



**HAL**  
open science

# Limite singulière de quelques problèmes de Réaction Diffusion: Analyse mathématique et numérique

Fahd Karami

► **To cite this version:**

Fahd Karami. Limite singulière de quelques problèmes de Réaction Diffusion: Analyse mathématique et numérique. Mathématiques [math]. Université de Picardie Jules Verne, 2007. Français. NNT : . tel-00180724v2

**HAL Id: tel-00180724**

**<https://theses.hal.science/tel-00180724v2>**

Submitted on 12 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE FACULTÉ  
DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES  
Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et  
Appliquées

## RAPPORT DE THÈSE

En vue de l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PICARDIE  
JULES VERNE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

### LIMITE SINGULIÈRE DE QUELQUES PROBLÈMES DE RÉACTION DIFFUSION: ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE

---

Présentée et Soutenue publiquement, le 8 Juin 2007 par:

FAHD KARAMI  
LAMFA UMR CNRS 6140

Jury:

M. José Mazon	Université de Valencia (Espagne)	Rapporteur
M. Petra Wittbold	Université de Berlin (Allemagne)	Rapporteur
M. Abdelilah Hakim	Université Cadi Ayyad, Marrakech (Maroc)	Rapporteur
M. Mostafa Abounouh	Université Cadi Ayyad, Marrakech (Maroc)	Examineur
M. Michel Pierre	ENS, Cachan (France)	Examineur
M. Mokhtar Kirane	Université de la Rochelle (France)	Examineur
M. Olivier Goubet	Université de Picardie Jules Verne (France)	Examineur
M. Nouredine Igbida	Université de Picardie Jules Verne (France)	Directeur



*Ce travail est dédié  
à la mémoire de ma mère Fatima...*



# Remerciements

A l'issu de ce travail je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à l'accomplissement et à la rédaction de cette présente thèse, tout particulièrement :

Mon Directeur de thèse Mr Noureddine Igbida dont le bon déroulement de ce travail lui est en grande partie imputable. Je le remercie du fond du coeur tout aussi pour avoir dirigé mes travaux avec talent que pour m'avoir accompagné amicalement dans son cheminement.

L'énergie de Mr Igbida, ses compétences et sa constante disponibilité sont autant de qualités que j'ai apprécié en lui et qui m'ont beaucoup aidé pour mener à bien ma thèse. Ce fut un réel plaisir de vous avoir comme directeur de thèse et c'est une chance de vous avoir comme ami et j'espère encore apprendre à votre contact.

Ce fut pour moi un grand honneur que Messieurs José Mazon, Abdelilah Hakim et Madame Petra Wittbold aient accepté de rapporter sur cette thèse, je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et au temps qu'ils ont consacré à sa lecture.

Je voudrais aussi remercier Messieurs Mostafa Abounouh, Mokhtar Kirane, Michel Pierre et Olivier Goubet qui m'honorent en participant au jury de cette thèse.

Je remercie M.Olivier Goubet, directeur du laboratoire pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de sa part.

Durant ces années qui se sont écoulées, j'ai fait partie en tant que thésard du LAMFA. Que tous ses membres trouvent ici mes remerciements sincères pour leur aide louable et leur convivialité.

Je n'oublierai pas de remercier tout le corps enseignant et administratif du laboratoire LMA de l'université de la Rochelle et du département de mathématiques et informatique de la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech pour leurs accueils et leurs aide et en particulier Monsieur Mokhtar Kirane et Monsieur Hassan Al Moatassime pour son aide précieuse dans la partie numérique.

Je remercie toutes les personnes que j'ai peut être oublié de citer ici et qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ma thèse et à la rédaction du présent mémoire.

Je ne saurais oublier tous les thésards, ex-thésard, pour leur amitié avec une mention spéciale pour Atlas Abdelghafour. Je souhaite bon courage aux thésards restants et à ceux qui viennent de commencer.

Je termine enfin par ceux que ne saurai et je ne pourrai jamais remercier par des mots, je pense à mon père, ma soeur, mon frère et mon épouse, vos encouragements et votre soutien ne m'ont jamais fait défaut, je vous dédié ce travail et j'espère être toujours à la hauteur de vos aspirations.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction: Limite singulière . . . . .	10
1.2	Rappels et Définitions . . . . .	10
1.3	Some Competition Phenomena in Evolution Equations . . . . .	11
1.4	Homogénéisation localisée pour un problème de Diffusion dans un milieu Hétérogène . . . . .	15
1.5	Analyse numérique du comportement de la solution pour les grandes valeurs du paramètre d'homogénéité . . . . .	17
1.6	Problème d'obstacle pour une équation doublement non linéaire . . .	19
1.7	Compétition dans un problème de Réaction Diffusion localisée . . . .	24
<b>2</b>	<b>Rappels et Définitions</b>	<b>31</b>
2.1	Rappels et Définitions . . . . .	32
2.1.1	Opérateur accréitif et m-accréitif . . . . .	32
2.1.2	Equation d'évolution associée aux opérateurs accréitifs . . . . .	34
2.1.3	Outils et notations fonctionnels . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Some Competition Phenomena in Evolution Equations</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Abstract framework. . . . .	47
3.2.1	Preliminaries. . . . .	47
3.2.2	Main results. . . . .	49
3.3	Applications. . . . .	56
3.3.1	Large Diffusion. . . . .	63
3.3.2	Large Reaction. . . . .	65
3.3.3	Large Reaction and Diffusion. . . . .	67
<b>4</b>	<b>Homogénéisation localisée pour un problème de Diffusion dans un milieu hétérogène</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Résultats principaux . . . . .	79

4.3	Problème stationnaire . . . . .	80
4.3.1	Existence et unicité de la solution. . . . .	81
4.3.2	Passage à la limite lorsque $k$ tend vers $\infty$ . . . . .	86
4.4	Problème d'évolution . . . . .	91
4.4.1	Bonne solution . . . . .	91
4.4.2	Existence de la solution faible . . . . .	93
4.4.3	Passage à la limite . . . . .	95
4.4.4	Problème d'évolution limite . . . . .	101
4.4.5	Unicité de la solution faible . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Analyse numérique du comportement de la solution pour les grandes valeurs du paramètre d'homogénéité</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	114
5.2	Etude numérique. . . . .	115
5.3	Simulation numérique . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Problème d'obstacle pour une équation doublement non linéaire</b>	<b>133</b>
6.1	Introduction . . . . .	134
6.2	Problème stationnaire . . . . .	135
6.2.1	Problème elliptique sans obstacle . . . . .	135
6.2.2	Problème d'obstacle elliptique . . . . .	140
6.3	Existence de la solution . . . . .	146
6.3.1	Problème d'évolution sans obstacle . . . . .	146
6.3.2	Problème d'obstacle elliptique parabolique . . . . .	153
6.4	Unicité de la solution . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Compétition dans un problème de Réaction Diffusion localisée</b>	<b>165</b>
7.1	Introduction . . . . .	166
7.2	Résultats principaux . . . . .	168
7.2.1	Grande diffusion . . . . .	176
7.2.2	Forte réaction . . . . .	178
7.2.3	Compétition réaction-diffusion . . . . .	179

# Chapitre 1

## Introduction Générale

## 1.1 Introduction : Limite singulière

L'objectif de ce travail est une contribution à l'étude de la limite singulière des équations et des systèmes de réaction-diffusion, qui modélisent des problèmes issus de la physique, de la chimie, de la biologie et des sciences de la technologie. En effet, ce type de problème se présente dans la nature et ils sont caractérisés par la présence des paramètres qui, lorsqu'ils sont suffisamment grands, donnent lieu généralement à un phénomène appelé *couches limites*. Nous essayons de comprendre comment un modèle approche un modèle d'un autre type où comment les solutions d'un modèle  $P_k(u_0, f)$  convergent lorsque  $k \rightarrow \infty$  vers les solutions d'un autre modèle  $P_\infty(u_0, f)$  qui n'est pas donné par une limite formelle du problème initial. Les limites singulières apparaissent physiquement (Cf. [10], [11], [12], [13], [20], [22], [23], [24], [29], [30], [32], [36], [40]); les grandes valeurs de ces paramètres étant des données du problème, par exemple un coefficient de diffusion, de réaction ou d'homogénéité, ... Dans ce cas on cherche à déterminer le comportement de la solution lorsque ces coefficients sont très élevés par rapport aux données du problème, ou bien lorsque l'un de ces paramètres est plus important que l'autre. Les modèles considérés seront les équations aux dérivées partielles et les systèmes non linéaires qui admettent une formulation abstraite

$$\begin{cases} u_t + A u \ni f & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $A$  est un opérateur accréatif dans un espace de Banach  $X$ ,  $u_0 \in X$  et  $f \in L^1(0, T; X)$ .

Cette thèse est composée de six chapitres dont nous présenterons le contenu d'une manière détaillée.

## 1.2 Rappels et Définitions

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Nous commençons par introduire quelques propriétés sur les opérateurs accréatifs et  $m$ -accréatifs, ainsi que les équations d'évolutions associées à ces opérateurs et nous terminons la première partie par un rappel sur les résultats de convergence des opérateurs (Cf. [38], [6]). La deuxième partie est consacrée aux rappels de quelques résultats de base sur les espaces fonctionnels de Lebesgue et Sobolev (Cf. [1], [16]).

### 1.3 Some Competition Phenomena in Evolution Equations

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la limite singulière dans un cadre abstrait. Pour cela nous considérons le problème (1.1) avec  $A := A_k$ ,  $A_k \rightarrow A_\infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  et  $u_0 \in X$ . Il est bien connu (Cf. [17]) que si la donnée initiale  $u_0$  prend ses valeurs dans  $\overline{\mathcal{D}(A_\infty)}$ , alors la solution  $u_k$  converge vers  $u_\infty$  dans  $\mathcal{C}([0, T], X)$  et  $u_\infty$  solution de

$$u_{\infty t} + A_\infty u_\infty \ni f \quad \text{sur } (0, T) \quad u_\infty(0) = u_0. \quad (1.2)$$

Par contre, si la donnée initiale  $u_0$  prend ses valeurs dans  $X \setminus \overline{\mathcal{D}(A_\infty)}$ , le problème (1.2) est mal posé et la limite de  $u_k$  peut ne pas exister.

**Exemple:** On pose  $X = \mathbb{C}$ ,  $A_k = ik$ ,  $f = 0$  et on considère le problème

$$\begin{cases} u_t + ik u = 0 & \text{sur } [0, T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Il est clair que, lorsque  $k \rightarrow +\infty$  on a

$$A_k \rightarrow A_\infty \quad \text{où } A_\infty \text{ est défini par } A_\infty = \{(0, z), z \in \mathbb{C}\}.$$

En effet, soit  $f$  un élément de  $\mathbb{C}$  et  $v_k$  la solution de

$$v_k + ik v_k = f,$$

alors lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on a  $v_k \rightarrow 0$  et  $\overline{\mathcal{D}(A_\infty)} = \{0\}$ . D'autre part, la solution  $u_k(t) = u_0 \exp(-ikt)$  n'admet pas de limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . ■

Pour une grande classe des problèmes issus de la physique, la chimie, la dynamique de populations, etc, cette limite existe, et il existe  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\infty)}$ , telle que  $u$  solution du problème

$$u_{\infty t} + A_\infty u_\infty \ni f \quad \text{sur } (0, T) \quad u_\infty(0) = \underline{u}_0.$$

De manière générale, la caractérisation de  $\underline{u}_0$  reste un problème ouvert, néanmoins dans certains cas particuliers le problème est résolu (Cf. [9], [10], [15]).

Dans ce chapitre, nous établirons des nouveaux résultats abstraits de la théorie des semigroupes non linéaires sur la limite singulière d'une suite de problèmes d'évolution

$$u_{kt} + \mathcal{A}_k u_k \ni F(t, u) \quad \text{sur } (0, T) \quad u_k(0) = u_0$$

où pour  $k = 1, \dots, \infty$ ,  $\mathcal{A}_k$  est un opérateur  $m$ -accrétif d'un espace de Banach  $X$ ,  $u_0 \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)}$  et  $F : [0, T] \times \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)} \rightarrow X$  une fonction Caratheodory. Nous nous intéressons à des classes d'opérateurs tels qu'il existe une fonction de relaxation qui rend la limite régulière. Plus précisément, on suppose qu'il existe  $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $m(k) \rightarrow 0$ , et  $m(k) \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  avec  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}})}$ . Nous montrons (Cf. Théorème 3.2.1) que, pour une condition initiale générale, les solutions se développent, au voisinage de la donnée initiale et donnent lieu à un phénomène de *couches limites*, et nous donnons une caractérisation de la nouvelle donnée initiale associée au problème limite en fonction de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}$  et la donnée initiale de départ  $u_0$ .

D'autre part, on peut se poser la question de savoir le comportement de la solution du problème d'évolution lors d'une compétition entre deux (ou plusieurs) opérateurs accrétifs. Pour cela nous considérons le problème d'évolution abstrait suivant:

$$\begin{cases} u_t + d(k) Au + r(k) Bu \ni F(t, u) & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $r, d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont deux fonctions telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{d(k)} = +\infty,$$

$u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ ,  $A$  et  $B$  deux opérateurs accrétifs avec  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$  et  $F$  une fonction Carathéodory. Nous supposons que lorsque  $k \rightarrow \infty$  on a

$$\mathcal{H}_k := d(k) A + r(k) B \rightarrow \mathcal{H}. \quad (1.4)$$

Il est clair, que lorsque  $d(k)$  et/ou  $r(k)$  tends vers  $\infty$ , le problème (1.3) met en jeu une compétition entre les opérateurs  $A$  et  $B$ . Notre but est de mieux comprendre lequel de ces opérateurs deviennent prépondérants en déterminant la donnée initiale du problème limite en fonction de la vitesse de chaque coefficient. Dans le cas où  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) \neq \infty$ , nous prenons  $\tilde{\mathcal{H}}_k := \frac{1}{r(k)} \mathcal{H}_k$ , nous appliquons le résultat du Théorème 3.2.1 et nous établissons un deuxième résultat abstrait permettant l'identification de la donnée initiale du problème limite en fonction de l'opérateur  $B$  et  $u_0$ . Par contre, si  $d(k)$  tend vers  $\infty$ , la situation est différente et les deux résultats abstraits obtenus jusqu'à maintenant ne nous permettent pas d'identifier la donnée initiale du problème limite. En effet, le choix d'une fonction  $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $m(k) \mathcal{H}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  avec  $u_0 \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{H}})$  n'est plus possible car la singularité provient de l'opérateur  $A$  et  $B$ . Nous utilisons une relaxation en deux étapes et nous montrons un troisième résultat abstrait qui fait intervenir l'opérateur  $A, B$  et la donnée  $u_0$

pour l'indentification de  $\underline{u}_0$ .

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous allons appliquer ces résultats dans le contexte des équations aux dérivées partielles. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de frontière régulière  $\partial\Omega$  et  $d > 0$ ,  $r \geq 0$ , considérons le problème de Réaction-Diffusion suivant :

$$P^{d,r}(u_0, f) \begin{cases} u_t - d \Delta w + r g(u) = f, & u = \beta(w) & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ \partial_{\vec{n}} w + z = 0, & z \in \gamma(w) & \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $\beta$  et  $g$  sont des fonctions continues croissantes, et  $\gamma$  est un graphe maximal monotone avec

$$\mathcal{D}(\gamma) = \mathbb{R} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{D}(\gamma) = \{0\}.$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème  $P^{d,r}(u_0, f)$  ont fait l'objet de nombreuses recherches mathématiques. Nous renvoyons ici à [34] et aux références qui s'y trouvent. Plus précisément, pour toutes  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $f \in L^\infty(Q)$  il existe une unique solution  $u \in L^\infty(Q)$ , telle qu'ils existent  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $z \in L^2(\Sigma)$ ,

$$u = \beta(w) \text{ p.p. } Q, \quad z \in \gamma(w) \text{ p.p. } \Sigma \quad \text{et}$$

$$d \int_0^\tau \int_\Omega Dw D\xi + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} z\xi + r \int_0^\tau \int_\Omega g(u)\xi = \int_0^\tau \int_\Omega f\xi + \int_0^\tau \int_\Omega u\xi_t + \int_\Omega u_0\xi(0)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$  avec  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$  et  $\tau > 0$ . Dans cette partie on s'intéresse au comportement de la solution, lorsque les coefficients de diffusion  $d$  et/ou de réaction  $r$  deviennent très grands. Cette situation apparaît dans la nature pour des modèles combinant le processus réactif et diffusif en forte interaction et créant une compétition (Cf. [31], [13], [18], [23], [11], [28], [12], [29], [20], [36], [32] et les références qui s'y trouvent pour des applications concrètes). Afin de donner une identification concrète de la donnée initiale du problème limite, nous supposons que  $\gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$  et nous signalons que les résultats donnés par la suite restent vrais dans le cas où  $\gamma \neq \mathbb{R} \times \{0\}$  avec une donnée initiale qui n'est pas déterminée concrètement pour certains cas. On suppose que  $d > 0$  et  $r \rightarrow \infty$ , alors le modèle représente un problème de réaction-diffusion avec une grande réaction (Cf. [13], [23], [11], [12], [29], [20], [36] et [32]). Nous montrons que la solution du problème  $P^{d,r}(u_0, f)$  converge vers la solution du problème  $P^{d,\infty}(u_0, f)$  définie par

$$\begin{cases} u_t - d \Delta w + G(u) = f, & u = \beta(w) & \text{sur } Q \\ \partial_{\vec{n}} w = 0 & & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = \underline{u}_0 := m_0 \vee (u_0 \wedge M_0) & & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où,  $G$  est un graphe maximal monotone défini par

$$G(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_0 < r < M_0 \\ [0, +\infty) & \text{si } r = M_0 \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = m_0 \end{cases}$$

où  $m_0$  et  $M_0$  sont données par  $g^{-1}\{0\} = [m_0, M_0]$ . Nous fixons le coefficient de réaction  $r > 0$  et nous faisons tendre  $d$  vers  $\infty$ , alors le modèle décrit un problème de réaction diffusion avec une grande diffusion (Cf. [40], [31], [33]). La solution du problème  $P^{d,r}(u_0, f)$  converge vers la solution du problème  $P^{\infty,r}(c_0, f)$  défini par

$$\begin{cases} c_t + r g(c) = \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = c_0 := \int_{\Omega} u_0. \end{cases}$$

Maintenant, nous supposons que  $d \rightarrow \infty$  et  $r \rightarrow \infty$ , le modèle donc devient un problème de réaction diffusion avec une grande réaction et diffusion. Dans ce cas, un phénomène de compétition apparaît entre le terme de réaction et celui de diffusion et il est naturel de distinguer les cas où l'un des processus est plus important que l'autre. On suppose que  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ ,

alors si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0$ , le problème limite est l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante:

$$\begin{cases} c_t + G(c) \ni \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0). \end{cases}$$

Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty$ , alors le problème limite est l'EDO suivante:

$$\begin{cases} c_t + G(c) \ni \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = L^1 - \lim_{t \rightarrow \infty} z(t), \end{cases}$$

où  $z$  est la solution du problème  $P^{d, \infty}(z_0, 0)$  avec  $z_0 = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$  p.p.  $\Omega$ .

## 1.4 Homogénéisation localisée pour un problème de Diffusion dans un milieu Hétérogène

Dans ce chapitre, nous considérons le système non linéaire couplé avec des conditions aux limites générales

$$(P^k) \begin{cases} u_{1t} - \Delta w_1 = F(u_1, u_2), & w_1 = \varphi_1(u_1) & \text{sur } Q \\ u_{2t} - \Delta w_2 = G(u_1, u_2), & w_2 = \varphi_2(u_2) & \text{sur } Q \\ \partial_{\vec{n}} w_1 + z_1 = 0, & z_1 \in \gamma_1(w_1) & \text{sur } \Sigma \\ \partial_{\vec{n}} w_2 + z_2 = 0, & z_2 \in \gamma_2(w_2) & \text{sur } \Sigma \\ u_1(x, 0) = u_{01}(x) & u_2(x, 0) = u_{02}(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des fonctions continues croissantes,  $\gamma_1, \gamma_2$  des graphes maximaux monotones, et les fonctions  $F, G$  modélisent les termes de réaction pour les deux équations. Ce problème représente en général un système de Réaction Diffusion non linéaire et nous allons considérer particulièrement le cas où les termes de réactions sont de la forme

$$F(u_1, u_2) = -\mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1 - w_2), \quad G(u_1, u_2) = \mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1 - w_2)$$

avec  $g$  est une fonction continue, croissante qui vérifie  $g^{-1}(0) = \{0\}$ , et  $\mathcal{R}_k$  est une fonction mesurable positive qui dépend du paramètre  $k \geq 0$ .

Le système a été introduit par E.DiBenedetto, R.E. Showalter dans [21], pour décrire des problèmes intervenant dans des modèles de conduction de la chaleur dans des matériaux composites, où bien, dans des phénomènes de diffusion dans un milieu hétérogène, c'est le cas d' un milieu poreux fracturé. Les différents choix des fonctions  $\varphi_i, \gamma_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) correspondent à des problèmes provenant de différentes applications par exemple, pour  $\varphi_i(r) = |r|^{m_i} \text{Sign}_0(r)$ , avec  $m_i > 1$  décrit une diffusion non linéaire lente ([3], [39]);  $m_i = 1$  correspond à l'équation de la chaleur classique et  $0 < m_i < 1$  décrit une diffusion très rapide. Le graphe  $\gamma_i$  peut être multivoque et ceci permet d'inclure les conditions de Dirichlet au bord ( $\gamma_i = \{0\} \times \mathbb{R}$ ) et les conditions de Neumann ( $\gamma_i = \mathbb{R} \times \{0\}$ ) ainsi d'autres possibilités.

Ce genre de problème se rencontre aussi dans la modélisation de l'évolution d' une réaction chimique réversible entre deux espèces (Cf. [12], [22], [3], [8], [39]).

Dans le cas où  $\mathcal{R}_k$  ne dépend pas de l'espace, l'existence et l'unicité de la solution faible du problème ( $P^k$ ) avec des conditions de Dirichlet et  $\varphi_2 = 0$  ont été établis en utilisant la théorie  $H^{-1}$  dans [21], ensuite Xiangsheng Xu (Cf. [46]) et J.M. Mazon et J.Toledo (Cf. [35]) ont montré l'existence d'une unique *bonne solution* par la théorie des semigroupes non linéaires. Dans ce travail, nous allons d'abord étendre les travaux de Xiangsheng Xu, J.M. Mazon et J.Toledo dans le cas où  $\mathcal{R}_k$  dépend de l'espace en présentant une analyse mathématique (existence et unicité de la solution faible), ensuite nous étudierons le comportement de la solution lorsque le paramètre d'homogénéité devient très grand sur un sous domaine  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ . Pour cela, nous considérons

$$\mathcal{R}_k(x) = a(k)\chi_{\Omega_0}(x) + \mathcal{R}_0(x)\chi_{\Omega_1}(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

avec  $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$  et  $a(k)$  une fonction strictement positive telle que  $a(k) \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Dans notre cas, la difficulté est double: d'une part la limite du problème ( $P^k$ ) est singulière, d' autre part comme nous travaillons avec des termes de réactions dépendant de l'espace, le passage à la limite n'est pas clair. Pour surmonter ces difficultés, nous utiliserons les résultats abstraits obtenus dans le Chapitre 3, et nous combinons les deux équations pour introduire une nouvelle notion de solution qui fait intervenir la somme des deux équations. Nous supposons que,  $(u_{01}, u_{02}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et nous montrons que lorsque  $k \rightarrow \infty$ , la solution faible  $(u_1^k, u_2^k)$  du problème ( $P^k$ ) converge vers  $(u_1, u_2)$  dans  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega) \times L^1(\Omega))$ , avec  $(u_1, u_2)$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)), \quad \text{et pour } i = 1, 2; \\ u_i \in L^\infty(Q), \exists w_i \in L^2([0, T], H^1(\Omega)), \exists z_i \in L^2(\Sigma) \\ w_i = \varphi_i(u_i) \text{ p.p. } Q, z_i \in \gamma_i(w_i) \text{ p.p. } \Sigma, \forall l > 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \xi_1) dr + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \xi_1) \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \xi_2) dr + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \xi_2) \\ + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) \left( T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2) \right) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que } \xi_1 = \xi_2 \text{ p.p. } \Omega_0 \end{array} \right.$$

où

$$\underline{u}_{01}(x) = \begin{cases} u_{01}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ [I + \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1]^{-1}(u_{01} + u_{02}) & \text{sur } \Omega_0 \end{cases}$$

et

$$\underline{u}_{02}(x) = \begin{cases} u_{02}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ [I + \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2]^{-1}(u_{01} + u_{02}) & \text{sur } \Omega_0. \end{cases}$$

avec  $T_l$  est la fonction troncature au niveau  $l$  définie par  $T_l(s) = \min(\max(s, -l), l)$ .

## 1.5 Analyse numérique du comportement de la solution pour les grandes valeurs du paramètre d'homogénéité

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle linéaire classique (dimensionnée) décrivant l'écoulement d'un fluide légèrement compressible dans un milieu hétéro-

gène se constituant de deux composants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 u_{xx} = -\mathcal{R}_k(x)(u - v) & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 v_{xx} = +\mathcal{R}_k(x)(u - v) & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ u = v = 0 & \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

La première équation décrit l'écoulement dans des régions de fissures dont le volume est relativement petit mais de grande perméabilité. La seconde décrit l'écoulement dans des régions de cellules de grande porosité, mais en isolement les uns des autres. Les deux équations doivent être comprises macroscopiquement; c'est-à-dire, ces équations sont obtenues en faisant la moyenne des voisinages contenant un grand nombre de cellules (appelées les " blocs " de pores) et fissures. Le terme de droite de chaque équation représente l'échange du fluide entre les cellules et les fissures (Cf. [44]). Physiquement, lorsque  $\mathcal{R}_k \rightarrow \infty$  alors le degré de fissuration est très grand et l'échange de l'écoulement ne rencontre aucune résistance et  $u = v$ .

Nous rappelons que pour un  $k$  fixé, les méthodes numériques efficaces pour approcher la solution de ce type de système ont fait l'objet de nombreuses études nous renvoyons ici à (Cf. [25], [26], [43] etc). Malgré la diversité de ces méthodes, elles sont limitées par des conditions de stabilité et/ou de convergence et nous ne permettent pas d'étudier le comportement de la solution lorsque  $\mathcal{R}_k \rightarrow \infty$ .

Dans ce travail, nous utilisons la méthode des différences finies et nous discrétisons le problème (1.5) par un schéma numérique d'Euler implicite. Pour des raisons de stabilité et afin de conserver les propriétés de la solution lorsque  $k$  tend vers  $\infty$ , nous allons discrétiser implicitement le terme  $\pm\mathcal{R}_k(\cdot)(u - v)$ . D'abord, nous présentons une analyse numérique et nous montrons l'existence de la solution discrète, ensuite nous utilisons le principe de comparaison pour prouver la stabilité ce qui nous permet de conclure que le système discret converge vers le problème (1.5) indépendamment de la valeur du paramètre  $k$ . Finalement, nous présentons des simulations numériques où on retrouve les résultats et les propriétés établies dans la partie théorique et nous remarquons que lorsque  $\mathcal{R}_k$  devient grand,  $u = v$  instantanément.

## 1.6 Problème d'obstacle pour une équation doublement non linéaire

Ce chapitre a pour objet l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème d'obstacle. Ce problème apparaît naturellement dans des modèles physiques (Cf. [4], [19] et [27]). Il se rencontre aussi comme limite d'un problème de réaction diffusion lors d'une très grande réaction qui dépend de l'espace (Cf. Chapitre 7). En particulier, pour des applications dans la physique nous renvoyons à l'article de J.F.Rodrigues [41]. Dans ce travail, on s'intéresse à des problèmes d'obstacles bilatéraux pour des équations elliptiques paraboliques doublement non linéaires avec des conditions aux limites de Neumann. On considère l'opérateur suivant

$$\mathbb{P}(t, x, \cdot) : u \rightarrow \partial_t u - \operatorname{div} a(x, Dw) + h(x, u) - f(t, x) \quad \text{avec } u = \beta(w),$$

où  $-\operatorname{div} a(x, Dw)$  est l'opérateur divergentiel, avec  $\mathbf{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un champ vérifiant des hypothèses du type Leray-Lions,  $s \rightarrow h(\cdot, s)$  est une fonction croissante et continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  est un terme source. On suppose que  $\beta$  est une fonction continue croissante avec  $\beta(0) = 0$ , ce type de non linéarité se rencontre dans la modélisation d'une grande classe des problèmes issus de la physique, par exemple, diffusion dans un milieu poreux, dynamique de populations ainsi que d'autres applications. En particulier, le cas où

$$\beta(s) = \begin{cases} (s - 1)^+ & \text{si } s \geq 0 \\ s & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

décrit le phénomène de saturation et insaturation de l'eau à travers un milieu poreux en absence de la force de gravitation (supposé négligé). Dans ce cas  $u = \beta(w)$  représente la concentration de l'eau,  $w$  la pression.

En général, la fonction  $\beta$  est donnée par l'expérience et elle n'est pas régulière. La dégénérescence ( les "plats" ) de la fonction  $\beta$  constitue une difficulté mathématique provenant de l'absence de régularité en temps des solutions faibles.

Soient  $m$  et  $M$  deux fonctions données telles que  $m \leq 0 \leq M$  p.p.  $\Omega$ . Alors, pour  $T \geq 0$  le problème d'obstacle bilatéral de  $\mathbb{P}$  s'écrit formellement sous la forme:

Trouver  $u$  une fonction mesurable sur  $Q$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq u \leq M, \quad u = \beta(w) \\ \mathbb{P}(t, x, u) = 0 \text{ sur } [m < u < M] \\ \mathbb{P}(t, x, u) \geq 0 \text{ sur } [m = u] \\ \mathbb{P}(t, x, u) \leq 0 \text{ sur } [u = M] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sur } Q \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{array} \begin{array}{l} \text{dans } \Sigma \\ \text{dans } \Omega, \end{array}$$

avec  $u_0$  une fonction mesurable sur  $\Omega$  telle que  $m \leq u_0 \leq M$  p.p.  $\Omega$ .

En terme d'équation le problème d'obstacle se traduit sous la forme suivante :

$$P^{\beta, G}(u_0, f) \left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div} a(x, Dw) + G(x, u) \ni f \quad u = \beta(w) \quad \text{sur } Q \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 \quad \text{sur } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $G(x, \cdot)$  est le graphe maximal monotone, et pour p.p.  $x \in \Omega$

$$G(x, r) = \begin{cases} h(x, r) & \text{si } m(x) < r < M(x) \\ (-\infty, h(x, m)] & \text{si } r = m(x) \\ [h(x, M), +\infty) & \text{si } r = M(x). \end{cases}$$

Les contraintes que nous considérerons seront bilatérales, dépendant de l'espace c'est à dire que les ensembles de contraintes de la solution seront du type  $[m(x) \leq u \leq M(x)$  p.p.  $\Omega]$ , où  $m, M$  seront des fonctions de l'espace  $x$  données. Pour de tels problèmes et dans le cas où  $m, M$  sont des constantes, l'existence et l'unicité d'une solution faible ont été prouvées dans le chapitre précédent, cette solution est obtenue en particulier comme limite du problème de réaction diffusion avec une large réaction. Dans le cas de contraintes dépendantes de l'espace de manière non régulière, en général les problèmes de type  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  n'admettent pas de solution faible. L'exemple suivant montre la non existence:

**Exemple (Cf. [45]).** Considérons le problème elliptique associé à  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  avec des conditions Dirichlet au bord,  $\beta = Id_{\mathbb{R}}$  et  $\mathbf{a}(x, \xi) = \xi$  suivant:

$$(E) \quad \begin{cases} v - v_{xx} + G(x, v) \ni f & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $\Omega = (-2, 2)$  et

$$G(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-2, 0) & \text{et } s \leq 0 \\ [0, +\infty) & \text{si } x \in (-2, 0) & \text{et } s = 0 \\ 0 & \text{si } s \in (0, 2) & \text{et } s \geq 0 \\ (-\infty, 0] & \text{si } x \in (0, 2) & \text{et } s = 0 \\ \emptyset & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit  $f \in L^\infty(\Omega)$  donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-2, 0) \\ -1 - (x - 1)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que (E) admet une solution  $v \in W^{2,\infty}(-2, 2)$ . Or, on a  $W^{2,\infty}(-2, 2)$  s'injecte dans  $C^1(-2, 2)$ , donc  $v(0) = 0$ . Par conséquent,  $v_1 = v|_{(-2,0)} \in W_0^{1,2}(-2,0) \cap W^{2,\infty}(-2,0)$ ,  $v_2 = v|_{(0,2)} \in W_0^{1,2}(-2,0) \cap W^{2,\infty}(0,2)$ , et  $v_1$  (respectivement  $v_2$ ) la solution du problème (E) sur  $(-2,0)$  (respectivement  $(0,2)$ ). Alors  $v_1 = 0$ ,  $x \in (-2,0)$ ,  $v_2 = 1 - (x - 1)^2$ ,  $x \in (0,2)$ . ce qui contredit le fait que  $v \in W^{2,\infty}(-2, 2)$ .

Le cas où  $a(x, \xi) = \xi$  et  $\beta = Id_{\mathbb{R}}$  a été étudié par F.Mignot, J.P.Puel dans [37], les auteurs ont défini et prouvé l'existence d'une solution dite maximale obtenue comme limite décroissante des approximations par pénalisation. Cependant, pour les équations elliptiques-paraboliques, la méthode de F.Mignot et J.P.Puel ne fonctionne pas avec des opérateurs non linéaires.

Une difficulté majeure à l'obtention de l'existence des solutions faibles provient de l'absence des estimations dans un espace convenable. En effet, après régularisation de l'absorption, et suite à la dépendance en espace seul des estimations dans  $L^1$  peuvent être obtenues. D'où l'apparition des mesures lors le passage à la limite. Pour un problème elliptique quasi linéaire avec des conditions au bord Dirichlet cette approche a été étudiée en utilisant la convergence dans l'espace des mesures par P.Wittbold dans [45]. Elle a montré l'existence et l'unicité d'une solution appelée " Solution généralisée" faisant intervenir des mesures dont la partie singulière est concentrée sur  $[u = m] \cup [u = M]$ , et en se basant sur les travaux de G.Bouchité [14] les auteurs ont donné une caractérisation de cette limite sous la forme d'une

mesure qui ne charge pas les ensembles de capacités nulles. Récemment K.Sbihi et P.Wittbold [42] ont adopté cette approche pour le problème d'évolution en construisant par approximation une solution entropique pour un problème parabolique avec absorption dépendant de l'espace et condition au limite homogène de Dirichlet.

Notre approche est à la fois voisine et complètement différente dans la mesure où pour le problème elliptique c'est une généralisation des résultats de F.Mignot, J.P.Puel (Cf. [37]) dans le cas non linéaire, et pour le problème elliptique et/ou parabolique ne font pas apparaître des mesures.

Cette solution sera décrite par des inégalités du même type que les solutions entropiques introduite par Ph.Bénilan (Cf. [7] ). Par exemple si  $\beta \equiv G \equiv 0$ , rappelons que  $w$  est solution entropique de  $P^{0,0}(f)$  si

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in W^{1,1}(\Omega), \quad T_l(w) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall l > 0 \\ \int_{\Omega} a(x, Dw) DT_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad \forall \xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega). \end{array} \right.$$

Ce type de troncature permet de compenser la perte de régularité de la solution dans le cas des données peu régulières auquel il n'y a pas d'existence des solutions faibles.

Maintenant, nous considérons le problème elliptique associé à  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  défini par

$$S^{\beta, G}(f) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v - \operatorname{div} a(x, Dw) + G(\cdot, v) \ni f & v = \beta(w) \quad \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Dans notre cas, nous introduisons pour le problème  $S^{\beta, G}(f)$  la notion de solution suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L^{p'}(\Omega), \eta \in L^{p'}(\Omega), \quad w \in W^{1,p}(\Omega) \\ v = \beta(w) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \eta \in G(\cdot, v) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \text{et } \forall l > 0 \\ \int_{\Omega} v T_l(w - \xi) + \int_{\Omega} a(x, Dw) DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \\ \forall \xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) \quad \text{tel que } m(x) \leq \beta(\xi(x)) \leq M(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Dans cette définition, nous constatons que la troncature ne joue aucun rôle et nous pouvons montrer l'existence et l'unicité d'une solution au sens précédent en enlevant  $T_l$ . Par contre, l'importance de la troncature apparaît lors de la définition de solution pour le problème d'évolution  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  car c'est un outil important de la preuve

d'unicité. Dans le cas où  $G \equiv 0$ , nous rappelons qu'une fonction mesurable  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  est dite solution entropique du problème elliptique-parabolique  $P^{\beta,0}(u_0, f)$  si

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(w) = u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), T_l(w) \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \quad \forall l > 0, \\ \int_{\Omega} \Theta_l(w - \phi)(T) - \int_0^T \langle \phi_t, T_l(w - \phi) \rangle + \int_0^T \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \phi) \\ \leq \int_{\Omega} \Theta_l(w_0 - \phi(0)) + \int_0^T \int_{\Omega} f T_l(w - \phi) \\ \forall \phi \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \quad \text{tel que } \phi_t \in L^{p'}(0, T; (W^{1,p}(\Omega))') \end{array} \right.$$

où  $\Theta_l(\tau) = \int_0^\tau T_l(s) ds$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  et son duale  $(W^{1,p}(\Omega))'$ .

Notre formulation sera décrite de la manière suivante: pour  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , tels que pour p.p.  $x \in \Omega$   $m(x) \leq u_0(x) \leq M(x)$ , alors  $u$  est solution du problème  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  si

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = u_0 \\ u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \exists w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)), \exists \eta \in L^p(Q) \\ u = \beta(w) \quad \text{p.p. } Q, \quad \eta \in G(x, u) \quad \text{p.p. } Q \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^w T_l(r - \xi) d\beta(r) + \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi) \\ \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall l > 0 \\ \forall \xi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \quad \text{tel que } m(x) \leq \beta(\xi(x)) \leq M(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

L'unicité de la solution est prouvée à l'aide de la méthode des solutions intégrales introduite par Ph.Bénilan [5].

Pour le problème  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  dans le cas de condition de Dirichlet homogène au bord et  $\beta = Id_{\mathbb{R}}$ , cette définition est équivalente à celle obtenue par K.Sbihi et P.Wittbold dans [42] puisqu'elles conduisent à la même (unique) solution.

## 1.7 Compétition dans un problème de Réaction Diffusion localisée

Le but de ce chapitre est d'étudier la compétition Réaction-Diffusion dans le cas où la diffusion est remplacée par l'opérateur divergentiel  $-\operatorname{div} a(x, Dw)$  et la réaction dépend de l'espace, pour cela nous considérons le problème suivant:

$$P_a^{d,r}(u_0, f) \begin{cases} u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) + r g(x, u) = f & u = \beta(w) & \text{sur } Q \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^\infty(Q)$  et  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue croissante par rapport à sa deuxième variable.

Dans le problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ ,  $d > 0$  et  $r > 0$  représente respectivement le coefficient de diffusion et de réaction. L'existence et l'unicité de la solution faible du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$  se déduit directement du Chapitre 6. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution lorsque les coefficients  $d$  et/ou  $r$  deviennent très grands. Le cas où la fonction  $g$  est indépendante de l'espace et le champ  $\mathbf{a}(x, \xi) = \xi$  a été étudié dans le Chapitre 3. Ce genre de dépendance de l'espace apparaît dans la modélisation de la diffusion et/ou la réaction (matériaux composites, dynamique de populations, réactions chimiques) lorsque dans des sous régions soit une espèce se diffuse plus rapidement que l'autre, ou bien les deux espèces sont en grande interaction (Cf. [2], [12], [13], [20], [24], [29], [30], [31], [32], [33], [36], [40]).

Afin d'étudier la compétition entre les deux opérateurs, nous reprenons les résultats abstraits du deuxième chapitre et nous appliquons ces résultats sur le problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ . Lorsque la réaction devient très grande, plus précisément lorsque  $d$  est fixé et  $r \rightarrow \infty$ , la solution du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$  converge formellement vers la solution du problème

$$\begin{cases} u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) + G(x, u) = f & u = \beta(w), & \text{sur } Q \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (1.6)$$

où, pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $G(x, \cdot)$  est un graphe maximal monotone défini par

$$G(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } m(x) < r < M(x) \\ [0, +\infty) & \text{si } r = M(x) \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = m(x) \end{cases}$$

où  $m$  et  $M$  sont données par  $g(x, \cdot)^{-1}\{0\} = [m(x), M(x)]$  p.p.  $x \in \Omega$ . Le problème (1.6) s'écrit encore sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq u \leq M, \quad u = \beta(w) \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f)(u - m)(u - M) = 0 \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f) \geq 0 \text{ sur } [u = m] \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f) \leq 0 \text{ sur } [u = M] \end{array} \right\} \text{ sur } Q$$

$$a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

est appelé problème d'obstacle. Nous établirons un lien entre ce travail et celui que nous avons effectué dans le chapitre précédent, ou nous avons montré que si  $m(x) \leq u_0(x) \leq M(x)$  p.p.  $x \in \Omega$  alors, (1.6) admet une unique solution. Nous utilisons les résultats abstraits du chapitre 3, et nous montrons que si  $u_0$  ne prend pas ses valeurs dans  $[m(x), M(x)]$  p.p.  $x \in \Omega$  un phénomène de couche limite en  $t = 0$  apparaît; la limite devient singulière et la donnée initiale correspond au problème limite est  $m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x))$  p.p.  $x \in \Omega$ .

Pour  $r > 0$  fixé et  $d \rightarrow \infty$ , alors le problème limite est l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + r \int_{\Omega} g(x, c) dx = \int_{\Omega} f \quad \text{sur } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Finalement, nous étudions la compétition entre la réaction et la diffusion, pour cela on suppose que  $d \rightarrow \infty$  et  $r \rightarrow \infty$ . Nous montrons que le problème limite est l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$c_t + G_{\infty}(c) \ni \int_{\Omega} f \quad \text{sur } (0, T)$$

où  $G_{\infty}$  est le graphe maximal monotone défini par

$$G_{\infty}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } s \in [m_0, M_0] \\ (-\infty, 0] & \text{si } s = m_0 \\ [0, +\infty) & \text{si } s = M_0 \end{array} \right.$$

avec

$$m_0 = \min \left( \bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)] \right) \quad \text{et} \quad M_0 = \max \left( \bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)] \right).$$

Notons que  $\bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)] \neq \emptyset$ , car pour tout  $x \in \Omega$  on a  $0 \in [m(x), M(x)]$ .

Comme nous avons remarqué dans le Chapitre 3 cette compétition donne lieu à un phénomène de *couche limite* induite par les deux opérateurs (Réaction et Diffusion), et l'identification de la donnée initiale correspondante aux problèmes limites nécessite la séparation entre le cas où la réaction est plus importante que la diffusion ( $\frac{r}{d} \rightarrow \infty$ ) et le cas où la diffusion est plus grande que la réaction ( $\frac{d}{r} \rightarrow \infty$ ). Pour le cas où  $\frac{r}{d} \rightarrow \infty$  on montre que la donnée initiale correspond au problème limite est  $m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0)$ . Lorsque  $\frac{d}{r} \rightarrow \infty$  nous étudions le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini de la solution du problème d'obstacle avec une donnée initiale égale à  $m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x))$ , p.p.  $\Omega$ , et un terme source  $f = 0$ , et nous montrons que cette solution se stabilise à l'infini vers une valeur constante, et qui coïncide avec la donnée initiale de notre problème limite.

# Bibliographie

- [1] R.A.ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York - London, vol 65, 1975.
- [2] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, and A. RODRIGUES-BERNAL. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. *J. Diff. Equations*, 168:33–59, 2000.
- [3] D.G.ARONSON , *The Porous Medium Equation, in Nonlinear Diffusion Problems*, Lecture Notes in Math.vol.1224, Springer-Verlag, New York (1986) 12-46.
- [4] C. BAIOCCHI, and A. CAPELO. Variational and quasivariational inequalities, J.Wiley, chichester, New York, 1984.
- [5] PH. BENILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications* , Thesis, Univ. Orsay, 1972.
- [6] PH. BENILAN , M. G. CRANDALL , A. PAZY , *Evolution Equations Governed by Accretive Operators*, Book to appear.
- [7] PH.BÉNILAN, L.BOCCARDO, TH.GALLOUET, R.GARIEPY, M.PIERRE AND J.L. VAZQUEZ, *An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2): 241-273, 1995.
- [8] J.B.BERRYMAN, C.J.HOLLAND, *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rat. Mech. Anal. 74 (1980), 379-388.
- [9] Ph. BÉNILAN and N. IGBIDA. Singular limit for perturbed nonlinear semigroup. *Comm. Applied Nonlinear Anal*, 3(4): 23–42, 1996.
- [10] Ph. BÉNILAN and N. IGBIDA. Singular limit of changing sign solutions of the Porous medium equation. *J. Evol. Equations*, 3 (2003), no. 2, 215–224.
- [11] A. BONAMI, D. HILHORST, E. LOGAK, M. MIMURA , *Singular limit of a chemotaxis-growth model*, J. Math. Anal. Appl. 286 (2003), no. 1, 125-135.
- [12] D. BOTHE, D. HILHORST , *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction* , Adv. Differential Equations, 6 (2001), no. 10, 1173–1218.
- [13] D. BOTHE. The instantaneous limit of a reaction-diffusion system. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb,

- 1998), 215–224, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 215, Dekker, New York, 2001.
- [14] G. BOUCHITÉ , *Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesures. Applications en plasticité et homogénéisation*, Thèse d'état, Université de Perpignan, 1987.
- [15] H. BREZIS. Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear partial differential equations. In E. Zarantonello, editor, *Contribution to Nonlinear Functionnal Analysis*, Academic Press, 1971.
- [16] H. BRÉZIS , *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [17] H. BREZIS, A. PAZY, *Convergence And Approximation of Semigroupes of Non-linear Operators in Banach Spaces*, J . Func. Anal. 9:63-74, 1972.
- [18] A. N. CARVALHO and J. K. HALE. Large diffusion with dispersion, *Nonlinear Anal*, 17:1139–1151, 1991.
- [19] K.C. CHANG . Free boundary problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities, *Comm. Pure and Appl. Math*, XXXIII (1980), 117–146.
- [20] E. C. M. CROOKS, E. N. DANCER, D. HILHORST, M. MIMURA, H. NINOMIYA, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 5 (2004), no. 4, 645–665.
- [21] E. DIBENEDETTO, R. E. SHOWALTER, *A free-boundary problem for a degenerate parabolic system*, J. Differential Equations 50 (1983), 1-19.
- [22] J.H.ESPENSON, *Chemical Kinetics and Reaction Mechanisms*, 2nd ed. Mc Graw-Hill, 1995.
- [23] L. C. EVANS. A convergence theorem for a chimical diffusion-reaction system, *Houston J. Math*, 6:259–267, 1980.
- [24] L. C. Evans, M. Feldman, and R. F. Gariepy. Fast/Slow diffusion and collapsing sandpiles, *J. Differential Equations*, 137:166–209, 1997.
- [25] R. EYMARD, T. GALLOUET , R. HERBIN , *Finite Volume Methods*, Handbook for numerical analysis, Vol. VII,, Springer, 1999.
- [26] W. JAGER, J. KACUR, *solution of porous medium type systems by linear approximation schemes*, Numer. Math. 60 (1991), 407-427.
- [27] D. Kinderlehrer, and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications, *Academic press, New York*, 1997.
- [28] J. K. HALE and K. SAKAMOTO. Shadow systems and attractors in reaction-diffusion equations, *Appl. Anal.* 32:287–303, 1989.

- 
- [29] HENRY, M.; HILHORST, D.; NISHIURA, Y. Singular limit of a second order nonlocal parabolic equation of conservative type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers, *Hokkaido Math. J.* 32 (2003), no. 3, 561–622.
- [30] D. HILHORST, M. MIMURA, R. WEIDENFELD, Singular limit of a class of non-cooperative reaction-diffusion systems, *Taiwanese J. Math.* 7 (2003), no. 3, 391–421.
- [31] J. K. HALE. Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems, *J. Math. Anal. Appl.* 118:455–466, 1986.
- [32] D. HILHORST, R. VAN DER HOUT, L. PELETIER, . cA. Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction, *Nonlinear Anal.* 41 (2000), no. 5-6, Ser. A: Theory Methods, 803–823.
- [33] N. IGBIDA. A nonlinear diffusion problem with localized large diffusion , *Comm. Partial Differential Equations*, 29 (2004), no. 5-6, 647–670.
- [34] N. IGBIDA, *Stabilization for degenerate diffusion with absorption* , *Nonlinear Analysis* 54 (2003), 93-107.
- [35] J.M. MAZÓN, J.TOLEDO, *Large-time behavior of solutions of a system of PDE's governing diffusion processes in a heterogeneous medium* , *Differential Integral Equations*. 10(1997)165-180.
- [36] M. MIMURA Reaction-diffusion systems arising in biological and chemical systems: application of singular limit procedures. *Mathematical aspects of evolving interfaces*(Funchal, 2000), 89–121, *Lecture Notes in Math.*, 1812, Springer, Berlin, 2003.
- [37] F. MIGNOT, J. P. PUEL ,*Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*,64, 59 - 91 (1977).
- [38] I. MIYADERA, *Nonlinear Semigroups* , American Mathematical Society, 1992.
- [39] M.MUSKAT, *The flow of Homogeneous Fluids through Porous Media* , Mc Graw-Hill, New York, 1937.
- [40] A. RODRIGUES-BERNAL. Localized spatial homogenization and large diffusion, *SIAM J. Math. Anal.* 29:1361–1380, 1998.
- [41] J.F. RODRIGUES , *Obstacle problems in mathematical physics* , *Mathematics Studies* , 134, North-Holland Publishing Amsterdam, 1987.
- [42] K. SBIHI, P. WITTBOLD, *Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans  $L^1$  avec des conditions générales sur le bord*, Thèse, Université Louis Pasteur(Strasbourg I) 2006.
- [43] M. SCHATZMAN, *Numerical integration of reaction diffusion systems* Numer. Algorithms, 31(2002),247-269. *Numerical methods for ordinary differential equations* (Auckland, 2001).

- [44] R. E. SHOWALTER, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equation*, American Mathematical Society, 1997
- [45] P. WITTBOLD, *Nonlinear diffusion with absorption*, Pot. Anal.7(1997) n°.1,437-465.
- [46] X.XU , *Application of nonlinear semigroup theory to a system of PDEs governing diffusion processes in a heterogeneous medium* , Nonlinear Analysis TMA. 18(1992),61-77.

---

## Chapitre 2

### Rappels et Définitions

## 2.1 Rappels et Définitions

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats essentiels d'analyse fonctionnelle et de semi-groupes non-linéaires (Cf. [1], [4], [5], [6]). On se donne un espace de Banach réel  $X$  muni de la norme  $|\cdot|$ .

