



Propriétés d'ubiquité en analyse multifractale et séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Arnaud Durand

► To cite this version:

Arnaud Durand. Propriétés d'ubiquité en analyse multifractale et séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés. Mathématiques [math]. Université Paris XII Val de Marne, 2007. Français. NNT: . tel-00185375

HAL Id: tel-00185375

<https://theses.hal.science/tel-00185375>

Submitted on 6 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XII – VAL DE MARNE
École Doctorale de Sciences et d'Ingénierie

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XII

Spécialité : Mathématiques

par

Arnaud DURAND

Sujet :

**Propriétés d'ubiquité en analyse multifractale
et séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés**

soutenue le 25 juin 2007 devant le jury composé de

M. Yann BUGEAUD	Rapporteur
M. Serge COHEN	Rapporteur
M. Kenneth FALCONER	Examineur
M. Jacques ISTAS	Examineur
M. Stéphane JAFFARD	Directeur de thèse
M. Yves MEYER	Examineur
M. Jacques PEYRIÈRE	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus chaleureux à Stéphane Jaffard, pour son encadrement exemplaire. Il a toujours su se rendre disponible pour me guider dans mes recherches et pour répondre à mes questions. Sa gentillesse et ses encouragements, ainsi que ses remarques toujours pertinentes sur mes écrits, m'ont donné l'énergie et l'enthousiasme nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie ensuite Yann Bugeaud et Serge Cohen d'avoir accepté d'assumer la tâche de rapporteur et de faire partie du jury. Leurs commentaires m'ont été très utiles et m'ont permis d'envisager plusieurs prolongements supplémentaires à mes travaux.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Yves Meyer qui, en plus d'être un enseignant et un conférencier mémorable, m'a prodigué de précieux conseils lors de mes années d'études supérieures. Je suis vraiment heureux et honoré de le compter parmi les membres du jury.

Je suis flatté que Kenneth Falconer, dont les travaux sont pour moi une source d'inspiration, se soit intéressé à mes recherches et ait accepté de faire partie du jury. Je suis également honoré de la présence de Jacques Istas et Jacques Peyrière et je les remercie vivement d'avoir répondu si volontiers à l'invitation. Chacun d'entre eux a contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de cette thèse, parfois sans le savoir, mais toujours de façon cruciale.

Durant cette thèse, j'ai eu la chance de participer à plusieurs conférences internationales et d'assister à la naissance du Séminaire Cristolien d'Analyse Multifractale. Ces rencontres mathématiques ont constitué pour moi une occasion remarquable d'échanger des idées. Je tiens donc à remercier leurs organisateurs et leurs participants pour les nombreuses discussions que nous avons partagées. Je pense tout particulièrement à Jean-Marie Aubry, Julien Barral, Hermine Biermé, Julien Brémont, Alexandre Brouste, Céline Lacaux, Clothilde Mélot et Stéphane Seuret, pour ne citer qu'eux.

Je veux en outre remercier le personnel scientifique et administratif du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris 12, notamment son directeur Frank Pacard, qui a toujours fait en sorte que je dispose d'excellentes conditions de travail. Je suis aussi très reconnaissant envers Marie-Odile Perrain qui a accepté d'être la tutrice de mon monitorat et aux côtés de qui j'ai eu beaucoup de plaisir à enseigner. J'en profite pour adresser un salut amical aux thésards passés et actuels du laboratoire. Abdellatif, Aurélia, Boris, Fethi, Habib, Hassen, Marianne, Zaynab et les autres, je garderai un souvenir impérissable de nos discussions passionnantes et de vos encouragements.

Je remercie aussi les poincariens et cachanais qui m'ont toujours offert leur présence et leur amitié : Cyril, David, Jean-François, Julien, Philippe, Renaud, Thomas et Vincent.

Mes parents m'ont appris à sans cesse exiger le meilleur de moi-même, tout en m'offrant les conditions idéales pour tenter d'y parvenir. Je peux désormais les remercier de tout ce qu'ils ont fait pour moi. Je n'oublie pas ma sœur non plus, qui a le mérite de me supporter depuis maintenant plus de vingt ans !

Enfin, je souhaite dédier cette thèse à Marie-Laure, à qui je dois énormément.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Analyse multifractale des fonctions	15
I	Régularité höldérienne d'une fonction	15
II	Techniques d'ondelette	20
III	Géométrie fractale	23
3	Grande intersection et ubiquité homogène	29
I	Introduction	29
II	Ensembles à grande intersection	33
III	Ubiquité homogène	36
IV	Applications à l'approximation diophantienne	39
V	Preuves des résultats de la section II	56
VI	Preuve du théorème 3.2	69
4	Ubiquité hétérogène et théorie des nombres	77
I	Introduction	77
II	Ensembles à grande intersection et similitudes	81
III	Ubiquité hétérogène	82
IV	Applications en théorie des nombres	86
V	Preuve de la proposition 4.1	91
VI	Preuve du théorème 4.1	94
5	Singularités des processus de Lévy	111
I	Présentation des résultats	111
II	Ensembles de singularités	117
III	Modules de continuité	127
IV	Séries lacunaires d'ondelettes	129
6	Constructions récursives et chaînes de Markov	141
I	Introduction	141
II	Résultats préliminaires	149
III	Probabilité de vacuité	154
IV	Majoration de la dimension	160
V	Minoration de la dimension	172
VI	Preuves des résultats de la section II	182

7	Séries d'ondelettes à coefficients corrélés	193
I	Introduction	193
II	Résultats préliminaires	202
III	Cas bifractal	208
IV	Cas multifractal	209
	Bibliographie	221
	Table des figures	229
	Notations introduites	230
	Index des auteurs	234
	Index des notions	236

Chapitre 1

Introduction

Le perfectionnement des techniques d'expérimentation au milieu des années 1980 a permis d'obtenir en soufflerie des enregistrements très précis de la vitesse d'un écoulement turbulent, *cf.* [73]. Les signaux ainsi mesurés paraissent non seulement très irréguliers mais leur irrégularité semble aussi varier brutalement d'un point à l'autre. Ces observations sont en contradiction avec la théorie de la turbulence homogène et isotrope introduite par Kolmogorov en 1941, selon laquelle la vitesse de l'écoulement devrait avoir partout la même irrégularité. C'est dans ce contexte qu'est apparue l'analyse multifractale. Formalisée par G. Parisi et U. Frisch [71], elle devait à l'origine permettre d'étudier la complexité des signaux de turbulence nouvellement mesurés et d'introduire une méthode pour les classer. Avec le développement d'outils numériques, l'analyse multifractale a par la suite trouvé de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'astrophysique, la géophysique, la biologie, le traitement d'image ou les télécommunications.

D'un point de vue plus théorique, l'analyse multifractale a pour objet l'étude de fonctions dont la régularité varie d'un point à un autre. La régularité d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ en un point x de $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) se mesure à l'aide de son exposant de Hölder $h_f(x)$. Il s'agit du supremum de l'ensemble des réels $h \in]0, \infty[$ tels que f est $C^h(x)$, c'est-à-dire tels qu'il existe deux réels strictement positifs κ et δ et un polynôme P vérifiant

$$\|x' - x\| \leq \delta \implies |f(x') - P(x' - x)| \leq \kappa \|x' - x\|^h$$

pour tout point x' . Au vu de ce qui se passe en turbulence, on s'attend généralement à ce que les *ensembles isohöldériens*

$$E_h = \{x \in \mathbb{R}^d \mid h_f(x) = h\},$$

pour $h \in [0, \infty]$, soient des ensembles fractals. Une façon naturelle de rendre compte de leur taille consiste alors à déterminer leur dimension de Hausdorff, notée $\dim$. La fonction

$$d_f : h \mapsto \dim E_h,$$

appelée spectre de singularités de la fonction f , joue donc un rôle central en analyse multifractale. On dit même que faire l'analyse multifractale d'une fonction, c'est calculer son spectre de singularités. En outre, on appelle fonction multifractale toute fonction dont les ensembles isohöldériens E_h sont non vides pour h parcourant au moins un intervalle d'intérieur non vide. Nous renvoyons au chapitre 2 pour une définition plus précise des notions évoquées ci-dessus.

Les premières fonctions qualifiées aujourd'hui de multifractales ont été considérées au début du XIX^e siècle pour répondre à la question de l'existence de fonctions continues nulle part dérivables. Bolzano a obtenu en 1830 un exemple de telle fonction en superposant des fonctions en dents de scie d'amplitude de plus en plus petite. Riemann pensait pour sa part que la série trigonométrique

$$\mathcal{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

fournissait un autre exemple de fonction continue nulle part dérivable. Cependant, cette fonction est dérivable en certains rationnels. Elle constitue tout de même un exemple de fonction multifractale. En effet, S. Jaffard [91] a établi que son spectre de singularité est la fonction donnée par $d_{\mathcal{R}}(h) = 4h - 2$ pour $h \in [1/2, 3/4]$, par $d_{\mathcal{R}}(3/2) = 0$ et par $d_{\mathcal{R}}(h) = -\infty$ pour toute autre valeur de h .

Parmi les autres exemples d'objets multifractals considérés avant même l'apparition de l'analyse multifractale, citons les cascades multiplicatives de B. Mandelbrot [122, 123]. Ces mesures aléatoires, ensuite étudiées par J.-P. Kahane et J. Peyrière [103], avaient pour but de modéliser la dissipation d'énergie d'un écoulement turbulent. Il est remarquable que ce modèle ait été formulé avant même qu'on dispose des enregistrements suggérant la structure multifractale des signaux de turbulence.

Les trajectoires de certains processus aléatoires fournissent d'autres exemples de fonctions multifractales. Comme l'a montré S. Jaffard [93], c'est le cas du processus de Lévy. C'est aussi le cas de plusieurs modèles de séries aléatoires d'ondelettes comme ceux étudiés par J.-M. Aubry et S. Jaffard [6, 94]. Le chapitre 5 revient sur l'étude de ces processus, tandis que le chapitre 7 introduit un nouveau modèle de séries aléatoires d'ondelettes dont les trajectoires sont des fonctions multifractales.

Le spectre de singularités donne une première description des propriétés de taille des ensembles isohöldériens d'une fonction. On peut fournir une information plus précise en calculant, pour toute fonction de jauge g , la g -mesure de Hausdorff de chaque ensemble isohöldérien. Nous renvoyons à la section III du chapitre 2 pour une définition de cette mesure. On peut aussi s'intéresser à certaines propriétés géométriques plus profondes. Ainsi, S. Jaffard remarque dans [95] que, pour plusieurs fonctions multifractales f , les ensembles

$$\tilde{E}_h = \{x \in \mathbb{R}^d \mid h_f(x) \leq h\}, \quad (1.1)$$

pour $h \in [0, \infty]$, sont des *ensembles à grande intersection*. Un des objectifs de cette thèse est d'étayer cette observation.

La classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ des ensembles à grande intersection de dimension de Hausdorff supérieure à $s \in]0, d]$ a été définie par K. Falconer [63] comme la collection des ensembles F qui sont des G_δ de $\mathbb{R}^d$ et qui vérifient la condition

$$\dim \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \geq s$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de $\mathbb{R}^d$. Il s'agit de la plus grande collection possible de G_δ de $\mathbb{R}^d$ de dimension plus grande que s qui est stable par intersection dénombrable et par toutes les similitudes de $\mathbb{R}^d$. Cette classe a été introduite afin de fournir un cadre général à l'étude de diverses familles d'ensembles de dimension au moins s , apparues dans

la théorie de l'approximation diophantienne et dans celle des systèmes dynamiques, qui vérifient la propriété que la dimension d'une intersection dénombrable de leurs membres est encore au moins s . Cette propriété est plutôt paradoxale étant donné qu'on s'attend en général à ce que l'intersection de deux parties de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives d_1 et d_2 soit de dimension $d_1 + d_2 - d$, conformément à ce qui se passe dans le cas de deux sous-espaces affines, *cf.* [64, ch. 8].

L'appartenance d'un ensemble à la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer indique que cet ensemble vérifie une propriété de grande intersection et qu'il est de dimension de Hausdorff au moins s , mais ne donne aucune information supplémentaire concernant la taille de cet ensemble. Par exemple, on ne peut a priori pas savoir si sa mesure de Hausdorff s -dimensionnelle est nulle ou strictement positive. Cependant, pour effectuer l'analyse multifractale d'une fonction, il est en général nécessaire de montrer que certaines mesures de Hausdorff sont strictement positives. C'est principalement pour cette raison que nous introduisons dans le chapitre 3 de nouvelles classes d'ensembles à grande intersection qui sont plus fines que celles de K. Falconer. Ainsi, à toute fonction de jauge g qui croît plus vite au voisinage de l'origine que la fonction $r \mapsto r^d$ (notée Id^d par la suite), et à tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, nous associons une classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection dans V relativement à g . La classe $G^g(V)$ présente la propriété remarquable d'être stable par intersection dénombrable. De plus, tout ensemble de $G^g(V)$ est de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie, pour toute jauge $\bar{g}$ qui croît plus vite que g au voisinage de l'origine.

Les classes $G^g(V)$ permettent de décrire de façon exhaustive les propriétés de grande intersection des ensembles intervenant dans la théorie classique de l'approximation diophantienne, comme par exemple l'ensemble

$$K_{d,\psi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < \psi(q) \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^* \right. \right\} \quad (1.2)$$

des points ψ -approchables par des rationnels, où $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0. Nous montrons ainsi dans le chapitre 3 que, pour toute jauge g qui croît plus vite que Id^d au voisinage de l'origine et tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble $K_{d,\psi}$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si la série $\sum_q g(\psi(q))q^d$ diverge. De surcroît, nous décrivons complètement les propriétés de taille de $K_{d,\psi}$ en calculant $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V)$ pour toute jauge g et tout ouvert V de $\mathbb{R}^d$. De la sorte, nous étendons le théorème de Jarník [100] à toutes les fonctions de jauge possibles. Nous pouvons en déduire les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble de Liouville car ce dernier peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ensembles de la forme $K_{1,\psi}$. Nous nous intéressons aussi à l'approximation inhomogène, à l'approximation avec restrictions ou encore à l'approximation par des réels algébriques. Cela permet notamment de préciser des résultats de Y. Bugeaud [38] concernant la classification de Koksma [109] des réels transcendants.

Comme le montrent les résultats des chapitres 5 et 7, les classes $G^g(V)$ sont également bien adaptées à l'étude des propriétés de grande intersection des ensembles $\tilde{E}_h$ définis par (1.1) dans le cas des processus de Lévy ou de certaines séries aléatoires d'ondelettes. Cette étude conduit en outre à une description complète des propriétés de taille des ensembles isohöldériens de ces processus stochastiques.

L'abondance des ensembles à grande intersection en approximation diophantienne et en analyse multifractale des fonctions peut paraître surprenante tant les propriétés de

grande intersection sont paradoxales. Elle s'explique en fait par l'observation suivante. Les ensembles $\tilde{E}_h$ et les diverses généralisations de l'ensemble $K_{d,\psi}$ sont très souvent des intersections dénombrables d'ensembles de la forme

$$F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < \varphi(r_i) \text{ pour une infinité de } i \in I\}, \quad (1.3)$$

où I un ensemble infini dénombrable d'indices, $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille dans $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ et φ une fonction positive et croissante sur $[0, \infty[$. Nous montrons dans le chapitre 3 que l'ensemble F_φ appartient toujours à une certaine classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection dès que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ forme un *système d'ubiquité homogène* dans l'ouvert non vide V , c'est-à-dire dès que l'ensemble F_{Id} associé à la fonction identité est de mesure de Lebesgue pleine dans V .

Le chapitre 4 fournit un résultat analogue dans le cas des *systèmes d'ubiquité hétérogène* introduits par J. Barral et S. Seuret [8]. Plus précisément, pour tout réel $t \in [1, \infty[$, considérons l'ensemble

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } i \in I^{\mu,\alpha}\},$$

où $I^{\mu,\alpha}$ désigne l'ensemble des $i \in I$ indexant les boules de centre x_i et de rayon r_i qui, au sens d'une mesure borélienne finie μ fixée, ont une masse qui se comporte comme r_i^α pour un certain réel α strictement positif. J. Barral et S. Seuret ont déterminé la dimension de Hausdorff de F_t lorsque la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement à μ , ce qui impose certaines conditions sur la répartition des boules de centre x_i et de rayon r_i et sur le comportement d'échelle de la mesure μ . Nous montrons que, sous les mêmes hypothèses, l'ensemble F_t vérifie une propriété de grande intersection, au sens qu'il appartient à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$ pour une fonction de jauge g bien déterminée.

En prenant pour mesure μ une mesure multinomiale, nous en déduisons par exemple que l'ensemble des réels approchables à une certaine vitesse par des rationnels vérifiant certaines *conditions de Besicovitch* contient un ensemble à grande intersection. Ces conditions, introduites par J. Barral et S. Seuret [8, 11], imposent les fréquences asymptotiques des entiers apparaissant dans le développement en base $c \geq 2$ des rationnels sur lesquels elles portent.

De la même manière, en choisissant pour mesure μ la mesure de Gibbs associée à un certain potentiel höldérien f , nous pouvons étudier les propriétés de grande intersection de l'ensemble des points approchables à une certaine vitesse par des rationnels en lesquels les moyennes des sommes de Birkhoff associées à f convergent vers un certain réel fixé.

Le chapitre 5 présente plusieurs exemples d'ensembles à grande intersection issus de l'analyse multifractale des processus. C'est en particulier le cas des ensembles $\tilde{E}_h$ définis par (1.1) lorsque le processus considéré est un processus de Lévy. Nous prouvons en effet que ces ensembles appartiennent à certaines classes $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection et nous caractérisons les fonctions de jauge g pour lesquelles un ensemble $\tilde{E}_h$ donné appartient à la classe $G^g(V)$. Cette caractérisation fait intervenir des conditions d'intégrabilité relativement à la mesure de Lévy du processus de Lévy considéré. Nous en déduisons la description complète des propriétés de taille des ensembles isohöldériens E_h . Plus précisément, nous calculons leur g -mesure de Hausdorff dans tout ouvert V pour toute fonction de jauge g . En considérant le cas particulier des jauges qui sont des fonctions puissances, on peut retrouver le résultat de S. Jaffard [93] concernant le spectre de singularités des trajectoires du processus de Lévy. Ajoutons que nous rencontrons aussi

des ensembles à grande intersection lors de l'étude des points où une fonction donnée ne peut être un module de continuité de ce processus.

Nous obtenons, toujours dans le chapitre 5, des résultats analogues lorsque les ensembles $\tilde{E}_h$ et E_h sont associés à un modèle de séries lacunaires d'ondelettes généralisant celui étudié par S. Jaffard dans [94]. La pertinence de ce modèle provient du fait que de nombreux signaux, images ou fonctions mathématiques admettent, dans une base d'ondelettes, une décomposition qui comporte très peu de coefficients non nuls. On peut citer en exemple les fonctions C^∞ par morceaux, les images débruitées par seuillage et les solutions de certaines équations hyperboliques, *cf.* [45, 50, 52].

Les coefficients de ces séries lacunaires d'ondelettes sont des variables aléatoires indépendantes. Cette propriété n'est cependant pas vérifiée sur les signaux naturels. On observe en effet que leurs coefficients d'ondelette présentent certaines corrélations. En particulier, les grands coefficients d'ondelette ont tendance à se propager à travers les échelles, *cf.* [120, 121]. Pour le cas d'une image, ce phénomène provient du fait que les contours créent des singularités. On peut donc s'attendre à ce qu'un modèle de série aléatoire d'ondelettes à coefficients corrélés soit plus efficace dans les applications en traitement du signal.

C'est pour cette raison que M. Crouse, R. Nowak et R. Baraniuk [42] ont introduit le modèle d'arbre de Markov caché. Présentons-le rapidement. On considère une chaîne de Markov à espace d'états $\{0, 1\}$ indexée par l'arbre binaire. Cela signifie que pour tout sommet u de l'arbre, conditionnellement aux états des sommets qui ne sont pas des descendants de u , les états des fils de u ne dépendent que de l'état du sommet u lui-même. Conditionnellement à la chaîne de Markov, les coefficients d'ondelette sont indépendants et le coefficient d'ondelette indexé par un intervalle dyadique λ donné est une variable gaussienne centrée dont la variance est petite ou grande selon l'état que la chaîne de Markov attribue au sommet de l'arbre binaire correspondant à λ . La chaîne de Markov sous-jacente permet donc de modéliser les corrélations entre les coefficients d'ondelette. De plus, la loi de chaque coefficient d'ondelette est un mélange gaussien. Cette propriété est en accord avec le fait que l'histogramme des coefficients d'ondelette d'un signal naturel est généralement plus concentré en 0 et décroît moins vite à l'infini qu'une gaussienne.

Nous étudions dans le chapitre 7 les propriétés de régularité ponctuelle d'un modèle de séries aléatoires d'ondelettes s'inspirant du modèle d'arbre de Markov caché. Nous déterminons en particulier la loi du spectre de singularités de leurs trajectoires. Ce spectre présente la propriété remarquable d'être aléatoire. Aucun des processus multifractals étudiés jusqu'à maintenant, comme les processus de Lévy usuels ou en temps multifractal [12, 93] ou les séries aléatoires d'ondelettes à coefficients indépendants de J.-M. Aubry et S. Jaffard [6, 94], ne vérifie ce genre de propriété. Les séries d'ondelettes construites à partir de mesures multifractales par J. Barral et S. Seuret [9] ne la vérifient pas non plus, bien que leurs coefficients d'ondelette présentent de fortes corrélations. Il en va de même pour les séries aléatoires d'ondelettes basées sur un processus de branchement simple étudiées par A. Brouste [31].

Les classes d'ensembles à grande intersection introduites dans le chapitre 3 jouent à nouveau un rôle prépondérant dans cette étude, car certaines d'entre elles contiennent les ensembles $\tilde{E}_h$ définis par (1.1).

L'étude des séries aléatoires d'ondelettes définies dans le chapitre 7 fait intervenir de manière cruciale un ensemble fractal construit à partir d'une chaîne de Markov sur l'arbre binaire. Cet ensemble s'inscrit dans une large classe que nous introduisons et étudions

dans le chapitre 6. Celle-ci englobe les *constructions récursives aléatoires* considérées par K. Falconer [61], S. Graf [75], ainsi que R. Mauldin et S. Williams [126], qui sont elles-mêmes les versions aléatoires des constructions récursives étudiées par P. Moran [129] et J. Hutchinson [86].

Les constructions que nous considérons s'obtiennent de la manière suivante à partir d'une famille aléatoire $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ de compacts emboîtés de $\mathbb{R}^d$ et d'une chaîne de Markov $(X_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ à espace d'états $\{0, 1\}$ toutes deux indexées par un arbre $\mathcal{U}_0$. Pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$, notons τ_u le plus grand sous-arbre de $\mathcal{U}_0$ constitué de sommets auxquels la chaîne de Markov associe l'état 1, puis désignons par $\partial\tau_u$ l'ensemble des chemins infinis de τ_u . L'intersection des compacts emboîtés indexés par les sommets d'un chemin $\zeta \in \partial\tau_u$ est un singleton $\{x_\zeta\}$. L'ensemble auquel nous nous intéressons est alors

$$\Theta = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_0} \bigcup_{\zeta \in \partial\tau_u} \{x_\zeta\}.$$

Nous déterminons la loi de la dimension de Hausdorff du fractal aléatoire Θ . En particulier, cette dimension prend presque sûrement ses valeurs dans l'ensemble $\{-\infty, 0, d_*\}$, où d_* peut être explicité en fonction des probabilités de transition de la chaîne de Markov et des lois des coefficients de contraction des compacts aléatoires. Pour établir ces résultats, nous reprenons l'idée de K. Falconer [61] d'utiliser des outils provenant de la théorie des écoulements dans les réseaux et nous généralisons les techniques de percolation sur les arbres introduites par R. Lyons et Y. Peres [116]. Nous utilisons également de manière prépondérante des outils issus de la théorie des processus de Galton-Watson en environnement variable.

Nos résultats s'appliquent notamment à une généralisation du processus de percolation fractale introduit par B. Mandelbrot [124], ainsi qu'à diverses généralisations des fractals aléatoires étudiés par K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams dans [61, 75, 76, 126]. Celles-ci sont évoquées dans le chapitre 6.

Plusieurs prolongements des résultats de cette thèse peuvent d'emblée être envisagés. Tout d'abord, comme l'indique M. Dodson dans [48], certains ensembles exceptionnels rencontrés dans la théorie des systèmes dynamiques peuvent s'exprimer à partir d'ensembles issus de la théorie de l'approximation diophantienne analogues à l'ensemble $K_{d,\psi}$ donné par (1.2). Les résultats du chapitre 3 devraient ainsi permettre d'étudier les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles exceptionnels intervenant dans l'étude du nombre de rotation des homéomorphismes du cercle.

Pour étudier les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles exceptionnels provenant de la théorie Kolmogorov-Arnol'd-Moser sur l'existence de tores invariants, il convient avant tout de s'intéresser à une possible généralisation des résultats d'ubiquité homogène du chapitre 3 au cas de l'approximation par des sous-espaces affines. Cela consiste à remplacer l'ensemble F_φ donné par (1.3) par l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $d(x, P_i) < \varphi(r_i)$ pour une infinité de $i \in I$, où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille fixée de sous-espaces affines de $\mathbb{R}^d$ de même dimension et d désigne la distance d'un point à une partie de $\mathbb{R}^d$. Une telle généralisation pourrait en outre s'appliquer au problème de l'approximation diophantienne par des hyperplans affines et ainsi permettre de compléter des résultats récents de V. Beresnevich et S. Velani [21].

On peut ensuite s'intéresser à diverses généralisations du modèle de série aléatoire d'ondelettes étudié dans le chapitre 7. Une première étape consiste à considérer que la

chaîne de Markov sous-jacente prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$, où n désigne un entier supérieur à 2. De la sorte, les coefficients de la série d'ondelettes pourraient prendre n valeurs distinctes à chaque échelle, au lieu de 2 seulement dans le modèle étudié dans le chapitre 7.

Par ailleurs, A. Brouste [31] a développé une méthode d'estimation des paramètres des séries aléatoires d'ondelettes basées sur un processus de branchement simple en utilisant des variations discrètes généralisées quadratiques et quartiques, *cf.* [88]. Étant donné que ce modèle peut se voir comme un cas particulier du modèle d'arbre de Markov caché de M. Crouse, R. Nowak et R. Baraniuk, on peut imaginer que des variations généralisées permettent d'estimer les paramètres du modèle de séries aléatoires étudié dans le chapitre 7 ou d'un modèle qui s'en approche.

Chapitre 2

Analyse multifractale des fonctions

Contenu du chapitre

I	Régularité höldérienne d'une fonction	15
I.1	Régularité uniforme	15
I.2	Modules de continuité et exposant de Hölder	16
I.3	Chirps et exposant d'oscillation	18
II	Techniques d'ondelette	20
III	Géométrie fractale	23
III.1	Mesures et dimension de Hausdorff	23
III.2	Spectres de singularités	26

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et outils que nous utilisons dans la suite de cette thèse. La section I traite des notions de régularité uniforme et de régularité locale des fonctions définies sur une partie de l'espace $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) ou sur le tore $\mathbb{T}^d$. Dans la section II, nous énonçons les critères liant la régularité d'une fonction et la décroissance de ses coefficients d'ondelette. Enfin, dans la section III, nous présentons les notions de mesure et de dimension de Hausdorff dans un espace métrique. Cela nous permet en particulier de définir le spectre de singularités d'une fonction.

I Régularité höldérienne d'une fonction

Le but de l'analyse multifractale est d'étudier les fonctions dont la régularité varie d'un point à un autre. Il convient avant tout d'apporter une définition précise à la notion de régularité d'une fonction. Le fait qu'une fonction soit régulière, c'est-à-dire que son graphe soit globalement lisse, est caractérisé par sa régularité uniforme, abordée dans la première partie de cette section. Le fait que la régularité d'une fonction puisse changer d'un point à un autre, c'est-à-dire que son graphe soit parfois lisse et parfois moins lisse, s'observe en étudiant sa régularité locale. Cette dernière peut s'appréhender à l'aide de l'exposant de Hölder et de l'exposant d'oscillation, qui sont évoqués respectivement dans la deuxième et la troisième partie de cette section. Nos références principales sont ici [96, 97].

I.1 Régularité uniforme

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. La régularité uniforme d'une fonction définie sur l'espace $\mathbb{R}^d$ et prenant ses valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes se traduit par son appartenance aux

espaces de Hölder (non homogènes) $C^h(\mathbb{R}^d)$. Précisons la définition de ces espaces en commençant par le cas où $h \in]0, 1[$. L'espace $C^h(\mathbb{R}^d)$ est alors constitué des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, qui sont continues, bornées et vérifient

$$\sup_{\substack{x, x' \in \mathbb{R}^d \\ x \neq x'}} \frac{|f(x) - f(x')|}{\|x - x'\|^h} < \infty$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Passons au cas où $h = 1$. On définit alors $C^1(\mathbb{R}^d)$, non pas comme l'espace des fonctions continûment dérivables, mais comme la classe de Zygmund (ce choix se justifie dans la section II). Celle-ci est formée des fonctions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continues et bornées, telles qu'il existe un réel $\kappa > 0$ vérifiant

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d \quad \|x'\| \leq 1 \implies |f(x + x') + f(x - x') - 2f(x)| \leq \kappa \|x'\|.$$

Les espaces $C^h(\mathbb{R}^d)$ sont désormais définis lorsque $h \in]0, 1]$. La définition de $C^h(\mathbb{R}^d)$ pour $h > 1$ s'en déduit de la manière suivante. Notons m l'unique entier tel que $m < h \leq m + 1$. On convient qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $C^h(\mathbb{R}^d)$ si elle est bornée, m fois continûment dérivable et si ses dérivées partielles d'ordre m appartiennent à l'espace $C^{h-m}(\mathbb{R}^d)$ défini précédemment (en effet, $h - m$ appartient alors à $]0, 1]$). Comme attendu, les définitions adoptées font que l'appartenance d'une fonction à un espace $C^h(\mathbb{R}^d)$ a un impact sur l'allure de son graphe : pour h compris entre 0 et 1, celui-ci paraît d'autant plus lisse que h est grand.

Ce qui précède s'étend aisément au cas des fonctions à valeurs vectorielles. En effet, pour $d' \in \mathbb{N}^*$ et $h \in]0, \infty[$, on définit $C^h(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d'})$ comme l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}^{d'}$ dont toutes les composantes appartiennent à $C^h(\mathbb{R}^d)$.

Dans le cadre de l'analyse multifractale, comme on s'intéresse surtout à des propriétés de régularité locale, on préfère alors se ramener à un compact tel que le tore normalisé $\mathbb{T}^d$. Rappelons qu'il s'agit du quotient du groupe additif $\mathbb{R}^d$ par le sous-groupe discret $\mathbb{Z}^d$ et ajoutons que, si d vaut 1, on le note simplement $\mathbb{T}$ et on l'appelle plutôt le cercle normalisé. Notons $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ la surjection canonique. Toute fonction $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie naturellement à la fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique $f \circ \phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Cela permet de définir l'espace $C^h(\mathbb{T}^d)$ pour tout réel $h > 0$ par

$$f \in C^h(\mathbb{T}^d) \iff f \circ \phi \in C^h(\mathbb{R}^d).$$

En outre, pour certaines raisons qui sont exposées dans la section II, on requiert souvent des fonctions considérées qu'elles soient uniformément höldériennes, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à l'ensemble

$$C^+(\mathbb{T}^d) = \bigcup_{h>0} C^h(\mathbb{T}^d).$$

I.2 Modules de continuité et exposant de Hölder

La régularité d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ au voisinage d'un point x de $\mathbb{R}^d$ est caractérisée par les modules de continuité qu'elle admet en ce point. Désignons par $\mathfrak{W}$ l'ensemble des fonctions continues et strictement croissantes définies sur un voisinage à droite de l'origine et vérifiant les conditions

$$w(0) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{w(2\delta)}{w(\delta)} < \infty.$$

Notons Id la fonction identité. On observe aisément que les fonctions Id^h et $-\text{Id}^h \cdot \log$ appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{W}$ pour tout réel $h > 0$. Par ailleurs, pour toute partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^d$, désignons par $\text{acc } \mathcal{X}$ l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{X}$.

Définition (module de continuité)

Soient $w \in \mathfrak{W}$ et $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ admet w pour module de continuité en un point $x \in \text{acc } \mathcal{X}$ ou encore que f est $C^w(x)$ s'il existe des réels strictement positifs κ et δ et un polynôme P tels que pour tout $x' \in \mathcal{X}$,

$$\|x' - x\| \leq \delta \implies |f(x') - P(x' - x)| \leq \kappa w(\|x' - x\|).$$

En outre, pour tout réel $h > 0$, on dit que f est $C^h(x)$ si elle est $C^{\text{Id}^h}(x)$ et qu'elle est $C_{\log}^h(x)$ si elle est $C^{-\text{Id}^h \cdot \log}(x)$.

Remarques : • Cette définition s'étend de manière naturelle aux fonctions à valeurs vectorielles en convenant qu'une telle fonction est $C^w(x)$ si chacune de ses composantes l'est.
• Si la fonction f est $C^w(x)$, elle est nécessairement bornée au voisinage de x . C'est pourquoi on considère toujours en pratique des fonctions f localement bornées.
• La dérivation et l'intégration n'impliquent pas nécessairement respectivement une perte et un gain de 1 exactement en régularité au point x . Pour fixer les idées, citons deux exemples. D'une part, la fonction de la variable réelle $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ est $C^2(0)$, alors que sa dérivée $x \mapsto 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, qui n'est pas continue en 0, ne peut être $C^1(0)$. D'autre part, la fonction $x \mapsto x \sin(1/x)$ est $C^1(0)$ et ses primitives sont $C^3(0)$. Observons toutefois qu'intégrer une fonction $C^h(x)$ conduit toujours à une fonction $C^{h+1}(x)$ au moins.

On constate aisément qu'une fonction qui est $C^h(x)$ pour un certain réel $h > 0$ est aussi $C^{h'}(x)$ pour tout $h' \in]0, h[$. La définition suivante s'impose alors.

Définition (exposant de Hölder)

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$. L'exposant de Hölder en un point $x \in \text{acc } \mathcal{X}$ d'une fonction f localement bornée définie sur $\mathcal{X}$ est donné par

$$h_f(x) = \sup \{ h \in]0, \infty[\mid f \text{ est } C^h(x) \}$$

avec la convention que le supremum de l'ensemble vide est nul.

Remarque : Si la fonction f est $C_{\log}^h(x)$ pour un certain réel $h > 0$, elle est $C^{h'}(x)$ pour tout $h' \in]0, h[$. De ce fait, $h_f(x) \geq h$. Pour minorer par h l'exposant de Hölder de f en x , il suffit donc de savoir que f est $C_{\log}^h(x)$.

Les lignes de niveau de la fonction h_f s'appellent les *ensembles isohöldériens* de f . Il s'agit plus précisément des ensembles

$$E_h = \{ x \in \text{acc } \mathcal{X} \mid h_f(x) = h \}$$

pour $h \in [0, \infty]$. Déterminer, en un sens à préciser, les propriétés de taille des ensembles isohöldériens de la fonction f est un enjeu majeur de l'analyse multifractale. Nous y revenons dans la section III.

Lorsque $x \mapsto h_f(x)$ est constante, la fonction f est très régulière dans son irrégularité. C'est par exemple le cas des trajectoires du mouvement brownien B , puisque

$$\text{p.s. } \forall t \in [0, \infty[\quad h_B(t) = \frac{1}{2}.$$

La régularité des trajectoires browniennes est étudiée en détails dans [101, ch. 16] ainsi que dans [104, ch. 2]. Les fonctions de Weierstrass, définies par

$$W_{A,B} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} A^n \cos(B^n x)$$

avec $A < 1 < AB$, fournissent un autre exemple. G. Hardy [80] a en effet établi que leur exposant de Hölder est partout égal à $-\log A / \log B$, cf. [96].

Pour finir, considérons le cas des fonctions définies sur le tore $\mathbb{T}^d$. Soient $w \in \mathfrak{W}$ et $x \in \mathbb{T}^d$. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{T}^d$ est $C^w(x)$ si la fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique $f \circ \phi$ qui lui correspond naturellement est $C^w(\dot{x})$ pour n'importe quel point $\dot{x}$ de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\phi(\dot{x}) = x$. On vérifie sans difficulté que cette définition ne dépend pas du choix de $\dot{x}$. En outre, pour tout réel $h > 0$, on convient comme précédemment que f est $C^h(x)$ si elle est $C^{\text{Id}^h}(x)$ et qu'elle est $C_{\log}^h(x)$ si elle est $C^{-\text{Id}^h \cdot \log}(x)$. Par ailleurs, on définit encore par

$$h_f(x) = \sup \{ h \in]0, \infty[\mid f \text{ est } C^h(x) \}$$

l'exposant de Hölder en un point $x \in \mathbb{T}^d$ d'une fonction bornée f sur $\mathbb{T}^d$ et les ensembles isohöldériens de f sont donnés par

$$E_h = \{ x \in \mathbb{T}^d \mid h_f(x) = h \} \quad (2.1)$$

pour tout élément h de l'intervalle $[0, \infty]$.

I.3 Chirps et exposant d'oscillation

L'exposant de Hölder ne suffit souvent pas pour décrire de manière satisfaisante le comportement d'une fonction f autour d'un point $x \in \mathbb{R}^d$. En effet, des comportements locaux bien différents peuvent conduire à une même valeur pour l'exposant de Hölder. Prenons un réel h strictement positif qui n'est pas un entier pair. On observe que le cusp

$$x' \mapsto \|x' - x\|^h$$

et, pour tout réel strictement positif β , le chirp

$$x' \mapsto \|x' - x\|^h \sin \frac{1}{\|x' - x\|^\beta} \quad (2.2)$$

au comportement beaucoup plus oscillant, ont tous deux h pour exposant de Hölder au point x . Cette constatation impose l'introduction d'une quantité complémentaire permettant de rendre compte du caractère oscillatoire d'une fonction au voisinage d'un point.

Y. Meyer a répondu à ce problème en introduisant la notion d'exposant de chirp, cf. [97, 128]. Cet exposant offre bien une information complémentaire à l'exposant de Hölder dans la description du comportement local des fonctions. Il permet notamment de distinguer un cusp d'un chirp. Il n'est cependant pas totalement satisfaisant. Les auteurs de [4] lui trouvent le défaut d'être instable lors de l'ajout d'une composante arbitrairement régulière mais pas C^∞ . Ce défaut implique en particulier que l'exposant de chirp est inadapté à l'étude de données expérimentales, où le bruit peut s'apparenter à une composante régulière. Cet écueil peut s'éviter en préférant à l'exposant de chirp un autre

exposant répondant aussi aux conditions énoncées précédemment. Il s'agit de l'exposant d'oscillation, introduit dans [4].

L'idée est de considérer les primitives d'ordre fractionnaire très petit de la fonction étudiée. Soient f une fonction localement bornée sur $\mathbb{R}^d$ et x un élément de cet espace. Appelons χ une fonction C^∞ à support compact prenant la valeur 1 sur un voisinage de x et, pour tout réel positif t , posons

$$f^{(-t)} = (I - \Delta)^{-t/2}(\chi f).$$

Ici, $(I - \Delta)^{-t/2}$ est l'opérateur correspondant à une multiplication de la transformée de Fourier par la fonction $\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{-t/2}$. Pour tout réel positif t , notons $h_f^t(x)$ l'exposant de Hölder de la fonction $f^{(-t)}$ au point x . L'exposant d'oscillation se définit alors de la façon suivante.

Définition (exposant d'oscillation, singularité oscillante)

Soient f une fonction localement bornée sur $\mathbb{R}^d$ et x un point de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $h_f(x)$ est fini. L'exposant d'oscillation de f au point x est alors le réel positif $\beta_f(x)$ défini par

$$\beta_f(x) = (\partial_t h_f^t(x))|_{t=0^+} - 1.$$

De plus, on dit que la fonction f présente une singularité oscillante au point x si $\beta_f(x)$ est strictement positif.

Remarque : L'exposant $\beta_f(x)$ n'est pas défini lorsque l'exposant de Hölder $h_f(x)$ est infini. En revanche, sous les hypothèses de la définition, on prouve que la fonction $t \mapsto h_f^t(x)$ est concave sur $\mathbb{R}^+$ et donc dérivable à droite en 0, avec une dérivée supérieure à 1 et éventuellement infinie. L'exposant $\beta_f(x)$ est donc correctement défini, mais peut tout à fait être infini. De plus, $\beta_f(x)$ ne dépend pas de la fonction χ choisie. Pour plus de détails, on peut se référer à [4].

Supposons que la dimension d vaut 1 et que f est le chirp défini par (2.2). Alors, pour tout réel positif t , l'exposant $h_f^t(x)$ est égal à $h + t(\beta + 1)$. Cela découle d'un calcul explicite lorsque t est entier puis de la concavité de la fonction $t \mapsto h_f^t(x)$, cf. [97, ch. 4]. Le comportement oscillatoire que présente ce chirp au voisinage du point x est donc parfaitement capturé par l'exposant d'oscillation, puisqu'on a $\beta_f(x) = \beta$. Plus généralement, le résultat suivant, établi par J.-M. Aubry [5], indique que l'exposant $\beta_f(x)$ rend compte de manière adéquate des oscillations autour du point x de n'importe quelle fonction uniformément höldérienne f .

Théorème 2.1 (J.-M. Aubry)

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ pour un certain réel $\varepsilon > 0$. Pour tous réels positifs $h < h_f(x)$ et $\beta < \beta_f(x)$, la fonction f peut s'écrire

$$\forall x' \in \mathbb{R}^d \quad f(x') = \|x' - x\|^h g\left(\frac{1}{\|x' - x\|^\beta}\right) + r(x')$$

où r est une fonction $C^\alpha(x)$, pour $\alpha > h_f(x)$, et g est une fonction indéfiniment oscillante, i.e. qui admet des primitives de tous ordres bornées sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

Une preuve de ce résultat figure dans [5]. Cette dernière utilise des techniques d'analyse 2-microlocale.

Passons maintenant au cas où f et x sont respectivement une fonction bornée sur le tore $\mathbb{T}^d$ et un élément de ce même tore $\mathbb{T}^d$. La fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique $\dot{f} = f \circ \phi$ qui correspond naturellement à f est donc localement bornée. Notons $\dot{x}$ un élément de $\mathbb{R}^d$ tel que $\phi(\dot{x}) = x$. On pose alors tout simplement $\beta_f(x) = \beta_{\dot{f}}(\dot{x})$, si toutefois ce dernier réel peut être défini. Il est à noter que $\beta_f(x)$ ne dépend pas du choix de $\dot{x}$.

Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$. Les ensembles isohöldériens de la fonction f admettent trivialement la décomposition suivante :

$$\forall h \in [0, \infty[\quad E_h = \bigcup_{\beta \in [0, \infty]} \{x \in \mathbb{T}^d \mid h_f(x) = h \text{ et } \beta_f(x) = \beta\}. \quad (2.3)$$

On s'intéresse particulièrement aux ensembles formant cette union, puisqu'ils regroupent les points ayant le même exposant de Hölder et le même exposant d'oscillation pour la fonction f . Ils sont notés $E_{h,\beta}$, pour $h \in [0, \infty[$ et $\beta \in [0, \infty]$.

Achevons cette section par une remarque générale. Lorsque le problème se pose d'étudier les propriétés de régularité uniforme ou ponctuelle d'une fonction, on revient rarement aux définitions énoncées précédemment. En effet, dès que c'est possible, on préfère utiliser certains critères de régularité. Ces derniers sont exprimés à l'aide des coefficients d'ondelette de la fonction considérée et sont décrits dans la section II.

II Techniques d'ondelette

Les bases orthonormées d'ondelettes sont très utilisées en analyse multifractale des fonctions, notamment pour les raisons suivantes. Tout d'abord, l'exposant de Hölder d'une fonction uniformément höldérienne se caractérise par des conditions de décroissance locale de ses coefficients d'ondelette. Une information suffisante concernant les coefficients d'ondelette d'une telle fonction permet donc de déterminer son exposant de Hölder en un point donné. Réciproquement, une information suffisante sur l'exposant de Hölder en un point de la fonction impose des conditions sur ses coefficients d'ondelette. Ensuite, les formalismes multifractals permettent de majorer le spectre de singularités d'une fonction uniformément höldérienne en sachant simplement qu'elle appartient à certains espaces fonctionnels. Cependant, l'appartenance à ces espaces fonctionnels se caractérise aisément par des conditions sur les coefficients d'ondelette, cf. [92, 96]. Enfin, les bases d'ondelettes permettent de construire sans difficulté des fonctions vérifiant certaines propriétés particulières, comme les fonctions possédant un exposant de Hölder prescrit [90] ou les processus stochastiques étudiés dans les chapitres 5 et 7. Nous renvoyons à [43, 102, 119, 127] pour la construction et les principales propriétés des bases orthonormées d'ondelettes.

Le but de cette section est d'énoncer les critères liant la régularité d'une fonction et la décroissance de ses coefficients d'ondelette. Commençons par noter $\mathcal{I} = \{1, \dots, 2^d - 1\}$ et considérons des ondelettes ψ^i , avec $i \in \mathcal{I}$, dans la classe de Schwartz telles que les fonctions $x \mapsto 2^{dj/2} \psi^i(2^j x - k)$, pour $(i, j, k) \in \mathcal{I} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$, cf. [112]. Ces conditions impliquent que tous les moments des ondelettes ψ^i s'annulent. Étant donné que nous nous intéressons à des propriétés locales, nous préférons travailler avec des ondelettes sur le tore $\mathbb{T}^d$. Celles-ci s'obtiennent en périodisant la base précédente, cf. [127]. Pour $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$, désignons par $\Psi_{j,k}^i$ la

fonction de $\mathbb{T}^d$ qui correspond naturellement à la fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \psi^i(2^j(x - m) - k).$$

Les fonctions $2^{dj/2}\Psi_{j,k}^i$, pour $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$, ainsi que la fonction constante égale à 1, forment alors une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Soit λ un cube dyadique du tore, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{T}^d$ se présentant comme l'image par la surjection canonique $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ d'un cube $2^{-j}(k + [0, 1[^d)$, avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$. On peut montrer qu'en un certain sens, les ondelettes $\Psi_{j,k}^i$, pour $i \in \mathcal{I}$, sont essentiellement concentrées sur le cube λ , cf. [127, p. 65]. Elles permettent donc d'analyser plus particulièrement le comportement des fonctions autour de ce cube. Pour faire état de cela, posons $\Psi_\lambda^i = \Psi_{j,k}^i$. Désignons en outre par $\langle \lambda \rangle$ la génération j du cube λ , par x_λ son point d'ancrage $\phi(k2^{-j})$ et par Λ la collection de tous les cubes dyadiques du tore. Toute fonction f appartenant à $L^2(\mathbb{T}^d)$ peut s'écrire

$$f = m + \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ \lambda \in \Lambda}} c_\lambda^i \Psi_\lambda^i$$

à condition de poser

$$m = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) dx \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad c_\lambda^i = 2^{d\langle \lambda \rangle} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{\Psi_\lambda^i}(x) dx.$$

On nomme les scalaires c_λ^i , pour $i \in \mathcal{I}$ et $\lambda \in \Lambda$, les coefficients d'ondelette de la fonction f . Les ondelettes Ψ_λ^i sont généralement des fonctions à valeurs réelles. C'est pourquoi la barre de conjugaison n'apparaît souvent pas sur cette dernière dans l'intégrale donnant c_λ^i . Signalons que la normalisation adoptée pour les ondelettes Ψ_λ^i et les coefficients d'ondelette c_λ^i correspondants est un peu différente de celle généralement usitée. Cependant, ce choix donne une forme plus agréable aux critères de régularité énoncés ci-après.

Donnons la caractérisation des espaces de régularité uniforme $C^h(\mathbb{T}^d)$, pour $h > 0$. Rappelons que ceux-ci sont corrigés à l'aide de la classe de Zygmund, lorsque h est entier. Cette correction est nécessaire à la validité du résultat suivant, qui est prouvé dans [96].

Proposition 2.1 (critère de régularité uniforme)

Soient $h \in]0, \infty[$ et f une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$. Alors, f appartient à $C^h(\mathbb{T}^d)$ si et seulement si

$$\exists \kappa \in]0, \infty[\quad \forall i \in \mathcal{I} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad |c_\lambda^i| \leq \kappa 2^{-h\langle \lambda \rangle}.$$

Intéressons-nous maintenant aux liens existants entre les coefficients d'ondelette d'une fonction et le fait qu'elle soit $C^h(x)$ ou $C_{\log}^h(x)$, pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{T}^d$. Le résultat suivant, dû à S. Jaffard, relie la régularité locale à des propriétés de 2-microlocalisation. Dans son énoncé, d désigne la distance quotient sur $\mathbb{T}^d$ qui est définie ci-après par (2.5).

Théorème 2.2 (critère de régularité ponctuelle ; S. Jaffard)

Soient $h \in]0, \infty[$, $x \in \mathbb{T}^d$ et f une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$.

(i). Si f est $C^h(x)$, alors

$$\exists \kappa \in]0, \infty[\quad \forall i \in \mathcal{I} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad |c_\lambda^i| \leq \kappa (2^{-\langle \lambda \rangle} + d(x, x_\lambda))^h. \quad (2.4)$$

(ii). Si la condition (2.4) est remplie et si $f \in C^+(\mathbb{T}^d)$, alors f est $C_{\log}^h(x)$.

Une preuve figure dans [97]. Le fait que f soit uniformément höldérienne est nécessaire à la validité de la deuxième partie du théorème. En conséquence, l'étude de la régularité ponctuelle d'une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$ est souvent plus simple quand celle-ci possède un minimum de régularité uniforme.

Sous cette hypothèse, on peut déduire du théorème précédent une formule donnant l'expression de l'exposant de Hölder d'une fonction en un point à partir des coefficients d'ondelette de cette fonction. Pour ce faire, introduisons, pour tout point x de $\mathbb{T}^d$ et tout réel $\delta > 0$, l'ensemble

$$L(x, \delta) = \{ \lambda \in \Lambda \mid 2^{-\langle \lambda \rangle} + d(x, x_\lambda) \leq \delta \}.$$

Pour toute fonction réelle g définie sur l'ensemble Λ des cubes dyadiques du tore, posons

$$\liminf_{\lambda \rightarrow x} g(\lambda) = \lim_{\delta \downarrow 0} \uparrow \inf_{\lambda \in L(x, \delta)} g(\lambda).$$

Grâce à ces notations, donnons maintenant l'expression de l'exposant de Hölder d'une fonction uniformément höldérienne.

Corollaire 2.1 (caractérisation de l'exposant de Hölder)

Soit $f \in C^+(\mathbb{T}^d)$. L'exposant de Hölder de f en un point x de $\mathbb{T}^d$ est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{\lambda \rightarrow x} \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{\log |c_\lambda^i|}{\log (2^{-\langle \lambda \rangle} + d(x, x_\lambda))}.$$

On appelle suite minimisante des coefficients d'ondelette de f en x toute suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de cubes dyadiques de $\mathbb{T}^d$ vérifiant simultanément

$$2^{-\langle \lambda_n \rangle} + d(x, x_{\lambda_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{\log |c_{\lambda_n}^i|}{\log (2^{-\langle \lambda_n \rangle} + d(x, x_{\lambda_n}))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_f(x).$$

On peut établir sans peine l'existence d'une telle suite. L'étude des suites minimisantes permet de déterminer les exposants d'oscillation d'une fonction uniformément höldérienne. Plus précisément, l'exposant d'oscillation est lié à la position dans le plan temps-fréquence des cubes dyadiques formant les suites minimisantes. C'est l'objet du résultat suivant, prouvé dans [4].

Proposition 2.2 (caractérisation de l'exposant d'oscillation ; S. Jaffard)

Soient $f \in C^+(\mathbb{T}^d)$ et $x \in \mathbb{T}^d$ vérifiant $h_f(x) < \infty$. L'exposant d'oscillation $\beta_f(x)$ de f en x est l'infimum de l'ensemble des réels $\beta \geq 0$ tels qu'une suite minimisante des coefficients d'ondelette de f en x est formée de cubes dyadiques $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $d(x, x_\lambda)^{1+\beta} \leq 2^{-\langle \lambda \rangle}$.

Pour terminer cette section, donnons une condition nécessaire pour qu'une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$ soit $C^w(x)$ pour $w \in \mathfrak{W}$ et $x \in \mathbb{T}^d$.

Proposition 2.3 (S. Jaffard)

Soient $w \in \mathfrak{W}$, $x \in \mathbb{T}^d$ et f une fonction bornée sur $\mathbb{T}^d$. Si f est $C^w(x)$, il existe un réel $\kappa > 0$ tel que

$$|c_\lambda^i| \leq \kappa (w(2^{-\langle \lambda \rangle}) + w(d(x, x_\lambda)))$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\langle \lambda \rangle$ assez grand et $d(x, x_\lambda)$ assez petit.

Nous renvoyons à [97] pour une preuve de ce résultat. Dans [97], la proposition 2.3 est formulée à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley de la fonction f . L'énoncé équivalent que nous fournissons ici est en fait tiré de [94].

III Géométrie fractale

Les fonctions dont l'exposant de Hölder peut varier brutalement d'un point à l'autre sont particulièrement intéressantes dans le contexte de l'analyse multifractale. Cependant, lorsqu'une telle fonction provient d'un signal physique, calculer son exposant de Hölder en un point donné semble impossible numériquement et, de surcroît, ne fournit pas une information intéressante. En conséquence, on préfère s'intéresser à la géométrie des ensembles isohöldériens de la fonction f correspondante. Se pose tout d'abord la question de la vacuité de l'ensemble E_h donné par (2.1), pour $h \in [0, \infty]$ fixé. Si cet ensemble est non vide, se pose ensuite la question de sa taille. L'ensemble isohöldérien E_h est souvent de mesure de Lebesgue nulle. Pour étudier plus finement ses propriétés de taille, on détermine alors sa dimension de Hausdorff. On peut même calculer la valeur de sa g -mesure de Hausdorff pour toute fonction de jauge g si une information plus précise est demandée.

Cette section s'organise comme suit. Nous présentons d'abord de manière détaillée les notions de mesure et de dimension de Hausdorff dans un espace métrique. Ces notions nous permettent ensuite de définir le spectre de singularités d'une fonction.

III.1 Mesures et dimension de Hausdorff

La théorie des mesures de Hausdorff est apparue peu après l'introduction de la mesure de Lebesgue et fut développée principalement par Besicovitch. Elle devait notamment répondre au problème de la mesure des objets de dimension strictement inférieure à d dans $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ permet d'attribuer à toute partie mesurable un volume, mais ne permet pas d'assigner de manière raisonnable une aire à une surface contenue dans $\mathbb{R}^3$. Dans cette optique, Carathéodory proposa, vers 1914, des mesures p -dimensionnelles, avec $p \in \{1, \dots, d\}$, dans $\mathbb{R}^d$, grâce à la notion de mesure extérieure qu'il venait d'introduire. Ces mesures p -dimensionnelles permettaient en outre de retrouver la dimension des sous-ensembles réguliers de $\mathbb{R}^d$. Par exemple, une surface de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 2, a une mesure 2-dimensionnelle strictement positive, mais une mesure 3-dimensionnelle nulle. Cependant, cette méthode ne permettait pas d'attribuer de manière claire une dimension à une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$ (comme par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la courbe de Koch présentée sur la figure 2.1 : elle est d'une part, de mesure unidimensionnelle infinie et, d'autre part, de mesure 2-dimensionnelle nulle). Hausdorff [83] répondit à ce problème en 1919 en observant qu'il était en fait possible de définir des mesures semblables à celles de Carathéodory, pour tout réel p compris entre 0 et d . On pouvait alors attribuer une dimension à un objet en choisissant la valeur de p la plus pertinente pour le mesurer.

La suite de cette partie se réfère principalement à [137, ch. 1, ch. 2] et à [64, ch. 2]. Une mesure de Hausdorff est définie sur un espace métrique. Considérons donc un tel espace $(E, \mathcal{d})$. La distance $\mathcal{d}$ permet d'attribuer à tous les ensembles non vides F inclus dans E un diamètre, noté $|F|$, égal au supremum des distances séparant deux éléments de F . Par convention, le diamètre de l'ensemble vide $\emptyset$ vaut 0. La méthode adoptée pour construire les mesures de Hausdorff sur E s'inspire de celle qui a été proposée par Carathéodory. Prenons un sous-ensemble F de E et un réel $\varepsilon > 0$. On appelle ε -recouvrement de F toute suite $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de parties de E de diamètre au plus ε vérifiant

$$F \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} U_p.$$

On note $R_\varepsilon(F)$ l'ensemble des ε -recouvrements de l'ensemble F . Une mesure de Hausdorff se construit à partir d'une fonction appartenant à l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini comme suit.

Définition (fonction de jauge)

Une fonction de jauge est une fonction croissante g définie sur un voisinage à droite de l'origine et vérifiant $\lim_{0+} g = g(0) = 0$. On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble de ces fonctions.

Prenons une jauge $g \in \mathfrak{D}$ et, pour tout réel $\varepsilon > 0$ assez petit, posons

$$\mathcal{H}_\varepsilon^g(F) = \inf_{(U_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_\varepsilon(F)} \sum_{p=0}^{\infty} g(|U_p|).$$

Lorsque ε décroît, il y a de moins en moins de ε -recouvrements, ce qui implique que $\mathcal{H}_\varepsilon^g(F)$ augmente. On peut donc licitement noter

$$\mathcal{H}^g(F) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow \mathcal{H}_\varepsilon^g(F).$$

Cette quantité s'appelle la g -mesure de Hausdorff de l'ensemble F . Les résultats de [137] garantissent que $\mathcal{H}^g$ est une mesure extérieure sur E et une mesure sur la tribu borélienne de E , c'est-à-dire que $\mathcal{H}^g(F) \in [0, \infty]$ pour toute partie F de E , que $\mathcal{H}^g(\emptyset) = 0$, que $\mathcal{H}^g(F) \leq \mathcal{H}^g(F')$ pour toutes parties F et F' de E vérifiant $F \subset F'$ et que

$$\mathcal{H}^g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^g(F_n)$$

pour toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E , avec égalité si les ensembles F_n , pour $n \in \mathbb{N}$, sont des boréliens disjoints de E .

Il est généralement facile de montrer que la g -mesure de Hausdorff d'une partie donnée de E est nulle, puisqu'il suffit de trouver une famille convenable de recouvrements de cette partie. En revanche, il est d'ordinaire beaucoup plus difficile d'établir qu'un sous-ensemble donné de E est de g -mesure de Hausdorff non nulle, car il est nécessaire de considérer tous les recouvrements possibles du sous-ensemble auquel on s'intéresse. On peut alors faire appel au *principe de distribution de masse*.

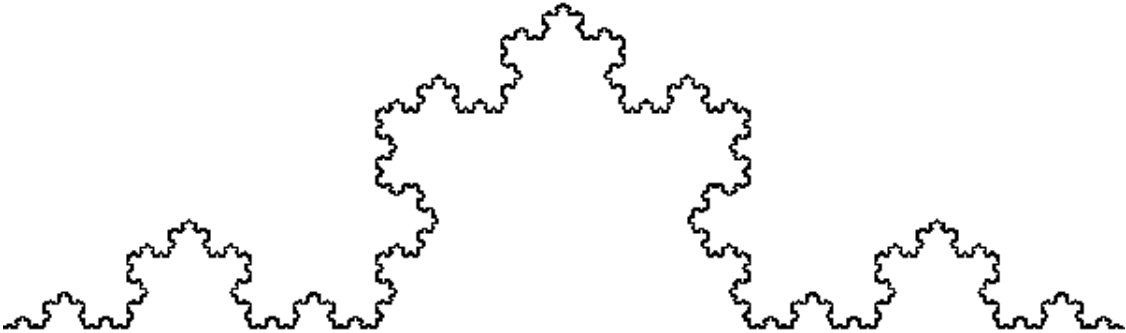


FIG. 2.1 – La courbe de Koch (1904)

Proposition 2.4 (principe de distribution de masse)

Soient F une partie de E et μ une mesure extérieure sur E vérifiant $\mu(F) > 0$. Soit $g \in \mathfrak{D}$. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs κ et ε_0 tels que

$$\forall U \subset E \quad |U| \leq \varepsilon_0 \implies \mu(U) \leq \kappa g(|U|).$$

Alors la g -mesure de Hausdorff de F est minorée par $\mu(F)/\kappa > 0$.

// Soient $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $(U_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_\varepsilon(F)$. Alors,

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{p=0}^{\infty} U_p\right) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \mu(U_p) \leq \kappa \sum_{p=0}^{\infty} g(|U_p|).$$

On obtient alors le résultat en prenant l'infimum sur $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ parcourant $R_\varepsilon(F)$, puis en faisant tendre ε vers 0. //

Le principe de distribution de masse est très utile en pratique, d'autant que la construction de la mesure extérieure μ est souvent suggérée par la structure de l'ensemble considéré. Il conduit à plusieurs résultats centraux en analyse multifractale comme le théorème d'ubiquité établi par S. Jaffard dans [94] et ses généralisations que constituent les théorèmes 3.2 et 4.1 des chapitres 3 et 4 respectivement.

Une famille de mesures de Hausdorff sur E se distingue particulièrement. Elle s'obtient lorsque g est égale à la fonction Id^s , où s est un réel strictement positif. Dans ce cas, on note simplement $\mathcal{H}^s$ au lieu de $\mathcal{H}^{\text{Id}^s}$ et, pour toute partie F de E , on appelle $\mathcal{H}^s(F)$ la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de F .

La notion de dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble de E s'appuie sur deux observations concernant les mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^s$. Soit F une partie de E . On remarque d'une part que la fonction $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ décroît sur $]0, \infty[$. D'autre part, si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ pour un certain réel $s > 0$, alors $\mathcal{H}^t(F) = 0$ pour tout réel $t > s$. La définition suivante, tirée par exemple de [64], s'impose alors naturellement.

Définition (dimension de Hausdorff)

Soit F un sous-ensemble non vide de E . Il existe un unique $s_0 \in [0, \infty[$ tel que, pour tout $s \in]0, \infty[$,

$$\begin{cases} s < s_0 & \implies & \mathcal{H}^s(F) = \infty \\ s > s_0 & \implies & \mathcal{H}^s(F) = 0. \end{cases}$$

Cette valeur critique s_0 s'appelle la dimension de Hausdorff de l'ensemble F et se note $\dim F$. On convient en outre que $\dim \emptyset = -\infty$.

Deux propriétés élémentaires, prouvées dans [64], et découlant du fait que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure sur E , sont particulièrement utiles pour obtenir des liens entre les dimensions de Hausdorff de plusieurs sous-ensembles de E . D'une part, si F et F' sont deux parties de E ,

$$F \subset F' \implies \dim F \leq \dim F'.$$

D'autre part, si $(F_n)_{n \in \mathcal{N}}$ est une famille de parties de E indexée par $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$,

$$\dim \bigcup_{n \in \mathcal{N}} F_n = \sup_{n \in \mathcal{N}} \dim F_n.$$

Considérons maintenant le cas particulier de l'espace $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) et celui du tore $\mathbb{T}^d$. L'espace $\mathbb{R}^d$, muni de la distance issue d'une norme quelconque notée $\|\cdot\|$, est un espace métrique. On peut donc considérer des mesures de Hausdorff sur $\mathbb{R}^d$ et assigner à toute partie de cet espace une dimension de Hausdorff. Le tore $\mathbb{T}^d$ peut aussi se doter d'une structure métrique. Rappelons qu'il est défini comme le quotient du groupe additif $\mathbb{R}^d$ par le sous-groupe discret $\mathbb{Z}^d$ et que $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ est la surjection canonique qui correspond à ce passage au quotient. Le tore $\mathbb{T}^d$ dispose alors naturellement de la distance quotient définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^d \quad d(x, y) = \min_{\substack{\dot{x} \in \phi^{-1}(\{x\}) \\ \dot{y} \in \phi^{-1}(\{y\})}} \|\dot{x} - \dot{y}\|. \quad (2.5)$$

Cela permet de considérer des mesures de Hausdorff sur le tore et d'attribuer une dimension de Hausdorff à tout sous-ensemble de $\mathbb{T}^d$. Les propriétés de taille d'un tel sous-ensemble sont très proches de celles de son relèvement dans $\mathbb{R}^d$ puisqu'il existe un réel $\kappa \geq 1$ tel que pour toute jauge g de $\mathfrak{D}$ et toute partie F de $\mathbb{T}^d$,

$$\mathcal{H}^g(F) \leq \mathcal{H}^g(\phi^{-1}(F) \cap [0, 1[^d) \leq \kappa \mathcal{H}^g(F). \quad (2.6)$$

Terminons cette partie par une remarque. Considérons une fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ et supposons que $g(r)/r^d$ ne tend pas vers l'infini quand r tend vers 0. La mesure $\mathcal{H}^g$ est alors une mesure borélienne invariante par translation qui attribue une masse finie aux compacts de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{T}^d$). Elle est donc égale, à une constante multiplicative près, à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{T}^d$). Si l'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme euclidienne et si $g = \text{Id}^d$, cette constante vaut $(4/\pi)^{d/2} \Gamma(1 + d/2)$ comme l'indique le théorème 30 de [137]. En particulier, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ et la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ coïncident sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

III.2 Spectres de singularités

Considérons une fonction f bornée sur le tore $\mathbb{T}^d$. Rappelons que les ensembles isohöldériens E_h , définis par (2.1), regroupent les points du tore dont l'exposant de Hölder est égal à un certain $h \in [0, \infty]$ fixé. Afin de rendre compte de la taille de ces ensembles, on s'intéresse à la fonction

$$\begin{aligned} d_f : [0, \infty] &\rightarrow \{-\infty\} \cup [0, d] \\ h &\mapsto \dim E_h. \end{aligned}$$

Cette fonction se nomme le spectre de singularités de f et constitue une des fins de l'analyse multifractale : en effet, faire l'analyse multifractale de la fonction f , c'est calculer son spectre d_f . L'ensemble des $h \in [0, \infty]$ tels que $d_f(h) > -\infty$ (ou, de manière équivalente, tels que $E_h \neq \emptyset$) est le support de d_f . Quand ce dernier contient un intervalle non réduit à un point, la fonction f est qualifiée de multifractale. Déterminer le spectre de singularités d'une fonction multifractale se ramène donc au problème souvent délicat d'évaluer simultanément la dimension de Hausdorff de plusieurs sous-ensembles du tore.

La décomposition (2.3) des ensembles isohöldériens conduit à considérer de surcroît, pour $h \in [0, \infty[$ et $\beta \in [0, \infty]$, la collection $E_{h,\beta}$ des points du tore dont l'exposant de Hölder est égal à h et dont l'exposant d'oscillation est égal à β . On peut alors aussi s'intéresser au spectre de singularités oscillantes de f . Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} d_f^{\text{osc}} : [0, \infty[\times [0, \infty] &\rightarrow \{-\infty\} \cup [0, d] \\ (h, \beta) &\mapsto \dim E_{h,\beta}. \end{aligned}$$

Observons que l'union apparaissant dans l'égalité (2.3) porte a priori sur un nombre indénombrable d'ensembles. Par conséquent,

$$d_f(h) \geq \sup_{\beta \in [0, \infty]} d_f^{\text{osc}}(h, \beta)$$

pour tout $h \in [0, \infty[$, sans nécessairement qu'il y ait égalité (même si elle a souvent lieu en pratique). Le spectre de singularités oscillantes d_f^{osc} fournit une information plus riche que celle portée par d_f . Signalons cependant que la simple connaissance du spectre de singularités d_f est d'ordinaire suffisante.

Chapitre 3

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Contenu du chapitre

I	Introduction	29
II	Ensembles à grande intersection	33
III	Ubiquité homogène	36
IV	Applications à l'approximation diophantienne	39
IV.1	Approximation diophantienne simultanée homogène	40
IV.2	Approximation diophantienne simultanée inhomogène	46
IV.3	Approximation diophantienne avec restrictions	47
IV.4	Approximation par des nombres algébriques et classification de Koksma des réels transcendants	50
IV.5	Approximation de zéro par des valeurs de polynômes et classification de Mahler des réels transcendants	54
V	Preuves des résultats de la section II	56
V.1	Résultats préliminaires	57
V.2	Preuve du théorème 3.1	66
V.3	Preuve de la proposition 3.2	69
VI	Preuve du théorème 3.2	69

I Introduction

Dans la théorie de l'approximation diophantienne, on souhaite très souvent déterminer la taille d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) de la forme

$$F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < \varphi(r_i) \text{ pour une infinité de } i \in I\} \quad (3.1)$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme arbitraire, I un ensemble infini dénombrable d'indices, $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ et φ une fonction positive et croissante sur $[0, \infty[$. Lorsque l'ensemble F_φ est de mesure de Lebesgue nulle, on cherche en général à calculer sa dimension de Hausdorff. Si une information plus précise sur sa taille est requise, on peut en outre s'intéresser à la valeur de sa g -mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^g$ pour toute fonction de jauge g , c'est-à-dire pour toute fonction g appartenant à l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini dans la

section III du chapitre 2. Nous proposons de montrer que, sous une hypothèse simple concernant la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$, l'ensemble F_φ vérifie une propriété de *grande intersection*. Cela fournit en particulier une condition suffisante sur $g \in \mathfrak{D}$ pour que la g -mesure de Hausdorff d'une intersection dénombrable d'ensembles de la forme (3.1) soit infinie.

Donnons un premier exemple d'ensemble de la forme (3.1). Il s'agit pour tout réel strictement positif τ de l'ensemble

$$J_\tau = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right. \right\}$$

des réels τ -approchables par des rationnels. Un célèbre théorème de Dirichlet assure que $J_\tau = \mathbb{R}$ si $\tau \leq 2$, cf. [81]. Dans le cas contraire, J_τ est de mesure de Lebesgue nulle et Jarník et Besicovitch ont indépendamment établi que sa dimension de Hausdorff est égale à $2/\tau$, cf. [29, 99]. De surcroît, K. Falconer [63] a prouvé que J_τ vérifie une propriété de grande intersection, au sens qu'il appartient à la classe $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$. Rappelons que la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ des ensembles à grande intersection de dimension de Hausdorff supérieure à $s \in]0, d]$ est la collection des ensembles F qui sont des G_δ de $\mathbb{R}^d$ et qui vérifient

$$\dim \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \geq s \quad (3.2)$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de $\mathbb{R}^d$. Il s'agit de la plus grande collection possible de G_δ de $\mathbb{R}^d$ de dimension supérieure à s à être stable par intersection dénombrable et par les similitudes de $\mathbb{R}^d$. K. Falconer l'a introduite afin de fournir un cadre général à l'étude de toute une variété de familles d'ensembles de dimension au moins s , apparues dans la théorie de l'approximation diophantienne et dans celle des systèmes dynamiques, qui vérifient la propriété que la dimension d'une intersection dénombrable de leurs membres est encore au moins s , cf. [63]. Signalons que cette propriété peut paraître paradoxale étant donné qu'on s'attend en général à ce que l'intersection de deux parties de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives d_1 et d_2 soit de dimension $d_1 + d_2 - d$, conformément à ce qui se passe dans le cas de deux sous-espaces affines, cf. [64, ch. 8].

L'ensemble J_τ des réels τ -approchables par des rationnels peut se généraliser de la manière suivante. Prenons une suite décroissante $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0 et portons notre attention sur l'ensemble

$$K_{d,\psi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < \psi(q) \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^* \right. \right\}$$

des points ψ -approchables par des rationnels, qui est encore de la forme (3.1). Khintchine [105] a établi que sa mesure de Lebesgue est pleine ou nulle dans $\mathbb{R}^d$ suivant respectivement que la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge ou converge. Jarník [100] a décrit plus précisément les propriétés de taille de l'ensemble $K_{d,\psi}$ en déterminant sa g -mesure de Hausdorff pour certaines jauges g appartenant au sous-ensemble $\mathfrak{D}_d$ de $\mathfrak{D}$ qui est défini comme suit.

Définition

On note $\mathfrak{D}_d$ l'ensemble des jauges $g \in \mathfrak{D}$ pour lesquelles la fonction $r \mapsto g(r)/r^d$ est décroissante et strictement positive sur un voisinage à droite strict de l'origine.

On observe aisément que toute fonction de $\mathfrak{D}_d$ est continue au voisinage de l'origine. En outre, pour toutes fonctions $\bar{g}$ et g de $\mathfrak{D}_d$, on écrit $\bar{g} \prec g$ si la fonction $\bar{g}/g$ décroît au voisinage de 0 et admet l'infini pour limite en ce point. Désignons par Id la fonction identité. Le résultat de Jarník, amélioré par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19], s'énonce ainsi : pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $g \prec \text{Id}^d$, la g -mesure de Hausdorff de $K_{d,\psi}$ est infinie ou nulle selon respectivement que la série $\sum_q g(\psi(q))q^d$ diverge ou converge. Ce critère permet en particulier de déterminer la dimension de Hausdorff $s_{d,\psi}$ de $K_{d,\psi}$. Grâce aux résultats de la section IV, on peut de plus établir que $K_{d,\psi}$ appartient à la classe d'ensembles à grande intersection $\mathcal{G}^{s_{d,\psi}}(\mathbb{R}^d)$ quand $s_{d,\psi}$ est strictement positif. Cette dernière propriété ne nous satisfait toutefois pas totalement pour les raisons suivantes. Alors que ψ peut se voir comme un raffinement de la suite $(q^{-\tau})_{q \in \mathbb{N}^*}$, la classe $\mathcal{G}^{s_{d,\psi}}(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer qui contient $K_{d,\psi}$ ne rend pas compte de la complexité éventuelle de ψ . Plus généralement, pour $s \in]0, d]$, l'appartenance d'un ensemble à la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ indique qu'il vérifie une propriété de grande intersection et qu'il est de dimension au moins s , mais ne donne aucune information plus précise concernant la taille de cet ensemble.

C'est notamment pour répondre à ce problème que nous introduisons dans la section II de nouvelles classes d'ensembles à grande intersection qui sont plus fines que celles de K. Falconer. Ainsi, à toute fonction de jauge g appartenant à $\mathfrak{D}_d$ et à tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, nous associons une classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection dans l'ouvert V relativement à la jauge g . La classe $G^g(V)$ présente la propriété remarquable d'être stable par intersection dénombrable. De plus, tout ensemble appartenant à $G^g(V)$ est de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie, pour toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$. Enfin, les classes $G^g(V)$ sont bien adaptées à l'étude de $K_{d,\psi}$. Le théorème 3.5 établi dans la section IV montre en effet que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble $K_{d,\psi}$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si la série $\sum_q g(\psi(q))q^d$ diverge. Ce résultat décrit en outre de façon exhaustive les propriétés de taille de $K_{d,\psi}$: pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ et tout ouvert V de $\mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ (resp. $= 0$) si $\sum_q g_d(\psi(q))q^d = \infty$ (resp. $< \infty$), avec

$$g_d : r \mapsto r^d \inf_{\rho \in]0, r]} \frac{g(\rho)}{\rho^d}. \quad (3.3)$$

Nous étendons ainsi le théorème de Jarník qui, rappelons-le, ne concerne que les jauges g appartenant à $\mathfrak{D}_d$ et vérifiant $g \prec \text{Id}^d$.

Par ailleurs, comme l'ensemble des nombres de Liouville peut s'exprimer comme une intersection dénombrable d'ensembles de la forme $K_{1,\psi}$, nous pouvons en déduire ses propriétés de taille et de grande intersection, ce qui permet de retrouver un résultat de L. Olsen et D. Renfro [131, 132]. Notons que les classes de K. Falconer ne permettent pas d'étudier les propriétés de grande intersection de l'ensemble des nombres de Liouville car il est de dimension nulle.

A. Baker et W. Schmidt [7] puis V. Beresnevich [15] et Y. Bugeaud [35, 38] se sont intéressés aux propriétés de taille d'une autre généralisation de l'ensemble J_τ , où les réels ne sont pas approchés uniquement par des rationnels, mais plus généralement par des réels algébriques. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathbb{A}_n$ l'ensemble des nombres réels algébriques de degré au plus n . La hauteur $H(a)$ d'un réel $a \in \mathbb{A}_n$ est la plus grande des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$. Fixons une suite décroissante $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0 et considérons l'ensemble

$$A_{n,\psi} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \psi(H(a)) \text{ pour une infinité de } a \in \mathbb{A}_n\}$$

des réels ψ -approchables par des réels algébriques de degré au plus n . V. Beresnevich [15] a fourni un analogue du théorème de Khintchine en établissant que $A_{n,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine ou nulle dans $\mathbb{R}$ selon respectivement que la série $\sum_h \psi(h)h^n$ diverge ou converge. De plus, Y. Bugeaud [35] a fourni un analogue du théorème de Jarník en prouvant que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $g \prec \text{Id}$, la g -mesure de Hausdorff de $A_{n,\psi}$ est infinie ou nulle suivant respectivement que la série $\sum_h g(\psi(h))h^n$ diverge ou converge. Dans [38], il a aussi montré que $A_{n,\psi}$ vérifie une propriété de grande intersection lorsque ψ est, pour $\omega \geq n$, le produit de la suite $(h^{-\omega-1})_{h \in \mathbb{N}^*}$ et d'une correction logarithmique. Le théorème 3.9 établi dans la section IV complète ces résultats en indiquant que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}$, l'ensemble $A_{n,\psi}$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si la série $\sum_h g(\psi(h))h^n$ diverge. Cela conduit à plusieurs résultats nouveaux concernant la classification de Koksma [109] des réels transcendants. Ce théorème montre de surcroît que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ et tout ouvert V de $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ (resp. $= 0$) si $\sum_h g_1(\psi(h))h^n = \infty$ (resp. $< \infty$), où la fonction g_1 est définie par (3.3).

La section IV revient en détails sur les exemples que nous venons de citer. Dans cette dernière, nous nous intéressons également aux problèmes de l'approximation diophantienne simultanée inhomogène, de l'approximation diophantienne avec restrictions et de l'approximation de 0 par les valeurs en un point fixé des polynômes à coefficients entiers de degré borné. Ce dernier problème présente des liens avec la classification de Mahler [118] des réels transcendants.

Revenons au cas général de l'ensemble F_φ défini par (3.1). En considérant un recouvrement bien choisi, il est d'ordinaire trivial de donner une condition suffisante sur une jauge $g \in \mathfrak{D}$ pour que la g -mesure de Hausdorff de F_φ soit nulle. En particulier, si Id^d vérifie cette condition, l'ensemble F_φ est de mesure de Lebesgue nulle. À l'inverse, il est souvent beaucoup plus difficile de donner une condition suffisante sur g pour que la g -mesure de F_φ soit infinie. Ce problème a essentiellement été résolu par Y. Bugeaud [37] dans le cas où la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ provient d'un *système régulier optimal* de points. En dimension $d = 1$, Y. Bugeaud a même prouvé dans [38] que F_φ vérifie une propriété de grande intersection. Sous la même hypothèse, A. Baker et W. Schmidt [7] avaient auparavant donné une minoration précise de la dimension de Hausdorff de F_φ . Le problème a par ailleurs été résolu par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19] lorsque $(x_i, r_i)_{i \in I}$ constitue un *système d'ubiquité*. Une notion similaire avait été introduite par M. Dodson, B. Rynne et J. Vickers [49] afin de minorer la dimension de Hausdorff de F_φ . Ajoutons que J.-M. Aubry et S. Jaffard [6, 94] ont aussi étudié le problème afin de procéder à l'analyse multifractale de certains processus aléatoires. L'inconvénient est que les notions de système régulier optimal et de système d'ubiquité au sens de [19] sont très techniques. Par ailleurs, les propriétés de grande intersection de F_φ ont été mises en évidence dans des cas particuliers, comme le cas de l'ensemble J_τ des réels τ -approchables par des rationnels [63] ou de l'ensemble des réels approchés par les points d'un système régulier optimal [38], mais n'ont jamais été étudiées de manière systématique.

Notre but dans ce chapitre est de montrer que sous des hypothèses très simples sur la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$, l'ensemble F_φ appartient toujours à une certaine classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection. Cela fournit d'une part une condition suffisante optimale sur $g \in \mathfrak{D}$ pour que la g -mesure de Hausdorff de F_φ soit infinie. D'autre part, cela permet de s'intéresser aux propriétés de taille d'une intersection dénombrable d'ensembles de la

forme (3.1). L'hypothèse que nous faisons sur $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est la suivante : l'ensemble

$$F_{\text{Id}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on dit que $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans V . On peut mettre en évidence cette propriété dès qu'on dispose d'un résultat analogue au cas de divergence du théorème de Khintchine, ce qui est vrai dans tous les problèmes classiques d'approximation diophantienne. Par exemple, la famille $(p/q, \psi(q))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$ si la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge, en vertu du théorème de Khintchine. Dans la même veine, la famille $(a, \psi(H(a)))_{a \in \mathbb{A}_n}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}$ si la série $\sum_h \psi(h) h^n$ diverge. Plus généralement, un résultat de V. Beresnevich [16] permet de prouver qu'un système régulier optimal de points conduit à un système d'ubiquité homogène. Par conséquent, les résultats de ce chapitre s'appliquent dans toutes les situations où des systèmes réguliers optimaux de points de $\mathbb{R}^d$ interviennent.

Le théorème 3.2 énoncé dans la section III indique que si $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, pour toute jauge g de $\mathfrak{D}_d$, l'ensemble F_φ appartient à la classe $G^g(V)$ lorsque φ coïncide au voisinage de l'origine avec la pseudo-inverse de $g^{1/d}$. Ce théorème permet donc de transformer systématiquement un résultat de type Khintchine dans le cas de divergence en un résultat d'appartenance à une classe d'ensembles à grande intersection. C'est ainsi par exemple que nous pouvons montrer que $K_{d,\psi} \in G^g(V)$ si la série $\sum_q g(\psi(q)) q^d$ diverge. En pratique, le théorème 3.2 permet aussi de transformer automatiquement un résultat de type Khintchine en un résultat de type Jarník. De la sorte, nous prouvons que $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ telle que la série $\sum_q g_d(\psi(q)) q^d$ diverge. Nous renvoyons à la section IV pour de nombreuses autres applications du théorème 3.2.

La suite de ce chapitre s'organise comme suit. Dans la section II, nous définissons la classe $G^g(V)$ des ensembles à grande intersection dans un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ relativement à une fonction de jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et nous fournissons ses principales propriétés. C'est l'objet de la proposition 3.1 et du théorème 3.1. Dans la section III, nous introduisons précisément la notion de système d'ubiquité homogène dans un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ et nous énonçons le théorème 3.2 qui décrit les propriétés de grande intersection de l'ensemble F_φ défini par (3.1) lorsque la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène. La section IV propose de nombreuses applications qui relèvent toutes de l'approximation diophantienne. Nous nous intéressons aux propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^d$ qui sont ψ -approchables d'abord par des rationnels (dans le cas homogène comme dans le cas inhomogène), ensuite par des rationnels sujets à certaines restrictions et enfin par des nombres algébriques dans le cas unidimensionnel. Nous considérons en outre le problème de l'approximation de 0 par les valeurs en un point fixé des polynômes à coefficients entiers de degré borné. Nous en déduisons des résultats concernant les classifications de Mahler et Koksma des réels transcendants. Enfin, les sections V et VI sont principalement consacrées aux preuves des théorèmes 3.1 et 3.2.

II Ensembles à grande intersection

Les classes d'ensembles à grande intersection considérées par K. Falconer dans [63] sont associées uniquement aux fonctions Id^s pour $s \in]0, d]$. Celles que nous introduisons dans

cette section sont associées aux fonctions appartenant à l'ensemble $\mathfrak{D}_d$ défini dans la section I. De plus, les classes de K. Falconer traduisent nécessairement une propriété de grande intersection dans $\mathbb{R}^d$ tout entier car leur définition fait intervenir toutes les similitudes. Cependant, il arrive souvent qu'on étudie des propriétés de grande intersection sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, cf. sections III et IV. C'est pourquoi les classes que nous introduisons ne sont pas définies en faisant appel aux similitudes. À la place, nous utilisons des mesures extérieures analogues à celles qui interviennent dans l'étude des suites $\mathcal{M}_\infty^s$ -denses [60, 139] et dans la caractérisation des classes $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer qui fait l'objet du théorème B de [63].

Un entier naturel c supérieur à 2 étant fixé, notons Λ_c l'ensemble des cubes c -adiques de l'espace $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire des ensembles de la forme $\lambda = c^{-j}(k + [0, 1]^d)$, où j et k appartiennent respectivement aux ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^d$. L'entier j s'appelle la génération de λ et se note $\langle \lambda \rangle_c$. Soit g une jauge de $\mathfrak{D}_d$. L'ensemble des réels $\varepsilon \in]0, 1]$ tels que g croît sur $[0, \varepsilon]$ et $r \mapsto g(r)/r^d$ décroît sur $]0, \varepsilon]$ est non vide. Notons ε_g son supremum. Notons en outre $\Lambda_{c,g}$ l'ensemble des cubes $\lambda \in \Lambda_c$ dont le diamètre $|\lambda|$ est strictement inférieur à ε_g . Soit F une partie de $\mathbb{R}^d$. Désignons par $R_{c,g}(F)$ la collection des recouvrements de F par des cubes c -adiques de diamètre strictement inférieur à ε_g , c'est-à-dire des suites $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda_{c,g} \cup \{\emptyset\}$ telles que $F \subset \bigcup_p \lambda_p$. Notons alors

$$\mathcal{M}_\infty^g(F) = \inf_{(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(F)} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|). \quad (3.4)$$

De la sorte, on définit sur l'espace $\mathbb{R}^d$ une mesure extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$ qui présente certains liens avec la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^g$, cf. [137, th. 4, th. 49]. En particulier, si la mesure extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$ attribue une masse non nulle à un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, ce sous-ensemble est de g -mesure de Hausdorff non nulle. Les mesures $\mathcal{M}_\infty^g$ permettent de définir les classes d'ensembles à grande intersection comme suit.

Définition (ensemble à grande intersection)

Soient g une jauge appartenant à $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. La classe $G^g(V)$ des ensembles de $\mathbb{R}^d$ à grande intersection dans l'ouvert V relativement à la jauge g est la collection des sous-ensembles F de $\mathbb{R}^d$ qui sont des G_δ (i.e. des intersections dénombrables d'ouverts) et qui vérifient $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$ pour toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$ et tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ inclus dans V .

Remarques : • La proposition 3.7, énoncée et prouvée dans la section V, indique que la classe $G^g(V)$, pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et non vide, ne dépend ni du choix de la norme dont est muni $\mathbb{R}^d$ ni du choix de l'entier c , bien que ceux-ci aient une influence sur la construction des mesures extérieures $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}$.

• Y. Bugeaud [38] a généralisé les classes de K. Falconer comme suit. Pour toute jauge g , il introduit la classe $\mathcal{G}^g(\mathbb{R}^d)$ constituée des parties F de $\mathbb{R}^d$ qui sont des G_δ et qui vérifient

$$\mathcal{H}^{\bar{g}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F)\right) = \infty \quad (3.5)$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de $\mathbb{R}^d$ et toute jauge $\bar{g} \prec g$. La stabilité des classes $\mathcal{G}^g(\mathbb{R}^d)$ par intersection dénombrable et par les transformations bilipschitziennes n'est cependant prouvée dans [38] que pour des jauges g très particulières. En effet, les

jauges considérées par Y. Bugeaud sont strictement croissantes et concaves au voisinage de l'origine. De surcroît, la preuve de l'implication $(b) \Rightarrow (c)$ du théorème 6 de [38], qui est modelée sur celle du théorème B de [63], n'est valide que pour des fonctions de jauge vérifiant une propriété d'échelle semblable à celle donnée par l'assertion (4.12) figurant dans le chapitre 4.

La plupart des points du théorème C de [63] concernant les classes de K. Falconer s'étend immédiatement aux classes $G^g(V)$ pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et non vide, comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 3.1

Soient g une jauge appartenant à $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On dispose alors des propriétés suivantes :

- (i). *Décroissance par rapport à la jauge* : pour toutes jauges $\bar{g}$ et g de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$, on a $G^{\bar{g}}(V) \supset G^g(V)$.
- (ii). *Décroissance par rapport à l'ouvert* : pour tous ouverts non vides V_1 et V_2 de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $V_1 \subset V_2$, on a $G^g(V_1) \supset G^g(V_2)$.
- (iii). *Continuité par rapport à la jauge* : la classe $G^g(V)$ est l'intersection des classes $G^{\bar{g}}(V)$ sur les jauges $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$.
- (iv). *Continuité par rapport à l'ouvert* : la classe $G^g(V)$ est l'intersection des classes $G^g(U)$ sur les ouverts non vides U inclus dans V .
- (v). *Stabilité par extension* : tout G_δ de $\mathbb{R}^d$ qui contient un ensemble de la classe $G^g(V)$ appartient aussi à $G^g(V)$.
- (vi). *Stabilité par restriction* : pour tout ensemble F de $G^g(V)$ et tout ouvert non vide U inclus dans V , l'ensemble $F \cap U$ appartient à $G^g(U)$.

De plus, les classes $G^g(V)$, pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et non vide, jouissent de propriétés de stabilité similaires à celles vérifiées par les classes d'ensembles à grande intersection de K. Falconer, cf. [63, th. A]. Plus précisément, la section V propose d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.1

Soient g une jauge appartenant à $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Alors :

- (i). La classe $G^g(V)$ est stable par intersection dénombrable.
- (ii). Pour toute application bilipschitzienne $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ et tout ensemble F de $G^g(f(V))$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ appartient à $G^g(V)$.
- (iii). Tout ensemble $F \in G^g(V)$ est de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie, pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ qui vérifie $\bar{g} \prec g$. En particulier, la dimension de Hausdorff de F est supérieure à

$$s_g = \sup \{s \in]0, d[\mid \text{Id}^s \prec g\}$$

en convenant que le supremum de l'ensemble vide est nul.

Remarque : Soit F un élément de la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$, pour une jauge g de $\mathfrak{D}_d$. En combinant les trois points du théorème 3.1, on observe que l'égalité (3.5) est vraie pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de $\mathbb{R}^d$ et toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$. En particulier, l'inégalité (3.2) tient pour $s = s_g$. Ainsi, $G^g(\mathbb{R}^d)$ s'inclut dans la classe $\mathcal{G}^g(\mathbb{R}^d)$ de Y. Bugeaud et s'inclut strictement dans la classe $\mathcal{G}^{s_g}(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer, si s_g est non nul.

Citons une conséquence importante du théorème 3.1. Prenons une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$. Pour toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de la classe $G^g(V)$,

$$\forall \bar{g} \in \mathfrak{D}_d \quad \bar{g} \prec g \implies \mathcal{H}^{\bar{g}} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \right) = \infty.$$

En particulier, le réel s_g minore la dimension de Hausdorff de l'intersection sur n des ensembles F_n . En outre, dès lors qu'un de ces ensembles est de dimension inférieure à s_g , la dimension de l'intersection est égale à s_g .

Notons que les classes $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection ne sont définies que pour des jauges g appartenant à $\mathfrak{D}_d$. Par conséquent, lorsqu'on étudie les propriétés de grande intersection d'une partie de $\mathbb{R}^d$, on doit considérer des jauges figurant dans $\mathfrak{D}_d$. Cependant, les mesures de Hausdorff sont définies pour toutes les fonctions de jauge g appartenant à $\mathfrak{D}$, de sorte que pour décrire complètement les propriétés de taille d'une partie de $\mathbb{R}^d$, il convient a priori de considérer toutes les jauges de $\mathfrak{D}$. Le résultat suivant indique qu'il suffit en général de ne s'intéresser qu'aux jauges appartenant à $\mathfrak{D}_d$. Rappelons que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$, la fonction g_d est donnée par (3.3) et observons que g_d se prolonge par continuité en 0 en posant $g_d(0) = 0$. De surcroît, g_d coïncide avec g au voisinage de l'origine si g appartient à $\mathfrak{D}_d$.

Proposition 3.2

Pour toute fonction de jauge g appartenant à $\mathfrak{D}$, la fonction g_d est nulle sur un voisinage de 0 ou bien appartient à $\mathfrak{D}_d$. De plus, il existe un réel $\kappa \geq 1$ tel que pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ et toute partie F de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{H}^{g_d}(F) \leq \mathcal{H}^g(F) \leq \kappa \mathcal{H}^{g_d}(F).$$

Cette proposition est prouvée dans la section V. Par ailleurs, observons que pour toute jauge g de $\mathfrak{D}$, si $g(r)/r^d$ tend vers l'infini quand r tend vers 0, la g -mesure de Hausdorff de tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ est infinie. Dans le cas contraire, on a $g_d(r) = O(r^d)$ quand r tend vers 0, si bien que la mesure $\mathcal{H}^{g_d}$ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$. D'après la proposition 3.2, la mesure $\mathcal{H}^g$ vérifie la même propriété. Comme il s'agit d'une mesure borélienne invariante par translation, elle coïncide alors à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.

III Ubiquité homogène

Considérons un ensemble infini dénombrable I . On note $\mathcal{S}_d(I)$ l'ensemble des familles $(x_i, r_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ telles que

$$\sup_{i \in I} r_i < \infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \# \left\{ i \in I \mid \|x_i\| < m \text{ et } r_i > \frac{1}{m} \right\} < \infty.$$

Cette dernière condition équivaut au fait que, pour tout ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^d$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices $i \in I$ vérifiant $x_i \in E$ et $r_i > \varepsilon$. Dans ce cas, s'il y a une infinité d'indices $i \in I$ vérifiant $x_i \in E$, la famille des réels r_i correspondants à ces indices admet 0 pour seul point d'accumulation.

Soient $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ et $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et croissante. Nous proposons d'étudier les propriétés de grande intersection de l'ensemble

$$F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < \varphi(r_i) \text{ pour une infinité de } i \in I\} \quad (3.6)$$

D'une part, en vertu des hypothèses faites sur les familles de $\mathcal{S}_d(I)$, cet ensemble ne dépend de la fonction φ qu'au travers de son comportement local en 0. En effet, si $\tilde{\varphi} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive et croissante qui coïncide avec φ au voisinage de l'origine, on a $F_{\tilde{\varphi}} = F_\varphi$. D'autre part, l'ensemble F_φ est un G_δ puisqu'il s'écrit, pour toute énumération $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'ensemble I ,

$$F_\varphi = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{n'=n}^{\infty} B(x_{i_{n'}}, \varphi(r_{i_{n'}}))$$

en convenant que la boule ouverte $B(x, r)$ de centre $x \in \mathbb{R}^d$ est vide si son rayon r est nul. Le théorème 3.2 énoncé ci-après affirme que, sous certaines hypothèses concernant la forme de la fonction φ , l'ensemble F_φ est un ensemble à grande intersection à condition que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ forme ce qu'on appelle un système d'ubiquité homogène.

Définition (système d'ubiquité homogène)

Soient I un ensemble infini dénombrable et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une famille $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ est un système d'ubiquité homogène dans l'ouvert V si l'ensemble F_{Id} défini par (3.6) pour $\varphi = \text{Id}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans V , i.e. si $\mathcal{L}^d(V \setminus F_{\text{Id}}) = 0$.

Remarques : • D'après la proposition 3.8 établie dans la section VI, si $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ est un système d'ubiquité homogène dans V , il en va de même pour $(x_i, \kappa r_i)_{i \in I}$, quel que soit le réel $\kappa > 0$. Par conséquent, le fait qu'une famille $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ soit un système d'ubiquité homogène dans V ne dépend pas du choix de la norme dont est muni $\mathbb{R}^d$.

- Si $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ est un système d'ubiquité homogène dans V et si U est un ouvert non vide inclus dans V , alors $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans U .
- Soient $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ un système d'ubiquité homogène dans V et η un réel strictement positif. Notons $I_{\eta, V}$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $x_i \in V$ et $r_i \leq \eta$. Alors, cet ensemble $I_{\eta, V}$ est infini dénombrable et la famille $(x_i, r_i)_{i \in I_{\eta, V}} \in \mathcal{S}_d(I_{\eta, V})$ est encore un système d'ubiquité homogène dans V .

Citons quelques exemples. Pour $c \geq 2$ fixé, la famille $(kc^{-j}, c^{-j})_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$ constitue un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$. En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'union sur $k \in \mathbb{Z}^d$ des boules ouvertes $B_\infty(kc^{-j}, c^{-j})$ (pour la norme supremum) recouvre tout $\mathbb{R}^d$.

Les premiers liens avec l'approximation diophantienne peuvent se deviner en rappelant qu'en vertu du célèbre théorème de Dirichlet, tout réel x vérifie l'inéquation

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

pour une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ajoutons que si x est irrationnel, ce résultat reste vrai même si on impose aux entiers p et q d'être premiers entre eux, cf. [82]. Le théorème de Dirichlet se généralise à l'approximation simultanée, cf. [81, th. 200]. Ainsi, pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left\| x - \frac{p}{q} \right\|_\infty < \frac{1}{q^{1+1/d}}$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme supremum. Il en ressort que la famille $(p/q, q^{-1-1/d})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$.

La notion de système d'ubiquité homogène étend celle de système régulier, plus répandue dans la théorie de l'approximation diophantienne. Les systèmes réguliers de réels ont été introduits par A. Baker et W. Schmidt [7]. Nous adoptons ici la définition plus générale proposée par V. Beresnevich [16]. Soit V le produit cartésien de d intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Soient A une partie infinie dénombrable de V et $N : A \rightarrow]0, \infty[$ une fonction dite de hauteur. On dit que (A, N) est un système régulier dans V s'il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout cube ouvert $\beta \subset V$,

$$\exists t_\beta > 0 \quad \forall t > t_\beta \quad \exists A_{\beta,t} \subset A \cap \beta \quad \begin{cases} \#A_{\beta,t} \geq \kappa |\beta|^{dt} \\ \forall a \in A_{\beta,t} \quad N(a) \leq t \\ \forall a, a' \in A_{\beta,t} \quad a \neq a' \Rightarrow \|a - a'\| \geq 1/t. \end{cases}$$

Cette condition indique essentiellement que tout cube ouvert β inclus dans V contient, à une constante multiplicative près, au moins $|\beta|^{dt}$ points de A de hauteur inférieure à t et dont les distances mutuelles sont supérieures à $1/t$. En outre, un système régulier (A, N) est dit optimal si, pour tout cube ouvert $\beta \subset V$,

$$\exists \kappa'_\beta > 0 \quad \forall t > t_\beta \quad \#\{a \in A \cap \beta \mid N(a) \leq t\} \leq \kappa'_\beta t^d$$

c'est-à-dire s'il n'y a pas, à une constante multiplicative près, plus de t^d points de hauteur inférieure à t qui figurent dans A et β simultanément. On peut par exemple montrer que les nombres rationnels p/q , avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, associés à la fonction $N(p/q) = q^2$, forment un système régulier optimal. Plus généralement, les points à coordonnées rationnelles, les nombres réels algébriques de degré borné, ainsi que les entiers algébriques de degré borné, associés à des fonctions de hauteur convenables, constituent des systèmes réguliers optimaux, cf. [15, 35, 34, 37]. Nous renvoyons à [18] pour d'autres exemples de systèmes réguliers et de systèmes réguliers optimaux. Considérons maintenant un système régulier optimal (A, N) dans l'ouvert V . Les résultats de [16] permettent alors d'affirmer que, pour toute fonction décroissante $\psi :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ de limite nulle à l'infini et pour laquelle la série $\sum_n \psi(n)^d n^{d-1}$ diverge, la famille $(a, \psi(N(a)))_{a \in A}$ est un système d'ubiquité homogène dans V .

Après ces quelques exemples, énonçons le résultat principal de cette section. À cet effet, rappelons qu'une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ est continue et croissante sur l'intervalle $[0, \varepsilon_g[$, strictement positive sur $]0, \varepsilon_g[$ et nulle en 0. La pseudo-réciproque de sa racine d -ième, notée $(g^{1/d})^{-1}$, est définie par

$$\forall r \in [0, g^{1/d}(\varepsilon_g^-)[\quad (g^{1/d})^{-1}(r) = \inf \{ \rho \in [0, \varepsilon_g[\mid g^{1/d}(\rho) \geq r \}$$

où $g^{1/d}(\varepsilon_g^-) = \sup_{[0, \varepsilon_g[} g^{1/d} > 0$. La fonction $(g^{1/d})^{-1}$ est alors positive et croissante sur l'intervalle $[0, g^{1/d}(\varepsilon_g^-)[$. Notons $[(g^{1/d})^{-1}]$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positives et croissantes qui coïncident avec elle au voisinage de l'origine. Le théorème suivant concerne les propriétés de grande intersection de l'ensemble F_φ défini par (3.6), lorsque $\varphi \in [(g^{1/d})^{-1}]$.

Théorème 3.2

Soient I un ensemble infini dénombrable d'indices et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Soit $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ un système d'ubiquité homogène dans V . Alors,

$$\forall g \in \mathfrak{D}_d \quad \forall \varphi \in [(g^{1/d})^{-1}] \quad F_\varphi \in G^g(V).$$

Nous renvoyons à la section VI pour une preuve de ce résultat. L'idée à retenir est que le théorème 3.2 permet de transférer un résultat de recouvrement au sens de la mesure de Lebesgue concernant des boules $B(x_i, r_i)$ en une propriété de grande intersection concernant les boules $B(x_i, \varphi(r_i))$ et que cette propriété est optimale au sens que la jauge g est en pratique la meilleure possible. De ce point de vue, le théorème 3.2 s'apparente au *principe de transfert de masse*, établi par V. Beresnevich et S. Velani [20], qui traite de la g -mesure de Hausdorff de F_φ lorsque F_{Id} est de mesure pleine dans $\mathbb{R}^d$. Cependant, aucun de ces deux résultats n'implique l'autre. En effet, le résultat de V. Beresnevich et S. Velani ne traite pas des propriétés de grande intersection des ensembles considérés. En revanche, il fournit la valeur de la g -mesure de Hausdorff de F_φ , alors que notre résultat permet seulement de déterminer la valeur de la $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff de cet ensemble pour $\bar{g} \prec g$. Cependant, dans les applications à l'approximation diophantienne, le théorème 3.2 permet de prouver les mêmes résultats que le principe de transfert de masse et décrit en outre les propriétés de grande intersection des ensembles étudiés.

Le théorème 3.2 permet de retrouver la proposition 5.4 de [6]. En effet, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points du cube $[0, 1]^d$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. Observons que la famille $(k + x_n, r_n)_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}$ appartient à $\mathcal{S}_d(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d)$ et que c'est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$ dès que la mesure de Lebesgue de $\limsup_n B(x_n, r_n)$ vaut 1. Supposons que cette dernière condition est vérifiée et prenons un réel $t \geq 1$. La fonction $\text{Id}^{d/t}$ est alors une jauge de $\mathfrak{D}_d$ et le théorème 3.2 assure que l'ensemble

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} B(k + x_n, r_n^t)$$

appartient à la classe $G^{\text{Id}^{d/t}}(\mathbb{R}^d)$, donc à la classe $\mathcal{G}^{d/t}(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer. En dimension $d = 1$, cela conduit à la proposition 5.4 de [6], utilisée par J.-M. Aubry et S. Jaffard dans le but de déterminer la loi du spectre de singularités d'un modèle particulier de séries aléatoires d'ondelettes. Ajoutons que les chapitres 5 et 7 font appel au théorème 3.2 afin de déterminer les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles portant les singularités höldériennes de certains processus stochastiques.

IV Applications à l'approximation diophantienne

Cette section fournit quelques applications du théorème 3.2 à l'approximation diophantienne. La démarche générale est alors la suivante. Étant donnée une suite décroissante ψ de réels strictement positifs qui converge vers 0, nous décrivons de manière précise la taille de l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont ψ -approchables par les éléments d'une famille fixée au préalable (rationnels, réels algébriques, etc.) en montrant que pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$, seules deux situations sont possibles : cet ensemble est soit de g -mesure de Hausdorff nulle, soit de g -mesure maximale dans tout ouvert. De plus, nous donnons un critère sur g pour déterminer laquelle des deux situations se présente. Nous décrivons aussi les propriétés de grande intersection de cet ensemble en fournissant, pour tout ouvert non vide V , un critère sur la jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ pour qu'il appartienne à la classe $G^g(V)$. Cela conduit en particulier à des résultats nouveaux concernant l'ensemble des nombres de Liouville. Nous étudions aussi le problème de l'approximation de 0 par les valeurs en un point donné des polynômes à coefficients entiers de degré borné. Nous en déduisons des résultats concernant les classifications de Mahler et Koksma des réels transcendants.

