



HAL
open science

Champs scalaires en cosmologie: discussions sur les principes d'équivalence et cosmologique.

Julien Larena

► **To cite this version:**

Julien Larena. Champs scalaires en cosmologie: discussions sur les principes d'équivalence et cosmologique.. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007. Français. NNT: . tel-00185582

HAL Id: tel-00185582

<https://theses.hal.science/tel-00185582>

Submitted on 6 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris VII-DENIS DIDEROT

UFR DE PHYSIQUE

**THESE pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT**

Spécialité :
Champs, Particules, Matières

Présentée par

Julien Larena

**Champs scalaires en cosmologie :
Discussions sur les principes d'équivalence et
cosmologique.**

Dirigée par Jean-Michel Alimi

Soutenue le 17 Septembre 2007 devant le jury composé de

M. Jean-Michel	ALIMI	Directeur de thèse
M. James	BARTLETT	Président
M. Philippe	BRAX	Rapporteur
M. Michel	CASSÉ	Examineur
M. Edmund J.	COPELAND	Rapporteur
M. Gilles	ESPOSITO-FARÈSE	Examineur
M. Dominik	SCHWARZ	Examineur

L'idée vraie [...] est quelque chose de distinct de ce dont elle est l'idée : autre est le cercle, autre l'idée du cercle.
B. Spinoza, *Traité de la réforme de l'entendement*, 1661.

Préambule

Remerciements

Je souhaiterais, en premier lieu, exprimer toute ma gratitude à Jean-Michel Alimi pour avoir accepté d'encadrer cette thèse et pour m'avoir formé, pas à pas, à la démarche de recherche, dans un esprit de discussion libre. Ces trois années m'ont ouvert, au-delà de la cosmologie, à de fabuleux questionnements.

Je tiens également à remercier Thomas Buchert, Jérôme Pérez et Arturo Serna, pour de fructueuses collaborations et de très agréables échanges, qui sont indissociables de ces années de formation et, je l'espère, se poursuivront dans l'avenir. Je suis aussi redevable aux membres du LUTH qui, à travers de fréquentes discussions, m'ont aidé à construire ma pensée, notamment : André Fuzfa, Pier-Stefano Corasaniti, Jérôme Courtin et tous les membres du groupe de gravitation relativiste. Je souhaite de même exprimer ma reconnaissance et mon amitié à Jean-Philippe Bruneton : ses remarques et son sens physique toujours en éveil m'ont beaucoup appris.

Je remercie Philippe Brax et Edmund Copeland d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que James Bartlett, qui a consenti à être président du jury, et enfin Michel Cassé, Gilles Esposito-Farèse et Dominik Schwarz, pour leur présence dans le jury.

Je suis reconnaissant à Virginie Hababou et Stéphane Thomas de leur dévouement permanent et de leur bonne humeur, qui sont indispensables à la bonne marche du laboratoire, ainsi qu'à Fabrice Roy, de sa disponibilité sans faille et de sa patience.

Merci à tous ceux dont l'amitié est une joie et un soutien constants : Camille, Elie, Ahmed, Elise, Fabienne, Erwann, Jean-Michel, Juliana, Katell, Romain, Vincent, les deux Thomas, et tous les autres, qui ont souvent supporté, pour certains même au quotidien, mes sautes d'humeur pendant la période de rédaction de cette thèse. Enfin, je voudrais remercier du fond du cœur mes parents qui m'ont toujours encouragé à poursuivre dans la voie que j'avais choisie. Ma reconnaissance envers eux se passe de mots, et je souhaite, modestement, leur dédier cet ouvrage.

Résumé

La cosmologie est actuellement à un tournant de l'histoire de son développement. L'abondance de données observationnelles diverses et précises a permis de développer et de confirmer un modèle standard de concordance pour décrire les grandes échelles de l'Univers. Fort de ce succès, il devient crucial d'interroger les fondements de ce modèle standard, afin, notamment, d'éclaircir l'origine d'environ 90 % du contenu énergétique de l'Univers, qualifié de matière et d'énergie sombres.

En lien avec le problème de l'énergie sombre, cette thèse se propose d'explorer, à travers les propriétés dynamiques de champs scalaires, deux principes qui se trouvent au cœur de la cosmologie : les principes d'équivalence et cosmologique.

Le principe d'équivalence est abordé à travers les théories scalaire-tenseur de la gravité, permettant d'intégrer la Relativité Générale dans un cadre large de théories respectant la version faible du principe d'équivalence tout en permettant de tester sa version forte. Dans cette perspective, les propriétés dynamiques et les conséquences cosmologiques de ces théories sont discutées.

Le principe cosmologique quant à lui est reformulé ; ses contours sont redéfinis, menant à la formulation de modèles cosmologiques différents du modèle standard, par le biais des cosmologies inhomogènes moyennées. Ces modèles permettent de prendre en compte de façon consistante la structuration à petites échelles de l'Univers et son homogénéité aux grandes échelles, ouvrant ainsi la possibilité d'expliquer l'énergie sombre par la formation des structures ; il est également possible de les mettre en correspondance avec l'apparition de champs scalaires dans le cadre du modèle standard.

Mots-clés : Cosmologie ; théorie classique du champ gravitationnel ; théorie scalaire-tenseur de la gravité ; cosmologies moyennées ; énergie sombre.

Summary

Cosmology is today at a turning point of its history. The diversity and high precision of the multiple observations available have led to the emergence of a standard concordance model that describes very well the large scale structure of the Universe. Nevertheless, the unknown nature of almost 90 % of the energy content of the Universe, the so-called dark matter and energy, may be a sign that some assumptions of the standard model are inadequate.

In this thesis, we explore, through the dynamical properties of scalar fields, two assumptions at the heart of cosmology : the equivalence and cosmological principles.

The equivalence principle is studied thanks to scalar-tensor theories, so that General Relativity is embedded in a wider class of theories that respect the weak equivalence principle and allow to test its strong version. Both the dynamical properties and cosmological consequences (Big Bang Nucleosynthesis, Cosmic Microwave Background, structure formation) of these theories are discussed.

As for the cosmological principle, it is reformulated and precisely redefined to lead to new cosmological models different from the standard one, and called averaged inhomogeneous cosmologies. These models provide a self consistent description of structures on small scales and of an effective homogeneous model for the large scales; this may be a way to explain dark energy through structure formation. These models can also be put in correspondence with the appearance of scalar fields in the standard model.

Keywords : Cosmology ; classical theory of the gravitational field ; scalar-tensor theory of gravity ; averaged cosmology ; dark energy.

Notations et conventions

Dans l'ensemble de cet ouvrage, à l'exception de la section I.1.1 consacrée aux bases de la Relativité Restreinte, on se place dans un système d'unités où la vitesse de la lumière c est posée égale à 1.

Lorsque l'on traite des coordonnées et de la métrique d'espace-temps, les indices représentés par des lettres de l'alphabet grec sont à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, l'indice 0 étant réservé à la coordonnée de genre temps ; les indices représentés par des lettres de l'alphabet latin sont à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ et sont réservés aux coordonnées spatiales. La métrique de l'espace-temps est toujours écrite avec la signature $-+++$, afin de garder une forme définie positive pour sa partie spatiale. Les dérivées covariantes seront parfois notées ∇ , le type d'indice traduisant la nature spatiale ou spatio-temporelle de cette dérivée covariante, d'après les conventions énoncées ci-dessus : ∇_μ désigne ainsi une dérivée covariante pour les connexions de l'espace-temps, alors que, dans le cadre du formalisme 3+1, ∇_i désigne une dérivée covariante par rapport à la métrique riemannienne induite sur l'espace uniquement. Les dérivées covariantes par rapport à l'espace-temps, ∇_μ , et elles seules, sont parfois abrégées par un point virgule. Par exemple, pour un vecteur U^μ :

$$U^\mu_{;\nu} \equiv \nabla_\nu U^\mu .$$

De même, les dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace-temps, sont parfois notées avec une virgule :

$$U^\mu_{,\nu} \equiv \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} .$$

