homogénéisation est appliqué :

- a. *Schéma de Mori-Tanaka pour les inclusions sphériques minérales.* Tout d'abord, une matrice solide occupant le domaine Ω_s comportant la matrice (Ω_a) et le système des inclusions sphériques minérales (le quartz Ω_{qu} et la calcite Ω_{ca}) est homogénéisée en utilisant le schéma de Mori-Tanaka, le résultat obtenu est une matrice isotrope dénotée \mathbb{C}_s :

$$\mathbb{C}_s = \mathbb{C}_a + \left(\sum_i f_i \mathbb{T}^i \right) : \left[f_a \mathbb{I} + \sum_i f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_a)^{-1} : \mathbb{T}^i \right]^{-1}, \quad (\text{I.143})$$

$$\mathbb{T}^i = \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_a)^{-1} \right]^{-1}, \quad i = qu, ca$$

Les données sont \mathbb{C}_{qu} , \mathbb{C}_{ca} , f_{qu} , f_{ca} et le tenseur élastique de la matrice \mathbb{C}_a qui est obtenue à la sous section précédente. Le résultat de l'étape 1, $E_s = 15.181$ GPa, $\nu_s = 0.139$ est utilisé comme donnée d'entrée de l'étape 2.

- b. *Les différents schémas pour l'espace poreux.* Le système de pores connectés est ajouté dans la matrice solide isotrope \mathbb{C}_s obtenue à partir de la première étape. Deux cas très simples de la géométrie de pores sont considérés, des pores sphériques (cas 1) et des pores aplatis alignés $\epsilon_p = 0.05$ (cas 2). Les résultats d'homogénéisation en fonction de la porosité du premier cas,

avec quatre schémas de calcul ci-dessus, sont représentés sur la figure I.7. On note que, avec la distribution spatiale sphérique de pores ($\epsilon_d = 1$), les schémas de PCW et Mori-Tanaka donnent les mêmes résultats. En outre, tous les schémas donnent presque les mêmes résultats pour les faibles porosités ($f_p < 10\%$) qui est le domaine de validité de l'estimation obtenue par le schéma dilué. Pour le schéma autocohérent, les modules macroscopiques k , μ , E s'annulent à la porosité de $f_p = 50\%$. Dans ce cas, le matériau perd sa résistance lorsqu'on le charge.

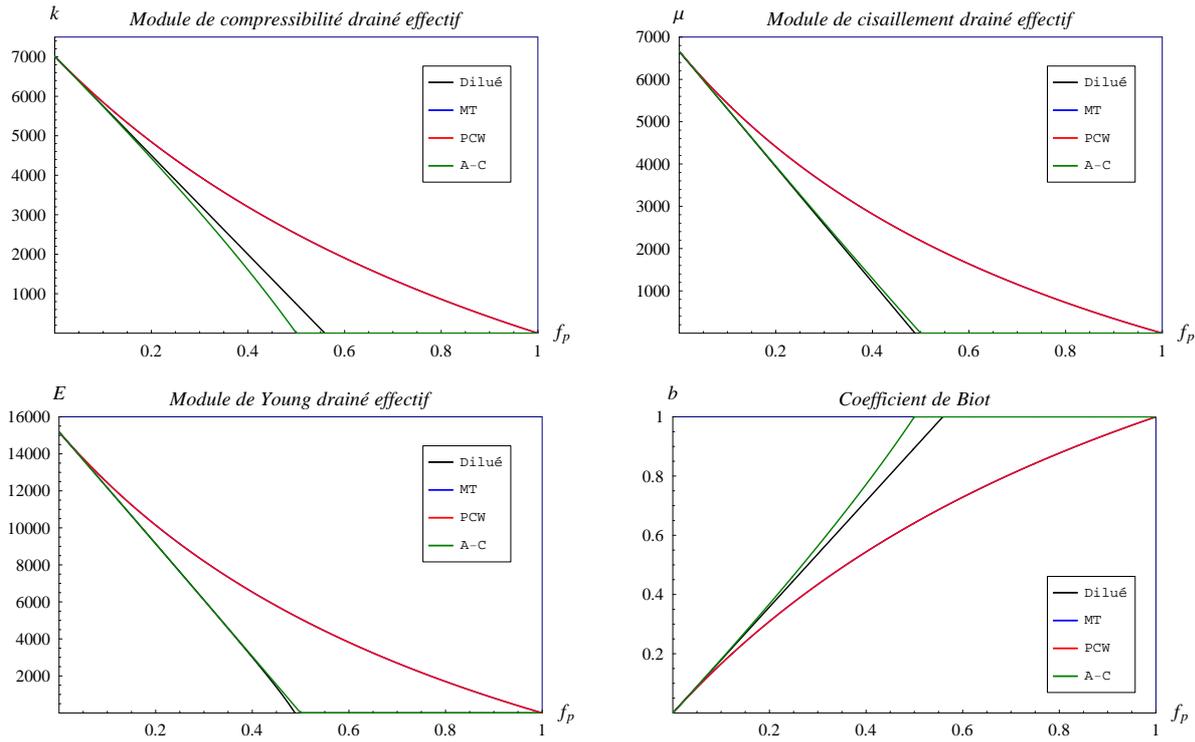
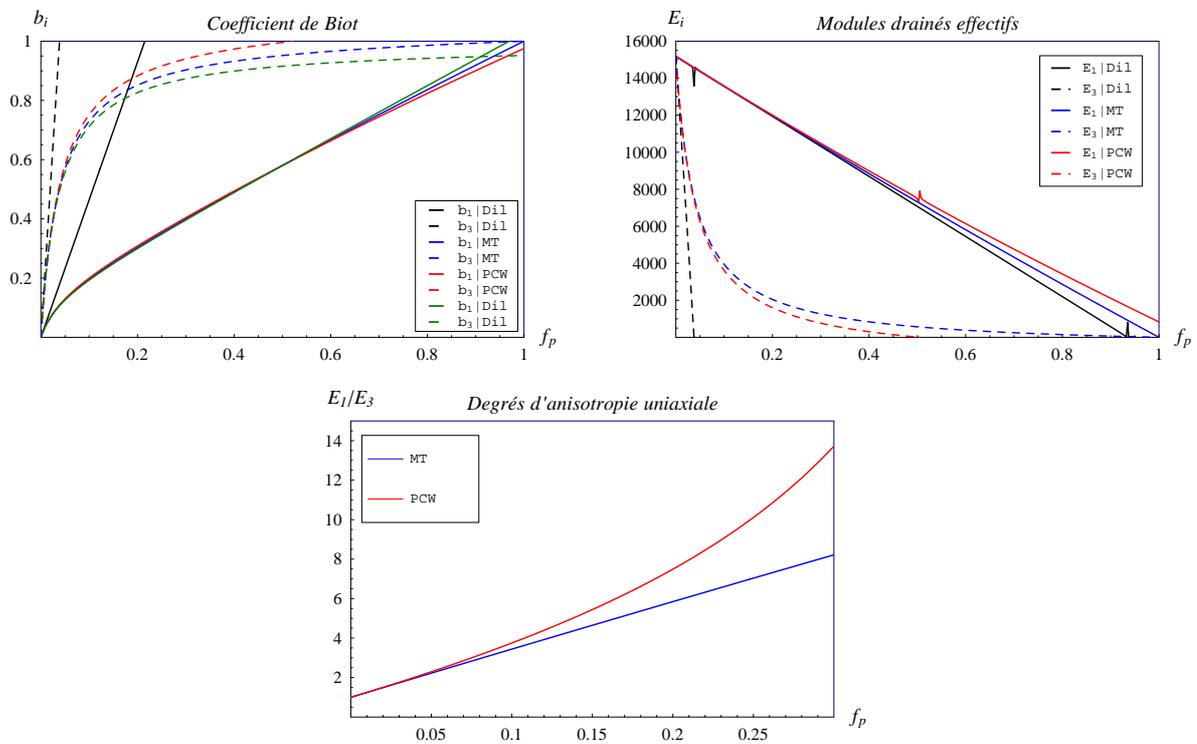


FIGURE I.7: Influence du schéma d'homogénéisation ($\epsilon = 1$)

Les résultats du deuxième cas, avec trois schémas de calcul (schéma dilué, schéma de Mori-Tanaka et schéma de PCW) sont présentés sur la figure I.8. Pour le schéma de PCW, la distribution spatiale est de forme aplatie $\epsilon_d = 0.1$. En comparaison avec le cas 1, on note que le domaine de validité pour le schéma dilué dépend du rapport d'aspect de pores ϵ_p , et dans le cas du rapport d'aspect $\epsilon_p = 0.05$, ce domaine correspond à $f_p < 3.5\%$. Avec le choix $\epsilon_d > \epsilon_p$ du schéma de PCW, le coefficient de Biot b_3 correspondant est supérieur à celui du schéma de Mori-Tanaka. De plus, le module macroscopique E s'annule à la porosité $f_p = \epsilon_p/\epsilon_d = 50\%$ ($b_3 = 1$), c'est-à-dire, pour une morphologie associée au schéma de PCW, la continuité de la phase solide n'est plus assurée pour des porosités supérieures à ϵ_p/ϵ_d . En outre, le calcul du schéma de PCW donne le degré d'anisotropie uniaxiale plus forte que celui du schéma de Mori-Tanaka.


 FIGURE I.8: Influence du schéma d'homogénéisation ($\epsilon = 0.05$)

I.7.3 L'effet de la morphologie de pores sur les propriétés poroélastiques

Une des sources d'anisotropie du matériau est l'influence de la morphologie des inclusions. Le matériau considéré comporte une matrice solide Ω_s ($E_s = 15181 \text{ MPa}$, $\nu_s = 0.139$, obtenus par la première étape d'homogénéisation et un système de pores connectés ($\mathbb{C}_p = 0$) de forme oblate sphéroïde (demi-axes $a = b > c$, de rapport d'aspect $\epsilon_p = c/a < 1$) avec la porosité de 17%. En effet, il y a deux types d'influence de géométrie à analyser, l'un est causé du rapport d'aspect de pores et l'autre est dû à la distribution en orientation du système de pores. On présente ci-dessous les solutions de tous les deux types, obtenues avec le schéma d'estimation de Mori-Tanaka qui permet notamment de prendre en compte les interactions entre des pores plongées dans la matrice solide. On déduit de (I.102) que

$$\mathbb{C}_{MT}^h = \mathbb{C}_s + \left[(1 - f_p) \langle \mathbb{T} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.144})$$

avec le tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ donné à (I.88) :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i^p \mathbb{T}_i = \sum_i f_i^p \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.145})$$

Le tenseur et le module de Biot du solide à l'aide de

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}_s^{-1} : \mathbb{C}_{MT}^h) \\ \frac{1}{N} &= \boldsymbol{\delta} : \mathbb{C}_s^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) \end{aligned} \quad (\text{I.146})$$

Dans le cas simple de pores alignés, alors tous les pores ont la même forme et la même orientation et $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}$. En conséquence, (I.145) pourra s'écrire

$$\langle \mathbb{T} \rangle = f_p \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.147})$$

et (I.144) devient

$$\mathbb{C}_{MT}^h = \mathbb{C}_s + \left[\frac{1 - f_p}{f_p} \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right] + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.148})$$

Dans le cas de pores à répartition en fonction de distribution en orientation $W(\theta_\alpha, \sigma)$, le tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ est calculé par les formules (I.140), (I.142) dans la section I.7.1

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \frac{f_p}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} W(\theta_\alpha, \sigma) \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \quad (\text{I.149})$$

Dans le cas particulier de pores à répartition isotrope, puisque la fonction de distribution d'orientation prend la valeur de l'unité, le tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ prend la forme suivante

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \frac{f_p}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \quad (\text{I.150})$$

Les intégrations sur la sphère unitaire, qui permettent de tenir en compte la contribution de toutes les familles i des pores au tenseur d'élasticité macroscopique et au tenseur de Biot, dans les formules (I.149-I.150) sont réalisées par la méthode de calcul numérique de Gauss avec le nombre de point d'intégration de $N_{\theta_\alpha} = 30$, $N_{\phi_\alpha} = 60$.

a. *L'effet du rapport d'aspect de pores sur les propriétés poroélastiques.* Une étude de sensibilité a été effectuée sur la forme des pores. Quatre rapports d'aspect ont été pris en compte, de la sphère $\epsilon_p = 1$ aux pores aplatis $\epsilon_p = 0.1 - 0.05 - 0.01$. Les résultats d'homogénéisation, correspondants à une distribution en orientation fixe de $\sigma = 8$ sont présentés sur la figure (I.9). D'une part, on note que, le rapport d'aspect est croissant aux modules drainés effectifs et décroissant aux coefficients de Biot. Pour un faible rapport d'aspect des pores ($\epsilon \leq 0.05$), le coefficient de Biot augmente rapidement avec la porosité inférieure à 20%. D'autre part, la diminution du rapport d'aspect implique une croissance du degré d'anisotropie du matériau homogénéisé.

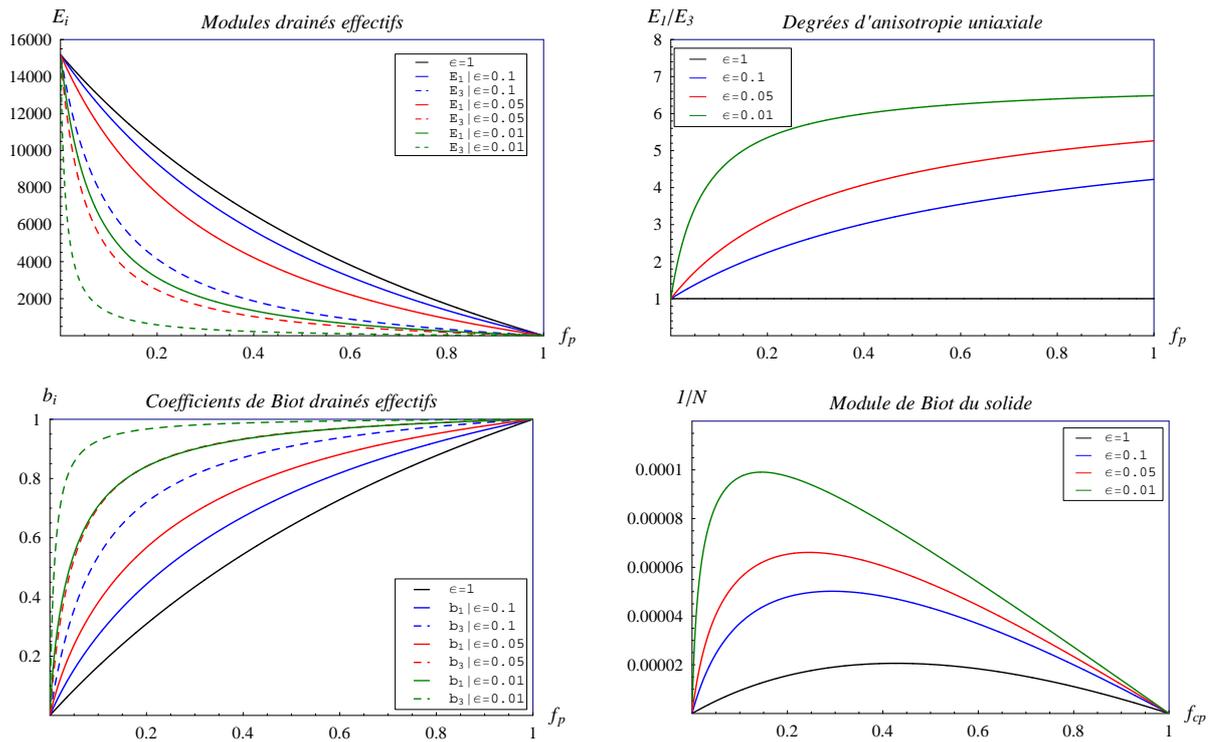


FIGURE I.9: Effet du rapport d'aspect de pores sur les propriétés poroélastiques dans le cas de distribution en orientation de pores ($\sigma = 8$)

b. *L'effet de la distribution en orientation des pores sur les propriétés poroélastiques.* On a aussi réalisé une étude de sensibilité sur la répartition des pores dans la matrice solide Ω_s . Quatre distributions d'orientation des pores ont été prises en compte, deux cas de $\sigma = 8$ et $\sigma = 50$, deux cas limites, les pores alignés et les pores à répartition isotrope. Les résultats correspon-

dants au rapport d'aspect $\epsilon = 0.05$ ont été présentés sur la figure (I.10). Le degré d'anisotropie du matériau homogénéisé est croissant au paramètre de distribution spatiale des pores σ et la répartition isotrope des pores implique un comportement macroscopique isotrope. L'augmentation de σ conduit à la croissance du coefficient de Biot vertical b_3 et à la diminution du module drainé effectif E_3 . Ces deux paramètres, b_3 et E_3 sont très sensibles à la variation de porosité avec $f_p \leq 20\%$. En outre, les courbes b_3 (et E_3) dans les trois cas de distribution, $\sigma = 8$, $\sigma = 50$ et les pores alignés sont assez proches, en conséquence, $\sigma = 8$ sera un bon choix de distribution spatiale des pores pour la roche étudiée qui a un comportement macroscopique à faible d'anisotropie.

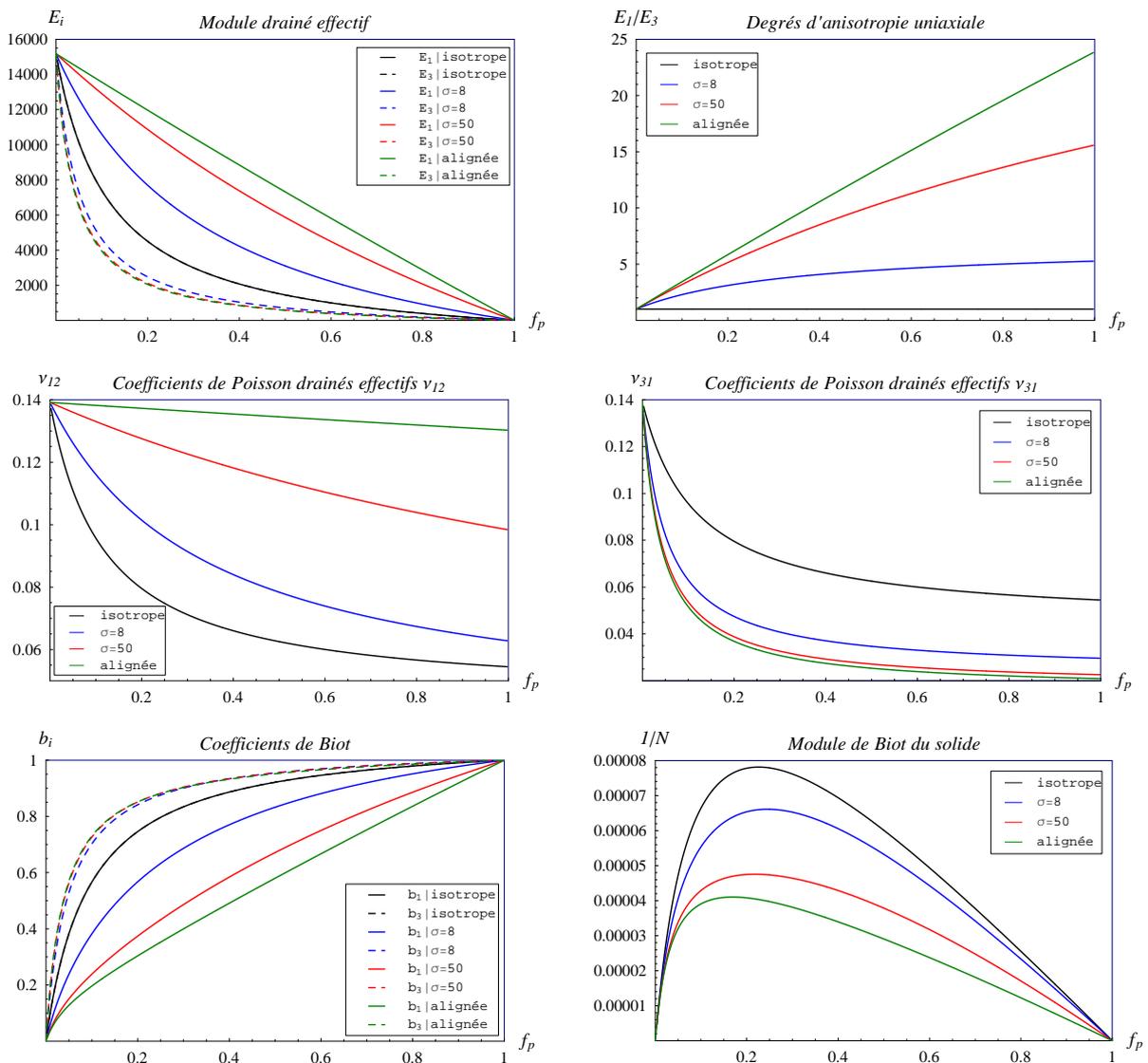


FIGURE I.10: Effet de la distribution spatiale de pores

I.7.4 Une modélisation de la déconnexion de l'espace poreux

On s'intéresse dans cette section à l'estimation des propriétés poroélastiques des roches poreuses : composantes du tenseur de Biot et modules d'élasticité drainés isothermes. Les composantes du tenseur de Biot ont été mesurées en essai oedométrique, au LAEGO (thèse de S. Escoffier [20]) et à l'Institut Français du Pétrole [9]. Dans les deux cas, les mesures, réalisées sur des échantillons prélevés parallèlement et perpendiculairement à la stratification, ont montré que le degré d'anisotropie était faible et que les composantes du tenseur de Biot diminuaient avec l'augmentation de contrainte axiale effective appliquée. Le domaine de variation des composantes du tenseur de Biot est approximativement de 0.9 - 0.4.

Le but du travail est d'analyser aussi l'influence de la morphologie de l'espace poreux sur les résultats macroscopiques obtenus. En particulier l'hypothèse de déconnexion d'une fraction de l'espace poreux sous l'action de la contrainte appliquée [9, 20] sera examinée en détail en fonction de la géométrie et de la distribution spatiale des pores. L'analyse micromécanique est basée sur les travaux récents de L. Dormieux et les collaborateurs [10, 15].

On considère un V.E.R de milieu poreux occupant le domaine géométrique Ω de contour $\partial\Omega$. Trois phases doivent être distinguées : la matrice solide occupant le domaine Ω_s , les pores occlus ou *non drainée* occupant le domaine Ω_{op} , et les pores connectés ou *drainée* occupant le domaine Ω_{cp} :

$$\Omega_{cp} = f_{cp}\Omega, \quad \Omega_{op} = f_{op}\Omega, \quad \Omega_s = (1 - f_{cp} - f_{op})\Omega$$

La fraction volumique f_{cp} s'identifie à la porosité eulérienne. La particule constituant le squelette, que l'on nommera la *matrice*, est composée de la matrice solide Ω_s et de la porosité occluse Ω_{op} :

$$\Omega_m = \Omega_s \cup \Omega_{op}, \quad \Omega_m = (1 - f_{cp})\Omega \quad (\text{I.151})$$

Dans ce qui suit, par référence à la littérature classique concernant les milieux poreux saturés, la *matrice* désignera le domaine Ω_s et Ω_{op} . Elle sera construite par l'homogénéisation des phases *matrice solide* et *pores occlus*. Les pores connectés et occlus sont représentés par des inclusions ellipsoïdales aplaties (demi-axes $a = b > c$, de rapport d'aspect $\epsilon_p = c/a < 1$) élastiques linéaires : les pores connectés sont représentés par un milieu élastique à modules nuls, et les pores occlus par un milieu élastique isotrope à module de cisaillement nul (milieu *non frottant*) et module d'incompressibilité égal à celui de l'eau liquide ($k_{op} = k_{lq}$ où k_{lq} désigne le module d'incompressibilité de l'eau liquide, considéré égal à 2000 MPa) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{cp} &= 0, \quad \mathbb{C}_{op} = 3k_{op}\mathbb{J}, \quad \mathbb{C}_s = 2\mu_s\mathbb{K} + 3k_s\mathbb{J} \\ I_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \end{aligned}$$

A partir de (I.99), on obtient le tenseur homogénéisé élastique du matériau triphasique correspondant au schéma d'estimation de Mori-Tanaka qui permet notamment de prendre en compte les interactions entre des inclusions :

$$\mathbb{C}_{MT}^h = \mathbb{C}_s + \langle \mathbb{T} \rangle : \left[(1 - f_{cp} - f_{op}) \mathbb{I} - \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} : \langle \mathbb{T}_{op} \rangle \right]^{-1} \quad (\text{I.152})$$

et le tenseur homogénéisé de la *matrice* Ω_m prend la forme suivante

$$\mathbb{C}_{MT}^m = \mathbb{C}_s + \left[(1 - f_{cp} - f_{op}) \langle \mathbb{T}_{op} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.153})$$

avec le tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ est déterminé comme ci-dessous

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i^p \mathbb{T}_i = \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle + \langle \mathbb{T}_{op} \rangle \quad (\text{I.154})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle &= \sum_{i=1}^n f_i^{cp} \mathbb{T}_i^{cp} = \sum_{i=1}^n f_i^{cp} \left[\mathbb{P}_i - \mathbb{C}_s^{-1} \right]^{-1} \\ \langle \mathbb{T}_{op} \rangle &= \sum_{j=1}^o f_j^{op} \mathbb{T}_j^{op} = \sum_{j=1}^o f_j^{op} \left[\mathbb{P}_j + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.155})$$

Le tenseur de Biot et le module de Biot du solide sont calculés par les formules ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{I} - (\mathbb{C}_{MT}^m)^{-1} : \mathbb{C}_{MT}^h) \\ \frac{1}{N} &= \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_{MT}^m)^{-1} : (\mathbf{B} - f_{cp} \boldsymbol{\delta}) \end{aligned} \quad (\text{I.156})$$

Dans le cas simple de pores alignés, alors tous les pores ont la même forme et la même orientation et $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}$. En conséquence, (I.155) pourra s'écrire comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle &= f_{cp} \left[\mathbb{P} - \mathbb{C}_s^{-1} \right]^{-1} \\ \langle \mathbb{T}_{op} \rangle &= f_{op} \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.157})$$

Dans le cas de pores à répartition en fonction de distribution en orientation $W(\theta_\alpha, \sigma)$, on les calcule comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle &= \frac{f_{cp}}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} W(\theta_\alpha, \sigma) \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) - \mathbb{C}_s^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \\ \langle \mathbb{T}_{op} \rangle &= \frac{f_{op}}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} W(\theta_\alpha, \sigma) \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.158})$$

Dans le cas particulier de pores à répartition isotrope, la fonction de distribution d'orientation prend la valeur de l'unité, les tenseurs moyens $\langle \mathbb{T}_{cp} \rangle$, $\langle \mathbb{T}_{op} \rangle$ deviennent respectivement

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{cp} \rangle &= \frac{f_{cp}}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) - \mathbb{C}_s^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \\ \langle \mathbb{T}_{op} \rangle &= \frac{f_{op}}{4\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \left[\mathbb{P}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) + (\mathbb{C}_{op} - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \sin \theta_\alpha d\phi_\alpha d\theta_\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.159})$$

Les intégrations sur la sphère unitaire dans les formules (I.158-I.159) sont réalisées par la méthode d'intégration numérique de Gauss avec $N_{\theta_\alpha} = 30$, $N_{\phi_\alpha} = 60$.