IV.1 Approximation diophantienne simultanée homogène

Dans ce qui suit, la distance d'un point y de l'espace $\mathbb{R}^d$ au réseau $\mathbb{Z}^d$, notée $|y|_{\mathbb{Z}^d}$, est définie par

$$|y|_{\mathbb{Z}^d} = \min_{k \in \mathbb{Z}^d} \|y - k\|.$$

Considérons un entier $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et notons $\mathbb{N}_{q_0} = \{q_0, q_0 + 1, \dots\}$ l'ensemble des entiers supérieurs à q_0 . Désignons aussi par Ψ_{q_0} l'ensemble des suites décroissantes $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}_{q_0}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0 et fixons $\psi \in \Psi_{q_0}$. Un point $x \in \mathbb{R}^d$ est dit ψ -approachable par des rationnels si l'inéquation

$$|qx|_{\mathbb{Z}^d} < q\psi(q)$$

admet une infinité de solutions $q \in \mathbb{N}_{q_0}$. L'ensemble de ces points, que nous notons $K_{d,\psi}$, a été étudié pour la première fois par Khintchine [105]. Il est de la forme (3.6) car

$$K_{d,\psi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < \psi(q) \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0} \right. \right\}.$$

Un cas particulier important s'obtient en prenant $\psi(q) = q^{-\tau}$ pour $\tau > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $J_{d,\tau} = K_{d,\psi}$. Un point qui appartient à ce dernier ensemble est dit τ -approachable par des rationnels. Une conséquence élémentaire du théorème de Dirichlet réside dans le fait que $J_{d,\tau} = \mathbb{R}^d$, dès lors que τ est inférieur à $1 + 1/d$. En outre Jarník a établi dans [100] que, pour tout réel $\tau > 1 + 1/d$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $J_{d,\tau}$ vaut $(d+1)/\tau$. Dans le cas de la dimension $d = 1$, ce résultat figure aussi [99] et été obtenu indépendamment par Besicovitch [29]. Le théorème 3.2 nous permet de fournir le résultat complémentaire suivant.

Proposition 3.3

Pour tout réel $\tau > 1 + 1/d$, l'ensemble $J_{d,\tau}$ des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont τ -approchables par des rationnels appartient à la classe $G^{\text{Id}^{\frac{d+1}{\tau}}}(\mathbb{R}^d)$.

// En vertu du théorème de Dirichlet, pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$ tels que $\|x - p/q\|_{\infty} < q^{-1-1/d}$. La famille $(p/q, q^{-1-1/d})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*}$ est donc un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction $r \mapsto \text{Id}^{\frac{d+1}{\tau}}$ est une jauge de $\mathfrak{D}_d$ et sa racine d -ième admet pour réciproque la fonction $\text{Id}^{\frac{d\tau}{d+1}}$. Le théorème 3.2 conduit au résultat. //

Remarque : L'ordre exact (ou exposant d'irrationalité) $\tau(x)$ d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ est défini comme le supremum de l'ensemble des réels $\tau > 0$ vérifiant $x \in J_{d,\tau}$. Pour $\tau \geq 1 + 1/d$, on peut alors s'intéresser à l'ensemble $\tilde{J}_{d,\tau}$ des points x de $\mathbb{R}^d$ dont l'ordre exact $\tau(x)$ est égal à τ . La proposition 3.3 permet de prouver que la dimension de $\tilde{J}_{d,\tau}$ est égale à $(d+1)/\tau$. En dimension $d = 1$, on retrouve ainsi le théorème de Güting [79].

On peut améliorer la proposition 3.3 et l'étendre au cas général de l'ensemble des points ψ -approchables par des rationnels en s'intéressant à d'autres systèmes d'ubiquité homogène. Pour ce faire, rappelons le théorème de Khintchine [105]. L'énoncé que nous donnons ci-après a été obtenu par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19]. Les hypothèses y sont plus faibles que dans l'énoncé de Khintchine.

Théorème 3.3 (Khintchine)

Soient $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{q_0}$. Alors, l'ensemble $K_{d,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine (resp. nulle) dans $\mathbb{R}^d$ si $\sum_q \psi(q)^d q^d = \infty$ (resp. $< \infty$).

Le théorème de Khintchine garantit que la famille $(p/q, \psi(q))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$ dès que la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge. À titre d'exemple, la divergence de la série $\sum_q 1/(q \log q)$ montre que $(p/q, q^{-1}(q \log q)^{-1/d})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_2}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$.

À l'inverse, lorsque la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ converge, la mesure de Lebesgue de l'ensemble $K_{d,\psi}$ est nulle. Afin de rendre compte de la taille de cet ensemble, on peut faire appel aux mesures de Hausdorff. C'est l'objet du résultat suivant établi par Jarník [100] et dont les hypothèses ont été affaiblies par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19].

Théorème 3.4 (Jarník)

Soient $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{q_0}$. Alors, pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $g \prec \text{Id}^d$, l'ensemble $K_{d,\psi}$ est de g -mesure de Hausdorff infinie (resp. nulle) si $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty$ (resp. $< \infty$).

Le théorème 3.2 permet de décrire complètement les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble $K_{d,\psi}$. C'est l'objet du résultat suivant, qui peut se voir comme une généralisation des théorèmes de Khintchine et Jarník d'une part et de la proposition 3.3 d'autre part. Rappelons que la fonction de jauge g_d associée à une fonction de jauge g de $\mathfrak{D}$ est définie par (3.3).

Théorème 3.5

Soient $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{q_0}$. Soient g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- (i). On a $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ (resp. $= 0$) si $\sum_q g_d(\psi(q))q^d = \infty$ (resp. $< \infty$).
- (ii). Pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \neq \emptyset$, on a $K_{d,\psi} \in G^g(V)$ si et seulement si $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty$.

// Supposons que la série $\sum_q g_d(\psi(q))q^d$ converge et montrons que la g -mesure de $K_{d,\psi} \cap V$ est nulle. L'ensemble $K_{d,\psi}$ s'écrit $\mathbb{Z}^d + \tilde{K}_{d,\psi}$, avec

$$\tilde{K}_{d,\psi} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{p \in \{0, \dots, q-1\}^d} B\left(\frac{p}{q}, \psi(q)\right).$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_{g_d}[$. Il existe un entier $q_1 \geq q_0$ vérifiant $\psi(q_1) \leq \varepsilon/2$. Pour tout $q_2 \in \mathbb{N}_{q_1}$, l'ensemble $\tilde{K}_{d,\psi}$ est recouvert par l'union sur $q \in \mathbb{N}_{q_2}$ de q^d boules de diamètre $2\psi(q) \leq \varepsilon$, donc

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{g_d}(K_{d,\psi}) \leq \sum_{q=q_2}^{\infty} g_d(2\psi(q))q^d \leq 2^d \sum_{q=q_2}^{\infty} g_d(\psi(q))q^d.$$

La dernière inégalité provient de la décroissance de $r \mapsto g_d(r)/r^d$ sur $]0, \varepsilon]$. En faisant tendre q_2 vers l'infini puis ε vers 0, on observe que la g_d -mesure de $\tilde{K}_{d,\psi}$ est nulle. La proposition 3.2 permet de conclure.

Supposons que g appartient à $\mathfrak{D}_d$, que V est non vide et que la série $\sum_q g(\psi(q))q^d$ converge. Pour montrer que $K_{d,\psi}$ n'appartient pas à $G^g(V)$, commençons par établir le résultat annexe suivant.

Lemme

Il existe une fonction de jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ pour laquelle la série $\sum_q \bar{g}(\psi(q))q^d$ converge.

/// Comme $\lim_{0+} g = 0$ et $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty$, il existe une suite strictement décroissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels de l'intervalle $]0, \varepsilon_g[$ telle que

$$g(r_n) \leq g(r_{n-1})e^{-1/n} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ \psi(q) \leq r_{n-1}}} g(\psi(q))q^d \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_2$. Observons que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge nécessairement vers 0 car $g(r_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et car g est non nulle et continue sur $]0, \varepsilon_g[$. Pour tous $n \in \mathbb{N}_2$ et $r \in]r_n, r_{n-1}]$, posons

$$\xi(r) = n + \frac{\log g(r_{n-1}) - \log g(r)}{\log g(r_{n-1}) - \log g(r_n)}.$$

La fonction ξ est décroissante et continue sur $]0, r_1]$, elle tend vers l'infini en 0 et elle vérifie $\xi(r) \in [n, n+1]$ pour $r \in]r_n, r_{n-1}]$ et $n \in \mathbb{N}_2$. Notons $\bar{g}(r) = g(r)\xi(r)$ pour tout $r \in]0, r_1]$. Pour $n \in \mathbb{N}_2$ et $r_n < r \leq r' \leq r_{n-1}$, la différence $\bar{g}(r') - \bar{g}(r)$ est nulle si $g(r') = g(r)$. Sinon, elle vaut

$$\begin{aligned} g(r')\xi(r') - g(r)\xi(r) &= (\xi(r') - \xi(r))g(r) + \xi(r')(g(r') - g(r)) \\ &\geq (g(r') - g(r))n \left(1 - \frac{\log \frac{g(r')}{g(r)}}{\frac{g(r')}{g(r)} - 1} \cdot \frac{1}{n \log \frac{g(r_{n-1})}{g(r_n)}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\bar{g}$ croît sur l'intervalle $]r_n, r_{n-1}]$. Comme elle est continue sur $]0, r_1]$, elle y est croissante. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ \psi(q) \leq r_1}} \bar{g}(\psi(q))q^d &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ r_n < \psi(q) \leq r_{n-1}}} g(\psi(q))\xi(\psi(q))q^d \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ \psi(q) \leq r_{n-1}}} g(\psi(q))q^d \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty. \end{aligned}$$

En particulier, $\bar{g}(\psi(q))$ tend vers 0 quand q tend vers l'infini. Il en ressort que $\bar{g}$ tend vers 0 en 0. De surcroît, la fonction $\bar{g}/g = \xi$ décroît au voisinage de l'origine et tend vers l'infini en 0. Finalement, $\bar{g}$ appartient à $\mathfrak{D}_d$, vérifie $\bar{g} \prec g$ et fait converger la série $\sum_q \bar{g}(\psi(q))q^d$. ///

Le raisonnement précédent implique que la $\bar{g}$ -mesure de $K_{d,\psi} \cap V$ est nulle. L'ensemble $K_{d,\psi}$ ne peut donc appartenir à $G^g(V)$, d'après le théorème 3.1.

Supposons à l'inverse que la série $\sum_q g(\psi(q))q^d$ diverge et montrons que $K_{d,\psi}$ appartient à $G^g(V)$. Notons $\tilde{g} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante qui coïncide avec g au voisinage de 0. Comme la suite ψ converge vers 0, la série $\sum_q \tilde{g}(\psi(q))q^d$ diverge. De plus, la suite $(\tilde{g}^{1/d}(\psi(q)))_{q \in \mathbb{N}_{q_0}}$ appartient à Ψ_{q_0} . Le théorème de Khintchine assure alors que $(p/q, \tilde{g}^{1/d}(\psi(q)))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}}$

est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$. Le théorème 3.2 permet d'en déduire que, pour une fonction φ quelconque dans $[(\tilde{g}^{1/d})^{-1}]$, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|x - p/q\| < \varphi(\tilde{g}^{1/d}(\psi(q)))$ pour une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}$ appartient à la classe $G^{\tilde{g}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$. Cependant, cet ensemble est inclus dans $K_{d,\psi}$, du fait que $\varphi(\tilde{g}^{1/d}(r)) \leq r$ pour tout réel positif r assez petit. On conclut grâce à la proposition 3.1.

Supposons que la jauge g de $\mathfrak{D}$ fait diverger la série $\sum_q g_d(\psi(q))q^d$. La fonction g_d ne peut donc pas être nulle au voisinage de 0, si bien qu'elle appartient à $\mathfrak{D}_d$ en vertu de la proposition 3.2. Si $g_d \prec \text{Id}^d$, la preuve nécessite le résultat annexe suivant.

Lemme

Il existe une fonction de jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $g_d \prec \underline{g}$ pour laquelle la série $\sum_q \underline{g}(\psi(q))q^d$ diverge.

/// Notons $r_1 = \varepsilon_{g_d}/2$, ainsi que $\theta(r) = g_d(r)/r^d$ pour tout $r \in]0, r_1]$. La fonction θ décroît sur l'intervalle $]0, r_1]$ et tend vers l'infini en 0 car $g_d \prec \text{Id}^d$. Pour tout entier $n \geq 2$, observons qu'il existe un réel $r_n \in]0, r_{n-1}[$ tel que

$$\theta(r_n) \geq \theta(r_{n-1})e^{1/n} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ r_n < \psi(q) \leq r_{n-1}}} g_d(\psi(q))q^d \geq 1$$

car respectivement θ tend vers l'infini en 0 et la série $\sum_q g_d(\psi(q))q^d$ diverge. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît strictement et converge vers 0 car $\theta(r_n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et car θ est continue sur $]0, r_1]$. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $r \in]r_n, r_{n-1}]$, posons ensuite

$$\xi(r) = n + \frac{\log \theta(r) - \log \theta(r_{n-1})}{\log \theta(r_n) - \log \theta(r_{n-1})}.$$

On obtient ainsi une fonction ξ décroissante, continue et strictement positive sur $]0, r_1]$ qui tend vers l'infini en 0 et vérifie $\xi(r) \leq n+1$ pour $r \in]r_n, r_{n-1}]$. Notons $\underline{g}(r) = g_d(r)/\xi(r)$ pour tout réel $r \in]0, r_1]$ et vérifions que $\underline{g}$ convient. Tout d'abord, en la prolongeant naturellement à l'origine, $\underline{g}$ est croissante et continue sur l'intervalle $[0, r_1]$, ainsi que nulle en 0. De surcroît, pour $n \geq 2$ et $r_n < r \leq r' \leq r_{n-1}$, la différence $\underline{g}(r)/r^d - \underline{g}(r')/r'^d$ est nulle si $\theta(r') = \theta(r)$ et, dans le cas contraire, elle vaut

$$\begin{aligned} \frac{\theta(r)}{\xi(r)} - \frac{\theta(r')}{\xi(r')} &= \frac{(\theta(r) - \theta(r'))\xi(r') + \theta(r')(\xi(r') - \xi(r))}{\xi(r)\xi(r')} \\ &\geq \frac{\theta(r) - \theta(r')}{\xi(r)\xi(r')} n \left(1 - \frac{\log \frac{\theta(r)}{\theta(r')}}{\frac{\theta(r)}{\theta(r')} - 1} \cdot \frac{1}{n \log \frac{\theta(r_n)}{\theta(r_{n-1})}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $r \mapsto \underline{g}(r)/r^d$ est continue en r_n et décroît sur l'intervalle $]r_n, r_{n-1}]$ pour tout entier $n \geq 2$, si bien qu'elle décroît au voisinage de l'origine. Il s'ensuit que $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$. Par ailleurs, $g_d/\underline{g}$ coïncide avec ξ au voisinage de 0, donc décroît au voisinage de 0 et admet l'infini pour limite en ce point,

si bien que $g_d \prec \underline{g}$. Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ \psi(q) \leq r_1}} \underline{g}(\psi(q))q^d &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ r_n < \psi(q) \leq r_{n-1}}} \frac{g_d(\psi(q))q^d}{\xi(\psi(q))} \\ &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}_{q_0} \\ r_n < \psi(q) \leq r_{n-1}}} g_d(\psi(q))q^d \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien construit une jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$ qui vérifie la relation $g_d \prec \underline{g}$ et qui fait diverger la série $\sum_q \underline{g}(\psi(q))q^d$. $\mathrel{\mathop{\!//\!}}$

Le raisonnement précédent garantit que, si l'ouvert V est non vide, l'ensemble $K_{d,\psi}$ appartient à la classe $\mathcal{G}^g(V)$. Le théorème 3.1 et la proposition 3.2 conduisent alors à $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \infty = \mathcal{H}^g(V)$. Si $g_d \not\prec \text{Id}^d$, la mesure $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge. Le résultat découle alors du théorème de Khintchine. $\mathrel{\mathop{\!//\!}}$

Le théorème 3.5 que nous venons d'établir permet d'étudier les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble

$$L_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_2 \quad \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

On reconnaît en L_1 l'ensemble des nombres de Liouville. L. Olsen a prouvé dans [131] que $\mathcal{H}^g(L_1) = 0$, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $g_1(r) = o(r^s)$ pour un certain réel $s > 0$, et que $\mathcal{H}^g(L_1 \cap V) = \infty$ pour tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}$ dans le cas contraire puis a étendu ce résultat à toutes les jauges g de $\mathfrak{D}$ dans [132], en collaboration avec D. Renfro. La proposition suivante indique que ce critère reste vrai en dimension d quelconque et décrit de surcroît les propriétés de grande intersection de l'ensemble L_d .

Proposition 3.4

Soit g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$.

- (i). On a $\mathcal{H}^g(L_d \cap V) = 0$ si $g_d(r) = o(r^s)$ pour un $s > 0$ et $\mathcal{H}^g(L_d \cap V) = \infty$ sinon.
- (ii). Pour $g \in \mathfrak{D}_d$, on a $L_d \in \mathcal{G}^g(V)$ si et seulement si $g(r) \neq o(r^s)$ pour tout $s > 0$.

$\mathrel{\mathop{\!//\!}}$ Supposons avoir $g_d(r) = o(r^s)$ pour un certain réel $s > 0$ et montrons que la g -mesure de $L_d \cap V$ est nulle. On peut considérer que s est strictement inférieur à d . Observons que

$$L_d = (\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d) \cap \bigcap_{\tau > 0} J_{d,\tau}. \quad (3.7)$$

Il en résulte que $L_d \subset J_{d,2(d+1)/s}$. Cependant, ce dernier ensemble est de mesure s -dimensionnelle nulle, d'après le théorème de Jarník, si bien que $\mathcal{H}^{g_d}(L_d) = 0$. La proposition 3.2 permet de conclure.

Supposons en outre que g appartient à $\mathfrak{D}_d$. La fonction $\bar{g} : r \mapsto \sqrt{g(r)}$ est une jauge de $\mathfrak{D}_d$ qui vérifie $\bar{g} \prec g$ et $\bar{g}(r) = o(r^{s/2})$. Le raisonnement

précédent assure que $L_d \cap V$ est de $\bar{g}$ -mesure nulle. L'ensemble L_d ne peut donc appartenir à $G^g(V)$, d'après le théorème 3.1.

Supposons à l'inverse que $g(r) \neq o(r^s)$ pour tout réel $s > 0$ et montrons que L_d appartient à $G^g(V)$. Fixons un réel $\tau > 0$ et supposons que la série $\sum_q g(q^{-\tau})q^d$ converge. Il en résulte que la fonction $u \mapsto g(u^{-\tau})u^d$ est intégrable au voisinage de l'infini. De plus, pour r assez petit, on a

$$\int_{\frac{1}{2r^{1/\tau}}}^{\infty} g(u^{-\tau})u^d du \geq \int_{\frac{1}{2r^{1/\tau}}}^{\frac{1}{r^{1/\tau}}} g(u^{-\tau})u^d du \geq \frac{1}{2^{d+1}} \cdot \frac{g(r)}{r^{\frac{d+1}{\tau}}}.$$

Il s'ensuit que $g(r) = o(r^{(d+1)/\tau})$, ce qui offre une contradiction. On en déduit que la série $\sum_q g(q^{-\tau})q^d$ diverge. Le théorème 3.5 assure que l'ensemble $J_{d,\tau}$ appartient à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$. De plus, $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ est un G_δ de mesure de Lebesgue pleine, donc appartient à cette même classe, d'après la proposition 3.6. Comme l'intersection décroissante figurant dans (3.7) peut se voir comme une intersection dénombrable, l'ensemble L_d appartient à $G^g(\mathbb{R}^d)$ en vertu du théorème 3.1. La proposition 3.1 permet de conclure.

Supposons maintenant que la jauge g de $\mathfrak{D}$ vérifie $g_d(r) \neq o(r^s)$ pour tout $s > 0$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{H}^g(L_d \cap V) = \infty$. Comme la fonction g_d ne peut être nulle au voisinage de 0, elle appartient à $\mathfrak{D}_d$ en vertu de la proposition 3.2. La fonction $\underline{g} : r \mapsto g_d(r)/\log(g_d(r)/r^d)$ est une jauge de $\mathfrak{D}_d$ qui vérifie $g_d \prec \underline{g}$ et $\underline{g}(r) \neq o(r^s)$ pour tout $s > 0$. En appliquant ce qui précède à $\underline{g}$ plutôt qu'à g , on a $L_d \in G^{\underline{g}}(V)$. Le théorème 3.1 conduit alors à $\mathcal{H}^{g_d}(L_d \cap V) = \infty$. On conclut grâce à la proposition 3.2. //

Prenons un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une application bilipschitzienne $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}^d$. D'après la proposition 3.4, l'ensemble L_d appartient à la classe $G^{g_d}(f_n(V))$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $g_d(r) \neq o(r^s)$ pour tout réel $s > 0$. En vertu du théorème 3.1, on a

$$\tilde{L}_{d,f} = L_d \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(L_d) \in G^{g_d}(V).$$

En outre, quitte à remplacer dans ce qui précède la jauge g_d par une jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$ telle que $g_d \prec \underline{g}$ et $\underline{g}(r) \neq o(r^s)$ pour tout réel $s > 0$, on obtient que l'ensemble $\tilde{L}_{d,f}$ est un G_δ de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide U inclus dans V . Cela conduit au résultat suivant.

Corollaire 3.1

Tout point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ peut s'écrire d'une infinité non dénombrable de manières différentes comme la somme de deux points appartenant à L_d .

// Il suffit de prendre, dans ce qui précède, $f_0(x) = x_0 - x$ et $f_n(x) = x$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$. //

Ce corollaire généralise un résultat classique d'Erdős [59], selon lequel tout réel peut s'écrire comme la somme de deux nombres de Liouville.

Par ailleurs, l'ensemble $\tilde{L}_{d,f}$ est un G_δ dense dans l'ouvert V . Cela est à comparer avec le résultat suivant de W. Schwarz [143] : pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues et strictement monotones de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$, il existe un G_δ dense dans $]0, 1[$ qui est formé de nombres de Liouville x pour lesquels $f_n(x)$ est un nombre de Liouville quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ajoutons que ce résultat a été étendu à une classe un peu plus large de fonctions par K. Alniaçik et É. Saias [2].

Les applications du théorème 3.5 sont nombreuses. À titre d'exemple, on peut montrer que l'ensemble

$$sL_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_2 \quad \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < e^{-nq} \right\} \subset L_d$$

appartient à la classe $G^{g_d}(\mathbb{R}^d)$ pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ pour laquelle la série $\sum_q g_d(1/q)(\log q)^d/q$ diverge. De plus, dans ce cas, l'ensemble sL_d est un G_δ de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Dans le cas contraire, sL_d est de g -mesure nulle. En outre, les méthodes exposées précédemment permettent de montrer que tout point de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme la somme de deux points de sL_d . Mentionnons enfin que selon la terminologie de J. Sondow [145], un réel appartenant à sL_1 s'appelle un super nombre de Liouville.

IV.2 Approximation diophantienne simultanée inhomogène

Fixons un entier $q_0 \in \mathbb{N}^*$, une suite $\psi \in \Psi_{q_0}$ et un point $b \in \mathbb{R}^d$. Une généralisation classique du problème évoqué dans la partie précédente consiste à étudier les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble $K_{d,\psi}^b$ des points x de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels l'inéquation

$$|qx - b|_{\mathbb{Z}^d} < q\psi(q)$$

admet une infinité de solutions $q \in \mathbb{N}_{q_0}$. Pour $b = 0$, on retrouve l'ensemble $K_{d,\psi}$ des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont ψ -approchables par des rationnels. De surcroît, l'ensemble $K_{d,\psi}^b$ est de la forme (3.6) puisqu'il s'écrit

$$K_{d,\psi}^b = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \left\| x - \frac{b+p}{q} \right\| < \psi(q) \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0} \right\}.$$

L'analogue du théorème de Khintchine a été démontré par W. Schmidt [141]. Les hypothèses du théorème de Schmidt ont par la suite été affaiblies par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19]. On dispose alors du résultat suivant : $K_{d,\psi}^b$ est de mesure de Lebesgue pleine (resp. nulle) dans $\mathbb{R}^d$ si $\sum_q \psi(q)^d q^d = \infty$ (resp. $< \infty$). Ajoutons que J. Levesley [113] a produit un analogue du théorème de Jarník-Besicovitch et que Y. Bugeaud [37] a fourni un analogue du théorème de Jarník. En imitant la preuve du théorème 3.5, on peut décrire complètement les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble $K_{d,\psi}^b$. C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 3.6

Soient $b \in \mathbb{R}^d$, $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{q_0}$. Soient g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- (i). On a $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi}^b \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ (resp. $= 0$) si $\sum_q g_d(\psi(q))q^d = \infty$ (resp. $< \infty$).
- (ii). Pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \neq \emptyset$, on a $K_{d,\psi}^b \in G^g(V)$ si et seulement si $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty$.

// La preuve est presque identique à celle du théorème 3.5. Les modifications à apporter sont les suivantes. Afin d'établir que $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi}^b \cap V) = 0$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ pour laquelle la série $\sum_q g_d(\psi(q))q^d$ converge, il convient d'observer que l'ensemble $K_{d,\psi}^b$ s'écrit $\mathbb{Z}^d + \tilde{K}_{d,\psi}^b$, avec

$$\tilde{K}_{d,\psi}^b = \limsup_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Z}^d \\ (b+p)/q \in [0,1]^d}} B\left(\frac{b+p}{q}, \psi(q)\right).$$

Pour établir que $K_{d,\psi}^b$ appartient à $G^g(V)$ pour $V \neq \emptyset$ et $g \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty$, il convient d'utiliser le théorème de Schmidt pour montrer que la famille $((b+p)/q, \tilde{g}^{1/d}(\psi(q)))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$, où $\tilde{g}$ désigne une fonction croissante sur $[0, \infty[$ qui coïncide avec g au voisinage de 0. //

Le théorème 3.6 et la stabilité par intersection dénombrable des classes d'ensembles à grande intersection permettent de montrer que

$$\mathcal{H}^g\left(V \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} K_{d,\psi}^{b_n}\right) = \mathcal{H}^g(V)$$

pour toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^d$, tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ et toute fonction de jauge g de $\mathfrak{D}$ pour laquelle la série $\sum_q g_d(\psi(q))q^d$ diverge. En effet, la fonction g_d ne peut pas être nulle au voisinage de 0, si bien qu'elle appartient à $\mathfrak{D}_d$ en vertu de la proposition 3.2. Si $g_d \prec \text{Id}^d$, on peut construire une fonction de jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $g_d \prec \underline{g}$ et $\sum_q \underline{g}(\psi(q))q^d = \infty$. Les théorèmes 3.1 et 3.6 et la proposition 3.2 assurent que l'intersection sur $n \in \mathbb{N}$ des ensembles $K_{d,\psi}^{b_n}$ figure dans la classe $G^g(V)$, puis que $\mathcal{H}^g(V \cap \bigcap_n K_{d,\psi}^{b_n}) = \infty = \mathcal{H}^g(V)$. Si $g_d \not\prec \text{Id}^d$, la mesure $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ et la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge. Le résultat découle alors du théorème de Schmidt.

IV.3 Approximation diophantienne avec restrictions

G. Harman [82] a étudié l'ensemble des réels approchés à une certaine vitesse par des rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont astreints à figurer dans certains ensembles intervenant en théorie des nombres. Intéressons-nous plus particulièrement au cas où le numérateur et le dénominateur des rationnels considérés appartiennent à l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers (positifs). Soient q_0 un entier supérieur à 2 et ψ une suite de Ψ_{q_0} . Considérons l'ensemble Π_ψ des réels positifs x pour lesquels l'inéquation

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \psi(q)$$

admet une infinité de solutions $(p, q) \in \mathbb{P} \times (\mathbb{P} \cap \mathbb{N}_{q_0})$. Cet ensemble est clairement de la forme (3.6). En outre, G. Harman a établi dans [82] que Π_ψ est de mesure de Lebesgue pleine (resp. nulle) dans $]0, \infty[$ si $\sum_q \psi(q)q/(\log q)^2 = \infty$ (resp. $< \infty$). Ce résultat permet, en reprenant les idées de la preuve du théorème 3.5, de décrire complètement les propriétés

de taille et de grande intersection de Π_ψ . Rappelons que la fonction g_1 associée à une jauge quelconque g de $\mathfrak{D}$ est définie par (3.3).

Théorème 3.7

Soient $q_0 \in \mathbb{N}_2$ et $\psi \in \Psi_{q_0}$. Soient g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$.

- (i). On a $\mathcal{H}^g(\Pi_\psi \cap V) = \mathcal{H}^g(]0, \infty[\cap V)$ (resp. $= 0$) si la série $\sum_q g_1(\psi(q))q/(\log q)^2$ diverge (resp. converge).
- (ii). Pour $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$, l'ensemble Π_ψ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si la série $\sum_q g(\psi(q))q/(\log q)^2$ diverge et V est inclus dans $]0, \infty[$.

// Pour montrer que $\mathcal{H}^g(\Pi_\psi \cap V) = 0$ si la jauge $g \in \mathfrak{D}$ fait converger la série $\sum_q g_1(\psi(q))q/(\log q)^2$, commençons par rappeler qu'en vertu du théorème des nombres premiers, $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$ est équivalent à $x/\log x$ et à $\text{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$ quand x tend vers l'infini. De plus, pour tout entier naturel n non nul,

$$\Pi_\psi \cap [0, n-1] \subset \limsup_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{P}}} \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq nq}} \left] \frac{p}{q} - \psi(q), \frac{p}{q} + \psi(q) \right[.$$

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout nombre premier q_1 assez grand, l'ensemble $\Pi_\psi \cap [0, n-1]$ est recouvert par l'union sur $q \in \mathbb{P} \cap \mathbb{N}_{q_1}$ de $2\pi(nq)$ intervalles de longueur $\psi(q) \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{g_1}(\Pi_\psi \cap [0, n-1]) \leq 2 \sum_{q \in \mathbb{P} \cap \mathbb{N}_{q_1}} \pi(nq) g_1(\psi(q)) \leq 4n \sum_{q \in \mathbb{P} \cap \mathbb{N}_{q_1}} g_1(\psi(q)) \frac{q}{\log q}.$$

Notons $\pi^{-1} : y \mapsto \inf\{x \in [0, \infty[\mid \pi(x) \geq y\}$ la pseudo-réciproque de la fonction π . Sachant que $\pi^{-1}(\pi(q)) = q$ pour tout nombre premier q et que $\text{Li}^{-1}(x/2) \leq \pi^{-1}(x) \leq \text{Li}^{-1}(2x)$ pour tout réel x assez grand, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^{g_1}(\Pi_\psi \cap [0, n-1]) &\leq 4n \sum_{k=\pi(q_1)}^{\infty} g_1(\psi(\pi^{-1}(k))) \frac{\pi^{-1}(k)}{\log(\pi^{-1}(k))} \\ &\leq 4n \sum_{k=\pi(q_1)}^{\infty} \int_{k-1}^k g_1\left(\psi\left(\text{Li}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \frac{\text{Li}^{-1}(2x+2)}{\log(\text{Li}^{-1}(\frac{x}{2}))} dx \\ &\leq 8n\kappa \int_{\text{Li}^{-1}(\frac{\pi(q_1)-1}{2})}^{\infty} g_1(\psi(y)) \frac{y}{(\log y)^2} dy. \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que $\text{Li}^{-1}(2x+2) \leq \kappa \text{Li}^{-1}(x/2)$ pour un certain réel $\kappa > 0$ et tout réel x assez grand et du changement de variable $y = \text{Li}^{-1}(x/2)$. Cependant, la fonction $y \mapsto g_1(\psi(y))y/(\log y)^2$ est intégrable au voisinage de l'infini. Par conséquent, le dernier majorant tend vers 0 quand q_1 tend vers l'infini. On obtient finalement $\mathcal{H}^g(\Pi_\psi \cap V) = 0$ en faisant tendre ε vers 0 puis n vers l'infini et en utilisant la proposition 3.2.

Supposons $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$. Si $V \not\subset]0, \infty[$, l'ouvert $V \cap]-\infty, 0[$ est non vide et vérifie $\Pi_\psi \cap (V \cap]-\infty, 0]) = \emptyset$, si bien que $\Pi_\psi \notin G^g(V)$. Si la série $\sum_q g(\psi(q))q/(\log q)^2$ converge, il existe une jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant

$\bar{g} \prec g$ et faisant converger la série $\sum_q \bar{g}(\psi(q))q/(\log q)^2$. Le raisonnement précédent assure alors que $\Pi_\psi \cap V$ est de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff nulle. On a par conséquent $\Pi_\psi \notin G^g(V)$ en vertu du théorème 3.1.

Pour établir que Π_ψ appartient à $G^g(V)$ pour $\emptyset \neq V \subset]0, \infty[$ et $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\sum_q g(\psi(q))q/(\log q)^2 = \infty$, désignons par $\tilde{g}$ une fonction croissante sur $[0, \infty[$ qui coïncide avec g au voisinage de 0 et observons que $(p/q, \tilde{g}(\psi(q)))_{(p,q) \in \mathbb{P} \times (\mathbb{P} \cap \mathbb{N}_{q_0})}$ est un système d'ubiquité homogène dans $]0, \infty[$ d'après le théorème 6.7 de [82]. Le théorème 3.2 permet d'en déduire que Π_ψ appartient à la classe $G^{\tilde{g}}(]0, \infty[)$, donc à la classe $G^g(V)$.

Montrons enfin que $\mathcal{H}^g(\Pi_\psi \cap V) = \mathcal{H}^g(]0, \infty[\cap V)$ pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$ et toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ pour laquelle la série $\sum_q g_1(\psi(q))q/(\log q)^2$ diverge. Ce résultat est trivial si $]0, \infty[\cap V$ est vide. Supposons le contraire et observons par ailleurs que $g_1 \in \mathfrak{D}_1$ d'après la proposition 3.2. Si $g_1 \prec \text{Id}$, il existe une jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $g_1 \prec \underline{g}$ et $\sum_q \underline{g}(\psi(q))q/(\log q)^2 = \infty$. Le raisonnement précédent assure que $\Pi_\psi \in G^{\underline{g}}(]0, \infty[\cap V)$ et le théorème 3.1 conduit à $\mathcal{H}^{g_1}(\Pi_\psi \cap V) = \infty = \mathcal{H}^{g_1}(]0, \infty[\cap V)$. La proposition 3.2 donne finalement $\mathcal{H}^g(\Pi_\psi \cap V) = \mathcal{H}^g(]0, \infty[\cap V)$. Ce résultat reste vrai si $g_1 \not\prec \text{Id}$. C'est en effet une conséquence du théorème 6.7 de [82] puisque la série $\sum_q \psi(q)q/(\log q)^2$ diverge et la mesure $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. //

Ce résultat permet de retrouver le théorème 14 de [19] qui indique que, pour $g \in \mathfrak{D}_1$, la g -mesure de Hausdorff de $\Pi_\psi \cap [0, 1]$ est infinie lorsque la série $\sum_q g(\psi(q))q/(\log q)^2$ diverge et lorsque $g \prec \text{Id}$. On observe par ailleurs qu'imposer aux entiers p et q d'être premiers fait finalement apparaître un facteur $(\log q)^{-2}$ dans la série dont il convient d'étudier la convergence. La restriction sur p et q ne transparait donc pas sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble des réels ψ -approchables, mais intervient dès qu'on s'intéresse à des jauges plus précises que les jauges usuelles Id^s , cf. [82, th. 10.8].

En reprenant les idées de la preuve du théorème 3.7 et en utilisant les résultats du chapitre 6 de [82], on peut également décrire les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles obtenus en imposant d'autres restrictions sur le numérateur et le dénominateur des approximants. Par exemple, l'énoncé du théorème 3.7 reste valide si on remplace Π_ψ par l'ensemble des réels positifs ψ -approchables par des rationnels dont le numérateur et le dénominateur s'écrivent comme une somme de deux carrés d'entiers et si on considère la série $\sum_q g_1(\psi(q))q/\log q$. De même, l'énoncé du théorème 3.7 est encore vrai si on remplace Π_ψ par l'ensemble des réels positifs ψ -approchables par des rationnels dont le numérateur est un nombre premier et dont le dénominateur est une somme de deux carrés (ou vice versa) et si on considère $\sum_q g_1(\psi(q))q/(\log q)^{3/2}$.

Une autre démarche consiste à imposer au numérateur et au dénominateur des rationnels intervenant dans l'approximation d'être premiers entre eux. Plus précisément, étant donnés un entier $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et une suite (non nécessairement décroissante) de réels strictement positifs $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}_{q_0}}$ qui converge vers 0, on considère l'ensemble $S_{d,\psi}$ des points $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}$ tels que $\|x - p/q\| < \psi(q)$ et tels que q soit premier avec chacune des coordonnées de p . Pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$, on prouve aisément en adaptant la preuve du théorème 3.5 que l'ensemble $S_{d,\psi}$ est de g -mesure de Hausdorff nulle si la série $\sum_q g_d(\psi(q))\varphi(q)^d$ converge, où φ désigne l'indicateur d'Euler. Sous cette condition de convergence, on montre de même

que, si g est une jauge de $\mathfrak{D}_d$, l'ensemble $S_{d,\psi}$ n'appartient à aucune classe $G^g(V)$, pour V ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Pour traiter le cas de divergence en reprenant les méthodes de la preuve du théorème 3.5, il faudrait savoir que l'ensemble $S_{d,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}^d$ lorsque la série $\sum_q \psi(q)^d \varphi(q)^d$ diverge. En dimension $d = 1$, ce résultat a été conjecturé par Duffin et Schaeffer [57] et n'a pas encore été prouvé. En dimension $d \geq 2$, ce résultat a été établi par A. Pollington et R. Vaughan [135]. En dimension $d \geq 2$, on peut donc démontrer en adaptant la preuve du théorème 3.5 que, pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$, l'ensemble $S_{d,\psi}$ est de g -mesure de Hausdorff maximale dans tout ouvert V de $\mathbb{R}^d$ si la série $\sum_q g_d(\psi(q)) \varphi(q)^d$ diverge, ce qui complète un résultat de V. Beresnevich et S. Velani [20]. Si V est non vide et g appartient à $\mathfrak{D}_d$, on peut en outre établir que l'ensemble $S_{d,\psi}$ appartient à la classe $G^g(V)$ sous la même condition de divergence.

Ajoutons qu'en dimension $d \geq 2$, on peut appliquer la méthode précédente à l'ensemble $\tilde{S}_{d,\psi}$ des points $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}_{q_0}$ tels que $\|x - p/q\| < \psi(q)$ et tels que q et toutes les coordonnées de p soient mutuellement premiers entre eux. Il faut alors utiliser au lieu du résultat de A. Pollington et R. Vaughan un résultat de P. Gallagher [74] selon lequel $\tilde{S}_{d,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}^d$ si la série $\sum_q \psi(q)^d q^d$ diverge.

IV.4 Approximation par des nombres algébriques et classification de Koksma des réels transcendants

Intéressons-nous maintenant à l'approximation des réels par des nombres algébriques. On peut considérer que ce problème généralise celui de l'approximation par des rationnels puisque ces derniers sont en particulier des nombres algébriques.

Pour commencer, procédons à quelques rappels. Notons $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques. Pour tout $a \in \mathbb{A}$, désignons par $H(a)$ la hauteur de a , c'est-à-dire la plus grande des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$. Soient $h_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{h_0}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathbb{A}_{n,h_0}$ l'ensemble des nombres réels algébriques de degré au plus n et de hauteur au moins h_0 . Un réel x est alors dit ψ -approchable par des nombres réels algébriques de degré au plus n si l'inéquation

$$|x - a| < \psi(H(a))$$

admet une infinité de solutions $a \in \mathbb{A}_{n,h_0}$. L'ensemble $A_{n,\psi}$ de ces réels est clairement de la forme (3.6). Le résultat suivant, établi par V. Beresnevich [15, 19], peut se voir comme l'analogue du théorème de Khintchine pour cet ensemble.

Théorème 3.8 (V. Beresnevich)

Soient n et h_0 deux entiers naturels non nul et ψ une suite de Ψ_{h_0} . Alors, $A_{n,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine (resp. nulle) dans $\mathbb{R}$ si $\sum_h \psi(h)h^n = \infty$ (resp. $< \infty$).

Il résulte directement de ce théorème que la famille $(a, \psi(H(a)))_{a \in \mathbb{A}_{n,h_0}}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}$ dès que la série $\sum_h \psi(h)h^n$ diverge. Par exemple, la divergence de la série harmonique implique que $(a, H(a)^{-n-1})_{a \in \mathbb{A}_{n,2}}$ constitue un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}$.

V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19], ainsi que Y. Bugeaud [35], ont établi l'analogue du théorème de Jarník pour l'ensemble $A_{n,\psi}$. En outre, Y. Bugeaud [38] a prouvé que cet ensemble vérifie une propriété de grande intersection lorsque ψ est le produit d'une fonction puissance et d'itérées du logarithme. Grâce aux idées de la preuve

du théorème 3.5, on peut compléter ces résultats en décrivant complètement les propriétés de taille et de grande intersection de $A_{n,\psi}$. C'est l'objet du résultat qui suit. Dans son énoncé, la fonction g_1 associée à une jauge quelconque g de $\mathfrak{D}$ est définie comme en (3.3).

Théorème 3.9

Soient n et h_0 deux entiers naturels non nul et ψ une suite de Ψ_{h_0} . Soient g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$.

- (i). On a $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ (resp. $= 0$) si $\sum_h g_1(\psi(h))h^n = \infty$ (resp. $< \infty$).
- (ii). Pour $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$, on a $A_{n,\psi} \in G^g(V)$ si et seulement si $\sum_h g(\psi(h))h^n = \infty$.

// Pour établir que $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi} \cap V) = 0$ si la série $\sum_h g_1(\psi(h))h^n$ converge, il convient d'observer que

$$A_{n,\psi} = \limsup_{h \rightarrow \infty} \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{A}_{n,h_0} \\ H(a)=h}}]a - \psi(h), a + \psi(h)[$$

et qu'il y a au plus $2n(n+1)(2h+1)^n$ nombres algébriques de degré au plus n et de hauteur exactement h , cf. [142, p. 85], de sorte que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier h_1 assez grand,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{g_1}(A_{n,\psi}) \leq \sum_{h=h_1}^{\infty} 4n(n+1)(2h+1)^n g_1(\psi(h)).$$

On parvient au résultat en faisant tendre h_1 vers l'infini puis ε vers 0 et en utilisant la proposition 3.2.

Supposons $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$. Si la série $\sum_h g(\psi(h))h^n$ converge, il existe une jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et $\sum_h \bar{g}(\psi(h))h^n < \infty$. Le raisonnement précédent prouve que $A_{n,\psi} \cap V$ est de $\bar{g}$ -mesure nulle et le théorème 3.1 implique que $A_{n,\psi}$ n'appartient pas à $G^g(V)$.

Supposons à l'inverse que la série $\sum_h g(\psi(h))h^n$ diverge, désignons par $\tilde{g}$ une fonction croissante sur $[0, \infty[$ qui coïncide avec g au voisinage de 0 et observons que la famille $(a, \tilde{g}(\psi(H(a))))_{a \in \mathbb{A}_{n,h_0}}$ est alors un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Beresnevich. Le théorème 3.2 permet d'en déduire que $A_{n,\psi}$ appartient à $G^{\tilde{g}}(\mathbb{R})$ donc à $G^g(V)$.

Montrons que $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ qui fait diverger la série $\sum_h g_1(\psi(h))h^n$ et tout ouvert V de $\mathbb{R}$. On peut supposer que V est non vide. De plus, g_1 appartient à $\mathfrak{D}_1$ en vertu de la proposition 3.2. Si $g_1 \prec \text{Id}$, il existe une jauge $\underline{g} \in \mathfrak{D}_1$ telle que $g_1 \prec \underline{g}$ et $\sum_h \underline{g}(\psi(h))h^n = \infty$. Le raisonnement précédent assure que $A_{n,\psi}$ appartient à $G^{\underline{g}}(V)$. Par conséquent, $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$, d'après le théorème 3.1 et la proposition 3.2. Si $g_1 \not\prec \text{Id}$, ce résultat reste vrai et découle du théorème de Beresnevich car la série $\sum_h \psi(h)h^n$ diverge et la mesure $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. //

Prendre $\psi(h) = h^{-w-1}$ pour $w > -1$ et $h \in \mathbb{N}^*$ conduit à faire le lien avec la classification de Koksma des réels transcendants. Dans ce cas, notons $U_{n,w}^*$ l'ensemble $A_{n,\psi}$, ainsi que $w_n^*(x)$ le supremum de l'ensemble des réels w pour lesquels un réel x fixé appartient

à $U_{n,w}^*$. Koksma [109] discrimine alors les réels transcendants x selon que

$$w^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^*(x)}{n}$$

est fini ou non. Dans le premier cas, le réel transcendant x est appelé un S^* -nombre et $w^*(x)$ s'appelle le type de x , cf. [36, 38]. Grâce à des résultats de Sprindžuk [146] et E. Wirsing [149], on montre que Lebesgue-presque tous les réels x sont des S^* -nombres qui vérifient $w_n^*(x) = n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, l'ensemble

$$W'_\tau = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid w_n^*(x) \geq \tau(n+1) - 1\}$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}$ pour $\tau = 1$. De plus, A. Baker et W. Schmidt [7] ont prouvé que cet ensemble est de dimension égale à $1/\tau$, pour tout $\tau > 1$. Comme très souvent, c'est la minoration de la dimension de Hausdorff qui est difficile à établir. La proposition suivante précise ce résultat de minoration en montrant que W'_τ vérifie une propriété de grande intersection.

Proposition 3.5

| Soient $\tau \in [1, \infty[$ et $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\sum_h g(1/h)h^{-1+1/\tau} = \infty$. Alors $W'_\tau \in G^g(\mathbb{R})$.

// Observons que

$$W'_\tau = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{w \in]-1, \tau(n+1)-1[} U_{n,w}^*.$$

Prenons $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in]-1, \tau(n+1)-1[$. La série $\sum_h g(h^{-w-1})h^n$ diverge, si bien que $U_{n,w}^* \in G^g(\mathbb{R})$ d'après le théorème 3.9. En effet, considérons un entier $h_1 \geq 2$ tel que g est strictement croissante sur $[0, h_1^{-w-1}]$. La somme sur $h \in \mathbb{N}_{h_1}$ de $g(h^{-w-1})h^n$ est alors minorée par

$$\begin{aligned} \sum_{h=h_1}^{\infty} \int_h^{h+1} g(x^{-\tau(n+1)})(x-1)^n dx &\geq \frac{1}{2^n} \int_{h_1}^{\infty} g(x^{-\tau(n+1)})x^n dx \\ &\geq \frac{1}{2^{n\tau(n+1)}} \int_{h_1^{\tau(n+1)}}^{\infty} g\left(\frac{1}{u}\right) u^{-1+1/\tau} du \end{aligned}$$

et cette dernière intégrale diverge car $\sum_h g(1/h)h^{-1+1/\tau} = \infty$. Comme l'intersection décroissante précédente peut se voir comme une intersection dénombrable, le théorème 3.1 permet de conclure. //

Fixons un réel $\tau \geq 1$. La proposition précédente assure en particulier que W'_τ appartient à $G^{\text{Id}^{1/\tau}}(\mathbb{R})$. Sa dimension est donc supérieure à $1/\tau$. On retrouve ainsi la minoration de A. Baker et W. Schmidt.

Pour tout réel $\tau \geq 1$, désignons respectivement par $\widetilde{W}_\tau$ et W_τ l'ensemble des réels transcendants dont le type est supérieur à τ et l'ensemble des S^* -nombres dont le type est égal à τ . Ainsi,

$$\widetilde{W}_\tau = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \mid w^*(x) \geq \tau\} \quad \text{et} \quad W_\tau = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \mid w^*(x) = \tau\}. \quad (3.8)$$

La proposition 3.5 permet d'étudier les propriétés de taille et de grande intersection de $\widetilde{W}_\tau$, ainsi que les propriétés de taille de W_τ . Pour décrire ces propriétés, associons à toute fonction de jauge g de $\mathfrak{D}$ la quantité

$$\tau_g = \inf \{ \tau \in]0, \infty[\mid g_1(r) = o(r^{1/\tau}) \} \quad (3.9)$$

avec $\inf \emptyset = \infty$. Observons que $\tau_g = 0$ si $g_1 = 0$ et que $\tau_g \geq 1$ si $g_1 \in \mathfrak{D}_1$ (il n'y a pas d'autre possibilité en vertu de la proposition 3.2). On dispose alors du résultat suivant.

Théorème 3.10

Soient g une jauge de $\mathfrak{D}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $\tau \in [1, \infty[$, on a

$$\mathcal{H}^g(W_\tau \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau > \tau_g \\ \mathcal{H}^g(V) & \text{si } \tau = \tau_g \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^g(\widetilde{W}_\tau \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau > \tau_g \\ \mathcal{H}^g(V) & \text{si } \tau \leq \tau_g \end{cases}.$$

De plus, pour $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$, l'ensemble $\widetilde{W}_\tau$ contient un ensemble de la classe $G^g(V)$ si et seulement si $\tau \leq \tau_g$.

// Commençons par supposer $g \in \mathfrak{D}$ et $\tau > \tau_g$. Afin d'établir que $\widetilde{W}_\tau \cap V$ et $W_\tau \cap V$ sont de g -mesure nulle, il suffit de montrer que $\widetilde{W}_\tau$ est de g -mesure nulle. Dans ce but, notons τ' et τ'' deux réels vérifiant $\tau_g < \tau' < \tau'' < \tau$ et observons que

$$\widetilde{W}_\tau \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n, \tau''(n+1)-1}^*$$

et $g_1(r) = o(r^{1/\tau'})$. Comme la série $\sum_h g_1(h^{-\tau''(n+1)})h^n$ converge, le théorème 3.9 implique que $\mathcal{H}^g(U_{n, \tau''(n+1)-1}^*) = 0$. Le résultat s'ensuit.

Supposons $g \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$. L'ensemble $\widetilde{W}_\tau$ ne contient aucun ensemble de la classe $G^g(V)$. En effet, plaçons-nous dans le cas contraire. En posant $\bar{g} : r \mapsto g(r) \log(1/g(r))$, on a $\mathcal{H}^{\bar{g}}(\widetilde{W}_\tau \cap V) = \infty$ d'après le théorème 3.1, car $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ et $\bar{g} \prec g$. Cependant, comme $\tau > \tau_g = \tau_{\bar{g}}$, le raisonnement précédent conduit à $\mathcal{H}^{\bar{g}}(\widetilde{W}_\tau \cap V) = 0$, ce qui constitue une contradiction.

Supposons désormais $\tau \leq \tau_g$. Tout réel appartenant à W'_τ est nécessairement transcendant d'après le théorème 19 et le lemme 15 de [142]. De plus, un tel réel est de type supérieur à τ . Par conséquent, $W'_\tau \subset \widetilde{W}_\tau$. En particulier, $\widetilde{W}_1$ contient W'_1 . Comme la série $\sum_h g(1/h)$ diverge pour $g \in \mathfrak{D}_1$, la proposition 3.5 prouve que ce dernier ensemble figure dans la classe $G^g(\mathbb{R})$, donc dans la classe $G^g(V)$. Pour $\tau > 1$, on peut écrire

$$\bigcap_{\tau' \in]1, \tau[} W'_{\tau'} \subset \widetilde{W}_\tau.$$

Fixons $\tau' \in]1, \tau[$ et observons que la série $\sum_h g(1/h)h^{-1+1/\tau'}$ diverge. Supposons en effet le contraire. Dès lors, la fonction $u \mapsto g(1/u)u^{-1+1/\tau'}$ est intégrable au voisinage de l'infini et, pour tout réel r strictement positif,

$$\frac{g(r)}{r^{1/\tau'}} \leq \frac{2^{1/\tau'}}{r} \int_r^{2r} \frac{g(s)}{s^{1/\tau'}} ds \leq 2^{1+1/\tau'} \int_{\frac{1}{2r}}^{\infty} g\left(\frac{1}{u}\right) u^{-1+1/\tau'} du$$

ce qui conduit à $g(r) = o(r^{1/\tau'})$ et contredit ainsi le fait que τ est inférieur à τ_g . La proposition 3.5 assure alors que $W'_{\tau'}$ appartient à $G^g(V)$. Le membre de gauche de l'inclusion précédente peut donc se voir comme une intersection dénombrable d'ensembles appartenant à $G^g(V)$. Le théorème 3.1 prouve finalement que $\widetilde{W}_\tau$ contient un ensemble de cette même classe.

Revenons au cas général où g appartient à $\mathfrak{D}$ et V est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et montrons que $\mathcal{H}^g(\widetilde{W}_\tau \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$. On peut en fait supposer $g_1 \in \mathfrak{D}_1$ et $V \neq \emptyset$, puisque $\mathcal{H}^g(\widetilde{W}_\tau \cap V) = 0 = \mathcal{H}^g(V)$ dans le cas contraire, en vertu de la proposition 3.2. Si $g_1 \prec \text{Id}$, la jauge $\underline{g} : r \mapsto g_1(r)/\log(g_1(r)/r)$ appartient à $\mathfrak{D}_1$ et vérifie $g_1 \prec \underline{g}$ et $\tau_{\underline{g}} = \tau_g$. Le raisonnement précédent montre que $\widetilde{W}_\tau$ contient un ensemble de la classe $G^{\underline{g}}(V)$, donc est de g_1 -mesure infinie dans V d'après le théorème 3.1. La proposition 3.2 conduit à $\mathcal{H}^g(\widetilde{W}_\tau \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$. Si $g_1 \not\prec \text{Id}$, ce résultat reste vrai et découle du fait que $\widetilde{W}_1$ contient W'_1 , qui est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}$, car $\tau = \tau_g = 1$ et $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Pour finir, montrons que $\mathcal{H}^g(W_\tau \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ si $\tau = \tau_g$. Il suffit de prouver que l'ensemble des réels transcendants x vérifiant $w^*(x) > \tau_g$ est de g -mesure nulle. À cet effet, remarquons que cet ensemble est inclus dans

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,(\tau_g+1/k)(n+1)-1}^*$$

et que l'ensemble $U_{n,(\tau_g+1/k)(n+1)-1}^*$ est de g -mesure nulle d'après le théorème 3.9 puisque $\sum_h g_1(h^{-(\tau_g+1/k)(n+1)})h^n < \infty$. //

Soit $\tau \in [1, \infty[$. Le théorème précédent permet en particulier de retrouver que

$$\dim \widetilde{W}_\tau = \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad \dim W_\tau = \frac{1}{\tau},$$

ce qui correspond respectivement au théorème 2 de [7] et au théorème 3 de [38]. De surcroît, le théorème 3.10 indique que la mesure de Hausdorff $1/\tau$ -dimensionnelle de W_τ est infinie, ce que les méthodes utilisées dans [38] ne permettent pas d'établir.

IV.5 Approximation de zéro par des valeurs de polynômes et classification de Mahler des réels transcendants

La classification de Koksma des réels transcendants, présentée dans la partie IV.4, est très proche d'une classification proposée précédemment par Mahler [118]. L'idée consiste désormais à discriminer les réels x selon le degré d'exactitude avec lequel les polynômes à coefficients entiers évalués en x approchent 0.

Avant de présenter plus précisément la classification de Mahler, considérons le problème plus général suivant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathbb{Z}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n . On définit la hauteur $H(p)$ d'un polynôme $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ comme la plus grande des valeurs absolues de ses coefficients. Soient $h_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \Psi_{h_0}$. Un réel x étant fixé, on s'intéresse à la question de savoir si l'inéquation

$$|p(x)| < H(p)\psi(H(p)) \tag{3.10}$$

possède une infinité de solutions $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ vérifiant $H(p) \geq h_0$. Notons $P_{n,\psi}$ l'ensemble des réels x pour lesquels cette dernière propriété est satisfaite. V. Bernik [26] et V. Beresnevich [17] ont prouvé que si la série $\sum_h \psi(h)h^n$ converge, l'inéquation (3.10) n'admet qu'un nombre fini de solutions $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ pour presque tout réel x au sens de la mesure de Lebesgue. De manière équivalente, l'ensemble $P_{n,\psi}$ est Lebesgue-négligeable. Le cas contraire a été traité par V. Beresnevich [15] : si la série $\sum_h \psi(h)h^n$ diverge, pour presque tout réel x , l'inéquation (3.10) admet une infinité de solutions $p \in \mathbb{Z}_n[X]$, si bien que l'ensemble $P_{n,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}$.

Les résultats énoncés précédemment sont les seuls connus à ce jour en ce qui concerne les propriétés de taille de l'ensemble $P_{n,\psi}$. Nous proposons de les compléter en montrant que $P_{n,\psi}$ est un ensemble à grande intersection. Dans ce but, commençons par observer que l'ensemble $P_{n,\psi}$ n'est pas du type (3.6) si $n \geq 2$, ce qui a pour effet de nous priver du théorème 3.2. Il s'agit toutefois d'un G_δ . Pour s'en convaincre, notons $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une énumération de l'ensemble dénombrable des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n et de hauteur au moins h_0 , présentons $P_{n,\psi}$ sous la forme

$$P_{n,\psi} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{k'=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid |p_{k'}(x)| < H(p_{k'})\psi(H(p_{k'}))\}$$

et remarquons que chacun des ensembles intervenant dans le membre de droite est un ouvert de $\mathbb{R}$, par continuité des fonctions polynomiales. Le résultat suivant montre que $P_{n,\psi}$ appartient à certaines classes d'ensembles à grande intersection.

Théorème 3.11

Soient n et h_0 deux entiers naturels non nul et ψ une suite de Ψ_{h_0} . Soient g une jauge de $\mathfrak{D}_1$ telle que $\sum_h g(\psi(h))h^n$ diverge et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors, $P_{n,\psi}$ appartient à $G^g(V)$.

// Fixons un réel $r > 0$ et posons $\kappa = n^2(1+r)^{n-1} > 0$. Soit $x \in]-r, r[$ appartenant à l'ensemble $A_{n,\psi/\kappa}$ des réels ψ/κ -approchables par des nombres réels algébriques de degré au plus n , cf. partie IV.4. Il existe donc une infinité de nombres réels algébriques $a \in \mathbb{A}_{n,h_0}$ vérifiant $|x-a| < \psi(H(a))/\kappa$. Comme ψ converge vers 0, on peut en outre supposer que tous ces nombres a vérifient $|x-a| \leq 1$. Considérons un tel a , notons $p_a = \sum_q b_q X^q \in \mathbb{Z}_n[X]$ son polynôme minimal et écrivons

$$p_a(x) = p_a(x) - p_a(a) = (x-a) \sum_{q=1}^n b_q \sum_{k=0}^{q-1} x^{q-1-k} a^k$$

et observons que $|x^{q-1-k} a^k| \leq r^{q-1-k} (1+r)^k \leq (1+r)^{n-1}$ quels que soient $k \in \{0, \dots, q-1\}$ et $q \in \{1, \dots, n\}$. Il en résulte que

$$|p_a(x)| \leq |x-a| H(p_a) \kappa < H(p_a) \psi(H(p_a)).$$

Ainsi, l'inéquation (3.10) admet p_a pour solution. Il s'ensuit que cette inéquation admet une infinité de solutions $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ vérifiant $H(p) \geq h_0$. Finalement $x \in P_{n,\psi}$, si bien que $A_{n,\psi/\kappa} \cap]-r, r[$ est inclus dans $P_{n,\psi}$.

Sachant que ψ/κ décroît vers 0 et que $\sum_h g(\psi(h)/\kappa)h^n$ diverge, le théorème 3.9 assure que $A_{n,\psi/\kappa} \in G^g(V)$. De ce fait, pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et un ouvert U inclus dans V , on a

$$\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(P_{n,\psi} \cap U) \geq \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(A_{n,\psi/\kappa} \cap U) - r, r[\cap U] \geq \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U) - r, r[\cap U].$$

D'après le lemme des ensembles croissants, le membre de droite tend vers $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$ quand r tend vers l'infini, cf. section V. Le théorème s'ensuit. //

C'est en prenant $\psi(h) = h^{-w-1}$ pour $w > -1$ et $h \in \mathbb{N}^*$ qu'il est possible de faire le lien avec la classification de Mahler des réels. Dans ce cas, désignons par $U_{n,w}$ l'ensemble $P_{n,\psi}$ et notons $w_n(x)$ le supremum de l'ensemble des réels w tels qu'un réel x donné appartienne à $U_{n,w}$. Mahler [118] discrimine alors les réels x selon la valeur de leur type

$$w(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(x)}{n}.$$

Il montre qu'un réel x est algébrique si et seulement si $w(x) = 0$. Lorsque $0 < w(x) < \infty$, le réel transcendant x est appelé un S -nombre. De plus, le principe de Dirichlet assure que tout réel transcendant x vérifie $w_n(x) \geq n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ et le théorème de Sprindžuk [146] affirme que Lebesgue-presque tous les réels x sont des S -nombres tels que $w_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La classification de Mahler présente des liens avec celle de Koksma. Ainsi, tout S -nombre est un S^* -nombre et réciproquement, cf. [142, th. 22]. De plus, pour tout réel transcendant x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_n^*(x) \leq w_n(x)$, de sorte que $w^*(x) \leq w(x)$. Par conséquent, pour tout réel $\tau \geq 1$, l'ensemble des réels transcendants x vérifiant $w(x) \geq \tau$ est inclus dans l'ensemble $\widetilde{W}_\tau$ défini par (3.8). Le théorème 3.10 permet d'en déduire que, pour toute jauge g de $\mathfrak{D}$ et tout ouvert V de $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}^g(\{x \in V \setminus \mathbb{A} \mid w(x) \geq \tau\}) = \mathcal{H}^g(V)$$

pour tout réel τ compris entre 1 et τ_g , qui est donné par (3.9). En particulier, pour tout réel $\tau \geq 1$, l'ensemble des réels transcendants x vérifiant $w(x) \geq \tau$ est de mesure de Hausdorff $1/\tau$ -dimensionnelle infinie, de sorte que

$$\dim \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \mid w(x) \geq \tau\} \geq \frac{1}{\tau},$$

ce qui correspond à la partie difficile du théorème 4 de [7]. Cette minoration est en fait une égalité comme l'a prouvé V. Bernik [24, 25]. Contrairement aux exemples traités précédemment, c'est ici la majoration de la dimension de Hausdorff qui est la plus ardue à établir. Pour les mêmes raisons, donner une réciproque au théorème 3.11 en déterminant pour quelles fonctions de jauge g l'ensemble $P_{n,\psi}$ n'appartient à aucune classe $G^g(V)$ semble être un problème difficile.

V Preuves des résultats de la section II

Fixons quelques notations. Soit $\lambda \in \Lambda_c$ un cube c -adique de $\mathbb{R}^d$. Pour toute partie F de $\mathbb{R}^d$, notons $R_c^\lambda(F)$ la collection des suites $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda_c \cup \{\emptyset\}$ telles que

$F \cap \lambda \subset \bigsqcup_p \lambda_p \subset \lambda$ (i.e. les ensembles λ_p , pour $p \in \mathbb{N}$, sont disjoints, inclus dans λ et recouvrent $F \cap \lambda$). Observons que $R_c^\lambda(F) \subset R_{c,g}(F \cap \lambda)$ si $|\lambda| < \varepsilon_g$, pour $g \in \mathfrak{D}_d$. En outre, convenons que $\langle \emptyset \rangle_c = \infty$ et, pour tout entier j , désignons par $R_c^{\lambda, \geq j}(F)$ (resp. $R_c^{\lambda, \leq j}(F)$) la collection des recouvrements $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)$ tels que $\langle \lambda_p \rangle_c \geq j$ (resp. $\langle \lambda_p \rangle_c \leq j$ ou $\langle \lambda_p \rangle_c = \infty$) pour tout $p \in \mathbb{N}$.

V.1 Résultats préliminaires

La preuve du théorème 3.1 nécessite plusieurs résultats préliminaires que nous établissons dans cette partie.

Lemme 3.1

Soit $g \in \mathfrak{D}_d$. Pour tous $F \subset \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \Lambda_{c,g}$, on a

$$\mathcal{M}_\infty^g(F \cap \lambda) = \inf_{(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

// Soient $F \subset \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \Lambda_{c,g}$. Rappelons que la masse $\mathcal{M}_\infty^g(F \cap \lambda)$ est donnée par (3.4). Considérons $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(F \cap \lambda)$. Notons P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_p \cap \lambda \neq \emptyset$ et $\lambda_p \neq \lambda_{p'}$ pour tout $p' \in \{0, \dots, p-1\}$, puis P' l'ensemble des entiers $p \in P$ tels que $\lambda_p \not\subset \lambda_{p'}$ pour tout $p' \in P \setminus \{p\}$. Alors, les ensembles λ_p , pour $p \in P'$, sont disjoints et recouvrent $F \cap \lambda$. Si $P' = \{p_0\}$ avec $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_{p_0} \supset \lambda$, posons $\lambda'_{p_0} = \lambda$. Sinon, pour tout $p \in P'$, posons $\lambda'_p = \lambda_p$. De surcroît, notons $\lambda'_p = \emptyset$ pour $p \in \mathbb{N} \setminus P'$. Dès lors, $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)$ et la croissance de g sur $]0, \varepsilon_g[$ (nécessaire uniquement dans le premier cas) garantit que

$$\sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda'_p|) \leq \sum_{p \in P'} g(|\lambda_p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

On conclut en minorant le membre de gauche par son infimum sur $R_c^\lambda(F)$, puis en passant à l'infimum sur $R_{c,g}(F \cap \lambda)$ dans le membre de droite. //

Le lemme suivant donne l'expression des masses attribuées par la mesure extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$ à chaque cube $\lambda \in \Lambda_{c,g}$ et à son intérieur $\text{int } \lambda$. D'apparence anodine, il intervient cependant de manière cruciale dans la preuve du théorème 3.1.

Lemme 3.2

| Soit $g \in \mathfrak{D}_d$. On a $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda) = \mathcal{M}_\infty^g(\lambda) = g(|\lambda|)$ pour tout cube $\lambda \in \Lambda_{c,g}$.

// Soit $\lambda \in \Lambda_{c,g}$. D'une part, comme $\lambda \supset \text{int } \lambda$, on a $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda) \leq \mathcal{M}_\infty^g(\lambda)$. D'autre part, en observant que $(\lambda, \emptyset, \dots) \in R_{c,g}(\lambda)$, il apparaît clairement que $\mathcal{M}_\infty^g(\lambda) \leq g(|\lambda|)$. Il reste donc à établir que $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda) \geq g(|\lambda|)$. Dans ce but, commençons par supposer que $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda') < g(|\lambda'|)$, pour tout sous-cube c -adique λ' de λ . Appelons F l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui ne possèdent aucune coordonnée c -adique (c'est-à-dire aucune coordonnée de la forme kc^{-j} , avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$). Prenons ensuite $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)$ et

prouvons, par récurrence sur $j \geq \langle \lambda \rangle_c$, l'assertion $P(j)$ suivante : il existe $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \geq j}(F)$ vérifiant

$$\sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda'_p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|). \quad (3.11)$$

Tout d'abord, $P(\langle \lambda \rangle_c)$ est clairement vérifiée, puisque $R_c^\lambda(F) = R_c^{\lambda, \geq \langle \lambda \rangle_c}(F)$. Prenons ensuite un entier $j \geq \langle \lambda \rangle_c$, supposons vraie l'assertion $P(j)$ et prouvons $P(j+1)$. D'après $P(j)$, il existe $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \geq j}(F)$ vérifiant l'inégalité (3.11). Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \lambda'_p \rangle_c = j$. Comme λ'_p est un sous-cube de λ , on a $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda'_p) < g(|\lambda'_p|)$, si bien qu'en vertu du lemme 3.1, il existe un recouvrement $(\lambda_{p'}^p)_{p' \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda_{p'}^p, \geq j+1}(\text{int } \lambda'_p)$ vérifiant

$$\sum_{p'=0}^{\infty} g(|\lambda_{p'}^p|) \leq g(|\lambda'_p|).$$

En regroupant les ensembles λ'_p , pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \lambda'_p \rangle_c \geq j+1$, avec les ensembles $\lambda_{p'}^p$, pour $p' \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\langle \lambda'_p \rangle_c = j$, on forme une recouvrement appartenant à $R_c^{\lambda, \geq j+1}(F)$ qui vérifie

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ \langle \lambda'_p \rangle_c \geq j+1}} g(|\lambda'_p|) + \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ \langle \lambda'_p \rangle_c = j}} \sum_{p'=0}^{\infty} g(|\lambda_{p'}^p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda'_p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

Ainsi, $P(j+1)$ est vraie. Le principe de récurrence garantit alors la véracité de $P(j)$, pour tout entier $j \geq \langle \lambda \rangle_c$. D'après le lemme 3.1, il s'ensuit que

$$\mathcal{M}_\infty^g(F \cap \lambda) = \lim_{j \uparrow \infty} \uparrow \inf_{(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \geq j}(F)} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|). \quad (3.12)$$

Comme $g \in \mathfrak{D}_d$, la fonction $\theta : r \mapsto g(r)/r^d$ décroît sur l'intervalle $]0, \varepsilon_g[$. Notons $\eta \in]0, \infty]$ la limite à droite en 0 de θ , puis prenons $\eta' \in]0, \eta[$. Il existe un entier $j \geq \langle \lambda \rangle_c$ tel que $g(|\lambda'|) \geq \eta' |\lambda'|^d$, pour tout cube c -adique λ' de génération supérieure à j . Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \geq j}(F)$. Étant donné que F est de mesure de Lebesgue pleine dans λ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|) &\geq \eta' \sum_{p=0}^{\infty} |\lambda_p|^d = \eta' \kappa \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{L}^d(\lambda_p) \\ &\geq \eta' \kappa \mathcal{L}^d(F \cap \lambda) = \eta' \kappa \mathcal{L}^d(\lambda) = \eta' |\lambda|^d \end{aligned}$$

où κ désigne la puissance d -ième du diamètre du cube $[0, 1]^d$. En utilisant l'égalité (3.12) et en faisant tendre η' vers η , on peut écrire

$$\eta |\lambda|^d \leq \mathcal{M}_\infty^g(F \cap \lambda) \leq \mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda) < g(|\lambda|) = |\lambda|^d \theta(|\lambda|).$$

Il en découle que $\theta(|\lambda|)$ est strictement supérieur à η . Cependant, le fait d'avoir $|\lambda| < \varepsilon_g$ et la décroissance de θ sur l'intervalle $]0, \varepsilon_g[$ conduisent à la majoration $\theta(|\lambda|) \leq \eta$. Cela offre une contradiction.

En conséquence, il existe un sous-cube c -adique λ' de λ pour lequel $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda') = g(|\lambda'|)$. Posons $j' = \langle \lambda' \rangle_c$. Soit λ'' un sous-cube c -adique de λ de génération j' . Il existe alors une translation σ qui envoie λ' sur λ'' . La translation σ est une isométrie qui met naturellement en correspondance bijective $R_c^{\lambda'}(\text{int } \lambda')$ et $R_c^{\lambda''}(\text{int } \lambda'')$. Il s'ensuit que $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda'') = \mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda')$. En outre, λ' et λ'' ont même diamètre. Finalement, $\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda'') = g(|\lambda''|)$ pour tout sous-cube c -adique λ'' de λ de génération j' .

Prenons désormais $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(\text{int } \lambda)$ et, pour tout $j \in \{\langle \lambda \rangle_c, \dots, j'\}$, prouvons l'assertion $Q(j)$ suivante : il existe $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \leq j}(\text{int } \lambda)$ vérifiant

$$\sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda'_p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|). \quad (3.13)$$

Mettons en évidence $Q(j')$. Quitte à modifier la façon dont le recouvrement $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est indexé, on peut supposer que les cubes $\lambda_0, \dots, \lambda_{p_1}$ (avec $p_1 \geq -1$) sont les seuls λ_p , pour $p \in \mathbb{N}$, à être de génération inférieure à $j' - 1$. Posons $\lambda'_p = \lambda_p$, pour tout $p \in \{0, \dots, p_1\}$. En outre, notons $\lambda'_{p_1+1}, \dots, \lambda'_{p_2}$ (avec $p_2 \geq p_1$) les cubes c -adiques de génération j' inclus dans $\lambda \setminus (\lambda'_0 \sqcup \dots \sqcup \lambda'_{p_1})$. En outre, posons $\lambda'_p = \emptyset$ pour tout entier $p \geq p_2 + 1$. On observe que $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ appartient à $R_c^{\lambda, \leq j'}(\text{int } \lambda)$. De plus, d'une part, si $p \in \{0, \dots, p_1\}$, on a $g(|\lambda'_p|) = g(|\lambda_p|)$. D'autre part, si $p \in \{p_1 + 1, \dots, p_2\}$, le cube λ'_p est de génération j' et $\lambda'_p \cap \text{int } \lambda$ est recouvert par les ensembles $\lambda_{p'}$, pour $p' \geq p_1 + 1$, qui vérifient $\lambda_{p'} \subset \lambda'_p$, si bien que

$$g(|\lambda'_p|) = \mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda'_p) \leq \mathcal{M}_\infty^g(\lambda'_p \cap \text{int } \lambda) \leq \sum_{\substack{p' \geq p_1+1 \\ \lambda_{p'} \subset \lambda'_p}} g(|\lambda_{p'}|).$$

Ces observations conduisent directement à l'inégalité (3.13). L'assertion $Q(j')$ est donc vraie. Considérons désormais un entier $j \in \{\langle \lambda \rangle_c + 1, \dots, j'\}$, supposons $Q(j)$ vraie et prouvons $Q(j - 1)$. Notons $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \leq j}(\text{int } \lambda)$ vérifiant (3.13). On peut supposer que le recouvrement $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ contient des cubes de génération exactement j et, quitte à modifier la manière dont il est indexé, on peut supposer que ces cubes sont $\lambda'_0, \dots, \lambda'_{p_1}$, avec $p_1 \in \mathbb{N}$. Soit ν un frère du cube λ'_0 (c'est-à-dire un cube c -adique de génération j qui appartient au même cube c -adique de génération $j - 1$ que λ'_0). Sachant que $\langle \lambda'_0 \rangle_c > \langle \lambda \rangle_c$, on a $\lambda'_0 \subsetneq \lambda$, de sorte que $\nu \subset \lambda$. Par conséquent, $\nu \cap \text{int } \lambda \neq \emptyset$, si bien que $\nu \cap \lambda'_{p_0} \neq \emptyset$, pour un certain $p_0 \in \mathbb{N}$. Le cube λ'_{p_0} , de génération inférieure à j , ne peut pas être un sous-cube strict de ν . De plus, ν ne peut pas être un sous-cube strict de λ'_{p_0} , sinon λ'_0 serait un sous-cube strict de λ'_{p_0} . Par conséquent, $\nu = \lambda'_{p_0}$ et $p_0 \in \{0, \dots, p_1\}$. Ainsi, $p_1 = p_2 c^d - 1$, pour $p_2 \in \mathbb{N}^*$, et quitte à modifier l'ordre des cubes $\lambda'_0, \dots, \lambda'_{p_1}$, on peut obtenir des sous-cubes c -adiques $\lambda''_0, \dots, \lambda''_{p_2-1}$ de λ disjoints et de génération $j - 1$, en posant $\lambda''_p = \lambda'_{pc^d} \sqcup \dots \sqcup \lambda'_{(p+1)c^d-1}$, pour tout $p \in \{0, \dots, p_2 - 1\}$. Pour un tel p et pour tout $p' \in \{0, \dots, c^d - 1\}$, on a $|\lambda''_p| = c |\lambda'_{pc^d+p'}|$, si bien que

$$\begin{aligned} \sum_{p'=0}^{c^d-1} g(|\lambda'_{pc^d+p'}|) &= c^d g(c^{-1} |\lambda''_p|) = c^d (c^{-1} |\lambda''_p|)^d \theta(c^{-1} |\lambda''_p|) \\ &\geq |\lambda''_p|^d \theta(|\lambda''_p|) = g(|\lambda''_p|). \end{aligned}$$

Cette minoration provient de la décroissance de θ sur $]0, \varepsilon_g[$ et des inégalités $c^{-1}\lambda_p'' \leq \lambda_p'' < \varepsilon_g$. Posons alors $\lambda_p'' = \lambda_p'$, pour $p \geq p_1 + 1$, ainsi que $\lambda_p'' = \emptyset$, pour $p \in \{p_2, \dots, p_1\}$. Il vient $(\lambda_p'')_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^{\lambda, \leq j-1}(\text{int } \lambda)$ et

$$\sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p''|) \leq \sum_{p=p_1+1}^{\infty} g(|\lambda_p'|) + \sum_{p=0}^{p_2-1} \sum_{p'=0}^{c^d-1} g(|\lambda'_{pc^d+p'}|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

Ainsi, l'assertion $Q(j-1)$ est prouvée. Ce qui précède garantit finalement la véracité de l'assertion $Q(\langle \lambda \rangle_c)$. Autrement dit, comme $R_c^{\lambda, \leq \langle \lambda \rangle_c}(\text{int } \lambda)$ ne contient que $(\lambda, \emptyset, \dots)$ et ses réarrangements, il vient

$$g(|\lambda|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à passer à la borne inférieure sur $R_c^{\lambda}(\text{int } \lambda)$ et invoquer le lemme 3.1. //

Remarque : Le résultat que nous venons d'établir est énoncé (sans preuve) par K. Falconer [63] dans le cas particulier des jauges Id^s , où s est un élément de l'intervalle $]0, d]$. Y. Bugeaud [38], pour sa part, affirme (sans preuve également) que le résultat est vrai lorsque g est une fonction strictement croissante et concave au voisinage de l'origine, ce qui permet de retrouver le résultat de K. Falconer pour $s \leq 1$. Toutefois, comme l'indique le lemme 3.2, la concavité de la jauge g n'est pas la bonne propriété pour conclure au fait que la masse attribuée par la mesure extérieure $\mathcal{M}_{\infty}^g$ aux petits cubes c -adiques λ de $\mathbb{R}^d$ (et à leur intérieur) est donnée par $g(|\lambda|)$ (les jauges Id^s , pour $s \in]1, d]$ et $d \geq 2$, ne sont d'ailleurs concaves sur aucun voisinage de 0). La bonne propriété est plutôt d'avoir $g(r) \leq c^d g(r/c)$ pour r assez petit (ce qui découle de la décroissance de $r \mapsto g(r)/r^d$). Sous cette hypothèse, on peut affirmer de manière intuitive que remplacer un cube c -adique dans un recouvrement par certains de ses sous-cubes ne fait qu'augmenter la somme associée au recouvrement et ne permet donc pas d'approcher l'infimum.

Le lemme suivant indique qu'une partie F de l'espace $\mathbb{R}^d$ qui, au sens d'une mesure extérieure $\mathcal{M}_{\infty}^g$, pour $g \in \mathfrak{D}_d$, est de masse non négligeable dans tous les cubes c -adiques assez petits de $\mathbb{R}^d$ est aussi de masse non négligeable dans tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.3

Soient $g \in \mathfrak{D}_d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$. Soient en outre $\kappa \in]0, 1]$ et $\rho \in]0, \varepsilon_g]$. Alors, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{M}_{\infty}^g(F \cap U) \geq \kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(U)$$

dès que $\mathcal{M}_{\infty}^g(F \cap \lambda) \geq \kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(\lambda)$, pour tout cube c -adique $\lambda \subset U$ vérifiant $|\lambda| < \rho$.

// Le preuve reprend quelques arguments de celle du lemme 1 de [63]. Considérons un ouvert non vide U et supposons avoir $\mathcal{M}_{\infty}^g(F \cap \lambda) \geq \kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(\lambda)$, pour tout cube c -adique $\lambda \subset U$ vérifiant $|\lambda| < \rho$. L'ensemble des cubes c -adiques λ inclus dans U et de diamètre strictement inférieur à ρ dont le père (c'est-à-dire le cube de génération maximale dans lequel λ est strictement inclus) n'est pas inclus dans U ou est de diamètre supérieur à ρ est infini

dénombrable. Notons $(\nu_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une énumération de cet ensemble. On a

$$U = \bigsqcup_{q=0}^{\infty} \nu_q.$$

Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(F \cap U)$. Notons P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_p \neq \lambda_{p'}$ pour tout $p' \in \{0, \dots, p-1\}$, puis P' l'ensemble des $p \in P$ tels que $\lambda_p \not\subset \lambda_{p'}$ pour tout $p' \in P \setminus \{p\}$. Alors, les ensembles λ_p , pour $p \in P'$, sont des cubes disjoints qui recouvrent $F \cap U$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, appelons P_q l'ensemble des entiers $p \in P'$ vérifiant $\lambda_p \subsetneq \nu_q$. Supposons d'une part que cet ensemble est non vide. Dès lors, les cubes λ_p , pour $p \in P'$, qui présentent une intersection non vide avec ν_q sont en fait strictement inclus dans ν_q . Ils recouvrent en outre $F \cap \nu_q$, puisque

$$F \cap \nu_q = (F \cap U) \cap \nu_q \subset \bigcup_{p \in P'} (\lambda_p \cap \nu_q) = \bigcup_{p \in P_q} \lambda_p.$$

Comme le cube ν_q est de diamètre strictement inférieur à ρ , et donc à ε_g , et les cubes λ_p , pour $p \in P_q$, sont de diamètre strictement inférieur à ε_g , le lemme 3.2 et l'inégalité $\mathcal{M}_{\infty}^g(F \cap \nu_q) \geq \kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(\nu_q)$ permettent alors d'écrire

$$\kappa g(|\nu_q|) = \kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(\nu_q) \leq \mathcal{M}_{\infty}^g(F \cap \nu_q) \leq \sum_{p \in P_q} g(|\lambda_p|).$$

D'autre part, si P_q est vide, ν_q est inclus dans un cube λ_p , pour p appartenant à P'' , le complémentaire dans P' de l'union sur $q \in \mathbb{N}$ des ensembles P_q (sinon ν_q présenterait une intersection vide avec tous les cubes λ_p , pour $p \in P'$, si bien que $(F \cap U) \cap \nu_q = F \cap \nu_q$ serait vide, ce qui ne peut pas se produire puisque $\mathcal{M}_{\infty}^g$ attribue à ce dernier ensemble une masse supérieure à $\kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(\nu_q)$, qui est strictement positif). En regroupant les cubes ν_q pour $q \in \mathbb{N}$ tel que P_q est non vide, ainsi que les cubes λ_p , pour $p \in P''$, on forme un recouvrement appartenant à $R_{c,g}(U)$ et vérifiant

$$\kappa \left(\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ P_q \neq \emptyset}} g(|\nu_q|) + \sum_{p \in P''} g(|\lambda_p|) \right) \leq \sum_{p \in P'} g(|\lambda_p|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

On conclut en minorant le membre de gauche par $\kappa \mathcal{M}_{\infty}^g(U)$ et en passant, dans le membre de droite, à la borne inférieure sur $R_{c,g}(F \cap U)$. //

Les lemmes précédents permettent de montrer que les G_{δ} de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue pleine dans un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ appartiennent à la classe $G^g(V)$, quelle que soit la jauge g de $\mathfrak{D}_d$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.6

Soient V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et F un G_{δ} de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ pleine dans V . Alors F appartient à la classe $G^g(V)$ pour toute jauge g de $\mathfrak{D}_d$.

// Prenons deux jauges g et $\bar{g}$ dans $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$. Soient U un ouvert inclus dans V et λ un cube c -adique inclus dans U et de diamètre strictement

inférieur à $\varepsilon_{\bar{g}}$. Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $R_c^\lambda(F)$. On a en particulier $|\lambda_p| \leq |\lambda| < \varepsilon_{\bar{g}}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. La fonction $r \mapsto \bar{g}(r)/r^d$ décroît sur $]0, \varepsilon_{\bar{g}}[$, puisque $\bar{g}$ appartient à $\mathfrak{D}_d$ et F est de mesure de Lebesgue pleine dans le cube λ , de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \bar{g}(|\lambda_p|) &\geq \frac{\bar{g}(|\lambda|)}{|\lambda|^d} \sum_{p=0}^{\infty} |\lambda_p|^d = \frac{\bar{g}(|\lambda|)}{|\lambda|^d} \kappa \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{L}^d(\lambda_p) \\ &\geq \frac{\bar{g}(|\lambda|)}{|\lambda|^d} \kappa \mathcal{L}^d(F \cap \lambda) = \frac{\bar{g}(|\lambda|)}{|\lambda|^d} \kappa \mathcal{L}^d(\lambda) = \bar{g}(|\lambda|) \end{aligned}$$

où κ désigne la puissance d -ième du diamètre de $[0, 1]^d$. En passant à la borne inférieure sur $R_c^\lambda(F)$ et en utilisant le lemme 3.1, il en ressort que $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(F \cap \lambda) \geq \bar{g}(|\lambda|)$. Le lemme 3.2 conduit à $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(F \cap \lambda) \geq \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(\lambda)$ et le lemme 3.3 permet de conclure que $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$. //

Prenons une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$. Le lemme suivant montre que la classe $G^g(V)$ contient toute image réciproque par une application bilipschitzienne f d'un G_δ de masse non négligeable, au sens de la mesure extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$, dans tous les ouverts assez petits inclus dans $f(V)$.

Lemme 3.4

Prenons une jauge g de $\mathfrak{D}_d$, un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$ et f une application bilipschitzienne de V dans $\mathbb{R}^d$. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ pour lequel il existe $\kappa \in]0, 1]$ et $\rho \in]0, \varepsilon_g]$ tels que $\mathcal{M}_\infty^g(F \cap U) \geq \kappa \mathcal{M}_\infty^g(U)$ pour tout ouvert U inclus dans $f(V)$ vérifiant $|U| < \rho$. Alors

$$\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(f^{-1}(F) \cap U) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$$

pour tout ouvert U inclus dans V et toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$.

// La preuve reprend des arguments de celles des lemmes 2 et 3 de [63]. Commençons par prendre une application lipschitzienne $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ et une partie A de V . Notons $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(A)$. En appelant P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ pour lesquels $V \cap \lambda_p$ est non vide, on observe que $\psi(A)$ est inclus dans l'union sur $p \in P$ des ensembles $\psi(V \cap \lambda_p)$. Comme ψ est lipschitzienne, il existe un entier naturel n tel que $\|\psi(y) - \psi(x)\| \leq c^n \|y - x\|$, pour tous points x et y de V . Fixons $p \in P$. L'ensemble $\psi(V \cap \lambda_p)$ est de diamètre inférieur à $c^n |\lambda_p|$. Notons j_p la génération du cube λ_p et y_p un point quelconque de $\psi(V \cap \lambda_p)$. Il existe un entier naturel non nul K qui ne dépend que de la dimension d et de la norme adoptée sur $\mathbb{R}^d$ tel que l'ensemble $\psi(V \cap \lambda_p)$ est inclus dans l'union de K cubes c -adiques de génération $j_p - n$, voisins les uns des autres, parmi lesquels figure $\lambda_{j_p - n}^c(y_p)$, l'unique cube c -adique de génération $j_p - n$ contenant le point y_p . On peut donc inclure $\psi(V \cap \lambda_p)$ dans Kc^{nd} cubes c -adiques de génération j_p , donc de même diamètre que λ_p . Notons-les $\lambda_1^p, \dots, \lambda_{Kc^{nd}}^p$. Ainsi, les cubes $\lambda_{p'}^p$, pour $p' \in \{1, \dots, Kc^{nd}\}$ et $p \in P$, forment un recouvrement appartenant à

$R_{c,g}(\psi(A))$. Il en ressort que

$$\mathcal{M}_\infty^g(\psi(A)) \leq \sum_{p \in P} \sum_{p'=1}^{Kc^{nd}} g(|\lambda_{p'}^p|) \leq Kc^{nd} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|).$$

En passant à l'infimum sur $R_{c,g}(A)$ dans le membre de droite, il vient $\mathcal{M}_\infty^g(\psi(A)) \leq Kc^{nd}\mathcal{M}_\infty^g(A)$.

Comme f est une application bilipschitzienne de V dans $\mathbb{R}^d$, il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que $c^{-n_1}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c^{n_2}\|x - y\|$, pour tous points x et y de l'ouvert V . Soit U un ouvert inclus dans V dont le diamètre est strictement inférieur à $c^{-n_2}\rho$. En utilisant le résultat précédent avec $\psi = f^{-1}$, on peut d'abord écrire $\mathcal{M}_\infty^g(U) \leq Kc^{n_1d}\mathcal{M}_\infty^g(f(U))$. Sachant que $f(U)$ est un ouvert inclus dans $f(V)$ tel que $|f(U)| < \rho$, l'hypothèse faite sur F donne ensuite l'inégalité $\mathcal{M}_\infty^g(f(U)) \leq \mathcal{M}_\infty^g(f(U) \cap F)/\kappa$. Enfin, le résultat précédent conduit, pour $\psi = f$, à majorer $\mathcal{M}_\infty^g(f(U) \cap F)$ par $Kc^{n_2d}\mathcal{M}_\infty^g(U \cap f^{-1}(F))$. En combinant toutes ces inégalités et en posant $\kappa' = \kappa K^{-2}c^{-(n_1+n_2)d}$, on obtient finalement $\mathcal{M}_\infty^g(U \cap f^{-1}(F)) \geq \kappa'\mathcal{M}_\infty^g(U)$. Désignons maintenant par U un ouvert inclus dans V (sans restriction de diamètre) et prenons un cube c -adique λ inclus dans U et de diamètre strictement inférieur à $c^{-n_2}\rho$. L'intérieur de λ est un ouvert inclus dans V de diamètre strictement inférieur à $c^{-n_2}\rho$. Ce qui précède assure que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\infty^g(f^{-1}(F) \cap \lambda) &\geq \mathcal{M}_\infty^g(f^{-1}(F) \cap \text{int } \lambda) \\ &\geq \kappa'\mathcal{M}_\infty^g(\text{int } \lambda) = \kappa'g(|\lambda|). \end{aligned}$$

La dernière identité provient du lemme 3.2 et de l'inégalité $|\lambda| < \varepsilon_g$. Finalement, on dispose de la minoration $\mathcal{M}_\infty^g(f^{-1}(F) \cap \lambda) \geq \kappa'g(|\lambda|)$, pour tout cube c -adique λ inclus dans U et de diamètre strictement inférieur à $c^{-n_2}\rho$, donc de génération supérieure à un certain entier naturel j .

Considérons une fonction de jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$. La fonction $\xi = \bar{g}/g$ décroît au voisinage de l'origine. Aussi, notons ρ' le supremum de l'ensemble des réels $r \in]0, \min(\varepsilon_{\bar{g}}, \varepsilon_g)[$ pour lesquels elle décroît sur l'intervalle $]0, r[$. Prenons alors un cube c -adique λ inclus dans U et de diamètre strictement inférieur à ρ' . La fonction ξ tend vers l'infini en 0, si bien qu'il existe un entier j' supérieur à $\langle \lambda \rangle_c$ et j tel que $\xi(|\lambda'|) \geq \xi(|\lambda|)/\kappa'$ pour tout cube λ' de génération supérieure à j' . Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(f^{-1}(F))$. Quitte à modifier la façon dont ce recouvrement est indexé, on peut supposer que les ensembles $\lambda_0, \dots, \lambda_{p_1}$ (avec $p_1 \geq -1$) sont les seuls ensembles λ_p , avec $p \in \mathbb{N}$, dont la génération est inférieure à $j' - 1$. Pour tout $p \in \{0, \dots, p_1\}$, posons $\lambda'_p = \lambda_p$. Appelons ensuite $\lambda'_{p_1+1}, \dots, \lambda'_{p_2}$ (avec $p_2 \geq p_1$) les cubes de génération j' qui sont inclus dans $\lambda \setminus (\lambda'_0 \sqcup \dots \sqcup \lambda'_{p_1})$. D'une part, pour $p \in \{0, \dots, p_1\}$,

$$\bar{g}(|\lambda_p|) = \xi(|\lambda_p|)g(|\lambda_p|) \geq \xi(|\lambda|)g(|\lambda_p|) = \xi(|\lambda|)g(|\lambda'_p|)$$

en raison de la décroissance de ξ et de la positivité de g sur l'intervalle $]0, \rho'[$. Fixons d'autre part $p \in \{p_1 + 1, \dots, p_2\}$. Soit $p' \geq p_1 + 1$ un entier tel que $\lambda_{p'}$ présente une intersection non vide avec λ'_p . Observons que λ'_p est

de génération j' et $\lambda_{p'}$ est un cube de génération supérieure à j' . Il s'ensuit que $\lambda_{p'}$ est inclus dans λ'_p et qu'il vérifie

$$\bar{g}(|\lambda_{p'}|) = \xi(|\lambda_{p'}|)g(|\lambda_{p'}|) \geq \frac{1}{\kappa'}\xi(|\lambda|)g(|\lambda_{p'}|)$$

par définition de j' . En sommant sur tous les ensembles $\lambda_{p'}$, pour $p' \geq p_1 + 1$, qui ont une intersection non vide avec λ_p , il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p' \geq p_1+1 \\ \lambda_{p'} \subset \lambda'_p}} \bar{g}(|\lambda_{p'}|) &\geq \frac{1}{\kappa'}\xi(|\lambda|) \sum_{\substack{p' \geq p_1+1 \\ \lambda_{p'} \subset \lambda'_p}} g(|\lambda_{p'}|) \\ &\geq \frac{1}{\kappa'}\xi(|\lambda|)\mathcal{M}_\infty^g(f^{-1}(F) \cap \lambda'_p) \geq \xi(|\lambda|)g(|\lambda'_p|) \end{aligned}$$

car les cubes $\lambda_{p'}$, pour $p' \geq p_1 + 1$, qui sont inclus dans λ'_p recouvrent $f^{-1}(F) \cap \lambda'_p$ et sont de diamètre strictement inférieur à ε_g et car le cube λ'_p est inclus dans U et de génération supérieure à j . Posons en outre $\lambda'_p = \emptyset$ pour tout entier $p \geq p_2 + 1$. Alors $(\lambda'_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(\lambda)$, si bien que

$$\begin{aligned} \xi(|\lambda|)\mathcal{M}_\infty^g(\lambda) &\leq \sum_{p=0}^{p_1} \xi(|\lambda|)g(|\lambda'_p|) + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} \xi(|\lambda|)g(|\lambda'_p|) \\ &\leq \sum_{p=0}^{p_1} \bar{g}(|\lambda_p|) + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} \sum_{\substack{p' \geq p_1+1 \\ \lambda_{p'} \subset \lambda'_p}} \bar{g}(|\lambda_{p'}|) = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{g}(|\lambda_p|) \end{aligned}$$

d'après les inégalité obtenues précédemment. La dernière égalité est une conséquence du fait que les ensembles $\lambda_{p'}$, pour $p' \geq p_1 + 1$, qui sont non vides sont inclus dans un unique cube λ'_p , pour $p \in \{p_1 + 1, \dots, p_2\}$. En passant à l'infimum sur $R_c^\lambda(f^{-1}(F))$ et en faisant appel aux lemmes 3.1 et 3.2, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(f^{-1}(F) \cap \lambda) &\geq \xi(|\lambda|)\mathcal{M}_\infty^g(\lambda) = \xi(|\lambda|)g(|\lambda|) \\ &= \bar{g}(|\lambda|) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(\lambda) \end{aligned}$$

puisque le diamètre de λ est strictement inférieur à ρ' , donc à ε_g et $\varepsilon_{\bar{g}}$. Finalement, pour tout cube c -adique λ inclus dans U et de diamètre strictement inférieur à $\rho' \leq \varepsilon_{\bar{g}}$, on dispose de l'inégalité $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(f^{-1}(F) \cap \lambda) \geq \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(\lambda)$. Le lemme 3.3 assure alors que $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(f^{-1}(F) \cap U) \geq \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$. L'inégalité réciproque étant triviale, le lemme est prouvé. //

Le lemme 3.4 permet de montrer que, pour toute jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, la classe $G^g(V)$ ne dépend pas du choix de la norme et de l'entier c qui permettent de construire les mesures extérieures $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}$, pour $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$.

Proposition 3.7

Soient g une jauge de $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Alors la classe $G^g(V)$ ne dépend ni du choix de la norme $\|\cdot\|$ dont est muni $\mathbb{R}^d$ ni du choix de l'entier c .

// Commençons par fixer un entier $c \geq 2$, prenons deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^d$ et notons $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ les diamètres associés. Désignons alors par $\mathcal{M}_{\infty,1}^g$ (resp. $\mathcal{M}_{\infty,2}^g$) la mesure extérieure associée à la jauge g et obtenue à l'aide de recouvrements par des cubes c -adiques λ de diamètre $|\lambda|_1$ (resp. $|\lambda|_2$). Soit F un G_δ de $\mathbb{R}^d$. Supposons avoir $\mathcal{M}_{\infty,1}^g(F \cap U) = \mathcal{M}_{\infty,1}^g(U)$ pour tout ouvert U inclus dans V et toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et montrons que $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\bar{g}}$ vérifie la même propriété. Dans ce but, prenons un ouvert U inclus dans V et $\bar{g}$ une jauge de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$. Posons $\tilde{g} = \sqrt{\bar{g}g}$ et rappelons que $\tilde{g}$ est une jauge de $\mathfrak{D}_d$ qui vérifie $\bar{g} \prec \tilde{g} \prec g$. Notons κ le réel $\|[0,1]^d\|_2/\|[0,1]^d\|_1$. Alors, pour tout cube c -adique λ , on a $|\lambda|_2 = \kappa|\lambda|_1$. La croissance de $\tilde{g}$ et la décroissance de $r \mapsto \tilde{g}(r)/r^d$ sur l'intervalle $]0, \varepsilon_{\tilde{g}}[$ impliquent que pour tout cube c -adique λ vérifiant $|\lambda|_2 < \varepsilon_{\tilde{g}} \min(1, \kappa)$, on a

$$\min(1, \kappa)^d \tilde{g}(|\lambda|_1) \leq \tilde{g}(|\lambda|_2) \leq \max(1, \kappa)^d \tilde{g}(|\lambda|_1).$$

Soit λ un tel cube c -adique qui est en outre inclus dans U . Considérons $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)$. D'après l'encadrement précédent, on a

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|_2) \geq \min(1, \kappa)^d \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|_1) \geq \min(1, \kappa)^d \mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(F \cap \lambda).$$

La dernière inégalité provient du fait que les ensembles λ_p , pour $p \in \mathbb{N}$, vérifient $|\lambda_p|_1 \leq |\lambda|_1 = |\lambda|_2/\kappa < \varepsilon_{\tilde{g}}$ et recouvrent $F \cap \lambda$. Par ailleurs, $\tilde{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifie $\tilde{g} \prec g$ et $\text{int } \lambda$ est un ouvert inclus dans V , de sorte que

$$\mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(F \cap \lambda) \geq \mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(F \cap \text{int } \lambda) = \mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(\text{int } \lambda) = \tilde{g}(|\lambda|_1).$$

La dernière égalité provient du lemme 3.2 et du fait que $|\lambda|_1 < \varepsilon_{\tilde{g}}$. De même, comme $|\lambda|_2 < \varepsilon_{\tilde{g}}$, on a $\max(1, \kappa)^d \tilde{g}(|\lambda|_1) \geq \tilde{g}(|\lambda|_2) = \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(\lambda)$ grâce à l'encadrement énoncé précédemment. On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|_2) \geq \left(\frac{\min(1, \kappa)}{\max(1, \kappa)} \right)^d \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(\lambda).$$

Comme $|\lambda|_2 < \varepsilon_{\tilde{g}}$, le lemme 3.1 garantit qu'on obtient $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(F \cap \lambda)$ dans le membre de gauche en prenant la borne inférieure sur $R_c^\lambda(F)$. Dès lors, le lemme 3.3 montre que $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(F \cap U) \geq (\min(1, \kappa)/\max(1, \kappa))^d \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(U)$. Cela étant vrai quel que soit l'ouvert U inclus dans V , le lemme 3.4 implique que $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(U)$ pour tout ouvert $U \subset V$ car $\bar{g} \prec \tilde{g}$.

Munissons maintenant $\mathbb{R}^d$ de la norme supremum $\|\cdot\|_\infty$ usuelle. Prenons un entier $c \geq 2$. Appelons $\mathcal{H}_{\varepsilon_g}^g$ la mesure extérieure de Hausdorff associée à une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et obtenue à l'aide de recouvrements par des ensembles de diamètre strictement inférieur à ε_g . Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On a tout d'abord clairement $\mathcal{H}_{\varepsilon_g}^g(A) \leq \mathcal{M}_\infty^g(A)$. Considérons ensuite un recouvrement $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de A par des ensembles de diamètre strictement inférieur à ε_g . Notons P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que $U_p \neq \emptyset$. Soit $p \in P$. Notons x_p un élément de U_p et j_p le plus grand entier naturel vérifiant $2|U_p| \leq c^{-j_p}$. Alors $U_p \subset \bar{B}(x_p, |U_p|) \subset 3\lambda_{j_p}^c(x_p)$, l'union de l'unique cube c -adique de

génération j_p qui contient x_p et des $3^d - 1$ cubes de même génération qui lui sont adjacents. Ainsi, U_p est inclus dans 3^d cubes c -adiques de diamètre c^{-j_p} , donc dans $(3c^2)^d$ cubes c -adiques de diamètre $c^{-j_p-2} < |U_p| < \varepsilon_g$. Il vient

$$\mathcal{M}_\infty^g(A) \leq (3c^2)^d \sum_{p \in P} g(c^{-j_p-2}) \leq (3c^2)^d \sum_{p=0}^{\infty} g(|U_p|)$$

en vertu de la croissance de g sur $]0, \varepsilon_g[$. En passant à la borne inférieure sur l'ensemble des recouvrements de A par des ensembles de diamètre strictement inférieur à ε_g , on obtient $\mathcal{M}_\infty^g(A) \leq (3c^2)^d \mathcal{H}_{\varepsilon_g}^g(A)$. Finalement,

$$\forall g \in \mathfrak{D}_d \quad \forall A \subset \mathbb{R}^d \quad \mathcal{H}_{\varepsilon_g}^g(A) \leq \mathcal{M}_\infty^g(A) \leq (3c^2)^d \mathcal{H}_{\varepsilon_g}^g(A). \quad (3.14)$$

Considérons désormais deux entiers $c_1, c_2 \geq 2$ et, pour $g \in \mathfrak{D}_d$, notons $\mathcal{M}_{\infty,1}^g$ (resp. $\mathcal{M}_{\infty,2}^g$) la mesure extérieure associée à la jauge g et obtenue à l'aide de recouvrements par des cubes c_1 -adiques (resp. c_2 -adiques) de diamètre strictement inférieur à ε_g . Supposons avoir $\mathcal{M}_{\infty,1}^{\bar{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_{\infty,1}^{\bar{g}}(U)$ pour tout ouvert U inclus dans V et toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et montrons que $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\bar{g}}$ vérifie la même propriété. À cet effet, prenons $\bar{g}$ une jauge de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et notons $\tilde{g} = \sqrt{\bar{g}g}$. Soit U un ouvert inclus dans V . D'après (3.14) et comme $\tilde{g} \prec g$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(F \cap U) &\geq \mathcal{H}_{\varepsilon_{\tilde{g}}}^{\tilde{g}}(F \cap U) \geq (3c_1^2)^{-d} \mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(F \cap U) = (3c_1^2)^{-d} \mathcal{M}_{\infty,1}^{\tilde{g}}(U) \\ &\geq (3c_1^2)^{-d} \mathcal{H}_{\varepsilon_{\tilde{g}}}^{\tilde{g}}(U) \geq (9c_1^2 c_2^2)^{-d} \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(U). \end{aligned}$$

Comme $\bar{g} \prec \tilde{g}$, le lemme 3.4 appliqué à l'identité conduit finalement à $\mathcal{M}_{\infty,2}^{\bar{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_{\infty,2}^{\tilde{g}}(U)$ pour tout ouvert U inclus dans V . //

V.2 Preuve du théorème 3.1

Grâce aux résultats préliminaires de la partie précédente, nous sommes en mesure de prouver le théorème 3.1. Établissons d'abord le point (iii). Soient g et $\bar{g}$ deux jauges de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Considérons un ensemble F de la classe $G^g(V)$. En notant $\tilde{g} = \sqrt{\bar{g}g}$, on a $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(F \cap V) = \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(V)$ puis $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(F) \geq \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(V)$, car $\tilde{g}$ appartient à $\mathfrak{D}_d$ et vérifie $\tilde{g} \prec g$. Cette dernière mesure est non nulle, car l'ouvert non vide V contient nécessairement un cube c -adique λ de diamètre strictement inférieur à $\varepsilon_{\tilde{g}}$ et un tel cube vérifie $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(\lambda) = \tilde{g}(|\lambda|) > 0$ en vertu du lemme 3.2. Il s'ensuit que $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(F) > 0$. D'après (3.14), si $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme supremum, on a $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\tilde{g}}}^{\tilde{g}}(F) > 0$, donc $\mathcal{H}^{\tilde{g}}(F) > 0$. Cette dernière inégalité reste vraie quelle que soit la norme sur $\mathbb{R}^d$ car toutes les normes sont équivalentes. Finalement, comme $\bar{g} \prec \tilde{g}$, il vient $\mathcal{H}^{\bar{g}}(F) = \infty$. Le point (iii) est prouvé.