Enfin, on notera l'opération de symétrisation de deux indices d'un tenseur $U_{\mu\nu}$:

$$U_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (U_{\mu\nu} + U_{\nu\mu}) ,$$

et l'antisymétrisation :

$$U_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2} (U_{\mu\nu} - U_{\nu\mu}) .$$

Table des matières

Préambule	iii
Remerciements	iii
Résumé	v
Summary	vii
Notations et conventions	ix
Table des matières	xi
I Cosmologie : une introduction	1
1 Eléments de Relativité Générale	5
1.1 Relativité du mouvement : de Newton à Einstein	6
1.2 Le principe d'équivalence	12
1.3 Loi de la gravitation	16
2 Le modèle standard de la cosmologie	21
2.1 L'Univers homogène et isotrope	22
2.1.1 La distribution de matière à grande échelle	22
2.1.2 Le principe cosmologique	23
2.1.3 Espaces de symétrie maximale	24
2.1.4 Les Univers de Friedmann	26
2.2 Histoire thermique de l'Univers	33
2.2.1 Contenu de l'Univers	33
2.2.2 Les différentes ères	35
2.2.3 L'Univers très primordial	38
2.2.4 Nucléosynthèse primordiale	38

2.2.5	Découplage et fond de rayonnement cosmologique	44
2.2.6	Structuration à grande échelle de l'Univers	47
2.2.7	Accélération tardive de l'Univers	50
2.3	Le modèle de concordance	54
3	Au-delà du modèle standard	57
3.1	Inflation	57
3.2	Quintessence	62
3.2.1	Les problèmes de la constante cosmologique	62
3.2.2	La quintessence	64
II	Le principe d'équivalence en cosmologie : une exploration à l'aide des théories scalaire-tenseur de la gravité	67
4	Théories scalaire-tenseur	69
4.1	Pourquoi des théories scalaire-tenseur?	69
4.1.1	Retour sur le principe d'équivalence	69
4.1.2	Un détour par la physique des hautes énergies	71
4.2	Formulation des théories scalaire-tenseur	73
4.2.1	Constructions de l'action et équations des champs	74
4.2.2	Transformation conforme et observables physiques	77
4.2.3	Contraintes observationnelles	79
4.3	Cosmologies scalaire-tenseur	81
5	Dynamiques cosmologiques	83
5.1	Les champs scalaires sans auto-interaction	84
5.2	Les champs scalaires avec auto-interaction	86
5.2.1	Méthode de Maupertuis-Jacobi	86
5.2.2	Cosmologie avec un champ scalaire	88
6	Effets cosmologiques	93
6.1	Nucléosynthèse primordiale	93
6.1.1	Modifier la nucléosynthèse	94
6.1.2	Une solution au problème du ${}^7\text{Li}$	96
6.2	CMB et structures	107
6.2.1	Evolution des perturbations	107
6.2.2	Solution au problème du ${}^7\text{Li}$ et conséquences durant l'ère de matière	109

III	Le principe cosmologique revisité	113
7	Construction d'un modèle cosmologique	117
7.1	Retour sur le modèle standard	117
7.2	Cosmologie Observationnelle	118
7.3	Cosmologie lissée	119
8	Renormalisation	123
8.1	Lissage	123
8.2	Flot de Ricci-Hamilton	125
9	Une approche par le champ moyen	131
9.1	Cosmologies inhomogènes moyennées	131
9.1.1	Equations locales	131
9.1.2	Modèle moyenné	133
9.1.3	Fluide de poussière	136
9.2	Etudes de quelques solutions	140
9.2.1	Lois de puissance	140
9.2.2	Backreaction à partir des perturbations	143
9.2.3	Calcul au premier ordre	145
9.2.4	Calcul au deuxième ordre	146
9.3	Energie sombre et backreaction	149
9.3.1	Principe d'une solution	152
9.3.2	Le morphon	157
9.3.3	Observables : quelques considérations	162
IV	Conclusion et perspectives	167
10	Conclusion	169
11	Perspectives	173
V	Annexes	175
A	Thermodynamique	177
B	Formalisme 3+1 de la Relativité Générale	181

C Articles	185
C.1 Article 2 : Intégrabilité des modèles de Bianchi	208
C.3 Article 3 : Le morphon	227
Bibliographie	269

Première partie
Cosmologie : une introduction

La cosmologie est l'étude, encadrée par les principes et le formalisme de la physique, des lois régissant les très grandes échelles de la nature, c'est-à-dire ce que l'on appelle l'Univers. Le concept d'Univers est vaste et désigne au moins deux objets différents. Dans une première acception, il signifie l'ensemble du réel, la totalité de ce qui existe. C'est un terme englobant, plutôt vague, dont la signification physique demande à être précisée, en général par l'adjonction aux lois physiques d'un ou plusieurs principes d'origine philosophique. La deuxième signification du mot, plus restreinte, concerne uniquement l'ensemble de tous les phénomènes physiques accessibles à un observateur¹ donné dans un temps donné. Cette notion de temps est encore mystérieuse à ce stade et devra être précisée par la suite, mais l'on voit que dans cette définition de l'Univers, la notion d'âge est déjà présente : l'Univers apparaît comme un objet dynamique, puisqu'il est susceptible, a priori, d'évoluer, c'est-à-dire de ne pas apparaître toujours identique à lui-même à un observateur donné. On appelle généralement l'Univers de la seconde définition l'Univers observable, afin de le distinguer de celui de la première définition, sensée être plus générale et englober la seconde. Il est bien entendu possible que les deux notions coïncident, et que l'ensemble des phénomènes de la nature se confonde avec l'ensemble de ce qu'un observateur quelconque est capable d'observer. Cela serait le cas, par exemple, dans un Univers dans lequel la lumière se propagerait instantanément dans l'espace. Cependant, les lois de la physique contemporaine, et notamment la Relativité, ne favorisent pas ce scénario, et nous verrons que la notion d'Univers observable est capitale dans un modèle relativiste de la nature. Dans la suite de cette thèse nous réserverons, pour préserver la simplicité du propos, le mot Univers à l'Univers observable, sauf s'il est fait mention explicite du contraire. La cosmologie moderne est fondée d'une part sur la Relativité Générale en tant que théorie classique du champ gravitationnel et d'autre part sur un ensemble varié d'observations astrophysiques. Ces observations couvrent maintenant tous les domaines du spectre électromagnétique, des rayons γ au domaine infrarouge, et ont permis d'établir une vision cohérente de notre Univers dans le cadre d'un modèle standard. Ce modèle est dit de concordance en ce qu'il permet de rendre compte de la quasi totalité des observations astrophysiques actuelles à l'aide d'un nombre restreint de paramètres. Cependant, ce nombre n'est restreint que dans la mesure où les lois de la physique sont supposées valables aux échelles considérées, ce qui permet de fixer tous les paramètres de ces lois à partir des expériences réalisées sur Terre, indépendamment du contexte cosmologique. Il faut souligner et garder à l'esprit l'audace intellectuelle consistant à extrapoler des lois vérifiées aux échelles du système solaire jusqu'aux échelles de l'Univers dans son

¹L'observateur, ici, n'est absolument pas limité à un être conscient. Il doit être compris comme un point de l'espace auquel est attaché un ensemble d'appareils de mesure, au sens donné à ce terme en physique quantique, permettant a priori de réaliser une expérience portant sur des phénomènes physiques.

entier.

Cette thèse commence par un exposé du modèle standard de la cosmologie, qui, à défaut d'être exhaustif, se propose d'introduire les notions fondamentales qui seront nécessaires à la compréhension des parties suivantes. C'est pourquoi il m'a semblé nécessaire d'insister sur les deux principes autour desquels c'est articulé mon travail ; le principe d'équivalence m'amenera à présenter succinctement les idées physiques à l'origine de la formulation de la Relativité Générale, et la présentation des modèles de Friedmann me permettra de formuler clairement le principe cosmologique dans sa version forte, ainsi que de présenter un bref rappel de l'histoire thermique de l'Univers et des principaux phénomènes physiques qui seront discutés par la suite. Enfin, cette première partie s'achèvera sur l'introduction des champs scalaires en cosmologie. Nous verrons comment ceux-ci sont apparus dans le modèle standard dès qu'un problème y est apparu. Cela est sans doute lié au double fait qu'ils sont simples à manipuler, tout en possédant une phénoménologie très riche.