L'information sur la morphologie des inclusions est contenue dans le tenseur de Hill \mathbb{P}_i (équation I.155) qui dépend de la matrice solide \mathbb{C}_s , du rapport d'aspect ϵ_p et de l'orientation des pores $(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$. On ne présente que les solutions obtenues avec le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka sur les figures I.11, I.13, I.12. Une étude de sensibilité a été effectuée sur la forme des pores et leur distribution en orientation. Quatre rapports d'aspects ont été pris en compte, de la sphère $\epsilon_p = 1$, aux pores aplatis $\epsilon_p = 0.1 - 0.05 - 0.01$. Trois types de répartition : isotrope ($\sigma = 0$), *en ODF* ($\sigma = 8$) et *alignée* (σ tend vers l'infini). Les résultats expérimentaux sont schématisés par des paliers représentant les valeurs constantes obtenues à différents niveaux de chargement. La comparaison entre les estimations et les valeurs expérimentales montre que le meilleur accord est fourni par les pores aplatis (rapport d'aspect $\epsilon_p = 0.05 - 0.01$) et que le cas des pores sphériques conduit à des fortes sous-estimations des composantes du tenseur de Biot. Le cas où tous les pores sont alignés conduit à une trop forte anisotropie aussi bien pour le tenseur de Biot que le tenseur d'élasticité. Le meilleur accord entre estimation et expérience est obtenu dans le cas du milieu avec des pores aplatis à répartition faiblement anisotrope ($\sigma = 8$). Ce résultat est également conforme avec les observations générales de la faible anisotropie des roches étudiées, aussi bien pour les propriétés poromécanique que la perméabilité ou la conductivité thermique [37]. L'hypothèse de déconnexion d'une fraction de l'espace poreux semble vérifiée pour le tenseur de Biot, elle conduit par contre à une sous-estimation des augmentations de module oedométrique sous contrainte observées expérimentalement. Compte tenu de la difficulté de réalisation de ce type d'essais pour des matériaux très peu perméables, et donc du faible nombre d'essais réalisés, une confirmation expérimentale est également nécessaire pour les variations du module oedométrique sous contrainte.

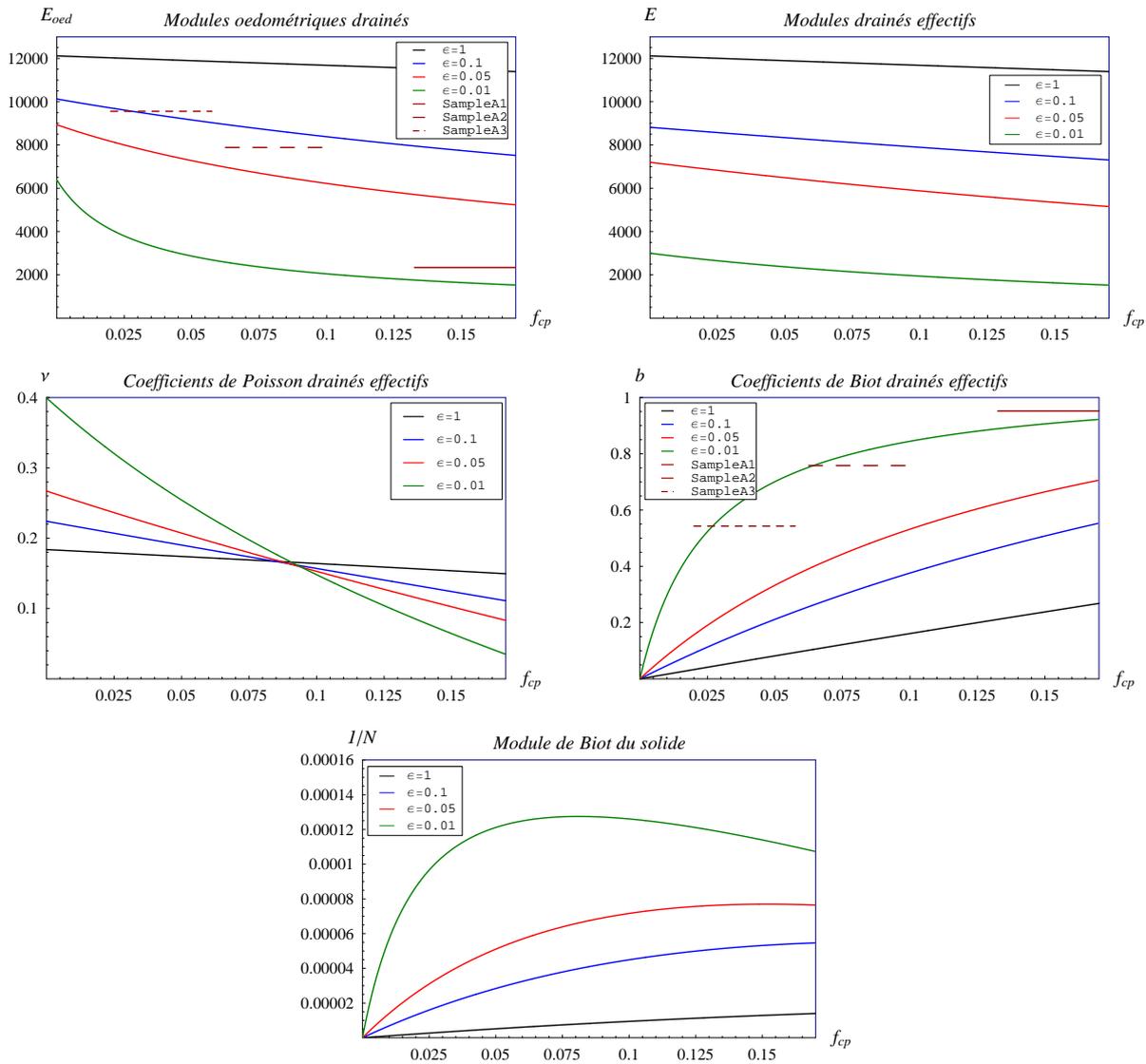


FIGURE I.11: Déconnexion dans le cas de pores à répartition isotrope

I.8 Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté tout d'abord une synthèse des travaux existants sur l'approche de changement d'échelle pour un matériau à microstructure aléatoire. Les outils nécessaires pour modéliser le système de pores dans les roches poreuses de type matrice-inclusions sont introduits. Plusieurs schémas d'homogénéisation ont été présentés : schéma dilué, schéma de Mori-Tanaka, schéma autocohérent, estimation PCW. Ensuite, les paramètres mécaniques de la matrice sont trouvés par la solution d'un problème inverse. Un test de précision de la méthode d'intégration numérique de Gauss est présenté aussi. Puis, différents exemples ont permis d'illustrer l'impact du schéma d'estimation sur les propriétés macroscopiques du géomatériau. Les deux schémas de Mori-Tanaka et de PCW sont plus efficaces pour les roches sédimentaires. Et puis, une analyse im-

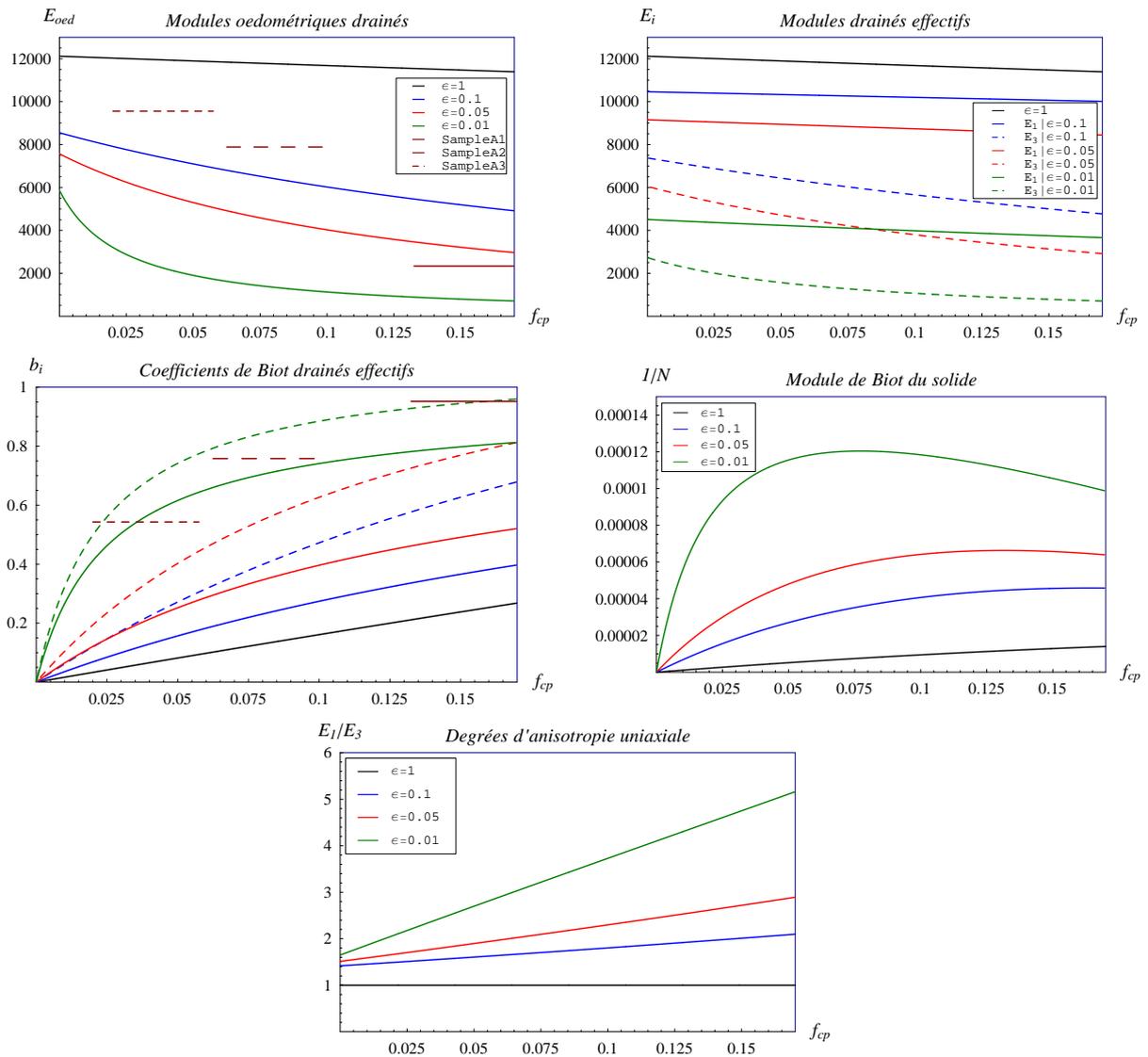


FIGURE I.12: Déconnexion dans le cas de pores à répartition en ODF

portante de sensibilité a été effectuée sur la forme des pores et leur répartition. L'effet de la forme des pores sur les propriétés poroélastiques est considéré en prenant en compte quatre rapports d'aspect différents, $\epsilon_p = 1$ pour les sphères et $\epsilon_p = 0.1 - 0.05 - 0.01$ pour les pores ellipsoïdaux aplatis alignés. On peut constater que une baisse du rapport d'aspect ϵ_p implique une croissance du degré d'anisotropie du matériau homogénéisé. L'influence de la distribution en orientation de pores sur les résultats macroscopiques est aussi analysée par l'introduction d'une ODF. Quatre types de distribution ont été tenus compte avec $\epsilon_p = 0.05$: les pores à distribution isotrope, à distribution orientée par l'ODF ($\sigma = 8$ et $\sigma = 50$) et les pores alignés. Il faut souligner que la distribution isotrope de pores est obtenu par une valeur nulle de σ et σ tend vers l'infini présentant une distribution alignée de pores. Une augmentation de σ conduit à une croissance de degré

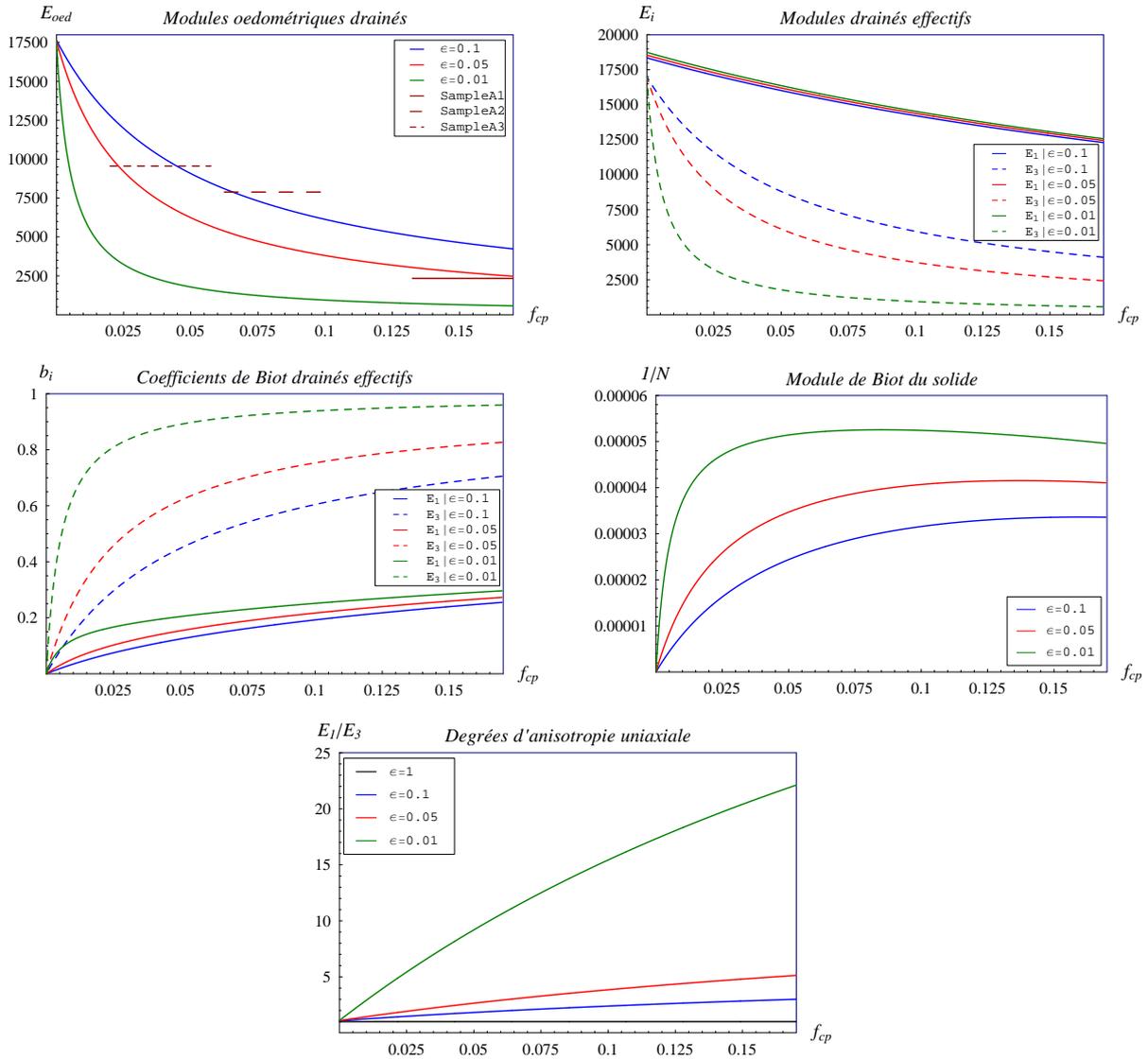


FIGURE I.13: Déconnexion dans le cas de pores alignés

d'anisotropie du matériau homogénéisé. $\sigma = 8$ est un bon choix de distribution en orientation de pores pour le matériau faiblement anisotrope considéré. Enfin, une hypothèse de déconnexion d'une partie de l'espace poreux avec une augmentation de contrainte axiale en conditions oedométriques a été considérée. Elle permet de retrouver les tendances observées expérimentalement à savoir une diminution du coefficient de Biot et une augmentation de module oedométrique drainé bien que cette dernière soit sous-estimée. Le meilleur accord entre estimation et expérience est obtenu dans le cas du milieu avec des pores ellipsoïdaux aplatis, qui correspondent bien à la microstructure des matériaux étudiés, à répartition faiblement anisotrope ($\sigma = 8$). Dans le chapitre suivant, on va considérer la deuxième source d'anisotropie qui vient de l'anisotropie intrinsèque de la matrice.

Chapitre II

Effet de l'anisotropie de la matrice sur le comportement macroscopique

II.1 Introduction

Dans le premier chapitre, on a fait une recherche de l'effet de l'espace poreux sur le comportement macroscopique du matériau, l'anisotropie effective observée est seulement induite par la distribution d'orientation des inclusions et la matrice solide est isotrope. Dans ce chapitre, on s'intéresse à traiter de la détermination explicite des tenseurs d'Eshelby et de Hill pour une inhomogénéité sphérique dans un matériau élastique isotrope transverse. Ce problème est un cas particulier du problème de l'inclusion ellipsoïde dans le milieu élastique isotrope transverse traité par [81]. Une solution générale de ce problème a été récemment présentée par [73] pour les différentes inhomogénéités (y compris sphériques) dans un même type de matériau. [51] présentent une solution basée sur la méthode de la transformée de Fourier [69] pour le même problème. [74] présente les solutions du tenseur de polarisation \mathbb{P} de Hill pour des inclusions ellipsoïdes dans un milieu anisotrope, y compris le cas particulier de l'inclusion sphéroïdale dans le solide isotrope transverse, avec une méthode numérique pour traiter l'intégration de la solution (règle d'intégration de Gauss). Des solutions analogues du tenseur d'Eshelby ont été présentées récemment pour les matériaux piézoélectriques anisotropes [19, 58, 59]. Ici, la méthode de Withers a été appliquée dans le cas particulier de l'inhomogénéité sphérique. L'intérêt de cette méthode, qui est une extension de la méthode classique de Eshelby dans le cas isotrope [21, 23], est qu'elle est basée sur l'intégration analytique de la fonction exacte de Green pour le matériau isotrope transverse, obtenue par [64]. Comparés à d'autres méthodes, les résultats fournis ici sont plus explicites. On peut noter que la correction d'une faute d'impression dans [64] indiquée par [68] a été prise en compte. Le cas particulier correspondant ($C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$) qui n'est pas considéré par [81] est également

présenté dans ce chapitre. Il faut souligner que la solution de l'inclusion sphérique dans un milieu isotrope transverse est utile pour les roches sédimentaires. Ces matériaux peuvent se composer d'une matrice isotrope transverse et des inclusions sphériques de quartz et de calcite. Ici, la solution est utilisée pour étudier les propriétés poroélastiques effectives des matériaux poroélastiques isotropes transverses. En particulier, les influences respectives de la *matrice* (ou *particule solide*) anisotrope et de la morphologie des pores sur l'anisotropie effective du milieu poreux à l'échelle macroscopique sont évaluées. Les résultats sont comparés aux modules poroélastiques caractérisés par les essais expérimentaux de laboratoire.

II.2 Tenseur de Hill pour une inclusion sphérique dans un milieu isotrope transverse

II.2.1 Calcul de la solution

Considérons un domaine infini d'un milieu tri-dimensionnel isotrope transverse de tenseur d'élasticité \mathbb{C} contenant une inhomogénéité ellipsoïdale Ω ayant des propriétés élastiques différentes de ceux du matériau environnant. Le tenseur de polarisation d'ordre quatre \mathbb{P} de l'inhomogénéité ellipsoïdale peut être obtenu à partir des dérivés d'ordre deux des fonctions de Green $\mathbf{G}(\underline{z} - \underline{z}')$ [61, 62] :

$$P_{ijkl}(\underline{z}) = \frac{1}{4} (M_{kijl}(\underline{z}) + M_{kjil}(\underline{z}) + M_{lijk}(\underline{z}) + M_{ljik}(\underline{z})) \quad , \quad \underline{z} \in \Omega \quad (\text{II.1})$$

avec

$$M_{ijkl}(\underline{z}) = - \int_{\Omega} G_{ij,kl}(\underline{z} - \underline{z}') d\Omega_{z'} = - \frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Omega} \frac{\partial G_{ij}(\underline{z} - \underline{z}')}{\partial z_k} d\Omega_{z'} \quad (\text{II.2})$$

Les fonctions de Green G_{ij} correspondant au matériau isotrope transverse, données par [64], seront utilisées dans ce chapitre (cf aussi [81]). Les fonctions de Green sont présentées dans l'annexe C. Comparé à [81], le cas particulier $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$ sera pris en compte. Comme dans les références [61, 81], l'intégrale volumique (II.1) va s'exprimer comme une intégrale de surface qui peut être écrite en terme d'un angle solide $d\omega$:

$$d\Omega_{z'} = d\Omega_{z'}(\underline{r}) = dr dS = r^2 dr d\omega \quad (\text{II.3})$$

$$\underline{r} = \underline{z}' - \underline{z} \quad , \quad r = |\underline{z}' - \underline{z}|$$

On définit le vecteur unitaire $\underline{\ell}$, tracé du point considère \underline{z} :

$$\underline{\ell} = \frac{\underline{z}' - \underline{z}}{|\underline{z}' - \underline{z}|} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \quad (\text{II.4})$$

Les dérivées des fonctions G_{ij} de Green sont exprimées par les composants de g_{ijk} :

$$g_{ijk}(\underline{\ell}) = r^2 G_{ij,k}(\underline{z} - \underline{z}') = -r^2 G_{ij,k}(r) \quad (\text{II.5})$$

Les composantes g_{ijk} sont données dans l'annexe D. En utilisant (II.5) l'équation (II.2) devient :

$$M_{ijkl} = -\frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Sigma} r(\underline{\ell}) g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega \quad (\text{II.6})$$

Σ dénote la surface d'une sphère unitaire centrée au point \underline{z} [61]. $r(\underline{\ell})$ définit la frontière de la sphère et est donné par la racine positive de l'équation :

$$\frac{(z_1 + r\ell_1)^2 + (z_2 + r\ell_2)^2 + (z_3 + r\ell_3)^2}{a^2} = 1 \quad (\text{II.7})$$

ainsi :

$$r(\underline{\ell}) = -f + (f^2 + e)^{1/2} \quad , \quad \begin{cases} e = a^2 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ f = \ell_1 z_1 + \ell_2 z_2 + \ell_3 z_3 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Car g_{ijk} est impaire tandis que $(f^2 + e)^{1/2}$ est pair selon $\underline{\ell}$, on a :

$$\int_{\Sigma} (f^2 + e)^{1/2} g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega = 0 \quad (\text{II.9})$$

En introduisant (II.9) dans (II.6), on obtient

$$M_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Sigma} f g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial z_l} g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega = \int_{\Sigma} \ell_l g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega \quad (\text{II.10})$$

Les composantes du tenseur de \mathbb{P} deviennent :

$$P_{ijkl} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\ell_l g_{kij}(\underline{\ell}) + \ell_l g_{kji}(\underline{\ell}) + \ell_k g_{lij}(\underline{\ell}) + \ell_k g_{lji}(\underline{\ell})) d\omega \quad (\text{II.11})$$

Le détail des calculs des intégrales (II.11) est donné dans l'annexe E. Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{1111} = P_{2222} \quad , \quad P_{12} = P_{1122} = P_{2211} \quad , \quad P_{13} = P_{1133} = P_{3311} \\ P_{33} = P_{3333} \quad , \quad P_{44} = P_{1313} = P_{2323} \quad , \quad P_{1212} = \frac{P_{1111} - P_{1122}}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

où :

(a) Si $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_{11} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^2 \nu_i A'_i I_1(i) + \frac{DI_1(3)}{4} \quad , \quad P_{12} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \nu_i A'_i I_1(i) - \frac{DI_1(3)}{4} \quad , \\ P_{13} = \sum_{i=1}^2 k_i \nu_i^3 A'_i I_2(i) \quad , \quad P_{33} = -2 \sum_{i=1}^2 k_i^2 \nu_i^5 A'_i I_2(i) \quad , \\ P_{44} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 (1 + k_i) \nu_i^3 A'_i [I_2(i) - 2k_i I_1(i)] + \frac{D\nu_3^2 I_2(3)}{8} \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

(b) Si $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$:

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= 3 \left(\frac{C_{13}}{C_{13} + C_{44}} \right) B_1 I_1(1) - 6B_1 I_{12} + \frac{D}{4} I_1(3) , \\
 P_{12} &= \left(\frac{C_{13}}{C_{13} + C_{44}} \right) B_1 I_1(1) - 2B_1 I_{12} - \frac{D}{4} I_1(3) , \\
 P_{13} &= 2B_1 [-3I_1(1) + \nu_1^2 I_2(1) + 4I_{12}] , \\
 P_{33} &= 4\nu_1^2 B_1 \left[3I_1(1) - \left(\frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \right) I_2(1) - 4I_{12} \right] , \\
 P_{44} &= -B_1 \left[3 + \nu_1^2 \left(3 + \frac{C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \right) \right] I_1(1) \\
 &\quad + \frac{B_1 \nu_1^2}{2} \left(\frac{C_{13}}{C_{13} + C_{44}} \right) I_2(1) + 4B_1 (1 + \nu_1^2) I_{12} + \frac{D}{8} \nu_3^2 I_2(3) ,
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

avec

$$\begin{aligned}
 I_1(i) &= \int_{\Sigma} \frac{\ell_1^2}{\hat{R}_i^3} d\omega \\
 I_2(i) &= \int_{\Sigma} \frac{\ell_3^2}{\hat{R}_i^3} d\omega \\
 I_{12} &= \int_{\Sigma} \frac{\ell_1^4}{\hat{R}_1^5} d\omega
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

Tous les constantes et le calcul des intégrales I dans la formule (II.15) sont détaillés dans l'annexe E. Le tenseur d'Eshelby \mathbb{S}^E est déduit de la relation :

$$S_{ijmn}^E = P_{ijpq} C_{pqmn} \tag{II.16}$$

Les relations (II.16) peuvent être écrites en forme explicite

$$\begin{aligned}
 S_{1111}^E &= P_{11} C_{11} + P_{12} C_{12} + P_{13} C_{13} \\
 S_{1122}^E &= P_{11} C_{12} + P_{12} C_{11} + P_{13} C_{13} \\
 S_{1133}^E &= (P_{11} + P_{12}) C_{13} + P_{13} C_{33} \\
 S_{3311}^E &= P_{13} (C_{11} + C_{12}) + P_{33} C_{13} \\
 S_{3333}^E &= 2 P_{13} C_{13} + P_{33} C_{33} \\
 S_{1313}^E &= 2 P_{44} C_{44}
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

où les composantes C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44} sont données dans l'annexe B.