### 2.1.1 Opérateur accréatif et m-accréatif

On appelle opérateur de  $X$  toute application  $A : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  et on définit

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad R(A) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}(A)} Ax.$$

On identifie  $A$  à son graphe dans  $X \times X$ , et on écrit:

$$A = \{(x, y) : x \in \mathcal{D}(A), y \in Ax\}$$

l'opérateur  $A$  sera dit univoque si, pour tout  $x \in \mathcal{D}(A)$ ,  $Ax$  ne contient qu'un seul élément  $y$  de  $X$ , et on écrira  $y = Ax$ . On note  $|\cdot|_A$  la norme défini par

$$|x|_A = \liminf_{r \downarrow 0} \{|y'|; y' \in Ax', |x - x'| < r\}$$

Un opérateur  $A$  de  $X$  est dit accréatif si

$$|x - x'| \leq |x - x' + \lambda(y - y')| \quad \text{pour tout } \lambda > 0, x, x' \in \mathcal{D}(A), y \in Ax, y' \in Ax',$$

un opérateur  $A$  est dissipatif si et seulement si  $-A$  est accréatif. Afin de donner des formulations équivalentes de cette définition nous considérons l'application de dualité  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$  (avec  $X^*$  le dual de  $X$ ) défini par

$$F(x) = \{x^* \in X^* : x^*(x) = |x|^2 = |x^*|^2\},$$

et nous introduisons les notations de [7] suivantes: pour tout  $x, y \in X$

$$\langle y, x \rangle_s = \max\{x^*(y) : x^* \in F(x)\}, \quad \langle y, x \rangle_i = \min\{x^*(y) : x^* \in F(x)\}$$

ou bien

$$\langle y, x \rangle_s = |x| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|x + \alpha y| - |x|}{\alpha}, \quad \langle y, x \rangle_i = |x| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |x - \alpha y|}{\alpha}.$$

Avec ces notations un opérateur  $A$  dans  $X$  est accréatif si et seulement si

$$\langle y - y', x - x' \rangle_s \geq 0 \quad \text{pour tout } \alpha > 0, x, x' \in \mathcal{D}(A), y \in Ax, y' \in Ax'.$$

Dans la suite, nous utiliserons les crochets définis par:

$$[x, y] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|x + \alpha y| - |x|}{\alpha}, \quad [x, y]_i = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |x - \alpha y|}{\alpha},$$

il est clair que  $A$  est accréatif si et seulement si

$$[x - x', y - y'] \geq 0 \quad \text{pour tout } x, x' \in \mathcal{D}(A), y \in Ax, y' \in Ax',$$

on dit que  $A$  est strictement accréatif si et seulement si

$$[x - x', y - y']_i \geq 0 \quad \text{pour tout } x, x' \in \mathcal{D}(A), y \in Ax, y' \in Ax'.$$

**Proposition 2.1.1** (Cf. [2]) Soient  $x, y, z \in X$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors

- (i)  $[\lambda x, \mu y] = |\mu|[x, y]$  si  $\lambda\mu > 0$ .
- (ii)  $[x, \lambda x + y] = \lambda|x| + [x, y]$  et  $[0, y] = |y|$ .
- (iii)  $[x, y] \leq |y|$ .
- (iv)  $[x, y] \geq -[x, -y]$ .
- (v)  $[x, y + z] \leq [x, y] + [x, z]$ .

**Exemple:** Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un ouvert et  $X = L^p(\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$ . Pour tout  $u, v \in L^p(\Omega)$ , on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} [u, v] = \int_{\Omega} v |u|^{p-1} \text{sign}_0(u),$$

pour  $p = 1$  on a

$$[u, v] = \int_{\Omega} v \text{Sign}_0(u) + \int_{[u=0]} |v|,$$

où

$$\text{Sign}_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Un opérateur  $A$  de  $X$  est dit m-accréatif si  $A$  est accréatif et  $\mathcal{R}(I + \lambda A) = X$  pour  $\lambda > 0$ . Autrement dit :  $\forall \lambda > 0$ ,  $\mathcal{J}_{\lambda} := (I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction définie partout. Si, de plus,  $X$  est réticulé on définit  $y^+ = \max\{y, 0\}$  pour tout  $y \in X$ .

Un opérateur  $A$  de  $X$  est dit T-accréatif si  $A$  est accréatif et

$$|(\mathcal{J}_{\lambda} y - \mathcal{J}_{\lambda} y')^+| \leq |(y - y')^+| \quad \text{pour } \lambda > 0, y, y' \in \mathcal{D}(\mathcal{J}_{\lambda})$$

**Remarque 1** Soient  $X = \mathbb{R}$  et  $\gamma$  est une application multivoque dans  $\mathbb{R}$ , on identifie  $\gamma$  a son graphe et on dit que  $\gamma$  est monotone ( au lieu de accréatif ) si

$$(u - u', v - v') \geq 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \gamma, (u', v') \in \gamma.$$

Si  $\gamma$  est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotone, alors  $\gamma$  est appelé maximal monotone. Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un ouvert,  $\gamma : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  un graphe monotone. On désigne par  $\gamma_\lambda$  l'approximation Yosida de  $\gamma$ , définie par

$$\gamma_\lambda(x, \cdot) = \frac{1}{\lambda} \left( I - (I + \lambda \gamma_\lambda(x, \cdot))^{-1} \right) \quad \text{p.p. } \Omega$$

L'application  $\gamma_\lambda$  est maximal monotone, lipschitzienne et pour presque tout  $x \in \Omega$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  on a  $|\gamma_\lambda(x, s)| \rightarrow |\gamma_0(x, s)|$  pour tout  $s \in \mathcal{D}(\gamma(x, \cdot))$  avec  $\gamma_0$  est le graphe défini comme suite: pour p.p.  $x \in \Omega$ , on a

$$\gamma_0(x, s) = \begin{cases} \inf \gamma(x, s) & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ \sup \gamma(x, s) & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

### Convergence et accréativité

Soit  $(\mathcal{A}_k)_{k>0}$  une famille d'opérateurs sur  $X$ , alors  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k$  est défini par  $(x, y) \in \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k$  s'il existe  $(x_k, y_k) \in \mathcal{A}_k$  tel que  $x_k \rightarrow x$  et  $y_k \rightarrow y$ .

**Proposition 2.1.2** (Cf. [2] ) Soient  $(\mathcal{A}_k)_{k>0}$  une suite d'opérateurs  $m$ -accréatifs sur  $X$ , et  $Y$  un sous espace dense dans  $X$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_\infty$
- (ii)  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k \supseteq \mathcal{A}_\infty$
- (iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (I + \lambda \mathcal{A}_k)^{-1} f = (I + \lambda \mathcal{A}_\infty)^{-1} f, \forall f \in Y$  et  $\lambda > 0$ .

### 2.1.2 Equation d'évolution associée aux opérateurs accréatifs

Soit  $A$  un opérateur de  $X$ ,  $u_0 \in X$  et  $f \in L^1(0, T; X)$ . On considère le problème de Cauchy suivant:

$$P(u_0, f) \begin{cases} u_t + A u \ni f & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On appelle solution forte de  $P(u_0, f)$  toute fonction  $u \in W^{1,1}(0, T; X)$  avec  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$  p.p.  $t \in (0, T)$  telle que  $P(u_0, f)$  est vérifié pour presque tout  $t \in (0, T)$ . En général cette solution forte n'existe pas, donc on cherche des solutions appelées *bonne solution* que nous obtenons en discrétisant la dérivée  $u_t$  dans  $P(u_0, f)$  par le schéma implicite. En effet, pour toute subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ , on considère le système discrétisé

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} + A u_i \ni f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

avec  $\epsilon_{i-1} = t_i - t_{i-1}$  et  $f_1, f_2, \dots, f_n$  telle que

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f - f_i| \leq \epsilon.$$

En utilisant la résolvante de  $A$ , les valeurs  $u_i$ , sont déterminées successivement par

$$u_i = \mathcal{J}_{\epsilon_{i-1}}(u_{i-1} + \epsilon_{i-1} f_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alors le problème  $P(u_0, f)$  admet une solution si, et seulement si,  $u_{i-1} + \epsilon_{i-1} f_i \in \mathcal{R}(I + \lambda A)$ , pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ , ce qui est vrai en particulier pour les opérateurs  $m$ -accrétifs. La fonction  $u_\epsilon : [0, T] \rightarrow X$  définit par  $u_\epsilon(0) = u_0$  et  $u_\epsilon(t) = u_i$  pour  $t_{i-1} < t \leq t_i$  est considérée comme solution approchée de  $P(u_0, f)$  et converge vers une unique fonction  $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  telle que  $u(0) = u_0$ . Cette fonction est appelée *bonne solution* de  $P(u_0, f)$  sur  $[0, T]$ .

**Théorème 2.1.1** (Cf. [2]) *Soit  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif dans  $X$  et  $f \in L^1(0, T; X)$ . Alors, pour tout  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ , il existe une unique bonne solution de  $P(u_0, f)$ . Si,  $f = 0$  alors  $u$  est donnée par la formule exponentielle suivante:*

$$u(t) = e^{-tA} u_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0. \quad (2.2)$$

*De plus, la famille d'opérateurs  $e^{-tA}$ ,  $t > 0$ , est un semi-groupe de contractions continues de  $\overline{\mathcal{D}(A)}$  dans lui même.*

**Théorème 2.1.2** (Cf. [2] ) Soit  $X$  un espace de Banach, pour tout  $k = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $A_k$  une suite d'opérateurs  $m$ -accrétifs sur  $X$ ,  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_k)}$ ,  $f_k \in L^1(0, T; X)$  et  $u_k$  la bonne solution de

$$\begin{cases} u_{k_t} + A_k u_k \ni f_k & \text{sur } (0, T) \\ u_k(0) = u_0. \end{cases}$$

Si, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a

$$(I + A_k)^{-1} f \longrightarrow (I + A_\infty)^{-1} f, \text{ dans } X, \forall f \in Y,$$

et

$$f_k \longrightarrow f_\infty, \text{ dans } L^1(0, T, X),$$

alors

$$u^k \text{ converge vers } u^\infty, \text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; X).$$

### 2.1.3 Outils et notations fonctionnels

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un ouvert, pour  $1 \leq p \leq \infty$  on note par  $L^p(\Omega)$  l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que, si  $p < \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

et pour  $p = \infty$ , on note

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess - sup}_{\Omega} |u| < \infty.$$

Nous nous référons à [4] pour les propriétés et les résultats principaux sur les espaces de Lebesgue. Pour toute fonction  $u$  dans un espace de Lebesgue, on désigne  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  ( ou tout simplement  $u_{x_i}$  ) sa dérivée partielle dans la direction  $x_i$  définie au sens des distributions, par

$$\langle u_{x_i}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx,$$

et on note par  $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$  son gradient. L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , est l'espace des fonctions  $u \in L^p(\Omega)$  tels que  $Du \in [L^p(\Omega)]^N$  muni de la norme naturelle  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  par cette norme. On rappelle que, pour  $1 < p < \infty$ , l'espace dual de  $L^p(\Omega)$  s'identifie avec  $L^{p'}(\Omega)$ , où  $p' = \frac{p}{p-1}$  est le conjugué de  $p$ , et l'espace dual de

$W_0^{1,p}(\Omega)$  est noté par  $W^{-1,p'}(\Omega)$ .

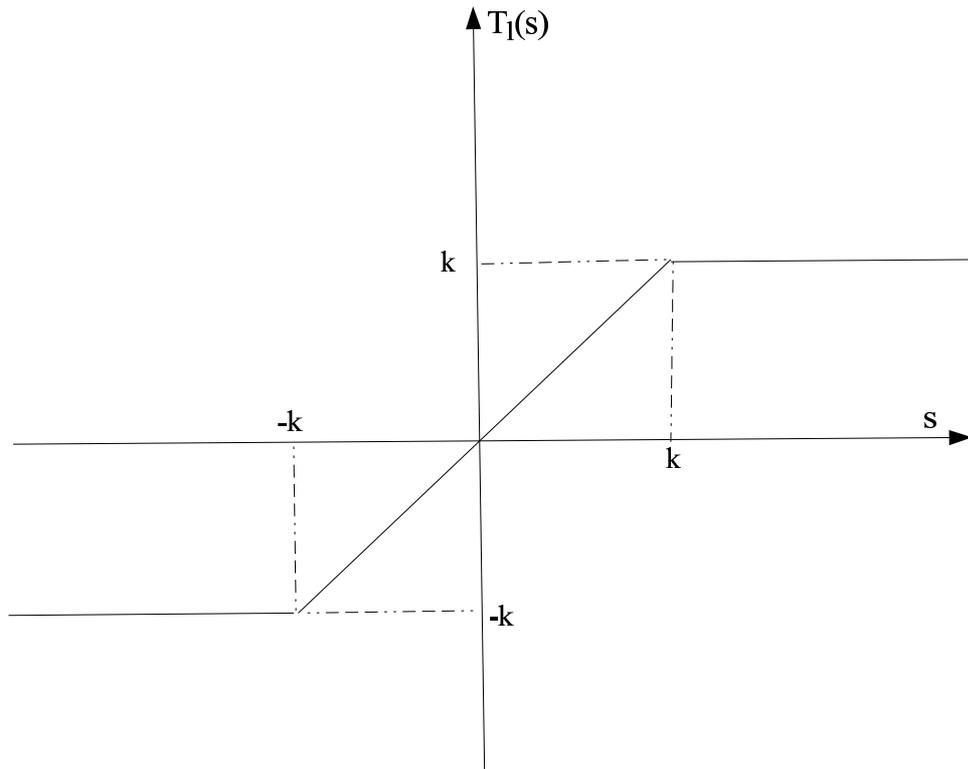
**Théorème 2.1.3** (Cf. [4]) Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne telle que  $G(0) = 0$ . Alors pour tout  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  on a  $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , de plus  $DG(u) = G'(u)Du$  pour presque partout  $x$  dans  $\Omega$ .

Conséquence de ce Théorème est que

$$Du = 0 \quad \text{p.p. dans } H_a = \{x \in \Omega, \text{ tel que } u(x) = a\},$$

pour tout  $a > 0$ . Par conséquent, nous pouvons considérer le composé d'une fonction dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec une autre fonction auxiliaire utile. Souvent ici nous allons utiliser la fonction de troncation au niveau  $k > 0$ , défini par

$$T_k(s) = \begin{cases} k \text{Sign}_0(s) & \text{si } |s| > k \\ s & \text{si } |s| \leq k; \end{cases}$$



Pour toute fonction  $u = u(x)$  définie p.p.  $x \in \Omega$ , on note  $T_k u$  la fonction définie p.p.  $x \in \Omega$  par  $T_k u(x) = T_k(u(x))$ .

On remarque que, si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors  $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $DT_k(u) = Du\chi_{[|u|<k]}$  p.p. dans  $\Omega$ , pour tout  $k > 0$ , où  $\chi_B \subseteq \Omega$  est la fonction caractéristique de  $B$ . Si  $u$  est une fonction telle que  $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$ , alors il existe une unique fonction mesurable  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$v = DT_k(u)$$

pour tout  $k > 0$ , et presque partout sur l'ensemble  $[|u| < k]$  (Cf. [3]).

## Bibliographie

- [1] PH. BÉNILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications* , Thesis, Univ. Orsay, 1972.
- [2] PH. BÉNILAN, M. G. CRANDALL, A. PAZY , *Evolution equation governed by accretive operators*, (Book to appear).
- [3] PH. BÉNILAN, L. BOCCARDO, T. GALLOUET, R. GARIEPY, M. PIERRE AND J. L. VAZQUEZ, *An  $L^1$  -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2): 241-273, 1995.
- [4] H. BRÉZIS , *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [5] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les Espaces de Hilbert*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1984.
- [6] H. BRÉZIS, A. PAZY, *Convergence and approximation of semigroupes of nonlinear operators in Banach spaces* , J . Func. Anal. 9:63-74, 1972.
- [7] I. MIYADERA, *Nonlinear semigroups* . American Mathematical Society. 1992.



---

## Chapitre 3

# Some Competition Phenomena in Evolution Equations

**abstract**

This paper is concerned with some nonlinear evolution equations governed by two competitive operators. We treat the problem in a general setting and show how to apply the results to the particular situation of reaction diffusion equation with large reaction and/or large diffusion.

**keywords :** Singular limit, large reaction, large diffusion, elliptic-parabolic problem,  $L^1$  theory, Semigroup of contraction, competition, nonlinear evolution equation, weak solution.

### 3.1 Introduction

In general, the evolution of biological and physical problem uses different processes. May be the most known processes are diffusion, reaction and convection. Sometimes, they differ very strongly from one part of the physical system to the other, so that some kind of competition between them appears. The aim of this paper is to describe the asymptotic behavior of evolution problem governed by two (or more) competitive processes like reaction/diffusion or convection/diffusion..

Several useful models for this type of problems may be described by evolution problem governed by the sum of two (or many) operators. These operators are connected in the equation by rates which strongly changes. For instance, let us consider the evolution problem

$$u_t + d_k Au + r_k Bu = f \quad \text{in } (0, T), \quad (3.1)$$

where  $A$  and  $B$  are two operators describing the considered processes with rates  $d_k \in \mathbb{R}^+$  and  $r_k \in \mathbb{R}^+$ , and  $f$  is a source term. The variation of the processes lies in the parameter  $k \in \mathbb{R}$ . We are interested to the asymptotic behavior of the solution  $u_k$  of evolution problem of type (3.1) when each one of the operators  $A$  and  $B$  acts strongly. In other words, we assume that  $\frac{r_k}{d_k} \rightarrow +\infty$  or  $\frac{r_k}{d_k} \rightarrow 0$ , as  $k \rightarrow \infty$ , and we study the asymptotic behavior of  $u_k$ . First, we study the problem within an abstract general framework. Then, we show how to apply the result to the particular situation (3.1) and also to concrete examples like the reaction-diffusion equation.

Note that this problem is a particular case of an overall program of studying the so called singular limit for nonlinear partial differential equations. That is a perturbation problem where the perturbed problem is of totally different character than the unperturbed one. In a Banach space  $X$ , let us consider a family of evolution equations

$$u_t + A_k u \ni f \quad \text{in } (0, \infty), \quad u(0) = u_0 \quad (3.2)$$

governed by the family of operators  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  being such that (3.2) has a solution  $u_k \in \mathcal{C}([0, T], X)$  and such that  $A_k$  converges to  $A$  in the graph sense, as  $k \rightarrow \infty$ . It is known that (see for instance [16]) if  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ , then  $u_k \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}([0, T], X)$  and  $u$  is the solution of

$$u_t + Au \ni f \quad \text{in } (0, \infty), \quad u(0) = u_0. \quad (3.3)$$

But, if  $u_0 \in X \setminus \overline{\mathcal{D}(A)}$ , then (3.3) is not well posed and in general the limit of  $u_k$  may not exist. However, for a large class of concrete problems the limit  $u$  exists and there exists  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ , such that  $u$  is the solution of

$$u_t + Au \ni f \quad \text{in } (0, \infty), \quad u(0) = \underline{u}_0.$$

But the characterization of  $\underline{u}_0$  is not clear yet in general. For instance, if  $X$  is a Hilbert space and  $A_k$  is the Yoshida approximation of  $A$  assumed to be maximal

monotone in  $X$ , then (cf. [14])  $\underline{u}_0$  is the projection of  $u_0$  on the closure of the domain of  $A$ . It is again the projection, in some particular case of  $k$ -homogeneous accretive operators  $A_k$ ; i.e.  $A_k(\lambda u) = \lambda^k A(u)$  (cf. [9]). But, in general it is not the projection (see [9] and [11]). Paper [10] treats the case where  $A_k = B_k + F$  which  $B_k$  being a family of accretive operators, and  $F$  being nondecreasing bounded and continuous. In [10], it is proved that  $\underline{u}_0$  is given by  $\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-tB_k} u_0$ , where  $e^{-tB_k}$  is the semigroup generated by  $B_k$ . In this paper, we treat the case where a rescaling makes the limit regular. More precisely, we assume that there exists  $m(k) \rightarrow 0$ , such that  $m(k)A_k \rightarrow \tilde{A}$  and  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{A})}$ . As well as the reaction-diffusion problems is concerned (cf. section 3.), this condition is fulfilled in a large field of applications like models of the type (3.1) (cf. section 2).

To give a brief description of our main results, let us consider  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  a bounded domain with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  and  $f \in L^\infty(Q)$ . In  $\Omega$ , we consider the Reaction-Diffusion problem of the form

$$P^{d,r}(u_0, f) \begin{cases} u_t - d \Delta w + r g(u) = f, & u = \beta(w) & \text{in } Q := \Omega \times (0, T) \\ \partial_{\vec{n}} w = 0 & & \text{in } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where  $d > 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a nondecreasing continuous function such that  $\beta(0) = 0$ ,

$$(H_1) \quad \text{Im}(\beta) = \mathbb{R}$$

and

$$(H_g) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ is continuous, nondecreasing with } g(0) \equiv 0.$$

It is known that  $P^{d,r}(u_0, f)$  is well posed in the sense of weak solution. More precisely (see for instance [31] and the references therein), there exists a unique  $u \in L^\infty(Q)$ , such that there exists  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $u = \beta(w)$  a.e. in  $Q$  and

$$d \int_0^\tau \int_\Omega Dw D\xi + r \int_0^\tau \int_\Omega g(u)\xi = \int_0^\tau \int_\Omega f\xi + \int_0^\tau \int_\Omega u\xi_t + \int_\Omega u_0\xi(0),$$

for any  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$  such that  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ . For  $P^{d,r}(u_0, f)$ ,  $d$  and  $r$  represent respectively the diffusion and the reaction rate. We are interested in the asymptotic behavior of the solution as  $d$  and/or  $r$  being very large. Concretely this situation can be found in models combining reactive and diffusive processes acting strongly

and creating a some competition between the processes (see [26], [15], [18], [21], [12], [23], [13], [24], [19], [35], [27] and the references therein for concrete applications).

If  $r = 0$  (resp.  $d = 0$ ) the limit of the solution as  $d \rightarrow \infty$  (resp.  $r \rightarrow \infty$ ) is also given by the large time behavior of the solution of  $P^{d,0}(u_0, f)$  (resp.  $P^{0,r}(u_0, f)$ ). Indeed, it is enough to consider the rescaling  $\tau = dt$  (resp.  $\tau = rt$ ). In these cases, the problem is well understood (see [2], [1], [34], [32], [31] and the references therein). Our main interest lies in the case where  $d$  and  $r$  are both non null.

If we assume that  $d > 0$  and  $r \rightarrow \infty$ , then the problem is the reaction-diffusion equation with large reaction (cf. [15], [21], [12], [13], [24], [19], [35] and [27]). Formally, we see that the limiting problem is

$$\begin{cases} u_t - d\Delta w + G(u) = f, & u = \beta(w) & \text{in } Q \\ \partial_{\vec{n}} w = 0, & & \text{in } \Sigma \end{cases} \quad (3.4)$$

where,  $G$  is the maximal monotone graph given by

$$G(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } m_0 < r < M_0 \\ [0, +\infty) & \text{if } r = M_0 \\ (-\infty, 0] & \text{if } r = m_0 \end{cases}$$

where  $m_0$  and  $M_0$  are given by  $g^{-1}\{0\} = [m_0, M_0]$ . In other words the limiting problem is

$$\left. \begin{cases} m_0 \leq u \leq M_0, & u = \beta(w) \\ (u_t - d \Delta w - f)(u - m_0)(u - M_0) = 0 \\ (u_t - d \Delta w - f) \geq 0 \text{ in } [u = m_0] \\ (u_t - d \Delta w - f) \leq 0 \text{ in } [u = M_0] \\ \partial_{\vec{n}} w = 0 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{in } Q \\ \text{on } \Sigma, \end{array}$$

which is the so called obstacle problem. Indeed, an instantaneous new distribution of the spatial inhomogeneities appears in the limiting problem. The solution is forced to transfer between  $M_0$  and  $m_0$ . Compatible initial data for (3.4) are functions living in  $[m_0, M_0]$ , so that the limit of the solution of  $P^{d,r}(u_0, f)$  is singular. In the sense that a boundary layer appears in the passage to the limit and it could be interesting to identify the compatible initial data for (3.4) associated with  $u_0$ . As a consequence

of the main results of this paper, the corresponding compatible initial data for the limiting problem is given by the limit, as  $t \rightarrow \infty$ , of the solution of the ode

$$\begin{cases} z_t + r g(z) = 0 & \text{in } (0, T) \\ z(0) = u_0, \end{cases}$$

which is equal to  $m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$ .

If  $r > 0$  and  $d \rightarrow \infty$ , then the problem describe a reaction-diffusion problem with large diffusion (cf. [3], [38], [26] and [30]). Using the fact that  $g$  is nondecreasing and continuous this is a particular case of [30] and the limit of the solution is given by

$$\begin{cases} c_t + r g(c) = \int_{\Omega} f & \text{in } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Assuming that  $d \rightarrow \infty$  and  $r \rightarrow \infty$ , the problem models a reaction diffusion problem with large reaction and large diffusion. In this case, a competition between the reaction and the diffusion appears and we need to distinguish between the cases where one of the rates is more important than the other. So, assume that  $d = d(k)$  and  $r = r(k)$ , with  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ . In the limiting problem, the solution is forced to be constant in space and transfers between  $M_0$  and  $m_0$ . Precisely, the limiting problem is the following ode

$$c_t + G(c) \ni \int_{\Omega} f \quad \text{in } (0, T).$$

For the identification of the corresponding initial data, and as a consequence of the competition phenomena, we treat separately cases  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0$ .

Actually, we prove that

1. if  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0$ , then  $c(0) = m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0)$ ,
2. if  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty$ , then  $c(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$  where  $z$  is the solution of the obstacle problem  $P_{\infty}^d$  with  $z(0) = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$ , a.e.  $\Omega$ .

Concerning the corresponding initial data for the limiting problem, we remark that it is given by the large time behavior of the equation stated only with the most competitive process. In this direction, our main results (cf. Theorem 3.2.1, Theorem 3.2.2 and Theorem 3.2.3) also allow us to describe the large time behavior for some

evolution problems by adding an artificial regularizing processes (cf. Corollary 3.2.1). A concrete situation for hyperbolic equations will be treated in details separately in forthcoming papers.

In the following section, we give in the first part, some preliminaries on nonlinear semigroup theory. In the second part, we state and prove our main result in a general abstract framework. We also show how to apply this result to the particular situation (3.1). At last, section 3 is devoted to the proof of the results for concrete situation  $P^{d,r}(u_0, f)$ .

## 3.2 Abstract framework.

### 3.2.1 Preliminaries.

Throughout this section  $(X, |\cdot|)$  is a Banach space,  $[\cdot, \cdot]$  is the bracket defined as follow

$$[x, y] = \inf_{\lambda > 0} \frac{|x + \lambda y| - |x|}{\lambda} \quad \forall x, y \in X.$$

Recall that an accretive operator  $A$  is a function (possibly multi-valued) from  $X$  to  $\mathcal{P}(X)$  with nonexpansive resolvent; i.e.  $\mathcal{J}_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ . It is known also, that this is equivalent to say that for any  $v_1 \in Au_1$  and  $v_2 \in Au_2$ , then

$$[u_1 - u_2, v_1 - v_2] \geq 0.$$

In connection with the Hilbert case, i.e.  $X$  is a Hilbert space, an operator is accretive if and only if it is monotone. If  $A$  is  $m$ -accretive, i.e.  $A$  is accretive and the resolvent is everywhere defined, then, for any  $f \in L^1_{loc}(0, T; X)$ , and  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$  (the closure of the effective domain  $\mathcal{D}(A) = \{x \in X ; Ax \neq \emptyset\}$ ) the evolution problem

$$\begin{cases} u_t + Au \ni f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

has a unique *mild-solution*. It is the solution that we obtain through the discretization of the derivative in (3.6) by the implicit difference schema. Indeed, for any partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T \leq t_n$ , take the system of difference relations

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} + Au_i \ni f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

where  $\epsilon_{i-1} = t_i - t_{i-1}$  and  $f_1, f_2, \dots, f_n$  are such that

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f - f_i| \leq \epsilon.$$

Using the resolvent of  $A$ , the value  $u_i$ , are determined successively by

$$u_i = \mathcal{J}_{\epsilon_{i-1}}(u_{i-1} + \epsilon f_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

and therefore (3.7) has a solution if, and only if,  $u_i + \epsilon f_i \in \mathcal{R}(I + \lambda A)$ , for all  $i = 1, 2, \dots, n$ . In particular, this is true for  $m$ -accretive operator. The step functions  $u : [0, T] \rightarrow X$  defined by  $u(0) = u_0$  and  $u(t) = u_i$  for  $t_{i-1} < t \leq t_i$  is considered to be an approximated solution of (3.6), converges to a unique function  $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  such that  $u(0) = u_0$ . This function  $u$  is called the mild-solution of (3.6) on  $[0, T]$ . In particular, if  $f = 0$ , then the mild solution is given by the exponential formula

$$u(t) = e^{-tA}u_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{t}{n}A \right)^{-n} u_0. \quad (3.8)$$

Moreover, the family of operators  $e^{-tA}$ ,  $t > 0$ , is a continuous semigroup of nonexpansive self-mappings of  $\overline{\mathcal{D}(A)}$ .

Many of partial differential equations that can be studied by means of the nonlinear semigroup theory satisfies a ‘‘comparison principle’’. This fact is a consequence at the order preserving property of the semigroup  $(e^{-tA}u_0)_{t \geq 0}$ . The operators which generates order-preserving semigroups are the following: Let  $X$  be a Banach lattice and  $A$  be an operator in  $X$ .  $A$  is called  $T$ -accretive if, its resolvents are  $T$ -contractions, i.e.,

$$|(\mathcal{J}_\lambda x - \mathcal{J}_\lambda \hat{x})^+| \leq |(x - \hat{x})^+| \quad \text{for } x, \hat{x} \in \mathcal{D}(\mathcal{J}_\lambda).$$

Now, since every  $T$ -contraction is order-preserving, then if  $A$  is  $T$ -accretive then, for each  $t > 0$ ,  $e^{-tA}$  is order-preserving. In general,  $T$ -accretivity does not implies accretivity, but in some Banach spaces  $T$ -accretivity implies accretivity, this remains true for the case of  $L^p(\Omega)$  spaces, with  $1 \leq p \leq \infty$ .

To end up these preliminaries, remember that if we replace the function  $f$  by a continuous perturbation  $F(t, u)$ ; i.e. we consider in  $X$ , the evolution problem

$$\begin{cases} u_t + A u \ni F(t, u) & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

then the definition of the mild solution remains the same by replacing  $f(\cdot)$  by  $F(\cdot, u(\cdot))$ , and we know that

**Proposition 3.2.1** (Cf. [10] ) *Let  $A$  be  $m$ -accretive in  $X$ ,  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$  and  $F : [0, T] \times \overline{\mathcal{D}(A)} \rightarrow X$  be a Caratheodory function; i.e.  $F(t, x)$  is measurable in  $t$  and continuous with respect to  $x$ , such that*

$$(\mathcal{F}_1) \quad \begin{cases} [x - y, F(t, x) - F(t, y)] \leq \alpha(t)|x - y| & \text{for any } x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)} \\ \text{and a.e. } t \in (0, T) \text{ with } \alpha \in L^1_{loc}([0, T]), \end{cases}$$

$$(\mathcal{F}_2) \quad |F(t,x)| \leq c(t) \quad \text{with } c \in L^1_{loc}([0,T]),$$

then (3.9) has a unique mild solution.

### 3.2.2 Main results.

Now, in  $X$  let us consider  $(\mathcal{A}_k)_{k \geq 1}$  a sequence of m-accretive operator, such that

$$(\mathcal{H}_1) \quad \mathcal{A}_k \longrightarrow \mathcal{A}_\infty \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty, \quad \text{in the sense of the resolvent,}$$

i.e.  $(I + \lambda \mathcal{A}_k)^{-1}$  converges, in  $X$ , to  $(I + \lambda \mathcal{A}_\infty)^{-1}$ . Recall that, since  $\mathcal{A}_k$  is assumed to be m-accretive, then  $(\mathcal{H}_1)$  is equivalent to the convergence in the graph sense; i.e. for  $v_k \in \mathcal{A}_k u_k$ , if  $u_k \rightarrow u$  and  $v_k \rightarrow v$ , then  $v \in \mathcal{A}_\infty u$ .

We are interested to the asymptotic behavior, as  $k \rightarrow \infty$ , of mild solution  $u_k$  of

$$(\mathcal{P}_k) \quad \begin{cases} u_t + \mathcal{A}_k u \ni F(t,u) & \text{in } (0,T) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)}$  and  $F : (0,T) \times \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)} \rightarrow X$  is a Caratheodory function satisfying  $(\mathcal{F}_1)$  and  $(\mathcal{F}_2)$ . In general,  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)} \neq \bigcap_{k \geq 1} \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)}$ , and

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}_\infty u \ni F(t,u) & \text{in } [0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

has a solution if and only if  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ . If  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ , we know (Theorem of Trotter-Kato-Brezis-Pazy [16] and [28] ), that  $u_k \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}([0,T),X)$  and  $u$  is the unique mild solution of

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}_\infty u \ni F(t,u) & \text{in } [0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

But, if  $u_0 \notin \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$  and the limit of  $u_k$  exists, then the limit is singular, a boundary layer at  $t = 0$  appears in the passage to the limit. In fact, there exists a modified initial data  $\underline{u}_0$  (depending on  $u_0$  and  $\mathcal{A}_\infty$ ) such that the limit of  $u_k$  is the solution of

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}_\infty u \ni F(t,u) & \text{in } [0,T) \\ u(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

The characterization of  $\underline{u}_0$  is not well understood in general. In this paper we are interested to characterization of  $\underline{u}_0$ , in the case where  $\mathcal{A}_k$  is such that there exist  $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(k) = 0$ ,

$$(\mathcal{H}_2) \quad \tilde{\mathcal{A}}_k := m(k)\mathcal{A}_k \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_\infty \quad \text{as } k \longrightarrow \infty,$$

and

$$(\mathcal{H}_3) \quad u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}_\infty)}.$$

In other words, we assume that there exists a rescaling for which the limit is not singular.

**Theorem 3.2.1** *Let  $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence of  $m$  - accretive operators in  $X$  satisfying  $(\mathcal{H}_1)$  and  $(\mathcal{H}_2)$ ,  $F : [0, T] \times \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)} \rightarrow X$  be a Caratheodory function satisfying  $(\mathcal{F}_1)$  and  $(\mathcal{F}_2)$ ,  $u_0 \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)}$  and  $u_k$  be the mild solution of  $(\mathcal{P}_k)$ . If,  $u_0$  satisfies*

$(\mathcal{H}_3)$  and

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\tilde{\mathcal{A}}_\infty} u_0 =: \underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)},$$

then

$$u_k \longrightarrow \underline{u} \text{ in } \mathcal{C}((0, T], X) \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty,$$

where  $\underline{u}$  is the unique mild solution of

$$(\mathcal{P}_\infty) \quad \begin{cases} \underline{u}_t + \mathcal{A}_\infty \underline{u} \ni F(t, \underline{u}) & \text{in } (0, T) \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

**Proof:** Thanks to Theorem 4.1. of [28], it is enough to prove the result for  $F \equiv 0$ . In this case, it is known that the mild solution is given by the exponential formula. So, for any  $t, \tau > 0$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $\tau m(k) < t$ , we have

$$\begin{aligned} |u^k(t) - \underline{u}(t)| &= |e^{-t\mathcal{A}_k} u_0 - e^{-t\mathcal{A}_\infty} \underline{u}_0| \\ &\leq |e^{-t\mathcal{A}_k} u_0 - e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k} \underline{u}_0| + |e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_\infty} \underline{u}_0 - e^{-t\mathcal{A}_\infty} \underline{u}_0| \\ &\quad + |e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k} \underline{u}_0 - e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_\infty} \underline{u}_0|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Using the additive property of the semigroup  $e^{-t\mathcal{A}_k}$ , the first term of the right hand of (3.10) satisfies

$$\begin{aligned} |e^{-t\mathcal{A}_k}u_0 - e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k}\underline{u}_0| &= |e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k}e^{-\tau m(k)\mathcal{A}_k}u_0 - e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k}\underline{u}_0| \\ &\leq |e^{-\tau m(k)\mathcal{A}_k}u_0 - \underline{u}_0| = |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_k}u_0 - \underline{u}_0| \\ &\leq |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_k}u_0 - e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_\infty}u_0| + |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_\infty}u_0 - \underline{u}_0|. \end{aligned}$$

The contraction property of  $e^{-\mathcal{A}_\infty}$  implies that the second term (3.10) is such that

$$|e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0 - e^{-t\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0| \leq |e^{-\tau m(k)\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0 - \underline{u}_0|.$$

For the last term of the right hand of (3.10), we have

$$|e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_k}\underline{u}_0 - e^{-(t-\tau m(k))\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0| \leq \sup_{s \in [0, T]} |e^{-s\mathcal{A}_k}\underline{u}_0 - e^{-s\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0|.$$

So

$$\begin{aligned} |u^k(t) - \underline{u}(t)| &\leq |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_k}u_0 - e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_\infty}u_0| + |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_\infty}u_0 - \underline{u}_0| \\ &\quad + \sup_{s \in [0, T]} |e^{-s\mathcal{A}_k}\underline{u}_0 - e^{-s\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0| + |e^{-\tau m(k)\mathcal{A}_\infty}\underline{u}_0 - \underline{u}_0| \end{aligned}$$

Using the fact that  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}_\infty)}$ ,  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(k) = 0$  and [16], we deduce that

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |u^k(t) - \underline{u}(t)| \leq |e^{-\tau\tilde{\mathcal{A}}_\infty}u_0 - \underline{u}_0|.$$

At last, letting  $\tau \rightarrow +\infty$  we obtain

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u^k(t) - \underline{u}(t)| = 0.$$

■

Still in the abstract setting, the main applications we have in mind is the study of evolution problems governed by two competitive operators. More precisely, consider the evolution problem

$$(\mathcal{P}'_k) \quad \begin{cases} u_t + d(k)Au + r(k)Bu \ni F(t, u) & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

where  $r, d : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  are two functions such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{d(k)} = +\infty, \quad (3.11)$$

$A, B, d(k)A + r(k)B$  and  $\mathcal{H}$  are accretive operators such that  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ ,  $F$  satisfies  $(\mathcal{F}_1) - (\mathcal{F}_2)$  and  $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ . We assume that

$$d(k)A + r(k)B \rightarrow \mathcal{H}, \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

As a consequence of Theorem 3.2.1, we have

**Theorem 3.2.2** *Let  $u_k$  be the mild solution of  $(\mathcal{P}'_k)$ . Assume that*

$$\varepsilon A + B \rightarrow \tilde{B}, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

and  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{B})}$ . If

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\tilde{B}} u_0 := \underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{H})}, \quad (3.14)$$

then, as  $k \rightarrow \infty$ ,  $u_k \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}((0,T),X)$ , and  $u$  is the mild solution of

$$(\mathcal{P}'_\infty) \quad \begin{cases} u_t + \mathcal{H}u \ni F(t,u) & \text{in } (0,T) \\ u(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

**Proof.** It is enough to apply Theorem 3.2.1 with  $\mathcal{A}_k := d(k)A + r(k)B$  and  $m(k) = [r(k)]^{-1}$ . ■

**Remark 3.2.1** 1. In general,  $\tilde{B} \neq B$ . For instance, let  $X = \mathbb{R}$  and  $A$  be the maximal monotone graph defined by

$$A(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } |r| < 1 \\ [0, \infty) & \text{if } r = 1 \\ (-\infty, 0] & \text{if } r = -1. \end{cases}$$

Then, it is clear that for any  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon A = A$  and  $\varepsilon A + B = A + B = \tilde{B}$ .

2. If  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$  and  $A$  is strictly accretive, i.e.  $[u_1 - u_2, v_2 - v_1] \leq 0$  for any  $v_1 \in Au_1, v_2 \in Au_2$ , then  $\tilde{B} = B$ . Indeed, set

$$[x, y]_s = -[x, -y] := \sup_{\lambda < 0} \frac{|x + \lambda y| - |x|}{\lambda},$$

so that  $A$  is strictly accretive is equivalent to  $[u_1 - u_2, v_1 - v_2]_s \geq 0$ , for any  $v_1 \in Au_1, v_2 \in Au_2$ . For  $f \in X$ , let  $\tilde{u}_\varepsilon$  be the solution of the problem

$$\tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon A\tilde{u}_\varepsilon + B\tilde{u}_\varepsilon \ni f,$$

and  $\tilde{u}$  is the solution of

$$\tilde{u} + B\tilde{u} \ni f.$$

Since  $B$  is accretive in  $X$  then for  $\tilde{w}_\varepsilon \in B\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{w} \in B\tilde{u}$  we have

$$[\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, \tilde{w}_\varepsilon - \tilde{w}] \geq 0$$

and

$$[\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{u}] \geq 0 \quad \text{where } \tilde{v}_\varepsilon \in A\tilde{u}_\varepsilon,$$

which implies that

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}| &\leq [\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon] \\ &\leq [\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\varepsilon (\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}) - \varepsilon \tilde{v}] \\ &\leq \varepsilon [\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}] + [\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\varepsilon \tilde{v}]. \end{aligned}$$

This implies that,

$$[\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, -\varepsilon \tilde{v}] \leq \varepsilon |\tilde{v}|$$

and

$$\varepsilon [\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}, \tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}]_s + |\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}| \leq \varepsilon |\tilde{v}| \text{ for } \tilde{v} \in A\tilde{u}$$

and, Since  $A$  is strictly accretive, we deduce that

$$|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}| \leq \varepsilon |\tilde{v}|$$

so that, letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we obtain  $\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}$ , in  $X$ .

3. It is clear by the preceding remarks that an  $s$ -accretive operator is accretive, but conversely an accretive operator is not necessarily  $s$ -accretive. If  $X = L^1(\Omega)$ , then

$$[u, v] = \int_{\Omega} v \operatorname{sign}_0(u) + \int_{[u=0]} |v|.$$

Then, it is not difficult to see that an accretive operator  $A$  is strictly accretive if and only if

$$\int_{[u_1=u_2]} |v_1 - v_2| \leq \left| \int_{\Omega} (v_1 - v_2) \operatorname{sign}_0(u_1 - u_2) \right|.$$

For instance, if  $\gamma$  is a nondecreasing continuous function in  $\mathbb{R}$ , then  $A$  defined in  $L^1(\Omega)$  by  $Au = \gamma(u)$  and  $\mathcal{D}(A) = \left\{ z \in L^1(\Omega) ; \gamma(z) \in L^1(\Omega) \right\}$  is strictly accretive.

In some practical situation the condition (3.14) may not be fulfilled (as for example  $P^{d,r}(u_0, f)$  in the case of large reaction and diffusion), in this case we need to work moreover with the limit of the modified operator  $A + [d(k)]^{-1}r(k)B$ . More precisely, we have

**Theorem 3.2.3** Assume (3.12) and (3.13) are fulfilled,  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\tilde{B})}$  and let  $u_k$  be the mild solution of  $(\mathcal{P}'_k)$ . Let  $G$  be given by

$$A + r(k) [d(k)]^{-1}B \longrightarrow G, \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

If,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\tilde{B}}u_0 := \underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(G)}$$

and

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tG}\underline{u}_0 := \underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{H})}, \quad (3.15)$$

then, as  $k \rightarrow \infty$ ,

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{in } \mathcal{C}((0, T), X)$$

where  $u$  is the mild solution of

$$(\mathcal{P}'_{\infty}) \quad \begin{cases} u_t + \mathcal{H}u \ni F(t, u) & \text{in } (0, T) \\ u(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

**Proof.** Let  $\mathcal{H}_k := d(k)A + r(k)B$ ,  $G_k := A + [d(k)]^{-1}r(k)B$ ,  $\gamma(k) = [r(k)]^{-1} + [d(k)]^{-1}$ , for any  $t, \tau > 0$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $\tau < \gamma(k)t$ , we have

$$\begin{aligned} |u^k(t) - u(t)| &= |e^{-t\mathcal{H}_k}u_0 - e^{-t\mathcal{H}}\underline{u}_0| \\ &\leq |e^{-t\mathcal{H}_k}u_0 - e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| + |e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-t\mathcal{H}}\underline{u}_0| \\ &\quad + |e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}}\underline{u}_0|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

It is clear that the first term of the right hand of (3.16) satisfies

$$\begin{aligned} |e^{-t\mathcal{H}_k}u_0 - e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| &\leq |e^{-t\mathcal{H}_k}u_0 - e^{-(t-\frac{\tau}{r(k)})\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| \\ &\quad + |e^{-(t-\frac{\tau}{r(k)})\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| \\ &\leq |e^{-\frac{\tau}{r(k)}\mathcal{H}_k}u_0 - \underline{u}_0| + |e^{-\frac{\tau}{d(k)}\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - \underline{u}_0|. \end{aligned}$$

The second one is such that

$$|e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-t\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| \leq |e^{-\tau\gamma(k)\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - \underline{u}_0|.$$

The last term of the right hand of ( 3.16 ) satisfies

$$|e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-(t-\tau\gamma(k))\mathcal{H}_k}\underline{u}_0| \leq \sup_{s \in [0, T]} |e^{-s\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-s\mathcal{H}_k}\underline{u}_0|$$

So that

$$\begin{aligned} |u^k(t) - u(t)| &\leq |e^{-\frac{\tau}{r(k)}\mathcal{H}_k}u_0 - \underline{u}_0| + |e^{-\frac{\tau}{d(k)}\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - \underline{u}_0| \\ &\quad + |e^{-\tau\gamma(k)\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - \underline{u}_0| + \sup_{s \in [0, T]} |e^{-s\mathcal{H}_k}\underline{u}_0 - e^{-s\mathcal{H}_k}\underline{u}_0|. \end{aligned}$$

Thanks to (3.12), we have

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |e^{-\frac{\tau}{r(k)}\mathcal{H}_k}u_0 - \underline{u}_0| = |e^{-\tau\tilde{B}}u_0 - \underline{u}_0|$$

Using the fact that  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(B)}$ ,  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{H})}$  and the Theorem of [16] , we get

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |u^k(t) - u(t)| \leq |e^{-\tau\tilde{B}}u_0 - \underline{u}_0| + |e^{-\tau G}u_0 - \underline{u}_0|$$

and by letting  $\tau \rightarrow +\infty$  we obtain

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u^k(t) - u(t)| = 0.$$

■

**Remark 3.2.2** *The passage to the limit in the problem  $(\mathcal{P}_k)$  leads to a singular limit. An instantaneous change of initial data is necessary. If  $F \equiv 0$ , then, in order to describe the behavior of the solution for small  $t > 0$  and large value for  $k$ , it is*

sufficient to work with  $v_k$  given by  $v_k(t) = u_k(t/m(k))$ . Indeed, it is clear that  $v_k$  is the mild solution of

$$\begin{cases} v_t + \tilde{\mathcal{A}}_k v \ni 0 & \text{in } (0, \infty) \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

So, thanks to Theorem 3.2.2, the compatible initial data for the limiting problem of  $(\mathcal{P}_k)$  is given by  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(t)$ . In other words

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(t).$$

At last, we note that in some practical situation, the previous result may also describe the large time behavior of the mild solution of evolution problems. In the following corollary, we give one consequence of Theorem 3.2.2 in this direction. Concrete situation will be given in details in forthcoming papers.

**Corollary 3.2.1** *Let  $A$  be an accretive operator and  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ . If  $\underline{u}_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA} u_0$  exists then*

$$\underline{u}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k,$$

where  $u_k$  is the mild solution of

$$\begin{cases} u_t + kAu + Bu \ni 0 & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

and  $B$  is an accretive operator such that  $A + \varepsilon B$  converges to  $A$ , as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , and  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\liminf_{k \rightarrow \infty} (kA + B))}$ .

In Corollary 3.2.1,  $B$  is an arbitrary artificial process. The interest of  $B$  may be in the fact that we can choose it such that the solution of (3.17) is regular. In particular this could be interesting for numerical analysis for  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA} u_0$ .

### 3.3 Applications.

Throughout this section,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  is a bounded domain with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\beta$  and  $g$  are nondecreasing continuous functions such that  $\beta(0) = g(0) = 0$  and  $\text{Im}(\beta) = \mathbb{R}$ . In  $\Omega$ , we consider the problem  $P^{d,r}(u_0, f)$ , where  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  and  $f \in L^\infty(Q)$ . Our aim in this section is to study the competition between reaction  $r$  and diffusion  $d$  in the reaction diffusion problem  $P^{d,r}(u_0, f)$ . The main result of this section is the following Theorem 3.3.1.

**Theorem 3.3.1** *Let  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  and denote by  $u^{d,r}$  the solution of  $P^{d,r}(u_0, f)$ .*

1. *Large diffusion: For any  $r > 0$ , as  $d \rightarrow \infty$ ,  $u^{d,r} \rightarrow c$  in  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$ , where  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  is the unique solution of the ode,*

$$\begin{cases} c_t + r g(c) = \int_{\Omega} f & \text{in } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

2. *Large reaction: For any  $d > 0$ , as  $r \rightarrow \infty$ ,  $u^{d,r} \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$ , where  $u$  is the unique weak solution (see Proposition 3.3.4 for the definition) of the obstacle problem (3.4) with  $u(0) = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$  a.e. in  $\Omega$ .*

3. *Large diffusion and reaction: If  $d = d(k)$  and  $r = r(k)$ , with  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , then*

$$u^{d,r} \rightarrow c \quad \text{in } \mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$$

where  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  is the solution of the ode

$$c_t + G(c) \ni \int_{\Omega} f \quad \text{in } (0, T),$$

with

$$(a) \text{ if } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0, \text{ then } c(0) = m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0),$$

$$(b) \text{ if } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty, \text{ then } c(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \text{ where } z \text{ is the solution of the obstacle problem } P_{\infty}^d \text{ with } z(0) = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0), \text{ a.e. } \Omega.$$

It is known that the weak solution of  $P^{d,r}(u_0, f)$  is given by nonlinear semigroup theory. Indeed, we know that the weak solution is the mild solution of the Cauchy problem

$$CP^{d,r}(u_0, f) \begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,r} u = f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where,  $\mathcal{A}^{d,r}$  is the m-T-accretive operator defined in  $L^1(\Omega)$  by

$$f = \mathcal{A}^{d,r}v \Leftrightarrow \begin{cases} v, f \in L^1(\Omega), g(v) \in L^1(\Omega), \exists w \in W^{1,1}(\Omega), v = \beta(w) \text{ a.e. in } \Omega \text{ and} \\ d \int_{\Omega} DwD\xi + r \int_{\Omega} g(v)\xi = \int_{\Omega} f\xi \text{ for any } \xi \in W^{1,\infty}(\Omega). \end{cases}$$

and,  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,r})} = L^1(\Omega)$ . More precisely (see for instance [31]) we have

**Proposition 3.3.1** *If  $f \in L^\infty(Q)$  and  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , then the mild solution  $u$  of  $CP^{d,r}(u_0, f)$  is the unique solution of  $P^{d,r}(u_0, f)$  in the sense that  $u \in L^\infty(Q)$ , there exists  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  such that,  $u = \beta(w)$  a.e. in  $Q$ , and*

$$d \int_0^\tau \int_{\Omega} DwD\xi + r \int_0^\tau \int_{\Omega} g(u)\xi = \int_0^\tau \int_{\Omega} f\xi + \int_0^\tau \int_{\Omega} u\xi_t + \int_{\Omega} u_0\xi(0), \quad (3.19)$$

for any  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$  such that  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ . Moreover, for any  $\tau \geq 0$

$$\|u(\tau)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T\|f\|_{L^\infty(Q)}, \quad (3.20)$$

$$\int_{\Omega} |u(\tau)| + r \int_0^\tau \int_{\Omega} |g(u)| \leq \int_0^\tau \int_{\Omega} |f| + \int_{\Omega} |u_0| \quad (3.21)$$

and

$$\int_{\Omega} j(u(\tau)) + d \int_0^\tau \int_{\Omega} |Dw|^2 \leq \int_{\Omega} j(u_0) + \int_0^\tau \int_{\Omega} fw, \quad (3.22)$$

where  $j : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty]$  is a proper convex s.c.i function such that  $j(\beta(q)) = \int_0^q s d\beta(s)$ .