Signalons dès à présent que les deux principes dont traitera cette thèse sont de natures assez différentes et participent chacun séparément d'un des deux fondements à la cosmologie précités.

Le principe d'équivalence est une composante essentielle de la structure de l'interaction gravitationnelle ; il est un cadre de formulation de sa propriété centrale, et, dès les débuts de la Relativité Générale, il a été un guide important pour sa formulation. C'est pourquoi nous dirons que c'est un principe premier : c'est un principe de la gravitation, agissant au cœur de toutes ses manifestations.

Le principe cosmologique quant à lui, traite de la façon dont les observations d'intérêt cosmologique s'organisent en un ensemble cohérent et compréhensible par le cosmologiste. C'est un principe d'organisation des données empiriques dans un champ donné de la physique, la cosmologie, et non de fondement premier ou ontologique pour l'ensemble de la physique².

²Signalons tout de même ici la tentative originale de Milne [1] de considérer le principe cosmologique comme un principe à adjoindre à la physique comme condition nécessaire à la définition du concept d'Univers.

Chapitre 1

Eléments de Relativité Générale

Le fleuve du temps est un fleuve qui emporte avec soi ses rives. Celui qui voyage se meut entre des parois fixes, sur un sol fixe ; mais parois et sol, de manière imperceptible, sont très étroitement associés aux mouvements des voyageurs.

R. Musil, *L'homme sans qualités*, 1930.

Le premier élément fondamental de la cosmologie est l'interaction gravitationnelle. Si faible aux échelles microscopiques, elle jouit, à la différence des autres interactions, d'une particularité qui la rend déterminante aux grandes échelles, notamment cosmologiques : c'est une interaction universelle, à portée infinie non écrantée. Universelle d'abord, car tout les types d'énergie y sont soumis ; et bien plus, comme nous le verrons par la suite, en Relativité Générale, ils y sont tous soumis de la même façon (c'est le principe d'équivalence).

De plus, parmi les quatre interactions fondamentales : forte, faible, électromagnétique et gravitationnelle, la première est à faible portée (elle agit aux échelles nucléaires) à cause du confinement des quarks et les effets de la deuxième sont limités aux échelles atomiques par la masse importante de ses bosons-vecteurs. Par conséquent, les seules interactions à portée infinie sont la gravitation et l'électromagnétisme. Cependant, l'électromagnétisme est une interaction écrantée : elle admet, pour les corps électriquement chargés, des charges positives et négatives, si bien que, pour une particule-test située loin d'un objet constitué d'un grand nombre de corps chargés, cet objet apparaît électriquement neutres. C'est ce phénomène qui explique que les corps macroscopiques apparaissent électriquement neutre. On comprend donc qu'aux échelles cosmologiques, l'électromagnétisme ne joue pas un grand rôle (ce n'est cependant pas tout à fait vrai, et nous verrons que lors des phases où l'Univers est petit et à haute température, ce jugement doit être révisé).

Pour commencer, il nous faut présenter rapidement les principales caractéristiques de la Relativité Générale, qui seront utiles par la suite. La formulation de la

théorie généralisée de la Relativité a reçu, depuis 1916, bien des aménagements qui ont permis de rendre cette théorie compréhensible dans des termes mathématiques plus adaptés à son inclusion dans le reste de la physique moderne ou aux divers cas d'applications. On pourra trouver de très bons développements sur ces différentes formulations dans [2, 3, 4, 5]. Dans le présent ouvrage, on se bornera à présenter les idées physiques qui ont amené à la formulation de la Relativité Générale.

1.1 Relativité du mouvement : de Newton à Einstein

Dès le début des *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Newton, dans les définitions préliminaires explique les différences indispensables qu'il introduit entre temps et espaces absolus et relatifs. Du fait de son importance et de sa clarté, nous nous permettons de citer ce texte in extenso¹ :

"I. Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, et s'appelle *durée*. Le temps relatif, apparent et vulgaire, est cette mesure sensible et externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise du mouvement : telles sont les mesures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, et c'est ce dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai.

II. L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile.

L'espace relatif est cette mesure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par sa relation aux corps, et que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par exemple, qu'un espace, pris au dedans de la Terre ou dans le ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la Terre."

Ainsi, il existe un cadre fixe, dans lequel se meuvent les corps -c'est l'espace absolu-, et un cadre fixe par rapport auquel on mesure l'impermanence des phénomènes -c'est le temps absolu-. De façon moderne, nous dirions que l'espace-temps absolu est la réunion de la droite réelle \mathbb{R} pour le temps avec l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 pour l'espace². Au sein de ce cadre fixe, se déroulent les faits physiques, qui ont une extension et une durée. L'extension est la portion d'espace absolu qu'ils occupent à un instant donné du temps, et la durée la portion de temps absolu qu'ils couvrent

¹La traduction est celle de Mme du Châtelet telle que publiée par Dunod. Les mots en italique le sont dans cette traduction.

²Et non l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 en ceci que dans cette vision, temps et espace ne sont pas unifiés. Nous verrons plus précisément l'importance de cette distinction dans la suite lorsque nous aborderons les symétries de la théorie.

entre leur émergence et leur fin. Dans la suite de sa construction mécanique, Newton inclut ensuite le principe de relativité de Galilée. Si l'on considère deux corps notés 1 et 2 en mouvements rectilignes et uniformes par rapport à l'espace absolu, avec des vitesses respectives \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , la vitesse du corps 2 relativement au corps 1 est donnée par $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Cela ce comprend aisément si l'on munit l'espace absolu d'un repère cartésien d'origine O et que l'on nomme les corps 1 et 2, supposés ponctuels C_1 et C_2 respectivement. Alors, la vitesse de 2 relativement à 1 s'écrit naturellement :

$$\vec{v}_{2|1} = \frac{d\overrightarrow{C_1C_2}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OC_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OC_1}}{dt}. \quad (1.1.1)$$

Cela permet de définir un ensemble de référentiels privilégiés, que nous appellerons référentiels inertiels galiléens. C'est l'ensemble de tous les référentiels qui sont au repos ou en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu. Si l'on considère deux de ces référentiels R et R' munis de repères cartésiens, (O, x, y, z) et (O', x', y', z') , les transformations qui permettent d'exprimer les résultats de mesures réalisées dans R' en fonction des résultats de mesures réalisées dans R sont appelées transformations galiléennes et sont données par :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \tau \\ \mathcal{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} + t\vec{v}_{R|R'} + \vec{a}, \quad (1.1.2)$$

où τ est un réel, $\vec{v}_{R|R'}$ est la vitesse de R relativement à R' , \mathcal{R} une rotation indépendante du temps, et \vec{a} le déplacement de O par rapport à O' à $t = 0$. On notera qu'un corps animé d'une vitesse \vec{V} dans le référentiel R possède une vitesse $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{v}_{R|R'}$: c'est la loi galiléenne de composition des vitesses. Les transformations (1.1.2) forment un groupe à 10 paramètres, et sous-tendent le :

Principe de Relativité de Galilée :

Toutes les lois de la physique s'écrivent de la même façon dans tous les référentiels inertiels galiléens.