II.2.2 Validation des résultats obtenus

La nouvelle solution a été validée grâce aux résultats classiques de l'inclusion sphérique dans un milieu isotrope [61] et aux résultats présentés par [73] et [81] de l'inclusion ellipsoïde dans un milieu isotrope transverse. Les constantes élastiques du milieu isotrope (*matériau 1*) et du milieu isotrope transverse (*matériau 2*) et les composantes correspondantes du tenseur de Hill sont respectivement données dans les tables II.1 et II.2. Dans le cas particulier d'une inclusion sphérique dans le milieu

TAB. II.1: Constantes élastiques

Materiau	E_1	E_3	ν_{12}	ν_{31}	G_{13}
1	2	2	0.15	0.15	0.869565
2	2	10	0.25	0.25	1
Materiau	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{44}
1	2.1118	2.1118	0.372671	0.372671	0.869565
2	2.1793	10.3448	0.57931	0.689655	1

TAB. II.2: Tenseur de Hill pour l'inclusion sphérique

Materiau	P_{11}	P_{33}	P_{12}	P_{13}	P_{44}
1	0.248039	0.248039	-0.045098	-0.045098	0.146569
2	0.238712	0.0674127	-0.0530286	-0.0175442	0.113153

isotrope (*matériau 1*) :

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{K} + 3k\mathbb{J} \quad , \quad \mathbb{S} = \frac{\mathbb{K}}{2\mu} + \frac{\mathbb{J}}{3k} \quad (\text{II.18})$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

le tenseur \mathbb{S}^E d'Eshelby et le tenseur de la polarisation \mathbb{P} de Hill sont donnés par :

$$\mathbb{P} = \frac{\alpha}{3k}\mathbb{J} + \frac{\beta}{2\mu}\mathbb{K} \quad , \quad \mathbb{S}^E = \mathbb{P} : \mathbb{C} = \alpha\mathbb{J} + \beta\mathbb{K} \quad (\text{II.19})$$

$$\alpha = \frac{3k}{3k + 4\mu} = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \quad , \quad \beta = \frac{6(k + 2\mu)}{5(3k + 4\mu)} = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)}$$

En résumé, il faut souligner que les expressions dérivées dans cette étude coïncident avec les solutions données par [81] pour le cas isotrope transverse (cf les tableaux II.1, II.2 et la figure II.1)

et aux relations (II.19) dans le cas isotrope. Nos résultats coïncident numériquement avec ceux obtenus par [52] (en effectuant l'intégration numérique d'une transformée de Fourier).

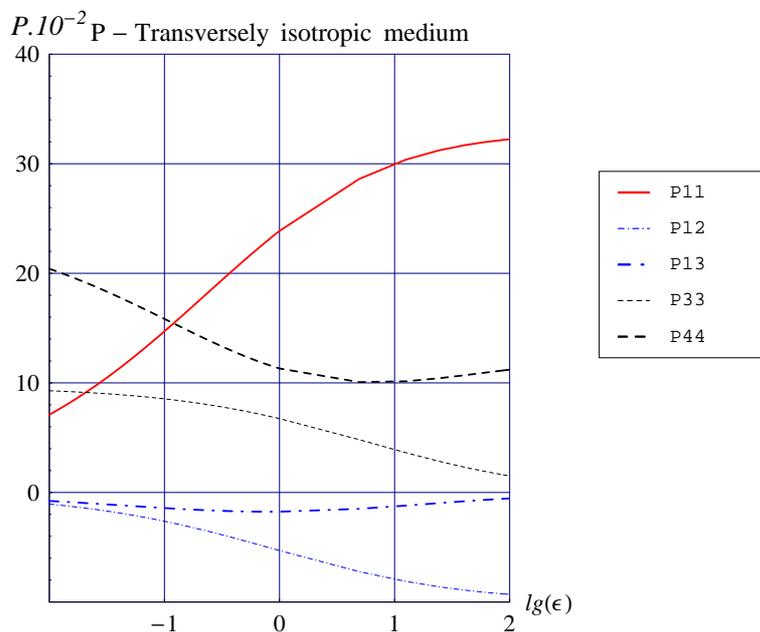


FIGURE II.1: Dépendance des composantes du tenseur de Hill au rapport d'aspect de l'inhomogénéité (matrice isotrope transverse, matériau 2)

II.3 Détermination des propriétés poromécaniques

On applique ici la solution développée ci-dessus pour déterminer les propriétés effectives des matériaux poreux. [78] utilise les inclusions sphériques pour représenter des inclusions minérales comme le quartz ou les calcites noyées dans une matrice poreuse isotrope transverse. [54] a utilisé la solution de l'inhomogénéité sphéroïdale pour déterminer les modules élastiques effectifs et les vitesses de la propagation élastique d'onde dans un milieu solide isotrope transverse qui contient des inhomogénéités sphéroïdales. Récemment, [56] a étudié l'influence des inclusions sphériques sur le module de compressibilité et la conductivité thermique dans le cas isotrope. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier l'influence séparée de l'anisotropie *initiale* de la matrice et de l'anisotropie de l'espace poreux sur les propriétés poroélastiques effectives comme le tenseur de Biot. Des comparaisons aux résultats expérimentaux du matériau y sont présentées.

II.3.1 Tenseur de Biot du milieu poreux isotrope transverse

On rappelle brièvement dans cette section les équations poroélastiques linéaires de Biot et les relations compatibles entre les propriétés des squelettes et les propriétés de la matrice solide (cf [12, 13, 14]). Le comportement poroélastique linéaire isotherme à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \mathbf{B} \quad (\text{II.20})$$

\mathbb{C}_{hom} , \mathbf{B} représentent respectivement le tenseur de rigidité drainé d'ordre quatre du squelette et le tenseur de Biot d'ordre deux. $\boldsymbol{\Sigma}$, \mathbf{E} et p_l représentent respectivement les tenseurs d'ordre deux de contrainte, de déformation macroscopique et la pression de pore. Le tenseur de Biot macroscopique \mathbf{B} peut être exprimé comme une fonction du tenseur élastique drainé macroscopique du squelette \mathbb{C}_{hom} et du tenseur de souplesse \mathbb{S}_s de la matrice solide [14, 17] :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}_{\text{hom}}) \quad , \quad B_{ij} = \delta_{kl} \left(I_{lkij} - S_{lkmn}^s C_{nmij}^{\text{hom}} \right) \quad (\text{II.21})$$

A titre d'exemple, la relation (II.21) sera étudié dans trois cas particuliers :

- Le squelette isotrope transverse (\mathbb{C}_{hom}) et la matrice isotrope transverse (\mathbb{C}_s et \mathbb{S}_s) avec le même axe de la révolution Ox_3 ,
- Le squelette isotrope transverse avec l'axe de la révolution Ox_3 et la matrice isotrope avec le module de compressibilité k_s (l'isotropie transversale effective est due seulement aux pores alignés),
- Le squelette isotrope avec le module de compressibilité k^{hom} et la matrice isotrope.

Dans le cas (a), le tenseur de Biot macroscopique peut s'écrire en termes de quatre modules élastiques de la matrice solide et les modules correspondants du tenseur de rigidité drainé du squelette E_1^s , E_3^s , ν_{12}^s , ν_{31}^m et E_1^{hom} , E_3^{hom} , ν_{12}^{hom} , ν_{13}^{hom} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= b_1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + b_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad , \\ b_1 &= 1 + \frac{\frac{1-\nu_{12}^s}{E_1^s} + \frac{\nu_{31}^{\text{hom}}(1-2\nu_{31}^s)-\nu_{31}^s}{E_3^s}}{\frac{2(\nu_{31}^{\text{hom}})^2}{E_3^{\text{hom}}} - \frac{1-\nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}}} \quad , \\ b_3 &= 1 + \frac{E_3^{\text{hom}} \frac{1-\nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}} \frac{1-2\nu_{31}^s}{E_3^s} - 2\nu_{31}^{\text{hom}} \left(\frac{\nu_{31}^s}{E_3^s} - \frac{1-\nu_{12}^s}{E_1^s} \right)}{\frac{2(\nu_{31}^{\text{hom}})^2}{E_3^{\text{hom}}} - \frac{1-\nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}}} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Dans le cas (b), il se réduit à :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 + \frac{1 + \nu_{31}^{\text{hom}}}{3 k_s \left(\frac{2(\nu_{31}^{\text{hom}})^2}{E_3^{\text{hom}}} - \frac{1 - \nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}} \right)} \\
 b_3 &= 1 + \frac{E_3^{\text{hom}} \left(\frac{2\nu_{31}^{\text{hom}}}{E_3^{\text{hom}}} + \frac{1 - \nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}} \right)}{3 k_s \left(\frac{2(\nu_{31}^{\text{hom}})^2}{E_3^{\text{hom}}} - \frac{1 - \nu_{12}^{\text{hom}}}{E_1^{\text{hom}}} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.23}$$

et dans le cas (c), on retrouve la relation bien connue (cf l'ouvrage de référence [12]) :

$$\begin{aligned}
 b_1 = b_3 = b &= 1 - \frac{k^{\text{hom}}}{k_s} \\
 E_i^{\text{hom}} &= E^{\text{hom}} \quad , \quad \nu_{ij}^{\text{hom}} = \nu^{\text{hom}} \quad , \quad k^{\text{hom}} = \frac{E^{\text{hom}}}{3(1 - 2\nu^{\text{hom}})}
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

L'objectif de la prochaine section est d'étudier les influences séparées de l'anisotropie de la matrice et de la géométrie spaciale de pore sur les propriétés effectives macroscopiques : Tenseur de Biot et tenseur de rigidité drainé. L'anisotropie du squelette poreux dépend de l'anisotropie de la matrice et de la morphologie de pore : forme de pore et distribution spaciale de pore. Les relations (II.22-II.23) indiquent que le tenseur de Biot n'est pas hydrostatique dans les cas (a) et (b) qui correspondent à un comportement élastique macroscopique isotrope transverse. Dans le cas (a) la partie déviatorique du tenseur de Biot pourrait être due à l'anisotropie de la matrice et à l'anisotropie du squelette (y compris la morphologie de pore) tandis que dans le cas (b) la partie déviatorique est due seulement à la morphologie de pore.

II.3.2 Schéma d'homogénéisation et propriétés effectives

L'approche micromécanique tend à déterminer le comportement macroscopique d'un matériau hétérogène à constituants élastiques linéaires à partir de la solution d'un problème aux conditions aux limites défini sur un V.E.R à l'échelle microscopique [15, 17, 18, 77, 84]. On considère ici un VER du matériau poreux occupant le domaine géométrique Ω ayant la frontière $\partial\Omega$. Deux phases doivent être distinguées : la particule solide ou *la matrice solide* occupant le domaine Ω_s et la porosité occupant le domaine Ω_p :

$$\Omega = \Omega_p \cup \Omega_s \quad , \quad \Omega_p = f_p \Omega \quad , \quad \Omega_s = (1 - f_p) \Omega \tag{II.25}$$

On suppose que l'espace poreux Ω_p est un ensemble de pores qui peuvent se décrire comme des inclusions de forme ellipsoïdale [14]. On considère un milieu poreux saturé par l'eau (cas de la saturation complète). La solution de Withers [81] est alors utilisée pour l'inclusion ellipsoïdale aplatie et la solution développée est employée pour les inclusions sphériques (dues à la simplicité

des nouveaux résultats obtenus). On peut trouver une large bibliographie sur les méthodes d'homogénéisation comme [86] pour le cas général de matériau composite du type matrice-inclusion, [54] pour le cas particulier de roches isotropes transverse et [42, 82] pour les roches anisotropes. Plusieurs auteurs ont utilisé le schéma auto-cohérent. A la porosité moyenne ou faible ($f_p \leq 0.20$), on peut estimer que le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka donne les propriétés élastiques et poroélastiques correctes [32, 78]. On peut noter que dans le cas de la distribution orientée des inclusions non sphériques, le schéma de Ponte Castañeda - Willis [66] peut remplacer le schéma de Mori-Tanaka (voir les applications de ce schéma aux roches poreuses dans [42]). Deux cas particuliers et simples sont étudiés ici, le cas *drainé* est obtenu avec $p_l = 0$ dans les relations (II.20), et le cas *non-drainé* qui peut être déduit des relations poroélastiques en supposant que le masse de fluide reste inchangé. Le cas *non-drainé* présenté n'est valide que si la contrainte uniforme initiale et la pression initiale de pore sont égales à zéro. Sous un chargement mécanique, le comportement du matériau poroélastique non drainé est simple comme celui d'un matériau élastique biphasique, l'un est la matrice solide et l'autre est l'eau qui a le coefficient de cisaillement nul ($\mu_p = 0$) :

$$\mathbb{C}_p = 3k_p \mathbb{J} \quad , \quad k_p = k_{lq} \approx 2000 \text{ MPa} \quad (\text{II.26})$$

Dans le cas drainé, le tenseur de rigidité de la phase liquide dans les pores est égal à zéro. Le premier cas (*drainé*) donne le tenseur de rigidité élastique drainé \mathbb{C}_{hom} et le deuxième cas (*non drainé*) donne le tenseur de rigidité élastique non drainé qui dépend des propriétés mécaniques de la phase liquide dans les pores et de la matrice solide. On note qu'il est très difficile d'effectuer les essais drainés sur les géomatériaux très faibles de perméabilité. Dans plusieurs cas, seul les coefficients de rigidité non drainés peuvent être évalués par les essais mécaniques à court terme. Les tenseurs de rigidité effectifs drainés et non drainés correspondants au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka peuvent s'écrire

$$\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{dr}} = (1 - f_p) \mathbb{C}_s : \left[(1 - f_p) \mathbb{I} + f_p [\mathbb{I} - \mathbb{P}_s : \mathbb{C}_s]^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{II.27})$$

$$\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{ndr}} = \mathbb{C}_p - (1 - f_p) (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s) : \left[(1 - f_p) \mathbb{I} + f_p [\mathbb{I} + \mathbb{P}_s : (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)]^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{II.28})$$

où le tenseur de Hill \mathbb{P}_s des inclusions sphériques est donné par la solution développée et celui des inclusions ellipsoïdes est donné par la solution de Withers. Ces tenseurs dépendent des propriétés élastiques de la matrice solide s . Dans ce qui suit, le tenseur élastique effectif non drainé sera comparé aux coefficients expérimentaux macroscopiques *non drainés*. Le tenseur élastique effectif *drainé* sera estimé et utilisé pour étudier l'évolution du tenseur de Biot. Par exemple, en utilisant les relations (II.18-II.19-II.27), dans le cas particulier des inclusions sphériques à immerger

dans une matrice isotrope, le coefficient de Biot effectif (relation II.24) correspondant au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka peut s'écrire comme [15] :

$$b_{\text{sph}}^{\text{MT}} = \frac{3 f_p (1 - \nu_s)}{f_p (1 + \nu_s) - 2 (1 - 2 \nu_s)} \quad (\text{II.29})$$

Dans ce cas particulier, le coefficient de Biot effectif ne dépend que de la porosité et du coefficient de Poisson de la matrice.

II.3.3 Effet de la géométrie du pore sur les propriétés poroélastiques

Au contraire des matériaux syntétiques comme les composites, les propriétés de tous les constituants des géomatériaux ne sont pas bien connues à l'heure actuelle. Bien que le domaine nanomécanique et micromécanique sont de grands domaines de recherche, dans plusieurs situation, seul les propriétés *macroscopiques*, ou *effectives*, mécaniques ou poromécaniques ont été caractérisées grâce à des essais de laboratoire tel que des essais géomécaniques (essai triaxial de compression et essai triaxial deviatorique) réalisés à l'échelle macroscopique. Même à l'échelle macroscopique, il est très difficile de caractériser les coefficients poromécaniques, tels que le tenseur \mathbf{B} de Biot et des coefficients de rigidité drainé pour les géomatériaux à faibles perméabilités. Le problème à résoudre peut être considéré comme un problème inverse. Par exemple, les propriétés *homogénéisées* ou *effectives* et la structure spatiale de pore sont plus ou moins connu et l'inconnu peut être les propriétés de la matrice. Les résultats numériques présentés dans cette section sont appliqués à l'analyse d'un géomatériau poreux isotrope transverse $f_p \approx 0.16$ [80]. Les essais de laboratoire géomécanique comme les essais de compression triaxiaux deviatoriques non-drainés fournissent les coefficients de rigidité élastiques non-drainés [30] : $E_1^{\text{ndr}} = 22500$ MPa, $E_3^{\text{ndr}} = 9000$ MPa, $\nu_{12}^{\text{ndr}} = 0.14$, $\nu_{31}^{\text{ndr}} = 0.15$, $G_{13}^{\text{ndr}} = 2000$ MPa. En inversant la relation (II.28) dans laquelle la donnée est le tenseur de rigidité élastique non-drainé *effectif* ou *macroscopique* $\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{ndr}}$, f_p , \mathbb{C}_p et l'inconnu est le tenseur de rigidité élastique de la matrice solide \mathbb{C}_s , on obtient le problème non linéaire à résoudre :

$$\mathbb{C}_s^{(i+1)} = \mathbb{C}_p + (\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{ndr}} - \mathbb{C}_p) : \left[\mathbb{I} + \frac{f_p}{(1-f_p)} \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_s^{(i)} : (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s^{(i)}) \right]^{-1} \right] \quad (\text{II.30})$$

Par l'algorithme itératif, (II.30) est résolu avec la condition initiale :

$$\mathbb{C}_s^{(0)} = \frac{\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{ndr}} - f_p \mathbb{C}_p}{1 - f_p} \quad (\text{II.31})$$

Trois géométries spatiales de pore ont été comparées (Ox_3 est l'axe de symétrie de la matrice et du pore pour les cas 2 et 3) :

Pores sphériques (cas 1),

Pores aplatis alignés (rapport d'aspect $\epsilon_p = b/a = 0.1$, cas 2),

Pores aplatis alignés (rapport d'aspect $\epsilon_p = b/a = 0.03$, cas 3).

Les cas 2 et 3 ont été calculés grâce à la solution de Withers. Une fois la solution du problème non linéaire (II.30) obtenue, le tenseur élastique de la matrice obtenu \mathbb{C}_s est alors utilisé pour estimer le tenseur élastique effectif drainé \mathbb{C}_{MT}^{dr} (relation II.27) et le tenseur de Biot grâce à la relation (II.21) avec $\mathbb{C}_{hom} = \mathbb{C}_{MT}^{dr}$. Deux paramètres ont été choisis pour mesurer le degré d'anisotropie du tenseur élastique isotrope transverse de la matrice \mathbb{C}_s . Le premier paramètre $A^{hydrostatique}$ et le second paramètre $A^{uniaxial}$ sont obtenus en prenant le rapport des deux principales déformations respectivement induites par un contrainte hydrostatique et des essais de compression uniaxiaux (dans les directions Ox_1 et Ox_3)

$$A^{hydrostatique} = \frac{1 - 2\nu_{31}^s}{(1 - \nu_{12}^s)\frac{E_3^s}{E_1^s} - \nu_{31}^s}, \quad A^{uniaxial} = \frac{E_1^s}{E_3^s} \quad (\text{II.32})$$

Il faut noter qu'un paramètre différent a été choisi par [81] pour le matériau cubique (cf [50]). Le paramètre choisi par Withers est moins adapté au matériau isotrope transverse que $A^{hydrostatique}$ et $A^{uniaxial}$. Les deux paramètres $A^{hydrostatique}$ et $A^{uniaxial}$ sont égaux dans le cas isotrope. Les résultats correspondants sont présentés dans les tables II.3 et II.4. Comme prévu, à un degré d'anisotropie

TAB. II.3: Paramètres de la matrice solide s et composantes du tenseur de Biot

Cas	E_1^s	E_3^s	ν_{12}^s	ν_{31}^s	G_{13}^s	b_1	b_3
1	32522.4	12025.3	0.0742	0.1366	2559.29	0.21224	0.21973
2	27804.2	19328.5	0.1401	0.1973	3454.16	0.23487	0.48856
3	27000.3	23800.1	0.1405	0.2529	8372.87	0.26788	0.59348

TAB. II.4: Degré d'anisotropie

Cas	$A^{uniaxial}$	$A^{hydrostatique}$
1	2.7045	3.53298
2	1.43851	1.51172
3	1.13446	0.979141

donné du tenseur de rigidité effectif, la distribution des pores sphériques correspond au degré d'anisotropie le plus fort de la matrice. L'influence de la forme de pore sur l'anisotropie de la matrice peut être analysée en comparant les cas 1 et 2. Les valeurs correspondantes du tenseur de Biot

sont très différentes. La distribution des pores sphériques donne des valeurs faibles des coefficients de Biot b_i pour la porosité ($f_p \approx 0.15 - 0.20$), même si la matrice solide est isotrope transverse. Un résultat similaire peut être noté dans le cas le plus simple de la matrice isotrope (cf la formule II.29). Avec ce matériau, des valeurs plus réalistes sont obtenues avec les pores aplatis. La forme réaliste de pore est plus près de la forme très plate ou *penny shape*¹ que de la forme sphérique. Pour un rapport d'aspect donné de pore, la distribution orientée des pores a un fort effet sur la partie déviatorique du tenseur de Biot. La partie déviatorique du tenseur de Biot est nulle dans le cas d'une distribution orientée isotrope (ou aléatoire) des pores ellipsoïdaux aplatis tandis qu'elle n'est pas négligeable avec une distribution alignée des pores ellipsoïdaux aplatis. On peut noter qu'aucune mesure directe des coefficients de Biot n'a été effectuée. Cela est dû à la très faible perméabilité de ce matériau (perméabilité intrinsèque d'ordre $10^{-20} - 10^{-21} m^2$), les expériences drainées nécessaires pour mesurer des coefficients de Biot sont extrêmement difficiles à réaliser. Dans ce contexte, l'approche micromécanique est alors utile pour estimer des propriétés effectives. En considérant une matrice isotrope transverse avec le tenseur de rigidité élastique \mathbb{C}_s déterminé par cinq paramètres : $E_1^s = 27000.3, \text{MPa}$, $E_3^s = 23800.1, \text{MPa}$, $\nu_{12}^s = 0.1405, \nu_{31}^s = 0.2529$, $G_{13}^s = 8372.87, \text{MPa}$ (il correspond aux propriétés obtenues dans le cas 3, cf le tableau II.3), une étude de sensibilité sur le rapport d'aspect des pores $\epsilon_p = b/a = 0.03, 0.1, 1$ est alors effectuée pour illustrer l'effet de la géométrie de pore sur les propriétés poroélastiques effectives. Les résultats sont présentés sur les figures II.2 -II.3-II.4 (cas drainé) pour la porosité variée entre 0 et 0.25). Le degré d'anisotropie drainé et non drainé du tenseur de rigidité élastique effective (les relations (II.27) et (II.28)) sont présentés dans la figure II.4. Une forte diminution du module élastique E_3 (perpendiculaire au plan isotrope) en fonction de la porosité est obtenue pour les pores aplatis alignés, $\epsilon_p = b/a = 0.03, 0.1$, (cf la figure II.2). À un rapport d'aspect de pore indiqué et pour la même distribution des pores, le degré d'anisotropie du tenseur élastique non drainé est beaucoup inférieur à celui du tenseur drainé correspondant (cf la figure II.4). La différence entre les deux cas est une fonction décroissante du rapport d'aspect.

II.4 Conclusions

La solution présentée dans ce chapitre, pour le problème de l'inclusion sphérique dans une matrice solide isotrope transverse, a été appliquée pour estimer des coefficients poroélastiques effectifs des matériaux hétérogènes de type "roches composites". Cette classe des matériaux anisotropes est un sujet de recherche courant au LaEGO. Comparé à la solution générale précédente de Withers [81], le cas particulier comprenant le matériau isotrope a été inclus dans ce travail. La solution serait

¹en anglais

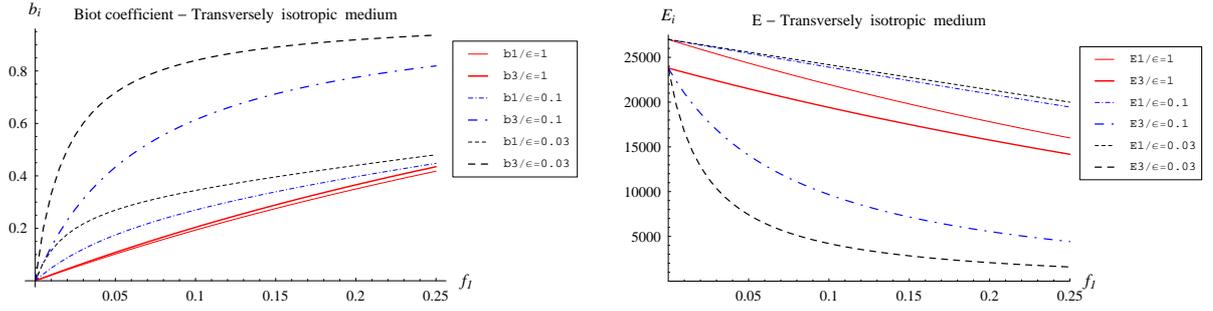


FIGURE II.2: Module drainé effectif E_i et coefficients de Biot b_i

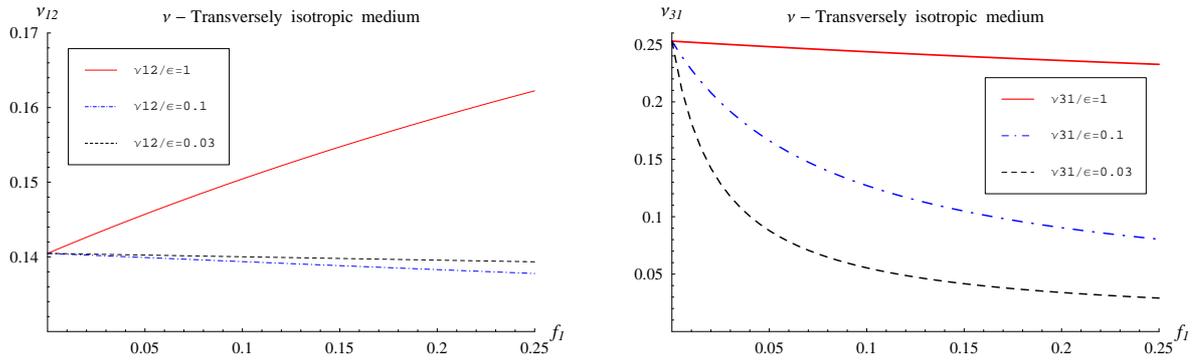


FIGURE II.3: Coefficients drainés effectifs ν_{12} et ν_{31}

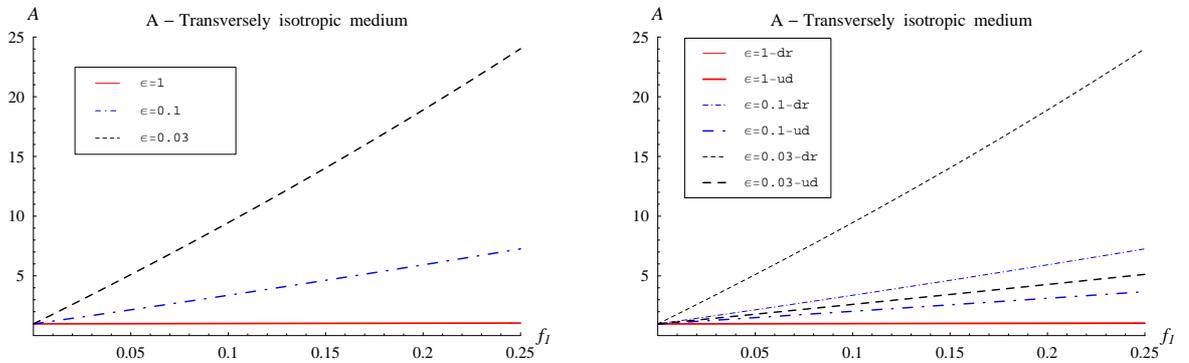


FIGURE II.4: Degré d'anisotropie

utile pour les autres matériaux, poreux ou pas, comme composites ou polymères, caractérisés par les inclusions sphériques (ou presque sphériques) incluses dans la matrice isotrope transverse. Dans la première étape d'homogénéisation, considérée dans ce chapitre, la forme sphérique est plus adaptée pour représenter des inclusions de phase solide minérale (comme le quartz et la calcite) que les pores qui, dans la plupart des cas, sont représentés avec les ellipsoïdes aplatis. Le comportement isotrope transverse effectif observé à l'échelle macroscopique est dû à la morphologie de pore (forme des pores, distribution spatiale des pores) et aussi de l'anisotropie de la matrice solide. Comparé

aux résultats expérimentaux, des résultats plus appropriés sont obtenus par les distributions orientée ou aléatoire des pores aplatis. On peut introduire la fonction de la distribution orientée (ODF) pour présenter la distribution des pores. La supposition d'anisotropie de la matrice est essentielle pour la méthode d'homogénéisation multi-étape. Les schémas d'homogénéisation présentés dans ce chapitre pour les matériaux composites tels que des roches poreuses seront généralisés en incluant des autres étapes aux niveaux homogénéisés plus bas, à partir du niveau de l'agrégation minérale (correspondant au *nanoporomécanique*) ou du niveau des minéraux argileux (niveau '0', cf [78]).