Now, the study of the asymptotic behavior of the solution of  $P^{d,r}(u_0, f)$  with respect to  $d$  and  $r$  is closely connected to the limit of its associate stationary equation

$$S^{d,r}(f) \begin{cases} v - d\Delta w + rg(v) = f, & v = \beta(w) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\vec{n}} w = 0, & & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Recall (cf. [7]) that for any  $f \in L^1(\Omega)$ , there exists a unique  $(u, w)$  solution of  $S^{d,r}(f)$  in the sense that

$$\begin{cases} v \in L^1(\Omega), g(v) \in L^1(\Omega), \exists w \in W^{1,1}(\Omega), v = \beta(w) \text{ a.e. in } \Omega \text{ and} \\ d \int_{\Omega} DwD\xi + r \int_{\Omega} g(v)\xi = \int_{\Omega} (f - v)\xi \text{ for any } \xi \in W^{1,\infty}(\Omega). \end{cases}$$

In addition, for  $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$ , if  $(v_i, w_i)$  is the solution of  $S^{d,r}(f_i)$  for  $i = 1, 2$ , then

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2)^+ + r \int_{\Omega} (g(v_1) - g(v_2))^+ \leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2)^+ \quad (3.23)$$

and

$$\int_{\Omega} |v_1 - v_2| + r \int_{\Omega} |g(v_1) - g(v_2)| \leq \int_{\Omega} |f_1 - f_2|. \quad (3.24)$$

Moreover, if  $f \in L^\infty(\Omega)$  then the solution  $(v, w) \in L^\infty(\Omega) \times H^2(\Omega)$  and one has the following estimates:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{and} \quad \|r g(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.25)$$

Indeed, taking  $c_r$  such that  $c_r + r g(c_r) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ , then it is clear that  $c_r$  is the solution of  $S^{d,r}(\|f\|_\infty)$  and using (3.23), we get

$$v \leq c_r \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{and} \quad r g(v) \leq r g(c_r) \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

where we used the fact that  $c_r \geq 0$  and  $g(c_r) \geq 0$ . In the same way, we prove

$$v \geq -\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{and} \quad r g(v) \geq -\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Thanks to  $(H_1)$ , we have

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \left( \beta^{-1}(\|f\|_{L^\infty(\Omega)}) \cup -\beta^{-1}(-\|f\|_{L^\infty(\Omega)}) \right) =: C. \quad (3.26)$$

and

$$d \int_{\Omega} |Dw|^2 \leq C' \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (3.27)$$

where  $C'$  is a constant which depends only on  $\Omega$  and  $\|f\|_{L^1(\Omega)}$ .

**Theorem 3.3.2** *Let  $f \in L^1(\Omega)$  and let us denote by  $v^{d,r}$  the solution of  $S^{d,r}(f)$ .*

1. *If  $d = d(k)$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \infty$ , then*

$$v^{d,r} \longrightarrow (\mathbb{I}_{\mathbb{R}} + r g)^{-1} \left( \int_{\Omega} f \right) \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

2. *If  $r = r(k)$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , then  $v^{d,r} \rightarrow v$  in  $L^1(\Omega)$  and  $v$  is the unique solution of the elliptic problem*

$$\begin{cases} v - d\Delta w + G(v) \ni f, & v = \beta(w) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\bar{n}} w = 0, & & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

in the sense that  $v \in L^\infty(\Omega)$  there exists  $w \in W^{1,1}(\Omega)$ ,  $u = \beta(w)$  a.e. in  $\Omega$ , there exists  $\eta \in L^1(\Omega)$ ,  $\eta \in G(v)$  a.e. in  $\Omega$  and

$$d \int_{\Omega} Dw D\xi + \int_{\Omega} \eta \xi = \int_{\Omega} (f - v) \xi$$

for any  $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Moreover,

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{and} \quad \|\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.28)$$

3. If  $d = d(k)$  and  $r = r(k)$ , with  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , then

$$v^{d,r} \longrightarrow (I + G)^{-1} \left( \int_{\Omega} f \right) \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

**Proof:** Since in each part of the theorem,  $d$  and/or  $r$  depends on  $k$ , then, throughout the proof,  $v^{d,r}$ ,  $w^{d,r}$  and  $rg(v^{d,r})$  are denoted by  $v_k$ ,  $w_k$  and  $\eta_k$  respectively. First, let us assume that  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Thanks to (3.25), (3.26) and (3.27),  $v_k$  and  $w_k$  are bounded in  $L^\infty(\Omega)$  and moreover  $w_k$  is bounded in  $H^1(\Omega)$ . So that,  $w_k$  is weakly relatively compact in  $H^1(\Omega)$ , and since  $\beta$  is continuous then  $v_k$  is relatively compact in  $L^1(\Omega)$ . Then, there exists a subsequence that we denote again by  $k$ , such that  $v_k \rightarrow v$  in  $L^1(\Omega)$ ,  $w_k \rightarrow w$  in  $L^1(\Omega)$  and weakly in  $H^1(\Omega)$ , and  $u = \beta(w)$  a.e. in  $\Omega$ . Moreover,  $h_k := v_k + r(k)g(v_k)$  is relatively compact in  $L^1(\Omega)$ . Indeed, thanks to Lemma F. of [7] we have

$$\limsup_{|y| \rightarrow 0} \sup_k \int_{\Omega'} |h_k(x+y) - h_k(x)| = 0,$$

and moreover, the sequence is uniformly integrable. Therefore

$$r(k)g(v_k) \rightarrow \eta \text{ in } L^1(\Omega).$$

Now, in order to characterize  $u$ ,  $w$  and  $\eta$ , we treat separately each case of the theorem.

1. Thanks to (3.27), we have

$$d(k) \int_{\Omega} |Dw_k|^2 \leq C' \|f\|_{\infty},$$

so that

$$\int_{\Omega} |Dw|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Dw_k|^2 = 0,$$

which implies that  $w$  and  $v$  are constant functions. Taking  $\xi \equiv 1$  as a test function and passing to the limit we deduce that the constant  $v$  satisfies  $v + rg(v) = \int_{\Omega} f$ . This ends up the proof of the first part of the Theorem.

2. Since  $g(0) = \beta(0) = 0$ , then (3.24) implies that

$$r(k)|g(v_k)|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^1(\Omega)}.$$

So,  $g(v) \equiv 0$  and  $m_0 \leq v \leq M_0$  a.e. in  $\Omega$ . Recall that  $r(k)g$  converges in the graph sense to  $G$ , then by standard monotone arguments  $\eta \in G(v)$  a.e. in  $\Omega$ . As to (3.28), it follows from the estimates (3.25). And the proof of the second part finishes.

3. Since

$$\int_{\Omega} |Dw_k|^2 \leq \frac{C_1(\Omega, N)}{d(k)} \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

then  $w$  and  $v$  are constants. Moreover, since  $r(k)g$  converges in the graph sense to  $G$ , then  $\eta \in G(v)$  a.e. in  $\Omega$ . Integrating the equation over  $\Omega$  and letting  $k \rightarrow \infty$ , we get

$$v + G(v) \ni \int_{\Omega} f.$$

At last, we see that the application  $f \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$  as defined in each cases of the theorem is well defined and is a contraction from in  $L^1(\Omega)$  into  $L^1(\Omega)$ , so the convergence result for  $f \in L^1(\Omega)$  follows by density of  $L^\infty(\Omega)$  in  $L^1(\Omega)$ . ■

As an immediate consequence, we have

**Corollary 3.3.1** 1. For any  $r > 0$ , as  $d \rightarrow \infty$ , then the operator  $\mathcal{A}^{d,r}$  converges to the  $T$ -accretive operator  $\mathcal{A}^{\infty,r}$  defined, in  $L^1(\Omega)$ , by

$$f \in \mathcal{A}^{\infty,r}v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega), v \equiv c, c \in \mathbb{R} \text{ and } r g(c) = \int_{\Omega} f.$$

2. For any  $d > 0$ , as  $r \rightarrow \infty$ , then  $\mathcal{A}^{d,r}$  converges to the  $T$ -accretive operator  $\mathcal{A}^{d,\infty}$  defined, in  $L^1(\Omega)$ , by

$$f \in \mathcal{A}^{d,\infty}v \Leftrightarrow \begin{cases} v, f \in L^1(\Omega), \exists w \in W^{1,1}(\Omega), \exists \eta \in L^1(\Omega) \\ v = \beta(w), \eta \in G(v) \text{ a.e. on } \Omega \text{ and} \\ d \int_{\Omega} DwD\xi + \int_{\Omega} \eta\xi = \int_{\Omega} f\xi \text{ for any } \xi \in W^{1,\infty}(\Omega) \end{cases}$$

3. If  $d = d(k)$  and  $r = r(k)$ , with  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , then  $\mathcal{A}^{d,r}$  converges to the  $T$ -accretive operator  $\mathcal{A}^\infty$ , defined by

$$f \in \mathcal{A}^\infty v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega), v \equiv c, c \in \mathbb{R} \text{ and } \int_{\Omega} f \in G(c).$$

It is not difficult to see that

$$\mathcal{A}^{d,r} = dA + rB \quad (3.29)$$

where  $A = \mathcal{A}^{1,0}$  and  $B : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  is defined by  $Bu = g(u)$  with

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ u \in L^1(\Omega); g(u) \in L^1(\Omega) \right\},$$

and  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ .

**Lemma 3.3.1** *As  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon A + B \rightarrow B$ , in the sense of resolvent.*

**Proof:** Since,  $\varepsilon\beta^{-1}$  converges to the graph  $N \equiv 0$ , then the proof is a simple consequence of [7]. ■

**Proposition 3.3.2** 1.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})} = \left\{ z \in L^1(\Omega) ; m_0 \leq z \leq M_0 \text{ a.e. } \Omega \right\}$ .

2.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty,r})} = \mathbb{R}$ .

3.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)} = [m_0, M_0]$ .

**Proof:**

1. Clearly, by the definition of  $\mathcal{A}^{d,\infty}$  we have  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})} \subseteq \left\{ z \in L^1(\Omega) ; m_0 \leq z \leq M_0 \text{ a.e. } \Omega \right\}$ . To prove the converse part, let  $u \in L^1(\Omega)$  be such that  $m_0 \leq u \leq M_0$  a.e. in  $\Omega$  and consider  $u_\varepsilon$  the solution of

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon \Delta w_\varepsilon = u, & u_\varepsilon = \beta(w_\varepsilon) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\vec{n}} w_\varepsilon = 0, & & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

It is clear that  $m_0 \leq u_\varepsilon \leq M_0$  a.e. in  $\Omega$ , so that  $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})$ , for each  $\varepsilon > 0$ . Since,  $\varepsilon\beta^{-1}$  converges to 0 in the graph sense, then by [7], we deduce that  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$ , as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , and the proof completes.

2. This is a simple consequence of the fact that  $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$ . Indeed, for any  $c \in \mathbb{R}$ ,  $rg(c)$  is well defined and there exists  $f \in L^1(\Omega)$ , such that  $\int_{\Omega} f = rg(c)$ , so that  $f \in \mathcal{A}^{\infty,r}(c)$  and  $\mathcal{A}^{\infty,r}(c) \neq \emptyset$ .
3. It is clear that  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)} \subseteq [m_0, M_0]$ . Now, for  $c \in [m_0, M_0]$ ,  $G(c)$  is not empty and for any  $\alpha \in G(c)$ , there exists  $f \in L^1(\Omega)$ , such that  $\int_{\Omega} f = \alpha$ , so that  $f \in \mathcal{A}^\infty(c)$  and we deduce that  $\mathcal{A}^\infty(c) \neq \emptyset$ , and  $c \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)$ . ■

### 3.3.1 Large Diffusion.

In this subsection, we begin by studying the first part of Theorem 3.3.1, i.e. the case of large diffusion. So, we fix  $r > 0$  and we let  $d \rightarrow \infty$ . In order to apply Theorem 3.2.2, we consider first the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & \text{in } (0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.30)$$

It is known (see for instance [31] and [34] and the references therein) that, if  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , then the mild solution  $u$  of (3.30) is the unique weak solution of

$$\begin{cases} u_t - \Delta w = 0 & u = \beta(w) & \text{in } Q \\ \partial_{\bar{n}} w = 0, & & \text{on } \Sigma \\ u(0) = u_0 & & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.31)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \int_{\Omega} u_0.$$

**Lemma 3.3.2** *For any  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  and  $f \in L^1(\Omega)$ , the mild solution of*

$$\begin{cases} u_t + B u = f & \text{in } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

*is the solution of the ode*

$$\begin{cases} u_t + r g(u) = f & \text{in } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

*in the sense that  $u \in W^{1,1}((0,T), L^1(\Omega))$  and the equation is satisfied a.e. in  $Q$  with  $u(0) = u_0$ . Moreover, if  $f \equiv 0$ , then*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0) \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

**Proof.** Thanks to Lemma 3.3.1, we know that  $\varepsilon A + B$  converges to  $B$ , so the limit of the mild solution  $u_\varepsilon$  of

$$\begin{cases} u_t + \varepsilon Au + Bu = 0 & \text{in } (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

converges to  $u$  (the mild solution of (3.32)). Using Proposition 3.3.1,  $u_\varepsilon \in L^\infty(Q)$ , there exists  $w_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $u_\varepsilon = \beta(w_\varepsilon)$  a.e. in  $Q$  and

$$\varepsilon \int_0^\tau \int_\Omega Dw_\varepsilon D\xi + r \int_0^\tau \int_\Omega g(u_\varepsilon)\xi = \int_0^\tau \int_\Omega f\xi + \int_0^\tau \int_\Omega u_\varepsilon \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0). \quad (3.33)$$

Moreover,  $u_\varepsilon, w_\varepsilon$  and  $rg(u_\varepsilon)$  are bounded in  $L^\infty(\Omega)$  and  $\varepsilon w_\varepsilon$  is bounded in  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , so that

$$\varepsilon w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Passing to the limit in (3.33), we deduce that  $g(u) \in L^\infty(Q)$  and

$$r \int_0^\tau \int_\Omega g(u) \xi = \int_0^\tau \int_\Omega f \xi + \int_0^\tau \int_\Omega u \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0).$$

Since,  $f, g(u) \in L^1(Q)$  then  $u \in W^{1,1}(0, T, L^1(\Omega))$  and, for a.e.  $x \in \Omega$ ,  $u_t(x) + rg(u(x)) = f(x)$  in  $(0, T)$ . This ends up the proof of the first part of the lemma.

Assuming that  $f \equiv 0$ , there exists a measurable function  $u_\infty$ , such that, as  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(t) \rightarrow u_\infty$ , a.e. in  $\Omega$  and  $g(u_\infty) = 0$ , a.e. in  $\Omega$ ; i.e.  $m_0 \leq u_\infty \leq M_0$ , p.p. in  $\Omega$ . Moreover, since  $u$  is bounded in  $L^\infty(Q)$ , then the convergence is in  $L^1(\Omega)$ . Let us prove that  $u_\infty = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$ . First, note that, if  $m_0 \leq u_0(x) \leq M_0$ , then,  $u(t, x) = u_0(x)$ , for any  $t \geq 0$ , and  $u_\infty(x) = u_0(x)$ . If  $u_0(x) \geq M_0$ , then it is clear that  $t \mapsto u(t, x)$  is nonincreasing. So,

$$u_\infty(x) \leq u_0(x),$$

and we deduce that  $u_\infty(x) = M_0$ . In a similar way,  $u_\infty(x) = m_0$ , a.e.  $x \in \Omega$ , such that  $u_0 \leq m_0$ , and the proof of the lemma finishes.  $\blacksquare$

Now, applying Theorem 3.2.2, we get the first part of Theorem 3.3.1. More precisely,

**Proposition 3.3.3** *For any  $r > 0$ , as  $d \rightarrow \infty$ ,*

$$u^{d,r} \rightarrow c \quad \text{in } \mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega)),$$

where  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  is the unique solution of the ode

$$\begin{cases} c_t + r g(c) = \int_\Omega f & \text{in } (0, T) \\ c(0) = \int_\Omega u_0. \end{cases}$$

**Proof:** Recall that  $u^{d,r}$  is the mild solution of  $CP^{d,r}(u_0, f)$ ,  $\mathcal{A}^{d,r} = dA + rB$ . Moreover, thanks to Lemma 3.3.1,  $A$  and  $B$  satisfy the assumption (3.13), with  $\tilde{B} = B$ , and  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA}u_0 = \int_{\Omega} u_0$ . Since  $\int_{\Omega} u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty,r})}$ , then applying Theorem 3.2.2 we deduce that  $u^{d,r} \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ , where  $u$  is the mild solution of

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{\infty,r}u \ni f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

It is not difficult to see that the mild solution of (3.34) is the mild solution of

$$\begin{cases} u_t + Bu = \int_{\Omega} f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = \int_{\Omega} u_0, \end{cases}$$

and, thanks to Lemma 3.3.2, the proof is finished.  $\blacksquare$

### 3.3.2 Large Reaction.

Assume now, that  $d > 0$  is fixed and that  $r$  is very large; i.e.  $r \rightarrow \infty$ .

**Lemma 3.3.3** *As  $r \rightarrow \infty$ ,  $u^{d,r} \rightarrow u$  in  $\mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ , where  $u$  is the mild solution of*

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,\infty}u \ni f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = m_0 \vee (u_0(x) \wedge M_0). \end{cases} \quad (3.35)$$

**Proof:** Thanks to Lemma 3.3.2,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tB}u_0 = m_0 \vee (u_0(x) \wedge M_0) \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

On the other hand, we have  $\mathcal{A}^{d,r(k)} \rightarrow \mathcal{A}^{d,\infty}$  and  $m_0 \vee (u_0 \wedge M_0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})}$ , then the lemma is a simple consequence of Theorem 3.2.2.  $\blacksquare$

At last, the proof of the second part of Theorem 3.3.1 follows by characterizing the mild solution of

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,\infty}u \ni f & \text{in } (0, T) \\ u(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

**Proposition 3.3.4** *Let  $f \in L^\infty(Q)$  and  $v_0 \in L^\infty(\Omega)$  such that  $m_0 \leq v_0 \leq M_0$  a.e. in  $\Omega$ . Then, the mild solution of (3.36) is the unique solution of the obstacle problem*

$$\begin{cases} u_t - d\Delta w + G(u) = f, & u = \beta(w) & \text{in } Q \\ \partial_{\bar{n}} w = 0, & & \text{in } \Sigma \\ u(0) = v_0 & & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

*That is:  $u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$ ,  $u(0) = v_0$ , there exists  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $u = \beta(w)$ , there exists  $\eta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  such that  $\eta \in G(u)$  a.e. in  $Q$  and*

$$d \int_0^\tau \int_\Omega Dw D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta \xi = \int_0^\tau \int_\Omega f \xi + \int_0^\tau \int_\Omega u \xi_t + \int_\Omega v_0 \xi(0)$$

for any  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \bar{\Omega})$  such that  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ .

**Proof:** The proof of this proposition is standard by now (see for instance [31]). For completeness let us give the arguments. For  $t \in [0, \tau]$ , consider a subdivision  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < \tau \leq t_n$ , with  $t_i - t_{i-1} = \varepsilon$ ,  $f_1, \dots, f_n \in L^\infty(\Omega)$  with  $\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$  and  $\sum_{i=1}^n \varepsilon \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^\tau \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ . By definition of the mild solution,  $u$  is given by

$$u(t) = L^1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$$

uniformly for  $t \in [0, T]$ , where  $u_\varepsilon$  is the approximate solution by  $u_\varepsilon(0) = u_0$ ,  $u_\varepsilon(t) = u_i$  for  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , where  $u_i$  satisfies  $u_i + \varepsilon \mathcal{A}^{d, \infty} u_i = \varepsilon f_i + u_{i-1}$ . That is, there exists  $w_i \in H^1(\Omega)$  and  $\eta_i \in L^\infty(\Omega)$  such that

$$\begin{cases} u_i - \varepsilon d\Delta w_i + \varepsilon \eta_i = u_{i-1} + \varepsilon f_i, & u_i = \beta(w_i), \eta_i \in G(u_i) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\bar{n}} w_i = 0, & & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.37)$$

Thanks to (3.24) and (3.25), it follows that

$$\int_\Omega |u_i| + \varepsilon \int_\Omega |\eta_i| \leq \int_\Omega |u_{i-1}| + \varepsilon \int_\Omega |f_i| \quad (3.38)$$

and

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \|\eta_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2 \left( \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^\tau \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \right) =: M,$$

so that,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \|\eta_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt \leq M \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.39)$$

where  $f_\varepsilon, \eta_\varepsilon : [0, \tau] \rightarrow L^1(\Omega)$ , with  $f_\varepsilon(t) = f_i$  and  $\eta_\varepsilon = \eta_i$ , for any  $t \in ]t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ . Taking  $\xi = w_i$  as a test function in (3.37) and using the fact that

$$\int_\Omega (u_{i-1} - u_i)w_i \leq \int_\Omega j(u_{i-1}) - \int_\Omega j(u_i)$$

we deduce that

$$\int_\Omega j(u_i) + \varepsilon d \int_\Omega |Dw_i|^2 + \varepsilon \int_\Omega \eta_i w_i \leq \varepsilon \int_\Omega f_i w_i + \int_\Omega j(u_{i-1}), \quad (3.40)$$

so that, adding for  $i = 1, \dots, n$ , we get

$$\int_\Omega j(u_\varepsilon(\tau)) + d \int_0^\tau \int_\Omega |Dw_\varepsilon|^2 + \int_0^\tau \int_\Omega \eta_\varepsilon w_\varepsilon \leq \int_\Omega j(u_0) + \int_0^\tau \int_\Omega f_\varepsilon w_\varepsilon. \quad (3.41)$$

where  $w_\varepsilon : [0, \tau] \rightarrow H^1(\Omega)$  with  $w_\varepsilon = w_i$ , for any  $t \in ]t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ . Since  $\text{Im}(\beta) = \mathbb{R}$ , then we deduce that  $w_\varepsilon$  is bounded in  $L^\infty((0, \tau) \times \Omega)$  and, using the fact that  $j \geq 0, \eta_\varepsilon w_\varepsilon \geq 0$  a.e. in  $[0, \tau] \times \Omega$ , it follows that  $w_\varepsilon$  bounded in  $L^2(0, \tau, H^1(\Omega))$ . So, let  $w \in L^2(0, \tau, H^1(\Omega))$  and  $\eta \in L^2((0, \tau) \times \Omega)$ , such that  $w_{\varepsilon_k} \rightarrow w$ , weakly in  $L^2(0, \tau, H^1(\Omega))$  and  $\eta_\varepsilon \rightarrow \eta$  weakly in  $L^2((0, \tau) \times \Omega)$ , where  $\varepsilon_k$  is a sequence such that  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Using the monotony of  $\beta$  and  $G$ , we have  $u = \beta(w)$  and  $\eta \in G(w)$  a.e. in  $Q$ . Now, let us consider  $\tilde{u}_\varepsilon$  the function from  $[0, \tau]$  into  $L^1(\Omega)$ , defined by  $\tilde{u}_\varepsilon(t_i) = u_i$  and  $\tilde{u}_\varepsilon$  linear in  $[t_{i-1}, t_i]$ , then (3.37) implies that

$$d \int_0^\tau \int_\Omega Dw_\varepsilon D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta_\varepsilon \xi = \int_0^\tau \int_\Omega f_\varepsilon \xi + \int_0^\tau \int_\Omega \tilde{u}_\varepsilon \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0). \quad (3.42)$$

for any  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$ , s.t  $\xi(\tau) = 0$ . Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (3.42), we get

$$d \int_0^\tau \int_\Omega Dw D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta \xi = \int_0^\tau \int_\Omega f \xi + \int_0^\tau \int_\Omega u \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0). \quad (3.43)$$

for any  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$ , s.t  $\xi(\tau) = 0$ . ■

### 3.3.3 Large Reaction and Diffusion.

To finish the proof of Theorem 3.3.1, we consider the case where both the reaction and the diffusion rates are very large. So, we assume that  $d = d(k)$  and  $r = r(k)$ , with  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ . First let us consider the case where

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0, \quad (3.44)$$

in other words the reaction is more competitive than the diffusion. Thanks to Theorem 3.2.3, we need to consider the operator

$$A + \frac{r(k)}{d(k)} B =: A_k.$$

Since  $\frac{r(k)}{d(k)} \rightarrow \infty$ , then by Theorem 3.3.2, we deduce that

$$A_k \rightarrow \mathcal{A}^{1,\infty}.$$

On the other hand, thanks to Lemma 3.3.2, remember that  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tB} u_0 = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$ , a.e.  $\Omega$ . Since,  $m_0 \vee (u_0 \wedge M_0) \notin \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ , then, having in mind Theorem 3.2.3, the boundary layer of the limit of  $u^{d,r}$  is given by the large time behavior of the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{1,\infty} u \ni 0 & \text{in } (0, \infty) \\ u(0) = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0). \end{cases} \quad (3.45)$$

To this aim, we consider the set

$$\mathcal{K} = \{z \in [m_0, M_0]; \exists c \in \mathbb{R}, z = \beta(c)\}.$$

It is not difficult to see that  $\mathcal{K}$  is a nonempty closed subset of  $L^1(\Omega)$  and, moreover,  $\mathcal{K}$  is contained in the set of stationary solution of (3.45), i.e. for any  $z \in \mathcal{K}$ ,  $e^{-t\mathcal{A}^{1,\infty}} z = z$ , for any  $t \geq 0$ .

**Proposition 3.3.5** *For any  $\underline{u}_0 \in L^1(\Omega)$ , such that  $m_0 \leq \underline{u}_0 \leq M_0$  a.e. in  $\Omega$ , there exists a unique  $\underline{\underline{u}}_0 \in \mathcal{K}$ , such that*

$$e^{-t\mathcal{A}^{1,\infty}} \underline{u}_0 \rightarrow \underline{\underline{u}}_0 \quad \text{in } L^1(\Omega), \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

**Proof:** The proof of this proposition follows the same line of [28]. To summarize the proof we give just the main lines. For more details one can see [28]. Indeed, using the results of [7], we prove first that the resolvents are relatively compact from  $L^\infty(\Omega)$  into  $L^1(\Omega)$ , i.e. if  $B$  is a bounded subset of  $L^\infty(\Omega)$ , then  $(I + \epsilon \mathcal{A}^{1,\infty})^{-1}(B)$  is relatively compact in  $L^1(\Omega)$  so that, the orbit  $\gamma(\underline{u}_0) = \{e^{-t\mathcal{A}^{1,\infty}} \underline{u}_0 : t \geq 0\}$  is relatively compact in  $L^1(\Omega)$ . In addition, it is not difficult to prove that

$$\int_0^\infty \int_\Omega |Dw|^2 \leq \int_\Omega j(\underline{u}_0),$$

which implies that the  $\omega$ -limit set is contained in  $\mathcal{K}$ . Then, by using the additive semigroup property, we deduce that the  $\omega$ -limit set is a singleton and the proof finished.  $\blacksquare$

**Remark 3.3.1** *The identification of  $\underline{u}_0$  is an open problem. In this direction, the reader can see the papers [29] and [31].*

**Lemma 3.3.4** *Under the assumption (3.44),  $u^{d,r} \rightarrow c$  in  $\mathcal{C}((0,T); L^1(\Omega))$ , where  $c$  is the mild solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} c_t + \mathcal{A}^\infty c \ni f & \text{in } (0,T) \\ c(0) = \underline{u}_0 \end{cases} \quad (3.46)$$

and  $\underline{u}_0$  is given by Proposition 3.3.5.

**Proof:** Recall that we have  $d(k)A + r(k)B \rightarrow \mathcal{A}^\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{d(k)} = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tB} u_0 = m_0 \vee (u_0 \wedge M_0)$  and  $\underline{u}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\mathcal{A}^{1,\infty}} m_0 \vee (u_0 \wedge M_0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ . Then, the result of the lemma is a consequence of Theorem 3.2.2.  $\blacksquare$

**Proposition 3.3.6** *For any  $c_0 \in [m_0, M_0]$ , the mild solution of*

$$\begin{cases} c_t + \mathcal{A}^\infty c \ni f & \text{in } (0,T) \\ c(0) = c_0 \end{cases} \quad (3.47)$$

is the unique solution of the ode

$$\begin{cases} c_t + G(c) \ni \int_{\Omega} f & \text{in } (0,T), \\ c(0) = c_0, \end{cases}$$

in the sense that  $c \in W^{1,1}(0,T)$ , there exists  $\eta \in L^1(0,T)$ , such that  $c(0) = c_0$  and  $c_t + \eta = \int_{\Omega} f$ , a.e. in  $(0,T)$ .

**Proof** Since, for any  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $(I + \lambda \mathcal{A}^\infty)^{-1}(f) = (I + \lambda \mathcal{A}^\infty)^{-1}(\int_\Omega f) = (I + \lambda G)^{-1}(\int_\Omega f)$ , then the mild solution of (3.47) is the mild solution of

$$\begin{cases} c_t + G(c) \ni \int_\Omega f & \text{in } (0, T) \\ c(0) = c_0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Thus the proof is a simple application the classical theory of nonlinear semigroup governed by maximal monotone graphs in Hilbert space (cf. [14]).  $\blacksquare$

To end up the proof of Theorem 3.3.1, we consider the case

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty. \quad (3.49)$$

i.e.; the diffusion is more competitive than the reaction.

**Lemma 3.3.5** *Under the assumption (3.49),  $u^{d,r} \rightarrow c$  in  $\mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ , where  $c$  is the mild solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} c_t + G(c) \ni f & \text{in } (0, T) \\ c(0) = m_0 \vee (\int_\Omega u_0 \wedge M_0). \end{cases} \quad (3.50)$$

**Proof:** Thanks to [7], it is not difficult to see that  $A + \varepsilon B \rightarrow A$ , as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , in the sense of resolvent. So, using Theorem 3.2.3, we need to consider the operator

$$\frac{d(k)}{r(k)} A + B =: B_k.$$

Since  $\frac{d(k)}{r(k)} \rightarrow \infty$ , then Corollary 3.3.1 implies that

$$B_k \rightarrow \mathcal{A}^{\infty, 1}.$$

On the other hand, remember that  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA} u_0 = \int_\Omega u_0$  and  $\int_\Omega u_0 \notin \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ . So, we need to consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{\infty, 1} u \ni 0 & \text{in } (0, \infty) \\ u(0) = \int_\Omega u_0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Since the mild solution of (3.51) is the mild solution of

$$\begin{cases} c_t + g(c) = 0 & \text{in } (0, \infty) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0, \end{cases}$$

then, using Lemma 3.3.2, the proof is complete. ■



# Bibliographie

- [1] F. ANDREU, J.M. MAZON, J. TOLEDO, *Asymptotic behaviour of solutions of quasi-linear parabolic equations with nonlinear flux*, Comput. Appl. Math. 201-215 (1998).
- [2] F. ANDREU, J.M. MAZON, J. TOLEDO, *Stabilization of solutions of the filtration equation with absorption and non-linear flux*, NODEA 2, 267-289 (1995).
- [3] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, and A. RODRIGUES-BERNAL. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. *J. Diff. Equations*, 168:33–59, 2000.
- [4] P. BENILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thesis, Univ. Orsay, 1972.
- [5] Ph. BÉNILAN. Quelques remarques sur la convergence singulière des semigroupes linéaires. *Publ. Math. UFR Sci. Tech. Univ. Franche-Comté Besaçon*, 1995.
- [6] Ph. BÉNILAN, L. BOCCARDO, and M. HERRERO. On the limit of solution of  $u_t = \Delta u^m$  as  $m \rightarrow \infty$ . In M. Bertch et al., editor, *Proceedings Int. Conf.*, Torino, 1989. Some Topics in Nonlinear PDE's.
- [7] Ph. BÉNILAN, M.G. CRANDALL, and P. SACKS. Some  $L^1$  existence and dependence results for semilinear elliptic equations under nonlinear boundary conditions. *Appl. Math. Optim.*, 17:203–224, 1988.
- [8] PH. BENILAN, M. G. CRANDALL, A. PAZY, *Evolution Equations Governed by Accretive Operators*, Book to appear.
- [9] Ph. BÉNILAN, L. EVANS, and R. F. GARIEPY. On some singular limits of homogeneous semigroups. *J. Evol. Equ.* 3 (2003), no. 2, 203–214.
- [10] Ph. BÉNILAN and N. IGBIDA. Singular limit for perturbed nonlinear semigroup. *Comm. Applied Nonlinear Anal.*, 3(4):23–42, 1996.
- [11] Ph. BÉNILAN and N. IGBIDA. Singular limit of changing sign solutions of the Porous medium equation. *J. Evol. Equations*. 3 (2003), no. 2, 215–224.
- [12] A. BONAMI, D. HILHORST, E. LOGAK, M. MIMURA, *Singular limit of a chemotaxis-growth model*, J. Math. Anal. Appl. 286 (2003), no. 1, 125–135.

- [13] D. BOTHE, D. HILHORST , *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction* , Adv. Differential Equations, 6 (2001), no. 10, 1173–1218.
- [14] H. BREZIS. Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear partial differential equations. In E. Zarantonello, editor, *Contribution to Nonlinear Functionnal Analysis*. Academic Press, 1971.
- [15] D. BOTHE. The instantaneous limit of a reaction-diffusion system. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 215–224, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
- [16] H. BREZIS, A. PAZY, *Convergence And Approximation of Semigroupes of Non-linear Operators in Banach Spaces*, J . Func. Anal., 9:63-74, 1972.
- [17] L. A. CAFFARELLI and A. FRIEDMAN. Asymptotic Behavior of Solution of  $u_t = \Delta u^m$  as  $m \rightarrow \infty$ . *Indiana Univ. Math. J.*, pages 711–728, 1987
- [18] A. N. CARVALHO and J. K. HALE. Large diffusion with dispersion. *Nonlinear Anal.*, 17:1139–1151, 1991.
- [19] E. C. M. CROOKS, E. N. DANCER, D. HILHORST, M. MIMURA, H. NINOMIYA, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 5 (2004), no. 4, 645–665.
- [20] C.M. ELLIOT, M.A. HERRERO, J.R. KING, and J.R.OCKENDON. The mesa patterns for  $u_t = \nabla(u^m \nabla u)$  as  $m \rightarrow \infty$ . *IMA J. Appl. Math.*, 37:147–154, 1986.
- [21] L. C. EVANS. A convergence theorem for a chiminal diffusion-reaction system. *Houston J. Math*, 6:259–267, 1980.
- [22] L. C. Evans, M. Feldman, and R. F. Gariepy. Fast/Slow diffusion and collapsing sandpiles. *J. Differential Equations*, 137:166–209, 1997.
- [23] J. K. HALE and K. SAKAMOTO. Shadow systems and attractors in reaction-diffusion equations. *Appl. Anal.*, 32:287–303, 1989.
- [24] HENRY, M.; HILHORST, D.; NISHIURA, Y. Singular limit of a second order nonlocal parabolic equation of conservative type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers, *Hokkaido Math. J.* 32 (2003), no. 3, 561–622.
- [25] D. HILHORST, M. MIMURA, R. WEIDENFELD, Singular limit of a class of non-cooperative reaction-diffusion systems. *Taiwanese J. Math.* 7 (2003), no. 3, 391–421.
- [26] J. K. HALE. Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 118:455–466, 1986.
- [27] D. HILHORST, R. VAN DER HOUT, L. PELETIER, . cA. Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction.. *Nonlinear Anal.* 41 (2000), no. 5-6, Ser. A: Theory Methods, 803–823.

- 
- [28] N. IGBIDA, *Limite Singulière de Problèmes d'évolution non-linéaires*, Thèse, Univ. Franche-Comté Besaçon 1997.
- [29] N. IGBIDA. Large time behavior of some degenerate parabolic problems *Comm. Partial Differential Equations*, 26:1385–1408, 2001.
- [30] N. IGBIDA. A nonlinear diffusion problem with localized large diffusion *Comm. Partial Differential Equations*, 29 (2004), no. 5-6, 647–670.
- [31] N. IGBIDA, *Stabilization for degenerate diffusion with absorption*, *Nonlinear Analysis* 54 (2003), 93-107.
- [32] M. LANGLAIS and D. PHILIPS. Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equation. *Nonlinear Analysis TMA*, 9:321–333, 1985.
- [33] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de Résolution des problèmes aux Limites non Linéaires*, Paris: Dunod (1969).
- [34] J. M. MAZON and J. TOLEDO. Asymptotic behavior of solutions of the filtration equation in bounded domains. *Dynam. Systems Appl.*, 3:275–295, 1994.
- [35] M. MIMURA Reaction-diffusion systems arising in biological and chemical systems: application of singular limit procedures. *Mathematical aspects of evolving interfaces*(Funchal, 2000), 89–121, *Lecture Notes in Math.*, 1812, Springer, Berlin, 2003.
- [36] I. MIYADERA, *Nonlinear Semigroups*. American Mathematical Society, 1992.
- [37] F. MIGNOT, J. P. PUEL, *Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*,64, 59 - 91 (1977).
- [38] A. RODRIGUES-BERNAL. Localized spatial homogenization and large diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 29:1361–1380, 1998.



---

## Chapitre 4

# Homogénéisation localisée pour un problème de Diffusion dans un milieu hétérogène

## 4.1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  assez régulière. On considère le système de Réaction Diffusion suivant

$$(P^k) \left\{ \begin{array}{ll} u_{1t} - \Delta w_1 = F(u_1, u_2), & w_1 = \varphi_1(u_1) \quad \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ u_{2t} - \Delta w_2 = G(u_1, u_2), & w_2 = \varphi_2(u_2) \quad \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ \partial_{\vec{n}} w_1 + z_1 = 0, & z_1 \in \gamma_1(w_1) \quad \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ \partial_{\vec{n}} w_2 + z_2 = 0, & z_2 \in \gamma_2(w_2) \quad \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \\ u_1(x, 0) = u_{01}(x) & u_2(x, 0) = u_{02}(x) \quad \text{sur } \Omega, \end{array} \right.$$

où,  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des fonctions continues, strictement croissantes avec  $\varphi_i(0) = 0$  et pour  $i = 1, 2$ ;  $\gamma_i$  est un graphe maximal monotone de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que  $0 \in \gamma_i(0)$  et

$$(H_1) \quad \mathcal{D}(\gamma_i) = \mathbb{R} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{D}(\gamma_i) = \{0\}.$$

Différents choix de fonctions  $\varphi_i, \gamma_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) correspondent à des problèmes provenant de différentes applications par exemple, pour  $\varphi_i(r) = |r|^{m_i} \text{Sign}_0(r)$ , avec  $m_i > 1$  décrit une diffusion non linéaire lente ([1], [10]);  $m_i = 1$  correspond à l'équation de la chaleur classique et  $0 < m_i < 1$  décrit une grande diffusion. Le graphe  $\gamma_i$  peut être multivoque et ceci permet d'inclure les conditions de Dirichlet au bord ( $\gamma_i = \{0\} \times \mathbb{R}$ ) et les conditions de Neumann ( $\gamma_i = \mathbb{R} \times \{0\}$ ) ainsi d'autres possibilités. Pour les termes de réactions, on suppose que

$$F(u_1, u_2) = -\mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1 - w_2), \quad G(u_1, u_2) = \mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1 - w_2)$$

avec  $g$  est une fonction continue, croissante vérifiant  $g^{-1}(0) = \{0\}$ . Pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathcal{R}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction mesurable avec  $\mathcal{R}_k \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ . Le modèle a été proposé par E.DiBenedetto et R.E. Showalter dans [8], il fut suivi en cela par Xiangsheng Xu dans [11] et finalement le problème a été étudié par J.M. Mazon et J.Toledo dans [9]. Ce système décrit le phénomène de diffusion dans un milieu hétérogène constitué de deux composantes. Cette situation apparaît pour des problèmes de conduction thermique dans des sols rocheux, ou aussi la diffusion (liquide, gaz) à travers un milieu poreux fracturé. L'existence et l'unicité de la solution faible dans le cas où  $\mathcal{R}_k = 1$ ,  $\varphi_2 = 0$  et avec des conditions de Dirichlet au bord a été démontrée dans [8] en utilisant la théorie  $H^{-1}$ . Dans ([11] et [9]) les auteurs utilisent la théorie des semigroupes non linéaires, et en se basant sur les

résultats elliptiques obtenus dans ([2], [6]), ils montrent que dans le cas où  $\mathcal{R}_k$  ne dépend pas de l'espace, le problème  $(P^k)$  admet une unique bonne solution. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence, l'unicité de la solution du problème  $(P^k)$  et au comportement de la solution lorsque l'échange entre les deux composantes est très grand dans un sous domaine  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ . Pour ceci, on considère

$$\mathcal{R}_k(x) = a(k)\chi_{\Omega_0}(x) + \mathcal{R}_0(x)\chi_{\Omega_1}(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

avec  $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$  et  $a(k)$  une fonction strictement positive telle que  $a(k) \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Dans la première partie de ce chapitre on commence par étudier le problème elliptique associé à  $(P^k)$ , on démontre des résultats d'existence et d'unicité, ensuite nous étudierons le comportement de la solution lorsque  $k \rightarrow \infty$ . La difficulté de passage à la limite dans la terme  $\mathcal{R}_k g(w_1 - w_2)$  nous amène à introduire une nouvelle notion de solution qui fait intervenir simultanément les deux équations. Dans la deuxième partie, nous introduisons le problème de Cauchy abstrait lié à  $(P^k)$ , qui nous permet à l'aide des semigroupes non linéaires de montrer l'existence de la solution faible. Finalement, nous passons à la limite dans le problème  $(P^k)$  et à l'aide de la notion des solutions intégrales on montre l'unicité de la solution du problème  $(P^k)$  ainsi du problème limite .

## 4.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous présentons les résultats d'existence et d'unicité de la solution faible du problème  $(P^k)$ , ainsi le comportement de la solution lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

**Théorème 4.2.1** *Pour tout  $U_0 := (u_{01}, u_{02}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ , le problème  $(P^k)$  admet une unique solution faible  $U := (u_1, u_2)$  au sens suivant :*

*$u_i \in L^\infty(Q)$ ,  $\exists w_i \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$ ,  $\exists z_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, L^2(\partial\Omega))$  telles que  $w_i = \varphi_i(u_i)$  p.p. sur  $Q$ ,  $z_i \in \gamma_i(w_i)$  p.p. sur  $\Sigma$ , et*

$$\begin{aligned} \int \int_Q Dw_1 D\xi_1 + \int \int_Q \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_1 + \int \int_\Sigma z_1 \xi_1 &= \int \int_Q u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \int_\Omega u_{01} \xi_1(0) \\ \int \int_Q Dw_2 D\xi_2 - \int \int_Q \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_2 + \int \int_\Sigma z_2 \xi_2 &= \int \int_Q u_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \int_\Omega u_{02} \xi_2(0), \end{aligned}$$

*pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1((0, T) \times \overline{\Omega})$  avec  $\xi_1(\cdot, T) = \xi_2(\cdot, T) \equiv 0$ .*

*De plus, on a*

1.  $\|(u_1(t), u_2(t))\|_\infty \leq \|(u_{01}, u_{02})\|_\infty$  .

$$2. \quad \int_0^t \int_{\Omega} (|Dw_1^k|^2 + |Dw_2^k|^2) \leq C, \text{ où } C \text{ est une constante indépendante de } k.$$

Le passage à la limite dans le problème  $(P^k)$  nécessite un cadre fonctionnel bien adapté au comportement de la solution lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Formellement pour compenser le fait que le coefficient  $a(k) \rightarrow \infty$  il faut que le terme  $g(w_1 - w_2) = 0$  p.p.  $\Omega_0$  ou encore  $w_1 = w_2$  p.p.  $\Omega_0$ . Et, donc on note par  $\mathcal{K}$  l'espace naturel associé au problème limite défini comme suit:

$$\mathcal{K} = \left\{ (\xi_1, \xi_2) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \text{ tel que } \xi_1 = \xi_2 \text{ p.p. dans } \Omega_0 \right\}.$$

**Théorème 4.2.2** Soit  $U_0 = (u_{01}, u_{02}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $U^k := (u_1^k, u_2^k)$  la solution du problème  $(P^k)$  donnée par le Théorème 4.2.1. Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a

$$U^k \longrightarrow U := (u_1, u_2) \quad \text{dans } \mathcal{C}((0,T), L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)),$$

où, pour  $i = 1, 2$ ; les  $u_i$  sont caractérisées par:

$$\begin{cases} u_i \in L^\infty(Q), \exists w_i \in L^2([0,T], H^1(\Omega)), \exists z_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, L^2(\partial\Omega)) \\ w_i = \varphi_i(u_i) \text{ p.p. } Q, z_i \in \gamma_i(w_i) \text{ p.p. } \Sigma, \end{cases}$$

et  $\forall l > 0$  on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \xi_1) dr + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \xi_1) \\ & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \xi_2) dr + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \xi_2) \\ & + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned}$$

pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{K}$ . Et  $U_0 = \underline{U}_0 := (\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02})$  où  $\underline{u}_{0i}$  sont données par:

$$\underline{u}_{01}(x) = \begin{cases} u_{01}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \tilde{u}_{01}(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{cases} \quad \underline{u}_{02}(x) = \begin{cases} u_{02}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \tilde{u}_{01}(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{cases},$$

avec  $\tilde{u}_{01}(x) := [I + \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1]^{-1}(u_{01} + u_{02})$ ,  $\tilde{u}_{02}(x) := [I + \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2]^{-1}(u_{01} + u_{02})$ .

### 4.3 Problème stationnaire

En utilisant la discrétisation par schéma implicite en temps et tenant compte de la théorie de semigroupe non-linéaire, l'étude de  $(P^k)$  est liée directement au problème

stationnaire suivant:

$$S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1,f_2) \begin{cases} v_1 - \Delta w_1 + \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2) = f_1, & w_1 \in \varphi_1(v_1) & \text{sur } \Omega \\ v_2 - \Delta w_2 - \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2) = f_2, & w_2 \in \varphi_2(v_2) & \text{sur } \Omega \\ \partial_{\bar{n}} w_1 + z_1 = 0, & z_1 \in \gamma_1(w_1) & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_{\bar{n}} w_2 + z_2 = 0, & z_2 \in \gamma_2(w_2) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

### 4.3.1 Existence et unicité de la solution.

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des graphes maximaux monotones de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $D(\varphi_1) = D(\varphi_2) = \mathbb{R}$  et nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème stationnaire  $S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1,f_2)$ . Pour cela, commençons d'abord par rappeler les résultats dans le cas où les non linéarités  $\varphi_i, \varphi_i^{-1}, \gamma_i^{-1}$  et  $g$  sont suffisamment régulières.

**Lemme 4.3.1** (Cf. [9]) *Pour  $i = 1,2$ ; on suppose que  $\varphi_i, \varphi_i^{-1}, \gamma_i^{-1}$  et  $g$  sont des fonctions Lipchitziennes continues, et soit  $F := (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , alors il existe une unique solution  $V := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Et,  $\exists w_i \in H^1(\Omega), \exists z_i \in L^2(\partial\Omega)$  telles que  $w_i = \varphi_i(v_i)$  p.p.  $\Omega, z_i = \gamma_i(w_i)$  p.p.  $\partial\Omega$ , et*

$$\int_{\Omega} Dw_i D\xi_i + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_i + \int_{\partial\Omega} z_i \xi_i = \int_{\Omega} (f_i - v_i)\xi_i \quad (4.1)$$

pour tout  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ .

**Lemme 4.3.2** (Cf. [9]) *Sous les hypothèses du lemme 4.3.1, soit  $(v_1, v_2)$  la solution du problème  $S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1, f_2)$  au sens du Lemme précédent, alors on a*

1.  $\|(v_1, v_2)\|_1 \leq \|(f_1, f_2)\|_1$ .

$$\text{avec } \|(v_1, v_2)\|_1 = \|v_1\|_{L^1(\Omega)} + \|v_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

2. Etant donné  $M > 0$ ,

$$\int_{\Omega} [(|v_1| - M)^+ + (|v_2| - M)^+] \leq \int_{\Omega} [(|f_1| - M)^+ + (|f_2| - M)^+].$$

En particulier,

$$\|(v_1, v_2)\|_{\infty} \leq \|(f_1, f_2)\|_{\infty}$$

$$\text{avec } \|(v_1, v_2)\|_{\infty} = \sup \left( \|v_1\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \|v_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right).$$

A fin de montrer l'existence de la solution du problème  $S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1, f_2)$  nous allons commencer par établir le Lemme technique suivant:

**Lemme 4.3.3** *Sous les hypothèses du lemme 4.3.1, soit  $F := (f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ , et  $V := (v_1, v_2)$  la solution du problème  $S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1, f_2)$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^N$ ,  $\psi \geq 0$  et  $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  de support  $\Omega' := \{x \in \Omega; \text{distance}(x, \partial\Omega) < |y|\}$ , on a*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \psi(x) (|v_1(x+y) - v_1(x)| + |v_2(x+y) - v_2(x)|) \\ & \leq \int_{\Omega'} |\Delta\psi(x)| (|w_1(x+y) - w_1(x)| + |w_2(x+y) - w_2(x)|) \\ & + \int_{\Omega'} \psi(x) (|f_1(x+y) - f_1(x)| + |f_2(x+y) - f_2(x)|) \\ & + 2 \int_{\Omega'} \psi(x) (|\mathcal{R}_k(x+y) - \mathcal{R}_k(x)| |g(w_1 - w_2)|) \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Preuve.** Nous utilisons les mêmes techniques dans [9]. Soit  $(v_1, v_2)$  la solution du problème  $S_{\varphi,\gamma}^{g,k}(f_1, f_2)$  au sens du Lemme 4.3.1, d'après (4.1) on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} D(w_1(x+y) - w_1(x)) D\xi dx + \int_{\Omega'} (v_1(x+y) - v_1(x)) \xi dx \\ & + \int_{\Omega'} [\mathcal{R}_k(x+y) g(w_1(x+y) - w_2(x+y)) - \mathcal{R}_k(x) g(w_1(x) - w_2(x))] \xi dx \\ & = \int_{\Omega'} (f_1(x+y) - f_1(x)) \xi dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

pour tout  $\xi \in H^1(\Omega')$  tel que  $\text{support}(\xi) \subset\subset \Omega'$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ ,  $\psi \geq 0$  prenons  $\xi = \psi \mathcal{H}_\varepsilon(w_1(x+y) - w_1(x))$  comme fonction test dans (4.3) et soit  $I_1^\varepsilon$  le terme à gauche de l'équation (4.3), alors

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon & : = \int_{\Omega'} DW [D\psi \mathcal{H}_\varepsilon(W) + \psi \mathcal{H}'_\varepsilon(W) D\mathcal{H}_\varepsilon(W)] \\ & \geq \int_{\Omega'} DW D\psi \mathcal{H}_\varepsilon(W) \\ & = - \int_{\Omega'} W \Delta\psi \mathcal{H}_\varepsilon(W) - \int_{\Omega'} W D\psi \mathcal{H}'_\varepsilon(W) D\mathcal{H}_\varepsilon(W), \end{aligned}$$

où  $W = w_1(x+y) - w_1(x)$  et  $\mathcal{H}_\varepsilon(s) = \inf(s^+/\varepsilon, 1)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $s \in \mathbb{R}$ . D'autre part, il vient de la définition de  $\mathcal{H}_\varepsilon$  que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W \mathcal{H}'_\varepsilon(W) \rightarrow 0 \text{ et } |W \mathcal{H}'_\varepsilon(W)| \leq 1 \text{ p.p. } \Omega'.$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} W D\psi \mathcal{H}'_\varepsilon(W) D\mathcal{H}_\varepsilon(W) = 0.$$

Nous faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans  $(I_1^\varepsilon)$ , nous trouvons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} W \Delta \psi \mathcal{H}_\varepsilon(W) \geq - \int_{\Omega'} |W| |\Delta \psi|. \quad (4.4)$$

Ainsi, nous utilisons le fait que  $\varphi_i, \varphi_i^{-1}$ , sont des fonctions continues Lipschitziennes et nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} (v_1(x+y) - v_1(x)) \psi \mathcal{H}_\varepsilon(W) dx \geq \int_{\Omega'} |v_1(x+y) - v_1(x)| \psi. \quad (4.5)$$

Passons à la limite dans (4.3) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et utilisons (4.4) et (4.5), nous déduisons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \psi(x) |v_1(x+y) - v_1(x)| + \int_{\Omega'} t(x) \psi(x) \text{Sign}_0(w_1(x+y) - w_1(x)) \\ & \leq \int_{\Omega'} |\Delta \psi(x)| (|w_1(x+y) - w_1(x)|) + \int_{\Omega'} \psi(x) (|f_1(x+y) - f_1(x)|) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $t(x) = \mathcal{R}_k(x+y)g(w_1(x+y) - w_2(x+y)) - \mathcal{R}_k(x)g(w_1(x) - w_2(x))$ . De la même manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \psi(x) |v_2(x+y) - v_2(x)| - \int_{\Omega'} t(x) \psi(x) \text{Sign}_0(w_2(x+y) - w_2(x)) \\ & \leq \int_{\Omega'} |\Delta \psi(x)| (|w_2(x+y) - w_2(x)|) + \int_{\Omega'} \psi(x) (|f_2(x+y) - f_2(x)|). \end{aligned} \quad (4.7)$$

D'autre part, il vient que

$$\begin{aligned} J : & = t(x) \left( \text{Sign}_0(w_1(x+y) - w_1(x)) - \text{Sign}_0(w_2(x+y) - w_2(x)) \right) \\ & \geq \left( \mathcal{R}_k(x+y) - \mathcal{R}_k(x) \right) g(w_1(x) - w_2(x)) \left( \text{Sign}_0(w_1(x+y) - w_1(x)) \right. \\ & \quad \left. - \text{Sign}_0(w_2(x+y) - w_2(x)) \right) \\ & \geq -2 \left( \left| \mathcal{R}_k(x+y) - \mathcal{R}_k(x) \right| g(w_1 - w_2) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nous additionnons (4.6) avec (4.7) et d'après (4.8), nous obtenons le résultat du lemme.  $\blacksquare$

**Remarque 2** *Le résultat du lemme 4.3.3 est toujours vrai pour tout solution du problème de type  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}$  indépendamment des conditions aux bords.*

**Proposition 4.3.1** *Soit  $F := (f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ , alors il existe une unique solution  $V := (v_1, v_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  du problème  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}(f_1, f_2)$  au sens suivant: pour  $i = 1, 2$ ;  $\exists w_i \in H^1(\Omega), \exists z_i \in L^2(\partial\Omega)$  telles que  $w_i \in \varphi_i(v_i)$  p.p.  $\Omega, z_i \in \gamma_i(w_i)$  p.p.  $\partial\Omega$ , et*

$$\int_{\Omega} Dw_i D\xi_i + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_i + \int_{\partial\Omega} z_i \xi_i = \int_{\Omega} (f_i - v_i)\xi_i \quad (4.9)$$

pour tout  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ .

De plus, on a les estimations suivantes:

$$1. \quad \|(v_1, v_2)\|_{\infty} \leq \|(f_1, f_2)\|_{\infty} .$$

$$2. \quad \int_{\Omega} (|Dw_1|^2 + |Dw_2|^2) \leq C', \text{ où } C' \text{ est une constante indépendante de } k.$$

**Preuve.** Pour  $i = 1, 2$ , Soient  $\varphi_i^\lambda, \gamma_i^\lambda$  et  $g^\lambda$  respectivement l'approximation de Yoshida de  $\varphi_i, \gamma_i$  et  $g$ . Posons  $\hat{\varphi}_i^\lambda(r) = \varphi_i^\lambda(r) + \lambda r$ , il est clair que  $\hat{\varphi}_i^\lambda, (\hat{\varphi}_i^\lambda)^{-1}, \gamma_i^\lambda$  et  $g^\lambda$  sont des fonctions continues Lipschitziennes, donc d'après le Lemme 4.3.1 il existe une unique solution faible notée  $(v_1^\lambda, v_2^\lambda)$  du problème  $S_{\hat{\varphi}^\lambda, \gamma^\lambda}^{g^\lambda, k}(f_1, f_2)$ . Il vient du Lemme 4.3.2 que

$$\|(v_1^\lambda, v_2^\lambda)\|_{\infty} \leq \|(f_1, f_2)\|_{\infty}$$

et puisque  $|\varphi_i^\lambda(r)| \leq |\varphi_i^0(r)|$ , donc

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}_i^\lambda(v_i^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|\varphi_i^0(v_i^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} + \lambda \|v_i^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \varphi_i^0(\|(f_1, f_2)\|_{\infty}) + \lambda \|(f_1, f_2)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

prenons  $\lambda$  assez petit, nous déduisons que

$$\|\hat{\varphi}_i^\lambda(v_i^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_1 \quad (4.10)$$

où  $M_1$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Omega$  et  $\varphi_i^0(\|(f_1, f_2)\|_{\infty})$ . De la même manière on a

$$\|g^\lambda(\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda) - \hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(\|\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)})$$

alors,

$$\|\mathcal{R}_k g^\lambda(\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda) - \hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_2 \quad (4.11)$$

où  $M_2$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Omega, g, M_1$  et  $\|\mathcal{R}_k\|_{\infty}$ .

Maintenant, prenons  $\hat{w}_i^\lambda = \hat{\varphi}_i^\lambda(v_i^\lambda)$  comme fonction test dans le Lemme 4.3.1, alors on a

$$\int_{\Omega} |D\hat{w}_i^\lambda|^2 + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g^\lambda(\hat{w}_1^\lambda - \hat{w}_2^\lambda) \hat{w}_i^\lambda + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_i^\lambda \hat{w}_i^\lambda = \int_{\Omega} (f_i - v_i^\lambda) \hat{w}_i^\lambda$$

où  $\hat{z}_i^\lambda = \gamma_i(\hat{w}_i^\lambda)$ , en utilisant le fait que  $\gamma_i$  et  $\hat{\varphi}_i^\lambda$  sont croissantes, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\hat{w}_i^\lambda|^2 &\leq (-1)^i \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g^\lambda(\hat{w}_1^\lambda - \hat{w}_2^\lambda) \hat{w}_i^\lambda + \int_{\Omega} f_i \hat{w}_i^\lambda \\ &\leq \|\mathcal{R}_k g^\lambda(\hat{w}_1^\lambda - \hat{w}_2^\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\hat{w}_i^\lambda\|_{L^1(\Omega)} + \|\hat{f}_i^\lambda\|_{L^1(\Omega)} \|\hat{w}_i^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

où  $M_3$  est indépendante de  $\lambda$ . Par suite  $(\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda), \hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda))$  est bornée dans  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , donc faiblement séquentiellement compact dans  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . D'autre part, il vient du Lemme 4.3.3 que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega''} \psi(x) (|v_1^\lambda(x+y) - v_1^\lambda(x)| + |v_2^\lambda(x+y) - v_2^\lambda(x)|) \\ &\leq \int_{\Omega'} |\Delta\psi(x)| (|w_1^\lambda(x+y) - w_1^\lambda(x)| + |w_2^\lambda(x+y) - w_2^\lambda(x)|) + \\ &\quad \int_{\Omega'} \psi(x) (|f_1(x+y) - f_1(x)| + |f_2(x+y) - f_2(x)|) \\ &\quad + 2 \int_{\Omega'} \psi(x) (|\mathcal{R}_k(x+y) - \mathcal{R}_k(x)| |g^\lambda(w_1^\lambda - w_2^\lambda)|) \end{aligned}$$

avec  $\Omega'$  et  $\Omega''$  sont des ouverts de  $\Omega$ , et  $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ ,  $\overline{\Omega''} \subseteq \Omega'$ .

Nous utilisons (4.12) et le fait que  $\mathcal{R}_k \in BV(\Omega)$ , nous obtenons

$$\limsup_{y \rightarrow 0, \lambda > 0} \int_{\Omega''} (|v_1^\lambda(x+y) - v_1^\lambda(x)| + |v_2^\lambda(x+y) - v_2^\lambda(x)|) = 0,$$

nous combinons avec le Lemme 4.3.2 et on a  $(v_1^\lambda, v_2^\lambda)$  est précompact dans  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ . De plus, d'après (4.11) que  $g^\lambda(\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda) - \hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda))$  est faiblement séquentiel compact dans  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ . Alors, il existe  $\lambda_n \rightarrow 0$  telle que

$$\left( \begin{array}{l} (v_1^{\lambda_n}, v_2^{\lambda_n}) \rightarrow (v_1, v_2) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \\ (\hat{\varphi}_1^{\lambda_n}(v_1^{\lambda_n}), \hat{\varphi}_2^{\lambda_n}(v_2^{\lambda_n})) \rightarrow (w_1, w_2) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ (z_1^{\lambda_n}, z_2^{\lambda_n}) \rightarrow (z_1, z_2) \quad \text{faiblement dans } L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \\ g^\lambda(\hat{\varphi}_1^\lambda(v_1^\lambda) - \hat{\varphi}_2^\lambda(v_2^\lambda)) \rightarrow h \quad \text{faiblement dans } L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

En utilisant l'argument de monotonie on trouve que  $h = g(w_1 - w_2)$  et pour  $i = 1, 2$   $w_i \in \varphi_i(v_i)$ ,  $z_i \in \gamma_i(w_i)$ . Finalement nous passons à la limite dans la formulation faible et nous obtenons (4.9). Ce qui termine la première partie de la preuve.

Maintenant, pour terminer la preuve de la proposition nous allons montrer les estimations 1) et 2).

1) Puisque  $\|(v_1^\lambda, v_2^\lambda)\|_\infty \leq \|(f_1, f_2)\|_\infty$  donc  $\|(v_1, v_2)\|_\infty \leq \|(f_1, f_2)\|_\infty$ .

2) Prenons  $w_i^k$  comme fonction test dans (4.9), alors on a

$$\int_{\Omega} |Dw_i^k|^2 + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x)g(w_1^k - w_2^k)w_i^k + \int_{\partial\Omega} z_i^k w_i^k = \int_{\Omega} (f_i - v_i^k)w_i^k$$

il vient du fait que  $\gamma_i$  et  $\varphi_i$  sont monotones, que  $v_i^k w_i^k \geq 0$  et  $z_i^k w_i^k \geq 0$ . On additionne l'équation vérifiée pour  $i = 1$  avec l'équation vérifiée pour  $i = 2$  alors

$$\int_{\Omega} |Dw_1^k|^2 + \int_{\Omega} |Dw_2^k|^2 + \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x)g(w_1^k - w_2^k)(w_1^k - w_2^k)}_{\geq 0} \leq \int_{\Omega} (f_1 w_1^k + f_2 w_2^k)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dw_1^k|^2 + \int_{\Omega} |Dw_2^k|^2 &\leq \left( \|f_1\|_{L^1(\Omega)} \|w_1^k\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^1(\Omega)} \|w_2^k\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\leq \left( \|f_1\|_{L^1(\Omega)} \varphi_1^0(\|v_1^k\|_{L^\infty(\Omega)}) + \|f_2\|_{L^1(\Omega)} \varphi_2^0(\|v_2^k\|_{L^\infty(\Omega)}) \right) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition. ■

### 4.3.2 Passage à la limite lorsque $k$ tend vers $\infty$

Comme le Problème  $(P^k)$  est lié à  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}(f_1, f_2)$  via la théorie de semigroupe alors le passage à la limite l'est aussi. Nous montrons d'abord le Lemme suivant:

**Lemme 4.3.4** Soient  $a, b, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$  alors

$$(g(a - b) - g(\hat{a} - \hat{b}))(T_l(a - \hat{a}) - T_l(b - \hat{b})) \geq 0 \quad \forall l > 0.$$

**Preuve:** Soit  $l > 0$  et posons  $I_l := (g(a - b) - g(\hat{a} - \hat{b}))(T_l(a - \hat{a}) - T_l(b - \hat{b}))$  donc si  $a - \hat{a} \geq l$  et  $b - \hat{b} \leq -l$  alors

$$I_l = 2l(g(a - b) - g(\hat{a} - \hat{b})) \geq 0.$$

Si  $a - \hat{a} \geq l$  et  $-l \leq b - \hat{b} \leq l$  alors

$$I_l = (g(a - b) - g(\hat{a} - \hat{b})) \underbrace{(l - (b - \hat{b}))}_{\geq 0} \geq 0.$$

Si  $a - \hat{a} \leq -l$  et  $-l \leq b - \hat{b} \leq l$  alors

$$I_l = (g(a - b) - g(\hat{a} - \hat{b})) \underbrace{(-l - (b - \hat{b}))}_{\leq 0} \geq 0.$$

Et, si  $a - \hat{a}$  et  $b - \hat{b}$  sont sur le même coté de  $T_l$  alors  $I_l = 0$ . Les autres cas se déduisent en permutant  $a$  avec  $-\hat{a}$  et  $b$  avec  $-\hat{b}$ . D'où le résultat du lemme. ■

Maintenant, nous passons à la limite dans  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}(f_1, f_2)$  et nous obtenons la Proposition suivante:

**Proposition 4.3.2** *Soit  $F := (f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $V^k := (v_1^k, v_2^k)$  la solution du problème  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}(f_1, f_2)$ . Alors, lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on a pour  $i = 1, 2$   $v_i^k \rightarrow v_i$ , dans  $L^1(\Omega)$ ,  $z_i^k \rightarrow z_i$ , dans  $L^1(\partial\Omega)$ -faible et  $w_i^k \rightarrow w_i$  dans  $H^1(\Omega)$ -faible. Le triplet  $(v_i, w_i, z_i) \in (L^1(\Omega), H^1(\Omega), L^1(\partial\Omega))$  satisfait :*

$$w_i = \varphi_i(v_i) \text{ p.p. } \Omega, \quad z_i \in \gamma_i(w_i) \text{ p.p. } \partial\Omega, \quad w_1 = w_2 \text{ p.p. } \Omega_0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \xi_1) \\ + \int_{\Omega} v_2 T_l(w_2 - \xi_2) + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \xi_2) \\ + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2)) \\ \leq \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} f_2 T_l(w_2 - \xi_2) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

pour tout  $\xi := (\xi_1, \xi_2) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)) \cap \mathcal{K}$ . De plus, le couple  $(v_1, v_2)$  est unique.

**Preuve. Convergence:** Prenons  $F := (f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $V^k := (v_1^k, v_2^k)$  la solution du problème  $S_{\varphi, \gamma}^{g, k}(f_1, f_2)$ , alors pour  $i = 1, 2$  on a  $v_i^k \in L^\infty(\Omega)$ ,  $w_i^k \in H^2(\Omega)$  et  $z_i^k \in L^2(\partial\Omega)$ . D'autre part il vient de la Proposition 4.3.1, que

$$\|(v_1^k, v_2^k)\|_\infty \leq \|(f_1, f_2)\|_\infty \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (|Dw_1|^2 + |Dw_2|^2) \leq C,$$

d'où  $w_i^k$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , alors  $w_i^k$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$ . Puisque,  $v_i^k$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  et  $v_i^k = \varphi_i^{-1}(w_i^k)$  alors  $v_i^k$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ . Donc, on peut extraire une sous suite de  $v_i^k$  (respectivement  $w_i^k$ ), notée encore  $v_i^k$  (respectivement  $w_i^k$ ), telles que lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$v_i^k \text{ converge fortement vers } v_i, \text{ dans } L^1(\Omega)$$

et  $w_i^k$  converge vers  $w_i$ , faiblement dans  $H^1(\Omega)$  et fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

D'après  $(H_1)$ , on a  $z_i^k$  est bornée dans  $L^\infty(\partial\Omega)$ , d'où  $z_i^k$  est bornée dans  $L^2(\partial\Omega)$ , alors

$$z_i^k \rightharpoonup z_i, \text{ dans } L^2(\partial\Omega).$$

Nous appliquons le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, donc

$$g(w_1^k - w_2^k) \longrightarrow g(w_1 - w_2), \text{ dans } L^1(\Omega).$$

D'autre part, on multiplie l'équation (4.9) par  $[a(k)]^{-1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & [a(k)]^{-1} \left( \int_{\Omega} Dw_i^k D\xi_i + \int_{\partial\Omega} z_i^k \xi_i + \int_{\Omega} (v_i^k - f_i) \xi_i \right. \\ & \left. + (-1)^{i-1} \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1^k - w_2^k) \xi_i \right) = (-1)^i \int_{\Omega_0} g(w_1^k - w_2^k) \xi_i \end{aligned}$$

On fait tendre  $k$  vers  $+\infty$ , donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} g(w_1^k - w_2^k) \xi_i = 0 \quad (4.14)$$

pour tout  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ , et puisque  $g(w_1^k - w_2^k)$  converge vers  $g(w_1 - w_2)$  dans  $L^1(\Omega)$ , on déduit que

$$|g(w_1 - w_2)|_{L^2(\Omega_0)} = 0 \quad \text{d'où } g(w_1 - w_2) = 0 \text{ et } w_1 = w_2 \text{ p.p. dans } \Omega_0.$$

Maintenant, prenons  $T_l(w_i^k - \xi_i)$  comme fonction test dans (4.9) et additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\Omega} Dw_1^k DT_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) \\ & + \int_{\Omega} v_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\Omega} Dw_2^k DT_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) \quad (4.15) \\ & + \int_{\Omega} S^k(x) = \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1^k - \xi_1) + f_2 T_l(w_2^k - \xi_2) \quad \forall l > 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in H^1(\Omega)$ , où  $S^k(x) = \mathcal{R}_k(x) g(w_1^k - w_2^k) (T_l(w_1^k - \xi_1) - T_l(w_2^k - \xi_2))$ . Prenons  $\xi := (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{K}$  donc  $\xi_1 = \xi_2 := \xi$  p.p.  $\Omega_0$ , et on décompose l'intégrale de  $S^k$  de la manière suivante

$$\int_{\Omega} S^k(x) = \int_{\Omega_0} S^k(x) + \int_{\Omega_1} S^k(x). \quad (4.16)$$

pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} S^k(x) &= \int_{E_1} \underbrace{\mathcal{R}_k(x)g(w_1^k - w_2^k)(w_1^k - w_2^k)}_{\geq 0} + \int_{E_2} \mathcal{R}_k(x)g(w_1^k - w_2^k)(w_1^k - \xi - l) \\ &\quad + \int_{E_3} \mathcal{R}_k(x)g(w_1^k - w_2^k)(l - w_2^k + \xi) \end{aligned}$$

ou,

$$E_1 := \{x \in \Omega_0, \text{ tel que } |w_1^k - \xi| \leq l \text{ et } |w_2^k - \xi| \leq l\},$$

$$E_2 := \{x \in \Omega_0, \text{ tel que } |w_1^k - \xi| \leq l \text{ et } |w_2^k - \xi| \geq l\}$$

et

$$E_3 := \{x \in \Omega_0, \text{ tel que } |w_1^k - \xi| \geq l \text{ et } |w_2^k - \xi| \leq l\}.$$

Pour p.p.  $x \in E_2$  on a :

$$w_1^k - \xi - l \leq 0 \text{ donc } w_1^k \leq w_2^k \text{ et } \mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1^k - w_2^k)(w_1^k - \xi - l) \geq 0.$$

Pour p.p.  $x \in E_3$  on a :

$$l - w_2^k + \xi \geq 0 \text{ et } w_1^k \geq w_2^k \text{ alors } \mathcal{R}_k(\cdot)g(w_1^k - w_2^k)(l - w_2^k + \xi) \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega_0} S^k(x) \geq 0 \quad \text{d'où} \quad \int_{\Omega} S^k(x) \geq \int_{\Omega_1} S^k(x) \quad (4.17)$$

On en déduit donc, que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} v_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\Omega} Dw_1^k DT_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) \\ &+ \int_{\Omega} v_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\Omega} Dw_2^k DT_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) \\ &+ \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1^k - w_2^k)(T_l(w_1^k - \xi_1) - T_l(w_2^k - \xi_2)) \\ &\leq \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1^k - \xi_1) + f_2 T_l(w_2^k - \xi_2) \quad \forall l > 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

pour tout  $(\xi_1, \xi_2) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)) \cap \mathcal{K}$ . Or, lorsque que  $k$  tend vers  $\infty$ , on a  $w_i^k$  converge faiblement vers  $w_i$  dans  $H^1(\Omega)$ , par suite  $T_l(w_i^k - \xi_i)$  converge faiblement vers  $T_l(w_i - \xi_i)$  dans  $H^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |DT_l(w_i - \xi_i)|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |DT_l(w_i^k - \xi_i)|^2.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} Dw_i^k DT_l(w_i^k - \xi_i) = \int_{\Omega} |DT_l(w_i^k - \xi_i)|^2 + \int_{\Omega} D\xi_i DT_l(w_i^k - \xi_i),$$

d'où

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Dw_i^k DT_l(w_i^k - \xi_i) &\geq \int_{\Omega} |DT_l(w_i - \xi_i)|^2 + \int_{\Omega} D\xi_i DT_l(w_i - \xi_i) \\ &= \int_{\Omega} Dw_i DT_l(w_i - \xi_i). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Finalement, nous appliquons le Lemme de Fatou, nous passons à la limite en  $k$  dans (4.18), nous utilisons (4.19) et nous obtenons (4.13).

**Unicité:** Soient  $V := (v_1, v_2)$ ,  $\tilde{V} := (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$  deux solutions au sens (4.13), prenons  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$  fonction test dans l'inégalité satisfaite par  $(v_1, v_2)$ , donc on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} v_1 T_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \tilde{w}_1) \\ &+ \int_{\Omega} v_2 T_l(w_2 - \tilde{w}_2) + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \tilde{w}_2) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \tilde{w}_2) \\ &+ \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \tilde{w}_1) - T_l(w_2 - \tilde{w}_2)) \\ &\leq \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1 - \tilde{w}_1) + f_2 T_l(w_2 - \tilde{w}_2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Maintenant prenons  $(w_1, w_2)$  dans l'inégalité satisfaite par  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ , alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \tilde{v}_1 T_l(\tilde{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} D\tilde{w}_1 DT_l(\tilde{w}_1 - w_1) + \int_{\partial\Omega} \tilde{z}_1 T_l(\tilde{w}_1 - w_1) \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{v}_2 T_l(\tilde{w}_2 - w_2) + \int_{\Omega} D\tilde{w}_2 DT_l(\tilde{w}_2 - w_2) + \int_{\partial\Omega} \tilde{z}_2 T_l(\tilde{w}_2 - w_2) \\ &+ \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2) (T_l(\tilde{w}_1 - w_1) - T_l(\tilde{w}_2 - w_2)) \\ &\leq \int_{\Omega} \tilde{f}_1 T_l(\tilde{w}_1 - w_1) + \tilde{f}_2 T_l(\tilde{w}_2 - w_2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

On additionne l'inégalité (4.20) et (4.21), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (v_1 - \tilde{v}_1)T_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\Omega} (v_2 - \tilde{v}_2)T_l(w_2 - \tilde{w}_2) \\
 & + \int_{\Omega} D(w_1 - \tilde{w}_1)DT_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\Omega} D(w_2 - \tilde{w}_2)DT_l(w_2 - \tilde{w}_2) \\
 & + \int_{\partial\Omega} (z_1 - \tilde{z}_1)T_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\partial\Omega} (z_2 - \tilde{z}_2)T_l(w_2 - \tilde{w}_2) \\
 & + \int_{\Omega_1} \tilde{S}_l(x) \leq \int_{\Omega} (f_1 - \tilde{f}_1)T_l(w_1 - \tilde{w}_1) + \int_{\Omega} (f_2 - \tilde{f}_2)T_l(w_2 - \tilde{w}_2),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

où

$$\tilde{S}_l(x) = \mathcal{R}_0(x)(g(w_1 - w_2) - g(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2))(T_l(w_1 - \tilde{w}_1) - T_l(w_2 - \tilde{w}_2)).$$

Il vient de la monotonie de  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $T_l$  que pour  $i = 1, 2$   $(z_i - \tilde{z}_i)T_l(w_i - \tilde{w}_i) \geq 0$  et d'après le Lemme 4.3.4, on a  $\tilde{S}_l(x) \geq 0$  p.p.  $x \in \Omega_1$ . On multiplie (4.22) par  $\frac{1}{l}$  et on passe à la limite lorsque  $l$  tend vers 0, on trouve

$$\|v_1 - \tilde{v}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|v_2 - \tilde{v}_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^1(\Omega)} + \|f_2 - \tilde{f}_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition. ■

## 4.4 Problème d'évolution

### 4.4.1 Bonne solution

Afin d'écrire  $(P^k)$  sous la forme abstraite, on considère  $X = L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$  l'espace de Banach muni de la norme usuelle  $\|(u_1, u_2)\|_X = \|u_1\|_{L^1(\Omega)} + \|u_2\|_{L^1(\Omega)}$ , pour tout  $(u_1, u_2) \in X$ . Et, on considère  $U = (u_1, u_2)$  comme application définie de  $[0, T]$  dans  $X$ , alors le problème de Cauchy abstrait associé à  $(P^k)$  s'écrit

$$CP^k(u_{01}, u_{02}) \begin{cases} U_t + \mathcal{A}^k U \ni 0 & \text{sur } (0, T) \\ U(0) := U_0 = (u_{01}, u_{02}), \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}^k$  est l'opérateur défini dans  $X$  par: pour tout  $F := (f_1, f_2) \in X$  et  $U := (u_1, u_2) \in X$ , on a  $F \in \mathcal{A}^k U$  si et seulement si  $f_1 \in \mathcal{A}_{\varphi_1, \gamma_1}^{g, k} u_1$  et  $f_2 \in \mathcal{A}_{\varphi_2, \gamma_2}^{g, k} u_2$ , où

pour  $i = 1, 2$ ; l'opérateur  $A_{\varphi_i, \gamma_i}^{g, k}$  est défini par

$$f_i \in \mathcal{A}_{\varphi_i, \gamma_i}^{g, k} v_i \Leftrightarrow \begin{cases} v_i, f_i \in L^1(\Omega), \exists w_i \in W^{1,1}(\Omega), \exists z_i \in L^1(\partial\Omega) \\ w_i \in \varphi_i(v_i) \text{ p.p. } \Omega, z_i \in \gamma_i(w_i) \text{ p.p. } \partial\Omega, \text{ et} \\ \int_{\Omega} Dw_i D\xi_i + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g(w_1 - w_2) \xi_i + \int_{\partial\Omega} z_i \xi_i = \int_{\Omega} f_i \xi_i \\ \text{pour toute } \xi_i \in W^{1,\infty}(\Omega). \end{cases}$$

On munit l'espace  $X$  de la relation d'ordre  $(f_1, f_2) \leq (g_1, g_2)$  si et seulement si  $f_1 \leq g_1$  et  $f_2 \leq g_2$  p.p. dans  $\Omega$ .

**Remarque 3** Il vient de [9] que l'opérateur  $\mathcal{A}^k$  est  $T$ -accrétif dans  $X$ , de plus la relation entre les résolvantes des opérateurs  $\mathcal{A}^k$ ,  $\mathcal{A}_{\varphi_1, \gamma_1}^0$  et  $\mathcal{A}_{\varphi_2, \gamma_2}^0$  est:  $(v_1, v_2) = (I + \varepsilon \mathcal{A}^k)^{-1}(f_1, f_2)$  si et seulement si pour  $i = 1, 2$ ;  $v_i = (I + \varepsilon \mathcal{A}_{\varphi_i, \gamma_i}^0)^{-1}(f_i - (-1)^{i-1} \varepsilon \mathcal{R}_k(\cdot) g(w_1 - w_2))$ .

**Remarque 4** L'opérateur  $\overline{\mathcal{A}^k}$  est  $m$ - $T$ -accrétif dans  $X$ . En effet, d'après la Remarque 3, on a  $\mathcal{A}^k$  est  $T$ -accrétif dans  $X$  donc  $\overline{\mathcal{A}^k}$  l'est aussi, et il vient de la Proposition 4.3.1 que  $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{R}(I + \lambda \overline{\mathcal{A}^k})$  d'où par densité  $\mathcal{R}(I + \lambda \overline{\mathcal{A}^k}) = X$ .

**Corollaire 4.4.1** Pour tout  $(u_{01}, u_{02}) \in X$ , le problème  $CP^k(u_{01}, u_{02})$  admet une unique bonne solution.

Conséquence immédiate de la Proposition 4.3.2, on a le résultat de convergence de l'opérateur  $\mathcal{A}^k$  suivant:

**Corollaire 4.4.2** Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , l'opérateur  $\mathcal{A}^k$  converge dans  $X$ , au sens de la résolvante vers l'opérateur  $T$ -accrétif défini, par

$$(f_1, f_2) \in \mathcal{A}_\infty(v_1, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} v_i \in L^2(\Omega), \exists w_i \in H^1(\Omega), \exists z_i \in L^2(\partial\Omega), \\ w_i = \varphi(v_i) \text{ p.p. } \Omega, z_i \in \gamma(w_i) \text{ p.p. } \partial\Omega, \text{ et} \\ \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) \\ + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \xi_2) + \\ \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2)) \\ \leq \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} f_2 T_l(w_2 - \xi_2) \\ \text{pour tout } \xi = (\xi_1, \xi_2) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)) \cap \mathcal{K}. \end{cases} \quad (4.23)$$

En particulier,  $\mathcal{A}_\infty$  est T- accréatif,  $\mathcal{R}(I + \varepsilon\mathcal{A}_\infty) \supseteq L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $\mathcal{A}_\infty$  engendre un semigroupe non linéaire de contraction dans  $X$ . ■

#### 4.4.2 Existence de la solution faible

**Proposition 4.4.1** *On suppose que  $u_{01}, u_{02} \in L^\infty(\Omega)$  et  $U = (u_1, u_2)$  la bonne solution du problème  $CP^k(u_{01}, u_{02})$ . Alors  $U$  est une solution faible du Problème  $(P^k)$  au sens du Théorème 4.2.1.*

**Preuve** Soit  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  la solution  $\varepsilon$ - approchée où  $\varepsilon = t/n$ , et pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1^i - \varepsilon \Delta w_1^i + \varepsilon \mathcal{R}_k(x)g(w_1^i - w_2^i) = u_1^{i-1} & w_1^i = \varphi_1(u_1^i) \quad \text{sur } \Omega \\ u_2^i - \varepsilon \Delta w_2^i - \varepsilon \mathcal{R}_k(x)g(w_1^i - w_2^i) = u_2^{i-1} & w_2^i = \varphi_2(u_2^i) \quad \text{sur } \Omega \\ \partial_{\bar{n}} w_1^i + z_1^i = 0 & z_1^i \in \gamma_1(w_1^i) \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_{\bar{n}} w_2^i + z_2^i = 0, & z_2^i \in \gamma_2(w_2^i) \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Pour  $q = 1, 2$ , notons  $u_q^\varepsilon$  la fonction constante par morceau définie par  $u_q^\varepsilon(t) = u_q^i$ , pour  $t \in ]t_{i-1}, t_i]$ ,  $u_q^\varepsilon(0) = u_{0q}$ . D'après la Proposition 4.3.1, on a  $\|(u_1^i, u_2^i)\|_\infty \leq \|(u_{01}, u_{02})\|_\infty$ , alors

$$\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_\infty \leq \|(u_{01}, u_{02})\|_\infty. \quad (4.25)$$

D'autre part, on a  $w_q^\varepsilon = \varphi_q(u_q^\varepsilon)$  donc

$$\|w_q^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varphi_q(\|(u_{01}, u_{02})\|_\infty) := M' \quad (4.26)$$

où  $M'$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Maintenant, on prend  $w_1^i$  (respectivement  $w_2^i$ ) comme fonction test dans la première (respectivement la deuxième) équation de (4.24) et on additionne les deux équations obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_1^i - u_1^{i-1})w_1^i + \int_{\Omega} (u_2^i - u_2^{i-1})w_2^i + \varepsilon \int_{\Omega} (|Dw_1^i|^2 + |Dw_2^i|^2) \\ & + \varepsilon \int_{\partial\Omega} (z_1^i w_1^i + z_2^i w_2^i) + \varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x)g(w_1^i - w_2^i)(w_1^i - w_2^i) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Soit  $j_q : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  une fonction convexe propre s.c.i. telle que  $j_q(r) = \int_0^r \varphi_q(s)ds$ , alors  $j_q$  vérifie

$$\int_{\Omega} (u_q^{i-1} - u_q^i)w_q^i \leq \int_{\Omega} (j_q(u_q^{i-1}) - j_q(u_q^i)),$$

donc (4.27), devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (j_1(u_1^i) + j_2(u_2^i)) + \epsilon \int_{\Omega} (|Dw_1^i|^2 + |Dw_2^i|^2) + \epsilon \int_{\partial\Omega} (z_1^i w_1^i + z_2^i w_2^i) \\ & + \epsilon \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g(w_1^i - w_2^i) (w_1^i - w_2^i) \leq \int_{\Omega} (j_1(u_1^{i-1}) + j_2(u_2^{i-1})). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nous utilisons la monotonie de  $\varphi_q, \gamma_q$  et  $g$  dans (4.28), on voit que

$$\int_{\Omega} (j_1(u_1^i) + j_2(u_2^i)) + \epsilon \int_{\Omega} |Dw_1^i|^2 + |Dw_2^i|^2 \leq \int_{\Omega} (j_1(u_1^{i-1}) + j_2(u_2^{i-1})). \quad (4.29)$$

On additionne (4.29) pour  $i = 1, \dots, n$ , on obtient

$$\int_{\Omega} (j_1(u_1^\epsilon) + j_2(u_2^\epsilon)) + \int_0^t \int_{\Omega} |Dw_1^\epsilon|^2 + |Dw_2^\epsilon|^2 \leq \int_{\Omega} (j_1(u_{01}) + j_2(u_{02})) \quad (4.30)$$

et comme  $j_1, j_2 \geq 0$ , on a

$$\int_0^t \int_{\Omega} |Dw_1^\epsilon|^2 + |Dw_2^\epsilon|^2 \leq \int_{\Omega} (j_1(u_{01}) + j_2(u_{02})). \quad (4.31)$$

D'après, (4.25) et (4.31) on a  $w_q^\epsilon$  est bornée dans  $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ , donc il existe  $w_q \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$  telle que  $w_q^\epsilon \rightharpoonup w_q$  faiblement dans  $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ . D'autre part,  $w_q^\epsilon$  est bornée dans  $L^\infty(Q)$  et  $\varphi_q$  est continue, donc nous utilisons le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, alors

$$w_q^\epsilon \rightarrow w_q \quad \text{dans } L^1(Q).$$

Il vient de  $(H_1)$  que  $z_q^\epsilon \in \gamma_q(w_q^\epsilon)$  est bornée dans  $L^\infty(\Sigma)$ , donc il existe  $z_q \in L^2(\Sigma)$  telle que  $z_q^\epsilon \rightharpoonup z_q$  faiblement dans  $L^2(\Sigma)$ . Nous utilisons l'argument de monotonie (Cf. Lemme G [2]) et nous obtenons  $w_q(t) = \varphi_q(u_q(t))$ ,  $z_q(t) \in \gamma_q(w_q(t))$  p.p.  $\Omega$ . Maintenant, Soit  $\tilde{u}_q^\epsilon$  la fonction définie de  $[0, T]$  vers  $L^1(\Omega)$ , par  $\tilde{u}_q^\epsilon(t_i) = u_q^i$ , et  $\tilde{u}_q^\epsilon$  est linéaire sur  $[t_{i-1}, t_i]$ , alors il vient de (4.24) que

$$\begin{aligned} & \int \int_Q Dw_1^\epsilon D\xi_1 + \int \int_Q \mathcal{R}_k(x) g(w_1^\epsilon - w_2^\epsilon) \xi_1 + \int \int_\Sigma z_1^\epsilon \xi_1 = \int \int_Q \tilde{u}_1^\epsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \int_\Omega u_{01} \xi_1(0) \\ & \int \int_Q Dw_2^\epsilon D\xi_2 - \int \int_Q \mathcal{R}_k(x) g(w_1^\epsilon - w_2^\epsilon) \xi_2 + \int \int_\Sigma z_2^\epsilon \xi_2 = \int \int_Q \tilde{u}_2^\epsilon \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \int_\Omega u_{02} \xi_2(0) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1((0, T] \times \bar{\Omega})$  avec  $\xi_1(\cdot, T) = \xi_2(\cdot, T) \equiv 0$ . Passons à la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0 dans (4.25), (4.31) et les égalités précédentes, on obtient respectivement

1) , 2) et

$$\begin{aligned} \int \int_Q Dw_1 D\xi_1 + \int \int_Q \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_1 + \int \int_\Sigma z_1 \xi_1 &= \int \int_Q u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \int_\Omega u_{01} \xi_1(0) \\ \int \int_Q Dw_2 D\xi_2 - \int \int_Q \mathcal{R}_k(x)g(w_1 - w_2)\xi_2 + \int \int_\Sigma z_2 \xi_2 &= \int \int_Q u_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \int_\Omega u_{02} \xi_2(0) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1((0, T] \times \bar{\Omega})$  avec  $\xi_1(., T) = \xi_2(., T) \equiv 0$ . Ce qui achève la démonstration du Théorème.  $\blacksquare$

**Remarque 5** *Le résultat de cet théorème reste valable si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont croissantes.*

### 4.4.3 Passage à la limite

Le passage à la limite dans la formulation abstraite nécessite le calcul de la fermeture du domaine de l'opérateur limite, nous allons d'abord montrer le lemme suivant:

**Lemme 4.4.1** *Soit  $(f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $(v_1, v_2)$  la solution du problème  $S_{\varphi, \gamma}^{g, \infty}(f_1, f_2)$  au sens de la Proposition 4.3.2. Alors  $(v_1, v_2)$  est aussi solution du problème*

$$\begin{cases} v_1 - \Delta w_1 + \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2) = f_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ v_2 - \Delta w_2 - \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2) = f_2 & \text{sur } \Omega_1 \\ (v_1 + v_2) - 2 \Delta w = f_1 + f_2, \quad w_1 = w_2 := w & \text{sur } \Omega_0 \end{cases}$$

**Preuve.** D'après la proposition 4.3.2 on a pour  $i = 1, 2$  le triplet  $(v_i, w_i, z_i) \in (L^1(\Omega), H^1(\Omega), L^1(\partial\Omega))$  satisfait :

$$w_i = \varphi_i(v_i) \text{ p.p. } \Omega, \quad z_i \in \gamma_i(w_i) \text{ p.p. } \partial\Omega, \quad w_1 = w_2 \text{ p.p. } \Omega_0$$

et pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\xi_1 = \xi_2$  p.p.  $x \in \Omega_0$  on a

$$\begin{cases} \int_\Omega v_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_\Omega Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) \\ + \int_\Omega v_2 T_l(w_2 - \xi_2) + \int_\Omega Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) \\ + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2)) \\ \leq \int_\Omega f_1 T_l(w_1 - \xi_1) + \int_\Omega f_2 T_l(w_2 - \xi_2), \quad \forall l > 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Prenons  $\xi_2 = w_2$  comme fonction test, et puisque  $w_1 = w_2$  p.p.  $\Omega_0$  alors  $\xi_1 = w_1$  p.p.  $\Omega_0$ , et pour  $l$  assez grand on a

$$\int_{\Omega_1} v_1(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega_1} Dw_1 D(w_1 - \xi_1) + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2)(w_1 - \xi_1) \leq \int_{\Omega_1} f_1(w_1 - \xi_1).$$

Maintenant, soit  $\xi_1 = \pm(w_1 - \xi)$  avec  $\xi \in H_0^1(\Omega_1)$ , alors

$$\int_{\Omega_1} v_1 \xi + \int_{\Omega_1} Dw_1 D\xi + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2)\xi = \int_{\Omega_1} f_1 \xi$$

et de la même manière, nous montrons que

$$\int_{\Omega_1} v_2 \xi + \int_{\Omega_1} Dw_2 D\xi - \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2)\xi = \int_{\Omega_1} f_2 \xi.$$

D'autre part, prenons  $\xi_1 = \xi_2 := \xi$  p.p.  $\Omega$  dans (4.32) alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_1 T_l(w_1 - \xi) + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi) \\ + \int_{\Omega} v_2 T_l(w_2 - \xi) + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi) \\ + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2)(T_l(w_1 - \xi) - T_l(w_2 - \xi)) \\ \leq \int_{\Omega} f_1 T_l(w_1 - \xi) + \int_{\Omega} f_2 T_l(w_2 - \xi), \forall l > 0. \end{array} \right.$$

Nous utilisons le Lemme (4.3.4) alors  $\int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(w_1 - w_2)(T_l(w_1 - \xi) - T_l(w_2 - \xi)) \geq 0$  et pour  $l$  assez grand on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_1(w_1 - \xi) + \int_{\Omega} Dw_1 D(w_1 - \xi) \\ + \int_{\Omega} v_2(w_2 - \xi) + \int_{\Omega} Dw_2 D(w_2 - \xi) \\ \leq \int_{\Omega} f_1(w_1 - \xi) + \int_{\Omega} f_2(w_2 - \xi) \end{array} \right.$$

et pour  $\xi = w_1 = w_2 := w$  sur  $\Omega_0$  nous obtenons

$$\int_{\Omega_0} (v_1 + v_2)(w - \xi) + \int_{\Omega_0} Dw D(w - \xi) \leq \int_{\Omega_0} (f_1 + f_2)(w - \xi).$$

Soit  $\eta = \pm(w_1 - \xi)$  avec  $\eta \in H_0^1(\Omega_0)$ , alors

$$\int_{\Omega_0} (v_1 + v_2)\eta + \int_{\Omega_0} Dw D\eta = \int_{\Omega_0} (f_1 + f_2)\eta.$$

qui complète la démonstration du lemme ■

Maintenant, montrons le lemme de fermeture suivante:

**Lemme 4.4.2**  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)} = \{(u_1, u_2) \in X, \text{ tel que } \varphi_1(u_1) = \varphi_2(u_2), \text{ p.p. } \Omega_0\} := Y$

**Preuve.** D'après la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_\infty$  et par densité, on a  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)} \subseteq Y$ . Pour montrer que  $Y \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ , il suffit de prouver que  $Y \cap \left( L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \right) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ . Etant donné  $u := (u_1, u_2) \in Y \cap \left( L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \right)$  nous considérons  $u^\varepsilon := (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) = (I + \varepsilon \mathcal{A}_\infty)^{-1}(u_1, u_2)$  d'où on a  $\frac{1}{\varepsilon} \left( (u_1 - u_1^\varepsilon), (u_2 - u_2^\varepsilon) \right) \in \mathcal{A}_\infty(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ . Prenons  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  comme fonction test dans la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_\infty$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dw_1^\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} |Dw_2^\varepsilon|^2 + \int_{\partial\Omega} (z_1^\varepsilon w_1^\varepsilon + z_2^\varepsilon w_2^\varepsilon) + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1^\varepsilon - w_2^\varepsilon) (T_l(w_1^\varepsilon) - T_l(w_2^\varepsilon)) \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} (u_1 - u_1^\varepsilon) T_l(w_1^\varepsilon) + \int_{\Omega} (u_2 - u_2^\varepsilon) T_l(w_2^\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

et d'après la Proposition 4.3.2, on a

$$\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_\infty \leq \|(u_1, u_2)\|_\infty \quad \text{et} \quad \|(w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)\|_\infty \leq C \|(u_1, u_2)\|_\infty.$$

On utilise la monotonie de  $\varphi_i, \gamma_i, g$  et  $T_l$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dw_1^\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} |Dw_2^\varepsilon|^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} (u_1 - u_1^\varepsilon) T_l(w_1^\varepsilon) + \int_{\Omega} (u_2 - u_2^\varepsilon) T_l(w_2^\varepsilon) \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} u_1 T_l(w_1^\varepsilon) + \int_{\Omega} u_2 T_l(w_2^\varepsilon) \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} C', \end{aligned}$$

où  $C'$  une constante qui dépend de  $\Omega, \|(u_1, u_2)\|_\infty, \varphi_1, \varphi_2$  et  $l$ . Ainsi, pour  $i = 1, 2$ , et  $\varepsilon$  assez petit, on a  $\varepsilon Dw_i^\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , donc lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\varepsilon w_i^\varepsilon \rightarrow 0$ , dans  $H^1(\Omega)$ -faible, et il vient de  $(H_1)$  que  $z_i^\varepsilon$  est bornée dans  $L^\infty(\partial\Omega)$  alors  $z_i^\varepsilon \rightarrow z_i$ , dans  $L^2(\partial\Omega)$ -faible. D'autre part, nous utilisons le Lemme 4.4.1 alors  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  est solution du problème

$$\begin{cases} u_1^\varepsilon - \varepsilon \Delta w_1^\varepsilon + \varepsilon \mathcal{R}_0(x) g(w_1^\varepsilon - w_2^\varepsilon) = u_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ u_2^\varepsilon - \varepsilon \Delta w_2^\varepsilon - \varepsilon \mathcal{R}_0(x) g(w_1^\varepsilon - w_2^\varepsilon) = u_2 & \text{sur } \Omega_1 \\ (u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon) - 2\varepsilon \Delta w^\varepsilon = u_1 + u_2, \quad w_1^\varepsilon = w_2^\varepsilon := w^\varepsilon & \text{sur } \Omega_0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Il vient du Lemme 4.3.3 et la Remarque 2, que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega''_i} \psi(x) (|u_1^\varepsilon(x+y) - u_1^\varepsilon(x)| + |u_2^\varepsilon(x+y) - u_2^\varepsilon(x)|) \\ & \leq \varepsilon \int_{\Omega'_i} |\Delta\psi(x)| (|w_1^\varepsilon(x+y) - w_1^\varepsilon(x)| + |w_2^\varepsilon(x+y) - w_2^\varepsilon(x)|) + \\ & \quad \int_{\Omega'_i} \psi(x) (|u_1(x+y) - u_1(x)| + |u_2(x+y) - u_2(x)|) \\ & \quad + 2i\varepsilon \int_{\Omega'_i} \psi(x) (|\mathcal{R}_0(x+y) - \mathcal{R}_0(x)| |g(w_1^\varepsilon - w_2^\varepsilon)|) \end{aligned}$$

où pour  $i = 0, 1$ ; on a  $\Omega'_i$  et  $\Omega''_i$  sont des ouverts de  $\Omega_i$ , et  $\overline{\Omega'_i} \subseteq \Omega_i$ ,  $\overline{\Omega''_i} \subseteq \Omega'_i$ .  
Nous utilisons le fait que  $\mathcal{R}_0 \in BV(\Omega_1)$ , nous obtenons

$$\limsup_{y \rightarrow 0 \varepsilon > 0} \int_{\Omega''_i} (|u_1^\varepsilon(x+y) - u_1^\varepsilon(x)| + |u_2^\varepsilon(x+y) - u_2^\varepsilon(x)|) = 0,$$

d'où  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  est précompact dans  $L^1(\Omega_i) \times L^1(\Omega_i)$ , et par conséquent  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  est faiblement séquentiel compact dans  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ . Alors, il existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle que

$$\left( \begin{array}{l} (u_1^{\varepsilon_n}, u_2^{\varepsilon_n}) \rightarrow (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \\ (\varepsilon D w_1^{\varepsilon_n}, \varepsilon D w_2^{\varepsilon_n}) \rightarrow (0, 0) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \varepsilon g(w_1^{\varepsilon_n} - w_2^{\varepsilon_n}) \rightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Passons à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (4.33) et donc  $\tilde{u}_1 = u_1$ ,  $\tilde{u}_2 = u_2$  sur  $\Omega_1$  et  $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = u_1 + u_2$ ,  $\varphi_1(\tilde{u}_1) := \varphi_2(\tilde{u}_2)$  sur  $\Omega_0$ . Alors  $\tilde{u}_1 = u_1$  et  $\tilde{u}_2 = u_2$  sur  $\Omega$ . Finalement, on a  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  converge vers  $(u_1, u_2)$  dans  $X$  lorsque  $\varepsilon$  tend 0. Ce qui achève la démonstration du lemme.  $\blacksquare$

Afin d'appliquer le Théorème 3.2.1 (Cf. chapitre 3), on considère l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}^k$  défini par  $\tilde{\mathcal{A}}^k = [a(k)]^{-1} \mathcal{A}^k$  et soit le problème elliptique non linéaire associé à  $\tilde{\mathcal{A}}^k$  suivant:

$$S_{\varphi^k, \gamma^k}^{g, k}(f_1, f_2) \left\{ \begin{array}{l} v_1 - \Delta w_1 + \mathcal{R}'_k(x)g(w_1 - w_2) = f_1, \quad w_1 = \varphi_1^k(v_1) \quad \text{sur } \Omega \\ v_2 - \Delta w_2 - \mathcal{R}'_k(x)g(w_1 - w_2) = f_2, \quad w_2 = \varphi_2^k(v_2) \quad \text{sur } \Omega \\ \partial_{\vec{n}} w_1 + z_1 = 0, \quad z_1 \in \gamma_1^k(w_1) \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_{\vec{n}} w_2 + z_2 = 0, \quad z_2 \in \gamma_2^k(w_2) \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec  $\varphi_i^k = [a(k)]^{-1}\varphi_i$ ,  $\gamma_i^k = [a(k)]^{-1}\gamma_i$  et  $\mathcal{R}'_k$  la fonction défini par

$$\mathcal{R}'_k(x) = \chi_{\Omega_0}(x) + [a(k)]^{-1}\mathcal{R}_0(x)\chi_{\Omega_1}(x) \quad \text{p.p. } \Omega.$$

On démontre le lemme de convergence suivant:

**Lemme 4.4.3** *Soit  $(f_1, f_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $(\bar{v}_1^k, \bar{v}_2^k)$  la solution du problème  $S'_{\varphi^k, \gamma^k}(f_1, f_2)$  au sens de la Proposition 4.3.1. Alors lorsque,  $k$  tend vers  $+\infty$ , on a pour  $i = 1, 2$ ;  $\bar{v}_i^k \rightarrow \bar{v}_i$ , dans  $L^1(\Omega)$ ,  $\bar{w}_i = \varphi_i(\bar{v}_i)$  p.p.  $\Omega$ , et le couple  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  vérifie :*

$$\begin{cases} \bar{v}_1 + g(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\chi_{\Omega_0} = f_1, & \text{p.p. sur } \Omega \\ \bar{v}_2 - g(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\chi_{\Omega_0} = f_2, & \text{p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

De plus,  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  est unique.