Autrement dit, il est impossible, par une expérience quelconque de distinguer le repos du mouvement rectiligne et uniforme (par rapport à l'espace absolu). La loi de la mécanique de Newton :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (1.1.3)$$

où m est la masse d'un corps et \vec{F} la résultante des forces mécaniques agissant sur ce corps, satisfait manifestement ce principe, et l'on dit que la physique new-

tonienne est invariante par tous les changements de coordonnées galiléens. En revanche, on peut aisément constater que les lois de l'électromagnétisme, formulées par Maxwell ne sont pas invariantes par changements de coordonnées galiléens. La physique, jusqu'au début du vingtième siècle, semble donc soumise à une tension formelle : bien que des référentiels soit privilégiés par les lois de la mécanique, ces mêmes référentiels ne semblent jouer aucun rôle particulier quant à la formulation des lois gouvernant le comportement du champ électromagnétique. Considérant ce dernier du point de vue cinématique, on ne voit apparaître qu'une seule vitesse caractéristique : la vitesse de propagation, ou célérité, des ondes libres associées au champ, notée c . Si l'électromagnétisme obéissait à l'invariance galiléenne, on s'attendrait donc à pouvoir appliquer la loi de composition des vitesses à un rayon lumineux : la vitesse d'un rayon lumineux devrait donc varier suivant le référentiel à partir duquel on observe ce rayon. Michelson en 1881, puis Michelson et Morley en 1887, ont réalisé des expériences afin de mettre en évidence une telle variation de la vitesse de la lumière. Grâce à un interféromètre de Michelson, ils ont tenté de mettre en évidence une différence de chemin optique entre la lumière se propageant dans la direction du mouvement de la Terre autour du Soleil, et celle se propageant dans une direction orthogonale. Sans aucun résultat. Il semblait donc que la lumière n'obéissait pas à la loi galiléenne de composition des vitesses. Cela fut interprété par Einstein comme une défaillance, non du principe de Relativité, mais de la définition des référentiels inertiels. Autrement dit, il posa que les référentiels à privilégier n'était pas les référentiels en repos ou en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu. Il lui fallait donc définir de nouveaux référentiels inertiels. Pour cela, l'invariance de la vitesse de la lumière est un guide efficace. Considérons en effet que deux observateurs sont en déplacement relatif rectiligne et uniforme. Soient R et R' les référentiels attachés à chaque observateur, et \vec{v} la vitesse de R' par rapport à R . Nous supposons, et nous verrons par la suite pourquoi cela est important, que les référentiels sont spatio-temporels, c'est-à-dire définis par (O, t, x, y, z) et (O', t', x', y', z') . Considérons que les origines des deux systèmes de référence, O et O' coïncident à l'instant $t = t' = 0$. Soit alors un signal lumineux émis en $O = O'$ à l'instant initial $t = t' = 0$, et reçu en $P = (x, y, z) = (x', y', z')$ aux instants t et t' respectivement dans les deux référentiels. L'invariance de la vitesse de la lumière impose :

$$\|\vec{r}\|^2 = c^2 t^2 \quad (1.1.4)$$

$$\|\vec{r}'\|^2 = c^2 t'^2, \quad (1.1.5)$$

où $\vec{r} = (x, y, z)^T$ et $\vec{r}' = (x', y', z')^T$. Donc, on a la relation :

$$\|\vec{r}\|^2 - c^2 t^2 = \|\vec{r}'\|^2 - c^2 t'^2. \quad (1.1.6)$$

L'invariance de c modifie donc les symétries fondamentales : dans le cas galiléen, les transformations laissant les lois invariantes laissaient la norme des vecteurs spatiaux invariante ; désormais, l'invariance fait intervenir un mélange des coordonnées spatiales et de la coordonnée temporelle. C'est pourquoi nous avons autorisé le temps de parcours à ne pas être le même dans les deux référentiels. Afin de satisfaire à la constance de la vitesse de la lumière, nous sommes donc obligés d'abandonner l'idée d'un temps absolu, et de définir les référentiels dans un espace-temps étendu, d'où la notation (O, t, x, y, z) pour un référentiel donné. Le quadruplet (t, x, y, z) est appelé un événement³. Il nous faut alors un moyen de mesurer la "distance" entre deux événements. Dans le cas galiléen, la distance euclidienne classique, fondée sur le produit scalaire standard de \mathbb{R}^3 , est invariante sous les transformations (1.1.2). Désormais, l'invariance de la vitesse de la lumière implique l'existence de l'invariant (1.1.6), donc, par analogie, on définira la "distance" entre deux événements grâce à la forme d définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \vec{x}) &\mapsto d(t, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 . \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

\mathbb{R}^4 muni de la forme d est appelé espace de Minkowski. Sur cet espace, on a l'habitude d'introduire l'élément de distance différentiel entre deux événements infiniment proches (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (1.1.8)$$

ainsi qu'une notation covariante pour les coordonnées. Un vecteur de l'espace de Minkowski (t, \vec{x}) , appelé 4-vecteur (ou quadrivecteur), sera noté x^μ pour $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $x^0 \equiv t$, $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$. En introduisant le tenseur symétrique $\eta_{\mu\nu}$ tel que $\eta_{00} = -1$, $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, et $\eta_{0i} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, on a $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski. Les transformations laissant cet élément de distance invariant nous donneront l'équivalent des transformations galiléennes pour le nouveau principe de Relativité. Ces transformations, appelées transformations de Lorentz inhomogènes sont données par :

$$x'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha , \quad (1.1.9)$$

où a^α est un quadrivecteur constant et Λ_β^α un tenseur $(1, 1)$ constant vérifiant :

$$\Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} . \quad (1.1.10)$$

³Dans cette section, nous considérons des coordonnées cartésiennes pour l'aisance des notations, bien que tout puisse être défini dans des coordonnées arbitraires.

Le groupe formé par ces transformations est dit groupe de Poincaré⁴, et le sous-groupe avec $a^\mu = 0$ s'appelle le groupe de Lorentz homogène. Les sous-groupes de ces groupes dont les éléments vérifient $\Lambda_0^0 \geq 1$ et $\det \Lambda = 1$ sont dits propres ; ce sont les sous-groupes connexes à l'identité. Le sous-groupe des transformations de Lorentz homogène propre contient deux sous-groupes remarquables : celui des rotations, et celui des "boosts". Les rotations sont obtenues par :

$$\Lambda_0^0 = 1, \Lambda_i^0 = \Lambda_0^i = 0, \Lambda_j^i = R_j^i, \quad (1.1.11)$$

où R_j^i représentent les éléments d'une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi, le groupe de Lorentz homogène propre comprend les transformations galiléennes (rotations et translations). Les "boosts" quant à eux sont une nouvelle classe de transformations prenant en compte la vitesse relative de deux référentiels. Soient deux observateurs (O, x^μ) et (O', x'^μ) , O ayant une vitesse \vec{v} relativement à O' . D'après (1.1.9) appliquée aux éléments infinitésimaux de coordonnées, le déplacement spatio-temporel de 0 s'écrit $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$, avec $d\vec{x} = 0$, donc :

$$dt' = \Lambda_0^0 dt, \quad dx'^i = \Lambda_0^i dt; \quad (1.1.12)$$

or $\frac{dx'^i}{dt'} = \vec{v}$, ce qui permet d'écrire : $\Lambda_0^i = v^i \Lambda_0^0$. De plus, la relation (1.1.10) permet d'écrire :

$$c^2(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 = c^2. \quad (1.1.13)$$

En définissant le facteur de Lorentz $\gamma \equiv 1/\sqrt{(1 - \|\vec{v}\|^2/c^2)}$, la solution du système (1.1.12)-(1.1.13) est donnée par :

$$\Lambda_0^0 = \gamma, \quad \Lambda_0^i = \gamma v^i. \quad (1.1.14)$$

Restent à déterminer les autres composantes ; celles-ci ne sont pas définies de façon unique étant donné que toute rotation d'un des systèmes de référence laisse la situation invariante en ce qui concerne la vitesse. Le choix habituel que l'on fait afin de satisfaire (1.1.10) consiste à poser :

$$\Lambda_i^0 = \Lambda_0^i \text{ et } \Lambda_j^i = \delta_j^i + \frac{\gamma - 1}{\|\vec{v}\|^2} v^i v_j. \quad (1.1.15)$$

On remarque que ces transformations se réduisent aux transformations galiléennes pour des vitesses $\|\vec{v}\|$ faibles devant la vitesse de la lumière c . Cela clôt notre

⁴On peut montrer [6] que les représentations irréductibles du groupe de Poincaré sont caractérisées par deux nombres (m, s) , m étant réel et s entier ou demi-entier. Cela fournit une interprétation du concept de particule relativiste comme représentation irréductible du groupe de Poincaré, si l'on identifie m à la masse et s au spin.