Mettons ensuite en évidence le point (ii). Soient g une jauge de $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Désignons par f une application bilipschitzienne de V dans $\mathbb{R}^d$ et considérons un ensemble F de la classe $G^g(f(V))$. Prenons de surcroît une jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$. Alors, pour tout ouvert U inclus dans $f(V)$, on a $\mathcal{M}^{\sqrt{\bar{g}g}}(F \cap U) = \mathcal{M}^{\sqrt{\bar{g}g}}(U)$ car $\sqrt{\bar{g}g} \prec g$. Comme $\bar{g} \prec \sqrt{\bar{g}g}$, le lemme 3.4 donne $\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(f^{-1}(F) \cap U) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$, pour tout

ouvert U inclus dans V . Cela étant vrai pour toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$, on a $f^{-1}(F) \in G^g(V)$, puisque $f^{-1}(F)$ est par ailleurs un G_{δ} en tant qu'image réciproque par une application continue d'un G_{δ} .

Prouvons enfin le point (i). Considérons une jauge $\tilde{g}$ de $\mathfrak{D}_d$. Par construction, le réel $\varepsilon_{\tilde{g}}$ est toujours inférieur à 1. Par conséquent, $\Lambda_{c,\tilde{g}}$ constitue un réseau au sens de la définition 31 de [137]. Le lemme des ensembles croissants [137, th. 52] s'applique donc à la mesure extérieure $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}$: pour toute suite croissante $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \uparrow \infty} \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(E_n).$$

Prenons désormais une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Soit $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de la classe $G^g(V)$. Chacun de ces ensembles s'écrit comme l'intersection d'un nombre au plus dénombrable d'ouverts. Comme une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, il existe une famille $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts vérifiant

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \Phi_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n. \quad (3.15)$$

En outre, pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel k tel que $F_n \supset \Phi_k$, de sorte que, pour tout ouvert U inclus dans V et toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$,

$$\mathcal{M}_{\infty}^{\bar{g}}(F_n \cap U) \geq \mathcal{M}_{\infty}^{\bar{g}}(\Phi_k \cap U) = \mathcal{M}_{\infty}^{\bar{g}}(U)$$

puisque l'ensemble Φ_k appartient à la classe $G^g(V)$. Ainsi, la famille $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée d'ouverts appartenant à $G^g(V)$.

Appelons $\bar{g}$ une jauge de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et définissons $\tilde{g} = \sqrt{\bar{g}g}$. La suite de la preuve s'appuie sur celle du lemme 4 de [63]. Soient U un ouvert borné inclus dans V et $\varepsilon > 0$. Pour tout ouvert W de $\mathbb{R}^d$ et tout réel strictement positif δ , notons

$$W_{(-\delta)} = \left\{ x \in W \mid \inf_{y \in \mathbb{R}^d \setminus W} \|x - y\| > \delta \right\}$$

l'ensemble des points de W qui sont situés à une distance strictement supérieure à δ du complémentaire de W . Signalons que $W_{(-\delta)}$ est toujours un ouvert de $\mathbb{R}^d$, quel que soit $\delta > 0$, et que les ensembles $W_{(-\delta)}$ croissent vers W quand δ décroît vers 0. Construisons par récurrence une suite décroissante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts de U vérifiant $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U_n) > \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon$ et dont l'adhérence $\overline{U_n}$ s'inclut dans $F_n \cap U$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $F_0 \in G^g(V)$, comme $\tilde{g} \prec g$ et comme U est un ouvert inclus dans V ,

$$\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(F_0 \cap U) = \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) > \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon.$$

D'après le lemme des ensembles croissants, il existe un réel δ_0 strictement positif pour lequel l'ouvert $(F_0 \cap U)_{(-\delta_0)}$ est de masse strictement supérieure à $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon$, au sens de $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}$. Appelons U_0 cet ouvert. On a $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U_0) > \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon$ et $\overline{U_0} \subset F_0 \cap U$. Supposons maintenant avoir construit, pour un certain entier naturel n , des ouverts $U_0, \dots, U_n$ convenables. L'ensemble F_{n+1} appartient à $G^g(V)$, la jauge $\tilde{g}$ vérifie $\tilde{g} \prec g$ et U_n est un ouvert inclus dans V , de sorte que

$$\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(F_{n+1} \cap U_n) = \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U_n) > \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon.$$

Le lemme des ensembles croissants garantit alors l'existence d'un réel strictement positif δ_{n+1} tel que l'ouvert U_{n+1} donné par $(F_{n+1} \cap U_n)_{(-\delta_{n+1})}$ vérifie $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U_{n+1}) > \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon$. Comme en outre $U_{n+1} \subset U_n$ et $\overline{U_{n+1}} \subset F_{n+1} \cap U$, l'ensemble U_{n+1} ainsi construit convient.

La famille $(\overline{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-ensembles compacts de U (car U est borné). Soient $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c, \tilde{g}}(\bigcap_n \overline{U_n})$ et P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_p \neq \emptyset$. Pour $p \in P$, écrivons $3\lambda_p$ pour désigner l'union du cube λ_p avec les $3^d - 1$ cubes de même génération qui lui sont adjacents. On a alors

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_n} \subset \bigcup_{p \in P} \text{int}(3\lambda_p).$$

Le membre de droite est un ouvert. Il contient donc le compact $\overline{U_{n_0}}$, pour un certain entier naturel n_0 . Pour tout $p \in P$, chaque ensemble $3\lambda_p$ peut s'écrire comme une union disjointe de 3^d cubes $\lambda_1^p, \dots, \lambda_{3^d}^p$, de même génération que λ_p , parmi lesquels figure λ_p lui-même. Les cubes $\lambda_{p'}^p$, pour $p' \in \{1, \dots, 3^d\}$ et $p \in P$, recouvrent $\overline{U_{n_0}}$ et sont de diamètre strictement inférieur à $\varepsilon_{\tilde{g}}$, donc

$$\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(\overline{U_{n_0}}) \leq \sum_{p \in P} \sum_{p'=1}^{3^d} \tilde{g}(|\lambda_{p'}^p|) = 3^d \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|).$$

En remarquant que $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(\overline{U_{n_0}})$ est supérieur à $\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon$, en prenant la borne inférieure sur $R_{c, \tilde{g}}(\bigcap_n \overline{U_n})$ dans le membre de droite et en observant que chaque compact $\overline{U_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, est inclus dans $F_n \cap U$, il vient

$$\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U) - \varepsilon \leq 3^d \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_n}\right) \leq 3^d \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \cap U\right).$$

Faire tendre ε vers 0 donne donc la minoration

$$\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \cap U\right) \geq 3^{-d} \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U) \quad (3.16)$$

dans le cas où l'ouvert U est borné. Prenons maintenant un ouvert U inclus dans V quelconque (non nécessairement borné). L'ensemble $U_m = U \cap]-m, m[^d$ est, pour tout entier naturel m , un ouvert borné inclus dans V . D'après (3.16), on a

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \cap U_m\right) \geq 3^{-d} \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U_m).$$

Sachant que les ensembles U_m croissent vers U lorsque m croît vers l'infini, le lemme des ensembles croissants conduit à la minoration (3.16) pour tout ouvert U inclus dans V . L'égalité (3.15) permet d'en déduire que

$$\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Phi_k \cap U\right) \geq 3^{-d} \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(U)$$

pour tout ouvert U inclus dans V . Comme $\bar{g} \prec \tilde{g}$, le lemme 3.4 implique que

$$\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Phi_k \cap U\right) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$$

pour tout ouvert U inclus dans V . L'intersection sur $k \in \mathbb{N}$ des ensembles Φ_k appartient finalement à la classe $G^g(V)$, ce qui prouve le point (i) du théorème 3.1.

V.3 Preuve de la proposition 3.2

Afin d'établir la proposition 3.2, notons ε_0 un réel strictement positif tel que g est croissante sur l'intervalle $[0, \varepsilon_0]$. Tout d'abord, la fonction g_d définie par (3.3) est croissante au voisinage de l'origine. En effet, pour $r_1, r_2 \in [0, \varepsilon_0]$ avec $r_1 < r_2$, on a

$$g_d(r_1) \leq r_2^d \inf_{\rho \in]0, r_1]} \frac{g(\rho)}{\rho^d} \quad \text{et} \quad g_d(r_1) \leq g(r_1) \leq \inf_{\rho \in]r_1, r_2]} g(\rho) \leq r_2^d \inf_{\rho \in]r_1, r_2]} \frac{g(\rho)}{\rho^d}$$

car g est croissante sur $[0, \varepsilon_0]$. Il s'ensuit que $g_d(r_1)$ est inférieur au minimum des deux majorants précédents, c'est-à-dire à $g_d(r_2)$. Ensuite, $r \mapsto g_d(r)/r^d$ est clairement décroissante sur $]0, \varepsilon_0]$. Enfin, comme $0 \leq g_d(r) \leq g(r)$ pour tout $r > 0$ assez petit, on a $0 \leq \lim_{0+} g_d \leq \lim_{0+} g = 0 = g_d(0)$. Par ailleurs, si g_d n'est pas nulle sur voisinage de 0, il existe un réel $r_0 \in]0, \varepsilon_0]$ vérifiant $g_d(r_0) > 0$. Dès lors, on a $g_d(r)/r^d \geq g_d(r_0)/r_0^d > 0$ pour tout $r \in]0, r_0]$, de sorte que $g_d \in \mathfrak{D}_d$.

Notons $\kappa \geq 1$ un réel tel que $\|x\|_\infty/\kappa \leq \|x\| \leq \kappa\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et prenons une partie F de $\mathbb{R}^d$. Montrons que

$$\mathcal{H}^{g_d}(F) \leq \mathcal{H}^g(F) \leq (4\kappa^2)^d \mathcal{H}^{g_d}(F).$$

L'inégalité de gauche découle du fait que $g_d(r) \leq g(r)$ pour $r \in [0, \varepsilon_0]$. L'inégalité de droite est une généralisation en dimension quelconque du lemme 2.2 de [132]. Pour la mettre en évidence, prenons un réel $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ un ε -recouvrement de l'ensemble F . Notons P l'ensemble des entiers naturels p vérifiant $|U_p| > 0$. Pour tout $p \in P$, il existe un réel $\rho_p \in]0, |U_p|]$ tel que

$$g_d(|U_p|) + \frac{\varepsilon}{2^p} \geq |U_p|^d \frac{g(\rho_p)}{\rho_p^d}.$$

Comme l'ensemble U_p est de diamètre non nul, il contient un point x_p et s'inclut dans la boule fermée de centre x_p et de rayon $\kappa|U_p|$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. De surcroît, cette boule est recouverte par $\lceil 2\kappa^2|U_p|/\rho_p \rceil^d$ cubes fermés de côté ρ_p/κ , notés $U_{p,1}, \dots, U_{p,\lceil 2\kappa^2|U_p|/\rho_p \rceil^d}$. Observons que ces cubes sont tous de diamètre inférieur à ρ_p . On en déduit que

$$\begin{aligned} 2\varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} g_d(|U_p|) &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(g_d(|U_p|) + \frac{\varepsilon}{2^p} \right) \geq \sum_{p \in P} |U_p|^d \frac{g(\rho_p)}{\rho_p^d} \geq \frac{1}{(4\kappa^2)^d} \sum_{p \in P} \left[\frac{2\kappa^2|U_p|}{\rho_p} \right]^d g(\rho_p) \\ &\geq \frac{1}{(4\kappa^2)^d} \left(\sum_{p \in \mathbb{N} \setminus P} g(|U_p|) + \sum_{p \in P} \sum_{q=1}^{\lceil 2\kappa^2|U_p|/\rho_p \rceil^d} g(|U_{p,q}|) \right) \geq \frac{1}{(4\kappa^2)^d} \mathcal{H}_\varepsilon^g(F). \end{aligned}$$

Ces inégalités découlent de la croissance de g sur $[0, \varepsilon_0]$ et du fait que les ensembles U_p , pour $p \in \mathbb{N} \setminus P$, et les ensembles $U_{p,q}$, pour $p \in P$ et $q \in \{1, \dots, \lceil 2\kappa^2|U_p|/\rho_p \rceil^d\}$, forment un ε -recouvrement de F . En passant à l'infimum dans le membre de gauche, on obtient $2\varepsilon + \mathcal{H}_\varepsilon^{g_d}(F) \geq \mathcal{H}_\varepsilon^g(F)/(4\kappa^2)^d$. Pour achever la preuve de la proposition 3.2, il suffit de faire tendre ε vers 0.

VI Preuve du théorème 3.2

Dans toute cette section, I désigne un ensemble infini dénombrable d'indices et V est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Commençons par établir le résultat préliminaire suivant.

Lemme 3.5

Soient $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ un système d'ubiquité homogène dans V et U un ouvert non vide borné inclus dans V . Alors, pour tout réel $\rho > 0$, il existe une partie finie $I' \subset I$ telle que les boules fermées $\bar{B}(x_i, r_i)$ pour $i \in I'$ sont disjointes, incluses dans U et vérifient

$$\sum_{i \in I'} \mathcal{L}^d(\bar{B}(x_i, r_i)) \geq \frac{\mathcal{L}^d(U)}{2 \cdot 3^d} \quad \text{et} \quad \forall i \in I' \quad r_i \leq \rho.$$

// Soit $\rho > 0$. Notons $I_{\rho, U}$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $x_i \in U$ et $r_i \leq \rho$. Alors $I_{\rho, U}$ est infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I_{\rho, U}} \in \mathcal{S}_d(I_{\rho, U})$ est un système d'ubiquité homogène dans U . En effet, presque tout élément $x \in U$ vérifie $\|x - x_i\| < r_i$ pour tout i appartenant à un sous-ensemble infini J de I . Fixons un tel x . Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset U$. Cependant, l'ensemble des $i \in J$ tels que $r_i > \min(\delta, \rho)$ est fini, car inclus dans l'ensemble des $i \in I$ vérifiant $\|x_i\| \leq \|x\| + \sup_{j \in I} r_j$ et $r_i > \min(\delta, \rho)$. Dès lors, $x_i \in B(x, r_i) \subset B(x, \delta) \subset U$ et $r_i \leq \rho$ pour i parcourant un sous-ensemble infini de J . Ainsi, presque tout $x \in U$ vérifie $\|x - x_i\| < r_i$ pour une infinité d'indice $i \in I_{\rho, U}$. Notons maintenant $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de $I_{\rho, U}$. Pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $r_{i_n} > \varepsilon$ est fini car il est inclus dans l'ensemble des $i \in I_{\rho, U}$ vérifiant $x_i \in U$ et $r_i > \varepsilon$ et car U est borné. Il en résulte que la suite $(r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Dès lors, on peut choisir une énumération $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $I_{\rho, U}$ telle que cette suite $(r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroisse et converge vers 0. En outre, $(x_{i_n}, r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_d(\mathbb{N})$ est un système d'ubiquité homogène dans U .

Observons maintenant que tout ouvert non vide U' inclus dans U contient une boule fermée $\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n})$ pour $n \in \mathbb{N}$. En effet, notons $B(x, r)$ avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ une boule ouverte incluse dans U' . Presque tout point de la boule $B(x, r/3)$ appartient à une infinité de boules $B(x_{i_n}, r_{i_n})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Notons y un tel point et considérons n assez grand pour que $r_{i_n} \leq r/3$. On a alors $\|y - x_{i_n}\| < r/3$, de sorte que $\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n}) \subset B(x, r) \subset U'$.

D'après ce qui précède, on peut considérer le plus petit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{B}(x_{i_{n_0}}, r_{i_{n_0}}) \subset U$, ainsi que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit $n_k \in \mathbb{N}$ pour lequel $\bar{B}(x_{i_{n_k}}, r_{i_{n_k}})$ est incluse dans le complémentaire dans U de l'union des boules $\bar{B}(x_{i_{n_0}}, r_{i_{n_0}}), \dots, \bar{B}(x_{i_{n_{k-1}}}, r_{i_{n_{k-1}}})$. Observons que la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Supposons l'existence d'un point x qui appartient à $U \cap \limsup_n B(x_{i_n}, r_{i_n})$ mais à aucune boule $\bar{B}(x_{i_{n_k}}, 3r_{i_{n_k}})$ quel que soit l'entier naturel k . Comme $(r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n}) \subset U$. Remarquons que l'entier n ne peut pas faire partie des n_k pour $k \in \mathbb{N}$. Par définition de n_0 , on a nécessairement $n > n_0$. Considérons alors le plus grand $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $n_{k_0} < n$. Comme $(r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, la boule $\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n})$ est en fait incluse dans le complémentaire dans U de l'union des boules $\bar{B}(x_{i_{n_k}}, r_{i_{n_k}})$ pour $k \in \{0, \dots, k_0\}$. Cela contredit la définition de n_{k_0+1} , puisque ce dernier entier est strictement supérieur à n . Ainsi, il ne peut exister de tel point x , de sorte que

$$U \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B(x_{i_n}, r_{i_n}) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{B}(x_{i_{n_k}}, 3r_{i_{n_k}}).$$

Comme $(x_{i_n}, r_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système d'ubiquité homogène dans U , la mesure de Lebesgue du membre de gauche est égale à celle de U (qui est finie car U est borné). On peut donc noter k_1 le plus petit entier naturel tel que la mesure de Lebesgue de l'union des boules $\bar{B}(x_{i_{n_k}}, 3r_{i_{n_k}})$, pour $k \in \{0, \dots, k_1\}$, atteint la moitié de la mesure de U . Appelons ensuite I' l'ensemble des i_{n_k} , pour $k \in \{0, \dots, k_1\}$. Observons alors que les boules $\bar{B}(x_i, r_i)$ pour $i \in I'$, d'une part, sont disjointes et incluses dans U et, d'autre part, vérifient

$$\frac{\mathcal{L}^d(U)}{2} \leq \mathcal{L}^d \left(\bigcup_{i \in I'} \bar{B}(x_i, 3r_i) \right) \leq \sum_{i \in I'} 3^d \mathcal{L}^d(\bar{B}(x_i, r_i))$$

ainsi que $r_i \leq \rho$ quel que soit $i \in I'$. Cela achève la preuve du lemme. //

Grâce au lemme 3.5, on peut montrer que le fait qu'une famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ soit un système d'ubiquité homogène dans V ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$. Il s'agit d'une conséquence élémentaire de la proposition suivante et de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.8

Soit $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ un système d'ubiquité homogène dans V . Alors, pour tout réel $\kappa > 0$, la famille $(x_i, \kappa r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène.

// Commençons par observer que $(x_i, \kappa r_i)_{i \in I}$ appartient à $\mathcal{S}_d(I)$. Il reste à vérifier que l'ensemble

$$R_\kappa = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < \kappa r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans V . Le résultat est clair si $\kappa \geq 1$, puisque R_κ contient alors R_1 qui est de mesure pleine dans V en vertu du fait que $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans cet ouvert. Supposons donc $\kappa < 1$. Soient $U \subset V$ un ouvert non vide borné et $j \in \mathbb{N}$. En vertu du lemme 3.5, il existe un ensemble fini $I_j \subset I$ tel que les boules $\bar{B}(x_i, r_i) \subset U$ pour $i \in I_j$ sont disjointes, de rayon inférieur à 2^{-j} et vérifient

$$\sum_{i \in I_j} \mathcal{L}^d(\bar{B}(x_i, r_i)) \geq \frac{\mathcal{L}^d(U)}{2 \cdot 3^d}.$$

Il s'ensuit que la mesure de Lebesgue de l'union disjointe sur $i \in I_j$ des boules $B(x_i, \kappa r_i)$ est supérieure à $\kappa^d \mathcal{L}^d(U) / (2 \cdot 3^d)$, quel que soit $j \in \mathbb{N}$. Dès lors, comme $U \cap R_\kappa$ contient la limite supérieure sur $j \in \mathbb{N}$ de ces unions de boules, on a

$$\mathcal{L}^d(U \cap R_\kappa) \geq \mathcal{L}^d \left(\limsup_{j \rightarrow \infty} \bigsqcup_{i \in I_j} B(x_i, \kappa r_i) \right) \geq \frac{\kappa^d}{2 \cdot 3^d} \mathcal{L}^d(U).$$

Supposons $\mathcal{L}^d(V \setminus R_\kappa) > 0$. Alors, pour un entier m suffisamment grand, on a $\mathcal{L}^d(V \cap]-m, m[^d \setminus R_\kappa) > 0$ et la régularité de la mesure de Lebesgue garantit l'existence d'un compact $K \subset R_\kappa \cap V \cap]-m, m[^d$ vérifiant

$$\mathcal{L}^d(R_\kappa \cap V \cap]-m, m[^d \setminus K) < \frac{\kappa^d}{2 \cdot 3^d} \mathcal{L}^d(V \cap]-m, m[^d \setminus R_\kappa).$$

En appliquant ce qui précède à l'ouvert borné $U = V \cap] - m, m[^d \setminus K$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(R_\kappa \cap V \cap] - m, m[^d \setminus K) &\geq \frac{\kappa^d}{2 \cdot 3^d} \mathcal{L}^d(V \cap] - m, m[^d \setminus K) \\ &\geq \frac{\kappa^d}{2 \cdot 3^d} \mathcal{L}^d(V \cap] - m, m[^d \setminus R_\kappa) \end{aligned}$$

ce qui offre une contradiction. Finalement, R_κ est de mesure de Lebesgue pleine dans l'ouvert V . //

Établissons maintenant le théorème 3.2. Pour ce faire, prenons un système d'ubiquité homogène $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ dans l'ouvert V , une jauge g de $\mathfrak{D}_d$ et une fonction positive et croissante $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec $(g^{1/d})^{-1}$ au voisinage de l'origine. Notons φ_g un prolongement positif et croissant de $(g^{1/d})^{-1}$ à l'intervalle $[0, \infty[$. Observons d'une part que $\varphi_g(g^{1/d}(r)) \leq r$ pour tout réel $r \in [0, \varepsilon_g[$ et d'autre part que $g^{1/d}(\varphi_g(r)) \geq r$ pour tout réel $r \in [0, g^{1/d}(\varepsilon_g^-)[$. De plus, φ et φ_g coïncident au voisinage de l'origine, si bien que $F_\varphi = F_{\varphi_g}$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble F_{φ_g} appartient à $G^g(V)$.

Rappelons que la fonction $r \mapsto g(r)/r^d$ décroît sur l'intervalle $]0, \varepsilon_g[$ et tend en 0 vers une limite $\eta \in]0, \infty]$. Dans un premier temps, supposons $\eta \leq 1$. On a alors $g^{1/d}(r) \leq r$ pour tout $r \in [0, \varepsilon_g[$. Dès lors, pour $r \in [0, g^{1/d}(\varepsilon_g^-)[$, il vient $r \leq g^{1/d}(\varphi_g(r)) \leq \varphi_g(r)$. Ainsi, $F_{\text{Id}} \subset F_{\varphi_g}$. Cependant F_{Id} est un G_δ de mesure pleine dans V car $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans cet ouvert. En vertu de la proposition 3.6, on a $F_{\text{Id}} \in G^g(V)$. L'ensemble F_{φ_g} est donc un G_δ qui contient un ensemble de la classe $G^g(V)$. Par conséquent, il appartient à cette même classe, d'après le point (v) de la proposition 3.1.

Dans un second temps, supposons η strictement supérieur à 1. Dans ce cas, $r \leq g^{1/d}(r)$ pour $r > 0$ suffisamment petit. Prenons une jauge $\tilde{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\tilde{g} \prec g$. Il existe alors un réel $\rho \in]0, \min(\varepsilon_g, g^{1/d}(\varepsilon_g^-), \varepsilon_{\tilde{g}})]$ tel que $0 < \varphi_g(r) \leq \varphi_g(g^{1/d}(r)) \leq r$ quel que soit $r \in]0, \rho[$. Par ailleurs, notons $\kappa \geq 1$ un réel vérifiant $\|x\|_\infty/\kappa \leq \|x\| \leq \kappa\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et observons que $(2/\kappa)^d \leq \mathcal{L}^d(B(0, 1)) \leq (2\kappa)^d$. Montrons que pour tout cube c -adique λ inclus dans V vérifiant $|\lambda| < \rho$, on a

$$\mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(F_{\varphi_g} \cap \lambda) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \mathcal{M}_\infty^{\tilde{g}}(\lambda) \quad (3.17)$$

Prenons un tel cube λ . Afin de prouver (3.17), nous construisons un ensemble de Cantor généralisé K inclus dans $F_{\varphi_g} \cap \lambda$ et une mesure π portée par K . Pour ce faire, posons tout d'abord $G_0 = \{\bar{\lambda}\}$ et $\pi(\bar{\lambda}) = \tilde{g}(|\lambda|)$.

Première étape Étant donné que la fonction $\tilde{g}/g$ tend vers l'infini en 0, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall r' \in]0, r] \quad \frac{\tilde{g}(r')}{g(r')} \geq 2 \cdot 6^d \kappa^d \frac{\tilde{g}(|\lambda|)}{\mathcal{L}^d(\text{int } \lambda)}. \quad (3.18)$$

De plus, le lemme 3.5 conduit à l'existence d'une famille finie $I' \subset I$ telle que les boules fermées $\bar{B}(x_i, r_i)$ pour $i \in I'$ sont disjointes, incluses dans l'ouvert $\text{int } \lambda$ et vérifient

$$\sum_{i \in I'} \mathcal{L}^d(\bar{B}(x_i, r_i)) \geq \frac{\mathcal{L}^d(\text{int } \lambda)}{2 \cdot 3^d} \quad (3.19)$$

ainsi que $r_i \leq r$, quel que soit i dans I' . Appelons G_1 la collection des boules fermées de centre x_i et de rayon $\varphi_g(r_i)/2$, pour i décrivant I' . À une telle boule, encore notée β , est associée la boule ouverte $B(x_i, r_i)$, notée $\tilde{\beta}$. Comme $\tilde{\beta} \subset \text{int } \lambda$, on a $r_i < \rho$ donc $\varphi_g(r_i) \leq r_i$, de sorte que

$$\beta \subset B(x_i, \varphi_g(r_i)) \subset \tilde{\beta} \subset \bar{\tilde{\beta}} \subset \text{int } \lambda.$$

En outre, on a $|\tilde{\beta}| = 2r_i \leq 2g^{1/d}(\varphi_g(r_i)) = 2g^{1/d}(|\beta|)$. L'ensemble G_1 constitue la première étape de l'ensemble de Cantor généralisé K . Posons

$$\forall \beta \in G_1 \quad \pi(\beta) = \frac{\mathcal{L}^d(\tilde{\beta})}{\sum_{\beta' \in G_1} \mathcal{L}^d(\tilde{\beta}')} \pi(\bar{\lambda}).$$

Fixons une boule fermée β dans G_1 . La mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ attribue alors à la boule ouverte $\tilde{\beta}$ associée une masse inférieure à $\kappa^d |\tilde{\beta}|^d$, donc inférieure à $2^d \kappa^d g(|\beta|)$. De plus, d'après (3.19), la somme apparaissant au dénominateur est minorée par $\mathcal{L}^d(\text{int } \lambda)/(2 \cdot 3^d)$. Ainsi, d'après (3.18), puisque $|\beta| = \varphi_g(r_i) \leq r_i = |\tilde{\beta}|/2 \leq r$,

$$\pi(\beta) \leq 2 \cdot 6^d \kappa^d \frac{\tilde{g}(|\lambda|)}{\mathcal{L}^d(\text{int } \lambda)} g(|\beta|) \leq \tilde{g}(|\beta|).$$

Deuxième étape Toujours en vertu du fait que la fonction $\tilde{g}/g$ tend vers l'infini en 0, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall r' \in]0, r] \quad \frac{\tilde{g}(r')}{g(r')} \geq 2 \cdot 6^d \kappa^d \max_{\beta \in G_1} \frac{\tilde{g}(|\beta|)}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)}. \quad (3.20)$$

Soit β une boule fermée figurant dans la collection G_1 . Le lemme 3.5 assure qu'il existe une famille finie $I' \subset I$ pour laquelle les boules fermées $\bar{B}(x_i, r_i)$ sont disjointes, incluses dans $\text{int } \beta$ et vérifient

$$\sum_{i \in I'} \mathcal{L}^d(\bar{B}(x_i, r_i)) \geq \frac{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)}{2 \cdot 3^d}$$

ainsi que $r_i \leq r$, quel que soit i dans I' . Nommons G_2^β la collection des boules fermées $\bar{B}(x_i, \varphi_g(r_i)/2)$, lorsque i parcourt I' . Une telle boule, aussi notée γ , est associée à la boule ouverte $B(x_i, r_i)$, notée $\tilde{\gamma}$. Comme $\tilde{\gamma} \subset \text{int } \lambda$, on a $r_i < \rho$ donc $\varphi_g(r_i) \leq r_i$, de sorte que

$$\gamma \subset B(x_i, \varphi_g(r_i)) \subset \tilde{\gamma} \subset \bar{\tilde{\gamma}} \subset \text{int } \beta.$$

De surcroît, $|\tilde{\gamma}| \leq 2g^{1/d}(|\gamma|)$. Désignons par G_2 l'union, pour β parcourant G_1 , des collections G_2^β introduites précédemment. Les boules fermées γ formant la collection G_2 constituent la deuxième étape de la construction de l'ensemble de Cantor généralisé K . Posons

$$\forall \beta \in G_1 \quad \forall \gamma \in G_2^\beta \quad \pi(\gamma) = \frac{\mathcal{L}^d(\tilde{\gamma})}{\sum_{\gamma' \in G_2^\beta} \mathcal{L}^d(\tilde{\gamma}')} \pi(\beta).$$

Cependant, la somme figurant au dénominateur est minorée par $\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)/(2 \cdot 3^d)$, tandis que la mesure de Lebesgue de la boule $\tilde{\gamma}$ est inférieure à $2^d \kappa^d g(|\gamma|)$. En utilisant la majoration de $\pi(\beta)$ obtenue à la première étape, ainsi que (3.20) du fait que $|\gamma| \leq |\tilde{\gamma}|/2 \leq r$, on forme la majoration

$$\pi(\gamma) \leq 2 \cdot 6^d \kappa^d \frac{\tilde{g}(|\beta|)}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} g(|\gamma|) \leq \tilde{g}(|\gamma|).$$

Bilan de la construction En répétant la démarche décrite précédemment, on construit récursivement une suite $(G_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de collections d'ensembles qui ont une π -masse et vérifient les propriétés suivantes.

- (A). On a $G_0 = \{\bar{\lambda}\}$ et $\pi(\bar{\lambda}) = \tilde{g}(|\lambda|)$. De plus, l'ensemble $\bar{\lambda}$ contient un nombre fini d'ensembles de la collection G_1 .
- (B). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, tout ensemble $\gamma \in G_q$ est une boule fermée qui contient un nombre fini d'ensembles de G_{q+1} . En outre, il existe une boule ouverte $\tilde{\gamma}$, un unique fermé $\beta \in G_{q-1}$ et un indice $i \in I$ vérifiant

$$\gamma \subset B(x_i, \varphi_g(r_i)) \subset \tilde{\gamma} \subset \bar{\tilde{\gamma}} \subset \text{int } \beta$$

ainsi que $|\gamma| = \varphi_g(|\tilde{\gamma}|/2)$. De surcroît, les ensembles $\bar{\tilde{\gamma}}$, pour $\gamma \in G_q$, sont disjoints.

- (C). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$ et toute boule $\gamma \in G_q$, qui est incluse dans $\beta \in G_{q-1}$, on a

$$\pi(\gamma) = \frac{\mathcal{L}^d(\tilde{\gamma})}{\sum_{\substack{\gamma' \in G_q \\ \gamma' \subset \beta}} \mathcal{L}^d(\tilde{\gamma}')} \pi(\beta) \leq \frac{2 \cdot 3^d}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} \mathcal{L}^d(\tilde{\gamma}) \pi(\beta) \quad \text{et} \quad \pi(\gamma) \leq \tilde{g}(|\gamma|).$$

Dès lors, on obtient un ensemble de Cantor généralisé $K \subset F_{\varphi_g} \cap \lambda$ en posant

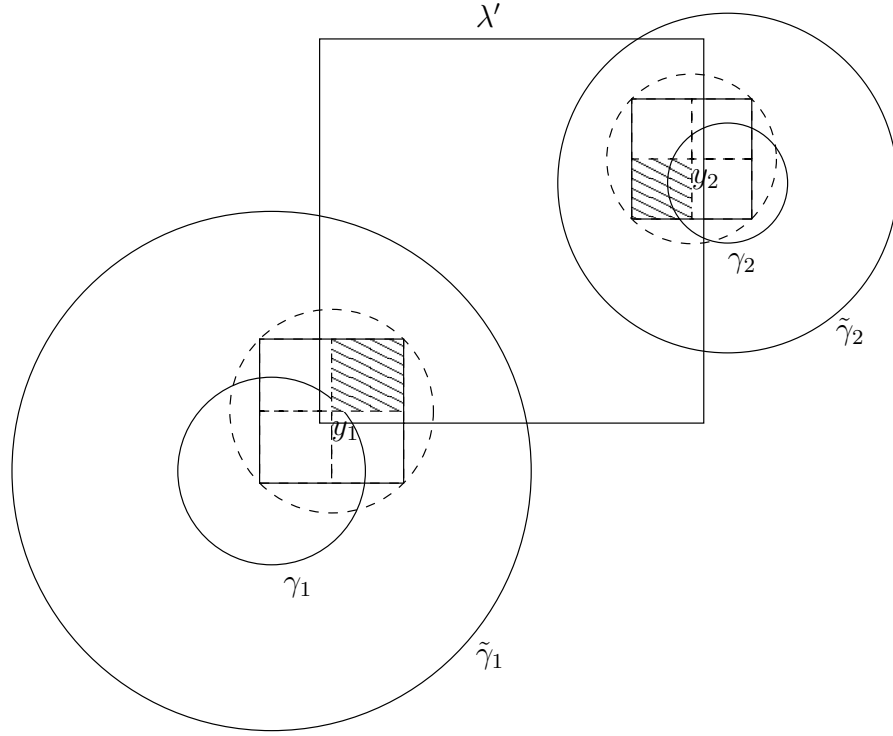
$$K = \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcup_{\beta \in G_q} \beta$$

et on peut prolonger π en une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$, finie et supportée par K , cf. [64, prop. 1.7]. Sa masse totale est $\pi(K) = \tilde{g}(|\lambda|)$.

Propriétés d'échelle de π Fixons un sous-cube c -adique λ' de λ et majorons sa masse $\pi(\lambda')$ en fonction de son diamètre $|\lambda'|$. On peut supposer que le cube λ' rencontre l'ensemble de Cantor K (sinon $\pi(\lambda') = 0$) et qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que λ' rencontre au moins deux boules fermées de la collection G_{q+1} (sinon, pour $q \in \mathbb{N}$, notons γ_{q+1} l'unique boule fermée de G_{q+1} qui rencontre λ' ; d'après le point (C), on a $\pi(\lambda') \leq \pi(\gamma_{q+1}) \leq \tilde{g}(|\gamma_{q+1}|) \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow \infty$). Dès lors, on peut considérer $\beta \in G_q$, avec $q \in \mathbb{N}$, le fermé de diamètre $|\beta|$ maximal tel que le cube λ' rencontre au moins deux boules fermées de G_{q+1} incluses dans β . La maximalité du diamètre de β impose que le cube λ' ne rencontre aucune autre boule fermée appartenant à la même collection que β , si bien qu'on a $\pi(\lambda') \leq \pi(\beta)$.

Dans un premier temps, supposons $|\lambda'| \geq |\beta|$. D'après les points (A) et (C), les inégalités $|\beta| \leq |\lambda'| \leq |\lambda| < \rho$ et la croissance de $\tilde{g}$ sur l'intervalle $]0, \rho[$, il vient

$$\pi(\lambda') \leq \pi(\beta) \leq \tilde{g}(|\beta|) \leq \tilde{g}(|\lambda'|).$$

FIG. 3.1 – Fermés de la collection G_{q+1} rencontrant le cube λ'

Dans un second temps, supposons $|\lambda'| < |\beta|$. Notons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, avec $n \geq 2$, les boules fermées de la collection G_{q+1} qui rencontrent le cube λ' . En vertu de la maximalité de $|\beta|$, ces boules fermées sont incluses dans β et le point (C) assure que

$$\pi(\lambda') = \sum_{n'=1}^n \pi(\lambda' \cap \gamma_{n'}) \leq \frac{2 \cdot 3^d}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} \pi(\beta) \sum_{n'=1}^n \mathcal{L}^d(\tilde{\gamma}_{n'}).$$

Considérons deux entiers distincts n' et n'' compris entre 1 et n . Comme les deux boules fermées $\tilde{\gamma}_{n'}$ et $\tilde{\gamma}_{n''}$ sont disjointes en vertu du point (B), la distance (au sens de $\|\cdot\|$) entre les deux boules fermées $\gamma_{n'}$ et $\gamma_{n''}$ est supérieure à $(|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}| + |\tilde{\gamma}_{n''}| - |\gamma_{n''}|)/2$, donc en particulier à $(|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|)/2$. De plus, comme ces deux boules fermées rencontrent le cube λ' , le diamètre de λ' est supérieur à la distance les séparant, de sorte que

$$\forall n' \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{1}{2}(|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|) \leq |\lambda'|.$$

Fixons $n' \in \{1, \dots, n\}$ et minorons la mesure de Lebesgue de $\lambda' \cap \tilde{\gamma}_{n'}$ (cf. figure 3.1, p. 75). Notons $y_{n'} \in \lambda' \cap \gamma_{n'}$. D'une part, si $\bar{B}_\infty(x, \rho)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon ρ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a

$$\bar{B}_\infty\left(y_{n'}, \frac{|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|}{8\kappa}\right) \subset \bar{B}\left(y_{n'}, \frac{|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|}{8}\right) \subset \tilde{\gamma}_{n'}.$$

D'autre part, la boule fermée constituant le membre de gauche peut s'écrire comme l'union de 2^d cubes fermés dont un sommet est $y_{n'}$ et ayant pour côté $(|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|)/(8\kappa) \leq |\lambda'|/(4\kappa)$ (d'après majoration précédente), ce qui est encore inférieur à $|\lambda'|_\infty/4$ (où $|\cdot|_\infty$ est le

diamètre au sens de la norme supremum). Dès lors, un de ces cubes s'inclut dans λ' , donc dans $\lambda' \cap \tilde{\gamma}_{n'}$ et, comme sa mesure de Lebesgue est égale à son côté élevé à la puissance d , on forme la minoration

$$\mathcal{L}^d(\lambda' \cap \tilde{\gamma}_{n'}) \geq \left(\frac{|\tilde{\gamma}_{n'}| - |\gamma_{n'}|}{8\kappa} \right)^d \geq \left(\frac{|\tilde{\gamma}_{n'}|}{16\kappa} \right)^d \geq \frac{\mathcal{L}^d(\tilde{\gamma}_{n'})}{16^d \kappa^{2d}}$$

puisque $|\gamma_{n'}| = \varphi_g(|\tilde{\gamma}_{n'}|/2) \leq |\tilde{\gamma}_{n'}|/2$, en vertu du point (B) et du fait que $|\tilde{\gamma}_{n'}| < \rho$ car $\tilde{\gamma}_{n'} \subset \text{int } \lambda$. En reprenant la majoration de $\pi(\lambda')$ donnée précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} \pi(\lambda') &\leq \frac{2 \cdot 48^d \kappa^{2d}}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} \pi(\beta) \sum_{n'=1}^n \mathcal{L}^d(\lambda' \cap \tilde{\gamma}_{n'}) = \frac{2 \cdot 48^d \kappa^{2d}}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} \pi(\beta) \mathcal{L}^d \left(\lambda' \cap \bigsqcup_{n'=1}^n \tilde{\gamma}_{n'} \right) \\ &\leq 2 \cdot 48^d \kappa^{2d} \pi(\beta) \frac{\mathcal{L}^d(\lambda')}{\mathcal{L}^d(\text{int } \beta)} \end{aligned}$$

D'après les points (A) et (C), on a $\pi(\beta) \leq \tilde{g}(|\beta|)$. De plus, $\mathcal{L}^d(\lambda') = |\lambda'|_\infty^d \leq \kappa^d |\lambda'|^d$, tandis que $\mathcal{L}^d(\text{int } \beta) \geq |\beta|^d / \kappa^d$ (que q soit nul ou non). Il en résulte que

$$\pi(\lambda') \leq 2 \cdot 48^d \kappa^{4d} \tilde{g}(|\beta|) \frac{|\lambda'|^d}{|\beta|^d} \leq 2 \cdot 48^d \kappa^{4d} \tilde{g}(|\lambda'|)$$

du fait que $|\lambda'| < |\beta| < \rho$ car $\beta \subset \bar{\lambda}$ et que la fonction $r \mapsto \tilde{g}(r)/r^d$ décroît sur l'intervalle $]0, \rho[$. En regroupant tous les cas, il en résulte que $\pi(\lambda')$ est inférieur à $2 \cdot 48^d \kappa^{4d} \tilde{g}(|\lambda'|)$, pour tout sous-cube c -adique λ' de λ .

Prouvons maintenant la minoration (3.17). Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F_{\varphi_g})$. On a

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \sum_{p=0}^{\infty} \pi(\lambda_p) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \pi \left(\bigcup_{p=0}^{\infty} \lambda_p \right) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \pi(F_{\varphi_g} \cap \lambda).$$

Cependant, l'ensemble $F_{\varphi_g} \cap \lambda$ contient le compact K de sorte que $\pi(F_{\varphi_g} \cap \lambda)$ est supérieur à $\pi(K) = \tilde{g}(|\lambda|)$. On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}(|\lambda_p|) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \tilde{g}(|\lambda|).$$

Comme le diamètre de λ est strictement inférieur à ρ donc à $\varepsilon_{\tilde{g}}$, on a $\tilde{g}(|\lambda|) = \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(\lambda)$ en vertu du lemme 3.2. Passer à la borne inférieure sur $R_c^\lambda(F_{\varphi_g})$ et invoquer le lemme 3.1 permet d'obtenir (3.17) pour tout cube c -adique λ inclus dans V et dont le diamètre est strictement inférieur à ρ . Dès lors, le lemme 3.3 donne, pour tout ouvert U inclus dans V ,

$$\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(F_{\varphi_g} \cap U) \geq \frac{1}{2 \cdot 48^d \kappa^{4d}} \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U).$$

Prenons maintenant une jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$. Alors $\tilde{g} = \sqrt{\bar{g}g}$ est une jauge de $\mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec \tilde{g} \prec g$. La minoration précédente est alors vraie. Le lemme 3.4 garantit que $\mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(F_{\varphi_g} \cap U) = \mathcal{M}_{\infty}^{\tilde{g}}(U)$ pour tout ouvert U inclus dans V . Ainsi F_{φ_g} , qui est par ailleurs un G_δ , appartient à la classe $G^g(V)$.

Chapitre 4

Ubiquité hétérogène et théorie métrique des nombres

Contenu du chapitre

I	Introduction	77
II	Ensembles à grande intersection et similitudes	81
III	Ubiquité hétérogène	82
IV	Applications en théorie des nombres	86
IV.1	Produits de mesures multinomiales	86
IV.2	Mesures de Gibbs	89
V	Preuve de la proposition 4.1	91
VI	Preuve du théorème 4.1	94
VI.1	Préliminaires	94
VI.2	Preuve du théorème 4.1	99
VI.3	Preuve des propositions 4.2 et 4.3	108

I Introduction

Comme l'indique le chapitre 3, un problème classique de la théorie de l'approximation diophantienne consiste à déterminer les propriétés de taille de l'ensemble

$$J_\tau = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right. \right\}$$

des réels τ -approchables par des rationnels, où τ est un réel strictement positif. Rappelons qu'un célèbre théorème de Dirichlet garantit que J_τ est égal à $\mathbb{R}$ tout entier si τ est inférieur à 2. Supposons désormais $\tau > 2$. On constate aisément que J_τ est de mesure de Lebesgue nulle. On peut alors rendre compte de la taille de cet ensemble en fournissant sa dimension de Hausdorff. Jarník [99] et Besicovitch [29] ont démontré de façon indépendante que cette dimension vaut $2/\tau$. Jarník [100] a décrit plus précisément les propriétés de taille de J_τ en déterminant la valeur de sa g -mesure de Hausdorff pour certaines jauges g .

Avant de préciser le résultat de Jarník, rappelons quelques définitions de la section III du chapitre 2 et de la section I du chapitre 3. Notons $\mathfrak{D}$ l'ensemble des fonctions g croissantes sur un voisinage à droite de l'origine et vérifiant $\lim_{0+} g = g(0) = 0$. Toute fonction

g de $\mathfrak{D}$ s'appelle une fonction de jauge et permet de construire une mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^g$. De plus, pour $d \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathfrak{D}_d$ l'ensemble des jauges $g \in \mathfrak{D}$ pour lesquelles la fonction $r \mapsto g(r)/r^d$ est décroissante et strictement positive sur un voisinage strict de l'origine. Rappelons en outre qu'on note $\bar{g} \prec g$ si $\bar{g}$ et g sont des jauges de $\mathfrak{D}_d$ pour lesquelles $\bar{g}/g$ tend de façon monotone vers l'infini en 0 et que Id désigne la fonction identité. Le résultat de Jarník, qui a par ailleurs été amélioré par V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani [19], est le suivant : pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $g \prec \text{Id}$, la g -mesure de Hausdorff de l'ensemble J_τ est infinie (resp. nulle) si $\sum_q g(q^{-\tau})q = \infty$ (resp. $< \infty$).

K. Falconer [63] a prouvé que l'ensemble J_τ vérifie une propriété de *grande intersection*, au sens qu'il appartient à la classe $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$. Rappelons que $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$ est la plus grande collection de G_δ de $\mathbb{R}$ de dimension supérieure à $2/\tau$ à être stable par intersection dénombrable et par les similitudes de $\mathbb{R}$. Ainsi, toute intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$ est de dimension supérieure à $2/\tau$. Le théorème 3.5 du chapitre 3 permet de décrire plus finement les propriétés de grande intersection de J_τ . Ainsi, cet ensemble figure dans une certaine classe $G^g(\mathbb{R})$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ telle que $\sum_q g(q^{-\tau})q$ diverge. Rappelons que la classe $G^g(\mathbb{R})$, définie dans le chapitre 3, est notamment stable par intersection dénombrable et toutes les similitudes de $\mathbb{R}$ et que tous les ensembles qui la constituent sont de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ (cf. section II pour des compléments). En particulier, J_τ appartient à la classe $G^{\text{Id}^{2/\tau}}(\mathbb{R})$, qui est clairement incluse dans la classe $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$ de K. Falconer. De surcroît, le théorème 3.5 prouve que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$, l'ensemble J_τ est de g -mesure de Hausdorff nulle ou maximale dans tout ouvert de $\mathbb{R}$ selon respectivement que la série $\sum_q g_1(q^{-\tau})q$ converge ou diverge, avec

$$g_1(r) = r \inf_{\rho \in]0, r]} \frac{g(\rho)}{\rho}. \quad (4.1)$$

Cela complète la description des propriétés de taille de l'ensemble J_τ amorcée par Jarník. Les résultats précédents proviennent d'une certaine homogénéité dans la répartition des rationnels : ils conduisent à des *systèmes d'ubiquité homogène*, cf. chapitre 3.

Une façon de prolonger le problème est d'imposer des restrictions sur les rationnels intervenant dans l'approximation. Suivant cette démarche, G. Harman [82] a proposé de s'intéresser à l'ensemble

$$J_\tau^{\mathbb{P}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ premiers} \right. \right\}$$

des réels τ -approchables par des rationnels dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres premiers ($\tau > 0$). Il a établi que $J_\tau^{\mathbb{P}}$ est de mesure de Lebesgue pleine (resp. nulle) dans $\mathbb{R}$ si $\tau < 2$ (resp. $\tau \geq 2$). En outre, le théorème 3.7 du chapitre 3 implique que, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$, l'ensemble $J_\tau^{\mathbb{P}}$ est de g -mesure de Hausdorff nulle ou maximale dans tout ouvert de $\mathbb{R}$ selon respectivement que la série $\sum_q g_1(q^{-\tau})q/(\log q)^2$ converge ou diverge, où la fonction g_1 est donnée par (4.1). De plus, l'ensemble $J_\tau^{\mathbb{P}}$ appartient à la classe $G^g(\mathbb{R})$ d'ensembles à grande intersection pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ faisant diverger la série $\sum_q g(q^{-\tau})q/(\log q)^2$. Plus généralement, les résultats de G. Harman et du chapitre 3 permettent de déterminer précisément les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles obtenus quand le numérateur et le dénominateur des rationnels approchants sont astreints à figurer dans diverses parties de $\mathbb{Z}$, dès lors que celles-ci vérifient certaines conditions techniques concernant notamment leur densité asymptotique, cf. [82, ch. 6].

Cela provient à nouveau du fait que ces rationnels conduisent à des systèmes d'ubiquité homogène, cf. chapitre 2.

J. Barral et S. Seuret [8, 11] ont proposé d'imposer d'autres restrictions sur les rationnels approchants : les *conditions de Besicovitch*. Afin de les présenter, fixons un entier c supérieur à 2. Tout nombre réel x peut s'écrire $x = x_0 + \sum_p x_p c^{-p}$, où x_0 est un entier et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\{0, \dots, c-1\}$ qui ne stationne pas en $c-1$. Notons alors

$$\forall b \in \{0, \dots, c-1\} \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad \sigma_{b,j}(x) = \frac{1}{j} \# \{p \in \{1, \dots, j\} \mid x_p = b\}$$

la proportion jusqu'au rang j de l'entier b dans le développement en base c du réel x . Un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{c-1}) \in]0, 1[^c$ (avec $\sum_b \pi_b = 1$) étant fixé, Besicovitch [28] puis Eggleston [58] ont étudié l'ensemble des réels x vérifiant $\sigma_{b,j}(x) \rightarrow \pi_b$ quand j tend vers l'infini, quel que soit $b \in \{0, \dots, c-1\}$ et ils ont notamment établi que la dimension de Hausdorff de cet ensemble vaut $\alpha = -\sum_b \pi_b \log_c \pi_b$. De ce fait, suivant la terminologie de J. Barral et S. Seuret [11], nous disons qu'un ensemble infini de rationnels vérifie la condition de Besicovitch associée au vecteur de probabilité π si on peut l'énumérer selon une suite $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $q_n \rightarrow \infty$ et $\sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(p_n/q_n) \rightarrow \pi_b$ quel que soit $b \in \{0, \dots, c-1\}$, quand n tend vers l'infini. Considérons alors, pour $\tau \geq 2$, le sous-ensemble

$$J_\tau^\pi = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \exists (p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ irréductibles } \mid q_n \rightarrow \infty \\ \forall n \quad |x - p_n/q_n| \leq q_n^{-\tau} \\ \forall b \quad \sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(p_n/q_n) \rightarrow \pi_b \end{array} \right. \right\}$$

de J_τ formé des réels τ -approchables par une infinité de rationnels vérifiant la condition de Besicovitch associée au vecteur de probabilité π . Cette condition rend difficile la question de savoir si les rationnels intervenant dans l'approximation conduisent à un système d'ubiquité homogène. De plus, si tel était le cas, rien ne garantirait que les résultats du chapitre 3 fournissent des informations optimales concernant les propriétés de taille et de grande intersection de J_τ^π . Pour contourner cette difficulté, J. Barral et S. Seuret [8] ont introduit la notion de *système d'ubiquité hétérogène*, cf. section III. De la sorte, ils ont prouvé que la dimension de Hausdorff de J_τ^π vaut $2\alpha/\tau$. Le corollaire 4.1 qui figure dans la section IV de ce chapitre permet de compléter ce résultat en indiquant que J_τ^π contient un ensemble à grande intersection dans $\mathbb{R}$ relativement à la jauge $r \mapsto r^{\frac{2\alpha}{\tau} - 3(-\log r)^{\eta-1/8}}$ pour $\eta \in]0, 1/8[$.

Un problème voisin consiste à déterminer les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble

$$\tilde{J}_\tau^\pi = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \exists (p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ irréductibles } \mid q_n \rightarrow \infty \\ \forall n \quad |x - p_n/q_n| \leq q_n^{-\tau} \\ \forall b \quad \sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(x) \rightarrow \pi_b \end{array} \right. \right\}.$$

La condition de Besicovitch porte désormais sur les réels approchés eux-mêmes plutôt que sur les rationnels approchants. J. Barral et S. Seuret [11] ont établi l'appartenance d'un sous-ensemble de $\tilde{J}_\tau^\pi$ à la classe $\mathcal{G}^{2\alpha/\tau}(\mathbb{R})$ de K. Falconer. Une variante du corollaire 4.1 permet de préciser ce résultat en indiquant que $\tilde{J}_\tau^\pi$ contient un ensemble à grande intersection relativement à la jauge $r \mapsto r^{\frac{2\alpha}{\tau} - 3(-\log r)^{\eta-1/8}}$, qui appartient donc à la classe $\mathcal{G}^{2\alpha/\tau}(\mathbb{R})$. Les résultats du chapitre 3 ne s'appliquent pas dans cette situation car l'ensemble $\tilde{J}_\tau^\pi$ est de mesure de Lebesgue nulle quel que soit $\tau > 0$ si $\alpha < 1$, si bien que

les rationnels intervenant dans l'approximation ne peuvent former un système d'ubiquité homogène. En effet, $\tilde{J}_\tau^\pi$ est inclus dans l'ensemble des réels x vérifiant $\sigma_{b, [2 \log_c q_n]}(x) \rightarrow \pi_b$ pour tout $b \in \{0, \dots, c-1\}$ et pour une certaine suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite infinie, dont on peut montrer qu'il est de dimension α , cf. [11].

Les propriétés du développement en base c des nombres réels sont liées au comportement d'une famille de mesures : les mesures multinomiales, cf. section IV. Par conséquent, imposer une condition de Besicovitch sur les rationnels intervenant dans l'approximation revient à imposer une condition sur la masse qu'attribue une certaine mesure multinomiale aux boules centrées en ces rationnels. De ce fait, l'étude des propriétés de grande intersection de l'ensemble J_τ^π est un cas particulier du problème suivant. Munissons $\mathbb{R}^d$ de la norme supremum usuelle et notons I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, 1]^d \times]0, \infty[$ telle que $(r_i)_{i \in I}$ admet 0 pour seul point d'accumulation. Les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - k - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } (i, k) \in I \times \mathbb{Z}^d\}$$

où t est un réel supérieur à 1, sont bien connues lorsque la famille $(k + x_i, r_i)_{(i, k) \in I \times \mathbb{Z}^d}$ constitue un système d'ubiquité homogène. Dans ce cas, le théorème 3.2 prouvé dans le chapitre 3 garantit que F_t appartient à la classe $G^{\text{Id}^{d/t}}(\mathbb{R}^d)$ d'ensembles à grande intersection. Observons que F_t généralise naturellement l'ensemble J_τ des réels τ -approchables par des rationnels. Le sous-ensemble J_τ^π de J_τ formé des réels τ -approchables par une suite de rationnels vérifiant la condition de Besicovitch associée au vecteur de probabilité π peut quant à lui se voir comme un cas particulier de l'ensemble

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - k - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } (i, k) \in I^{\mu, \alpha} \times \mathbb{Z}^d\} \subset F_t$$

où $I^{\mu, \alpha}$ désigne l'ensemble des $i \in I$ indexant les boules de centre x_i et de rayon r_i qui, au sens d'une mesure borélienne finie μ fixée, ont une masse qui se comporte comme r_i^α pour un certain réel $\alpha > 0$. Dans [8], J. Barral et S. Seuret ont déterminé la dimension de Hausdorff de E_t lorsque la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement à μ , ce qui impose certaines conditions sur la répartition des boules de centre x_i et de rayon r_i et sur le comportement d'échelle de la mesure μ , cf. section III. Le théorème 4.1 énoncé dans ce chapitre montre que, sous les mêmes hypothèses, l'ensemble E_t vérifie une propriété de grande intersection, au sens qu'il appartient à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$ pour une fonction de jauge g bien déterminée.

C'est en prenant pour mesure μ la mesure multinomiale associée au vecteur de probabilité π que nous pouvons déduire du théorème 4.1 le fait que J_τ^π contient un ensemble à grande intersection. De la même manière, en choisissant pour mesure μ la mesure de Gibbs associée à un certain potentiel höldérien f , nous pouvons étudier les propriétés de grande intersection de l'ensemble des points approchables à une certaine vitesse par des rationnels en lesquels les moyennes des sommes de Birkhoff associées à f convergent vers un certain réel fixé au préalable, cf. section IV.

La suite de ce chapitre s'organise comme suit. Dans la section II, nous rappelons la définition des classes d'ensemble à grande intersection $G^g(V)$, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$, qui ont été introduites dans le chapitre 3. Nous donnons en outre, pour des jauges g d'une forme particulière, une caractérisation de la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$ qui fait appel aux similitudes de $\mathbb{R}^d$. Cette caractérisation nous est utile pour établir le théorème 4.1 énoncé dans la section III en vertu duquel l'ensemble E_t défini précédemment

vérifie une propriété de grande intersection si la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement à la mesure μ . La section IV fournit ensuite quelques applications, qui relèvent de la théorie métrique des nombres. Enfin, les sections V et VI sont consacrées aux preuves des principaux résultats de ce chapitre.

II Ensembles à grande intersection et similitudes

Rappelons brièvement les principaux résultats concernant les classes d'ensembles à grande intersection qui ont été introduites dans la section II du chapitre 3. Pour $g \in \mathfrak{D}_d$, notons ε_g le supremum de l'ensemble des réels $\varepsilon \in]0, 1]$ pour lesquels g est croissante sur $[0, \varepsilon]$ et $r \mapsto g(r)/r^d$ est décroissante sur $]0, \varepsilon]$. Un entier $c \geq 2$ étant fixé, notons Λ_c la collection des cubes c -adiques de $\mathbb{R}^d$, *i.e.* des ensembles de la forme $\lambda = c^{-j}(k + [0, 1[^d)$ où $k \in \mathbb{Z}^d$ et $j \in \mathbb{Z}$. Ce dernier entier est la génération, notée $\langle \lambda \rangle_c$, du cube λ . On construit une mesure extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$ sur $\mathbb{R}^d$ en posant

$$\forall F \subset \mathbb{R}^d \quad \mathcal{M}_\infty^g(F) = \inf_{(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_{c,g}(F)} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|)$$

où $R_{c,g}(F)$ est l'ensemble des suites $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda_c \cup \{\emptyset\}$ de diamètre $|\lambda_p|$ strictement inférieur à ε_g , pour tout entier naturel p , et vérifiant $F \subset \bigcup_p \lambda_p$. Un ouvert V non vide de $\mathbb{R}^d$ étant donné, on définit la classe $G^g(V)$ des ensembles de $\mathbb{R}^d$ à grande intersection dans V relativement à la jauge g comme la collection des sous-ensembles F de $\mathbb{R}^d$ qui sont des G_δ et qui vérifient $\mathcal{M}_\infty^g(F \cap U) = \mathcal{M}_\infty^g(U)$ pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ inclus dans V et toute jauge $\bar{g}$ de $\mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$.

La proposition 3.1 et le théorème 3.1, énoncés dans le chapitre 3, répertorient les principales propriétés de la classe $G^g(V)$, pour $g \in \mathfrak{D}_d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et non vide. Cette classe, qui ne dépend ni de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$ ni de l'entier c , est stable par intersection dénombrable. En outre, pour toute application bilipschitzienne $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$, si $F \in G^g(f(V))$, on a $f^{-1}(F) \in G^g(V)$. De plus, tout ensemble $F \in G^g(V)$ est de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ telle que $\bar{g} \prec g$. Il s'ensuit que

$$\forall F \in G^g(\mathbb{R}^d) \quad \forall \bar{g} \in \mathfrak{D}_d \quad \bar{g} \prec g \quad \implies \quad \mathcal{H}^{\bar{g}} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \right) = \infty$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de l'espace $\mathbb{R}^d$. La proposition 4.1 figurant ci-après donne une forme de réciproque à ce résultat. Dans son énoncé, D_c désigne l'ensemble des dilatations de $\mathbb{R}^d$ qui envoient un cube c -adique λ de $\mathbb{R}^d$ de diamètre strictement inférieur à 1 sur un cube c -adique de génération supérieure à celle du cube λ . En outre, Φ est le cône convexe époiné formé des fonctions φ continues et croissantes sur un voisinage à droite de l'origine, nulles en ce point et telles que, d'une part, $r^{-\varphi(r)}$ tende de façon monotone vers l'infini quand r tend vers 0 et, d'autre part, la fonction $r \mapsto r^{\varepsilon - \varphi(r)}$ croisse sur un voisinage à droite strict de l'origine et admette une limite nulle en ce point, pour tout réel $\varepsilon > 0$. Par définition de l'ensemble Φ , pour tout $\beta \in]0, d]$ et tout $\varphi \in \Phi$, la fonction $g_{\beta, \varphi} : r \mapsto r^{\beta - \varphi(r)}$ est une jauge qui appartient à $\mathfrak{D}_d$. De plus, la classe $G^{g_{\beta, \varphi}}(\mathbb{R}^d)$ est strictement incluse dans la classe $\mathcal{G}^\beta(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer, d'après la remarque qui suit le théorème 3.1 établi dans le chapitre 3 (car $\text{Id}^s \prec g_{\beta, \varphi}$ pour tout réel $s \in]0, \beta[$).

Proposition 4.1

Soient $\beta \in]0, d]$ et $\varphi \in \Phi$. Soit F un G_δ de $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\mathcal{H}^{g_{\beta, \varphi}} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \right) > 0$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de D_c . Alors F appartient à $G^{g_{\beta, \varphi}}(\mathbb{R}^d)$.

Nous renvoyons à la section V pour une preuve de cette proposition. Les fonctions $g_{\beta, \varphi}$ pour $\beta \in]0, d]$ et $\varphi \in \Phi$ sont les jauges qui entrent en jeu dans l'étude, détaillée dans la section III, des ensembles définis par J. Barral et S. Seuret dans [8]. On vérifie aisément que les jauges les plus couramment utilisées, comme les fonctions

$$r \mapsto r^\beta \prod_{p=1}^{\infty} \left(\log^{\circ p} \frac{1}{r} \right)^{\nu_p}$$

où $\log^{\circ p}$ est la p -ième itérée du logarithme, β un réel de $]0, d]$ et $(\nu_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et nuls sauf un nombre fini d'entre eux, sont de la forme $g_{\beta, \varphi}$, avec $\beta \in]0, d]$ et $\varphi \in \Phi$. La section IV donne d'autres exemples de jauges de cette forme.

III Ubiquité hétérogène

Commençons par définir la notion de système d'ubiquité hétérogène introduite par J. Barral et S. Seuret dans [8]. L'espace $\mathbb{R}^d$ est désormais muni de la norme supremum usuelle. Un ensemble infini dénombrable d'indices I étant fixé, notons $\mathcal{S}_d^0(I)$ l'ensemble des familles $(x_i, r_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, 1]^d \times]0, \infty[$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre d'indices $i \in I$ vérifiant $r_i > \varepsilon$ est fini. Dans ce cas, la famille $(r_i)_{i \in I}$ admet 0 pour seul point d'accumulation. Pour qu'une famille $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ soit un système d'ubiquité hétérogène, elle doit satisfaire les assertions (i)-(iv) énoncées ci-après. Notons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des mesures boréliennes finies et de support égal à $[0, 1]^d$. La première assertion, qui fait intervenir une mesure $m \in \mathfrak{M}$, est :

- (i). Pour m -presque tout $x \in [0, 1]^d$, on a $\|x - x_i\| \leq r_i/2$ pour une infinité de $i \in I$.

Citons quelques exemples de familles pour lesquelles l'assertion (i) est vérifiée. Fixons un entier $c \geq 2$ et notons $\mathcal{I}_{d,c}$ l'ensemble des couples (j, k) avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, c^j\}^d$. Pour tout point $x \in [0, 1]^d$, il existe une infinité de $(j, k) \in \mathcal{I}_{d,c}$ tels que $\|x - kc^{-j}\| \leq c^{-j}/2$. En conséquence, l'assertion (i) est satisfaite par la famille $(kc^{-j}, c^{-j})_{(j,k) \in \mathcal{I}_{d,c}} \in \mathcal{S}_d^0(\mathcal{I}_{d,c})$ quelle que soit la mesure $m \in \mathfrak{M}$.

De même, notons $\mathcal{I}_{d,\text{rat}}$ l'ensemble des couples (p, q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, \dots, q\}^d$. D'après le théorème de Dirichlet [81, th. 200], l'assertion (i) est vérifiée par la famille $(p/q, 2q^{-1-1/d})_{(p,q) \in \mathcal{I}_{d,\text{rat}}} \in \mathcal{S}_d^0(\mathcal{I}_{d,\text{rat}})$ pour toute mesure $m \in \mathfrak{M}$. On peut préciser ce résultat. En effet, un point $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ étant fixé, notons $\kappa(x)$ l'infimum de l'ensemble des réels $\kappa \in]0, 1]$ pour lesquels $\|x - p/q\| < \kappa^{1/d} q^{-1-1/d}$ possède une infinité de solutions $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ où au moins une des coordonnées de p/q est irréductible, puis désignons par γ_d le supremum de l'ensemble des réels $\kappa(x)$ sur $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Hurwitz [85] a établi que γ_1 vaut $1/\sqrt{5}$, cf. [81, th. 193]. Pour $d \geq 2$, divers encadrements sur γ_d sont connus, mais la valeur exacte de cette constante reste indéterminée, cf. [68]. Plaçons-nous en dimension

$d = 1$ et désignons par $\mathcal{I}_{1,\text{rat}}^*$ l'ensemble des couples (p, q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, \dots, q-1\}$ premier avec q . Du fait que $\gamma_1 < 1/2$, la famille $(p/q, 1/q^2)_{(p,q) \in \mathcal{I}_{1,\text{rat}}^*} \in \mathcal{S}_1^0(\mathcal{I}_{1,\text{rat}}^*)$ vérifie l'assertion (i) pour $m \in \mathfrak{M}$ vérifiant $m(\mathbb{Q}) = 0$. Ce résultat intervient dans la preuve du corollaire 4.1 énoncé dans la section IV.

Ajoutons que les systèmes d'ubiquité homogène introduits dans le chapitre 3 vérifient l'assertion (i) lorsque m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$. En effet, soit $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ un système d'ubiquité homogène dans $]0, 1[^d$. D'après la proposition 3.8, la famille $(x_i, r_i/2)_{i \in I}$ est aussi un système d'ubiquité homogène dans $]0, 1[^d$, ce qui implique directement (i).

Afin d'énoncer les assertions (ii)-(iv), il convient de fixer quelques notations supplémentaires. Pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, notons $\lambda_{j,k}^c$ le cube $c^{-j}(k + [0, 1]^d)$. En outre, pour tout point x de $\mathbb{R}^d$ et tout entier relatif j , il existe un unique cube c -adique de génération j qui contient le point x . Désignons par $\lambda_j^c(x)$ ce cube. Par ailleurs, un cube c -adique λ de $\mathbb{R}^d$ étant donné, on note 3λ l'union du cube λ avec les $3^d - 1$ cubes de même génération qui lui sont adjacents (3λ est aussi égal à l'image du cube λ par une homothétie dont le centre est le centre de λ et dont le rapport est 3). L'assertion (ii) indique que les propriétés d'échelle d'une mesure $m \in \mathfrak{M}$ fixée sont gérées presque partout par une certaine fonction de jauge $g_{\beta,\varphi} \in \mathfrak{D}_d$ avec $\beta \in [0, d]$ et $\varphi \in \Phi$:

- (ii). Pour m -presque tout $x \in [0, 1]^d$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $j \geq j(x)$ et tout $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$,

$$\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x) \implies m(\lambda_{j,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j,k}^c|).$$

Notons Ψ l'ensemble des fonctions ψ nulles en 0, continues et croissantes sur un voisinage à droite de ce point et telles que $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ décroisse sur un voisinage à droite strict de ce même point. L'assertion (iii) indique qu'une mesure $m \in \mathfrak{M}$ permet d'analyser les points où une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ fixée au préalable se comporte en loi de puissance avec l'exposant $\alpha > 0$ à une correction donnée par $\psi \in \Psi$ près :

- (iii). Pour m -presque tout $x \in [0, 1]^d$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $j \geq j(x)$ et tout $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$,

$$\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x) \implies |\lambda_{j,k}^c|^{\alpha+\psi(|\lambda_{j,k}^c|)} \leq \mu(\lambda_{j,k}^c) \leq |\lambda_{j,k}^c|^{\alpha-\psi(|\lambda_{j,k}^c|)}.$$

Enfin, l'assertion (iv) impose une condition d'autosimilarité sur une mesure $m \in \mathfrak{M}$. Afin d'expliciter cette condition, associons à tout cube c -adique λ de génération positive la dilatation, notée ω_λ , qui envoie le cube λ sur l'unique cube de génération nulle qui le contient. De plus, pour tout sous-cube c -adique λ de $[0, 1]^d$, notons m^λ la mesure borélienne sur λ qui est donnée par $m \circ \omega_\lambda$. L'assertion (iv) est alors :

- (iv). Pour tout sous-cube c -adique λ du cube $[0, 1]^d$, la restriction $m|_\lambda$ de la mesure m au cube λ est équivalente à la mesure m^λ (en ce sens qu'elles sont absolument continues l'une par rapport à l'autre).

Nous renvoyons à la section IV pour deux exemples notables de mesures vérifiant les assertions (ii)-(iv) : les produits de mesures multinomiales et les mesure de Gibbs associées à un potentiel höldérien.

Il nous est désormais possible de définir la notion de système d'ubiquité hétérogène relativement à la mesure μ , au réel α et à la jauge $g_{\beta,\varphi}$.

Définition (système d'ubiquité hétérogène)

Soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{S}_d^0(I)$. Considérons une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$, deux réels $\alpha > 0$ et $\beta \in]0, d]$ et une fonction $\varphi \in \Phi$. On dit que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ forme un système d'ubiquité hétérogène relativement à $(\mu, \alpha, \beta, \varphi)$, dès lors qu'il existe une base $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, une fonction $\psi \in \Psi$, ainsi qu'une mesure $m \in \mathfrak{M}$, vérifiant les assertions (i)-(iv) énoncées précédemment.

Remarque : La définition adoptée dans [8] se démarque de la nôtre sur le point suivant : pour tout sous-cube c -adique λ du cube $[0, 1]^d$, J. Barral et S. Seuret autorisent la mesure m^λ à différer de $m \circ \omega_\lambda$. Cela nécessite de contrôler certaines quantités relatives aux mesures m^λ (plus précisément, leur vitesse de renouvellement et leur masse). Imposer $m^\lambda = m \circ \omega_\lambda$, pour tout λ , nous permet d'éviter ces difficultés, tout en conservant un champ d'application assez large.

Les systèmes d'ubiquité homogène conduisent à des systèmes d'ubiquité hétérogène. En effet, soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ un système d'ubiquité homogène dans le cube ouvert $]0, 1[^d$. On vérifie alors aisément que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement au quadruplet $(\mathcal{L}^d, d, d, \varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in \Phi$. Ainsi, en reprenant les exemples de systèmes d'ubiquité homogène fournis dans le chapitre 3, on obtient directement de nombreux exemples de systèmes d'ubiquité hétérogène par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans ce qui suit, I est un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ désigne un système d'ubiquité hétérogène relativement à un quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi) \in \mathfrak{M} \times]0, \infty[\times]0, d] \times \Phi$. Considérons de surcroît une base $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, une fonction $\psi \in \Psi$ et une mesure $m \in \mathfrak{M}$ remplissant les conditions (i)-(iv). De plus, un réel strictement positif M étant donné, notons $I_{M, \psi}^{\mu, \alpha}$ l'ensemble des indices $i \in I$ pour lesquels

$$M^{-1}(2r_i)^{\alpha+\psi(2r_i)} \leq \mu(B(x_i, r_i)) \leq \mu(\bar{B}(x_i, r_i)) \leq M(2r_i)^{\alpha-\psi(2r_i)} \quad (4.2)$$

où $B(x_i, r_i)$ et $\bar{B}(x_i, r_i)$ désignent respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre x_i et de rayon r_i . J. Barral et S. Seuret s'intéressent, pour tout réel t supérieur à 1, à l'ensemble $\tilde{E}_t$ formé des points du cube $[0, 1]^d$ qui appartiennent, pour une infinité d'indices $i \in I$, à la boule $B(x_i, r_i^t)$ lorsque la mesure μ attribue à la boule $B(x_i, r_i)$ une masse qui se comporte comme r_i^α , c'est-à-dire à l'ensemble

$$\tilde{E}_t = \{x \in [0, 1]^d \mid \|x - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } i \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha}\}. \quad (4.3)$$

Plus précisément, ils prouvent l'existence d'un réel strictement positif M tel que la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\tilde{E}_t$ est supérieure à β/t , quel que soit le réel t supérieur à 1, lorsque (4.2) ne tient que pour les boules fermées, cf. [8, th. 2.7]. La variante périodisée

$$\begin{aligned} E_t &= \mathbb{Z}^d + \tilde{E}_t \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } (i, p) \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha} \times \mathbb{Z}^d\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

de $\tilde{E}_t$ vérifie bien entendu la même propriété. Le théorème suivant est plus précis, puisqu'il indique que E_t appartient à $G^g(\mathbb{R}^d)$ pour une certaine jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ avec $s_g = \beta/t$.

Théorème 4.1

Soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ un système d'ubiquité hétérogène relativement à un quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi) \in \mathfrak{M} \times]0, \infty[\times]0, d] \times \Phi$. Alors, il existe $\psi \in \Psi$ et $M \in [1, \infty[$ tels que :

- les ensembles $\tilde{E}_1$ et E_1 figurent dans $G^{g_{\beta, \varphi}}([0, 1]^d)$ et $G^{g_{\beta, \varphi}}(\mathbb{R}^d)$ respectivement ;
- pour toute fonction $\phi \in \Phi$ et tout réel $t > 1$, les ensembles $\tilde{E}_t$ et E_t appartiennent respectivement aux classes $G^{g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}}([0, 1]^d)$ et $G^{g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}}(\mathbb{R}^d)$.

Ce résultat, qui s'apparente au théorème 3.2 établi dans le chapitre 3 et concernant les systèmes d'ubiquité homogène, est prouvé dans la section VI. Cependant, utiliser le théorème 4.1 plutôt que le théorème 3.2 avec un système d'ubiquité homogène (qui peut se voir comme un cas particulier de système d'ubiquité hétérogène) ne présente aucun intérêt. En effet, soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ un système d'ubiquité homogène dans le cube ouvert $]0, 1[^d$. Observons que l'ensemble $I_{M, \psi}^{\mathcal{L}^d, d}$ est égal à I tout entier quels que soient $\psi \in \Psi$ et $M \in [1, \infty[$ et que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement au quadruplet $(\mathcal{L}^d, d, d, \varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in \Phi$. Dès lors, pour tout réel $t \geq 1$, le théorème 3.2 assure que $\tilde{E}_t \in G^{\text{Id}^{d/t}}([0, 1]^d)$, tandis que le théorème 4.1 implique que $\tilde{E}_t \in G^{\text{Id}^{d/t-\varphi}}([0, 1]^d)$ pour toute fonction $\varphi \in \Phi$, ce qui est plus faible car les fonctions de jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $g \prec \text{Id}^{d/t}$ ne s'écrivent pas toutes sous la forme $g = \text{Id}^{d/t-\varphi}$ avec $\varphi \in \Phi$.

Le théorème 4.1 permet de s'intéresser à l'intersection d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles construits à partir de systèmes d'ubiquité hétérogène. En effet, prenons un ensemble dénombrable J et, pour tout $j \in J$, considérons un système d'ubiquité hétérogène $(x_i^j, r_i^j)_{i \in I_j}$ (où I_j est un ensemble infini dénombrable) relatif à un quadruplet $(\mu^j, \alpha^j, \beta^j, \varphi^j) \in \mathfrak{M} \times]0, \infty[\times]0, d] \times \Phi$. En vertu du théorème 4.1 et de la stabilité par intersection dénombrable des classes d'ensembles à grande intersection (cf. chapitre 3, théorème 3.1), il existe une famille $(M^j)_{j \in J}$ de réels supérieurs à 1 et une famille $(\psi^j)_{j \in J}$ de fonctions appartenant à Ψ telles que, pour toute famille $(\phi^j)_{j \in J}$ de fonctions de Φ et toute famille $(t^j)_{j \in J}$ de réels supérieurs à 1,

$$\bigcap_{j \in J} \tilde{E}_{t^j}^j \in \bigcap_{\substack{g \in \mathfrak{D}_d \\ \forall j, g \prec g_{\beta^j/t^j, 2\varphi^j+\phi^j}}} G^g([0, 1]^d) \quad (4.5)$$

où $\tilde{E}_{t^j}^j$ est défini de manière similaire à (4.3). Dans l'assertion (4.5), on convient que, si aucune fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ ne vérifie $g \prec g_{\beta^j/t^j, 2\varphi^j+\phi^j}$, pour tout $j \in J$, l'intersection des classes $G^g([0, 1]^d)$ est égale à la collection de tous les G_δ de $\mathbb{R}^d$ inclus dans $[0, 1]^d$. En particulier, on obtient

$$\dim \bigcap_{j \in J} \tilde{E}_{t^j}^j \geq \inf_{j \in J} \frac{\beta^j}{t^j} \quad (4.6)$$

si toutefois ce dernier infimum est un réel strictement positif. En effet, prenons un réel s strictement compris entre 0 et l'infimum des β^j/t^j sur $j \in J$. La jauge $\text{Id}^s \in \mathfrak{D}_d$ vérifie alors $\text{Id}^s \prec g_{\beta^j/t^j, 2\varphi^j+\phi^j}$, pour tout $j \in J$. D'après l'assertion (4.5), il en résulte que

$$\bigcap_{j \in J} \tilde{E}_{t^j}^j \in G^{\text{Id}^s}([0, 1]^d).$$

Le théorème 3.1 conduit alors au fait que l'intersection sur $j \in J$ des ensembles $\tilde{E}_{t^j}^j$ est de dimension au moins s . Faire tendre s vers l'infimum des β^j/t^j sur $j \in J$ donne finalement

la minoration (4.6). Ce résultat peut se voir comme l'analogue du théorème 2 de [49] dans le cadre de l'ubiquité hétérogène.

IV Applications en théorie des nombres

Dans [8], J. Barral et S. Seuret fournissent quelques exemples de systèmes d'ubiquité hétérogène $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ (où I est un ensemble infini dénombrable) par rapport à un quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi) \in \mathfrak{M} \times]0, \infty[\times]0, d] \times \Phi$. Nous les reprenons dans cette section et nous montrons que les ensembles $\tilde{E}_t$ et E_t définis respectivement par (4.3) et (4.4) pour $t \geq 1$ appartiennent à certaines des classes d'ensembles à grande intersection présentées dans la section II.

IV.1 Produits de mesures multinomiales

Commençons par rappeler ce qu'est une mesure multinomiale. À cet effet, fixons un entier naturel c supérieur à 2 et rappelons que chaque sous-intervalle c -adique $\lambda = c^{-j}(k + [0, 1[)$ (avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}$) de l'intervalle $[0, 1[$ peut se coder à l'aide d'un mot $u(\lambda)$ de longueur j sur l'alphabet $\{0, \dots, c-1\}$ en posant

$$\forall p \in \{1, \dots, j\} \quad u(\lambda)_p = \lfloor kc^{p-j} \rfloor \mod c.$$

Précisons que l'intervalle $[0, 1[$ est codé par le mot vide, qui est noté $\emptyset$. Prenons un vecteur de probabilité, c'est-à-dire un élément $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{c-1})$ de $]0, 1[^c$, dont la somme des composantes vaut 1. Pour tout entier naturel j , considérons la mesure borélienne μ_j^π qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité est

$$\frac{d\mu_j^\pi}{d\mathcal{L}^1} = \sum_{\substack{\lambda \subset [0, 1[\\ \langle \lambda \rangle_c = j}} c^j \mathbb{1}_\lambda \prod_{p=1}^j \pi_{u(\lambda)_p}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des sous-intervalles c -adiques de $[0, 1[$ de génération j . On peut montrer que la suite de mesures $(\mu_j^\pi)_{j \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une mesure borélienne de probabilité dont le support est égal à l'intervalle $[0, 1]$. Cette dernière mesure s'appelle la mesure multinomiale associée au vecteur de probabilité π et se note μ_π . Pour faire son analyse multifractale, c'est-à-dire pour évaluer, à $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la dimension de Hausdorff de l'ensemble V_α des points x de $[0, 1[$ vérifiant $-\frac{1}{j} \log_c \mu_\pi(\lambda_j^c(x)) \rightarrow \alpha$ quand j tend vers l'infini, on introduit classiquement la fonction τ_{μ_π} définie par

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \tau_{\mu_\pi}(q) = - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log_c \sum_{\substack{\lambda \subset [0, 1[\\ \langle \lambda \rangle_c = j}} (\mu_\pi(\lambda))^q = - \log_c \sum_{b=0}^{c-1} \pi_b^q.$$

Fixons maintenant un réel q et posons $\alpha = \tau'_{\mu_\pi}(q)$, ainsi que $\beta = q\tau'_{\mu_\pi}(q) - \tau_{\mu_\pi}(q)$. Le réel β peut encore se voir comme la valeur au point α de la transformée de Legendre de la fonction τ_{μ_π} . On prouve alors que la dimension de Hausdorff de l'ensemble V_α est égale à β . Pour ce faire, on s'intéresse à une mesure $\mu_{\pi,q}$ qui charge les points de V_α et dont la masse décroît globalement à la vitesse β . Cette mesure analysante $\mu_{\pi,q}$ est construite de la même manière que μ_π en remplaçant le vecteur de probabilité π par le vecteur $c^{\tau_{\mu_\pi}(q)}(\pi_0^q, \dots, \pi_{c-1}^q)$. Nous renvoyons à [33] pour plus de détails.

Pour appliquer les résultats de la section III, il convient de mieux cerner le comportement des mesures μ_π et $\mu_{\pi,q}$. En vertu du théorème 1 de [10], les points (ii)-(iv) évoqués dans cette section sont tous vérifiés dès lors que :

- les mesures μ et m de l'ensemble $\mathfrak{M}$ sont respectivement μ_π et $\mu_{\pi,q}$;
- les fonctions $\varphi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ sont de la forme $f_\eta : r \mapsto (-\log r)^{\eta-1/8}$ pour η dans $]0, 1/8[$.

Signalons que nous ne cherchons pas à donner la forme optimale des fonctions φ et ψ . Le théorème 1 de [10] permet en effet de produire des fonctions rendant plus précis les encadrements des points (ii) et (iii), mais celles-ci sont plus compliquées.

Intéressons-nous maintenant à un produit de d mesures multinomiales. Considérons d vecteurs de probabilité notés $\pi^1, \dots, \pi^d$ et formons la mesure $\mu = \mu_{\pi^1} \otimes \dots \otimes \mu_{\pi^d}$. Il s'agit d'une mesure borélienne de probabilité dont le support est égal au cube fermé $[0, 1]^d$. L'analyse multifractale de la mesure μ fait intervenir la fonction $\tau_\mu = \tau_{\mu_{\pi^1}} + \dots + \tau_{\mu_{\pi^d}}$. Un réel q étant fixé, notons $\alpha = \tau'_\mu(q)$, ainsi que $\beta = q\tau'_\mu(q) - \tau_\mu(q)$. La mesure auxiliaire permettant d'analyser l'ensemble des points autour desquels la mesure μ décroît avec la vitesse α est ici la mesure $m = \mu_{\pi^1,q} \otimes \dots \otimes \mu_{\pi^d,q}$. Le théorème 1 de [10] permet à nouveau de montrer que les points (ii)-(iv) énoncés dans la section III sont vérifiés lorsque $\varphi = f_\eta$ et $\psi = f_{\eta'}$ avec $\eta, \eta' \in]0, 1/8[$. Supposons que le point (i) est vérifié par la mesure m et une famille $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ (où I est un ensemble infini dénombrable). Par conséquent, cette famille constitue un système d'ubiquité hétérogène relativement au quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi)$. Le théorème 4.1 garantit alors l'existence d'un réel $M \geq 1$ tel que, pour tout $t \geq 1$, l'ensemble $\tilde{E}_t$ défini par (4.3) appartient à $G^{g_{\beta/t, 3f_\eta}}([0, 1]^d)$ et l'ensemble E_t donné par (4.4) appartient à la classe $G^{g_{\beta/t, 3f_\eta}}(\mathbb{R}^d)$.

Précisons les liens entre le produit de mesures multinomiales μ et les propriétés du développement en base c des éléments du cube $[0, 1]^d$. Fixons d'abord $q = 1$, de sorte que $\alpha = \beta = \tau'_\mu(1)$ et $m = \mu$, dans ce qui précède. Prenons ensuite un réel x de l'intervalle $[0, 1[$ et écrivons x comme la somme des $x_p c^{-p}$, avec $x_p \in \{0, \dots, c-1\}$, lorsque p parcourt l'ensemble des entiers naturels non nuls. On peut supposer que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ ne stationne pas en $c-1$. Notons

$$\forall b \in \{0, \dots, c-1\} \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad \sigma_{b,j}(x) = \frac{1}{j} \# \{p \in \{1, \dots, j\} \mid x_p = b\}$$

la proportion jusqu'au rang j de l'entier b dans le développement en base c du réel x . Prolongeons enfin $\sigma_{b,j}$ de façon naturelle en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$. En vertu de la loi des grands nombres, la mesure μ attribue la masse 1 à l'ensemble des points $x = (x^1, \dots, x^d)$ du cube $[0, 1]^d$ vérifiant $\sigma_{b,j}(x^s) \rightarrow \pi_b^s$ quand j tend vers l'infini, quels que soient les entiers $s \in \{1, \dots, d\}$ et $b \in \{0, \dots, c-1\}$. En particulier, cet ensemble a une dimension de Hausdorff supérieure à

$$\alpha = \tau'_\mu(1) = - \sum_{s=1}^d \sum_{b=0}^{c-1} \pi_b^s \log_c \pi_b^s. \quad (4.7)$$

On retrouve ainsi un célèbre résultat dû à Besicovitch [28] et Eggleston [58]. La loi du logarithme itéré (cf. e.g. [138]) offre un résultat plus précis. En effet, pour tout $r > 0$ assez petit, posons

$$\varsigma(r) = \left(\frac{\log \log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Alors, pour μ -presque tout point $x = (x^1, \dots, x^d) \in [0, 1]^d$, il existe un entier naturel $j(x)$ vérifiant, pour tout entier naturel j supérieur à $j(x)$,

$$\forall s \in \{1, \dots, d\} \quad \forall b \in \{0, \dots, c-1\} \quad |\sigma_{b,j}(x^s) - \pi_b^s| \leq \sqrt{\log c} \varsigma(c^{-j}).$$

Par conséquent, pour m -presque tout point x de $[0, 1]^d$, il existe un entier naturel $j(x)$ tel que, pour tout entier naturel j supérieur à $j(x)$,

$$\sup_{z \in [0, 1]^d \cap 3\lambda_j^c(x)} \max_{\substack{s \in \{1, \dots, d\} \\ b \in \{0, \dots, c-1\}}} |\sigma_{b,j}(z^s) - \pi_b^s| \leq \sqrt{\log c} \varsigma(c^{-j}).$$

Notons désormais I_π^{Dev} l'ensemble des indices $i \in I$ pour lesquels

$$\max_{\substack{s \in \{1, \dots, d\} \\ b \in \{0, \dots, c-1\}}} |\sigma_{b, \lfloor -\log_c r_i \rfloor}(x_i^s) - \pi_b^s| \leq 2\sqrt{\log c} \varsigma(r_i). \quad (4.9)$$

Les arguments de la preuve du théorème 4.1 permettent d'établir le résultat suivant.

Proposition 4.2

Considérons d vecteurs de probabilité $\pi^1, \dots, \pi^d \in]0, 1[^c$. Soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{S}_d^0(I)$. On suppose que l'assertion (i) est vérifiée par $m = \mu_{\pi^1} \otimes \dots \otimes \mu_{\pi^d}$. Alors, pour tous $t \in [1, \infty[$ et $\eta \in]0, 1/8[$,

$$\tilde{E}_t^{\text{Dev}} = \{x \in [0, 1]^d \mid \|x - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } i \in I_\pi^{\text{Dev}}\}$$

et $E_t^{\text{Dev}} = \mathbb{Z}^d + \tilde{E}_t^{\text{Dev}}$ appartiennent respectivement à $G^{g_{\alpha/t, 3f_\eta}}([0, 1]^d)$ et $G^{g_{\alpha/t, 3f_\eta}}(\mathbb{R}^d)$, où α est le réel donné par (4.7) et f_η est la fonction $r \mapsto (-\log r)^{\eta-1/8}$.

Cette proposition, prouvée dans la section VI, permet en particulier d'étudier les propriétés de grande intersection de l'ensemble

$$U_{\pi,t} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \exists (p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ irréductibles } \mid q_n \rightarrow \infty \\ \forall n \quad |x - p_n/q_n| \leq q_n^{-2t} \\ \forall b \quad \sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(p_n/q_n) \rightarrow \pi_b \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

des réels $2t$ -approchables ($t \geq 1$) par des rationnels vérifiant la condition de Besicovitch associée à un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{c-1}) \in]0, 1[^c$. Pour ce faire, il convient de prendre $I = \mathcal{I}_{1, \text{rat}}^*$ (cf. section III), ainsi que $x_{(p,q)} = p/q$ et $r_{(p,q)} = 1/q^2$ quel que soit $(p, q) \in I$. L'assertion (i) est vérifiée par $m = \mu_\pi$ car $\mu_\pi(\mathbb{Q}) = 0$. En outre, $U_{\pi,t} \supset E_t^{\text{Dev}}$ car si $(p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite injective d'éléments de I_π^{Dev} , on a $\sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(p_n/q_n) \rightarrow \pi_b$, uniformément en $b \in \{0, \dots, c-1\}$, lorsque n tend vers l'infini. La proposition 4.2 conduit alors au résultat suivant.

Corollaire 4.1

Pour tout réel $t \geq 1$ et tout vecteur de probabilité $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{c-1}) \in]0, 1[^c$, l'ensemble $U_{\pi,t}$ défini par (4.10) contient un ensemble de la classe $G^{g_{\alpha/t, 3f_\eta}}(\mathbb{R})$ où $\alpha = -\sum_{b=0}^{c-1} \pi_b \log_c \pi_b$ et $f_\eta(r) = (-\log r)^{\eta-1/8}$, quel que soit $\eta \in]0, 1/8[$.

En examinant la preuve de la proposition 4.2, on observe aisément que l'énoncé de ce corollaire reste vrai si on remplace $U_{\pi,t}$ par l'ensemble

$$U'_{\pi,t} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \exists (p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ irréductibles } \mid q_n \rightarrow \infty \\ \forall n \quad |x - p_n/q_n| \leq q_n^{-2t} \\ \forall b \quad \sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor}(x) \rightarrow \pi_b \end{array} \right\}$$

ce qui revient à imposer une condition de Besicovitch non pas sur les rationnels approchants mais sur les réels approchés eux-mêmes. Ainsi, $U'_{\pi,t}$ contient un ensemble de la classe $G^{g_{\alpha/t,3f\eta}}(\mathbb{R})$ pour tout $\eta \in]0, 1/8[$. Cela améliore légèrement le théorème 1.2 de [11], qui indique que $U'_{\pi,t}$ contient un ensemble de la classe $\mathcal{G}^{\alpha/t}(\mathbb{R})$ de K. Falconer.

Comme suggéré dans [13], intéressons-nous pour tout $t \geq 1$ à l'ensemble des réels x qui sont approchés à q_n^{-2t} près par une infinité de rationnels irréductibles p_n/q_n pour lesquels les fréquences asymptotiques

$$\bar{\sigma}_b((p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{b, \lfloor 2 \log_c q_n \rfloor} \left(\frac{p_n}{q_n} \right)$$

pour $b \in \{0, \dots, c-1\}$, vérifient certaines relations. Pour fixer les idées, prenons $c = 3$ et considérons l'ensemble V_t des réels x pour lesquels il existe une suite $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fractions irréductibles vérifiant $|x - p_n/q_n| \leq q_n^{-2t}$ pour tout n , ainsi que les conditions

$$\bar{\sigma}_0((p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}) > 0 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_1((p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 2 \bar{\sigma}_2((p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}) > 0.$$

On remarque que V_t contient l'union des ensembles $U_{\pi,t}$ lorsque le triplet $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ vérifie $\pi_0 > 0$, $\pi_1 = 2\pi_2 > 0$ et $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. De manière équivalente,

$$V_t \supset \bigcup_{\sigma \in]0, 1/3[} U_{(1-3\sigma, 2\sigma, \sigma), t}.$$

Le corollaire 4.1 garantit que V_t contient un ensemble de la classe $G^{g_{\alpha(\sigma)/t, 3f\eta}}(\mathbb{R})$ avec $\alpha(\sigma) = -(1-3\sigma) \log_3(1-3\sigma) - 2\sigma \log_3(2\sigma) - \sigma \log_3 \sigma$, quels que soient $\sigma \in]0, 1/3[$ et $\eta \in]0, 1/8[$. Cependant $\alpha(\sigma)$ est maximal pour $\sigma = \sigma_* = (2^{4/3} + 9 - 3 \cdot 2^{2/3})/31$. De façon optimale, l'ensemble V_t contient donc un ensemble de la classe $G^{g_{\alpha(\sigma_*)/t, 3f\eta}}(\mathbb{R})$ pour tout réel η de l'intervalle $]0, 1/8[$.

En suivant le modèle de l'exemple cité précédemment, on peut évidemment étudier les ensembles de réels approchés par des rationnels dont les fréquences asymptotiques du développement en base c vérifient certaines relations (linéaires ou non) fixées au préalable. Le fait que ces ensembles contiennent des ensembles à grande intersection permet en outre de s'intéresser à l'intersection d'un nombre dénombrable d'entre eux.

IV.2 Mesures de Gibbs

Prenons un entier naturel c supérieur à 2 et appelons σ la multiplication par c sur le cube $[0, 1]^d$, c'est-à-dire que $\sigma(x) = cx \bmod \mathbb{Z}^d$, quel que soit le point x du cube $[0, 1]^d$. Soit f une fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique et uniformément höldérienne sur $\mathbb{R}^d$, cf. chapitre 2, partie I. La fonction f est aussi appelée un potentiel. Introduisons, pour tout entier naturel j , la j -ième somme de Birkhoff associée au potentiel f , qui est définie par

$$S_j^f = \sum_{k=0}^{j-1} f \circ \sigma^k$$

ainsi que son exponentielle $D_j^f = \exp \circ S_j^f$. Pour tout entier naturel j , considérons la mesure probabilité μ_j^f définie sur la tribu borélienne de $[0, 1]^d$ par le fait qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ et que sa densité est

$$\frac{d\mu_j^f}{d\mathcal{L}^d} = \frac{\mathbb{1}_{[0, 1]^d} D_j^f}{\int_{[0, 1]^d} D_j^f(x) dx}.$$

On peut calculer explicitement les itérées de l'opérateur de Ruelle associé au potentiel f et les relier à la suite de mesures $(\mu_j^f)_{j \in \mathbb{N}}$ ainsi définie. Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius permet alors de montrer que cette suite de mesures converge faiblement vers une mesure de probabilité μ_f sur la tribu borélienne de $[0, 1]^d$. Nous renvoyons à [133] pour plus de précisions.

Considérons maintenant la fonction de pression P_f associée à f , qui est définie par

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad P_f(q) = d \log c + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log \int_{[0, 1]^d} D_j^{qf}(x) dx.$$

On peut montrer que la mesure μ_f est une mesure de Gibbs relativement au potentiel f et au système dynamique $([0, 1]^d, \sigma)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif C tel que, pour tout entier naturel j et tout point x du cube $[0, 1]^d$,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\mu_f(\lambda_j^c(x))}{e^{-jP_f(1)} D_j^f(x)} \leq C. \quad (4.11)$$

En outre, la mesure μ_f est ergodique. L'analyse multifractale de cette mesure est donnée dans [65, 66]. Classiquement, elle fait appel à la fonction τ_{μ_f} qui, à l'aide de l'encadrement (4.11), se retrouve à partir de la fonction de pression P_f de la manière suivante :

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \tau_{\mu_f}(q) = - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log_c \sum_{\substack{\lambda \subset [0, 1]^d \\ \langle \lambda \rangle_c = j}} (\mu_f(\lambda))^q = \frac{1}{\log c} (qP_f(1) - P_f(q))$$

où la somme est prise sur l'ensemble des sous-cubes c -adiques de $[0, 1]^d$ de génération j . Fixons un réel q , puis introduisons $\alpha = \tau'_{\mu_f}(q)$, ainsi que $\beta = q\tau'_{\mu_f}(q) - \tau_{\mu_f}(q)$, la valeur au point α de la transformée de Legendre de la fonction τ_{μ_f} . On peut montrer que β donne la dimension de Hausdorff de l'ensemble V_α des points x du cube $[0, 1]^d$ vérifiant $-\frac{1}{j} \log_c \mu_f(\lambda_j^c(x)) \rightarrow \alpha$ quand j tend vers l'infini. Dans ce but, on observe que la mesure analysante μ_{qf} (obtenue à partir du potentiel qf) charge les points de V_α et fait décroître globalement la masse des cubes c -adiques à la vitesse β , grâce au théorème ergodique, au fait que μ_f et μ_{qf} sont des mesures de Gibbs et au principe variationnel, cf. [65, 66].

Soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{S}_d^0(I)$ telle que, pour tout point $x \in [0, 1]^d$, il existe une infinité de $i \in I$ vérifiant $\|x - x_i\| \leq r_i/2$. Dès lors, l'assertion (i) évoquée dans la section III est vérifiée pour toute mesure $m \in \mathfrak{M}$. Montrons maintenant que les points (ii)-(iv) sont vérifiés lorsque les mesures m et μ de $\mathfrak{M}$ désignent respectivement μ_{qf} et μ_f . La loi du logarithme itéré pour les mesures de Gibbs telles que m (cf. [44]) donne d'abord l'existence d'un réel $\kappa > 0$ tel que, pour m -presque tout $x \in [0, 1]^d$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout entier $j \geq j(x)$,

$$\left| \frac{1}{j} S_j^{qf}(x) - qP_f'(q) \right| \leq \kappa \varsigma(c^{-j})$$

où ς est la fonction définie par (4.8). Ensuite, comme le potentiel f est uniformément höldérien, quitte à augmenter κ , on montre que pour m -presque tout $x \in [0, 1]^d$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout entier $j \geq j(x)$,

$$\sup_{z \in 3\lambda_j^c(x)} \left| \frac{1}{j} S_j^{qf}(z) - qP_f'(q) \right| \leq \kappa \varsigma(c^{-j}).$$

En utilisant l'encadrement (4.11) pour la mesure m , il en ressort que le point (ii) est vérifié pour $\varphi = \frac{2\kappa}{\log c} \varsigma$. En l'utilisant pour μ , on observe que (iii) est vérifié pour $\psi = \frac{2\kappa}{|q| \log c} \varsigma$ lorsque q est non nul. Enfin, quelques calculs permettent de prouver que le point (iv) est vérifié. On en déduit que la famille $(x_i, r_i)_{i \in I}$ constitue un système d'ubiquité hétérogène relativement au quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi)$ si q est non nul. Le théorème 4.1 assure alors l'existence d'un réel $M \geq 1$ tel que, pour tout $t \geq 1$, l'ensemble $\tilde{E}_t$ donné par (4.3) et l'ensemble E_t défini par (4.4) appartiennent à $G^{\frac{g\beta}{t}, \frac{6\kappa}{\log c} \varsigma}([0, 1]^d)$ et $G^{\frac{g\beta}{t}, \frac{6\kappa}{\log c} \varsigma}(\mathbb{R}^d)$ respectivement.

On peut reformuler le résultat précédent à l'aide de la somme de Birkhoff S_j^f associée au potentiel f . À cet effet, notons $I_{f,q}^{\text{Bir}}$ l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels

$$\left| \frac{1}{[-\log_c r_i]} S_{[-\log_c r_i]}^f(x_i) - P_f'(q) \right| \leq 2 \frac{\kappa}{|q|} \varsigma(r_i).$$

Observons que $I_{f,0}^{\text{Bir}} = I$. En adaptant la preuve du théorème 4.1, on peut établir la proposition suivante. Pour sa preuve, nous renvoyons à la section VI.

Proposition 4.3

Considérons une fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique et uniformément höldérienne sur $\mathbb{R}^d$ notée f . Soient I un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{S}_d^0(I)$ telle que tout point $x \in [0, 1]^d$ vérifie $\|x - x_i\| \leq r_i/2$ pour une infinité de $i \in I$. Alors, pour tous $q \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, \infty[$,

$$\tilde{E}_t^{\text{Bir}} = \{x \in [0, 1]^d \mid \|x - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } i \in I_{f,q}^{\text{Bir}}\}$$

et $E_t^{\text{Bir}} = \mathbb{Z}^d + \tilde{E}_t^{\text{Bir}}$ appartiennent à $G^{\frac{g\beta}{t}, \frac{6\kappa}{\log c} \varsigma}([0, 1]^d)$ et $G^{\frac{g\beta}{t}, \frac{6\kappa}{\log c} \varsigma}(\mathbb{R}^d)$ respectivement, où $\beta = q\tau'_{\mu_f}(q) - \tau_{\mu_f}(q)$ et ς est définie par (4.8).

Grâce à cette proposition, on peut par exemple montrer que l'ensemble des réels qui sont approchés à q_n^{-2t} près par une suite de rationnels p_n/q_n vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[2 \log_c q_n]} S_{[2 \log_c q_n]}^f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = P_f'(q)$$

contient un ensemble à grande intersection qui figure dans la classe $G^{\frac{g\beta}{t}, \frac{6\kappa}{\log c} \varsigma}(\mathbb{R})$. On peut alors s'intéresser à l'intersection d'un nombre dénombrable de tels ensembles pour divers potentiels f et divers réels q . On peut de surcroît étudier l'intersection de ces ensembles avec des ensembles à grande intersection tels que ceux présentés auparavant dans ce chapitre et le chapitre 3.

V Preuve de la proposition 4.1

La preuve reprend des arguments de celle de l'implication (b) $\Rightarrow$ (c) du théorème B de [63]. Considérons un réel $\beta \in]0, d]$ et une fonction $\varphi \in \Phi$. Fixons deux réels r_1 et r_2 de l'intervalle $]0, \varepsilon_{g\beta, \varphi}[$ tels que $r_1 \leq r_2$, ainsi qu'un réel $\kappa \in]0, 1]$ et calculons

$$\frac{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_1)}{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_2)} \cdot \frac{g_{\beta, \varphi}(r_2)}{g_{\beta, \varphi}(r_1)} = \kappa^{\varphi(\kappa r_2) - \varphi(\kappa r_1)} \cdot \frac{r_2^{\varphi(\kappa r_2) - \varphi(r_2)}}{r_1^{\varphi(\kappa r_1) - \varphi(r_1)}}.$$

Comme φ tend vers 0 à l'origine, le dernier quotient tend vers $r_2^{-\varphi(r_2)}/r_1^{-\varphi(r_1)}$ quand κ tend vers 0. En raison de la décroissance de $r \mapsto r^{-\varphi(r)}$ au voisinage de 0, cette limite est inférieure à 1 quand r_1 et r_2 sont suffisamment petits. De surcroît, la croissance de φ au voisinage de l'origine assure que $\varphi(\kappa r_2) - \varphi(\kappa r_1)$ est positif pour κ assez petit. Finalement, il existe un réel η dans l'intervalle $]0, \varepsilon_{g_{\beta, \varphi}}]$ tel que

$$\forall r_1, r_2 \in]0, \eta[\quad r_1 \leq r_2 \implies \limsup_{\kappa \rightarrow 0} \frac{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_1)}{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_2)} \leq \frac{g_{\beta, \varphi}(r_1)}{g_{\beta, \varphi}(r_2)}. \quad (4.12)$$

Prenons maintenant un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^d$ qui est un G_δ tel que, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes appartenant à D_c ,

$$\mathcal{H}^{g_{\beta, \varphi}} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \right) > 0. \quad (4.13)$$

Pour montrer que F appartient à la classe $G^{g_{\beta, \varphi}}(\mathbb{R}^d)$, il suffit, en vertu du lemme 3.3, de montrer que $\mathcal{M}_{\infty}^{g_{\beta, \varphi}}(F \cap \lambda) = \mathcal{M}_{\infty}^{g_{\beta, \varphi}}(\lambda)$ pour tout cube c -adique λ de $\mathbb{R}^d$ dont le diamètre est strictement inférieur à η .

