

Homogénéisation de lois de conservation scalaires et d'équations de transport

Anne-Laure Dalibard

CEREMADE
Université Paris-Dauphine

8 Octobre 2007

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
4. Cas hyperbolique

Plan

1. Introduction

2. Cas visqueux : étude du problème limite

3. Cas visqueux : preuve de convergence

4. Cas hyperbolique

Position du problème

- ▶ **Objet de l'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) sol. de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ **Modèle** : $u^\varepsilon =$ densité de particules dans un milieu **fortement oscillant**.
 - ▶ $\varepsilon =$ taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
 - ▶ **Hypothèse de périodicité** : $A_i = A_i(y, v)$ (resp. $u_0 = u_0(x, y)$) est $[0, 1]^N$ -périodique en y ($Y = [0, 1]^N$).
 - ▶ **Viscosité d'ordre ε** \rightarrow action à un niveau **microscopique** uniquement.

Position du problème

- ▶ **Objet de l'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) sol. de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ **Modèle** : u^ε = densité de particules dans un milieu fortement oscillant.
- ▶ ε = taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
- ▶ **Hypothèse de périodicité** : $A_i = A_i(y, v)$ (resp. $u_0 = u_0(x, y)$) est $[0, 1]^N$ -périodique en y ($Y = [0, 1]^N$).
- ▶ **Viscosité d'ordre ε** → action à un niveau microscopique uniquement.

Position du problème

- ▶ **Objet de l'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) sol. de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ **Modèle** : u^ε = densité de particules dans un milieu **fortement oscillant**.
- ▶ ε = taille typique des hétérogénéités dans le milieu.
- ▶ **Hypothèse de périodicité** : $A_i = A_i(y, v)$ (resp. $u_0 = u_0(x, y)$) est $[0, 1]^N$ -périodique en y ($Y = [0, 1]^N$).
- ▶ **Viscosité d'ordre** $\varepsilon \rightarrow$ action à un niveau **microscopique** uniquement.

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !
- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1
→ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !

- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

→ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !

- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

→ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !

- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

→ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !

- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

→ Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)

Objectifs et outils

- ▶ **But** : montrer un résultat du type

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

(éventuellement dans un sens faible) et **identifier** \bar{u} (au moyen d'un **problème homogénéisé** si possible).

- ▶ **Deux sous-problèmes** :

1. Trouver la(les) équation(s) limite(s) ou le problème homogénéisé ;
2. Démontrer la convergence.

- ▶ **Difficulté** : pas de borne *a priori* simple !

- ▶ **Clé de l'étude** : existence de sol. stationnaires bornées de (1) + principe de contraction dans L^1

→ **Comparaison avec sol. stationnaires (si elles existent !)**

Plan

1. Introduction

2. Cas visqueux : étude du problème limite

- a. Ansatz - Calculs formels
- b. Problème de la cellule
- c. Couche initiale

3. Cas visqueux : preuve de convergence

4. Cas hyperbolique

Plan

1. Introduction

2. Cas visqueux : étude du problème limite

- a. Ansatz - Calculs formels
- b. Problème de la cellule
- c. Couche initiale

3. Cas visqueux : preuve de convergence

4. Cas hyperbolique

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2)$$

où chaque terme $u^j(t, x, y)$ est périodique en y .

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2)$$

où chaque terme $u^j(t, x, y)$ est périodique en y . On trouve :

$$u^0(t, x, y) = v(y, \bar{u}(t, x)),$$

où $\bar{u} = \langle u^0 \rangle$ et :

► $\forall p \in \mathbb{K}$, $v(y, p)$ est sol. d'un pb. micro. "de la cellule" :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p. \quad (3)$$

► $\bar{u}(t, x)$ solution entropique d'une loi de conservation scalaire (problème homogénéisé)

$$\partial_t \bar{u}(t, x) + \operatorname{div}_x \bar{A}(\bar{u}(t, x)) = 0 \quad (4)$$

avec

$$\bar{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y, p)) dy.$$

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2)$$

où chaque terme $u^j(t, x, y)$ est périodique en y . On trouve :

$$u^0(t, x, y) = v(y, \bar{u}(t, x)),$$

où $\bar{u} = \langle u^0 \rangle$ et :

- ▶ $\forall p \in \mathbb{R}$, $v(y, p)$ est sol. d'un pb. micro. “de la cellule” :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p. \quad (3)$$

- ▶ $\bar{u}(t, x)$ solution entropique d'une loi de conservation scalaire (problème homogénéisé)

$$\partial_t \bar{u}(t, x) + \operatorname{div}_x \bar{A}(\bar{u}(t, x)) = 0 \quad (4)$$

avec

$$\bar{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y, p)) dy.$$

Développement asymptotique formel

Développement limité en puissances de ε :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2)$$

où chaque terme $u^j(t, x, y)$ est périodique en y . On trouve :

$$u^0(t, x, y) = v(y, \bar{u}(t, x)),$$

où $\bar{u} = \langle u^0 \rangle$ et :