discussion des bases de la cinématique relativiste. A l'aide de ces transformations, nous pourrons alors décrire tous les phénomènes physiques par les mêmes lois dans l'ensemble des référentiels inertiels se déduisant les uns des autres grâce à des transformations de Lorentz. Ainsi, la définition de la force relativiste exercée sur une particule de masse inertielle m repérée par les coordonnées x^μ , obtenue par la loi de la dynamique de Newton, s'écrira, dans ces référentiels :

$$F^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} , \quad (1.1.16)$$

où τ est le temps propre de la particule est invariant sous les transformations de Lorentz, et est donné par $c^2 d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Il nous faut maintenant introduire les notions d'énergie et d'impulsion d'une particule relativiste. La relation (1.1.16) suggère une définition pour la quadri-impulsion d'une particule de masse m :

$$p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (1.1.17)$$

Alors, on a :

$$p^0 = m\gamma \equiv \frac{E}{c^2} \text{ et } p^i = m\gamma v^i . \quad (1.1.18)$$

E est alors l'énergie de la particule et p^i son impulsion⁵. De plus, on voit à partir de la définition que l'on a la relation :

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2 \text{ soit } E^2 = \|\vec{p}\|^2 c^2 + m^2 c^2 . \quad (1.1.19)$$

Pour finir, on introduit également le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, qui donne la densité $T^{0\mu}$ et le courant $T^{\mu i}$ associés à la quadri-impulsion d'un ensemble de particule ou d'un champ. Si l'on prend en compte l'ensemble des corps matériels et leurs interactions, ce tenseur est conservé, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{dx^\mu} = 0 . \quad (1.1.20)$$

Pour un système de n particules libres, on a par exemple :

$$T^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^n \int d\tau p_k^\mu \frac{dx_k^\nu}{d\tau} \delta^4(x^\rho - x_i^\rho) . \quad (1.1.21)$$

⁵Cela peut se voir en développant ces expressions au voisinage de $v/c \sim 0$: $E = mc^2 + m\|\vec{v}\|^2/2$ et $p^i = mv^i$ au second ordre

1.2 Le principe d'équivalence

Dans la section précédente, nous avons succinctement présenté les principes de la relativité du mouvement pour des corps en mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme. Nous avons vu que la physique devait être formulée dans le cadre d'un espace-temps unifié, l'espace quadridimensionnel de Minkowski dans lequel l'invariant de "longueur" est donné par la forme (1.1.7). Les lois de la physique sont alors formulées de façon covariante dans cet espace-temps ; c'est-à-dire qu'elles s'écrivent de la même manière dans tous les référentiels se déduisant les uns des autres par les transformations d'inertie, dites transformations de Lorentz. C'est en particulier le cas de l'électrodynamique, c'est-à-dire la dynamique des corps électriquement chargés⁶. Cependant, il manque à notre description un dernier pas : dans des référentiels dont le mouvement relatif n'est pas rectiligne et uniforme, les lois de la physique ne se formulent pas de façon équivalente. Parvenir à une description unifiée quelque soit le mouvement relatif des observateurs est le but de la Relativité Générale ; mais afin de formuler cette dernière, il faut avant tout éclaircir une propriété fondamentale des corps, qui fait le lien entre ce problème de référentiels accélérés et la gravitation : l'équivalence des masses inertielle et pesante. Galilée, à l'aide d'un plan incliné puis de pendules, en utilisant une clepsidre pour mesurer le temps, avait mis en évidence une propriété troublante : les corps lâchés d'une hauteur donnée, tombent de la même manière (c'est-à-dire qu'ils arrivent au sol en même temps), indépendamment de leur composition et de leur masse⁷. Newton, en formulant sa deuxième loi, se laissa la liberté de distinguer deux concepts de masse :

- La masse inertielle m_i qui est la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on lui imprime par une force extérieure. C'est celle qui intervient dans la deuxième loi : $\vec{F} = m_i \vec{a}$, et qui traduit la conversion entre force extérieure et accélération du corps ; plus elle est grande plus il faut une force importante pour modifier le mouvement d'un corps.
- La masse gravitationnelle m_g , qui est la "charge" gravitationnelle, c'est-à-

⁶Comme nous l'avons vu, c'est le problème de la vitesse de la lumière qui a motivé l'introduction de cette nouvelle relativité. Il est donc normal que les lois de l'électrodynamique, qui traitent de l'interaction du champ électromagnétique avec les particules soient covariantes dans ce formalisme.

⁷Cela n'est évidemment pas vrai sur Terre, où l'atmosphère a tendance à freiner les corps différemment suivant leur masse ; cependant, l'utilisation d'un plan incliné, en ralentissant la chute, permet de s'abstraire suffisamment de la friction de l'air pour mettre en évidence le résultat. L'utilisation de pendule est encore plus efficace car elle permet également de s'abstraire de la friction du plan incliné, et pendant les premières oscillations, la friction de l'air peut être négligée, le pendule étant alors quasiment harmonique. Le fait que la fréquence d'oscillation du pendule ne dépende pas du type de corps accroché au bout est alors une autre formulation de l'universalité de la chute des corps.

dire la composante d'un corps qui réagit au champ gravitationnel (masse gravitationnelle passive) ou qui le produit (masse gravitationnelle active). En toute généralité, les masses gravitationnelles active et passive peuvent aussi être distinguées, mais nous ne rentrerons pas dans cette subtilité par la suite⁸.

En posant dans les Principia que la force gravitationnelle ressentie par un corps soumis au champ \vec{g} d'un autre corps était proportionnelle à sa masse gravitationnelle, et en utilisant sa deuxième loi, Newton put alors écrire que l'accélération d'un corps dans un champ de pesanteur était :

$$\vec{a} = \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \vec{g} . \quad (1.2.1)$$

Il reprit alors les expériences de Galilée avec des pendules de même longueur mais de compositions différentes, et ne parvint pas à mettre en évidence une quelconque différence entre leurs périodes. Il en conclut donc que m_i et m_g était égales à un facteur multiplicatif près indépendant du corps considéré. Poser ce facteur égal à 1 est alors le plus simple (la valeur de ce coefficient n'étant pas mesurable d'après ce que l'on vient de dire, et correspondant simplement à une redéfinition des unités de champ et d'accélération). Eötvös tenta plus tard de tester ce résultat à l'aide d'un autre dispositif constitué d'un pendule de torsion auquel il avait suspendu deux corps de compositions différentes. Il parvint à montrer que le rapport m_i/m_g ne varie pas de plus de 10^{-9} d'un corps à l'autre. L'équivalence des masses inertielle et gravitationnelle se trouvait alors superbement vérifiée, et la loi de Newton rendait compte des observations de Galilée. Cependant, cette équivalence restait un mystère. Suivant Einstein dans ses réflexions, considérons un observateur situé dans un ascenseur au sommet d'un immeuble. A un instant donné, une personne extérieure coupe le câble qui retient l'ascenseur et celui-ci se retrouve en chute libre (on néglige les frottements de l'air), avec notre observateur à l'intérieur. Supposons que le champ de gravité de la Terre \vec{g} est statique et homogène dans l'ensemble de l'espace occupé par l'ascenseur et son intérieur au cours du mouvement. Alors, écrivant la deuxième loi de Newton respectivement pour l'ascenseur de masse m_A et l'observateur de masse m_{Obs} , on trouvera que leurs accélérations sont identiques, en accord avec le principe d'équivalence. Ainsi, l'observateur, parti avec la même vitesse initiale que l'ascenseur, sera en repos par rapport à lui durant toute la durée du mouvement et sera incapable de percevoir le champ de gravitation extérieur. En allant un peu plus loin, imaginons que l'observateur réalise une expérience au cours de la chute libre, par exemple une expérience d'électrostatique, à l'aide de n particules chargées de masse m_i . Du point de vue d'un observateur situé au sol, dans un référentiel (O, \vec{x}) attaché à ce dernier, la loi de la dynamique s'écrit :