Supposons au contraire l'existence d'un cube c -adique λ de diamètre strictement inférieur à η et d'un réel α de l'intervalle $[0, 1[$ vérifiant $\mathcal{M}_{\infty}^{g_{\beta, \varphi}}(F \cap \lambda) < \alpha \mathcal{M}_{\infty}^{g_{\beta, \varphi}}(\lambda)$. Pour $G \subset \mathbb{R}^d$, notons $R_c^\lambda(G)$ l'ensemble des suites $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda_c \cup \{\emptyset\}$ telles que $G \cap \lambda \subset \bigsqcup_p \lambda_p \subset \lambda$. D'après les lemmes 3.1 et 3.2, comme le diamètre de λ est strictement inférieur à η donc à $\varepsilon_{g_{\beta, \varphi}}$, il existe $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}} \in R_c^\lambda(F)$ vérifiant

$$\sum_{p=0}^{\infty} g_{\beta, \varphi}(|\lambda_p|) \leq \alpha g_{\beta, \varphi}(|\lambda|) \quad (4.14)$$

et $\lambda_p \subsetneq \lambda$ pour tout p . Notons P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_p \neq \emptyset$ et, pour $p \in P$, appelons f_p l'homothétie qui envoie le cube c -adique λ sur son sous-cube λ_p . Considérons un entier naturel non nul s et un s -uplet $(p_1, \dots, p_s)$ d'éléments de P . Posons $f_{p_1, \dots, p_s} = f_{p_1} \circ \dots \circ f_{p_s}$. Cette application est une homothétie qui envoie le cube c -adique λ sur un de ses sous-cubes c -adiques stricts. Étendons de plus cette notation au cas où s est nul en convenant qu'alors $f_{p_1, \dots, p_s}$ désigne l'application identité.

Notons γ un réel strictement positif pour lequel $(1+\gamma)\alpha < 1$. D'après l'assertion (4.12), il existe alors un réel $\bar{\kappa} \in]0, \varepsilon_{g_{\beta, \varphi}}[$ tel que, pour tous réels $r_1, r_2 \in]0, \eta[$ vérifiant $r_1 \leq r_2$ et tout réel $\kappa \in]0, \bar{\kappa}[$,

$$\frac{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_1)}{g_{\beta, \varphi}(\kappa r_2)} \leq (1 + \gamma) \frac{g_{\beta, \varphi}(r_1)}{g_{\beta, \varphi}(r_2)}. \quad (4.15)$$

Fixons un réel κ dans l'intervalle $]0, \bar{\kappa}[$. D'après le théorème 4 de [137], on définit une mesure extérieure finie m_κ sur le cube λ en posant, pour tout $G \subset \lambda$,

$$m_\kappa(G) = \inf_{(\nu_p)_{p \in \mathbb{N}}} \sum_{p=0}^{\infty} g_{\beta, \varphi}(|\nu_p|)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des suites $(\nu_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda_c \cup \{\emptyset\}$ qui vérifient $G \subset \bigcup_p \nu_p \subset \lambda$ et $|\nu_p| < \kappa|\lambda|$ pour tout p . En reprenant la preuve du lemme 3.1, on observe qu'on peut en fait ne considérer que des suites d'ensembles disjoints. Prenons une

telle suite $(\nu_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui recouvre $f_{p_2, \dots, p_s}(F \cap \lambda) \subset \lambda$. Alors les ensembles $f_{p_1}(\nu_p) \subset \lambda$, pour $p \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\Lambda_c \cup \{\emptyset\}$ (du fait de la forme particulière de l'homothétie f_{p_1}), sont de diamètre $|\nu_p| \cdot |\lambda_{p_1}|/|\lambda| < \kappa|\lambda|$ et recouvrent $f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)$. Ainsi,

$$m_\kappa(f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)) \leq \sum_{p=0}^{\infty} g_{\beta, \varphi} \left(\frac{|\nu_p|}{|\lambda|} |\lambda_{p_1}| \right) \leq (1 + \gamma) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{g_{\beta, \varphi}(|\lambda_{p_1}|)}{g_{\beta, \varphi}(|\lambda|)} g_{\beta, \varphi}(|\nu_p|)$$

d'après (4.15) et les inégalités $|\nu_p|/|\lambda| < \kappa < \bar{\kappa}$ et $|\lambda_{p_1}| < |\lambda| < \eta$. En minimisant le membre de droite sur toutes les suites $(\nu_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il en ressort que

$$m_\kappa(f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)) \leq (1 + \gamma) \frac{g_{\beta, \varphi}(|\lambda_{p_1}|)}{g_{\beta, \varphi}(|\lambda|)} m_\kappa(f_{p_2, \dots, p_s}(F \cap \lambda)).$$

En répétant le raisonnement précédent, on forme la majoration

$$m_\kappa(f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)) \leq m_\kappa(F \cap \lambda) \left(\frac{1 + \gamma}{g_{\beta, \varphi}(|\lambda|)} \right)^s \prod_{s'=1}^s g_{\beta, \varphi}(|\lambda_{p_{s'}}|).$$

Par suite, en sommant sur l'ensemble des s -uplets possibles $(p_1, \dots, p_s)$ d'éléments de P , en utilisant l'inégalité (4.14), ainsi que l'inclusion $F \cap \lambda \subset \lambda$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{(p_1, \dots, p_s) \in P^s} m_\kappa(f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)) &\leq \left(\frac{1 + \gamma}{g_{\beta, \varphi}(|\lambda|)} \sum_{p=0}^{\infty} g_{\beta, \varphi}(|\lambda_p|) \right)^s m_\kappa(F \cap \lambda) \\ &\leq ((1 + \gamma)\alpha)^s m_\kappa(\lambda). \end{aligned}$$

Prenons maintenant un élément x du cube λ qui s'écrit en outre, pour tout entier naturel q et tout q -uplet $(p_1, \dots, p_q)$ d'éléments de P , comme l'image par la dilatation $f_{p_1, \dots, p_q}$ d'un élément de l'ensemble F . Montrons, par récurrence sur l'entier naturel s , l'assertion $P(s)$: il existe un s -uplet $(p_1, \dots, p_s)$ d'éléments de P pour lequel x est l'image par la dilatation $f_{p_1, \dots, p_s}$ d'un élément de l'ensemble $F \cap \lambda$. L'assertion $P(0)$ découle de l'appartenance du point x à l'ensemble $F \cap \lambda$. Soit s un entier naturel tel que $P(s)$ est vraie. Alors, x se présente sous la forme $f_{p_1, \dots, p_s}(y)$, avec $p_1, \dots, p_s \in P$ et $y \in F \cap \lambda$. Comme ce dernier ensemble est recouvert par les cubes λ_p , pour $p \in P$, le point y appartient à un cube $\lambda_{p_{s+1}}$, pour $p_{s+1} \in P$. Observons que ce cube est encore égal à $f_{p_{s+1}}(\lambda)$, de sorte que $x \in f_{p_1, \dots, p_{s+1}}(\lambda)$. De surcroît, le point x appartient à $f_{p_1, \dots, p_{s+1}}(F)$. Comme la dilatation $f_{p_1, \dots, p_{s+1}}$ est bijective, l'assertion $P(s+1)$ est prouvée. Le principe de récurrence garantit alors que l'inclusion

$$\lambda \cap \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} f_{p_1, \dots, p_q}(F) \subset \bigcup_{(p_1, \dots, p_s) \in P^s} f_{p_1, \dots, p_s}(F \cap \lambda)$$

est vraie, quel que soit l'entier naturel s . Prenons la masse des ensembles précédents, au sens de la mesure extérieure m_κ . Grâce à la dernière majoration établie, il vient

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad m_\kappa \left(\lambda \cap \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} f_{p_1, \dots, p_q}(F) \right) \leq ((1 + \gamma)\alpha)^s m_\kappa(\lambda).$$

Sur le cube λ , on peut clairement minorer m_κ par la mesure extérieure de Hausdorff $\mathcal{H}_{\kappa|\lambda|}^{g_{\beta,\varphi}}$ obtenue à l'aide de recouvrements par des ensembles de diamètre strictement inférieur à $\kappa|\lambda|$. Rappelons, d'une part, que $(1+\gamma)\alpha$ appartient à $[0, 1[$ et, d'autre part, que la mesure extérieure $\mathcal{H}_{\kappa|\lambda|}^{g_{\beta,\varphi}}$ conduit, quand κ tend vers 0, à la $g_{\beta,\varphi}$ -mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{g_{\beta,\varphi}}$. En faisant tendre l'entier naturel s vers l'infini, puis le réel κ vers 0, on obtient donc

$$\mathcal{H}^{g_{\beta,\varphi}} \left(\lambda \cap \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} f_{p_1, \dots, p_q}(F) \right) = 0.$$

Notons $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des cubes c -adiques de $\mathbb{R}^d$ de même génération que λ et, pour tout entier naturel n , appelons t_n la translation qui envoie le cube λ sur le cube ν_n . Si n_0 désigne un entier naturel, on a

$$\nu_{n_0} \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} t_n \circ f_{p_1, \dots, p_q}(F) \subset t_{n_0} \left(\lambda \cap \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} f_{p_1, \dots, p_q}(F) \right).$$

Sachant que la translation t_{n_0} préserve les ensembles de $g_{\beta,\varphi}$ -mesure de Hausdorff nulle, l'ensemble constituant le membre de gauche est de $g_{\beta,\varphi}$ -mesure nulle. Comme les cubes ν_{n_0} , pour $n_0 \in \mathbb{N}$, forment une partition de l'espace $\mathbb{R}^d$, il en résulte que

$$\mathcal{H}^{g_{\beta,\varphi}} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{(p_1, \dots, p_q) \in P^q} t_n \circ f_{p_1, \dots, p_q}(F) \right) = 0.$$

Cela contredit (4.13). En effet, les applications $t_n \circ f_{p_1, \dots, p_q}$, pour tout q -uplet $(p_1, \dots, p_q)$ d'éléments de P et tous entiers naturels q et n , forment une famille dénombrable de similitudes appartenant à l'ensemble D_c . La proposition 4.1 s'ensuit.

VI Preuve du théorème 4.1

Rappelons que, dans l'intégralité de cette section, l'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme supremum usuelle. Dans ce qui suit, I est un ensemble infini dénombrable et $(x_i, r_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}_d^0(I)$ désigne un système d'ubiquité relatif à un quadruplet $(\mu, \alpha, \beta, \varphi) \in \mathfrak{M} \times]0, \infty[\times]0, d] \times \Phi$. Notons une base $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, une fonction $\psi \in \Psi$ et une mesure $m \in \mathfrak{M}$ remplissant les conditions (i)-(iv) données dans la section III.

VI.1 Préliminaires

Considérons la mesure borélienne σ -finie sur $\mathbb{R}^d$, notée $\bar{m}$, obtenue à partir de m par périodisation : pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$,

$$\bar{m}(B) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} m((p + B) \cap [0, 1]^d).$$

Par construction, la mesure $\bar{m}$ est invariante par toutes les translations de vecteurs appartenant au réseau $\mathbb{Z}^d$ et elle coïncide avec m sur les boréliens de $[0, 1]^d$. De surcroît, d'après

l'assertion (i), la mesure $\bar{m}$ attribue tout d'abord une masse nulle au complémentaire dans $\mathbb{R}^d$ du borélien

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{Z}^d + \{x \in [0, 1]^d \mid \|x - x_i\| \leq r_i/2 \text{ pour une infinité de } i \in I\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p - x_i\| \leq r_i/2 \text{ pour une infinité de } (i, p) \in I \times \mathbb{Z}^d\}. \end{aligned}$$

Ensuite, en vertu de l'assertion (ii), il existe un borélien S du cube $[0, 1]^d$ dont le complémentaire dans $[0, 1]^d$ a une masse nulle, au sens de la mesure m , et qui vérifie : pour tout $x \in S$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $j \geq j(x)$ et tout $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$,

$$\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x) \implies m(\lambda_{j,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j,k}^c|).$$

Enfin, selon l'assertion (iii), on dispose d'un borélien Σ de $\mathbb{R}^d$ dont le complémentaire est de masse nulle au sens de $\bar{m}$ et qui vérifie : pour tout $x \in \Sigma$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $j \geq j(x)$ et tout $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$,

$$\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x \bmod \mathbb{Z}^d) \implies |\lambda_{j,k}^c|^{\alpha+\psi(|\lambda_{j,k}^c|)} \leq \mu(\lambda_{j,k}^c) \leq |\lambda_{j,k}^c|^{\alpha-\psi(|\lambda_{j,k}^c|)}$$

où $x \bmod \mathbb{Z}^d$ désigne l'unique élément du cube $[0, 1]^d$, dont toutes les coordonnées sont égales modulo 1 à celles de x .

Avant d'entamer la preuve du théorème 4.1, commençons par établir quelques lemmes. Le premier d'entre eux concerne la masse qu'attribue la mesure $m|_{[0,1]^d}$ aux images par des dilatations appartenant à D_c des ensembles introduits précédemment.

Lemme 4.1

Soit f une dilatation appartenant à l'ensemble D_c . Alors, $f(X) \cap S \cap f(\Sigma)$ est de mesure pleine dans le cube $[0, 1]^d$, au sens de la mesure m .

// On a tout d'abord clairement $m([0, 1]^d \setminus S) = 0$. Intéressons-nous ensuite à la mesure du complémentaire dans le cube $[0, 1]^d$ de l'ensemble $f(X)$. Par définition de l'ensemble D_c , il existe deux cubes c -adiques λ et λ' de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $0 < \langle \lambda \rangle_c \leq \langle \lambda' \rangle_c$, tels que la dilatation f envoie le cube λ sur le cube λ' . Sachant que le cube λ' est de génération strictement positive, on peut présenter $[0, 1]^d$ comme l'union disjointe de ses sous-cubes c -adiques ν qui vérifient $\langle \nu \rangle_c = \langle \lambda' \rangle_c$. Il en résulte que

$$m([0, 1]^d \setminus f(X)) = \sum_{\substack{\nu \subset [0, 1]^d \\ \langle \nu \rangle_c = \langle \lambda' \rangle_c}} m(\nu \setminus f(X)).$$

Considérons maintenant un sous-cube c -adique ν du cube $[0, 1]^d$ dont la génération est égale à celle de λ' . Alors, l'ensemble $f^{-1}(\nu)$ est un cube c -adique de génération égale à celle de λ , donc strictement positive. Il en va de même du borélien $t_\nu(f^{-1}(\nu))$ du cube $[0, 1]^d$, où t_ν désigne la translation qui envoie le cube de génération nulle $\omega_{f^{-1}(\nu)}(f^{-1}(\nu))$ sur le cube $\omega_\nu(\nu)$, c'est-à-dire sur $[0, 1]^d$. En outre, on observe que la dilatation f s'identifie à la composée $\omega_\nu^{-1} \circ \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} m(\nu \setminus f(X)) &= m_\nu(\nu \setminus \omega_\nu^{-1} \circ \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu(X)) \\ &= m_\nu \circ \omega_\nu^{-1}([0, 1]^d \setminus \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu(X)). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'assertion (iv) qui traite de son autosimilarité, la mesure m attribue une masse nulle au borélien $\nu \setminus f(X)$ si et seulement si elle attribue une masse nulle au borélien $[0, 1[^d \setminus \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu(X)$. On a cependant

$$m([0, 1[^d \setminus \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu(X)) = m^{t_\nu(f^{-1}(\nu))}(t_\nu(f^{-1}(\nu) \setminus X))$$

de sorte que m attribue une masse nulle au borélien $[0, 1[^d \setminus \omega_{t_\nu(f^{-1}(\nu))} \circ t_\nu(X)$ si et seulement si elle attribue une masse nulle au borélien $t_\nu(f^{-1}(\nu) \setminus X)$ du cube $[0, 1[^d$. Sachant que la mesure $\bar{m}$, d'une part, coïncide avec m sur un tel borélien et, d'autre part, est invariante par toutes les translations de vecteur appartenant à $\mathbb{Z}^d$, donc en particulier par la translation t_ν , on peut écrire

$$m(t_\nu(f^{-1}(\nu) \setminus X)) = \bar{m}(f^{-1}(\nu) \setminus X) \leq \bar{m}(\mathbb{R}^d \setminus X) = 0.$$

Il en ressort que la mesure m attribue une masse nulle au borélien $\nu \setminus f(X)$, quel que soit le sous-cube c -adique ν du cube $[0, 1[^d$ dont la génération est égale à celle de λ' . On en déduit que $m([0, 1[^d \setminus f(X)) = 0$. Enfin, de la même manière, on prouve que $m([0, 1[^d \setminus f(\Sigma)) = 0$. Utiliser la σ -additivité de la mesure m achève la preuve du lemme. //

Afin de pallier les difficultés dues à certains effets de bord, il est nécessaire d'introduire, lorsque un réel strictement positif M est fixé, une variante faible de l'ensemble $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha}$ indexant les boules $B(x_i, r_i)$ auxquelles la mesure μ attribue une masse de l'ordre de r_i^α . Ainsi, notons $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$ l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels il existe $\ell \in \{-1, 0, 1\}^d$ vérifiant

$$\begin{aligned} M^{-1}(2r_i)^{\alpha+\psi(2r_i)} &\leq \mu_{[0,1]^d}(B(\ell + x_i, r_i)) \\ &\leq \mu_{[0,1]^d}(\bar{B}(\ell + x_i, r_i)) \leq M(2r_i)^{\alpha-\psi(2r_i)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En outre, pour tout réel t supérieur à 1, sur le modèle de l'ensemble E_t défini par (4.4), introduisons l'ensemble

$$\begin{aligned} E_t^w &= \mathbb{Z}^d + \{x \in [0, 1]^d \mid \|x - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } i \in I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p - x_i\| < r_i^t \text{ pour une infinité de } (i, p) \in I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w} \times \mathbb{Z}^d\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

obtenu en remplaçant l'ensemble $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha}$ par sa variante faible $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$ dans l'expression (4.4). Pour établir la partie du théorème 4.1 qui concerne l'ensemble E_t , c'est-à-dire pour montrer que cet ensemble appartient à la classe $G^{g,\varphi}(\mathbb{R}^d)$ si $t = 1$ et à la classe $G^{g\beta, 2\varphi+\phi}(\mathbb{R}^d)$ pour toute fonction $\phi \in \Phi$ si $t > 1$, il suffit en fait de prouver que E_t^w appartient à ces mêmes classes. C'est l'objet du résultat suivant.

Lemme 4.2

Soient $M > 0$ et $t \geq 1$ deux réels et g une jauge de $\mathfrak{D}_d$. On suppose que l'ensemble E_t^w défini par (4.17) appartient à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$. Alors, l'ensemble E_t donné par (4.4) appartient également à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$.

// Observons tout d'abord que les ensembles E_t^w et E_t sont des G_δ , car en considérant une énumération de $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w} \times \mathbb{Z}^d$ et $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha} \times \mathbb{Z}^d$ respectivement, on peut les écrire comme une limite supérieure de boules ouvertes. Le complémentaire dans $\mathbb{R}^d$ de l'ouvert

$$F = \mathbb{Z}^d +]0, 1[^d = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Z}^d} (q +]0, 1[^d) \quad (4.18)$$

est de mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ nulle. D'après la proposition 3.6 établie dans le chapitre 3, l'ouvert F appartient à la classe $G^g(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 3.1 également énoncé dans le chapitre 3 et qui garantit la stabilité par intersection dénombrable de cette classe, il vient $E_t^w \cap F \in G^g(\mathbb{R}^d)$. D'après le point (v) de la proposition 3.1 du chapitre 3, il suffit de prouver que E_t contient $E_t^w \cap F$.

Prenons un point x de l'intersection $E_t^w \cap F$. Il existe alors une suite injective $(i_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w} \times \mathbb{Z}^d$ telle que $\|x - p_n - x_{i_n}\| < r_{i_n}^t$ pour tout entier naturel n . Écrivons de plus $x = q + \dot{x}$, avec $q \in \mathbb{Z}^d$ et $\dot{x} \in]0, 1[^d$. Comme l'ensemble $]0, 1[^d$ est ouvert, on peut trouver un réel strictement positif δ vérifiant $B(\dot{x}, 2\delta) \subset]0, 1[^d$. Pour tout entier n assez grand, on a $r_{i_n}^t < \delta$, de sorte que

$$p_n + x_{i_n} \in B(x, r_{i_n}^t) \subset q + B(\dot{x}, \delta) \subset q +]0, 1[^d.$$

Il en ressort que p_n coïncide avec q , puis que x_{i_n} appartient à la boule ouverte $B(\dot{x}, \delta)$. On en déduit que la boule $\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n})$ est incluse dans la boule $B(\dot{x}, 2\delta)$, donc dans le cube ouvert $]0, 1[^d$. Comme $i_n \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$, il existe $\ell \in \{-1, 0, 1\}^d$ rendant vrai l'encadrement (4.16). Supposons que ℓ possède une coordonnée non nulle. La boule $B(\ell + x_{i_n}, r_{i_n})$ est donc incluse dans le cube ouvert $\ell +]0, 1[^d$ et ce cube présente une intersection vide avec $[0, 1]^d$. Comme la mesure μ est supportée par $[0, 1]^d$, il vient $\mu(B(\ell + x_{i_n}, r_{i_n})) = 0$. D'après l'encadrement (4.16), il s'ensuit que $(2r_{i_n})^{\alpha + \psi(2r_{i_n})}$ est nul. Cela offre une contradiction. Ainsi, $\ell = (0, \dots, 0)$, puis

$$\begin{aligned} M^{-1}(2r_{i_n})^{\alpha + \psi(2r_{i_n})} &\leq \mu_{[0, 1]^d}(B(x_{i_n}, r_{i_n})) \\ &\leq \mu_{[0, 1]^d}(\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n})) \leq M(2r_{i_n})^{\alpha - \psi(2r_{i_n})}. \end{aligned}$$

Comme la boule $\bar{B}(x_{i_n}, r_{i_n})$ est incluse dans $[0, 1]^d$, on retrouve l'encadrement (4.2), si bien que $i_n \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha}$. On en déduit que le point x appartient à l'ensemble E_t . D'où le lemme. //

Prenons désormais une dilatation f appartenant à l'ensemble D_c et désignons par $|f|$ son rapport. Rappelons que $|f|$ est inférieur à 1. Le résultat préliminaire suivant s'apparente au lemme 4.1 de [8]. Il précise quelques propriétés des points constituant l'intersection $]0, 1[^d \cap f(X) \cap S \cap f(\Sigma)$. Signalons que cette intersection est de mesure pleine dans $]0, 1[^d$, d'après le lemme 4.1.

Lemme 4.3

Notons $M = \max(3^d c^\alpha, 3^d c^d, 2^{1+3\alpha} c^\alpha)$. Soient f une dilatation appartenant à l'ensemble D_c et z un élément de $]0, 1[^d \cap f(X) \cap S \cap f(\Sigma)$. Alors, il existe un sous-ensemble infini $I_f(z)$ de $I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ tel que, pour tout $i \in I_f(z)$, les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

- il existe $p \in \mathbb{Z}^d$ pour lequel $\|f^{-1}(z) - p - x_i\| \leq r_i/2$;
- on a $\bar{B}(z, 2|f|r_i) \subset]0, 1[^d$ et $m(\bar{B}(z, 2|f|r_i)) \leq M g_{\beta, \varphi}(4|f|r_i)$.

// Commençons par poser $x = f^{-1}(z)$ et $\dot{x} = x \bmod \mathbb{Z}^d$. Comme $g_{\beta, \varphi} \in \mathfrak{D}_d$ et $\psi \in \Psi$ et en vertu de la définition des ensembles S et Σ , il existe un entier

naturel j_0 tel que la fonction $r \mapsto g_{\beta,\varphi}(r)/r^d$ décroît sur $]0, c^{-j_0}[$, la fonction $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ décroît sur $]0, 8c^{-j_0+1}[$, l'inégalité $(8cr)^{\psi(8cr)} \leq 2r^{\psi(r)}$ est vraie pour $r \in]0, c^{-j_0}[$ et pour tout entier $j \geq j_0$ et tout $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$, on a $m(\lambda_{j,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j,k}^c|)$, dès lors que $\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(z)$, et

$$|\lambda_{j,k}^c|^{\alpha+\psi(|\lambda_{j,k}^c|)} \leq \mu(\lambda_{j,k}^c) \leq |\lambda_{j,k}^c|^{\alpha-\psi(|\lambda_{j,k}^c|)}$$

dès lors que $\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(\dot{x})$. Par ailleurs, en vertu de la définition de l'ensemble X , il existe un sous-ensemble infini I_1 de I tel que, pour tout $i \in I_1$, il existe un élément p de $\mathbb{Z}^d$ vérifiant $x \in \bar{B}(p + x_i, r_i/2)$. En outre, sachant que $z \in]0, 1[^d$, il existe un sous-ensemble infini I_2 de I_1 tel que, pour tout $i \in I_2$, on a simultanément $4r_i \leq c^{-j_0}$ et $\bar{B}(z, 2|f|r_i) \subset]0, 1[^d$.

Soit $i \in I_2$. Appelons j_1 le plus grand entier vérifiant $4|f|r_i \leq c^{-j_1}$. Observons que $c^{-j_0} \geq 4r_i \geq 4|f|r_i > c^{-j_1-1}$, si bien que l'entier j_1 est supérieur à j_0 . Ainsi, pour tout k de l'ensemble $\{0, \dots, c^{j_1} - 1\}^d$ vérifiant $\lambda_{j_1,k}^c \subset 3\lambda_{j_1}^c(z)$, on a $m(\lambda_{j_1,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j_1,k}^c|)$. Sachant que la boule fermée $\bar{B}(z, 2|f|r_i)$ est incluse dans $3\lambda_{j_1}^c(z)$, il vient

$$\begin{aligned} m(\bar{B}(z, 2|f|r_i)) &\leq \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, c^{j_1}-1\}^d \\ \lambda_{j_1,k}^c \subset 3\lambda_{j_1}^c(z)}} m(\lambda_{j_1,k}^c) \leq 3^d g_{\beta,\varphi}(c^{-j_1}) \\ &\leq (3c)^d g_{\beta,\varphi}(4|f|r_i) \end{aligned}$$

car la fonction $r \mapsto g_{\beta,\varphi}(r)/r^d$ décroît sur $]0, c^{-j_0}[$.

Appelons maintenant j_2 le plus petit entier naturel vérifiant $c^{-j_2} \leq r_i/4$ et j_3 le plus grand entier naturel vérifiant $2r_i \leq c^{-j_3}$. Par construction, on dispose de la série d'inégalités $j_2 \geq j_3 \geq j_0$. Il en ressort, d'une part, que $\mu(\lambda_{j_2}^c(\dot{x})) \geq (c^{-j_2})^{\alpha+\psi(c^{-j_2})}$ et, d'autre part, que pour tout élément k de l'ensemble $\{0, \dots, c^{j_3} - 1\}^d$, on a $\mu(\lambda_{j_3,k}^c) \leq (c^{-j_3})^{\alpha-\psi(c^{-j_3})}$, dès lors que $\lambda_{j_3,k}^c \subset 3\lambda_{j_3}^c(\dot{x})$. Comme i appartient à I_2 , il appartient en particulier à I_1 , de sorte qu'il existe un élément p du réseau $\mathbb{Z}^d$ pour lequel $x \in \bar{B}(p + x_i, r_i/2)$. Comme x_i est dans $[0, 1]^d$ et r_i est inférieur à $c^{-j_0}/4 \leq 1/4$, la boule fermée $\bar{B}(x_i, r_i/2)$ est incluse dans le cube $3[0, 1]^d$. Étant donné que cette boule contient $x - p$, il existe $\ell \in \{-1, 0, 1\}^d$ tel que $x - p \in -\ell + [0, 1]^d$. Ainsi, le point $\dot{x}$ s'identifie à $x - p + \ell$ et appartient à la boule $\bar{B}(\ell + x_i, r_i/2)$. En conséquence, $\lambda_{j_2}^c(\dot{x}) \subset B(\ell + x_i, r_i) \subset \bar{B}(\ell + x_i, r_i) \subset 3\lambda_{j_3}^c(\dot{x})$, puis

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_{j_2}^c(\dot{x})) &\leq \mu_{[0,1]^d}(B(\ell + x_i, r_i)) \\ &\leq \mu_{[0,1]^d}(\bar{B}(\ell + x_i, r_i)) \leq \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, c^{j_3}-1\}^d \\ \lambda_{j_3,k}^c \subset 3\lambda_{j_3}^c(\dot{x})}} \mu(\lambda_{j_3,k}^c). \end{aligned}$$

D'après les inégalités énoncées auparavant, on en déduit que

$$\begin{aligned} (c^{-j_2})^{\alpha+\psi(c^{-j_2})} &\leq \mu_{[0,1]^d}(B(\ell + x_i, r_i)) \\ &\leq \mu_{[0,1]^d}(\bar{B}(\ell + x_i, r_i)) \leq 3^d (c^{-j_3})^{\alpha-\psi(c^{-j_3})}. \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ décroît sur $]0, 8c^{-j_0+1}[$. On peut donc majorer par $3^d c^{\alpha} (2r_i)^{\alpha-\psi(2r_i)}$ le membre de droite de l'encadrement précédent, du fait que $c^{-j_3-1} < 2r_i \leq c^{-j_3}$. De plus, $(8cr)^{\psi(8cr)} \leq 2r^{\psi(r)}$ pour

tout $r \in]0, c^{-j_0}]$. On peut minorer par $(2r_i)^{\alpha+\psi(2r_i)}/(2(8c)^\alpha)$ le membre de gauche de l'encadrement qui précède car $2r_i < 8c^{-j_2+1}$. On forme alors l'encadrement (4.16). Pour achever la preuve du lemme, il suffit prendre pour ensemble $I_f(z)$ l'ensemble I_2 défini précédemment. //

VI.2 Preuve du théorème 4.1

Munis des lemmes établis dans la partie précédente, nous sommes en mesure de prouver le théorème 4.1 avec $M = \max(3^d c^\alpha, 3^d c^d, 2^{1+3\alpha} c^\alpha) \geq 1$. Commençons par traiter le cas de l'ensemble E_t défini par (4.4). En vertu du lemme 4.2, il suffit en fait de montrer que l'ensemble E_t^w défini par (4.17) appartient à la classe $G^{g_{\beta,\varphi}}(\mathbb{R}^d)$ si $t = 1$ et à la classe $G^{g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}}(\mathbb{R}^d)$ pour toute fonction $\phi \in \Phi$, si $t > 1$. De plus, la proposition 4.1 garantit qu'il suffit pour cela d'avoir respectivement

$$\mathcal{H}^{g_{\beta,\varphi}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(E_1^w)\right) > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(E_t^w)\right) > 0 \quad (4.19)$$

pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de dilatations de D_c . Prenons donc une telle suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis établissons (4.19). Les méthodes utilisées diffèrent notablement selon que t est égal ou strictement supérieur à 1. C'est pourquoi nous traitons séparément ces deux cas.

VI.2.a Cas où t est égal à 1

Fixons un entier naturel n . Du fait que f_n est une dilatation appartenant à D_c , le lemme 4.1 permet d'affirmer que l'ensemble $]0, 1[^d \cap f_n(X) \cap S \cap f_n(\Sigma)$ est de mesure pleine dans le cube ouvert $]0, 1[^d$, au sens de la mesure m . De surcroît, en vertu du lemme 4.3, cet ensemble est inclus dans $f_n(E_1^w)$. En conséquence, le borélien A du cube ouvert $]0, 1[^d$ qui est donné par

$$A =]0, 1[^d \cap S \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} (f_n(X) \cap f_n(\Sigma))$$

est de mesure pleine dans $]0, 1[^d$, au sens de la mesure borélienne m et il est inclus dans l'ensemble $f_n(E_1^w)$, quel que soit l'entier naturel n . Intéressons-nous au comportement de la mesure m au voisinage de chaque point x de A . Un tel point x appartient en particulier à $S \cap]0, 1[^d$. Ainsi, il existe un entier naturel $j(x)$ tel que, pour tout entier naturel j supérieur à $j(x)$ et tout élément k de $\{0, \dots, c^j - 1\}^d$,

$$\lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x) \implies m(\lambda_{j,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j,k}^c|).$$

Reprenons maintenant certains arguments de la preuve du lemme 4.3. Fixons un réel r_0 dans $]0, c^{-j(x)}/2]$ tel que $B(x, r_0) \subset]0, 1[^d$ et la fonction $r \mapsto g_{\beta,\varphi}(r)/r^d$ décroisse sur l'intervalle $]0, 2cr_0[$. Appelons j le plus grand entier naturel vérifiant $2r_0 \leq c^{-j}$. Alors $c^{-j(x)} \geq 2r_0 > c^{-j-1}$, de sorte que j est supérieur à $j(x)$. Comme la boule ouverte $B(x, r_0)$ est incluse dans $3\lambda_j^c(x)$, on peut écrire

$$m(B(x, r_0)) \leq \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d \\ \lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x)}} m(\lambda_{j,k}^c) \leq 3^d g_{\beta,\varphi}(c^{-j}) \leq (3c)^d g_{\beta,\varphi}(2r_0)$$

car la fonction $r \mapsto g_{\beta,\varphi}(r)/r^d$ décroît sur $]0, 2cr_0[$. Il s'ensuit que, pour tout élément x du borélien A , la limite supérieure, quand r tend vers 0, du quotient $m(B(x, r))/g_{\beta,\varphi}(2r)$ est majorée par $(3c)^d$. Pour conclure, il convient de faire appel à une version locale du principe de distribution de masse, cf. [64, p. 67]. Rappelons que ce principe est évoqué dans la section III du chapitre 2.

Lemme 4.4 (principe de distribution de masse, version locale)

Soient F un borélien de $\mathbb{R}^d$ et π une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}^d$. Considérons une jauge g de $\mathfrak{D}_d$, qui vérifie

$$\exists C \in]0, \infty[\quad \forall x \in F \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\pi(B(x, r))}{g(2r)} \leq C.$$

Alors, la g -mesure de Hausdorff de l'ensemble F est minorée par $\pi(F)/(4^d C)$. En particulier, si la mesure π attribue une masse non nulle au borélien F , la g -mesure de ce dernier est strictement positive.

// Observons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \pi(B(x, r))$ est semi-continue inférieurement, quel que soit le réel strictement positif r . Il en résulte que la fonction

$$x \mapsto \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\pi(B(x, r))}{g(2r)}$$

est borélienne, en tant que limite supérieure d'une famille dénombrable de fonctions boréliennes. Soient deux réels $\varepsilon > 0$ et $C' > C$. D'après ce qui précède, le sous-ensemble $F_{\varepsilon, C'}$ de F défini par

$$F_{\varepsilon, C'} = \bigcap_{r \in]0, 2\varepsilon]} \{x \in F \mid \pi(B(x, r)) \leq C' g(2r)\}$$

est un borélien de E , quitte à prendre ε assez petit (on peut alors en fait se restreindre à prendre l'intersection sur les rationnels de l'intervalle $]0, \varepsilon]$, puisque g est continue au voisinage de l'origine). Prenons un ε -recouvrement $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de F . A fortiori, c'est un ε -recouvrement de $F_{\varepsilon, C'}$. Notons P l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $F_{\varepsilon, C'} \cap U_p \neq \emptyset$. Pour tout $p \in P$, notons x_p un point de l'intersection $F_{\varepsilon, C'} \cap U_p$. L'ensemble $F_{\varepsilon, C'}$ est alors recouvert par les boules ouvertes de centre x_p et de rayon $2|U_p|$, lorsque p décrit P . En outre, pour tout $p \in P$, comme x_p appartient à l'ensemble $F_{\varepsilon, C'}$, on a

$$\pi(B(x_p, 2|U_p|)) \leq C' g(4|U_p|) \leq 4^d C' g(|U_p|).$$

La dernière majoration est vraie, quitte à prendre ε assez petit pour exploiter la décroissance au voisinage de l'origine de la fonction $r \mapsto g(r)/r^d$. Ainsi,

$$\pi(F_{\varepsilon, C'}) \leq \sum_{p \in P} \pi(B(x_p, 2|U_p|)) \leq 4^d C' \sum_{p \in P} g(|U_p|) \leq 4^d C' \sum_{p=0}^{\infty} g(|U_p|).$$

En prenant l'infimum sur l'ensemble des ε -recouvrements $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de l'ensemble F dans le membre de droite, puis en le majorant par son supremum sur $\varepsilon > 0$, on obtient finalement $\mathcal{H}^g(F) \geq \pi(F_{\varepsilon, C'})/(4^d C')$. Pour conclure,

il suffit, d'une part, d'observer que le borélien $F_{\varepsilon, C'}$ croît vers F quand ε décroît vers 0, ce qui garantit que $\pi(F_{\varepsilon, C'})$ tend vers $\pi(F)$ (puisque π est une mesure borélienne) et, d'autre part, de faire décroître le réel C' vers C . //

Le résultat précédent garantit en particulier que le borélien A est de $g_{\beta, \varphi}$ -mesure de Hausdorff strictement positive. Sachant que A contient l'intersection sur $n \in \mathbb{N}$ des ensembles $f_n(E_1^w)$, on obtient l'inégalité de gauche de (4.19).

VI.2.b Cas où t est strictement supérieur à 1

Soit ϕ une fonction de Φ . Prouver (4.19) est plus délicat dans le cas où le réel t est strictement supérieur à 1. Nous construisons simultanément un ensemble de Cantor généralisé K et une mesure borélienne de probabilité π , qui est portée par K , tels que

$$K \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(E_t^w) \quad \text{et} \quad \exists C \in]0, \infty[\quad \forall B \quad \pi(B) \leq C g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}(|B|) \quad (4.20)$$

où B désigne une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ dont le diamètre est assez petit. Supposons l'existence d'un tel ensemble K et d'une telle mesure π . Le principe de distribution de masse (c'est-à-dire le lemme 4.4) conduit alors à (4.19) donc au théorème 4.1.

Avant de procéder à la construction de l'ensemble de Cantor K et de la mesure π , rappelons que l'ensemble S , défini au début de cette section, est de mesure pleine dans le cube ouvert $]0, 1[^d$, au sens de la mesure m . Cependant, cet ensemble s'écrit comme l'union croissante sur l'entier naturel j_0 des ensembles

$$S_{j_0}^\lambda = \left\{ x \in \text{int } \lambda \left| \begin{array}{l} \forall j \geq \langle \lambda \rangle_c + j_0 \quad \forall k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d \\ \lambda_{j,k}^c \subset 3\lambda_j^c(x) \cap \lambda \implies m^\lambda(\lambda_{j,k}^c) \leq g_{\beta, \varphi} \left(\frac{|\lambda_{j,k}^c|}{|\lambda|} \right) \end{array} \right. \right\}$$

dans le cas particulier où λ désigne le cube c -adique $[0, 1[^d$. Dès lors, il existe un entier j_0 tel que $m(S_{j_0}^{[0, 1[^d}) \geq |m|/2$, où $|m| = m([0, 1[^d) > 0$, et tel que la fonction $r \mapsto r^{-\varphi(r)}$ décroisse sur l'intervalle $]0, c^{-j_0+1}]$, car $\varphi \in \Phi$. Rappelons en outre que $m^\lambda = m \circ \omega_\lambda$, pour tout sous-cube c -adique λ de $[0, 1[^d$. En conséquence, $|m^\lambda| = m^\lambda(\text{int } \lambda) = |m|$. De plus, j_0 est tel que $m^\lambda(S_{j_0}^\lambda) \geq |m^\lambda|/2 = |m|/2$ quel que soit λ . Par ailleurs, comme $\phi/(1+d) \in \Phi$, il existe un entier $j_1 \geq j_0$ tel que la fonction $r \mapsto r^{-\phi(r)/(1+d)}$ décroisse et soit supérieure à c^{j_0} sur $]0, c^{-j_1}]$ et que la fonction $g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)} \in \mathfrak{D}_d$ croisse sur le même intervalle. Enfin, posons $(n_q)_{q \in \mathbb{N}^*} = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$.

La preuve fait de surcroît appel au théorème de recouvrement de Besicovitch. Son énoncé est le suivant et sa preuve figure dans [125], p. 30, par exemple.

Théorème 4.2 (Besicovitch)

Soit d un entier naturel non nul. Pour tout sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}^d$ et toute famille $\mathcal{B}$ de boules fermées telle que chaque point de A est le centre d'une boule appartenant à $\mathcal{B}$, il existe des sous-familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{Q(d)}$ de $\mathcal{B}$ telles que :

- pour tout entier $\ell \in \{1, \dots, Q(d)\}$, les boules appartenant à $\mathcal{B}_\ell$ sont disjointes ;
- les boules appartenant aux $\mathcal{B}_\ell$, pour $\ell \in \{1, \dots, Q(d)\}$, recouvrent A .

Dans ce qui précède, $Q(d)$ désigne un entier naturel non nul qui ne dépend que de la dimension d .

Détaillons maintenant la construction de l'ensemble de Cantor K et de la mesure π . Nous expliquons tout d'abord les deux premières étapes de la construction de K . Nous récapitulons ensuite les propriétés vérifiées à chaque étape par les cubes destinés à former K . Enfin, nous contrôlons la masse attribuée par π aux boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ en fonction de leur diamètre. Pour amorcer la construction de K et π , posons $G_0 = \{[0, 1]^d\}$, ainsi que $\pi([0, 1]^d) = 1$.

Première étape Comme la fonction $\phi/(1+d)$ appartient à Φ , il existe un entier j supérieur à $\max(j_0 + 5, j_1, (\log_c 2)/(t-1))$ tel que

$$\forall r \in]0, c^{-j}] \quad r^{-\phi(r)/(1+d)} \geq M \kappa^{\beta/t} \frac{4Q(d)}{|m|} \quad (4.21)$$

où $\kappa = 6c^2 4^t$. Comme f_{n_1} est une dilatation appartenant à D_c , le lemme 4.1 assure que $E^{[0,1]^d} = f_{n_1}(X) \cap S_{j_0}^{[0,1]^d} \cap f_{n_1}(\Sigma)$ est un ensemble de mesure pleine dans $S_{j_0}^{[0,1]^d}$, au sens de la mesure m . Cette mesure attribue donc à $E^{[0,1]^d}$ une masse supérieure à $|m|/2$. Grâce au lemme 4.3, on peut associer à tout point $z \in E^{[0,1]^d}$ un indice $i_z \in I_{f_{n_1}}(z) \subset I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$ tel que $2r_{i_z} \leq c^{-j}$. En outre, les assertions suivantes sont vérifiées :

- $\exists p_z \in \mathbb{Z}^d \quad \|f_{n_1}^{-1}(z) - p_z - x_{i_z}\| \leq r_{i_z}/2$;
- $B_z = \bar{B}(z, 2|f_{n_1}|r_{i_z}) \subset]0, 1[^d$ et $m(B_z) \leq M g_{\beta,\varphi}(|B_z|)$.

Notons aussi F_z la boule ouverte de centre $f_{n_1}(p_z + x_{i_z})$ et de rayon $(|f_{n_1}|r_{i_z})^t$ et observons que cette boule est incluse à la fois dans la boule fermée B_z et dans l'image par la dilatation f_{n_1} de la boule ouverte $B(p_z + x_{i_z}, r_{i_z}^t)$.

Appliquons le théorème 4.2 à l'ensemble $E^{[0,1]^d}$ et aux boules B_z , pour $z \in E^{[0,1]^d}$. On peut donc trouver des familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{Q(d)}$ des points de $E^{[0,1]^d}$ telles que, d'une part, les boules B_z , pour $z \in \mathcal{B}_\ell$ et $\ell \in \{1, \dots, Q(d)\}$, recouvrent $E^{[0,1]^d}$ et, d'autre part, pour $\ell \in \{1, \dots, Q(d)\}$ fixé, les boules B_z , pour $z \in \mathcal{B}_\ell$, sont disjointes. Par conséquent,

$$\frac{|m|}{2} \leq m(E^{[0,1]^d}) \leq \sum_{i=1}^{Q(d)} m \left(\bigsqcup_{z \in \mathcal{B}_\ell} B_z \right).$$

Il existe donc un entier ℓ compris entre 1 et $Q(d)$ pour lequel la masse de l'union pour $z \in \mathcal{B}_\ell$ des boules B_z excède $|m|/(2Q(d))$. On peut alors extraire de $\mathcal{B}_\ell$ une sous-famille finie $\mathcal{Z}^{[0,1]^d}$ de points de $E^{[0,1]^d}$ telle que

$$m \left(\bigsqcup_{z \in \mathcal{Z}^{[0,1]^d}} B_z \right) \geq \frac{|m|}{4Q(d)}. \quad (4.22)$$

Considérons maintenant un point z appartenant à $\mathcal{Z}^{[0,1]^d}$ et notons λ_z un cube c -adique de génération minimale dont l'adhérence est incluse dans la boule F_z . Le diamètre du cube fermé λ_z est alors de l'ordre de celui de la boule ouverte F_z , comme l'indique le lemme élémentaire suivant.

Lemme 4.5

Soient x un point de $\mathbb{R}^d$ et r un réel strictement positif. Notons λ un cube c -adique de génération minimale dont l'adhérence est incluse dans la boule ouverte $B(x, r)$. On a alors $|\bar{\lambda}| \leq |B(x, r)| \leq 12c^2 |\bar{\lambda}|$.

// D'une part, la première inégalité est triviale, puisque le cube $\bar{\lambda}$ est inclus dans la boule $B(x, r)$. Notons d'autre part ℓ_0 (resp. ℓ_1) le plus petit (resp. le plus grand) entier naturel tel que $c^{-\ell_0} \leq \frac{r}{2}$ (resp. $2r \leq c^{-\ell_1}$). On dispose des inclusions $\overline{\lambda_{\ell_0}^c(x)} \subset B(x, r) \subset 3\lambda_{\ell_1}^c(x)$, de sorte que $\ell_0 \geq \langle \lambda \rangle_c$ (par minimalité de la génération de λ) et $|B(x, r)| \leq 3c^{-\ell_1}$. Cependant, on prouve aisément que $c^{-\ell_1}$ est inférieur à $4c^{-\ell_0+2}$. Le résultat s'ensuit. //

D'après ce lemme, on a en particulier $|\bar{\lambda}_z| \leq |F_z| \leq 12c^2|\bar{\lambda}_z|$. Il vient

$$\frac{1}{\kappa}|\bar{\lambda}_z| \leq |B_z|^t \leq \kappa|\bar{\lambda}_z|.$$

De surcroît, prenons z et z' deux points distincts appartenant à $\mathcal{Z}^{[0,1]^d}$. Alors, la distance entre $\bar{\lambda}_z$ et $\bar{\lambda}_{z'}$, notée $d(\bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{z'})$, vérifie l'inégalité

$$d(\bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{z'}) \geq \frac{1}{4} \max(|B_z|, |B_{z'}|). \quad (4.23)$$

En effet, cette distance est supérieure à celle entre les boules F_z et $F_{z'}$. Les centres de ces boules sont respectivement $f_{n_1}(p_z + x_{i_z})$ et $f_{n_1}(p_{z'} + x_{i_{z'}})$ et leurs rayons sont $(|f_{n_1}|r_{i_z})^t$ et $(|f_{n_1}|r_{i_{z'}})^t$. Par ailleurs, comme les boules B_z et $B_{z'}$ sont disjointes, leurs centres respectifs vérifient $\|z - z'\| \geq 2|f_{n_1}|(r_{i_z} + r_{i_{z'}})$. Cette distance est en outre majorée par

$$\begin{aligned} & \|z - f_{n_1}(p_z + x_{i_z})\| + \|z' - f_{n_1}(p_{z'} + x_{i_{z'}})\| + \|f_{n_1}(p_z + x_{i_z}) - f_{n_1}(p_{z'} + x_{i_{z'}})\| \\ & \leq |f_{n_1}| \left(\frac{r_{i_z}}{2} + \frac{r_{i_{z'}}}{2} \right) + \|f_{n_1}(p_z + x_{i_z}) - f_{n_1}(p_{z'} + x_{i_{z'}})\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la distance entre les boules F_z et $F_{z'}$ est minorée par

$$2|f_{n_1}|(r_{i_z} + r_{i_{z'}}) - |f_{n_1}| \left(\frac{r_{i_z}}{2} + \frac{r_{i_{z'}}}{2} \right) - |f_{n_1}|^t (r_{i_z}^t + r_{i_{z'}}^t) \geq |f_{n_1}|(r_{i_z} + r_{i_{z'}}).$$

Cette dernière inégalité provient du fait que $|f_{n_1}|r_{i_z}$ et $|f_{n_1}|r_{i_{z'}}$ sont tous deux inférieurs à c^{-j} et du fait que j est supérieur à $(\log_c 2)/(t-1)$. On en déduit la minoration (4.23) en observant que les boules B_z et $B_{z'}$ ont respectivement pour diamètre $4|f_{n_1}|r_{i_z}$ et $4|f_{n_1}|r_{i_{z'}}$.

Appelons G_1 la collection des cubes λ_z , pour $z \in \mathcal{Z}^{[0,1]^d}$. À un tel cube, encore noté λ , est associé la boule B_z , notée $\tilde{\lambda}$. D'après ce qui précède, pour tous cubes distincts λ et λ' de G_1 , on dispose des inégalités

$$\frac{1}{\kappa}|\bar{\lambda}| \leq |\tilde{\lambda}|^t \leq \kappa|\bar{\lambda}| \quad \text{et} \quad d(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}') \geq \frac{1}{4} \max(|\tilde{\lambda}|, |\tilde{\lambda}'|) \quad (4.24)$$

où κ est un réel strictement positif qui ne dépend que de la base c et du réel t . Les cubes fermés $\bar{\lambda}$, pour $\lambda \in G_1$, constituent la première étape de l'ensemble de Cantor généralisé K . Posons

$$\forall \lambda \in G_1 \quad \pi(\bar{\lambda}) = \frac{m(\tilde{\lambda})}{\sum_{\lambda' \in G_1} m(\tilde{\lambda}')}.$$

Fixons un cube λ de la collection G_1 . Par construction, la boule $\tilde{\lambda}$ associée à ce cube vérifie $\tilde{\lambda} \supset \bar{\lambda}$ et $m(\tilde{\lambda}) \leq M g_{\beta, \varphi}(|\tilde{\lambda}|)$. En vertu de (4.24) et du fait que $r \mapsto r^{-\varphi(r)}$ décroît sur $]0, c^{-j}]$

(car $j \geq j_0 - 1$), on obtient $m(\tilde{\lambda}) \leq M\kappa^{\beta/t} g_{\beta/t, \varphi}(|\bar{\lambda}|)$. De surcroît, la minoration (4.22) garantit que la somme lorsque λ' parcourt la collection G_1 des masses $m(\tilde{\lambda}')$ est supérieure à $|m|/(4Q(d))$. Ainsi,

$$\forall \lambda \in G_1 \quad \pi(\bar{\lambda}) \leq M\kappa^{\beta/t} \frac{4Q(d)}{|m|} g_{\beta/t, \varphi}(|\bar{\lambda}|).$$

Enfin, comme $|\bar{\lambda}| \leq c^{-j}$, l'inégalité (4.21) conduit à

$$\forall \lambda \in G_1 \quad \pi(\bar{\lambda}) \leq g_{\beta/t, \varphi + \phi/(1+d)}(|\bar{\lambda}|).$$

Rappelons en outre que, par construction, pour tout cube λ de la collection G_1 , il existe un indice $i \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ vérifiant $|\bar{\lambda}| \leq 2r_i < 1$ ainsi qu'un élément p du réseau $\mathbb{Z}^d$ tel que $\bar{\lambda} \subset f_{n_1}(B(p + x_i, r_i^t))$. De plus, les cubes qui constituent la collection G_1 sont tous de génération supérieure à $j_0 + 5$, à j_1 et $(\log_c 2)/(t - 1)$.

Deuxième étape Comme $\phi/(1 + d) \in \Phi$, il existe un entier $j \geq \langle \lambda \rangle_c + j_0 + 5$ tel que

$$\forall r \in]0, c^{-j}] \quad r^{-\phi(r)/(1+d)} \geq \max_{\lambda \in G_1} \left(M\kappa^{\beta/t} \frac{4Q(d)}{|m|} |\bar{\lambda}|^{-\beta} g_{\beta/t, \varphi + \phi/(1+d)}(|\bar{\lambda}|) \right). \quad (4.25)$$

Fixons un cube λ appartenant à la collection G_1 obtenue à la première étape. Comme f_{n_2} est une dilatation de D_c et comme les mesures m_λ et m^λ sont équivalentes, le lemme 4.1 assure que l'ensemble $E^\lambda = f_{n_2}(X) \cap S_{j_0}^\lambda \cap f_{n_2}(\Sigma)$ est de mesure pleine dans $S_{j_0}^\lambda$, au sens de la mesure m^λ . Cette mesure attribue donc à E^λ une masse supérieure à la moitié de $|m^\lambda|$. En adaptant la preuve du lemme 4.3, on peut associer à tout point $z \in E^\lambda$ un indice $i_z \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ vérifiant l'inégalité $2r_{i_z} \leq c^{-j}$, ainsi que les assertions suivantes :

- $\exists p_z \in \mathbb{Z}^d \quad \|f_{n_2}^{-1}(z) - p_z - x_{i_z}\| \leq r_{i_z}/2$;
- $B_z = \bar{B}(z, 2|f_{n_2}|r_{i_z}) \subset \text{int } \lambda$ et $m^\lambda(B_z) \leq M g_{\beta, \varphi}(|B_z|/|\bar{\lambda}|)$.

Notons de plus F_z la boule ouverte de centre $f_{n_2}(p_z + x_{i_z})$ et de rayon $(|f_{n_2}|r_{i_z})^t$ et remarquons que cette boule est simultanément incluse dans la boule fermée B_z et dans l'image par la dilatation f_{n_2} de la boule ouverte $B(p_z + x_{i_z}, r_{i_z}^t)$. En appliquant le théorème 4.2 à l'ensemble E^λ et aux boules B_z , pour $z \in E^\lambda$, on peut trouver une famille finie $\mathcal{Z}^\lambda$ de points de E^λ telle que

$$m^\lambda \left(\bigsqcup_{z \in \mathcal{Z}^\lambda} B_z \right) \geq \frac{|m^\lambda|}{4Q(d)}.$$

Fixons un point z de $\mathcal{Z}^\lambda$ et notons λ_z un cube c -adique de génération minimale dont l'adhérence est incluse dans la boule F_z . En reproduisant le raisonnement mené à la première étape, on prouve l'encadrement $|\bar{\lambda}_z|/\kappa \leq |B_z|^t \leq \kappa|\bar{\lambda}_z|$, ainsi que la minoration (4.23), lorsque z' est un autre point de $\mathcal{Z}^\lambda$.

Désignons par G_2^λ la collection des cubes λ_z , lorsque z parcourt l'ensemble $\mathcal{Z}^\lambda$. Un tel cube, encore noté ν , est associé à la boule B_z , notée $\tilde{\nu}$. On a $\bar{\nu} \subset \tilde{\nu} \subset \text{int } \lambda$ et, si ν et ν' sont deux cubes distincts figurant dans la collection G_2^λ , on a

$$\frac{1}{\kappa} |\bar{\nu}| \leq |\tilde{\nu}|^t \leq \kappa |\bar{\nu}| \quad \text{et} \quad d(\bar{\nu}, \bar{\nu}') \geq \frac{1}{4} \max(|\tilde{\nu}|, |\tilde{\nu}'|).$$

Appelons G_2 l'union, lorsque λ décrit l'ensemble G_1 , des collections G_2^λ précédemment obtenues. Les cubes fermés $\bar{\nu}$, pour ν parcourant G_2 , constituent la deuxième étape de l'ensemble de Cantor K . Posons

$$\forall \lambda \in G_1 \quad \forall \nu \in G_2^\lambda \quad \pi(\bar{\nu}) = \frac{m^\lambda(\tilde{\nu})}{\sum_{\nu' \in G_2^\lambda} m^\lambda(\tilde{\nu}')} \pi(\bar{\lambda}).$$

Soit λ un cube de G_1 . D'une part, la somme figurant au dénominateur est minorée par $|m^\lambda|/(4Q(d)) = |m|/(4Q(d))$. D'autre part, prenons un cube ν dans G_2^λ . Par construction, on a $m^\lambda(\tilde{\nu}) \leq M g_{\beta, \varphi}(|\tilde{\nu}|/|\bar{\lambda}|)$. On forme la majoration $m^\lambda(\tilde{\nu}) \leq M \kappa^{\beta/t} |\bar{\lambda}|^{-\beta} g_{\beta/t, \varphi}(|\bar{\nu}|)$, du fait que $|\tilde{\nu}|/|\bar{\lambda}| \geq |\tilde{\nu}| \geq |\bar{\nu}|$ et que $r \mapsto r^{-\varphi(r)}$ décroît sur $]0, c^{-j}/|\bar{\lambda}|]$ (car $j - \langle \lambda \rangle_c \geq j_0 - 1$). En reprenant la majoration de $\pi(\bar{\lambda})$ obtenue à la première étape, on peut écrire

$$\forall \lambda \in G_1 \quad \forall \nu \in G_2^\lambda \quad \pi(\bar{\nu}) \leq M \kappa^{\beta/t} \frac{4Q(d)}{|m|} |\bar{\lambda}|^{-\beta} g_{\beta/t, \varphi + \phi/(1+d)}(|\bar{\lambda}|) g_{\beta/t, \varphi}(|\bar{\nu}|).$$

Comme $|\bar{\nu}| \leq c^{-j}$, l'inégalité (4.25) assure que

$$\forall \nu \in G_2 \quad \pi(\bar{\nu}) \leq g_{\beta/t, \varphi + \phi/(1+d)}(|\bar{\nu}|).$$

Signalons de surcroît que, par construction, pour tous cubes $\lambda \in G_1$ et $\nu \in G_2^\lambda$, il existe un indice $i \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ vérifiant $|\bar{\nu}| \leq 2r_i < |\bar{\lambda}|$ ainsi qu'un élément p du réseau $\mathbb{Z}^d$ tel que $\bar{\nu} \subset f_{n_2}(B(p + x_i, r_i^t))$. En outre, pour tout cube λ de G_1 , les cubes qui forment la collection G_2^λ sont tous de génération supérieure à $\langle \lambda \rangle_c + j_0 + 5$ donc à j_1 et $(\log_c 2)/(t-1)$.

Bilan de la construction En répétant la démarche décrite précédemment, on construit récursivement une suite $(G_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de collections finies de cubes c -adiques dont les adhérences ont une π -masse et vérifient les propriétés suivantes.

- (A). On a $G_0 = \{[0, 1]^d\}$ et $\pi([0, 1]^d) = 1$. De plus l'ensemble $[0, 1]^d$ contient un nombre fini d'ensembles de la collection G_1 .
- (B). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, le tout cube $\nu \in G_q$ contient un nombre fini d'ensembles de G_{q+1} . En outre, il existe une boule fermée $\tilde{\nu}$ et un unique cube $\lambda \in G_{q-1}$, tels que $\bar{\nu} \subset \tilde{\nu} \subset \text{int } \lambda$ et $\langle \nu \rangle_c \geq \langle \lambda \rangle_c + j_0 + 5$. On dispose de l'encadrement $|\bar{\nu}|/\kappa \leq |\tilde{\nu}|^t \leq \kappa |\bar{\nu}|$. Le centre de la boule $\tilde{\nu}$ appartient à l'ensemble $S_{j_0}^\lambda$. Les boules $\tilde{\nu}$, pour $\nu \in G_q$, sont disjointes et, lorsque ν et ν' désignent deux cubes distincts de la collection G_q , on a $d(\bar{\nu}, \bar{\nu}') \geq \max(|\tilde{\nu}|, |\tilde{\nu}'|)/4$.
- (C). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, tout cube $\lambda \in G_q$ est de génération supérieure à j_1 .
- (D). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$ et tout cube $\nu \in G_q$ qui est inclus dans $\lambda \in G_{q-1}$, il existe $i \in I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ vérifiant $|\bar{\nu}| \leq 2r_i < |\bar{\lambda}|$ ainsi que $p \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\bar{\nu} \subset f_{n_q}(B(p + x_i, r_i^t))$.
- (E). Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$ et tout cube $\nu \in G_q$ qui est inclus dans $\lambda \in G_{q-1}$, on a

$$\pi(\bar{\nu}) = \frac{m^\lambda(\tilde{\nu})}{\sum_{\substack{\nu' \in G_q \\ \nu' \subset \lambda}} m^\lambda(\tilde{\nu}')} \pi(\bar{\lambda}) \leq \frac{4Q(d)}{|m|} m^\lambda(\tilde{\nu}) \pi(\bar{\lambda}) \quad \text{et} \quad \pi(\bar{\nu}) \leq g_{\beta/t, \varphi + \phi/(1+d)}(|\bar{\nu}|).$$

Ainsi, on obtient un ensemble de Cantor généralisé en posant

$$K = \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcup_{\lambda \in G_q} \bar{\lambda}$$

et π s'étend en une mesure borélienne de probabilité portée par K , cf. [64, prop. 1.7]. De plus, pour tout entier naturel n , le compact K est inclus dans l'ensemble $f_n(E_t^w)$, car l'énumération $(n_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ prend une infinité de fois la valeur n . L'inclusion figurant dans (4.20) est donc vérifiée.

Propriétés d'échelle de π Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ dont le diamètre $|B|$ est strictement inférieur à la plus petite des distances entre deux cubes distincts de la collection G_1 . Choisissons en outre $|B|$ assez petit pour que $g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)} \in \mathfrak{D}_d$ croisse sur $[0, |B|]$ et que $r^{-\varphi(r)}$ soit supérieur à 1 pour tout $r \in]0, |B|]$. Majorons la masse $\pi(B)$ en fonction de $|B|$. On peut supposer que B présente une intersection non vide avec l'ensemble de Cantor K et qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que B rencontre l'adhérence d'au moins deux cubes de la collection G_{q+1} , puisque la masse $\pi(B)$ serait nulle dans le cas contraire, en vertu de (E). Dès lors, on peut considérer $\lambda \in G_q$, avec $q \in \mathbb{N}$, le cube de diamètre maximal tel que B rencontre l'adhérence d'au moins deux cubes de G_{q+1} inclus dans λ . En vertu de la maximalité de $|\lambda|$, la boule B ne rencontre l'adhérence d'aucun autre cube appartenant à G_q , de sorte que $\pi(B) \leq \pi(\bar{\lambda})$. En outre, l'hypothèse sur $|B|$ impose que λ ne peut appartenir à G_0 .

Supposons d'abord que $|B| \geq |\bar{\lambda}|$. La fonction $g_{\beta/t, \varphi+\phi/(1+d)}$ croît sur $[0, |B|]$, donc

$$\pi(B) \leq \pi(\bar{\lambda}) \leq g_{\beta/t, \varphi+\phi/(1+d)}(|\bar{\lambda}|) \leq g_{\beta/t, \varphi+\phi/(1+d)}(|B|)$$

à l'aide du point (E) énoncé précédemment. Comme $|B|^{-\varphi(|B|)} \geq 1$, il s'ensuit que

$$\pi(B) \leq g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(|B|). \quad (4.26)$$

Supposons ensuite que le diamètre de la boule B est inférieur à $c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}|$. Notons $\nu_1, \dots, \nu_p$, avec $p \geq 2$, les cubes de G_{q+1} dont l'adhérence rencontre B . Grâce au point (E),

$$\pi(B) = \sum_{p'=1}^p \pi(B \cap \bar{\nu}_{p'}) \leq \frac{4Q(d)}{|m|} \pi(\bar{\lambda}) \sum_{p'=1}^p m^\lambda(\tilde{\nu}_{p'}).$$

Notons j le plus grand entier naturel pour lequel $|B| \leq c^{-j+1}$. Puisque B rencontre les cubes $\bar{\nu}_1$ et $\bar{\nu}_2$, le point (B) assure que le diamètre de B , qui est supérieur à $d(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2)$, est supérieur au quart du diamètre de $\tilde{\nu}_1$ et de $\tilde{\nu}_2$. Plus généralement, on dispose de la majoration $|\tilde{\nu}_{p'}| \leq 4|B| \leq c^{-j+3}$, quel que soit l'entier $p' \in \{1, \dots, p\}$. Le centre, noté z , de la boule $\tilde{\nu}_1$ appartient à l'ensemble $S_{j_0}^\lambda$, en vertu du point (B). La boule B rencontre le cube $\bar{\nu}_1$ en au moins un point y . On a en particulier $y \in \tilde{\nu}_1$, de sorte qu'on peut écrire $d(z, B) \leq \|z - y\| \leq |\tilde{\nu}_1| \leq c^{-j+3}$. Prenons maintenant un entier $p' \in \{2, \dots, p\}$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de la boule B , telle que $\|z - y_n\|$ tende vers $d(z, B)$ quand n tend vers l'infini. Pour tout entier naturel n , on a $d(y_n, \bar{\nu}_{p'}) \leq |B| \leq c^{-j+1}$, puisque le cube $\bar{\nu}_{p'}$ rencontre la boule B . Par ailleurs, on a $d(z, \bar{\nu}_{p'}) \leq \|z - y_n\| + d(y_n, \bar{\nu}_{p'})$. En faisant tendre l'entier n vers l'infini, on obtient $d(z, \bar{\nu}_{p'}) \leq d(z, B) + |B| \leq c^{-j}(c^3 + c) \leq c^{-j+4}$. On en déduit que

$$\bigcup_{p'=1}^p \tilde{\nu}_{p'} \subset \bar{B}(z, c^{-j+3}(c+1)) \subset 3\lambda_{j-6}^c(z) \cap \lambda.$$

Observons que $j - 6 \geq \langle \lambda \rangle_c + j_0$ et que $z \in S_{j_0}^\lambda$. Par définition de cet ensemble, pour tout $k \in \{0, \dots, c^{j-6} - 1\}^d$ vérifiant $\lambda_{j-6,k}^c \subset 3\lambda_{j-6}^c(z) \cap \lambda$, on dispose de la majoration $m^\lambda(\lambda_{j-6,k}^c) \leq g_{\beta,\varphi}(|\lambda_{j-6,k}^c|/|\bar{\lambda}|)$. Ainsi,

$$\sum_{p'=1}^p m^\lambda(\tilde{\nu}_{p'}) = m^\lambda\left(\bigsqcup_{p'=1}^p \tilde{\nu}_{p'}\right) \leq 3^d g_{\beta,\varphi}\left(\frac{c^{-j+6}}{|\bar{\lambda}|}\right) \leq 3^d c^{6\beta} \left(\frac{|B|}{|\bar{\lambda}|}\right)^\beta \left(\frac{c^{-j+6}}{|\bar{\lambda}|}\right)^{-\varphi\left(\frac{c^{-j+6}}{|\bar{\lambda}|}\right)}$$

puisque $c^{-j} < |B|$. Cependant, on a $|B| \leq c^{-j+6}/|\bar{\lambda}| \leq c^{-j_0+1}$. Comme $r \mapsto r^{-\varphi(r)}$ décroît sur $]0, c^{-j_0+1}]$, on peut majorer le dernier facteur par $|B|^{-\varphi(|B|)}$. Grâce au point (E), écrivons alors

$$\pi(B) \leq \frac{4Q(d)}{|m|} 3^d c^{6\beta} \left(\frac{|B|}{|\bar{\lambda}|}\right)^\beta |B|^{-\varphi(|B|)} g_{\beta/t, \varphi+\phi/(1+d)}(|\bar{\lambda}|).$$

Observons que $|B| \leq |\bar{\lambda}| \leq c^{-j_1}$, d'après le point (C). Comme $r \mapsto r^{-\varphi(r)-\phi(r)/(1+d)}$ décroît sur $]0, c^{-j_1}]$, on peut majorer $\pi(B)$ comme suit :

$$\pi(B) \leq \frac{4Q(d)}{|m|} 3^d c^{6\beta} g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(|B|) \underbrace{\left(\frac{|B|}{|\bar{\lambda}|}\right)^{\beta(1-\frac{1}{t})}}_{\leq 1}.$$

En conséquence, il existe un réel $C > 0$ qui ne dépend que de d, β et m tel que

$$\pi(B) \leq C g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(|B|). \quad (4.27)$$

Supposons enfin que le diamètre de la boule B vérifie $c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}| < |B| < |\bar{\lambda}|$. On peut recouvrir l'intersection de cette boule et de $\bar{\lambda}$ par au plus $c^{d(j_0+6)}$ cubes c -adiques de génération $j_0 + 5 + \langle \lambda \rangle_c$. Soit ν un tel cube. On observe que la majoration (4.27) reste vraie sur les boules fermées de $\mathbb{R}^d$ dont le diamètre est inférieur à $c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}|$. En particulier, si le cube fermé $\bar{\nu}$ rencontre l'adhérence d'au moins deux cubes de G_{q+1} inclus dans λ ,

$$\pi(\bar{\nu}) \leq C g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(|\bar{\nu}|)$$

grâce à la majoration (4.27). Si $\bar{\nu}$ rencontre l'adhérence d'un seul cube $\lambda' \in G_{q+1}$ inclus dans λ , on considère le sous-cube $\chi \in G_{q'}$, pour $q' \geq q+1$, de λ' de diamètre maximal tel que le cube fermé $\bar{\nu}$ rencontre l'adhérence d'au moins deux cubes de $G_{q'+1}$ inclus dans χ . Le diamètre de $\bar{\chi}$ est inférieur à celui de $\bar{\lambda}'$, donc inférieur à $c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}|$, en vertu du point (B). Ainsi, $|B| > |\bar{\nu}| \geq |\bar{\chi}|$ et (4.26) donne

$$\pi(\bar{\nu}) \leq g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(|\bar{\nu}|).$$

Enfin, si $\bar{\nu}$ ne rencontre l'adhérence d'aucun cube de G_{q+1} inclus dans λ , on a $\pi(\bar{\nu}) = 0$. En regroupant tous les cas possibles, il s'ensuit que

$$\pi(B) \leq \max(1, C) c^{d(j_0+6)} g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}(c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}|).$$

Rappelons que $c^{j_0} \leq (c^{-j_1})^{-\phi(c^{-j_1})/(1+d)} \leq |\bar{\lambda}|^{-\phi(|\bar{\lambda}|)/(1+d)} \leq |B|^{-\phi(|B|)/(1+d)}$, car la fonction $r \mapsto r^{-\phi(r)/(1+d)}$ décroît sur $]0, c^{-j_1}]$. En outre, $c^{-j_0-5}|\bar{\lambda}| < |B| < |\bar{\lambda}| \leq c^{-j_1}$, d'après le point (C), et la fonction $g_{\beta/t, 2\varphi+\phi/(1+d)}$ croît sur le même intervalle. Ainsi,

$$\pi(B) \leq \max(1, C) c^{6d} g_{\beta/t, 2\varphi+\phi}(|B|).$$

En regroupant les majorations de $\pi(B)$ précédemment établies, on obtient finalement la seconde partie de l'assertion (4.20), lorsque B est une boule ouverte de diamètre assez petit. Le principe de distribution de masse conduit alors à l'inégalité de droite de (4.19).

Finalement, l'ensemble E_t^w appartient à la classe $G^{g\beta, \varphi}(\mathbb{R}^d)$ si $t = 1$ et à la classe $G^{g\beta/t, 2\varphi+\phi}(\mathbb{R}^d)$, pour toute fonction $\phi \in \Phi$, si $t > 1$. D'après le lemme 4.2, l'ensemble E_t défini par (4.4) appartient aux mêmes classes. Cependant l'ensemble $\tilde{E}_t$ donné par (4.3) coïncide avec E_t sur tous les ouverts de $]0, 1[^d$, c'est-à-dire que $\tilde{E}_t \cap U = E_t \cap U$ pour tout ouvert U inclus dans $]0, 1[^d$. On en déduit que $\tilde{E}_t$ appartient à la classe $G^{g\beta, \varphi}(]0, 1[^d)$ si $t = 1$ et à la classe $G^{g\beta/t, 2\varphi+\phi}(]0, 1[^d)$, pour toute fonction $\phi \in \Phi$, si $t > 1$.

VI.3 Preuve des propositions 4.2 et 4.3

La preuve des propositions 4.2 et 4.3 est calquée sur celle du théorème 4.1. Il convient tout de même d'apporter les modifications explicitées ci-après.

VI.3.a Preuve de la proposition 4.2

Tout d'abord, on dispose d'un borélien Σ de $\mathbb{R}^d$ dont le complémentaire est de masse nulle, au sens de la mesure $\bar{m}$, et qui est tel que, pour tout $x \in \Sigma$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout entier $j \geq j(x)$,

$$\sup_{z \in [0,1]^d \cap 3\lambda_j^c(x \bmod \mathbb{Z}^d)} \max_{\substack{s \in \{1, \dots, d\} \\ b \in \{0, \dots, c-1\}}} |\sigma_{b,j}(z^s) - \pi_b^s| \leq \sqrt{\log c} \varsigma(c^{-j}). \quad (4.28)$$

Observons que $\bar{m}(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$, où F est l'ouvert défini par (4.18). Quitte à le remplacer par $\Sigma \cap F$, on peut supposer que le borélien Σ est inclus dans l'ouvert F .

On modifie ensuite le lemme 4.3 en remplaçant l'ensemble $I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ par I_{π}^{Dev} dans son énoncé. Prouvons rapidement que cette modification est licite (les notations employées ci-après sont celles de la preuve du lemme 4.3). D'après la définition de l'ensemble Σ , le point $\dot{x} = x - q = x \bmod \mathbb{Z}^d$ appartient au cube ouvert $]0, 1[^d$ et l'entier naturel j_0 est maintenant tel qu'on dispose de la majoration (4.28), pour tout entier j supérieur à j_0 . Prenons $i \in I_2$ et $p \in \mathbb{Z}^d$ tels que $x \in \bar{B}(p + x_i, r_i/2)$. En vertu de l'appartenance de x à l'ouvert F , on peut supposer (quitte à le priver de certains éléments tout en le laissant infini) que l'ensemble I_2 ne contient que des indices i pour lesquels la boule fermée $\bar{B}(p + x_i, r_i/2)$ s'inclut dans l'ouvert F . Il en ressort, d'une part, que $q = p$ et, d'autre part, que $\dot{x}$ appartient à la boule $\bar{B}(x_i, r_i/2)$. Notons j_1 le plus grand entier naturel pour lequel on a $r_i \leq c^{-j_1}$. Il vient alors simultanément $x_i \in \bar{B}(\dot{x}, r_i/2) \subset 3\lambda_{j_1}^c(\dot{x}) \cap [0, 1]^d$ et $j_1 \geq j_0$, si bien que

$$\max_{\substack{s \in \{1, \dots, d\} \\ b \in \{0, \dots, c-1\}}} |\sigma_{b,j_1}(x_i^s) - \pi_b^s| \leq \sqrt{\log c} \varsigma(c^{-j_1})$$

d'après la majoration (4.28). Cependant, l'entier j_1 s'identifie à $\lfloor -\log_c r_i \rfloor$, tandis qu'une étude rapide de la fonction ς indique que, quitte à augmenter j_0 , on peut majorer $\varsigma(c^{-j_1})$, par $2\varsigma(r_i)$. Finalement, $i \in I_{\pi}^{\text{Dev}}$.

On peut enfin reprendre la preuve du théorème 4.1, en remplaçant par I_{π}^{Dev} l'ensemble $I_{M, \psi}^{\mu, \alpha, w}$ partout où il apparaît. Ainsi, on prouve (4.19) avec E_t^{Dev} à la place de l'ensemble E_t^w , quel que soit $t \geq 1$. La proposition 4.2 s'ensuit.

VI.3.b Preuve de la proposition 4.3

Commençons par observer qu'il existe un borélien Σ de $\mathbb{R}^d$ dont le complémentaire est de masse nulle, au sens de la mesure $\bar{m}$, et qui est tel que, pour tout $x \in \Sigma$, il existe $j(x) \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout entier $j \geq j(x)$,

$$\sup_{z \in 3\lambda_j^c(x)} \left| \frac{1}{j} S_j^f(z) - P'_f(q) \right| \leq \frac{\kappa}{|q|} \varsigma(c^{-j}). \quad (4.29)$$

Modifions maintenant le lemme 4.3 en remplaçant l'ensemble $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$ par $I_{f,q}^{\text{Bir}}$ dans son énoncé. Montrons que cette modification est valable (nous reprenons les notations de la preuve du lemme 4.3). En vertu de la définition de l'ensemble Σ , l'entier naturel j_0 est désormais tel qu'on dispose de la majoration (4.29), pour tout entier j supérieur à j_0 . Soient $i \in I_2$ et $p \in \mathbb{Z}^d$ tels que $x \in \bar{B}(p + x_i, r_i/2)$. Notons j_1 le plus grand entier vérifiant $r_i \leq c^{-j_1}$. On a alors $p + x_i \in \bar{B}(x, r_i/2) \subset 3\lambda_{j_1}^c(x)$ et $j_1 \geq j_0$, en sorte que

$$\left| \frac{1}{j_1} S_{j_1}^f(x_i) - P'_f(q) \right| \leq \frac{\kappa}{|q|} \varsigma(c^{-j_1})$$

d'après la majoration (4.29) et la périodicité de f . Cependant, l'entier j_1 est égal à $\lfloor -\log_c r_i \rfloor$, tandis que, comme dans la preuve de la proposition 4.2, quitte à augmenter j_0 , on peut majorer $\varsigma(c^{-j_1})$ par $2\varsigma(r_i)$. Finalement, $i \in I_{f,q}^{\text{Bir}}$.

Il suffit alors de reprendre la preuve du théorème 4.1, en remplaçant par $I_{f,q}^{\text{Bir}}$ l'ensemble $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$ dès qu'il apparaît. En procédant ainsi, on prouve la minoration (4.19) avec E_t^{Bir} à la place de l'ensemble E_t^w , quel que soit $t \geq 1$. La proposition 4.3 s'ensuit.

Chapitre 5

Singularités des processus de Lévy et des séries lacunaires d'ondelettes

Contenu du chapitre

I	Présentation des résultats	111
II	Ensembles de singularités	117
II.1	Résultats préliminaires	118
II.2	Preuve du théorème 5.5	120
II.3	Preuves des théorèmes 5.2 et 5.3	126
III	Modules de continuité	127
IV	Séries lacunaires d'ondelettes	129
IV.1	Présentation du modèle	129
IV.2	Énoncé des résultats	130
IV.3	Preuve du théorème 5.6	133
IV.4	Preuve du théorème 5.7	138

I Présentation des résultats

Un processus de Lévy est un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires, presque sûrement issu de l'origine et dont les trajectoires sont presque sûrement continues à droite et limitées à gauche (càdlàg). Étant donné que nous nous intéressons à des propriétés trajectorielles, il nous est plus commode de supposer que le processus de Lévy considéré est directement construit sur l'espace de Skorokhod $\Omega = \mathbb{D}([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$ constitué des fonctions càdlàg définies sur l'intervalle $[0, \infty[$ et à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$), muni de la norme euclidienne.

L'ensemble Ω est muni de la topologie de Skorokhod et revêt ainsi une structure d'espace polonais, cf. [89]. On peut décrire cette topologie de la manière suivante : une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de Ω tend vers une fonction $f \in \Omega$ si et seulement si on peut trouver une suite de fonctions strictement croissantes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers l'identité sur $[0, \infty[$ et pour laquelle la suite $(f_n \circ \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f uniformément sur tous les compacts de $[0, \infty[$. Cette topologie a une importance théorique mais est rarement utilisée explicitement. Notons $\mathcal{F}$ la tribu borélienne associée. Il s'agit de la plus petite tribu rendant mesurables les applications $X_t : \omega \mapsto \omega_t$, pour $t \in [0, \infty[$. Le processus $X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$ s'appelle le processus des coordonnées de $(\Omega, \mathcal{F})$.

Notons en outre $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ le saut éventuel de X à l'instant $t \in]0, \infty[$ et désignons par S l'ensemble des instants où X saute effectivement, c'est-à-dire l'ensemble des réels $t \in]0, \infty[$ pour lesquels ΔX_t est non nul.

Définition

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que X est un processus de Lévy pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si pour tous réels positifs s et t , l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendant du processus $(X_v)_{v \in [0, t]}$ et a la même loi que X_s .

Dans tout ce chapitre sauf dans la dernière section, $\mathbb{P}$ désigne une mesure de probabilité sous laquelle X est un processus de Lévy. Il découle directement de la définition précédente que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. De plus, la loi de X_1 est infiniment divisible et, d'après la formule de Lévy-Khintchine [140, th. 8.1], la fonction caractéristique de X vérifie $\mathbb{E}[e^{i(\lambda|X_t)}] = e^{-t\psi(\lambda)}$ quels que soient $t \in [0, \infty[$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$, avec

$$\psi(\lambda) = i(a|\lambda) + \frac{1}{2}q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i(\lambda|x)} + i(\lambda|x)\mathbf{1}_{\{\|x\| < 1\}}) \pi(dx)$$

où a est un vecteur, q est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^d$ et π est une mesure sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\int \min(1, \|x\|^2) \pi(dx) < \infty$, qui est appelée mesure de Lévy.

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés de régularité ponctuelle des trajectoires du processus de Lévy. Dans ce but, rappelons que l'exposant de Hölder $h_X(t)$ du processus de Lévy X à l'instant $t \in [0, \infty[$ est défini dans la section I du chapitre 2. Cet exposant est facile à déterminer lorsque la mesure de Lévy π est de masse totale finie. Dans ce cas, le processus de Lévy est un processus de Poisson composé avec dérive auquel s'ajoute une composante brownienne si la forme quadratique q est non nulle. Cependant, un processus de Poisson composé avec dérive est presque sûrement linéaire par morceaux et l'exposant de Hölder du mouvement brownien vaut presque sûrement $1/2$ partout, cf. [101, ch. 16] ou [104, ch. 2]. Dès lors, on a

$$\forall t \in [0, \infty[\quad h_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in S \\ \infty & \text{si } t \notin S \text{ et } q = 0 \\ 1/2 & \text{si } t \notin S \text{ et } q \neq 0 \end{cases}$$

avec probabilité 1. Les propriétés de régularité ponctuelle d'un processus de Lévy sont donc triviales lorsque sa mesure de Lévy est de masse totale finie. Dans le cas contraire, S. Jaffard [93] a prouvé que les trajectoires du processus de Lévy sont des fonctions multifractales, c'est-à-dire que l'ensemble isohöldérien

$$E_h = \{t \in [0, \infty[\mid h_X(t) = h\}$$

est non vide pour h parcourant un sous-intervalle de $[0, \infty]$ qui n'est pas réduit à un point. Son résultat est en fait beaucoup plus précis puisqu'il a déterminé le spectre de singularités $d_X : h \mapsto \dim E_h$ de presque toutes les trajectoires du processus de Lévy X .

Afin de détailler ce résultat, notons σ la mesure image de la mesure de Lévy π par l'application $x \mapsto \|x\|$, ainsi que $c_j = \sigma([2^{-j-1}, 2^{-j}])$ quel que soit $j \in \mathbb{N}$. Pour des raisons techniques, nous supposons très souvent dans ce chapitre que la suite $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de sommabilité

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \sqrt{c_j \log(1 + c_j)} < \infty. \quad (5.1)$$

Cette condition est peu restrictive car elle est très souvent vérifiée en pratique. C'est en particulier le cas lorsque l'exposant

$$\beta = \inf \left\{ \gamma \in [0, \infty[\mid \int_0^1 r^\gamma \sigma(dr) < \infty \right\}$$

est strictement inférieur à 2. Cet exposant, qui appartient toujours à l'intervalle $[0, 2]$, a été introduit par R. Blumenthal et R. Gettoor [30] et gère la régularité ponctuelle du processus de Lévy X . En effet, W. Pruitt [136] a prouvé que, si X est sans composante brownienne, son exposant de Hölder à l'origine vaut presque sûrement $1/\beta$. Par conséquent, l'exposant de Hölder de X est $1/\beta$ presque partout avec probabilité 1. De surcroît, posons

$$\beta' = \begin{cases} \beta & \text{si } q = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et convenons que $1/\beta'$ vaut l'infini lorsque le réel β' est nul. Le spectre de singularités de presque toutes les trajectoires de X est donné par le théorème suivant issu de [93]. Nous renvoyons à la figure 5.1 pour les graphes correspondants.

Théorème 5.1 (S. Jaffard)

Supposons que la condition (5.1) est vérifiée.

- (i). Presque sûrement, pour tout $h \in]1/\beta', \infty]$, on a $E_h = \emptyset$.
- (ii). Presque sûrement, $E_{1/\beta'}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, \infty[$.
- (iii). Si $\beta > 0$, presque sûrement, pour tout $h \in [0, 1/\beta']$, on a $\dim E_h = \beta h$.
- (iv). Si $\beta = 0$ et $\pi(\mathbb{R}^d) = \infty$, pour tout $h \in [0, 1/\beta']$, presque sûrement $\dim E_h = 0$.

Le premier but de ce chapitre est de décrire plus précisément les propriétés de taille des ensembles isohöldériens E_h et de donner en outre les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles

$$\tilde{E}_h = \{t \in [0, \infty[\setminus S \mid h_X(t) \leq h\}$$

lorsque h appartient à $[0, \infty]$. D'après le théorème 5.1 et la dénombrabilité presque sûre de l'ensemble S des instants de sauts du processus de Lévy X , on constate que presque

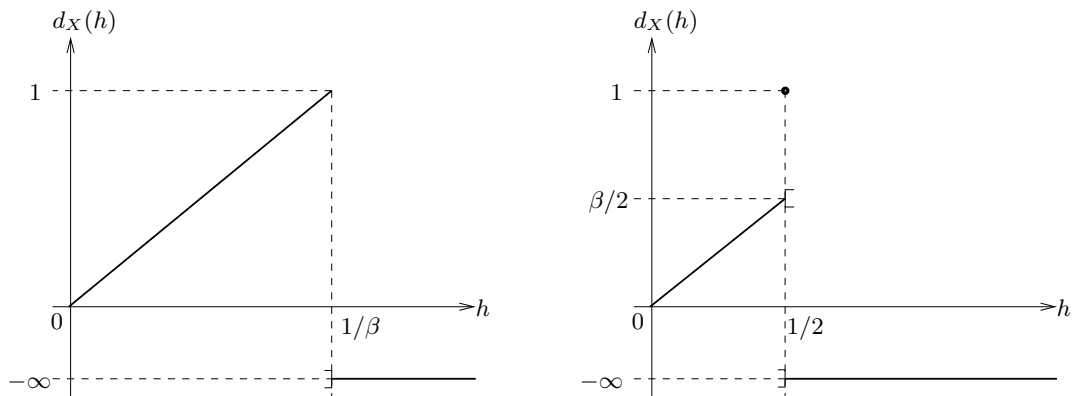


FIG. 5.1 – Spectre de singularités de presque toutes les trajectoires du processus de Lévy. Le graphe de gauche (resp. droite) correspond au cas où $q = 0$ (resp. $q \neq 0$).

sûrement $E_h = \emptyset$ et $\tilde{E}_h = \tilde{E}_{1/\beta'}$ pour tout $h \in]1/\beta', \infty]$ et que $E_{1/\beta'}$ et $\tilde{E}_{1/\beta'}$ sont presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, \infty[$. Par conséquent, le problème de déterminer finement les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ ne se pose que pour h appartenant à l'intervalle $[0, 1/\beta']$. C'est pourquoi dans ce qui suit nous supposons toujours que h figure dans cet intervalle.

Rappelons quelques définitions introduites dans la section III du chapitre 2 et dans la section II du chapitre 3. L'ensemble $\mathfrak{D}$ regroupe les fonctions de jauge, c'est-à-dire les fonctions g croissantes sur un voisinage à droite de 0 et vérifiant $\lim_{0+} g = g(0) = 0$. Chaque jauge $g \in \mathfrak{D}$ conduit à une mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^g$. De surcroît, $\mathfrak{D}_1$ désigne l'ensemble des jauges $g \in \mathfrak{D}$ pour lesquelles la fonction $r \mapsto g(r)/r$ est décroissante et strictement positive sur un voisinage strict de l'origine. On vérifie aisément qu'une fonction appartenant à $\mathfrak{D}_1$ est continue au voisinage de l'origine. À toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ et tout ouvert non vide inclus dans $]0, \infty[$ est associée une classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection. Cette classe, qui est stable par intersection dénombrable, est composée d'ensembles dont la $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff est infinie dans tout ouvert non vide inclus dans V , pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\bar{g} \prec g$, i.e. telle que $\bar{g}/g$ tende de façon monotone vers l'infini à l'origine. La proposition 3.2 établie dans le chapitre 3 assure que pour toute fonction de jauge g appartenant à $\mathfrak{D}$, la fonction

$$g_1 : r \mapsto r \inf_{\rho \in]0, r]} \frac{g(\rho)}{\rho}$$

est nulle au voisinage de l'origine ou bien appartient à $\mathfrak{D}_1$. Il existe en outre un réel $\kappa \geq 1$ tel que $\mathcal{H}^{g_1}(F) \leq \mathcal{H}^g(F) \leq \kappa \mathcal{H}^{g_1}(F)$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ et toute partie F de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$, posons

$$h_g = \inf \left\{ h \in]0, \infty[\mid \int_{0+} g_1(r^{1/h}) \sigma(dr) = \infty \right\}$$

en convenant que l'infimum de l'ensemble vide est infini et que $\int_{0+}$ désigne l'intégrale sur n'importe quel intervalle $]0, \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$, sur lequel l'intégrande est une fonction continue. On observe aisément que $h_g = \infty$ si la fonction g_1 est nulle au voisinage de l'origine. Dans le cas contraire, g_1 appartient à $\mathfrak{D}_1$, de sorte que $h_g \leq 1/\beta$.

Considérons le cas particulier des jauges de la forme Id^s , où Id est la fonction identité et s est un réel de $]0, 1]$. On montre facilement que $h_{\text{Id}^s} = s/\beta$. De plus, sous la condition (5.1), le théorème 5.1 prouve que pour tout réel $h \in [0, 1/\beta']$, presque sûrement,

$$\mathcal{H}^s(E_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{\text{Id}^s} \\ \infty & \text{si } h > h_{\text{Id}^s}. \end{cases}$$

Le théorème 5.2 énoncé ci-après permet en particulier de compléter ce résultat en indiquant que presque sûrement, pour tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[$,

$$\mathcal{H}^s(E_h \cap V) = \mathcal{H}^s(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{\text{Id}^s} \\ \infty & \text{si } h \geq h_{\text{Id}^s}. \end{cases}$$

En réalité, le théorème 5.2 ne concerne pas uniquement les jauges de la forme Id^s , mais décrit plus généralement les propriétés de taille et de grande intersection que vérifient les ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ relativement à une jauge g fixée arbitrairement dans $\mathfrak{D}$.

Théorème 5.2

Supposons la condition (5.1) satisfaite.

- (i). Soit $g \in \mathfrak{D}$. Avec probabilité 1, pour tout réel $h \in [0, 1/\beta'[,$ et tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[,$ on a

$$\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h = h_g \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h \geq h_g. \end{cases}$$

- (ii). Soit $g \in \mathfrak{D}_1$. Avec probabilité 1, pour tout réel $h \in [0, 1/\beta'[,$ et tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[,$ l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$.

Remarques : • On peut se restreindre à ne considérer que des ouverts non vides V qui sont inclus dans $]0, \infty[$. D'une part, si V n'est pas inclus dans $]0, \infty[,$ tout ensemble inclus dans $[0, \infty[,$ ce qui est le cas de $\tilde{E}_h$ pour $h \in [0, 1/\beta'[,$ ne peut appartenir à une classe $G^g(V)$ avec $g \in \mathfrak{D}_1$, d'après la définition même de ces classes qui est donnée dans la section II du chapitre 3. D'autre part, pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ et tout réel $h \in [0, 1/\beta'[,$ on a $\mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap (V \cap]0, \infty[))$ et $V \cap]0, \infty[$ est un ouvert inclus dans $]0, \infty[$. De même, $\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \mathcal{H}^g(E_h \cap (V \cap]0, \infty[))$.

• Le théorème précédent assure que pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $h_g = 0$, on a presque sûrement $\mathcal{H}^g(E_0 \cap V) = \infty$ pour tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[$. Cela implique en particulier qu'il existe une infinité non dénombrable d'instantanés où le processus de Lévy X ne saute pas et admet un exposant de Hölder nul. Une telle fonction g existe si et seulement si la mesure de Lévy π est de masse totale infinie. Tout d'abord, si $\beta > 0$, la fonction $r \mapsto 1/\log(1/r)$ convient. Supposons ensuite $\beta = 0$ et $\pi(\mathbb{R}^d) = \infty$. Dès lors, $r \sigma([r, 1])$ tend vers 0 quand r tend vers 0. Notons j_0 le plus petit entier naturel vérifiant $2^{-j_0} \sigma([2^{-j_0}, 1]) > 0$ puis, pour tout entier naturel n , désignons par j_{n+1} le plus petit entier strictement supérieur à j_n pour lequel $2^{-j_{n+1}} \sigma([2^{-j_{n+1}}, 1])$ est strictement inférieur à $2^{-j_n} \sigma([2^{-j_n}, 1])$. Appelons s la fonction affine sur chaque intervalle $[j_n, j_{n+1}]$ telle que $s(j_n) = -j_n + \log_2 \sigma([2^{-j_n}, 1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il convient de remarquer que la fonction s décroît strictement sur $[j_0, \infty[$ et tend vers $-\infty$ à l'infini, que la fonction $t \mapsto t + s(t)$ croît sur le même intervalle et tend vers l'infini à l'infini et que $s(j) \leq -j + \log_2 \sigma([2^{-j}, 1])$ pour tout entier j supérieur à j_0 . Par conséquent, la fonction $\tilde{g} : r \mapsto r 2^{-s(\log_2(1/r))}$ appartient à $\mathfrak{D}_1$ et vérifie

$$\int_{]0, 2^{-j_0}] } \tilde{g}(r) \sigma(dr) \geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{]2^{-j-1}, 2^{-j}] } \tilde{g}(2^{-j-1}) \sigma(dr) \geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{c_j}{\sum_{k=0}^j c_k} = \infty$$

en vertu du théorème de Dini (cf. [46, p. 104] par exemple), car la série $\sum_j c_j$ diverge. La fonction $g : r \mapsto \tilde{g}(1/\log(1/r))$ convient finalement car elle appartient à $\mathfrak{D}_1$ et pour tout réel $h \in]0, \infty[$ et tout réel r_0 assez petit, on a

$$\int_{]0, r_0]} g(r^{1/h}) \sigma(dr) \geq \int_{]0, r_0]} \tilde{g}(r) \sigma(dr) = \infty$$

de sorte que $h_g = 0$. Réciproquement, si la mesure de Lévy π est de masse totale finie, on observe rapidement que h_g est infini pour toute fonction g de $\mathfrak{D}$.

• Fixons $h \in]0, 1/\beta' [$. D'après le théorème 5.2, l'ensemble isohöldérien E_h est presque sûrement de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $]0, \infty [$ pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $h_g = h$. Si $\beta > 0$, on peut toujours trouver une telle fonction puisque $\text{Id}^{\beta h}$ convient. Ce n'est plus le cas lorsque β est nul. En effet, certaines mesures de Lévy π peuvent conduire à $h_g \in \{0, \infty\}$ pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$. La mesure $\pi = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{1/j}/j$ fournit un exemple en dimension $d = 1$.

Observons que l'événement de probabilité 1 sur lequel chacun des deux points de l'énoncé du théorème 5.2 est vrai dépend de la fonction de jauge g choisie. Il est possible d'obtenir de l'uniformité en g en supposant que le réel β est non nul et en se restreignant respectivement à la collection de jauges

$$\mathcal{D} = \left\{ g \in \mathfrak{D} \mid \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log g_1(r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log g_1(r)}{\log r} \right\} \subset \mathfrak{D}$$

et à la famille $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \mathfrak{D}_1$. Observons que les jauges de la forme Id^s , pour $s \in]0, 1]$, figurent dans l'ensemble $\mathcal{D}_1$. On dispose alors du résultat suivant.

Théorème 5.3

Supposons $\beta > 0$ et la condition (5.1) satisfaite. Avec probabilité 1, pour tout réel $h \in [0, 1/\beta' [$, pour tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty [$ et

(i). pour toute fonction $g \in \mathcal{D}$, on a

$$\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h \geq h_g \end{cases}$$

(ii). pour toute fonction $g \in \mathcal{D}_1$, l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$.

Si $\beta > 0$ et la condition (5.1) est satisfaite, le théorème 5.3 implique en particulier que, presque sûrement, pour tous réels $h \in [0, 1/\beta' [$ et $s \in]0, 1]$,

$$\mathcal{H}^s(E_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > \beta h \\ \infty & \text{si } s \leq \beta h \end{cases}$$

de sorte que $\dim E_h = \beta h$. Le théorème 5.3 permet donc de retrouver la partie du théorème 5.1 qui concerne les ensembles isohöldériens E_h pour $h \in [0, 1/\beta' [$.

Signalons que les théorèmes 5.2 et 5.3 peuvent se voir comme des corollaires d'un résultat plus général, le théorème 5.5, qui est énoncé et prouvé dans la section II.

Le deuxième but de ce chapitre est de donner les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble des instants $t \in [0, \infty [$ où le processus de Lévy X ne peut admettre un module de continuité donné. Rappelons que $\mathfrak{W}$ est défini dans la section I du chapitre 2 comme l'ensemble des fonctions w continues et strictement croissantes définies sur un voisinage à droite de l'origine qui vérifient les conditions

$$w(0) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{w(2\delta)}{w(\delta)} < \infty.$$

Notons en outre $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions w appartenant à $\mathfrak{W}$ et vérifiant

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{w(2\delta)}{w(\delta)} > 1.$$

On constate aisément que les fonctions Id^h , pour $h \in]0, \infty[$, appartiennent à l'ensemble $\mathcal{W}$. Fixons $w \in \mathcal{W}$ et $t \in [0, \infty[$. Conformément à ce qui est défini dans le chapitre 2, le processus X est $C^w(t)$, c'est-à-dire admet w pour module de continuité à l'instant t , lorsqu'il existe des réels strictement positifs κ et δ , ainsi qu'un d -uplet P de polynômes, tels que pour tout réel $t' \in [0, \infty[$,

$$|t' - t| \leq \delta \implies \|X_{t'} - P(t' - t)\| \leq \kappa w(|t' - t|).$$

Une fonction $w \in \mathcal{W}$ étant choisie, introduisons alors l'ensemble

$$F_w = \{t \in [0, \infty[\mid S \mid X \notin C^w(t)\}$$

des instants où X ne saute pas et n'admet pas la fonction w pour module de continuité. Le résultat suivant est établi dans la section III.

Théorème 5.4

Soient $g \in \mathfrak{D}$ et $w \in \mathcal{W}$. Supposons que $\int_{0+} g_1(w^{-1}(r))\sigma(dr) = \infty$. Alors F_w contient presque sûrement un ensemble à grande intersection de la classe $G^{g_1}([0, \infty[)$. De plus, avec probabilité 1, on a $\mathcal{H}^g(F_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V inclus dans $]0, \infty[$.

Remarque : La partie de l'énoncé du théorème 5.4 qui concerne les propriétés de taille de F_w permet de reformuler de manière synthétique deux résultats. Soient $g \in \mathfrak{D}$ et $w \in \mathcal{W}$ vérifiant $\int_{0+} g_1(w^{-1}(r))\sigma(dr) = \infty$. D'une part, si $g(r)/r$ tend vers l'infini en 0, l'ensemble F_w est presque sûrement de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $]0, \infty[$. D'autre part, si $g(r)/r$ ne tend pas vers l'infini en 0, l'ensemble F_w contient en réalité avec probabilité 1 un borélien de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, \infty[$. Le fait que F_w soit presque sûrement de g -mesure maximale dans tout ouvert de $]0, \infty[$ découle alors de l'observation que $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Nous renvoyons à la section III pour les détails.

Enfin, les méthodes développées dans ce chapitre s'appliquent également dans le cas d'un modèle de séries aléatoires d'ondelettes qui généralise celui étudié par S. Jaffard dans [94], ce qui permet alors de fournir des résultats analogues aux théorèmes 5.4 et 5.5. C'est l'objet de la section IV.

II Ensembles de singularités

Le but de cette section est d'établir le théorème suivant et de montrer comment il permet d'obtenir les théorèmes 5.2 et 5.3 énoncés dans la section I. On constate aisément que $u \circ v$ est une jauge de $\mathfrak{D}_1$ pour toutes jauges $u \in \mathfrak{D}_1$ et $v \in \mathcal{D}_1$.

Théorème 5.5

Supposons la condition (5.1) satisfaite et prenons une fonction $u \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $h_u < \infty$. Avec probabilité 1, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}_1$, tout réel $h \in [0, 1/\beta']$ et tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[$, on a

$$\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{u \circ v} \\ \infty & \text{si } h_{u \circ v} \leq h \leq h_u \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{u \circ v} \\ \infty & \text{si } h \geq h_{u \circ v} \end{cases}$$

et l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^{u \circ v}(V)$ si et seulement si $h \geq h_{u \circ v}$.

Cette section s'organise de la manière suivante. Dans une première partie, nous rappelons certains résultats obtenus par S. Jaffard dans [93] et nous établissons plusieurs lemmes préliminaires. La deuxième partie est consacrée à la preuve du théorème 5.5. Enfin, les théorèmes 5.2 et 5.3 sont prouvés dans la dernière partie de cette section.

II.1 Résultats préliminaires

Commençons par rappeler une propriété fondamentale concernant les sauts du processus de Lévy X . Posons $\mathbb{H} =]0, \infty[\times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ et, pour tout borélien B de $\mathbb{H}$, notons $J(B)$ le nombre de réels $t \in]0, \infty[$ pour lesquels $(t, \Delta X_t)$ appartient à B . Alors, J est une mesure aléatoire de Poisson de mesure d'intensité $\mathcal{L}_{]0, \infty[}^1 \otimes \pi$, lorsque $\mathcal{L}^1$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, cf. [140, th. 19.2]. Il en ressort en particulier que l'ensemble S des instants de saut du processus X est presque sûrement dénombrable.

L'exposant de Hölder qu'admet le processus X à un instant $t \in [0, \infty[$ dépend de la façon dont ses instants de saut se répartissent autour de t . Plus précisément, notons S_1 l'ensemble des instants de sauts $s \in S$ pour lesquels $\|\Delta X_s\| \leq 1$ et, pour toute fonction $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante et telle que $\varphi(0) = 0$, posons

$$L_\varphi = \{t \in [0, \infty[\mid |t - s| < \varphi(\|\Delta X_s\|) \text{ pour une infinité de } s \in S_1\}.$$

On observe aisément que l'ensemble $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ croît avec α . La proposition suivante reprend le lemme 2 et la proposition 1 de [93].

Proposition 5.1 (S. Jaffard)

Supposons la condition (5.1) vérifiée. Avec probabilité 1, pour tout $h \in [0, 1/\beta'[,$

$$\tilde{E}_h = \left(\bigcap_{h < \alpha \leq 1/\beta} L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \right) \setminus S \quad \text{et} \quad E_h \setminus S = \tilde{E}_h \setminus \bigcup_{0 < \alpha < h} L_{\text{Id}^{1/\alpha}}.$$

D'après la proposition 5.1 et la dénombrabilité presque sûre de S , pour établir le théorème 5.5, il suffit de déterminer les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ pour $\alpha \in]0, \infty[$. Le lemme suivant amorce l'étude de ces propriétés.