- ▶ $\forall p \in \mathbb{R}$, $v(y, p)$ est sol. d'un pb. micro. “de la cellule” :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p. \quad (3)$$

- ▶ $\bar{u}(t, x)$ solution entropique d'une loi de conservation scalaire (problème homogénéisé)

$$\partial_t \bar{u}(t, x) + \operatorname{div}_x \bar{A}(\bar{u}(t, x)) = 0 \quad (4)$$

avec

$$\bar{A}(p) = \int_{[0,1]^N} A(y, v(y, p)) dy.$$

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- **Problème** : que se passe-t-il si

$$u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

→ donnée mal préparée.

- **Solution** : on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (5)$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \operatorname{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \quad (6)$$

- Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (6).

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- **Problème** : que se passe-t-il si

$$u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

→ donnée mal préparée.

- **Solution** : on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (5)$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \operatorname{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \quad (6)$$

- Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (6).

Développement asymptotique formel

Oscillations temporelles rapides

- ▶ **Problème** : que se passe-t-il si

$$u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))?$$

→ donnée mal préparée.

- ▶ **Solution** : on introduit des échelles de temps microscopiques :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx u^0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (5)$$

Le problème microscopique devient

$$\partial_\tau u^0 + \operatorname{div}_y A(y, u^0) - \Delta_y u^0 = 0. \quad (6)$$

- ▶ Sol. du pb. de la cellule = sol. stationnaire de (6).

Plan

1. Introduction

2. Cas visqueux : étude du problème limite

a. Ansatz - Calculs formels

b. Problème de la cellule

c. Couche initiale

3. Cas visqueux : preuve de convergence

4. Cas hyperbolique

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0, n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^m, \\ |\operatorname{div}_y A(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^n, \end{aligned} \quad (7)$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min \left(\frac{N+2}{N}, 2 \right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R}, \operatorname{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \quad (8)$$

Proposition : Sous (7), (8), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y, p) \in H_{\text{per}}^1(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y, p) \geq v(y, p') \quad \forall p \geq p' \quad \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0, n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^m, \\ |\operatorname{div}_y A(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^n, \end{aligned} \quad (7)$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min \left(\frac{N+2}{N}, 2 \right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R}, \operatorname{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \quad (8)$$

Proposition : Sous (7), (8), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y, p) \in H_{\text{per}}^1(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y, p) \geq v(y, p') \quad \forall p \geq p' \quad \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0, n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^m, \\ |\operatorname{div}_y A(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^n, \end{aligned} \quad (7)$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min \left(\frac{N+2}{N}, 2 \right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R}, \operatorname{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \quad (8)$$

Proposition : Sous (7), (8), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y, p) \in H_{\text{per}}^1(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y, p) \geq v(y, p') \quad \forall p \geq p' \quad \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Existence et unicité des sol. du pb. de la cellule

Hypothèses : $\exists n, m, C_0 > 0, n < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$, t.q. $\forall (y, v)$

$$\begin{aligned} |\partial_v A_i(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^m, \\ |\operatorname{div}_y A(y, v)| &\leq C_0(1 + |v|)^n, \end{aligned} \quad (7)$$

et $m = 0$, ou bien $n < 1$, ou bien

$$\left[n < \min \left(\frac{N+2}{N}, 2 \right) \text{ et } \exists p_0 \in \mathbb{R}, \operatorname{div}_y A(y, p_0) \equiv 0. \right] \quad (8)$$

Proposition : Sous (7), (8), pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $v(y, p) \in H_{\text{per}}^1(Y)$ du pb. de la cellule :

$$-\Delta_y v(y, p) + \operatorname{div}_y A(y, v(y, p)) = 0, \quad \langle v(\cdot, p) \rangle = p.$$

Croissance en p :

$$v(y, p) \geq v(y, p') \quad \forall p \geq p' \quad \forall y \in Y.$$

Outil de la preuve : régularité elliptique.

Plan

1. Introduction

2. Cas visqueux : étude du problème limite

- a. Ansatz - Calculs formels
- b. Problème de la cellule
- c. Couche initiale**

3. Cas visqueux : preuve de convergence

4. Cas hyperbolique

Couche initiale

- **Proposition** : On suppose (7), (8), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L_{\text{loc}}^\infty(Y \times \mathbb{R})$,
et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \quad (9)$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \text{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, \|\partial_v A\|_{L_{\text{loc}}^\infty}) > 0$ t.q.

$$\|w(\tau, y) - v(y, p)\|_{L^\infty(Y)} \leq ce^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan** : C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

⇒ Couche initiale.