TAB. II.5: Exemple de composantes minérales, porosité et propriétés mécaniques d'une roche isotrope transverse

Composantes	fraction volumique	propriétés mécaniques
Pore	0.07	
Quartz (SiO_2)	0.20	isotrope $E_{qu} = 96.4 \text{ GPa}$, $\nu_{qu} = 0.08$
Calcite ($CaCO_3$)	0.15	isotrope $E_{ca} = 84 \text{ GPa}$, $\nu_{ca} = 0.3$
Matrice	0.58	isotrope transverse $E_1 = 22 \text{ GPa}$, $E_3 = 7 \text{ GPa}$, $G_{13} = 4 \text{ GPa}$ $\nu_{12} = 0.12$, $\nu_{31} = 0.14$

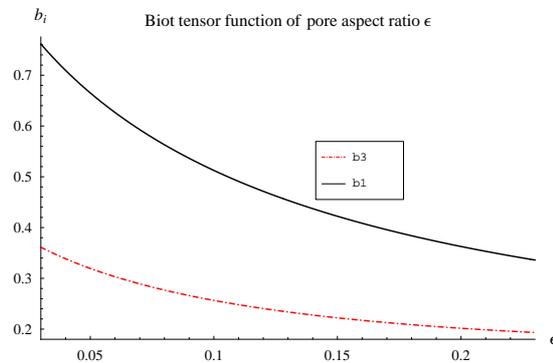


FIGURE II.5: Tenseur de Biot en fonction du rapport d'aspect de pore ϵ_p

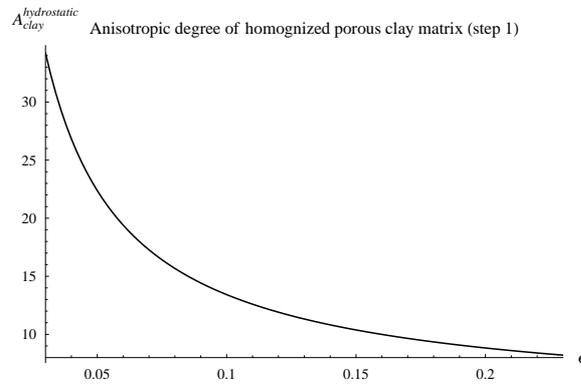


FIGURE II.6: Degré d'anisotropie de \mathbb{C}_{hom}^I en fonction du rapport d'aspect de pore ϵ_p

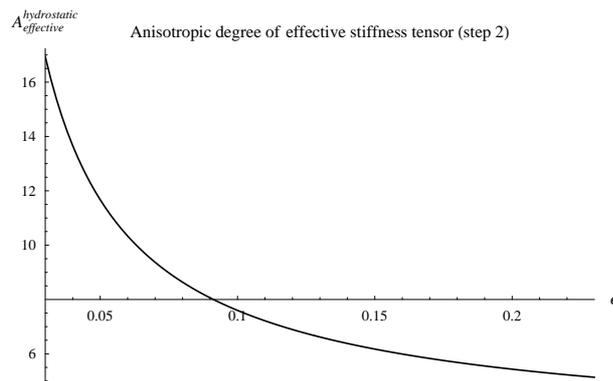


FIGURE II.7: Degré d'anisotropie de \mathbb{C}_{hom}^{II} en fonction du rapport d'aspect de pore ϵ_p

Chapitre III

Matrice isotrope transverse et inclusions à orientations arbitraires

III.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à traiter le cas des inclusions sphériques solides immergées dans un milieu isotrope transverse. Les pores ont été considérés alignés dans la direction de symétrie du matériau (axe de symétrie des pores ellipsoïdaux confondu avec l'axe de révolution de la matrice isotrope transverse). On s'intéresse donc dans ce chapitre à l'estimation des propriétés poroélastiques effectives de la roche en employant le tenseur de polarisation de Hill (et/ou le tenseur d'Eshelby) pour une inhomogénéité ellipsoïdale orientée de manière arbitraire, noyée dans une matrice élastique isotrope transverse. Le problème principal à résoudre est de tenir compte de l'anisotropie de la matrice et également de l'anisotropie induite par la distribution d'orientation des pores. Dans la roche, la matrice peut être anisotrope (isotrope transverse dans la plupart des cas), et l'espace poreux peut être également anisotrope avec un degré anisotrope différent à celui de la matrice. Beaucoup de papiers ont été présentés pour le cas du matériau hétérogène isotrope transverse avec la matrice isotrope. Dans ce cas, l'anisotropie effective observée est seulement induite par la distribution d'orientation des inclusions immergées. Les tenseurs bien connus d'Eshelby \mathbb{S}^E et de Hill \mathbb{P} pour les inclusions ellipsoïdales dans un milieu isotrope [21, 23, 61, 62] sont utilisés par des schémas d'homogénéisation. La distribution alignée, isotrope (aléatoire) ou orientée des inclusions ellipsoïdales dans une matrice isotrope peut être considérée dans des diverses situations. Les lecteurs peuvent trouver les résultats récents pour le matériau isotrope transverse aux références [42, 54]. Le cas des inclusions ellipsoïdales alignées dans une matrice isotrope transverse a été largement étudiée. Les tenseurs d'Eshelby \mathbb{S}^E et de Hill \mathbb{P} ont été établis par les divers auteurs comme Withers [81] pour la solution analytique du problème de l'inclusion ellipsoïdale immergée

dans un matériau élastique isotrope transverse. Une solution générale de ce problème a été récemment présentée par Sevostianov et al [73] pour les inhomogénéités différentes de forme (y compris l'inhomogénéité sphérique) noyées dans un matériau isotrope transverse. Kirilyuk et Levchuk [51] a présenté une solution basée sur la méthode de la transformée de Fourier pour le même problème. Les méthodes d'homogénéisation basées sur le tenseur d'Eshelby \mathbb{S}^E et le tenseur de Hill \mathbb{P} ne posent aucune difficulté parce que ces tenseurs sont bien connus.

Le problème étudié dans ce chapitre est plus compliqué que les deux cas particuliers mentionnés précédemment : la matrice est supposée que isotrope transverse et la distribution d'orientation des inclusions peut être alignée, isotrope ou orientée. Ce cas correspond à la situation observée pour certains géomatériaux : les propriétés macroscopiques sont isotropes transverses et la distribution d'orientation des pores est également isotrope transverse avec un degré anisotrope différent de celui de la matrice. Le problème fondamental à résoudre est celui de l'inclusion ellipsoïdale avec une orientation arbitraire, noyée dans un milieu isotrope transverse infini. Aucun résultat analytique n'a été fourni dans ce cas général ainsi des méthodes numériques doivent être employées pour évaluer du tenseur de Hill \mathbb{P} (et/ou du tenseur d'Eshelby \mathbb{S}^E). On peut noter que des procédures numériques ont été largement développées pour l'évaluation ces tenseurs dans les solides anisotropes généraux [27, 28, 74]. Une méthode numérique générale et forte est basée sur la transformée de Fourier et la transformée de Radon [61, 26].

La méthode numérique employée dans ce chapitre pour obtenir le tenseur de Hill de l'inclusion ellipsoïdale orientée de manière arbitraire dans une matrice isotrope transverse est basée sur l'intégration numérique de la fonction exacte de Green qui est donnée par [64] et corrigée par [67]. En effectuant cette intégration numérique au repère *intermédiaire* respectant la symétrie du matériau, on constate alors que la description du tenseur de Hill dépend seulement d'un angle d'Euler (l'angle entre l'axe symétrique de l'inclusion et l'axe symétrique de la matrice). La description de ce tenseur au système de coordonnées global fixe du matériau est alors déduit par un règle simple de transformation entre les deux repères *intermédiaire* et *global*. Cette méthode peut être employée comme une alternative de la méthode basée sur la transformée de Fourier dans le cas particulier du milieu isotrope transverse. Le tenseur de Hill obtenu est alors employé pour évaluer les propriétés poroélastiques effectives par la méthode d'homogénéisation. Les résultats obtenus sont utilisés pour étudier l'effet de l'anisotropie de matrice, des systèmes de pores et des paramètres microstructure-connectés sur les propriétés poroélastiques macroscopiques effectives dans les roches isotropes transverses.

III.2 Tenseur de Hill pour une inclusion ellipsoïdale aplatie orientée arbitrairement dans un milieu isotrope transverse

Dans ce chapitre, on considère le cas d'une inclusion ellipsoïdale aplatie orientée de manière arbitraire dans un milieu isotrope transverse. Grâce à la propriété *isotrope transverse* de la matrice solide, on peut calculer le tenseur de Hill et/ou le tenseur d'Eshelby d'une inclusion ellipsoïdale aplatie orientée par deux étapes successives : (i) calcul du tenseur de Hill dans le repère *intermédiaire* \mathbb{P}^{ϕ_α} et puis, (ii) détermination du tenseur de Hill dans le repère global fixe du matériau \mathbb{P} en utilisant la matrice de rotation \mathbf{Q}^{ϕ_α} au chapitre I.

III.2.1 Solution du tenseur de Hill dans le repère *intermédiaire*

Les calculs dans toute la section III.2.1 sont exécutés dans le système des coordonnées *intermédiaire*. Afin de simplifier de l'écriture dans cette sous-section, on dénote que $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont les trois vecteurs unitaires qui définissent le système des coordonnées *intermédiaire* et $(\underline{e}_1^\alpha, \underline{e}_2^\alpha, \underline{e}_3^\alpha)$ sont les vecteurs unitaires correspondants au repère local de l'inclusion. On dénote aussi que \mathbb{P} est le tenseur de Hill calculé dans le repère *intermédiaire* (cette notation est validée seulement dans la section III.2.1). Un seul angle θ_α , entre l'axe de symétrie de l'inclusion ellipsoïdale z_3^α et celui du matériau z_3 doit être pris en considération pour une inclusion ellipsoïdale aplatie orientée de manière arbitraire dans un matériau isotrope transverse. En général, le tenseur de Hill \mathbb{P} de l'inhomogénéité ellipsoïdale, calculé dans le repère *intermédiaire*, peut être obtenu à partir des dérivés d'ordre deux des fonctions de Green $\mathbf{G}(\underline{z} - \underline{z}')$ (cf [61, 62]) :

$$P_{ijkl}(\underline{z}) = \frac{1}{4} [M_{kijl}(\underline{z}) + M_{kjil}(\underline{z}) + M_{lijk}(\underline{z}) + M_{ljik}(\underline{z})] \quad , \quad \underline{z} \in \Omega \quad (\text{III.1})$$

avec

$$M_{ijkl}(\underline{z}) = - \int_{\Omega} G_{ij,kl}(\underline{z} - \underline{z}') d\Omega_{z'} = - \frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Omega} \frac{\partial G_{ij}(\underline{z} - \underline{z}')}{\partial z_k} d\Omega_{z'} \quad (\text{III.2})$$

Les fonctions de Green G_{ij} correspondant au matériau isotrope transverse, données par [64], seront utilisées dans ce chapitre (cf aussi [81]). Les fonctions de Green sont présentées dans l'annexe C. Comme dans les références [61], [81], l'intégrale volumique (III.2) va s'exprimer comme une intégrale de surface qui peut être écrite en terme d'un angle solide $d\omega$:

$$d\Omega_{z'} = d\Omega_{z'}(\underline{r}) = dr dS = r^2 dr d\omega \quad (\text{III.3})$$

$$\underline{r} = \underline{z}' - \underline{z} \quad , \quad r = |\underline{z}' - \underline{z}|$$

On définit le vecteur unitaire $\underline{\ell}$, tracé du point considère \underline{z} :

$$\underline{\ell} = \frac{\underline{z}' - \underline{z}}{|\underline{z}' - \underline{z}|} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \quad (\text{III.4})$$

Les dérivées des fonctions G_{ij} de Green sont exprimées par les composants de g_{ijk} :

$$g_{ijk}(\underline{\ell}) = r^2 G_{ij,k}(z - z') = -r^2 G_{ij,k}(r) \quad (\text{III.5})$$

Les composants g_{ijk} sont calculés par (III.5), donnés dans l'annexe D. En utilisant (III.5) l'équation (III.2) devient

$$M_{ijkl} = -\frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Sigma} r(\underline{\ell}) g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega \quad (\text{III.6})$$

Σ dénote la surface d'une sphère unitaire centrée au point \underline{z} . $r(\underline{\ell})$ définit la frontière de l'inclusion ellipsoïdale aplatie et est obtenu par la racine positive de l'équation :

$$\frac{(z_1^\alpha + r\ell_1^\alpha)^2 + (z_2^\alpha + r\ell_2^\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z_3^\alpha + r\ell_3^\alpha)^2}{c^2} = 1 \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\underline{z}^\alpha = \mathbf{Q}^{\theta_\alpha} \cdot \underline{z}, \quad \underline{\ell}^\alpha = \mathbf{Q}^{\theta_\alpha} \cdot \underline{\ell} \quad (\text{III.8})$$

On trouve la solution de l'équation (III.7) :

$$r(\underline{\ell}) = -\frac{f_\alpha}{g_\alpha} + \left(\frac{f_\alpha^2}{g_\alpha^2} + \frac{e_\alpha}{g_\alpha} \right)^{1/2} \quad (\text{III.9})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\alpha = 1 - \left(\frac{(z_1^\alpha)^2 + (z_2^\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z_3^\alpha)^2}{c^2} \right) \\ f_\alpha = \frac{z_1^\alpha \ell_1^\alpha + z_2^\alpha \ell_2^\alpha}{a^2} + \frac{z_3^\alpha \ell_3^\alpha}{c^2} \\ \quad = \frac{1}{c^2} [z_1 \epsilon^2 \ell_1^\alpha + z_2 (\epsilon^2 \cos \theta_\alpha \ell_2^\alpha + \sin \theta_\alpha \ell_3^\alpha) \\ \quad \quad + z_3 (-\epsilon^2 \sin \theta_\alpha \ell_2^\alpha + \cos \theta_\alpha \ell_3^\alpha)] \\ g_\alpha = \frac{(\ell_1^\alpha)^2 + (\ell_2^\alpha)^2}{a^2} + \frac{(\ell_3^\alpha)^2}{c^2} \\ \epsilon = \frac{c}{a} \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

Car g_{ijk} est impair tandis que $(f_\alpha^2/g_\alpha^2 + e_\alpha/g_\alpha)^{1/2}$ est pair selon $\underline{\ell}$, on a :

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{f_\alpha^2}{g_\alpha^2} + \frac{e_\alpha}{g_\alpha} \right)^{1/2} g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega = 0 \quad (\text{III.11})$$

L'équation (III.2) devient

$$\begin{aligned} M_{ijkl} &= \frac{\partial}{\partial z_l} \int_{\Sigma} \frac{f_\alpha}{g_\alpha} g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial z_l} (z_1 p_1 + z_2 p_2 + z_3 p_3) g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega \\ &= \int_{\Sigma} p_l g_{ijk}(\underline{\ell}) d\omega \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_1 = \frac{\epsilon^2 \ell_1^\alpha}{g'} = \frac{\epsilon^2 \ell_1}{g'} \\
 p_2 = \frac{(\epsilon^2 \cos \theta_\alpha \ell_2^\alpha + \sin \theta_\alpha \ell_3^\alpha)}{g'} \\
 = \frac{\ell_2 (\sin^2 \theta_\alpha + \epsilon^2 \cos^2 \theta_\alpha) + (1 - \epsilon^2) \ell_3 \sin \theta_\alpha \cos \theta_\alpha}{g'} \\
 p_3 = \frac{(-\epsilon^2 \sin \theta_\alpha \ell_2^\alpha + \cos \theta_\alpha \ell_3^\alpha)}{g'} \\
 = \frac{(1 - \epsilon^2) \ell_2 \sin \theta_\alpha \cos \theta_\alpha + \ell_3 (\epsilon^2 \sin^2 \theta_\alpha + \cos^2 \theta_\alpha)}{g'} \\
 g' = c^2 g_\alpha = \epsilon^2 [(\ell_1^\alpha)^2 + (\ell_2^\alpha)^2] + (\ell_3^\alpha)^2 \\
 = \epsilon^2 \ell_1^2 + \ell_2^2 (\sin^2 \theta_\alpha + \epsilon^2 \cos^2 \theta_\alpha) + \ell_3^2 (\epsilon^2 \sin^2 \theta_\alpha + \cos^2 \theta_\alpha) + (1 - \epsilon^2) \ell_2 \ell_3 \sin 2\theta_\alpha
 \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

A partir de l'équation (III.13), on trouve une relation comme ci-dessous

$$p_1 \ell_1 + p_2 \ell_2 + p_3 \ell_3 = 1 \quad (\text{III.14})$$

On peut démontrer que le tenseur \mathbb{M} respecte la symétrie mineure (36 composantes sont indépendantes)

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} \quad (\text{III.15})$$

Alors, le détail des calculs du tenseur \mathbb{M} sont donnés :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_{mn11}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_1 g_{mn1}(\underline{\ell}) d\omega \\
 M_{mn22}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_2 g_{mn2}(\underline{\ell}) d\omega \\
 M_{mn33}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_3 g_{mn3}(\underline{\ell}) d\omega \\
 M_{mn12}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_2 g_{mn1}(\underline{\ell}) d\omega \\
 M_{mn23}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_3 g_{mn2}(\underline{\ell}) d\omega \\
 M_{mn31}(\underline{z}, \theta_\alpha) = \int_{\Sigma} p_1 g_{mn3}(\underline{\ell}) d\omega
 \end{array} \right. , (mn) = (11, 22, 33, 12, 23, 31) \quad (\text{III.16})$$

Les composantes du tenseur de Hill \mathbb{P} peuvent s'écrire

$$P_{ijkl} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (p_l g_{kij} + p_l g_{kji} + p_k g_{lij} + p_k g_{lji}) d\omega \quad (\text{III.17})$$

Le tenseur de Hill \mathbb{P} respecte la symétrie mineure et majeure (21 composantes indépendantes)

$$P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk} \quad , \quad P_{ijkl} = P_{klij} \quad (\text{III.18})$$

Le vecteur unitaire $\underline{\ell}$ peut être exprimé en terme de deux angles (θ, ϕ) qui caractérisent des coordonnées sphériques [62], [61]

$$\underline{\ell} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (\text{III.19})$$

et l'intégration d'une fonction $F(\theta_\alpha, \underline{\ell})$ sur la surface d'une sphère unitaire Σ peut être exprimée comme

$$\int_{\Sigma} F(\theta_\alpha, \underline{\ell}) d\omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} F(\theta_\alpha, \phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (\text{III.20})$$

On peut montrer que le tenseur de Hill \mathbb{P} est monoclinique, caractérisé par 13 composantes indépendantes P_{ijkl} dans le repère *intermédiaire*. Les relations de symétrie (III.18) impliquent les résultats suivants (8 composantes supplémentaires sont égaux à zéro)

$$P_{ii31} = P_{ii12} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad P_{2331} = P_{2323} = 0 \quad (\text{III.21})$$

En utilisant la représentation matricielle définie par Walpole [79] (cf aussi [7])

$$[P_{IJ}] = \begin{pmatrix} P_{1111} & P_{1122} & P_{1133} & \sqrt{2}P_{1123} & \sqrt{2}P_{1131} & \sqrt{2}P_{1112} \\ P_{2211} & P_{2222} & P_{2233} & \sqrt{2}P_{2223} & \sqrt{2}P_{2231} & \sqrt{2}P_{2212} \\ P_{3311} & P_{3322} & P_{3333} & \sqrt{2}P_{3323} & \sqrt{2}P_{3331} & \sqrt{2}P_{3312} \\ \sqrt{2}P_{2311} & \sqrt{2}P_{2322} & \sqrt{2}P_{2333} & 2P_{2323} & 2P_{2331} & 2P_{2312} \\ \sqrt{2}P_{3111} & \sqrt{2}P_{3122} & \sqrt{2}P_{3133} & 2P_{3123} & 2P_{3131} & 2P_{3112} \\ \sqrt{2}P_{1211} & \sqrt{2}P_{1222} & \sqrt{2}P_{1233} & 2P_{1223} & 2P_{1231} & 2P_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

on obtient

$$[P_{IJ}] = \begin{pmatrix} P_{1111} & P_{1122} & P_{1133} & \sqrt{2}P_{1123} & 0 & 0 \\ P_{2211} & P_{2222} & P_{2233} & \sqrt{2}P_{2223} & 0 & 0 \\ P_{3311} & P_{3322} & P_{3333} & \sqrt{2}P_{3323} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}P_{2311} & \sqrt{2}P_{2322} & \sqrt{2}P_{2333} & 2P_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2P_{3131} & 2P_{3112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2P_{1231} & 2P_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Comme on a prévu, les relations (III.18-III.21) impliquent que la matrice (III.23) est symétrique et caractérisée par seulement 13 composantes indépendantes. Le cas limite de l'inclusion "penny-

shape”² peut être déduit en fixant la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans les relations (III.10-III.13). On obtient les relations simples

$$p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = \frac{1}{\ell_2 + \ell_3 \cot(\theta_\alpha)} \quad , \quad p_3 = \frac{1}{\ell_3 + \ell_2 \tan(\theta_\alpha)} \quad (\text{III.24})$$

En introduisant (III.24) dans les relations (III.16-III.17), on peut montrer que le tenseur de Hill \mathbb{P} pour une inclusion ”penny-shape” orientée de manière arbitraire dans un milieu isotrope transverse est caractérisé par 9 composantes indépendantes ($P_{1111} = P_{1122} = P_{2211} = P_{1133} = P_{3311} = P_{1123} = P_{2311} = 0$ dans la relation III.23).

Pour une valeur donnée de l’angle θ_α , on peut intégrer numériquement le tenseur de Hill P_{ijkl} en employant la quadrature de Gauss (cf la sous-section I.7.3)

$$P_{ijkl}(\theta_\alpha) = \sum_{k=1}^{N_\theta} \sum_{l=1}^{N_\phi} w_\theta^k w_\phi^l f_{ijkl}(\theta_\alpha, \theta^k, \phi^l) \sin(\theta^k) \quad (\text{III.25})$$

où N_θ et N_ϕ désignent respectivement le nombre de points de Gauss dans les intervalles de $[0, \pi]$ pour l’angle θ et de $[0, 2\pi]$ pour l’angle ϕ . w_θ^k et w_ϕ^l désignent respectivement le poids associé au $k^{\text{ième}}$ point d’intégration de θ et le poids associé au $l^{\text{ième}}$ point d’intégration de ϕ , θ^k et ϕ^l sont les coordonnées de Gauss correspondantes. Les coefficients f_{ijkl} sont donnés par la relation (III.17). Un test de précision de la méthode d’intégration de Gauss pour 13 composantes non nulles indépendantes du tenseur de Hill est présenté aux tableaux (III.2 et III.3). Les résultats présentés dans ces tableaux sont correspondants à l’angle $\theta_\alpha = 5\pi/7$ et $\epsilon_p = 0.1 - 0.05$. Les constantes élastiques définissant le tenseur de rigidité isotrope transverse \mathbb{C}_s de la matrice sont données dans le tableau III.1. Le test numérique de l’intégration de Gauss est réalisé avec $N_\theta = 25 - 50 - 100 - 200$ et $N_\phi = 2N_\theta$. La précision de la règle d’intégration de Gauss dépend du rapport d’aspect ϵ_p et de l’orientation de l’ellipsoïde aplati (composante par composante). Le premier test de précision de la méthode d’intégration numérique est réalisé pour vérifier la symétrie des composantes de M_{ijkl} (relation (III.15)). Les composantes égales (en terme théorique) M_{ijkl} et M_{ijlk} sont calculées indépendamment en employant les relations (III.16). Leur différence relative est alors comparée à un critère de précision

$$\left| \frac{M_{ijkl} - M_{ijlk}}{M_{ijkl}} \right| \leq 10^{-n} \quad (\text{III.26})$$

Ce premier test est accompli en calculant les différences relatives sur les composantes non nulles de M_{ijkl} et de P_{ijkl} entre les différents cas $N_\theta = 25, 50, 100, 200$. À une précision fixe, plus le rapport d’aspect est petit, plus grand sera le nombre de points d’intégration de Gauss, plus important sera le temps de calcul : voir des erreurs relatives et les valeurs numériques des composantes de

²en anglais

P_{ijkl} pour des rapports d'aspect $\epsilon_p = 0.05 - 0.1$ dans les tableaux III.2-III.3. Par exemple, l'erreur relative maximale pour $N_\theta = 100$ est respectivement égal à $4.2 \cdot 10^{-7}$ et à $1.9 \cdot 10^{-3}$ pour $\epsilon_p = 0.1$ et $\epsilon_p = 0.05$. Les colonnes $N_\theta = 25 - 50 - 100 - 200$ présentent les erreurs relatives calculées par

$$\epsilon_{er}^{N_\theta} = \left| \frac{P_{ijkl}^{N_\theta} - P_{ijkl}^{400}}{P_{ijkl}^{400}} \right| \quad (\text{III.27})$$

et la colonne $N_\theta = 400$ donne les valeurs des composantes non nulles du tenseur de Hill P_{ijkl}^{400} avec un calcul numérique de $N_\theta = 400$. Pour le petit rapport d'aspect, $\epsilon_p \leq 0.03$, la méthode d'intégration numérique doit être optimisée pour réduire le temps du calcul. En particulier une distribution non régulière des points d'intégration de Gauss est nécessaire. Dans la suite du chapitre, la valeur $\epsilon_p = 0.05$ sera considérée comme le rapport d'aspect des pores et les résultats précis sont obtenus en employant un minimum de point de Gauss de $N_\theta = 100$ dans l'intégration numérique du tenseur de Hill. L'évolution des composantes non nulles de tenseur de Hill dans le repère *intermédiaire* est présentée dans les figures III.1 pour les trois valeurs du rapport d'aspect ($\epsilon_p = 0.01 - 0.05 - 0.1$).