Lemme 5.1

Soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{0+} \varphi(r) \sigma(dr) < \infty &\implies \text{p.s. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \int_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \|x\| \leq \varepsilon}} \varphi(\|x\|) J(dt, dx) = 0 \\ \text{et } \int_{0+} \varphi(r) \sigma(dr) = \infty &\implies \text{p.s. } \mathcal{L}^1([0, \infty[\setminus L_\varphi) = 0. \end{aligned}$$

// Plaçons-nous dans le cas de convergence et prenons un entier naturel n et un réel $\varepsilon \in]0, 1]$. D'après la formule de compensation pour les processus de Poisson ponctuels [27, p. 7], on peut écrire

$$\mathbb{E} \left[\int_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \|x\| \leq \varepsilon}} \varphi(\|x\|) J(dt, dx) \right] = n \int_{\|x\| \leq \varepsilon} \varphi(\|x\|) \pi(dx) = n \int_{]0, \varepsilon]} \varphi(r) \sigma(dr)$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 quand ε tend vers 0. Le lemme de Fatou et la dénombrabilité de $\mathbb{N}$ conduisent au résultat.

Plaçons-nous dans le cas de divergence et fixons un entier naturel n et un réel $t \in [0, n]$. Supposons que t n'appartient pas à L_φ . Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de $s \in S_1$ vérifiant $|t - s| < \varphi(\|\Delta X_s\|)$. En particulier, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $m' \geq m + 1$, le borélien

$$B_{m,m'} = \left\{ (t', x) \in \mathbb{H} \mid |t' - t| < \varphi(\|x\|) \quad \text{et} \quad \frac{1}{m'} < \|x\| < \frac{1}{m} \right\}$$

ne contient aucun couple $(t', \Delta X_{t'})$ avec $t' \in]0, \infty[$. Dès lors, $J(B_{m,m'}) = 0$. Comme J est une mesure aléatoire de Poisson dont la mesure d'intensité est $\mathcal{L}_{]0, \infty[}^1 \otimes \pi$, cet événement se produit avec une probabilité inférieure à

$$\exp \left(- \int_{\frac{1}{m'} < \|x\| < \frac{1}{m}} \varphi(\|x\|) \pi(dx) \right) = \exp \left(- \int_{\frac{1}{m'}, \frac{1}{m}} \varphi(r) \sigma(dr) \right)$$

ce qui tend vers 0 quand m' tend vers l'infini. Il en ressort que tout réel $t \in [0, n]$ appartient à l'ensemble L_φ avec probabilité 1. Le théorème de Fubini conduit alors à

$$n = \int_0^n \mathbb{P}(t \in L_\varphi) dt = \mathbb{E} [\mathcal{L}^1(L_\varphi \cap [0, n])] .$$

Par dénombrabilité de $\mathbb{N}$, avec probabilité 1, on a $\mathcal{L}^1([0, n] \setminus L_\varphi) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Cela permet de conclure. //

Le lemme suivant indique qu'il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini de sauts de taille supérieure à un réel strictement positif donné dans chaque intervalle borné de temps. Ce résultat est classique, mais nous en fournissons la preuve par souci d'exhaustivité.

Lemme 5.2

Avec probabilité 1, pour tout intervalle borné I et tout réel strictement positif ε , le nombre d'instants de saut $s \in S_1 \cap I$ tels que $\|\Delta X_s\| > \varepsilon$ est fini.

// Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons S_1^m l'ensemble des instants de saut $s \in S_1$ vérifiant $s \in]0, m]$ et $\|\Delta X_s\| > 1/m$. Le cardinal de S_1^m est une variable aléatoire de Poisson de paramètre

$$m \int_{\frac{1}{m} < \|x\| \leq 1} \pi(dx) = m \cdot \sigma \left(\left[\frac{1}{m}, 1 \right] \right)$$

donc est presque sûrement fini. Par dénombrabilité de $\mathbb{N}^*$, avec probabilité 1, l'ensemble S_1^m est fini quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le lemme découle alors du fait que, pour tout intervalle borné I et tout réel strictement positif ε , l'ensemble des instants de saut $s \in S_1 \cap I$ vérifiant $\|\Delta X_s\| > \varepsilon$ est inclus dans S_1^m pour m suffisamment grand. //

Soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante et telle que $\varphi(0) = 0$. Dans le cas de divergence, le lemme 5.1 indique que l'ensemble L_φ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, \infty[$. En particulier, l'ensemble S_1 est presque sûrement infini dénombrable. En outre, on a $\varphi(\|\Delta X_s\|) \leq \varphi(1)$ quel que soit $s \in S_1$ et, pour tout entier

m assez grand, l'ensemble des instants $s \in S_1$ vérifiant $|s| < m$ et $\varphi(\|\Delta X_s\|) > 1/m$ est inclus dans l'ensemble des instants $s \in S_1 \cap [0, m[$ tels que $\|\Delta X_s\| > \varphi^{-1}(1/m)$ donc est fini avec probabilité 1 d'après le lemme 5.2. Rappelons que φ^{-1} désigne la pseudo-réciproque de la fonction φ , qu'elle est définie par

$$\varphi^{-1}(r) = \inf \{ \rho \in [0, \infty[\mid \varphi(\rho) \geq r \}$$

pour tout réel $r \in [0, \sup_{[0, \infty[} \varphi[$ et que le supremum de φ sur l'intervalle $[0, \infty[$ est nécessairement strictement positif dans le cas de divergence de l'intégrale intervenant dans le lemme 5.1. Ce qui précède assure que la famille $(s, \varphi(\|\Delta X_s\|))_{s \in S_1}$ est presque sûrement un système d'ubiquité homogène dans l'ouvert $]0, \infty[$, au sens de la terminologie introduite dans le chapitre 3. Cela suggère notamment d'utiliser le théorème 3.2 de ce même chapitre, ce que nous ferons à plusieurs reprises dans ce qui suit.

II.2 Preuve du théorème 5.5

Pour plus de clarté, nous divisons le théorème 5.5 en cinq propositions, notées de 5.2 à 5.6, qui sont énoncées et prouvées ci-après.

Supposons que la condition (5.1) est vérifiée et prenons une fonction $u \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $h_u < \infty$. De plus, désignons par $\tilde{u}$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec u au voisinage de 0.

Lemme 5.3

Presque sûrement,

$$\forall h \in]0, h_u[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \int_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \|x\| \leq \varepsilon}} \tilde{u}(\|x\|^{1/h}) J(dt, dx) = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{et } \forall h \in]h_u, \infty[\quad \mathcal{L}^1([0, \infty[\setminus L_{\tilde{u} \circ \text{Id}}^{1/h}) = 0. \quad (5.3)$$

// Comme $h_u = h_{\tilde{u}}$, le lemme 5.1 prouve que, pour tout réel $h \in]0, h_u[$, presque sûrement, pour tout entier naturel n , l'intégrale

$$A_{n,\varepsilon}(h) = \int_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \|x\| \leq \varepsilon}} \tilde{u}(\|x\|^{1/h}) J(dt, dx)$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0. Dès lors, par dénombrabilité de $\mathbb{N}^*$, avec probabilité 1, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $h_u - 1/m > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $A_{n,\varepsilon}(h_u - 1/m)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. Par ailleurs, l'intégrale $A_{n,\varepsilon}(h)$ croît avec h et pour tout réel $h \in]0, h_u[$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $h \leq h_u - 1/m$ donc $A_{n,\varepsilon}(h) \leq A_{n,\varepsilon}(h_u - 1/m)$. Il s'ensuit que l'assertion (5.2) est vraie avec probabilité 1. En utilisant à nouveau le lemme 5.1 et en reprenant le raisonnement précédent, on prouve que l'assertion (5.3) est également vraie avec probabilité 1. //

Les énoncés de la proposition 5.1 et des lemmes 5.2 et 5.3 sont simultanément réalisés avec probabilité 1. Dans toute la suite de cette section, nous nous plaçons sur l'événement correspondant.

Fixons maintenant une fonction de jauge v appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}_1$ et notons $\tilde{v}$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec v au voisinage de 0. La limite

$$\gamma_v = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log v(r)}{\log r}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0, 1]$ du fait que $v(r) \geq \kappa r$ pour un certain réel $\kappa > 0$ et tout réel positif r assez petit. Observons en outre que $\tilde{u} \circ \tilde{v}$ coïncide avec $u \circ v$ au voisinage de l'origine.

Lemme 5.4

| On a $h_{\tilde{u} \circ \tilde{v}} = h_{u \circ v} = h_u \gamma_v$.

// Supposons γ_v non nul et considérons un réel $h > h_{u \circ v}$. On a $\tilde{v}(r) \leq r^{\gamma_v - \varepsilon}$ pour tout réel $\varepsilon \in]0, \gamma_v[$ et tout réel positif r inférieur à un certain $r_0 > 0$. Il en découle que

$$\infty = \int_{]0, r_0^h]} \tilde{u} \circ \tilde{v}(r^{1/h}) \sigma(dr) \leq \int_{]0, r_0^h]} \tilde{u}(r^{\frac{\gamma_v - \varepsilon}{h}}) \sigma(dr)$$

de sorte que $h/(\gamma_v - \varepsilon) \geq h_{\tilde{u}} = h_u$. En faisant tendre successivement ε vers 0 et h vers $h_{u \circ v}$, on obtient $h_{u \circ v} \geq h_u \gamma_v$. Réciproquement, supposons $h_{u \circ v}$ non nul et considérons un réel $h \in]0, h_{u \circ v}[$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout réel positif r inférieur à un certain $r_0 > 0$, on a $\tilde{v}(r) \geq r^{\gamma_v + \varepsilon}$. Par conséquent,

$$\int_{]0, r_0^h]} \tilde{u}(r^{\frac{\gamma_v + \varepsilon}{h}}) \sigma(dr) \leq \int_{]0, r_0^h]} \tilde{u} \circ \tilde{v}(r^{1/h}) \sigma(dr) < \infty$$

si bien que $h/(\gamma_v + \varepsilon) \leq h_u$. En faisant tendre ε vers 0 puis h vers $h_{u \circ v}$, on obtient finalement $h_{u \circ v} \leq h_u \gamma_v$. Le lemme s'ensuit. //

Outre la fonction de jauge v introduite précédemment, considérons un réel $h \in [0, 1/\beta'[,$ et un ouvert non vide V inclus dans l'intervalle $]0, \infty[$.

Proposition 5.2

| Si $h < h_{u \circ v}$, alors $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = 0$.

// Notons α un réel quelconque de l'intervalle $]h, h_{u \circ v}[$. D'après la proposition 5.1, on a $E_h \setminus S \subset \tilde{E}_h \subset L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$. En vertu de la dénombrabilité de S , on a $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h) \leq \mathcal{H}^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}})$ et $\mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h) \leq \mathcal{H}^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}})$. Il suffit donc de prouver que l'ensemble $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ est de $u \circ v$ -mesure de Hausdorff nulle.

D'après le lemme 5.4, on a $\alpha < h_u \gamma_v$ si bien que $\alpha/(\gamma_v - \eta) < h_u$ pour un certain réel $\eta \in]0, \gamma_v[$. De plus, fixons un entier naturel n et un réel strictement positif ε assez petit pour avoir $u \circ v(r) = \tilde{u} \circ \tilde{v}(r) \leq \tilde{u}(r^{\gamma_v - \eta})$ quel que soit $r \in [0, \varepsilon]$. Soit $t \in L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n]$. Il existe une infinité d'instantes de saut $s \in S_1$ vérifiant $|t - s| < \|\Delta X_s\|^{1/\alpha}$. Un tel instant de saut s appartient à $[0, n + 1]$ car $\|\Delta X_s\| \leq 1$. De surcroît, le nombre d'instantes de sauts $s \in S_1 \cap [0, n + 1]$ vérifiant $\|\Delta X_s\| > \varepsilon^\alpha$ est fini d'après le lemme 5.2.

Ainsi, il existe $s \in S_1 \cap [0, n+1]$ tel que $\|\Delta X_s\| \leq \varepsilon^\alpha$ et $|t-s| < \|\Delta X_s\|^{1/\alpha}$. Il s'ensuit que

$$L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n] \subset \bigcup_{\substack{s \in S_1 \cap [0, n+1] \\ \|\Delta X_s\| \leq \varepsilon^\alpha}}]s - \|\Delta X_s\|^{1/\alpha}, s + \|\Delta X_s\|^{1/\alpha}[.$$

Ce recouvrement conduit à

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n]) \leq 2 \sum_{\substack{s \in S_1 \cap [0, n+1] \\ \|\Delta X_s\| \leq \varepsilon^\alpha}} u \circ v(\|\Delta X_s\|^{1/\alpha}) \leq 2 \int_{\substack{0 \leq t \leq n+1 \\ \|x\| \leq \varepsilon^\alpha}} \tilde{u}(\|x\|^{\frac{\gamma_v - \eta}{\alpha}}) J(dt, dx).$$

D'après l'assertion (5.2), le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. On obtient donc $\mathcal{H}^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n]) = 0$. Comme $\mathcal{H}^{u \circ v}$ est une mesure borélienne, il vient $\mathcal{H}^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}}) = 0$. La proposition s'ensuit. //

Proposition 5.3

| Si $h < h_{u \circ v}$, alors $\tilde{E}_h \notin G^{u \circ v}(V)$.

// Construisons une fonction de jauge $\bar{u} \in \mathfrak{D}_1$ telle que $\bar{u} \prec u$ et $h_{\bar{u}} \geq h_u$. Comme $h_u \in]0, \infty[$, la suite de terme général $\alpha_n = (1 + 1/n)/h_u$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, décroît strictement et converge vers $1/h_u$. De plus, $\lim_{0+} u = 0$ et $\int_{0+} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc une suite strictement décroissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels de $]0, 1]$ telle que, d'une part, les fonctions u et $r \mapsto u(r)/r$ sont respectivement croissante sur $[0, r_1]$ et décroissante sur $]0, r_1]$ et, d'autre part, pour laquelle on a

$$u(r_n) \leq u(r_{n-1})e^{-1/n} \quad \text{et} \quad \int_{]0, r_{n-1}^{1/\alpha_1}]} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) \leq \frac{1}{(n+1)^3}$$

pour tout entier $n \geq 2$. Observons que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge nécessairement vers 0 car $u(r_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et u est non nulle et continue sur $]0, r_1]$. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $r \in]r_n, r_{n-1}]$, posons

$$\xi(r) = n + \frac{\log u(r_{n-1}) - \log u(r)}{\log u(r_{n-1}) - \log u(r_n)}.$$

Dès lors, la fonction ξ est continue et décroissante sur l'intervalle $]0, r_1]$. Pour tout réel r de cet intervalle, posons $\bar{u}(r) = u(r)\xi(r)$. Fixons un entier $n \geq 2$ et deux réels r et r' vérifiant $r_n < r \leq r' \leq r_{n-1}$, la différence $\bar{u}(r') - \bar{u}(r)$ est nulle si $u(r) = u(r')$ et, dans le cas contraire, elle est supérieure à

$$(u(r') - u(r)) n \left(1 - \frac{\log \frac{u(r')}{u(r)}}{\frac{u(r')}{u(r)} - 1} \cdot \frac{1}{n \log \frac{u(r_{n-1})}{u(r_n)}} \right) \geq 0.$$

Par conséquent, la fonction $\bar{u}$ croît sur l'intervalle $]r_n, r_{n-1}]$ pour tout entier $n \geq 2$. Comme elle est continue sur $]0, r_1]$, elle y est donc croissante. Prenons

$n_0 \in \mathbb{N}^*$ et observons que $u(r^{\alpha_{n_0}}) \leq u(r^{\alpha_n})$ et $\xi(r^{\alpha_{n_0}}) \leq n+1$ pour tout entier $n \geq n_0+1$ et tout réel $r \in]r_n^{1/\alpha_{n_0}}, r_{n-1}^{1/\alpha_{n_0}}]$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{]0, r_{n_0}^{1/\alpha_{n_0}}]} \bar{u}(r^{\alpha_{n_0}}) \sigma(dr) &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{]r_n^{1/\alpha_{n_0}}, r_{n-1}^{1/\alpha_{n_0}}]} u(r^{\alpha_{n_0}}) \xi(r^{\alpha_{n_0}}) \sigma(dr) \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (n+1) \int_{]0, r_{n-1}^{1/\alpha_1}]} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty. \end{aligned}$$

Il en ressort d'une part que la fonction $\bar{u}$ tend vers 0 en 0, car sinon la mesure σ serait de masse totale finie et on aurait $h_u = \infty$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, la fonction $\bar{u}$ appartient à $\mathfrak{D}_1$ et vérifie $\bar{u} \prec u$. D'autre part, on a $1/\alpha_{n_0} \leq h_{\bar{u}}$. Faire tendre l'entier n_0 vers l'infini conduit alors à $h_u \leq h_{\bar{u}}$. Il y a en fait égalité car $\bar{u} \prec u$, de sorte qu'en particulier, $h_{\bar{u}} < \infty$. Ainsi, on peut établir que l'analogue de l'assertion (5.2) où $\bar{u}$ figure à la place de u est vérifié avec probabilité 1. Plaçons-nous sur l'événement correspondant. D'après le lemme 5.4, on a $h < h_{u \circ v} = h_u \gamma_v \leq h_{\bar{u}} \gamma_v = h_{\bar{u} \circ v}$. En reprenant la preuve de la proposition 5.2 avec $\bar{u}$ à la place de u , on obtient donc $\mathcal{H}^{\bar{u} \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = 0$. La proposition 5.3 découle finalement du théorème 3.1 et du fait que $\bar{u} \circ v \prec u \circ v$. //

Proposition 5.4

| Si $h \geq h_{u \circ v}$, alors $\tilde{E}_h \in G^{u \circ v}(V)$.

// Soit $\alpha \in]h, 1/\beta]$. D'après le lemme 5.4, on a $\alpha > h_{u \circ v} = h_u \gamma_v$ puis $\alpha/(\gamma_v + \varepsilon) > h_u$ pour tout réel $\varepsilon \in]0, -\gamma_v + \alpha/h_u[$ en convenant que la borne supérieure de ce dernier intervalle est infinie si $h_u = 0$. Pour tout réel positif r suffisamment petit, on a $\tilde{v}(r) \geq r^{\gamma_v + \varepsilon}$ puis $\tilde{u} \circ \tilde{v}(r^{1/\alpha}) \geq \tilde{u}(r^{(\gamma_v + \varepsilon)/\alpha})$. Il en résulte que $L_{\tilde{u} \circ \tilde{v} \circ \text{Id}^{1/\alpha}}$ contient $L_{\tilde{u} \circ \text{Id}^{(\gamma_v + \varepsilon)/\alpha}}$. Cependant ce dernier ensemble est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, \infty[$ en vertu de l'assertion (5.3). Il s'ensuit que $L_{\tilde{u} \circ \tilde{v} \circ \text{Id}^{1/\alpha}}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, \infty[$.

Ce résultat, associé au lemme 5.2, assure que $(s, \tilde{u} \circ \tilde{v}(\|\Delta X_s\|^{1/\alpha}))_{s \in S_1}$ est un système d'ubiquité homogène dans l'ouvert $]0, \infty[$. Le théorème 3.2 permet d'en déduire que, pour n'importe quelle fonction $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive et croissante qui coïncide avec la pseudo-réciproque $(\tilde{u} \circ \tilde{v})^{-1}$ au voisinage de l'origine, l'ensemble des réels t vérifiant $|t - s| < \varphi(\tilde{u} \circ \tilde{v}(\|\Delta X_s\|^{1/\alpha}))$ pour une infinité de $s \in S_1$ appartient à la classe $G^{\tilde{u} \circ \tilde{v}}([0, \infty[)$ donc à la classe $G^{u \circ v}([0, \infty[)$ puisque $\tilde{u} \circ \tilde{v}$ et $u \circ v$ coïncident au voisinage de l'origine. Cet ensemble est inclus dans l'ensemble des réels t vérifiant $|t - s| < \|\Delta X_s\|^{1/\alpha}$ pour une infinité de $s \in S_1$, car $\varphi(\tilde{u} \circ \tilde{v}(r)) \leq r$ pour tout réel positif r assez petit. De plus, $[0, \infty[$ appartient clairement à $G^{u \circ v}([0, \infty[)$. Finalement,

$$\forall \alpha \in]h, 1/\beta] \quad L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \in G^{u \circ v}([0, \infty[)$$

en vertu de la proposition 3.1 et du théorème 3.1.

Par ailleurs, comme S est dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus S$ est un G_δ de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, \infty[$, donc appartient à $G^{u \circ v}([0, \infty[)$ d'après

la proposition 3.6. La proposition 5.1 et la croissance des ensembles $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ avec α indiquent en outre que

$$\tilde{E}_h = (\mathbb{R} \setminus S) \cap \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ h+1/n \leq 1/\beta}} L_{\text{Id}^{1/(h+1/n)}}$$

de sorte que $\tilde{E}_h$ est une intersection dénombrable d'ensembles de la classe $G^{uov}([0, \infty[)$. Le théorème 3.1 garantit alors que $\tilde{E}_h \in G^{uov}([0, \infty[)$. La proposition 3.1 permet de conclure. //

Proposition 5.5

| Si $h \geq h_{uov}$, alors $\mathcal{H}^{uov}(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$.

// Commençons par supposer $u \not\prec \text{Id}$. Il existe alors un réel $\kappa > 0$ tel que $u(r) \leq \kappa r$ pour tout réel positif r inférieur à un certain réel $r_0 > 0$. Ainsi,

$$\int_{]0, r_0^h]} u(r^{1/h}) \sigma(dr) \leq \kappa \int_{]0, r_0^h]} r^{1/h} \sigma(dr) < \infty$$

pour tout réel $h \in]0, 1/\beta[$. Par suite, $h_u \geq 1/\beta$. Comme h_u est fini, le réel β ne peut être nul si bien que la fonction $\text{Id} \in \mathfrak{D}_1$ vérifie $h_{\text{Id}} = 1/\beta < \infty$. On peut donc établir que l'analogue de l'assertion (5.3) où Id figure à la place de u est vérifié avec probabilité 1 et on peut se placer sur l'événement correspondant. De plus, on a $\gamma_v/\beta \leq h_u \gamma_v = h_{uov} \leq h < 1/\beta$, d'après le lemme 5.4, de sorte que $\gamma_v < 1$. Cela garantit que $v \prec \text{Id}$. En conséquence, la fonction $\underline{v} : r \mapsto v(r)/\log(v(r)/r)$ appartient à $\mathfrak{D}_1$ et vérifie à la fois $v \prec \underline{v}$ et $\gamma_{\underline{v}} = \gamma_v$. Comme $h \geq h_{uov} = h_u \gamma_v \geq h_{\text{Id}} \gamma_{\underline{v}} = h_{\text{Id} \circ \underline{v}}$, on peut reproduire la preuve de la proposition 5.4 avec Id à la place de u et $\underline{v}$ à la place de v . Ainsi, $\tilde{E}_h \in G^v(V)$. Le théorème 3.1 implique que $\mathcal{H}^v(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$. Cependant, comme $u \in \mathfrak{D}_1$, on peut écrire $u(r) \geq \kappa' r$ pour un certain réel $\kappa' > 0$ et tout $r \geq 0$ assez petit. Il s'ensuit que $\mathcal{H}^{uov} \geq \kappa' \mathcal{H}^v$. Ainsi, $\mathcal{H}^{uov}(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$, ce qui établit la proposition 5.5 si $u \not\prec \text{Id}$.

Supposons désormais $u \prec \text{Id}$ et construisons une fonction $\underline{u} \in \mathfrak{D}_1$ qui vérifie $u \prec \underline{u}$ et $h_{\underline{u}} \leq h_u$. À cet effet, posons $\alpha_n = 1/(h_u + 1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et observons que $\int_{0+} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) = \infty$. Par ailleurs, il existe un réel $r_1 \in]0, 1]$ tel que u croisse continûment sur $[0, r_1^{\alpha_1}]$ et $\theta : r \mapsto u(r)/r$ décroisse sur $]0, r_1^{\alpha_1}]$. En outre, la fonction θ tend vers l'infini en 0. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un réel $r_n \in]0, r_{n-1}[$ tel que

$$\theta(r_n^{\alpha_n}) \geq \theta(r_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) e^{1/n} \quad \text{et} \quad \int_{]r_n, r_{n-1}]} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) \geq 1.$$

Observons alors que la suite $(r_n^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît strictement et converge vers 0. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $r \in]r_n^{\alpha_n}, r_{n-1}^{\alpha_{n-1}}]$, posons

$$\xi(r) = n + \frac{\log \theta(r) - \log \theta(r_{n-1}^{\alpha_{n-1}})}{\log \theta(r_n^{\alpha_n}) - \log \theta(r_{n-1}^{\alpha_{n-1}})}.$$

La fonction ξ est continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle $]0, r_1^{\alpha_1}]$. Notons $\underline{u}(r) = u(r)/\xi(r)$ pour tout $r \in]0, r_1^{\alpha_1}]$. Cette fonction

étant continue et croissante sur $]0, r_1^{\alpha_1}]$ et de limite nulle en 0, elle appartient à $\mathfrak{D}$. On a $u \prec \underline{u}$ car ξ tend vers l'infini de façon monotone en 0. De plus, $\underline{u}$ appartient à $\mathfrak{D}_1$. En effet, la fonction $r \mapsto \underline{u}(r)/r$ est continue en $r_n^{\alpha_n}$ pour tout entier $n \geq 2$ et elle décroît sur $]r_n^{\alpha_n}, r_{n-1}^{\alpha_{n-1}}]$ sachant que, pour $r \leq r'$ dans cet intervalle, la différence $\underline{u}(r)/r - \underline{u}(r')/r'$ est nulle si $\theta(r) = \theta(r')$ et qu'elle est supérieure à

$$\frac{\theta(r) - \theta(r')}{\xi(r)\xi(r')} n \left(1 - \frac{\log \frac{\theta(r)}{\theta(r')}}{\frac{\theta(r)}{\theta(r')} - 1} \cdot \frac{1}{n \log \frac{\theta(r_n^{\alpha_n})}{\theta(r_{n-1}^{\alpha_{n-1}})}} \right) \geq 0$$

dans le cas contraire. Fixons un entier $n_0 \geq 2$. Pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel r pour lequel $r_n < r \leq r_{n-1}$, on a $r_n^{\alpha_n} < r^{\alpha_n} \leq r^{\alpha_{n_0}}$, de sorte que $n+1 = \xi(r_n^{\alpha_n}) \geq \xi(r^{\alpha_{n_0}})$ et $u(r^{\alpha_n}) \leq u(r^{\alpha_{n_0}})$, puis

$$\begin{aligned} \int_{]0, r_1]} \underline{u}(r^{\alpha_{n_0}}) \sigma(dr) &\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{]r_n, r_{n-1}]} \frac{u(r^{\alpha_{n_0}})}{\xi(r^{\alpha_{n_0}})} \sigma(dr) \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_{]r_n, r_{n-1}]} u(r^{\alpha_n}) \sigma(dr) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $h_{\underline{u}} \leq 1/\alpha_{n_0}$. En faisant tendre l'entier n_0 vers l'infini, on obtient finalement $h_{\underline{u}} \leq h_u < \infty$. Ainsi, on peut prouver que l'analogue de l'assertion (5.3) où $\underline{u}$ apparaît à la place de u est vérifié avec probabilité 1. Plaçons-nous sur l'événement correspondant. On peut reproduire la preuve de la proposition 5.4 avec $\underline{u}$ au lieu de u , car $h \geq h_{u \circ v} = h_u \gamma_v \geq h_{\underline{u}} \gamma_v = h_{\underline{u} \circ v}$. Ce faisant, on a $\tilde{E}_h \in G^{u \circ v}(V)$. Comme $u \circ v \prec \underline{u} \circ v$, on a $\mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$ en vertu du théorème 3.1. Le résultat s'ensuit. //

Proposition 5.6

| Si $h \in [h_{u \circ v}, h_u]$, alors $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \infty$.

// Commençons par supposer $h = h_{u \circ v}$. En particulier, $h \geq h_{u \circ v}$ et la proposition 5.5 garantit que $\mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$. Cependant, d'après la proposition 5.1 et la croissance des ensembles $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ avec α , on peut écrire

$$E_h \setminus S = \tilde{E}_h \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \\ h-1/m > 0}} L_{\text{Id}^{1/(h-1/m)}}$$

où l'union est vide si h est nul. Si h est non nul, fixons $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $h - 1/m > 0$. Sachant que $h - 1/m < h = h_u \gamma_v$ d'après le lemme 5.4, il existe $\eta \in]0, \gamma_v[$ tel que $(h - 1/m)/(\gamma_v - \eta) < h_u$. De plus, considérons un entier naturel n et un réel strictement positif ε suffisamment petit pour avoir $u \circ v(r) \leq \tilde{u}(r^{\gamma_v - \eta})$ pour $r \in [0, \varepsilon]$. L'ensemble $L_{\text{Id}^{1/(h-1/m)}} \cap [0, n]$ est recouvert par les intervalles ouverts de centre $s \in S_1 \cap [0, n+1]$ et de rayon $\|\Delta X_s\|^{1/(h-1/m)} \leq \varepsilon$. Ce recouvrement conduit à

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{1/(h-1/m)}} \cap [0, n]) \leq 2 \int_{\substack{0 \leq t \leq n+1 \\ \|x\| \leq \varepsilon^{h-1/m}}} \tilde{u}(\|x\|^{\frac{\gamma_v - \eta}{h-1/m}}) J(dt, dx).$$

D'après l'assertion (5.2), le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. Comme $\mathcal{H}^{u \circ v}$ est une mesure borélienne, il s'ensuit que $L_{\text{Id}^{1/(h-1/m)}}$ est de $u \circ v$ -mesure de Hausdorff nulle. On en déduit la proposition 5.6 dans le cas où $h = h_{u \circ v}$.

Supposons $h > h_{u \circ v}$. Comme $h \leq h_u$, on a $h_u > 0$ et $\text{Id}^{h/h_u} \in \mathcal{D}_1$. De plus, $\gamma_{\text{Id}^{h/h_u}} = h/h_u$ de sorte que $h_{u \circ \text{Id}^{h/h_u}} = h_u \gamma_{\text{Id}^{h/h_u}} = h$. On peut donc appliquer ce qui précède avec Id^{h/h_u} à la place de v . On obtient ainsi que $\mathcal{H}^{u \circ \text{Id}^{h/h_u}}(E_h \cap V) = \infty$. Cependant, on a $\gamma_v < h/h_u = \gamma_{\text{Id}^{h/h_u}}$ donc $u \circ v(r) \geq u(r^{h/h_u})$ pour tout réel positif r assez petit. Il en découle que $\mathcal{H}^{u \circ v} \geq \mathcal{H}^{u \circ \text{Id}^{h/h_u}}$. La proposition 5.6 s'ensuit dans le cas où $h > h_{u \circ v}$. //

II.3 Preuves des théorèmes 5.2 et 5.3

Afin d'établir le théorème 5.2, supposons que la condition (5.1) est vérifiée, prenons une fonction de jauge g dans $\mathfrak{D}$ et notons $\tilde{g}$ une fonction définie sur $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec la fonction $g_1 \in \mathfrak{D}_1 \cup \{0\}$ sur un voisinage de l'origine.

Commençons par supposer que h_g est infini. En reprenant la preuve de l'assertion (5.2), on prouve aisément que, presque sûrement,

$$\forall h \in]0, \infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \int_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \|x\| \leq \varepsilon}} \tilde{g}(\|x\|^{1/h}) J(dt, dx) = 0.$$

Plaçons-nous sur l'événement de probabilité 1 sur lequel cette assertion et les énoncés respectifs de la proposition 5.1 et du lemme 5.2 sont vérifiés. Prenons un réel h dans $[0, 1/\beta'[$ et notons α un réel de l'intervalle $]h, 1/\beta]$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que g_1 et $\tilde{g}$ coïncident sur $[0, \varepsilon]$. D'après le lemme 5.2, l'ensemble $L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n]$ est recouvert par l'union des intervalles ouverts de centre $s \in S_1 \cap [0, n+1]$ et de rayon $\|\Delta X_s\|^{1/\alpha} \leq \varepsilon$. Ce recouvrement conduit à

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{g_1}(L_{\text{Id}^{1/\alpha}} \cap [0, n]) \leq 2 \int_{\substack{0 \leq t \leq n+1 \\ \|x\| \leq \varepsilon^\alpha}} \tilde{g}(\|x\|^{1/\alpha}) J(dt, dx).$$

En faisant tendre ε vers 0 et en exploitant le fait que $\mathcal{H}^{g_1}$ est une mesure borélienne, on en déduit que l'ensemble $L_{\text{Id}^{1/\alpha}}$ est de g_1 -mesure de Hausdorff nulle. La proposition 3.2 implique que $\mathcal{H}^g(L_{\text{Id}^{1/\alpha}}) = 0$. Comme S est dénombrable, la proposition 5.1 assure que les ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ sont aussi de g -mesure de Hausdorff nulle. Par ailleurs, lorsque g appartient à $\mathfrak{D}_1$, on peut construire une fonction de jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $\bar{g} \prec g$ et $h_{\bar{g}} = \infty$. En appliquant ce qui précède à $\bar{g}$ plutôt qu'à g , on prouve que la $\bar{g}$ -mesure de $\tilde{E}_h$ est nulle. Cet ensemble ne peut donc appartenir à la classe $G^g(V)$ quel que soit l'ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[$, d'après le théorème 3.1. On en déduit le théorème 5.2 dans le cas où h_g est infini.

Supposons à l'inverse que h_g est fini. Nécessairement, g_1 appartient à $\mathfrak{D}_1$. Appliquons le théorème 5.5 avec g_1 à la place de u et r à la place de v . Ainsi, avec probabilité 1, pour tout réel $h \in [0, 1/\beta'[$ et tout ouvert V non vide inclus dans $]0, \infty[$, on a

$$\mathcal{H}^{g_1}(E_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{g_1} \\ \infty & \text{si } h = h_{g_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{g_1}(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{g_1} \\ \infty & \text{si } h \geq h_{g_1} \end{cases}$$

et lorsque g appartient à $\mathfrak{D}_1$, l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$. La proposition 3.2 et le fait que $h_g = h_{g_1}$ conduisent au théorème 5.2.

Pour établir le théorème 5.3, supposons le réel β non nul et la condition (5.1) vérifiée. Comme $h_{\text{Id}} = 1/\beta < \infty$, on peut appliquer le théorème 5.5 avec r à la place de u . Ainsi, avec probabilité 1, pour toute fonction $g \in \mathfrak{D}_1$, tout réel $h \in [0, 1/\beta[$ et tout ouvert non vide V inclus dans $]0, \infty[$, on a

$$\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h \geq h_g \end{cases}$$

et l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$. Le théorème 5.3 découle alors de la proposition 3.2 et du fait que $h_g = h_{g_1}$.

III Modules de continuité

Cette section est vouée à la preuve du théorème 5.4. Prenons une fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ et une fonction $w \in \mathcal{W}$ vérifiant $\int_{0+} g_1(w^{-1}(r))\sigma(dr) = \infty$. La fonction g_1 appartient alors nécessairement à $\mathfrak{D}_1$. Notons $\tilde{g}$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec la fonction g_1 au voisinage de 0. Notons aussi $\tilde{w}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0, \infty[$, qui tend vers l'infini à l'infini et qui coïncide avec w au voisinage de 0.

Commençons par observer qu'il existe deux réels κ_1 et κ_2 vérifiant $1 < \kappa_1 \leq \kappa_2$, ainsi qu'un réel strictement positif δ_0 , tels que $\kappa_1 \tilde{w}(\delta) \leq \tilde{w}(2\delta) \leq \kappa_2 \tilde{w}(\delta)$ pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$. Pour tout entier naturel q , posons $\varphi_q : r \mapsto \tilde{w}^{-1}(r/\kappa_1^q)$. Introduisons l'ensemble

$$\tilde{F}_w = \left(\bigcap_{q=0}^{\infty} L_{\varphi_q} \right) \setminus S.$$

Le théorème 5.4 découle alors directement des deux lemmes qui suivent.

Lemme 5.5

Avec probabilité 1, on a $\tilde{F}_w \in G^{g_1}(]0, \infty[)$ et $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V inclus dans $]0, \infty[$.

// Pour $\delta \in [0, \delta_0]$, on a $\kappa_1 \tilde{w}(\delta) \leq \tilde{w}(2\delta)$. Ainsi, $\tilde{w}^{-1}(r/\kappa_1) \geq \tilde{w}^{-1}(r)/2$ pour tout réel positif r suffisamment petit. Fixons $q \in \mathbb{N}$. Dès lors, si le réel positif r est assez petit, on a $\varphi_q(r) \geq \tilde{w}^{-1}(r)/2^q$, puis $\tilde{g}(\varphi_q(r)) \geq \tilde{g}(\tilde{w}^{-1}(r))/2^q$, du fait que $\tilde{g}$ appartient à $\mathfrak{D}_1$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\int_{]0, \varepsilon]} \tilde{g}(\varphi_q(r))\sigma(dr) \geq \frac{1}{2^q} \int_{]0, \varepsilon]} \tilde{g}(\tilde{w}^{-1}(r))\sigma(dr) = \infty.$$

Supposons provisoirement $g_1 \not\leq \text{Id}$. Ainsi, $\tilde{g}(r) = g_1(r) \leq \kappa r$ pour un certain réel $\kappa > 0$ et tout réel positif r assez petit. Par conséquent, $\mathcal{H}^{g_1} \leq \kappa \mathcal{H}^1$ et, en vertu de la proposition 3.2, la mesure $\mathcal{H}^g$ est une mesure borélienne invariante par translation qui attribue une mesure finie aux compacts. Il en

résulte que $\mathcal{H}^g = \eta\mathcal{L}^1$ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, pour un certain réel positif η . Par ailleurs, pour $q \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\int_{]0,\varepsilon]} \varphi_q(r) \sigma(dr) \geq \frac{1}{\kappa} \int_{]0,\varepsilon]} \tilde{g}(\varphi_q(r)) \sigma(dr) = \infty$$

de sorte que l'ensemble L_{φ_q} est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, \infty[$ en vertu du lemme 5.1. De surcroît, l'ensemble S est presque sûrement dénombrable d'après le lemme 5.2. Il en découle que $\tilde{F}_w$ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, \infty[$. Par conséquent, avec probabilité 1, on a $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \eta\mathcal{L}^1(\tilde{F}_w \cap V) = \eta\mathcal{L}^1(V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V inclus dans $]0, \infty[$.

Revenons maintenant au cas général. Les lemmes 5.1 et 5.2 impliquent que la famille $(s, \tilde{g} \circ \varphi_q(\|\Delta X_s\|))_{s \in S_1}$ est presque sûrement un système d'ubiquité homogène dans l'ouvert $]0, \infty[$. Comme les fonctions g_1 et $\tilde{g}$ coïncident au voisinage de l'origine, le théorème 3.2 assure que l'ensemble L_{φ_q} appartient presque sûrement à la classe $G^{g_1}(]0, \infty[)$. De plus, $\mathbb{R} \setminus S$ appartient presque sûrement à cette même classe en vertu de la proposition 3.6 car S est presque sûrement dénombrable. D'après le théorème 3.1, la classe $G^{g_1}(]0, \infty[)$ est stable par intersection dénombrable. Par suite, elle contient $\tilde{F}_w$ avec probabilité 1.

Si on a en outre $g_1 \prec \text{Id}$, il existe une fonction $\underline{g} \in \mathfrak{D}_1$ qui vérifie $g_1 \prec \underline{g}$ ainsi que $\int_{0+} \underline{g}(w^{-1}(r)) \sigma(dr) = \infty$. En appliquant ce qui précède à la jauge $\underline{g}$ plutôt qu'à g_1 , on observe que l'ensemble $\tilde{F}_w$ appartient presque sûrement à la classe $G^{\underline{g}}(]0, \infty[)$. La proposition 3.1 et le théorème 3.1 conduisent alors au fait qu'avec probabilité 1, pour tout ouvert V inclus dans $]0, \infty[$, on a $\mathcal{H}^{g_1}(\tilde{F}_w \cap V) = \infty = \mathcal{H}^{g_1}(V)$ et la proposition 3.2 garantit finalement que $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$. //

Lemme 5.6

| Presque sûrement, $\tilde{F}_w \subset F_w$.

// Plaçons-nous sur l'événement de probabilité 1 sur lequel l'énoncé du lemme 5.2 est vérifié, prenons un instant t dans l'ensemble $\tilde{F}_w$ et supposons que t n'appartient pas à F_w . Ainsi, $X \in C^w(t)$ si bien qu'il existe des réels strictement positifs κ et δ , ainsi qu'un d -uplet P de polynômes, tels que pour tout réel $t' \in [0, \infty[$,

$$|t' - t| \leq \delta \implies \|X_{t'} - P(t' - t)\| \leq \kappa w(|t' - t|).$$

Quitte à augmenter κ , on peut supposer que pour tout réel positif t' ,

$$|t' - t| \leq 1 \implies \|X_{t'} - P(t' - t)\| \leq \kappa \tilde{w}(|t' - t|).$$

Fixons un entier $q > \log(3\kappa\kappa_2)/\log \kappa_1$. Comme $t \in L_{\varphi_q} \setminus S$, il existe une suite injective $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S_1 vérifiant $0 < |t - s_n| < \varphi_q(\|\Delta X_{s_n}\|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 5.2, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers naturels n pour lesquels $\varphi_q(\|\Delta X_{s_n}\|) > \min(1/2, \delta_0)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel

que $|t - s_n| < \min(1/2, \delta_0)$. Supposons avoir $\|X_{t'} - P(t' - t)\| < \|\Delta X_{s_n}\|/3$ pour tout réel positif t' vérifiant $|t' - t| \leq 2|s_n - t|$. Pour tout entier p assez grand, on a $|s_n - 1/p - t| \leq 2|s_n - t|$, de sorte que

$$\begin{aligned} & \left\| (X_{s_n} - P(s_n - t)) - \left(X_{s_n - \frac{1}{p}} - P\left(s_n - \frac{1}{p} - t\right) \right) \right\| \\ & \leq \|X_{s_n} - P(s_n - t)\| + \left\| X_{s_n - \frac{1}{p}} - P\left(s_n - \frac{1}{p} - t\right) \right\| < \frac{2}{3} \|\Delta X_{s_n}\|. \end{aligned}$$

Cependant, le membre de gauche tend vers $\|\Delta X_{s_n}\|$ quand p tend vers l'infini, ce qui conduit à une contradiction. Il existe donc un réel positif t' vérifiant $|t' - t| \leq 2|s_n - t|$ et $\|X_{t'} - P(t' - t)\| \geq \|\Delta X_{s_n}\|/3$. Ainsi,

$$\frac{\|\Delta X_{s_n}\|}{3} \leq \|X_{t'} - P(t' - t)\| \leq \kappa \tilde{w}(|t' - t|) \leq \kappa \tilde{w}(2|s_n - t|) \leq \kappa \kappa_2 \tilde{w}(|s_n - t|).$$

Par ailleurs, $\|\Delta X_{s_n}\| > \kappa_1^q \tilde{w}(|t - s_n|)$. On en déduit que $\kappa_1^q < 3\kappa \kappa_2$, ce qui offre une contradiction. Par conséquent, $t \in F_w$. Le résultat s'ensuit. //

IV Séries lacunaires d'ondelettes

Les méthodes développées dans les sections précédentes permettent d'étudier les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles de singularités höldériennes des trajectoires d'un modèle de séries aléatoires d'ondelettes généralisant celui étudié par S. Jaffard dans [94]. La pertinence de ce modèle provient du fait que de nombreux signaux, images ou fonctions mathématiques admettent, dans une base d'ondelettes, une décomposition qui comporte très peu de coefficients non nuls. On peut citer en exemple les fonctions C^∞ par morceaux, les images débruitées par seuillage et les solutions de certaines équations hyperboliques, *cf.* [45, 50, 52].

IV.1 Présentation du modèle

Afin de présenter le modèle de séries d'ondelettes que nous étudions ci-après, rappelons quelques notations introduites dans la section II du chapitre 2. Notons $\mathcal{I} = \{1, \dots, 2^d - 1\}$ et considérons des ondelettes ψ^i , avec $i \in \mathcal{I}$, dans la classe de Schwartz telles que les fonctions $x \mapsto 2^{dj/2} \psi^i(2^j x - k)$, pour $(i, j, k) \in \mathcal{I} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$, *cf.* [112]. Comme nous étudions des propriétés de régularité ponctuelle, nous préférons travailler avec des ondelettes sur le tore d -dimensionnel $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Notons $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ la surjection canonique. De plus, désignons par Λ l'ensemble des cubes dyadiques du tore, c'est-à-dire des ensembles de la forme $\lambda = \phi(2^{-j}(k + [0, 1[^d))$, avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$. Notons $\langle \lambda \rangle = j$ la génération du cube λ et $x_\lambda = \phi(k2^{-j})$ son point d'ancrage. Pour tout $i \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Lambda$ se mettant sous la forme $\lambda = \phi(2^{-j}(k + [0, 1[^d))$, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$, désignons par Ψ_λ^i la fonction de $\mathbb{T}^d$ qui correspond naturellement à la fonction $\mathbb{Z}^d$ -périodique

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \psi^i(2^j(x - m) - k).$$

Les fonctions $2^{d\langle\lambda\rangle/2}\Psi_\lambda^i$, pour $i \in \mathcal{I}$ et $\lambda \in \Lambda$, ainsi que la fonction constante égale à 1, forment alors une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Fixons un réel strictement positif $\underline{h}$ et, pour tous $i \in \mathcal{I}$ et $j \in \mathbb{N}$, choisissons un entier $m_{i,j} \in \{0, \dots, 2^{dj}\}$. Le processus R que nous étudions est une série d'ondelettes qui comporte seulement $m_{i,j}$ coefficients non nuls à l'échelle j et dans la direction i . Ces coefficients valent $2^{-\underline{h}j}$ et leurs positions sont choisies uniformément et indépendamment à travers les échelles et les directions.

Pour construire le processus R , munissons l'ensemble $\Omega = (\mathbb{T}^d)^{\mathcal{I} \times \mathbb{N}}$ de la tribu produit $\mathcal{F}$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P} = (\mathcal{L}^d)^{\otimes (\mathcal{I} \times \mathbb{N})}$, où $\mathcal{L}^d$ désigne la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T}^d$. Posons $X_{i,n}(\omega) = \omega_{i,n}$ quels que soient $i \in \mathcal{I}$ et $n \in \mathbb{N}$. Fixons $i \in \mathcal{I}$ et désignons par $\mathcal{N}_i$ l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à $\sum_{j=0}^\infty m_{i,j}$. Les points $X_{i,n}$, pour $n \in \mathcal{N}_i$, sont donc des points aléatoires tirés uniformément et indépendamment sur le tore $\mathbb{T}^d$. Ils sont destinés à donner les positions des coefficients d'ondelette non nuls dans la direction i . Les échelles correspondantes sont

$$j_{i,n} = \min \left\{ j \in \mathbb{N} \mid n < \sum_{j'=0}^j m_{i,j'} \right\}.$$

Pour $i \in \mathcal{I}$ et $n \in \mathcal{N}_i$, notons alors $\lambda_{i,n}$ l'unique cube dyadique de génération $j_{i,n}$ qui contient le point $X_{i,n}$. Les cubes $\lambda_{i,n}$ sont ceux qui portent effectivement les coefficients d'ondelette non nuls de R . En effet, notons

$$M = \left\{ (i, \lambda) \in \mathcal{I} \times \Lambda \mid \exists n \in \mathcal{N}_i \quad \lambda = \lambda_{i,n} \right\} \quad \text{et} \quad R = \sum_{(i,\lambda) \in M} 2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle} \Psi_\lambda^i.$$

On vérifie alors aisément que presque sûrement, pour tout $i \in \mathcal{I}$ et tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand, il y a exactement $m_{i,j}$ cubes dyadiques λ de génération j tels que $(i, \lambda) \in M$, c'est-à-dire tels que le coefficient d'ondelette de R indexé par i et λ soit non nul. En outre, conditionnellement à cet événement, l'ensemble de ces cubes λ est tiré uniformément parmi les parties à $m_{i,j}$ éléments de l'ensemble des cubes dyadiques de génération j et indépendamment à travers les directions et les échelles.

Tous les coefficients de la série d'ondelettes R sont de module inférieur à $2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle}$. La proposition 2.1 énoncée dans le chapitre 2 garantit alors que R appartient à l'espace de régularité uniforme $C^{\underline{h}}(\mathbb{T}^d)$. De surcroît, remarquons que l'étude des singularités de R est triviale lorsque la somme $\sum_{i,j} m_{i,j}$ est finie. En effet, dans ce cas, il n'y a qu'un nombre fini de couples $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}$ vérifiant $m_{i,j} > 0$, de sorte que l'ensemble M est fini. Le processus R est alors de classe C^∞ uniformément sur le tore $\mathbb{T}^d$. Par conséquent, même si les résultats énoncés ci-après sont vrais lorsque la somme précédente est finie, ils ne sont réellement pertinents que si cette somme est infinie.

IV.2 Énoncé des résultats

S. Jaffard [94] a établi la loi du spectre de singularités du processus R dans le cas où $m_{i,j} = \lfloor 2^{\eta j} \rfloor$ quels que soient $i \in \mathcal{I}$ et $j \in \mathbb{N}$, avec $\eta \in]0, d[$ fixé au préalable. Nous proposons d'étendre ce résultat à une famille $(m_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}}$ quelconque et de le préciser en donnant, pour tout $h \in [0, \infty]$, les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles

$$E_h = \{x \in \mathbb{T}^d \mid h_R(x) = h\} \quad \text{et} \quad \tilde{E}_h = \{x \in \mathbb{T}^d \mid h_R(x) \leq h\}$$

où $h_R(x)$ désigne l'exposant de Hölder du processus R au point $x \in \mathbb{T}^d$, qui est défini dans la section I du chapitre 2.

Dans ce but, rappelons que l'assertion (2.6) figurant dans la section III du chapitre 2 relie les propriétés de taille des sous-ensembles F du tore $\mathbb{T}^d$ à celles de leur relèvement $\phi^{-1}(F)$ dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, il existe un réel $\kappa \geq 1$ tel que

$$\mathcal{H}^g(F) \leq \mathcal{H}^g(\phi^{-1}(F) \cap [0, 1]^d) \leq \kappa \mathcal{H}^g(F)$$

pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$ et toute partie F de $\mathbb{T}^d$. De plus, $\mathfrak{D}_d$ est défini dans le chapitre 3 comme l'ensemble des jauges $g \in \mathfrak{D}$ pour lesquelles la fonction $r \mapsto g(r)/r^d$ est décroissante et strictement positive sur un voisinage strict de l'origine. À toute jauge $g \in \mathfrak{D}_d$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$, on peut associer une classe $G^g(V)$ d'ensembles à grande intersection, en convenant qu'elle regroupe toutes les parties F de $\mathbb{T}^d$ dont le relèvement $\phi^{-1}(F)$ appartient à la classe $G^g(\phi^{-1}(V))$ définie dans la section II du chapitre 3. La classe $G^g(V)$ est alors stable par intersection dénombrable et ses membres sont de $\bar{g}$ -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de V , pour toute jauge $\bar{g} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{g} \prec g$. En outre, la proposition 3.2 assure d'une part que, pour toute jauge g de $\mathfrak{D}$, la fonction

$$g_d : r \mapsto r^d \inf_{\rho \in]0, r]} \frac{g(\rho)}{\rho^d}$$

est nulle au voisinage de l'origine ou bien appartient à l'ensemble $\mathfrak{D}_d$. D'autre part, à l'aide de l'assertion (2.6) évoquée précédemment, cette proposition conduit à l'existence d'un réel $\kappa \geq 1$ tel que

$$\mathcal{H}^{g_d}(F) \leq \mathcal{H}^g(F) \leq \kappa \mathcal{H}^{g_d}(F)$$

pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ et toute partie F de $\mathbb{T}^d$. Enfin, à toute fonction de jauge g appartenant à $\mathfrak{D}$, associons

$$h_g = \inf \left\{ h \in]0, \infty[\mid \sum_{i,j} m_{i,j} g_d(2^{-hj/h}) = \infty \right\}$$

et posons de plus $\bar{h} = h_{\text{Id}^d}$. On observe aisément que $\bar{h} \geq \underline{h}$ et que $h_{\text{Id}^s} = \bar{h}s/d$ pour tout réel s de l'intervalle $]0, d]$. Plus généralement, on a $h_g = \infty$ si la fonction g_d est nulle au

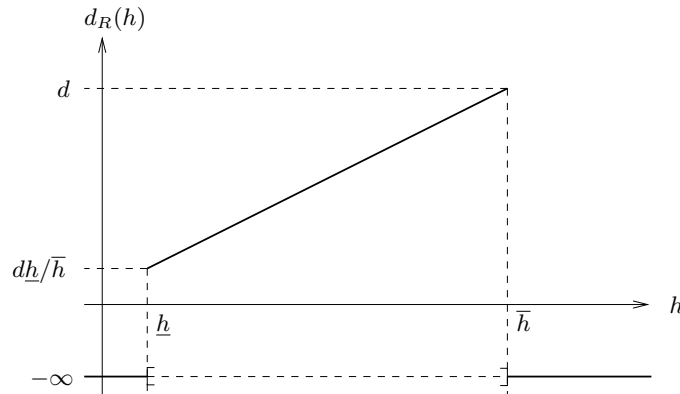


FIG. 5.2 – Spectre de singularités de presque toutes les trajectoires des séries lacunaires d'ondelettes lorsque $\bar{h}$ est fini.

voisinage de l'origine et $h_g \leq \bar{h}$ dans le cas contraire, puisque g_d appartient alors à $\mathfrak{D}_d$ en vertu de la proposition 3.2.

Les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ sont données par le théorème suivant, qui peut se voir comme l'analogue du théorème 5.5.

Théorème 5.6

Avec probabilité 1, l'ensemble E_h est vide pour tout $h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]$ et l'ensemble $E_{\bar{h}}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$. Par ailleurs, prenons une fonction $u \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $h_u < \infty$. Avec probabilité 1, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}_1$, tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$, on a

$$\mathcal{H}^{uov}(E_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{uov} \\ \infty & \text{si } h_{uov} \leq h \leq h_u \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{uov}(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{uov} \\ \infty & \text{si } h \geq h_{uov} \end{cases}$$

et l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^{uov}(V)$ si et seulement si $h \geq h_{uov}$.

Remarques : • Ce théorème permet d'établir un résultat analogue au théorème 5.2. Plus précisément, il implique que pour toute fonction de jauge $g \in \mathfrak{D}$, presque sûrement, pour tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$, on a

$$\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h = h_g \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h \geq h_g \end{cases}$$

et lorsque $g \in \mathfrak{D}_d$, l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$. En particulier, pour $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$, l'ensemble E_h est presque sûrement de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $\mathbb{T}^d$ si g désigne une jauge de $\mathfrak{D}$ fixée au préalable qui vérifie $h_g = h$. Cependant, dans certains cas (par exemple, si $m_{i,j} = 1$ pour tous $i \in \mathcal{I}$ et $j \in \mathbb{N}$), aucune jauge g ne vérifie cette propriété car h_g est toujours soit nul soit infini.

• Le théorème 5.6 conduit aussi à un résultat analogue au théorème 5.3. En effet, si $\bar{h}$ est fini, alors presque sûrement, pour toute fonction $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $g^{1/d} \in \mathcal{D}$, tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$ et tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$, on a

$$\mathcal{H}^g(E_h \cap V) = \mathcal{H}^g(\tilde{E}_h \cap V) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_g \\ \infty & \text{si } h \geq h_g \end{cases}$$

et lorsque $g \in \mathfrak{D}_d$, l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à $G^g(V)$ si et seulement si $h \geq h_g$. Pour obtenir ce résultat, il convient d'appliquer le théorème 5.6 avec Id^d à la place de u et $g_d^{1/d}$ (qui appartient bien à $\mathcal{D}_1$) au lieu de v . En particulier, presque sûrement, pour tous réels $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$ et $s \in]0, d]$, la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de l'ensemble E_h est infinie (resp. nulle) si $s \leq dh/\bar{h}$ (resp. $s > dh/\bar{h}$). Par conséquent, le spectre de singularités $d_R : h \mapsto \dim E_h$ de presque toutes les trajectoires de la série d'ondelettes R est

$$\forall h \in [0, \infty] \quad d_R(h) = \begin{cases} dh/\bar{h} & \text{si } h \in [\underline{h}, \bar{h}] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous renvoyons à la figure 5.2 pour le graphe correspondant.

• Le lemme 5.7 énoncé ci-après indique que pour tout point $x \in \mathbb{T}^d$ vérifiant $h_R(x) < \infty$, l'exposant d'oscillation $\beta_R(x)$ du processus R au point x vérifie $h_R(x) = (\beta_R(x) + 1)\underline{h}$.

On peut donc aisément déduire du spectre de singularités de chaque trajectoire de R son spectre de singularités oscillantes. Nous renvoyons au chapitre 2 pour les définitions des notions d'exposant d'oscillation et de singularité oscillante.

Nous étudions aussi les propriétés de taille et de grande intersection de l'ensemble des points où la série d'ondelettes R n'admet pas une fonction donnée pour module de continuité. Comme R appartient à la classe $C^{\underline{h}}(\mathbb{T}^d)$, on peut se restreindre à ne considérer que des fonctions négligeables devant $\text{Id}^{\underline{h}}$ au voisinage de 0. Plus précisément, notons $\mathcal{W}_{\underline{h}}$ l'ensemble des fonctions w appartenant à l'ensemble $\mathcal{W}$ défini dans la section I et vérifiant $w(\delta) = o(\delta^{\underline{h}})$ quand δ tend vers 0. Rappelons que la propriété pour le processus R d'être $C^w(x)$, c'est-à-dire d'admettre pour module de continuité au point $x \in \mathbb{T}^d$ une certaine fonction $w \in \mathcal{W}_{\underline{h}}$, est définie dans la section I du chapitre 2. Une fonction $w \in \mathcal{W}_{\underline{h}}$ étant fixée, considérons l'ensemble

$$F_w = \{x \in \mathbb{T}^d \mid R \notin C^w(x)\}$$

des points où R n'admet pas la fonction w pour module de continuité. Le résultat suivant peut se voir comme l'analogue du théorème 5.4.

Théorème 5.7

Soient $g \in \mathfrak{D}$ et $w \in \mathcal{W}_{\underline{h}}$ vérifiant $\sum_{i,j} m_{i,j} g_d(w^{-1}(2^{-\underline{h}j})) = \infty$. Alors F_w contient presque sûrement un ensemble à grande intersection de la classe $G^{g_d}(\mathbb{T}^d)$. De plus, avec probabilité 1, on a $\mathcal{H}^g(F_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V de $\mathbb{T}^d$.

La suite de cette section est consacrée à la preuve des théorèmes 5.6 et 5.7. Les méthodes utilisées sont celles qui nous ont permis d'établir les théorèmes 5.5 et 5.4.

IV.3 Preuve du théorème 5.6

La preuve du théorème 5.6 est très proche de celle du théorème 5.5. Cela provient du fait que l'exposant de Hölder qu'admet le processus R en un point $x \in \mathbb{T}^d$ dépend de la façon dont ses coefficients d'ondelette non nuls se répartissent autour de x . Pour toute fonction $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante et telle que $\varphi(0) = 0$, considérons l'ensemble

$$L_\varphi = \{x \in \mathbb{T}^d \mid d(x, x_\lambda) < \varphi(2^{-\langle \lambda \rangle}) \text{ pour une infinité de } (i, \lambda) \in M\}.$$

On observe aisément que l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ croît avec α . Le lemme suivant est analogue à la proposition 5.1. Il relie en particulier les ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ aux ensembles $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$.

Lemme 5.7

- (i). Pour tout $h \in [0, \underline{h}]$, l'ensemble E_h est vide.
- (ii). Pour tout $h \in [\underline{h}, \infty]$, on a

$$\tilde{E}_h = \bigcap_{\alpha > h} L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}} \quad \text{et} \quad E_h = \tilde{E}_h \setminus \bigcup_{\underline{h} < \alpha < h} L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}.$$

- (iii). Avec probabilité 1, pour tout $\alpha \in]\bar{h}, \infty[$, on a $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}} = \mathbb{T}^d$.
- (iv). Pour tout point $x \in \mathbb{T}^d$ vérifiant $h_R(x) < \infty$, on a $h_R(x) = (\beta_R(x) + 1)\underline{h}$.

// Rappelons que le processus R appartient à l'espace de régularité uniforme $C^{\underline{h}}(\mathbb{T}^d)$. Par conséquent, son exposant de Hölder en tout point de $\mathbb{T}^d$ est supérieur à $\underline{h}$, ce qui prouve l'assertion (i).

Fixons maintenant un réel $\alpha \in]\underline{h}, \infty[$ et un point $x \in \mathbb{T}^d$. Le théorème 2.2 énoncé dans le chapitre 2 garantit alors que $h_R(x) \leq \alpha$ si $x \in L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ et $h_R(x) \geq \alpha$ si $x \notin L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$. L'assertion (ii) s'ensuit.

Observons que pour tout réel $\alpha \in]\underline{h}, \infty[$, l'ensemble

$$\tilde{L}_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}} = \{x \in \mathbb{T}^d \mid d(x, X_{i,n}) < 2^{-1-\underline{h}j_{i,n}/\alpha} \text{ pour une infinité de } i \in \mathcal{I} \text{ et } n \in \mathcal{N}_i\}$$

est inclus dans $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ et s'identifie presque sûrement à $\mathbb{T}^d$ si $\alpha > \bar{h}$, en vertu de la proposition 9 du chapitre 11 de [101]. La croissance de $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ avec α permet d'en déduire l'assertion (iii).

Démontrons l'assertion (iv). Soit $x \in \mathbb{T}^d$ avec $h_R(x) < \infty$. D'après (i), on a $h = h_R(x) \in [\underline{h}, \infty[$. Considérons un réel $\beta > h/\underline{h} - 1$. D'après (ii), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $h + 1/n < (\beta + 1)\underline{h}$, il existe un couple $(i_n, \lambda_n) \in \text{M}$ vérifiant $\langle \lambda_n \rangle \geq n$ et $d(x, x_{\lambda_n}) < 2^{-\underline{h}\langle \lambda_n \rangle / (h+1/n)}$. On observe que ces cubes λ_n forment une suite minimisante des coefficients d'ondelette de R au point x et vérifient tous $d(x, x_{\lambda_n})^{1+\beta} \leq 2^{-\langle \lambda_n \rangle}$. La proposition 2.2 montre alors que $\beta_R(x) \leq \beta$. Cela étant vrai pour tout réel $\beta > h/\underline{h} - 1$, on en déduit que $\beta_R(x) \leq h/\underline{h} - 1$. Réciproquement, prenons un réel $\beta > \beta_R(x)$. D'après la proposition 2.2, il existe une suite minimisante des coefficients d'ondelette de R au point x formée de cubes λ vérifiant $d(x, x_\lambda)^{1+\beta} \leq 2^{-\langle \lambda \rangle}$. Comme $h < \infty$, pour une infinité de ces cubes λ , il existe nécessairement un élément i_λ de $\mathcal{I}$ tel que $(i_\lambda, \lambda) \in \text{M}$. Dès lors, l'assertion (ii) prouve que $h \leq (1+\beta)\underline{h}$. On en déduit que $\beta_R(x) \geq h/\underline{h} - 1$ en faisant tendre β vers $\beta_R(x)$. //

Le lemme 5.7 assure qu'avec probabilité 1, quel que soit $h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]$, l'ensemble E_h est vide et, quel que soit $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, on a

$$\tilde{E}_h = \bigcap_{h < \alpha \leq \bar{h}} L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}} \quad \text{et} \quad E_h = \tilde{E}_h \setminus \bigcup_{\underline{h} < \alpha < h} L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}.$$

Le résultat suivant s'apparente au lemme 5.1. Il permet d'amorcer l'étude des propriétés de taille et de grande intersection des ensembles $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$, pour $\alpha \in]\underline{h}, \infty[$.

Lemme 5.8

Soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$. Si la série $\sum_{i,j} m_{i,j} \varphi(2^{-j})$ converge, on a presque sûrement

$$\sum_{(i,\lambda) \in \text{M}} \varphi(2^{-\langle \lambda \rangle}) < \infty.$$

Si elle diverge et si $r^d = o(\varphi(r))$ quand r tend vers 0, l'ensemble $L_{\varphi^{1/d}}$ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$.

// Plaçons-nous dans le cas de convergence et fixons $(i, \lambda) \in \mathcal{I} \times \Lambda$. Le couple (i, λ) appartient à M si et seulement si $X_{i,n} \in \lambda$ pour un certain entier n compris entre $m_{i,0} + \dots + m_{i,\langle \lambda \rangle - 1}$ et $m_{i,0} + \dots + m_{i,\langle \lambda \rangle} - 1$. Par conséquent,

(i, λ) appartient à M avec une probabilité égale à $1 - (1 - 2^{-d\langle\lambda\rangle})^{m_{i,\langle\lambda\rangle}}$, donc inférieure à $2^{-d\langle\lambda\rangle}m_{i,\langle\lambda\rangle}$. Il en résulte que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(i,\lambda) \in M} \varphi(2^{-\langle\lambda\rangle}) \right] \leq \sum_{(i,\lambda) \in \mathcal{I} \times \Lambda} 2^{-d\langle\lambda\rangle} m_{i,\langle\lambda\rangle} \varphi(2^{-\langle\lambda\rangle}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}} m_{i,j} \varphi(2^{-j}) < \infty.$$

La série figurant dans l'espérance converge donc avec probabilité 1.

Considérons maintenant le cas de divergence et supposons que r^d est négligeable devant $\varphi(r)$ quand r tend vers 0. De ce fait, l'ensemble

$$\tilde{L}_{\varphi^{1/d}} = \left\{ x \in \mathbb{T}^d \left| d(x, X_{i,n}) < \frac{1}{2} \varphi(2^{-j_{i,n}})^{1/d} \text{ pour une infinité de } i \in \mathcal{I} \text{ et } n \in \mathcal{N}_i \right. \right\}$$

est inclus dans $L_{\varphi^{1/d}}$. Fixons $x \in \mathbb{T}^d$ et supposons que x n'appartient pas à $\tilde{L}_{\varphi^{1/d}}$. Dès lors, pour tout indice $i \in \mathcal{I}$ et tout entier $n \in \mathcal{N}_i$ assez grand, on a $d(x, X_{i,n}) \geq \varphi(2^{-j_{i,n}})^{1/d}/2$. Ainsi, il existe un entier naturel j_0 tel que $d(X_{i,n}, x) \geq \varphi(2^{-j})^{1/d}/2$ pour tout indice $i \in \mathcal{I}$, tout entier $j \geq j_0$ et tout entier n compris entre $m_{i,0} + \dots + m_{i,j-1}$ et $m_{i,0} + \dots + m_{i,j} - 1$. Cependant, ce dernier événement se produit avec une probabilité inférieure à

$$\prod_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \geq j_0}} (1 - \kappa \varphi(2^{-j}))^{m_{i,j}} \leq \exp \left(-\kappa \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \geq j_0}} m_{i,j} \varphi(2^{-j}) \right)$$

où κ est un réel strictement positif qui ne dépend que de la norme adoptée sur $\mathbb{R}^d$. D'après l'hypothèse de divergence, le membre de droite est nul. Il s'ensuit que tout point x de $\mathbb{T}^d$ appartient presque sûrement à $\tilde{L}_{\varphi^{1/d}}$ donc à $L_{\varphi^{1/d}}$. Le théorème de Fubini permet d'en conclure que ce dernier ensemble est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$. //

Établissons maintenant le théorème 5.6. Pour plus de clarté, nous le divisons en six propositions, notées de 5.7 à 5.12, qui sont énoncées et prouvées ci-après.

Proposition 5.7

Avec probabilité 1, l'ensemble E_h est vide pour tout $h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]$ et l'ensemble $E_{\bar{h}}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$.

// Tout d'abord, le lemme 5.7 assure directement qu'avec probabilité 1, l'ensemble E_h est vide pour tout $h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]$.

Le lemme 5.7 indique en outre que l'ensemble $E_{\bar{h}}$ est presque sûrement égal au complémentaire dans $\mathbb{T}^d$ de l'union des ensembles $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ pour α parcourant $]\underline{h}, \bar{h}[$. Fixons α dans cet intervalle. Pour tout entier naturel j , l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est recouvert par les boules ouvertes de centre x_λ et de rayon $2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha}$ pour $(i, \lambda) \in M$ vérifiant $\langle\lambda\rangle \geq j$. Par suite,

$$\mathcal{L}^d(L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}) \leq \kappa \sum_{\substack{(i,\lambda) \in M \\ \langle\lambda\rangle \geq j}} 2^{-d\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha},$$

où κ est un réel strictement positif qui ne dépend que de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$. Le lemme 5.8 indique que le membre de droite converge vers 0 lorsque j tend vers l'infini. La croissance de $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ avec α implique qu'avec probabilité 1, cet ensemble est Lebesgue-négligeable pour tout $\alpha \in]\underline{h}, \bar{h}[$. Ainsi, $E_{\bar{h}}$ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$. //

Considérons une fonction $u \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $h_u < \infty$ et désignons par $\tilde{u}$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec u au voisinage de l'origine. Sachant que $h_u = h_{\tilde{u}}$, le lemme 5.8 implique que presque sûrement, pour tout réel $h > \underline{h}$, on a

$$\begin{aligned} h < h_u &\implies \sum_{(i,\lambda) \in M} \tilde{u}(2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle/h}) < \infty \\ \text{et } h > h_u &\implies \mathcal{L}^d(L_{(\tilde{u} \circ \text{Id}^{\underline{h}/h})^{1/d}}) = 1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Plaçons-nous sur l'événement de probabilité 1 sur lequel l'assertion (5.4) et l'énoncé du lemme 5.7 sont vérifiés, prenons une fonction de jauge v dans $\mathcal{D}_1$ et notons $\tilde{v}$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec v au voisinage de l'origine. La limite

$$\gamma_v = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log v(r)}{\log r}$$

existe alors et appartient à l'intervalle $[0, 1]$. De surcroît, les fonctions $u \circ v$ et $\tilde{u} \circ \tilde{v}$ coïncident au voisinage de 0 et $h_{\tilde{u} \circ \tilde{v}} = h_{u \circ v} = h_u \gamma_v$.

Outre la jauge v , considérons un réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}[$ et un ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$.

Proposition 5.8

| Si $h < h_{u \circ v}$, alors $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = 0$.

// D'après le lemme 5.7, on a $E_h \subset \tilde{E}_h \subset L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ pour n'importe quel réel α de l'intervalle $]h, h_{u \circ v}[$. Il suffit alors de montrer que l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est de $u \circ v$ -mesure de Hausdorff nulle. Dans ce but, remarquons que $\underline{h} < \alpha < h_u \gamma_v$ de sorte que $\underline{h} < \alpha/(\gamma_v - \eta) < h_u$ pour un certain $\eta \in]0, \gamma_v[$. En outre, pour tout réel $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u \circ v(r) \leq \tilde{u}(r^{\gamma_v - \eta})$ quel que soit $r \in [0, \varepsilon]$ et l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est recouvert par les boules ouvertes de centre x_λ et de rayon $2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha}$ pour $(i, \lambda) \in M$ vérifiant $2^{1-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha} < \varepsilon$, si bien que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}) \leq 2^d \sum_{\substack{(i,\lambda) \in M \\ 2^{1-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha} < \varepsilon}} \tilde{u}(2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle(\gamma_v - \eta)/\alpha}).$$

L'assertion (5.4) montre que le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. Il en résulte que $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est de $u \circ v$ -mesure nulle. Le résultat s'ensuit. //

Proposition 5.9

| Si $h < h_{u \circ v}$, alors $\tilde{E}_h \notin G^{u \circ v}(V)$.

// Observons qu'il existe une fonction de jauge $\bar{u} \in \mathfrak{D}_d$ vérifiant $\bar{u} \prec u$ et $h_{\bar{u}} \geq h_u$. On a en fait égalité de sorte que $h_{\bar{u}} < \infty$. En appliquant la

proposition 5.8 à la fonction $\bar{u}$ à la place de u , on obtient $\mathcal{H}^{\bar{u} \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = 0$.
Le résultat découle du théorème 3.1 et du fait que $\bar{u} \circ v \prec u \circ v$. //

Proposition 5.10

| Si $h \geq h_{u \circ v}$, alors $E_h \in G^{u \circ v}(V)$.

// Prenons $\alpha \in]h, \bar{h}]$. Comme $\alpha > h_{u \circ v} = h_u \gamma_v$ et $\alpha > \underline{h} \geq \underline{h} \gamma_v$, le réel $\alpha/(\gamma_v + \varepsilon)$ est strictement supérieur à h_u et $\underline{h}$ pour n'importe quel réel strictement positif ε assez petit. De surcroît, $\tilde{u} \circ \tilde{v}(r^{\underline{h}/\alpha})^{1/d} \geq \tilde{u}(r^{\underline{h}(\gamma_v + \varepsilon)/\alpha})^{1/d}$ pour tout réel positif r assez petit, d'où $L_{(\tilde{u} \circ \tilde{v} \circ \text{Id}^{\underline{h}/\alpha})^{1/d}} \supset L_{(\tilde{u} \circ \text{Id}^{\underline{h}(\gamma_v + \varepsilon)/\alpha})^{1/d}}$. Cependant, l'assertion (5.4) garantit que ce dernier ensemble est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$. Par suite, l'ensemble

$$\phi^{-1}(L_{(\tilde{u} \circ \tilde{v} \circ \text{Id}^{\underline{h}/\alpha})^{1/d}}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{l} \|x - p - \dot{x}_\lambda\| < \tilde{u} \circ \tilde{v}(2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle/\alpha})^{1/d} \\ \text{pour une infinité de } (i, \lambda, p) \in M \times \mathbb{Z}^d \end{array} \right. \right\}$$

où $\dot{x}_\lambda$ désigne l'unique élément de $\phi^{-1}(\{x_\lambda\}) \cap [0, 1]^d$, est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}^d$. Il en résulte que $(p + \dot{x}_\lambda, \tilde{u} \circ \tilde{v}(2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle/\alpha})^{1/d})_{(i, \lambda, p) \in M \times \mathbb{Z}^d}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$ et le théorème 3.2 énoncé dans le chapitre 3 permet d'en déduire que l'ensemble

$$\phi^{-1}(L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{l} \|x - p - \dot{x}_\lambda\| < 2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle/\alpha} \\ \text{pour une infinité de } (i, \lambda, p) \in M \times \mathbb{Z}^d \end{array} \right. \right\}$$

appartient à la classe $G^{u \circ v}(\mathbb{R}^d)$, donc que l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ appartient à la classe $G^{u \circ v}(\mathbb{T}^d)$. Rappelons que, d'après le lemme 5.7, l'ensemble $\tilde{E}_h$ est l'intersection des ensembles $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ pour α parcourant $]h, \bar{h}]$. Du fait de la croissance de ces ensembles, on peut en fait supposer que α décrit une partie dénombrable dense de cet intervalle. La classe $G^{u \circ v}(\mathbb{T}^d)$ étant stable par intersection dénombrable, elle contient finalement $\tilde{E}_h$. Le résultat s'ensuit. //

Proposition 5.11

| Si $h \geq h_{u \circ v}$, alors $\mathcal{H}^{u \circ v}(\tilde{E}_h \cap V) = \infty$.

// Supposons d'abord $u \not\prec \text{Id}^d$. Dès lors, on a $\bar{h} \leq h_u < \infty$ et $\gamma_v < 1$, puis $v \prec \text{Id}$. En utilisant la proposition 5.10 en remplaçant u par Id^d et v par $\underline{v} : r \mapsto v(r)/\log(v(r)/r)$, on prouve que l'ensemble $\tilde{E}_h$ appartient à la classe $G^{\underline{v}^d}(V)$. Comme $\underline{v}^d \prec v^d$, cet ensemble est de v^d -mesure de Hausdorff infinie dans l'ouvert V et le résultat s'ensuit.

Si à l'inverse $u \prec \text{Id}^d$, on peut construire une fonction $\underline{u}$ dans $\mathfrak{D}_d$ qui vérifie $u \prec \underline{u}$ et $h_{\underline{u}} \leq h_u$. Appliquer la proposition 5.10 avec $\underline{u}$ à la place de u permet d'écrire que $\tilde{E}_h$ appartient à $G^{\underline{u} \circ v}(V)$. Le résultat est alors une conséquence du fait que $u \circ v \prec \underline{u} \circ v$. //

Proposition 5.12

| Si $h \in [h_{u \circ v}, h_u]$, alors $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \infty$.

// Supposons $h = h_{u \circ v}$ et prenons $\alpha \in]\underline{h}, h[$. Il existe alors $\eta \in]0, \gamma_v[$ tel que $\underline{h} < \alpha/(\gamma_v - \eta) < h_u$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u \circ v(r) \leq \tilde{u}(r^{\gamma_v - \eta})$ pour tout $r \in [0, \varepsilon]$ et l'ensemble $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est recouvert par les boules ouvertes de centre x_λ et de rayon $2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha}$ pour $(i, \lambda) \in M$ vérifiant $2^{1-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha} < \varepsilon$ de sorte que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{u \circ v}(L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}) \leq 2^d \sum_{\substack{(i, \lambda) \in M \\ 2^{1-\underline{h}\langle\lambda\rangle/\alpha} < \varepsilon}} \tilde{u}(2^{-\underline{h}\langle\lambda\rangle(\gamma_v - \eta)/\alpha}).$$

L'assertion (5.4) montre que le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. Par conséquent, $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ est de $u \circ v$ -mesure nulle. Le lemme 5.7, la croissance de $L_{\text{Id}^{\underline{h}/\alpha}}$ avec α et la proposition 5.11 permettent de conclure.

Si à l'inverse $h > h_{u \circ v}$, on peut appliquer ce qui précède avec Id^{h/h_u} à la place de v afin d'obtenir $\mathcal{H}^{u \circ \text{Id}^{h/h_u}}(E_h \cap V) = \infty$. Comme $u \circ v(r) \geq u(r^{h/h_u})$ pour tout réel positif r suffisamment petit, il vient $\mathcal{H}^{u \circ v}(E_h \cap V) = \infty$, ce qui conduit au résultat. //

IV.4 Preuve du théorème 5.7

Pour établir le théorème 5.7, considérons deux fonctions $g \in \mathfrak{D}$ et $w \in \mathcal{W}_{\underline{h}}$ vérifiant $\sum_{i,j} m_{i,j} g_d(w^{-1}(2^{-hj})) = \infty$. Notons $\tilde{g}$ une fonction définie sur $[0, \infty[$, continue et croissante qui coïncide avec g_d sur un voisinage de 0. Notons en outre $\tilde{w}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0, \infty[$ qui tend vers l'infini à l'infini et coïncide avec w au voisinage de 0. Remarquons qu'il existe $\kappa > 1$ et $\delta_0 > 0$ tels que $\kappa \tilde{w}(\delta) \leq \tilde{w}(2\delta)$ pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$. Pour tout entier naturel q , posons $\varphi_q : r \mapsto \tilde{w}^{-1}(r^{\underline{h}}/\kappa^q)$ puis introduisons

$$\tilde{F}_w = \bigcap_{q=0}^{\infty} L_{\varphi_q}.$$

Le théorème 5.7 est alors une conséquence immédiate des deux lemmes suivants.

Lemme 5.9

| Presque sûrement, $\tilde{F}_w \in G^{g_d}(\mathbb{T}^d)$ et $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V de $\mathbb{T}^d$.

// Observons que $\tilde{g}(\varphi_q(r)) \geq \tilde{g}(\tilde{w}^{-1}(r^{\underline{h}}))$ pour tout réel positif r assez petit, si bien que la série $\sum_{i,j} m_{i,j} \tilde{g}(\varphi_q(2^{-hj}))$ diverge. Supposons provisoirement $g_d \not\prec \text{Id}^d$. D'une part, la mesure $\mathcal{H}^g$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ sur les boréliens du tore $\mathbb{T}^d$. D'autre part, la série $\sum_{i,j} m_{i,j} \varphi_q(2^{-hj})^d$ diverge de sorte que l'ensemble L_{φ_q} est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}^d$ en vertu du lemme 5.8. Ainsi, presque sûrement, $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V de $\mathbb{T}^d$.

Revenons au cas général. Le lemme 5.8 et le théorème 3.2 prouvent que L_{φ_q} figure presque sûrement dans $G^{g_d}(\mathbb{T}^d)$. La stabilité de cette classe par intersection dénombrable implique qu'elle contient l'ensemble $\tilde{F}_w$ avec probabilité 1. Si on a en outre $g_d \prec \text{Id}^d$, on peut construire une fonction $\underline{g} \in \mathfrak{D}_d$ qui vérifie simultanément $g_d \prec \underline{g}$ et $\sum_{i,j} m_{i,j} \underline{g}(w^{-1}(2^{-hj})) = \infty$. En appliquant ce qui précède à $\underline{g}$ plutôt qu'à g_d , on en déduit que $\tilde{F}_w$ appartient

à $G^g(\mathbb{T}^d)$ avec probabilité 1. Cela conduit à $\mathcal{H}^{g_d}(\tilde{F}_w \cap V) = \infty = \mathcal{H}^{g_d}(V)$ pour tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}^d$. D'où, presque sûrement, $\mathcal{H}^g(\tilde{F}_w \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$ pour tout ouvert V de $\mathbb{T}^d$. //

Lemme 5.10

| On a $\tilde{F}_w \subset F_w$.

// Considérons un point x de $\tilde{F}_w$ et supposons qu'il n'appartient pas à F_w . Dès lors, $R \in C^w(x)$ et la proposition 2.3 énoncée dans le chapitre 2 assure l'existence d'un réel $\kappa' > 0$ tel que

$$2^{-h\langle\lambda\rangle} \mathbb{1}_{\{(i,\lambda) \in M\}} \leq \kappa' (w(2^{-\langle\lambda\rangle}) + w(d(x, x_\lambda)))$$

pour tout indice $i \in \mathcal{I}$ et tout cube $\lambda \in \Lambda$ pour lequel $\langle\lambda\rangle$ est assez grand et $d(x, x_\lambda)$ est assez petit. Prenons un entier q suffisamment grand pour avoir $\kappa^q > 2\kappa'$. Comme $x \in F_{\varphi_q}$, il existe une infinité de couples $(i, \lambda) \in M$ vérifiant $d(x, x_\lambda) < \tilde{w}^{-1}(2^{h\langle\lambda\rangle}/\kappa^q)$. Pour $\langle\lambda\rangle$ assez grand, on peut alors écrire

$$2^{-h\langle\lambda\rangle} \leq \kappa' (w(2^{-\langle\lambda\rangle}) + w(d(x, x_\lambda))) \leq \frac{2\kappa'}{\kappa^q} 2^{-h\langle\lambda\rangle}$$

ce qui conduit à une contradiction. Le résultat s'ensuit. //

Chapitre 6

Constructions récursives aléatoires et chaînes de Markov sur un arbre

Contenu du chapitre

I	Introduction	141
II	Résultats préliminaires	149
II.1	Lien avec la théorie des écoulements dans les réseaux	150
II.2	Chaînes de Markov indexées par un arbre	152
II.3	Lien avec les processus de Galton-Watson en environnement variable	153
III	Probabilité de vacuité	154
IV	Majoration de la dimension	160
IV.1	Preuve du théorème 6.2	162
IV.2	Résultats complémentaires	164
IV.3	Retour sur la probabilité de vacuité	169
V	Minoration de la dimension	172
V.1	Preuve de la proposition 6.10	173
V.2	Loi de la dimension de Θ	180
VI	Preuves des résultats de la section II	182
VI.1	Preuve de la proposition 6.1	182
VI.2	Preuve de la proposition 6.2	183
VI.3	Preuve du corollaire 6.1	185
VI.4	Preuve de la proposition 6.3	185
VI.5	Preuve de la proposition 6.4	189
VI.6	Preuve de la proposition 6.5	192

I Introduction

Le but de ce chapitre est de définir et d'étudier une large classe d'ensembles fractals engendrés par une chaîne de Markov sur un arbre. Le modèle que nous décrivons peut se voir comme une généralisation des *constructions récursives aléatoires* introduites par K. Falconer [61], S. Graf [75], ainsi que R. Mauldin et S. Williams [126]. Ces constructions sont elles-mêmes les versions aléatoires des constructions récursives étudiées par P. Moran [129] et J. Hutchinson [86].

Les constructions récursives s'obtiennent à partir d'une famille de compacts indexée par un arbre à la manière des ensembles de Cantor généralisés. Avant de les présenter, précisons la notion d'arbre que nous utilisons. Posons

$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^j.$$

Il s'agit de l'ensemble constitué du mot vide $\emptyset$ et des mots finis $u = u_1 \dots u_j$ formés de j entiers naturels non nuls, avec $j \in \mathbb{N}^*$. L'entier j se note encore $\langle u \rangle$ et s'appelle la génération de u . Convenons que $\langle \emptyset \rangle = 0$ et notons $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$. Plus généralement, pour toute partie A de $\mathcal{U}$, posons $A^* = A \setminus \{\emptyset\}$. Pour tout $u \in \mathcal{U}^*$, le mot $\pi(u) = u_1 \dots u_{\langle u \rangle - 1}$ s'appelle le père de u .

Définition (arbre)

Un arbre est un sous-ensemble non vide τ de $\mathcal{U}$ tel que :

- pour tout $u \in \tau^*$, on a $\pi(u) \in \tau$;
- pour tout $u \in \tau$, il existe un entier naturel $n_u(\tau)$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $uk \in \tau$ si et seulement si $1 \leq k \leq n_u(\tau)$.

À un tel ensemble τ , on peut associer le graphe dont les sommets sont les éléments de τ et dont les arêtes relient chaque élément $u \in \tau^*$ à son père $\pi(u)$. Ce graphe est alors au sens usuel un arbre dont la racine est $\emptyset$.

Un arbre infini τ étant fixé, considérons une famille $(J_u)_{u \in \tau}$ de compacts de $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) non vides et égaux à l'adhérence de leur intérieur. On suppose que ces compacts vérifient les conditions suivantes :

- pour tout $u \in \tau^*$, on a $J_u \subset J_{\pi(u)}$;
- pour tous $u, v \in \tau^*$ distincts vérifiant $\pi(u) = \pi(v)$, on a $\text{int } J_u \cap \text{int } J_v = \emptyset$;
- pour toute suite $\zeta = (\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels vérifiant $\zeta_1 \dots \zeta_j \in \tau$ quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, le diamètre $|J_{\zeta_1 \dots \zeta_j}|$ tend vers 0 quand j tend vers l'infini.

Pour chacune de ces suites ζ , l'intersection décroissante des compacts $J_{\zeta_1 \dots \zeta_j}$ sur $j \in \mathbb{N}^*$ se réduit à un singleton $\{x_\zeta\}$. De surcroît, l'ensemble formé par tous les points x_ζ est un compact K qui s'écrit encore

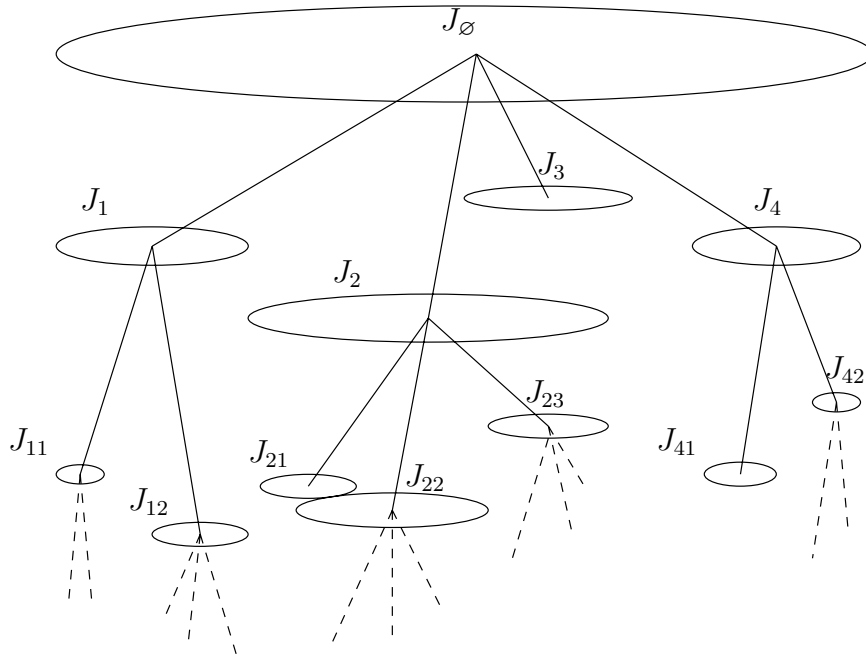
$$K = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{u \in \tau \\ \langle u \rangle = j}} J_u. \quad (6.1)$$

Nous renvoyons à la figure 6.1 pour une illustration de la construction du compact K . Il est à noter que, selon la disposition des compacts J_u , l'application $\zeta \mapsto x_\zeta$ n'est pas nécessairement injective.

P. Moran [129] et J. Hutchinson [86] ont étudié les propriétés géométriques du compact K lorsque l'arbre τ et la famille de compacts $(J_u)_{u \in \tau}$ sont choisis de façon déterministe. Sous l'hypothèse que le vecteur de composantes $|J_{uk}|/|J_u|$ pour $k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}$ est indépendant du sommet u de τ choisi, ils ont notamment établi que la dimension de Hausdorff de K s'obtient comme solution de l'équation

$$\sum_{k=1}^{n_{\emptyset}(\tau)} \left(\frac{|J_k|}{|J_{\emptyset}|} \right)^s = 1. \quad (6.2)$$

Remarquons que, sous cette hypothèse, le nombre de fils $n_u(\tau)$ du sommet $u \in \tau$ est constant, si bien que τ est un arbre n -aire pour un certain entier $n \geq 2$.

FIG. 6.1 – Construction récursive du compact K .

K. Falconer [61], S. Graf [75], R. Mauldin et S. Williams [126] ont repris la construction précédente en supposant que les vecteurs $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}}$ pour $u \in \tau$ sont des vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués. Ils ont alors étudié la probabilité que le compact K soit non vide et ont démontré que sa dimension de Hausdorff est dans ce cas presque sûrement égale à l'infimum des réels positifs s vérifiant

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{n_\emptyset(\tau)} \left(\frac{|J_k|}{|J_\emptyset|} \right)^s \right] \leq 1.$$

La dimension de Hausdorff de K s'obtient donc souvent comme solution de l'équation de Moran (6.2) en prenant l'espérance dans le membre de gauche. Observons par ailleurs que le nombre de fils des sommets de l'arbre τ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, ce qui revient à dire que τ est un arbre de Galton-Watson.

Le processus de percolation fractale de B. Mandelbrot fournit un premier exemple de construction récursive aléatoire de ce type, cf. [124]. Fixons un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$. Le compact $J_\emptyset$ est choisi comme étant égal au carré $[0, 1]^2$. Ce dernier se présente comme l'union des carrés $[k_1/c, (k_1+1)/c] \times [k_2/c, (k_2+1)/c]$ pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$. On conserve alors chacun de ces carrés avec probabilité p indépendamment des autres, on note $J_1, \dots, J_{n_\emptyset}$ les carrés conservés, avec $n_\emptyset \in \mathbb{N}$, et on reproduit l'opération précédente sur chacun d'entre eux. Ce procédé est répété à l'infini. Observons que l'arbre τ indexant les carrés conservés est un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est une loi binomiale de paramètres c^2 et p . Cet arbre est donc infini avec probabilité non nulle si et seulement si $p > 1/c^2$, de sorte que le compact K obtenu dans la construction récursive est non vide avec probabilité non nulle si et seulement si $p > 1/c^2$. Par ailleurs, comme le coefficient de contraction d'une échelle à la suivante vaut toujours $1/c$, les résultats de K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams garantissent en outre que, si K est non vide, sa dimension de Hausdorff est presque sûrement égale à l'infimum des réels positifs

s vérifiant $\mathbb{E}[N c^{-s}] \leq 1$, où N suit une loi binomiale de paramètres c^2 et p , c'est-à-dire à $2 + \log p / \log c$. Cette propriété a été établie par J. Chayes, L. Chayes et R. Durrett [39] et figure également dans [64] et [76]. À la fin de cette section, nous montrons comment les résultats de ce chapitre peuvent s'appliquer à une généralisation élémentaire du processus de percolation fractale.

Citons un autre exemple fourni par S. Graf, R. Mauldin et S. Williams dans [76]. Considérons un mouvement brownien unidimensionnel $(B_t)_{t \in [0,1]}$ et posons $B_t^0 = B_t - tB_1$ pour tout $t \in [0, 1]$. Le processus B^0 s'appelle le pont brownien. Posons alors

$$T_1 = \sup \{t \leq 1/2 \mid B_t^0 = 0\} \quad \text{et} \quad T_2 = \inf \{t \geq 1/2 \mid B_t^0 = 0\},$$

ainsi que $J_\emptyset = [0, 1]$, $J_1 = [0, T_1]$ et $J_2 = [T_2, 1]$. On répète ce procédé sur les compacts J_1 et J_2 , puis à l'infini. Les propriétés d'invariance du pont brownien montrent que l'ensemble de ses zéros est en fait le compact K obtenu dans la construction récursive. L'arbre τ sous-jacent est ici l'arbre binaire. De plus, les coefficients de contraction d'une échelle à la suivante sont indépendants et suivent tous la loi du couple $(T_1, 1 - T_2)$. On peut montrer que cette loi est

$$\frac{\mathbb{1}_{[0,1/2]^2}(u, v)}{2\pi\sqrt{uv(1-u-v)^3}} du dv$$

si bien que $\mathbb{E}[T_1^{1/2} + (1 - T_2)^{1/2}] = 1$. Les résultats de K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams impliquent finalement que la dimension de K vaut presque sûrement $1/2$. Cette propriété avait précédemment été obtenue par S. Taylor [147].

Nous renvoyons à [126] pour d'autres applications des résultats de K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams.

Dans le cas général, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams [76, 77] ont par la suite exhibé une fonction de jauge $h \in \mathfrak{D}$ vérifiant presque sûrement $0 < \mathcal{H}^h(K) < \infty$ lorsque K est non vide, où $\mathcal{H}^h$ désigne la h -mesure de Hausdorff, définie dans la section III du chapitre 2. Ajoutons que A. Berlinkov et R. Mauldin [23, 22] ont pour leur part étudié la dimension et les mesures de packing du compact K (cf. [64] pour la définition de cette notion). Par ailleurs, M. Arbeiter [3], K. Falconer [62] et L. Olsen [130] se sont intéressés au spectre multifractal de mesures autosimilaires aléatoires portées par des ensembles tels que le compact K . En outre, J. Hutchinson et L. Ruschendorf [87] ont étendu le procédé de construction pour établir l'existence de diverses mesures de ce type. Signalons enfin que Y. Pesin et H. Weiss [134], ainsi que Y. Kifer [106, 107], ont employé des techniques de systèmes dynamiques afin de déterminer la dimension de Hausdorff d'ensembles aléatoires construits de façon récursive.

Dans tous les travaux mentionnés ci-dessus, les vecteurs $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}}$ donnant les rapports de contraction d'une étape de la construction à la suivante sont toujours indépendants et identiquement distribués. Il y a plusieurs manières d'affaiblir cette hypothèse. Citons deux d'entre elles. D'une part, A. Dryakhlov et A. Tempelman [54] ont autorisé le vecteur $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}}$ associé à chaque sommet u de τ à dépendre des vecteurs associés à un nombre fini fixé d'ancêtres de u et ont supposé que τ est un arbre n -aire déterministe pour un certain entier $n \geq 2$. D'autre part, Y.-Y. Liu, Z.-Y. Wen et J. Wu [115] ont autorisé la loi du vecteur $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}}$ à dépendre de la génération du sommet u de τ et ont supposé que τ est un arbre déterministe. Dans les deux cas, les auteurs ont établi que la dimension de Hausdorff du compact K prend avec probabilité 1 une valeur qu'il est possible de déterminer en fonction des paramètres du modèle. Notons que ce phénomène est une conséquence naturelle de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov.

Dans le modèle que nous étudions dans ce chapitre, nous autorisons également la loi du vecteur $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_u(\tau)\}}$ à dépendre de la génération du sommet u mais, à la différence de Y.-Y. Liu, Z.-Y. Wen et J. Wu, nous ajoutons de l'aléa dans l'arbre régissant la construction en supposant que nous ne conservons que certains sommets selon l'état que leur attribue une chaîne de Markov. Afin de présenter plus précisément ce modèle, commençons par expliciter la façon dont les compacts aléatoires intervenant dans la construction sont choisis. Pour ce faire, prenons une suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers supérieurs à 2 et notons

$$\mathcal{U}_0 = \{u \in \mathcal{U} \mid \forall j \in \{1, \dots, \langle u \rangle\} \quad u_j \leq n_j\}. \quad (6.3)$$

L'ensemble $\mathcal{U}_0$ est un arbre dont tous les sommets de génération $j \in \mathbb{N}$ ont exactement n_{j+1} fils. Ainsi, dans le cas où la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à $n \geq 2$, l'arbre $\mathcal{U}_0$ est simplement l'arbre n -aire.

Considérons aussi deux réels $\underline{\beta}$ et $\bar{\beta}$ tels que $0 < \underline{\beta} \leq \bar{\beta} < 1$ et un ensemble abstrait non vide Q , puis supposons qu'à tout élément ω de Q est associée une famille $(J_u(\omega))_{u \in \mathcal{U}_0}$ de compacts non vides de $\mathbb{R}^d$ indexée par l'arbre $\mathcal{U}_0$ et vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $u \in \mathcal{U}_0$, on a $\text{int } J_u(\omega) = J_u(\omega)$;
- pour tout $u \in \mathcal{U}_0^*$, on a $J_u(\omega) \subset J_{\pi(u)}(\omega)$;
- pour tous $u, v \in \mathcal{U}_0^*$ distincts vérifiant $\pi(u) = \pi(v)$, on a $\text{int } J_u(\omega) \cap \text{int } J_v(\omega) = \emptyset$;
- pour tout $u \in \mathcal{U}_0^*$, on a

$$\underline{\beta} \leq \frac{|J_u(\omega)|}{|J_{\pi(u)}(\omega)|} \leq \bar{\beta} ; \quad (6.4)$$

- si $\mathcal{L}^d$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_0} \frac{\mathcal{L}^d(\text{int } J_u(\omega))}{|J_u(\omega)|^d} > 0. \quad (6.5)$$

Ces conditions impliquent que la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est nécessairement bornée, comme l'indique le lemme 6.3 énoncé dans la section IV.

Les familles $(J_u(\omega))_{u \in \mathcal{U}_0}$, pour ω appartenant à Q , sont celles qui entrent en jeu dans la construction que nous étudions. Probabilisons alors l'espace Q de façon à rendre ces familles aléatoires. Pour ce faire, introduisons d'abord une tribu sur Q en posant

$$\mathcal{Q} = \sigma(|J_u|, u \in \mathcal{U}_0).$$

Pour tout entier naturel j , désignons ensuite par μ_j une mesure de probabilité sur le cube $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]^{n_{j+1}}$. On suppose qu'il existe sur $(Q, \mathcal{Q})$ une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle les vecteurs aléatoires $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_{\langle u \rangle+1}\}}$, pour $u \in \mathcal{U}_0$, sont indépendants et distribués selon la mesure $\mu_{\langle u \rangle}$.

Sous les hypothèses précédentes, le compact aléatoire

$$K = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}_0 \\ \langle u \rangle = j}} J_u$$

défini comme en (6.1) est précisément celui qui est étudié par Y.-Y. Liu, Z.-Y. Wen et J. Wu [115]. Sa dimension de Hausdorff prend donc $\mathbb{Q}$ -presque sûrement une valeur qu'il est

possible de déterminer à partir de la famille de mesures de probabilité $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Rappelons que K est aussi l'union des singletons

$$\{x_\zeta\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} J_{\zeta_1 \dots \zeta_j} \quad (6.6)$$

où ζ décrit l'ensemble des suites d'entiers vérifiant $\zeta_1 \dots \zeta_j \in \mathcal{U}_0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble sur lequel nous portons notre attention est un sous-ensemble aléatoire noté Θ du compact K . Pour obtenir Θ , on ne garde dans K que les points x_ζ résultant d'une suite ζ formée de sommets $\zeta_1 \dots \zeta_j$ de l'arbre $\mathcal{U}_0$ auquel une certaine chaîne de Markov associe l'état 1 pour tout entier j assez grand. Pour rendre le propos plus précis, commençons par décrire la façon dont cette chaîne de Markov est choisie. Considérons l'ensemble $M = \{0, 1\}^{\mathcal{U}_0}$ des applications définies sur l'arbre $\mathcal{U}_0$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$ et, pour toute application $\omega = (\omega_u)_{u \in \mathcal{U}_0} \in M$, posons $X_u(\omega) = \omega_u$ quel que soit $u \in \mathcal{U}_0$. Introduisons une tribu sur M en posant

$$\mathcal{M} = \sigma(X_u, u \in \mathcal{U}_0).$$

Notons que X est le processus des coordonnées de $(M, \mathcal{M})$. Pour tout $j_0 \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathcal{U}_{j_0}$ l'arbre obtenu en remplaçant la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ par la suite $(n_{j_0+j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ dans la définition (6.3) de l'arbre $\mathcal{U}_0$. Pour $u \in \mathcal{U}_0$, observons alors que l'ensemble $u\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$, c'est-à-dire l'ensemble des concaténations du mot u et des mots de l'arbre $\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$, donne le sous-arbre de $\mathcal{U}_0$ issu de u . Ainsi, la tribu

$$\mathcal{G}_u = \sigma(X_v, v \in \mathcal{U}_0 \setminus (u\mathcal{U}_{\langle u \rangle}^*))$$

peut se voir comme le passé avant u dans l'arbre $\mathcal{U}_0$. Il s'agit en effet de la tribu engendrée par les états des sommets de l'arbre $\mathcal{U}_0$ qui ne sont pas des descendants du sommet u . À l'opposé, le futur après u commence avec ses fils, c'est-à-dire avec les sommets uk , pour $k \in \{1, \dots, n_{\langle u \rangle+1}\}$. Pour tous $t \in \{0, 1\}$ et $j \in \mathbb{N}$, choisissons une mesure de probabilité $\nu_{t,j}$ sur $\{0, 1\}^{n_{j+1}}$. Il existe alors sur $(M, \mathcal{M})$ une mesure de probabilité $\mathbb{M}$ sous laquelle :

- on a presque sûrement $X_\emptyset = 1$;
- pour tout $u \in \mathcal{U}_0$, la loi conditionnelle du vecteur $(X_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{\langle u \rangle+1}\}}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_u$ est donnée par la mesure $\nu_{X_u, \langle u \rangle}$.

Sous cette mesure $\mathbb{M}$, on appelle le processus X une chaîne de Markov d'état initial 1 dont les transitions sont données par la famille de mesures $(\nu_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$. Nous renvoyons aux sections II et VI pour la construction de $\mathbb{M}$ et les principales propriétés du processus X lorsqu'il est tiré sous cette mesure.

Pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$, posons

$$\tau_u = \{v \in u\mathcal{U}_{\langle u \rangle} \mid \forall j \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle\} \quad X_{v_1 \dots v_j} = 1\}. \quad (6.7)$$

Si le processus X attribue l'état 0 au mot u , l'ensemble τ_u est vide. Sinon, τ_u est le plus grand sous-arbre de $\mathcal{U}_0$ issu de u et formé de sommets à l'état 1. En d'autres termes, τ_u regroupe les mots v de $\mathcal{U}_0$ dont un ancêtre est u et tels que X prenne la valeur 1 le long du chemin liant u à v . On appelle frontière de l'arbre τ_u l'ensemble

$$\partial\tau_u = \{\zeta \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*} \mid \forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad \zeta_1 \dots \zeta_j \in \tau_u\}, \quad (6.8)$$

où $\mathbb{N}_{\langle u \rangle}$ est l'ensemble des entiers supérieurs à $\langle u \rangle$.