Couche initiale

- **Proposition** : On suppose (7), (8), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L_{\text{loc}}^\infty(Y \times \mathbb{R})$,
et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \quad (9)$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \text{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, \|\partial_v A\|_{L_{\text{loc}}^\infty}) > 0$ t.q.

$$\|w(\tau, y) - v(y, p)\|_{L^\infty(Y)} \leq ce^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan** : C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

⇒ Couche initiale.

Couche initiale

- **Proposition** : On suppose (7), (8), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L_{\text{loc}}^\infty(Y \times \mathbb{R})$,
et $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(y) \leq v(y, \beta_2) \quad \forall y \in Y. \quad (9)$$

Soit $w = w(\tau, y)$ la sol. du pb. de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \text{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, y) = u_0(y). \end{cases}$$

Alors $\exists c, \mu = \mu(N, \|\partial_v A\|_{L_{\text{loc}}^\infty}) > 0$ t.q.

$$\|w(\tau, y) - v(y, p)\|_{L^\infty(Y)} \leq ce^{-\mu\tau},$$

où $p = \langle u_0 \rangle$.

- **Bilan** : C.I. mal-préparée : $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$

⇒ Couche initiale.

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de **systèmes dynamiques** ?

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de **systèmes dynamiques** ?

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de **systèmes dynamiques** ?

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de systèmes dynamiques ?

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de **systèmes dynamiques** ?

Around de l'hypothèse $v(\cdot, \beta_1) \leq u_0 \leq v(\cdot, \beta_2)$

- ▶ **Rappel** : $v(y, p)$ croissant en p , $\langle v(\cdot, p) \rangle = p$.
- ▶ **Un cas simple** : si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} v(y, p) = +\infty \quad (10)$$

alors

$$(\exists C > 0, u_0 \leq C \text{ p.p.}) \Rightarrow (\exists \beta_2 \in \mathbb{R}, u_0 \leq v(\cdot, \beta_2) \text{ p.p.})$$

- ▶ Condition suffisante pour (10) : $m = 0$ (A uniformément Lipschitzien).
- ▶ En général (si $m \neq 0$), (10) n'est pas vérifiée...
- ▶ **Autre preuve** à l'aide de **systèmes dynamiques** ?

Résumé

- ▶ **Donnée initiale bien préparée** : si

$$u^\varepsilon(t=0, x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right)$$

où :

- ▶ $v(y, p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
 - ▶ $\bar{u}(t, x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).
- ▶ **Donnée initiale mal préparée** : si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0, x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

→ **Couche initiale** (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- ▶ **Donnée initiale bien préparée** : si

$$u^\varepsilon(t=0, x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right)$$

où :

- ▶ $v(y, p)$ sol. d'une **éq. de la cellule** (microscopique)
- ▶ $\bar{u}(t, x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).

- ▶ **Donnée initiale mal préparée** : si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0, x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

→ **Couche initiale** (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- ▶ **Donnée initiale bien préparée** : si

$$u^\varepsilon(t=0, x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right)$$

où :

- ▶ $v(y, p)$ sol. d'une éq. de la cellule (microscopique)
 - ▶ $\bar{u}(t, x)$ sol. d'une L.C.S. (macroscopique).
- ▶ **Donnée initiale mal préparée** : si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0, x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

→ **Couche initiale** (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Résumé

- ▶ **Donnée initiale bien préparée** : si

$$u^\varepsilon(t=0, x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}_0(x)\right),$$

alors on s'attend à avoir

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right)$$

où :

- ▶ $v(y, p)$ sol. d'une **éq. de la cellule** (microscopique)
- ▶ $\bar{u}(t, x)$ sol. d'une **L.C.S.** (macroscopique).

- ▶ **Donnée initiale mal préparée** : si

$$v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_1\right) \leq u^\varepsilon(t=0, x) \leq v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \beta_2\right) :$$

→ **Couche initiale** (de taille typique ε) pendant laquelle u^ε s'adapte au profil ci-dessus.

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
 - a. Résultat d'homogénéisation
 - b. Formulation cinétique
 - c. Passage à la limite - données bien préparées
 - d. Données mal préparées
4. Cas hyperbolique

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
 - a. Résultat d'homogénéisation
 - b. Formulation cinétique
 - c. Passage à la limite - données bien préparées
 - d. Données mal préparées
4. Cas hyperbolique

Résultat d'homogénéisation

Théorème : On suppose (7), (8), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L_{\text{loc}}^\infty$,
 $\partial_v^2 A_i(y, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ p.p. $y \in Y$, et

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2) \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^N).$$

Publications :

- ▶ Journal de mathématiques pures et appliquées, 2006 ;
- ▶ SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007 ;
- ▶ Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2007.

Résultat d'homogénéisation

Théorème : On suppose (7), (8), $\partial_v \partial_{y_j} A_i \in L_{\text{loc}}^\infty$,
 $\partial_v^2 A_i(y, \cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ p.p. $y \in Y$, et

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2) \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^N).$$

Publications :

- ▶ Journal de mathématiques pures et appliquées, 2006 ;
- ▶ SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007 ;
- ▶ Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2007.