**Preuve.** D'après de la Proposition 4.3.1, il existe un unique couple  $(\bar{v}_1^k, \bar{v}_2^k)$  solution de  $S'_{\varphi^k, \gamma^k}(f_1, f_2)$  au sens (4.9). Pour  $i = 1, 2$ ; on a  $\bar{v}_i^k \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\bar{w}_i^k \in H^2(\Omega)$ , et  $\bar{z}_i^k \in L^2(\partial\Omega)$  avec  $\bar{w}_i^k = \varphi_i(\bar{v}_i^k)$  et  $\bar{z}_i^k \in \gamma_i(\bar{w}_i^k)$ . En utilisant le même raisonnement de la Proposition 4.3.2, il existe une sous suite notée encore  $\bar{v}_i^k$  tel que, lorsque  $k$  tend vers  $\infty$  on a

$$\bar{v}_i^k \rightarrow \bar{v}_i, \text{ dans } L^1(\Omega); \quad \bar{z}_i^k \rightarrow 0, \text{ dans } L^1(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad D\bar{w}_i^k \rightarrow 0, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'après le Théorème de la convergence dominée, on a

$$\mathcal{R}'_k(x)g(\bar{w}_1^k - \bar{w}_2^k) \rightarrow g(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\chi_{\Omega_0}, \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Passons à la limite dans la formulation faible, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \bar{v}_i \xi_i + (-1)^{i-1} \int_{\Omega_0} g(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \xi_i = \int_{\Omega} f_i \xi_i$$

ainsi le résultat de convergence est obtenu. ■

Une conséquence de ce lemme est le corollaire suivant:

**Corollaire 4.4.3** *Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}^k$  converge vers l'opérateur  $T$ -accretif dans  $X$ , défini par*

$$(f_1, f_2) \in \tilde{\mathcal{A}}_\infty(v_1, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = f_2 = 0 & \text{p.p. } \Omega_1 \\ \exists w_1, w_2 \in L^1(\Omega) / w_1 = \varphi_1(v_1), w_2 = \varphi_2(v_2) & \text{p.p. } \Omega, \text{ et} \\ f_1 = -f_2 = g(w_1 - w_2) & \text{p.p. } \Omega_0. \end{cases}$$

De plus,  $\overline{D(\tilde{\mathcal{A}}_\infty)} = L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ .

**Proposition 4.4.2** *Pour tout  $(u_{01}, u_{02}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  la bonne solution de*

$$\begin{cases} U_t + \tilde{\mathcal{A}}_\infty U \ni 0 & \text{dans } (0, T) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (4.34)$$

*est une solution du système différentiel ordinaire suivant:*

$$ED(g, u_{01}, u_{02}) \begin{cases} c_{1t} + g(\varphi_1(c_1) - \varphi_2(c_2))\chi_{\Omega_0} = 0, & \text{sur } (0, T) \\ c_{2t} - g(\varphi_1(c_1) - \varphi_2(c_2))\chi_{\Omega_0} = 0, & \text{sur } (0, T) \\ c_1(0) = u_{01}, \quad c_2(0) = u_{02} \end{cases}$$

*au sens suivant: pour  $i = 1, 2$ ;  $c_i \in W^{1,1}((0, T), L^1(\Omega))$  et le système est vérifié pour presque tout  $(t, x) \in Q$  avec  $c_i(0) = u_{0i}$ . De plus*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1(t), c_2(t)) = (\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02}) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

*avec*

$$\underline{u}_{01}(x) = \begin{cases} u_{01}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \tilde{u}_{01}(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{cases} \quad \underline{u}_{02}(x) = \begin{cases} u_{02}(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \tilde{u}_{01}(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{cases}$$

*où,  $\tilde{u}_{01}(x) := [I + \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1]^{-1}(u_{01} + u_{02})$  et  $\tilde{u}_{02}(x) := [I + \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2]^{-1}(u_{01} + u_{02})$ .*

**Preuve.** D'après le corollaire 4.4.3 l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}^k$  converge vers  $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ , d'où la bonne solution  $U^k$  de

$$\begin{cases} U_t + \tilde{\mathcal{A}}^k U \ni 0 & \text{sur } (0, T) \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

converge vers  $U$  (la bonne solution de (4.34)). On utilise la Proposition 4.4.1, pour  $i = 1, 2$ ;  $u_i^k \in L^\infty(Q)$ , il existent  $w_i^k \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $z_i^k \in L^\infty(\Sigma)$  telles que  $w_i^k = \varphi_i(u_i^k)$  p.p. sur  $Q$ ,  $z_i^k \in \gamma_i(w_i^k)$  p.p. sur  $\Sigma$ , et

$$\begin{aligned} [a(k)]^{-1} \int_0^\tau \int_\Omega Dw_i^k D\xi &+ (-1)^{i-1} \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{R}'_k(\cdot) g(w_1^k - w_2^k) \xi \\ &+ [a(k)]^{-1} \int_0^\tau \int_\Gamma z_i^k \xi = \int_0^\tau \int_\Omega u_i^k \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0). \end{aligned} \quad (4.35)$$

De plus,  $u_i^k$ ,  $w_i^k$  et  $g(w_1^k - w_2^k)$  sont bornées dans  $L^\infty(Q)$ ,  $z_i^k$  est bornée dans  $L^\infty(\Sigma)$  et  $w_i^k$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , alors on a

$$[a(k)]^{-1} D w_i^k \rightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

et

$$[a(k)]^{-1} z_i^k \rightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Sigma).$$

Passons à la limite dans (4.35), nous déduisons que

$$(-1)^{i-1} \int_0^\tau \int_{\Omega_0} g(\varphi_1(c_1) - \varphi_2(c_2)) \xi = \int_0^\tau \int_{\Omega} c_i \xi_t + \int_{\Omega} u_{0i} \xi(0).$$

Puisque,  $g(\varphi_1(c_1) - \varphi_2(c_2)) \in L^1((0, T) \times \Omega_0)$ ,  $c_i \in W^{1,1}(0, T, L^1(\Omega))$  et, pour p.p.  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{cases} c_{1t}(x) + g(\varphi_1(c_1(x)) - \varphi_2(c_2(x))) \chi_{\Omega_0}(x) = 0 & \text{sur } (0, T) \\ c_{2t}(x) - g(\varphi_1(c_1(x)) - \varphi_2(c_2(x))) \chi_{\Omega_0}(x) = 0 & \text{sur } (0, T) \\ c_1(x)(0) = u_{01}(x) \quad c_2(x)(0) = u_{02}(x). \end{cases}$$

Ce qui termine la première partie de la preuve. D'après [5] il existe un couple de fonctions mesurables  $(c_{1\infty}, c_{2\infty})$  telles que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a  $c_1(t) \rightarrow c_{1\infty}$ ,  $c_2(t) \rightarrow c_{2\infty}$  p.p.  $\Omega$ ,  $(c_{1\infty}, c_{2\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}_\infty^{-1}(0, 0)$  d'où  $g(\varphi_1(c_{1\infty}) - \varphi_2(c_{2\infty})) = 0$  p.p.  $\Omega_0$  ce qui se traduit par  $\varphi_1(c_{1\infty}) = \varphi_2(c_{2\infty})$  p.p.  $\Omega_0$ . D'autre part, on additionne les deux équations on voit que  $c_{1t} = c_{2t} = 0$  p.p.  $\Omega_1$ , par suite  $c_{1\infty} = u_{01}$ ,  $c_{2\infty} = u_{02}$  p.p.  $\Omega_1$  et  $c_{1t} + c_{2t} = 0$  p.p.  $\Omega_0$  d'où  $c_{1\infty} + c_{2\infty} = u_{01} + u_{02}$  p.p.  $\Omega_0$  et puisque  $\varphi_1(c_{1\infty}) = \varphi_2(c_{2\infty})$  p.p.  $\Omega_0$  on obtient  $c_{1\infty} = [I + \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1]^{-1}(u_{01} + u_{02})$  et  $c_{2\infty} = [I + \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2]^{-1}(u_{01} + u_{02})$  p.p.  $x \in \Omega$ . Ce qui achève la démonstration de la Proposition. ■

#### 4.4.4 Problème d'évolution limite

**Lemme 4.4.4** Soit  $U_0 = (u_{01}, u_{02}) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $U^k = (u_1^k, u_2^k)$  la bonne solution de  $CP^k(u_{01}, u_{02})$ . Alors lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a

$$U^k \rightarrow U := (u_1, u_2) \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, T); X)$$

où  $U$  est la bonne solution du problème

$$CP_\infty(\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02}) \begin{cases} U_t + \mathcal{A}_\infty U \ni (0, 0) & \text{sur } (0, T) \\ U(0) = (\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02}). \end{cases}$$

où  $\underline{u}_{01}$  et  $\underline{u}_{02}$  sont données par la Proposition précédente.

**Preuve.** Soit  $U^k$  la bonne solution de  $CP^k(u_{01}, u_{02})$ , d'après le Corollaire 4.4.2 (respectivement Corollaire 4.4.3) l'opérateur  $\mathcal{A}^k$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{A}}^k$ ) converge vers  $\mathcal{A}_\infty$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ ) et il vient de la Proposition 4.4.2 que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\tilde{\mathcal{A}}_\infty} = (\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02})$  et on voit que  $(\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02}) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)}$ , alors nous appliquons le Théorème 3.2.1 et nous obtenons immédiatement le lemme.  $\blacksquare$

Maintenant, il nous reste à montrer que la *bonne solution* du problème limite est une solution faible, pour cela on va montrer la Proposition suivante

**Proposition 4.4.3** *Soit  $(u_1, u_2)$  solution du problème  $CP_\infty(\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02})$  donnée par le lemme 4.4.4. Alors  $(u_1, u_2)$  est une solution faible au sens du Théorème 4.2.2.*

Nous allons tout d'abord montrer le lemme suivant

**Lemme 4.4.5** *Soit  $U := (u_1, u_2)$  une solution du problème  $(P^k)$  au sens du Théorème 4.2.1. Alors, pour  $i = 1, 2$ ; on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_i} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds + \int_{\Omega} Dw_i DT_l(w_i - \xi_i) + \int_{\partial\Omega} z_i T_l(w_i - \xi_i) \\ + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g(w_1 - w_2) T_l(w_i - \xi_i) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \end{array} \right. \quad (4.36)$$

pour tout  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ .

**Preuve** Soit  $(u_1, u_2)$  solution du problème  $(P^k)$  au sens du Théorème 4.2.1, prenons  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ ,  $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$  avec  $\sigma \geq 0$ . Pour  $\delta > 0$  on considère la fonction  $\phi_i^\delta$  définie par  $\phi_i^\delta(t) = (1/\delta) \int_t^{t+\delta} T_l(w_i(s) - \xi_i) \sigma(s) ds$ , p.p.  $\Omega$  et on prolonge  $w_i$  sur  $\mathbb{R} \times \Omega$  par 0 si  $t > T$ , et par  $w_{0i}$  si  $t < 0$ . Il est clair que  $\phi^\delta$  est une fonction test admissible pour le problème  $(P^k)$ , d'où

$$\int \int_Q Dw_i D\phi_i^\delta + (-1)^{i-1} \int \int_Q \mathcal{R}_k(\cdot) g(w_1 - w_2) \phi_i^\delta + \int \int_Q z_i \phi_i^\delta = \int \int_Q u_i \phi_{it}^\delta \quad (4.37)$$

D'autre part, il vient que

$$\begin{aligned} \int \int_Q u_i \phi_{it}^\delta &= \int \int_Q u_i(t) \frac{(T_l(w_i(t+\delta) - \xi_i) \sigma(t+\delta) - T_l(w_i(t) - \xi_i) \sigma(t))}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_{\delta}^{T+\delta} u_i(t-\delta) T_l(w_i(t) - \xi_i) \sigma(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_0^T u_i(t) T_l(w_i(t) - \xi_i) \sigma(t) dt \\ &= \int \int_Q \frac{u_i(t-\delta) - u_i(t)}{\delta} T_l(w_i - \xi_i) \sigma, \end{aligned} \quad (4.38)$$

et pour tous  $r, \hat{r}, \xi_i \in \mathbb{R}$ , on a

$$T_l(\varphi_i(r) - \xi_i)(\hat{r} - r) \leq \psi_{\xi_i}(\hat{r}) - \psi_{\xi_i}(r), \quad (4.39)$$

où

$$\psi_{\xi_i}(r) = \int_{\xi_i}^r T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds.$$

Nous remplaçons (4.39) dans (4.38) et nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \int_Q u_i \phi_{it}^\delta &\leq \frac{1}{\delta} \int \int_Q \sigma(t) \int_{u_i(t)}^{u_i(t-\delta)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{T-\delta} \sigma(t+\delta) \int_0^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \int \int_{\Omega} \int_0^T \sigma(t) \int_0^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds \\ &\leq \int \int_Q \frac{\sigma(t+\delta) - \sigma(t)}{\delta} \int_{u_{0i}}^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \underbrace{\int \int_{\Omega} \int_{-\delta}^0 \sigma(t+\delta) \int_{u_{0i}}^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds}_{=0} \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \underbrace{\int \int_{\Omega} \int_{T-\delta}^T \sigma(t+\delta) \int_{u_{0i}}^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds}_{=0} \end{aligned} \quad (4.40)$$

d'où (4.37) devient

$$\begin{aligned} &\int \int_Q Dw_i D\phi_i^\delta + (-1)^{i-1} \int \int_Q \mathcal{R}_k g(w_1 - w_2) \phi_i^\delta \\ &+ \int \int_Q z_i \phi_i^\delta \leq \int \int_Q \frac{\sigma(t+\delta) - \sigma(t)}{\delta} \int_{u_{0i}}^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds. \end{aligned} \quad (4.41)$$

On passe à la limite lorsque  $\delta$  tend vers 0 et on utilise le fait que  $\phi_i^\delta \rightarrow T_l(w_i - \xi_i)$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , il en résulte que

$$\begin{aligned} &\int \int_Q \sigma Dw_i DT_l(w_i - \xi_i) + (-1)^{i-1} \int \int_Q \sigma \mathcal{R}_k(x) g(w_1 - w_2) T_l(w_i - \xi_i) \\ &+ \int \int_Q \sigma z_i T_l(w_i - \xi_i) \leq \int \int_Q \sigma_t \int_{u_{0i}}^{u_i(t)} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_i^k} T_l(\varphi_i(s) - \xi_i) ds + \int_{\Omega} Dw_i^k DT_l(w_i^k - \xi_i) + \int_{\partial\Omega} z_i^k T_l(w_i^k - \xi_i) \\ + (-1)^{i-1} \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g(w_1^k - w_2^k) T_l(w_i^k - \xi_i) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{array} \right.$$

pour tout  $\xi_i \in H^1(\Omega)$ . D'où le résultat. ■

**Preuve de la proposition 4.4.3.** Soit  $(u_1^k, u_2^k)$  la solution du problème  $(P^k)$  au sens du Théorème 4.2.1, il vient que

$$\begin{aligned} \|(w_1(t), w_2(t))\|_{\infty} &= \|(\varphi_1(u_1(t)), \varphi_2(u_2(t)))\|_{\infty} \\ &\leq \varphi_1(\|(u_{01}, u_{02})\|_{\infty}) + \varphi_2(\|(u_{01}, u_{02})\|_{\infty}) \end{aligned}$$

et

$$\int \int_Q |Dw_1^k|^2 + \int \int_Q |Dw_2^k|^2 \leq C \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $k$ , donc pour  $i = 1, 2$ ;  $w_i^k$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , alors il existe une sous suite extraite notée encore  $w_i^k$  et  $\exists w_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  telle que  $w_i^k \rightharpoonup w_i$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ -faiblement. D'autre part,  $(u_1^k, u_2^k)$  est aussi bonne solution, donc d'après la Proposition 4.4.4 on a  $u_i^k \rightarrow u_i$ , dans  $\mathcal{C}(0, T, L^1(\Omega))$  et  $(u_1, u_2)$  est une bonne solution de  $CP_{\infty}(u_{01}, u_{02})$ . Par suite  $(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\infty})}$ , d'où

$$w_1 = w_2 \quad \text{p.p. } \Omega_0 \times (0, T).$$

Il vient du lemme 4.4.5

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1^k} T_l(\varphi_1(s) - \xi_1) ds + \int_{\Omega} Dw_1^k DT_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2^k} T_l(\varphi_2(s) - \xi_2) ds + \int_{\Omega} Dw_2^k DT_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) \\ + \int_{\Omega} S^k(x, t) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \end{array} \right.$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , où  $S^k(x, t) = \mathcal{R}_k(x) g(w_1^k - w_2^k) (T_l(w_1^k - \xi_1) - T_l(w_2^k - \xi_2))$ . Prenons  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{K}$ , on décompose l'intégrale de  $S^k(x, t)$  de la même façon que (4.16) et en utilisant les mêmes arguments dans la proposition 4.3.2 on obtient

$$\int_{\Omega} S^k(x, t) \geq \int_{\Omega_1} S^k(x, t) \quad \text{pour tout } t \in (0, T)$$

On en déduit donc, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1^k} T_l(\varphi_1(s) - \xi_1) ds + \int_{\Omega} Dw_1^k DT_l(w_1^k - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1^k T_l(w_1^k - \xi_1) \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2^k} T_l(\varphi_2(s) - \xi_2) ds + \int_{\Omega} Dw_2^k DT_l(w_2^k - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2^k T_l(w_2^k - \xi_2) \\ + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1^k - w_2^k) (T_l(w_1^k - \xi_1) - T_l(w_2^k - \xi_2)) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T). \end{array} \right. \quad (4.42)$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} Dw_i^k DT_l(w_i^k - \xi_i) = \int_{\Omega} |DT_l(w_i^k - \xi_i)|^2 + \int_{\Omega} D\xi_i DT_l(w_i^k - \xi_i) \quad \forall t \in (0, T),$$

d'où, pour tout  $t \in (0, T)$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Dw_i^k DT_l(w_i^k - \xi_i) \geq \int_{\Omega} Dw_i DT_l(w_i - \xi_i)$$

Nous appliquons le lemme de Fatou et nous passons à la limite dans (4.42) et la preuve de la Proposition est achevée.  $\blacksquare$

#### 4.4.5 Unicité de la solution faible

Nous allons utiliser la notion des solutions intégrales (Cf. [3], [4]) pour montrer l'unicité de la solution faible (Cf. section 4 du chapitre 6) .

**Définition 4.4.1** *On dit que  $U := (u_1, u_2) \in \mathcal{C}([0, T], X)$  est une solution intégrale de  $CP^k(u_{01}, u_{02})$  (respectivement  $CP_{\infty}(u_{01}, u_{02})$ ) si pour tout  $(\hat{f}_1, \hat{f}_2) \in \mathcal{A}^k(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$  (respectivement  $(\hat{f}_1, \hat{f}_2) \in \mathcal{A}_{\infty}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ ), on a*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_1(t) - \hat{u}_1| + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_2(t) - \hat{u}_2| + \int_{\Omega} \hat{f}_1 \text{Sign}_0(u_1(t) - \hat{u}_1) \\ & + \int_{\Omega} \hat{f}_2 \text{Sign}_0(u_2(t) - \hat{u}_2) \leq \int_{[u_1(t)=\hat{u}_1]} |\hat{f}_1| + \int_{[u_2(t)=\hat{u}_2]} |\hat{f}_2| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned} \quad (4.43)$$

et  $U(0) = (u_{01}, u_{02})$  (respectivement  $U(0) = (\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02})$ ) .

**Proposition 4.4.4** *Soit  $(u_1, u_2)$  une solution du problème  $(P^k)$  au sens du Théorème 4.2.1. Alors  $(u_1, u_2)$  est une solution intégrale du problème  $CP^k(u_{01}, u_{02})$ .*

**Preuve.** Pour  $i = 1, 2$ , soient  $w_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, H^1(\Omega))$ ,  $z_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, L^2(\partial\Omega))$  telles que  $w_i = \varphi_i(u_i)$  p.p.  $Q$  et  $z_i \in \gamma_i(w_i)$  p.p.  $\Sigma$ , données par le Théorème 4.2.1 et  $\hat{w}_i \in H^1(\Omega)$ ,  $\hat{z}_i \in L^2(\partial\Omega)$  telles que  $\hat{w}_i = \varphi(\hat{u}_i)$  p.p.  $\Omega$  et  $\hat{z}_i \in \gamma(\hat{w}_i)$  p.p.  $\partial\Omega$  dans la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}^k$ . Il vient du lemme 4.4.5 que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(s) - \xi_1) ds + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \xi_1) \\ & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(s) - \xi_2) ds + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \xi_2) \quad (4.44) \\ & + \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \xi_1) - T_l(w_2 - \xi_2)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned}$$

et d'après la définition de  $\mathcal{A}^k$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D\hat{w}_1 D\xi_1 + \int_{\Omega} D\hat{w}_2 D\xi_2 + \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(\cdot) g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) (\xi_1 - \xi_2) \\ & + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_1 \xi_1 + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_2 \xi_2 = \int_{\Omega} \hat{f}_1 \xi_1 + \int_{\Omega} \hat{f}_2 \xi_2 \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in H^1(\Omega)$ . Prenons  $(T_l(\hat{w}_1 - \xi_1), T_l(\hat{w}_2 - \xi_2))$  comme fonction test, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} D\hat{w}_1 DT_l(\hat{w}_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} D\hat{w}_2 DT_l(\hat{w}_2 - \xi_2) + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_1 T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_2 T_l(\hat{w}_2 - \xi_2) + \int_{\Omega} \mathcal{R}_k(\cdot) g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) (T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) - T_l(\hat{w}_2 - \xi_2)) \right) \quad (4.45) \\ & = \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - \xi_2) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1, \xi_2 \in H^1(\Omega)$ . Maintenant prenons  $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$  comme fonction test dans (4.44) et  $(w_1, w_2)$  fonction test dans (4.45) et on additionne les deux inégalités on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \hat{w}_1) dr + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \hat{w}_1) dr \\ & + \int_{\Omega} D(w_1 - \hat{w}_1) DT_l(w_1 - \hat{w}_1) + \int_{\Omega} D(w_2 - \hat{w}_2) DT_l(w_2 - \hat{w}_2) \\ & + \int_{\Omega} \hat{S}^k(x, t) dx + \int_{\partial\Omega} (z_1 - \hat{z}_1) T_l(w_1 - \hat{w}_1) + \int_{\partial\Omega} (z_2 - \hat{z}_2) T_l(w_2 - \hat{w}_1) \quad (4.46) \\ & \leq \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - w_2) \end{aligned}$$

où  $\hat{S}^k(x, t) = \mathcal{R}_k(x) (g(w_1 - w_2) - g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2)) (T_l(w_1 - \hat{w}_1) - T_l(w_2 - \hat{w}_2))$ .

Il vient de la monotonie du Lemme 4.3.4 que  $\hat{S}^k(x, t) \geq 0$  p.p.  $\Omega \times (0, T)$ ,  $\int_{\partial\Omega} (z_i -$

$\tilde{z}_i)T_l(w_i - \tilde{w}_i) \geq 0$  et  $\int_{\Omega} D(w_i - \hat{w}_i)DT_l(w_i - \hat{w}_i) = \int_{\Omega} T'_l(w_i - \hat{w}_i)|D(w_i - \hat{w}_i)|^2 \geq 0$  donc (4.46) devient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \hat{w}_1) dr + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \hat{w}_1) dr \\ & \leq \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - w_2) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned} \quad (4.47)$$

nous utilisons le fait que  $Sign_0(\varphi_i(r) - \varphi_i(\hat{u}_i)) = Sign_0(r - \hat{u}_i)$ , donc lorsque  $l$  tend vers 0 on a  $\int_0^{u_i(x,t)} \frac{1}{l} T_l(\varphi_i(r) - \hat{w}_i(x)) dr$  converge vers  $|u_i(x,t) - \hat{u}_i(x)| - |\hat{u}_i|$  p.p.  $(t,x) \in Q$ . il suit que, le terme  $\frac{d}{dt} \int_0^{u_i(x,t)} \frac{1}{l} T_l(\varphi_i(r) - \hat{w}_i(x)) dr$  converge vers  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_i(x,t) - \hat{u}_i(x)|$  et  $\int_{\Omega} \frac{1}{l} \hat{f}_i T_l(\hat{w}_i - w_i)$  converge vers  $\int_{\Omega} \hat{f}_i Sign_0(\hat{w}_i - w_i)$ .

Nous multiplions (4.47) par  $\frac{1}{l}$  et passons à la limite lorsque  $l$  tend vers 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_1(t) - \hat{u}_1| + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_2(t) - \hat{u}_2| \leq - \int_{\Omega} \hat{f}_1 Sign_0(u_1(t) - \hat{u}_1) \\ & - \int_{\Omega} \hat{f}_2 Sign_0(u_2(t) - \hat{u}_2) + \int_{[u_1(t)=\hat{u}_1]} |\hat{f}_1| + \int_{[u_2(t)=\hat{u}_2]} |\hat{f}_2| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la Proposition ■

**Proposition 4.4.5** *Soit  $(u_1, u_2)$  solution du problème limite au sens du Théorème 4.2.2 . Alors  $(u_1, u_2)$  est une solution intégrale du problème  $CP_{\infty}(\underline{u}_{01}, \underline{u}_{02})$ .*

**Preuve.** Pour  $i = 1, 2$ , soient  $w_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, H^1(\Omega))$ ,  $z_i \in L^2_{loc}([0, \infty[, L^2(\partial\Omega))$  telle que  $w_i = \varphi_i(u_i)$  p.p.  $Q$  et  $z_i \in \gamma_i(w_i)$  p.p.  $\Sigma$ , donnée par le Théorème 4.2.2 et  $\hat{w}_i \in H^1(\Omega)$ ,  $\hat{z}_i \in L^2(\partial\Omega)$  telle que  $\hat{w}_i = \varphi(\hat{u}_i)$  p.p.  $\Omega$  et  $\hat{z}_i \in \gamma(\hat{w}_i)$  p.p.  $\partial\Omega$  dans (4.4.2), puisque  $(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \in \mathcal{K}$  alors on peut prendre  $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$  comme fonction test dans la définition de solution du Théorème 4.2.2, donc

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \hat{w}_1) dr + \int_{\Omega} Dw_1 DT_l(w_1 - \hat{w}_1) + \int_{\partial\Omega} z_1 T_l(w_1 - \hat{w}_1) \\ & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \hat{w}_1) dr + \int_{\Omega} Dw_2 DT_l(w_2 - \hat{w}_1) + \int_{\partial\Omega} z_2 T_l(w_2 - \hat{w}_1) \quad (4.48) \\ & + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x) g(w_1 - w_2) (T_l(w_1 - \hat{w}_1) - T_l(w_2 - \hat{w}_2)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned}$$

D'autre part, nous utilisons la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_\infty$  il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D\hat{w}_1 DT_l(\hat{w}_1 - \xi_1) + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_1 T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} D\hat{w}_2 DT_l(\hat{w}_2 - \xi_2) \\ & + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \left( T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) - T_l(\hat{w}_2 - \xi_2) \right) + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_2 T_l(\hat{w}_2 - \xi_2) \\ & \leq \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - \xi_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - \xi_2) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)) \cap \mathcal{K}$ . Pour p.p.  $(x, t) \in (0, T) \times \Omega_0$  on a  $w_1(t) = w_2(t)$ , d'où  $(w_1, w_2)$  est une fonction test admissible dans la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_\infty$ , donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D\hat{w}_1 DT_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_1 T_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} D\hat{w}_2 DT_l(\hat{w}_2 - w_2) \\ & + \int_{\Omega_1} \mathcal{R}_0(x)g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) (T_l(\hat{w}_1 - w_1) - T_l(\hat{w}_2 - w_2)) + \int_{\partial\Omega} \hat{z}_2 T_l(\hat{w}_2 - w_2) \quad (4.49) \\ & \leq \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - w_2) \quad \text{pour tout } t \in (0, T) \end{aligned}$$

on additionne (4.48) et (4.49), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_1} T_l(\varphi_1(r) - \hat{w}_1) dr + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{u_2} T_l(\varphi_2(r) - \hat{w}_1) dr + \int_{\Omega_1} \hat{S}(x, t) dx \\ & + \int_{\partial\Omega} (z_1 - \hat{z}_1) T_l(w_1 - \hat{w}_1) + \int_{\partial\Omega} (z_2 - \hat{z}_2) T_l(w_2 - \hat{w}_1) \\ & + \int_{\Omega} D(w_1 - \hat{w}_1) DT_l(w_1 - \hat{w}_1) + \int_{\Omega} D(w_2 - \hat{w}_2) DT_l(w_2 - \hat{w}_2) \\ & \leq \int_{\Omega} \hat{f}_1 T_l(\hat{w}_1 - w_1) + \int_{\Omega} \hat{f}_2 T_l(\hat{w}_2 - w_2) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned} \quad (4.50)$$

où  $\hat{S}(x, t) = \mathcal{R}_0(x)(g(w_1 - w_2) - g(\hat{w}_1 - \hat{w}_2))(T_l(w_1 - \hat{w}_1) - T_l(w_2 - \hat{w}_2))$ .

On utilise les mêmes arguments de la Proposition 4.4.4 et de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_1(t) - \hat{u}_1| + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_2(t) - \hat{u}_2| \leq - \int_{\Omega} \hat{f}_1 \text{Sign}_0(u_1(t) - \hat{u}_1) \\ & - \int_{\Omega} \hat{f}_2 \text{Sign}_0(u_2(t) - \hat{u}_2) + \int_{[u_1(t)=\hat{u}_1]} |\hat{f}_1| + \int_{[u_2(t)=\hat{u}_2]} |\hat{f}_2| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de cette Proposition ■

**Remarque 6** *Le théorème 4.2.2 contient les résultats principaux dans [11] et [7] en considérant des cas particulières du système  $(P^k)$ .*

1. Dans [11] l'auteur traite le problème

$$\begin{cases} u_{1t} - \Delta\varphi_1(u_1) + kg(u_1 - u_2) = f_1, & \text{sur } Q \\ u_{2t} - \Delta\varphi_2(u_2) - kg(u_1 - u_2) = f_2, & \text{sur } Q \\ \varphi_1(u_1) = 0 \quad \varphi_2(u_2) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1(x,0) = u_{01}(x) \quad u_2(x,0) = u_{02}(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

et dans ce travail la convergence lorsque  $k \rightarrow \infty$  de  $(u_1^k, u_2^k)$  vers  $(u, u)$  dans  $\mathcal{C}([0,T], X)$  est obtenue de façon régulière dans le cas où  $u_{01} = u_{02}$  et  $f_1 = f_2$  ou  $u$  est une solution intégrale du problème

$$(P^k) \begin{cases} u_t - \Delta \frac{\varphi_1(u) + \varphi_2(u)}{2} = f_1, & \text{sur } Q \\ \frac{\varphi_1(u) + \varphi_2(u)}{2} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x,0) = u_{01}(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

2. Dans [7] les auteurs étudient le comportement de deux espèces lors d'une réaction chimique très rapide et réversible, pour cela ils considèrent le modèle suivant:

$$\begin{cases} u_{1t} - \Delta u_1 + k(r_A(u_1) - r_B(u_2)) = 0, & \text{sur } Q \\ u_{2t} - \Delta u_2 - k(r_A(u_1) - r_B(u_2)) = 0, & \text{sur } Q \\ \partial_{\bar{n}} u_1 = 0 \quad \partial_{\bar{n}} u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1(x,0) = u_{01}(x) \quad u_2(x,0) = u_{02}(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

et en utilisant les arguments de compacité et la fonction de Lyapouov ils montrent que lorsque  $k \rightarrow \infty$  le couple  $(u_1^k, u_2^k)$  converge vers  $(u_1, u_2)$  dans  $L^2((0,T), \Omega)$ ,

où  $(u_1, u_2)$  sont déterminées par  $r_A(u_1) = r_B(u_2)$  et  $u_1 + u_2 = w$  avec  $w$  est la solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} w_t - \Delta\psi(w) = 0, & \text{sur } Q \\ \partial_{\bar{n}}w = 0 & \text{sur } \Sigma \\ w(x,0) = u_{01}(x) + u_{02}(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $\psi = (d_1I + d_2\eta) \circ (I + \eta)^{-1}$  dans  $\mathbb{R}^+$  avec  $\eta = r_B^{-1} \circ r_A$ .

## Bibliographie

- [1] D. G. ARONSON , *The Porous Medium Equation*, in *Nonlinear Diffusion Problems*, Lecture Notes in Math. vol. 1224, Springer-Verlag, New York (1986) 12-46.
- [2] PH. BENILAN, M. G. CRANDALL, P. SACKS, *Some  $L^1$  existence and dependence results for semilinear elliptic equations under nonlinear boundary conditions*, Appl. Math. Optim. 17 (1988) 203-224
- [3] PH. BENILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse d'état, Orsay, 1972
- [4] PH. BENILAN, P. WITTBOLD, *Absorptions non linéaires*, Journal of Functional Analys 114, 59-96(1993)
- [5] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1984
- [6] H. BREZIS, W. STRAUSS , *Semi-linear second-order elliptic equations in  $L^1$*  , J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565-590
- [7] D. BOTHE, D. HILHORST, *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction*, J. Math. Anal. Appl. 286 (2003)125-135
- [8] E. DIBENEDETTO, R. E. SHOWALTER, *A free-boundary problem for a degenerate parabolic system*, J. Differential Equations 50 (1983), 1-19
- [9] J. M. MAZÓN, J. TOLEDO, *Large-time behavior of solutions of a system of PDE's governing diffusion processes in a heterogeneous medium* , Differential Integral Equations. 10(1997)165-180
- [10] M. MUSKAT, *The flow of Homogeneous Fluids through Porous Media* , Mc Graw-Hill, New York, 1937
- [11] X. XU , *Application of nonlinear semigroup theory to a system of PDEs governing diffusion processes in a heterogeneous medium* , Nonlinear Analysis TMA. 18(1992), 61-77



---

## Chapitre 5

Analyse numérique du comportement  
de la solution pour les grandes  
valeurs du paramètre d'homogénéité

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle linéaire 1D avec des conditions de Dirichlet homogènes aux bords

$$(E^k) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 u_{xx} = -\mathcal{R}_k(x)(u - v) & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 v_{xx} = +\mathcal{R}_k(x)(u - v) & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T) \\ u = v = 0 & \text{sur } Q := \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{R}_k(x) = k\chi_{\Omega_0}(x) + \chi_{\Omega_1}(x)$  p.p. dans  $\Omega$  avec  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  et  $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$ .  $d_1 > 0$  et  $d_2 > 0$  sont les coefficients de diffusion dans le domaine  $\Omega \times (0, T)$ . On suppose que  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  avec  $u_0, v_0 \geq 0$  alors le problème  $(E^k)$  admet une unique solution classique  $u^k, v^k \in C^{1,2}((0, T] \times \Omega) \cap C^{0,1}((0, T] \times \Omega)$  (Cf. [5], [1]). Nous appliquons le Théorème 4.2.2 au problème  $(E^k)$  et nous obtenons

**Proposition 5.1.1** *Soit  $(u_0, v_0) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$  et  $(u^k, v^k)$  la solution du problème  $(E^k)$ . Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a*

$$(u^k, v^k) \longrightarrow (u, v) \quad \text{dans } \mathcal{C}\left((0, T), L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)\right),$$

où,  $u = v$  p.p. sur  $\Omega_0$  et  $u, v \in L^2((0, T), H_0^1(\Omega))$  sont caractérisées par:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^u (r - \xi_1) dr + d_1 \int_{\Omega} DuD(u - \xi_1) \\ & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^v (r - \xi_2) dr + d_2 \int_{\Omega} DvD(v - \xi_2) \\ & + \int_{\Omega_1} (u - v)((u - \xi_1) - (v - \xi_2)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  avec  $\xi_1 = \xi_2$  p.p. sur  $\Omega_0$ . Et  $U_0 = \underline{U}_0 := (\underline{u}_0, \underline{v}_0)$  où  $\underline{u}_0, \underline{v}_0$  sont données par:

$$\underline{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \frac{u_0(x) + v_0(x)}{2} & \text{sur } \Omega_0 \end{cases} \quad \underline{v}_0(x) = \begin{cases} v_0(x) & \text{sur } \Omega_1 \\ \frac{u_0(x) + v_0(x)}{2} & \text{sur } \Omega_0 \end{cases},$$

## 5.2 Etude numérique.

En général, les méthodes numériques adaptées à ce type de système ont été étudiées par de nombreux auteurs (Cf. [3], [4], [6] etc). Dans ce travail, nous nous intéressons au comportement de la solution lorsque  $k$  devient très grand et nous proposons un schéma aux différences finies permettant une discrétisation robuste, conservative et stable du problème ( $E^k$ ). Pour cela, nous discrétisons les termes de réaction  $\pm \mathcal{R}_k(\cdot)(u - v)$  de manière implicite et soit  $(u_i^n, v_i^n)$  l'approximation discrète de la solution exacte  $(u(x_i, t_n), v(x_i, t_n))$  en chaque point  $x_i$  et à l'instant  $t_n$ . Soit  $\Omega = (0, 1)$ , on note par  $\mathcal{R}_{ki}$  la valeur de  $\mathcal{R}_k$  au point  $x_i$ , où  $x_i = i\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$ , avec  $n = 0, \dots, N + 1$ ,  $i = 0, \dots, M + 1$ , tels que  $(M + 1)\Delta x = 1$  et  $(N + 1)\Delta t = T$ .  $\Delta x$  (resp.  $\Delta t$ ) est le pas de discrétisation en espace (resp. en temps). Les dérivées spatiales  $u_{xx}$  et  $v_{xx}$  sont approchées par un schéma d'ordre 2, nous remplaçons les dérivées en temps  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial v}{\partial t}$  par un schéma d'Euler implicite, nous obtenons le système discret suivant :

$$(Ed^k) \left\{ \begin{array}{l} u_i^0 = u_0(x_i), v_i^0 = v_0(x_i), \quad i = 0..M + 1 \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - d_1 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \mathcal{R}_{ki}(v_i^{n+1} - u_i^{n+1}) \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} - d_2 \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \mathcal{R}_{ki}(u_i^{n+1} - v_i^{n+1}) \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0, v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 1..N + 1 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} i = 1..M \\ n = 0..N \end{array}$$

on voit que le schéma ( $Ed^k$ ) peut s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^0 = u_0(x_i), v_i^0 = v_0(x_i), \quad i = 0, \dots, M + 1 \\ (1 + 2\lambda_1 + \mathcal{R}_{ki}\Delta t)u_i^{n+1} - \lambda_1 u_{i+1}^{n+1} - \lambda_1 u_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki}\Delta t v_i^{n+1} + u_i^n \\ (1 + 2\lambda_2 + \mathcal{R}_{ki}\Delta t)v_i^{n+1} - \lambda_2 v_{i+1}^{n+1} - \lambda_2 v_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki}\Delta t u_i^{n+1} + v_i^n \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0, v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 1, \dots, N + 1 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, N \end{array}$$

où,  $\lambda_1 = d_1 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  et  $\lambda_2 = d_2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ .

Maintenant, on note par  $U^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T$  et  $V^n = (v_1^n, \dots, v_M^n)^T$  le vecteur

solution numérique, donc le système précédent s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} A_1 U^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t V^{n+1} + U^n \\ A_2 V^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t U^{n+1} + V^n \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $U^0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_M))^T$ ,  $V^0 = (v_0(x_1), \dots, v_0(x_M))^T$  et pour  $j = 1, 2$  on a  $A_j$  est la matrice tridiagonale définie par

$$A_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -\lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_j & \mu_j & -\lambda_j & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda_j & \mu_j & -\lambda_j \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_j & \mu_j \end{pmatrix}$$

où,  $\mu_j = 1 + 2\lambda_j + \mathcal{R}_{ki} \Delta t$ . Dans (5.1) On multiplie la première équation par la matrice  $A_2$  et on remplace  $A_2 V^{n+1}$  par son expression donnée par la deuxième équation. On procède de la même manière dans la deuxième équation et on obtient

$$\begin{cases} B_{21} U^{n+1} := (A_2 A_1 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2 I_d) U^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t V^n + A_2 U^n \\ B_{12} V^{n+1} := (A_1 A_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2 I_d) V^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t U^n + A_1 V^n. \end{cases} \quad (5.2)$$

Il est clair que  $B_{21} = B_{12} := B$ . Maintenant, nous allons étudier le caractère bien posé du système linéaire  $(Ed^k)$ , c'est à dire l'existence et l'unicité de la solution du système.

**Lemme 5.2.1** *Pour  $j, k \in \{1, 2, \dots, M\}$  on a  $B_{j,k} = 0$  pour  $|j - k| > 2$ . Et*

$$\begin{cases} B_{j,j} = \mu_1 \mu_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2 & j = 2, \dots, M - 1 \\ B_{j,j+1} = B_{j+1,j} = -\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 & j = 1, \dots, M - 1 \\ B_{j,j+2} = B_{j+2,j} = \lambda_1 \lambda_2 & j = 1, \dots, M - 2 \\ B_{1,1} = B_{M,M} = \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2. \end{cases}$$

De plus, si

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{e + \sqrt{e^2 + 4d_1d_2}}{4d_1d_2}, \quad (5.3)$$

où  $e = \mathcal{R}_{ki}(\Delta x)^2$  alors la matrice  $B$  est inversible.

**Preuve:** Pour  $j = 1, \dots, M - 2$ , il vient

$$\begin{aligned} B_{j,j} &= \sum_k A_{2j,k} A_{1k,j} - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2 \\ &= \mu_1 \mu_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2 \end{aligned}$$

et les autres composantes se calculent de la même manière. Maintenant, nous allons montrer que la matrice  $B$  est à diagonale dominante, c'est à dire

$$\begin{cases} |\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2| \geq \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2, \\ |\mu_1 \mu_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2| \geq 2\lambda_2 \mu_1 + 2\lambda_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \\ |\mu_1 \mu_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2| \geq 2\lambda_2 \mu_1 + 2\lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que  $I \geq 0$  où

$$\begin{aligned} I &:= |2\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 - (\mathcal{R}_{ki} \Delta t)^2| - 2\lambda_2 \mu_1 - 2\lambda_1 \mu_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \\ &= 1 + 2\mathcal{R}_{ki} \Delta t - 4\lambda_1 \lambda_2 \\ &= \frac{(\Delta x)^4 + 2\mathcal{R}_{ki} \Delta t (\Delta x)^4 - 4d_1 d_2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^4}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{e + \sqrt{e^2 + 4d_1d_2}}{4d_1d_2}$$

donc, on peut vérifier facilement que  $I \geq 0$ . Ce qui achève la preuve du lemme. ■

Pour montrer la stabilité  $L^\infty$  du schéma  $(Ed^k)$  nous avons besoin du lemme de comparaison discret suivant:

**Lemme 5.2.2** *Pour  $i = 0, \dots, M + 1$ , soient  $(u_i^{n+1}, v_i^{n+1})$  et  $(\hat{u}_i^{n+1}, \hat{v}_i^{n+1})$  deux solutions du problème ( 5.1 ) et  $(u_i^0, v_i^0)$ ,  $(\hat{u}_i^0, \hat{v}_i^0)$  respectivement les données initiales associées. Si  $u_i^0 \leq \hat{u}_i^0$  et  $v_i^0 \leq \hat{v}_i^0$ . Alors*

$$u_i^{n+1} \leq \hat{u}_i^{n+1} \quad \text{et} \quad v_i^{n+1} \leq \hat{v}_i^{n+1}$$

pour tout  $i = 0, \dots, M + 1$  et  $n = 0, \dots, N + 1$ .

**Preuve:** Soit  $w^{n+1}$  et  $\bar{w}^{n+1}$  défini par  $w_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \hat{u}_i^{n+1}$ ,  $\bar{w}_i^{n+1} = v_i^{n+1} - \hat{v}_i^{n+1}$  pour tout  $i = 0, \dots, M+1$  et  $n = 0, \dots, N+1$ . On soustrait les deux équations vérifiées par  $(u_i^{n+1}, v_i^{n+1})$  et  $(\hat{u}_{i+1}^{n+1}, \hat{v}_i^{n+1})$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_i^0 = w_0(x_i), \bar{w}_i^0 = \bar{w}_0(x_i), & i = 0, \dots, M+1 \\ \mu_1 w_i^{n+1} - \lambda_1 w_{i+1}^{n+1} - \lambda_1 w_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t \bar{w}_i^{n+1} + w_i^n & i = 1, \dots, M \\ \mu_2 \bar{w}_i^{n+1} - \lambda_2 \bar{w}_{i+1}^{n+1} - \lambda_2 \bar{w}_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t w_i^{n+1} + \bar{w}_i^n & n = 0, \dots, N. \\ w_0^n = w_{M+1}^n = 0, \bar{w}_0^n = \bar{w}_{M+1}^n = 0, & n = 1, \dots, N+1 \end{array} \right.$$

On multiplie la première équation par  $Sign_0^+(w_i^{n+1})$ , puis la deuxième équation par  $Sign_0^+(\bar{w}_i^{n+1})$ , donc pour  $i = 1, \dots, M$ ,  $n = 0, \dots, N$  on a

$$\mu_1 (w_i^{n+1})^+ \leq \lambda_1 ((w_{i+1}^{n+1})^+ + (w_{i-1}^{n+1})^+) + \mathcal{R}_{ki} \Delta t (\bar{w}_i^{n+1})^+ + (w_i^n)^+$$

et

$$\mu_2 (\bar{w}_i^{n+1})^+ \leq \lambda_2 ((\bar{w}_{i+1}^{n+1})^+ + (\bar{w}_{i-1}^{n+1})^+) + \mathcal{R}_{ki} \Delta t (w_i^{n+1})^+ + (\bar{w}_i^n)^+$$

on additionne les deux équations on obtient

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \mathcal{R}_{ki} \Delta t) (w_i^{n+1})^+ + (\mu_2 - \mathcal{R}_{ki} \Delta t) (\bar{w}_i^{n+1})^+ &\leq ((w_i^n)^+ + (\bar{w}_i^n)^+) \\ &+ \lambda_1 ((w_{i+1}^{n+1})^+ + (w_{i-1}^{n+1})^+) + \lambda_2 ((\bar{w}_{i+1}^{n+1})^+ + (\bar{w}_{i-1}^{n+1})^+) \end{aligned}$$

on somme cette inégalité pour  $i = 1, \dots, M$  et on a

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \mathcal{R}_{ki} \Delta t - 2\lambda_1) \sum_{i=1}^{i=M} (w_i^{n+1})^+ + (\mu_2 - \mathcal{R}_{ki} \Delta t - 2\lambda_2) \sum_{i=1}^{i=M} (\bar{w}_i^{n+1})^+ \\ \leq \sum_{i=1}^{i=M} ((w_i^n)^+ + (\bar{w}_i^n)^+) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=M} ((w_i^{n+1})^+ + (\bar{w}_i^{n+1})^+) &\leq \sum_{i=1}^{i=M} ((w_i^n)^+ + (\bar{w}_i^n)^+) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{i=M} ((w_i^0)^+ + (\bar{w}_i^0)^+). \end{aligned}$$

Or, pour  $i = 1, \dots, M$  on a  $u_i^0 \leq \hat{u}_i^0$  et  $v_i^0 \leq \hat{v}_i^0$  donc  $(w_i^0)^+ = (\bar{w}_i^0)^+ = 0$  par suite  $(w_i^{n+1})^+ = (\bar{w}_i^{n+1})^+ = 0$  d'où

$$u_i^{n+1} \leq \hat{u}_i^{n+1} \quad \text{et} \quad v_i^{n+1} \leq \hat{v}_i^{n+1}.$$

■

**Remarque 7** *La preuve du lemme précédent reste valable dans le cas d'un domaine  $\Omega$  de dimension quelconque.*

**Théorème 5.2.1** *Le schéma  $(Ed^k)$  est inconditionnellement stable en norme  $L^\infty$ . De plus sous la condition (5.3), le schéma est convergent.*

**Preuve .** Pour  $i = 0, \dots, M+1$ , soit  $(u_i^{n+1}, v_i^{n+1})$  la solution du problème  $(Ed^k)$  avec  $u_i^0 = u_0(x_i)$ ,  $v_i^0 = v_0(x_i)$ . Pour tout  $n = 0, \dots, N$  soit  $(w_i^{n+1}, \bar{w}_i^{n+1})$  le couple défini par

$$w_i^{n+1} = u_i^{n+1} - C_0, \quad \bar{w}_i^{n+1} = v_i^{n+1} - C_0$$

où  $C_0 := \|U^0\|_\infty + \|V^0\|_\infty$ . Alors  $(w_i^{n+1}, \bar{w}_i^{n+1})$  est une solution du problème discrète suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_i^0 = u_i^0 - C_0, \quad \bar{w}_i^0 = v_i^0 - C_0, & i = 0, \dots, M+1 \\ \mu_1 w_i^{n+1} - \lambda_1 w_{i+1}^{n+1} - \lambda_1 w_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t \bar{w}_i^{n+1} + w_i^n & i = 1, \dots, M \\ \mu_2 \bar{w}_i^{n+1} - \lambda_2 \bar{w}_{i+1}^{n+1} - \lambda_2 \bar{w}_{i-1}^{n+1} = \mathcal{R}_{ki} \Delta t w_i^{n+1} + \bar{w}_i^n & n = 0, \dots, N \\ w_0^n = w_{M+1}^n = 0, \quad \bar{w}_0^n = \bar{w}_{M+1}^n = 0, & n = 1, \dots, N+1 \end{array} \right\},$$

puisque  $w_i^0 = (u_i^0 - \|U^0\|_\infty) - \|V^0\|_\infty \leq 0$  et  $\bar{w}_i^0 = (v_i^0 - \|V^0\|_\infty) - \|U^0\|_\infty \leq 0$ , nous appliquons le Lemme (5.2.2) et on utilise le fait que  $(0,0)$  est solution, on déduit que pour tout  $i = 0, \dots, M+1$ ,  $n = 0, \dots, N$  on a

$$w_i^{n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad \bar{w}_i^{n+1} \leq 0,$$

d'où  $u_i^{n+1} \leq C_0$  et  $v_i^{n+1} \leq C_0$  et de la même manière il vient que  $u_i^{n+1} \geq -C_0$  et  $v_i^{n+1} \geq -C_0$ . On déduit donc que

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^0\|_\infty + \|V^0\|_\infty \quad \text{et} \quad \|V^{n+1}\|_\infty \leq \|U^0\|_\infty + \|V^0\|_\infty$$

pour tout  $n = 0, \dots, N$ . Alors le schéma  $(Ed^k)$  est stable en norme  $L^\infty$ . De plus, il n'est pas difficile de voir que le schéma est consistant et il est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. D'où le schéma est convergent. Ce qui termine la preuve du théorème. ■

### 5.3 Simulation numérique

Dans ce paragraphe, nous allons exposer quelques résultats numériques pour le système  $(Ed^k)$  présenté dans les paragraphes précédents. On prend une donnée initiale  $u_0(x) := 10x^2(1-x)$ ,  $v_0(x) := 10x(1-x)^2 \sin(\pi x)$ . Cette donnée initiale est représentée sur la Figure 5.1.