Le sous-ensemble Θ de K dont les propriétés de taille sont étudiées dans ce chapitre est alors finalement

$$\Theta = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_0} \bigcup_{\zeta \in \partial \tau_u} \{x_\zeta\} \quad (6.9)$$

où le singleton $\{x_\zeta\}$ est donné par (6.6). Un point de K figure donc aussi dans Θ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme x_ζ pour une certaine suite ζ vérifiant $X_{\zeta_1 \dots \zeta_j} = 1$ pour tout entier j assez grand. Observons de surcroît que l'aléa se situe à la fois dans la famille de compacts $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ et dans le processus $(X_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$, de sorte que l'espace probabilisé sous-jacent est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\Omega = Q \times M$, $\mathcal{F} = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{M}$ et $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}$. Ajoutons que dans tout ce chapitre, nous préférons travailler directement sur les lois des processus annexes que nous sommes amenés à considérer plutôt qu'agrandir cet espace.

Du fait de l'entrée en jeu du processus X , la structure de l'ensemble Θ est beaucoup plus complexe que celle de K et les propriétés de taille de ces deux ensembles diffèrent notablement. Ainsi, les résultats de la section III montrent que, pour certains choix de probabilités de transitions $\nu_{t,j}$, l'ensemble Θ peut très bien être vide avec probabilité non nulle, alors que K est presque sûrement non vide. De plus, quand Θ est non vide, sa dimension de Hausdorff ne prend pas nécessairement une valeur déterministe avec probabilité 1, contrairement à ce qui se passe dans le cas des constructions récursives aléatoires de K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams. En effet, les résultats des sections IV et V indiquent que pour certaines probabilités de transition, la dimension de Hausdorff de Θ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-\infty, 0, d_*\}$, où d_* peut être explicité en fonction des probabilités de transition $\nu_{t,j}$ et des lois μ_j des coefficients de contraction intervenant dans la construction. Pour établir ce résultat, nous reprenons l'idée de K. Falconer [61] d'utiliser des outils provenant de la théorie des écoulements dans les réseaux et nous généralisons les techniques de percolation sur les arbres introduites par R. Lyons et Y. Peres [116]. Nous utilisons également de manière prépondérante des outils issus de la théorie des processus de Galton-Watson en environnement variable.

En prenant des cas particuliers de probabilités de transition $\nu_{t,j}$, on peut retrouver les constructions introduites par les auteurs mentionnés précédemment. Fixons $\nu_{1,j} = \delta_{(1, \dots, 1)}$ et laissons $\nu_{0,j}$ quelconque pour tout entier naturel j . On observe aisément que l'arbre $\tau_\emptyset$ est presque sûrement égal à $\mathcal{U}_0$ tout entier, si bien que $\Theta = K$ avec probabilité 1. On obtient ainsi la construction étudiée par Y.-Y. Liu, Z.-Y. Wen et J. Wu. De même, on peut retrouver la construction de K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams en fixant $\nu_{0,j} = \delta_{(0, \dots, 0)}$ et en laissant $\nu_{1,j}$ constante pour tout entier j . Dès lors, les résultats de ce chapitre peuvent se voir comme une généralisation de ceux obtenus dans [61, 75, 115, 126]. Par ailleurs, les résultats de ce chapitre s'appliquent aussi dans le cas où la famille de compacts $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ est choisie de façon déterministe comme dans les travaux de P. Moran et J. Hutchinson. Il suffit pour cela de convenir que la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ est une simple masse de Dirac.

Donnons maintenant quelques applications des résultats de ce chapitre. Considérons tout d'abord la généralisation suivante du processus de percolation fractale de B. Mandelbrot [124]. Soient $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée d'entiers naturels supérieurs à 2 et $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de l'intervalle $]0, 1[$. Posons $n_j = c_j^d$ pour tout entier naturel non nul j . Le cube $[0, 1]^d$ se présente comme l'union de n_1 cubes fermés adjacents de côté $1/c_1$. On conserve alors chacun de ces cubes avec probabilité p_0 indépendamment des autres.

Chaque cube restant se présente ensuite comme l'union de n_2 cubes fermés adjacents de côté $1/(c_1 c_2)$ qui sont conservés avec probabilité p_1 indépendamment des autres. Ce procédé est répété à l'infini. L'ensemble aléatoire constitué des points qui appartiennent à tous les cubes conservés peut en fait se voir comme une version de l'ensemble Θ défini par (6.9) lorsqu'il est tiré sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, à condition de fixer les notations suivantes. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, notons $n \mapsto (k_{j,1}(n), \dots, k_{j,d}(n))$ une bijection de $\{1, \dots, n_j\}$ dans $\{0, \dots, c_j - 1\}^d$. Notons en outre $\mathcal{U}_0$ l'ensemble défini par (6.3), posons $J_\emptyset = [0, 1]^d$ et, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0^*$, considérons le cube fermé

$$J_u = \left(\sum_{j=1}^{\langle u \rangle} \frac{k_{j,1}(u_j)}{c_1 \dots c_j}, \dots, \sum_{j=1}^{\langle u \rangle} \frac{k_{j,d}(u_j)}{c_1 \dots c_j} \right) + \frac{1}{c_1 \dots c_j} [0, 1]^d.$$

La famille de compacts $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ ainsi définie vérifie les hypothèses évoquées précédemment. Elle satisfait notamment la condition (6.4) car la suite $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. On peut prendre pour ensemble abstrait Q n'importe quel singleton et pour mesure $\mathbb{Q}$ la mesure de Dirac correspondante. Les mesures donnant les rapports de contraction dans la construction sont alors $\mu_j = \delta_{1/c_{j+1}}^{\otimes n_{j+1}}$ pour tout entier naturel j . Par ailleurs, posons $\nu_{0,j} = \delta_0^{\otimes n_{j+1}}$ et $\nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes n_{j+1}}$ et rappelons que ces mesures interviennent dans la construction de la probabilité $\mathbb{M}$. Notons en outre

$$d_* = d + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{j-1} \log p_i}{\sum_{i=0}^{j-1} \log c_{i+1}}$$

si cette dernière quantité est positive et notons $d_* = -\infty$ dans le cas contraire. Les résultats de ce chapitre prouvent alors que l'ensemble Θ est presque sûrement vide si $d_* = -\infty$. Sinon, la dimension de Hausdorff de cet ensemble appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0, d_*\}$ et on peut fournir deux éléments $\underline{\sigma}_0$ et $\bar{\sigma}_0$ de $[1, \infty]$ tels que

$$1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_0} \leq \mathbb{P}(\dim \Theta = -\infty) \leq \mathbb{P}(\dim \Theta \leq 0) \leq 1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_0}.$$

On retrouve clairement le processus de percolation fractale initialement proposé par B. Mandelbrot en choisissant des suites $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ et $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ constantes et en se plaçant en dimension $d = 2$.

Présentons une autre construction aléatoire que les résultats de ce chapitre permettent d'étudier. Considérons deux réels p et q de l'intervalle $]0, 1[$ et une suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité dont tous les supports sont inclus dans un même sous-segment strict du segment $[0, 1]$. On suppose que cette suite converge étroitement vers une mesure notée λ . Notons $\mathcal{U}_0$ l'ensemble défini par (6.3) avec $n_j = 2$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire l'arbre binaire. Munissons ensuite l'ensemble $Q = [0, 1]^{\mathcal{U}_0}$ de sa tribu produit et de la mesure produit $\mathbb{Q} = \bigotimes_{u \in \mathcal{U}_0} \lambda_{\langle u \rangle}$. À tout élément ω de l'ensemble Q , associons la famille de compacts $(J_u(\omega))_{u \in \mathcal{U}_0}$ définie de la façon suivante. D'une part, notons $J_\emptyset(\omega) = [0, 1]$. D'autre part, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$, divisons le segment $J_u(\omega)$ en deux sous-segments adjacents notés J_{u1} et J_{u2} de diamètres respectifs $\omega_u |J_u|$ et $(1 - \omega_u) |J_u|$. Cette famille de compacts vérifie bien les hypothèses énoncées précédemment et la mesure μ_j donnant les rapports de contraction à une génération $j \in \mathbb{N}$ fixée est la mesure image de la mesure

λ_j par l'application $y \mapsto (y, 1 - y)$. Par ailleurs, posons $\nu_{0,j} = (q\delta_1 + (1 - q)\delta_0)^{\otimes 2}$ et $\nu_{1,j} = (p\delta_1 + (1 - p)\delta_0)^{\otimes 2}$ pour tout entier naturel j . Désignons alors par $\mathbb{M}$ la mesure de probabilité sous laquelle le processus des coordonnées X de $(M, \mathcal{M})$ est une chaîne de Markov indexée par $\mathcal{U}_0$ d'état initial 1 et dont les transitions sont données par la famille de mesures $(\nu_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$. Les résultats de ce chapitre permettent alors de montrer que, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}$, l'ensemble Θ défini par (6.9) est presque sûrement vide pour $p \leq 1/2$. Dans le cas contraire, la dimension de Hausdorff de cet ensemble est presque sûrement égale à l'unique solution d_* de l'équation

$$\int_0^1 (y^s + (1 - y)^s) \lambda(dy) = \frac{1}{p}.$$

Par exemple, si $p = 2/3$ et si λ est la loi uniforme sur $[1/3, 2/3]$, on obtient $d_* \approx 0,408$. Observons en outre que la dimension de l'ensemble Θ est déterministe et ne dépend pas de la valeur du paramètre q . Si on remplace le réel q par une suite $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans la définition de la suite $(\nu_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ de probabilités de transition, les résultats de ce chapitre s'appliquent encore et montrent que, pour certains choix de $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$, la dimension de Θ est aléatoire.

On peut aussi généraliser les divers exemples de fractals aléatoires proposés par K. Falconer, S. Graf, R. Mauldin et S. Williams dans [61, 75, 76, 126] en autorisant la loi des rapports de contraction des compacts intervenant dans la construction à dépendre de la génération. On peut en outre ajouter de l'aléa dans ces constructions en introduisant une chaîne de Markov sous-jacente.

Ajoutons que les résultats de ce chapitre sont utilisés dans le chapitre 7 dans le cas où $\mathcal{U}_0$ est l'arbre binaire et les mesures $\nu_{t,j}$ intervenant dans la construction de la mesure de probabilité $\mathbb{M}$ sont des binomiales. Nous relierons alors l'ensemble Θ à l'ensemble des points de régularité höldérienne minimale d'un certain processus aléatoire. Le fait que la dimension de Hausdorff de Θ soit aléatoire pour certains choix des mesures $\nu_{t,j}$ implique que le spectre de singularités du processus étudié peut être aléatoire, ce qui est une propriété peu fréquente. Nous renvoyons au chapitre 7 pour plus de détails.

La suite de ce chapitre s'organise ainsi. Dans la section II, nous énonçons quelques résultats préliminaires. Nous revenons notamment sur les propriétés vérifiées par le processus X sous la mesure de probabilité $\mathbb{M}$. Nous préparons aussi l'étude des propriétés de taille de l'ensemble Θ en faisant un lien avec la théorie des écoulements dans les réseaux. Dans la section III, nous nous intéressons à la probabilité pour que l'ensemble Θ soit vide. Les sections IV et V concernent respectivement la majoration et la minoration de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ . Enfin, les preuves des résultats de la section II étant pour la plupart plutôt techniques, elles sont consignées dans la section VI.

II Résultats préliminaires

Dans la première partie de cette section, nous donnons un lien entre les propriétés de taille de l'ensemble Θ défini par (6.9) et la théorie des écoulements dans les réseaux. Dans une deuxième partie, nous introduisons une famille de mesures analogues à la mesure $\mathbb{M}$ présentée dans la section I. Ces mesures sont chacune destinées à donner la loi d'une certaine chaîne de Markov indexée par un arbre. Nous énonçons également une propriété de branchement vérifiée par ces chaînes de Markov. Dans une troisième partie, nous donnons un lien avec les processus de Galton-Watson en environnement variable. Signalons que,

pour ne pas alourdir cette section, les résultats qu'elle contient sont prouvés dans la section VI.

II.1 Lien avec la théorie des écoulements dans les réseaux

Dans cette partie, nous préparons l'étude des propriétés de taille de l'ensemble Θ défini par (6.9) en reliant celles-ci à la théorie des écoulements dans les réseaux. L'idée de faire appel à cet théorie pour étudier la taille des ensembles obtenus par une construction récursive aléatoire est due à K. Falconer [61].

Commençons par rappeler quelques notations de la section I afin de réécrire l'ensemble Θ sous une forme plus agréable que (6.9). Fixons un sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$. Le plus grand sous-arbre de $\mathcal{U}_0$ issu de u formé de sommets auxquels le processus X attribue l'état 1 est l'ensemble τ_u défini par (6.7). Ce sous-arbre est vide si le processus X attribue l'état 0 au sommet u . Sa frontière est l'ensemble $\partial\tau_u$ donné par (6.8). Rappelons aussi que pour tout chemin infini ζ appartenant à la frontière de l'arbre τ_u , le point x_ζ de $\mathbb{R}^d$ est défini par l'équation (6.6) à partir de la famille de compacts aléatoires $(J_v)_{v \in \mathcal{U}_0}$ introduite dans la section I. Posons

$$K_u = \bigcup_{\zeta \in \partial\tau_u} \{x_\zeta\}. \quad (6.10)$$

Le résultat suivant est prouvé dans la section VI.

Proposition 6.1

Pour tout $u \in \mathcal{U}_0$, l'ensemble K_u défini par (6.10) est compact et s'écrit encore

$$K_u = \bigcap_{j=\langle u \rangle}^{\infty} \bigcup_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle v \rangle = j}} J_v.$$

Pour tout entier naturel j , notons S_j l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}_0$ vérifiant $\langle u \rangle = j$ et $X_u = 1$. Posons aussi $\tilde{S}_0 = \{\emptyset\}$ et $\tilde{S}_j = S_j \setminus \pi^{-1}(S_{j-1})$ pour tout entier naturel j non nul. Remarquons qu'un sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$ appartient à l'ensemble $\tilde{S}_j$ si et seulement si le processus X lui assigne l'état 1 et attribue l'état 0 à son père $\pi(u)$. Désignons enfin par $\tilde{S}$ l'union de ces ensembles $\tilde{S}_j$ pour j parcourant $\mathbb{N}$. On observe aisément que l'ensemble Θ défini par (6.9) peut s'écrire

$$\Theta = \bigcup_{u \in \tilde{S}} K_u \quad (6.11)$$

où l'ensemble K_u est donné par (6.10). Il s'agit donc d'un F_σ (*i.e.* une union dénombrable de fermés) borné de l'espace $\mathbb{R}^d$, en vertu de la proposition 6.1.

La décomposition (6.11) de l'ensemble Θ a plusieurs conséquences. Avec la définition (6.10) des compacts K_u , elle indique d'une part que l'ensemble Θ est vide si et seulement si l'ensemble $\partial\tau_u$ est vide pour tout sommet u de $\tilde{S}$. Ainsi, pour étudier la vacuité de Θ , il suffit d'étudier la vacuité des ensembles $\partial\tau_u$. Cependant, l'ensemble $\partial\tau_u$ est vide si et seulement si le processus $Z_{u,\bullet} = (Z_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ est de limite nulle à l'infini, où

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad Z_{u,j} = \# \{v \in \tau_u \mid \langle v \rangle = j\}. \quad (6.12)$$

En effet, le processus $Z_{u,\bullet}$ est de limite nulle à l'infini si et seulement si le cardinal de τ_u est fini et le lemme de König indique que tout arbre à branchement fini (*i.e.* tel que

tout sommet a un nombre fini de fils) qui est infini possède un chemin infini, cf. [108]. Observons que le processus $Z_{u,\bullet}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{M}$ introduite dans la section I, donc par rapport à la tribu $\mathcal{F}$. De plus, la partie II.3 ci-après permet de voir le processus $Z_{u,\bullet}$ comme un processus de Galton-Watson en environnement variable lorsque le processus X est une chaîne de Markov tirée sous la mesure $\mathbb{M}$.

D'autre part, l'écriture (6.11) de l'ensemble Θ conduit à

$$\dim \Theta = \sup_{u \in \tilde{S}} \dim K_u.$$

Pour déterminer la dimension de Hausdorff de Θ , on peut donc s'intéresser à la dimension du compact K_u pour tout sommet u appartenant à $\tilde{S}$. L'étude de ce problème fait intervenir des outils provenant de la théorie des écoulements dans les réseaux. Afin de les présenter, fixons un sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$. On appelle *coupe* de l'arbre τ_u toute partie finie χ de τ_u vérifiant simultanément

$$\begin{cases} \forall \zeta \in \partial \tau_u & \exists v \in \chi & \zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} = v \\ \forall v \in \chi & \exists \zeta \in \partial \tau_u & \zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} = v \\ \forall v \in \chi & \forall i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\} & v_1 \dots v_i \notin \chi \end{cases}.$$

Observons que l'ensemble $\mathcal{C}(\tau_u)$ des coupes de τ_u se réduit au singleton $\{\emptyset\}$ dont le seul élément est l'ensemble vide si $\partial \tau_u$ est vide et que $\{u\}$ appartient toujours à $\mathcal{C}(\tau_u)$, dans le cas contraire. Pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$, notons en outre $\mathcal{C}_j(\tau_u)$ la collection des coupes $\chi \in \mathcal{C}(\tau_u)$ formées de sommets v de génération supérieure à j . De surcroît, notons

$$L_v = \frac{|J_v|}{|J_{\pi(v)}|} \quad (6.13)$$

le rapport entre le diamètre du compact J_v indexé par un sommet v de $\mathcal{U}_0^*$ et celui du compact indexé par son père $\pi(v)$. Remarquons que ce rapport est toujours compris entre $\underline{\beta}$ et $\bar{\beta}$ en vertu de (6.4). Pour tout $s \in]0, \infty[$, considérons

$$E_{s,u} = \inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_u)} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \quad (6.14)$$

et $\tilde{E}_{s,u} = \lim_{j \uparrow \infty} \uparrow \inf_{\chi \in \mathcal{C}_j(\tau_u)} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s.$

Les réels $E_{s,u}$, pour $s \in]0, \infty[$, peuvent s'interpréter comme des écoulements maximaux dans certains réseaux liés à l'arbre τ_u . Pour plus de détails concernant la théorie des écoulements dans les réseaux, on peut se référer à [70, 116].

Le résultat suivant, établi dans la section VI, fait le lien entre les écoulements $E_{s,u}$ et $\tilde{E}_{s,u}$ et la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle du compact K_u . Rappelons que les mesures de Hausdorff sont présentées en détails dans la section III du chapitre 2.

Proposition 6.2

Il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ et tout réel $s \in]0, \infty[$,

$$C|J_u|^s E_{s,u} \leq C|J_u|^s \tilde{E}_{s,u} \leq \mathcal{H}^s(K_u) \leq |J_u|^s \tilde{E}_{s,u}.$$

Fixons $u \in \mathcal{U}_0$ et $s \in]0, \infty[$. La constante C apparaissant dans l'énoncé de la proposition 6.2 et le diamètre du compact J_u sont strictement positifs. Par conséquent, pour déterminer la dimension de Hausdorff du compact K_u , il suffit de s'intéresser à la question de savoir si les écoulements $E_{s,u}$ et $\tilde{E}_{s,u}$ sont nuls ou strictement positifs. On se ramène ainsi à étudier des quantités numériques, sans devoir se préoccuper de la géométrie des compacts intervenant dans la construction. Cette observation conduit en outre au corollaire suivant.

Corollaire 6.1

Soient $u \in \mathcal{U}_0$ et $s \in]0, \infty[$. Les écoulements $E_{s,u}$ et $\tilde{E}_{s,u}$ et les dimensions $\dim K_u$ et $\dim \Theta$ sont des variables aléatoires mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}$.

Ce résultat est lui aussi prouvé dans la section VI. Il indique en particulier qu'on peut licitement s'intéresser à la loi sous $\mathbb{P}$ de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ .

II.2 Chaînes de Markov indexées par un arbre

La section I annonce l'existence d'une mesure $\mathbb{M}$ sous laquelle le processus X est une chaîne de Markov indexée par l'arbre $\mathcal{U}_0$. La proposition 6.3 énoncée ci-après justifie l'existence de la mesure $\mathbb{M}$ et introduit une famille de mesures qui lui sont analogues.

Commençons par rappeler quelques notations de la section I et par en introduire de nouvelles. Fixons un entier naturel j_0 . Alors, $\mathcal{U}_{j_0}$ désigne l'arbre défini par (6.3) en remplaçant la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ par la suite $(n_{j_0+j})_{j \in \mathbb{N}^*}$. Dans cet arbre, chaque sommet de génération $j \in \mathbb{N}$ possède exactement n_{j_0+j+1} fils. Considérons de surcroît l'ensemble $M^{j_0} = \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0}}$, muni de la topologie produit. Pour toute application $\omega = (\omega_u)_{u \in \mathcal{U}_{j_0}}$ dans M^{j_0} , posons $X_u^{j_0}(\omega) = \omega_u$. Cela permet d'introduire la tribu

$$\mathcal{M}^{j_0} = \sigma(X_u^{j_0}, u \in \mathcal{U}_{j_0}).$$

Par ailleurs, pour chaque $u \in \mathcal{U}_{j_0}$, l'ensemble $u\mathcal{U}_{j_0+\langle u \rangle}$ est le sous-arbre de $\mathcal{U}_{j_0}$ issu du sommet u et la tribu

$$\mathcal{G}_u^{j_0} = \sigma(X_v^{j_0}, v \in \mathcal{U}_{j_0} \setminus (u\mathcal{U}_{j_0+\langle u \rangle}^*))$$

peut se voir comme le passé avant u dans l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}$. De plus, les fils de u sont les sommets uk , pour $k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}$. Rappelons aussi que $\nu_{t,j}$ désigne une mesure de probabilité sur $\{0, 1\}^{n_{j+1}}$, quels que soient $t \in \{0, 1\}$ et $j \in \mathbb{N}$. Le résultat suivant est prouvé dans la section VI.

Proposition 6.3

Pour tous $t_\emptyset \in \{0, 1\}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$, il existe sur $(M^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0})$ une unique mesure de probabilité $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ sous laquelle :

- on a presque sûrement $X_\emptyset^{j_0} = t_\emptyset$;
- pour tout $u \in \mathcal{U}_{j_0}$, la loi conditionnelle du vecteur $(X_{uk}^{j_0})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}$ conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_u^{j_0}$ est donnée par la mesure $\nu_{X_u^{j_0}, j_0+\langle u \rangle}$.

Sous la mesure $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$, le processus des coordonnées X^{j_0} de $(M^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0})$ est appelé chaîne de Markov d'état initial $t_\emptyset$ dont les transitions sont données par la famille de mesures de probabilité $(\nu_{t, j_0+j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$.

Dans le cas où j_0 est nul, on retrouve les objets introduits dans la section I. Ainsi, l'espace $(M^0, \mathcal{M}^0)$ et le processus X^0 s'identifient respectivement à l'espace $(M, \mathcal{M})$ et

au processus X , tandis que la mesure $\mathbb{M}_{1,0}$ dont la proposition 6.3 prouve l'existence n'est autre que la mesure $\mathbb{M}$. De plus, pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$, les tribus $\mathcal{G}_u^0$ et $\mathcal{G}_u$ sont les mêmes. Ainsi, conformément à ce qui est annoncé dans la section I, sous la mesure $\mathbb{M}$, on a presque sûrement $X_\emptyset = 1$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_0$, la loi conditionnelle du vecteur $(X_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{\langle u \rangle} + 1\}}$ conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_u$ est donnée par la mesure $\nu_{X_u, \langle u \rangle}$. Dans la suite de ce chapitre, on supposera la plupart du temps que l'entier j_0 est nul.

Sur l'espace $(M^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0})$, introduisons maintenant la filtration $(\mathcal{M}_j^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathcal{M}_j^{j_0} = \sigma(X_u^{j_0}, u \in \mathcal{U}_{j_0}, \langle u \rangle \leq j). \quad (6.15)$$

De plus, pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}$, considérons le processus $X_{u\bullet}^{j_0} = (X_{uv}^{j_0})_{v \in \mathcal{U}_{j_0 + \langle u \rangle}}$. Il s'agit du processus de $(M^{j_0 + \langle u \rangle}, \mathcal{M}^{j_0 + \langle u \rangle})$ qui correspond aux états qu'attribue le processus X^{j_0} aux sommets figurant dans le sous-arbre de $\mathcal{U}_{j_0}$ qui est issu du sommet u . Nous utiliserons à de nombreuses reprises la propriété de branchement suivante.

Proposition 6.4

Soient $t_\emptyset \in \{0, 1\}$ et $j_0, j \in \mathbb{N}$. Sous la probabilité $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$, conditionnellement à la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$, les processus $X_{u\bullet}^{j_0}$, pour $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ de génération j , sont indépendants et leur loi conditionnelle est $\mathbb{M}_{X_u^{j_0}, j_0 + j}$. De manière équivalente,

$$\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} - \text{p.s.} \quad \text{Loi} \left((X_{u\bullet}^{j_0})_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mid \mathcal{M}_j^{j_0} \right) = \bigotimes_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_u^{j_0}, j_0 + j}.$$

Bien que ce résultat soit assez intuitif, sa preuve est plutôt technique. Par conséquent, nous préférons reporter celle-ci à la section VI.

Dans le cas où j_0 est nul, on obtient une filtration sur l'espace $(M, \mathcal{M})$ en posant

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j^0 = \sigma(X_u, u \in \mathcal{U}_0, \langle u \rangle \leq j). \quad (6.16)$$

En outre, pour tout entier naturel j , la proposition 6.4 indique que sous la probabilité $\mathbb{M}$, conditionnellement à la tribu $\mathcal{M}_j$, les processus $X_{u\bullet}$, pour $u \in \mathcal{U}_0$ de génération j , sont indépendants et leur loi conditionnelle est $\mathbb{M}_{X_u, j}$.

II.3 Lien avec les processus de Galton-Watson en environnement variable

La partie II.1 indique que le processus $Z_{u\bullet}$ défini par (6.12) intervient naturellement dans l'étude de la vacuité de l'ensemble Θ . Dans cette partie, nous montrons que ce processus peut se voir comme un processus de Galton-Watson en environnement variable. Ces processus sont définis à la manière des processus de Galton-Watson classiques à ceci près que la loi de reproduction peut dépendre de la génération de l'individu considéré. Nous renvoyons à [98] pour plus de détails concernant les propriétés élémentaires de ces processus et leurs liens avec certains problèmes d'origine probabiliste (étude de diffusions, de processus de branchement en environnement aléatoire, *etc.*).

Afin d'appliquer la proposition 6.4 au processus $Z_{u\bullet}$, il est nécessaire d'introduire plusieurs notations supplémentaires. Pour tous $j_0 \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{U}_{j_0}$, posons

$$\tau_u^{j_0} = \left\{ v \in u\mathcal{U}_{j_0 + \langle u \rangle} \mid \forall j \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle\} \quad X_{v_1 \dots v_j}^{j_0} = 1 \right\}. \quad (6.17)$$

Quand j_0 est nul, on retrouve l'ensemble τ_u défini par (6.7). Dans ce contexte, l'analogue du processus $Z_{u,\bullet}$ est le processus $Z_{u,\bullet}^{j_0} = (Z_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ défini par

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad Z_{u,j}^{j_0} = \# \{v \in \tau_u^{j_0} \mid \langle v \rangle = j\}. \quad (6.18)$$

Fixons maintenant un sommet u dans $\mathcal{U}_0$. On observe aisément que le processus $Z_{u,\bullet}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{M}_j)_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, c'est-à-dire que la variable aléatoire $Z_{u,j}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$ définie par (6.16) quel que soit $j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}$. En particulier, il ne dépend que du processus X , si bien que sa loi sous $\mathbb{P}$ est en fait sa loi sous $\mathbb{M}$.

Si le processus X assigne l'état 0 au sommet u , le processus $Z_{u,\bullet}$ est nul, puisque τ_u est vide. Intéressons-nous au cas contraire où le processus X assigne au mot u l'état 1 et supposons $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$. La proposition 6.4 garantit alors que la loi sous $\mathbb{M}$ du processus $(Z_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ conditionnellement à l'événement $\{X_u = 1\}$ est égale à la loi sous $\mathbb{M}_{1,\langle u \rangle}$ du processus $(Z_{\emptyset,j-\langle u \rangle}^{(u)})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$. Ainsi, pour étudier le processus $Z_{u,\bullet}$ sous $\mathbb{M}$, conditionnellement à $\{X_u = 1\}$, il suffit de considérer le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{(u)}$ lorsqu'il est tiré sous $\mathbb{M}_{1,\langle u \rangle}$.

En conséquence, pour tout entier naturel j_0 , décrivons le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ sous la mesure $\mathbb{M}_{1,j_0}$. Dans cette perspective, considérons les fonctions

$$\forall t \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \varphi_{t,j} : z \mapsto \int_{\{0,1\}^{n_{j+1}}} z^{x_1 + \dots + x_{n_{j+1}}} \nu_{t,j}(\mathrm{d}x) \quad (6.19)$$

où les mesures $\nu_{t,j}$ sont les probabilités de transition conduisant aux mesures de probabilité $\mathbb{M}_{t\emptyset,j_0}$ dont la proposition 6.3 assure l'existence. On dispose alors du résultat suivant. Dans son énoncé, $\mathbb{M}_{1,j_0}[\cdot]$ désigne (avec un léger abus de notation) l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{M}_{1,j_0}$ et D est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur à 1.

Proposition 6.5

Soit $j_0 \in \mathbb{N}$. Sous la mesure de probabilité $\mathbb{M}_{1,j_0}$, le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ défini par (6.18) est un processus de Galton-Watson en environnement variable dont les lois de reproduction ont pour fonctions génératrices φ_{1,j_0+j} pour $j \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ est une chaîne de Markov inhomogène à espace d'états $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \mathbb{M}_{1,j_0} \left[z^{Z_{\emptyset,j+1}^{j_0}} \mid Z_{\emptyset,0}^{j_0}, \dots, Z_{\emptyset,j}^{j_0} \right] = (\varphi_{1,j_0+j}(z))^{Z_{\emptyset,j}^{j_0}}.$$

En particulier,

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \mathbb{M}_{1,j_0} \left[z^{Z_{\emptyset,j}^{j_0}} \right] = \varphi_{1,j_0} \circ \dots \circ \varphi_{1,j_0+j-1}(z).$$

La proposition précédente est prouvée dans la section VI. Elle suggère en particulier d'utiliser la théorie des processus de Galton-Watson en environnement variable afin d'obtenir des résultats sur les processus $Z_{u,\bullet}$ pour $u \in \mathcal{U}_0$, puis sur l'ensemble Θ .

III Probabilité de vacuité

Dans cette section, nous nous intéressons à la probabilité pour que l'ensemble Θ défini par (6.9) soit vide. Nous obtenons notamment une minoration de cette probabilité et nous en déduisons des conditions nécessaires pour que Θ soit presque sûrement vide ou vide avec probabilité non nulle.

D'après les résultats de la section II, ce problème se ramène à la question de savoir avec quelle probabilité les processus $Z_{u,\bullet}$ définis par (6.12) admettent une limite nulle à l'infini. Rappelons que le processus $Z_{u,\bullet}$ est nul pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_0$ vérifiant $X_u = 0$. À l'inverse, si $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$, la loi sous $\mathbb{M}$, conditionnellement à l'événement $\{X_u = 1\}$, du processus $(Z_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ est égale à la loi sous $\mathbb{M}_{1,\langle u \rangle}$ du processus $(Z_{\emptyset,j-\langle u \rangle}^{(u)})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$. Pour tout entier naturel j_0 , notons

$$f_{j_0} = \mathbb{M}_{1,j_0} (Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0} \rightarrow 0) \quad (6.20)$$

la probabilité sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$ que le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ admette une limite nulle à l'infini. Avec ces notations, $f_{\langle u \rangle}$ apparaît comme la probabilité sous $\mathbb{M}$ que le processus $Z_{u,\bullet}$ soit de limite nulle à l'infini, conditionnellement à l'événement $\{X_u = 1\}$.

Fixons $j_0 \in \mathbb{N}$. En vertu de la proposition 6.5, on observe que f_{j_0} est la probabilité d'extinction d'un processus de Galton-Watson en environnement variable. Les résultats de A. Agresti [1] et T. Fujimagari [72] concernant les probabilités d'extinction des processus de ce type conduisent à poser

$$\underline{\sigma}_{j_0} = \max \left(1, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{1,j_0+j}(1) + \varphi_{1,j_0+j}(0) - 1}{\varphi'_{1,j_0+j}(1) \prod_{i=0}^j \varphi'_{1,j_0+i}(1)} + \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^{j-1} \varphi'_{1,j_0+i}(1)} \right) \quad (6.21)$$

où les fonctions $\varphi_{1,j_0}, \varphi_{1,j_0+1}, \dots$ sont définies par (6.19). On convient que $\underline{\sigma}_{j_0}$ est infini si $\varphi'_{1,j_0+i}(1)$ s'annule pour un certain entier naturel i . Dès lors, en posant

$$\underline{j} = \inf \{j \in \mathbb{N} \mid \forall j' \in \mathbb{N}_j \quad \varphi'_{1,j'}(1) > 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (6.22)$$

on a $\underline{\sigma}_{j_0} = \infty$ pour j_0 strictement inférieur à $\underline{j}$. Dans ce cas, on a nécessairement $f_{j_0} = 1$, comme l'indique le lemme suivant.

Lemme 6.1

Pour tout entier naturel j_0 , on a simultanément

$$f_{j_0} = \varphi_{1,j_0}(f_{j_0+1}) \quad \text{et} \quad f_{j_0} \geq 1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j_0}}.$$

// Fixons $j_0 \in \mathbb{N}$ et notons $S_1^{j_0}$ l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ de génération 1 vérifiant $X_u^{j_0} = 1$. Le sous-arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ de $\mathcal{U}_{j_0}$ défini par (6.17) s'écrit

$$\tau_{\emptyset}^{j_0} = \{\emptyset\} \sqcup \bigsqcup_{u \in S_1^{j_0}} \tau_u^{j_0}$$

de sorte que $Z_{\emptyset,j}^{j_0}$ est égal à la somme sur $u \in S_1^{j_0}$ des $Z_{u,j}^{j_0}$, quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$. Il en ressort que le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ admet une limite nulle à l'infini si et seulement si les processus $Z_{u,\bullet}^{j_0}$, pour $u \in S_1^{j_0}$, admettent tous une limite nulle à l'infini. Ainsi,

$$f_{j_0} = \mathbb{M}_{1,j_0} (Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0} \rightarrow 0) = \mathbb{M}_{1,j_0} (\forall u \in S_1^{j_0} \quad Z_{u,\bullet}^{j_0} \rightarrow 0).$$

Pour évaluer le membre de droite, conditionnons par rapport à la tribu $\mathcal{M}_1^{j_0}$ définie par (6.15). La proposition 6.4 garantit que

$$\mathbb{M}_{1,j_0} (\forall u \in S_1^{j_0} \quad Z_{u,\bullet}^{j_0} \rightarrow 0 \mid \mathcal{M}_1^{j_0}) = \mathbb{M}_{1,j_0+1} (Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0+1} \rightarrow 0)^{\#S_1^{j_0}} = f_{j_0+1}^{X_1^{j_0} + \dots + X_{n_{j_0+1}}^{j_0}}.$$

On obtient la relation de récurrence attendue en prenant l'espérance sous la probabilité $\mathbb{M}_{1,j_0}$.

Pour minorer f_{j_0} , il convient de remarquer que l'événement $\{Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0} \rightarrow 0\}$ est égal à l'union croissante sur $j \in \mathbb{N}$ des événements $\{Z_{\emptyset,j}^{j_0} = 0\}$, ce qui conduit à

$$f_{j_0} = \lim_{j \uparrow \infty} \uparrow \varphi_{1,j_0} \circ \dots \circ \varphi_{1,j_0+j-1}(0)$$

grâce à la proposition 6.5. Le théorème 2.1 et la proposition 3.1 de [72] indiquent finalement que cette dernière limite est minorée par $1 - 1/\underline{\sigma}_{j_0}$. //

Nous pouvons désormais expliciter la relation entre la probabilité que l'ensemble Θ soit vide et les termes de la suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de probabilités d'extinction. Rappelons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble S_j est défini dans la partie II.1 comme l'ensemble des sommets de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_0$ auxquels le processus X attribue l'état 1.

Proposition 6.6

La probabilité que l'ensemble Θ soit vide vérifie

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[f_j^{\#S_j}].$$

// D'après (6.9) et le lemme de König, l'ensemble Θ est vide si et seulement si le processus $Z_{u,\bullet}$ admet une limite nulle à l'infini quel que soit le sommet u de $\mathcal{U}_0$. Dès lors,

$$\{\Theta = \emptyset\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \{\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle \leq j \implies Z_{u,\bullet} \rightarrow 0\}.$$

Fixons $j \in \mathbb{N}$, supposons que $Z_{u,\bullet} \rightarrow 0$ pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération égale à j et montrons que cette propriété est encore vraie pour tout sommet de génération inférieure à j . Considérons à cet effet un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération inférieure à j . Pour tout sommet v de τ_u de génération $j' \geq j$, il existe un sommet w de τ_u de génération j tel que v appartienne à τ_w . Ainsi,

$$\forall j' \in \mathbb{N}_j \quad Z_{u,j'} \leq \sum_{\substack{w \in \tau_u \\ \langle w \rangle = j}} Z_{w,j'}.$$

Quand j' tend vers l'infini, chaque terme de la somme apparaissant dans le membre de droite tend vers 0, de sorte que $Z_{u,\bullet} \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\{\Theta = \emptyset\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \{\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies Z_{u,\bullet} \rightarrow 0\}.$$

Cependant, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération j qui n'appartient pas à S_j , le processus $Z_{u,\bullet}$ admet nécessairement une limite nulle à l'infini. De plus, chaque événement figurant dans le membre de droite ne dépend que du processus X . Il en résulte que

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}(\forall u \in S_j \quad Z_{u,\bullet} \rightarrow 0).$$

Fixons un entier naturel j et conditionnons par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$ définie par (6.16). La proposition 6.4 implique que

$$\mathbb{M}(\forall u \in S_j \quad Z_{u,\bullet} \rightarrow 0 \mid \mathcal{M}_j) = \mathbb{M}_{1,j}(Z_{\emptyset,\bullet}^j \rightarrow 0)^{\#S_j} = f_j^{\#S_j}.$$

On conclut en prenant l'espérance sous la probabilité $\mathbb{M}$ puis en faisant tendre l'entier j vers l'infini. //

Le lemme 6.1 indique que $f_j = 1$ pour tout entier naturel j strictement inférieur à $\underline{j}$. Par conséquent, la proposition 6.6 permet d'affirmer que

$$\underline{j} = \infty \implies \mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = 1. \quad (6.23)$$

Le théorème 6.1 énoncé ci-après donne une condition suffisante plus faible pour que l'ensemble Θ soit presque sûrement vide.

Supposons provisoirement que la condition suivante est vérifiée :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad f_j > 0. \quad (6.24)$$

Le cas où la condition (6.24) n'est pas remplie est traité à la fin de cette section. Par ailleurs, observons que le nombre de sommets de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_0$ est

$$\bar{n}_j = \prod_{i=1}^j n_i \quad (6.25)$$

pour tout entier naturel j . Le résultat qui suit donne une minoration de la probabilité que l'ensemble Θ soit vide en fonction des suites $(\bar{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et de la suite de fonctions $(\varphi_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ définie par (6.19).

Proposition 6.7

Supposons la condition (6.24) est satisfaite. La probabilité que Θ soit vide vérifie

$$\forall j_0 \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\Theta = \emptyset) \geq \mathbb{M} [f_{j_0}^{\#S_{j_0}}] \prod_{j=j_0}^{\infty} \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j}.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) \geq f_0 \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j}.$$

// Soit j un entier naturel. Le nombre de sommets de génération $j+1$ de l'arbre $\mathcal{U}_0$ auxquels le processus X assigne l'état 1 est

$$\#S_{j+1} = \sum_{\substack{u \in \mathcal{U}_0 \\ \langle u \rangle = j+1}} X_u = \sum_{\substack{w \in \mathcal{U}_0 \\ \langle w \rangle = j}} \sum_{k=1}^{n_{j+1}} X_{wk}. \quad (6.26)$$

En conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$ et en utilisant la proposition 6.4, il en ressort que

$$\mathbb{M} [f_{j+1}^{\#S_{j+1}} \mid \mathcal{M}_j] = \prod_{\substack{w \in \mathcal{U}_0 \\ \langle w \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_w, j} [f_{j+1}^{X_1^j + \dots + X_{n_{j+1}}^j}] = \varphi_{1,j}(f_{j+1})^{\#S_j} \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j - \#S_j}.$$

D'après le lemme 6.1, on a $\varphi_{1,j}(f_{j+1}) = f_j$. En outre, sous la condition (6.24), on a $\varphi_{0,j}(f_{j+1}) \in]0, 1]$, de sorte que $\varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j - \#S_j} \geq \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j}$. En prenant l'espérance sous la probabilité $\mathbb{M}$, on obtient

$$\mathbb{M} [f_{j+1}^{\#S_{j+1}}] \geq \mathbb{M} [f_j^{\#S_j}] \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j}.$$

Une récurrence élémentaire et la proposition 6.6 permettent de conclure. //

L'assertion (6.23) indique que l'ensemble Θ est vide avec probabilité 1 si $\underline{j}$ est infini. Le résultat suivant donne une condition suffisante plus faible à la vacuité presque sûre de Θ . Il apporte de surcroît une condition suffisante pour que l'ensemble Θ soit vide avec probabilité non nulle. Le théorème 6.3, exposé ultérieurement, discute de la nécessité de ces conditions suffisantes.

Théorème 6.1

Supposons la condition (6.24) vérifiée.

(i). On a $\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) > 0$ si

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=j_0}^{\infty} \left(-\bar{n}_j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j+1}} \right) \right) < \infty.$$

(ii). On a $\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = 1$ si une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $\underline{j} = \infty$;

(b) $0 < \underline{j} < \infty$ et pour tout entier $j \geq \underline{j} - 1$,

$$\varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j+1}} \right) = 1 ; \tag{6.27}$$

(c) $0 < \underline{j} < \infty$ et $\mathbb{M}[\#S_{\underline{j}-1}] = \bar{n}_{\underline{j}-1}$ et (6.27) tient pour tout entier $j \geq \underline{j}$;

(d) $\underline{j} = 0$ et $\underline{\sigma}_0 = \infty$ et (6.27) tient pour tout entier naturel j .

// Supposons que la somme $\sum_{j \geq j_0} (-\bar{n}_j \log \varphi_{0,j}(1 - 1/\underline{\sigma}_{j+1}))$ est finie pour un certain entier naturel j_0 . Le lemme 6.1 et la croissance sur $[0, 1]$ des fonctions $\varphi_{0,j}$, pour $j \in \mathbb{N}$, conduisent alors à

$$\prod_{j=j_0}^{\infty} \varphi_{0,j}(f_{j+1})^{\bar{n}_j} \geq \prod_{j=j_0}^{\infty} \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j+1}} \right)^{\bar{n}_j} > 0.$$

En outre, sous la condition (6.24), on a toujours $\mathbb{M}[f_{j_0}^{\#S_{j_0}}] > 0$. La proposition 6.7 permet de conclure que Θ est vide avec probabilité non nulle.

Si la condition (a) est vérifiée, l'ensemble Θ est presque sûrement vide d'après (6.23). Supposons ensuite que la condition (b) est satisfaite. Comme

$\sigma_{\underline{j}-1} = \infty$, le lemme 6.1 assure que $f_{\underline{j}-1} = 1$. La proposition 6.7, le lemme 6.1 et la croissance des $\varphi_{0,j}$ permettent alors d'écrire que

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) \geq \mathbb{M} \left[f_{\underline{j}-1}^{\#S_{\underline{j}-1}} \right] \prod_{j=\underline{j}-1}^{\infty} \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\sigma_{j+1}} \right)^{\bar{n}_j} = 1.$$

Supposons la condition (c) vérifiée. En particulier, $\#S_{\underline{j}-1}$ vaut $\mathbb{M}$ -presque sûrement $\bar{n}_{\underline{j}-1}$. En utilisant l'assertion (6.28) ci-après au rang $\underline{j} - 1$ puis en prenant l'espérance sous $\mathbb{M}$, on en déduit que $\mathbb{M}[\#S_{\underline{j}}] = \bar{n}_{\underline{j}-1} \varphi'_{1,\underline{j}-1}(1)$. Or, ce dernier terme est nul d'après (6.22). Ainsi, $\#S_{\underline{j}}$ est $\mathbb{M}$ -presque sûrement nul. L'assertion (6.24), la proposition 6.7, le lemme 6.1 et la croissance des $\varphi_{0,j}$ donnent donc

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) \geq \mathbb{M} \left[f_{\underline{j}}^{\#S_{\underline{j}}} \right] \prod_{j=\underline{j}}^{\infty} \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\sigma_{j+1}} \right)^{\bar{n}_j} = 1.$$

Enfin, si la condition (d) est remplie, le lemme 6.1 implique que $f_0 = 1$ et le résultat découle directement de la proposition 6.7, du lemme 6.1 et de la croissance des $\varphi_{0,j}$. //

Il faut prendre garde au fait que certains termes de la somme apparaissant dans l'assertion (i) peuvent être égaux à l'infini. C'est pourquoi on autorise cette somme à partir d'un entier j_0 quelconque. Par ailleurs, on peut expliciter la condition $\mathbb{M}[\#S_{j-1}] = n_{j-1}$ figurant dans l'assertion (ii) en utilisant la famille de fonctions $(\varphi_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$ grâce au lemme suivant. Il donne plus généralement l'espérance du nombre de sommets de l'arbre $\mathcal{U}_0$ de génération donnée auxquels le processus X attribue l'état 1. Notons que ce résultat est vrai même si la condition (6.24) n'est pas vérifiée.

Lemme 6.2

Pour tout entier naturel j , on a

$$\mathbb{M}[\#S_j] = \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi'_{1,i}(1) - \varphi'_{0,i}(0)) + \sum_{k=0}^{j-1} \bar{n}_k \varphi'_{0,k}(1) \prod_{i=k+1}^{j-1} (\varphi'_{1,i}(1) - \varphi'_{0,i}(0)).$$

// Soit j un entier naturel. En conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$ et en utilisant l'assertion (6.26) et la proposition 6.4, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{M}[\#S_{j+1} \mid \mathcal{M}_j] &= \sum_{\substack{w \in \mathcal{U}_0 \\ \langle w \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_w, j} [X_1^j + \dots + X_{n_{j+1}}^j] \\ &= \varphi'_{1,j}(1) \cdot \#S_j + \varphi'_{0,j}(1) \cdot (\bar{n}_j - \#S_j). \end{aligned} \tag{6.28}$$

On conclut en prenant l'espérance sous la probabilité $\mathbb{M}$ puis en raisonnant par récurrence. //

Supposons désormais que la condition (6.24) n'est pas vérifiée et notons j_* le plus petit entier naturel vérifiant $f_{j_*} = 0$. Il résulte du lemme 6.1 que $f_j = 0$ et $\varphi_{1,j}(0) = 0$ pour tout entier $j \geq j_*$. Par conséquent, la proposition 6.6 donne

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}(\#S_j = 0).$$

Cependant, pour tout entier $j \geq j_*$, on a $\#S_{j+1} = 0$ si et seulement $X_{wk} = 0$ pour tout sommet $w \in \mathcal{U}_0$ de génération j et tout entier $k \in \{1, \dots, n_{j+1}\}$. En conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$ et en utilisant la proposition 6.4, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\#S_{j+1} = 0 \mid \mathcal{M}_j) &= \prod_{\substack{w \in \mathcal{U}_0 \\ \langle w \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_w, j}(\forall k \in \{1, \dots, n_{j+1}\} \quad X_k = 0) \\ &= \varphi_{1,j}(0)^{\#S_j} \varphi_{0,j}(0)^{\bar{n}_j - \#S_j} = \varphi_{0,j}(0)^{\bar{n}_j} \mathbf{1}_{\{\#S_j=0\}}. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance sous $\mathbb{M}$, on a $\mathbb{M}(\#S_{j+1} = 0) = \mathbb{M}(\#S_j = 0) \varphi_{0,j}(0)^{\bar{n}_j}$. On en conclut, à l'aide d'une récurrence élémentaire, que

$$\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \mathbb{M}(\#S_{j_*} = 0) \prod_{j=j_*}^{\infty} \varphi_{0,j}(0)^{\bar{n}_j}.$$

Ainsi, pour déterminer la probabilité que l'ensemble Θ soit vide, il suffit de connaître la probabilité d'avoir $\#S_{j_*} = 0$, ce qui est en général possible quand la famille de mesures $(\nu_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$ est donnée explicitement.

IV Majoration de la dimension

Cette section est consacrée à la majoration de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ défini par (6.9). Pour tout réel s et tout entier naturel j , notons

$$\alpha_{s,j} = \int_{\{0,1\}^{n_{j+1}}} \int_{[\underline{\beta}, \bar{\beta}]^{n_{j+1}}} \sum_{k=1}^{n_{j+1}} \ell_k^s x_k \mu_j(d\ell) \nu_{1,j}(dx). \quad (6.29)$$

Rappelons que pour tout entier naturel j , la mesure $\nu_{1,j}$ intervient dans la construction de la probabilité $\mathbb{M}$ sous laquelle le processus X est une chaîne de Markov indexée par $\mathcal{U}_0$ et que la mesure μ_j , introduite dans la section I, donne la loi commune des rapports de contraction $(L_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j+1}\}}$ définis par (6.13) pour les sommets $u \in \mathcal{U}_0$ de génération j . Le résultat suivant fournit quelques propriétés élémentaires de la famille $(\alpha_{s,j})_{(s,j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}}$ et de la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Dans son énoncé, $\varphi'_{1,j}(1)$ s'obtient pour tout $j \in \mathbb{N}$ à partir de (6.19).

Lemme 6.3

(i). Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et tous réels s et s' vérifiant $s \leq s'$,

$$0 \leq \underline{\beta}^{s'-s} \alpha_{s,j} \leq \alpha_{s',j} \leq \bar{\beta}^{s'-s} \alpha_{s,j}.$$

(ii). Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{0,j} = \varphi'_{1,j}(1)$.

(iii). Il existe un réel $\kappa > 0$ tel que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{d,j} \leq \kappa \quad \text{et} \quad n_{j+1} \leq \frac{\kappa}{\underline{\beta}^d}.$$

// Les assertions (i) et (ii) sont triviales. Prouvons l'assertion (iii). Rappelons que les conditions portant sur la famille de compacts $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$ intervenant dans la construction sont énoncées dans la section I. Ces conditions

impliquent que

$$\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \bigcup_{k=1}^{n_{\langle u \rangle}+1} \text{int } J_{uk} \subset J_u.$$

En vertu de l'assertion (6.5), il existe donc un réel $\kappa > 0$ tel que pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$,

$$\sum_{k=1}^{n_{\langle u \rangle}+1} |J_{uk}|^d \leq \kappa |J_u|^d. \quad (6.30)$$

Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le vecteur $(|J_{uk}|/|J_u|)_{k \in \{1, \dots, n_{\langle u \rangle}+1\}}$ a pour loi $\mu_{\langle u \rangle}$. On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et μ_j -presque tout $\ell \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]^{n_{j+1}}$,

$$\sum_{k=1}^{n_{j+1}} \ell_k^d \leq \kappa.$$

Par conséquent, $\alpha_{d,j} \leq \kappa$. En outre, pour un sommet quelconque u de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_0$, les assertions (6.4) et (6.30) conduisent à $n_j \underline{\beta}^d \leq \kappa$. Comme $\underline{\beta}$ est strictement positif, il vient $n_j \leq \kappa / \underline{\beta}^d$. //

Introduisons maintenant un élément d_* de $\{-\infty\} \cup [0, \infty[$ destiné à fournir une majoration presque sûre de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ . Si le paramètre $\underline{j}$ donné par (6.22) est infini, posons $d_* = -\infty$. Au contraire, si $\underline{j}$ est fini, commençons par considérer la fonction ρ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\rho : s \mapsto \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{i=\underline{j}}^{j-1} \log \alpha_{s,i}. \quad (6.31)$$

Cette fonction est correctement définie et prend ses valeurs dans $[-\infty, \infty[$ car

$$\forall i \in \mathbb{N}_{\underline{j}} \quad 0 < \varphi'_{1,i}(1) \min(\underline{\beta}^s, \overline{\beta}^s) \leq \alpha_{s,i} \leq \kappa \max(\underline{\beta}^{s-d}, \overline{\beta}^{s-d}) \quad (6.32)$$

d'après l'assertion (6.22) et le lemme 6.3. Si $\rho(0) < 0$, posons à nouveau $d_* = -\infty$. En revanche, si $\rho(0) \geq 0$, la fonction ρ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même d'après le lemme 6.3 et le fait que $\overline{\beta} < 1$, de sorte qu'on peut poser

$$d_* = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid \rho(s) > 0\} = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \rho(s) < 0\} \in [0, \infty[. \quad (6.33)$$

Donnons une autre expression de d_* . Si $\underline{j}$ est fini, la fonction $s \mapsto \log \alpha_{s,\underline{j}} + \dots + \log \alpha_{s,j-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même pour tout entier $j > \underline{j}$, d'après le lemme 6.3 et le fait que $\overline{\beta} < 1$. Elle admet donc un unique zéro noté d_j . On montre alors aisément que

$$d_* = \liminf_{j \rightarrow \infty} d_j$$

si cette dernière limite inférieure est positive et que $d_* = -\infty$ dans le cas contraire. Le résultat suivant indique que d_* majore presque sûrement la dimension de Θ .

Théorème 6.2

| Presque sûrement, $\dim \Theta \leq d_*$.

La suite de cette section s'organise ainsi. Nous démontrons tout d'abord le théorème 6.2. Nous établissons ensuite quelques résultats complémentaires. Ceux-ci nous permettent d'une part de fournir une forme de réciproque au théorème 6.3 en donnant des conditions suffisantes pour que l'ensemble Θ soit vide avec probabilité non nulle ou avec probabilité 1. D'autre part, ils préparent les preuves des résultats énoncés dans la section V.

IV.1 Preuve du théorème 6.2

La définition (6.9) de Θ implique que la dimension de Hausdorff de cet ensemble est le supremum des dimensions des compacts K_u définis par (6.10) pour u parcourant $\mathcal{U}_0$. Pour majorer la dimension de l'ensemble Θ , il suffit donc de savoir majorer la dimension des ensembles K_u .

D'après le lemme de König, l'ensemble K_u est vide si et seulement si le processus $Z_{u,\bullet}$ défini par (6.12) est de limite nulle à l'infini. Comme ce dernier événement ne dépend que du processus X , la proposition 6.4 donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\dim K_u = -\infty) &= \mathbb{M} [\mathbb{M}(Z_{u,\bullet} \rightarrow 0 \mid \mathcal{M}_{\langle u \rangle})] = \mathbb{M} [\mathbb{M}_{X_u, \langle u \rangle}(Z_{\emptyset, \bullet}^{(u)} \rightarrow 0)] \\ &= \mathbb{M}(X_u = 0) + f_{\langle u \rangle} \mathbb{M}(X_u = 1), \end{aligned} \quad (6.34)$$

où $f_{\langle u \rangle}$ est la probabilité d'extinction définie par (6.20). Si la génération de u est strictement inférieure à $\underline{j}$, le lemme 6.1 indique que $f_{\langle u \rangle} = 1$, si bien que la dimension du compact K_u vaut $-\infty$ avec probabilité 1. Ainsi,

$$\text{p.s.} \quad \dim \Theta = \sup_{\substack{u \in \mathcal{U}_0 \\ \langle u \rangle \geq \underline{j}}} \dim K_u. \quad (6.35)$$

Le problème est donc de majorer la dimension du compact K_u pour tout sommet u de génération supérieure à $\underline{j}$ de l'arbre $\mathcal{U}_0$. On peut se restreindre au cas où $\underline{j}$ est fini, puisque l'assertion (6.35) devient $\dim \Theta = -\infty \leq d_*$ dans le cas contraire.

Fixons un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$ et posons, pour tout réel $s \geq 0$ et tout entier $j \geq \langle u \rangle$,

$$Z_{s,u,j} = \sum_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle v \rangle = j}} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^j L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \quad \text{et} \quad W_{s,u,j} = \frac{Z_{s,u,j}}{\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \alpha_{s,i}} \quad (6.36)$$

où le sous-arbre τ_u est donné par (6.7), les rapports de contraction $L_{v_1 \dots v_i}$ sont définis par (6.13) et les coefficients $\alpha_{s,i}$ sont donnés par (6.29). Le quotient $W_{s,u,j}$ est correctement défini en vertu de (6.32). En outre, le processus $Z_{0,u,\bullet} = (Z_{0,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ s'identifie au processus $Z_{u,\bullet}$ donné par (6.12). Considérons aussi

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathcal{F}_j = \sigma(X_u, |J_u|, u \in \mathcal{U}_0, \langle u \rangle \leq j).$$

On obtient de la sorte une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Dans ce qui suit, $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Le processus $W_{s,u,\bullet} = (W_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ peut se voir comme une renormalisation de $Z_{s,u,\bullet}$. Il est donc naturel d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 6.4

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout $s \in [0, \infty[$ et tout $u \in \mathcal{U}_0$ vérifiant $\langle u \rangle \geq \underline{j}$, le processus $W_{s,u,\bullet}$ est une martingale positive par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_j)_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$.

// Soit j un entier supérieur à $\langle u \rangle$. Un sommet w de $\mathcal{U}_0$ de génération $j+1$ appartient à τ_u si et seulement si $\pi(w) \in \tau_u$ et $X_w = 1$. Par conséquent,

$$Z_{s,u,j+1} = \sum_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle u \rangle = j}} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^j L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \sum_{k=1}^{n_{j+1}} L_{vk}^s X_{vk}. \quad (6.37)$$

Conditionnons par rapport à la tribu $\mathcal{F}_j$. En utilisant la proposition 6.4 et l'indépendance des rapports de contraction et du processus X , on obtient

$$\mathbb{E}[Z_{s,u,j+1} \mid \mathcal{F}_j] = \alpha_{s,j} Z_{s,u,j}.$$

Le résultat découle directement de la définition du processus $W_{s,u,\bullet}$. //

Rappelons que le théorème de Doob indique que toute surmartingale positive converge presque sûrement, cf. [53, p. 450]. Ce théorème et le lemme 6.4 assurent que, pour tout réel $s \in [0, \infty[$ et tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ vérifiant $\langle u \rangle \geq \underline{j}$, la suite $(W_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire positive notée $W_{s,u,\infty}$. Observons que $W_{s,u,\langle u \rangle} = \mathbb{1}_{\{X_u=1\}}$, si bien que pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$,

$$\mathbb{E}[W_{s,u,j}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_{s,u,j} \mid \mathcal{F}_{\langle u \rangle}]] = \mathbb{E}[W_{s,u,\langle u \rangle}] = \mathbb{M}(X_u = 1).$$

D'après le lemme de Fatou, l'espérance de $W_{s,u,\infty}$ est donc inférieure à la probabilité de l'événement $\{X_u = 1\}$. En particulier, $W_{s,u,\infty}$ est presque sûrement finie.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant.

Proposition 6.8

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$,

$$\text{p.s.} \quad \dim K_u \leq d_*.$$

// Commençons par supposer $\rho(0) < 0$. La définition (6.31) de la fonction ρ et l'assertion (ii) du lemme 6.3 assurent que

$$\prod_{i=0}^{j-1} \varphi'_{1,\langle u \rangle+i}(1) \leq e^{\rho(0)j/2}$$

pour une infinité d'entiers $j \in \mathbb{N}^*$. Dès lors, l'élément $\underline{\sigma}_{\langle u \rangle}$ donné par (6.21) est infini. Le lemme 6.1 implique alors que $f_{\langle u \rangle} = 1$ et l'assertion (6.34) montre que $\dim K_u = -\infty \leq d_*$ avec probabilité 1.

Supposons $\rho(0) \geq 0$. Alors, d_* est donné par (6.33). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $s_p = d_* + 1/p$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}$, l'ensemble des $v \in \tau_u$ de génération j vérifiant $Z_{v,\bullet} \not\rightarrow 0$ appartient à l'ensemble de coupes $\mathcal{C}_j(\tau_u)$. Ainsi,

$$\inf_{\chi \in \mathcal{C}_j(\tau_u)} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^{s_p} \leq Z_{s_p,u,j} = W_{s_p,u,j} \prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \alpha_{s_p,i}.$$

Le membre de gauche tend vers $\tilde{E}_{s_p, u}$ quand l'entier j tend vers l'infini, d'après (6.14). De surcroît, comme $s_p > d_*$, on a $\rho(s_p) < 0$ de sorte que la limite inférieure quand j tend vers l'infini du produit apparaissant dans le membre de droite est nulle. Comme $W_{s_p, u, j}$ tend presque sûrement vers $W_{s_p, u, \infty} < \infty$ quand j tend vers l'infini, le membre de droite admet presque sûrement 0 pour limite inférieure quand j tend vers l'infini. Il s'ensuit que $\tilde{E}_{s_p, u} = 0$ avec probabilité 1. La proposition 6.2 implique alors que presque sûrement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{H}^{s_p}(K_u) = 0$. Le résultat s'ensuit. //

L'assertion (6.35), la proposition 6.8 et la dénombrabilité de $\mathcal{U}_0$ conduisent finalement au théorème 6.2.

IV.2 Résultats complémentaires

La proposition 6.8 peut ne pas être optimale. Observons que sa preuve n'exploite pas le fait que la limite presque sûre $W_{s, u, \infty}$ de la martingale $W_{s, u, \bullet}$ peut s'annuler pour certaines valeurs du réel s . Si cette limite est nulle, c'est que le processus $Z_{s, u, \bullet}$ croît moins vite que prévu vers l'infini. Il est alors naturel de penser que la dimension de Hausdorff de l'ensemble K_u est dans ce cas strictement inférieure à d_* . Cette remarque se traduit par le résultat suivant.

Proposition 6.9

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$,

$$\text{p.s.} \quad W_{0, u, \infty} = 0 \implies \dim K_u \leq 0.$$

Le reste de cette partie est consacré à la preuve de la proposition 6.9. Par conséquent, supposons $\underline{j}$ fini et considérons un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$.

Pour établir ce résultat en reprenant les idées de la preuve de la proposition 6.8, il convient d'étudier, pour tout réel strictement positif s , la croissance du processus $Z_{s, u, \bullet}$ sur l'événement $\{W_{0, u, \infty} = 0\}$. Intéressons-nous d'abord à cet événement. Le processus $W_{0, u, \bullet}$ est en fait construit à partir du processus $Z_{u, \bullet}$ défini par (6.12), sachant que

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad W_{0, u, j} = \frac{Z_{u, j}}{\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \varphi'_{1, i}(1)} \quad (6.38)$$

en vertu de l'assertion (ii) du lemme 6.3 et de l'assertion (6.36). En particulier, il ne dépend que de la chaîne de Markov X . De plus, les résultats de la partie II.3 suggèrent que $W_{0, u, \bullet}$ est relié à la martingale obtenue de façon usuelle par renormalisation d'un processus de Galton-Watson.

Afin d'exploiter ce lien, fixons un entier $j_0 \geq \underline{j}$. Pour tout sommet u de l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}$, le processus $Z_{u, \bullet}^{j_0}$ donné par (6.18) est tiré sous la mesure de probabilité $\mathbb{M}_{1, j_0}$. Pour le renormaliser, il convient de poser

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad W_{u, j}^{j_0} = \frac{Z_{u, j}^{j_0}}{\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \varphi'_{1, j_0+i}(1)}.$$

Le processus $W_{u,\bullet}^{j_0} = (W_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ est correctement défini car $\varphi'_{1,j_0+i}(1) > 0$ pour tout entier $i \geq \langle u \rangle$, du fait que j_0 est supérieur à $\underline{j}$. Par ailleurs, un sommet de l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}^*$ appartient à $\tau_u^{j_0}$ si et seulement si son père appartient à $\tau_u^{j_0}$ et si le processus X^{j_0} lui attribue l'état 1. Par conséquent, pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$,

$$Z_{u,j+1}^{j_0} = \sum_{\substack{v \in \tau_u^{j_0} \\ \langle v \rangle = j}} \sum_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} X_{vk}^{j_0}$$

de sorte que la proposition 6.4 conduit à $\mathbb{M}_{1,j_0}[Z_{u,j+1}^{j_0} | \mathcal{M}_j^{j_0}] = \varphi'_{1,j_0+j}(1) Z_{u,j}^{j_0}$. On en déduit que le processus $W_{u,\bullet}^{j_0}$ est, sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$, une martingale positive par rapport à la filtration $(\mathcal{M}_j^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$. D'après le théorème de Doob, la suite $(W_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ converge $\mathbb{M}_{1,j_0}$ -presque sûrement vers une variable aléatoire positive notée $W_{u,\infty}^{j_0}$. En outre, $W_{u,\langle u \rangle}^{j_0} = \mathbf{1}_{\{X_{u=1}^{j_0}=1\}}$, de sorte que la limite $W_{u,\infty}^{j_0}$ est $\mathbb{M}_{1,j_0}$ -presque sûrement finie. En particulier, la suite $(W_{\emptyset,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$ converge $\mathbb{M}_{1,j_0}$ -presque sûrement vers la variable aléatoire positive $W_{\emptyset,\infty}^{j_0}$. Posons

$$\forall j_0 \in \mathbb{N}_{\underline{j}} \quad w_{j_0} = \mathbb{M}_{1,j_0}(W_{\emptyset,\infty}^{j_0} = 0). \quad (6.39)$$

Le réel w_{j_0} est donc, pour tout entier $j_0 \geq \underline{j}$, la probabilité que la limite $W_{\emptyset,\infty}^{j_0}$ existe et soit nulle. En outre, si j_0 désigne un entier naturel strictement inférieur à $\underline{j}$, notons par convention $w_{j_0} = 1$. Les résultats de la partie II.3 suggèrent alors que $w_{\langle u \rangle}$ est relié à la probabilité de l'événement qui nous concerne, c'est-à-dire l'événement $\{W_{0,u,\infty} = 0\}$. C'est pourquoi il convient d'étudier la suite $(w_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$.

Pour $j_0 \in \{0, \dots, \underline{j}-1\}$, on a trivialement $w_{j_0} \geq f_{j_0}$, où f_{j_0} est défini par (6.20) comme la probabilité d'extinction sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$ du processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$. Supposons $j_0 \geq \underline{j}$ et observons que si le processus $Z_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ admet une limite nulle à l'infini, il en va de même du processus $W_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$, c'est-à-dire que $W_{\emptyset,\infty}^{j_0} = 0$. Cela se traduit par l'inégalité $f_{j_0} \leq w_{j_0}$. Grâce au lemme 6.1, il en résulte que

$$\forall j_0 \in \mathbb{N} \quad w_{j_0} \geq f_{j_0} \geq 1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j_0}} \quad (6.40)$$

où la suite $(\underline{\sigma}_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ est définie par (6.21). Le résultat suivant complète cette observation. Rappelons que la suite de fonctions $(\varphi_{1,j})_{j \in \mathbb{N}}$ est donnée par (6.19) et introduisons

$$\bar{\sigma}_{j_0} = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi''_{1,j_0+j}(1) + \varphi'_{1,j_0+j}(1) - \varphi'_{1,j_0+j}(1)^2}{\varphi'_{1,j_0+j}(1) \prod_{i=0}^j \varphi'_{1,j_0+i}(1)} \quad (6.41)$$

pour tout entier naturel j_0 , avec la convention que $\bar{\sigma}_{j_0} = \infty$ si un des facteurs figurant au dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $j_0 < \underline{j}$, en vertu de (6.22).

Lemme 6.5

Pour tout entier naturel j_0 , on a simultanément

$$w_{j_0} = \varphi_{1,j_0}(w_{j_0+1}) \quad \text{et} \quad w_{j_0} \leq 1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j_0}}.$$

// Soit $j_0 \in \mathbb{N}$. Commençons par supposer $j_0 < \underline{j}$. La majoration de w_{j_0} est triviale, puisque $\bar{\sigma}_{j_0} = \infty$. De surcroît, si $j \leq \underline{j}-2$, on a par convention

$w_{j_0} = w_{j_0+1} = 1$, ce qui fournit $w_{j_0} = \varphi_{1,j_0}(w_{j_0+1})$. Si $j_0 = \underline{j} - 1$, on a $w_{j_0} = 1$ et $\varphi_{1,j_0} = 1$ en vertu de (6.22), si bien que $w_{j_0} = \varphi_{1,j_0}(w_{j_0+1})$, quelle que soit la valeur prise par w_{j_0+1} .

Supposons désormais $j_0 \geq \underline{j}$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En reprenant la preuve du lemme 6.1, on observe que $Z_{\emptyset,j}^{j_0}$ est la somme sur $u \in S_1^{j_0}$ des $Z_{u,j}^{j_0}$. Après renormalisation, il en résulte que

$$W_{\emptyset,j}^{j_0} = \frac{1}{\varphi'_{1,j_0}(1)} \sum_{u \in S_1^{j_0}} W_{u,j}^{j_0}.$$

Par conséquent, la limite $W_{\emptyset,\infty}^{j_0}$ existe et s'annule si et seulement si les limites $W_{u,\infty}^{j_0}$, pour $u \in S_1^{j_0}$, existent et s'annulent toutes. Ainsi,

$$w_{j_0} = \mathbb{M}_{1,j_0}(W_{\emptyset,\infty}^{j_0} = 0) = \mathbb{M}_{1,j_0}(\forall u \in S_1^{j_0} \quad W_{u,\infty}^{j_0} = 0).$$

La proposition 6.4 indique que sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$, conditionnellement à $\mathcal{M}_1^{j_0}$, les processus $(W_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}^*}$, pour $u \in S_1^{j_0}$, sont indépendants et leur loi conditionnelle est égale à la loi du processus $(W_{\emptyset,j-1}^{j_0+1})_{j \in \mathbb{N}^*}$ sous $\mathbb{M}_{1,j_0+1}$. Alors,

$$\mathbb{M}_{1,j_0}(\forall u \in S_1^{j_0} \quad W_{u,\infty}^{j_0} = 0 \mid \mathcal{M}_1^{j_0}) = \mathbb{M}_{1,j_0+1}(W_{\emptyset,\infty}^{j_0+1} = 0)^{\#S_1^{j_0}} = w_{j_0+1}^{X_0^{j_0} + \dots + X_{n_{j_0+1}}^{j_0}}.$$

On obtient la relation de récurrence attendue en prenant l'espérance sous la probabilité $\mathbb{M}_{1,j_0}$.

Majorons la probabilité w_{j_0} . On peut supposer que $\bar{\sigma}_{j_0}$ est fini. En effet, dans le cas contraire, w_{j_0} est trivialement majoré par $1 - 1/\bar{\sigma}_{j_0} = 1$. D'après la proposition 6.5, le processus $W_{\emptyset,\bullet}^{j_0}$ est, sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$, la renormalisation d'un processus de Galton-Watson en environnement variable dont les lois de reproduction ont pour fonctions génératrices φ_{1,j_0+j} pour $j \in \mathbb{N}$. D'après un résultat de D. Fearn [67, th. 1], comme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi''_{1,j_0+j}(1) + \varphi'_{1,j_0+j}(1) - \varphi'_{1,j_0+j}(1)^2}{\varphi'_{1,j_0+j}(1) \prod_{i=0}^j \varphi'_{1,j_0+i}(1)} = \bar{\sigma}_{j_0} - 1 < \infty,$$

la suite $(W_{\emptyset,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $W_{\emptyset,\infty}^{j_0}$ et cette dernière variable a pour espérance 1 et pour variance $\bar{\sigma}_{j_0} - 1$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{M}_{1,j_0} [W_{\emptyset,\infty}^{j_0}]^2 = \mathbb{M}_{1,j_0} \left[W_{\emptyset,\infty}^{j_0} \mathbf{1}_{\{W_{\emptyset,\infty}^{j_0} > 0\}} \right]^2 \\ &\leq \mathbb{M}_{1,j_0} \left[(W_{\emptyset,\infty}^{j_0})^2 \right] \mathbb{M}_{1,j_0}(W_{\emptyset,\infty}^{j_0} > 0) = \bar{\sigma}_{j_0} (1 - w_{j_0}), \end{aligned}$$

ce qui permet de majorer la probabilité w_{j_0} comme voulu. //

Remarque : Soit j_0 un entier naturel. L'assertion (6.40) et le lemme 6.5 conduisent à

$$1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j_0}} \leq f_{j_0} \leq w_{j_0} \leq 1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j_0}}. \quad (6.42)$$

Ainsi, les probabilités f_{j_0} et w_{j_0} coïncident (et valent 1) dès que $\underline{\sigma}_{j_0} = \infty$, ce qui est en particulier le cas si $j_0 < \underline{j}$. De même, les résultats de J. D'Souza et J. Biggins [56] permettent de prouver que f_{j_0} et w_{j_0} coïncident si la limite inférieure de la suite $(\varphi'_{1,j}(1))_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement supérieure à 1. Cependant, les suites $(f_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ et $(w_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ sont en général différentes, comme l'illustrent les nombreux exemples figurant dans [55, 56, 114, 117].

Afin de prouver la proposition 6.9, étudions maintenant la vitesse de croissance du processus $Z_{u,\bullet}$ sur l'événement $\{W_{0,u,\infty} = 0\}$ pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$. Dans ce but, introduisons un processus $\mathfrak{W}_{u,\bullet} = (\mathfrak{W}_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ en notant

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad \mathfrak{W}_{u,j} = w_j^{Z_{u,j}}.$$

Observons que $\mathfrak{W}_{u,\bullet}$ ne dépend que du processus X et rappelons que la tribu $\mathcal{M}_j$ est définie pour tout entier naturel j par (6.16).

Lemme 6.6

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ vérifiant $\langle u \rangle \geq \underline{j}$, le processus $\mathfrak{W}_{u,\bullet}$ est, sous $\mathbb{M}$, une martingale positive par rapport à la filtration $(\mathcal{M}_j)_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$.

// Fixons un entier j supérieur à $\langle u \rangle$ et conditionnons par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j$. D'après l'assertion (6.37) pour $s = 0$ et la proposition 6.4, on a

$$\mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,j+1} \mid \mathcal{M}_j] = \prod_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{1,j} \left[w_{j+1}^{X_1^j + \dots + X_{n_{j+1}}^j} \right] = \varphi_{1,j}(w_{j+1})^{Z_{u,j}}.$$

Le lemme 6.5 permet d'identifier le membre de droite à $\mathfrak{W}_{u,j}$. //

Le lemme 6.6 et le théorème de Doob indiquent que la suite $(\mathfrak{W}_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ converge $\mathbb{M}$ -presque sûrement vers une variable limite $\mathfrak{W}_{u,\infty} \in [0, 1]$. Le lemme suivant ressemble au théorème 1 de [55] qui permet de donner une borne sur les taux de croissance possibles d'un processus de Galton-Watson en environnement variable.

Lemme 6.7

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$,

$$\mathbb{M} - \text{p.s.} \quad W_{0,u,\infty} = 0 \quad \implies \quad \mathfrak{W}_{u,\infty} = 1.$$

// D'après le lemme 6.6, le processus $\mathfrak{W}_{u,\bullet}$ est une martingale à valeurs dans $[0, 1]$ de variable limite $\mathfrak{W}_{u,\infty}$. Il en résulte que

$$\mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,\infty}] = \mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,\langle u \rangle}] = \mathbb{M}(X_u = 0) + \mathbb{M}(X_u = 1)w_{\langle u \rangle}.$$

Supposons $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$. D'après la proposition 6.4, la loi sous $\mathbb{M}$, conditionnellement à $\{X_u = 1\}$, de la variable $W_{0,u,\infty}$ est égale à la loi sous $\mathbb{M}_{1,\langle u \rangle}$ de $W_{\emptyset,\infty}^{(u)}$. Dès lors,

$$\mathbb{M}(X_u = 1)w_{\langle u \rangle} = \mathbb{M}(X_u = 1 \text{ et } W_{0,u,\infty} = 0).$$

De surcroît, si $X_u = 0$, on a trivialement $W_{0,u,\infty} = 0$, puisque le processus $Z_{u,\bullet}$ est alors nul. Cela se traduit par l'égalité

$$\mathbb{M}(X_u = 0) = \mathbb{P}(X_u = 0 \text{ et } W_{0,u,\infty} = 0).$$

Il s'ensuit que l'espérance de la variable aléatoire $\mathfrak{W}_{u,\infty}$ est égale à la probabilité que la limite $W_{0,u,\infty}$ soit nulle. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,\infty} \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}}] &= \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0) - \mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,\infty} \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} = 0\}}] \\ &= \mathbb{M}[(1 - \mathfrak{W}_{u,\infty}) \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} = 0\}}] \geq 0.\end{aligned}\tag{6.43}$$

La dernière inégalité provient du fait que la variable $\mathfrak{W}_{u,\infty}$ est $\mathbb{M}$ -presque sûrement inférieure à 1.

Supposons nuls les membres de (6.43). Alors, $\mathbb{M}$ -presque sûrement,

$$0 = (1 - \mathfrak{W}_{u,\infty}) \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} = 0\}} = (1 - \mathfrak{W}_{u,\infty}) \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} = 0 \text{ et } \mathfrak{W}_{u,\infty} < 1\}}.$$

Sur l'événement $\{\mathfrak{W}_{u,\infty} < 1\}$, on peut simplifier par $1 - \mathfrak{W}_{u,\infty}$, de sorte que $\mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0 \text{ et } \mathfrak{W}_{u,\infty} < 1) = 0$. Le lemme est donc prouvé dans le cas où les membres de (6.43) sont nuls.

Supposons au contraire que

$$\mathbb{M}[\mathfrak{W}_{u,\infty} \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}}] > 0.\tag{6.44}$$

En particulier, $\mathbb{M}(W_{0,u,\infty} > 0) > 0$. De plus, si $W_{0,u,\infty} > 0$, on a $W_{0,u,j} > 0$ pour tout entier j , de sorte que $\mathbb{M}$ -presque sûrement,

$$\mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}} \left(\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \varphi'_{1,i}(1) \right) \log w_j = \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}} \frac{\log \mathfrak{W}_{u,j}}{W_{0,u,j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}} \frac{\log \mathfrak{W}_{u,\infty}}{W_{0,u,\infty}}.$$

Sachant que $\mathbb{M}(W_{0,u,\infty} > 0) > 0$, il existe une réalisation pour laquelle $W_{0,u,\infty} > 0$ et la convergence précédente a lieu. Dès lors, la suite déterministe

$$\left(\left(\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \varphi'_{1,i}(1) \right) \log w_j \right)_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$$

admet une limite, notée l , qui est égale à la valeur commune prise par $\log \mathfrak{W}_{u,\infty} / W_{0,u,\infty}$ sur $\mathbb{M}$ -presque toutes les réalisations vérifiant $W_{0,u,\infty} > 0$. On a clairement $l \leq 0$. De surcroît, si $l = -\infty$, pour $\mathbb{M}$ -presque toute réalisation vérifiant $W_{0,u,\infty} > 0$, on a $\mathfrak{W}_{u,\infty} = 0$, ce qui contredit (6.44). Par conséquent, $l \in]-\infty, 0]$. Par ailleurs, on a $\mathbb{M}$ -presque sûrement,

$$\mathfrak{W}_{u,j} = \exp \left(W_{0,u,j} \left(\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \varphi'_{1,i}(1) \right) \log w_j \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (e^l)^{W_{0,u,\infty}},$$

puis $\mathfrak{W}_{u,\infty} = (e^l)^{W_{0,u,\infty}}$. Sachant que $e^l > 0$, on en déduit finalement que $\mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0 \text{ et } \mathfrak{W}_{u,\infty} < 1) = 0$. //

Nous pouvons maintenant établir la proposition 6.9. Fixons un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à j . On peut supposer $\rho(0) > 0$. En effet, dans le cas contraire, on a $d_* \in \{-\infty, 0\}$ et le résultat découle de (6.35) et du théorème 6.2. De plus, supposons $\mathfrak{W}_{u,\infty} = 1$. Le lemme 6.5 assure que

$$0 \leq \frac{Z_{u,j}}{\bar{\sigma}_j} \leq -Z_{u,j} \log \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_j} \right) \leq -Z_{u,j} \log w_j = -\log \mathfrak{W}_{u,j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier, $Z_{u,j} \leq \bar{\sigma}_j$ pour tout entier j assez grand. Intéressons-nous au comportement asymptotique de $\bar{\sigma}_j$ quand j tend vers l'infini. Pour tout entier naturel K , on a

$$1 + \sum_{k=0}^K \frac{\varphi''_{1,j+k}(1) + \varphi'_{1,j+k}(1) - \varphi'_{1,j+k}(1)^2}{\varphi'_{1,j+k}(1) \prod_{i=0}^k \varphi'_{1,j+i}(1)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^K \varphi'_{1,j+i}(1)} + \sum_{k=0}^K \frac{\varphi''_{1,j+k}(1)}{\varphi'_{1,j+k}(1) \prod_{i=0}^k \varphi'_{1,j+i}(1)}.$$

Comme $\rho(0) > 0$, le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand K tend vers l'infini, tandis que le membre de gauche tend vers $\bar{\sigma}_j$. Il en résulte que

$$\bar{\sigma}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi''_{1,j+k}(1)}{\varphi'_{1,j+k}(1) \prod_{i=0}^k \varphi'_{1,j+i}(1)} = \left(\prod_{i=\underline{j}}^{j-1} \varphi'_{1,i}(1) \right) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\varphi''_{1,k}(1)}{\varphi'_{1,k}(1) \prod_{i=\underline{j}}^k \varphi'_{1,i}(1)}. \quad (6.45)$$

Cependant, on prouve aisément que $\varphi''_{1,k}(1) \leq n_{k+1} \varphi'_{1,k}(1)$ pour tout entier naturel k . En outre, pour tout réel strictement positif ε assez petit et tout entier j assez grand, on a

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{n_{k+1}}{\prod_{i=\underline{j}}^k \varphi'_{1,i}(1)} \leq \sum_{k=j}^{\infty} e^{(\varepsilon - \rho(0))(k+1)} = \frac{e^{(\varepsilon - \rho(0))(j+1)}}{1 - e^{\varepsilon - \rho(0)}} \quad (6.46)$$

car $\rho(0) < \infty$ et la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, d'après le lemme 6.3. Il en découle que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log \bar{\sigma}_j \leq \rho(0) + \varepsilon - \rho(0) = \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que cette dernière limite inférieure est négative. Fixons un réel $s > 0$ et rappelons que $Z_{s,u,j}$ est défini pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$ par (6.36). D'après la condition (6.4), les rapports de contraction intervenant dans l'expression de $Z_{s,u,j}$ sont inférieurs à $\bar{\beta}$. Ainsi, pour tout entier j suffisamment grand,

$$Z_{s,u,j} \leq \bar{\beta}^{s(j-\langle u \rangle)} Z_{u,j} \leq \bar{\beta}^{s(j-\langle u \rangle)} \bar{\sigma}_j.$$

En reprenant la preuve de la proposition 6.8, on observe que l'écoulement $\tilde{E}_{s,u}$ est inférieur à la limite inférieure de $Z_{s,u,j}$ quand j tend vers l'infini. Il s'ensuit que $\tilde{E}_{s,u} = 0$, puis que $\mathcal{H}^s(K_u) = 0$, en vertu de la proposition 6.2. Cette propriété étant vraie quel que soit $s > 0$, on obtient $\dim K_u \leq 0$. Nous venons donc d'établir que

$$\mathfrak{W}_{u,\infty} = 1 \implies \dim K_u \leq 0.$$

Le lemme 6.7 conduit finalement à la proposition 6.9.

IV.3 Retour sur la probabilité de vacuité

Rappelons que le théorème 6.1 donne des conditions suffisantes pour que l'ensemble Θ soit vide avec probabilité non nulle ou avec probabilité 1. Nous étudions maintenant la nécessité de ces conditions. On peut supposer que la condition (6.24) est vérifiée. En effet, dans le cas contraire, on dispose d'une expression exacte de la probabilité que Θ soit

vide, comme l'indique la fin de la section III. Rappelons que, pour tout entier naturel j , l'ensemble S_j regroupe les sommets de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_0$ auxquels le processus X attribue l'état 1, que $\varphi_{0,j}$ est la fonction donnée par (6.19) et que $\bar{n}_j$ désigne l'entier défini par (6.25).

Théorème 6.3

Supposons la condition (6.24) vérifiée.

(i). Si $\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) > 0$, alors

$$\rho(0) \leq 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\bar{n}_j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j+1}} \right) \right) < \infty.$$

(ii). Si $\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = 1$, alors une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $\underline{j} = \infty$;

(b) $0 < \underline{j} < \infty$ et pour tout entier $j \geq \underline{j} - 1$,

$$\varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j+1}} \right) = 1 ; \quad (6.47)$$

(c) $0 < \underline{j} < \infty$ et $\mathbb{M}[\#S_{\underline{j}-1}] = \bar{n}_{\underline{j}-1}$ et (6.47) tient pour tout entier $j \geq \underline{j}$;

(d) $\underline{j} = 0$ et $\bar{\sigma}_0 = \infty$ et (6.47) tient pour tout entier naturel j .

Remarques : • Ces diverses conditions nécessaires sont identiques aux conditions suffisantes énoncées dans le théorème 6.1, à ceci près que la suite $(\underline{\sigma}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est remplacée par la suite $(\bar{\sigma}_j)_{j \in \mathbb{N}}$. De plus, sous la condition (6.24), tous les termes de la somme figurant dans (i) sont finis en vertu de (6.42). Il n'est donc pas nécessaire d'autoriser la somme à partir d'un entier j_0 quelconque comme dans l'énoncé du théorème 6.1.

• Dans l'assertion (i), si $\rho(0) \leq 0$, cela signifie implicitement que $\rho(0)$ est défini, c'est-à-dire que $\underline{j} < \infty$. Si $\underline{j} = \infty$, l'assertion (i) est clairement vraie, bien que $\rho(0)$ ne soit pas défini, car la série qu'elle fait intervenir converge, du fait que $\bar{\sigma}_j = \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

La condition portant sur $\rho(0)$ figure dans (i) mais n'apparaît pas dans l'énoncé du théorème 6.1. Elle intervient ici car elle est nécessaire à la validité du lemme suivant.

Lemme 6.8

(i). La suite $(\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}])_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(ii). Supposons la condition (6.24) vérifiée. La limite de cette suite est nulle si

$$\rho(0) > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\bar{n}_j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j+1}} \right) \right) = \infty.$$

// Fixons un entier naturel j . D'après l'assertion (6.26), la proposition 6.4 et le lemme 6.5,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}[w_{j+1}^{\#S_{j+1}} \mid \mathcal{M}_j] &= \prod_{\substack{w \in \mathcal{U}_0 \\ \langle w \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_w, j} \left[w_{j+1}^{X_0^j + \dots + X_{\bar{n}_{j+1}}^j} \right] \\ &= \varphi_{1,j}(w_{j+1})^{\#S_j} \varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j - \#S_j} \\ &= w_j^{\#S_j} \varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j - \#S_j} \leq w_j^{\#S_j}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

On met alors en évidence l'assertion (i), c'est-à-dire la décroissance de la suite $(\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}])_{j \in \mathbb{N}}$, en prenant l'espérance sous $\mathbb{M}$. Comme cette suite prend ses valeurs dans $[0, 1]$, elle converge vers un élément l de cet intervalle.

Supposons que la série figurant dans l'énoncé du lemme diverge. Alors $\underline{j}$ est fini. Supposons de plus $\rho(0) > 0$. D'après les assertions (6.45) et (6.46), pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$ assez petit et pour tout entier j assez grand, on a

$$\bar{\sigma}_j \leq \frac{e^{(\varepsilon - \rho(0))(j+1)}}{1 - e^{\varepsilon - \rho(0)}} \prod_{i=\underline{j}}^{j-1} \varphi'_{1,i}(1) \leq \frac{e^{(\varepsilon - \rho(0))(j+1)}}{1 - e^{\varepsilon - \rho(0)}} \cdot \frac{\bar{n}_j}{\bar{n}_{\underline{j}}}.$$

En prenant $\varepsilon = \rho(0)/2$ et en faisant appel au lemme 6.5, on en déduit que

$$w_j^{\bar{n}_j/2} \leq \exp\left(-\frac{\bar{n}_j}{2\bar{\sigma}_j}\right) \leq \exp\left(-(e^{\rho(0)/2} - 1)\frac{\bar{n}_j}{2}e^{\rho(0)j/2}\right)$$

pour tout entier j assez grand, de sorte que la série $\sum_j w_j^{\bar{n}_j/2}$ converge.

Par ailleurs, grâce à (6.24) et (6.40), les réels w_j et $\varphi_{0,j}(w_{j+1})$ appartiennent à l'intervalle $]0, 1]$ pour tout entier naturel j , si bien qu'en reprenant (6.48), on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{M}[w_{j+1}^{\#S_{j+1}} \mid \mathcal{M}_j] &= w_j^{\#S_j} \varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j - \#S_j} \\ &\leq w_j^{\#S_j} (\varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j/2} \mathbb{1}_{\{\#S_j \leq \bar{n}_j/2\}} + \mathbb{1}_{\{\#S_j > \bar{n}_j/2\}}) \\ &\leq w_j^{\#S_j} \varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j/2} + w_j^{\bar{n}_j/2}. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance sous $\mathbb{M}$ dans cette majoration, on obtient

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathbb{M}[w_{j+1}^{\#S_{j+1}}] \leq \varphi_{0,j}(w_{j+1})^{\bar{n}_j/2} \mathbb{M}[w_j^{\#S_j}] + w_j^{\bar{n}_j/2}.$$

Une récurrence élémentaire suffit alors pour montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}] \leq w_0 \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{0,i}(w_{i+1})^{\bar{n}_i/2} + \sum_{k=0}^{j-1} w_k^{\bar{n}_k/2} \prod_{i=k+1}^{j-1} \varphi_{0,i}(w_{i+1})^{\bar{n}_i/2}.$$

Pour tout entier naturel j , posons

$$u_j = \frac{1}{\prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{0,i}(w_{i+1})^{\bar{n}_i/2}} \geq \frac{1}{\prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{0,i} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{i+1}}\right)^{\bar{n}_i/2}}.$$

La suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante et diverge vers l'infini, du fait que la série figurant dans l'énoncé du lemme diverge. On a en outre

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathbb{M}[w_j^{\#S_j}] \leq \frac{w_0}{u_j} + \frac{1}{u_j} \sum_{k=1}^j u_k w_{k-1}^{\bar{n}_{k-1}/2}.$$

Comme la série $\sum_k w_{k-1}^{\bar{n}_{k-1}/2}$ converge, le lemme de Kronecker garantit que le membre de droite tend vers 0 quand j tend vers l'infini, cf. [46, p. 103]. Il s'ensuit que $l = 0$, ce qui conduit à l'assertion (ii). //

Le lemme 6.8 permet de mettre en évidence la première partie du théorème 6.3. En effet, supposons la condition (6.24) vérifiée. Si l'ensemble Θ est vide avec probabilité non nulle, l'assertion (6.40), la proposition 6.6 et le lemme 6.8 assurent que

$$0 < \mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[f_j^{\#S_j}] \leq \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[w_j^{\#S_j}].$$

Ce dernier lemme conduit alors directement au premier point du théorème 6.3.

Prouvons la deuxième partie du théorème 6.3. À cet effet, supposons que la condition (6.24) est vérifiée et que l'ensemble Θ est presque sûrement vide. L'assertion précédente s'écrit maintenant

$$1 = \mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[f_j^{\#S_j}] \leq \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[w_j^{\#S_j}] \leq 1.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel j , on a $w_j = 1$ ou $\#S_j = 0$ avec probabilité 1. Le lemme 6.5 montre alors que, pour tout entier naturel j , on a $\bar{\sigma}_j = \infty$ ou $\#S_j = 0$ avec probabilité 1. Si $\bar{\sigma}_j = \infty$ pour tout entier naturel j , c'est la condition (a), la condition (b) ou la condition (d) du théorème qui est vérifiée, selon la valeur de $\underline{j}$. Supposons au contraire qu'il existe un entier naturel j_0 pour lequel $\bar{\sigma}_{j_0} < \infty$. Alors $\underline{j} \leq j_0 < \infty$ et l'assertion (6.45) indique que $\bar{\sigma}_j < \infty$ pour tout entier $j \geq \underline{j}$. Il s'ensuit que $\mathbb{M}$ -presque sûrement, pour tout entier $j \geq \underline{j}$, on a $\#S_j = 0$. En particulier, $\underline{j} > 0$. En outre, d'après (6.28), on a $\varphi'_{0,\underline{j}}(1) = 0$ puis (6.47) pour tout entier $j \geq \underline{j}$. L'assertion (6.28) implique aussi que $\mathbb{M}$ -presque sûrement

$$\varphi'_{1,\underline{j}-1}(1) \cdot \#S_{\underline{j}-1} + \varphi'_{0,\underline{j}-1}(1) \cdot (\bar{n}_{\underline{j}-1} - \#S_{\underline{j}-1}) = 0.$$

Le premier terme est nul en vertu de (6.22). Il s'ensuit que $\varphi'_{0,\underline{j}-1}(1) = 0$ ou $\#S_{\underline{j}-1} = \bar{n}_{\underline{j}-1}$ avec probabilité 1. Dans le premier cas, on en déduit la condition (b). Dans le second, on en déduit la condition (c). Le théorème 6.3 s'ensuit.

V Minoration de la dimension

Cette section est vouée à la minoration de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ défini par (6.9). On peut supposer que le paramètre d_* défini au début de la section IV est strictement positif. En effet, si ce n'est pas le cas, le théorème 6.2 montre que la dimension de Θ vaut presque sûrement $-\infty$ ou 0 et les théorèmes 6.1 et 6.3 donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer avec quelle probabilité cette dimension vaut $-\infty$ plutôt que 0. Nous supposons donc dans cette section que d_* est strictement positif. Dans ce cas, l'élément $\underline{j}$ donné par (6.22) est fini et d_* est donné par (6.33).

D'après (6.35), pour minorer la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ , il convient de minorer la dimension de Hausdorff du compact K_u défini par (6.10), pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$. Le résultat suivant est un premier pas dans cette direction. Rappelons qu'en vertu de la proposition 6.8, la dimension de K_u est presque sûrement inférieure à d_* et rappelons également que $W_{0,u,\infty}$ désigne la variable limite du processus $W_{0,u,\bullet}$ défini par (6.36).

Proposition 6.10

Supposons $d_* > 0$. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$,

$$\mathbb{P}(\dim K_u < d_*) \leq \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(0 < \dim K_u < d_*) = 0.$$

Cette section s'organise ainsi. Dans une première partie, nous établissons la proposition 6.10 en généralisant certaines techniques de percolation sur les arbres introduites par R. Lyons et Y. Peres dans [116]. Dans une seconde partie, nous utilisons cette proposition pour déterminer la loi de la dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ .

V.1 Preuve de la proposition 6.10

Afin de prouver la proposition 6.10, nous introduisons plusieurs objets nouveaux et nous établissons quelques lemmes préliminaires. Supposons $\underline{j} < \infty$ et fixons un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$. La proposition 6.2 assure que la dimension du compact K_u est liée à l'écoulement $E_{s,u}$ défini par (6.14). En particulier, si $E_{s,u} > 0$ pour un certain réel $s > 0$, on a nécessairement $\mathcal{H}^s(K_u) > 0$, ce qui permet de minorer par s la dimension de K_u . De ce fait, intéressons-nous à la probabilité que l'écoulement $E_{s,u}$ soit nul.

Pour tout entier naturel j_0 , notons $\mathcal{Q}^{j_0} = [\underline{\beta}, \overline{\beta}]^{\mathcal{U}_{j_0}^*}$ l'ensemble des applications définies sur $\mathcal{U}_{j_0}^*$ à valeurs dans l'intervalle $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$. Pour toute application $\omega \in \mathcal{Q}^{j_0}$ et tout sommet $u \in \mathcal{U}_{j_0}^*$, posons $L_u^{j_0}(\omega) = \omega_u$. Considérons en outre la tribu

$$\mathcal{Q}^{j_0} = \sigma \left(L_u^{j_0}, u \in \mathcal{U}_{j_0}^* \right),$$

ainsi que la filtration donnée par

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{Q}_j^{j_0} = \sigma \left(L_u^{j_0}, u \in \mathcal{U}_{j_0}^*, \langle u \rangle \leq j \right).$$

Désignons par $\mathbb{Q}_{j_0}$ la mesure de probabilité sur $(\mathcal{Q}^{j_0}, \mathcal{Q}^{j_0})$ sous laquelle les vecteurs $(L_{uk}^{j_0})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}$, pour $u \in \mathcal{U}_{j_0}$, sont indépendants et ont chacun pour loi la mesure de probabilité $\mu_{j_0+\langle u \rangle}$ introduite dans la section I. De plus, munissons l'espace produit $(M^{j_0} \times \mathcal{Q}^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0} \otimes \mathcal{Q}^{j_0})$ de la mesure de probabilité $\Pi_{j_0} = \mathbb{M}_{1,j_0} \otimes \mathbb{Q}_{j_0}$. On observe alors que la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_0$ donne la loi sous $\mathbb{Q}$ des rapports de contraction $(L_u)_{u \in \mathcal{U}_0^*}$ définis par (6.13). La proposition 6.4 indique même que, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ vérifiant $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$ et tout réel $s > 0$, la loi de l'écoulement $E_{s,u}$ sous la mesure $\mathbb{P}$, conditionnellement à l'événement $\{X_u = 1\}$, est égale à la loi sous $\Pi_{\langle u \rangle}$ de la variable

$$\inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{\langle u \rangle})} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i}^{\langle u \rangle} \right)^s \quad (6.49)$$

où $\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{\langle u \rangle})$ regroupe toutes les coupes de l'ensemble $\tau_{\emptyset}^{\langle u \rangle}$ défini par (6.17). À l'inverse, si $X_u = 0$, on a clairement $E_{s,u} = 0$. Dès lors, pour déterminer la probabilité que l'écoulement $E_{s,u}$ soit nul, étudions

$$\forall s \in]0, \infty[\quad \forall j_0 \in \mathbb{N} \quad e_{s,j_0} = \Pi_{j_0} \left(\inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i}^{j_0} \right)^s = 0 \right). \quad (6.50)$$

Remarquons que si $j_0 < \underline{j}$, on a nécessairement $e_{s,j_0} = 1$. En effet, dans ce cas, sous la mesure $\mathbb{M}_{1,j_0}$, l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ est fini avec probabilité $f_{j_0} = 1$, d'après le lemme 6.1, de sorte que $\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$ est $\mathbb{M}_{1,j_0}$ -presque sûrement réduit à $\{\emptyset\}$. Pour tout réel $s > 0$ fixé, la suite $(e_{s,j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ vérifie, tout comme les suites $(f_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ et $(w_{j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$, une relation de récurrence impliquant la suite de fonctions $(\varphi_{1,j_0})_{j_0 \in \mathbb{N}}$ définie par (6.19).

Lemme 6.9

Pour tout réel $s \in]0, \infty[$ et tout entier naturel j_0 , on a

$$e_{s,j_0} = \varphi_{1,j_0}(e_{s,j_0+1}).$$

// En reprenant le début de la preuve du lemme 6.1, commençons par observer que, si l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ est fini, l'ensemble $\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$ se réduit au singleton $\{\emptyset\}$, tout comme les ensembles $\mathcal{C}(\tau_u^{j_0})$, pour $u \in S_1^{j_0}$. De surcroît, si $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ est infini, on peut écrire

$$\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0}) = \{\{\emptyset\}\} \cup \bigcup_{\substack{\forall u \in S_1^{j_0} \\ \chi_u \in \mathcal{C}(\tau_u^{j_0})}} \left\{ \bigcup_{u \in S_1^{j_0}} \chi_u \right\},$$

c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$ se compose, d'une part, du singleton $\{\emptyset\}$ et, d'autre part, de toutes les réunions possibles d'éléments de $\mathcal{C}(\tau_u^{j_0})$, lorsque u appartient à $S_1^{j_0}$. Cette décomposition de $\mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$ montre que, pour tout réel $s \in]0, \infty[$,

$$\inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i}^{j_0} \right)^s = \min \left(1, \sum_{u \in S_1^{j_0}} (L_u^{j_0})^s \inf_{\chi_u \in \mathcal{C}(\tau_u^{j_0})} \sum_{v \in \chi_u} \left(\prod_{i=2}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i}^{j_0} \right)^s \right),$$

indépendamment du fait que l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ est fini ou non. Ainsi, l'infimum figurant dans le membre de gauche est nul si et seulement si tous les infima apparaissant dans le membre de droite sont nuls. Cependant, sous la mesure Π_{j_0} , conditionnellement à la tribu $\mathcal{M}_1^{j_0} \otimes \mathcal{Q}_1^{j_0}$, chacun d'eux est nul indépendamment des autres avec probabilité e_{s,j_0+1} . Par conséquent,

$$\Pi_{j_0} \left(\inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})} \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i}^{j_0} \right)^s = 0 \mid \mathcal{M}_1^{j_0} \otimes \mathcal{Q}_1^{j_0} \right) = e_{s,j_0+1}^{\#S_1^{j_0}} = e_{s,j_0+1}^{X_1^{j_0} + \dots + X_{n_{j_0+1}}^{j_0}}.$$

On conclut en prenant l'espérance sous la mesure Π_{j_0} . //

Le lemme 6.9 permet d'introduire une nouvelle famille de martingales. Fixons un réel $s \in]0, \infty[$ et un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$. Considérons le processus $\mathfrak{E}_{s,u,\bullet} = (\mathfrak{E}_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ défini par

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle} \quad \mathfrak{E}_{s,u,j} = e_{s,j}^{Z_{u,j}} \quad (6.51)$$

où le processus $Z_{u,\bullet}$ est donné par (6.12). En reprenant la preuve du lemme 6.6 et en utilisant le lemme 6.9, on montre aisément que le processus $\mathfrak{E}_{s,u,\bullet}$ est, sous $\mathbb{M}$, une martingale positive par rapport à la filtration $(\mathcal{M}_j)_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$. D'après le théorème de Doob, la suite $(\mathfrak{E}_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$ converge $\mathbb{M}$ -presque sûrement vers une variable limite $\mathfrak{E}_{s,u,\infty} \in [0, 1]$. Cette limite a pour espérance

$$\mathbb{M}[\mathfrak{E}_{s,u,\infty}] = \mathbb{M}[\mathfrak{E}_{s,u,\langle u \rangle}] = \mathbb{M}(X_u = 0) + e_{s,\langle u \rangle} \mathbb{M}(X_u = 1).$$

De plus, si X_u est nul, l'ensemble τ_u est vide et $\mathcal{C}(\tau_u)$ se résume à $\{\emptyset\}$, si bien que l'écoulement $E_{s,u}$ est nul. En outre, si $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$, la loi sous $\mathbb{P}$, conditionnellement à $\{X_u = 1\}$, de $E_{s,u}$ est égale à la loi sous $\Pi_{\langle u \rangle}$ de la variable donnée par (6.49), en vertu de la proposition 6.4. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E_{s,u} = 0) = \mathbb{M}(X_u = 0) + e_{s,\langle u \rangle} \mathbb{M}(X_u = 1).$$

Il s'ensuit finalement que

$$\mathbb{P}(E_{s,u} = 0) = \mathbb{M}[\mathfrak{E}_{s,u,\infty}]. \quad (6.52)$$

Le lemme 6.9 fournit une relation de récurrence entre les probabilités e_{s,j_0} pour $j_0 \in \mathbb{N}$ et $s \in]0, \infty[$. Nous proposons maintenant de majorer ces probabilités. Pour ce faire, commençons par relier e_{s,j_0} à la probabilité d'extinction d'un processus de Galton-Watson en environnement variable en appliquant des techniques de percolation sur l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$. L'idée d'un lien entre le fait qu'un écoulement s'annule et qu'un arbre obtenu par percolation du réseau initial soit fini est due à R. Lyons et Y. Peres, cf. [116, ch. 4]. Considérons une application $\xi \in \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}$ définie sur $\mathcal{U}_0^*$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. Cette application est destinée à indiquer quels sommets de l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ demeurent intacts après percolation. Plus précisément, après percolation, il ne reste de l'arbre $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ que l'ensemble

$$\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} = \{u \in \tau_{\emptyset}^{j_0} \mid \forall j \in \{1, \dots, \langle u \rangle\} \quad \xi_{u_1 \dots u_j} = 1\}.$$

Il s'agit du plus grand sous-arbre de $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ formé de la racine $\emptyset$ et des sommets $u \in \tau_{\emptyset}^{j_0}$ vérifiant $\xi_u = 1$. Par analogie avec le processus $Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0}$ défini par (6.18), introduisons un processus $\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} = (\xi \cdot Z_{\emptyset, j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \xi \cdot Z_{\emptyset, j}^{j_0} = \# \{u \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \mid \langle u \rangle = j\}.$$

Par ailleurs, l'application ξ est tirée selon la mesure aléatoire

$$\mathbb{M}_s^{j_0} = \bigotimes_{u \in \mathcal{U}_{j_0}^*} ((L_u^{j_0})^s \delta_1 + (1 - (L_u^{j_0})^s) \delta_0).$$

Pour tout $s \in]0, \infty[$ et tout $j \in \mathbb{N}$, considérons en outre la fonction $\phi_{s,j}$ définie par

$$\phi_{s,j} : z \mapsto \int_{\{0,1\}^{n_{j+1}}} \int_{[\beta, \bar{\beta}]^{n_{j+1}}} \prod_{k=1}^{n_{j+1}} (1 - \ell_k^s (1 - z^{x_k})) \mu_j(d\ell) \nu_{1,j}(dx),$$

où la mesure $\nu_{1,j}$ figure parmi celles qui interviennent dans la construction de la mesure de probabilité $\mathbb{M}$ sous laquelle le processus X est une chaîne de Markov et la mesure μ_j fait partie de celles qui donnent les rapports de contraction dans la construction aléatoire. Sous la mesure de probabilité Π_{j_0} , l'application ξ étant tirée sous la mesure $\mathbb{M}_s^{j_0}$, le processus $\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0}$ obtenu après percolation est un processus de Galton-Watson en environnement variable dont les lois de reproduction ont pour fonctions génératrices ϕ_{s,j_0+j} pour $j \in \mathbb{N}$. Plus précisément, désignons par $\Pi_{j_0}[\cdot]$ l'espérance sous la probabilité Π_{j_0} et établissons le lemme suivant.