⁸L'égalité de ces deux masses, active et passive, est un corollaire simple de la troisième loi de Newton, posant égalité en norme de l'action et de la réaction.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \vec{F}_i, \quad (1.2.2)$$

où \vec{F}_i est la résultante des forces agissant sur la particule i . Le changement de coordonnées qui permet de se ramener au référentiel (O', \vec{x}') dans lequel l'observateur qui est dans l'ascenseur est au repos est obtenu grâce à l'équation du mouvement de cet observateur par rapport au référentiel (O, \vec{x}) , et est donné par :

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} t^2 \vec{g}. \quad (1.2.3)$$

C'est un changement de coordonnées non galiléen. Dans ces nouvelles coordonnées, la loi de la dynamique pour les particules de l'expérience s'écrit alors :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt^2} = \vec{F}_i(x'_k). \quad (1.2.4)$$

Autrement dit, l'observateur en chute libre est incapable, par une expérience de physique quelconque, de mettre en évidence la présence du champ gravitationnel extérieur. Le principe d'équivalence d'Einstein consiste à généraliser le résultat précédent en se restreignant à une portion de l'espace suffisamment faible, et à un temps suffisamment court pour que, sur ces échelles, n'importe quel champ de gravitation puisse être vu comme homogène et statique. Cela permet alors d'énoncer le principe local suivant :

Principe d'équivalence d'Einstein :

*En chaque point de l'espace-temps, en présence d'un champ de gravitation arbitraire, il est possible de choisir un système de coordonnées **localement** inertiel, de sorte qu'au voisinage de ce point, les lois de la physique puissent être formulées comme en l'absence de champ de gravitation.*

Bien sûr, fort des résultats de la Relativité Restreinte, nous savons qu'il nous faut définir les référentiels inertiels non par rapport aux transformations de Galilée, mais par rapport aux transformations de Lorentz. Le principe d'équivalence dans cette forme "ultime" affirme donc qu'en présence d'un champ gravitationnel quelconque, on peut toujours trouver une portion d'espace-temps suffisamment "petite" pour pouvoir formuler, au sein de cette portion les lois de la physique dans un référentiel dans lesquelles elles prennent la forme qu'elles ont en Relativité Restreinte. Pour aller encore plus loin, notons que pour annuler le champ de gravitation de l'expérience précédente, nous avons utilisé un changement de coordonnées non galiléen (1.2.3). Considérons alors une particule en chute libre dans un champ de gravitation arbitraire. D'après le principe d'équivalence, il existe donc

un repère inertiel e^μ dans lequel la particule est libre. Dans ce repère, son équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 e^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.2.5)$$

où l'on a introduit le temps propre de la particule $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} de^\mu de^\nu$. Par extension de l'exemple précédent, plaçons-nous dans un système de coordonnées quelconque x^μ , obtenu à partir de e^μ par une transformation arbitraire $x^\mu(e^\nu)$. L'équation (1.2.5) s'écrit alors, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\ \text{avec } \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial e^\alpha} \frac{\partial^2 e^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

et le temps propre :

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= -g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu \\ \text{avec } g_{\mu\nu}(x^\rho) &= \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial e^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Une personne familiarisée avec les mathématiques de la fin du XIX^{ème} siècle (telles que nous les formulons aujourd'hui), et en particulier avec la géométrie différentielle remarque immédiatement la structure à laquelle nous arrivons : $g_{\mu\nu}$ est exactement la métrique d'une variété différentiable de dimension 4 localement difféomorphe à un espace-temps de Minkowski, et $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ est la connection affine associée. La connaissance de la métrique en un point particulier X de la variété et dans un système de coordonnées quelconque permet alors de déterminer les coordonnées e^μ au voisinage de X : ce sont les coordonnées associées à la base de l'espace tangent à la variété en X . En faisant encore une fois une analogie avec (1.2.3), rappelons que dans ce cas, le changement de coordonnées était entièrement déterminé par le champ gravitationnel \vec{g} ; on peut donc supposer que tous les effets de la gravitation sont traduits par la métrique $g_{\mu\nu}$ ⁹. Cela mène alors à la vision moderne de la gravitation classique : notre espace-temps peut être décrit par une variété différentiable à quatre dimensions localement difféomorphe à l'espace de Minkowski, les effets de la gravitation étant le reflet des propriétés géométriques de cette variété. Dans la suite, on supposera connues les notions de bases de géométrie différentielle, en particulier les notions de variété, espaces tangent et cotangent, dérivée covariante (ou transport parallèle). Pour une introduction à ce sujet, on pourra se reporter aux ouvrages classiques comme par exemple [7].

⁹La connection affine peut être déduite de la métrique après quelques manipulations algébriques : $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$.

1.3 Loi de la gravitation

La vision géométrique introduite ci-dessus permet de généraliser le principe de Relativité. En effet, une variété différentielle peut être décrite de façon indépendante des coordonnées que l'on introduit en construisant un atlas sur cette variété. Nous avons vu qu'en Relativité Restreinte existait une notion de covariance, les lois de physique prenant la même forme dans tout système de coordonnées inertiel. Notre espace-temps étant maintenant vu comme une variété nous pouvons généraliser cette invariance en introduisant le :

Principe de covariance généralisée :

Les lois de la physique prennent la même forme dans tout système de coordonnées, qu'il soit inertiel ou non.

Ce principe est l'achèvement du relativisme de la formulation de la physique en ceci qu'il fait disparaître la notion d'observateur privilégié : les observateurs mesurent des choses différentes, mais les lois qu'ils doivent appliquer pour comprendre leur mesure ont une formulation universelle, qu'ils n'ont plus qu'à particulariser en précisant leur référentiel, c'est-à-dire leur état de mouvement relatif les uns par rapport aux autres. Dans ce cadre, les observateurs inertiels ne sont plus que les observateurs particuliers dont l'état de mouvement correspond à la chute libre dans le champ de gravitation, c'est-à-dire que ce sont ceux dont l'équation du mouvement est l'équation des géodésiques de l'espace-temps (1.2.6). Pour formuler les lois de la physique de façon covariante, il suffit alors (avec quelques précautions de symétrisation des lois) de remplacer dans les lois formulées dans un référentiel inertiel la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ par la métrique de la variété d'espace-temps $g_{\mu\nu}$, et les dérivées partielles par des dérivées covariantes ∇_{μ} ¹⁰.

Pour clore ce chapitre il ne reste plus qu'à établir les lois de la gravitation, c'est-à-dire les équations permettant de calculer la métrique de l'espace-temps. Dans la suite, nous poserons partout $c = 1$. Commençons par considérer la limite newtonienne de la théorie en examinant la chute libre d'une particule newtonienne dans un champ de gravitation statique. Dans ce cadre, la particule est supposée avoir une vitesse faible devant la vitesse de la lumière, c'est-à-dire $\|d\vec{x}/d\tau\| \ll 1$. alors, l'équation (1.2.6) devient :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.3.1)$$

Le champ gravitationnel étant statique, si l'on retient l'équivalence entre champ de gravitation et métrique de l'espace-temps, la dérivée temporelle de la métrique

¹⁰Afin d'éviter des erreurs il est toutefois préférable de procéder à cette substitution dans l'action dont dérivent les lois physiques.

s'annule et :

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} . \quad (1.3.2)$$

De plus, l'approximation newtonienne revient également à supposer que le champ gravitationnel est faible. on peut alors décomposer la métrique en une partie min-kowskienne perturbée : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $h_{\mu\nu}$ un tenseur (0, 2) dont toutes les composantes sont petites devant 1 (en valeur absolue). Alors, au premier ordre en $h_{\mu\nu}$, les équations (1.3.1) deviennent :

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} \quad (1.3.3)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 . \quad (1.3.4)$$

La deuxième équation permet d'écrire $(dt/d\tau)$ comme une constante, et on trouve donc pour la première équation, en posant cette constante non nulle :