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
- 3. Cas visqueux : preuve de convergence**
 - a. Résultat d'homogénéisation
 - b. Formulation cinétique**
 - c. Passage à la limite - données bien préparées
 - d. Données mal préparées
4. Cas hyperbolique

Formulation cinétique

- ▶ **Idée** : comparaison avec les **sol. stat.** : $(v(y, p))_{p \in \mathbb{R}}$.
- ▶ **Résultat** : $f^\varepsilon(t, x, p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v_p^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, v_p^\varepsilon \right) f^\varepsilon \right] - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p} \quad (11)$$

où $v_p^\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon, p)$.

- ▶ $m^\varepsilon(t, x, p) \geq 0$: mesure du défaut d'entropie.
Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien-préparées).
- ▶ **Intérêt** : linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- ▶ **Idée** : comparaison avec les **sol. stat.** : $(v(y, p))_{p \in \mathbb{R}}$.
- ▶ **Résultat** : $f^\varepsilon(t, x, p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v_p^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, v_p^\varepsilon \right) f^\varepsilon \right] - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p} \quad (11)$$

où $v_p^\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon, p)$.

- ▶ $m^\varepsilon(t, x, p) \geq 0$: **mesure du défaut d'entropie**.
Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien-préparées).
- ▶ **Intérêt** : linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- ▶ **Idée** : comparaison avec les **sol. stat.** : $(v(y, p))_{p \in \mathbb{R}}$.
- ▶ **Résultat** : $f^\varepsilon(t, x, p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v_p^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, v_p^\varepsilon \right) f^\varepsilon \right] - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p} \quad (11)$$

où $v_p^\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon, p)$.

- ▶ $m^\varepsilon(t, x, p) \geq 0$: **mesure du défaut d'entropie**.
Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien-préparées).
- ▶ **Intérêt** : linéarité (passage à la limite faible).

Formulation cinétique

- ▶ **Idée** : comparaison avec les **sol. stat.** : $(v(y, p))_{p \in \mathbb{R}}$.
- ▶ **Résultat** : $f^\varepsilon(t, x, p) := \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v_p^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right)$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_j \left(\frac{x}{\varepsilon}, v_p^\varepsilon \right) f^\varepsilon \right] - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p} \quad (11)$$

où $v_p^\varepsilon(x) := v(x/\varepsilon, p)$.

- ▶ $m^\varepsilon(t, x, p) \geq 0$: **mesure du défaut d'entropie**.
Localement bornée, uniformément en ε (pour des données bien-préparées).
- ▶ **Intérêt** : linéarité (passage à la limite faible).

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
- 3. Cas visqueux : preuve de convergence**
 - a. Résultat d'homogénéisation
 - b. Formulation cinétique
 - c. Passage à la limite - données bien préparées**
 - d. Données mal préparées
4. Cas hyperbolique

Réduction du problème

► Convergence à deux-échelles :

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p),$$

$$f^\varepsilon(t, x, p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}.$$

► **But** : montrer que $g(t, x, y, p) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)}$.

En effet : si

$$\mathbf{1}_{v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) < u^\varepsilon(t, x)} \xrightarrow{2\text{ éch.}} \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)} = \mathbf{1}_{v(y, p) < v(y, \bar{u}(t, x))}.$$

alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \rightarrow 0$$

dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

(Fonction test $\psi(t, x, y, p) = \varphi(t, x) \frac{\partial v}{\partial p}(y, p) \mathbf{1}_{\bar{u}(t, x) < p < p_0}$).

► Formulation équivalente :

mesure d'Young = masse de Dirac.

Réduction du problème

► Convergence à deux-échelles :

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p),$$

$$f^\varepsilon(t, x, p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}.$$

► **But** : montrer que $g(t, x, y, p) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)}$.

En effet : si

$$\mathbf{1}_{v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) < u^\varepsilon(t, x)} \xrightarrow{2\text{ éch.}} \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)} = \mathbf{1}_{v(y, p) < v(y, \bar{u}(t, x))}.$$

alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \rightarrow 0$$

dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

(Fonction test $\psi(t, x, y, p) = \varphi(t, x) \frac{\partial v}{\partial p}(y, p) \mathbf{1}_{\bar{u}(t, x) < p < p_0}$).

► Formulation équivalente :

mesure d'Young = masse de Dirac.

Réduction du problème

► Convergence à deux-échelles :

$$\mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p),$$

$$f^\varepsilon(t, x, p) = \mathbf{1}_{u^\varepsilon > v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right)} \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \xrightarrow{2\text{-éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}.$$

► **But** : montrer que $g(t, x, y, p) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)}$.