 TAB. III.1: Les paramètres de la matrice solide s

E_1^s	E_3^s	ν_{12}^s	ν_{31}^s	G_{13}^s
27000.3	23800.1	0.1405	0.2529	8372.87
C_{11}^s	C_{12}^s	C_{13}^s	C_{33}^s	C_{44}^s
30734.2	7059.59	9558.05	28634.5	8372.87

III.2.2 Tenseur de Hill dans le repère global

Les règles de transformation (I.131) sont employées pour décrire les composantes du tenseur de Hill dans le repère global du milieu isotrope transverse entourant l'inclusion

$$\mathbb{P} = P_{pqrs} \underline{e}_p \otimes \underline{e}_q \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_s = P_{ijkl}^{\phi_\alpha} \underline{e}_i^{\phi_\alpha} \otimes \underline{e}_j^{\phi_\alpha} \otimes \underline{e}_k^{\phi_\alpha} \otimes \underline{e}_l^{\phi_\alpha} \quad (\text{III.28})$$

$$P_{ijkl}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) = Q_{pi}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{qj}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{rk}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{sl}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) P_{pqrs}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha)$$

où $P_{ijkl}(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$ et $P_{pqrs}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha)$ désignent respectivement les composantes du tenseur de Hill dans le repère global du matériau et dans le repère *intermédiaire*. $P_{pqrs}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha)$ est correspondante à la notation P_{pqrs} dans la section précédente III.2.1.

Il faut noter que la séparation de deux variables ϕ_α et θ_α dans la partie à la droite de (III.28) permet

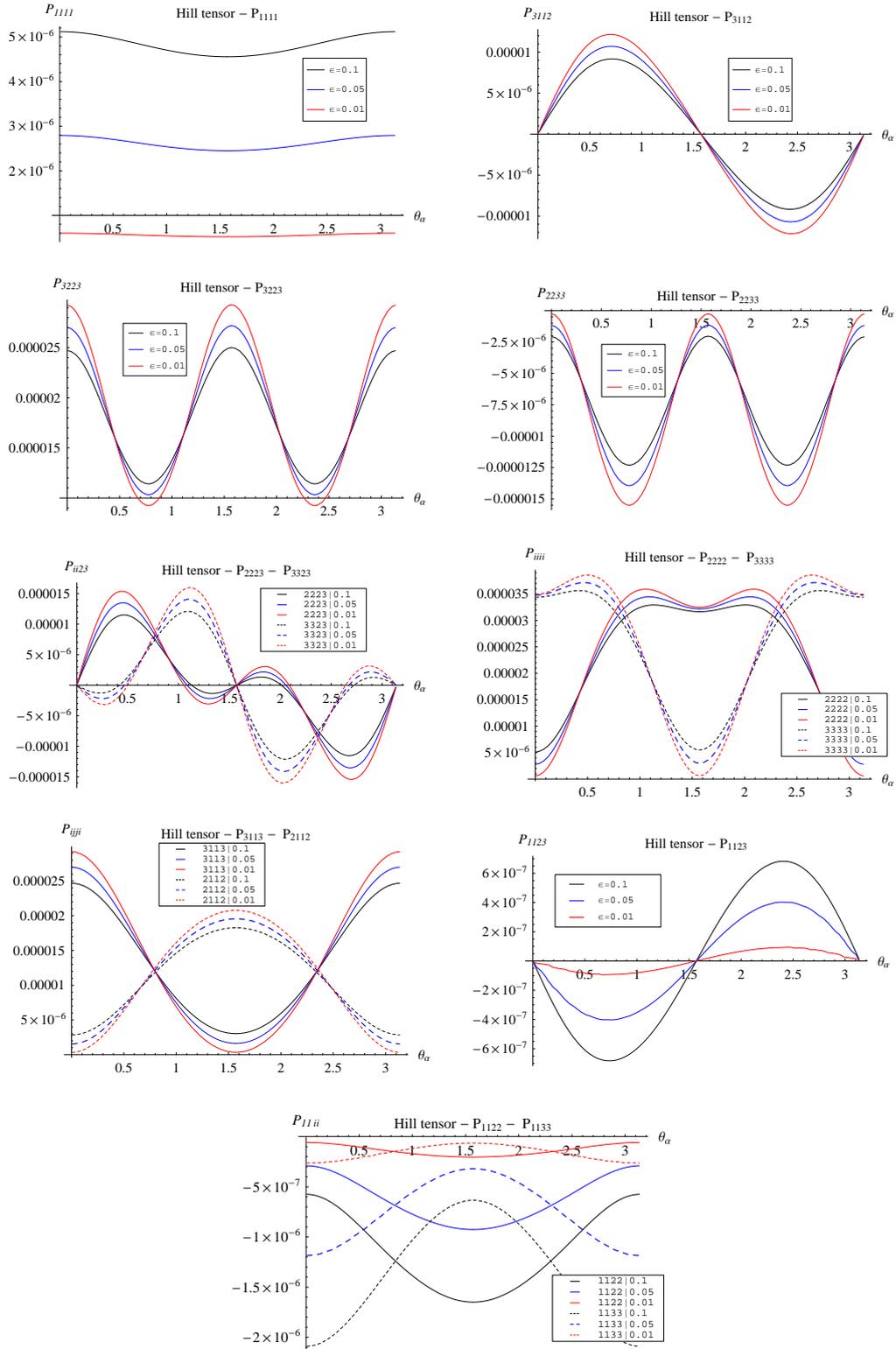


FIGURE III.1: Composantes du tenseur de Hill en fonction de l'angle incliné θ_α , rapport d'aspect $\epsilon_p = 0.1 - 0.05 - 0.01$

TAB. III.2: Les composantes du tenseur de Hill dans le repère intermédiaire (test de précision de la méthode d'intégration de Gauss)

N_θ	25	50	100	200	400
P_{1111}	$3.73706 \cdot 10^{-3}$	$2.15752 \cdot 10^{-5}$	$1.32297 \cdot 10^{-9}$	$2.14067 \cdot 10^{-10}$	$4.75696 \cdot 10^{-6}$
P_{1122}	$2.98837 \cdot 10^{-3}$	$2.35131 \cdot 10^{-5}$	$1.35871 \cdot 10^{-9}$	$2.41988 \cdot 10^{-10}$	$-1.29459 \cdot 10^{-6}$
P_{1133}	$5.25826 \cdot 10^{-2}$	$8.28584 \cdot 10^{-4}$	$4.20725 \cdot 10^{-7}$	$1.02926 \cdot 10^{-9}$	$-1.16319 \cdot 10^{-6}$
P_{2222}	$3.60184 \cdot 10^{-3}$	$1.52842 \cdot 10^{-5}$	$1.29342 \cdot 10^{-8}$	$1.17176 \cdot 10^{-11}$	$3.13032 \cdot 10^{-5}$
P_{2233}	$1.2456 \cdot 10^{-4}$	$9.88366 \cdot 10^{-6}$	$8.34778 \cdot 10^{-9}$	$4.29339 \cdot 10^{-11}$	$-1.17816 \cdot 10^{-5}$
P_{3333}	$7.98198 \cdot 10^{-3}$	$7.89167 \cdot 10^{-5}$	$3.34115 \cdot 10^{-8}$	$1.2106 \cdot 10^{-11}$	$2.75238 \cdot 10^{-5}$
P_{1123}	$3.34841 \cdot 10^{-2}$	$2.16171 \cdot 10^{-4}$	$2.07732 \cdot 10^{-7}$	$2.02414 \cdot 10^{-10}$	$6.50496 \cdot 10^{-7}$
P_{2223}	$9.01992 \cdot 10^{-3}$	$1.76056 \cdot 10^{-5}$	$1.57104 \cdot 10^{-8}$	$8.88069 \cdot 10^{-11}$	$-4.49414 \cdot 10^{-6}$
P_{3323}	$2.74868 \cdot 10^{-2}$	$1.93089 \cdot 10^{-4}$	$1.06649 \cdot 10^{-7}$	$2.3641 \cdot 10^{-11}$	$-1.01978 \cdot 10^{-5}$
P_{3223}	$3.04097 \cdot 10^{-3}$	$6.45709 \cdot 10^{-5}$	$1.31642 \cdot 10^{-8}$	$1.41089 \cdot 10^{-11}$	$1.21262 \cdot 10^{-5}$
P_{3113}	$7.90195 \cdot 10^{-3}$	$3.06945 \cdot 10^{-6}$	$2.1847 \cdot 10^{-9}$	$1.56948 \cdot 10^{-10}$	$9.98893 \cdot 10^{-6}$
P_{3112}	$5.14722 \cdot 10^{-3}$	$1.70722 \cdot 10^{-5}$	$8.29499 \cdot 10^{-9}$	$8.8542 \cdot 10^{-12}$	$-8.58207 \cdot 10^{-6}$
P_{2112}	$5.45218 \cdot 10^{-3}$	$2.59155 \cdot 10^{-5}$	$1.35285 \cdot 10^{-8}$	$4.02743 \cdot 10^{-12}$	$1.32768 \cdot 10^{-5}$

de simplifier les calculs de l'intégration numériques du tenseur de Hill. Comme il sera détaillé dans la section III.3.1, l'intégration sur ϕ_α est élémentaire et peut être exécutée analytiquement, seule l'intégration numérique sur θ_α est nécessaire.

III.3 Distributions des inclusions ellipsoïdales dans une matrice isotrope transverse

Dans cette section, des applications de la solution du tenseur de Hill ci-dessus pour déterminer les propriétés effectives des matériaux poreux sont présentées. L'objectif de cette section est d'étudier l'influence séparée de l'anisotropie *initiale* de la matrice et de l'anisotropie due à l'espace poreux sur les propriétés poroélastiques effitives comme le tenseur de Biot. La fonction de distri-

TAB. III.3: Les composantes du tenseur de Hill dans le repère intermédiaire (test de précision de la méthode d'intégration de Gauss)

N_θ	25	50	100	200	400
P_{1111}	3.36929×10^{-2}	$2.67936 \cdot 10^{-3}$	$1.381 \cdot 10^{-5}$	$5.58074 \cdot 10^{-11}$	$2.57103 \cdot 10^{-6}$
P_{1122}	$3.03218 \cdot 10^{-2}$	$2.74476 \cdot 10^{-3}$	$1.32507 \cdot 10^{-5}$	$3.81579 \cdot 10^{-12}$	$-7.20218 \cdot 10^{-7}$
P_{1133}	$5.04865 \cdot 10^{-1}$	$1.01205 \cdot 10^{-1}$	$1.89626 \cdot 10^{-3}$	$4.46305 \cdot 10^{-7}$	$-6.31499 \cdot 10^{-7}$
P_{2222}	$2.72993 \cdot 10^{-2}$	$1.35765 \cdot 10^{-3}$	$2.83975 \cdot 10^{-5}$	$6.55681 \cdot 10^{-9}$	$3.31322 \cdot 10^{-5}$
P_{2233}	$6.97165 \cdot 10^{-3}$	$7.39578 \cdot 10^{-4}$	$2.62586 \cdot 10^{-5}$	$2.07736 \cdot 10^{-9}$	$-1.32891 \cdot 10^{-5}$
P_{3333}	$5.83184 \cdot 10^{-2}$	$4.09719 \cdot 10^{-3}$	$6.74871 \cdot 10^{-5}$	$2.01033 \cdot 10^{-8}$	$2.88243 \cdot 10^{-5}$
P_{1123}	$2.82605 \cdot 10^{-1}$	$3.56259 \cdot 10^{-2}$	$8.93589 \cdot 10^{-4}$	$1.88785 \cdot 10^{-7}$	$3.83355 \cdot 10^{-7}$
P_{2223}	$9.08904 \cdot 10^{-2}$	$1.78774 \cdot 10^{-3}$	$3.4856 \cdot 10^{-5}$	$1.20598 \cdot 10^{-8}$	$-4.58306 \cdot 10^{-6}$
P_{3323}	$1.8654 \cdot 10^{-1}$	$1.12414 \cdot 10^{-2}$	$2.06961 \cdot 10^{-4}$	$5.46021 \cdot 10^{-8}$	$-1.15281 \cdot 10^{-5}$
P_{3223}	$2.77773 \cdot 10^{-2}$	$2.4985 \cdot 10^{-3}$	$2.24125 \cdot 10^{-5}$	$1.16533 \cdot 10^{-8}$	$1.12051 \cdot 10^{-5}$
P_{3113}	$8.24704 \cdot 10^{-2}$	$5.80093 \cdot 10^{-5}$	$9.41273 \cdot 10^{-6}$	$2.19265 \cdot 10^{-9}$	$9.63894 \cdot 10^{-6}$
P_{3112}	$4.58353 \cdot 10^{-2}$	$1.04622 \cdot 10^{-3}$	$1.21003 \cdot 10^{-5}$	$4.46023 \cdot 10^{-9}$	$-9.97191 \cdot 10^{-6}$
P_{2112}	$4.66632 \cdot 10^{-2}$	$1.5354 \cdot 10^{-3}$	$2.47351 \cdot 10^{-5}$	$7.93002 \cdot 10^{-9}$	$1.38438 \cdot 10^{-5}$

bution d'orientation présentée à la section I.6.2 (voir aussi [44, 71]) sera employée pour représenter la distribution d'orientation des pores. Seules des distributions axisymétriques d'orientation des pores seront étudiées.

III.3.1 Distribution isotrope des inclusions ellipsoïdales

On considère un tenseur d'ordre quatre \mathbb{T} et sa moyenne $\langle \mathbb{T} \rangle$, donnés dans la formule (I.88), T_{ijkl} et $T_{ijkl}^{\phi_{\alpha}}$ sont respectivement les composantes du tenseur \mathbb{T} dans le système global des coordonnées z_i et *intermédiaire* $z_i^{\phi_{\alpha}}$. En employant les résultats présentés dans la section précédente pour le tenseur de Hill (relation III.28), on peut montrer que les composants T_{ijkl} peuvent être exprimés comme une fonction des deux angles $(\theta_{\alpha}, \phi_{\alpha})$ qui caractérise l'orientation d'une inhomogénéité

isolée α

$$T_{ijkl}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) = Q_{pi}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{qj}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{rk}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{ql}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) T_{pqrs}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha) \quad (\text{III.29})$$

Une distribution isotrope des inhomogénéités peut être rendue compte en effectuant une intégration sur la sphère unitaire (voir [62])

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i \mathbb{T}_i = \frac{f_I}{4\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \mathbb{T}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha d\phi_\alpha \quad (\text{III.30})$$

L'écriture de (III.30) sous la forme des indices

$$\langle T \rangle_{ijkl} = \frac{f_I}{4\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} T_{ijkl}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha d\phi_\alpha \quad (\text{III.31})$$

où $f_I = \sum_i f_i$ est la fraction volumique des inclusions.

Car les composantes de $T_{pqrs}^{\phi_\alpha}$ sont des fonctions d'une seule variable (l'angle incliné θ_α , relation III.29), l'intégration (III.31) peut être simplifiée. L'intégration sur l'angle de ϕ_α peut être obtenue analytiquement car les composantes de $T_{pqrs}^{\phi_\alpha}$ ne dépendent pas de ϕ_α et les produits des composantes $Q_{ij}^{\phi_\alpha}$ de matrice de rotation sont les fonctions élémentaires (voir la relation I.124). En introduisant (III.29) dans la relation (III.31), on obtient

$$\langle T \rangle_{ijkl} = f_I \frac{1}{2} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} \langle T^\phi \rangle_{ijkl}(\theta_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha \quad (\text{III.32})$$

avec

$$\langle T^\phi \rangle_{ijkl}(\theta_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_\alpha=0}^{2\pi} Q_{pi}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{qj}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{rk}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) Q_{ql}^{\phi_\alpha}(\phi_\alpha) T_{pqrs}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha) d\phi_\alpha \quad (\text{III.33})$$

Le tenseur \mathbb{T}_i de la famille i des inclusions, orientée par les deux angles d'Euler $(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$ dans le système des coordonnées global du matériau, est donné dans la relation (I.88)

$$\mathbb{T}_i = \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1}, \quad \mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i(\epsilon_i, \theta_\alpha, \phi_\alpha, \mathbb{C}_s) \quad (\text{III.34})$$

Car les inclusions sont supposées isotrope

$$\mathbb{C}_i = 2\mu_i \mathbb{K} + 3k_i \mathbb{J}, \quad k_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \quad (\text{III.35})$$

et le tenseur de rigidité de la matrice \mathbb{C}_s est isotrope transverse avec l'axe de rotation z_3 , les composantes du tenseur \mathbb{C}_i et \mathbb{C}_s sont identiques dans les repères global z_i et *intermédiaire* $z_i^{\phi_\alpha}$

$$C_{ijkl}^{(i)} = C_{ijkl}^{(i)\phi_\alpha}, \quad C_{ijkl}^s = C_{ijkl}^{s\phi_\alpha} \quad (\text{III.36})$$

Alors, il est commode de calculer des composantes du tenseur \mathbb{T} pour une famille des inclusions dans le repère *intermédiaire* $z_i^{\phi_\alpha}$ en utilisant la relation (III.34) où les composantes du tenseur

de Hill \mathbb{P}_i ne dépendent qu'un angle incliné θ_α (voir la sous-section III.2.1. En tenant compte les relations (III.18-III.36) et les propriétés symétriques de la matrice solide \mathbb{C}_s et des inhomogénéités \mathbb{C}_i , on obtient la symétrie

$$T_{ijkl}^{\phi_\alpha} = T_{jikl}^{\phi_\alpha} = T_{ijlk}^{\phi_\alpha} \quad (\text{III.37})$$

et

$$T_{ijkl}^{\phi_\alpha} = T_{klij}^{\phi_\alpha} \quad (\text{III.38})$$

Dans le repère *intermédiaire*, la représentation matricielle du tenseur \mathbb{T} prend la forme suivante (13 composantes indépendantes)

$$[T_{IJ}^{\phi_\alpha}(\theta_\alpha)] = \begin{pmatrix} T_{1111}^{\phi_\alpha} & T_{1122}^{\phi_\alpha} & T_{1133}^{\phi_\alpha} & \sqrt{2}T_{1123}^{\phi_\alpha} & 0 & 0 \\ T_{1122}^{\phi_\alpha} & T_{2222}^{\phi_\alpha} & T_{2233}^{\phi_\alpha} & \sqrt{2}T_{2223}^{\phi_\alpha} & 0 & 0 \\ T_{1133}^{\phi_\alpha} & T_{2233}^{\phi_\alpha} & T_{3333}^{\phi_\alpha} & \sqrt{2}T_{3323}^{\phi_\alpha} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}T_{1123}^{\phi_\alpha} & \sqrt{2}T_{2223}^{\phi_\alpha} & \sqrt{2}T_{3323}^{\phi_\alpha} & 2T_{2323}^{\phi_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{3131}^{\phi_\alpha} & 2T_{3112}^{\phi_\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{3112}^{\phi_\alpha} & 2T_{1212}^{\phi_\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

En employant les relations (I.124) et (III.39), on peut démontrer analytiquement que le tenseur $\langle \mathbb{T}^\phi \rangle$ prend la forme d'un tenseur isotrope transverse. Le résultat analytique de l'intégration élémentaire (III.33) peut être exprimé sous la forme matricielle comme (la variable θ_α est omis en raison de la simplicité de l'écriture)

$$[\langle \mathbb{T}^\phi \rangle_{IJ}] = \begin{pmatrix} \langle T^\phi \rangle_{1111} & \langle T^\phi \rangle_{1122} & \langle T^\phi \rangle_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \langle T^\phi \rangle_{2211} & \langle T^\phi \rangle_{2222} & \langle T^\phi \rangle_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \langle T^\phi \rangle_{3311} & \langle T^\phi \rangle_{3322} & \langle T^\phi \rangle_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\langle T^\phi \rangle_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\langle T^\phi \rangle_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\langle T^\phi \rangle_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{III.40})$$

avec

$$\begin{aligned}
 \langle T^\phi \rangle_{1111} &= \langle T^\phi \rangle_{2222} = \frac{1}{8}(3T_{1111}^{\phi_\alpha} + 2T_{1122}^{\phi_\alpha} + 4T_{1212}^{\phi_\alpha} + 3T_{2222}^{\phi_\alpha}) \\
 \langle T^\phi \rangle_{1122} &= \langle T^\phi \rangle_{2211} = \frac{1}{8}(T_{1111}^{\phi_\alpha} + 6T_{1122}^{\phi_\alpha} - 4T_{1212}^{\phi_\alpha} + T_{2222}^{\phi_\alpha}) \\
 \langle T^\phi \rangle_{1133} &= \langle T^\phi \rangle_{2233} = \langle T^\phi \rangle_{3311} = \langle T^\phi \rangle_{3322} = \frac{1}{2}(T_{1133}^{\phi_\alpha} + T_{2233}^{\phi_\alpha}) \\
 \langle T^\phi \rangle_{3333} &= T_{3333}^{\phi_\alpha} \\
 \langle T^\phi \rangle_{2323} &= \langle T^\phi \rangle_{3131} = \frac{1}{2}(T_{2323}^{\phi_\alpha} + T_{3131}^{\phi_\alpha}) \\
 \langle T^\phi \rangle_{1212} &= \frac{1}{2}[\langle T^\phi \rangle_{1111} - \langle T^\phi \rangle_{1122}] = \frac{1}{8}(T_{1111}^{\phi_\alpha} - 2T_{1122}^{\phi_\alpha} + 4T_{1212}^{\phi_\alpha} + T_{2222}^{\phi_\alpha})
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

Tenir compte les relations (III.40-III.41), la formule (III.32) implique que le tenseur $\langle \mathbb{T} \rangle$ prend la forme d'un tenseur isotrope transverse. La forme matricielle du tenseur $\langle \mathbb{T} \rangle$ est présentée comme ci-dessous

$$[\langle T \rangle_{IJ}] = \begin{pmatrix} \langle T \rangle_{1111} & \langle T \rangle_{1122} & \langle T \rangle_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \langle T \rangle_{1122} & \langle T \rangle_{1111} & \langle T \rangle_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \langle T \rangle_{1133} & \langle T \rangle_{1133} & \langle T \rangle_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\langle T \rangle_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\langle T \rangle_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle T \rangle_{1111} - \langle T \rangle_{1122} \end{pmatrix} \tag{III.42}$$

Les cinq composantes indépendantes du tenseur $\langle \mathbb{T} \rangle$, données dans la formule (III.32), sont déterminées numériquement par la méthode d'intégration de Gauss, présentée dans la section III.2.1. On peut noter que les intégrations analytiques (III.33-III.41) sur l'angle ϕ_α sont très utiles en terme de la précision et du temps du calcul.

III.3.2 Distribution d'orientation (ODF) des inclusions ellipsoïdales

La distribution orientée, ou anisotrope des inclusions ellipsoïdales dans une matrice isotrope transverse peut être rendue compte en présentant une *Fonction de Distribution d'Orientation* (voir la section I.6.2) ce qui permet de considérer l'anisotropie due au système des pores. Les contributions de toutes les familles des pores et/ou des constituants minéraux aux propriétés de rigidité macroscopiques sont prises en compte par l'intégration sur la sphère unitaire au-dessus. L'ODF choisie pour la description de la distribution d'orientation du système des inclusions est

présentée dans la formule (I.134)

$$W(\theta_\alpha, \sigma) = \sigma \operatorname{Cosh}(\sigma \operatorname{Cos} \theta_\alpha) \operatorname{Csch} \sigma \quad (\text{III.43})$$

Dans le cas d'une distribution d'orientation des inclusions, la relation (III.32) doit être remplacée par

$$\langle T \rangle_{ijkl} = \frac{f_I}{2} \int_{\theta_\alpha=0}^{\pi} W(\theta_\alpha, \sigma) \langle T^\phi \rangle_{ijkl}(\theta_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha \quad (\text{III.44})$$

III.4 Application à l'estimation des propriétés poroélastiques effectives d'une roche poreuse

Dans cette section, une application de la solution du problème de l'inclusion ellipsoïdale orientée de manière arbitraire dans un milieu isotrope transverse pour déterminer les propriétés effectives du matériau poreux est présenté. Le matériau étudié est une roche poreuse isotrope transverse. La composition minéralogique, la porosité et les propriétés mécaniques de ce matériau sont présentées dans le tableau III.4. Le lecteur pourra se reporter, pour plus de détail, aux références [11, 30, 65, 76].

III.4.1 Schémas d'homogénéisation et les propriétés poroélastiques effectives

L'approche de micromécanique vise à déterminer le comportement macroscopique des matériaux hétérogènes à partir de la solution d'un problème avec des conditions aux limites défini sur un V.E.R à l'échelle microscopique (voir [84, 77, 16, 17]). Une large bibliographie sur les méthodes d'homogénéisation peut être trouvée dans [86] pour le cas général des composites du type de matrice-inclusion, dans [54] pour le cas particulier de la roche isotrope transverse et dans [42, 82] pour les roches anisotropes. On peut voir aussi dans les autres références comme [4, 5, 58, 59, 74]. A la porosité moyenne ou faible, on peut estimer que le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka donne les propriétés élastiques et poroélastiques correctes [32, 78]. On peut noter que, pour expliquer la manière distribuée des inclusions non sphériques dans l'espace (la distribution ellipsoïdale des centres), le schéma de Ponte Castañeda-Willis [66] peut être employé au lieu du schéma de Mori-Tanaka (voir [42] pour des applications de cette estimation aux roches poreuses). [54] a déterminé les modules élastiques effectifs et les vitesses de la propagation des ondes élastiques dans un milieu isotrope transverse comportant des inhomogénéités sphéroïdales alignées. Récemment, [56] a étudié l'effet des inclusions sphériques sur le module de compressibilité et sur la conductivité thermique dans le cas isotrope. On considère dans ce chapitre une roche poreuse saturée entièrement avec une matrice isotrope transverse comportant les inclusions minérales sphériques

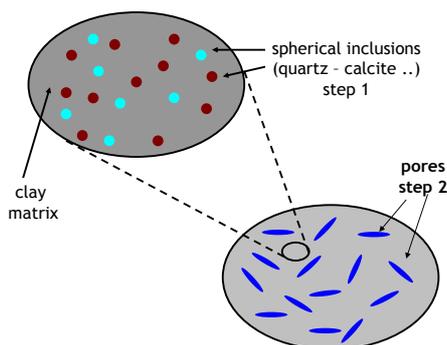


FIGURE III.2: Un schéma à deux étapes d’homogénéisation

(le quartz et la calcite) et des pores [78]. Le quartz et la calcite sont modélisés par des inclusions de la forme sphérique en utilisant le tenseur analytique de Hill, donné dans le chapitre II (cf aussi [33]). Les pores peuvent être décrits comme les inclusions de la forme quasi ellipsoïdale [14, 71, 78]. Ici, on considère que tous les pores sont de la même forme spheroïdale aplatie ($a = b > c$) avec un seul rapport d’aspect $\epsilon_p \approx 0.05$ [38]. Les différentes distributions d’orientation des pores (alignées, aléatoires ou distribuées préférentiellement) sont tenues en compte en utilisant la solution de l’inclusion ellipsoïdale orientée de manière arbitraire dans un milieu isotrope transverse.