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \quad (1.3.5)$$

En comparant au résultat newtonien, on trouve que $h_{00} = -2\phi$, où ϕ est le potentiel gravitationnel newtonien habituel. La métrique totale est donc donnée par $g_{00} = -(1 + 2\phi)$, les autres composantes étant identiquement nulles. Or, le potentiel ϕ obéit à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho , \quad (1.3.6)$$

où ρ est la densité de masse de la source non-relativiste du champ. Dans l'approximation newtonienne, la métrique obéit donc à :

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G\rho . \quad (1.3.7)$$

Cette forme est une indication nous permettant de trouver "intuitivement" la forme générale des équations du champ. Dans le cas relativiste, la densité de masse est en effet remplacée par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ de la matière qui contient toute l'information sur l'énergie et l'impulsion de la distribution de matière (dans le cas newtonien, les impulsions sont faibles par rapport à la masse ; c'est pourquoi seul ρ intervient). On peut donc chercher des équations de la forme :

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1.3.8)$$

où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur (0, 2) dépendant seulement des dérivées secondes de la métrique ou de carrés de ses dérivées premières afin de conserver la forme de (1.3.7)

et de ne pas introduire de nouvelle constante dimensionnée dans la théorie. Le caractère tensoriel est à relier au principe de covariance généralisée. De plus, on sait que le tenseur énergie-impulsion est conservé le long du mouvement en Relativité Restreinte : $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$, donc, en remplaçant d'après le principe de covariance généralisée la dérivée partielle par une dérivée covariante, on doit avoir :

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0; \quad (1.3.9)$$

ce qui implique que le tenseur $G_{\mu\nu}$ doit satisfaire les identités dites de Bianchi :

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0. \quad (1.3.10)$$

Une analyse du tenseur de Riemann, $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$, caractérisant la variété¹¹, alliée à la limite newtonienne, montre que le choix d'un tel tenseur $G_{\mu\nu}$ est unique :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.3.11)$$

où $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$ est le tenseur de Ricci et $R = R_\mu^\mu$ le scalaire de courbure de la variété. Les équations du champ gravitationnel sont donc les équations d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.3.12)$$

Une autre version des équations d'Einstein peut être obtenue en introduisant une nouvelle constante. Pour cela, il suffit de remarquer que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, si bien que les identités de Bianchi sont aussi satisfaites si l'on introduit :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.3.13)$$

pour Λ réel ayant les dimensions du carré d'une longueur. Λ est appelée constante cosmologique ; nous y reviendrons. Le système (1.3.12) est un système de 10 équations aux dérivées partielles indépendantes (les tenseurs sont symétriques) ; cependant les identités de Bianchi (1.3.10) constituent un système de 4 équations, si bien que seules 6 fonctions indépendantes peuvent être déterminées grâce aux équations d'Einstein. Or $g_{\mu\nu}$ possède également 10 fonctions indépendantes. C'est le reflet de l'invariance par changement de coordonnées : si $g_{\mu\nu}$ est une solution de (1.3.12), la métrique $g'_{\mu\nu}$ obtenue en changeant les coordonnées x^μ en des coordonnées x'^μ

¹¹Le tenseur de Riemann traduit l'impossibilité pour un vecteur de redevenir identique à lui-même après avoir été transporté parallèlement le long d'une petite courbe fermée. C'est en cela qu'il caractérise la courbure de la variété. Une variété est dite non courbée ou euclidienne si et seulement si son tenseur de Riemann est identiquement nul. En terme des dérivées covariantes, il s'écrit, si on l'applique à la forme duale d'un vecteur v_μ : $R_{\nu\rho\sigma}^\mu v_\mu = 2\nabla_{(\nu}\nabla_{\rho)}v_\sigma$, et le fait qu'il soit non nul traduit donc la non commutation des dérivées covariantes.

quelconque est aussi une solution. Or, un tel difféomorphisme implique 4 fonctions indépendantes $x'^{\mu}(x^{\alpha})$. Il ne reste donc plus que 6 degrés de liberté à fixer grâce aux équations. Ces équations couplent manifestement géométrie et contenu matériel, justifiant le fait que l'on dise communément qu'en Relativité Générale, la distribution de matière détermine la géométrie de l'espace-temps (l'inverse étant d'ailleurs tout aussi vrai, mais beaucoup moins "intuitif"). On peut également noter que les équations (1.3.12) peuvent être dérivées d'un principe de moindre action en considérant l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S_{EH} = \int \frac{R}{16\pi G} \sqrt{-g} d^4x + S_m , \quad (1.3.14)$$

où g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$, S_m l'action de la matière, et à condition de définir le tenseur énergie-impulsion de la matière par $\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = 2\delta S_m/\delta g^{\mu\nu}$. Cette action est la plus simple que l'on puisse construire en ne faisant intervenir que des dérivées secondes ou des produits de deux dérivées de la métrique (afin d'obtenir des équations du second ordre comme dans toutes les autres théories des champs). Pour écrire les équations du champ associées à cette action, il suffit d'en calculer la dérivée fonctionnelle par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ en notant que $\delta\sqrt{-g} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}/2$ et que le terme en $\int \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$ est une pure divergence¹².

¹²En toute rigueur, ce terme ne s'annule a priori pas car seule $g_{\mu\nu}$ est gardée fixe sur le bord du domaine, non ses dérivées. On peut toutefois ajouter un contre-terme faisant intervenir la courbure extrinsèque du bord dans l'action pour résoudre ce problème.

Chapitre 2

Le modèle standard de la cosmologie

Donnez-moi seulement de la matière, je vais à partir de là vous bâtir un monde.
E. Kant, *Histoire générale de la nature et théorie du ciel*, 1755.

Le modèle cosmologique a connu, ces dernières décennies, à la fois des confirmations éclatantes de sa capacité prédictive, et l'émergence de questions fondamentales qui pourraient bien bouleverser complètement ses fondements et son développement futur. Dans la première catégorie, citons notamment les multiples observations des anisotropies du fond de rayonnement micro-onde [8, 9, 10, 11, 12, 13], qui ont confirmé que la distribution de matière dans l'Univers primordial était fortement homogène et isotrope, sous la forme d'un plasma couplant intimement photons et baryons, ce qui découle de la structure du spectre des anisotropies (oscillations acoustiques). Dans la seconde catégorie, on rangera bien entendu le surprenant résultat de l'observation des Supernovæ de type 1a [14, 15, 16, 17, 18] : celle-ci laisse apparaître que la lumière produite par ces explosions est plus faible qu'attendue pour un Univers ne contenant que de la matière ordinaire (baryons, électrons, photons, neutrinos, et même matière sombre), signe potentiel de la nécessité de réviser, soit notre conception de la gravité aux grandes échelles, soit notre concept même de matière, soit enfin le cadre théorique de construction d'un modèle cosmologique.

Après avoir présenté le cadre standard de la cosmologie moderne, ses postulats et ses développements formels, c'est-à-dire la façon classique de construire un Univers homogène et isotrope, nous décrirons brièvement son histoire thermique, puis nous conclurons cette partie en montrant comment les champs scalaires ont été une réponse récurrente de la cosmologie aux questions posées tantôt par le cadre théorique lui-même, tantôt par les observations de précision.

2.1 L'Univers homogène et isotrope

Le premier modèle moderne de l'Univers en tant qu'objet est dû à Einstein qui, préoccupé par la construction d'un Univers respectant le principe de Mach¹, proposa en 1917 une solution exacte aux équations de la Relativité Générale pour un espace-temps dont les sections spatiales sont homogènes, isotropes et fermées (au sens topologique). Ce modèle, statique, devait donner naissance aux discussions sur la structuration de la distribution de matière aux grandes échelles qui constituera le cœur de la cosmologie au vingtième siècle. Très vite cependant, les observations réalisées par Hubble en 1929, tendant à suggérer que les galaxies lointaines s'éloignaient toutes les unes des autres avec une vitesse proportionnelle à leur distance respective, allait relancer la nécessité de définir une classe de modèles plus large que la solution d'Einstein, capables d'expliquer cette dynamique globale d'expansion de l'Univers. C'est ce que réalisent les modèles de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker que nous allons examiner dans cette section. Mais avant, il est bon de rappeler les observations qui étayaient l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de notre Univers aux grandes échelles, afin de comprendre précisément ce que cette acception recouvre.