Lemme 6.10

Soient $s \in]0, \infty[$ et $j_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel j et tout nombre complexe z de module inférieur à 1, on a

$$\Pi_{j_0} \left[\int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} z^{\xi \cdot Z_{\emptyset, j}^{j_0}} \mathbb{M}_s^{j_0}(d\xi) \right] = \phi_{s,j_0} \circ \dots \circ \phi_{s,j_0+j-1}(z).$$

// La preuve se fait par récurrence sur l'entier j . Le résultat est tout d'abord clair pour $j = 0$. Considérons ensuite un entier naturel j pour lequel l'égalité est vraie quel que soit z . Notons Ξ_j l'ensemble des applications à valeurs dans $\{0, 1\}$ définies sur l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}_{j_0}^*$ de génération inférieure à j et considérons la mesure aléatoire

$$M_{s,j}^{j_0} = \bigotimes_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0}^* \\ \langle u \rangle \leq j}} ((L_u^{j_0})^s \delta_1 + (1 - (L_u^{j_0})^s) \delta_0).$$

De plus, posons $\tilde{\Xi}_{j+1} = \{0, 1\}^{n_{j_0+j+1}}$ puis, pour tout sommet $w \in \mathcal{U}_{j_0}$ de génération j , considérons la mesure aléatoire

$$\tilde{M}_{s,w,j+1}^{j_0} = \bigotimes_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} ((L_{wk}^{j_0})^s \delta_1 + (1 - (L_{wk}^{j_0})^s) \delta_0).$$

Pour $\xi \in \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}$, observons qu'un sommet $v \in \mathcal{U}_{j_0}$ de génération $j+1$ appartient au sous-arbre $\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}$ si et seulement si son père $\pi(v)$ appartient à ce sous-arbre et si $\xi_v = X_v^{j_0} = 1$. Il en résulte que

$$\xi \cdot Z_{\emptyset,j+1}^{j_0} = \sum_{\substack{w \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \sum_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} \xi_{wk} X_{wk}^{j_0}.$$

Cette observation et le fait que $M_s^{j_0}$ est une mesure produit permettent de calculer, pour tout nombre complexe z de module inférieur à 1,

$$\begin{aligned} \int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} z^{\xi \cdot Z_{\emptyset,j+1}^{j_0}} M_s^{j_0}(d\xi) &= \int_{\Xi_j} \prod_{\substack{w \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \left(\int_{\tilde{\Xi}_{j+1}} \prod_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} \left(z^{X_{wk}^{j_0}} \right)^{\xi_k^w} \tilde{M}_{s,w,j+1}^{j_0}(d\xi^w) \right) M_{s,j}^{j_0}(d\xi) \\ &= \int_{\Xi_j} \prod_{\substack{w \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \prod_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} \left((L_{wk}^{j_0})^s z^{X_{wk}^{j_0}} + 1 - (L_{wk}^{j_0})^s \right) M_{s,j}^{j_0}(d\xi). \end{aligned}$$

Grâce à la proposition 6.4 et l'indépendance des vecteurs donnant les rapports de contraction, l'espérance conditionnelle sous la mesure de probabilité Π_{j_0} , conditionnellement à la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0} \otimes \mathcal{Q}_j^{j_0}$, du membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\Xi_j} \prod_{\substack{w \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \Pi_{j_0+j} \left[\prod_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} \left(1 - (L_k^{j_0+j})^s \left(1 - z^{X_k^{j_0+j}} \right) \right) \right] M_{s,j}^{j_0}(d\xi) \\ &= \int_{\Xi_j} \phi_{s,j_0+j}(z)^{\xi \cdot Z_{\emptyset,j}^{j_0}} M_{s,j}^{j_0}(d\xi) = \int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} \phi_{s,j_0+j}(z)^{\xi \cdot Z_{\emptyset,j}^{j_0}} M_s^{j_0}(d\xi). \end{aligned}$$

On conclut en prenant l'espérance sous la probabilité Π_{j_0} puis en faisant appel à l'hypothèse de récurrence. //

Le lemme 6.10 permet de majorer les probabilités e_{s,j_0} définies par (6.50). Dans ce but, pour tout réel $s \in]0, \infty[$ et tout entier naturel j_0 , introduisons

$$\varsigma_{s,j_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\phi''_{s,j_0+j}(1)}{\phi'_{s,j_0+j}(1) \prod_{i=0}^j \phi'_{s,j_0+i}(1)}$$

avec la convention que $\varsigma_{s,j_0} = \infty$ si un des facteurs du dénominateur s'annule. C'est notamment le cas si $j_0 < j$. En effet, d'une part, $\phi'_{s,j_0+i}(1)$ est, pour tout $i \in \mathbb{N}$, égal au réel α_{s,j_0+i} donné par (6.29). D'autre part, le réel $\alpha_{s,j-1}$ est nul d'après (6.22).

Comme $\underline{j}$ est fini, la fonction ρ est correctement définie au travers de l'assertion (6.31). On dispose alors du résultat suivant.

Lemme 6.11

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout réel $s \in]0, \infty[$ vérifiant $\rho(s) > 0$ et tout entier $j_0 \in \mathbb{N}$,

$$e_{s,j_0} \leq 1 - \frac{1}{\varsigma_{s,j_0}}.$$

// On peut supposer $j_0 \geq \underline{j}$, puisque ς_{s,j_0} est infini dans le cas contraire, ce qui rend le résultat trivial. Soit $\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$. Le nombre moyen de sommets restant dans χ après percolation s'écrit

$$\int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \#(\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \cap \chi) M_s^{j_0}(d\xi) = \sum_{v \in \chi} \int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{v \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}\}} M_s^{j_0}(d\xi).$$

Prenons $v \in \chi \subset \tau_{\emptyset}^{j_0}$. Le sommet v appartient à $\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}$ si et seulement si $\xi_{v_1 \dots v_j} = 1$, pour tout entier $j \in \{1, \dots, \langle v \rangle\}$, de sorte que

$$\int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{v \in \xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}\}} M_s^{j_0}(d\xi) = \int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \prod_{j=1}^{\langle v \rangle} \mathbb{1}_{\{\xi_{v_1 \dots v_j} = 1\}} M_s^{j_0}(d\xi) = \prod_{j=1}^{\langle v \rangle} (L_{v_1 \dots v_j}^{j_0})^s$$

car $M_s^{j_0}$ est une mesure produit. Le nombre moyen de sommets restant dans χ après percolation s'obtient par conséquent en sommant le membre de droite lorsque v décrit χ . Ce nombre moyen est en outre minoré par

$$\int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\#(\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0} \cap \chi) \geq 1\}} M_s^{j_0}(d\xi) \geq \int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} \not\rightarrow 0\}} M_s^{j_0}(d\xi).$$

En effet, le nombre moyen de sommets restant après percolation est supérieur à la probabilité qu'il reste au moins un sommet. De surcroît, si le processus $\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0}$ ne tend pas vers 0 à l'infini, l'arbre $\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}$ comporte au moins un chemin infini, en vertu du lemme de König. Ce chemin appartient en particulier à $\partial \tau_{\emptyset}^{j_0}$, donc il passe par un sommet v de χ . Le sommet v appartient simultanément à χ et à $\xi \cdot \tau_{\emptyset}^{j_0}$. Ainsi, il y a au moins un sommet qui reste dans χ après percolation. Finalement, en passant à la borne inférieure sur $\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})$, il vient

$$\inf_{\chi \in \mathcal{C}(\tau_{\emptyset}^{j_0})} \sum_{v \in \chi} \prod_{j=1}^{\langle v \rangle} (L_{v_1 \dots v_j}^{j_0})^s \geq \int_{\{0,1\}^{u_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} \not\rightarrow 0\}} M_s^{j_0}(d\xi).$$

En particulier, si l'infimum est nul, l'intégrale précédente est nulle aussi. D'après la définition (6.50) de la probabilité e_{s,j_0} , cela se traduit par

$$\begin{aligned} e_{s,j_0} &\leq \Pi_{j_0} \left(\int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} \rightarrow 0\}} M_s^{j_0}(d\xi) = 0 \right) \\ &= \Pi_{j_0} \left(\int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} \rightarrow 0\}} M_s^{j_0}(d\xi) \geq 1 \right) \\ &\leq \Pi_{j_0} \left[\int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} \rightarrow 0\}} M_s^{j_0}(d\xi) \right]. \end{aligned}$$

La dernière majoration provient de l'inégalité de Markov. Cependant, le processus $\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0}$ admet une limite nulle à l'infini si et seulement si $\xi \cdot Z_{\emptyset, j_1}^{j_0} = 0$ pour un certain entier j_1 et, dans ce cas, il est nul à partir du rang j_1 . D'après le lemme 6.10, le membre de droite est donc la limite croissante de

$$\Pi_{j_0} \left[\int_{\{0,1\}^{\mathcal{U}_{j_0}^*}} \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Z_{\emptyset, j_1}^{j_0} = 0\}} M_s^{j_0}(d\xi) \right] = \phi_{s,j_0} \circ \dots \circ \phi_{s,j_0+j_1-1}(0)$$

quand j_1 tend vers l'infini. Pour tout entier naturel j_1 , le théorème 1 de [1] prouve que le membre de droite est majoré par

$$1 - \left(\frac{1}{\prod_{i=0}^{j_1-1} \phi'_{s,j_0+i}(1)} + \sum_{j=0}^{j_1-1} \frac{\phi''_{s,j_0+j}(1)}{\phi'_{s,j_0+j}(1) \prod_{i=0}^j \phi'_{s,j_0+i}(1)} \right)^{-1}$$

Rappelons que $\phi'_{s,j_0+i}(1) = \alpha_{s,j_0+i}$ pour tout entier naturel i . De ce fait, comme $\rho(s)$ est strictement positif, le terme apparaissant dans l'inverse tend vers ς_{s,j_0} quand j_1 tend vers l'infini. Le résultat s'ensuit. //

Le lemme 6.11 permet d'étudier la limite presque sûre $\mathfrak{E}_{s,u,\infty}$ du processus $\mathfrak{E}_{s,u,\bullet}$ défini par (6.51) pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$. Il conduit en effet au résultat suivant.

Lemme 6.12

Supposons $\underline{j} < \infty$. Pour tout réel $s \in]0, \infty[$ vérifiant $\rho(s) > 0$ et tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$,

$$\mathbb{M} - \text{p.s.} \quad W_{0,u,\infty} > 0 \quad \implies \quad \mathfrak{E}_{s,u,\infty} = 0.$$

// Fixons un entier $j \geq \langle u \rangle$. D'après le lemme 6.11, on a

$$\mathfrak{E}_{s,u,j} \leq \left(1 - \frac{1}{\varsigma_{s,j}} \right)^{Z_{u,j}} \leq \exp \left(- \frac{Z_{u,j}}{\varsigma_{s,j}} \right).$$

Commençons par majorer $\varsigma_{s,j}$. En vertu de (6.22), on a $\phi'_{s,i}(1) = \alpha_{s,i} > 0$ pour tout entier $i \geq \underline{j}$. On observe alors aisément que

$$\varsigma_{s,j} = \left(\prod_{i=\underline{j}}^{j-1} \phi'_{s,i}(1) \right) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\phi''_{s,k}(1)}{\phi'_{s,k}(1) \prod_{i=\underline{j}}^k \phi'_{s,i}(1)} \leq \left(\prod_{i=\underline{j}}^{j-1} \phi'_{s,i}(1) \right) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{n_{k+1}}{\prod_{i=\underline{j}}^k \alpha_{s,i}}.$$

Grâce au lemme 6.3 et le fait que $\rho(s)$ est strictement positif, pour tout réel $\varepsilon > 0$ assez petit et tout entier j assez grand, on a

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{n_{k+1}}{\prod_{i=\underline{j}}^k \alpha_{s,i}} \leq \sum_{k=j}^{\infty} e^{(\varepsilon-\rho(s))(k+1)} = \frac{e^{(\varepsilon-\rho(s))(j+1)}}{1 - e^{\varepsilon-\rho(s)}}.$$

De plus, en choisissant $\varepsilon = \rho(s)/2$ et en utilisant (6.38) pour exprimer $Z_{u,j}$ en fonction de $W_{0,u,j}$, on parvient à

$$-\frac{Z_{u,j}}{\varsigma_{s,j}} \leq -\frac{W_{0,u,j}}{\prod_{i=\underline{j}}^{\langle u \rangle-1} \phi'_{s,i}(1)} \left(\prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} \frac{\varphi'_{1,i}(1)}{\phi'_{s,i}(1)} \right) (e^{\rho(s)/2} - 1) e^{\rho(s)j/2}$$

pour tout entier j assez grand. Comme $0 < \phi'_{s,i}(1) \leq \varphi'_{1,i}(1)$ pour tout entier $i \geq \langle u \rangle$, il en découle que

$$-\frac{Z_{u,j}}{\varsigma_{s,j}} \leq -\frac{W_{0,u,j}}{\prod_{i=\underline{j}}^{\langle u \rangle-1} \phi'_{s,i}(1)} (e^{\rho(s)/2} - 1) e^{\rho(s)j/2}.$$

Dès lors, sur l'événement $\{W_{0,u,\infty} > 0\}$, le membre de droite tend vers $-\infty$ quand j tend vers l'infini, si bien que $\mathfrak{E}_{s,u,\infty} = 0$. //

Nous sommes désormais en mesure de prouver la proposition 6.10. Ainsi, supposons $d_* > 0$, donc $\underline{j} < \infty$, puis considérons un sommet $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ de génération supérieure à $\underline{j}$ et un réel $s \in]0, d_*[$. Supposons que la dimension de Hausdorff de l'ensemble K_u est strictement inférieure à s . Alors sa mesure de Hausdorff s -dimensionnelle est nulle, de même que l'écoulement $E_{s,u}$, d'après la proposition 6.2. Grâce à (6.52), il en ressort que

$$\mathbb{P}(\dim K_u < s) \leq \mathbb{P}(E_{s,u} = 0) = \mathbb{M}[\mathfrak{E}_{s,u,\infty}].$$

On peut voir cette dernière espérance comme la somme de deux termes. Le premier est

$$\mathbb{M}[\mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} > 0\}} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{E}_{s,u,\infty} > 0\}} \mathfrak{E}_{s,u,\infty}] \leq \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} > 0 \text{ et } \mathfrak{E}_{s,u,\infty} > 0).$$

Cependant, en vertu du lemme 6.12, cette dernière probabilité est nulle car $\rho(s) > 0$. Le second terme est

$$\mathbb{M}[\mathbb{1}_{\{W_{0,u,\infty} = 0\}} \mathfrak{E}_{s,u,\infty}] \leq \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0).$$

En conséquence, l'espérance sous $\mathbb{M}$ de la variable $\mathfrak{E}_{s,u,\infty}$ est majorée par la probabilité que la limite $W_{0,u,\infty}$ soit nulle. On en déduit que

$$\mathbb{P}(\dim K_u < s) \leq \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0).$$

Sachant que l'événement $\{\dim K_u < d_*\}$ se présente comme l'union croissante des événements $\{\dim K_u < s\}$ sur $s \in]0, d_*[$, la première partie de la proposition 6.10 s'ensuit.

Dans le but d'établir la seconde partie de cette proposition, faisons appel à la proposition 6.9. Selon cette dernière, le fait d'avoir $W_{0,u,\infty} = 0$ et $\dim K_u > 0$ est un événement de probabilité nulle. Ainsi,

$$\mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0) = \mathbb{P}(W_{0,u,\infty} = 0 \text{ et } \dim K_u \leq 0) \leq \mathbb{P}(\dim K_u \leq 0).$$

La probabilité d'avoir $\dim K_u < d_*$ est donc inférieure à celle d'avoir $\dim K_u \leq 0$. D'où

$$\mathbb{P}(\dim K_u \leq 0) \geq \mathbb{P}(0 < \dim K_u < d_*) + \mathbb{P}(\dim K_u \leq 0),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 6.10 en montrant que la dimension de K_u ne peut appartenir à l'intervalle $]0, d_*[$ qu'avec une probabilité nulle.

V.2 Loi de la dimension de Θ

Lorsque d_* est strictement positif, la proposition 6.10 assure en particulier que la dimension de Hausdorff de l'ensemble K_u appartient à l'ensemble $\{-\infty, 0, d_*\}$ avec probabilité 1, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération plus grande que $\underline{j}$. Comme l'indique le résultat suivant, cela implique que l'ensemble Θ admet une dimension qui est presque sûrement dans l'ensemble $\{-\infty, 0, d_*\}$. On peut même donner la loi de la variable $\dim \Theta$. Rappelons que les suites $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont définies par (6.20) et (6.39) respectivement et que, pour tout entier naturel j , l'ensemble S_j regroupe les sommets de l'arbre $\mathcal{U}_0$ de génération égale à j auxquels le processus X assigne l'état 1.

Théorème 6.4

Supposons $d_* > 0$. La dimension de Hausdorff de l'ensemble Θ donné par (6.9) appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0, d_*\}$. En outre, la loi de $\dim \Theta$ est donnée par

$$\mathbb{P}(\dim \Theta = -\infty) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[f_j^{\#S_j}] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\dim \Theta \leq 0) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}[w_j^{\#S_j}].$$

// Soit $s \in]0, d_*[$. D'après (6.35), avec probabilité 1, si la dimension de Θ est inférieure à s , tous les compacts K_u , pour $u \in \mathcal{U}_0$ de génération supérieure à $\underline{j}$, sont de dimension inférieure à s . Dans ce cas, on a l'alternative suivante : soit K_u est de dimension 0 ou $-\infty$ pour tout sommet u , soit il existe un sommet u pour lequel $0 < \dim K_u \leq s$. Un tel sommet vérifie $0 < \dim K_u < d_*$, ce qui n'est possible qu'avec une probabilité nulle, en vertu de la proposition 6.10. Finalement,

$$\mathbb{P}(\dim \Theta \leq s) \leq \mathbb{P}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle \geq \underline{j} \implies \dim K_u \leq 0).$$

Passons à la limite croissante quand s tend en croissant vers d_* . En reprenant l'assertion (6.35), il vient

$$\mathbb{P}(\dim \Theta < d_*) \leq \mathbb{P}(\dim \Theta \leq 0).$$

Ainsi, $\dim \Theta$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\{-\infty, 0, d_*\}$.

Intéressons-nous à la loi de la variable $\dim \Theta$. Sachant que $\dim \Theta = -\infty$ si et seulement si $\Theta = \emptyset$, il suffit de se reporter à la proposition 6.6 pour obtenir l'expression attendue de la probabilité d'avoir $\dim \Theta = -\infty$. Portons

maintenant notre attention sur la probabilité de l'événement $\{\dim \Theta \leq 0\}$. D'après (6.9) et (6.10), on a

$$\{\dim \Theta \leq 0\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \{\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle \leq j \implies \dim K_u \leq 0\}.$$

Fixons $j \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{U}_0$ avec $\langle u \rangle \leq j$. Le compact K_u se décompose en

$$K_u = \bigcup_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle v \rangle = j}} K_v.$$

En effet, si x appartient à K_u , il s'écrit $x = x_\zeta$, avec $\zeta \in \partial\tau_u$. Notons v le mot $\zeta_1 \dots \zeta_j$. Ce dernier appartient à l'arbre τ_u et a pour longueur j . En outre, $\zeta \in \partial\tau_v$, ce qui implique que $x = x_\zeta$ appartient à K_v . Réciproquement, si v désigne un sommet de τ_u dont la génération est j , l'ensemble $\partial\tau_v$ est inclus dans $\partial\tau_u$, d'où l'inclusion $K_v \subset K_u$. On en déduit que

$$\{\dim \Theta \leq 0\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \{\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies \dim K_u \leq 0\}.$$

Ainsi, la probabilité que la dimension de Θ soit égale à 0 ou $-\infty$ est

$$\mathbb{P}(\dim \Theta \leq 0) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{P}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies \dim K_u \leq 0).$$

Soient j un entier supérieur à $\underline{j}$ et u un sommet de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_0$. D'après les propositions 6.9 et 6.10, on a

$$\mathbb{P}(\dim K_u \leq 0) \leq \mathbb{M}(W_{0,u,\infty} = 0) \leq \mathbb{P}(W_{0,u,\infty} = 0 \text{ et } \dim K_u \leq 0),$$

ce qui implique l'égalité du membre de gauche et du membre de droite. Il en résulte que la probabilité d'avoir simultanément $\dim K_u \leq 0$ et $W_{0,u,\infty} > 0$ est nulle. Cela conduit à l'inégalité

$$\mathbb{P}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies \dim K_u \leq 0) \leq \mathbb{M}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies W_{0,u,\infty} = 0).$$

L'inégalité réciproque provient du fait qu'on ne peut avoir simultanément $W_{0,u,\infty} = 0$ et $\dim K_u > 0$ qu'avec une probabilité nulle, en vertu de la proposition 6.9. Finalement, on peut encore écrire

$$\mathbb{P}(\dim \Theta \leq 0) = \lim_{j \uparrow \infty} \downarrow \mathbb{M}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies W_{0,u,\infty} = 0).$$

Considérons à nouveau un entier $j \geq \underline{j}$ et un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ de génération j . Si $X_0 = 0$, le processus $Z_{u,\bullet}$ est nul, tout comme la limite $W_{0,u,\infty}$. À l'inverse, si $\mathbb{M}(X_u = 1) > 0$, la loi sous $\mathbb{M}$, conditionnellement à l'événement $\{X_u = 1\}$, de $W_{0,u,\infty}$ est égale à la loi sous $\mathbb{M}_{1,j}$ de $W_{\emptyset,\infty}^j$ en vertu de la proposition 6.4. Cette même proposition conduit alors à

$$\mathbb{M}(\forall u \in \mathcal{U}_0 \quad \langle u \rangle = j \implies W_{0,u,\infty} = 0 \mid \mathcal{M}_j) = w_j^{\#S_j}$$

On conclut en prenant l'espérance sous la mesure $\mathbb{M}$ et en faisant tendre l'entier j vers l'infini. //

Le théorème 6.4 que nous venons de prouver donne la loi de la variable $\dim \Theta$. Il relie en particulier la probabilité que la dimension de Θ soit égale à 0 ou $-\infty$ et la limite de la suite de terme général $\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}]$, pour $j \in \mathbb{N}$. Rappelons que le lemme 6.8, établi dans la section IV, apporte quelques précisions sur cette dernière limite. Cela débouche sur le résultat suivant.

Corollaire 6.2

Supposons la condition (6.24) satisfaite et $d_* > 0$.

(i). On a $\mathbb{P}(\dim \Theta = d_*) = 1$ si

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\bar{n}_j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j+1}} \right) \right) = \infty.$$

(ii). On a $\mathbb{P}(\dim \Theta = d_*) > 0$ si aucune des conditions (a)-(d) figurant dans l'énoncé du théorème 6.3 n'est vérifiée.

// Prouvons (i). Comme $d_* > 0$, on a $\rho(0) > 0$ et le lemme 6.8 montre que $\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}]$ tend vers 0 quand j tend vers l'infini. D'après le théorème 6.4, l'ensemble Θ est presque sûrement de dimension d_* .

Démontrons (ii). La preuve de la deuxième partie du théorème 6.3 indique que si aucune des conditions (a)-(d) n'est vérifiée, $\mathbb{M}[w_j^{\#S_j}]$ ne peut tendre vers 1 quand j tend vers l'infini. Le résultat découle finalement du théorème 6.4. //

VI Preuves des résultats de la section II

VI.1 Preuve de la proposition 6.1

Soit $u \in \mathcal{U}_0$. Montrons que l'ensemble K_u défini par (6.10) s'écrit encore

$$K_u = \bigcap_{j=\langle u \rangle}^{\infty} \bigcup_{\substack{v \in \tau_u \\ \langle v \rangle = j}} J_v.$$

Soit x un point appartenant, pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$, à un certain compact J_{v^j} avec $v^j \in \tau_u$ et $\langle v^j \rangle = j$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de sommets d'échelle donnée dans τ_u , un argument classique d'extraction diagonale montre qu'il existe un chemin infini $\zeta \in \partial \tau_u$ tel que, pour tout entier naturel $i \geq \langle u \rangle$, il existe une infinité d'entiers naturels $j \geq i$ vérifiant $\zeta_1 \dots \zeta_i = v_1^j \dots v_i^j$. Ainsi, $x \in J_{v^j} \subset J_{\zeta_1 \dots \zeta_i}$. On en déduit que $x = x_\zeta \in K_u$. Réciproquement, tout point de K_u appartient clairement pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$ à un compact J_{v^j} avec $v^j \in \tau_u$ et $\langle v^j \rangle = j$.

Par ailleurs, l'ensemble K_u est compact car il s'écrit comme une intersection dénombrable de compacts.

VI.2 Preuve de la proposition 6.2

Fixons un sommet $u \in \mathcal{U}_0$ et un réel $s \in]0, \infty[$. Soient ε un réel strictement positif et j un entier assez grand pour avoir $|J_\emptyset| \bar{\beta}^j < \varepsilon$, où $\bar{\beta}$ est le majorant intervenant dans (6.4). Considérons une coupe $\chi \in \mathcal{C}_j(\tau_u)$. D'après (6.4), on a

$$|J_v| = |J_\emptyset| \prod_{i=1}^j \frac{|J_{v_1 \dots v_i}|}{|J_{v_1 \dots v_{i-1}}|} \leq |J_\emptyset| \bar{\beta}^j < \varepsilon$$

pour tout sommet $v \in \chi$. Soit x un point de K_u . La définition (6.10) du compact K_u assure qu'il existe un chemin infini $\zeta \in \partial\tau_u$ pour lequel $x = x_\zeta$. Comme χ est une coupe de τ_u , il existe un sommet $v \in \chi$ vérifiant $\zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} = v$. On a donc $x \in J_v$. Il en résulte que la famille $(J_v)_{v \in \chi}$ constitue un ε -recouvrement du compact K_u . Par conséquent, grâce à (6.13), on peut écrire

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(K_u) \leq \sum_{v \in \chi} |J_v|^s = |J_u|^s \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s.$$

En passant à l'infimum sur χ parcourant $\mathcal{C}_j(\tau_u)$ et à la limite quand j tend vers l'infini dans le membre de droite puis en faisant tendre ε vers 0 dans le membre de gauche, on obtient finalement $\mathcal{H}^s(K_u) \leq |J_u|^s \tilde{E}_{s,u}$.

Réciproquement, fixons un entier $j \geq \langle u \rangle$ et un réel $\varepsilon \in]0, |J_\emptyset| \underline{\beta}^j]$, où $\underline{\beta}$ est le minorant apparaissant dans (6.4), puis désignons par $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ un ε -recouvrement du compact K_u . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons en outre $\tilde{U}_p = U_p$ si $|U_p| > 0$. Sinon, notons $\tilde{U}_p$ un ensemble quelconque de diamètre $\varepsilon/2^p$ qui contient U_p . Ainsi, $(\tilde{U}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un ε -recouvrement de K_u formé d'ensembles de diamètre non nul. Fixons un entier naturel p et considérons

$$V_p = \left\{ v \in \tau_u^* \mid \tilde{U}_p \cap J_v \neq \emptyset \quad \text{et} \quad |J_v| \leq |\tilde{U}_p| < |J_{\pi(v)}| \right\}.$$

Soit $x \in K_u \cap \tilde{U}_p$. Il existe un chemin infini $\zeta \in \partial\tau_u$ tel que $x = x_\zeta$. D'après (6.4), on a $0 < |\tilde{U}_p| < |J_\emptyset| \beta^{\langle u \rangle} \leq |J_u|$ et le diamètre $|J_{\zeta_1 \dots \zeta_i}|$ décroît strictement et tend vers 0 quand i tend vers l'infini, si bien qu'il existe un entier i supérieur à $\langle u \rangle$ et à 1 vérifiant $|J_{\zeta_1 \dots \zeta_i}| \leq |\tilde{U}_p| < |J_{\zeta_1 \dots \zeta_{i-1}}|$. L'ensemble $\tilde{U}_p \cap J_{\zeta_1 \dots \zeta_i}$ est non vide car il contient le point x . Ainsi, $\zeta_1 \dots \zeta_i \in V_p$. Il en ressort que

$$K_u \cap \tilde{U}_p \subset \bigcup_{v \in V_p} J_v.$$

Notons x_0 un point de $\tilde{U}_p$ et κ un réel strictement positif tel que $\|x\|_\infty \leq \kappa \|x\|$ pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, où $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ désignent respectivement la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$ et la norme supremum. On prouve aisément que les compacts J_v indexés par les sommets v appartenant à V_p sont tous inclus dans la boule fermée B de centre x_0 et de rayon $2\kappa|\tilde{U}_p|$ au sens de la norme supremum. Ces compacts étant d'intérieurs disjoints, il vient

$$(4\kappa)^d |\tilde{U}_p| = \mathcal{L}^d(B) \geq \sum_{v \in V_p} \mathcal{L}^d(\text{int } J_v) \geq \kappa' \sum_{v \in V_p} |J_v|^d$$

où κ' est un réel strictement positif qui ne dépend que de la famille de compacts $(J_v)_{v \in \mathcal{U}_0}$ et dont l'existence est garantie par (6.5). Par ailleurs, pour chaque sommet v appartenant à V_p , on a $|J_v| \geq \underline{\beta}|J_{\pi(v)}| > \underline{\beta}|\tilde{U}_p|$. Il s'ensuit que

$$\#V_p \leq \frac{1}{C} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\kappa' \underline{\beta}}{(4\kappa)^d}. \quad (6.53)$$

Notons χ' l'union sur $p \in \mathbb{N}$ des ensembles V_p . Privons χ' des sommets v tels qu'il existe $i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\}$ vérifiant $v_1 \dots v_i \in \chi'$ ou tels que $\zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} \neq v$ pour tout chemin $\zeta \in \partial\tau_u$, puis appelons χ le sous-ensemble de χ' ainsi obtenu. Prouvons que χ appartient à $\mathcal{C}_j(\tau_u)$. Par construction de χ , on a d'abord

$$\begin{cases} \chi \subset \tau_u \\ \forall v \in \chi \quad \exists \zeta \in \partial\tau_u & \zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} = v \\ \forall v \in \chi \quad \forall i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\} & v_1 \dots v_i \notin \chi \end{cases} \quad (6.54)$$

De plus, pour tout sommet v de χ , on a $|J_v| \leq |J_\emptyset| \underline{\beta}^j$. Ainsi, grâce à (6.4), on peut écrire

$$\underline{\beta}^{\langle v \rangle} \leq \prod_{i=1}^{\langle v \rangle} \frac{|J_{v_1 \dots v_i}|}{|J_{v_1 \dots v_{i-1}}|} \leq \underline{\beta}^j$$

de sorte que la génération du sommet v est supérieure à j . Prenons maintenant un chemin $\zeta \in \partial\tau_u$. D'après (6.10), le point x_ζ appartient au compact K_u . Il appartient donc à un certain ensemble $\tilde{U}_p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Cependant, il existe un entier i supérieur à $\langle u \rangle$ et à 1 vérifiant $|J_{\zeta_1 \dots \zeta_i}| \leq |\tilde{U}_p| < |J_{\zeta_1 \dots \zeta_{i-1}}|$. On observe alors que $\zeta_1 \dots \zeta_i \in \chi'$. Notons i' le plus petit entier pour lequel cette propriété est vraie et posons $v = \zeta_1 \dots \zeta_{i'}$. Alors v appartient à χ . Par conséquent,

$$\forall \zeta \in \partial\tau_u \quad \exists v \in \chi \quad \zeta_1 \dots \zeta_{\langle v \rangle} = v.$$

Il reste à établir que l'ensemble χ est fini. Supposons le contraire. Comme chaque sommet de τ_u n'a qu'un nombre fini de fils, il existe une suite $(v^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sommets de χ vérifiant $\langle v^i \rangle \geq \langle u \rangle + i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Un argument classique d'extraction diagonale prouve alors l'existence d'un chemin infini $\zeta \in \partial\tau_u$ tel que, pour tout entier naturel $q \geq \langle u \rangle$, il existe une infinité d'entiers naturels i vérifiant $\zeta_1 \dots \zeta_q = v_1^i \dots v_q^i$. D'après l'assertion précédente, il existe $w \in \chi$ tel que $\zeta_1 \dots \zeta_{\langle w \rangle} = w$. Pour un tel entier $i > \langle w \rangle - \langle u \rangle$, on a donc simultanément $v^i \in \chi$ et $v_1^i \dots v_{\langle w \rangle}^i = w \in \chi$, ainsi que $\langle w \rangle \leq \langle v^i \rangle - 1$, ce qui offre une contradiction. Il s'ensuit que l'ensemble χ est fini et qu'il appartient bien à $\mathcal{C}_j(\tau_u)$.

Écrivons enfin, à l'aide de l'assertions (6.53), que

$$|J_u|^s \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{v \in V_p} |J_v|^s \leq \frac{1}{C} \sum_{p=0}^{\infty} |\tilde{U}_p|^s \leq \frac{1}{C} \left(\frac{\varepsilon^s}{1 - 2^{-s}} + \sum_{p=0}^{\infty} |U_p|^s \right).$$

En minorant le membre de gauche par son infimum sur χ parcourant $\mathcal{C}_j(\tau_u)$ et en passant à l'infimum sur $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ parcourant l'ensemble des ε -recouvrements du compact K_u , puis en faisant tendre ε vers 0 et enfin j vers l'infini, on obtient $C|J_u|^s \tilde{E}_{s,u} \leq \mathcal{H}^s(K_u)$.

Enfin, comme $\mathcal{C}_j(\tau_u) \subset \mathcal{C}(\tau_u)$ pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$, on a $E_{s,u} \leq \tilde{E}_{s,u}$, ce qui achève la preuve de la proposition 6.2.

VI.3 Preuve du corollaire 6.1

Soit χ une partie finie de l'ensemble $\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$ telle que $v_1 \dots v_i \notin \chi$ pour tout $v \in \chi$ et tout $i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\}$. Notons j_0 la génération maximale des sommets constituant χ . Alors χ appartient à $\mathcal{C}(\tau_u)$ si et seulement si :

- χ est inclus dans τ_u ;
- pour tout $v \in \chi$, le processus Z_v ne s'éteint pas ;
- pour tout sommet w de $\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$ de génération j_0 qui ne descend pas d'un sommet v de χ et qui appartient à τ_u , le processus Z_w s'éteint.

Ainsi, l'appartenance de χ à $\mathcal{C}(\tau_u)$ est un événement de la tribu $\mathcal{M}$. En conséquence, $E_{s,u}$ et $\tilde{E}_{s,u}$ sont des variables aléatoires mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}$, puisque pour tout réel a , d'une part, l'ensemble $\{E_{s,u} \geq a\}$ est égal à

$$\bigcap_{\chi} \left(\{\chi \notin \mathcal{C}(\tau_u)\} \cup \left\{ \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \geq a \right\} \right)$$

où l'intersection est prise sur χ appartenant à l'ensemble dénombrable des parties finies de $\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$ telles que $v_1 \dots v_i \notin \chi$ pour tout $v \in \chi$ et tout $i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\}$ et, d'autre part, l'ensemble $\{\tilde{E}_{s,u} \geq a\}$ s'identifie à

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=\langle u \rangle}^{\infty} \bigcap_{\chi} \left(\{\chi \notin \mathcal{C}(\tau_u)\} \cup \left\{ \sum_{v \in \chi} \left(\prod_{i=\langle u \rangle+1}^{\langle v \rangle} L_{v_1 \dots v_i} \right)^s \geq a - \frac{1}{k} \right\} \right)$$

où l'intersection est prise sur χ appartenant à l'ensemble dénombrable des parties finies de $\mathcal{U}_{\langle u \rangle}$ formées d'éléments v de génération supérieure à j vérifiant $v_1 \dots v_i \notin \chi$ pour tout $i \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle - 1\}$.

D'après la proposition 6.2, pour tout réel positif a , l'ensemble $\{\dim K_u \leq a\}$ est égal à l'intersection des ensembles $\{\tilde{E}_{u,a+1/k} = 0\}$ sur $k \in \mathbb{N}^*$, qui appartiennent tous à la tribu $\mathcal{F}$. Il en résulte que $\{\dim K_u \leq a\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{F}$. Cela reste vrai pour l'ensemble $\{\dim K_u = -\infty\}$ car ce dernier est égal à l'événement de la tribu $\mathcal{F}$ correspondant au fait que le processus Z_u admette une limite nulle à l'infini. Il s'ensuit que $\dim K_u$ est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}$.

En vertu de (6.9), on peut écrire l'ensemble Θ comme l'union sur $u \in \mathcal{U}_0$ des ensembles K_u . Ainsi, la dimension de Hausdorff de Θ est égale au supremum des dimensions de Hausdorff des ensembles K_u pour u parcourant $\mathcal{U}_0$. Ainsi, $\dim \Theta$ est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}$.

VI.4 Preuve de la proposition 6.3

D'après le théorème de Carathéodory, pour construire la mesure $\mathbb{M}_{t_0, j_0}$, il suffit de la définir sur une algèbre engendrant $\mathcal{M}^{j_0}$, puis de montrer qu'elle forme une application σ -additive sur cette algèbre et attribue la masse 1 à l'ensemble M^{j_0} tout entier, cf. [138, p. 93] ou [148, p. 198]. L'algèbre que nous utilisons à cet effet est constituée des cylindres de M^{j_0} qui sont définis comme suit. Notons $\mathcal{V}_{j_0}$ l'ensemble des parties finies et non vides V de $\mathcal{U}_{j_0}$ qui vérifient $\pi(V^*) \subset V$ et $\pi^{-1}(\pi(V^*)) = V^*$. Observons que dans ce cas,

$$\forall u \in \pi(V^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\} \quad uk \in V.$$

Un sous-ensemble Γ de M^{j_0} est un cylindre s'il peut s'écrire $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$, où V appartient à $\mathcal{V}_{j_0}$ et F est un sous-ensemble de $\{0, 1\}^V$.

Lemme 6.13

| Les cylindres de M^{j_0} forment une algèbre qui engendre la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$.

// La preuve, rédigée dans un souci d'exhaustivité, est élémentaire. Commençons par montrer que les cylindres forment une algèbre. Il s'agit de vérifier que M^{j_0} est un cylindre, que le complémentaire d'un cylindre est un cylindre et que l'union de deux cylindres est un cylindre. Le premier point est trivial puisque M^{j_0} peut se présenter sous la forme $\{0, 1\}^{\{\emptyset\}} \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus \{\emptyset\}}$ et $\{\emptyset\} \in \mathcal{V}_{j_0}$. Pour mettre en évidence le deuxième point, prenons un cylindre $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$ avec $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ et $F \subset \{0, 1\}^V$. Par passage au complémentaire, on a

$$M^{j_0} \setminus \Gamma = (\{0, 1\}^V \setminus F) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V},$$

ce qui garantit que $M^{j_0} \setminus \Gamma$ est aussi un cylindre. Afin de prouver le troisième point, prenons deux cylindres $\Gamma_1 = F_1 \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V_1}$ et $\Gamma_2 = F_2 \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V_2}$, où V_1 et V_2 appartiennent à $\mathcal{V}_{j_0}$ et F_1 et F_2 sont des parties de $\{0, 1\}^{V_1}$ et $\{0, 1\}^{V_2}$ respectivement. Posons $V = V_1 \cup V_2$. L'union de Γ_1 et Γ_2 est alors un cylindre car $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ et

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = ((F_1 \times \{0, 1\}^{V \setminus V_1}) \cup (F_2 \times \{0, 1\}^{V \setminus V_2})) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}.$$

On déduit de ce qui précède que les cylindres de M^{j_0} forment une algèbre.

Pour montrer que cette algèbre engendre la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$, remarquons d'abord que pour tous $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ et $A \subset \{0, 1\}$, l'événement $\{X_u^{j_0} \in A\}$ est un cylindre puisque $W \cup \{u\} \in \mathcal{V}_{j_0}$ et

$$\{X_u^{j_0} \in A\} = \{0, 1\}^W \times A^{\{u\}} \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus (W \cup \{u\})},$$

où W désigne l'ensemble constitué du mot vide $\emptyset$ et des mots s'écrivant $u_1 \dots u_j k$, pour $j \in \{0, \dots, \langle u \rangle - 1\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{j_0+j+1}\}$, hormis le mot u . Comme de tels événements engendrent la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$, on en déduit que cette dernière tribu est incluse dans la tribu engendrée par les cylindres. Réciproquement, la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$ contient clairement chaque cylindre et donc la tribu qu'ils engendrent. //

Pour tout cylindre $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$, avec $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ et $F \subset \{0, 1\}^V$, posons

$$\mathbb{M}_{t_{\emptyset}, j_0}(\Gamma) = \sum_{\omega \in F} \mathbb{1}_{\{t_{\emptyset}\}}(\omega_{\emptyset}) \prod_{u \in \pi(V^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}). \quad (6.55)$$

Lemme 6.14

| La valeur de $\mathbb{M}_{t_{\emptyset}, j_0}(\Gamma)$ donnée par (6.55) ne dépend pas du choix de l'ensemble $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ et de la partie $F \subset \{0, 1\}^V$ intervenant dans l'écriture $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$.

// Soit $F' \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V'}$, avec $V' \in \mathcal{V}_{j_0}$ et $F' \subset \{0, 1\}^{V'}$, une autre écriture du cylindre Γ . Posons $W = V \cup V'$, ainsi que $V_0 = V$ et $V_p = \pi^{-1}(V_{p-1}) \cap W$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors $V = V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_P = W$ pour un certain entier naturel P . De plus, pour tout $p \in \{0, \dots, P\}$, on a $\Gamma = F_p \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V_p}$, avec $V_p \in \mathcal{V}_{j_0}$ et $F_p = F \times \{0, 1\}^{V_p \setminus V}$. De plus, pour $p \in \{1, \dots, P\}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \in F_p} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{u \in \pi(V_p^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}) \\ &= \sum_{\omega \in F_{p-1}} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{u \in \pi(V_{p-1}^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}). \end{aligned}$$

Il en résulte que la valeur de $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(\Gamma)$ donnée par (6.55) est la même selon qu'on écrive $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$ ou $\Gamma = (F \times \{0, 1\}^{W \setminus V}) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus W}$. On montre de la même manière que cette valeur est inchangée selon qu'on écrive $\Gamma = F' \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V'}$ ou $\Gamma = (F' \times \{0, 1\}^{W \setminus V'}) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus W}$. Le résultat s'ensuit. //

L'ensemble M^{j_0} étant le cylindre $\{0, 1\}^\emptyset \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus \{\emptyset\}}$, on observe aisément à partir de l'identité (6.55) que $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(M^{j_0}) = 1$. Pour appliquer le théorème de Carathéodory, il reste à établir le lemme suivant.

Lemme 6.15

| L'application $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ est σ -additive sur les cylindres.

// Considérons un cylindre Γ qui s'écrit comme l'union d'une suite $(\Gamma_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de cylindres disjoints. Remarquons que chaque cylindre Γ_p est un ouvert de M^{j_0} et que le cylindre Γ est un fermé de M^{j_0} , qui est compact en vertu du théorème de Tychonoff. Ainsi, les cylindres Γ_p sont vides sauf un nombre fini d'entre eux. Il existe donc une partie $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ telle que tout cylindre Γ_p non vide s'écrive $F_p \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$ avec $F_p \subset \{0, 1\}^V$. On a de surcroît $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$, où F est l'union disjointe des F_p . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(\Gamma) &= \sum_{\omega \in F} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{u \in \pi(V^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}) \\ &= \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ \Gamma_p \neq \emptyset}} \sum_{\omega \in F_p} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{u \in \pi(V^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}) \\ &= \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ \Gamma_p \neq \emptyset}} \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(\Gamma_p) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(\Gamma_p), \end{aligned}$$

ce qui prouve la σ -additivité de $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$. //

On peut donc appliquer le théorème de Carathéodory pour étendre $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ en une mesure de probabilité sur $(M^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0})$.

Vérifions maintenant que cette mesure convient. On a tout d'abord $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ -presque sûrement $X_\emptyset^{j_0} = t_\emptyset$, puisque cet événement est le cylindre $\{t_\emptyset\}^{\{\emptyset\}} \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus \{\emptyset\}}$. Fixons ensuite $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ et $y_k \in \{0, 1\}$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}$. Il s'agit de prouver que, pour tout événement $A \in \mathcal{G}_u^{j_0}$, on a

$$\int \mathbb{1}_{\{\forall k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\} \ X_{uk}^{j_0} = y_k\}} \mathbb{1}_A d\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} = \int \nu_{X_u^{j_0}, j_0 + \langle u \rangle}(\{(y_k)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}) \mathbb{1}_A d\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}.$$

Il suffit de prouver cette identité lorsque A appartient à un π -système engendrant la tribu $\mathcal{G}_u^{j_0}$, cf. [138, p. 93]. En reprenant la preuve du lemme 6.13, on observe qu'on obtient un tel π -système en considérant la collection des cylindres $F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$, où F est un sous-ensemble de $\{0, 1\}^V$ et V est une partie de $\mathcal{V}'$ qui ne contient aucun sommet du sous-arbre $u\mathcal{U}_{j_0+\langle u \rangle}^*$ issu de u dans $\mathcal{U}_{j_0}$. Supposons donc que A s'écrit sous cette forme. Notons j_1 le plus grand entier naturel vérifiant $u_1 \dots u_{j_1} \in V$, puis

$$V' = V \cup \{u_1 \dots u_j k, j \in \{j_1, \dots, \langle u \rangle - 1\}, k \in \{1, \dots, n_{j_0+j+1}\}\}$$

et $F' = F \times \{0, 1\}^{V' \setminus V}$. On a alors $A = F' \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V'}$ et $V' \in \mathcal{V}_{j_0}$. De plus, l'événement apparaissant dans le membre de gauche de l'identité à établir s'écrit

$$A \cap \{\forall k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\} X_{uk}^{j_0} = y_k\} = F' \times \left(\prod_{k=1}^{n_{j_0+\langle u \rangle+1}} \{y_k\}^{\{uk\}} \right) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V''}$$

avec $V'' = V' \cup \pi^{-1}(\{u\}) \in \mathcal{V}_{j_0}$. C'est donc un cylindre, si bien que sa probabilité sous $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ est, en vertu de (6.55),

$$\sum_{\omega \in F'} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \nu_{\omega_u, j_0+\langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}\}) \prod_{v \in \pi(V'^*)} \nu_{\omega_v, j_0+\langle v \rangle}(\{(\omega_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle v \rangle+1}\}}\}).$$

En outre, A s'écrit comme l'union disjointe des cylindres $(\prod_{v \in V'} \{\omega_v\}^{\{v\}}) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V'}$ lorsque ω décrit F' , de sorte que le membre de droite de l'identité à établir s'écrit encore, par linéarité,

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \in F'} \int \left(\nu_{X_u^{j_0}, j_0+\langle u \rangle}(\{(y_k)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}\}) \prod_{v \in V'} \mathbb{1}_{\{\omega_v\}}(\eta_v) \right) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(d\eta) \\ &= \sum_{\omega \in F'} \nu_{\eta_u, j_0+\langle u \rangle}(\{(y_k)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}\}) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} \left(\left(\prod_{v \in V'} \{\omega_v\}^{\{v\}} \right) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V'} \right) \\ &= \sum_{\omega \in F'} \nu_{\eta_u, j_0+\langle u \rangle}(\{(y_k)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\}}\}) \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{v \in \pi(V'^*)} \nu_{\omega_v, j_0+\langle v \rangle}(\{(\omega_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle v \rangle+1}\}}\}). \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de (6.55). L'identité recherchée est donc établie pour tout événement A appartenant à un π -système engendrant la tribu $\mathcal{G}_u^{j_0}$. Il s'ensuit que la mesure $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ vérifie les propriétés énoncées dans la proposition 6.3.

Pour finir, établissons l'unicité de la mesure $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$. Notons $\mathbb{M}'$ une mesure de probabilité vérifiant les propriétés énoncées dans la proposition 6.3. Pour montrer que $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ et $\mathbb{M}'$ coïncident sur la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur un π -système engendrant cette tribu. D'après le lemme 6.13, on peut prendre à cet effet la collection des cylindres de M^{j_0} . Considérons un tel cylindre $\Gamma = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}$, avec $V \in \mathcal{V}_{j_0}$ et $F \subset \{0, 1\}^V$. Notons $(u^p)_{p \in \{1, \dots, P\}}$ une énumération croissante au sens de la génération de l'ensemble $\pi(V^*)$. Fixons $\omega \in F$ et, pour tout u de $\pi(V^*)$, posons

$$C_u = \{\forall k \in \{1, \dots, n_{j_0+\langle u \rangle+1}\} X_{uk}^{j_0} = \omega_{uk}\}.$$

En outre, considérons les événements $D_0 = \{X_\emptyset^{j_0} = \omega_\emptyset\}$ et $D_p = D_0 \cap C_{u^1} \cap \dots \cap C_{u^p}$ pour tout $p \in \{1, \dots, P\}$. On remarque que l'événement D_P correspond au fait que

$X_u^{j_0} = \omega_u$ pour tout sommet u de V . Fixons $p \in \{1, \dots, P\}$. Observons que l'événement D_{p-1} appartient à la tribu $\mathcal{G}_{u^p}^{j_0}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{M}'(D_p | \mathcal{G}_{u^p}^{j_0}) &= \mathbb{M}'(D_{p-1} \cap C_{u^p} | \mathcal{G}_{u^p}^{j_0}) = \mathbb{1}_{D_{p-1}} \mathbb{M}'(C_{u^p} | \mathcal{G}_{u^p}^{j_0}) \\ &= \mathbb{1}_{D_{p-1}} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u^p \rangle}(\{(\omega_{u^p k})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u^p \rangle + 1}\}}\}). \end{aligned}$$

Un récurrence élémentaire conduit alors à

$$\mathbb{M}'(D_P) = \mathbb{M}'(D_0) \prod_{u \in \pi(V^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}).$$

Cependant, la probabilité sous $\mathbb{M}'$ de l'événement D_0 est $\mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset)$, si bien que

$$\mathbb{M}'\left(\left(\prod_{u \in V} \{\omega_u\}^{\{u\}}\right) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus V}\right) = \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\omega_\emptyset) \prod_{u \in \pi(V^*)} \nu_{\omega_u, j_0 + \langle u \rangle}(\{(\omega_{uk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle u \rangle + 1}\}}\}).$$

Sachant que le cylindre Γ est l'union disjointe sur ω appartenant à F des événements dont on vient de calculer la probabilité sous $\mathbb{M}'$. On en déduit que $\mathbb{M}'(\Gamma) = \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(\Gamma)$ d'après (6.55). La proposition 6.3 est finalement prouvée.

VI.5 Preuve de la proposition 6.4

Comme M^{j_0} est métrisable et compact et comme $\mathcal{M}^{j_0}$ est sa tribu borélienne, on peut considérer une version régulière $(\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} | \mathcal{M}_j^{j_0})$ de la probabilité conditionnelle $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ sachant $\mathcal{M}_j^{j_0}$, cf. [138, p. 218]. L'application

$$L : (M^{j_0}, \mathcal{M}^{j_0}) \rightarrow \bigotimes_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} (M^{j_0+j}, \mathcal{M}^{j_0+j})$$

qui à ω associe la famille des $\omega_{u\bullet}$ pour $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ vérifiant $\langle u \rangle = j$ est mesurable. En effet, la tribu de l'ensemble d'arrivée est engendrée par les ensembles qui se présentent comme le produit de copies de M^{j_0+j} et d'un cylindre Γ_u de M^{j_0+j} pour un certain sommet $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ tel que $\langle u \rangle = j$. Ce cylindre s'écrit $\Gamma_u = F \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0+j} \setminus V}$ avec $V \in \mathcal{V}_{j_0+j}$ et $F \subset \{0, 1\}^V$. Considérons

$$\tilde{F} = \{\tilde{\omega} \in \{0, 1\}^{uV} \mid (\tilde{\omega}_{uv})_{v \in V} \in F\}.$$

L'image réciproque du produit de Γ_u et des copies de M^{j_0} s'écrit alors sous la forme $\{0, 1\}^{V'} \times \tilde{F} \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus (V' \cup uV)}$ avec $V' \cup uV \in \mathcal{V}_{j_0}$, où V' désigne le sous-ensemble $\mathcal{U}_{j_0}$ constitué du mot vide $\emptyset$ et des mots de la forme $u_1 \dots u_j k$, avec $j \in \{0, \dots, \langle u \rangle - 1\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{j_0+j+1}\}$, hormis le mot u . Cette image réciproque étant un cylindre de M^{j_0} , elle appartient à la tribu $\mathcal{M}^{j_0}$. L'application L étant mesurable, on peut licitement considérer la mesure aléatoire $\mathbb{L}$, image de $(\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} | \mathcal{M}_j^{j_0})$ par L . Il s'agit de la loi jointe sous $(\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} | \mathcal{M}_j^{j_0})$ de la famille des processus $X_{u\bullet}^{j_0}$ pour $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ vérifiant $\langle u \rangle = j$. Introduisons en outre la mesure aléatoire

$$\mathbb{L}' = \bigotimes_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_u^{j_0}, j_0+j}.$$

Il s'agit de montrer que les mesures $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$ coïncident $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ -presque sûrement sur la tribu du produit des copies de $(M^{j_0+j}, \mathcal{M}^{j_0+j})$ indexé par les sommets $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ vérifiant $\langle u \rangle = j$.

Cette dernière est engendrée par le π -système constitué des produits de cylindres Γ_u de M^{j_0+j} indexés par les sommets $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ tels que $\langle u \rangle = j$. Cependant, comme $\mathcal{U}_{j_0+j}$ est dénombrable, l'ensemble $\mathcal{V}_{j_0+j}$ l'est aussi, de sorte que ce π -système comporte un nombre dénombrable d'éléments. Ainsi, il suffit de montrer qu'étant donnée une famille Γ_u de cylindres de M^{j_0+j} indexée par les sommets $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ vérifiant $\langle u \rangle = j$, on a

$$\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} - \text{p.s.} \quad \mathbb{L} \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \Gamma_u \right) = \mathbb{L}' \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \Gamma_u \right).$$

Cela revient à prouver que $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ -presque sûrement,

$$\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} (\forall u \in \mathcal{U}_{j_0} \quad \langle u \rangle = j \implies X_{u\bullet}^{j_0} \in \Gamma_u \mid \mathcal{M}_j^{j_0}) = \prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{X_u^{j_0}, j_0+j}(\Gamma_u)$$

c'est-à-dire que, pour tout événement A de la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$,

$$\int \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{1}_{\Gamma_u}(\omega_{u\bullet}) \right) \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(d\omega) = \int \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{\omega_u, j_0+j}(\Gamma_u) \right) \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(d\omega). \quad (6.56)$$

Désignons par W l'ensemble des sommets de $\mathcal{U}_{j_0}$ de génération inférieure à j . Un événement A de la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$ s'écrit sous la forme $A = G \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus W}$, avec $G \subset \{0, 1\}^W$. De plus, sachant que les ensembles Γ_u sont des cylindres de M^{j_0+j} , ils s'écrivent sous la forme $\Gamma_u = F_u \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0+j} \setminus V}$ avec $V \in \mathcal{V}_{j_0+j}$ et $F_u \subset \{0, 1\}^V$. Notons $\tilde{\Gamma}_u$ l'ensemble des $\omega \in M^{j_0}$ tels que $\omega_{u\bullet}$ appartienne à Γ_u , ainsi que $\tilde{F}_u$ l'ensemble des $\tilde{\eta} \in \{0, 1\}^{uV}$ tels que $(\tilde{\eta}_{uv})_{v \in V}$ appartienne à F_u . Observons que l'ensemble $\tilde{\Gamma}_u$ est un cylindre de M^{j_0} puisqu'il peut s'écrire sous la forme $\{0, 1\}^{V'_u} \times \tilde{F}_u \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus (V'_u \cup uV)}$ avec $V'_u \cup uV \in \mathcal{V}_{j_0}$, où V'_u désigne le sous-ensemble de $\mathcal{U}_{j_0}$ formé du mot vide $\emptyset$ et des mots de la forme $u_1 \dots u_j k$, avec $j \in \{0, \dots, \langle u \rangle - 1\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{j_0+j+1}\}$, hormis le mot u .

Le membre de gauche de (6.56) est égal à

$$\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} \left(A \cap \bigcap_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \tilde{\Gamma}_u \right).$$

D'après le lemme 6.13, l'ensemble dont on calcule ici la probabilité sous $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ est un cylindre en tant qu'intersection finie de cylindres. En outre, un élément $\omega \in M^{j_0}$ appartient à cet ensemble si et seulement si on dispose d'un élément η de G coïncidant avec ω sur W et, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}_{j_0}$ tel que $\langle u \rangle = j$, d'un élément $\tilde{\eta}^u$ de $\tilde{F}_u$ coïncidant avec ω sur uV . Dans ce cas, pour un tel u , on a $\eta_u = \tilde{\eta}_u^u$. D'après la forme (6.55) que prend la

mesure $\mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}$ sur les cylindres, le membre de gauche de (6.56) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta \in G} \sum_{\forall u: \tilde{\eta}^u \in \tilde{F}_u} \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{1}_{\{\eta_u\}}(\tilde{\eta}_u^u) \right) \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\eta_\emptyset) \left(\prod_{v \in \pi(W^*)} \nu_{\eta_v, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\eta_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}) \right) \\
& \quad \times \prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \left(\prod_{v \in \pi(uV^*)} \nu_{\tilde{\eta}_v^u, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\tilde{\eta}_{vk}^u)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}) \right) \\
& = \sum_{\eta \in G} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\eta_\emptyset) \left(\prod_{v \in \pi(W^*)} \nu_{\eta_v, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\eta_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}) \right) \\
& \quad \times \prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \left(\sum_{\tilde{\eta}^u \in \tilde{F}_u} \mathbb{1}_{\{\eta_u\}}(\tilde{\eta}_u^u) \prod_{v \in \pi(uV^*)} \nu_{\tilde{\eta}_v^u, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\tilde{\eta}_{vk}^u)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}) \right).
\end{aligned}$$

Cependant, chaque facteur du produit indexé par u est égal à

$$\sum_{\eta^u \in F_u} \mathbb{1}_{\{\eta_u\}}(\eta_u^u) \prod_{v \in \pi(V^*)} \nu_{\eta_v^u, j_0 + j + \langle v \rangle}(\{(\eta_{vk}^u)_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + j + \langle v \rangle + 1}\}}\}),$$

c'est-à-dire à $\mathbb{M}_{\eta_u, j_0 + j}(\Gamma_u)$, d'après l'analogie de (6.55) pour cette mesure de probabilité. Il en ressort que le membre de gauche de (6.56) est égal à

$$\sum_{\eta \in G} \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\eta_\emptyset) \left(\prod_{v \in \pi(W^*)} \nu_{\eta_v, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\eta_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}) \right) \prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{\eta_u, j_0 + j}(\Gamma_u).$$

Par ailleurs, étant donné que A s'écrit comme l'union disjointe sur η appartenant à G des cylindres $(\prod_{v \in W} \{\eta_v\}^{\{v\}}) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus W}$, le membre de droite de (6.56) s'identifie à

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta \in G} \int \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{\omega_u, j_0 + j}(\Gamma_u) \right) \mathbb{1}_{\{\forall v \in W \ \omega_v = \eta_v\}}(\omega) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0}(d\omega) \\
& = \sum_{\eta \in G} \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{\eta_u, j_0 + j}(\Gamma_u) \right) \mathbb{M}_{t_\emptyset, j_0} \left(\left(\prod_{v \in W} \{\eta_v\}^{\{v\}} \right) \times \{0, 1\}^{\mathcal{U}_{j_0} \setminus W} \right) \\
& = \sum_{\eta \in G} \left(\prod_{\substack{u \in \mathcal{U}_{j_0} \\ \langle u \rangle = j}} \mathbb{M}_{\eta_u, j_0 + j}(\Gamma_u) \right) \mathbb{1}_{\{t_\emptyset\}}(\eta_\emptyset) \prod_{v \in \pi(W^*)} \nu_{\eta_v, j_0 + \langle v \rangle}(\{(\eta_{vk})_{k \in \{1, \dots, n_{j_0 + \langle v \rangle + 1}\}}\}).
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en faisant une nouvelle fois appel à (6.55). On en déduit l'égalité (6.56) pour tout événement A de la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$. La proposition 6.4 s'ensuit.

VI.6 Preuve de la proposition 6.5

Soient $j_0, j \in \mathbb{N}$ et $z \in D$. Observons qu'un sommet v de génération $j+1$ de l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}$ appartient à $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ si et seulement si son père $\pi(v)$ appartient à $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ et $X_v = 1$. Ainsi,

$$Z_{\emptyset, j+1}^{j_0} = \sum_{\substack{w \in \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \sum_{k=1}^{n_{j_0+j+1}} X_{wk}.$$

Cependant, l'appartenance d'un sommet de génération j de l'arbre $\mathcal{U}_{j_0}$ à l'ensemble $\tau_{\emptyset}^{j_0}$ constitue un événement de la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$. La propriété 6.4 conduit alors à

$$\mathbb{M}_{1, j_0} \left[z^{Z_{\emptyset, j+1}^{j_0}} \mid \mathcal{M}_j^{j_0} \right] = \prod_{\substack{w \in \tau_{\emptyset}^{j_0} \\ \langle w \rangle = j}} \mathbb{M}_{1, j_0+j} \left[z^{X_1^{j_0+j} + \dots + X_{n_{j_0+j+1}}^{j_0+j}} \right] = (\varphi_{1, j_0+j}(z))^{Z_{\emptyset, j}^{j_0}}$$

On obtient la première partie de la proposition en prenant l'espérance sous $\mathbb{M}_{1, j_0}$ conditionnellement aux variables $Z_{\emptyset, 0}^{j_0}, \dots, Z_{\emptyset, j}^{j_0}$ et en observant que ces variables aléatoires sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{M}_j^{j_0}$.

La seconde partie de la proposition découle d'une récurrence élémentaire sur l'entier naturel j et du fait que la variable $Z_{\emptyset, 0}^{j_0}$ vaut $\mathbb{M}_{1, j_0}$ -presque sûrement 1.

Chapitre 7

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Contenu du chapitre

I	Introduction	193
II	Résultats préliminaires	202
III	Cas bifractal	208
IV	Cas multifractal	209

I Introduction

La théorie des ondelettes a très tôt été motivée par le traitement du signal, *cf.* [78, 84, 110]. Elle a ensuite trouvé de nombreuses applications dans ce domaine dans des contextes tels que l'estimation, la détection, la classification, la compression, le filtrage ou encore la synthèse, *cf. e.g.* [14, 40, 51, 69, 111, 144]. Les méthodes développées dans ces travaux font subir une certaine transformation scalaire à chaque coefficient d'ondelette du signal considéré, de sorte que les coefficients sont implicitement supposés indépendants entre eux. Cependant, on observe sur les signaux naturels que les coefficients d'ondelette présentent certaines corrélations. En particulier, les grands coefficients d'ondelette tendent à se propager à travers les échelles, *cf.* [120, 121]. En traitement d'image, ce phénomène peut s'expliquer par le fait que les contours créent des singularités. On peut donc s'attendre à ce que des méthodes prenant en compte les corrélations entre coefficients d'ondelette fournissent de meilleurs résultats.

Afin de développer de telles méthodes, M. Crouse, R. Nowak et R. Baraniuk [42] ont proposé un modèle probabiliste simple permettant de capturer les corrélations entre les coefficients d'ondelette d'un signal : le modèle d'arbre de Markov caché. Décrivons-le rapidement. On considère une chaîne de Markov à espace d'états $\{0, 1\}$ indexée par l'arbre binaire. Conditionnellement à cette chaîne de Markov, les coefficients d'ondelette sont indépendants et le coefficient d'ondelette indexé par un intervalle dyadique λ donné est une variable gaussienne centrée dont la variance est grande ou petite selon que l'état attribué par la chaîne de Markov au sommet de l'arbre binaire correspondant à λ est 1 ou 0 respectivement. La chaîne de Markov sous-jacente permet donc de modéliser les corrélations entre les coefficients d'ondelette. De plus, la loi de chaque coefficient d'ondelette est un mélange gaussien. Cette propriété est en accord avec le fait que l'histogramme des coefficients d'ondelette d'un signal naturel est généralement plus concentré en 0 et décroît

moins vite à l'infini qu'une gaussienne. Ajoutons que ce modèle a été utilisé en traitement d'images dans [41, 47].

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés de régularité ponctuelle d'un modèle de séries aléatoires d'ondelettes s'inspirant du modèle d'arbre de Markov caché. Nous nous intéressons en particulier aux propriétés de taille des ensembles isohöldériens des trajectoires, ce qui nous permet de déterminer la loi de leur spectre de singularités. Nous prouvons aussi que ces trajectoires admettent des singularités oscillantes presque partout. Une autre propriété remarquable de ces trajectoires, due à la présence de corrélations entre les coefficients d'ondelette, réside dans le fait que leur spectre de singularités est aléatoire. Aucun des processus aléatoires multifractals étudiés jusqu'à maintenant, comme les processus de Lévy usuels ou en temps multifractal [12, 93] ou les séries aléatoires d'ondelettes à coefficients indépendants de J.-M. Aubry et S. Jaffard [6, 94], ne vérifie ce genre de propriété. Les séries d'ondelettes construites à partir de mesures multifractales par J. Barral et S. Seuret [9] ne la vérifient pas non plus, bien que leurs coefficients d'ondelette présentent de fortes corrélations. De plus, elles n'admettent aucune singularité oscillante. Il en va de même pour les séries aléatoires d'ondelettes basées sur un processus de branchement simple étudiées par A. Brouste [31]. Dans ce modèle, chaque coefficient d'ondelette est soit gaussien soit nul selon que le sommet de l'arbre binaire l'indexant appartient ou non à un certain arbre de Galton-Watson. On peut donc le voir comme un cas particulier du modèle d'arbre de Markov caché en considérant que la chaîne de Markov sous-jacente, d'une part, ne peut attribuer l'état 1 au fils d'un sommet à l'état 0 qu'avec une probabilité nulle et, d'autre part, admet des probabilités de transition qui ne dépendent pas de la génération. Ajoutons que ce modèle a trouvé des applications en géophysique dans le contexte de l'étude des roches stylolitiques, *cf.* [32].

Dans le but de définir plus précisément le modèle que nous étudions, commençons par rappeler quelques notations introduites dans la section II du chapitre 2. Comme nous nous intéressons à des propriétés de régularité ponctuelle, il est plus commode de considérer des ondelettes sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Désignons par $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ la surjection canonique et par Λ l'ensemble des intervalles dyadiques du cercle, c'est-à-dire des ensembles de la forme $\lambda = \phi(2^{-j}(k + [0, 1[))$, avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$. L'entier j se note $\langle \lambda \rangle$ et s'appelle la génération de l'intervalle λ . De plus, posons $x_\lambda = \phi(k2^{-j})$. Par ailleurs, considérons une ondelette ψ appartenant à la classe de Schwartz, *cf.* [112]. Pour tout intervalle $\lambda \in \Lambda$ s'écrivant $\lambda = \phi(2^{-j}(k + [0, 1[))$, nommons Ψ_λ la fonction de $\mathbb{T}$ qui correspond naturellement à la fonction 1-périodique

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x - m) - k).$$

Dès lors, les applications $2^{\langle \lambda \rangle/2} \Psi_\lambda$, ainsi que la fonction constante égale à 1, forment une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{T})$.

L'ensemble Λ des intervalles dyadiques du cercle est en correspondance bijective avec

$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{1, 2\}^j.$$

Il s'agit de l'ensemble constitué du mot vide $\emptyset$ et des mots finis $u = u_1 \dots u_j$ de longueur j sur l'alphabet $\{1, 2\}$, avec $j \in \mathbb{N}^*$. L'entier j se note encore $\langle u \rangle$ et s'appelle la génération de u . Convenons aussi que $\langle \emptyset \rangle = 0$ et que $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$. Pour tout mot $u \in \mathcal{U}^*$, le mot

$\pi(u) = u_1 \dots u_{\langle u \rangle - 1}$ est le père de u . Le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{U}$ et dont les arêtes relient chaque élément de $\mathcal{U}^*$ à son père est alors un arbre binaire dont la racine est $\emptyset$. La correspondance entre $\mathcal{U}$ et Λ se traduit par la bijection

$$u \mapsto \lambda_u = \phi \left(\sum_{j=1}^{\langle u \rangle} (u_j - 1) 2^{-j} + [0, 2^{-\langle u \rangle} [\right) \quad (7.1)$$

et sa réciproque $\lambda \mapsto u_\lambda$. De surcroît, notons $\Omega = \{0, 1\}^\mathcal{U}$ l'ensemble des applications de $\mathcal{U}$ dans $\{0, 1\}$ et munissons cet ensemble de sa tribu produit $\mathcal{F}$. Le processus des coordonnées X de $(\Omega, \mathcal{F})$ est défini par $X_u(\omega) = \omega_u$ pour tous $\omega \in \Omega$ et $u \in \mathcal{U}$.

La correspondance entre l'ensemble Λ des intervalles dyadiques du cercle et l'arbre binaire $\mathcal{U}$ permet d'associer au processus X la série d'ondelettes

$$\begin{aligned} R &= \sum_{u \in \mathcal{U}} \left(2^{-\underline{h} \cdot \langle u \rangle} \mathbb{1}_{\{X_u=1\}} + 2^{-\bar{h} \cdot \langle u \rangle} \mathbb{1}_{\{X_u=0\}} \right) \Psi_{\lambda_u} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(2^{-\underline{h} \cdot \langle \lambda \rangle} \mathbb{1}_{\{X_{u_\lambda}=1\}} + 2^{-\bar{h} \cdot \langle \lambda \rangle} \mathbb{1}_{\{X_{u_\lambda}=0\}} \right) \Psi_\lambda \end{aligned}$$

où $\underline{h}$ et $\bar{h}$ désignent deux éléments de $]0, \infty]$ vérifiant $\underline{h} < \bar{h}$. Les trajectoires de R sont de moyenne nulle. De plus, pour $\lambda \in \Lambda$, le coefficient d'ondelette indexé par l'intervalle λ est

$$C_\lambda = \begin{cases} 2^{-\underline{h} \cdot \langle \lambda \rangle} & \text{si } X_{u_\lambda} = 1 \\ 2^{-\bar{h} \cdot \langle \lambda \rangle} & \text{si } X_{u_\lambda} = 0. \end{cases}$$

Le coefficient C_λ doit être considéré comme grand dans le premier cas et comme petit dans le second (voire nul si $\bar{h} = \infty$ et $\langle \lambda \rangle \geq 1$). La série d'ondelettes R est donc construite comme le modèle d'arbre de Markov caché, à ceci près que conditionnellement au processus X sous-jacent, les coefficients d'ondelette sont déterministes et au lieu d'être gaussiens. On s'attend cependant à obtenir dans les deux cas le même spectre de singularités.

Dans tout ce chapitre, le processus X est tiré sous une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui en fait une chaîne de Markov indexée par l'arbre binaire $\mathcal{U}$. Considérons deux suites $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels de l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier naturel j , posons

$$\nu_{0,j} = (q_j \delta_1 + (1 - q_j) \delta_0)^{\otimes 2} \quad \text{et} \quad \nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes 2}. \quad (7.2)$$

Ce sont deux mesures de probabilité sur $\{0, 1\}^2$. La mesure $\mathbb{P}$ dont nous munissons l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'unique mesure de probabilité sous laquelle :

- on a presque sûrement $X_\emptyset = 1$;
- pour tout $u \in \mathcal{U}$, la mesure $\nu_{X_u, \langle u \rangle}$ donne la loi du vecteur (X_{u1}, X_{u2}) conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_u$ engendrée par les variables aléatoires X_v pour v décrivant l'ensemble $\mathcal{U} \setminus (u\mathcal{U}^*)$ des sommets qui ne sont pas des descendants de u .

Rappelons que les résultats de la partie II.2 du chapitre 6 garantissent l'existence d'une telle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ et donnent plusieurs propriétés vérifiées par le processus X lorsqu'il est tiré sous $\mathbb{P}$.

En outre, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$, on observe aisément que, conditionnellement à X_u , les variables X_{u1} et X_{u2} sont indépendantes et identiquement distribuées et leur loi commune est donnée par

$$\mathbb{P}(X_{u1} = 1 \mid X_u) = p_{\langle u \rangle} \mathbb{1}_{\{X_u=1\}} + q_{\langle u \rangle} \mathbb{1}_{\{X_u=0\}}.$$

Par conséquent, la suite $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ influe sur la propagation des grands coefficients d'ondelette de la série R , tandis que la suite $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ joue sur leur apparition.

Pour tout intervalle $\lambda \in \Lambda$, le coefficient de la série d'ondelettes R indexé par λ est de module compris entre $2^{-\bar{h}(\lambda)}$ et $2^{-\underline{h}(\lambda)}$. D'une part, la proposition 2.1 énoncée dans le chapitre 2 garantit alors que R appartient à l'espace de régularité uniforme $C^{\underline{h}}(\mathbb{T})$. D'autre part, le premier point du théorème 2.2 assure que l'exposant de Hölder $h_R(x)$ de la série R au point x , qui est défini dans la section I du chapitre 2, est inférieur à $\bar{h}$ quel que soit $x \in \mathbb{T}$. Il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{T} \quad \underline{h} \leq h_R(x) \leq \bar{h}. \quad (7.3)$$

Pour décrire plus précisément les propriétés de régularité ponctuelle des trajectoires de la série d'ondelettes R , il convient d'introduire quelques paramètres relatifs à la suite $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui gère la propagation des grands coefficients d'ondelette. Notons

$$\underline{j} = \inf\{j \in \mathbb{N} \mid \forall j' \geq j \quad p_{j'} > 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (7.4)$$

ainsi que

$$\theta = 1 + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{i=\underline{j}}^{j-1} \log_2 p_i \leq 1 \quad (7.5)$$

si $\underline{j}$ est fini et $\theta = -\infty$ si $\underline{j}$ est infini. Ce paramètre reflète la tendance qu'ont les grands coefficients d'ondelette du processus R à se propager au travers des échelles. En effet, en un sens, si θ est proche de 1, les probabilités de transition p_j , pour j assez grand, sont relativement proches de 1, ce qui favorise la propagation des sommets u de l'arbre binaire $\mathcal{U}$ auxquels le processus X assigne l'état 1. Sachant que les résultats du chapitre 6 interviennent dans ce qui suit, il convient en outre de considérer une suite analogue aux suites définies par (6.21) et (6.41) qui permettent d'encadrer la probabilité d'extinction d'un processus de Galton-Watson en environnement variable. Ainsi, posons

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \sigma_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1} (2p_{j+i})} \quad (7.6)$$

en convenant que $\sigma_j = \infty$ si un des facteurs apparaissant au dénominateur est nul, ce qui est le cas pour $j < \underline{j}$. Pour la même raison, posons également, si $\underline{j} < \infty$,

$$\delta = \frac{2^{\underline{j}} q_{\underline{j}-1}}{\sigma_{\underline{j}}} \left(1 - \sum_{k=-1}^{\underline{j}-2} q_k \prod_{i=k+1}^{\underline{j}-2} (p_i - q_i) \right) + \sum_{j=\underline{j}+1}^{\infty} \frac{2^j q_{j-1}}{\sigma_j} \quad (7.7)$$

en convenant que $q_{-1} = 1$. Pour $\underline{j} \geq 1$, le lemme 6.2 indique que le facteur entre parenthèses est égal à $\mathbb{E}[1 - \#S_{\underline{j}-1}/2^{\underline{j}-1}]$, où $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $S_{\underline{j}-1}$ est l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}$ de génération $\underline{j} - 1$ vérifiant $X_u = 1$. Il s'ensuit que δ est toujours positif. Enfin, si $\underline{j}$ est infini, posons $\delta = 0$. On prouve aisément que δ est nul dès que θ est strictement négatif. Par conséquent,

$$\delta > 0 \implies \theta \geq 0. \quad (7.8)$$

Le paramètre δ peut paraître technique mais son intérêt, mis en lumière par la proposition 7.2 énoncée dans la section II, provient du fait qu'il permet de synthétiser les diverses conditions apparaissant dans les énoncés des théorèmes 6.1 et 6.3 du chapitre 6.

Dans tout ce chapitre, nous supposons que θ est strictement inférieur à 1. Cette hypothèse technique implique que les grands coefficients d'ondelette ne peuvent pas trop facilement se propager à travers les échelles. Elle n'est donc pas vraiment restrictive car en accord avec le fait que la décomposition en ondelettes d'un signal réel n'admet que très peu de grands coefficients.

Nous pouvons maintenant présenter les résultats établis dans ce chapitre. Les théorèmes 7.1 et 7.2, énoncés ci-après, donnent la loi du spectre de singularités des trajectoires de la série d'ondelettes R . Rappelons qu'il s'agit de la fonction $d_R : h \mapsto \dim E_h$, où

$$\forall h \in [0, \infty] \quad E_h = \{x \in \mathbb{T} \mid h_R(x) = h\} \quad (7.9)$$

et que la notion de dimension de Hausdorff est définie dans la section III du chapitre 2. D'après (7.3), on a $h_R(x) \in [\underline{h}, \bar{h}]$ pour tout point $x \in \mathbb{T}$, de sorte que l'ensemble E_h est vide si $h \notin [\underline{h}, \bar{h}]$. Ces résultats donnent aussi implicitement la loi du spectre de singularités oscillantes des trajectoires de R . En effet, la proposition 7.1 énoncée dans la section II montre que l'exposant d'oscillation $\beta_R(x)$ de la série d'ondelettes R au point x , qui est défini dans la section I du chapitre 2, vérifie

$$\forall h \in [\underline{h}, \bar{h}] \quad \forall x \in E_h \quad \beta_R(x) = \begin{cases} h/\underline{h} - 1 & \text{si } h < \bar{h} \\ 0 & \text{si } h = \bar{h} < \infty. \end{cases} \quad (7.10)$$

La série d'ondelettes R admet donc une singularité oscillante en tout point de l'ensemble E_h , pour $h \in]\underline{h}, \bar{h}[$. Rappelons en outre que l'exposant d'oscillation n'est pas défini aux points dont l'exposant de Hölder est infini, ce qui justifie le fait de supposer que $\bar{h}$ est fini quand $h = \bar{h}$ dans l'assertion précédente.

Le processus R peut adopter deux comportements distincts, selon que la série $\sum_j 2^j q_j$ converge ou non. Si elle converge, les probabilités d'apparition de grands coefficients d'ondelette sont plutôt faibles, si bien que les trajectoires de R sont régulières dans leur irrégularité, comme l'indique le résultat suivant.

Théorème 7.1

Supposons $\sum_j 2^j q_j < \infty$ et $\theta < 1$.

- (i). Si $\delta = 0$, presque sûrement, $R \in C^{\bar{h}}(\mathbb{T})$ et $h_R(x) = \bar{h}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.
- (ii). Sinon, presque sûrement,

$$d_R(h) \begin{cases} \in \{-\infty, 0, \theta\} & \text{si } h = \underline{h} \\ = 1 & \text{si } h = \bar{h} \\ = -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De surcroît, si $\theta = 0$, on a

$$0 < \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = -\infty) = 1 - \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = 0) < 1,$$

tandis que si $\theta > 0$, on a

$$\begin{cases} 0 < \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = -\infty) < 1 \\ 0 \leq \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = 0) < 1 \\ 0 < \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = \theta) < 1. \end{cases}$$

Remarques : • Les valeurs prises avec probabilité 1 par le spectre de singularités d_R sont représentées sur la figure 7.1, située à la page 199.

• Sachant que $\theta < 1$, le théorème 7.1 implique en particulier que l'ensemble $E_{\bar{h}}$ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}$.

• Le processus R permet d'apporter des éléments de réponse à une question soulevée par S. Jaffard [95]. Pour de nombreux exemples de processus aléatoires F , comme les processus de Lévy usuels ou en temps multifractal [12, 93] ou plusieurs modèles de séries aléatoires d'ondelettes [6, 94], bien que la fonction $x \mapsto h_F(x)$ soit aléatoire, le spectre de singularités de F est une fonction déterministe. Cette propriété n'est bien sûr pas vraie en toute généralité. Il suffit pour s'en convaincre de considérer un mouvement brownien fractionnaire dont le paramètre de Hurst suit une loi de Bernoulli. La série aléatoire R fournit un exemple un peu plus élaboré. D'après le théorème 7.1, le spectre de singularités de ses trajectoires est en effet aléatoire si $\delta > 0$. Le théorème 7.2, énoncé ci-après, montre en outre que cette propriété peut rester vraie quand la série $\sum_j 2^j q_j$ diverge.

Si la série $\sum_j 2^j q_j$ diverge, il y a une probabilité plutôt forte que de grands coefficients d'ondelette apparaissent d'une échelle à l'autre, ce qui rend les trajectoires de R très irrégulières dans leur irrégularité, conformément à ce qu'indique le résultat qui suit. Avant de l'énoncer, notons

$$\tilde{h} = \inf \left\{ h \in]0, \infty[\mid \sum_j 2^{(1-\underline{h}/h)j} q_j = \infty \right\}.$$

On observe aisément que $\tilde{h} \geq \underline{h}$.

Théorème 7.2

Supposons $\sum_j 2^j q_j = \infty$ et $\theta < 1$.

(i). Si $\tilde{h} < \bar{h}$, presque sûrement,

$$d_R(h) = \begin{cases} h/\tilde{h} & \text{si } h \in]\underline{h}, \tilde{h}] \\ -\infty & \text{si } h \in [0, \underline{h}[\cup]\tilde{h}, \infty]. \end{cases}$$

Sinon, presque sûrement,

$$d_R(h) = \begin{cases} h/\tilde{h} & \text{si } h \in]\underline{h}, \bar{h}[\\ 1 & \text{si } h = \bar{h} \\ -\infty & \text{si } h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]. \end{cases}$$

(ii). Si $\underline{h}/\tilde{h} \geq \theta$, presque sûrement, $d_R(\underline{h}) = \underline{h}/\tilde{h}$. Sinon, $d_R(\underline{h})$ appartient presque sûrement à $\{\underline{h}/\tilde{h}, \theta\}$ et

$$\begin{cases} \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = \theta) = 1 & \text{si } \delta = \infty \\ \mathbb{P}(d_R(\underline{h}) = \theta) \in]0, 1[& \text{si } \delta < \infty. \end{cases}$$

Remarques : • La figure 7.2, située à la page 199, représente les valeurs prises presque sûrement par le spectre d_R dans les divers cas couverts par le théorème 7.2.

• Comme $\theta < 1$, le théorème 7.2 implique que l'ensemble $E_{\min(\tilde{h}, \bar{h})}$ est presque sûrement de

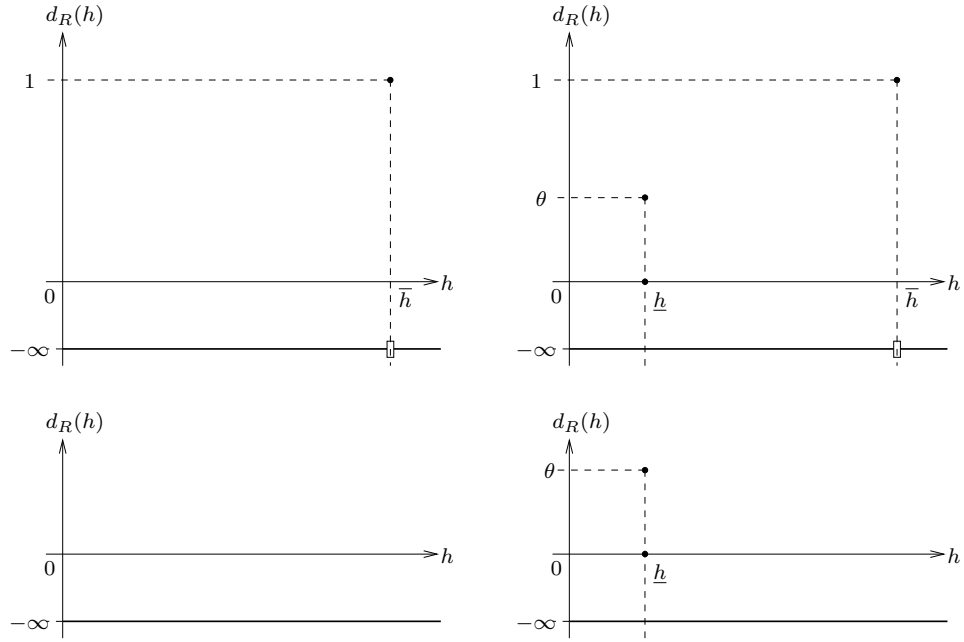


FIG. 7.1 – Valeurs prises avec probabilité 1 par le spectre de singularités d_R lorsque $\sum_j 2^j q_j < \infty$. La première (resp. seconde) ligne correspond au cas où $\bar{h} < \infty$ (resp. $\bar{h} = \infty$). La première (resp. seconde) colonne correspond au cas où $\delta = 0$ (resp. $\delta > 0$).

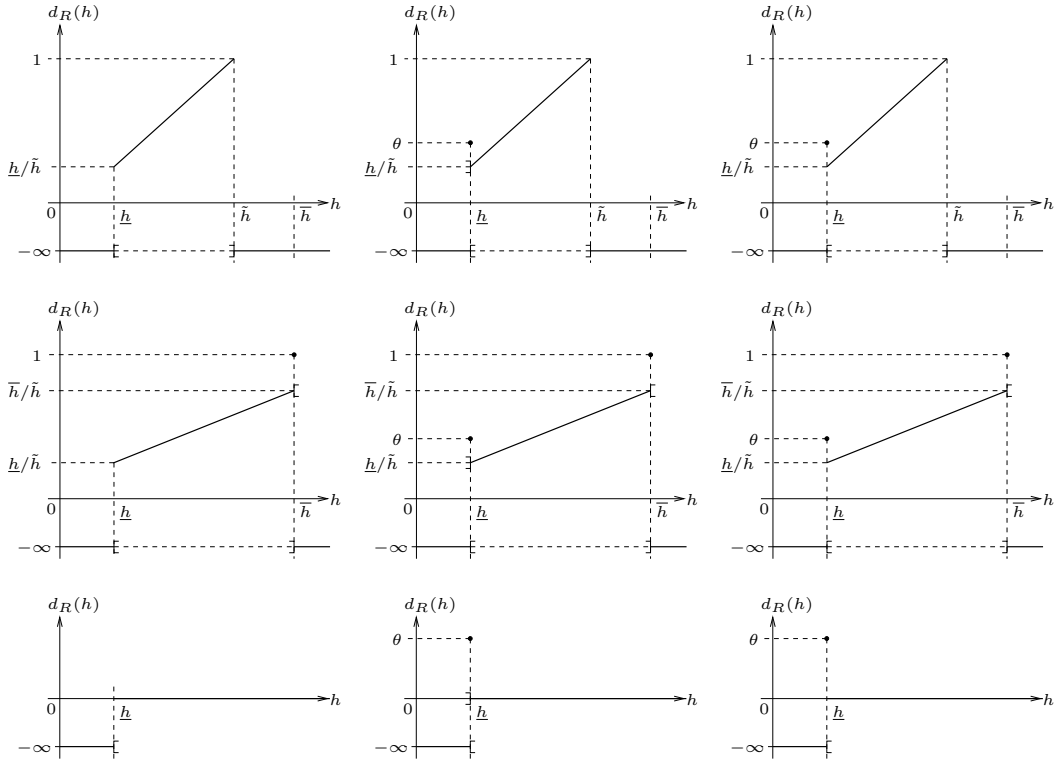


FIG. 7.2 – Valeurs prises avec probabilité 1 par le spectre de singularités d_R lorsque $\sum_j 2^j q_j = \infty$. La première (resp. deuxième, troisième) ligne correspond au cas où $\tilde{h} < \bar{h}$ (resp. $\tilde{h} \geq \bar{h}$ et $\bar{h} < \infty$, $\tilde{h} = \bar{h} = \infty$). La première (resp. deuxième, troisième) colonne correspond au cas où $\underline{h}/\tilde{h} \geq \theta$ (resp. $\underline{h}/\tilde{h} < \theta$ et $\delta = \infty$, $\underline{h}/\tilde{h} < \theta$ et $\delta < \infty$).

mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{T}$. En outre, si $\tilde{h} = \underline{h}$, l'ensemble $E_{\tilde{h}}$ est presque sûrement égal au cercle $\mathbb{T}$ tout entier.

- Grâce au théorème 7.2 et à l'assertion (7.10), on constate qu'avec probabilité 1, la série aléatoire d'ondelettes R admet des singularités oscillantes en certains points du cercle $\mathbb{T}$. Lorsque $\tilde{h} < \bar{h}$, le processus R admet même presque sûrement des singularités oscillantes en presque tout point du cercle. Signalons que cette propriété remarquable est également satisfaite par les autres modèles de séries aléatoires d'ondelettes étudiés dans [6, 94]. De plus, le théorème 7.2 et l'assertion (7.10) conduisent aisément au spectre de singularités oscillantes $d_R(h, \beta)$ du processus R .

- Pour certaines valeurs des paramètres, le spectre de singularités du processus R peut ne pas être concave. Ce processus fournit donc un exemple naturel de processus dont le spectre de singularités ne peut être déterminé grâce au formalisme multifractal. Nous renvoyons à [96] pour plus de détails concernant le formalisme multifractal.

- Rappelons que dans certains cas où $\sum_j 2^j q_j < \infty$, le spectre de singularités de R est aléatoire, d'après le théorème 7.1. Le théorème 7.2 montre que cette propriété reste vraie même si $\sum_j 2^j q_j = \infty$. De surcroît, le spectre de singularités de R est aléatoire si et seulement si $\underline{h}/\tilde{h} < \theta$ et $\delta < \infty$. Supposons $\underline{h}/\tilde{h} < \theta$ et intéressons-nous de manière heuristique à la condition de finitude de δ . Sachant que $\sum_j 2^j q_j = \infty$, pour que δ soit fini, il faut que la suite $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ soit asymptotiquement suffisamment grande pour faire converger la série définissant δ dans (7.7). Comme θ est strictement positif, $\underline{j}$ est fini et on observe que

$$\forall j \geq \underline{j} \quad \sigma_j = \left(\prod_{i=\underline{j}}^{j-1} (2p_i) \right) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=\underline{j}}^{k-1} (2p_i)} \in [2, \infty[. \quad (7.11)$$

On en déduit aisément que la limite inférieure de la suite $((\log_2 \sigma_j)/j)_{j \geq \underline{j}}$ est nulle et que cette limite inférieure est une limite si la limite inférieure définissant θ est également une limite. Ainsi, la suite $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ne peut pas croître exponentiellement vite vers l'infini, sauf éventuellement sur une sous-suite. Pour qu'une telle sous-suite $(\sigma_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ existe, il est nécessaire que la suite dont la limite inférieure définit θ ne converge pas. De plus, pour que δ soit fini, la suite $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ doit être très petite là où $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ne croît pas exponentiellement, c'est-à-dire pour les indices $j \notin \{j_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cette démarche heuristique montre que l'aléa dans le spectre de singularités provient ici d'un choix conjoint très particulier des suites régissant l'apparition des grands coefficients d'ondelette et leur propagation.

- Donnons un exemple concret de suites $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ conduisant à un spectre de singularités aléatoire. Commençons par le choix de $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Soient $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Posons alors $p_0 = 2^{-a}$ et

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad p_j = 2^{-a(b^{\lfloor \log_b(j+1) \rfloor} - b^{\lfloor \log_b j \rfloor})}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On a clairement $\underline{j} = 0$ et $\theta = 1 - a < 1$. Observons en outre que la suite dont la limite inférieure définit θ ne converge pas. On peut donc espérer trouver une sous-suite de $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui diverge exponentiellement vite vers l'infini. Cette sous-suite s'obtient de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $j_n = b^{n+1} - 1$. L'égalité (7.11) et quelques calculs élémentaires conduisent à écrire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_{j_n} = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(a-1)b^k + (b-a)b^n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(a-b)(b^k - b^n)}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'une part,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(a-1)b^k + (b-a)b^n} \geq 2^{(a-1)b^{n+1} + (b-a)b^n} = 2^{a(1-1/b)(j_n+1)}.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(a-b)(b^k - b^n)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(a-b)(b^k - 1)b^n}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $2^{(a-b)(b^k - 1)b^n}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut en outre majorer $2^{(a-b)(b^k - 1)b^n}$ par $2^{(a-b)k}$, qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème de convergence dominée prouve alors que la somme précédente tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq n_0 \quad \sigma_{j_n} \geq 2^{a(1-1/b)(j_n+1)}$$

ce qui montre qu'une sous-suite de $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ diverge à vitesse exponentielle. Introduisons maintenant la suite $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ choisie. Celle-ci dépend des indices le long desquels $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ diverge rapidement. Quitte à augmenter n_0 , on observe que pour tout $n \geq n_0$, il existe un réel q_{j_n-1} tel que

$$2^{-(j_n-1)} \leq q_{j_n-1} \leq \frac{1}{j_n^2} 2^{a(1-1/b)-1)j_n}.$$

Posons de plus $q_{j-1} = 0$, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$ qui n'est pas de la forme j_n , avec $n \geq n_0$. Remarquons alors que $\sum_j 2^j q_j = \infty$ et $\tilde{h} \geq \underline{h}/(a(1-1/b))$. On a donc $\underline{h}/\tilde{h} < \theta$, dès que $a < 1/(2-1/b)$. Supposons cette condition remplie et observons que

$$\delta - \frac{1}{\sigma_0} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j q_{j-1}}{\sigma_j} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{j_n} q_{j_n-1}}{\sigma_{j_n}} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{a(1-1/b)j_n}}{j_n^2 2^{a(1-1/b)(j_n+1)}} \leq 2^{-a(1-1/b)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

ce qui prouve la finitude de δ . Le théorème 7.2 indique finalement que le spectre de singularités du processus R est aléatoire lorsque les suites $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont définies comme précédemment.

Signalons que la preuve du théorème 7.2 utilise la théorie des ensembles à grande intersection présentée dans le chapitre 3. En effet, la proposition 7.4 indique que pour $\tilde{h} < \infty$, l'ensemble $\tilde{E}_h$ défini par

$$\forall h \in [0, \infty] \quad \tilde{E}_h = \{x \in \mathbb{T} \mid h_R(x) \leq h\}. \quad (7.12)$$

appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T})$ d'ensembles à grande intersection du cercle associée à la fonction de jauge $\text{Id}^{h/\tilde{h}}$ dès que $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})]$, où Id désigne la fonction identité. Rappelons que cette classe est définie dans la section IV du chapitre 5. Elle regroupe toutes les parties F de $\mathbb{T}$ dont le relèvement $\phi^{-1}(F)$ appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{R})$ définie dans la section II du chapitre 3. De plus, elle est stable par intersection dénombrable et ses membres sont de g -mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $\mathbb{T}$, pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}_1$ vérifiant $g \prec \text{Id}^{h/\tilde{h}}$.

La suite de ce chapitre s'organise ainsi. La section II fournit plusieurs résultats préliminaires qui interviennent dans les preuves des théorèmes 7.1 et 7.2. Ces preuves sont données dans les sections III et IV respectivement.

II Résultats préliminaires

Dans cette section, nous établissons plusieurs résultats qui interviennent dans les preuves des théorèmes 7.1 et 7.2.

L'exposant de Hölder qu'admet le processus R en un point x du cercle $\mathbb{T}$ dépend de la façon dont ses grands coefficients d'ondelette se répartissent autour de x . Pour expliciter cette affirmation, notons S l'ensemble des sommets u de l'arbre binaire $\mathcal{U}$ vérifiant $X_u = 1$. Chacun de ces sommets indexe un intervalle dyadique qui porte un grand coefficient de la série R . De plus, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$, posons

$$x_u = \phi \left(\sum_{j=1}^{\langle u \rangle} (u_j - 1) 2^{-j} \right) = x_{\lambda_u}$$

où λ_u est l'intervalle codé par u qui est défini par (7.1). Pour tout réel $\alpha > \underline{h}$, notons

$$L_\alpha = \{x \in \mathbb{T} \mid d(x, x_u) < 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha} \text{ pour une infinité de } u \in S\}, \quad (7.13)$$

où d désigne la distance quotient sur le cercle $\mathbb{T}$. On remarque aisément que l'ensemble L_α croît avec α . Le lemme suivant regroupe les propriétés importantes des ensembles L_α . Il relie en particulier ces ensembles aux ensembles E_h et $\tilde{E}_h$ définis par (7.9) et (7.12).

Lemme 7.1

- (i). Pour tout $h \in [0, \underline{h}[\cup]\bar{h}, \infty]$, l'ensemble E_h est vide.
- (ii). Pour tout $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, on a

$$\tilde{E}_h = \bigcap_{h < \alpha \leq \bar{h}} L_\alpha \quad \text{et} \quad E_h = \tilde{E}_h \setminus \bigcup_{\underline{h} < \alpha < h} L_\alpha.$$

- (iii). Avec probabilité 1, pour tout $\alpha \in]\bar{h}, \infty[$, on a $L_\alpha = \mathbb{T}$.

// Rappelons qu'en vertu de (7.3), l'exposant de Hölder de R en un point quelconque de $\mathbb{T}$ est compris entre $\underline{h}$ et $\bar{h}$. L'assertion (i) s'ensuit.

Fixons $\alpha \in [\underline{h}, \bar{h}]$ et $x \in \mathbb{T}$. Supposons $x \in L_\alpha$. Il existe alors une infinité d'intervalles $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $C_\lambda = 2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle}$ et $d(x, x_\lambda) < 2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle/\alpha}$. Le théorème 2.2 énoncé dans le chapitre 2 assure que $h_R(x) \leq \alpha$. Supposons maintenant $x \notin L_\alpha$. Alors, pour tout intervalle $\lambda \in \Lambda$ de génération suffisamment grande, on a $d(x, x_\lambda) \geq 2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle/\alpha}$ si $C_\lambda = 2^{-\underline{h}\langle \lambda \rangle}$. Par conséquent, quelle que soit la valeur de X_{u_λ} , on a

$$|C_\lambda| \leq (2^{-\langle \lambda \rangle} + d(x, x_\lambda))^\alpha$$

de sorte que $h_R(x) \geq \alpha$ en vertu du théorème 2.2. On en déduit aisément l'assertion (ii).

Considérons un réel $\alpha > \bar{h}$. Pour tout entier naturel j , désignons par S_j l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}$ de génération j vérifiant $X_u = 1$. En outre, pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$, notons B_u la boule ouverte de $\mathbb{T}$ de centre x_u et de rayon $2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha}$. On dispose de l'inclusion d'événements suivante

$$\{\mathbb{T} \neq L_\alpha\} \subset \bigcup_{j_0=0}^{\infty} \uparrow \bigcap_{j=j_0}^{\infty} \downarrow \left\{ \mathbb{T} \neq \bigcup_{j'=j_0}^j \bigcup_{u \in S_{j'}} B_u \right\}. \quad (7.14)$$

Considérons deux entiers naturels j_0 et j vérifiant $j \geq j_0 + 1$ et

$$\mathbb{T} \neq \bigcup_{j'=j_0}^j \bigcup_{u \in S_{j'}} B_u.$$

Sachant que le cercle $\mathbb{T}$ est recouvert par les boules fermées de rayon 2^{-j-1} et de centre $\phi(k2^{-j})$, lorsque k décrit $\{0, \dots, 2^j - 1\}$, il existe un entier k de cet ensemble tel que la boule fermée de centre $\phi(k2^{-j})$ et de rayon 2^{-j-1} n'est pas incluse dans le membre de droite de l'inégalité précédente. Pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$ vérifiant $\langle u \rangle \in \{j-1, j\}$, notons $\hat{B}_u$ la boule ouverte de centre x_u et de rayon $2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha} - 2^{-j-1}$. On a alors

$$\phi(k2^{-j}) \notin \bigcup_{u \in S_{j-1} \cup S_j} \hat{B}_u.$$

En effet, si le point $\phi(k2^{-j})$ appartenait à une boule $\hat{B}_u$, pour $u \in S_{j-1} \cup S_j$, on aurait

$$d(x, x_u) \leq d(x, \phi(k2^{-j})) + d(\phi(k2^{-j}), x_u) < 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha}$$

pour tout point x de la boule fermée de centre $\phi(k2^{-j})$ et de rayon 2^{-j-1} . Cette boule serait donc incluse dans B_u , ce qui est impossible, en vertu du choix de k . Supposons désormais $j_0 \geq (1 - \log_2(2^{\underline{h}/\alpha} - 1))/(1 - \underline{h}/\alpha)$ et introduisons, pour $j' \in \{j-1, j\}$,

$$A_{j'}^k = \left\{ u \in \{1, 2\}^{j'} \mid d(x_u, \phi(k2^{-j})) \leq 2^{-1-\underline{h}j'/\alpha} \right\}.$$

On observe que l'ensemble A_j^k comporte au moins $2^{(1-\underline{h}/\alpha)j} - 1$ éléments et que le père $\pi(u)$ de tout élément u de A_j^k appartient à A_{j-1}^k . En effet,

$$d(x_{\pi(u)}, \phi(k2^{-j})) \leq d(x_{\pi(u)}, x_u) + d(x_u, \phi(k2^{-j})) \leq 2^{-j} + 2^{-1-\underline{h}j/\alpha} \leq 2^{-1-\underline{h}(j-1)/\alpha}.$$

La dernière inégalité provient de l'hypothèse sur j_0 . Fixons $j' \in \{j-1, j\}$, puis $u \in A_{j'}^k$. On observe que $\phi(k2^{-j}) \in \hat{B}_u$, ce qui impose $u \notin S_{j'}$, en vertu du choix de k . On a donc

$$\left\{ \mathbb{T} \neq \bigcup_{j'=j_0}^j \bigcup_{u \in S_{j'}} B_u \right\} \subset \bigcup_{k=0}^{2^j-1} (\mathfrak{A}_{j-1}^k \cap \mathfrak{A}_j^k) \quad (7.15)$$

où $\mathfrak{A}_{j'}^k$ désigne l'événement $\{\forall u \in A_{j'}^k, u \notin S_{j'}\}$, pour tout entier j' égal à $j-1$ ou j . Notons $\mathcal{F}_{j-1}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires X_u , pour $u \in \mathcal{U}$ de génération inférieure à $j-1$ et prenons $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$. Étant donné que $\mathfrak{A}_{j-1}^k$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_{j-1}$ que, sur cet événement, le processus X assigne l'état 0 à tous les sommets de A_{j-1}^k et que le père d'un élément de A_j^k appartient à A_{j-1}^k , on a

$$\mathbb{P} \left(\mathfrak{A}_{j-1}^k \cap \mathfrak{A}_j^k \mid \mathcal{F}_{j-1} \right) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}_{j-1}^k} (1 - q_{j-1})^{\#A_j^k} \leq \exp(-(2^{(1-\underline{h}/\alpha)j} - 1)q_{j-1}).$$

En prenant l'espérance, on observe que le membre de gauche de (7.15) est inclus dans un événement de probabilité inférieure à

$$v_j = 2^j \exp(-(2^{(1-\underline{h}/\alpha)j} - 1)q_{j-1}).$$

Sachant que $\alpha > \tilde{h}$, il existe une infinité d'entiers naturels $j \geq j_0 + 1$ tels que $q_{j-1} \geq 2^{(-1+2\underline{h}/(\alpha+\tilde{h}))j}$. La limite inférieure de la suite $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est donc nulle. Par conséquent,

$$\bigcap_{j=j_0}^{\infty} \downarrow \left\{ \mathbb{T} \neq \bigcup_{j'=j_0}^j \bigcup_{u \in S_{j'}} B_u \right\}$$

est un événement de probabilité nulle, car il est inclus, pour tout entier $j \geq j_0 + 1$, dans un événement de probabilité inférieure à v_j . D'après (7.14), la probabilité de l'événement $\{\mathbb{T} \neq L_\alpha\}$ est donc nulle, de sorte que

$$\forall \alpha \in]\tilde{h}, \infty[\quad \text{p.s.} \quad L_\alpha = \mathbb{T}.$$

L'assertion (iii) découle de la croissance de L_α avec α . //

La proposition suivante donne la valeur de l'exposant d'oscillation de la série aléatoire d'ondelettes R en tout point du cercle $\mathbb{T}$.