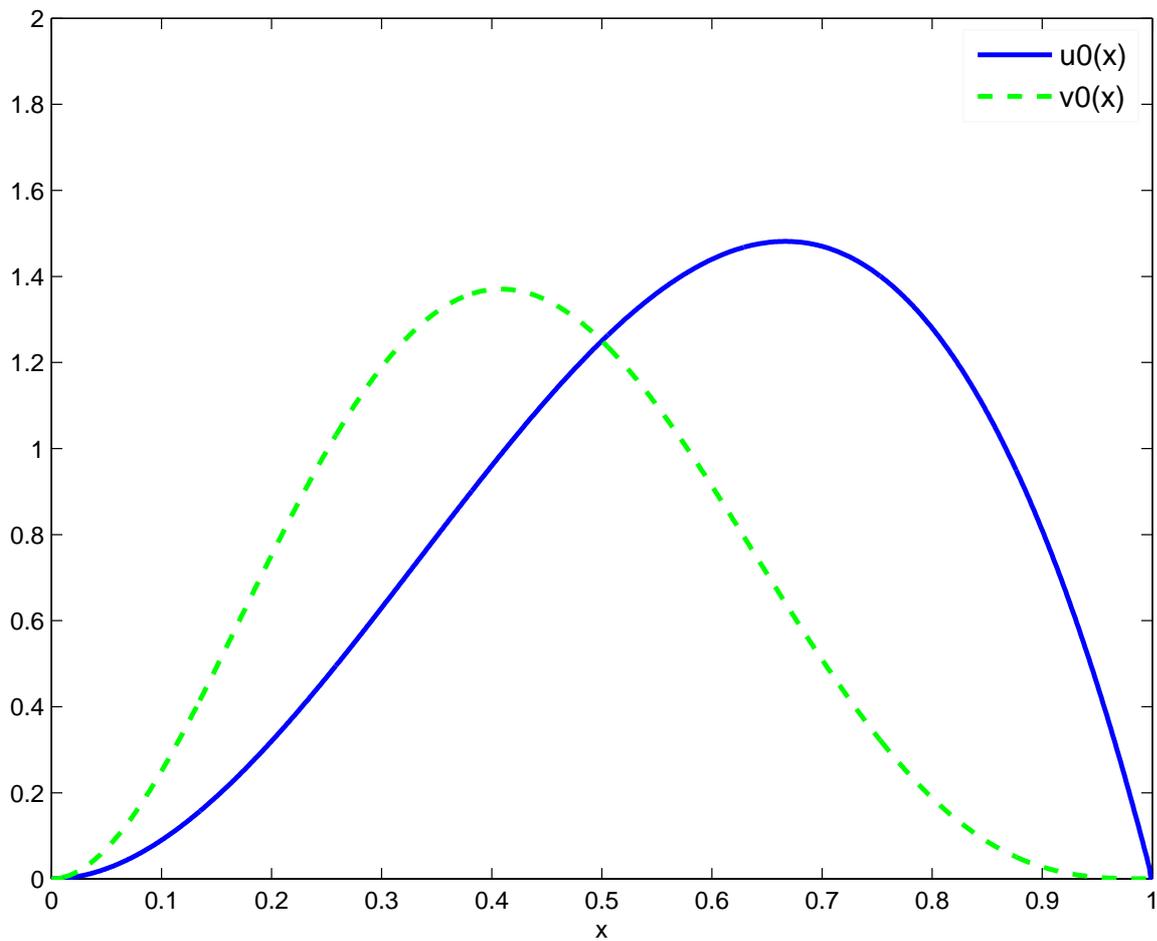


Figure. 5.1 - Simulation 1D: donnée initiale  $u_0(x) := 10x^2(1-x)$  et  $v_0(x) := 10x(1-x)^2 \sin(\pi x)$  sur  $(0, 1)$ .

TEST I (Figures 5.2, 5.3, 5.4 )

Dans un premier temps, nous allons fixer le paramètre  $k$ , nous supposons que  $\mathcal{R}_k = 1$  sur  $(0,1)$ ,  $d_1 = 0.1$  et  $d_2 = 0.2$  avec un maillage  $N = 400$ . Le pas de temps utilisé est  $dt = 0.01$ . On simule numériquement l'évolution de la solution du système  $(Ed^k)$  (Cf. Figure 5.1) issue de la donnée initiale du Figure 5.1.

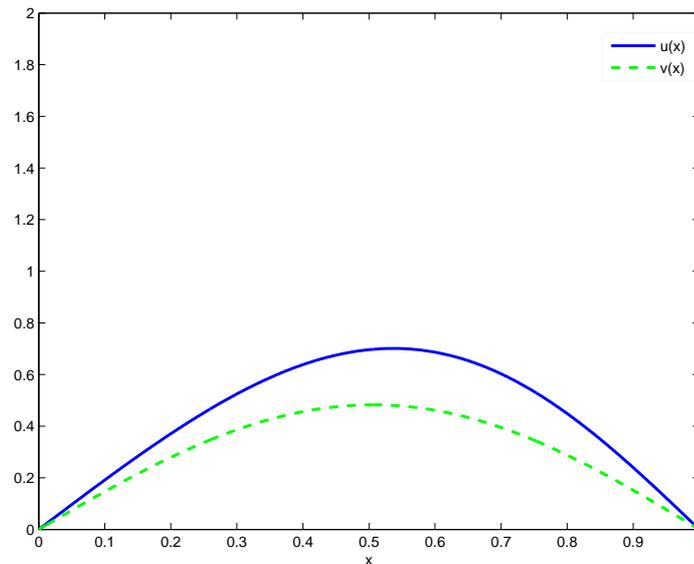


Figure. 5.2 - Simulation: solution au temps  $T = 0.5$  après  $T_{iter} = 50$  itérations.

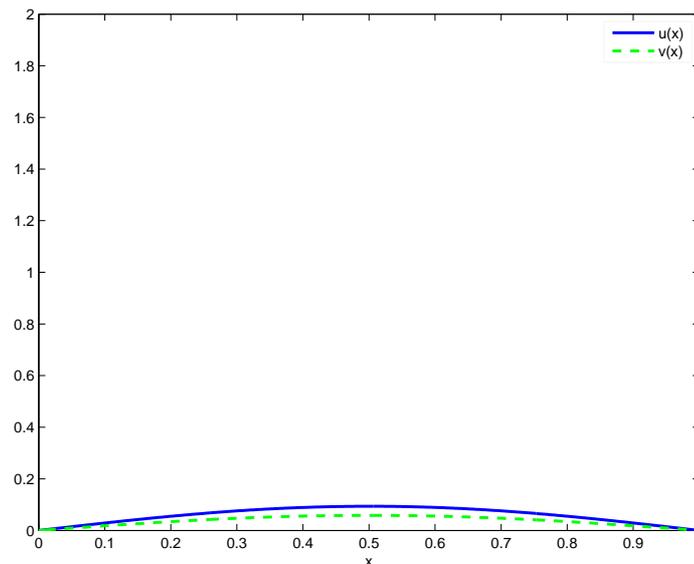


Figure. 5.3 - Simulation: solution au temps  $T = 2$  après  $T_{iter} = 200$  itérations.

Dans la figure 5.4, nous présentons l'évolution au cours du temps de la norme  $L^\infty$  de chaque composante de la solution.

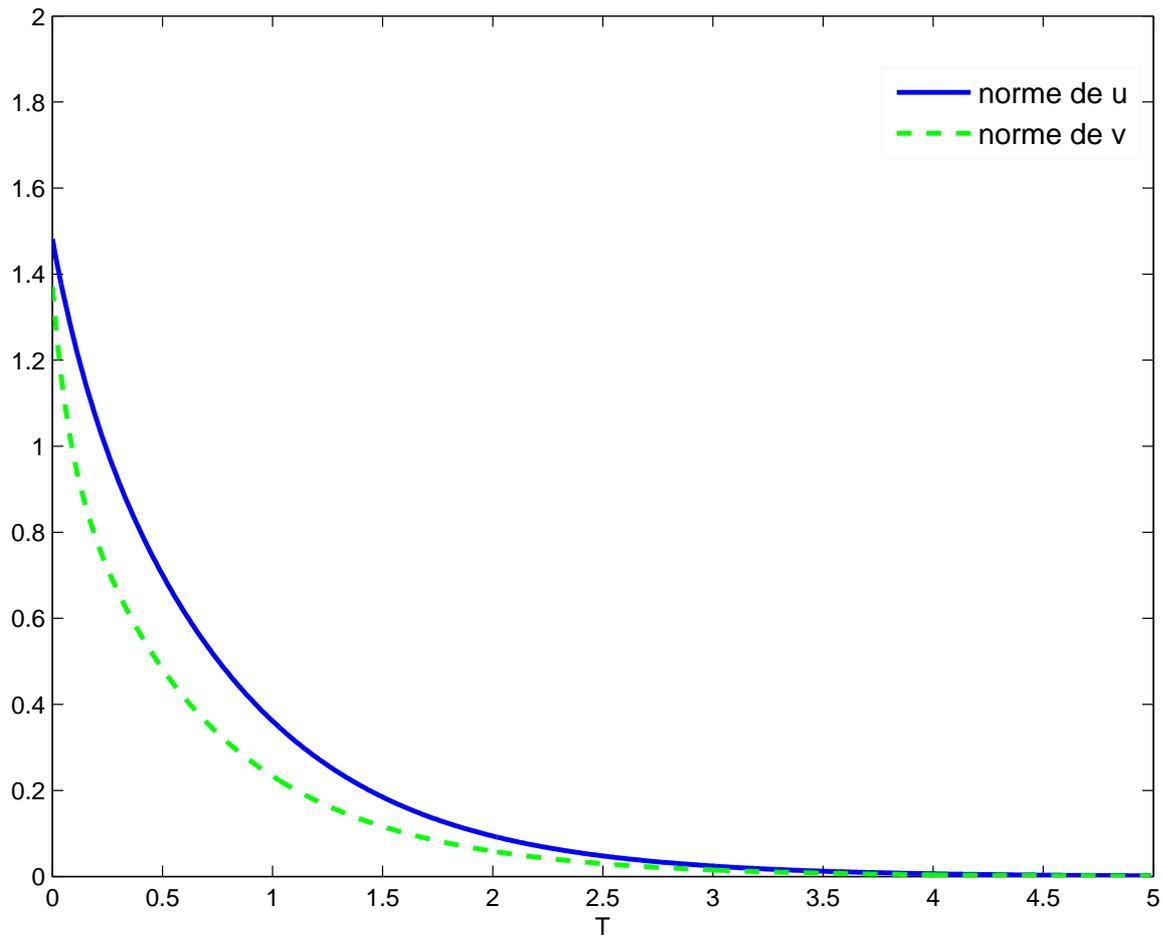


Figure. 5.4 - Simulation: évolution en fonction du temps de la norme  $L^\infty$  de la solution  $u$  et  $v$ .

TEST II (Figures 5.5, 5.6, 5.7 )

En ce qui concerne le TEST II, on a choisi d'augmenter la valeur du paramètre  $k$  sur tout le domaine  $\Omega$ , pour cela nous supposons  $\Omega_0 = \Omega := (0, 1)$ ,  $\mathcal{R}_k = k$ ,  $d_1 = 0.1$  et  $d_2 = 0.2$  avec un maillage  $N = 400$ . Le pas de temps utilisé est  $dt = 0.001$ . Nous présentons les résultats sur le comportement de la solution du système  $(Ed^k)$  obtenus à partir d'une condition initiale (Cf. Figure 5.1) pour  $k = 10$ ,  $k = 10^2$  et  $k = 10^3$ .

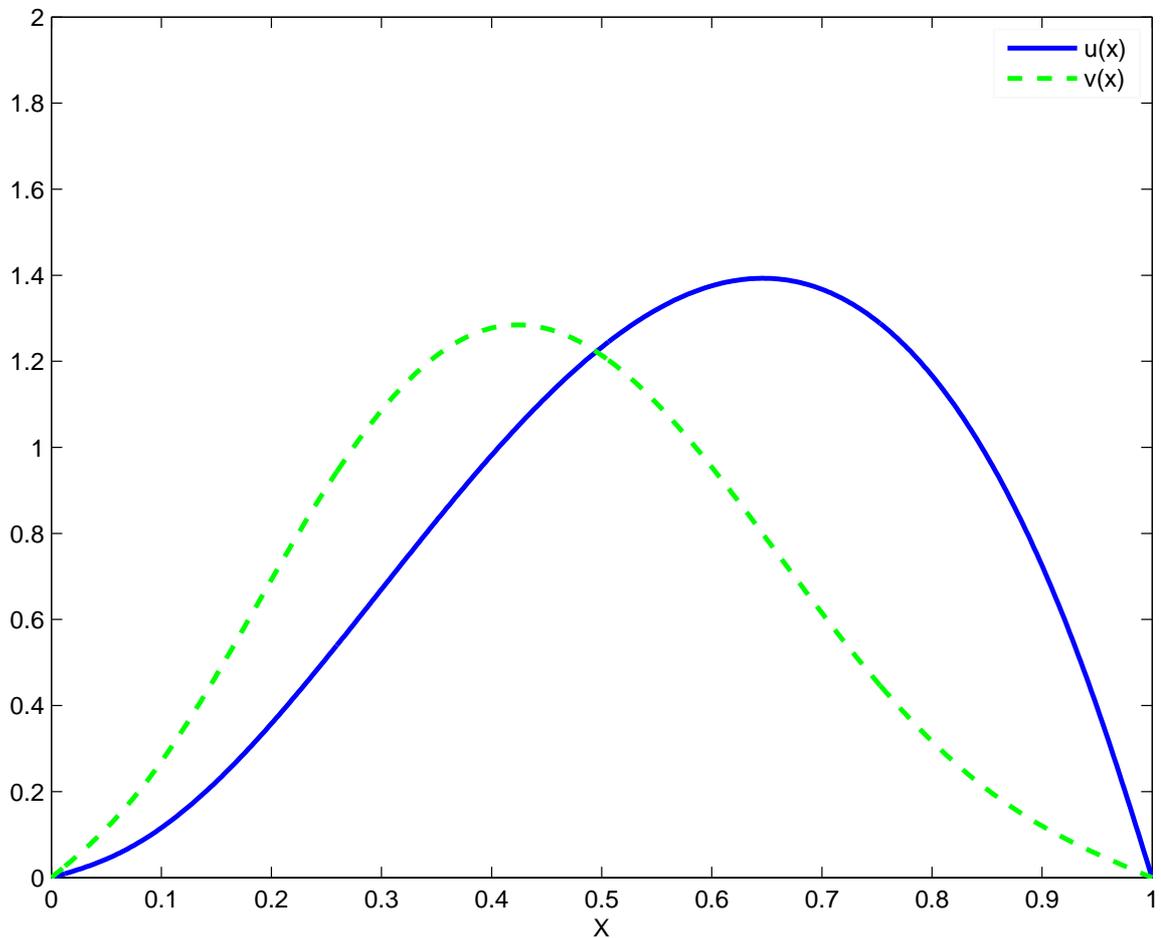


Figure. 5.5 - Simulation: solution pour  $\mathbf{k} = 10$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

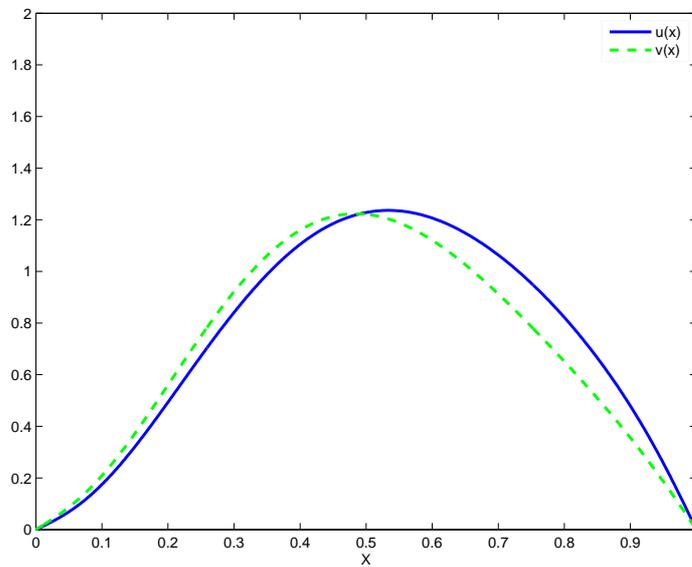


Figure. 5.6 - Simulation: solution pour  $\mathbf{k} = 10^2$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

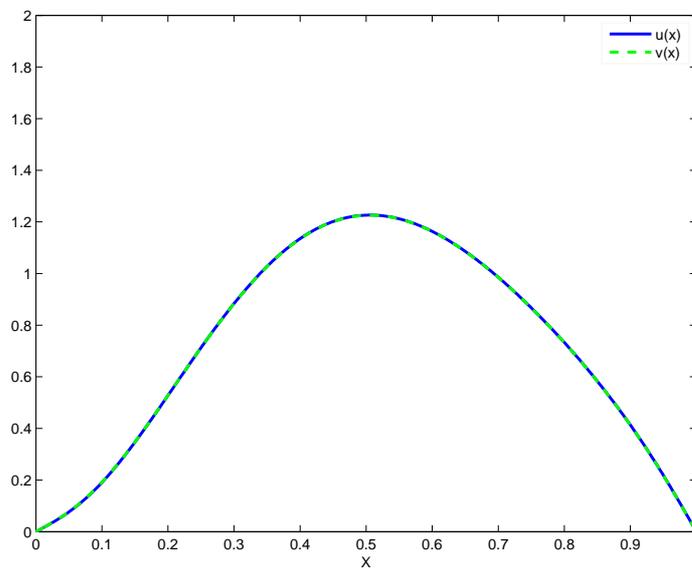


Figure. 5.7 - Simulation: solution pour  $\mathbf{k} = 10^3$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

TEST III (Figures 5.8, 5.9, 5.10 )

Maintenant, nous considérons le TEST III, qui consiste à localiser le paramètre d'homogénéité, pour cela nous supposons  $\Omega_0 = (0.2, 0.8)$ ,  $d_1 = 0.1$  et  $d_2 = 0.2$  avec un maillage  $N = 400$ . Le pas de temps utilisé est  $dt = 0.001$ . Le comportement de la solution du système  $(Ed^k)$  obtenu à partir d'une condition initiale (Cf. Figure 5.1) pour  $k = 10$ ,  $k = 10^2$  et  $k = 10^3$ .

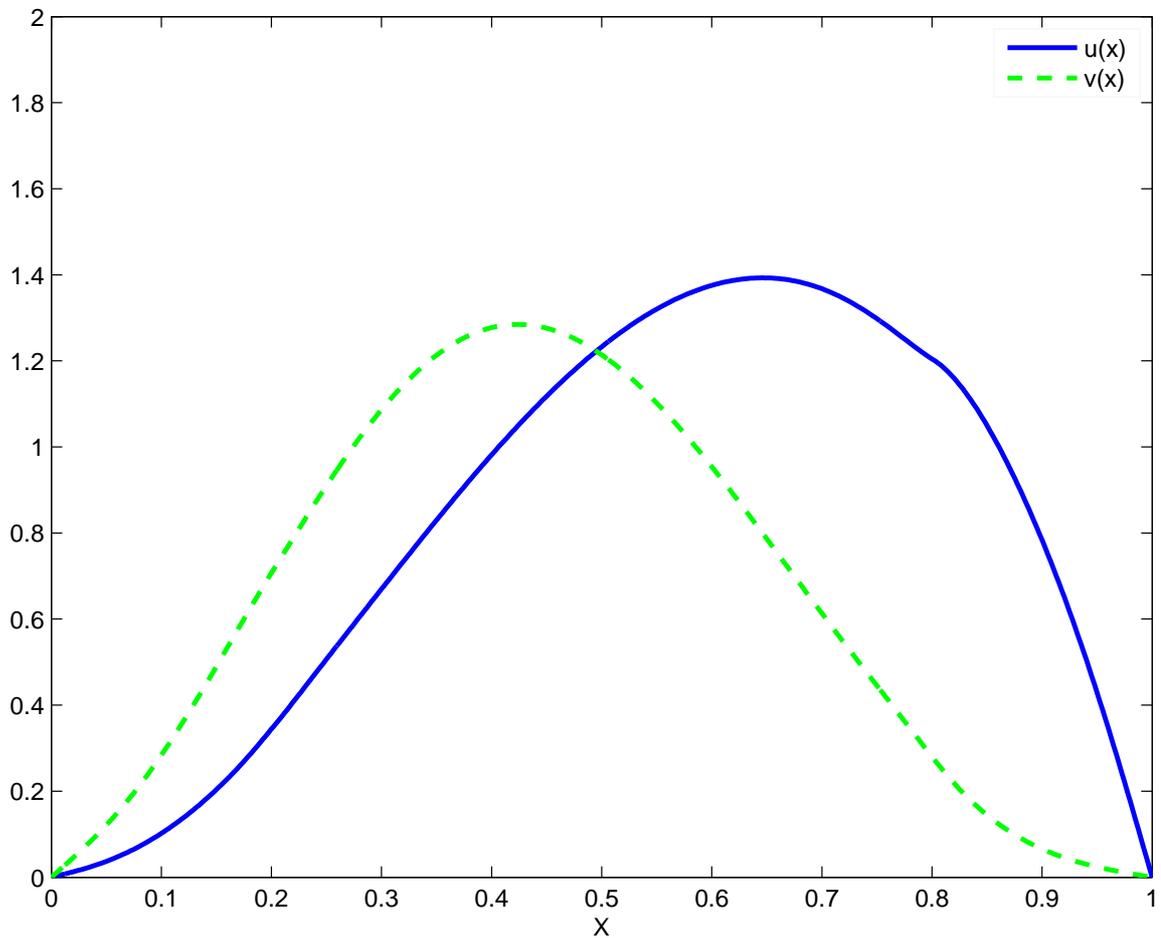


Figure. 5.8 - Simulation: solution pour  $\mathbf{k} = \mathbf{10}$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

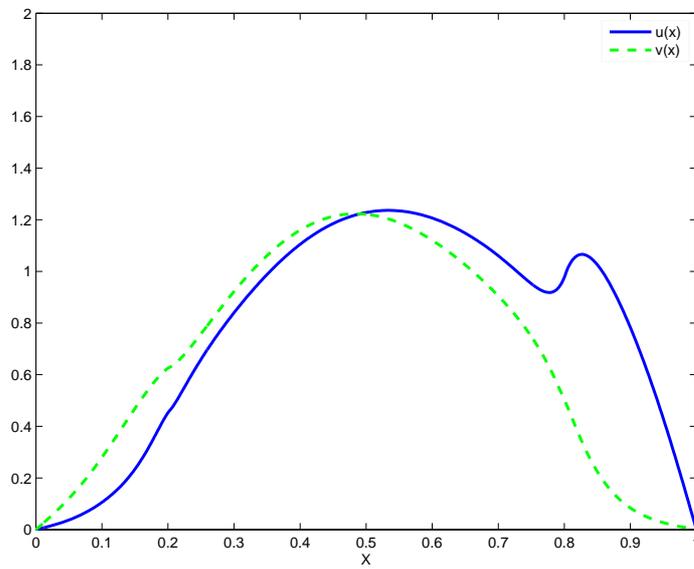


Figure. 5.9 - Simulation: solution pour  $k = 10^2$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

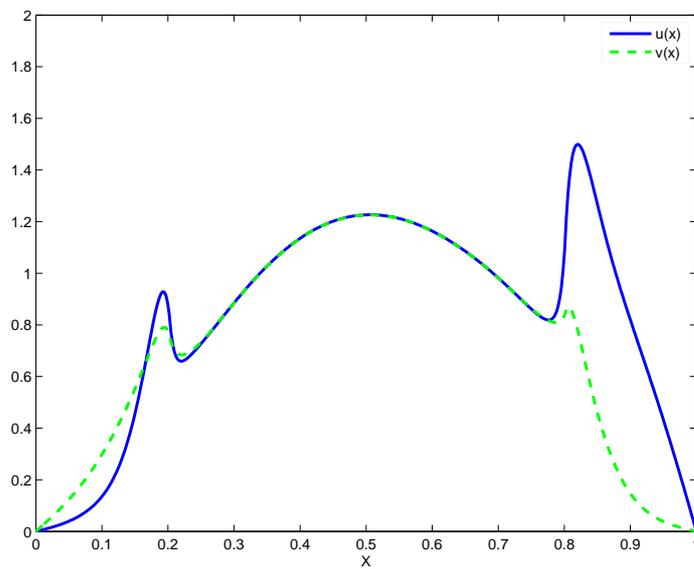


Figure. 5.10 - Simulation: solution pour  $k = 10^3$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

## TEST IV (Figures 5.11, 5.12, 5.13, 5.14)

Théoriquement, nous avons montré l'apparition d'un phénomène de *couche limite*, d'où la nécessité de changer la donnée initiale du problème limite par une nouvelle valeur compatible avec ce dernier (Cf. Proposition 5.1.1). En particulier, la donnée initiale correspondante à celle de la Figure 5.1 s'écrit sous la forme suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} 10x^2(1-x) & \text{sur } (0, 1) \setminus (0.2, 0.8) \\ 5(x^2(1-x) + x(1-x)^2 \sin(\pi x)) & \text{sur } (0.2, 0.8) \end{cases}$$

et

$$v_0(x) = \begin{cases} 10x(1-x)^2 \sin(\pi x) & \text{sur } (0, 1) \setminus (0.2, 0.8) \\ 5(x^2(1-x) + x(1-x)^2 \sin(\pi x)) & \text{sur } (0.2, 0.8) \end{cases},$$

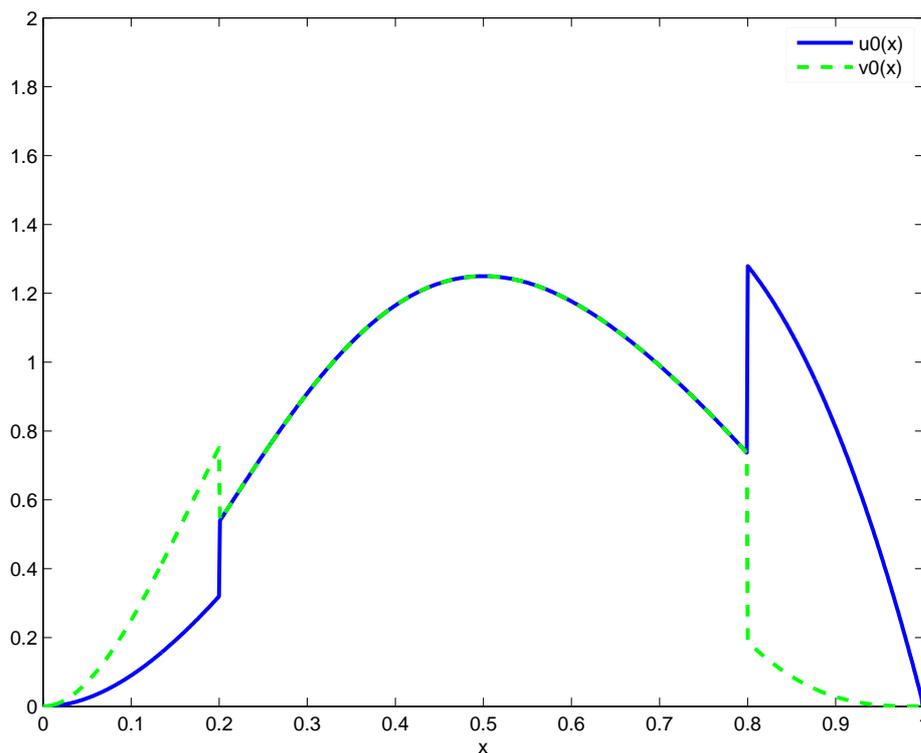


Figure. 5.11 - Simulation 1D: donnée initiale  $u_0(x) := 10x^2(1-x)$ ,  $v_0(x) := 10x(1-x)^2 \sin(\pi x)$  sur  $(0, 1) \setminus (0.2, 0.8)$  et  $u_0(x) = v_0(x) := 5(x^2(1-x) + x(1-x)^2 \sin(\pi x))$  sur  $(0.2, 0.8)$ .

Nous supposons  $\Omega_0 = (0.2, 0.8)$ ,  $d_1 = 0.1$  et  $d_2 = 0.2$  avec un maillage  $N = 400$ . Le pas de temps utilisé est  $dt = 0.001$ .

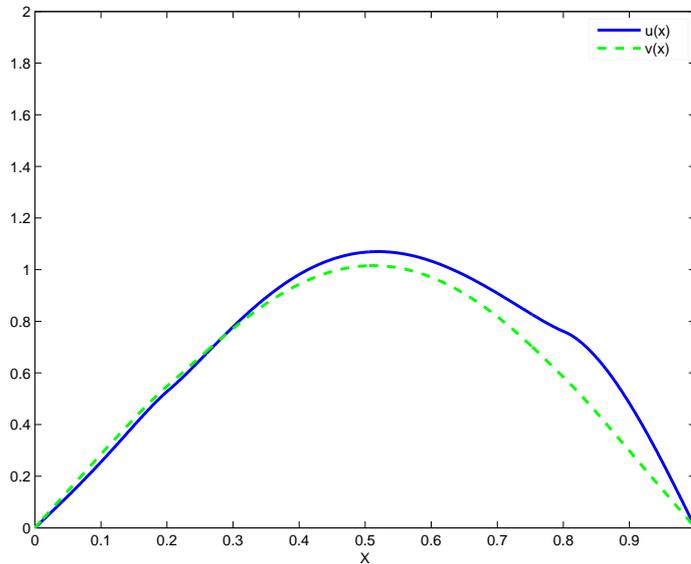


Figure. 5.12 - Simulation: solution avec la donnée initiale de la Figure 5.11 et pour  $\mathbf{k} = \mathbf{10}$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

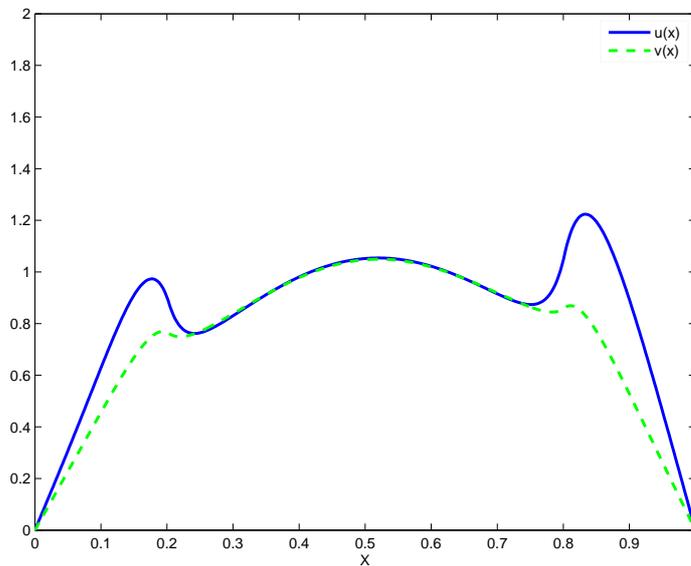


Figure. 5.13 - Simulation: solution avec la donnée initiale de la Figure 5.11 et pour  $\mathbf{k} = \mathbf{10}^2$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

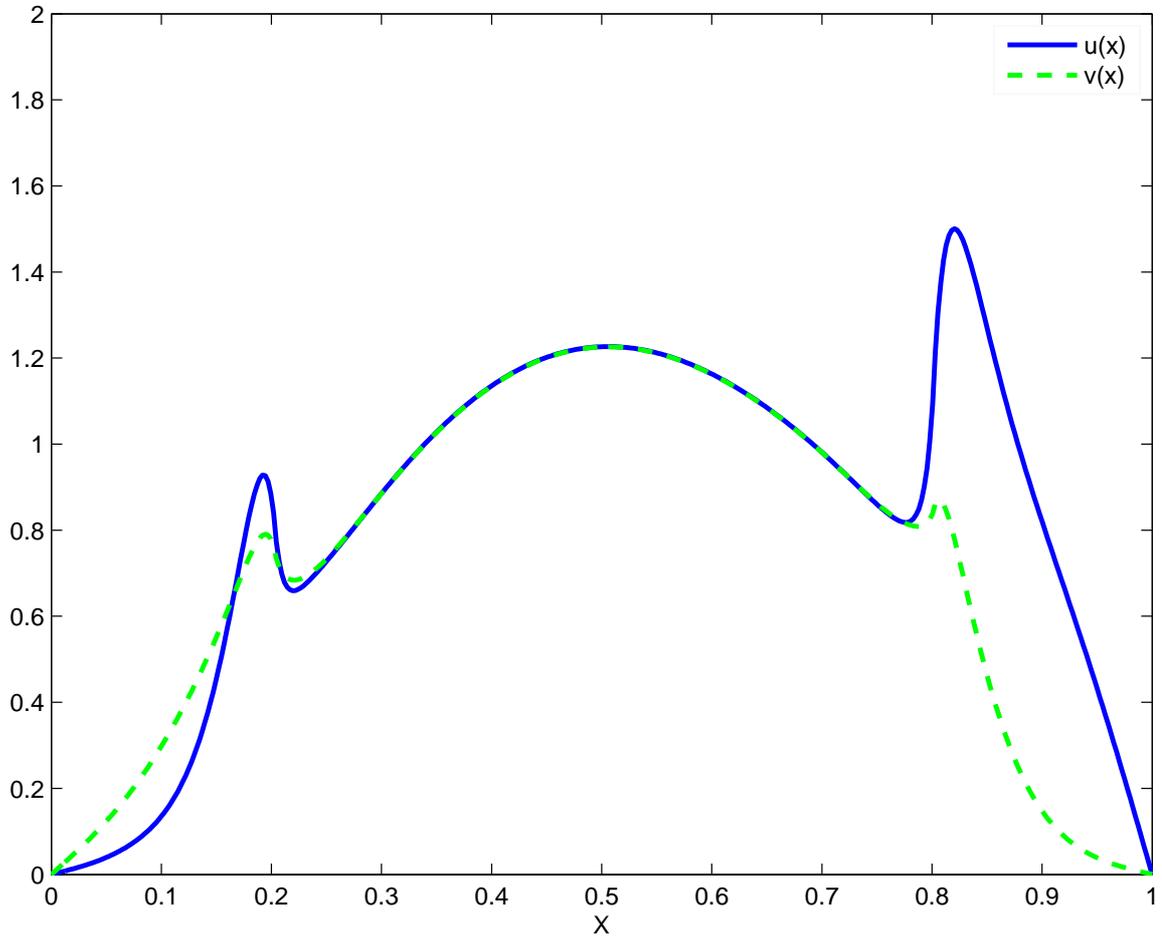


Figure. 5.14 - Simulation: solution avec la donnée initiale de la Figure 5.11 et pour  $k = 10^3$  au temps  $T = 10^{-2}$  après 10 itérations.

**Remarque 8** *Les résultats numériques obtenus montrent que pour une valeur fixe du paramètre  $k$ , la norme  $L^\infty$  de la solution se stabilise vers 0 (TEST I). Lorsque  $\mathcal{R}_k$  prend des valeurs très grandes sur  $\Omega$  ou une partie de  $\Omega$  les deux composantes  $u$  et  $v$  se coincident instantanément sur cette partie (TEST II et III). Dans TEST IV, nous avons changé la donnée initiale utilisée dans les tests précédents (Cf. Figure 5.1) par une nouvelle donnée initiale issue de la première, et qui est compatible avec le problème limite (Cf. Figure 5.11), nous remarquons que pour  $k = 10^3$  nous obtenons la même solution (Cf. Figure 5.10 et Figure 5.14) en partant soit de la première ou de la nouvelle donnée initiale.*



## Bibliographie

- [1] D. BOTHE, D. HILHORST, *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction*, J. Math. Anal. Appl. 286 (2003)125-135
- [2] E. DIBENEDETTO, R. E. SHOWALTER, *A free-boundary problem for a degenerate parabolic system*, J. Differential Equations 50 (1983), 1-19
- [3] R. EYMARD, T. GALLOUET , R. HERBIN , *Finite Volume Methods*, Handbook for numerical analysis, Vol. VII,, Springer, 1999.
- [4] W. JAGER, J. KACUR, *solution of porous medium type systems by linear approximation schemes*, Numer. Math. 60 (1991), 407-427.
- [5] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, N.N.URAL'CEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* , American Mathematical Society, 1968
- [6] M. SCHATZMAN, *Numerical integration of reaction diffusion systems* Numer. Algorithms, 31(2002),247-269. Numerical methods for ordinary differential equations (Auckland, 2001).
- [7] R. E. SHOWALTER, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equation*, American Mathematical Society, 1997



---

## Chapitre 6

### Problème d'obstacle pour une équation doublement non linéaire

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un problème elliptique parabolique doublement non linéaire en présence d'un obstacle dépendant de l'espace. Nous considérons le problème elliptique-parabolique non linéaire

$$P^{\beta, G}(u_0, f) \begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(x, Dw) + G(x, u) \ni f & u = \beta(w) \quad \text{sur } Q := (0, T) \times \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Sigma := (0, T) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  est un ouvert borné de frontière  $\Gamma$  régulière,  $\vec{n}$  le vecteur normale unité sur  $\Gamma$ ,  $f \in L^{p'}(Q)$  et  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue croissante,  $\beta(0) = 0$  et

$$(H_4) \quad \operatorname{Im}(\beta) = \mathbb{R}.$$

Pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $r \rightarrow G(x, r)$  est un graphe maximal monotone avec pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $G_0(\cdot, s) \in L^\infty(\Omega)$  et  $0 \in G(\cdot, 0)$ . En ce qui concerne le champ  $a(x, Dw)$  on suppose que  $\mathbf{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est l'opérateur de Leray-Lions, c'est-à-dire  $\mathbf{a}$  est une fonction Carathéodory ( $x \rightarrow \mathbf{a}(x, \xi)$  est mesurable pour toute  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et  $\xi \rightarrow \mathbf{a}(x, \xi)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$ ) avec  $\mathbf{a}(\cdot, 0) = 0$  et  $\mathbf{a}$  satisfait

$$(H_1) \quad \text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N$$

$$a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p \text{ pour p.p. } x \in \Omega$$

$$(H_2) \quad \text{pour toutes } \xi, \eta \in \mathbb{R}^N \text{ telles que } \xi \neq \eta$$

$$(a(x, \xi) - a(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0 \text{ p.p. } x \in \Omega$$

$$(H_3) \quad \text{ils existent } \sigma > 0, k \in L^{p'}(\Omega) \text{ telles que}$$

$$|a(x, \xi)| \leq \sigma(k(x) + |\xi|^{p-1}) \text{ pour p.p. } x \in \Omega$$

$$\text{et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ avec } p' = \frac{p}{p-1}.$$

Les hypothèses  $(H_1 - H_3)$  sont classiques pour l'étude de cet opérateur non linéaire (Cf. [6], [18]). L'exemple modèle de la fonction  $\mathbf{a}$  qui satisfait ces hypothèses est  $\mathbf{a}(x, \xi) = |\xi|^{p-2} \xi$  et il correspond à l'opérateur p-Laplacien où  $\Delta_p w = \operatorname{div}(|Dw|^{p-2} Dw)$ .

Lorsque le domaine de  $G$  est fermé L'EDP  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  modélise le problème d'obstacle (Cf. [5], [14], [16], [21]), et dans le cas où  $G$  ne dépend pas de  $x$ , nous avons montré dans le chapitre précédent que le problème  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  admet une unique solution faible définie d'une manière standard (Cf. [15]). Par contre, dans le cas où  $G$ , dépend de l'espace, le problème n'a pas de solution au sens standard c'est à dire solution faible (Cf. [19], [22], [23]). Nous présentons une nouvelle notion de solution et qui garantit l'existence et l'unicité.

Ce travail est organisé comme suit

Dans la seconde section nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème stationnaire associé à  $P^{\beta,G}(u_0, f)$ , pour cela nous approchons l'équation par une suite de problèmes avec absorptions  $G_{m,n}$  définis partout sur  $\mathbb{R}$ , et nous donnons aussi quelques estimations préliminaires utilisées par la suite. Dans la troisième section nous utilisons la théorie des semigroupes non linéaires et nous établirons un résultat d'existence de la solution dans le cas où  $\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = \mathbb{R}$  p.p.  $x \in \Omega$ . Ensuite, nous approchons le problème d'obstacle par le problème elliptique parabolique sans obstacle  $P^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(u_0, f)$  et nous passons à la limite ce qui nous permet de montrer l'existence. Dans la dernière section, nous utilisons la notion des solutions intégrales pour montrer l'unicité de la solution.

## 6.2 Problème stationnaire

Afin d'étudier le problème dans le cadre de la théorie des semigroupes non linéaires, nous considérons dans cette section le problème elliptique associé à  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  défini par

$$S^{\beta,G}(f) \begin{cases} v - \operatorname{div} a(x, Dw) + G(\cdot, v) \ni f & v = \beta(w) & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

### 6.2.1 Problème elliptique sans obstacle

Dans ce paragraphe, nous supposons que pour p.p.  $x \in \Omega$  on a  $\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = \mathbb{R}$ , et nous montrons l'existence et d'unicité de la solution faible du problème  $S^{\beta,G}(f)$ . L'existence, l'unicité et la contraction sont équivalents au fait que l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta,G}$  défini dans  $L^1(\Omega)$  par

$$f \in \mathcal{A}_{\beta, G} u \Leftrightarrow \begin{cases} u, f \in L^{p'}(\Omega), \exists w \in W^{1,p}(\Omega), \exists \eta \in L^{p'}(\Omega) \\ u = \beta(w), \eta \in G(\cdot, u) \text{ p.p. } \Omega, \\ \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) D\xi + \int_{\Omega} \eta \xi = \int_{\Omega} f \xi, \forall \xi \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

est T-accréatif dans  $L^1(\Omega)$  et  $\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G}) \supseteq L^\infty(\Omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Ces résultats sont bien connus dans le cas, où  $G \equiv 0$  (Cf. [4]). Afin d'éviter de reproduire les mêmes arguments de [4], nous considérons dans  $L^1(\Omega)$ , l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta, 0}$  tel que

$$\mathcal{A}_{\beta, G} = \mathcal{A}_{\beta, 0} + B_G$$

où  $B_G : L^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(L^1(\Omega))$  est défini par

$$B_G = \left\{ (u, \eta) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega); \text{ telle que } \eta \in G(\cdot, u) \right\}.$$

Et, on considère le problème de Cauchy suivant:

$$CP^{\beta, G}(u_0, f) \begin{cases} u_t + \mathcal{A}_{\beta, G} u \ni f & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

**Proposition 6.2.1** *Etant donnée  $f \in L^\infty(\Omega)$ , il existe une unique solution  $v$  du problème  $S^{\beta, G}(f)$  au sens suivant:  $v \in L^1(\Omega)$ ,  $\exists w \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\exists \eta \in L^1(\Omega)$  telles que  $\eta \in G(\cdot, v)$ ,  $v = \beta(w)$ , p.p.  $\Omega$ , et*

$$\int_{\Omega} v \xi + \int_{\Omega} a(x, Dw) D\xi + \int_{\Omega} \eta \xi = \int_{\Omega} f \xi \quad (6.1)$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$ . De plus,  $v, w$  et  $\eta$  sont bornées dans  $L^\infty(\Omega)$  et on a les estimations suivantes:

$$\int_{\Omega} |v| + \int_{\Omega} |\eta| \leq \int_{\Omega} |f|, \quad (6.2)$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\beta, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega} |Dw|^p \leq C_1, \quad \text{et} \quad \left( \int_{\Omega} |a(\cdot, Dw)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_2. \quad (6.4)$$

où,  $C_1, C_2$  des constantes qui dépendent uniquement de  $\Omega, p, N, \|f\|_\infty, \alpha$  et  $\|k\|_{L^{p'}(\Omega)}$ .

Pour montrer la Proposition 6.2.1, nous considérons pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $G_\lambda(x, \cdot)$  la régularisé de Yoshida (Cf. [11]) de  $G(x, \cdot)$  et nous montrons le lemme suivant:

**Lemme 6.2.1** *i) L'opérateur  $\overline{\mathcal{A}}_{\beta, G_\lambda}$  est m-T-accréatif dans  $L^1(\Omega)$ .  
ii) Etant donnée  $f \in L^q(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  on a*

$$\| (I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G_\lambda})^{-1} f \|_{L^q(\Omega)} \leq \| f \|_{L^q(\Omega)}.$$

**Preuve:** *i)* D'abord, nous rappelons (Cf. [4]) que pour tout  $(u, v) \in \mathcal{A}_{\beta, 0}$ , on a

$$\int_{\Omega} p(u) v \geq 0 \quad \text{pour tout } p \in P_0, \quad (6.5)$$

où

$$P_0 := \left\{ p \in Lip(\Omega); p \text{ croissante}, p(0) = 0 \text{ et } supp(p') \text{ compact} \right\}.$$

Puisque l'opérateur  $B_{G_\lambda}$  est continu, Lipschitzienne et T-accréatif alors  $\mathcal{A}_{\beta, G_\lambda}$  est également T-accréatif dans  $L^1(\Omega)$  (Cf. [9]). Il vient de [4] que pour tout  $\varepsilon > 0$   $\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, 0}) \supseteq L^{p'}(\Omega)$ , alors en utilisant le corollaire 3.1 de [3], on déduit que  $\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G_\lambda}) \supseteq L^{p'}(\Omega)$ . Puisque la fermeture d'un opérateur T-accréatif est T-accréatif, donc  $\overline{\mathcal{A}}_{\beta, G_\lambda}$  est T-accréatif dans  $L^1(\Omega)$ . D'autre part,  $\mathcal{R}(I + \varepsilon \overline{\mathcal{A}}_{\beta, G_\lambda}) = \overline{\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G_\lambda})} = L^1(\Omega)$  d'où  $\overline{\mathcal{A}}_{\beta, G_\lambda}$  est m-T-accréatif dans  $L^1(\Omega)$ .

*ii)* D'après [7], il suffit de montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta, G_\lambda}$  vérifie la propriété (6.5). Soit  $(u_\lambda, f) \in \mathcal{A}_{\beta, G_\lambda}$ , alors  $(u_\lambda, f - G_\lambda(\cdot, u_\lambda)) \in \mathcal{A}_{\beta, 0}$ , et puisque  $\mathcal{A}_{\beta, 0}$  vérifie la propriété (6.5) alors

$$\int_{\Omega} p(u_\lambda) (f - G_\lambda(\cdot, u_\lambda)) \geq 0.$$

En utilisant le fait que  $p(u) G_\lambda(\cdot, u_\lambda) \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ , il vient que la propriété (6.5) est vérifiée par l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta, G_\lambda}$ , ce qui nous donne *ii)*. ■

**Preuve de la Proposition 6.2.1. Unicité:** Pour  $i = 1, 2$ ; Soit  $f_i \in L^\infty(\Omega)$  et  $v_i$  est une solution du problème  $S^{\beta, G}(f_i)$  au sens (6.1), alors

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2) \xi + \int_{\Omega} (a(\cdot, Dw_1) - a(\cdot, Dw_2)) D\xi + \int_{\Omega} (\eta_1 - \eta_2) \xi = \int_{\Omega} (f_1 - f_2) \xi$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$ . Nous prenons  $T_\varepsilon(w_1 - w_2)$ ,  $\varepsilon > 0$  une fonction test dans l'égalité précédente et nous utilisons le fait que

$$(a(\cdot, Dw_1) - a(\cdot, Dw_2)) D(w_1 - w_2) T'_\varepsilon(w_1 - w_2) \geq 0,$$

alors

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2) T_{\varepsilon}(w_1 - w_2) + \int_{\Omega} (\eta_1 - \eta_2) T_{\varepsilon}(w_1 - w_2) \leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2) T_{\varepsilon}(w_1 - w_2), \quad (6.6)$$

nous multiplions cette inégalité par  $\frac{1}{\varepsilon}$  et nous passons à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donc

$$\int_{\Omega} |v_1 - v_2| \leq \int_{\Omega} |f_1 - f_2|.$$

**Existence :** Soit  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ , alors d'après le lemme 6.2.1 il existe une unique solution  $v_{\lambda} \in L^1(\Omega)$  du problème  $S^{\beta, G_{\lambda}}(f)$ , et  $\exists w_{\lambda} \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\exists \eta_{\lambda} \in L^1(\Omega)$  telles que  $\eta_{\lambda} = G_{\lambda}(x, v_{\lambda})$ ,  $v_{\lambda} = \beta(w_{\lambda})$  p.p  $\Omega$ , et

$$\int_{\Omega} v_{\lambda} \xi + \int_{\Omega} a(x, Dw_{\lambda}) D\xi + \int_{\Omega} G_{\lambda}(x, v_{\lambda}) \xi = \int_{\Omega} f \xi, \quad (6.7)$$

pour tout  $\forall \xi \in W^{1,p}(\Omega)$ . De plus, il vient de *ii*) que

$$\|v_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Et, puisque  $\mathcal{D}(\beta) = \mathbb{R}$ , alors

$$\|w_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \max\left(\beta^{-1}(\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}) \cup -\beta^{-1}(-\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)})\right) =: C(\beta, \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}). \quad (6.8)$$

Maintenant, prenons  $w_{\lambda}$  comme fonction test dans (6.7), alors

$$\int_{\Omega} v_{\lambda} w_{\lambda} + \int_{\Omega} a(x, Dw_{\lambda}) Dw_{\lambda} + \int_{\Omega} G_{\lambda}(., v_{\lambda}) w_{\lambda} = \int_{\Omega} f w_{\lambda}.$$

En utilisant la monotonie de  $\beta$  et  $G_{\lambda}(x, .)$ , on a

$$\int_{\Omega} a(., Dw_{\lambda}) Dw_{\lambda} \leq \int_{\Omega} f w_{\lambda},$$

il vient de  $(H_1)$  et (6.8) que

$$\int_{\Omega} |Dw_{\lambda}|^p \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\Omega)} \|w_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} := C_1. \quad (6.9)$$

Et, d'après  $(H_2)$ , on a

$$\left(\int_{\Omega} |a(., Dw_{\lambda})|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \sigma \left(\int_{\Omega} (|k| + |Dw_{\lambda}|^{p-1})^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

et en appliquant l'inégalité de Minkowski et (6.9), on obtient

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\Omega} |a(\cdot, Dw_{\lambda})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sigma \left( \left( \int_{\Omega} |k(x)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left( \int_{\Omega} |Dw_{\lambda}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right) \\
 &\leq \sigma \left( \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|Dw_{\lambda}\|_{L^{p'}(\Omega)} \right) \\
 &\leq \sigma \left( \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + C_1^{\frac{1}{p'}} \right) := C_2.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

D'après, (6.8) et (6.9) on a  $(w_{\lambda})_{\lambda}$  est bornée dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , donc il existe une sous suite, notée encore  $w_{\lambda}$ , telle que  $w_{\lambda} \rightarrow w$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  faiblement et dans  $L^p(\Omega)$  fortement, d'où  $w_{\lambda} \rightarrow w$  p.p.  $\Omega$ , et puisque  $\beta$  est continue alors  $v_{\lambda} \rightarrow v$  dans  $L^p(\Omega)$  et  $v = \beta(w)$  p.p.  $\Omega$ . D'autre part, pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $G(x, \cdot)$  est défini partout sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\|G_{\lambda}(\cdot, v_{\lambda})\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq G_0(\cdot, \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)})$$

d'où  $G_{\lambda}(\cdot, v_{\lambda}) \rightarrow \eta$  dans  $L^{\infty}(\Omega)$ -faible \*. Nous appliquons le Lemme 1.6 [10] et nous déduisons que  $\eta \in G(\cdot, v)$  p.p.  $\Omega$ . D'après (6.10), on a  $(a(x, Dw_{\lambda}))_{\lambda}$  est bornée dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  donc il existe une sous suite telle que  $a(x, Dw_{\lambda}) \rightarrow h$  faiblement dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . Il reste à prouver que  $\operatorname{div} a(x, Dw) = \operatorname{div} h$ . Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Minty Browder [12], et donc il suffit de montrer que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{\lambda}) Dw_{\lambda} \leq \int_{\Omega} h Dw. \tag{6.11}$$

Nous prenons  $(w_{\lambda} - w)$  comme fonction test dans (6.7), nous obtenons

$$\int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{\lambda}) D(w_{\lambda} - w) \leq \int_{\Omega} (f - v_{\lambda})(w_{\lambda} - w) - \int_{\Omega} G_{\lambda}(\cdot, v_{\lambda})(w_{\lambda} - w),$$

nous utilisons le fait que  $w_{\lambda} \rightarrow w$  dans  $L^p(\Omega)$  et  $G_{\lambda}(\cdot, v_{\lambda}) \rightarrow \eta$  dans  $L^{\infty}(\Omega)$ -faible \*, lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , il vient que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{\lambda}) D(w_{\lambda} - w) \leq 0.$$

Or,  $a(x, Dw_{\lambda}) \rightarrow h$  faiblement dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  donc (6.11) est satisfaite et par suite

$$\operatorname{div} a(x, Dw) = \operatorname{div} h \quad \text{p.p. } \Omega.$$

Finalement, nous passons à la limite dans (6.7) lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  nous obtenons

$$\int_{\Omega} v \xi + \int_{\Omega} a(x, Dw) D \xi + \int_{\Omega} \eta \xi = \int_{\Omega} f \xi,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$ . Ce qui termine la preuve de l'existence.