III.4.2 Un schéma d’homogénéisation à deux étapes pour l’estimation des propriétés poroélastiques effectives

Dans ce paragraphe, on présente une technique à deux étapes d’homogénéisation pour estimer les propriétés poroélastiques effectives des matériaux hétérogènes de type ”roches-composites” avec la matrice anisotrope comme la description au-dessus. Une approche d’homogénéisation basée sur l’estimation de Mori-Tanaka [60] est introduite dans deux étapes. Cette technique permet d’ajouter successivement des constituants solides et des inhomogénéités poreuses. Comme dans la référence [78], un schéma à deux étapes d’homogénéisation est effectué (voir la figure III.2) :

- a. La matrice solide hétérogène est d’abord homogénéisée. Des inclusions minérales sphériques (le quartz et la calcite) sont aléatoirement ajoutées dans la matrice isotrope transverse \mathbb{C}_a . Le résultat est une matrice isotrope transverse dénoté par $\mathbb{C}_{\text{hom}}^I$.
- b. Les pores de forme sphéroïdale aplatie, distribués de manière alignée, aléatoire où préférentielle (ODF), est ajoutée dans la matrice solide isotrope transverse dénoté $\mathbb{C}_{\text{hom}}^I$ obtenu à

partir de la première étape. Le résultat est un milieu isotrope transverse, dénoté $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{II}$. Ce matériau est homogénéisé en utilisant la solution numérique du tenseur de Hill, présentée dans la sous-section III.2.

Au deuxième niveau de l'homogénéisation on utilise aussi une fonction de distribution d'orientation (ODF) qui permet de considérer l'anisotropie due au système des pores. La contribution de toutes les familles des pores au tenseur d'élasticité macroscopique et au tenseur de Biot est rendue compte par l'intégration sur la sphère unitaire dans laquelle, les intégrations (III.33-III.41) sur l'angle ϕ_α peuvent être calculées analytiquement et l'intégration sur l'angle θ_α est réalisée par la méthode de l'intégration de Gauss avec $N_{\theta_\alpha} = 30$. Le schéma d'estimation de Mori-Tanaka est employé pour toutes les deux étapes d'homogénéisation. Dans le cas de deux phases des inclusions minérales sphériques, le quartz et la calcite, la première étape d'homogénéisation est effectuée avec le schéma de Mori-Tanaka :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\text{hom}}^I &= \mathbb{C}_a + \left(\sum_i f_i \mathbb{T}^i \right) : \left[f_a \mathbb{I} + \sum_i f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_a)^{-1} : \mathbb{T}^i \right]^{-1}, \\ \mathbb{T}^i &= \left[\mathbb{P}_i + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_a)^{-1} \right]^{-1}, \quad \mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i(\epsilon_i = 1, \mathbb{C}_a), \quad i = qu, ca \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

TAB. III.4: Composition minéralogique, porosité et propriétés mécaniques d'une roche anisotrope

Composante	Fraction volumique	Propriétés mécaniques
Pores connectés	$f_p = 0.16$	$k_p = \mu_p = 0$
Quartz (SiO_2)	$f_{qu} = 0.18$	<i>isotrope</i> $E_{qu} = 96.4 \text{ GPa}$, $\nu_{qu} = 0.08$
Calcite ($CaCO_3$)	$f_{ca} = 0.14$	<i>isotrope</i> $E_{ca} = 84 \text{ GPa}$, $\nu_{ca} = 0.3$
Matrice	$f_a = 0.68$	<i>isotrope transverse</i> $E_1^a = 20.44 \text{ GPa}$, $E_3^a = 11.31 \text{ GPa}$, $G_{13}^a = 1.59 \text{ GPa}$ $\nu_{12}^a = 0.1$, $\nu_{31}^a = 0.18$

La solution analytique du tenseur de Hill \mathbb{P}_i pour les inclusions sphériques dans une matrice isotrope transverse à l'étape une est donnée dans le chapitre II. Les données de la première étape d'homogénéisation sont le tenseur élastique de la matrice isotrope transverse \mathbb{C}_a , la fraction volumique de quartz f_{qu} et de calcite f_{ca} , et les propriétés élastiques de chaque phase minérale, \mathbb{C}_{qu} et \mathbb{C}_{ca} (voir le tableau III.4). Le résultat de l'étape une est un tenseur homogénéisé isotrope transverse

$\mathbb{C}_{\text{hom}}^I$ qui est utilisé dans l'étape 2 ($\mathbb{C}_s = \mathbb{C}_{\text{hom}}^I$ dans ce qui suit) :

$$\begin{aligned} E_1^s &= 30109.3 \text{ MPa}, & E_3^s &= 17934.5 \text{ MPa}, & G_{13}^s &= 3690 \text{ MPa}, \\ \nu_{12}^s &= 0.137, & \nu_{31}^s &= 0.1656 \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

ou

$$\begin{aligned} C_{11}^s &= 32775 \text{ MPa}, & C_{12}^s &= 6302 \text{ MPa}, & C_{13}^s &= 6472 \text{ MPa}, \\ C_{33}^s &= 20078 \text{ MPa}, & C_{44}^s &= 7379 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Les données de la deuxième étape d'homogénéisation sont le tenseur homogénéisé isotrope transverse \mathbb{C}_s obtenu à partir de la première étape d'homogénéisation (la matrice et les phases minérales), la porosité f_p (voir le tableau III.4). La solution du tenseur de Hill \mathbb{P} pour les pores ellipsoïdaux orientés de manière arbitraire est présentée au paragraphe précédent. Le résultat de l'étape deux est le tenseur de rigidité homogénéisé $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{II}$ qui est encore isotrope transverse. Le tenseur de rigidité effectif obtenu en homogénéisant le système des pores immergé dans la matrice solide s'écrit (voir la formule (I.102))

$$\mathbb{C}_{\text{hom}}^{II} = \mathbb{C}_s + \left[(1 - f_p) \langle \mathbb{T} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{III.48})$$

Le tenseur moyen $\langle \mathbb{T} \rangle$ est calculé en employant la méthode présentée dans les sections III.3.1 et III.3.2 où le tenseur de Hill \mathbb{P} et le tenseur \mathbb{T} sont tout d'abord calculés dans le repère *intermédiaire* $z_i^{\phi_\alpha}$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \left[\mathbb{P} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1}, & \mathbb{P} &= \mathbb{P}(\epsilon_p, \theta_\alpha, \phi_\alpha, \mathbb{C}_s), \\ P_{ijkl}^{\phi_\alpha} &= P_{ijkl}^{\phi_\alpha}(\epsilon_p, \theta_\alpha, \mathbb{C}_s), & T_{ijkl}^{\phi_\alpha} &= T_{ijkl}^{\phi_\alpha}(\epsilon_p, \theta_\alpha, \mathbb{C}_s, \mathbb{C}_p) \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Les intégrations (III.33) sont calculées analytiquement en utilisant la matrice de transformation \mathbf{Q}^{ϕ_α} , donnée dans la formule (I.124), les résultats de ces intégrations sont présentés dans la section III.3.1. Les relations (III.44) et (III.32) sont respectivement employées pour calculer le tenseur $\langle \mathbb{T} \rangle$ avec les inclusions distribuées de manière orientée (ODF) et aléatoire. Dans le cas plus simple des pores alignés, la relation (III.48) doit être remplacée par (voir la formule (I.96))

$$\mathbb{C}_{\text{hom}}^{II} = \mathbb{C}_s + f_p \left[(1 - f_p) \mathbb{P} + (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{III.50})$$

et le tenseur de Hill est donné par la solution de Withers [81]. Le calcul du tenseur de Biot a bien présenté dans les sections I.4.2 et II.3.1. Deux cas particuliers sont étudiés ici, le cas *drainé*

est obtenu avec $p_l = 0$ dans les relations (II.20), et le cas *non-drainé* qui peut être déduit des relations poroélastiques en supposant que le masse de fluide reste inchangé. Seul le cas *drainé* sera étudié dans ce chapitre. Le tenseur de rigidité de la phase liquide dans les pores est égal à zéro : $\mathbb{C}_p = 0$ dans les relations (III.48-III.50). Le tenseur macroscopique de rigidité \mathbb{C}_{hom} de l'équation constitutive poroélastique linéaire (II.20) correspond au tenseur de rigidité *drainé* ($p_l = 0$).

III.5 Résultats et discussions

Le matériau étudié est une roche anisotrope. Ses propriétés physiques et mécaniques sont précisées dans le tableau III.4 (cf [31] pour une analyse du tenseur de conductivité thermique). Deux phases minérales considérées sont le quartz et la calcite représentant approximativement 30% du volume total de ce matériau. Le schéma d'homogénéisation Mori- Tanaka doit être utilisé dans ce cas grâce à la forme sphérique des inclusions et à leur distribution isotrope même si la fraction volumique totale est haute. Une étude de sensibilité a été effectuée pour la forme et la distribution orientée de pore :

Cas 1 Pores ellipsoïdaux aplatis alignés avec le rapport d'aspect $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

Cas 2 Pores ellipsoïdaux aplatis distribués de manière aléatoire (ou isotrope) avec le rapport d'aspect $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

Cas 3 Pores ellipsoïdaux aplatis distribués en ODF ($\sigma = 10$) avec le rapport d'aspect $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

Cas 4 Pores ellipsoïdaux aplatis ($\epsilon_p=1-0.1-0.05$) distribués de manière isotrope, alignée ou en ODF ($\sigma = 5$ et $\sigma = 10$).

Dans le cas des pores alignés, l'axe symétrique Ox_3 de la matrice du matériau coïncide au celui de pore. L'influence de la porosité et de la distribution des pores orientés sur les propriétés effectives est examinée. Le degré anisotrope défini par le rapport entre les modules E_1 et E_3 (cf l'annexe B) est décroissant en fonction de la porosité dans le cas des pores à distribution de manière aléatoire (voir les courbes de degré d'anisotropie dans la figure III.6). Comme dans le cas isotrope au chapitre I, plus le rapport d'aspect est faible, plus le module élastique se diminue avec la porosité pour une distribution isotrope (ou aléatoire) des pores (voir les courbes de module drainé effectif dans la figure III.6). La distribution d'orientation des pores a un grand effet sur l'anisotropie effective du tenseur de rigidité et celui de Biot (voir les figures III.12 et III.14). Le degré anisotrope effectif est le plus grand pour les pores aplatis alignés et se baisse quand la distribution d'orientation des pores tend vers la distribution aléatoire (le paramètre σ de l'ODF décroît vers zéro). On peut trouver que le tenseur de Biot est presque sphérique ($b_1 \approx b_3$) dans les cas des pores sphériques et aussi dans le cas des pores ellipsoïdaux aplatis à distribution d'orientation de manière aléatoire.

L'anisotropie de la matrice n'induit pas une partie déviatorique significative du tenseur de Biot pour une distribution d'orientation de manière isotrope des pores (voir la figure III.8). D'ailleurs, sa partie déviatorique significative est obtenue pour une distribution d'orientation des pores de manière fortement anisotrope (la grande valeur du paramètre σ), surtout dans le cas des pores alignés (voir la figure III.14). La forme et la distribution d'orientation des pores influencent fortement sur la valeur des coefficients de Biot b_i . A une porosité déterminée, les plus grandes valeurs des coefficients de Biot sont obtenues avec les pores très aplatis. La distribution alignée des pores aplatis provoque des différences significatives entre les deux coefficients de Biot b_1 et b_3 du milieu effectif isotrope transverse. Ces résultats, observés avec une matrice isotrope sont amplifiés quand la matrice est isotrope transverse. Le module de Biot du solide N dépend fortement du rapport d'aspect des pores (cf. la figure III.8 pour la distribution isotrope des pores). A une valeur donnée de la porosité, le module de Biot du solide N est plus grand pour les pores sphériques que ceux de forme aplatie ($\epsilon_p = 0.05$). L'effet de la distribution d'orientation des pores sur le module de Biot du solide N est illustré dans la figure III.14. Avec le même rapport d'aspect ($\epsilon_p = 0.05$), le module de Biot du solide N est plus grand pour le cas des pores alignés que pour la distribution d'orientation des pores de manière aléatoire. Cette étude utilise le même modèle structural des pores que dans la référence [31] où le problème de conductivité thermique effective est traité et comparé avec les données au laboratoire sur cette roche.

Il n'y a cependant aucune donnée de laboratoire sur le tenseur de Biot et le module de Biot du solide N pour cette roche. En raison d'une ultra faible perméabilité du matériau testé (perméabilité intrinsèque $k_{in} \approx 10^{-21} - 10^{-20} m^2$), des tests poromécaniques fatigués nécessaire afin d'identifier le tenseur macroscopique et le module de Biot du solide N sont extrêmement difficile à effectuer. Les résultats dans la référence citée ci-dessus sont obtenus dans le cas plus simple d'une matrice isotrope. Dans le cas étudié ici, les propriétés effectives expliquent deux contributions distinguées à l'anisotropie réelle : anisotropie intrinsèque de la matrice et anisotropie structurale (anisotropie à cause de la forme des pores et de la distribution d'orientation des pores). Les résultats présentés dans cette étude montre la sensibilité des propriétés poroélastiques effectives avec la structure des pores et la matrice anisotrope et la nécessité de les maîtriser précisément. La structure est aussi importante comme les mêmes propriétés poroélastiques effectives pourront être obtenues par les différentes combinaisons des matériaux constitutifs. Quand les données microstructurales ne sont pas suffisantes, la pertinence d'un modèle de pore-structure pour un matériau déterminé peut être évaluée en comparant les différentes propriétés déduites de différentes expérimentations et méthodes d'homogénéisation correspondantes, par exemple : une analyse comparative des vitesses acoustiques et conductivités thermiques obtenue avec le même modèle de pore-structure

pour les matériaux du type de roche [49]. Le modèle le plus préféré est celui qui peut expliquer mieux l'ensemble des données macroscopiques objectives. Pour les matériaux poreux étudiés dans ce chapitre, une comparaison entre les méthodes d'homogénéisation similaire développées pour les couples propriétés poroélastiques et la conductivité thermique est également effectuée (cf [31]). En comparant les résultats, on trouve que le modèle le plus pertinent correspond à la distribution d'orientation préférentielle des pores aplatis ($\epsilon_p \approx 0.05$) avec les axes des pores coïncidés avec ceux de la matrice anisotrope. Le même modèle microstructural et la méthode d'homogénéisation de deux- étapes Mori- Tanaka ont été utilisés dans ces deux cas. Même si le modèle microstructural est identique dans tous les cas, les méthodes d'homogénéisation sont cependant différentes en fonction de différents phénomènes physiques. Par exemple : la méthode d'homogénéisation auto-cohérent est utilisée pour estimer le tenseur effectif de perméabilité et les propriétés acoustiques [53, 57].

III.6 Conclusions

La solution numérique donnée par le problème de l'inclusion ellipsoïdale orientée de manière arbitraire dans une matrice solide isotrope transverse est appliquée à estimer les coefficients poroélastiques effectifs des matériaux hétérogènes de type *roches-composites*. La méthode d'intégration numérique présentée dans ce chapitre pour le cas particulier des inclusions ellipsoïdales noyées dans une matrice isotrope transverse est peut-être employée comme une alternative de la méthode basée sur la transformée de Fourier. Cette solution permet de séparer les effets respectifs de la matrice et du système des pores sur l'anisotropie effective du matériau. La matrice elle-même est isotrope transverse et la distribution des inclusions est orientée (isotrope transverse) selon la Fonction de Distribution d'Orientation (ODF). La forme et la distribution d'orientation des inclusions sont tous tenus compte. Comme [82] a indiqué, dans le cas plus simple de la matrice isotrope, il y a une application potentielle considérable pour les matériaux de type roches sédimentaires. L'anisotropie de la matrice peut être essentielle pour le schéma d'homogénéisation de multi- étapes dans un contexte général des matériaux hétérogènes anisotropes. Par exemple, en raison de simplifier le calcul, une catégorie de pores est examinée dans ce chapitre. Dans le cas général, les différents types de pores avec les différentes tailles, formes et distribution d'orientation devront être tenus compte dans une méthode d'homogénéisation de multi- étapes. Le cas particulier de la matrice isotrope transverse étudié dans ce chapitre lui-même a plusieurs applications aux géo-matériaux et aux roches sédimentaire [78].

En outre, les calculs du tenseur de Hill \mathbb{P} et du tenseur $\langle \mathbb{T}^\phi \rangle$ dans le repère *intermédiaire* permettent de démontrer que le tenseur d'élasticité homogénéisé d'un matériau comportant des inclusions ellipsoïdales à distribution d'orientation de manière isotrope, alignée ou préférentielle en

ODF, immergées dans un milieu isotrope transverse prend la forme d'un tenseur isotrope transverse.

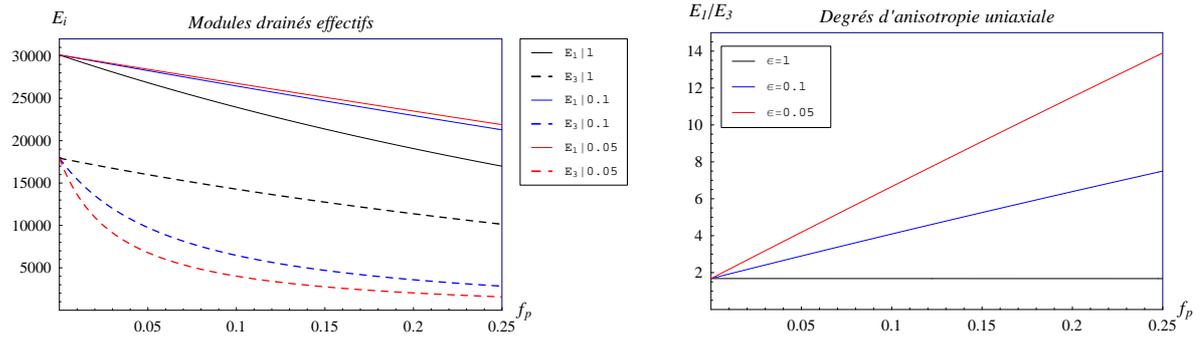


FIGURE III.3: Cas 1 : Pores alignés avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

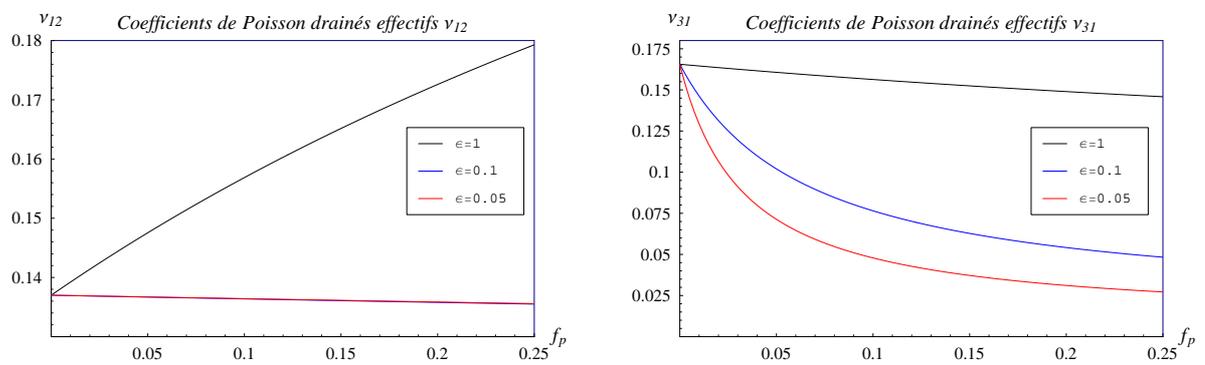


FIGURE III.4: Cas 1 : Pores alignés avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

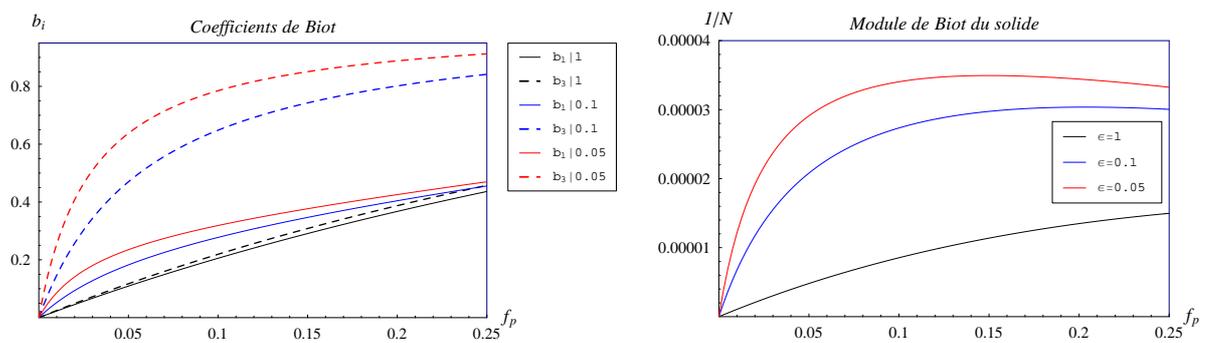


FIGURE III.5: Cas 1 : Pores alignés avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

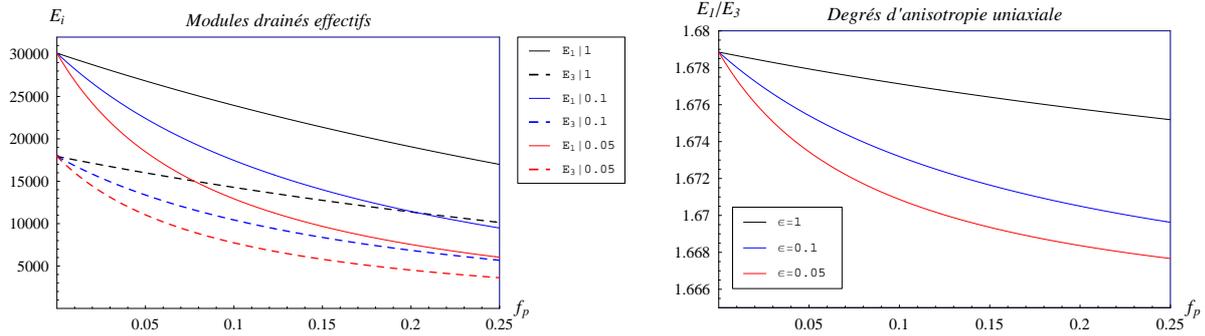


FIGURE III.6: Cas 2 : Pores à répartition aléatoire avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

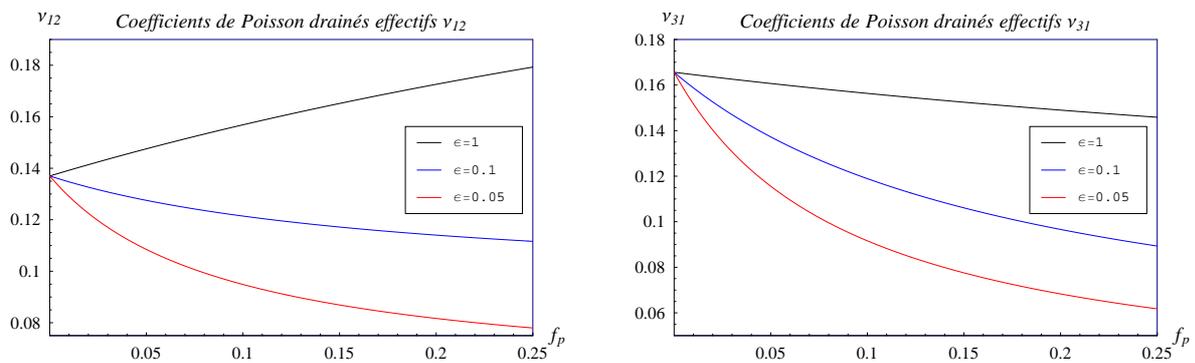


FIGURE III.7: Cas 2 : Pores à répartition aléatoire avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

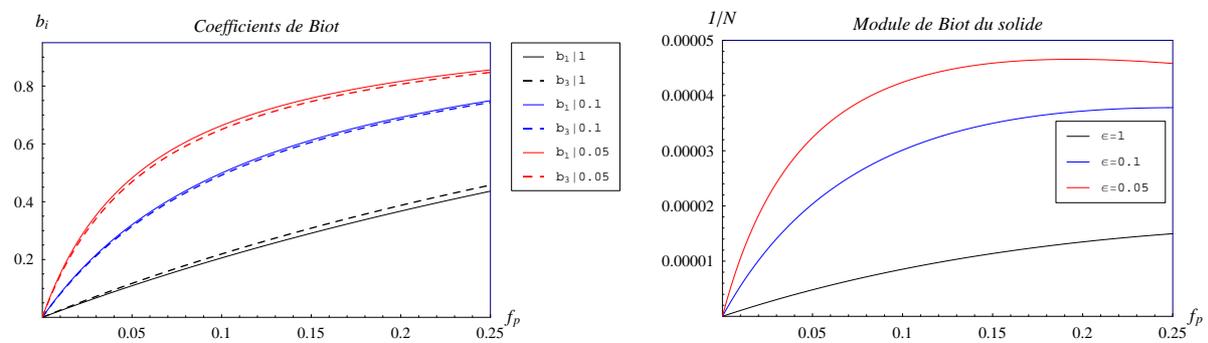


FIGURE III.8: Cas 2 : Pores à répartition aléatoire avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

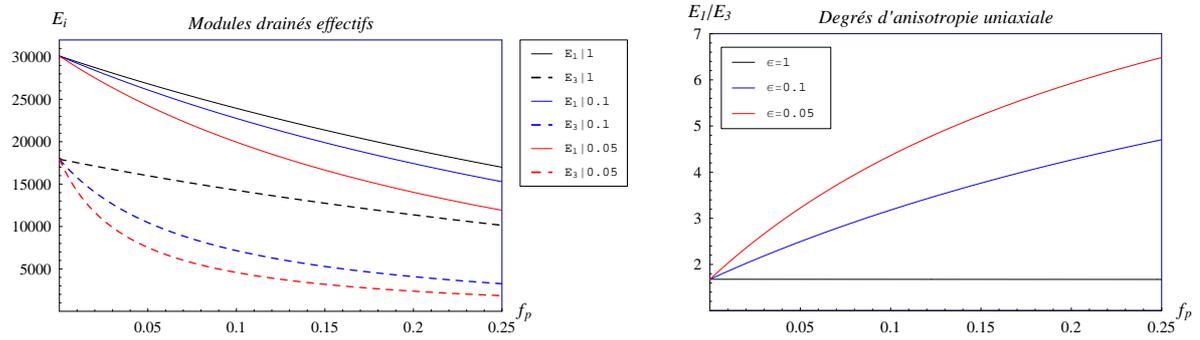


FIGURE III.9: Cas 3 : Pores à répartition en ODF ($\sigma = 10$) avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