Proposition 7.1

Pour tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ et tout point $x \in E_h$,

$$\beta_R(x) = \begin{cases} h/\underline{h} - 1 & \text{si } h < \bar{h} \\ 0 & \text{si } h = \bar{h} < \infty. \end{cases}$$

// Commençons par supposer $h < \bar{h}$ et considérons un réel $\beta > h/\underline{h} - 1$. D'après le lemme 7.1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $h + 1/n < (\beta + 1)\underline{h}$, il existe un intervalle $\lambda_n \in \Lambda$ de génération supérieure à n vérifiant $C_{\lambda_n} = 2^{-\langle \lambda_n \rangle}$ et $d(x, x_{\lambda_n}) < 2^{-\langle \lambda_n \rangle / (h + 1/n)}$. On observe que ces intervalles λ_n forment une suite minimisante des coefficients d'ondelette de R au point x et vérifient tous $d(x, x_{\lambda_n})^{1+\beta} \leq 2^{-\langle \lambda_n \rangle}$. La proposition 2.2 montre alors que $\beta_R(x) \leq \beta$. Cela étant vrai pour tout réel $\beta > h/\underline{h} - 1$, on en déduit que $\beta_R(x) \leq h/\underline{h} - 1$. Réciproquement, prenons un réel $\beta > \beta_R(x)$. D'après la proposition 2.2, il existe une suite minimisante des coefficients d'ondelette de R au point x formée de intervalles λ vérifiant $d(x, x_\lambda)^{1+\beta} \leq 2^{-\langle \lambda \rangle}$. Comme $h < \bar{h}$, pour une infinité de ces intervalles λ , on a

$$\frac{\log_2 |C_\lambda|}{-\langle \lambda \rangle} \leq \frac{\log |C_\lambda|}{\log(2^{-\langle \lambda \rangle} + d(x, x_\lambda))} < \bar{h},$$

ce qui impose $X_{u_\lambda} = 1$. Dès lors, le lemme 7.1 prouve que $h \leq (1 + \beta)\underline{h}$. On en déduit que $\beta_R(x) \geq h/\underline{h} - 1$ en faisant tendre β vers $\beta_R(x)$.

Supposons maintenant $h = \bar{h} < \infty$ et fixons un réel $\beta > 0$. Comme $h > \underline{h}$, le point x n'appartient pas à $L_{\underline{h}}$ d'après le lemme 7.1. Il existe donc

un entier naturel j_0 tel que pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$ de génération supérieure à j_0 vérifiant $d(x, x_u) < 2^{-\langle u \rangle}$, on a $X_u = 0$. Pour tout entier $j \geq j_0$, il existe un sommet $u^j \in \mathcal{U}$ de génération j vérifiant $d(x, x_{u^j}) < 2^{-j}$. On observe que les intervalles λ_{u^j} forment une suite minimisante des coefficients de R en x . Il en résulte que $\beta \geq \beta_R(x)$. On conclut en faisant tendre β vers 0. //

Considérons un réel $\alpha > \underline{h}$. Le lemme 7.2 énoncé ci-après fournit une décomposition remarquable de L_α défini par (7.13). Le premier ensemble qui intervient dans cette décomposition est

$$\tilde{L}_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{T} \mid d(x, x_u) < 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha} \text{ pour une infinité de } u \in \tilde{S} \right\}, \quad (7.16)$$

où $\tilde{S}$ est l'ensemble constitué de la racine $\emptyset$ et des sommets $u \in \mathcal{U}^*$ vérifiant $X_u = 1$ et $X_{\pi(u)} = 0$. On a clairement $\tilde{S} \subset S$, de sorte que $\tilde{L}_\alpha \subset L_\alpha$. Intuitivement, un point de l'ensemble L_α appartient aussi à l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ s'il est approché à une certaine vitesse par des grands coefficients d'ondelette qui sont apparus, c'est-à-dire des grands coefficients dont le père est un petit coefficient.

Le second est l'ensemble Θ des points qui s'obtiennent comme limite d'une suite infinie d'intervalles dyadiques emboîtés portant des grands coefficients d'ondelette. Pour définir plus précisément Θ , posons

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \tau_u = \{v \in u\mathcal{U} \mid \forall k \in \{\langle u \rangle, \dots, \langle v \rangle\} \quad X_{v_1 \dots v_k} = 1\}.$$

L'ensemble τ_u est vide si $X_u = 0$. Sinon, τ_u est le plus grand sous-arbre de $\mathcal{U}$ issu de u et formé de sommets à l'état 1. On appelle frontière de l'arbre τ_u l'ensemble

$$\partial\tau_u = \{\zeta \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}^*} \mid \forall k \geq \langle u \rangle \quad \zeta_1 \dots \zeta_k \in \tau_u\}.$$

À toute suite infinie $\zeta \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}^*}$, on peut associer le point $\dot{x}_\zeta$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\dot{x}_\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} (\zeta_j - 1)2^{-j}.$$

Observons que le point $\dot{x}_\zeta$ est défini comme en (6.6) à partir de la famille constituée des ensembles compacts

$$J_u = \sum_{j=1}^{\langle u \rangle} (u_j - 1)2^{-j} + [0, 2^{-\langle u \rangle}] \quad (7.17)$$

pour $u \in \mathcal{U}$, c'est-à-dire que $\dot{x}_\zeta$ est l'unique élément de l'intersection décroissante sur $p \in \mathbb{N}$ des compacts $J_{\zeta_1 \dots \zeta_p}$. Notons enfin

$$\dot{\Theta} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \bigcup_{\zeta \in \partial\tau_u} \{\dot{x}_\zeta\} \quad \text{et} \quad \Theta = \phi(\dot{\Theta}), \quad (7.18)$$

où ϕ désigne la surjection canonique sur le cercle $\mathbb{T}$. Intuitivement, un point appartient à Θ s'il est la limite d'une suite d'intervalles dyadiques emboîtés portant des grands coefficients d'ondelette qui se propagent à travers les échelles. Remarquons que l'ensemble $\dot{\Theta}$ est défini comme en (6.9). Par conséquent, les résultats du chapitre 6 conduisent au résultat suivant.

Rappelons que θ et δ sont donnés par (7.5) et (7.7) respectivement et que l'assertion (7.8) indique que θ est nécessairement positif lorsque δ est strictement positif.

Proposition 7.2

Supposons $\bar{\theta} < 1$.

- (i). Si $\delta = 0$, l'ensemble $\dot{\Theta}$ est presque sûrement vide.
- (ii). Si $\delta = \infty$ et $\theta = 0$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\dot{\Theta}$ appartient presque sûrement à l'ensemble $\{-\infty, 0\}$.
- (iii). Si $\delta \in]0, \infty[$ et $\theta = 0$, on a

$$0 < \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = -\infty) = 1 - \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = 0) < 1.$$

- (iv). Si $\delta = \infty$ et $\theta > 0$, la dimension de $\dot{\Theta}$ vaut presque sûrement θ .
- (v). Si $\delta \in]0, \infty[$ et $\theta > 0$, la dimension de $\dot{\Theta}$ appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0, \theta\}$. En outre,

$$\begin{cases} 0 < \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = -\infty) < 1 \\ 0 \leq \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = 0) < 1 \\ 0 < \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = \theta) < 1. \end{cases}$$

// Reprenons les notations du chapitre 6. L'ensemble $\mathcal{U}_0$ est ici l'arbre binaire $\mathcal{U}$ et la suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ donnant les nombre de fils des sommets à une échelle fixée est constante égale à 2. L'ensemble Q contient un seul élément et la famille de compact associée à cet élément est la famille $(J_u)_{u \in \mathcal{U}}$ définie par (7.17). La suite de mesures $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ régissant les rapports de contraction de ces compacts est constante égale à $\delta_{1/2}^{\otimes 2}$. Par ailleurs, sous la probabilité $\mathbb{P}$ considérée ici, le processus X est une chaîne de Markov d'état initial 1 dont les transitions sont données par la famille de mesures $(\nu_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$ définie par (7.2). Précisons que les fonctions génératrices données par (6.19) sont ici

$$\varphi_{0,j} : z \mapsto (1 - p_j(1 - z))^2 \quad \text{et} \quad \varphi_{1,j} : z \mapsto (1 - q_j(1 - z))^2.$$

L'ensemble $\dot{\Theta}$ est donc construit comme en (6.9). Ajoutons que la condition (6.24) est vérifiée, car sinon on aurait $p_j = 1$ pour tout entier j assez grand, d'après le lemme 6.1, et θ serait égal à 1, ce qui est proscrit. De plus, les suites $(\underline{\sigma}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(\bar{\sigma}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par (6.21) et (6.41) vérifient $2\bar{\sigma}_j = \sigma_j \leq 4\underline{\sigma}_j$ pour tout entier naturel j , où la suite $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est donnée par (7.6). L'élément $\underline{j}$ défini par (6.22) s'identifie à celui défini ici par (7.4) et si $\underline{j}$ est fini, la fonction ρ définie par (6.31) est ici $s \mapsto (\theta - s) \log 2$, de sorte que l'élément d_* défini par (6.33) est égal à θ si toutefois $\theta \geq 0$.

Pour établir l'assertion (i), supposons $\delta = 0$. Si $\underline{j} < \infty$, on a alors $q_j = 0$ ou $\underline{\sigma}_{j+1} \geq \sigma_{j+1}/4 = \infty$, c'est-à-dire $\varphi_{0,j}(1 - 1/\underline{\sigma}_{j+1}) = 1$, pour tout entier $j \geq \underline{j}$. De même, on a q_{j-1} ou $\underline{\sigma}_j = \infty$ ou

$$\sum_{k=-1}^{\underline{j}-2} q_k \prod_{i=k+1}^{\underline{j}-2} (p_i - q_i) = 1$$

avec $q_{-1} = 1$. Cependant, pour $j \geq 1$, le lemme 6.2 indique que le membre de gauche vaut $\mathbb{E}[\#S_{j-1}/2^{j-1}]$. On en déduit qu'une des quatre assertions (a)-(d) apparaissant dans l'énoncé du théorème 6.1 est vérifiée. Ce théorème assure donc que l'ensemble $\dot{\Theta}$ est presque sûrement vide.

Le théorème 6.2 conduit directement à l'assertion (ii). Pour établir l'assertion (iii), supposons $\delta \in]0, \infty[$ et $\theta = 0$. Le théorème 6.2 montre que la dimension de $\dot{\Theta}$ appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0\}$. De plus,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-2^j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\underline{\sigma}_{j+1}} \right) \right) \leq - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} \log \left(1 - \frac{4q_j}{\sigma_{j+1}} \right)$$

et la dernière série converge, du fait que δ est fini. Le théorème 6.1 implique que $\dot{\Theta}$ est vide avec probabilité non nulle. Le théorème 6.3 assure en outre que $\dot{\Theta}$ est non vide avec probabilité non nulle. En effet, dans le cas contraire, une des quatre assertions (a)-(d) figurant dans son énoncé serait vérifiée et δ serait nécessairement nul d'après le raisonnement mené pour établir (i).

Supposons $\delta = \infty$ et $\theta > 0$. Sachant que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-2^j \log \varphi_{0,j} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}_{j+1}} \right) \right) \geq - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} \log \left(1 - \frac{2q_j}{\sigma_{j+1}} \right)$$

et cette dernière série diverge car $\delta = \infty$. Le corollaire 6.2 assure donc que la dimension de $\dot{\Theta}$ vaut presque sûrement θ . L'assertion (iv) s'ensuit.

Pour établir l'assertion (v), supposons $\delta \in]0, \infty[$ et $\theta > 0$. Le théorème 6.4 garantit que la dimension de $\dot{\Theta}$ appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0, \theta\}$. Le théorème 6.1 et le corollaire 6.2 montrent que

$$0 < \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} = -\infty) \leq \mathbb{P}(\dim \dot{\Theta} \leq 0) < 1$$

ce qui conduit aux encadrements annoncés. //

Il est important de noter qu'on peut remplacer l'ensemble $\dot{\Theta}$ par $\Theta = \phi(\dot{\Theta})$ dans l'énoncé de la proposition 7.2. D'une part, l'ensemble Θ est vide si et seulement si $\dot{\Theta}$ l'est. D'autre part, si le réel 1 appartient à l'ensemble $\dot{\Theta}$, pour tout entier j supérieur à un certain $j_0 \in \mathbb{N}$, le processus X attribue l'état 1 au mot de longueur j composé uniquement de la lettre 2. Cet événement a lieu avec une probabilité inférieure à $p_{j_0} \dots p_{j-1}$. La limite inférieure de cette suite est nulle car $\theta < 1$. Il en résulte que $1 \notin \dot{\Theta}$ avec probabilité 1. Sur l'événement correspondant, on a $\dot{\Theta} \cap [0, 1[= \phi^{-1}(\Theta) \cap [0, 1[$. L'assertion (2.6) conduit à

$$\mathcal{H}^g(\Theta) \leq \mathcal{H}^g(\dot{\Theta}) \leq \kappa \mathcal{H}^g(\Theta)$$

pour un certain réel $\kappa \geq 1$ et toute fonction de jauge g de $\mathfrak{D}$. On en déduit que $\dim \Theta$ et $\dim \dot{\Theta}$ coïncident avec probabilité 1.

Le lemme suivant donne la décomposition de l'ensemble L_α donné par (7.13) en fonction des ensembles $\tilde{L}_\alpha$ et Θ définis respectivement par (7.16) et (7.18).

Lemme 7.2

| Pour tout réel $\alpha \in]l, \infty[$, on a $L_\alpha = \tilde{L}_\alpha \cup \Theta$.

// On a tout d'abord clairement $\tilde{L}_\alpha \subset L_\alpha$. Fixons ensuite $x \in \Theta$. Il existe alors un sommet $u \in \mathcal{U}$ et un chemin infini $\zeta \in \partial\tau_u$ tels que $x = \phi(\dot{x}_\zeta)$. Pour tout entier $k \geq \langle u \rangle$, on a $\zeta_1 \dots \zeta_k \in S$ et

$$d(x, x_{\zeta_1 \dots \zeta_k}) \leq 2^{-k} < 2^{-\underline{h}k/\alpha}.$$

Le point x appartient donc à L_α . Il en résulte que Θ est inclus dans L_α . Finalement, L_α contient $\tilde{L}_\alpha \cup \Theta$.

Pour établir l'inclusion réciproque, prenons un élément x de L_α qui n'appartient pas à $\tilde{L}_\alpha$. Sachant que $x \notin \tilde{L}_\alpha$, il existe un entier naturel j_0 tel que $d(x, x_u) \geq 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha}$ pour tout sommet u de $\tilde{S}$ de génération supérieure à j_0 . On peut supposer $j_0 \geq (\log_2(2^{\underline{h}/\alpha} - 1))/(\underline{h}/\alpha - 1)$. Notons

$$S' = \{u \in S \mid d(x, x_u) < 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha}\}$$

et observons qu'aucun sommet de S' de génération supérieure à j_0 ne peut appartenir à $\tilde{S}$. Sachant que $x \in L_\alpha$, il existe une suite de sommets $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sommets de S' dont la génération croît strictement avec n . Un argument classique d'extraction diagonale assure qu'il existe $\zeta \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ tel que pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on a $\zeta_1 \dots \zeta_j = v_1^n \dots v_j^n$ pour une infinité d'entiers naturels n . Notons $u = \zeta_1 \dots \zeta_{j_0}$, puis considérons un entier $j \geq j_0$ et un entier n vérifiant $\langle v^n \rangle > j$ et $\zeta_1 \dots \zeta_j = v_1^n \dots v_j^n$. Le sommet v^n appartient à S' et sa génération est supérieure à j_0 , de sorte que $v^n \in S \setminus \tilde{S}$. Par conséquent, $\pi(v^n)$ appartient à S . De plus,

$$d(x, x_{\pi(v^n)}) \leq d(x, x_{v^n}) + d(x_{v^n}, x_{\pi(v^n)}) < 2^{-\underline{h}\langle v^n \rangle/\alpha} + 2^{-\langle v^n \rangle} \leq 2^{-\underline{h}\langle \pi(v^n) \rangle/\alpha}.$$

La dernière inégalité provient du fait que j_0 est supposé suffisamment grand. On obtient donc $\pi(v^n) \in S'$. En répétant ce raisonnement $\langle v^n \rangle - j$ fois, il vient finalement $\zeta_1 \dots \zeta_j = v_1^n \dots v_j^n \in S'$. En particulier, $X_{\zeta_1 \dots \zeta_j} = 1$ pour tout entier $j \geq j_0$, si bien que $\zeta \in \partial\tau_u$. Par ailleurs, pour tout entier $j \geq j_0$,

$$d(x, \phi(\dot{x}_\zeta)) \leq d(x, x_{\zeta_1 \dots \zeta_j}) + d(x_{\zeta_1 \dots \zeta_j}, \phi(\dot{x}_\zeta)) \leq 2^{-\underline{h}j/\alpha} + \sum_{p=j+1}^{\infty} (\zeta_p - 1)2^{-p}.$$

Faire tendre l'entier j vers l'infini conduit à $x = x_\zeta$. Le point x appartient donc à Θ . Le lemme est ainsi prouvé. //

III Cas bifractal

Cette courte section est vouée à la preuve du théorème 7.1. Supposons $\sum_j 2^j q_j < \infty$ et $\theta < 1$. Rappelons que l'ensemble $\tilde{S}$ regroupe la racine $\emptyset$ et les sommets $u \in \mathcal{U}^*$ vérifiant $X_u = 1$ et $X_{\pi(u)} = 0$. De plus, pour $j \in \mathbb{N}$, désignons par $\tilde{S}_j$ l'ensemble des sommets de $\tilde{S}$ de génération j . Pour $j \geq 1$, remarquons que

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_j \neq \emptyset) \leq \mathbb{E}[\#\tilde{S}_j].$$

Cependant, en conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{j-1}$ engendrée par les variables X_u pour tout sommet $u \in \mathcal{U}$ de génération inférieure à $j-1$, on a

$$\mathbb{E}[\#\tilde{S}_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] = \sum_{\substack{u \in \{1,2\}^{j-1} \\ X_u=0}} \sum_{k \in \{1,2\}} \mathbb{P}(X_{uk} = 1 \mid X_u) \leq 2^j q_{j-1}. \quad (7.19)$$

On peut donc majorer par $2^j q_{j-1}$ l'espérance du cardinal de $\tilde{S}_j$ puis la probabilité de l'événement $\{\tilde{S}_j \neq \emptyset\}$. Comme $\sum_j 2^j q_j < \infty$, le nombre d'entiers j pour lesquels cet événement est réalisé est presque sûrement fini, d'après le lemme de Borel-Cantelli. Finalement, l'ensemble $\tilde{S}$ est presque sûrement fini. Par conséquent, presque sûrement, pour tout réel $\alpha > \underline{h}$, l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ défini par (7.16) est vide. Les lemmes 7.1 et 7.2 impliquent alors que

$$\text{p.s. } \forall h \in [0, \infty] \quad E_h = \begin{cases} \Theta & \text{si } h = \underline{h} \\ \mathbb{T} \setminus \Theta & \text{si } h = \bar{h} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\delta > 0$, le résultat découle de la proposition 7.2 et de la discussion qui la suit.

Si $\delta = 0$, la proposition 7.2 assure que l'ensemble $\dot{\Theta}$ est presque sûrement vide, de sorte que presque sûrement, pour tout sommet $u \in \tilde{S}$, l'ensemble τ_u est fini. Comme $\tilde{S}$ est presque sûrement fini, il en résulte que l'ensemble des sommets $u \in \mathcal{U}$ vérifiant $X_u = 1$ est fini avec probabilité 1. Il n'y a donc presque sûrement qu'un nombre fini d'intervalles $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels $C_\lambda = 2^{-\underline{h}(\lambda)}$. Finalement, d'après la proposition 2.1, le processus R appartient presque sûrement à $C^{\bar{h}}(\mathbb{T})$.

IV Cas multifractal

Dans cette section, nous établissons le théorème 7.2. Supposons $\sum_j 2^j q_j = \infty$ et $\theta < 1$. Le lemme 7.1 garantit tout d'abord que

$$\text{p.s. } \forall h \in [0, \underline{h}[\cup] \min(\tilde{h}, \bar{h}), \infty[\quad E_h = \emptyset. \quad (7.20)$$

Majorons ensuite la dimension de Hausdorff de l'ensemble E_h quand $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 7.3

On a presque sûrement

$$\dim E_{\underline{h}} \leq \max\left(\frac{\underline{h}}{\bar{h}}, \dim \Theta\right) \quad \text{et} \quad \forall h \in]\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[\quad \dim E_h \leq \frac{h}{\bar{h}}.$$

// D'après (7.19), pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de la variable $\#\tilde{S}_j$ est inférieure à $2^j q_{j-1}$. D'après l'inégalité de Markov, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\#\tilde{S}_j > 2^j q_{j-1} j^2) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } q_{j-1} = 0 \\ \frac{\mathbb{E}[\#\tilde{S}_j]}{2^j q_{j-1} j^2} \leq \frac{1}{j^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure donc qu'avec probabilité 1, le cardinal de $\tilde{S}_j$ est majoré par $2^j q_{j-1} j^2$ pour tout entier j assez grand. Ainsi,

$$\text{p.s. } \exists \tilde{\kappa} \in [1, \infty[\quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \#\tilde{S}_j \leq \tilde{\kappa} 2^j q_{j-1} j^2. \quad (7.21)$$

Plaçons-nous sur l'événement correspondant et prenons $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$ puis $s \in]h/\tilde{h}, \infty[$. Pour $\alpha \in]h, s\tilde{h}[$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ défini par (7.16) est recouvert par les boules ouvertes de centre x_u et de rayon $2^{-h\langle u \rangle/\alpha} \leq \varepsilon/2$ pour $u \in \tilde{S}$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(\tilde{L}_\alpha) \leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 2^{1-hj/\alpha} \leq \varepsilon}} \# \tilde{S}_j (2^{1-hj/\alpha})^s \leq \tilde{\kappa} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 2^{1-hj/\alpha} \leq \varepsilon}} 2^j q_{j-1} j^2 (2^{1-hj/\alpha})^s.$$

Comme $\alpha/s < \tilde{h}$, cette dernière série converge de sorte que le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. On en déduit que la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ est nulle. Il en résulte que

$$\text{p.s. } \forall h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[\quad \dim \left(\bigcap_{h < \alpha \leq \tilde{h}} \tilde{L}_\alpha \right) \leq \frac{h}{\tilde{h}}.$$

Cependant, les lemmes 7.1 et 7.2 montrent que

$$E_{\underline{h}} = \Theta \cup \bigcap_{\underline{h} < \alpha \leq \tilde{h}} \tilde{L}_\alpha \quad \text{et} \quad \forall h \in]\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[\quad E_h \subset \bigcap_{h < \alpha \leq \tilde{h}} \tilde{L}_\alpha.$$

La proposition s'ensuit. //

Les propositions 7.3 et 7.2 et le fait que $\theta < 1$ impliquent qu'avec probabilité 1, pour tout réel $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$, l'ensemble E_h est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{T}$. De plus, avec probabilité 1, cet ensemble est vide pour tout $h \in [0, \underline{h}[\cup]\min(\tilde{h}, \bar{h}), \infty]$, en vertu de (7.20). Il en résulte que l'ensemble $E_{\min(\tilde{h}, \bar{h})}$ est presque sûrement de mesure de Lebesgue pleine dans le cercle $\mathbb{T}$ et sa dimension de Hausdorff vaut 1.

Pour minorer la dimension de Hausdorff de l'ensemble E_h quand $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$, il convient de distinguer deux cas selon que $\tilde{h}$ est infini ou non. Supposons d'abord $\tilde{h} < \infty$. Dans ce cas, la minoration provient du fait que $\tilde{E}_h$ est un ensemble à grande intersection, comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 7.4

Supposons $\tilde{h} < \infty$. On a presque sûrement, pour tout réel $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$,

$$\tilde{E}_h \in G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad \dim E_h \geq \frac{h}{\tilde{h}}.$$

// D'après le lemme 7.1, presque sûrement, pour tout réel $\alpha \in]\tilde{h}, \infty[$, l'ensemble L_α défini par (7.13) est égal au cercle $\mathbb{T}$ tout entier. Plaçons-nous sur cet événement et prenons $h \in [\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$. Pour tout $\alpha \in]h, \tilde{h}]$, on a $\alpha\tilde{h}/h > \tilde{h}$, de sorte que $L_{\alpha\tilde{h}/h} = \mathbb{T}$. Par suite, l'ensemble

$$\phi^{-1}(L_{\alpha\tilde{h}/h}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} |x - p - \dot{x}_u| < 2^{-h\langle u \rangle/(\alpha\tilde{h})} \\ \text{pour une infinité de } (u, p) \in S \times \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

où $\dot{x}_u$ désigne l'unique élément de $\phi^{-1}(\{x_u\}) \cap [0, 1[$, est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}$. Il en résulte que la famille $(p + \dot{x}_u, 2^{-h\langle u \rangle/(\alpha\tilde{h})})_{(u,p) \in S \times \mathbb{Z}}$

est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}$ et le théorème 3.2 énoncé dans le chapitre 3 permet d'en déduire que l'ensemble

$$\phi^{-1}(L_\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} |x - p - \dot{x}_u| < 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha} \\ \text{pour une infinité de } (u, p) \in S \times \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{R})$, donc que l'ensemble L_α appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T})$. Rappelons que, d'après le lemme 7.1, l'ensemble $\tilde{E}_h$ est l'intersection des ensembles L_α pour α parcourant $]h, \tilde{h}]$. Du fait de la croissance de ces ensembles, on peut en fait supposer que α décrit une partie dénombrable dense de cet intervalle. La classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T})$ étant stable par intersection dénombrable, elle contient finalement l'ensemble $\tilde{E}_h$. La première partie de la proposition s'ensuit.

Pour établir la seconde partie de la proposition, observons pour commencer que $E_h = \tilde{E}_h \in G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T})$ en vertu du lemme 7.1, si bien que l'ensemble E_h est de dimension supérieure à $\underline{h}/\tilde{h}$. Ensuite, d'après les résultats de la partie II.1 du chapitre 6 et la continuité de la surjection ϕ , l'ensemble $\phi^{-1}(\Theta) = \phi^{-1}(\phi(\Theta))$ est un F_σ de $\mathbb{R}$. De plus, cet ensemble est presque sûrement de mesure de Lebesgue nulle, en vertu de la proposition 7.2, la remarque qui la suit et le fait que $\theta < 1$. Par conséquent, $\phi^{-1}(\mathbb{T} \setminus \Theta)$ est presque sûrement un G_δ de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}$. Cette propriété, la première partie de la proposition et l'assertion (7.21) sont donc simultanément vraies avec probabilité 1. Plaçons-nous sur l'événement correspondant et prenons un réel $h \in]\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[$. Les lemmes 7.1 et 7.2 indiquent que

$$E_h = (\tilde{E}_h \setminus \Theta) \setminus \bigcup_{\underline{h} < \alpha < h} \tilde{L}_\alpha.$$

En outre, la proposition 3.6 énoncée dans le chapitre 3 assure que l'ensemble $\phi^{-1}(\mathbb{T} \setminus \Theta)$ appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{R})$, donc que l'ensemble $\mathbb{T} \setminus \Theta$ appartient à la classe $G^{\text{Id}^{h/\tilde{h}}}(\mathbb{T})$. La stabilité de cette classe par intersection dénombrable assure finalement qu'elle contient l'ensemble $\tilde{E}_h \setminus \Theta$. On a alors $\mathcal{H}^{-\text{Id}^{h/\tilde{h}} \cdot \log}(\tilde{E}_h \setminus \Theta) = \infty$. En outre, pour $\alpha \in]\underline{h}, h[$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ est recouvert par les boules ouvertes de centre x_u et de rayon $2^{-\underline{h}\langle u \rangle/\alpha} \leq \varepsilon/2$ pour $u \in \tilde{S}$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{-\text{Id}^{h/\tilde{h}} \cdot \log}(\tilde{L}_\alpha) \leq \tilde{\kappa} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 2^{1-\underline{h}j/\alpha} \leq \varepsilon}} 2^j q_{j-1} j^2 (2^{1-\underline{h}j/\alpha})^{h/\tilde{h}} \left(\frac{h}{\alpha} j - 1 \right) \log 2.$$

Comme $\alpha \tilde{h}/h < \tilde{h}$, cette dernière série converge si bien que le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. Dès lors, $\mathcal{H}^{-\text{Id}^{h/\tilde{h}} \cdot \log}(\tilde{L}_\alpha) = 0$. La croissance de l'ensemble $\tilde{L}_\alpha$ implique que

$$\mathcal{H}^{-\text{Id}^{h/\tilde{h}} \cdot \log} \left(\bigcup_{\underline{h} < \alpha < h} \tilde{L}_\alpha \right) = 0$$

car l'union peut se voir comme une union dénombrable. On en déduit que $\mathcal{H}^{-\text{Id}^{h/\bar{h}} \cdot \log}(E_h) = \infty$. La seconde partie de la proposition est prouvée. //

Supposons maintenant $\tilde{h} = \infty$. La minoration de la dimension de Hausdorff des ensembles E_h , pour $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, est donnée par le résultat suivant.

Proposition 7.5

Supposons $\tilde{h} = \infty$. On a presque sûrement, pour tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$,

$$\dim E_h \geq 0.$$

La preuve de cette proposition n'utilise pas la théorie des ensembles à grande intersection. Elle reprend plutôt les idées de la preuve du lemme 9 de [93] : pour $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, on construit un point y_h appartenant à E_h en l'obtenant comme l'unique élément de l'intersection d'une suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convenablement choisie de fermés emboîtés non vides dont le diamètre tend vers 0. Il s'agit en outre de montrer que cette construction est possible avec probabilité 1 indépendamment du réel h . Dans cette perspective, fixons un réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ et posons

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \eta_j^h = j 2^{hj/h} \sum_{j'=j+1}^{\infty} 2^{(1-\underline{h}/h)j'} q_{j'-1}(j')^2. \quad (7.22)$$

Soit $j \in \mathbb{N}$. Sachant que $\sum_j 2^j q_j = \infty$, la suite de probabilités de transition $(q_{j'})_{j' \in \mathbb{N}}$ comporte une infinité de termes strictement positifs. En conséquence, $\eta_j^h > 0$. En outre, comme $\tilde{h} = \infty$, pour tout $\varepsilon \in]0, \underline{h}/h[$, il existe un réel $c > 0$ tel que $q_{j'-1}(j')^2 \leq c 2^{(-1+\varepsilon)j'}$, pour tout $j' \in \mathbb{N}$. Cela garantit la convergence de la série définissant η_j^h , puis le fait que

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \kappa \in]0, \infty[\quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \eta_j^h \leq \kappa 2^{\varepsilon j}. \quad (7.23)$$

Construisons de façon récursive une famille $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'ensembles conduisant à un élément y_h de E_h et une suite $(j_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels. La construction diffère légèrement selon que le paramètre δ défini par (7.7) est nul ou ne l'est pas. Plus précisément, on procède ainsi :

- *Étape 1, lorsque $\delta = 0$* : On construit deux entiers naturels j_0^h et j_1^h vérifiant $j_0^h \leq j_1^h$, ainsi qu'un ensemble I_1^h qui est l'image par ϕ d'un intervalle réel de la forme

$$\begin{aligned} & \left[x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h} \right] \\ \text{ou} & \left[x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h}, x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} \right] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad u \in \bigcup_{j=j_0^h}^{j_1^h} \tilde{S}_j$$

et qui vérifie $B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$, pour tout $v \in \tilde{S}_j$, avec $j \in \{j_0^h, \dots, j_1^h\}$, où B_v^h désigne la boule ouverte de centre x_v et de rayon $2^{-\underline{h}\langle v \rangle/h}$.

- *Étape 1, lorsque $\delta > 0$* : On construit deux entiers naturels j_0^h et j_1^h vérifiant $j_0^h \leq j_1^h$, ainsi qu'un ensemble I_1^h qui est l'image par ϕ d'un intervalle réel de la forme

$$\begin{aligned} & \left[x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h} \right] \\ \text{ou} & \left[x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h}, x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} \right] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad u \in \bigcup_{j=j_0^h}^{j_1^h} \tilde{S}_j$$

ou bien de la forme

$$\text{ou } \begin{cases} \left[x_u + 3 \cdot 2^{-j_0^h}, x_u + 3 \cdot 2^{-j_0^h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h} \right] \\ \left[x_u - 3 \cdot 2^{-j_0^h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-\underline{h}j_1^h/h}, x_u - 3 \cdot 2^{-j_0^h} \right] \end{cases} \quad \text{avec } u \in S_{j_0^h-1}$$

et qui vérifie, d'une part, $B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$, pour tout v dans $\tilde{S}_j$ et $j \in \{j_0^h, \dots, j_1^h\}$, et d'autre part, $\frac{3}{2}B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$, pour tout v de $S_{j_0^h-1}$ (si B est une boule ouverte de $\mathbb{T}$, on désigne par $\frac{3}{2}B$ la boule ouverte dont le centre est le même que celui de B et dont le rayon est multiplié par $3/2$).

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, passage de l'étape n à l'étape $n+1$ (dans les deux cas) : Supposons disposer d'entiers naturels $j_0^h, \dots, j_n^h$ et d'ensembles $I_1^h, \dots, I_n^h$ convenables. On construit alors un entier $j_{n+1}^h > j_n^h$, ainsi qu'un ensemble I_{n+1}^h , qui est inclus dans I_n^h , qui s'écrit comme l'image par ϕ d'un intervalle réel de la forme

$$\text{ou } \begin{cases} \left[x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} + \eta_{j_{n+1}^h}^h 2^{-\underline{h}j_{n+1}^h/h} \right] \\ \left[x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} - \eta_{j_{n+1}^h}^h 2^{-\underline{h}j_{n+1}^h/h}, x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} \right] \end{cases} \quad \text{avec } u \in \bigcup_{j=j_n^h+1}^{j_{n+1}^h} \tilde{S}_j$$

et qui vérifie $B_v^h \cap I_{n+1}^h = \emptyset$, pour tout $v \in \tilde{S}_j$, avec $j \in \{j_n^h+1, \dots, j_{n+1}^h\}$.

Supposons avoir pu construire une suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sous-ensembles de $\mathbb{T}$, en suivant la méthode exposée précédemment. Ces ensembles sont fermés, car ils s'obtiennent comme l'image par la surjection ϕ d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$. En outre, la suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le diamètre de l'ensemble I_n^h est inférieur à $\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'après l'assertion (7.23). En vertu de la complétude du cercle $\mathbb{T}$, l'intersection sur $n \in \mathbb{N}^*$ des ensembles I_n^h se résume alors à un singleton $\{y_h\}$, avec $y_h \in \mathbb{T}$. Sous certaines hypothèses (qui sont en fait vérifiées avec probabilité 1), le point y_h ainsi obtenu appartient à l'ensemble E_h , comme l'indique le lemme suivant.

Lemme 7.3

Soit $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$. Supposons disposer d'une suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de parties du cercle $\mathbb{T}$, construite selon la méthode décrite précédemment. Notons y_h l'unique élément du cercle $\mathbb{T}$ vérifiant

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^h = \{y_h\}.$$

Le point y_h appartient à l'ensemble E_h si $\delta > 0$ ou $\Theta = \emptyset$.

// Soient $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ et $\alpha \in]h, \bar{h}]$. D'après (7.23), on peut choisir un entier $n_0 \geq 2$ de manière à avoir simultanément $j_{n_0-1}^h \geq (\log_2 3)/(\underline{h}/h - \underline{h}/\alpha)$ et $\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h} \leq 2^{-\underline{h}j_n^h/\alpha}/3$, pour tout entier $n \geq n_0$. Soit n un tel entier. Le point y_h appartient à I_n^h , donc il existe un sommet u^n de l'union sur $j \in \{j_{n-1}^h+1, \dots, j_n^h\}$ des ensembles $\tilde{S}_j$ qui vérifie

$$d(y_h, x_{u^n}) \leq 2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/h} + \eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h}.$$

Sachant que $\langle u^n \rangle \geq (\log_2 3)/(\underline{h}/h - \underline{h}/\alpha)$, on peut majorer le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente par $2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/\alpha}/3$. En outre,

comme n est supérieur à n_0 , on peut majorer le second terme par $2^{-\underline{h}j_n^h/\alpha}/3$, puis par $2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/\alpha}/3$, du fait que $\langle u^n \rangle \leq j_n^h$. Il en ressort que

$$d(y_h, x_{u^n}) \leq \frac{1}{3}2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/\alpha} + \frac{1}{3}2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/\alpha} < 2^{-\underline{h}\langle u^n \rangle/\alpha}.$$

En conséquence, le point y_h appartient à l'ensemble L_α pour tout $\alpha \in]h, \bar{h}]$. Le lemme 7.1 montre alors que $y_h \in \tilde{E}_h$.

Si $h = \underline{h}$, le lemme est prouvé. Supposons donc $h > \underline{h}$. Le lemme 7.1 et la croissance des ensembles L_α indique qu'il suffit de prouver que y_h n'appartient pas à L_h .

Supposons $\delta = 0$ et $\Theta = \emptyset$. Par construction de la suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$, le point y_h n'appartient à aucune boule B_u^h , pour $u \in \tilde{S}_j$, dès que l'entier j est supérieur à j_0^h . Ainsi, y_h n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{L}_h$. D'après le lemme 7.2, comme Θ est vide, le point y_h n'appartient pas à L_h .

Supposons désormais $\delta > 0$. Dans ce cas, la construction de la suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ assure que le point y_h ne peut appartenir à aucune boule B_u^h , pour $u \in \tilde{S}_j$, lorsque l'entier j est plus grand que j_0^h , et à aucun intervalle dyadique fermé $\bar{\lambda}_u$, codé par un sommet u de $S_{j_0^h-1}$. Ainsi, d'une part, $y_h \notin \tilde{L}_h$. D'autre part, supposons $y_h \in \Theta$. Il existe alors un sommet $u \in \tilde{S}$ et un chemin infini $\zeta \in \partial\tau_u$ vérifiant $y_h = \phi(\dot{x}_\zeta)$. Si $\langle u \rangle \leq j_0^h - 1$, le sommet $\zeta_1 \dots \zeta_{j_0^h-1}$ appartient à $S_{j_0^h-1}$ et code un intervalle dyadique fermé qui contient le point $y_h = x_\zeta$, ce qui offre une contradiction. Si $\langle u \rangle \geq j_0^h$, on a encore une contradiction, puisque le point $y_h = x_\zeta$ appartient à l'intervalle dyadique fermé $\bar{\lambda}_u$, donc à la boule ouverte B_u^h , car $h > \underline{h}$. Finalement, le point y_h n'est pas dans Θ . Avec le lemme 7.2, on en déduit que $y_h \notin L_h$. Le lemme est donc prouvé. //

Le lemme 7.3 montre que, pour $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, l'ensemble E_h est non vide dès lors que la construction simultanée de la famille $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de la suite $(j_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ est possible et que l'ensemble Θ est vide dans le cas où $\delta = 0$. Afin de prouver que les ensembles E_h , pour $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$, sont presque sûrement tous non vides, il reste donc à montrer que ces conditions sont remplies avec probabilité 1, de manière indépendante de h . Dans ce but, établissons le lemme suivant.

Lemme 7.4

Supposons que $\sum_j 2^j q_j = \infty$ et $\tilde{h} = \infty$. Les assertions suivantes sont simultanément vraies avec probabilité 1 :

- (i). Pour tout $u \in \mathcal{U}$, l'ensemble $u\mathcal{U}^* \cap \tilde{S}$ est non vide.
- (ii). Il existe un réel $\tilde{\kappa} \geq 1$ tel que $\#\tilde{S}_j \leq \tilde{\kappa} 2^j q_{j-1} j^2$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.
- (iii). Si $\delta = 0$, l'ensemble Θ est vide. Si en revanche $\delta > 0$, le paramètre $\underline{j}$ donné par (7.4) est fini et il existe un réel $\kappa \geq 1$ vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \#S_j \leq \kappa 2^{(3-\theta)j/2} \prod_{i=\underline{j}}^{j-1} p_i.$$

// Intéressons-nous à la première assertion. Fixons $u \in \mathcal{U}$. Sachant que X

est une chaîne de Markov sous la probabilité $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}(\forall v \in u\mathcal{U} \quad \langle v \rangle \leq j \implies X_v = 1) \leq \prod_{i=\langle u \rangle}^{j-1} p_i$$

pour tout entier $j \geq \langle u \rangle$. Si $\langle u \rangle \leq \underline{j}$, ce dernier produit est nul pour j assez grand. Sinon, sachant que $\theta < 1$, la suite constituée par ce produit admet 0 pour valeur d'adhérence. Par conséquent,

$$\text{p.s.} \quad \exists u' \in u\mathcal{U} \quad X_{u'} = 0. \quad (7.24)$$

Fixons maintenant $u' \in \mathcal{U}$. On dispose de l'inclusion d'événements

$$\{\forall u'' \in u'\mathcal{U} \quad X_{u''} = 0\} \subset \bigcap_{j=\langle u' \rangle}^{\infty} \mathfrak{A}_j^{u'} \quad (7.25)$$

où, pour tout entier j supérieur à $\langle u' \rangle$, l'événement $\mathfrak{A}_j^{u'}$ correspond au fait que la chaîne de Markov X attribue l'état 0 à tous les sommets u'' du sous-arbre $u'\mathcal{U}$ dont la génération est inférieure à j . Prenons un entier j supérieur à $\langle u' \rangle + 1$. La probabilité de l'événement $\mathfrak{A}_j^{u'}$ conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_{j-1}$ vaut $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}_{j-1}^{u'}} (1 - q_{j-1})^{2^{j-\langle u' \rangle}}$. Cela conduit à

$$\mathbb{P}(\mathfrak{A}_j^{u'}) = \mathbb{P}(\mathfrak{A}_{\langle u' \rangle}^{u'}) \prod_{i=\langle u' \rangle+1}^j (1 - q_{i-1})^{2^{i-\langle u' \rangle}}.$$

Étant donné que $\sum_i 2^i q_i = \infty$, le produit précédent tend vers 0 quand j tend vers l'infini. En vertu de l'inclusion d'événements (7.25) et de la dénombrabilité de l'ensemble $\mathcal{U}$, on peut écrire

$$\text{p.s.} \quad \forall u' \in \mathcal{U} \quad X_{u'} = 0 \implies \exists u'' \in u'\mathcal{U}^* \quad X_{u''} = 1.$$

L'assertion (7.24) prouve qu'avec probabilité 1, le sous-arbre $u\mathcal{U}$ contient un sommet u' vérifiant $X_{u'} = 0$. D'après l'assertion précédente, il existe presque sûrement un sommet $u'' \in u'\mathcal{U}^*$ tel que $X_{u''} = 1$. On peut supposer que le sommet u'' est de génération minimale. Alors, u'' appartient à $\tilde{S}$. Finalement, en faisant à nouveau appel à la dénombrabilité de $\mathcal{U}$, il vient

$$\text{p.s.} \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad u\mathcal{U}^* \cap \tilde{S} \neq \emptyset$$

ce qui correspond à l'assertion (i).

L'assertion (ii) du lemme est exactement l'assertion (7.21) énoncée précédemment. Prouvons la troisième assertion. Si $\delta = 0$, la proposition 7.2 assure que l'ensemble Θ est presque sûrement vide. Supposons à l'inverse $\delta > 0$. En particulier, $\underline{j} < \infty$. Observons que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}[\#S_j] \leq 2^j \sum_{k=-1}^{j-1} q_k \prod_{i=k+1}^{j-1} p_i.$$

Cette majoration découle en effet d'une récurrence élémentaire et du fait que $\mathbb{E}[\#S_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] \leq 2^j q_{j-1} + 2p_{j-1}\#S_{j-1}$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$. Sachant que $p_{\underline{j}-1} = 0$, on peut encore écrire

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}[\#S_j] \leq 2^j \left(\prod_{i=\underline{j}}^{j-1} p_i \right) \sum_{k=\underline{j}-1}^{j-1} \frac{q_k}{\prod_{i=\underline{j}}^k p_i}.$$

Comme $\tilde{h} = \infty$ et $\theta \in [0, 1[$, on a pour tout entier k assez grand,

$$q_k \leq 2^{(-1+\frac{1-\theta}{8})k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=\underline{j}}^k p_i \geq 2^{(-1-\frac{1-\theta}{8})(k+1)}.$$

Il existe donc un réel strictement positif c tel que l'inégalité de Markov fournisse, pour tout entier j supérieur à $\underline{j}$,

$$\mathbb{P} \left(\#S_j > 2^{(1+\frac{1-\theta}{2})j} \prod_{i=\underline{j}}^{j-1} p_i \right) \leq \frac{\mathbb{E}[\#S_j]}{2^{(1+\frac{1-\theta}{2})j} \prod_{i=\underline{j}}^{j-1} p_i} \leq c 2^{-\frac{1-\theta}{2}j} 2^{\frac{1-\theta}{4}j}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli permet finalement de conclure. //

Le lemme 7.4 permet de prouver qu'avec probabilité 1, la construction de la suite $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ présentée précédemment est possible, pour tout $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$. Plaçons-nous sur l'événement sur lequel l'énoncé du lemme 7.4 est vérifié et fixons un réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$.

- *Justification de l'étape 1, lorsque $\delta = 0$* : Commençons par construire l'ensemble I_1^h et les entiers naturels j_0^h et j_1^h . Sachant que $\tilde{h} = \infty$, la série $\sum_j 2^{(1-\underline{h}/h)j} q_{j-1} j^2$ converge, de sorte qu'il existe un entier naturel $j_0^h \geq 4\tilde{\kappa}$ tel que

$$\forall j \geq j_0^h \quad 2\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{(1-\underline{h}/h)j'} q_{j'-1} (j')^2 \leq \frac{1}{4} \quad (7.26)$$

où $\tilde{\kappa}$ est la constante donnée par la deuxième assertion du lemme 7.4. D'après la première assertion de ce lemme, pour tout entier $j \geq j_0^h$ suffisamment grand, au moins un des ensembles $\tilde{S}_{j'}$, pour $j' \in \{j_0^h, \dots, j\}$, est non vide. En outre, le cercle $\mathbb{T}$ privé des boules ouvertes B_u^h , lorsque u appartient à $\tilde{S}_{j'}$, pour tout $j' \in \{j_0^h, \dots, j\}$, contient une composante connexe $\mathcal{I}_j$ de mesure de Lebesgue supérieure à

$$\frac{1 - \sum_{j'=j_0^h}^j \#\tilde{S}_{j'} 2^{1-\underline{h}j'/h}}{\sum_{j'=j_0^h}^j \#\tilde{S}_{j'}} \geq \frac{1 - 2\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{(1-\underline{h}/h)j'} q_{j'-1} (j')^2}{\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1} (j')^2} \geq \frac{3}{4\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1} (j')^2}.$$

La première minoration provient du deuxième point du lemme 7.4, tandis que la seconde découle de (7.26). On peut placer dans la composante connexe $\mathcal{I}_j$ l'image

par ϕ d'un intervalle réel fermé de longueur $\eta_j^h 2^{-hj/h}$ dès que

$$\eta_j^h \leq \frac{3 \cdot 2^{hj/h}}{4\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2}.$$

Comme $\tilde{h} = \infty$, la somme figurant au dénominateur du membre de droite est asymptotiquement majorée par toutes les exponentielles, lorsque j tend vers l'infini. C'est aussi le cas du réel η_j^h , en vertu de (7.23). Il en ressort que l'inégalité précédente est vérifiée lorsque l'entier j est suffisamment grand. Appelons j_1^h le premier entier pour lequel, d'une part, l'union sur $j' \in \{j_0^h, \dots, j_1^h\}$ des ensembles $\tilde{S}_{j'}$ est non vide et, d'autre part, l'inégalité précédente est satisfaite. Juste à côté de la composante connexe $\mathcal{I}_{j_1^h}$ se trouve une boule ouverte B_u^h , pour $u \in \tilde{S}$ de génération appartenant à $\{j_0^h, \dots, j_1^h\}$. Il existe donc un ensemble I_1^h qui s'écrit comme l'image par la surjection ϕ de l'intervalle réel

$$\begin{aligned} & \left[x_u + 2^{-h\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-h\langle u \rangle/h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h} \right] \\ \text{ou} & \left[x_u - 2^{-h\langle u \rangle/h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h}, x_u - 2^{-h\langle u \rangle/h} \right] \end{aligned}$$

et qui se trouve dans $\mathcal{I}_{j_1^h}$. Cet ensemble I_1^h respecte les conditions demandées, puisqu'on a $B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$, pour tout $v \in \tilde{S}_{j'}$, avec $j' \in \{j_0^h, \dots, j_1^h\}$.

- *Justification de l'étape 1, lorsque $\delta > 0$* : Rappelons que $\underline{j}$ est alors fini. Construisons l'ensemble I_1^h et les entiers naturels j_0^h et j_1^h . Comme $\theta \in [0, 1[$, on a, lorsque j appartient à un certain sous-ensemble infini $\mathcal{J}$ de $\mathbb{N}$,

$$\prod_{i=\underline{j}}^{j-2} p_i \leq 2^{(-(1-\theta) + \frac{1-\theta}{6})(j-1)}.$$

Le troisième point du lemme 7.4 assure alors qu'on peut majorer par $\kappa 2^{(2+\theta)(j-1)/3}$ le cardinal de l'ensemble S_{j-1} , pour j dans $\mathcal{J}$. Notons j_0^h un élément de $\mathcal{J}$ supérieur à $4\tilde{\kappa}$ et suffisamment grand pour avoir simultanément les inégalités (7.26) et

$$3\kappa 2^{-(1-\theta)(j_0^h-1)/3} \leq \frac{1}{4}. \quad (7.27)$$

En vertu du premier point du lemme 7.4, dès lors que l'entier j , supérieur à j_0^h , est suffisamment grand, au moins un des ensembles $\tilde{S}_{j'}$, pour $j' \in \{j_0^h, \dots, j\}$, est non vide. De surcroît, le cercle $\mathbb{T}$ privé des boules ouvertes $\frac{3}{2}B_u^h$, pour $u \in S_{j_0^h-1}$, et des boules ouvertes B_u^h , lorsque u appartient à $\tilde{S}_{j'}$, pour tout $j' \in \{j_0^h, \dots, j\}$, contient

une composante connexe $\mathcal{I}_j$ de mesure de Lebesgue supérieure à

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 3\#S_{j_0^h-1} 2^{-(j_0^h-1)} - \sum_{j'=j_0^h}^j \#\tilde{S}_{j'} 2^{1-bj'}}{\#S_{j_0^h-1} + \sum_{j'=j_0^h}^j \#\tilde{S}_{j'}} \\ & \geq \frac{1 - 3\kappa 2^{-(1-\theta)(j_0^h-1)/3} - 2\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{(1-b)j'} q_{j'-1}(j')^2}{\kappa 2^{(2+\theta)(j_0^h-1)/3} + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2} \\ & \geq \frac{1}{2 \left(\kappa 2^{(2+\theta)(j_0^h-1)/3} + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2 \right)}. \end{aligned}$$

La première minoration découle des deux derniers points du lemme 7.4, tandis que la seconde est une conséquence de (7.26) et de (7.27). La composante connexe $\mathcal{I}_j$ peut accueillir l'image par ϕ d'un intervalle réel fermé de longueur $\eta_j^h 2^{-hj/h}$ si

$$\eta_j^h \leq \frac{2^{hj/h}}{2 \left(\kappa 2^{(2+\theta)(j_0^h-1)/3} + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_0^h}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2 \right)}.$$

Le membre de gauche et le dénominateur du membre de droite croissent moins vite que toutes les exponentielles, lorsque j tend vers l'infini, en vertu de (7.23) et du fait que $\tilde{h} = \infty$ respectivement. L'inégalité précédente est donc vraie dès que l'entier j est suffisamment grand. Notons j_1^h le premier entier pour lequel, simultanément, l'union sur $j' \in \{j_0^h, \dots, j_1^h\}$ des ensembles $\tilde{S}_{j'}$ est non vide et l'inégalité précédente est satisfaite. La composante connexe $\mathcal{I}_{j_1^h}$ est bordée par une boule ouverte $\frac{3}{2}B_u^h$, pour $u \in S_{j_0^h-1}$, ou une boule ouverte B_u^h , pour $u \in \tilde{S}$ de génération comprise entre j_0^h et j_1^h . On peut alors considérer un sous-ensemble I_1^h de $\mathcal{I}_{j_1^h}$ qui se présente, dans le premier cas, comme l'image par la surjection ϕ de l'intervalle réel

$$\begin{aligned} & \left[x_u + 3 \cdot 2^{-j_0^h}, x_u + 3 \cdot 2^{-j_0^h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h} \right] \\ \text{ou} & \left[x_u - 3 \cdot 2^{-j_0^h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h}, x_u - 3 \cdot 2^{-j_0^h} \right] \end{aligned}$$

et, dans le second cas, comme l'image par ϕ de l'intervalle réel

$$\begin{aligned} & \left[x_u + 2^{-h\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-h\langle u \rangle/h} + \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h} \right] \\ \text{ou} & \left[x_u - 2^{-h\langle u \rangle/h} - \eta_{j_1^h}^h 2^{-hj_1^h/h}, x_u - 2^{-h\langle u \rangle/h} \right]. \end{aligned}$$

L'ensemble I_1^h répond aux conditions requises : $B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$ pour tout $v \in \tilde{S}$ de génération comprise entre j_0^h et j_1^h et $\frac{3}{2}B_v^h \cap I_1^h = \emptyset$ pour tout $v \in S_{j_0^h-1}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justification du passage de l'étape n à l'étape $n+1$: Supposons avoir construit des entiers naturels $j_0^h, \dots, j_n^h$ et des ensembles $I_1^h, \dots, I_n^h$ convenables. D'après la définition (7.22) de la suite $(\eta_j^h)_{j \in \mathbb{N}}$ et le fait que j_n^h est supérieur à j_0^h , donc à $4\tilde{\kappa}$, on a

$$\forall j \geq j_n^h + 1 \quad 2\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_n^h+1}^j 2^{(1-\underline{h}/h)j'} q_{j'-1}(j')^2 \leq \frac{\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h}}{2}. \quad (7.28)$$

D'après le premier point du lemme 7.4, si u désigne un sommet de l'arbre binaire $\mathcal{U}$ qui vérifie simultanément $\langle u \rangle \geq j_n^h + 1$ et $\overline{\lambda}_u \subset I_n^h$, il existe un descendant v du sommet u qui appartient à l'ensemble $\tilde{S}$. L'intersection $B_v^h \cap I_n^h$ est alors non vide, puisque x_v appartient à I_n^h . De plus, un des ensembles $\tilde{S}_{j'}$ est non vide, pour $j' \in \{j_n^h + 1, \dots, j\}$, si j désigne un entier suffisamment grand. L'ensemble I_n^h privé des boules ouvertes B_u^h , lorsque u appartient à $\tilde{S}_{j'}$, pour tout $j' \in \{j_n^h + 1, \dots, j\}$, admet une composante connexe $\mathcal{I}_j$ de mesure de Lebesgue supérieure à

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h} - \sum_{j'=j_n^h+1}^j \#\tilde{S}_{j'} 2^{1-\underline{h}j'/h}}{1 + \sum_{j'=j_n^h+1}^j \#\tilde{S}_{j'}} &\geq \frac{\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h} - 2\tilde{\kappa} \sum_{j'=j_n^h+1}^j 2^{(1-\underline{h}/h)j'} q_{j'-1}(j')^2}{1 + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_n^h+1}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2} \\ &\geq \frac{\eta_{j_n^h}^h 2^{-\underline{h}j_n^h/h}}{2 \left(1 + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_n^h+1}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2 \right)}. \end{aligned}$$

La première minoration se déduit du deuxième point du lemme 7.4, alors que la seconde résulte de (7.28). On peut placer dans la composante connexe $\mathcal{I}_j$ l'image par ϕ d'un intervalle réel fermé de longueur $\eta_j^h 2^{-\underline{h}j/h}$ dès que

$$\eta_j^h \leq \frac{\eta_{j_n^h}^h 2^{\underline{h}(j-j_n^h)/h}}{2 \left(1 + \tilde{\kappa} \sum_{j'=j_n^h+1}^j 2^{j'} q_{j'-1}(j')^2 \right)}.$$

En examinant, comme précédemment, le comportement asymptotique de ses deux membres, on peut affirmer que cette inégalité est vérifiée si l'entier j est assez grand. Notons j_{n+1}^h le plus petit entier naturel strictement supérieur à j_n^h pour lequel l'inégalité est vraie et pour lequel il existe un sommet v de $\tilde{S}$ de génération comprise entre $j_n^h + 1$ et j_{n+1}^h vérifiant $x_v \in I_n^h$. On peut trouver, à côté de la composante connexe $\mathcal{I}_{j_{n+1}^h}$, une boule ouverte B_u^h , pour $u \in \tilde{S}$ de génération appartenant à $\{j_n^h + 1, \dots, j_{n+1}^h\}$. Il existe donc un ensemble I_{n+1}^h qui s'écrit comme l'image par la surjection ϕ de l'intervalle réel

$$\begin{aligned} &\left[x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h}, x_u + 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} + \eta_{j_{n+1}^h}^h 2^{-\underline{h}j_{n+1}^h/h} \right] \\ \text{ou} &\left[x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} - \eta_{j_{n+1}^h}^h 2^{-\underline{h}j_{n+1}^h/h}, x_u - 2^{-\underline{h}\langle u \rangle/h} \right] \end{aligned}$$

et qui se trouve dans $\mathcal{I}_{j_{n+1}^h}$. Cet ensemble I_{n+1}^h satisfait aux conditions désirées, puisqu'on a $B_v^h \cap I_{n+1}^h = \emptyset$, pour tout $v \in \tilde{S}_{j'}$, avec $j' \in \{j_n^h + 1, \dots, j_{n+1}^h\}$.

On vient donc d'établir que, sur l'événement de probabilité 1 pour lequel les trois points du lemme 7.4 sont vérifiés, la construction d'une suite convenable $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles est possible, pour tout réel $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$. En outre, sur cet événement, l'ensemble Θ est vide, lorsque $\delta = 0$. Les hypothèses du lemme 7.3 sont alors vérifiées, si bien que le point $y_h \in \mathbb{T}$ qui résulte de la famille $(I_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble E_h . Il s'ensuit que ce dernier ensemble est non vide. La proposition 7.5 est donc démontrée.

En utilisant simultanément les propositions 7.3, 7.4 et 7.5 et le fait que l'ensemble $E_{\underline{h}}$ contient l'ensemble Θ d'après les lemmes 7.1 et 7.2, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.6

On a presque sûrement

$$\dim E_{\underline{h}} = \max \left(\frac{h}{\tilde{h}}, \dim \Theta \right) \quad \text{et} \quad \forall h \in]\underline{h}, \min(\tilde{h}, \bar{h})[\quad \dim E_h = \frac{h}{\tilde{h}}.$$

Le théorème 7.2 est alors une conséquence immédiate de cette proposition, de la proposition 7.2 et de la discussion qui la suit.

Bibliographie

- [1] A. AGRESTI : On the extinction times of varying and random environment branching processes. *Journal of Applied Probability*, 12:39–46, 1975.
- [2] K. ALNIAÇIK et É. SAIAS : Une remarque sur les G_δ denses. *Archiv der Mathematik*, 62(5):425–426, 1994.
- [3] M. ARBEITER : Random recursive construction of self-similar fractal measures. *Probability Theory and Related Fields*, 88(4):497–520, 1990.
- [4] A. ARNEODO, E. BACRY, S. JAFFARD et J.-F. MUZY : Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(2):159–174, 1998.
- [5] J.-M. AUBRY : Representation of the singularities of a function. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6(2):282–286, 1999.
- [6] J.-M. AUBRY et S. JAFFARD : Random wavelet series. *Communications in Mathematical Physics*, 227(3):483–514, 2002.
- [7] A. BAKER et W.M. SCHMIDT : Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 21(3):1–11, 1970.
- [8] J. BARRAL et S. SEURET : Heterogeneous ubiquitous systems in $\mathbb{R}^d$ and Hausdorff dimension. Prépublication, 2004.
- [9] J. BARRAL et S. SEURET : From multifractal measures to multifractal wavelet series. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 11(5):589–614, 2005.
- [10] J. BARRAL et S. SEURET : Inside singularity sets of random Gibbs measures. *Journal of Statistical Physics*, 120(5):1101–1124, 2005.
- [11] J. BARRAL et S. SEURET : Ubiquity and large intersections properties under digit frequencies constraints. Prépublication, 2006.
- [12] J. BARRAL et S. SEURET : The singularity spectrum of Lévy processes in multifractal time. À paraître dans *Advances in Mathematics*, 2007.
- [13] L. BARREIRA, B. SAUSSOL et J. SCHMELING : Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis. *Journal of Number Theory*, 97(2):410–438, 2002.
- [14] M. BASSEVILLE, A. BENVENISTE, K.C. CHOU, S.A. GOLDEN, R. NIKOUKAH et A.S. WILSKY : Modeling and estimation of multiresolution stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38:766–784, 1992.
- [15] V.V. BERESNEVICH : On approximation of real numbers by real algebraic numbers. *Acta Arithmetica*, 90(2):97–112, 1999.
- [16] V.V. BERESNEVICH : Application of the concept of regular systems of points in metric number theory. *Vestsi Natsyynal'naï Akademi Navuk Belarusi, Seryya Fizika-Matematychnykh Navuk*, 1:35–39, 2000.

- [17] V.V. BERESNEVICH : On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation. *Acta Arithmetica*, 117(1):71–80, 2005.
- [18] V.V. BERESNEVICH, V.I. BERNIK et M.M. DODSON : Regular systems, ubiquity and Diophantine approximation. In G. WÜSTHOLZ, éditeur : *A panorama of number theory or The view from Baker's garden*, pages 260–279, Cambridge, 2002. Cambridge University Press.
- [19] V.V. BERESNEVICH, D. DICKINSON et S.L. VELANI : Measure theoretic laws for limsup sets. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 179(846):1–91, 2006.
- [20] V.V. BERESNEVICH et S.L. VELANI : A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures. *Annals of Mathematics (2)*, 164(3):971–992, 2006.
- [21] V.V. BERESNEVICH et S.L. VELANI : Schmidt's theorem, Hausdorff measures and slicing. *International Mathematics Research Notices*, 2006.
- [22] A. BERLINKOV : Exact packing dimension in random recursive constructions. *Probability Theory and Related Fields*, 126(4):477–496, 2003.
- [23] A. BERLINKOV et R.D. MAULDIN : Packing measure and dimension of random fractals. *Journal of Theoretical Probability*, 15(3):695–713, 2002.
- [24] V.I. BERNIK : On the Baker-Schmidt hypothesis. *Doklady Akadèmiï Nauk BSSR*, 23(5):392–395, 1979.
- [25] V.I. BERNIK : Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation. *Acta Arithmetica*, 42(3):219–253, 1983.
- [26] V.I. BERNIK : The exact order of approximating zero by values of integral polynomials. *Acta Arithmetica*, 53(1):17–28, 1989.
- [27] J. BERTOIN : *Lévy processes*. Numéro 121 de Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [28] A.S. BESICOVITCH : On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. *Mathematische Annalen*, 110(1):321–330, 1934.
- [29] A.S. BESICOVITCH : Sets of fractional dimensions (IV) : on rational approximation to real numbers. *Journal of the London Mathematical Society*, 9:126–131, 1934.
- [30] R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETTOOR : Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 10:493–516, 1961.
- [31] A. BROUSTE : *Étude d'un processus bifractal et application statistique en géologie*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006.
- [32] A. BROUSTE, F. RENARD, J.-P. GRATIER et J. SCHMITTBUHL : Variety of stylolites' morphologies and statistical characterization of the amount of heterogeneities in the rock. *Journal of Structural Geology*, 29(3):422–434, 2007.
- [33] G. BROWN, G. MICHON et J. PEYRIÈRE : On the multifractal analysis of measures. *Journal of Statistical Physics*, 66(3):775–790, 1992.
- [34] Y. BUGEAUD : Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension. *Journal of the London Mathematical Society*, 65(3):547–559, 2002.
- [35] Y. BUGEAUD : Approximation par des nombres algébriques de degré borné et dimension de Hausdorff. *Journal of Number Theory*, 96(1):174–200, 2002.

- [36] Y. BUGEAUD : *Approximation by algebraic numbers*, volume 160 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2004.
- [37] Y. BUGEAUD : An inhomogeneous Jarník theorem. *Journal d'Analyse Mathématique*, 92:327–349, 2004.
- [38] Y. BUGEAUD : Intersective sets and Diophantine approximation. *Michigan Mathematical Journal*, 52(3):667–682, 2004.
- [39] J.T. CHAYES, L. CHAYES et R. DURRETT : Connectivity properties of Mandelbrot's percolation process. *Probability Theory and Related Fields*, 77(3):307–324, 1988.
- [40] H.A. CHIPMAN, E.D. KOLACZYK et R.E. MCCULLOCH : Adaptive Bayesian wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 92:1413–1421, 1997.
- [41] H. CHOI et R.G. BARANIUK : Multiscale image segmentation using wavelet-domain hidden Markov models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9):1309–1321, 2001.
- [42] M.S. CROUSE, R.D. NOWAK et R.G. BARANIUK : Wavelet-based statistical processing using hidden Markov models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(4):886–902, 1998.
- [43] I. DAUBECHIES : *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [44] M. DENKER et W. PHILIPP : Approximation by Brownian motion for Gibbs measures and flows under a function. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(4):541–552, 1984.
- [45] R. DEVORE et B. LUCIER : High order regularity for conservation laws. *Indiana University Mathematics Journal*, 39(2):413–430, 1990.
- [46] P. DIENES : *Taylor series*. Dover, New York, 1957.
- [47] M. DILIGENTI, P. FRASCONI et M. GORI : Image document categorization using hidden tree Markov models and structured representations. In S. SINGH, N. MURSHED et W. KROPATSCH, éditeurs : *Proceedings of the International Conference on Applications of Pattern Recognition*, Lecture Notes in Computer Science, 2001.
- [48] M.M. DODSON : Exceptional sets in dynamical systems and Diophantine approximation. In *Rigidity in dynamics and geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [49] M.M. DODSON, B.P. RYNNE et J.A.G. VICKERS : Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension. *Mathematika*, 37(1):59–73, 1990.
- [50] D.L. DONOHO : De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(3):613–627, 1995.
- [51] D.L. DONOHO et I.M. JOHNSTONE : Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432):1200–1224, 1995.
- [52] D.L. DONOHO, I.M. JOHNSTONE, G. KERKYACHARIAN et D. PICARD : Wavelet shrinkage : asymptopia ? *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 57(2):301–369, 1995.
- [53] J.L. DOOB : *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [54] A.V. DRYAKHLOV et A.A. TEMPELMAN : On Hausdorff dimension of random fractals. *New York Journal of Mathematics*, 7:99–115, 2001.

- [55] J.C. D'SOUZA : The rates of growth of the Galton-Watson process in varying environments. *Advances in Applied Probability*, 26(3):698–714, 1994.
- [56] J.C. D'SOUZA et J.D. BIGGINS : The supercritical Galton-Watson process in varying environments. *Stochastic Processes and their Applications*, 42(1):39–47, 1992.
- [57] R.J. DUFFIN et A.C. SCHAEFFER : Khintchine's problem in metric Diophantine approximation. *Duke Mathematical Journal*, 8:243–255, 1941.
- [58] H. EGGLESTON : The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quarterly Journal of Mathematics*, 20:31–36, 1949.
- [59] P. ERDŐS : Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers. *Michigan Mathematical Journal*, 9:59–60, 1962.
- [60] K.J. FALCONER : Classes of sets with large intersection. *Mathematika*, 32(2):191–205, 1985.
- [61] K.J. FALCONER : Random fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100(3):559–582, 1986.
- [62] K.J. FALCONER : The multifractal spectrum of statistically self-similar measures. *Journal of Theoretical Probability*, 7(3):681–702, 1994.
- [63] K.J. FALCONER : Sets with large intersection properties. *Journal of the London Mathematical Society (2)*, 49(2):267–280, 1994.
- [64] K.J. FALCONER : *Fractal geometry : Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Inc., New York, second édition, 2003.
- [65] A.H. FAN : Multifractal analysis of infinite products. *Journal of Statistical Physics*, 86(5-6):1313–1336, 1997.
- [66] A.H. FAN et K.S. LAU : Asymptotic behavior of multiperiodic functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(2):129–150, 1998.
- [67] D.H. FEARN : Galton-Watson processes with generation dependence. In *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 4, pages 159–172, 1971.
- [68] S.R. FINCH : *Mathematical constants*, volume 94 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [69] P. FLANDRIN : Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):910–917, 1992.
- [70] L.R. FORD et D.R. FULKERSON : *Flows in networks*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [71] U. FRISCH et G. PARISI : On the singularity structure of fully developed turbulence. In M. GHIL, R. BENZI et G. PARISI, éditeurs : *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, pages 84–88, Amsterdam, 1985. North Holland.
- [72] T. FUJIMAGARI : On the extinction time distribution of a branching process in varying environments. *Advances in Applied Probability*, 12(2):350–366, 1980.
- [73] Y. GAGNE : *Étude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence pleinement développée*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 1987.

- [74] P.X. GALLAGHER : Metric simultaneous Diophantine approximation. ii. *Mathematika*, 12:123–127, 1965.
- [75] S. GRAF : Statistically self-similar fractals. *Probability Theory and Related Fields*, 74(3):357–392, 1987.
- [76] S. GRAF, R.D. MAULDIN et S.C. WILLIAMS : Exact Hausdorff dimension in random recursive constructions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 84(12):3959–3961, 1987.
- [77] S. GRAF, R.D. MAULDIN et S.C. WILLIAMS : The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 71(381), 1988.
- [78] A. GROSSMANN et J. MORLET : Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15:723–736, 1984.
- [79] R. GÜTING : On Mahler’s function θ_1 . *Michigan Mathematical Journal*, 10:161–179, 1963.
- [80] G.H. HARDY : Weierstrass’s non-differentiable function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 17(3):301–325, 1916.
- [81] G.H. HARDY et E.M. WRIGHT : *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, New York, fifth édition, 1979.
- [82] G. HARMAN : *Metric number theory*, volume 18 de *LMS Monographs New Series*. Clarendon Press, New York, 1998.
- [83] F. HAUSDORFF : Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen*, 79(1-2):157–179, 1919.
- [84] M. HOLSCHNEIDER, R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET et P. TCHAMITCHIAN : A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. In J.-M. COMBES, A. GROSSMANN et P. TCHAMITCHIAN, éditeurs : *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 286–297. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [85] A. HURWITZ : Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. *Mathematische Annalen*, 46:279–284, 1891.
- [86] J.E. HUTCHINSON : Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5):713–747, 1981.
- [87] J.E. HUTCHINSON et L. RUSCHENDORFF : Random fractal measures via the contraction method. *Indiana University Mathematics Journal*, 47(2):471–487, 1998.
- [88] J. ISTAS et G. LANG : Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 33(4):407–436, 1997.
- [89] J. JACOD et A.N. SHIRYAEV : *Limit theorems for stochastic processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [90] S. JAFFARD : Functions with prescribed Hölder exponent. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2(4):400–401, 1995.
- [91] S. JAFFARD : The spectrum of singularities of Riemann’s function. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441–460, 1996.

- [92] S. JAFFARD : Multifractal formalism for functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 28(4):944–998, 1997.
- [93] S. JAFFARD : The multifractal nature of Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields*, 114:207–227, 1999.
- [94] S. JAFFARD : On lacunary wavelet series. *The Annals of Applied Probability*, 10(1):313–329, 2000.
- [95] S. JAFFARD : Multifractal functions : recent advances and open problems. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 73(2-3):129–153, 2004.
- [96] S. JAFFARD : Wavelet techniques in multifractal analysis. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 72(2):91–151, 2004.
- [97] S. JAFFARD et Y. MEYER : Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 123(587), 1996.
- [98] P. JAGERS : Galton-Watson processes in varying environments. *Journal of Applied Probability*, 11:174–178, 1974.
- [99] V. JARNÍK : Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass. *Matematicheskii Sbornik*, 36:371–381, 1929.
- [100] V. JARNÍK : Über die simultanen Diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 33(1):505–543, 1931.
- [101] J.-P. KAHANE : *Some random series of functions*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1985.
- [102] J.-P. KAHANE et P.G. LEMARIÉ-RIEUSSET : *Fourier series and wavelets*. Gordon & Breach, 1996.
- [103] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE : Sur certaines martingales de benoît mandelbrot. *Advances in Mathematics*, 22(2):131–145, 1979.
- [104] I. KARATZAS et S. SHREVE : *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1991.
- [105] A.I. KHINTCHINE : Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 24(1):706–714, 1926.
- [106] Y. KIFER : Fractals via random iterated function systems and random geometric constructions. In C. BANDT, S. GRAF et M. ZAHLE, éditeurs : *Fractal geometry and stochastics*, pages 145–164. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [107] Y. KIFER : Fractal dimensions and random transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(5):2003–2038, 1996.
- [108] S.C. KLEENE : *Mathematical logic*. Dover, New York, 2002.
- [109] J.F. KOKSMA : Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 48:176–189, 1939.
- [110] R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET et A. GROSSMANN : Analysis of sound patterns through wavelet transforms. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1(2):273–301, 1988.

- [111] N. LEE, Q. HUYNH et S. SCHWARZ : New methods of linear time-frequency analysis for signal detection. *In Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 13–16. IEEE, 1996.
- [112] P.G. LEMARIÉ-RIEUSSET et Y. MEYER : Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matematica Iberoamericana*, 2(1-2):1–18, 1986.
- [113] J. LEVESLEY : A general inhomogeneous Jarník-Besicovitch theorem. *Journal of Number Theory*, 71(1):65–80, 1998.
- [114] T. LINDVALL : Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments. *Annals of Probability*, 2:344–346, 1974.
- [115] Y.-Y. LIU, Z.-Y. WEN et J. WU : Generalized random recursive constructions and geometric properties of random fractals. *Mathematische Nachrichten*, 267:65–76, 2004.
- [116] R. LYONS et Y. PERES : Probability on trees and networks. En préparation, 2005.
- [117] I.M. MACPHEE et H.J. SCHUH : A Galton-Watson branching process in varying environments with essentially constant means and two rates of growth. *Australian Journal of Statistics*, 25(2):329–338, 1983.
- [118] K. MAHLER : Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 166:118–150, 1932.
- [119] S. MALLAT : *A wavelet tour of signal processing*. Academic press, 1999.
- [120] S. MALLAT et W.L. HWANG : Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):617–643, 1992.
- [121] S. MALLAT et S. ZHONG : Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(7):710–732, 1992.
- [122] B. MANDELBROT : Intermittent turbulence in selfsimilar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62:331–358, 1974.
- [123] B. MANDELBROT : Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série A*, 278:289–292, 1974.
- [124] B. MANDELBROT : *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York, 1983.
- [125] P. MATTILA : *Geometry of sets and measures in Euclidian spaces*, volume 44 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [126] R.D. MAULDIN et S.C. WILLIAMS : Random recursive constructions : asymptotic geometric and topological properties. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(1):325–346, 1986.
- [127] Y. MEYER : *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [128] Y. MEYER : *Wavelets, vibrations and scalings*. CRM Monographs. American Mathematical Society, 1998.
- [129] P.A.P. MORAN : Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42:15–23, 1946.

- [130] L. OLSEN : *Random geometrically graph directed self-similar multifractals*, volume 307 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
- [131] L. OLSEN : On the exact Hausdorff dimension of the set of Liouville numbers. *Manuscripta Mathematica*, 116(2):157–172, 2005.
- [132] L. OLSEN et D.L. RENFRO : On the exact Hausdorff dimension of the set of Liouville numbers, II. *Manuscripta Mathematica*, 119(2):217–224, 2006.
- [133] W. PARRY et M. POLICOTT : *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, volume 187-188 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1990.
- [134] Y. PESIN et H. WEISS : On the dimension of deterministic and random Cantor-like sets, symbolic dynamics, and the Echmann-Ruelle conjecture. *Communications in Mathematical Physics*, 182(1):105–153, 1996.
- [135] A.D. POLLINGTON et R.C. VAUGHAN : The k -dimensional Duffin and Schaeffer conjecture. *Mathematika*, 37(2):190–200, 1990.
- [136] W.E. PRUITT : The growth of random walks and Lévy processes. *Annals of Probability*, 9(6):948–956, 1981.
- [137] C.A. ROGERS : *Hausdorff Measures*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [138] L.C.G. ROGERS et D. WILLIAMS : *Diffusions, Markov processes and martingales*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2000.
- [139] B.P. RYNNE : Regular and ubiquitous systems, and $\mathcal{M}_\infty^s$ -dense sequences. *Mathematika*, 39(2):234–243, 1992.
- [140] K.I. SATO : *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [141] W.M. SCHMIDT : Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 110:493–518, 1964.
- [142] T. SCHNEIDER : *Introduction aux nombres transcendants*. Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [143] W. SCHWARZ : Liouville-Zahlen und der Satz von Baire. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte*, 24(1):84–87, 1977.
- [144] J.M. SHAPIRO : Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3445–3465, 1993.
- [145] J.D. SONDOW : An irrationality measure for Liouville numbers and conditional measures for Euler’s constant. Prépublication, 2003.
- [146] V.G. SPRINDŽUK : *Mahler’s problem in metric number theory*, volume 25 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [147] S.J. TAYLOR : The α -dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51:265–274, 1955.
- [148] D. WILLIAMS : *Probability with martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [149] E. WIRSING : Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 206:67–77, 1961.

Table des figures

2.1	La courbe de Koch (1904)	24
3.1	Fermés de la collection G_{q+1} rencontrant le cube λ'	75
5.1	Spectre de singularités de presque toutes les trajectoires du processus de Lévy.	113
5.2	Spectre de singularités de presque toutes les trajectoires des séries lacunaires d'ondelettes lorsque $\bar{h}$ est fini.	131
6.1	Construction récursive du compact K .	143
7.1	Valeurs prises avec probabilité 1 par le spectre de singularités d_R lorsque $\sum_j 2^j q_j < \infty$.	199
7.2	Valeurs prises avec probabilité 1 par le spectre de singularités d_R lorsque $\sum_j 2^j q_j = \infty$.	199

Notations introduites

- $\mathbb{A}$, réels algébriques, 50
 $\text{acc } \mathcal{X}$, points d'accumulation de $\mathcal{X}$, 17
 $\overline{F}$, adhérence de F , 67
 A^* , partie A privée du mot vide, 142
 $\alpha_{s,j}$, 160
 $\mathbb{A}_{n,h_0}$, réels algébriques de degré au plus n et de hauteur au moins h_0 , 50
 $A_{n,\psi}$, réels ψ -approchables par des réels algébriques de degré au plus n , 31
 β , exposant de Blumenthal et Gettoor, 113
 $\beta_f(x)$, exposant d'oscillation, 19
 β' , 113
 $\underline{\beta}, \overline{\beta}$, bornes sur les rapports de contraction, 145
 B_v^h , 212
 $B(x, r)$, boule ouverte de centre x et de rayon r , 37
 $\bar{B}(x, r)$, boule fermée de centre x et de rayon r , 65
 $\#F$, cardinal de F , 36
 $C_{\log}^h(x)$, 17
 $C^h(\mathbb{R}^d)$, espace de Hölder, 16
 $C^h(\mathbb{T}^d)$, espace de Hölder, 16
 $C^h(x)$, 17
 c_λ^i , coefficient d'ondelette, 21
 c_j , 112
 C_λ , coefficient d'ondelette de R , 195
 $C^+(\mathbb{T}^d)$, fonctions uniformément höldériennes, 16
 $\mathcal{C}(\tau_u), \mathcal{C}_j(\tau_u)$, coupes de τ_u , 151
 $C^w(x)$, 17
 D , complexes de module inférieur à 1, 154
 d , distance quotient sur $\mathbb{T}^d$, 26
 d , distance sur un espace métrique, 23
 $\mathfrak{D}$, fonctions de jauge, 24
 $\mathbb{D}([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, espace de Skorokhod, 111
 D_c , dilatations c -adiques, 81
 $\mathfrak{D}_d$, fonctions de jauge, 30
 δ , 196
 ΔX_t , saut de X en t , 112
 d_* , 161
 $d_f(h)$, spectre de singularités, 7
 D_j^f , exponentielle de la somme de Birkhoff, 89
 $|F|$, diamètre de F , 23
 $\dim F$, dimension de Hausdorff de F , 25
 $d_f^{\text{osc}}(h)$, spectre de singularités oscillantes, 26
 $\partial\tau_u$, frontière de τ_u , 146
 $\mathfrak{D}_1, \mathcal{D}, \mathcal{D}_1$, fonctions de jauge, 116
 $\mathbb{E}[\cdot]$, espérance sous $\mathbb{P}$, 112, 135, 162, 196
 $\tilde{E}_t^{\text{Bir}}, E_t^{\text{Bir}}$, 91
 $\tilde{E}_t^{\text{Dev}}, E_t^{\text{Dev}}$, 88
 $\tilde{E}_h$, ensemble isohöldérien, 7, 112, 197
 $\bar{E}_h$, 8, 113, 201
 ε_g , 34
 $e_{s,j}$, 173
 $E_{s,u}, \tilde{E}_{s,u}$, écoulement, 151
 $\mathfrak{E}_{s,u,\infty}$, 174
 $\mathfrak{E}_{s,u,\bullet} = (\mathfrak{E}_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 174
 E_t , 84
 η_j^h , 212
 $\tilde{E}_t$, 84
 E_t^w , 96
 $\mathcal{F}$, tribu sur Ω , 111, 130, 147, 195
 $(\mathcal{F}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, filtration sur Ω , 162
 f_j , 155
 F_φ , 29
 F_w , 117, 133
 $\tilde{F}_w$, 127, 138
 γ_v , 121
 $g_{\beta,\varphi}$, 81
 g_d , jauge associée à g , 31
 $\langle \lambda \rangle$, génération du cube dyadique λ , 21

- $\langle \lambda \rangle_c$, génération du cube c -adique λ , 34
 $\langle u \rangle$, génération du sommet u , 142
 $G^g(V)$, classe d'ensembles à grande intersection, 9, 34
 $\mathcal{G}_u^{j_0}$, tribu du passé de u , 152
 $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$, classe d'ensembles à grande intersection de K. Falconer, 8
 $\mathcal{G}_u$, tribu du passé de u , 146
 g_1 , jauge associée à g , 114
 $(g^{1/d})^{-1}$, pseudo-réciproque de la racine d -ième de g , 38

 $H(a)$, hauteur du réel algébrique a , 31
 $\bar{h}$, régularité maximale, 131
 $h_f(x)$, exposant de Hölder, 7
 h_g , exposant associé à g , 114, 131
 $\mathcal{H}^g(F)$, g -mesure de Hausdorff de F , 24
 $H(p)$, hauteur du polynôme p , 54
 $\mathcal{H}^s(F)$, mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de F , 25
 $\underline{h}, \bar{h}$, bornes sur la régularité, 195
 $\underline{h}$, régularité minimale, 130
 $\widetilde{h}$, 198
 $h_X(t)$, exposant de Hölder, 112

 $\mathcal{I}$, 20
 $I_{f,q}^{\text{Bir}}$, 91
 Id , fonction identité, 9
 $\mathcal{I}_{d,c}, \mathcal{I}_{d,\text{rat}}$, 82
 I_{π}^{Dev} , 88
 I_n^h , 212
 $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha}$, 84
 $I_{M,\psi}^{\mu,\alpha,w}$, 96
 $\text{int } F$, intérieur de F , 57

 $J(B)$, mesure de comptage des sauts, 118
 $J_{d,\tau}$, points τ -approchables par des rationnels, 40
 j_* , 159
 j_n^h , 212
 $j_{i,n}$, 130
 J_{τ}^{π} , 79
 $\widetilde{J}_{\tau}^{\pi}$, 79
 $\underline{j}$, 155, 196
 J_{τ} , réels τ -approchables par des rationnels, 30
 $(J_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$, famille de compacts aléatoires, 145

 K , 145
 $K_{d,\psi}$, points ψ -approchables par des rationnels, 9
 K_u , 150

 L_{α} , 202
 $\widetilde{L}_{\alpha}$, 205
 Λ , cubes dyadiques de $\mathbb{T}^d$, 21
 Λ , intervalles dyadiques du cercle, 194
 λ , cube c -adique de $\mathbb{R}^d$, 34
 λ , cube dyadique de $\mathbb{T}^d$, 21
 Λ_c , cubes c -adiques de $\mathbb{R}^d$, 34
 $\Lambda_{c,g}$, cubes c -adiques de $\mathbb{R}^d$ de diamètre strictement inférieur à ε_g , 34
 λ_u , cube dyadique codé par u , 195
 L_d , points de Liouville, 44
 $\mathcal{L}^d$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, 37
 $\mathcal{L}^d$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$, 130
 $L_u^{j_0}$, 173
 L_{φ} , 118, 133
 $\mathcal{L}^1$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, 118
 L_v , rapport de contraction, 151

 M , applications de $\mathcal{U}_0$ dans $\{0, 1\}$, 146
 $\mathbb{M}$, loi d'une chaîne de Markov, 146
 $\mathcal{M}$, tribu sur M , 146
 $\mathfrak{M}$, mesures boréliennes, 82
 $\mathcal{M}_{\infty}^g(F)$, g -mesure extérieure de F , 34
 $m_{i,j}$, 130
 $(\mathcal{M}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, filtration sur M , 153
 M^{j_0} , applications de $\mathcal{U}_{j_0}$ dans $\{0, 1\}$, 152
 $\mathcal{M}^{j_0}$, tribu sur M^{j_0} , 152
 $(\mathcal{M}_j^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$, filtration sur M^{j_0} , 153
 m_{λ} , restriction, 83
 $\mathbb{M}_{t_{\emptyset}, j_0}$, loi d'une chaîne de Markov, 152
 $\mathbb{M}$, 130
 μ_f , mesure de Gibbs, 90
 $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$, lois des rapports de contraction, 145
 $\mathbb{M}_s^{j_0}$, mesure de percolation, 175
 $\mathbb{M}_{1,j_0}[\cdot]$, espérance sous $\mathbb{M}_{1,j_0}$, 154
 μ_{π} , mesure multinomiale, 86

 $\mathcal{N}_i$, 130
 $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$, nombres maximaux de fils, 145
 $\bar{n}_j$, 157
 $\mathbb{N}_{q_0}$, entiers supérieurs à q_0 , 40
 $(\nu_{t,j})_{(t,j) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}}$, probabilités de transition, 146

Ω , univers, 111, 130, 147, 195
 ω_λ , dilatation, 83

$\mathbb{P}$, probabilité sur Ω , 112, 130, 147, 195
 $P_f(q)$, fonction de pression, 90
 Φ , 81
 ϕ , surjection canonique sur $\mathbb{T}$, 194
 ϕ , surjection canonique sur $\mathbb{T}^d$, 16
 φ_g , 72
 $\phi_{s,j}$, 175
 $\varphi_{t,j}$, fonction génératrice, 154
 π , mesure de Lévy, 112
 Π_{j_0} , probabilité sur $M^{j_0} \times Q^{j_0}$, 173
 Π_ψ , réels ψ -approchables par des quotients
 de nombres premiers, 47
 $\pi(u)$, père d'un sommet u , 142
 $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$, probabilités de transition,
 195
 $P_{n,\psi}$, 55
 $\prec$, relation de comparaison entre les jauges,
 31

Ψ , 83
 ψ , ondelette, 194
 ψ^i , ondelette, 20
 $\Psi_{j,k}^i$, ondelette, 20
 Ψ_λ^i , ondelette, 21
 Ψ_λ , ondelette, 194
 Ψ_{q_0} , 40

Q , collection des familles de compacts aléa-
 toires, 145
 $\mathcal{Q}$, tribu sur Q , 145
 $\mathbb{Q}$, probabilité sur Q , 145
 Q^{j_0} , applications de $\mathcal{U}_{j_0}^*$ dans $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$, 173
 $\mathcal{Q}^{j_0}$, tribu sur Q^{j_0} , 173
 $\mathbb{Q}_{j_0}$, probabilité sur Q^{j_0} , 173
 $(\mathcal{Q}_j^{j_0})_{j \in \mathbb{N}^*}$, filtration sur Q^{j_0} , 173

R , série aléatoire d'ondelettes lacunaire,
 130
 R , série aléatoire d'ondelettes à coefficients
 corrélés, 195
 $\emptyset$, mot vide, 142
 $R_{c,g}(F)$, recouvrements de F par des cubes
 c -adiques de $\mathbb{R}^d$ de diamètre stric-
 tement inférieur à ε_g , 34
 $R_\varepsilon(F)$, ε -recouvrements de F , 24
 $\rho(s)$, 161

$R_c^\lambda(F)$, $R_c^{\lambda, \geq j}(F)$, $R_c^{\lambda, \leq j}(F)$, 56

S , sauts de X , 112
 $\mathcal{S}_d(I)$, 36
 S_j^f , somme de Birkhoff, 89
 s_g , 35
 σ , 112
 $\sigma_{b,j}(x)$, 79
 σ_j , 196
 $\bar{\sigma}_j$, 165
 $\underline{\sigma}_j$, 155
 $\varsigma(r)$, fonction de correction, 87
 $\varsigma_{s,j}$, 177
 S_j , 196
 $\tilde{S}_j$, $\tilde{\tilde{S}}_j$, $\tilde{\tilde{S}}$, 150
 $\tilde{\tilde{S}}_j$, $\tilde{\tilde{S}}$, 208
 S_1 , sauts de X de taille inférieure à 1, 118
 $\mathcal{S}_d^0(I)$, 82

$\mathbb{T}$, cercle normalisé, 16
 $\tau_u^{j_0}$, 153
 τ_u , 146
 $\mathbb{T}^d$, tore normalisé, 16
 Θ , fractal aléatoire, 147
 $\dot{\Theta}$, Θ , 205
 θ , 196

$\mathcal{U}$, arbre binaire, 194
 $\mathcal{U}$, mots, sommets, 142
 $\mathcal{U}_{j_0}$, 146
 u_λ , sommet codant λ , 195
 $u\mathcal{U}_{\langle u \rangle}^*$, descendants de u , 146
 $u\mathcal{U}_{j_0 + \langle u \rangle}^*$, descendants de u , 152
 $\mathcal{U}_0$, 145

$\mathfrak{W}$, modules de continuité, 16
 $\mathcal{W}$, modules de continuité, 116
 $w^*(x)$, type d'un S^* -nombre x , 52
 w_j , 165
 $W_{\emptyset, \infty}^{j_0}$, 165
 $W_{u, \bullet}^{j_0} = (W_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 164
 $W_{s,u,\infty}$, 163
 $W_{s,u,\bullet} = (W_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 162
 $\mathfrak{W}_{u,\infty}$, 167
 $\mathfrak{W}_{u,\bullet} = (\mathfrak{W}_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 167

$\xi \cdot \tau_\emptyset^{j_0}$, percolation par ξ de $\tau_\emptyset^{j_0}$, 175
 $\xi \cdot Z_{\emptyset, \bullet}^{j_0} = (\xi \cdot Z_{\emptyset,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}}$, 175
 $X^{j_0} = (X_u^{j_0})_{u \in \mathcal{U}_{j_0}}$, chaîne de Markov, 152

x_λ , point d'ancrage du cube dyadique λ ,

21

$X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$, processus de Lévy, 111

$X = (X_u)_{u \in \mathcal{U}_0}$, chaîne de Markov, 146

$X = (X_u)_{u \in \mathcal{U}}$, chaîne de Markov, 195

x_u , 202

x_ζ , 146

y_h , 212

$Z_{u,\bullet}^{j_0} = (Z_{u,j}^{j_0})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 154

$Z_{s,u,\bullet} = (Z_{s,u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 162

$Z_{u,\bullet} = (Z_{u,j})_{j \in \mathbb{N}_{\langle u \rangle}}$, 150

Index des auteurs

- Agresti, A., 155
Alniaçik, K., 46
Arbeiter, M., 144
Arnol'd, V., 12
Aubry, J.-M., 8, 11, 19, 32, 39, 194
- Baker, A., 31, 32, 38, 52
Baraniuk, R., 11, 13, 193
Barral, J., 10, 11, 79, 80, 82, 84, 86, 194
Beresnevich, V., 12, 31–33, 38–41, 46, 50, 55, 78
Berlinkov, A., 144
Bernik, V., 55
Besicovitch, A., 23, 30, 40, 46, 77, 79, 87
Bolzano, B., 8
Brouste, A., 11, 13, 194
Bugeaud, Y., 9, 31, 32, 34, 35, 46, 50, 60
- Carathéodory, C., 23
Chayes, J., 144
Chayes, L., 144
Crouse, M., 11, 13, 193
- Dickinson, D., 31, 32, 40, 41, 46, 50, 78
Dirichlet, J. Lejeune, 30, 37, 40, 56, 77, 82
Dodson, M., 12, 32
Dryakhlov, A., 144
Duffin, R., 50
Durrett, R., 144
- Eggleston, H., 79, 87
Erdős, P., 45
Euler, L., 49
- Falconer, K., 8, 9, 12, 30, 31, 33–35, 39, 60, 78, 79, 81, 89, 141, 143, 144, 147, 149, 150
Frisch, U., 7
Fujimagari, T., 155
- Güting, R., 40
Gallagher, P., 50
Graf, S., 12, 141, 143, 144, 147, 149
- Hardy, G., 18
Harman, G., 47, 78
Hausdorff, F., 23
Hurwitz, A., 82
Hutchinson, J., 12, 141, 142, 144, 147
- Jaffard, S., 8, 10, 11, 21, 25, 32, 39, 112, 117, 118, 129, 130, 194, 198
Jarník, V., 9, 30–33, 40, 41, 44, 46, 50, 77, 78
- Kahane, J.-P., 8
Khintchine, A., 30, 32, 33, 40–42, 44, 46, 50
Kifer, Y., 144
Koksma, J., 9, 32, 33, 39, 51, 52, 54, 56
Kolmogorov, A., 7, 12
- Levesley, J., 46
Liouville, J., 9, 31, 39, 44–46
Liu, Y.-Y., 144, 145, 147
Lyons, R., 12, 147, 173, 175
- Mahler, K., 32, 33, 39, 54, 56
Mandelbrot, B., 8, 12, 143, 147, 148
Mauldin, R., 12, 141, 143, 144, 147, 149
Meyer, Y., 18
Moran, P., 12, 141, 142, 147
Moser, J., 12
- Nowak, R., 11, 13, 193
- Olsen, L., 31, 44, 144
- Parisi, G., 7
Peres, Y., 12, 147, 173, 175
Pesin, Y., 144
Peyrière, J., 8

- Pollington, A., 50
Pruitt, W., 113
- Renfro, D., 31, 44
Riemann, G., 8
Ruschendorff, L., 144
Rynne, B., 32
- Saías, É., 46
Schaeffer, A., 50
Schmidt, W., 31, 32, 38, 46, 52
Schwarz, W., 46
Seuret, S., 10, 11, 79, 80, 82, 84, 86, 194
Sondow, J., 46
Sprindžuk, V., 56
- Taylor, S., 144
Tempelman, A., 144
- Vaughan, R., 50
Velani, S., 12, 31, 32, 39–41, 46, 50, 78
Vickers, J., 32
- Weiss, H., 144
Wen, Z.-Y., 144, 145, 147
Williams, S., 12, 141, 143, 144, 147, 149
Wirsing, E., 52
Wu, J., 144, 145, 147

Index des notions

Approximation

- de zéro par des polynômes, 55
- par des rationnels
 - avec restrictions, 47
 - simultanée homogène, 9, 30, 40
 - simultanée inhomogène, 46
- par des réels algébriques, 32, 50

Arbre, 142

- coupe, 151
- de Galton-Watson, 143
- de Markov caché, 11, 193
- frontière, 146

Cercle normalisé $\mathbb{T}$, 16

Chaîne de Markov indexée par un arbre, 146, 152

Chirp, 18

Classe

- $G^g(V)$, 34
- $\mathcal{G}^g(\mathbb{R}^d)$ de Y. Bugeaud, 34
- $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer, 8, 30
- de Zygmund, 16

Classification des réels transcendants

- de Koksma, 52
- de Mahler, 56

Coefficient d'ondelette, 21

- suite minimisante, 22

Condition de Besicovitch, 79

Constructions récursives, 141

- aléatoires, 141, 145

Coupe d'un arbre, 151

Cube

- c -adique de $\mathbb{R}^d$, 34
- dyadique du tore, 21

Cusp, 18

Dimension de Hausdorff, 25

Distance quotient sur le tore, 26

Écoulement dans un réseau, 151

Ensemble

- isohöldérien, 7, 17, 20
- à grande intersection
 - classe $G^g(V)$, 34
 - classe $\mathcal{G}^g(\mathbb{R}^d)$ de Y. Bugeaud, 34
 - classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer, 8, 30

Espaces de Hölder $C^h(\mathbb{R}^d)$ et $C^h(\mathbb{T}^d)$, 16

Exposant

- d'irrationalité, 40
- d'oscillation, 19
 - caractérisation, 22
- de Blumenthal et Gettoor, 113
- de chirp, 18
- de Hölder, 7, 17
 - caractérisation, 22
- de la fonction de Weierstrass, 18
- du mouvement brownien, 17
- prescrit, 20

F_σ , 150

Fonction

- de jauge
 - ensemble $\mathfrak{D}$, 24
 - ensemble $\mathfrak{D}_d$, 30
- multifractale, 7, 26
- uniformément höldérienne, 16

Formalisme multifractal, 20

Formule de Lévy-Khintchine, 112

Frontière d'un arbre, 146

G_δ , 34

Génération

- d'un cube
 - c -adique de $\mathbb{R}^d$, 34
 - dyadique du tore, 21
- d'un sommet d'un arbre, 142

Hauteur d'un réel algébrique, 31, 50

Lemme

- de König, 150
- des ensembles croissants, 67
- Mesure
 - de Gibbs, 90
 - de Hausdorff
 - $\mathcal{H}^g$ associée à une jauge g , 24
 - s -dimensionnelle $\mathcal{H}^s$, 25
 - de Lévy, 112
 - extérieure $\mathcal{M}_\infty^g$ associée à une jauge g , 34
 - multinomiale, 86
- Module de continuité, 17
 - critère, 22
 - des séries lacunaires d'ondelettes, 133
 - du processus de Lévy, 116
- Nombre réel ψ -approachable par des réels algébriques, 32, 50
- Ondelettes sur le tore, 20
- Ordre exact, 40
- Percolation
 - fractale de B. Mandelbrot, 143, 147
 - sur un arbre, 175
- Père d'un sommet d'un arbre, 142
- Point
 - ψ -approachable par des rationnels, 9, 30, 40
 - τ -approachable par des rationnels, 40
- Principe
 - de distribution de masse, 25
 - version locale, 100
 - de transfert de masse, 39
- Processus
 - de Galton-Watson en environnement variable, 153
 - de Lévy, 111
- Propriétés $C^w(x)$, $C^h(x)$ et $C_{\log}^h(x)$, 17
- Pseudo-réciproque, 38
- Recouvrement, 23
 - par des cubes c -adiques, 34
- Régularité
 - ponctuelle
 - $C^w(x)$, $C^h(x)$ et $C_{\log}^h(x)$, 17
 - critère, 21
 - uniforme
- $C^h(\mathbb{R}^d)$ et $C^h(\mathbb{T}^d)$, 16
- critère, 21
- S -nombre, 56
- S^* -nombre, 52
- Séries aléatoires d'ondelettes
 - lacunaires, 129
 - à coefficients corrélés, 194
- Singularité oscillante, 19
- Somme de Birkhoff, 89
- Spectre de singularités, 7, 26
 - des séries aléatoires d'ondelettes lacunaires, 132
 - à coefficients corrélés, 197, 198
- du processus de Lévy, 113
- oscillantes, 26
- support, 26
- Suite minimisante des coefficients d'ondelette, 22
- Système
 - d'ubiquité, 32
 - homogène, 10, 33, 37
 - hétérogène, 10, 80, 83
 - régulier, 38
 - optimal, 32, 38
- Théorème
 - de Dirichlet, 37
 - de Doob, 163
 - de Jarník, 41
 - de Khintchine, 41
 - de recouvrement de Besicovitch, 101
- Tore normalisé $\mathbb{T}^d$, 16
- Type d'un S^* -nombre, 52
- Zéros d'un pont brownien, 144

**Propriétés d'ubiquité en analyse multifractale
et séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés**

Résumé : L'objectif principal de cette thèse est la description des propriétés de taille et de grande intersection des ensembles apparaissant lors de l'analyse multifractale de certains processus stochastiques. Dans ce but, nous introduisons de nouvelles classes d'ensembles à grande intersection associées à des fonctions de jauge générales et nous prouvons, à l'aide de techniques d'ubiquité, des résultats d'appartenance à ces classes pour certains ensembles $\limsup$. Cela nous permet en particulier de décrire exhaustivement les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles issus de la théorie classique de l'approximation diophantienne comme l'ensemble des points bien approchables par des rationnels ou l'ensemble des nombres de Liouville. Nous fournissons aussi des résultats du même type lorsque les rationnels intervenant dans l'approximation doivent vérifier certaines conditions, comme les conditions de Besicovitch. Nos techniques d'ubiquité nous permettent en outre de décrire complètement les propriétés de taille et de grande intersection des ensembles intervenant dans l'analyse multifractale des processus de Lévy et d'un modèle de séries lacunaires d'ondelettes. Nous obtenons des résultats similaires pour un nouveau modèle de séries aléatoires d'ondelettes dont les coefficients sont corrélés via une chaîne de Markov indexée par un arbre. Nous déterminons en particulier la loi du spectre de singularités de ce modèle. Pour mener cette étude, nous nous intéressons à une large classe de fractals aléatoires généralisant les constructions récursives aléatoires précédemment introduites par de nombreux auteurs.

Mots-clés : ensembles à grande intersection et mesures de Hausdorff, ubiquité, approximation diophantienne, analyse multifractale, processus de Lévy, séries aléatoires d'ondelettes, chaînes de Markov, fractals aléatoires.

**Ubiquity properties in multifractal analysis
and random wavelet series with correlated coefficients**

Abstract : The main purpose of this thesis is the description of the size and large intersection properties of sets arising in the multifractal analysis of certain random processes. To this end, we introduce new classes of sets with large intersection which are associated with general gauge functions and we prove, using ubiquity techniques, that these classes contain certain $\limsup$ sets. In particular, this enables us to fully describe the size and large intersection properties of sets issued from the classical theory of Diophantine approximation, as the set of points that are well-approximable by rationals or the set of Liouville numbers. We also supply results of the same type when the rational approximates are required to enjoy certain conditions, as the Besicovitch conditions. In addition, our ubiquity techniques allow us to completely describe the size and large intersection properties of the sets coming into play in the multifractal analysis of Lévy processes or certain lacunary wavelet series. We obtain similar results for a new model of random wavelet series whose coefficients are correlated through a tree-indexed Markov chain. In particular, we determine the law of the spectrum of singularities of this model. To perform this study, we analyze a large class of random fractals which generalize the random recursive constructions previously introduced by many authors.

Keywords : sets with large intersection and Hausdorff measures, ubiquity, Diophantine approximation, multifractal analysis, Lévy processes, random wavelet series, Markov chain, random fractals.