En effet : si

$$\mathbf{1}_{v\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) < u^\varepsilon(t, x)} \xrightarrow{2\text{ éch.}} \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t, x)} = \mathbf{1}_{v(y, p) < v(y, \bar{u}(t, x))}.$$

alors

$$u^\varepsilon(t, x) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \rightarrow 0$$

dans L^1_{loc} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

(Fonction test $\psi(t, x, y, p) = \varphi(t, x) \frac{\partial v}{\partial p}(y, p) \mathbf{1}_{\bar{u}(t, x) < p < p_0}$).

► **Formulation équivalente** :

mesure d'Young = masse de Dirac.

Passage à la limite

- ▶ **But** : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \operatorname{div}_x \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, v \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

- ▶ **Rappel** :

$$f^\varepsilon \stackrel{2 \text{ éch.}}{\rightharpoonup} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t, x, p) \quad w - M^1.$$

- ▶ **Profil microscopique** : fonction test $\varepsilon \phi \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p \right)$.
 → g est solution d'une équation elliptique linéaire ;
 → [Krein-Rutman] g ne dépend pas de y .
- ▶ **Profil macroscopique** : fonction test $\phi \left(t, x, p \right)$.
 → g est solution de

$$\partial_t g + \operatorname{div}_x (\bar{a}(p)g) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

- **Données bien préparées** : $g(t=0) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}_0}$.
- [Di Perna, Perthame] $g = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)}$.

Passage à la limite

- ▶ **But** : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \operatorname{div}_x \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, v \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

- ▶ **Rappel** :

$$f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t, x, p) \quad w - M^1.$$

- ▶ **Profil microscopique** : fonction test $\varepsilon \phi \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p \right)$.
 → g est solution d'une équation elliptique linéaire ;
 → [Krein-Rutman] g ne dépend pas de y .
- ▶ **Profil macroscopique** : fonction test $\phi \left(t, x, p \right)$.
 → g est solution de

$$\partial_t g + \operatorname{div}_x (\bar{a}(p)g) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

- **Données bien préparées** : $g(t=0) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}_0}$.
- [Di Perna, Perthame] $g = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)}$.

Passage à la limite

- ▶ **But** : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \operatorname{div}_x \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, v \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

- ▶ **Rappel** :

$$f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t, x, p) \quad w - M^1.$$

- ▶ **Profil microscopique** : fonction test $\varepsilon \phi \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p \right)$.
 → g est solution d'une équation elliptique linéaire ;
 → [Krein-Rutman] g ne dépend pas de y .
- ▶ **Profil macroscopique** : fonction test $\phi(t, x, p)$.
 → g est solution de

$$\partial_t g + \operatorname{div}_x (\bar{a}(p)g) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

- **Données bien préparées** : $g(t=0) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}_0}$.
- [Di Perna, Perthame] $g = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)}$.

Passage à la limite

- ▶ **But** : passer à la limite (à 2 échelles) dans

$$\partial_t f^\varepsilon + \operatorname{div}_x \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, v \left(\frac{x}{\varepsilon}, p \right) \right) f^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta_x f^\varepsilon = \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial p}$$

- ▶ **Rappel** :

$$f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} g(t, x, y, p) \frac{\partial v}{\partial p}, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup m(t, x, p) \quad w - M^1.$$

- ▶ **Profil microscopique** : fonction test $\varepsilon \phi \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, p \right)$.
 → g est solution d'une équation elliptique linéaire ;
 → [Krein-Rutman] g ne dépend pas de y .
- ▶ **Profil macroscopique** : fonction test $\phi(t, x, p)$.
 → g est solution de

$$\partial_t g + \operatorname{div}_x (\bar{a}(p)g) = \partial_p m, \quad \bar{a} = \partial_p \bar{A}.$$

- **Données bien préparées** : $g(t=0) = \mathbf{1}_{p < \bar{u}_0}$.
- [Di Perna, Perthame] $g = \mathbf{1}_{p < \bar{u}(t,x)}$.

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
- 3. Cas visqueux : preuve de convergence**
 - a. Résultat d'homogénéisation
 - b. Formulation cinétique
 - c. Passage à la limite - données bien préparées
 - d. Données mal préparées**
4. Cas hyperbolique

Données mal préparées

Nouvelle hypothèse : $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2),$$

mais $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$!

Intuition : (motivée par le développement asymptotique formel) :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx w\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } t = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \quad \text{si } t \gg \varepsilon,$$

où $w = w(\tau, x, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \operatorname{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, x, y) = u_0(x, y). \end{cases}$$

Données mal préparées

Nouvelle hypothèse : $\exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y$,

$$v(y, \beta_1) \leq u_0(x, y) \leq v(y, \beta_2),$$

mais $u_0(x, y) \neq v(y, \bar{u}_0(x))$!

Intuition : (motivée par le développement asymptotique formel) :

$$u^\varepsilon(t, x) \approx w\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } t = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon(t, x) \approx v\left(\frac{x}{\varepsilon}, \bar{u}(t, x)\right) \quad \text{si } t \gg \varepsilon,$$

où $w = w(\tau, x, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \operatorname{div}_y A(y, w) - \Delta_y w = 0, \\ w(\tau = 0, x, y) = u_0(x, y). \end{cases}$$

Données mal préparées

Idée de preuve

Le schéma de preuve suit le développement asymptotique.