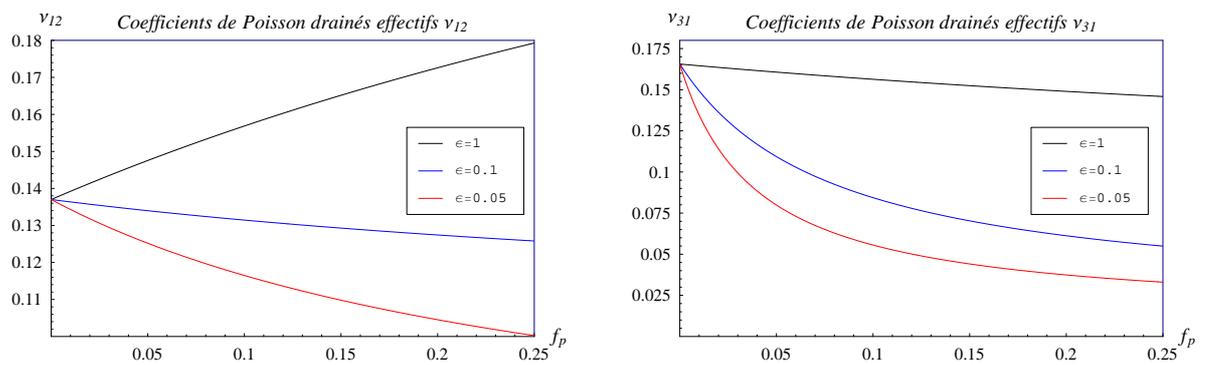


FIGURE III.10: Cas 3 : Pores à répartition en ODF ($\sigma = 10$) avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

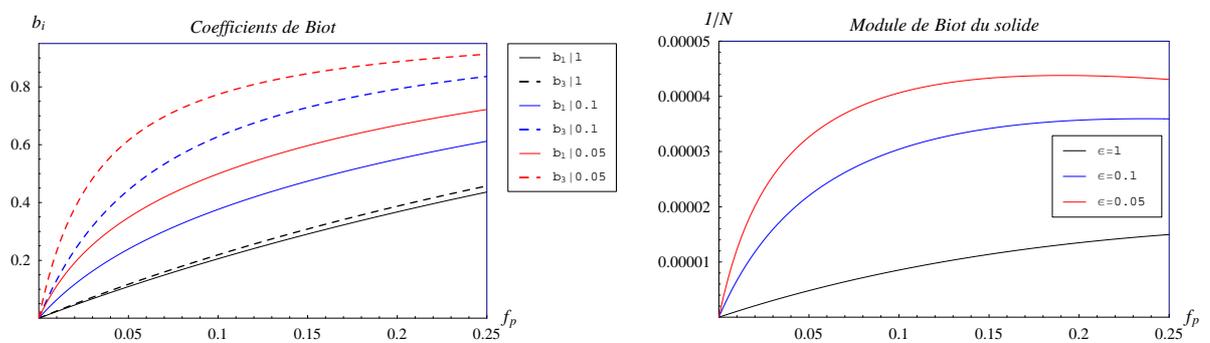


FIGURE III.11: Cas 3 : Pores à répartition en ODF ($\sigma = 10$) avec $\epsilon_p=1-0.1-0.05$

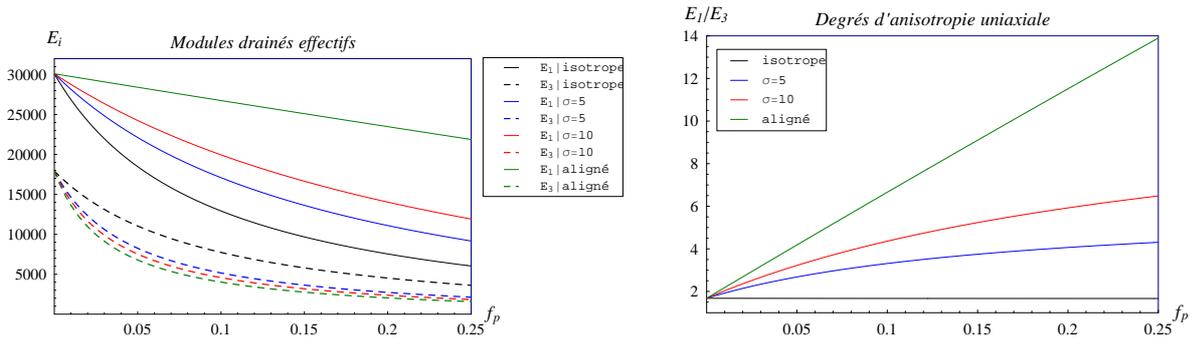


FIGURE III.12: Cas 4 : Pores ellipsoïdaux aplatis ($\epsilon_p=1-0.1-0.05$) distribués de manière isotrope, alignée ou en ODF ($\sigma = 5$ et $\sigma = 10$)

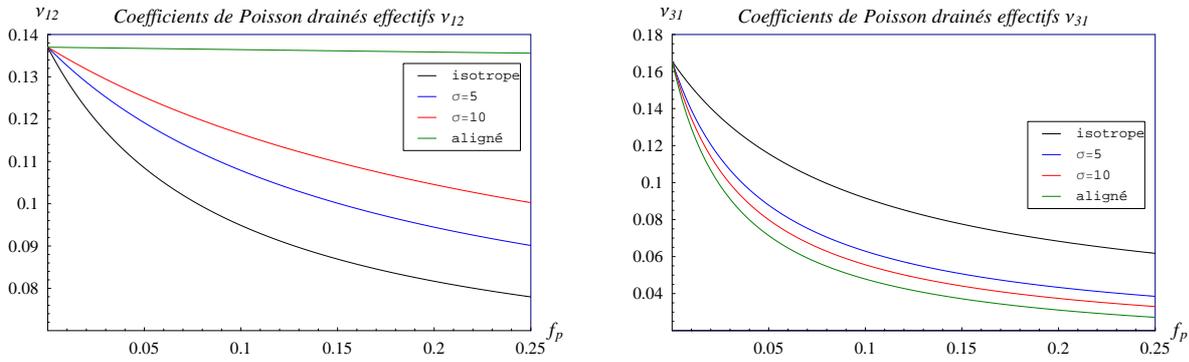


FIGURE III.13: Cas 4 : Pores ellipsoïdaux aplatis ($\epsilon_p=1-0.1-0.05$) distribués de manière isotrope, alignée ou en ODF ($\sigma = 5$ et $\sigma = 10$)

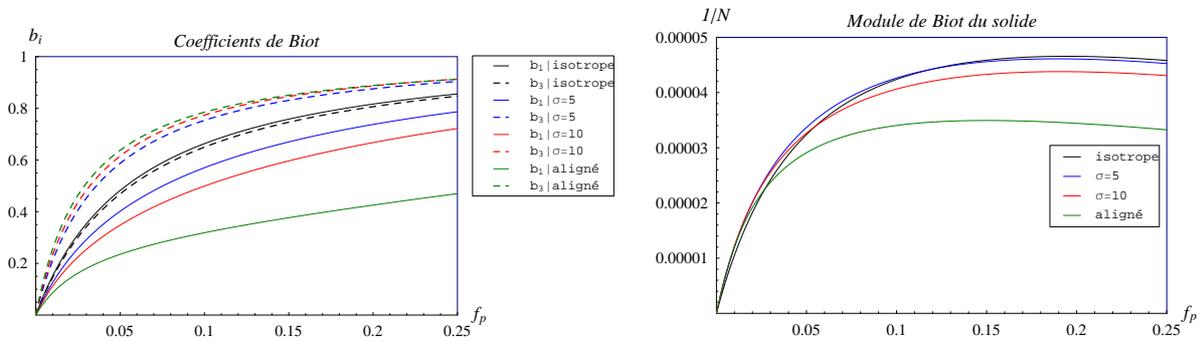


FIGURE III.14: Cas 4 : Pores ellipsoïdaux aplatis ($\epsilon_p=1-0.1-0.05$) distribués de manière isotrope, alignée ou en ODF ($\sigma = 5$ et $\sigma = 10$)

Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont été consacrés à l'estimation des propriétés poromécaniques effectives de matériaux de type roches composites. Différentes sources d'anisotropie et leurs effets sur le comportement macroscopique du matériau hétérogène ont été identifiées et analysées. Les influences respectives de la forme et de la distribution en orientation des pores, de la matrice (anisotrope ou isotrope transverse), des inclusions minérales solides, sur les propriétés effectives ont été évaluées.

Un schéma à deux étapes d'homogénéisation a été développé pour les roches sédimentaires. Deux schémas d'estimation ont été utilisés dans la thèse : le schéma de Mori-Tanaka qui permet de tenir compte de l'interaction entre les inclusions et le schéma de PCW qui ajoute l'effet de la distribution spatiale des inclusions dans la matrice solide.

Il faut souligner que, dans ce mémoire, on a développé une nouvelle approche afin de déterminer la solution du tenseur de Hill pour les inclusions ellipsoïdales orientées arbitrairement dans un milieu isotrope transverse. Cette solution numérique peut être appliquée dans plusieurs problèmes, par exemple, dans le cas où la matrice initiale est isotrope transverse, ou dans le cas d'homogénéisation multi-étapes.

Dans le premier chapitre, on a fait une synthèse des travaux existants sur l'approche d'homogénéisation pour un matériau à microstructure aléatoire. On rappelle aussi des outils nécessaires pour modéliser le système de pores. Les différents exemples ont été présentés afin d'illustrer l'influence du schéma d'estimation sur les propriétés macroscopiques du géomatériau. Les deux schémas de Mori-Tanaka et de PCW sont plus efficaces pour les roches sédimentaires. Et puis, une analyse de sensibilité a été effectuée sur la forme des pores et leur répartition. On trouve qu'une diminution du rapport d'aspect ϵ_p se traduit logiquement par une croissance du degré d'anisotropie du matériau homogénéisé, dans le cas où les pores sont alignés. Il faut souligner que la distribution isotrope de pores est obtenue par une valeur nulle de σ et σ tend vers l'infini présentant une distribution alignée de pores. Une augmentation de σ conduit à une croissance de degré d'anisotropie du matériau homogénéisé.

La solution du problème de l'inclusion sphérique immergée dans une matrice solide isotrope trans-

verse est présentée dans le second chapitre. Cette solution a été appliquée à l'estimation des coefficients poroélastiques effectifs des matériaux hétérogènes de type *roches-composites* caractérisée par une matrice isotrope transverse contenant des inclusions minérales solides de forme *approximativement* sphérique. Comparé à la solution générale précédente de Withers [81], le cas particulier comprenant le matériau isotrope a été inclus dans ce travail. La solution serait utile pour les autres matériaux, poreux ou pas, comme composites ou polymères, caractérisés par les inclusions sphériques (ou presque sphériques) incluses dans la matrice isotrope transverse. En effet, la forme sphérique est plus adaptée pour représenter des inclusions de phase solide minérale (comme le quartz et la calcite) que les pores qui, dans la plupart des cas, sont plus correctement représentés avec les ellipsoïdes aplatis. Le comportement isotrope transverse effectif observé à l'échelle macroscopique est dû à la morphologie de pore (forme des pores, distribution d'orientation et distribution spatiale des pores) et aussi de l'anisotropie de la matrice solide. L'hypothèse d'anisotropie de la matrice est essentielle pour la méthode d'homogénéisation multi-étape.

Le troisième chapitre a été consacré au développement d'une approche alternative pour l'étude du milieu poreux isotrope transverse. La solution numérique donnée par le problème de l'inclusion ellipsoïdale orientée de manière arbitraire dans une matrice solide isotrope transverse est appliquée à estimer les coefficients poroélastiques effectifs des matériaux hétérogènes de type *roches-composites*. Cette solution permet de séparer les effets respectifs de la matrice et du système des pores sur l'anisotropie effective du matériau. La matrice elle-même est isotrope transverse et la distribution des inclusions est orientée (isotrope transverse) selon l'ODF. L'anisotropie de la matrice peut être essentielle pour le schéma d'homogénéisation de multi-étapes dans un contexte général des matériaux hétérogènes anisotropes. Dans le cas général, les différents types de pores avec les différentes tailles, formes et distribution d'orientation devront être tenus compte dans une méthode d'homogénéisation de multi-étapes. Le cas particulier de la matrice isotrope transverse étudié dans ce chapitre lui-même a plusieurs applications aux géo-matériaux et aux roches sédimentaire [78]. En outre, les calculs du tenseur de Hill \mathbb{P} et du tenseur $\langle \mathbb{T}^\phi \rangle$ dans le repère *intermédiaire* permettent de démontrer que le tenseur d'élasticité homogénéisé d'un matériau comportant des inclusions ellipsoïdales à distribution d'orientation de manière isotrope, alignée ou préférentielle en ODF, immergées dans un milieu isotrope transverse prend la forme d'un tenseur isotrope transverse.

Les perspectives d'extension des travaux présentés dans cette thèse portent sur :

- L'estimation d'autres propriétés THM couplées : conductivité thermiques (les travaux sont en cours), tenseur des dilatations thermiques, interprétation de mesures de vitesses acoustiques ...
- L'amélioration du modèle morphologique de représentation des roches poreuses : l'espace

poreux n'est par exemple pas constitué d'une seule classe de pores mais de *micro* et *macro* pores...

- L'extension au comportement irréversible (plastique et viscoplastique)

Bibliographie

- [1] J.L. Auriault. *Mécanique des milieux hétérogènes*. Université Joseph Fourier, 6ème édition, Grenoble, 1995.
- [2] C. Barret and S. Baste. Induced damage by ellipsoidal cracks in an anisotropic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 36(24) :3709–3729, 1999.
- [3] J-F. Barthelemy. *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. PhD thesis, ENPC, Paris, Avril 2005.
- [4] J. G. Berryman. Generalization of Eshelby’s formula for a single ellipsoidal elastic inclusion to poroelasticity and thermoelasticity. *Phys. Rev. Letters*, 79(6) :1142–1145, 1997.
- [5] J. G. Berryman. Effective medium theories for multicomponent poroelastic composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(5) :519–531, 2006.
- [6] M. Bornert. Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations. In *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, pages 133–222. Hermes, Paris, 2001.
- [7] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*. Hermes, Paris, 2001.
- [8] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux Tome 2*. Hermes, Paris, 2001.
- [9] M. Boutéca, J.P. Sarda, O. Vincké, P. Longuemare, and E. Bemmerl. Réflexion sur l’origine et l’évolution du coefficient de Biot des argilites au cours d’un chargement oedométrique. In *Acte des Journées Scientifiques de l’ANDRA, Nancy*. EDP Sciences.
- [10] X. Chateau and L. Dormieux. Micromechanics of saturated and unsaturated porous media. *Int. J. Numer. Meth. Geomech.*, 26(7) :831–844, 2002.
- [11] C. Coll. *Endommagement des roches argileuses et perméabilité induite au voisinage d’ouvrages souterrains*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
- [12] O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley and Sons, England, 2004.

- [13] O. Coussy, L. Dormieux, and E. Detournay. From mixture theory to Biot's approach for porous media. *Int. Journ. of Solids and Structures*, 35 :4619–4635, 1998.
- [14] L. Dormieux. Linear poroelasticity. in : Applied Micromechanics of Porous Media, CISM, ed : L. Dormieux et F.J. Ulm, 2005.
- [15] L. Dormieux and E. Bourgeois. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.
- [16] L. Dormieux, D. Kondo, and F.J. Ulm. *Microporomechanics*. John Wiley and Sons, first edition, 2006.
- [17] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(10) :2203–2231, 2002.
- [18] L. Dormieux and F.-J. Ulm. *Applied Micromechanics of Porous Materials*. Springer, 2005.
- [19] M.L. Dunn and H. A Wienecke. Inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic piezoelectric solids. *International Journal of Solids and Structures*, 34(27) :3571–3582, 1997.
- [20] S. Escoffier. *Caractérisation expérimentale du comportement hydromécanique des argilites de Meuse/Haute-Marne*. PhD thesis, INPL, Nancy, 2002.
- [21] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society Series A*, 241(A) :376–396, 1957.
- [22] J.D. Eshelby. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society Series A*, 252(A) :561–569, 1959.
- [23] J.D. Eshelby. Elastic inclusions and inhomogeneities. In *Progress in Solid Mechanics 2, I.N. Sneddon and R. Hill Editors*, pages 89–140. North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [24] Y. Benveniste et all. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *J. Mech. Phy. Solids*, 7 :927–946, 1991.
- [25] G. Faivre. Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope. *Journal de physique*, (32), 1971.
- [26] P. Franciosi and G. Lormand. Using the Radon transform to solve inclusion problems in elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 41(3-4) :585–606, 2004.
- [27] A. C. Gavazzi and D. C. Lagoudas. On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. *Comp. Mech.*, 7 :13–19, 1990.
- [28] F. Gharemani. Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusions in an anisotropic elastic material. *Mech. Res. Commun.*, 4(2) :89–91, 1977.

-
- [29] P. Gilormini. Application. In *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, pages 223–251. Hermes, Paris, 2001.
- [30] R. Giot. *Interprétation des mesures de contraintes par relaxation dans les formations argileuses profondes*. PhD thesis, INPL, Nancy, Décembre 2004.
- [31] A. Giraud, C. Gruescu, D. P. Do, F. Homand, and D. Kondo. Effective thermal conductivity of transversely isotropic media with arbitrary oriented ellipsoidal inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*, 2006.
- [32] A. Giraud, Q.V. Huynh, D. Hoxha, and F. Homand. Tenseur de Biot dans les argilites de l’Est : résultats expérimentaux et analyse micromécanique. In *Microstructure et propriétés des matériaux*, pages 209–214. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [33] A. Giraud, Q.V. Huynh, D. Hoxha, and D. Kondo. Application of recent results on Eshelby tensor to the determination of effective poroelastic properties of anisotropic rocks-like composites. *International Journal of Solids and Structures*, à paraître, 2006.
- [34] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [35] A. V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech*, 21 :226–240, 1954.
- [36] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J.Mech. Phys.Solids*, 13 :213–222, 1965.
- [37] F. Homand, J-F. Shao, A. Giraud, C. Auvray, and D. Hoxha. Pétrofabrication et propriétés mécaniques des argilites. *Comptes Rendus Geosciences*, Article in Press, 2006.
- [38] Brian E. Hornby, Larry M. Schwartz, and John A. Hudson. Anisotropic effective-medium modeling of the elastic properties of shales. *Geophysics*, 59(10) :1570–1583, 1994.
- [39] G .K . Hu and G. J. Weng. The connections between the double-inclusion model and the Ponte Castaneda-Willis, Mori-Tanaka, and Kuster-Toksoz models. *Mechanics of Materials*, 32(8) :495–503, 2000.
- [40] G .K . Hu and G. J. Weng. Some reflections on the Mori-Tanaka and Ponte Castaneda-Willis methods with randomly oriented ellipsoidal inclusions. *Acta Mechanica*, 140 :31–40, 2000.
- [41] J.H. Huang and W.S. Kuo. Micromechanics determination of the effective properties of piezoelectric composites containing spatially oriented short fibers. *Acta Materialia*, 44(12) :4889–4898, 1996.
- [42] M. Jakobsen and T. A. Johansen. The effects of drained and undrained loading on visco-elastic waves in rock-like composites. *Int. J. Sol. Struct.*, 42 :1597–1611, 2005.

- [43] B. Johannesson and O.B. Pedersen. Analytical determination of the average eshelby tensor for transversely isotropic fiber orientation distributions. *Acta Materialia*, 46(9) :3165–3173, 1998.
- [44] T. A. Johansen, M. Jakobsen, and B. O. Ruud. Estimation of internal structure and anisotropy of shales from borehole data. Technical report, SRC Report No. 01-003, Institute of Solid Earth Physics, Univ. of Bergen, 2003.
- [45] T. A. Johansen, B. O. Ruud, and M. Jakobsen. Sensitivity of shale alignment properties on amplitude versus offset (AVO) for PP and PS waves. Technical report, SRC Report No. 00-005, Inst. Sol. Earth Phys., Univ. Bergen, 2001.
- [46] T.A. Johansen, B.O. Ruud, and M. Jakobsen. Effect of grain scale alignment on seismic anisotropy and reflectivity of shales. *Geophysical Prospecting*, 52(2) :133–149, 2004.
- [47] K. Kanatani. Distribution of directional data and fabric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 23 :149–164, 1984.
- [48] K. Kanatani. Stereological determination of structural anisotropy. *International Journal of Engineering Science*, 22 :531–546, 1984.
- [49] E. Kazatchenko, M. G. Markov, and A. Mousatov. Simulation of acoustic velocities, electrical and thermal conductivities using unified pore-structure model of double-porosity carbonate rocks. *Journal of Applied Geophysics*, 59(1) :16–35, 2006.
- [50] A. Kelly and N.H. Macmillan. *Strong Solids*. Oxford University Press, England, 1986.
- [51] V.S. Kirilyuk and O.I. Levchuk. Stress state of a transversely isotropic medium with an arbitrarily oriented spheroidal inclusion. *International Applied Mechanics*, 41(2) :137 – 143, 2005.
- [52] N. Laws. A note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials. *Mechanics of Materials*, 4 :209–212, 1985.
- [53] V. M. Levin, M. G. Markov, and S. Kanaun. Effective field method for seismic properties of cracked rocks. *Journal of Geophysical Research*, doi :10.1029/2003JB002795 :1–13, 2004.
- [54] V.M. Levin and M.G. Markov. Elastic properties of inhomogeneous transversely isotropic rocks. *Int. Journ. of Solids and Structures*, 42 :393–408, 2005.
- [55] S. Li. *Introduction to micromechanics and nanomechanics. Lecture Notes (CE236/C214)*. University of California, Berkeley, University of California, Berkeley, CA94720, USA, 2005.
- [56] M.P. Lutz and R.W. Zimmerman. Effect of an inhomogeneous interphase zone on the bulk modulus and conductivity of a particulate composite. *International Journal of Solids and Structures*, 42(2) :429–437, 2005.

-
- [57] M.G. Markov, V.M. Levin, S. Kanaun, A. Mousatov, and E. Kazatchenko. Elastic properties of double-porosity rocks using the differential effective medium model. *Geophysical Prospecting*, 53 :733–754, 2005.
- [58] Y. Mikata. Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids. *International Journal of Engineering Science*, 38(6) :605–641, 2000.
- [59] Y. Mikata. Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40-41) :7045–7063, 2001.
- [60] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21 :571–574, 1973.
- [61] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, second edition, 1987.
- [62] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogenous materials*. North Holland - Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [63] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1993.
- [64] Y.C. Pan and T.W. Chou. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *J. Appl. Mech*, 43 :608–612, 1976.
- [65] Q-T. Pham. *Effet de la désaturation et de la resaturation sur l'argilite dans les ouvrages souterrains*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Paris, 2006.
- [66] P. Ponte Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12) :1919–1951, 1995.
- [67] A. Pouya. Une transformation du problème d'élasticité linéaire en vue d'application au problème de l'inclusion et aux fonctions de Green. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 328(6) :437–443, 2000.
- [68] A. Pouya and A. Zaoui. A transformation of elastic boundary value problems with application to anisotropic behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 43(16) :4937–4956, 2006.
- [69] F. Roddier. *Distributions et transformation de Fourier*. Mac Graw-Hill, Paris, 1985.
- [70] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, Tome 2. Thermoélasticité*. Ecole Polytechnique, Paris, 2002.
- [71] C. M. Sayers. The elastic anisotropy of shales. *J. Geophys. Res.*, 99 :767–774, 1994.

- [72] N. Schmitt. Homogénéisation des matériaux hétérogènes. Revue de quelques méthodes pour les milieux élastiques à phases parfaitement dispersées. Technical report, Rapport interne 130. Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, 1992.
- [73] I. Sevostianov, N. Yilmaz, V. Kushch, and V. Levin. Effective elastic properties of matrix composites with transversely-isotropic phases. *International Journal of Solids and Structures*, 42(2) :455–476, 2005.
- [74] A. P. Suvorov and G. J. Dvorak. Rate form of the Eshelby and Hill tensors. *Int. Journ. of Solids and Structures*, 39 :5659–5678, 2002.
- [75] K. Von Terzaghi. *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons Inc, Chichester, 1942.
- [76] M. Thury. The characteristics of the Opalinus clay investigated in the Mont-Terri underground rock laboratory in Switzerland. *Comptes Rendus Physique*, 3(7-8) :923–933, 2002.
- [77] S. Torquato. *Random Heterogenous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, 2002.
- [78] F.J. Ulm, A. Delafargue, and G. Constantinides. Experimental Microporomechanics. In *Applied Micromechanics of Porous Materials. Dormieux L. and Ulm J.F Editors*. Springer, 2005.
- [79] L.J. Walpole. Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes : multiplication tables. *Proc. R. Soc. Lond, A* 391 :149–179, 1984.
- [80] Y. Wileveau, G. Armand, K. Su, and J. Delay. Premiers enseignements de l’expérimentation HE-D au Mont Terri. RS Rapport Andra D.RP.ADPE.05.0199.A, ADPE, 2005.
- [81] P.J. Withers. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversely isotropic medium, and its relevance to composite materials. *Philosophical Magazine A*, 59(4) :759–781, 1989.
- [82] S. Xu. Modelling the effect of fluid communication on velocities in anisotropic porous rocks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(34-35) :4685–4707, 1998.
- [83] Y. Xu. *Approche multi-échelle pour l’étude du comportement des systèmes polyphasiques- Application aux milieux poreux non saturés*. PhD thesis, ENPC, Paris, Avril 2004.
- [84] A. Zaoui. Structural morphology and constitutive behaviour of microheterogeneous materials. In P. Suquet, editor, *Continuum Micromechanics*, pages 291–347. Springer, 1997.
- [85] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1998.
- [86] Q.S. Zheng and D.X. Du. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :2765–2788, 2001.

-
- [87] Q. Zhu. *Applications des approches d'homogénéisation à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement des matériaux quasi fragiles : formulations, validations et implémentations numériques*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, Avril 2006.

Annexe A

Composantes des tenseurs d'Eshelby dans un milieu isotrope

A.1 Inclusion sphérique dans un milieu isotrope

Une inclusion sphérique est immergée dans un milieu isotrope infini dont le tenseur d'élasticité peut s'écrire [79], [8]

$$\mathbb{C}_1 = 3k_1 \mathbb{J} + 2\mu_1 \mathbb{K} \quad (\text{A.1})$$

avec $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ sont respectivement la partie sphérique et la partie déviatoire du tenseur unitaire d'ordre quatre \mathbb{I} .