Maintenant, nous allons montrer les estimations (6.2), (6.3) et (6.4). Pour (6.2) nous prenons  $f = f_1 = f_2$  dans (6.6), alors

$$\int_{\Omega} vT_{\varepsilon}(w) + \int_{\Omega} \eta T_{\varepsilon}(w) \leq \int_{\Omega} fT_{\varepsilon}(w),$$

nous multiplions l'inégalité par  $\frac{1}{\varepsilon}$  et nous passons à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donc

$$\int_{\Omega} |v| + \int_{\Omega} |\eta| \leq \int_{\Omega} |f|.$$

Pour (6.3) et (6.4), on a  $\|v_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$  donc

$$\|v\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \|v_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

et, d'après (6.8), (6.9) et (6.10) on a

$$\|w\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \|w_{\lambda}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C(\beta, \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}), \quad \int_{\Omega} |Dw|^p \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} |Dw_{\lambda}|^p \leq C_1,$$

et

$$\left( \int_{\Omega} |a(\cdot, Dw)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega} |a(\cdot, Dw_{\lambda})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_2.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition. ■

## 6.2.2 Problème d'obstacle elliptique

Dans ce paragraphe, nous supposons que le domaine de  $G$  est fermé et pour p.p.  $x \in \Omega$

$$\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = [m(x), M(x)] \text{ p.p. } \Omega,$$

où  $m$  et  $M$  sont deux fonctions dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Soit  $K$  l'ensemble des fonctions définies par

$$K = \{w \in L^{\infty}(\Omega) \text{ telle que } m(x) \leq \beta(w) \leq M(x) \text{ p.p. } \Omega\}.$$

Remarquons que  $0 \in K$ , car  $m(x) \leq \beta(0) = 0 \leq M(x)$  p.p.  $x \in \Omega$ .

**Proposition 6.2.2** *Pour tout  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ , il existe une unique solution du problème  $S^{\beta, G}(f)$  au sens suivant :  $v \in L^1(\Omega)$ , il existe  $w \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $\eta \in L^1(\Omega)$  vérifiant*

$$\eta(x) \in G(x, v(x)), \quad v(x) = \beta(w(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega, \text{ et}$$

$$\int_{\Omega} v T_l(w - \xi) + \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad (6.12)$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K$ .

Maintenant, pour p.p.  $x \in \Omega$  et  $\forall r \in \mathbb{R}$  nous considérons le graphe  $\tilde{G}$  défini par:

$$\tilde{G}(x, r) = \begin{cases} G(x, r) & \text{si } m(x) < r < M(x) \\ G_0(x, M(x)) & \text{si } r \geq M(x) \\ G_0(x, m(x)) & \text{si } r \leq m(x). \end{cases} \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Nous allons voir ici comment atteindre la solution du problème  $S^{\beta, G}(f)$  en approchant  $G$  par une suite des graphes maximaux monotones qui sera notée au long de ce chapitre par  $G_{m,n}$ , où pour  $m, n \in \mathbb{R}$ ;  $\forall r \in \mathbb{R}$  et p.p.  $x \in \Omega$

$$G_{m,n}(x, r) = \tilde{G}(x, r) + \frac{1}{m} \left( r - M(x) \right)^+ - \frac{1}{n} \left( r - m(x) \right)^-, \quad (6.13)$$

et soit  $\beta_{m,n}(r) = \beta(r) - m r^- + n r^+$ .

Cette approximation préserve la monotonie de  $w$  par rapport à  $m$  et  $n$ . D'autre part, il est clair que pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $\mathcal{D}(G_{m,n}(x, \cdot)) = \mathbb{R}$ , ce qui nous permet d'utiliser les résultats d'existence et d'unicité obtenus dans le paragraphe précédent.

**Preuve de la Proposition 6.2.2: Unicité:** Soient  $v_1, v_2$  deux solutions au sens (6.12). Prenons  $w_1$  (respectivement  $w_2$ ) comme fonction test dans l'inégalité vérifiée par  $v_2$  (respectivement  $v_1$ ) et on additionne les deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (v_2 - v_1) T_l(w_2 - w_1) + \int_{\Omega} (a(\cdot, Dw_2) - a(\cdot, Dw_1)) DT_l(w_2 - w_1) \\ & + \int_{\Omega} (\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_1) T_l(w_2 - w_1) \leq \int_{\Omega} (f_2 - f_1) T_l(w_2 - w_1). \end{aligned}$$

Il vient de  $(H_2)$  que

$$\int_{\Omega} (v_2 - v_1) T_l(w_2 - w_1) + \int_{\Omega} (\eta_2 - \eta_1) T_l(w_2 - w_1) \leq \int_{\Omega} (f_2 - f_1) T_l(w_2 - w_1),$$

nous multiplions cette inégalité par  $\frac{1}{l}$  et passons à la limite lorsque  $l$  tend vers 0, on trouve

$$\int_{\Omega} (v_2 - v_1) \text{Sign}_0(w_2 - w_1) + \int_{\Omega} (\eta_2 - \eta_1) \text{Sign}_0(w_2 - w_1) \leq \int_{\Omega} |f_2 - f_1|. \quad (6.14)$$

En utilisant la monotonie de  $\beta$  et  $G$  on a  $(v_2 - v_1)Sign_0(w_2 - w_1) \geq |v_2 - v_1|$  et  $(\eta_2 - \eta_1)Sign_0(w_2 - w_1) \geq 0$ , d'où

$$\|v_2 - v_1\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_2 - f_1\|_{L^1(\Omega)}. \quad (6.15)$$

Ce qui nous donne l'unicité .

**Existence:** Nous approchons  $G$  par  $G_{m,n}$  et  $\beta$  par  $\beta_{m,n}$ , donc d'après la Proposition 6.2.1 , il existe une unique  $v_{m,n} \in L^1(\Omega)$  solution du problème  $S^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(f)$  et  $\exists w_{m,n} \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\exists \eta_{m,n} \in L^1(\Omega)$  telles que  $\eta_{m,n} \in G_{m,n}(\cdot, v_{m,n})$ ,  $v_{m,n} = \beta_{m,n}(w_{m,n})$ , p.p.  $\Omega$ , et pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$  on a

$$\int_{\Omega} v_{m,n} \xi + \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n}) D \xi + \int_{\Omega} \eta_{m,n} \xi = \int_{\Omega} f \xi.$$

De plus,  $\|v_{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  ,  $\|w_{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ ,  $\int_{\Omega} |Dw_{m,n}|^p \leq C_1$  et  $\int_{\Omega} |a(\cdot, Dw_{m,n})|^{p'} \leq C_2$  où  $C, C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $m$  et  $n$ . Alors lorsque  $m, n \rightarrow 0$  on a  $w_{m,n} \rightharpoonup w$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $a(\cdot, Dw_{m,n}) \rightharpoonup \phi$  dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  et puisque  $\beta_{m,n}$  est continue, donc

$$v_{m,n} \longrightarrow v \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Nous montrons d'abord que  $w \in K$ . D'après (6.13) il existe  $\tilde{\eta}_{m,n} \in \tilde{G}_{m,n}(\cdot, v_{m,n})$  telle que

$$\eta_{m,n} = \tilde{\eta}_{m,n} + \frac{1}{m} \left( v_{m,n} - M(x) \right)^+ - \frac{1}{n} \left( v_{m,n} - m(x) \right)^-$$

et d'après (6.2), on déduit que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{1}{m} (v_{m,n} - M(x))^+ - \frac{1}{n} (v_{m,n} - m(x))^- \right| \leq \int_{\Omega} |f| + \int_{\Omega} |\tilde{\eta}_{m,n}|. \quad (6.16)$$

Puisque pour p.p.  $x \in \Omega$  on a  $\mathcal{D}(\tilde{G}(x, \cdot)) = \mathbb{R}$ , alors on a aussi  $\|\tilde{\eta}_{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{G}_0(\cdot, \|v_{m,n}\|_{L^\infty(\Omega)})$  donc  $\tilde{\eta}_{m,n}$  est bornée uniformément dans  $L^\infty(\Omega)$ , et lorsque  $m, n \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\eta}_{m,n} \rightharpoonup \tilde{\eta}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  - faible \*, nous utilisons le lemme 1.6 [10] et nous obtenons  $\tilde{\eta} \in \tilde{G}(\cdot, v)$  p.p.  $\Omega$ . Il vient de (6.16) que lorsque  $m \rightarrow 0$ ,  $v_{0,n} \leq M$  p.p.  $\Omega$  , et lorsque  $n \rightarrow 0$ ,  $v_{m,0} \geq m$  p.p.  $\Omega$ , et puisque lorsque  $m, n \rightarrow 0$   $v_{m,n}$  converge vers  $v$  dans  $L^1(\Omega)$  alors  $m \leq v \leq M$  p.p.  $\Omega$  par suite  $w \in K$ . D'autre part, prenons  $T_l(w_{m,n} - \xi) \in W^{1,p}(\Omega)$  comme fonction test dans la définition de la solution du problème  $S^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(f)$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{m,n} T_l(w_{m,n} - \xi) + \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n}) D T_l(w_{m,n} - \xi) \\ + \int_{\Omega} \eta_{m,n} T_l(w_{m,n} - \xi) = \int_{\Omega} f T_l(w_{m,n} - \xi). \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $\xi \in K$ , on vérifie aisément que

$$\left(\eta_{m,n} - \tilde{\eta}_{m,n}\right)T_l(w_{m,n} - \xi) \geq 0 \quad \text{p.p. } \Omega,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_{m,n}T_l(w_{m,n} - \xi) + \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{m,n})DT_l(w_{m,n} - \xi) \\ & + \int_{\Omega} \tilde{\eta}_{m,n}T_l(w_{m,n} - \xi) \leq \int_{\Omega} fT_l(w_{m,n} - \xi). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nous passons à la limite dans (6.17) lorsque  $m, n \rightarrow 0$ , et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} vT_l(w - \xi) + \liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DT_l(w_{m,n} - \xi) \\ & + \int_{\Omega} \tilde{\eta}T_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} fT_l(w - \xi) \quad \forall l > 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Finalement, il nous reste à montrer que

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DT_l(w_{m,n} - \xi) \geq \int_{\Omega} a(x, Dw)DT_l(w - \xi) \quad \forall l > 0. \quad (6.19)$$

Nous approchons  $T_l$  par  $S \in \mathcal{P}$  où

$$\mathcal{P} := \{p \in C^1(\mathbb{R}); p(0) = 0, 0 \leq p' \leq 1, \text{ Supp}(p') \text{ est compact}\},$$

et donc il suffit de montrer que

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DS(w_{m,n} - \xi) \geq \int_{\Omega} a(x, Dw)DS(w - \xi). \quad (6.20)$$

En effet, d'après  $(H_2)$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DS(w_{m,n} - \xi) \geq \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DwS'(w_{m,n} - \xi) \\ & + \int_{\Omega} a(x, Dw)D(w_{m,n} - w)S'(w_{m,n} - \xi) - \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})D\xi S'(w_{m,n} - \xi) \end{aligned} \quad (6.21)$$

et puisque  $S'(w_{m,n} - \xi) \rightarrow S'(w - \xi)$  p.p. sur  $\Omega$ ,  $Dw_{m,n} \rightharpoonup Dw$  faiblement dans  $[L^p(\Omega)]^N$  et  $a(x, Dw_{m,n}) \rightharpoonup \phi$  faiblement dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$ , nous passons à la limite dans l'inégalité (6.21) nous obtenons

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})DS(w_{m,n} - \xi) \geq \int_{\Omega} (a(x, Dw)Dw - \phi D\xi)S'(w - \xi). \quad (6.22)$$

D'autre part,  $w \in K \cap L^\infty(\Omega)$ , donc  $w$  est une fonction test admissible dans (6.17) et pour  $l$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{m,n}(w_{m,n} - w) + \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})D(w_{m,n} - w) \\ + \int_{\Omega} \tilde{\eta}_{m,n}(w_{m,n} - w) \leq \int_{\Omega} f(w_{m,n} - w), \end{aligned}$$

nous passons à la limite lorsque  $m, n \rightarrow 0$ , donc

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x, Dw_{m,n})Dw_{m,n} \leq \int_{\Omega} \phi Dw. \quad (6.23)$$

Nous utilisons à nouveau le lemme de Minty-Browder (Cf. [12]) donc  $a(x, Dw) = \phi$  p.p.  $\Omega$ . Nous remplaçons  $\phi$  dans (6.22) et nous obtenons (6.20). Finalement, on déduit que

$$\int_{\Omega} vT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} a(x, Dw)DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \tilde{\eta} T_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} fT_l(w - \xi) \quad \forall l > 0,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K$ . De plus,

$$\int_{\Omega} \tilde{\eta} T_l(w - \xi) = \underbrace{\int_{[u=M]} G_0(\cdot, M) T_l(w - \xi)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{[u=m]} G_0(\cdot, m) T_l(w - \xi)}_{\geq 0} + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi)$$

alors

$$\int_{\Omega} vT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} a(x, Dw)DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} fT_l(w - \xi) \quad \forall l > 0,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K$ . Ce qui complète la preuve de la proposition.  $\blacksquare$

Avant de montrer l'existence de la solution du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  nous allons d'abord montrer le lemme de monotonie suivant:

**Lemme 6.2.2** *Soient  $v_{m,n}, v_{m',n}, v_{m,n'}$  respectivement les solutions faibles du problèmes  $S^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(f_{m,n}), S^{\beta_{m',n}, G_{m',n}}(f_{m',n}), S^{\beta_{m,n'}, G_{m,n'}}(f_{m,n'})$  au sens de la Proposition (6.2.1). On suppose que, pour  $m' > m > 0$  et  $n' > n > 0$ , on a  $f_{m',n} \leq f_{m,n} \leq f_{m,n'}$  p.p.  $\Omega$ . Alors*

$$w_{m',n} \leq w_{m,n} \leq w_{m,n'} \quad \text{p.p. } \Omega$$

où,  $v_{m,n} = \beta_{m,n}(w_{m,n}), v_{m',n} = \beta_{m',n}(w_{m',n})$  et  $v_{m,n'} = \beta_{m,n'}(w_{m,n'})$  p.p.  $\Omega$ .

**Preuve:** Pour  $m \geq m' > 0, n > 0$  soient  $f_{m,n}, f_{m',n} \in L^\infty(\Omega)$ , et  $v_{m,n}, v_{m',n}$  sont les solutions faibles de  $S^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(f_{m,n})$  respectivement  $S^{\beta_{m',n}, G_{m',n}}(f_{m',n})$ . On soustrait les formulations satisfaites par  $v_{m,n}$  et  $v_{m',n}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v_{m',n} - v_{m,n}) \xi + \int_{\Omega} (a(x, Dw_{m',n}) - a(x, Dw_{m,n})) D \xi \\ + \int_{\Omega} (\eta_{m',n} - \eta_{m,n}) \xi = \int_{\Omega} (f_{m',n} - f_{m,n}) \xi \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $\mathcal{H}_\varepsilon(s) = \inf(s^+/\varepsilon, 1)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$  une approximation de la fonction  $Sign_0^+$  où

$$Sign_0^+(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0, \\ 0 & \text{if } s \leq 0. \end{cases}$$

Prenons  $\mathcal{H}_\varepsilon(w_{m',n} - w_{m,n})$  comme fonction test et utilisons le fait que

$$(a(\cdot, Dw_{m',n}) - a(\cdot, Dw_{m,n}))D(w_{m',n} - w_{m,n})\mathcal{H}'_\varepsilon(w_{m',n} - w_{m,n}) \geq 0,$$

alors, il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v_{m',n} - v_{m,n}) \mathcal{H}_\varepsilon(w_{m',n} - w_{m,n}) + \int_{\Omega} (\eta_{m',n} - \eta_{m,n}) \mathcal{H}_\varepsilon(w_{m',n} - w_{m,n}) \\ \leq \int_{\Omega} (f_{m',n} - f_{m,n}) \mathcal{H}_\varepsilon(w_{m',n} - w_{m,n}), \end{aligned}$$

nous passons à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, nous obtenons

$$\int_{\Omega} (v_{m',n} - v_{m,n})^+ + \int_{\Omega} (\eta_{m',n} - \eta_{m,n}) Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \leq \int_{\Omega} (f_{m',n} - f_{m,n})^+.$$

D'autre part, puisque

$$\left( \begin{aligned} & \int_{\Omega} (v_{m',n} - v_{m,n}) Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) = \\ & \int_{\Omega} (\beta(w_{m',n}^+) - \beta(w_{m,n}^+)) Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \\ & + n \int_{\Omega} (w_{m',n}^+ - w_{m,n}^+) Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \\ & + (m - m') \int_{\Omega} w_{m,n}^- Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \\ & - m' \int_{\Omega} (w_{m',n}^- - w_{m,n}^-) Sign_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \end{aligned} \right.$$

et, pour p.p.  $x \in \Omega$ , les fonctions  $r \rightarrow \tilde{G}(x, r)$ ,  $r \rightarrow (r - M(x))^+$ ,  $r \rightarrow -(r - m(x))^-$ ,  $r \rightarrow r^+$  et  $r \rightarrow -r^-$  sont monotones, alors  $\int_{\Omega} (\eta_{m',n} - \eta_{m,n}) \text{Sign}_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \geq 0$ , et

$$\begin{aligned} & +n \int_{\Omega} (w_{m',n}^+ - w_{m,n}^+) \text{Sign}_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) \\ -m' \int_{\Omega} (w_{m',n}^- - w_{m,n}^-) \text{Sign}_0^+(w_{m',n} - w_{m,n}) & \leq \int_{\Omega} (f_{m',n} - f_{m,n})^+. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Pour  $f_{m,n} \geq f_{m',n}$ , on a  $\pm w_{m,n}^{\pm} \geq \pm w_{m',n}^{\pm}$  alors  $w_{m,n} \geq w_{m',n}$ .  
De la même manière, pour  $n \geq n' > 0, m > 0$  nous montrons que

$$\begin{aligned} & -m \int_{\Omega} (w_{m,n}^- - w_{m,n'}^-) \text{Sign}_0^+(w_{m,n} - w_{m,n'}) \\ +n \int_{\Omega} (w_{m,n}^+ - w_{m,n'}^+) \text{Sign}_0^+(w_{m,n} - w_{m,n'}) & \leq \int_{\Omega} (f_{m,n} - f_{m,n'})^+. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Pour  $f_{m,n'} \geq f_{m,n}$ , on a  $\pm w_{m,n}^{\pm} \leq \pm w_{m,n'}^{\pm}$  alors  $w_{m,n} \leq w_{m,n'}$ . ■

## 6.3 Existence de la solution

Dans cette section, nous montrons l'existence de la solution du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$ , nous approchons le graphe  $G$  par  $G_{m,n}$ . Nous commençons par établir l'existence et les estimations a priori pour un problème à domaine égale à  $\mathbb{R}$ , ensuite nous utilisons ces résultats pour le passage à la limite dans le problème approché.

### 6.3.1 Problème d'évolution sans obstacle

On suppose que  $\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = \mathbb{R}$  p.p.  $x \in \Omega$ , alors

**Lemme 6.3.1**  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})} = L^1(\Omega)$ .

**Preuve:** Puisque  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, 0}) \subseteq \mathcal{D}(B_G)$ , alors  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, 0}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})$ . D'après [4], nous obtenons

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, 0})} = L^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})}. \quad \blacksquare$$

**Lemme 6.3.2** Soit  $f \in L^1(Q)$  et  $u_0 \in L^1(\Omega)$ . Alors le problème  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$  admet une unique bonne solution.

**Preuve:** Comme  $\overline{\mathcal{A}}_{\beta, G}$  est un opérateur  $T$ -accrétif dans  $L^1(\Omega)$ , et d'après la Proposition 6.2.1 on a  $\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G}) \supseteq L^\infty(\Omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , alors  $\overline{\mathcal{A}}_{\beta, G}$  est un opérateur  $m$ - $T$ -accrétif dans  $L^1(\Omega)$  et par la théorie générale des semigroupes non linéaires, on déduit grâce au Lemme 6.3.1 l'existence d'une unique *bonne solution* du problème de Cauchy  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$ . ■

Maintenant nous allons préciser le sens dans lequel cette bonne solution résout le problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$ .

**Théorème 6.3.1** *Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , alors  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  admet une unique solution faible  $u$  au sens suivant:  $u \in L^1(Q)$  et il existe  $w \in L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega))$  et  $\eta \in L^1(Q)$  telles que ,  $u = \beta(w)$ ,  $\eta \in G(\cdot, u)$  p.p.  $Q$ , et*

$$\int_0^\tau \int_\Omega a(\cdot, Dw) D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta \xi = \int_0^\tau \int_\Omega f \xi + \int_0^\tau \int_\Omega u \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0) \quad (6.26)$$

pour tout  $\xi \in C^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$  avec  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ . De plus, pour tout  $\tau \geq 0$

$$\|u(\tau)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + T \|f\|_{L^\infty(Q)} \quad (6.27)$$

$$\int_\Omega j(u(\tau)) + \alpha \int_0^\tau \int_\Omega |Dw|^p \leq \int_\Omega j(u_0) + \int_0^\tau \int_\Omega f w \quad (6.28)$$

où  $j : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty]$  convexe, propre, s.c.i avec  $j(\beta(q)) = \int_0^q s d\beta(s)$ .

Avant de commencer la démonstration du Théorème 6.3.1, nous aurons besoin d'une formule d'intégration par parties (Cf. [2], [13], [20], [1]), pour cela nous montrons le lemme suivant, qui nous sera utile pour la suite.

**Lemme 6.3.3** *Soit  $u$  une solution faible du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  au sens du Théorème 6.3.1. Alors, on a*

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma \eta T_l(w - \xi) \\ &= \int \int_Q \sigma f T_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r) \quad \forall l > 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$  avec  $\sigma \geq 0$ .

**Preuve:** Soient  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$  avec  $\sigma \geq 0$ , et pour  $\delta > 0$ , nous considérons  $\phi^\delta(t) = (1/\delta) \int_t^{t+\delta} T_l(w(s) - \xi) \sigma(s) ds$ , p.p.  $\Omega$ , nous prolongeons  $w$  dans  $\mathbb{R} \times \Omega$

par 0 si  $(t, x) \in (\mathbb{R} \setminus (0, T)) \times \Omega$ . On voit que  $\phi^\delta$  est une fonction test admissible du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$ , donc on a

$$\int \int_Q a(\cdot, Dw) D\phi^\delta + \int \int_Q \eta \phi^\delta = \int \int_Q f \phi^\delta + \int \int_Q u \phi_t^\delta. \quad (6.29)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \int_Q u \phi_t^\delta &= \frac{1}{\delta} \int \int_Q u(t) (T_l(w(t+\delta) - \xi) \sigma(t+\delta) - T_l(w(t) - \xi) \sigma(t)) \sigma(t) \\ &= \frac{1}{\delta} \left( \int_\Omega \int_{\delta}^{T+\delta} u(t-\delta) T_l(w(t) - \xi) \sigma(t) - \int_\Omega \int_0^T u(t) T_l(w(t) - \xi) \sigma(t) \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \underbrace{\int_\Omega \int_T^{T+\delta} u(t-\delta) T_l(w(t) - \xi) \sigma(t)}_{=0} - \frac{1}{\delta} \underbrace{\int_\Omega \int_\delta^0 u(t-\delta) T_l(w(t) - \xi) \sigma(t)}_{=0} \\ &\quad + \int \int_Q \frac{u(t-\delta) - \overset{=0}{u(t)}}{\delta} T_l(w(t) - \xi) \sigma(t) \\ &= \int \int_Q \frac{u(t-\delta) - u(t)}{\delta} T_l(w(t) - \xi) \sigma(t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

D'autre part, on a pour tout  $r, \hat{r}, \xi \in \mathbb{R}$ ,

$$T_l(r - \xi) (\beta(\hat{r}) - \beta(r)) \leq \psi_\xi^l(\beta(\hat{r})) - \psi_\xi^l(\beta(r))$$

où

$$\psi_\xi^l(\beta(r)) = \int_\xi^r T_l(s - \xi) d\beta(s).$$

On remplace dans (6.30), on trouve

$$\begin{aligned} \int \int_Q u \phi_t^\delta &\leq \frac{1}{\delta} \int \int_Q \sigma(t) \int_{w(t)}^{w(t-\delta)} T_l(r - \xi) d\beta(r) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int \int_Q \sigma(t+\delta) \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r) \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \int \int_Q \sigma(t) \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r) \end{aligned}$$

il suit que

$$\int \int_Q u \phi_t^\delta \leq \int \int_Q \frac{\sigma(t+\delta) - \sigma(t)}{\delta} \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r). \quad (6.31)$$

Or, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , on a  $\phi^\delta \rightarrow T_l(w - \xi)$  dans  $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ . Nous passons à la limite dans (6.29) et nous utilisons (6.31), donc

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma \eta T_l(w - \xi) \\ & \leq \int \int_Q \sigma f T_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r). \end{aligned}$$

Nous remplaçons  $\delta$  par  $-\delta$  dans la définition de la fonction  $\phi^\delta$  et de la même manière nous montrons que

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma \eta T_l(w - \xi) \\ & \geq \int \int_Q \sigma f T_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.  $\blacksquare$

**Preuve du théorème 6.3.1:** Soit  $\varepsilon = T/k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  et on considère la subdivision  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < \tau \leq t_k$ , avec  $t_i - t_{i-1} = \varepsilon$ ,  $f_1, \dots, f_k \in L^\infty(\Omega)$  et  $\sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$ . On définit la solution approchée  $u_\varepsilon(0) = u_0$ ,  $u_\varepsilon(t) = u_i$  pour  $t \in ]t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , où  $u_i$  satisfait  $u_i - u_{i-1} + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G} u_i \ni \varepsilon f_i$ , c'est à dire, il existe  $w_i \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $\eta_i \in L^p(\Omega)$  telles que  $\eta_i \in G(\cdot, u_i)$ ,  $u_i = \beta(w_i)$  p.p.  $\Omega$

$$\begin{cases} u_i - \varepsilon \operatorname{div} a(\cdot, Dw_i) + \varepsilon \eta_i = u_{i-1} + \varepsilon f_i & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw_i) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.32)$$

D'après la preuve de la proposition 6.2.1, il vient que

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \sum_{k=1}^i \|f_k\|_{L^\infty(\Omega)},$$

d'où

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt := M_1, \quad \forall t \in [0, T] \quad (6.33)$$

d'après  $(H_4)$ , on a

$$\|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \left( \beta^{-1}(M_1) \cup -\beta^{-1}(-M_1) \right) =: M_2. \quad (6.34)$$

D'autre part, on prend  $w_i$  une fonction test dans (6.32) et en utilisant le fait que

$$\int_{\Omega} (u_{i-1} - u_i)w_i \leq \int_{\Omega} j(u_{i-1}) - \int_{\Omega} j(u_i),$$

on obtient

$$\int_{\Omega} j(u_i) + \varepsilon \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_i)Dw_i + \varepsilon \int_{\Omega} \eta_i w_i \leq \varepsilon \int_{\Omega} f_i w_i + \int_{\Omega} j(u_{i-1}). \quad (6.35)$$

On additionne (6.35) pour  $i = 1, \dots, k$ , on trouve

$$\int_{\Omega} j(u_{\varepsilon}(\tau)) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{\varepsilon})Dw_{\varepsilon} + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \leq \int_{\Omega} j(u_0) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} f_{\varepsilon} w_{\varepsilon}.$$

D'autre part, en utilisant le fait que  $\eta_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \geq 0$  p.p.  $[0, \tau] \times \Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} j(u_{\varepsilon}(\tau)) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_{\varepsilon})Dw_{\varepsilon} \leq \int_{\Omega} j(u_0) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} f_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \quad (6.36)$$

il vient de  $(H_1)$  et (6.34), que

$$\int_{\Omega} j(u_{\varepsilon}(\tau)) + \alpha \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |Dw_{\varepsilon}|^p \leq \int_{\Omega} j(u_0) + \|w_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(Q)} \|f_{\varepsilon}\|_{L^1(Q)} := M_3 \quad (6.37)$$

on utilise l'inégalité de Minkowski et le fait que  $j \geq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left( \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |a(\cdot, Dw_{\varepsilon})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sigma \left( \left( \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |k(x)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left( \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |Dw_{\varepsilon}|^p \right)^{\frac{1}{p'}} \right) \\ &\leq \sigma \left( \tau \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \left( \frac{M_3}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p'}} \right) := M_4. \end{aligned} \quad (6.38)$$

avec  $w_{\varepsilon} : [0, \tau] \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\eta_{\varepsilon} : [0, \tau] \rightarrow L^p(\Omega)$  et  $f_{\varepsilon} : [0, \tau] \rightarrow L^1(\Omega)$ , où pour  $i = 1, \dots, k$  et  $t \in ]t_{i-1}, t_i]$ ,  $w_{\varepsilon} = w_i$ ,  $\eta_{\varepsilon} = \eta_i$ ,  $f_{\varepsilon}(t) = f_i$ . D'après (6.34), (6.37) et (6.38), il existe  $w \in L^p(0, \tau, W^{1,p}(\Omega))$ ,  $h \in [L^{p'}((0, \tau) \times \Omega)]^N$  telles que, lorsque  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , on a  $w_{\varepsilon_k} \rightarrow w$ , faiblement dans  $L^p(0, \tau, W^{1,p}(\Omega))$  et  $a(\cdot, Dw_{\varepsilon_k}) \rightarrow h$ , faiblement dans  $[L^{p'}((0, \tau) \times \Omega)]^N$ . D'autre part, puisque pour p.p.  $x \in \Omega$  on a  $\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = \mathbb{R}$  et d'après (6.33)  $\eta_{\varepsilon}$  uniformément bornée dans  $L^{\infty}(Q)$ , donc  $\eta_{\varepsilon} \rightarrow \eta$  dans  $L^{\infty}(Q)$ -faible\*. On applique le Lemme 1.6 (Cf. [10]) on déduit que  $\eta \in G(\cdot, u)$  p.p.  $Q$ .

Nous utilisons la théorie des semigroupes non linéaires (Cf. [7], [9]), donc le problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  admet une unique *bonne solution*  $u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$  telle que  $u(0) = u_0$ ,  $u(t) = L^1(\Omega) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t)$  pour  $t \in [0, T]$ .

Soit  $\tilde{u}_{\varepsilon}$  la fonction de  $[0, \tau]$  dans  $L^1(\Omega)$ , défini par  $\tilde{u}_{\varepsilon}(t) = u_{i-1}^{\varepsilon} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(u_i^{\varepsilon} - u_{i-1}^{\varepsilon})$

pour  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ . il est clair que  $\tilde{u}_\varepsilon$  est une fonction continue, linéaire par morceaux alors (6.32) entraîne que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega a(\cdot, Dw_\varepsilon) D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta_\varepsilon \xi &= \int_0^\tau \int_\Omega f_\varepsilon \xi \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega \tilde{u}_\varepsilon \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0) \end{aligned} \quad (6.39)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$ , telle que  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ . On fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (6.33), (6.36) et (6.39), nous obtenons (6.27), (6.28) et

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega h D\xi + \int_0^\tau \int_\Omega \eta \xi &= \int_0^\tau \int_\Omega f \xi \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega u \xi_t + \int_\Omega u_0 \xi(0) \end{aligned} \quad (6.40)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, \tau] \times \overline{\Omega})$ , telle que  $\xi(\cdot, \tau) \equiv 0$ . Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer que  $a(x, Dw) = h$  p.p.  $Q$ . Nous appliquons la méthode de Minty-Browder, donc il suffit de prouver que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q a(x, Dw_\varepsilon) Dw_\varepsilon \leq \int_Q h Dw. \quad (6.41)$$

En effet, de manière standard soit  $\phi \in L^p(0, T, W^{1,p}(\Omega))$ , il vient de la monotonie de  $\mathbf{a}(x, \cdot)$

$$\int_Q a(\cdot, D\phi) D(u_\varepsilon - \phi) \leq \int_Q a(\cdot, Du_\varepsilon) D(u_\varepsilon - \phi)$$

on passe à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et d'après (6.41), on a

$$\int_Q a(\cdot, D\phi) D(u - \phi) \leq \int_Q h D(u - \phi).$$

Prenons  $\phi = u \pm t\xi$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in L^p(0, T, W^{1,p}(\Omega))$  alors

$$\int_Q a(\cdot, D(u \pm t\xi)) D\xi = \int_Q h D\xi$$

on fait tendre  $t$  vers 0 on obtient  $a(x, Dw) = h$  p.p.  $Q$ .

Maintenant, nous allons démontrer (6.41). D'après (6.36) et le Lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_\Omega a(\cdot, Dw_\varepsilon) Dw_\varepsilon &\leq - \int_\Omega j(u(\tau)) - \int_0^\tau \int_\Omega \eta w \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega f w + \int_\Omega j(u_0) \end{aligned} \quad (6.42)$$

D'autre part, nous utilisons le Lemme 6.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega hDw + \int_0^\tau \int_\Omega \eta w - \int_0^\tau \int_\Omega fw &= - \int_0^\tau \int_\Omega \left( \int_0^w sd\beta(s) \right)_t \\ &= \int_\Omega j(u_0) - \int_\Omega j(u(\tau)). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Finalemnt, on combine (6.42) et (6.43) on obtient (6.41). Ce qui complète la preuve du théorème.  $\blacksquare$

**Lemme 6.3.4** Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $u_{m,n}$ ,  $u_{m',n}$ ,  $u_{m,n'}$  respectivement les bonnes solutions des problèmes  $CP^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(u_0, f)$ ,  $CP^{\beta_{m',n}, G_{m',n}}(u_0, f)$ ,  $CP^{\beta_{m,n'}, G_{m,n'}}(u_0, f)$ . Alors, pour  $m' \geq m > 0$  et  $n' \geq n > 0$ , on a

$$w_{m',n} \leq w_{m,n} \leq w_{m,n'} \quad \text{p.p. } Q,$$

où,  $u_{m,n} = \beta_{m,n}(w_{m,n})$ ,  $u_{m',n} = \beta_{m',n}(w_{m',n})$  et  $u_{m,n'} = \beta_{m,n'}(w_{m,n'})$  p.p.  $Q$ .

**Preuve:** Soit  $m' \geq m > 0$ , et  $n > 0$ , pour une subdivision  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < \tau \leq t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $t_i - t_{i-1} = \varepsilon$ ,  $f^1, \dots, f^k \in L^\infty(\Omega)$  où  $\varepsilon = T/k$  et  $\sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f^i\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$ , il existe  $u_{m,n}^i \in L^1(\Omega)$ ,  $w_{m,n}^i \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $\eta_{m,n}^i \in L^1(\Omega)$  telles que  $\eta_{m,n}^i \in G(\cdot, u_{m,n}^i)$ ,  $u_{m,n}^i = \beta_{m,n}(w_{m,n}^i)$  p.p.  $\Omega$  et

$$CPd_{m,n}^i(f^i) \quad \begin{cases} u_{m,n}^i - \varepsilon \operatorname{div} a(\cdot, Dw_{m,n}^i) + \varepsilon \eta_{m,n}^i = u_{m,n}^{i-1} + \varepsilon f^i & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw_{m,n}^i) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous considérons la solution approchée  $u_{m,n}^\varepsilon(0) = u_0$ ,  $u_{m,n}^\varepsilon(t) = u_{m,n}^i$  pour  $t \in ]t_{i-1}, t_i]$  et  $i = 1, \dots, k$ . D'après (6.24) (Lemme 6.2.2) on a

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (+n \int_\Omega ((w_{m',n}^i)^+ - (w_{m,n}^i)^+) \operatorname{Sign}_0^+(w_{m',n}^i - w_{m,n}^i) \\ & - m' \int_\Omega ((w_{m',n}^i)^- - (w_{m,n}^i)^-) \operatorname{Sign}_0^+(w_{m',n}^i - w_{m,n}^i) \leq \int_\Omega (u_{m',n}^{i-1} - u_{m,n}^{i-1})^+, \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} & n \int_\Omega ((w_{m',n}^i)^+ - (w_{m,n}^i)^+) \operatorname{Sign}_0^+(w_{m',n}^i - w_{m,n}^i) \\ & - m' \int_\Omega ((w_{m',n}^i)^- - (w_{m,n}^i)^-) \operatorname{Sign}_0^+(w_{m',n}^i - w_{m,n}^i) \leq 0 \end{aligned}$$

Nous additionnons cette inégalité pour  $i = 1, \dots, k$ , nous obtenons  $u_{m,n}^\varepsilon = \beta_{m,n}(w_{m,n}^\varepsilon)$  p.p.  $\Omega$  et

$$n \int_{\Omega} ((w_{m',n}^\varepsilon)^+ - (w_{m,n}^\varepsilon)^+) \text{Sign}_0^+(w_{m',n}^\varepsilon - w_{m,n}^\varepsilon) - m' \int_{\Omega} ((w_{m',n}^\varepsilon)^- - (w_{m,n}^\varepsilon)^-) \text{Sign}_0^+(w_{m',n}^\varepsilon - w_{m,n}^\varepsilon) \leq 0$$

d'où,  $\pm (w_{m,n}^\varepsilon)^\pm \geq \pm (w_{m',n}^\varepsilon)^\pm$  alors  $w_{m,n}^\varepsilon \geq w_{m',n}^\varepsilon$  p.p.  $Q$ . Passons à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, nous déduisons que  $w_{m,n} \geq w_{m',n}$  p.p.  $Q$ . De la même manière, pour  $n \geq n' > 0, m > 0$  nous montrons que  $w_{m,n} \geq w_{m',n}$  p.p.  $Q$ . ■

### 6.3.2 Problème d'obstacle elliptique parabolique

Conséquence immédiate de la preuve du proposition 6.2.2, on a le résultat de convergence de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta_{m,n}, G_{m,n}}$  suivant:

**Corollaire 6.3.1** *Lorsque  $m, n \rightarrow 0$ , l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta_{m,n}, G_{m,n}}$  converge dans  $L^1(\Omega)$ , au sens de la résolvante vers l'opérateur  $T$ -accrétif défini, par*

$$f \in \mathcal{A}_{\beta, G} v \Leftrightarrow \begin{cases} v \in L^{p'}(\Omega), \exists w \in W^{1,p}(\Omega), \exists \eta \in L^{p'}(\Omega), \\ v = \beta(w), \eta \in G(\cdot, v) \text{ p.p. } \Omega, \text{ et} \\ \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta DT_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \\ \text{pour tout } \xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K. \end{cases} \quad (6.44)$$

En particulier,  $\mathcal{A}_{\beta, G}$  est  $T$ -accrétif,  $\mathcal{R}(I + \varepsilon \mathcal{A}_{\beta, G}) \supseteq L^\infty(\Omega)$  et  $\mathcal{A}_{\beta, G}$  engendre un semigroupe non linéaire de contraction dans  $L^1(\Omega)$ . ■

**Lemme 6.3.5**  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})} = \left\{ z \in L^1(\Omega) ; m(x) \leq z(x) \leq M(x) \text{ p.p. } \Omega \right\} := X$ .

**Preuve:** Par densité et d'après la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta, G}$  on a  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})} \subseteq X$ . Pour montrer que  $X \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})}$ , il suffit de prouver que  $X \cap L^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta, G})$ , prenons  $u \in X \cap L^\infty(\Omega)$  et on considère  $u_\varepsilon$  la solution du problème

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon \operatorname{div} a(x, Dw_\varepsilon) = u & u_\varepsilon = \beta(w_\varepsilon) & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw_\varepsilon) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On a  $u \in X$ , d'où  $m(x) \leq u(x) \leq M(x)$  p.p.  $\Omega$ , alors  $m(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq M(x)$  p.p.  $\Omega$  et par suite  $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta,G})$ . il vient de  $(H_1)$  que

$$\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^p \leq \frac{C(\|u\|_\infty, \|w\|_\infty)}{\varepsilon\alpha} := \frac{C_4}{\varepsilon},$$

en appliquant l'inégalité de Minkowski et  $(H_3)$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon a(\cdot, Dw)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sigma \left( \varepsilon \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \varepsilon \left( \int_{\Omega} |Dw|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq \sigma \left( \varepsilon \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} C_4^{\frac{1}{p'}} \right), \end{aligned}$$

donc  $\varepsilon a(\cdot, Dw_\varepsilon)$  est bornée dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$ ,  $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $\|u_\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ . Alors  $\varepsilon a(\cdot, Dw_\varepsilon)$  converge faiblement vers 0 dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  et donc  $u_\varepsilon$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^{p'}(\Omega)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus,  $\|u_\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ , on déduit que  $u_\varepsilon$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^{p'}(\Omega)$  d'où  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^1(\Omega)$ .  $\blacksquare$

**Corollaire 6.3.2** Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  telles que  $m(x) \leq u_0(x) \leq M(x)$  p.p.  $\Omega$  et  $u_{m,n}$  la bonne solution du problème  $CP^{\beta,m,n,G_{m,n}}(u_0, f)$ . Alors, lorsque  $m,n \rightarrow 0$ , on a  $u_{m,n} \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$  où  $u$  est la bonne solution du problème

$$CP^{\beta,G}(u_0, f) \begin{cases} u_t + \mathcal{A}_{\beta,G} u \ni f & \text{sur } (0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

**Théorème 6.3.2** Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  tels que pour p.p.  $x \in \Omega$   $m(x) \leq u_0(x) \leq M(x)$ . Alors, la bonne solution  $u$  du problème  $CP^{\beta,G}(u_0, f)$  est une solution du problème  $P^{\beta,G}(u_0, f)$  vérifiant  $u(0) = u_0$ ,  $u \in \mathcal{C}([0,T], L^1(\Omega))$  et  $\exists w \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega))$ ,  $\exists \eta \in L^1(Q)$  telle que  $u = \beta(w)$ ,  $\eta \in G(x, u)$  p.p.  $Q$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^w T_l(r - \xi) d\beta(r) + \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int_{\Omega} \eta T_l(w - \xi) \\ \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T) \end{aligned}$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap K$ .

**Preuve:** Soit  $u_{m,n}$  une solution du problème  $P^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(u_0, f)$ . D'après le Théorème 6.3.1 , on a

$$\int_{\Omega} j(u_{m,n}(t)) + \alpha \int \int_Q |Dw_{m,n}|^p \leq C \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$$

où  $C$  est indépendante de  $m$  et  $n$ , puisque  $w_{m,n}$  est bornée dans  $L^\infty(Q)$ , donc  $w_{m,n}$  est bornée dans  $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ , par conséquent il existe  $w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  et mais également une sous suite que nous dénotons par  $m, n$ , telle que  $w_{m,n} \rightarrow w$  dans  $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ - faible,  $a(\cdot, Dw_{m,n}) \rightarrow \chi$  dans  $[L^p(Q)]^N$  lorsque  $m, n \rightarrow 0$ . Nous appliquons le Lemme 6.3.4 donc  $w_{m,n}$  est monotone par rapport  $m$  et  $n$  alors  $w_{m,n} \rightarrow w$  dans  $L^1(Q)$  lorsque  $m, n \rightarrow 0$ . D'autre part, On a  $u \in \overline{D(\mathcal{A}_{\beta, G})}$  d'où  $w(t) \in K$  p.p.  $t \in (0, T)$ . Il vient du lemme 6.3.3 que

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) DT_l(w_{m,n} - \xi) + \int \int_Q \sigma \eta_{m,n} T_l(w_{m,n} - \xi) \\ & \leq \int \int_Q \sigma f T_l(w_{m,n} - \xi) + \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w_{m,n}(t)} T_l(r - \xi) d\beta_{m,n}(r), \end{aligned} \quad (6.45)$$

où  $\eta_{m,n} \in G_{m,n}(\cdot, u_{m,n})$ . De la même manière que pour le problème elliptique nous prenons  $\xi \in K$  alors

$$\left( \eta_{m,n} - \tilde{\eta}_{m,n} \right) T_l(w_{m,n} - \xi) \geq 0$$

, avec  $\tilde{\eta}_{m,n} \in \tilde{G}(\cdot, u_{m,n})$  et

$$\eta_{m,n} = \tilde{\eta}_{m,n} + \frac{1}{m} (u_{m,n} - M(x))^+ - \frac{1}{n} (u_{m,n} - m(x))^- ,$$

donc

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) DT_l(w_{m,n} - \xi) + \int \int_Q \sigma \tilde{\eta}_{m,n} T_l(w_{m,n} - \xi) \\ & \leq \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w_{m,n}(t)} T_l(r - \xi) d\beta_{m,n}(r) + \int \int_Q \sigma f T_l(w_{m,n} - \xi). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Comme pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $\mathcal{D}(\tilde{G}(x, \cdot)) = \mathbb{R}$  alors  $\tilde{\eta}_{m,n}$  est bornée uniformément dans  $L^\infty(\Omega)$ , par suite  $\tilde{\eta}_{m,n} \rightarrow \tilde{\eta}$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible\* , et en utilisant le Lemme 1.6 (Cf. [10]) on a  $\tilde{\eta} \in \tilde{G}(x, \cdot)$  p.p.  $x \in \Omega$ . Maintenant, nous passons à la limite dans (6.46) quand  $m$  et  $n$  tend vers 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \liminf_{m, n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) DT_l(w_{m,n} - \xi) + \int \int_Q \sigma \tilde{\eta} T_l(w - \xi) \\ & \leq \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r) + \int \int_Q \sigma f T_l(w - \xi), \quad \forall l > 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Il nous reste à montrer que

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) DT_l(w_{m,n} - \xi) \geq \int \int_Q \sigma a(x, Dw) DT_l(w - \xi).$$

On procède de la même manière que dans la preuve de la proposition 6.2.2, et donc il suffit de montrer que

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_Q \sigma a(x, Dw_{m,n}) DS(w_{m,n} - \xi) \geq \int_Q \sigma a(x, Dw) DS(w - \xi) \quad \forall S \in \mathcal{P}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_Q \sigma a(x, Dw_{m,n}) DS(w_{m,n} - \xi) &\geq \int_Q \sigma a(x, Dw_{m,n}) Dw S'(w_{m,n} - \xi) \\ &+ \int_Q \sigma a(x, Dw) D(w_{m,n} - w) S'(w_{m,n} - \xi) - \int_Q \sigma a(x, Dw_{m,n}) D\xi S'(w_{m,n} - \xi), \end{aligned} \quad (6.48)$$

et puisque  $S'(w_{m,n} - \xi) \rightarrow S'(w - \xi)$  p.p. sur  $Q$ ,  $Dw_{m,n} \rightharpoonup Dw$  faiblement dans  $[L^p(Q)]^N$  et  $a(x, Dw_{m,n}) \rightarrow \chi$  faiblement dans  $[L^{p'}(Q)]^N$ , nous passons à la limite dans l'inégalité (6.48) nous obtenons

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int_Q \sigma a(x, Dw_{m,n}) DS(w_{m,n} - \xi) \geq \int_Q \sigma(a(x, Dw) Dw - \chi D\xi) S'(w - \xi) \quad (6.49)$$

Pour terminer la preuve du Théorème, nous allons montrer maintenant que

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) Dw_{m,n} \leq \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) Dw. \quad (6.50)$$

Pour cela, nous utilisons la régularisation en temps de  $w$  défini par Landes (Cf. [17]) comme suit :

$$\bar{w}_k(x, t) := k \int_{-\infty}^t e^{k(s-t)} w(x, s) ds$$

pour p.p.  $(x, t)$ , et on prolonge  $w$  par 0 pour  $s < 0$ . On voit que  $\bar{w}_k \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ , de plus, il est différentiable pour p.p.  $t \in (0, T)$  avec  $\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial t} = k(w - \bar{w}_k) \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ ,  $\bar{w}_k(0) = 0$  p.p. dans  $\Omega$ , et  $\bar{w}_k \rightarrow w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Prenons  $\sigma \bar{w}_k$  fonction test dans la définition de la solution du problème  $P^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(u_0, f)$ , alors nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) D\bar{w}_k + \int \int_Q \sigma \eta_{m,n} \bar{w}_k \\ &= \int \int_Q \sigma f \bar{w}_k + \int \int_Q u_{m,n} (\sigma \bar{w}_k)_t. \end{aligned}$$

On fait tendre  $m, n$  vers 0, alors

$$\int \int_Q \sigma \chi D \bar{w}_k = \int \int_Q \sigma f \bar{w}_k + \int \int_Q u(\sigma \bar{w}_k)_t - \liminf_{m, n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma \eta_{m, n} \bar{w}_k. \quad (6.51)$$

Pour le deuxième terme à droite de l'égalité (6.51), on a

$$\begin{aligned} \int \int_Q u(\sigma \bar{w}_k)_t &= \int \int_Q u \sigma_t \bar{w}_k + k \int \int_Q u \sigma (w - \bar{w}_k) \\ &= \int \int_Q u \sigma_t \bar{w}_k + k \int \int_Q \sigma (u - \beta(\bar{w}_k))(w - \bar{w}_k) \\ &\quad + k \int \int_Q \sigma \beta(\bar{w}_k)(w - \bar{w}_k) \end{aligned}$$

et d'après la monotonie de  $\beta$  on a  $(u - \beta(\bar{w}_k))(w - \bar{w}_k) \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \int \int_Q u(\sigma \bar{w}_k)_t &\geq \int \int_Q u \sigma_t \bar{w}_k + k \int \int_Q \sigma \beta(\bar{w}_k)(w - \bar{w}_k) \\ &\geq \int \int_Q u \sigma_t \bar{w}_k + \int \int_Q \sigma \beta(\bar{w}_k)(\bar{w}_k)_t \\ &\geq \int \int_Q u \sigma_t \bar{w}_k - \int \int_Q \sigma_t \int_0^{\bar{w}_k} \beta(r) dr \\ &\geq \int \int_Q \sigma_t \int_0^{\bar{w}_k} r d\beta(r), \end{aligned}$$

nous passons à la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$ , nous obtenons

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int \int_Q u(\sigma \bar{w}_k)_t \geq \int \int_Q \sigma_t \int_0^w r d\beta(r). \quad (6.52)$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\bar{w}_k \in K$ , donc

$$\sigma(\eta_{m, n} - \tilde{\eta}_{m, n})(w_{m, n} - \bar{w}_k) \geq 0 \quad \text{p.p. } Q$$

et d'après la monotonie de  $r \rightarrow \tilde{G}(x, r)$ ,  $r \rightarrow (r - M(x))^+$ ,  $r \rightarrow -(r - m(x))^-$ ,  $r \rightarrow r^+$  et  $r \rightarrow -r^-$ , on a

$$\begin{aligned} \int \int_Q \sigma \eta_{m, n} \bar{w}_k &= \int \int_Q \sigma \tilde{\eta}_{m, n} \bar{w}_k + \int \int_Q \sigma (\eta_{m, n} - \tilde{\eta}_{m, n}) \bar{w}_k \\ &= \int \int_Q \sigma \tilde{\eta}_{m, n} \bar{w}_k + \int \int_Q \underbrace{\sigma (\eta_{m, n} - \tilde{\eta}_{m, n}) (\bar{w}_k - w_{m, n})}_{\leq 0} \\ &\quad + \int \int_Q \sigma (\eta_{m, n} - \tilde{\eta}_{m, n}) w_{m, n} \\ &\leq \int \int_Q \sigma \tilde{\eta}_{m, n} \bar{w}_k + \int \int_Q \sigma (\eta_{m, n} - \tilde{\eta}_{m, n}) w_{m, n} \end{aligned} \quad (6.53)$$

donc

$$\liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma \eta_{m,n} \bar{w}_k \leq \int \int_Q \sigma \tilde{\eta} \bar{w}_k + \liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma (\eta_{m,n} - \tilde{\eta}_{m,n}) w_{m,n}. \quad (6.54)$$

Maintenant, nous passons à la limite dans (6.51) lorsque  $k \rightarrow \infty$  et nous utilisons (6.52), (6.54) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \int_Q \sigma \chi Dw &\geq \int \int_Q \sigma f w + \int \int_Q \sigma_t \int_0^w r d\beta(r) - \int \int_Q \sigma \tilde{\eta} w \\ &\quad - \liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma (\eta_{m,n} - \tilde{\eta}_{m,n}) w_{m,n}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

D'autre part, nous appliquons le Lemme 6.3.3 au problème  $P^{\beta_{m,n}, G_{m,n}}(u_0, f)$ , nous déduisons que

$$\begin{aligned} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) Dw_{m,n} &= \int \int_Q \sigma f w_{m,n} \\ &\quad + \int \int_Q \sigma_t \int_0^{w_{m,n}} r d\beta_{m,n}(r) - \int \int_Q \sigma \eta_{m,n} w_{m,n}. \end{aligned}$$

Nous passons à la limite quand  $m, n \rightarrow 0$ , donc on a

$$\begin{aligned} \liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) Dw_{m,n} &= \int \int_Q \sigma f w + \int \int_Q \sigma_t \int_0^w r d\beta(r) \\ &\quad - \int \int_Q \sigma \tilde{\eta} w - \liminf_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma (\eta_{m,n} - \tilde{\eta}_{m,n}) w_{m,n} \end{aligned}$$

ainsi, nous utilisons (6.55) ce qui entraîne que

$$\int \int_Q \sigma \chi Dw \geq \lim_{m,n \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw_{m,n}) Dw_{m,n}.$$

D'où (6.50) est satisfaite. Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\blacksquare$

**Remarque 9** *On suppose que  $\mathcal{D}(G(x, \cdot)) = \mathbb{R}$  pour p.p.  $x \in \Omega$ . Alors, si  $u$  est une solution faible du problème  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$ ,  $u$  est aussi solution au sens du Théorème 6.3.2 .*

## 6.4 Unicité de la solution

Pour montrer l'unicité, nous utilisons le concept des solutions intégrales, qui est bien connu dans le contexte du problème de Cauchy abstrait (Cf. [7]). Cette notion de solution a été précédemment utilisée dans [8] pour démontrer l'unicité de la solution faible du problème elliptique-parabolique, avec des conditions Dirichlet homogènes au bord.