Quelques outils :

1. Convergence exponentielle de w vers $v(y, \bar{u}_0(x))$;
2. Résultat dans le cas de données bien préparées ;
3. Principe de contraction dans L^1 .

Problème ouvert : comportement si l'hypothèse sur la donnée initiale n'est pas vérifiée ?

Données mal préparées

Idée de preuve

Le schéma de preuve suit le développement asymptotique.

Quelques outils :

1. Convergence exponentielle de w vers $v(y, \bar{u}_0(x))$;
2. Résultat dans le cas de données bien préparées ;
3. Principe de contraction dans L^1 .

Problème ouvert : comportement si l'hypothèse sur la donnée initiale n'est pas vérifiée ?

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
4. Cas hyperbolique
 - a. Position du problème
 - b. Un exemple générique : le cas “à divergence nulle”

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
4. Cas hyperbolique
 - a. Position du problème
 - b. Un exemple générique : le cas “à divergence nulle”

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

→ Pas d'unicité ;

→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation **beaucoup plus compliquée** !

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

→ Pas d'unicité ;

→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation **beaucoup plus compliquée** !

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

→ Pas d'unicité ;

→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation **beaucoup plus compliquée** !

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

→ Pas d'unicité ;

→ Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

- Pas d'unicité ;
- Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation beaucoup plus compliquée !

Position du problème

- ▶ **Nouvel objet d'étude** : comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N$) de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(t, x) \right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (12)$$

- ▶ **Même Ansatz** que précédemment : $u^\varepsilon(t, x) \approx u^0(t, x, x/\varepsilon)$.
- ▶ Le **problème de la cellule** devient :

$$\operatorname{div}_y A(y, u^0(y)) = 0, \quad \langle u^0 \rangle = p. \quad (13)$$

- Pas d'unicité ;
- Existence = problème ouvert dès que $N \geq 2$.

- ▶ **Conclusion** : situation **beaucoup plus compliquée** !

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.

→ Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...
 - $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.

→ Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...

→ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.

→ Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...

→ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.

→ Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...

→ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.

→ Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...

→ $N = 1$ joue un rôle particulier.

Autour du problème de la cellule

Problème ouvert : existence de solutions entropiques de

$$\operatorname{div}_y A(y, u(y)) = 0, \quad \langle u \rangle = p \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, 1]^N.$$

- ▶ Si on dispose de **bornes a priori dans L^∞** :
 - ▶ Formulation cinétique de l'équation ;
 - ▶ Compacité grâce à des **lemmes de moyenne** si le flux est **non-linéaire**.
 → Démontrer l'existence devient possible...
- ▶ **Point clé** : obtention de bornes *a priori* dans L^∞ .
- ▶ **Difficulté** : il faut intégrer la divergence...
 - $N = 1$ joue un rôle particulier.

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |p| \rightarrow \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}, \exists v$ sol. du problème de la cellule.

De plus, $\exists! \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y A(y, v(y)) dy = \bar{A}(p).$$

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |p| \rightarrow \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}, \exists v$ sol. du problème de la cellule.

De plus, $\exists! \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y A(y, v(y)) dy = \bar{A}(p).$$

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé ;**
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |p| \rightarrow \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}, \exists v$ sol. du problème de la cellule.

De plus, $\exists! \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y A(y, v(y)) dy = \bar{A}(p).$$

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé ;**
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

Si

$$\inf_{y \in Y} A(y, p) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } |p| \rightarrow \infty,$$

alors $\forall p \in \mathbb{R}, \exists v$ sol. du problème de la cellule.

De plus, $\exists! \bar{A}(p) \in \mathbb{R}, \forall v$ sol. du pb. de la cellule t.q. $\langle v \rangle = p$,

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y A(y, v(y)) dy = \bar{A}(p).$$

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé ;**
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

Résultats antérieurs

• $N = 1$: équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- ▶ Unicité du flux homogénéisé ;
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

• $A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\operatorname{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$;

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- ▶ Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- ▶ Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_x (\tilde{a}_0(y)g(u)) &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N, y \in Y, \\ \operatorname{div}_y (a_0(y)g(u)) &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé ;**
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- $A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\operatorname{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$;

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- ▶ Existence, mais pas d'unicité des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- ▶ Existence et unicité des solutions du problème limite :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_x (\tilde{a}_0(y)g(u)) &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N, y \in Y, \\ \operatorname{div}_y (a_0(y)g(u)) &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé** ;
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- $A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\operatorname{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$;

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- ▶ Existence, mais **pas d'unicité** des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- ▶ **Existence et unicité des solutions du problème limite** :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_x (\tilde{a}_0(y)g(u)) &= 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^N, y \in Y, \\ \operatorname{div}_y (a_0(y)g(u)) &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé** ;
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- $A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\operatorname{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$;

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- ▶ Existence, mais **pas d'unicité** des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- ▶ **Existence et unicité des solutions du problème limite** :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_x (\tilde{a}_0(y)g(u)) &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N, y \in Y, \\ \operatorname{div}_y (a_0(y)g(u)) &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Résultat de convergence forte.