Le tenseur d'élasticité est défini par son module de compression k_1 et son module de cisaillement μ_1 ou, de manière équivalente, par son module d'Young E_1 et son coefficient de Poisson ν_1 :

$$\begin{cases} 3k_1 = \frac{E_1}{1-2\nu_1} \\ 2\mu_1 = \frac{E_1}{1+\nu_1} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_1 = 9 \frac{k_1 \mu_1}{3k_1 + \mu_1} \\ \nu_1 = \frac{3k_1 - 2\mu_1}{2(3k_1 + \mu_1)} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Le tenseur d'Eshelby est isotrope et se décompose donc sur \mathbb{J} et \mathbb{K} [18], [85],[3] :

$$\mathbb{S}^E = \frac{3k_1}{3k_1 + 4\mu_1} \mathbb{J} + \frac{6}{5} \frac{k_1 + 2\mu_1}{3k_1 + 4\mu_1} \mathbb{K} = \frac{1 + \nu_1}{3(1 - \nu_1)} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_1}{1 - \nu_1} \mathbb{K} \quad (\text{A.4})$$

Les composantes du tenseur d'Eshelby sont écrit en détail dans ce cas par Mura [61] :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} &= \frac{7 - 5\nu_1}{15(1 - \nu_1)} \\
 S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} &= \frac{5\nu_1 - 1}{15(1 - \nu_1)} \\
 S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} &= \frac{4 - 5\nu_1}{15(1 - \nu_1)}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

D'après (I.74), le tenseur de Hill s'écrit donc :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3k_1 + 4\mu_1} \mathbb{J} + \frac{3}{5\mu_1} \frac{k_1 + 2\mu_1}{3k_1 + 4\mu_1} \mathbb{K} = \frac{1 + \nu_1}{3E_1(1 - \nu_1)} \left[(1 - 2\nu_1) \mathbb{J} + \frac{2}{5}(4 - 5\nu_1) \mathbb{K} \right] \tag{A.6}$$

A.2 Inclusion "penny shape" dans un milieu isotrope [61]

L'inclusion est de forme "penny shape"³, symétrique autour d'un axe que l'on prendra par convention dirigé suivant le vecteur \underline{e}_3 . Ainsi les axes selon \underline{e}_1 et \underline{e}_2 sont de longueur identique i.e. $a = b$. Le rapport entre la longueur du troisième axe et celle-ci, appelé rapport d'aspect et noté ϵ , définit la forme de l'ellipsoïde :

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \ll 1 \tag{A.7}$$

Les composantes du tenseur d'Eshelby sont donnés dans ce cas par Mura [61] :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} = S_{2222} &= \pi\epsilon \frac{13 - 8\nu_1}{32(1 - \nu_1)} \quad , \quad S_{3333} = 1 - \frac{\pi\epsilon(1 - 2\nu_1)}{4(1 - \nu_1)} \\
 S_{1122} = S_{2211} &= \pi\epsilon \frac{8\nu_1 - 1}{32(1 - \nu_1)} \quad , \quad S_{1133} = S_{2233} = \pi\epsilon \frac{2\nu_1 - 1}{8(1 - \nu_1)} \\
 S_{3311} = S_{3322} &= \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \left[1 - \pi\epsilon \frac{4\nu_1 + 1}{8\nu_1} \right] \\
 S_{1212} = \pi\epsilon \frac{7 - 8\nu_1}{32(1 - \nu_1)} \quad , \quad S_{1313} = S_{2323} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\pi\epsilon(\nu_1 - 2)}{4(1 - \nu_1)} \right]
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

A.3 Inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope

Dans cette section, le milieu infini est toujours isotrope mais l'inclusion est maintenant de forme ellipsoïdale de révolution autour de l'axe \underline{x}_3 . Le rapport d'aspect ϵ , définit la forme de l'ellipsoïde :

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \tag{A.9}$$

Outre le cas déjà traité de la sphère $\epsilon = 1$ et de la monnaie (penny shape) $\epsilon \rightarrow 0$, on calcule maintenant le type d'ellipsoïde aplati⁴ tel que $\epsilon < 1$ ($a = b > c$).

³"penny shape" en anglais

⁴"oblate spheroid" en anglais

La forme ellipsoïdale de l'inclusion mène naturellement à un tenseur \mathbb{P} isotrope transverse dont les composantes dépendent 5 paramètres indépendants [3] tandis que le tenseur d'Eshelby, qui ne présente pas la symétrie majeure, sera, lui, déterminé à partir de 6 coefficients. On introduit les notations suivantes :

$$Q = \frac{3}{8 \pi (1 - \nu_1)} \quad , \quad R = \frac{(1 - 2 \nu_1)}{8 \pi (1 - \nu_1)} \quad (\text{A.10})$$

$$I_1 = \begin{cases} 2 \pi \epsilon \frac{\arccos \epsilon - \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} & \text{si } \epsilon < 1 \\ 2 \pi \epsilon \frac{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} - \cosh^{-1} \epsilon}{(\epsilon^2 - 1)^{3/2}} & \text{si } \epsilon > 1 \end{cases}$$

$$I_3 = 4 \pi - 2 I_1$$

$$I_{13} = \frac{I_1 - I_3}{3(\epsilon^2 - 1)} \quad (\text{A.11})$$

$$I_{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{I_{13}}{4}$$

$$I_{11} = 3 I_{12}$$

$$I_{33} = \frac{4 \pi}{3 \epsilon^2} - 2 I_{13}$$

Les six composantes du tenseur d'Eshelby à partir desquelles les autres composantes non nulles peuvent être déduites [16] sont présentées ci-dessous

$$S_{1111} = Q I_{11} + R I_1 \quad ,$$

$$S_{3333} = Q \epsilon^2 I_{33} + R I_3 \quad ,$$

$$S_{1122} = Q I_{12} - R I_1 \quad ,$$

$$S_{1133} = Q \epsilon^2 I_{13} - R I_1 \quad , \quad (\text{A.12})$$

$$S_{3311} = Q I_{13} - R I_3 \quad ,$$

$$S_{2323} = \frac{Q}{2} (1 + \epsilon^2) I_{13} + \frac{R}{2} (I_1 + I_3) \quad ,$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2} (S_{1111} - S_{1122})$$

En détail, on a :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= \frac{\epsilon \left\{ [8\nu_1 - 13 + 4\epsilon^2(1 - 2\nu_1)] \arccos \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} [19 - 8\nu_1 + 2\epsilon^2(4\nu_1 - 5)] \right\}}{16(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \\
 S_{3333} &= \frac{\epsilon [1 - 2\nu_1 - 2\epsilon^2(2 - \nu_1)] \arccos \epsilon - \sqrt{1 - \epsilon^2} [2(1 - \nu_1) - \epsilon^2(5 - 2\nu_1)]}{2(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \\
 S_{1122} &= \frac{\epsilon \left\{ [1 - 8\nu_1 - 4\epsilon^2(1 - 2\nu_1)] \arccos \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} [1 + 8\nu_1 + 2\epsilon^2(1 - 4\nu_1)] \right\}}{16(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \\
 S_{1133} &= \frac{\epsilon \left\{ [1 - 2\nu_1 + 2\epsilon^2(1 + \nu_1)] \arccos \epsilon - \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} [3 - 2\nu_1(1 - \epsilon^2)] \right\}}{4(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \tag{A.13} \\
 S_{3311} &= \frac{\epsilon [1 + 4\nu_1 + 2\epsilon^2(1 - 2\nu_1)] \arccos \epsilon - \sqrt{1 - \epsilon^2} [3\epsilon^2 + 4\nu_1(1 - \epsilon^2)]}{4(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \\
 S_{1212} &= \frac{\epsilon \left\{ [8\nu_1 - 7 + 4\epsilon^2(1 - 2\nu_1)] \arccos \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} [9 - 8\nu_1 - 2\epsilon^2(3 - 4\nu_1)] \right\}}{16(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}, \\
 S_{2323} &= \frac{\epsilon [2 - \nu_1 + \epsilon^2(1 + \nu_1)] \arccos \epsilon + \sqrt{1 - \epsilon^2} [(2 + \epsilon^4)(\nu_1 - 1) - 3\nu_1 \epsilon^2]}{4(\nu_1 - 1)(1 - \epsilon^2)^{5/2}}
 \end{aligned}$$

Les autres composantes non nulles sont obtenues à partir de (A.13) par permutation entre l'axe 1 et l'axe 2 (la propriété de l'isotrope transverse, par exemple $S_{2222} = S_{1111}$ ou encore $S_{3131} = S_{1313} = S_{1331} = S_{2323}$ etc...) et par une permutation entre les deux premiers indices et/ou les deux derniers (la propriété de symétrie mineure $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$). Toutes les composantes dont les indices ne peuvent se ramener, par ce procédé, à ceux de l'une des expressions (A.13) sont nulles. Les composantes du tenseur d'Eshelby dans ce cas sont plus précises que ceux de J.F. Barthélémy [3]. On peut également trouver dans la littérature les expressions exactes ou approchées du tenseur d'Eshelby dans certains cas d'anisotropie de la matrice et pour certaines formes et orientations de l'inclusion [2, 52, 74, 81, 41, 73, 51, 58, 59].

Annexe B

Constantes élastiques de la matrice isotrope transverse

Les notations du tenseur élastique isotrope transverse \mathbb{C} avec l'axe de révolution Ox_3 :

$$\begin{aligned}
 C_{1111} = C_{2222} = C_{11} \quad , \quad C_{3333} = C_{33} \quad , \quad C_{1212} = C_{66} \quad , \\
 C_{1122} = C_{2211} = C_{12} \quad , \quad C_{1133} = C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} = C_{13} \quad , \\
 C_{1313} = C_{2323} = C_{1331} = C_{2332} = C_{3113} = C_{3223} = C_{3131} = C_{3232} = C_{44}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Le tenseur de souplesse \mathbb{S} et le tenseur élastique \mathbb{C} d'un solide élastique isotrope transverse avec l'axe de révolution Ox_3 peuvent être écrits :

$$\begin{aligned}
 S_{1111} = S_{2222} = \frac{1}{E_1} \quad , \quad S_{3333} = \frac{1}{E_3} \quad , \quad S_{1122} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad , \\
 S_{1133} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad , \quad S_{1212} = \frac{1 + \nu_{12}}{2 E_1} \quad , \quad S_{2323} = S_{3131} = \frac{1}{4 G_{13}} \quad , \\
 C_{11} = -\frac{1 - \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3}}{(1 + \nu_{12}) \left(\frac{2\nu_{31}^2}{E_3} - \frac{1 - \nu_{12}}{E_1} \right)} \quad , \quad C_{33} = \frac{E_3 \left(\frac{1 - \nu_{12}}{E_1} \right)}{\frac{2\nu_{31}^2}{E_3} - \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}} \quad , \\
 C_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3}}{(1 + \nu_{12}) \left(\frac{2\nu_{31}^2}{E_3} - \frac{1 - \nu_{12}}{E_1} \right)} \quad , \quad C_{13} = -\frac{\nu_{31}}{\frac{2\nu_{31}^2}{E_3} - \frac{1 - \nu_{12}}{E_1}} \quad , \\
 C_{44} = G_{13} \quad , \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Annexe C

Fonction de Green du matériau isotrope transverse [64]

C.1 Force appliquée parallèle au plan isotrope

Pour une force unitaire appliquée à l'origine dans la direction de l'axe 1, la fonction de Green appropriée est donnée sous la forme[64]

$$\begin{aligned}
 G_{11}(\underline{r}) &= \sum_{i=1}^2 \left(\nu_i(A'_i - B'_i) \left(\frac{1}{R_i} - \frac{x^2}{R_i^3} \right) + 2\nu_i B'_i \frac{(z_2^2 R_i^2 - \nu_i^2 z_1^2 z_3^2)}{\rho^4 R_i} \right) \\
 &\quad + D \frac{(z_1^2 R_3^2 - \nu_3^2 z_2^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3}, \\
 G_{21}(\underline{r}) &= - \sum_{i=1}^2 \left(\nu_i(A'_i - B'_i) \frac{z_1 z_2}{R_i^3} + 2\nu_i B'_i z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_i^2 z_3^2)}{\rho^4 R_i} \right) \\
 &\quad + D z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_3^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3}, \\
 G_{31}(\underline{r}) &= \sum_{i=1}^2 \left(-k_i \nu_i^3 (A'_i - B'_i) \frac{z_1 z_3}{R_i^3} + 2\nu_i \frac{(C_{11} A'_i - \nu_i^2 C_{44} B'_i) z_1 z_3}{(C_{13} + C_{44}) \rho^2 R_i} \right)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

C.2 Force normale appliquée au plan isotrope

Pour une force unitaire appliquée à l'origine, la fonction de Green appropriée est donnée sous la forme [64]

$$\begin{aligned}
 G_{13}(\underline{r}) &= - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\nu_i^2 A_i z_1 z_3}{\rho^2 R_i} + \nu_i^2 (A_i + B_i) \frac{z_1 z_3}{R_i^3} \right) \\
 G_{23}(\underline{r}) &= - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\nu_i^2 A_i z_2 z_3}{\rho^2 R_i} + \nu_i^2 (A_i + B_i) \frac{z_2 z_3}{R_i^3} \right) \\
 G_{33}(\underline{r}) &= - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{C_{11} B_i + \nu_i^2 C_{44} A_i}{(C_{13} + C_{44}) R_i} + \frac{\nu_i^2 (A_i + B_i) (\rho^2 C_{44} + z_3^2 C_{11})}{(C_{13} + C_{44}) R_i^3} \right)
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

où les constantes peuvent être exprimées en fonction de constantes élastiques du milieu (C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44}) :

$$\begin{aligned}
 C_{13}^* &= (C_{11}C_{33})^{1/2}, \quad k_i = \frac{C_{11}/\nu_i^2 - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}, \quad D = \frac{1}{4\pi C_{44}\nu_3}, \\
 \nu_1 &= \left[\frac{(C_{13}^* - C_{13})(C_{13}^* + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} \\
 &\quad + \left[\frac{(C_{13}^* + C_{13})(C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2}, \\
 \nu_2 &= \left[\frac{(C_{13}^* - C_{13})(C_{13}^* + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2} \\
 &\quad - \left[\frac{(C_{13}^* + C_{13})(C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}} \right]^{1/2}, \\
 \nu_3 &= \left(\frac{C_{66}}{C_{44}} \right)^{1/2}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}, \quad \rho^2 = z_1^2 + z_2^2, \\
 R_i^2 &= \rho^2 + \nu_i^2 z_3^2
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Si $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 A_i &= -B_i, \quad A'_i = B'_i, \quad A_i = -2\nu_i k_i A'_i, \\
 \nu_1 A_1 &= -\nu_2 A_2 = \frac{C_{13} + C_{44}}{4\pi(\nu_2^2 - \nu_1^2)C_{33}C_{44}}, \\
 A'_1 &= -\frac{C_{44} - \nu_1^2 C_{33}}{8\pi(\nu_2^2 - \nu_1^2)\nu_1^2 C_{33}C_{44}}, \quad A'_2 = -\frac{C_{44} - \nu_2^2 C_{33}}{8\pi(\nu_2^2 - \nu_1^2)\nu_2^2 C_{33}C_{44}},
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
 G_{11}(r) &= D \frac{(z_1^2 R_3^2 - \nu_3^2 z_2^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3} + 2 \sum_{i=1}^2 \nu_i A'_i \frac{(z_2^2 R_i - \nu_i^2 z_1^2 z_3^2)}{\rho^4 R_i}, \\
 G_{21}(r) &= D z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_3^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3} - 2 \sum_{i=1}^2 \nu_i A'_i z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_i^2 z_3^2)}{\rho^4 R_i}, \\
 G_{31}(r) &= 2 \sum_{i=1}^2 k_i \nu_i^3 A'_i \frac{z_1 z_3}{\rho^2 R_i} \\
 G_{13}(r) &= -\sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i^2 A_i z_1 z_3}{\rho^2 R_i}, \quad G_{23}(r) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i^2 A_i z_2 z_3}{\rho^2 R_i} \\
 G_{33}(r) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i^2 k_i A_i}{R_i}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Si $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$ Ce cas n'a pas été pris en compte dans [81].
 $\nu_1 = \nu_2 = (C_{11}/C_{33})^{1/4}$, $k_1 = k_2 = 1$, $R_1 = R_2$,

$$B_1 = B_2 = -\nu_1 \frac{C_{13} + C_{44}}{16\pi C_{11} C_{44}}, \quad (C.6)$$

$$A'_1 = A'_2 = \frac{1}{16\pi C_{11}} = -B_1 \frac{C_{44}}{\nu_1 (C_{13} + C_{44})},$$

$$B'_1 = B'_2 = \frac{1}{16\pi C_{44} \nu_1^2} = -B_1 \frac{C_{11}}{\nu_1^3 (C_{13} + C_{44})},$$

$$G_{11}(\underline{r}) = 2B_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{z_1^2}{R_1^3} \right) + 4\nu_1 B'_1 \frac{(z_2^2 R_1^2 - \nu_1^2 z_1^2 z_3^2)}{\rho^4 R_1} + D \frac{(z_1^2 R_3^2 - \nu_3^2 z_2^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3}$$

$$G_{21}(\underline{r}) = -2B_1 \frac{z_1 z_2}{R_1^3} - 4\nu_1 B'_1 z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_1^2 z_3^2)}{\rho^4 R_1} + D z_1 z_2 \frac{(\rho^2 + 2\nu_3^2 z_3^2)}{\rho^4 R_3}$$

$$G_{31}(\underline{r}) = -2B_1 \nu_1^2 \frac{z_1 z_2}{R_1^3} \quad (C.7)$$

$$G_{13}(\underline{r}) = -2\nu_1^2 B_1 \frac{z_1 z_3}{R_1^3}, \quad G_{23}(\underline{r}) = -2\nu_1^2 B_1 \frac{z_2 z_3}{R_1^3}$$

$$G_{33}(\underline{r}) = -2B_1 \left(\frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \right) \frac{1}{R_1} - 2\nu_1^2 B_1 \frac{\rho^2 C_{44} + z_3^2 C_{11}}{(C_{13} + C_{44}) R_1^3},$$

Annexe D

Expression du tenseur g

Si $C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}^2 &= \ell_1^2 + \ell_2^2, & \hat{R}_i^2 &= \hat{\rho}^2 + \nu_i^2 \ell_3^2, \\
 g_{111}(\underline{\ell}) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu_i A'_i \ell_1}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_i} \left(-\frac{8\nu_i^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_i^2} - 3\ell_2^2 + 2\nu_i^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad - \frac{D\ell_1}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\frac{8\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} - \ell_1^2 + 2\ell_2^2 - 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right), \\
 g_{112}(\underline{\ell}) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu_i A'_i \ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_i} \left(\frac{8\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_i^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_i^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad - \frac{D\ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(-\frac{8\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} - 3\ell_1^2 + 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right), \\
 g_{113}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu_i^3 A'_i \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_i} \left(2\ell_1^2 - \ell_2^2 - \frac{\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_i^2} \right) - \frac{D\nu_3^2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\ell_1^2 - 2\ell_2^2 + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} \right), \\
 g_{121}(\underline{\ell}) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu_i A'_i \ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_i} \left(\frac{8\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_i^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_i^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_i^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad + \frac{D\ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\frac{8\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right), \\
 g_{123}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu_i^3 A'_i \ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_i^3} (3\hat{\rho}^2 + 2\nu_i^2 \ell_3^2) - \frac{D\nu_3^2 \ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3^3} (3\hat{\rho}^2 + 2\nu_3^2 \ell_3^2), \\
 g_{131}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i^2 A_i \ell_3}{\hat{\rho}^2 \hat{R}_i} \left(1 - \frac{2\ell_1^2}{\hat{\rho}^2} - \frac{\ell_1^2}{\hat{R}_i^2} \right), & g_{312}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{2k_i \nu_i^3 A'_i \ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{\rho}^2 \hat{R}_i} \left(\frac{2}{\hat{\rho}^2} + \frac{1}{\hat{R}_i^2} \right), \\
 g_{313}(\underline{\ell}) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{2k_i \nu_i^3 A'_i \ell_1}{\hat{R}_i^3}, & g_{331}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{k_i \nu_i^2 A_i \ell_1}{\hat{R}_i^3}, & g_{333}(\underline{\ell}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{k_i \nu_i^4 A_i \ell_3}{\hat{R}_i^3},
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\text{Si } C_{13}^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$$

$$\begin{aligned}
 g_{111}(\underline{\ell}) &= -4 \frac{\nu_1 B_1' \ell_1}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_1} \left(-\frac{8\nu_1^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_1^2} - 3\ell_2^2 + 2\nu_1^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad - \frac{D\ell_1}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\frac{8\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} - \ell_1^2 + 2\ell_2^2 - 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right) + 6B_1 \left(\frac{\ell_1}{\hat{R}_1^3} - \frac{\ell_1^3}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{112}(\underline{\ell}) &= -\frac{4\nu_1 B_1' \ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_1} \left(\frac{8\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_1^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_1^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad - \frac{D\ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(-\frac{8\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} - 3\ell_1^2 + 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right) + 2B_1 \ell_2 \left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - 3\frac{\ell_1^2}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{113}(\underline{\ell}) &= 4 \frac{\nu_1^3 B_1' \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_1} \left(2\ell_1^2 - \ell_2^2 - \frac{\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_1^2} \right) - \frac{D\nu_3^2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\ell_1^2 - 2\ell_2^2 + \frac{\nu_3^2 \ell_2^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} \right) \\
 &\quad + 2\nu_1^2 B_1 \left(\frac{\ell_3}{\hat{R}_1^3} - 3\frac{\ell_1^2 \ell_3}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{121}(\underline{\ell}) &= -4 \frac{\nu_1 B_1' \ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_1} \left(\frac{8\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_1^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_1^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_1^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad + \frac{D\ell_2}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3} \left(\frac{8\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{\rho}^2} + \frac{\nu_3^2 \ell_1^2 \ell_3^2}{\hat{R}_3^2} + 2\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2\nu_3^2 \ell_3^2 \right) \\
 &\quad + 2B_1 \ell_2 \left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - 3\frac{\ell_1^2}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{123}(\underline{\ell}) &= \frac{4\nu_1^3 B_1' \ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_1^3} - \frac{D\nu_3^2 \ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{\rho}^4 \hat{R}_3^3} (3\hat{\rho}^2 + 2\nu_3^2 \ell_3^2) - 6B_1 \nu_1^2 \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{R}_1^5}, \\
 g_{131}(\underline{\ell}) &= 2\nu_1^2 B_1 \ell_3 \left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - 3\frac{\ell_1^2}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{312}(\underline{\ell}) &= -6B_1 \nu_1^2 \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3}{\hat{R}_1^5}, \\
 g_{313}(\underline{\ell}) &= 2\nu_1^2 B_1 \ell_1 \left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - 3\nu_1^2 \frac{\ell_3^2}{\hat{R}_1^5} \right), \\
 g_{331}(\underline{\ell}) &= -2\nu_1^2 B_1 \ell_1 \left[\left(1 + \frac{2C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \right) \frac{1}{\hat{R}_1^3} + 3\nu_1^2 \frac{\ell_3^2}{\hat{R}_1^5} \right], \\
 g_{333}(\underline{\ell}) &= -2\nu_1^2 B_1 \ell_3 \left[2 \left(\frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \right) \frac{1}{\hat{R}_1^3} - 3\nu_1^2 \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{R}_1^5} \right],
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Les autres composantes non nulles g_{ijk} sont déduites par la permutation des indices 1 et 2

Annexe E

Calcul intégral I

I_1 est donnée par la formule

$$I_1(i) = \int_{\Sigma} \frac{\ell_1^2}{\hat{R}_i^3} d\omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi}{\hat{R}_i^3}, \quad (\text{E.1})$$

avec

$$\underline{\ell} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \hat{R}_i = (\sin^2 \theta + \nu_i^2 \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad (\text{E.2})$$

Car $I_1(i)$ ne dépend pas de ϕ , on a :

$$\begin{aligned} I_1(i) &= \pi \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(\sin^2 \theta + \nu_i^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad \tan \theta = \nu_i \tan \beta \\ &= 2\pi \nu_i \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \beta d\beta}{\cos^2 \beta + \nu_i^2 \sin^2 \beta} \\ &= 2\pi \nu_i \int_0^1 \frac{(1-x^2) dx}{x^2(1-\nu_i^2) + \nu_i^2}, \quad x = \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Si $\nu_i^2 < 1$,

$$I_1(i) = \frac{2\pi G}{\nu_i} (\arccos \nu_i (1 + G^2) - G), \quad G = \frac{\nu_i}{\sqrt{1 - \nu_i^2}} \quad (\text{E.4})$$

Si $\nu_i^2 > 1$,

$$I_1(i) = \frac{2\pi F}{\nu_i} (\cosh^{-1} \nu_i (1 - F^2) + F), \quad F = \frac{\nu_i}{\sqrt{\nu_i^2 - 1}} \quad (\text{E.5})$$

Si $\nu_i^2 = 1$,

$$I_1(i) = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{E.6})$$

De la même manière :

$$I_2(i) = \int_{\Sigma} \frac{\ell_3^2}{\hat{R}_i^3} d\omega = \frac{4\pi}{\nu_i} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2(1-\nu_i^2) + \nu_i^2} dx \quad (\text{E.7})$$

Si $\nu_i^2 < 1$,

$$I_2(i) = \frac{4\pi G^2}{\nu_i^3} (1 - G \arccos \nu_i) \quad (\text{E.8})$$

Si $\nu_i^2 > 1$,

$$I_2(i) = \frac{4\pi F^2}{\nu_i^3} (F \cosh^{-1} \nu_i - 1) \quad (\text{E.9})$$

Si $\nu_i^2 = 1$,

$$I_2(i) = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{E.10})$$

et

$$I_{12} = \int_{\Sigma} \frac{\ell_1^4}{\hat{R}_1^5} d\omega = \frac{3\pi\nu_1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{x^2(1-\nu_1^2) + \nu_1^2} dx \quad (\text{E.11})$$

Si $0 < \nu_1 < 1$,

$$I_{12} = \frac{3\pi G}{2\nu_1} \left[-\frac{5G}{3} - G^3 + (G^4 + 2G^2 + 1) \cot^{-1} G \right] \quad (\text{E.12})$$

Si $\nu_1 > 1$,

$$I_{12} = \frac{3\pi F}{2\nu_1} \left[\frac{5F}{3} - F^3 + (1 - F^2)^2 \coth^{-1} F \right] \quad (\text{E.13})$$

Si $\nu_1 = 1$,

$$I_{12} = \frac{4\pi}{5} \quad (\text{E.14})$$

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Luc DORMIEUX, Professeur, LMSGC, Marne-la-Vallée

Monsieur Djimédo KONDO, Professeur, LML, Cité Scientifique, Villeneuve d'Ascq

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur HUYNH Quoc Vu

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des
méthodes d'homogénéisation"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Génie civil -hydrosystème - géotechnique** »

Fait à Vandoeuvre, le 22 novembre 2006

Le Président de l'I.N.P.L.,

L. SCHUFFENECKER



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