**Définition 6.4.1** *On dit que la fonction  $u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$  est une solution intégrale du problème  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$  si pour tout  $\tilde{f} \in \mathcal{A}_{\beta, G}\tilde{u}$ , on a*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(t) - \tilde{u}| \leq \int_{\Omega} (f - \tilde{f}) \text{Sign}_0(u(t) - \tilde{u}) + \int_{[u(t)=\tilde{u}]} |f - \tilde{f}| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T),$$

et  $u(0) = u_0$ .

Sous les hypothèses précédentes,  $\mathcal{A}_{\beta, G}$  est accréatif dans  $L^1(\Omega)$ , il est bien connu (Cf. [7], [8]) que les *bonnes solutions* et les solutions intégrales du problème  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$  coïncident. Pour montrer l'unicité, nous prouverons dans la proposition 6.4.1 que la solution du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  est une solution intégrale de  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$ . Par conséquent, d'après la théorie des semigroupes non linéaires (Cf. [8]), la *bonne solution* de  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  est l'unique solution du problème  $P^{\beta, G}(u_0, f)$ .

**Proposition 6.4.1** *Soient  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $f \in L^\infty(Q)$ . Si  $u \in L^\infty(Q)$  est une solution de  $P^{\beta, G}(u_0, f)$  au sens du théorème 6.3.2, alors  $u$  est une solution intégrale du problème  $CP^{\beta, G}(u_0, f)$ .*

**Preuve.** D'après le Théorème 6.3.2, on a

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma \eta T_l(w - \xi) \\ & \leq \int \int_Q \sigma f T_l(w - \xi) + \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} T_l(r - \xi) d\beta(r) \end{aligned} \quad (6.56)$$

pour tout  $\xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K$ ,  $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$  avec  $\sigma \geq 0$ , où  $\eta \in G(\cdot, u)$  et  $u = \beta(w)$  p.p.  $Q$ . Soit  $\hat{f} \in \mathcal{A}_{\beta, G}\hat{u}$  et  $\hat{\eta} \in G(\cdot, \hat{u})$ ,  $\hat{u} = \beta(\hat{w})$  p.p.  $\Omega$  données par la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta, G}$ . Prenons  $\hat{w}$  comme fonction test dans (6.56) et multiplions l'inégalité par  $\frac{1}{l}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int \int_Q \sigma a(\cdot, Dw) D \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w}) + \int \int_Q \sigma \eta \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w}) \\ & \leq \int \int_Q \sigma_t \int_{w_0}^{w(t)} \frac{1}{l} T_l(r - \hat{w}) d\beta(r) + \int \int_Q \sigma f \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w}). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Passons à la limite lorsque  $l \rightarrow 0$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{w_0}^{w(x,t)} \frac{1}{l} T_l(r - \hat{w}(x)) d\beta(r) &\rightarrow \int_{w_0}^{w(x,t)} \text{Sign}_0(r - \hat{w}(x)) d\beta(r) \\ &= |u(x,t) - \beta(\hat{w}(x))| - |u_0(x) - \beta(\hat{w}(x))| \end{aligned}$$

p.p.  $(t,x) \in Q$ . De plus,

$$\left| \int_0^{w(x,t)} \frac{1}{l} T_l(r - \hat{w}(x)) d\beta(r) \right| \leq |u(x,t)|.$$

En utilisant le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, le premier terme de droite de l'inégalité (6.57) converge vers  $\int \int_Q (|u(x,t) - \beta(\hat{w})| - |u_0 - \beta(\hat{w})|) \sigma_t$ .

Et on a,  $\int \int_Q f \sigma \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w})$  et  $\int \int_Q \sigma \eta \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w})$  converges, respectivement, vers  $\int \int_Q f \sigma \text{Sign}_0(w - \hat{w})$  et  $\int \int_Q \sigma \eta \text{Sign}_0(w - \hat{w})$ . Quand au premier terme de l'inégalité (6.57), nous utilisons la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\beta,G}$  donc

$$\int \int_Q \sigma a(., Dw) D \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w}) \geq I_l^1 + I_l^2, \quad \text{où}$$

$$I_l^1 = \int \int_Q \sigma (a(., Dw) - a(., D\hat{w})) D \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w})$$

et

$$I_l^2 = \int \int_Q \tilde{f} \sigma \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w}) - \int \int_Q \sigma \hat{\eta} \frac{1}{l} T_l(w - \hat{w})$$

avec  $\hat{\eta} \in G(., \hat{u})$  p.p.  $\Omega$ . On voit que  $I_l^2$  converge vers

$$\int \int_Q \tilde{f} \sigma \text{Sign}_0(w - \hat{w}) - \int \int_Q \sigma \hat{\eta} \text{Sign}_0(w - \hat{w}),$$

d'autre part, on a

$$\liminf_{l \rightarrow 0} I_l^1 \geq \lim_{l \rightarrow 0} \int \int_Q \sigma \frac{1}{l} T'_l(w - \hat{w}) (a(., Dw) - a(., D\hat{w})) D(w - \hat{w}) = 0.$$

On fait tendre  $l \rightarrow 0$  dans (6.57), on obtient

$$\begin{aligned} &- \int \int_Q (|u(x,t) - \beta(\hat{w})| - |u_0(x) - \beta(\hat{w})|) \sigma_t + \int \int_Q |\eta - \hat{\eta}| \sigma \\ &\leq \int \int_Q \sigma (f - \tilde{f}) \text{Sign}_0(w - \hat{w}) \\ &\leq \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \sigma (f - \tilde{f}) \text{Sign}_0(u(t) - \beta(\hat{w})) + \int_{[u(t)=\beta(\hat{w})]} \sigma |f - \tilde{f}| \right\} \end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout  $t \in [0, T)$ , on a

$$\int_{\Omega} |u(t) - \hat{u}| \leq \int_{\Omega} |u_0 - \hat{u}| + \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} (f - \tilde{f}) \text{Sign}_0(u(t) - \hat{u}) + \int_{[u(t)=\hat{u}]} |f - \tilde{f}| \right\}.$$

Ce qui termine la preuve de la Proposition. ■



# Bibliographie

- [1] H. W. ALT AND S. LUCKHAUS, *Quasilinear elliptic-parabolic Differential Equation*, Math. Z. 183, 311-341 (1983).
- [2] K. AMMAR, P. WITTBOLD, *Existence of renormalized solution of degenerate elliptic-parabolic problems*, In preparation
- [3] F. ANDREU , J.M. MAZON , J.TOLED0,  $L^1$  *Stabilization of solutions of the filtration equation with absorption and non-linear flux*, NODEA 2(1995) 267-289
- [4] F. ANDREU , N. IGBIDA , J.M. MAZON , J.TOLED0,  $L^1$  *existence and uniqueness results for quasi - linear equations with nonlinear boundary conditions* , To appear (2005) .
- [5] C. BAIOCCHI, and A. CAPELO. *Variational and quasivariational inequalities.*, J.Wiley, chichester, New York, 1984.
- [6] PH.BENILAN, L.BOCCARDO, TH.GALLOUET, R.GARIEPY, M.PIERRE AND J.L. VAZQUEZ, *An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2):241-273, 1995.
- [7] PH. BENILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications* , Thesis,Univ. Orsay, 1972.
- [8] P. WITTBOLD, *Nonlinear Diffusion with Absorption* , Potential Anal. 7 (1997), 437-465
- [9] PH. BENILAN , M. G. CRANDALL , A. PAZY , *Evolution Equations Governed by Accretive Operators* , Book to appear
- [10] PH. BENILAN, P. WITTBOLD, *Absorption non linéaire* , J. Func. Anal. 114 (1993), 59-96.
- [11] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* , Oxford Univ. Press, Oxford, 1984.
- [12] H. BREZIS , *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité* , Ann.Inst. Fourier 18(1968), Fasc. 1, 115-175.
- [13] L.BOCCARDO, A.DALL'AGLIO, TH.GALLOUET, L.ORSINA, *nonlinear parabolic equations with measure data* ,J. Funct. Anal. 147, 237-258 (1997)

- [14] K.C. CHANG . Free boundary problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities, *Comm. Pure and Appl. Math*, XXXIII (1980), 117–146.
- [15] N.IGBIDA, F.KARAMI, *Some competition Phenomena in Evolution Equations* , Soumis
- [16] D. Kinderlehrer, and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications, *Academic press, New York*, 1997.
- [17] R.LANDES, *On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic initial boundary-value problems* , Proc. Royal Soc. Edinburgh. 217-237 (1981).
- [18] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de Résolution des problèmes aux Limites non Linéaires* , Paris: Dunod (1969).
- [19] F. MIGNOT, J. P. PUEL ,*Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution*, Archive for Rational Mechanics and Analysis.,64, 59 - 91 (1977)
- [20] F. OTTO,  *$L^1$ -contraction and uniqueness for quasi-linear elliptic-parabolic equation* , C. R. Acad. Sci. Paris 318, Série I, 1005-1010(1995).
- [21] J.F. RODRIGUES , *Obstacle problems in mathematical physics* . Mathematics Studies , 134, North-Holland Publishing Amsterdam, 1987.
- [22] K. SBIHI, P. WITTBOLD, *Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans  $L^1$  avec des conditions générales sur le bord*, Thèse, Université Louis Pasteur(Strasbourg I) 2006.
- [23] P. WITTBOLD, *Nonlinear diffusion with absorption*, 4(1996)142-157.

---

## Chapitre 7

# Compétition dans un problème de Réaction Diffusion localisée

## 7.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solution du problème elliptique-parabolique lorsque  $r$  et/ou  $d$  deviennent grands. On considère l'EDP suivante:

$$P_a^{d,r}(u_0, f) \begin{cases} u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) + r g(x, u) = f, & u = \beta(w) & \text{sur } Q := (0, T) \times \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Sigma := (0, T) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 & & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  est un domaine borné de frontière lipschitzienne  $\Gamma$ ,  $\vec{n}$  est le vecteur normale unitaire extérieur à  $\Omega$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^\infty(Q)$  et  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue croissante avec  $\beta(0) = 0$  et

$$(H_4) \quad \operatorname{Im}(\beta) = \mathbb{R}.$$

et  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que

$$(H_g) \quad \begin{array}{l} \text{pour p.p. } x \in \Omega, s \rightarrow g(x, s) \text{ est continue, croissante} \\ \text{et pour tout } s \in \mathbb{R}, g(\cdot, s) \in L^1(\Omega) \text{ avec } g(\cdot, 0) \equiv 0. \end{array}$$

et le champ  $\mathbf{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  satisfait les hypothèses  $(H_1) - (H_3)$  du type Leray-Lions (Cf. [3], [16]) énoncées au chapitre précédent.

L'existence et l'unicité de la solution faible du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$  ont été étudiées dans le chapitre précédent. Dans le problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ ,  $d > 0$  et  $r > 0$  représente respectivement le coefficient de diffusion et de réaction. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution lorsque les coefficients  $d$  et/ou  $r$  deviennent très grands (Cf. [2], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [18], [20], [21]). Le cas où la fonction  $g$  est indépendante de l'espace et le champ  $\mathbf{a}(x, \xi) = \xi$  a été étudié dans le Chapitre 3.

Si on suppose que  $d > 0$  et  $r \rightarrow \infty$ , alors formellement le problème limite est

$$P_a^{d,\infty}(\cdot, f) \begin{cases} u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) + G(x, u) = f, & u = \beta(w) & \text{sur } Q \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (7.1)$$

où, pour p.p.  $x \in \Omega$ ,  $G(x, \cdot)$  est un graphe maximal monotone donné par

$$G(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } m(x) < r < M(x) \\ [0, +\infty) & \text{si } r = M(x) \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = m(x) \end{cases} \quad \text{p.p. } \Omega.$$

qui s'écrit encore sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq u \leq M, \quad u = \beta(w) \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f)(u - m)(u - M) = 0 \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f) \geq 0 \text{ sur } [u = m] \\ (u_t - d \operatorname{div} a(x, Dw) - f) \leq 0 \text{ sur } [u = M] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sur } Q \\ \text{dans } \Sigma \end{array}$$

est appelé problème d'obstacle. Il vient du chapitre précédent que si  $m(x) \leq u_0(x) \leq M(x)$  p.p.  $x \in \Omega$ . Alors, (7.1) admet une unique solution au sens suivant:  $u \in \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  telle qu' il existe  $w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ ,  $u = \beta(w)$  p.p.  $Q$  et

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^w T_l(r - \xi) d\beta(r) + d \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) \\ & \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall l > 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap K$ .

Pour  $r > 0$  et  $d \rightarrow \infty$ , alors le problème limite est l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$c_t + r \int_{\Omega} g(x, c) dx = \int_{\Omega} f \quad \text{sur } (0, T) \quad (7.3)$$

Finalement, si on suppose que  $d \rightarrow \infty$  et  $r \rightarrow \infty$ , qui correspond à la compétition entre la réaction et la diffusion lorsque ils deviennent très grandes. Pour  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$  le problème limite est l' équation différentielle ordinaire suivante:

$$c_t + G_{\infty}(c) \ni \int_{\Omega} f \quad \text{sur } (0, T) \quad (7.4)$$

où  $G_{\infty}$  est le graphe maximal monotone défini par

$$G_{\infty}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [m_0, M_0] \\ (-\infty, 0] & \text{si } s = m_0 \\ [0, +\infty) & \text{si } s = M_0. \end{cases}$$

avec

$$m_0 = \min \left( \bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)] \right) \quad \text{et} \quad M_0 = \max \left( \bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)] \right).$$

Il est clair, que en général la donnée initiale  $u_0$  est incompatible avec les problèmes limites (7.1), (7.3) et (7.4). Ainsi, un phénomène de *couche limite* apparaît au voisinage de  $t = 0$  (Cf. [5], [4], [9]). Pour l'identification des données initiales correspondantes aux problèmes limites nous utiliserons les résultats du chapitre 3, par conséquent nous allons traiter séparément le cas où  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0$  dans le dernier problème.

Ce chapitre est une généralisation des résultats du chapitre 3 au cas d'un opérateur de type Leray-Lions et une absorption qui dépend de l'espace.

## 7.2 Résultats principaux

**Théorème 7.2.1** Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $u^{d,r}$  la solution du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ .

1. Grande diffusion : Pour tout  $r > 0$ , lorsque  $d \rightarrow \infty$ , on a  $u^{d,r} \rightarrow c$  dans  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$ , avec  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  est l'unique solution de l'EDO,

$$\begin{cases} c_t + r \int_{\Omega} g(x, c) = \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (7.5)$$

2. Forte réaction : Pour  $d > 0$  et lorsque  $r \rightarrow \infty$ , on a  $u^{d,r} \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$ , avec  $u$  est l'unique solution entropique du problème d'obstacle (7.1) avec  $u(0) = m \vee (u_0 \wedge M)$  p.p. dans  $\Omega$ .

3. Compétition réaction et diffusion: Si  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , ou  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , alors

$$u^{d,r} \rightarrow c \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$$

où  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  est solution de l'EDO

$$c_t + G_\infty(c) \ni \int_{\Omega} f \quad \text{dans } (0, T),$$

avec

$$(a) \text{ Si } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0, \text{ alors } c(0) = m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0),$$

$$(b) \text{ Si } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty, \text{ alors } c(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \text{ avec } z \text{ est la solution du problème d'obstacle } P_a^{d, \infty}(z_0, 0) \text{ où } z_0 = m \vee (u_0 \wedge M), \text{ p.p. } \Omega.$$

D'après le Chapitre précédent, la solution faible du problème  $P_a^{d, r}(u_0, f)$  est aussi bonne solution du problème de Cauchy suivant

$$CP_a^{d, r}(u_0, f) \begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d, r} u = f & \text{sur } [0, T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

avec,  $\overline{\mathcal{A}^{d, r}}$  est un opérateur m-T-accréatif et  $\mathcal{A}^{d, r}$  défini dans  $L^1(\Omega)$  par

$$f = \mathcal{A}^{d, r} v \Leftrightarrow \begin{cases} v, f \in L^{p'}(\Omega), g(\cdot, v) \in L^{p'}(\Omega), \exists w \in W^{1, p}(\Omega), v = \beta(w) \text{ p.p. } \Omega \text{ et} \\ d \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) D\xi + r \int_{\Omega} g(x, v) \xi = \int_{\Omega} f \xi, \text{ pour tout } \xi \in W^{1, p}(\Omega). \end{cases}$$

De plus,  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d, r})} = L^1(\Omega)$  voir le Lemme 6.3.1 (Cf. Chapitre 6) .

Examinons maintenant le comportement asymptotique lorsque  $d$  et/ou  $r$  tends vers  $\infty$  de la solution du problème stationnaire associé a  $P_a^{d, r}(u_0, f)$  défini par

$$S_a^{d, r}(f) \begin{cases} v - d \operatorname{div} a(x, Dw) + r g(x, v) = f, & v = \beta(w) \quad \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

**Théorème 7.2.2** Soit  $f \in L^\infty(\Omega)$  et  $v^{d, r}$  la solution du problème  $S_a^{d, r}(f)$ .

1. Si  $d = d(k)$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \infty$ , alors

$$v^{d, r} \longrightarrow (\mathbb{I}_{\mathbb{R}} + r \int_{\Omega} g(x, \cdot) dx)^{-1} \left( \int_{\Omega} f \right) \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

2. Si  $r = r(k)$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , alors  $v^{d,r} \rightarrow v$  dans  $L^1(\Omega)$  et  $v$  est l'unique solution du problème elliptique

$$\begin{cases} v - d \operatorname{div} a(x, Dw) + G(x, v) \ni f, & v = \beta(w) & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0, & & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

au sens de la Proposition 6.2.2 du Chapitre 6 .

3. Si  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , alors

$$v^{d,r} \longrightarrow (\mathbb{I}_{\mathbb{R}} + G_{\infty})^{-1} \left( \int_{\Omega} f \right) \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

**Remarque 10** .  $(\mathbb{I}_{\mathbb{R}} + G_{\infty})^{-1} \left( \int_{\Omega} f \right) = m_0 \vee \left( \int_{\Omega} f \wedge M_0 \right)$ .

**Preuve du Théorème 7.2.2:** Puisque  $d$  et/ou  $r$  dépendent de  $k$ , alors on note par  $v_k$  (respectivement  $w_k$ ) la suite  $v^{d,r}$  (respectivement  $w^{d,r}$ ). D'après la Proposition 6.2.1 (Cf. Chapitre 6) on a  $v_k$  et  $w_k$  sont bornées dans  $L^{\infty}(\Omega)$  de plus  $w_k$  est bornée dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Alors,  $w_k$  est faiblement relativement compact dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et puisque  $\beta$  est continue alors  $v_k$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ . Donc, il existe une sous suite notée encore par  $k$ , telle que  $v_k \rightarrow v$  dans  $L^1(\Omega)$ ,  $w_k \rightarrow w$  fortement dans  $L^1(\Omega)$  et faiblement dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et  $v = \beta(w)$  p.p. $\Omega$ . Nous allons traiter séparément les différents cas du théorème pour pouvoir caractériser  $u$  et  $w$ .

1. D'après la Proposition 6.2.1 (Cf. Chapitre 6), on a

$$d(k) \int_{\Omega} |Dw_k|^p \leq \frac{C_1(\Omega, p, N, \|f\|_{\infty})}{\alpha},$$

alors, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\int_{\Omega} |Dw|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Dw_k|^p = 0,$$

d'où les fonctions  $v$  et  $w$  sont constantes. Prenons  $\xi \equiv 1$  comme fonction test et passons à la limite il vient que  $v$  vérifie  $v + r \int_{\Omega} g(x, v) dx = \int_{\Omega} f$ . ce qui termine la preuve de la première partie du théorème.

2. Conséquence immédiate du corollaire 6.3.1 (Cf. Chapitre 6 ).  
 3. Puisque

$$d(k) \int_{\Omega} |Dw_k|^p \leq \frac{C_1(\Omega, p, N, \|f\|_{\infty})}{\alpha},$$

alors  $v$  et  $w$  sont constantes. De plus,  $g(\cdot, 0) = \beta(0) = 0$  alors la Proposition 6.2.1 nous donne

$$|v_k|_{L^1(\Omega)} + r(k)|g(\cdot, v_k)|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^1(\Omega)}$$

donc lorsque  $k \rightarrow \infty$  on a  $g(\cdot, v_k) \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Omega)$ , par suite,  $g(\cdot, v) = 0$  et  $v \in [m(x), M(x)]$  p.p.  $\Omega$ , or  $v$  est une constante donc  $v \in \bigcap_{x \in \Omega} [m(x), M(x)]$ .

Soit  $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$  et prenons  $(w_k - \xi)$  comme fonction test dans la définition de la solution du problème  $S_a^{d,r}(f)$  alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_k(w_k - \xi) + d(k) \int_{\Omega} a(x, Dw_k)D(w_k - \xi) \\ + r(k) \int_{\Omega} g(\cdot, v_k)(w_k - \xi) = \int_{\Omega} f(w_k - \xi). \end{aligned}$$

D'autre part, on prend  $\xi$  constante telle que  $\xi \in K$ , alors  $\beta(\xi) \in [m_0, M_0]$ , d'où  $g(x, \beta(\xi)) = \mathbf{a}(x, 0) = 0$  p.p.  $x \in \Omega$  et il vient de la monotonie de  $a, \beta, g$  que

$$\int_{\Omega} g(\cdot, v_k)(w_k - \xi) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} a(\cdot, Dw_k)D(w_k - \xi) \geq 0$$

on obtient que

$$\int_{\Omega} v_k(w_k - \xi) \leq \int_{\Omega} f(w_k - \xi)$$

on passe à la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on trouve que

$$(w - \xi)(v - \int_{\Omega} f) \leq 0.$$

– Si  $\xi \in \beta^{-1}(m_0)$  alors on a

$$(v - m_0)(v - \int_{\Omega} f) \leq 0.$$

De plus  $v \in [m_0, M_0]$  donc soit  $v = m_0$  ou bien  $v > m_0$  et dans ce cas  $v - \int_{\Omega} f \leq 0$ .

– Si  $\xi \in \beta^{-1}(M_0)$  alors on a

$$(v - M_0)(v - \int_{\Omega} f) \leq 0.$$

Donc soit  $v = M_0$  ou bien  $v < M_0$  et dans ce cas  $v - \int_{\Omega} f \geq 0$ .

Finalement, on obtient que

$$v + G_\infty(v) \ni \int_{\Omega} f.$$

Ce qui termine la preuve du théorème. ■

Conséquence immédiate de ce théorème est le Corollaire suivant:

**Corollaire 7.2.1** 1. Pour tout  $r > 0$ , lorsque  $d \rightarrow \infty$ , alors l'opérateur  $\mathcal{A}^{d,r}$  converge vers l'opérateur  $T$ -accrétif  $\mathcal{A}^{\infty,r}$  défini, dans  $L^1(\Omega)$ , par

$$f \in \mathcal{A}^{\infty,r}v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega), v \equiv c, c \in \mathbb{R} \text{ et } r \int_{\Omega} g(x, c) dx = \int_{\Omega} f.$$

2. Pour tout  $d > 0$ , lorsque  $r \rightarrow \infty$ , alors on a  $\mathcal{A}^{d,r}$  converge vers l'opérateur  $T$ -accrétif  $\mathcal{A}^{d,\infty}$  défini, dans  $L^1(\Omega)$ , par

$$f \in \mathcal{A}^{d,\infty}v \Leftrightarrow \begin{cases} v, f \in L^{p'}(\Omega), \exists w \in W^{1,p}(\Omega), v = \beta(w) \text{ p.p. } \Omega \text{ et} \\ d \int_{\Omega} a(\cdot, Dw) DT_l(w - \xi) \leq \int_{\Omega} f T_l(w - \xi) \quad \forall l > 0, \\ \text{pour tout } \xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K. \end{cases}$$

3. Si  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ , alors  $\mathcal{A}^{d,r}$  converge vers l'opérateur  $T$ -accrétif  $\mathcal{A}^\infty$ , défini par

$$f \in \mathcal{A}^\infty v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega), v \equiv c, c \in \mathbb{R} \text{ et } \int_{\Omega} f \in G_\infty(c).$$

On voit que l'opérateur  $\mathcal{A}^{d,r}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}^{d,r} = dA + rB \tag{7.6}$$

avec  $A = \mathcal{A}^{1,0}$  et  $B : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  est défini par  $B u(x) = g(x, u(x))$  p.p.  $\Omega$  où

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ u \in L^1(\Omega); g(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(\Omega) \right\},$$

et  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ .

**Lemme 7.2.1** Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a  $\varepsilon A + B \rightarrow B$ , au sens de la résolvante.

**Preuve:** Pour  $f \in L^\infty(\Omega)$ , on considère  $u_\varepsilon$  la solution du problème

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon \operatorname{div} a(x, Dw_\varepsilon) + g(x, u_\varepsilon) = f & u_\varepsilon = \beta(w_\varepsilon) & \text{sur } \Omega \\ a(x, Dw_\varepsilon) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (7.7)$$

Nous utilisons les mêmes argument du lemme 6.3.5 (Chapitre. 6) et nous montrons que

$$\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^p \leq \frac{C(\|f\|_\infty, \beta)}{\varepsilon \alpha} := \frac{C_4}{\varepsilon},$$

$$\left( \int_{\Omega} |\varepsilon a(\cdot, Dw)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \sigma \left( \varepsilon \|k\|_{L^{p'}(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} C_4^{\frac{1}{p'}} \right),$$

d'où  $\varepsilon a(\cdot, Dw_\varepsilon)$  est bornée dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$ ,  $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $\|w_\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^\infty(\Omega)})$ . Alors  $\varepsilon a(\cdot, Dw_\varepsilon)$  converge faiblement vers 0 dans  $[L^{p'}(\Omega)]^N$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus, nous passons à la limite dans la formulation faible du problème (7.7) et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon)) \xi = \int_{\Omega} f \xi$$

alors lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a  $u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon) \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$ -faible, de plus  $\|u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$ , on déduit que  $u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon)$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^{p'}(\Omega)$  par conséquent  $L^1(\Omega)$ . D'autre part, soit  $u \in L^1(\Omega)$  telle que  $u + g(\cdot, u) = f$ , alors on a

$$u_\varepsilon - u = u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon) - f - (g(\cdot, u_\varepsilon) - g(\cdot, u))$$

et donc

$$|u_\varepsilon - u|_{L^1(\Omega)} \leq |u_\varepsilon + g(\cdot, u_\varepsilon) - f|_{L^1(\Omega)}.$$

Nous passons à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons  $u_\varepsilon$  converge vers  $u := (I + B)^{-1} f$  dans  $L^1(\Omega)$ . Ce qui termine la preuve. ■

**Lemme 7.2.2** *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a  $A + \varepsilon B \rightarrow A$ , au sens de la résolvante.*

**Preuve:** Puisque,  $r \rightarrow g(\cdot, r)$  est continue croissante, alors d'après la Remarque 3.2.1 (Cf. Chapitre 3) l'opérateur  $B$  est strictement accréitif et  $A + \varepsilon B \rightarrow A$ , au sens de la résolvante. ■

**Proposition 7.2.1** 1.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d, \infty})} = \left\{ z \in L^1(\Omega) ; m(x) \leq z(x) \leq M(x) \text{ p.p. } \Omega \right\}$ .  
2.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty, r})} = \mathbb{R}$ .

3.  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)} = [m_0, M_0]$ .

**Preuve :**

1. Conséquence du lemme 6.3.5 (Cf. Chapitre 6).
2. D'après  $(H_g)$  on a pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow g(x, s)$  est dans  $L^1(\Omega)$ . Alors, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $r \int_{\Omega} g(x, c) dx$  est bien défini et il existe  $f \in L^1(\Omega)$ , telle que  $\int_{\Omega} f = r \int_{\Omega} g(x, c) dx$ , alors  $f \in \mathcal{A}^{\infty, r}(c)$  et  $\mathcal{A}^{\infty, r}(c) \neq \emptyset$ .
3. On voit que  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)} \subseteq [m_0, M_0]$ . Maintenant, pour  $c \in [m_0, M_0]$ ,  $G_\infty(c)$  est non vide et pour tout  $e \in G_\infty(c)$ , il existe  $f \in L^1(\Omega)$ , telle que  $\int_{\Omega} f = e$ , alors  $f \in \mathcal{A}^\infty(c)$  et on déduit que  $\mathcal{A}^\infty(c) \neq \emptyset$ , et  $c \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)$ . ■

Pour la preuve du résultat concernant la forte réaction et afin d'appliquer le Théorème 3.2.2 (Cf. chapitre 3), nous allons étudier le comportement asymptotique lorsque  $t \rightarrow \infty$  de la solution du problème d'obstacle  $P_a^{d, \infty}$ . Nous rappelons que,  $[m_0, M_0]$  est inclu dans l'ensemble des solutions stationnaires du problème  $P_a^{d, \infty}$ , c'est à dire que pour tout  $z$  tel que  $m_0 \leq z \leq M_0$  et  $\forall t \geq 0$  on a  $e^{-t\mathcal{A}^{d, \infty}} z = z$ . En effet, puisque  $m_0 \leq z \leq M_0$  alors on vérifie facilement que  $(I + \varepsilon\mathcal{A}^{d, \infty})^{-1} z = z$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , alors

$$e^{-t\mathcal{A}^{d, \infty}} z = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{t}{n} \mathcal{A}^{d, \infty} \right)^{-n} z = z.$$

**Proposition 7.2.2** *Soit  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $\underline{u}_0(x) := m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x))$  p.p.  $\Omega$ . Alors, il existe une unique constante  $v \in [m_0, M_0]$  telle que*

$$e^{-t\mathcal{A}^{d, \infty}} \underline{u}_0 \rightarrow v \quad \text{dans } L^1(\Omega), \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Pour montrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant:

**Lemme 7.2.3** *1. Pour tout sous ensemble borné  $B$  de  $L^\infty(\Omega)$  on a  $(I + \varepsilon\mathcal{A}^{d, \infty})^{-1}(B)$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ .*

*2. Pour tout  $z_0 \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $m(x) \leq z_0(x) \leq M(x)$  p.p.  $x \in \Omega$ , l'orbite  $\gamma(z_0) = \left\{ e^{-t\mathcal{A}^{d, \infty}} z_0 : t \geq 0 \right\}$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ .*

**Preuve.**

1. Prenons  $(f_n) \subset B$  et soit  $v_n = (I + \varepsilon\mathcal{A}^{d, \infty})^{-1} f_n$ . La fonction  $v_n$  est obtenue en passant à la limite dans  $S_a^{d, r}(f_n)$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  donc  $\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Puisque  $f_n$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  alors  $v_n$  l'est aussi et en utilisant le fait

que  $Im(\beta) = \mathbb{R}$  nous déduisons que  $w_n$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ . D'autre part prenons  $\xi = 0$  comme fonction test dans la définition de la solution du problème  $S_a^{d,\infty}(f_n)$  et d'après la monotonie de  $a, g, \beta$ , la propriété  $(H_1)$  et  $(H_2)$  nous obtenons

$$\alpha \int_{\Omega} |Dw_n|^p dx \leq \int_{\Omega} w_n f_n \leq \|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \|f_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

d'où  $w_n$  est bornée dans  $W^{1,p}(\Omega)$  par suite  $w_n$  converge vers  $w$  dans  $L^p(\Omega)$  alors  $v_n = \beta(w_n)$  converge vers  $v = \beta(w)$  dans  $L^1(\Omega)$ . Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé on a  $(I + \varepsilon \mathcal{A}^{d,\infty})^{-1}(B)$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ .

2. Il vient que

$$\|e^{-t \mathcal{A}^{d,\infty}} z_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \|e^{-t \mathcal{A}^{d,r}} z_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|z_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

D'après 1) on a  $(I + \varepsilon \mathcal{A}^{d,\infty})^{-1}(\gamma(z_0))$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ . D'autre part, on a

$$\|e^{-t \mathcal{A}^{d,\infty}} z_0 - (I + \varepsilon \mathcal{A}^{d,\infty})^{-1}(e^{-t \mathcal{A}^{d,\infty}} z_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \inf \left\{ \|v\|_{L^1(\Omega)} : v \in \mathcal{A}^{d,\infty} z_0 \right\}.$$

On déduit que  $\gamma(z_0)$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ . Ce qui nous donne le résultat désiré. ■

Pour tout  $z_0 \in L^1(\Omega)$  telle que  $m(x) \leq z_0(x) \leq M(x)$  p.p.  $x \in \Omega$ , on définit l'ensemble  $\omega$ - limite de  $z_0$  par

$$\omega(z_0) = \left\{ v \in L^1(\Omega); v = L^1 - \lim_{t_n \rightarrow \infty} e^{-t_n \mathcal{A}^{d,\infty}} z_0 \quad \text{pour des suites } t_n \rightarrow \infty \right\}$$

**Remarque 11** *Il est possible que cette ensemble soit vide et il est bien connu que si  $\gamma(z_0)$  est relativement compact alors  $\omega(z_0)$  est un sous ensemble compact et non vide de  $L^1(\Omega)$ , alors il vient du lemme 7.2.3 que pour tout  $z_0 \in L^\infty(\Omega)$  on a  $\omega(z_0) \neq \emptyset$ . De plus,  $\omega(z_0) \subseteq [m_0, M_0]$ .*

**Preuve de la Proposition 7.2.2 .** Soit  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  alors ils existent  $u \in L^\infty(Q)$ ,  $w \in L^p(0, T, W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$  telles que  $u = \beta(w)$  p.p.  $\Omega$  et  $u(t) = e^{-t \mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0$ . Puisque  $u, w$  sont obtenus en passant à la limite dans le problème  $P_a^{d,r}(\underline{u}_0, 0)$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , d'après le Théorème 6.3.1 (Cf. Chapitre 6) on a

$$\int_0^\infty \int_{\Omega} |Dw|^p \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\Omega} |Dw^{d,r}|^p \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} j(\underline{u}_0).$$

Alors, il existe une suite  $t_n \rightarrow \infty$  telle que  $\int_{\Omega} |Dw(t_n)|^p \rightarrow 0$  et  $w(t_n)$  est bornée dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , lorsque  $t_n \rightarrow \infty$ . Nous utilisons le Lemme 7.2.3, il existe une sous suite  $(t_{n_p})$  telle que, lorsque  $t_{n_p} \rightarrow \infty$ , on a  $u(t_{n_p}) \rightarrow v$  dans  $L^1(\Omega)$ ,  $w(t_{n_p}) \rightarrow \underline{w} := c$  faiblement dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , fortement dans  $L^p(\Omega)$  et  $v = \beta(\underline{w})$  p.p. dans  $\Omega$ , d'où  $v$  est constante et  $v \in [m_0, M_0]$ . D'autre part, pour tout  $t \geq t_{n_p}$ , on a

$$\begin{aligned} \|e^{-t\mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0 - v\|_{L^1(\Omega)} &= \|e^{-(t-t_{n_p})\mathcal{A}^{d,\infty}} e^{-t_{n_p}\mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0 - v\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \|e^{-(t-t_{n_p})\mathcal{A}^{d,\infty}} e^{-t_{n_p}\mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0 - e^{-(t-t_{n_p})\mathcal{A}^{d,\infty}} v\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|e^{-t_{n_p}\mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0 - v\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

alors, lorsque  $t_{n_p}$  tend vers  $\infty$ , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-t\mathcal{A}^{d,\infty}} \underline{u}_0 - v\|_{L^1(\Omega)} := 0.$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition. ■

Maintenant, on est en mesure de donner la preuve du théorème 7.2.1 et nous allons commencer par étudier la première partie de ce résultat.

### 7.2.1 Grande diffusion

Dans ce paragraphe, on fixe  $r$  et on fait tendre  $d$  vers  $\infty$ . D'après le Théorème 3.2.3(Cf. chapitre 3), on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(x, Dw) = 0 & u = \beta(w) & \text{sur } Q \\ a(x, Dw) \cdot \vec{n} = 0 & & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (7.8)$$

Le comportement asymptotique lorsque  $t \rightarrow \infty$  de la solution du problème (7.8) est donnée par la moyenne de  $u_0$ . Plus précisément, si  $u$  est la solution du problème (7.8). Alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \int_{\Omega} u_0.$$

La preuve de ce résultat est bien connue dans le cas de l'opérateur Laplacien (Cf. [17], [19]) et aussi pour l'opérateur de Lerray-Lions avec  $\beta = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  (Cf. [1]). Dans le cas où  $\beta$  est une fonction continue croissante telle que  $\operatorname{Im}(\beta) = \mathbb{R}$ , la preuve se fait

de la même manière que pour le problème d'obstacle (Cf. Proposition 7.2.2).

Nous appliquons le Théorème 3.2.2 (Cf. Chapitre 3) et nous montrons la Proposition suivante :

**Proposition 7.2.3** *Soit  $u^{d,r}$  la solution du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ . Alors, lorsque  $d \rightarrow \infty$ ,*

$$u^{d,r} \rightarrow c \quad \text{dans } \mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$$

où  $c \in \mathcal{C}^1([0, T])$  est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} c_t + r \int_{\Omega} g(x, c) dx = \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (7.9)$$

De plus, si  $f = 0$  on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = m_0 \vee (M_0 \wedge \int_{\Omega} u_0).$$

**Preuve:** Nous rappelons que  $u^{d,r}$  est aussi *bonne solution* du problème  $CP_a^{d,r}(u_0, f)$ . D'après le Lemme 7.2.2 l'opérateur  $A + \frac{r}{d}B$  converge vers  $A$  lorsque  $d \rightarrow \infty$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA} u_0 = \int_{\Omega} u_0$  et  $\int_{\Omega} u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty, r})}$ , alors nous appliquons le Théorème 3.2.2 (Cf. Chapitre 3) nous déduisons que  $u^{d,r} \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ , avec  $u$  est la *bonne solution* du problème

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{\infty, r} u \ni f & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (7.10)$$

or, pour tout  $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $(I + \lambda \mathcal{A}^{\infty, r})^{-1}(f) = (I + \lambda \mathcal{A}^{\infty, r})^{-1}(\int_{\Omega} f) = (I + \lambda \int_{\Omega} g(x, \cdot) dx)^{-1}(\int_{\Omega} f)$ , alors la bonne solution de (7.10) est solution de

$$\begin{cases} c_t + r \int_{\Omega} g(x, c) dx = \int_{\Omega} f & \text{sur } (0, T) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Ce qui termine la première partie de la preuve.

Maintenant, pour démontrer la deuxième partie de la proposition nous supposons que  $f \equiv 0$ , alors d'après la théorie des opérateurs maximaux monotones (Cf. [8]) il existe une fonction mesurable  $c_\infty \in \mathbb{R}$ , telle que, lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $c(t) \rightarrow c_\infty$ , et  $\int_{\Omega} g(x, c_\infty) dx = 0$ . Il reste à prouver que  $c_\infty = m_0 \vee (\int_{\Omega} u_0 \wedge M_0)$ . Si  $m_0 \leq \int_{\Omega} u_0 \leq M_0$ , alors,  $c(t) = c(0) := \int_{\Omega} u_0$ , pour tout  $t \geq 0$  et  $c_\infty = \int_{\Omega} u_0$ . Maintenant, si  $\int_{\Omega} u_0 \geq M_0$ , alors  $c(t) \geq M_0$ , par suite  $c_\infty \geq M_0 \geq 0$ , d'autre part on a  $\int_{\Omega} g(x, c_\infty) dx = 0$  donc  $g(x, c_\infty) = 0$  p.p.  $\Omega$ , et  $c_\infty \leq M_0$ , par conséquent  $c_\infty = M_0$ . De la même manière, on montre que si  $\int_{\Omega} u_0 \leq m_0$ , alors  $c_\infty = m_0$  et la preuve de la Proposition est terminée. ■

### 7.2.2 Forte réaction

Maintenant, nous fixerons  $d > 0$  et nous allons traiter le problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$  lorsque le coefficient de réaction devient très grand, pour cela nous considérons d'abord le problème sans diffusion suivant :

$$(E_g) \quad \begin{cases} \psi_t + g(\cdot, \psi) = 0 & \text{sur } (0, T) \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Il est clair que l'étude du comportement asymptotique de  $(E_g)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  est relié à l'ensemble de ses points d'équilibre. Pour p.p.  $x \in \Omega$  on a  $g(x, \cdot)$  est continue croissante, alors d'après la théorie des opérateurs maximaux monotones (Cf. [8]) pour tout  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , il existe  $\mathcal{C}((0, \infty), L^2(\Omega))$  solution de  $(E_g)$  au sens suivant: pour tout  $t > 0$  et p.p.  $x \in \Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + g(x, u(t, x)) = 0$ . De plus,  $u \in W^{1,\infty}((0, \infty), L^1(\Omega))$  et de la même manière que Lemme 3.3.2 (Cf. Chapitre 3) nous montrons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

**Proposition 7.2.4** *Soient  $f \in L^\infty(Q)$ ,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $u^{d,r}$  la solution du problème  $P_a^{d,r}(u_0, f)$ . Alors, lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $u^{d,r} \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}((0, T), L^1(\Omega))$  et  $u$  est l'unique solution du problème  $P_a^{d,\infty}(\underline{u}_0, f)$  au sens (7.2), avec  $\underline{u}_0(x) = m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x))$  p.p.  $\Omega$ .*

**Preuve :** D'abord, nous rappelons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tB} u_0 = m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x)) := \underline{u}_0(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

D'autre part, on a  $\mathcal{A}^{d,r} \rightarrow \mathcal{A}^{d,\infty}$  et  $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})}$ , alors nous utilisons le Théorème 3.2.2 (Cf. Chapitre 3) nous obtenons que lorsque  $r \rightarrow \infty$  on a  $u^{d,r} \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}((0,T); L^1(\Omega))$ , et  $u$  est la *bonne solution* du problème

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,\infty} u \ni f & \text{sur } (0,T) \\ u(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

Maintenant, d'après le Théorème 6.3.2 (Cf. Chapitre 6) on a  $u$  est aussi solution du problème  $P_a^{d,\infty}(\underline{u}_0, f)$  au sens (7.2). Ce qui termine la preuve de la Proposition. ■

### 7.2.3 Compétition réaction-diffusion

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas où le coefficient de réaction et de diffusion sont très grands. Dans ce cas, on distingue entre le cas où l'un des coefficients est plus important que l'autre. On suppose que  $d = d(k)$  et  $r = r(k)$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \infty$ . Et, on considère d'abord le cas où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = 0, \quad (7.12)$$

alors, on a:

**Lemme 7.2.4** *Sous la condition (7.12),  $u^{d,r} \rightarrow c$  dans  $\mathcal{C}((0,T); L^1(\Omega))$ , avec  $c$  est la solution de l'EDO*

$$\begin{cases} c_t + G_\infty(c) \ni \int_\Omega f & \text{sur } (0,T) \\ c(0) = \underline{u}_0 \end{cases}$$

où,  $\underline{u}_0$  est donnée par la Proposition 7.2.2.

**Preuve :** Nous rappelons que  $d(k)A + r(k)B \rightarrow \mathcal{A}^\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{d(k)} = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tB} u_0 = m \vee (u_0 \wedge M)$  et  $\underline{u}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA^{1,\infty}} (m \vee (u_0 \wedge M)) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ . Alors, le résultat du lemme est une conséquence directe du théorème 3.2.3 (Cf. Chapitre 3). ■

Afin de terminer la preuve du théorème 7.2.1, nous considérons le cas où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(k)}{r(k)} = \infty. \quad (7.13)$$

c'est à dire que la diffusion est plus importante que la réaction. ■

**Lemme 7.2.5** *Sous l'hypothèse (7.13),  $u^{d,r} \rightarrow c$  dans  $\mathcal{C}((0,T); L^1(\Omega))$ , avec  $c$  est la solution de l' EDO*

$$\begin{cases} c_t + G_\infty(c) \ni \int_{\Omega} f & \text{dans } (0,T) \\ c(0) = m_0 \vee (\int_{\Omega} u_0 \wedge M_0). \end{cases} \quad (7.14)$$

**Preuve :** D'après le Lemme 7.2.2 on a  $A + \varepsilon B \rightarrow A$ , au sens de la résolvante lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . D' autre part, rappelons que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tA} u_0 = \int_{\Omega} u_0$  et  $\int_{\Omega} u_0 \notin \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ . Alors, nous considérons l'opérateur défini par:

$$H_k := \frac{d(k)}{r(k)} A + B.$$

Puisque  $\frac{d(k)}{r(k)} \rightarrow \infty$ , alors le Corollaire 7.2.1 nous donne

$$H_k \rightarrow \mathcal{A}^{\infty,1}.$$

Nous utilisons le Théorème 3.2.3 (Cf. Chapitre 3) et nous considérons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{\infty,1} u \ni 0 & \text{sur } (0,\infty) \\ u(0) = \int_{\Omega} u_0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Puisque la *bonne solution* de (7.15) est une solution de l' EDO suivante:

$$\begin{cases} c_t + \int_{\Omega} g(x, c) dx = 0 & \text{sur } (0,\infty) \\ c(0) = \int_{\Omega} u_0 \end{cases}$$

alors d'après la proposition 7.2.3 on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = m_0 \vee (\int_{\Omega} u_0 \wedge M_0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$ , ce qui achève la démonstration du lemme. ■

# Bibliographie

- [1] F. ANDREU , J.M. MAZON , J.TOLED0, *Asymptotic behaviour of solutions of quasi-linear parabolic equations with non linear flux* , Comput. Appl. Math. 17(1998)201-215.
- [2] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, and A. RODRIGUES-BERNAL. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. *J. Diff. Equations*, 168:33–59, 2000.
- [3] PH.BENILAN, L.BOCCARDO, TH.GALLOUET, R.GARIEPY, M.PIERRE AND J.L. VAZQUEZ, *An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2):241-273, 1995.
- [4] PH. BENILAN, *Equations d' évolution dans un espace de Banach quelconque et applications* , Thesis,Univ. Orsay, 1972.
- [5] PH. BENILAN , M. G. CRANDALL , A. PAZY , *Evolution Equations Governed by Accretive Operators* , Book to appear
- [6] D. BOTHE, D. HILHORST , *A reaction-diffusion system with fast reversible reaction* , Adv. Differential Equations, 6 (2001), no. 10, 1173–1218.
- [7] D. BOTHE. The instantaneous limit of a reaction-diffusion system. *Evolution equations and their applications in physical and life sciences* (Bad Herrenalb, 1998), 215–224, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 215, Dekker, New York, 2001.
- [8] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux Monotones et semi - groupes de contractions dans les Espaces de Hilbert* , Oxford Univ. Press, Oxford, 1984.
- [9] H. BREZIS , A. PAZY, *Convergence And Approximation of Semigroupes of Nonlinear Operators in Banach Spaces* . J . Func. Anal., 9:63-74, 1972.
- [10] E. C. M. CROOKS, E. N. DANCER, D. HILHORST, M. MIMURA, H. NINOMIYA, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 5 (2004), no. 4, 645–665.
- [11] L. C. Evans, M. Feldman, and R. F. Gariepy. Fast/Slow diffusion and collapsing sandpiles, *J. Differential Equations*, 137:166–209, 1997.

- [12] HENRY, M.; HILHORST, D.; NISHIURA, Y. Singular limit of a second order nonlocal parabolic equation of conservative type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers, *Hokkaido Math. J.* 32 (2003), no. 3, 561–622.
- [13] D. HILHORST, M. MIMURA, R. WEIDENFELD, Singular limit of a class of non-cooperative reaction-diffusion systems, *Taiwanese J. Math.* 7 (2003), no. 3, 391–421.
- [14] J. K. HALE. Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems, *J. Math. Anal. Appl.* 118:455–466, 1986.
- [15] D. HILHORST, R. VAN DER HOUT, L. PELETIER, . cA. Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction, *Nonlinear Anal.* 41 (2000), no. 5-6, Ser. A: Theory Methods, 803–823.
- [16] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de Résolution des problèmes aux Limites non Linéaires* , Paris : Dunod (1969).
- [17] N. IGBIDA, *Stabilization for degenerate diffusion with absorption* , *Nonlinear Analysis* 54 (2003), 93-107.
- [18] N. IGBIDA. A nonlinear diffusion problem with localized large diffusion , *Comm. Partial Differential Equations*, 29 (2004), no. 5-6, 647–670.
- [19] J. M. MAZON and J. TOLEDO. Asymptotic behavior of solutions of the filtration equation in bounded domains. *Dynam. Systems Appl.*, 3:275–295, 1994.
- [20] M. MIMURA Reaction-diffusion systems arising in biological and chemical systems: application of singular limit procedures. *Mathematical aspects of evolving interfaces*(Funchal, 2000), 89–121, *Lecture Notes in Math.*, 1812, Springer, Berlin, 2003.
- [21] A. RODRIGUES-BERNAL. Localized spatial homogenization and large diffusion, *SIAM J. Math. Anal.* 29:1361–1380, 1998.