Résultats antérieurs

- $N = 1$: **équivalence avec les éq. de Hamilton-Jacobi**

P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan (1987) :

- ▶ **Unicité du flux homogénéisé** ;
- ▶ Notion de problème homogénéisé ;
- ▶ Résultats de convergence forte (W. E, D. Serre, 1992).

- $A(y, \xi) = a_0(y)g(\xi)$, $\operatorname{div}_y a_0 = 0$, $g'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$;

W. E (1992) ; T. Hou, X. Xin (1992) :

- ▶ Existence, mais **pas d'unicité** des solutions du pb. de la cellule ; pas de problème homogénéisé ;
- ▶ **Existence et unicité des solutions du problème limite** :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}_x (\tilde{a}_0(y)g(u)) &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N, y \in Y, \\ \operatorname{div}_y (a_0(y)g(u)) &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Résultat de convergence forte.

Plan

1. Introduction
2. Cas visqueux : étude du problème limite
3. Cas visqueux : preuve de convergence
4. Cas hyperbolique
 - a. Position du problème
 - b. Un exemple générique : le cas “à divergence nulle”

Contraintes microscopiques

- ▶ Si $\operatorname{div}_y A(y, p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p < u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \quad (14)$$

- ▶ **Passage à la limite** dans (14) :

À une sous-suite près, $f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} f$, $m^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} m$.

- ▶ **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (a(y, p) f(t, x, y, p)) &= 0, \\ \partial_p f &\leq 0. \end{aligned}$$

- ▶ **Espace de contraintes** :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &:= \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}), \operatorname{div}_y (a(y, p)\varphi) = 0\}, \\ \mathbb{P} &: \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Contraintes microscopiques

- ▶ Si $\operatorname{div}_y A(y, p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p < u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \quad (14)$$

- ▶ **Passage à la limite** dans (14) :

À une sous-suite près, $f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} f$, $m^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} m$.

- ▶ **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (a(y, p) f(t, x, y, p)) &= 0, \\ \partial_p f &\leq 0. \end{aligned}$$

- ▶ **Espace de contraintes** :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &:= \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}), \operatorname{div}_y (a(y, p) \varphi) = 0\}, \\ \mathbb{P} &: \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Contraintes microscopiques

- ▶ Si $\operatorname{div}_y A(y, p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p < u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \quad (14)$$

- ▶ **Passage à la limite** dans (14) :
À une sous-suite près, $f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} f$, $m^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} m$.
- ▶ **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (a(y, p) f(t, x, y, p)) &= 0, \\ \partial_p f &\leq 0. \end{aligned}$$

- ▶ **Espace de contraintes** :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &:= \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}), \operatorname{div}_y (a(y, p)\varphi) = 0\}, \\ \mathbb{P} &: \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Contraintes microscopiques

- ▶ Si $\operatorname{div}_y A(y, p) = 0$, alors $f^\varepsilon = \mathbf{1}_{p < u^\varepsilon}$ est solution de

$$\partial_t f^\varepsilon + a\left(\frac{x}{\varepsilon}, p\right) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \partial_p m^\varepsilon, \quad m^\varepsilon \geq 0. \quad (14)$$

- ▶ **Passage à la limite** dans (14) :

À une sous-suite près, $f^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} f$, $m^\varepsilon \xrightarrow{2 \text{ éch.}} m$.

- ▶ **Première étape** : Profil microscopique.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y(a(y, p)f(t, x, y, p)) &= 0, \\ \partial_p f &\leq 0. \end{aligned}$$

- ▶ **Espace de contraintes** :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &:= \{\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}), \operatorname{div}_y(a(y, p)\varphi) = 0\}, \\ \mathbb{P} &: \text{projection } L^2 \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.

→ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.
 → Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.
 → Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.
- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.

→ Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.
 → Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Problème d'évolution macroscopique (formel)

- ▶ **Idée** : projeter l'équation (14) sur \mathbb{K} afin de **filtrer les termes fortement oscillants**.
 → Fonctions $\varphi(t, x, x/\varepsilon, p)$ t.q. $\varphi(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ p.p.

- ▶ **Problème d'évolution formel** :

$$\mathbb{P} \{ \partial_t f + a(y, p) \cdot \nabla_x f - \partial_p m \} = 0.$$

Ré-écriture :

$$\partial_t f + a \cdot \nabla_x f = \partial_p m + M^\perp,$$

$$m \geq 0, M^\perp \in \mathbb{K}^\perp.$$

→ **Problème d'évolution limite** ! (\neq problème homogénéisé...)

- ▶ **Questions** : Existence ? Unicité ? Convergence ?

Résultat rigoureux

Définition : (Solution du système limite)

Fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N \times Y \times \mathbb{R})) \cap L^\infty$, t.q. $\exists \mathcal{M}$ distribution,

$$\begin{aligned} \partial_t f + a \cdot \nabla_x f &= \mathcal{M}, & f(t=0) &= \mathbf{1}_{p < u_0}, \\ \operatorname{div}_y(a(y, p)f(t, x, y, p)) &= 0, & \partial_p f &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\int_{Y \times \mathbb{R}} \mathcal{M}(t, x) \phi \leq 0 \quad \forall \phi \in L_{\text{loc}}^\infty \text{ t.q. } \partial_p \phi \geq 0, \operatorname{div}_y(a\phi) = 0.$$

(Représentation formelle : $\mathcal{M} = \partial_p m + M^\perp$.)

Théorème : Soit $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\operatorname{div}_y A(y, u_0(\cdot, y)) = 0$. Alors :

1. **Existence et unicité** des solutions du système limite ;
2. **Rigidité** : les sol. du système limite sont de la forme $\mathbf{1}_{p < u}$;
3. **Convergence forte** : lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans L_{loc}^1 ,

$$u^\varepsilon(t, x) - u\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

Résultat rigoureux

Définition : (Solution du système limite)

Fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N \times Y \times \mathbb{R})) \cap L^\infty$, t.q. $\exists \mathcal{M}$ distribution,

$$\begin{aligned} \partial_t f + a \cdot \nabla_x f &= \mathcal{M}, & f(t=0) &= \mathbf{1}_{p < u_0}, \\ \operatorname{div}_y(a(y, p)f(t, x, y, p)) &= 0, & \partial_p f &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\int_{Y \times \mathbb{R}} \mathcal{M}(t, x) \phi \leq 0 \quad \forall \phi \in L_{\text{loc}}^\infty \text{ t.q. } \partial_p \phi \geq 0, \operatorname{div}_y(a\phi) = 0.$$

(Représentation formelle : $\mathcal{M} = \partial_p m + M^\perp$.)

Théorème : Soit $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\operatorname{div}_y A(y, u_0(\cdot, y)) = 0$. Alors :

1. **Existence et unicité** des solutions du système limite ;
2. **Rigidité** : les sol. du système limite sont de la forme $\mathbf{1}_{p < u}$;
3. **Convergence forte** : lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans L_{loc}^1 ,

$$u^\varepsilon(t, x) - u\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

Résumé général

Cas visqueux :

- ▶ Résultat de convergence forte pour des **données initiales quelconques** (mal préparées).
 - ▶ Système limite :
 - ▶ Équation de la cellule ;
 - ▶ Problème homogénéisé.
- **Découplage des échelles** micro et macro.
- ▶ **Couche initiale** pour les données mal préparées.

Cas hyperbolique :

- ▶ Résultat de convergence forte pour des données initiales **bien préparées**.
 - ▶ Système limite : intrinsèquement **cinétique**
 - ▶ Équation de la cellule ;
 - ▶ Équation d'évolution (\approx formulation cinétique).
- **Pas de découplage des échelles** micro et macro.

Résumé général

Cas visqueux :

- ▶ Résultat de convergence forte pour des **données initiales quelconques** (mal préparées).
 - ▶ Système limite :
 - ▶ Équation de la cellule ;
 - ▶ Problème homogénéisé.
- **Découplage des échelles** micro et macro.
- ▶ **Couche initiale** pour les données mal préparées.

Cas hyperbolique :

- ▶ Résultat de convergence forte pour des données initiales **bien préparées**.
 - ▶ Système limite : intrinsèquement **cinétique**
 - ▶ Équation de la cellule ;
 - ▶ Équation d'évolution (\approx formulation cinétique).
- **Pas de découplage des échelles** micro et macro.

Conclusion

Problèmes ouverts et perspectives

Cas visqueux :

- ▶ Théorie unifiée pour l'existence de solutions du problème de la cellule ?
- ▶ Couche initiale : recherche d'hypothèses moins fortes sur la condition initiale.

Cas hyperbolique :

- ▶ Existence de solutions du problème de la cellule ;
- ▶ Comportement de la solution lorsque la donnée initiale est mal préparée (pour des flux non-linéaires).

Conclusion

Problèmes ouverts et perspectives

Cas visqueux :

- ▶ Théorie unifiée pour l'existence de solutions du problème de la cellule ?
- ▶ Couche initiale : recherche d'hypothèses moins fortes sur la condition initiale.

Cas hyperbolique :

- ▶ Existence de solutions du problème de la cellule ;
- ▶ Comportement de la solution lorsque la donnée initiale est mal préparée (pour des flux non-linéaires).