2.1.1 La distribution de matière à grande échelle

L'homogénéité et l'isotropie de l'Univers sur les grandes échelles sont maintenant bien établies, au sens statistique, par une série d'observations que nous allons présenter ici. La première de ces indications observationnelles vient de la distribution à grande échelle de la matière visible, telle que donnée par le catalogue de galaxies rouges du Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [19, 20, 21, 22]; cette mesure repose sur la construction de cellules en moyennant la répartition de matière sur des domaines de taille donnée. Puis, en calculant la variance de la distribution de densité sur les cellules, on peut estimer l'échelle typique d'homogénéité statistique tirée de ce catalogue. Elle est de l'ordre de 70 à $100h^{-1}$ Mpc (où $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$), mais il existe également des travaux mettant cette échelle au delà de 100 à $200h^{-1}$ Mpc [23, 24, 25]. Certaines structures sont même bien plus grandes que ces échelles statistiques : le grand mur détecté par SDSS atteint $420h^{-1}$ Mpc, soit près de 15% de l'Univers observable aujourd'hui. Cependant, l'existence d'une échelle à partir de laquelle la distribution de matière moyenne est statistiquement homogène paraît robuste et nous retiendrons une échelle d'homogénéité typique de l'ordre de la centaine de mégaparsecs. D'un autre côté, l'isotropie

¹Ce principe, dont nous aurons à reparler dans la deuxième partie de cet ouvrage, formulait, un peu vaguement, que les propriétés mécaniques intrinsèques des corps matériels, tel que leur inertie devaient être le résultat de l'effet de l'ensemble de la distribution de matière dans l'Univers sur la physique locale.

statistique est principalement soutenue par l'observation du fond de rayonnement cosmologique. Ce fond de rayonnement, dont nous reparlerons par la suite est une des prédictions majeures du modèle standard ; il s'agit d'un rayonnement électromagnétique quasiment thermique émis il y a plus de treize milliards d'années par l'Univers, au moment où les électrons et les noyaux atomiques (à cette époque essentiellement des noyaux constitués d'un seul proton, c'est-à-dire de l'hydrogène) se sont combinés pour former les atomes. Cette radiation, émise dans le domaine des rayons X est aujourd'hui présente dans notre Univers sous la forme d'un fond micro-onde (à cause de l'expansion). Prédit par Halpher et Hermann [26] et par Gamov [27] dès 1948, il fut détecté de façon fortuite par Penzias et Wilson [28] en 1964, puis cartographié par la mission COBE [8] en 1987. La température de ce corps noir est fortement isotrope sur l'ensemble du ciel, à $T_0 \sim 2.725$ K, avec des fluctuations de l'ordre de $\delta T/T_0 \sim 10^{-5}$. Cela indique qu'au moment de l'émission du fond de rayonnement, l'Univers était homogène avec des fluctuations relatives de densité dans le champ de matière de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} . Allié à l'hypothèse que nous n'occupons pas une place privilégiée dans l'Univers, ce résultat implique, sous certaines conditions², que l'Univers entre l'émission de ce fond et aujourd'hui est quasiment parfaitement homogène et isotrope (statistiquement).

2.1.2 Le principe cosmologique

Les observations tendent donc à montrer que, sur des échelles comparables à environ un centième notre Univers observable aujourd'hui, la distribution de matière apparaît homogène et isotrope statistiquement. Cependant, il est bien évident qu'à des échelles plus petites, la distribution de matière est très structurée, donnant naissance à toute la "zoologie" des objets astrophysiques : étoiles, galaxies, amas de galaxies, grands murs, vides etc. La cosmologie standard oublie temporairement cette complexité afin de se concentrer sur la dynamique à très grande échelle de l'Univers en tant qu'objet particulier. Pour cela, il faut donc sauter un pas conceptuel conséquent pour considérer l'Univers comme un objet autogravitant spatialement parfaitement homogène et isotrope à toutes les échelles ; c'est ce que l'on appellera dans cet ouvrage le principe cosmologique strict ou fort :³

Principe cosmologique fort

L'Univers est localement en tout point spatialement homogène et isotrope.

²La principale hypothèse nécessaire est que le taux d'expansion local soit partout positif [29], ce qui n'est manifestement pas le cas dans l'Univers.

³Dans la littérature, ce principe est simplement nommé principe cosmologique, mais l'adjonction de l'adjectif superlatif apparaîtra important dans la dernière partie de cette thèse.

L'homogénéité de l'espace signifie qu'à chaque instant, un point quelconque de l'espace est "identique" à tout autre point quelconque de l'espace. Mathématiquement, cela peut être formulé de la façon suivante : un espace-temps est spatialement homogène si et seulement s'il existe une famille d'hypersurfaces spatiales Σ_t paramétrée par un scalaire t qui feuillentent l'espace-temps de telle sorte que : $\forall t, \forall (p, q) \in \Sigma_t, \exists \phi_t$ isométrie de l'espace-temps, $\phi_t(p) = q$.⁴ L'isotropie de l'espace en tout point, quant à elle, se traduit par le fait qu'un observateur placé en un point quelconque de l'espace ne peut définir de direction privilégiée par rapport à une quelconque propriété de cet espace. Cela signifie qu'en tout point de l'espace-temps, il existe une congruence de courbes de genre temps associées à un champ de vecteurs tangents u^μ telle que pour tout point p et tout couple (s_1^μ, s_2^μ) de vecteurs en p orthogonaux à u^μ , il existe une isométrie de l'espace-temps qui laisse p et u^μ invariants tout en transformant s_1^μ et s_2^μ sous une rotation.

Ce point de vue est une sorte de principe copernicien étendu : à chaque temps, toutes les positions dans l'espace sont équivalentes, et tous les observateurs "voient" les mêmes propriétés de l'espace autour d'eux.

Fort de l'expression mathématique de ce principe nous pouvons maintenant déterminer les métriques d'espace-temps satisfaisant ces contraintes. Elles seront le "tissu" géométrique de l'étude de l'Univers dans la cosmologie standard.

2.1.3 Espaces de symétrie maximale

Avant d'en venir à la forme de la métrique qu'implique l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie parfaites que traduit le principe d'équivalence strict, nous allons faire un détour par les propriétés générales des variétés différentielles au regard des opérations de symétrie que l'on peut leur appliquer. Dans cette sous-section, on considérera donc une variété différentielle \mathcal{M} de dimension N quelconque, munie d'une métrique \mathbf{g} dont la signature n'est pas précisée pour le moment.

On appelle isométrie de \mathcal{M} un C^1 -difféomorphisme $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tel que $\phi^*\mathbf{g} = \mathbf{g}$. Autrement dit, en coordonnées, en posant $g'_{\mu\nu} = (\phi^*\mathbf{g})_{\mu\nu}$:

$$\forall x \in \mathcal{M}, g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) , \quad (2.1.1)$$

ce que l'on peut formuler en disant que la métrique est fonctionnellement invariante (lorsqu'elle est vue comme une fonction des coordonnées) par le changement de coordonnées impliqué par ϕ . Si l'on se place dans le voisinage V d'un point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnées x , et que l'on considère les transformations infinitésimales :

$$x \rightarrow x' = x + \epsilon \xi(x) , \quad (2.1.2)$$

⁴Une isométrie de l'espace-temps est un C^1 -difféomorphisme de la variété d'espace-temps qui laisse la métrique de cet espace-temps invariante.

où $\epsilon \ll 1$ et ξ est un vecteur de $T_p\mathcal{M}$, la condition (2.1.1) est équivalente à une condition sur la 1-forme associée à ξ :

$$\xi_{(\mu;\nu)} = 0 . \quad (2.1.3)$$

Un vecteur vérifiant cette propriété est appelé vecteur de Killing. A chaque isométrie est donc associé un vecteur de Killing, et la connaissance de l'ensemble des vecteurs de Killing d'une variété donne par conséquent accès à l'ensemble des isométries de cette variété, c'est-à-dire aux symétries qui la caractérise. Il est aisé de montrer [3] qu'un vecteur de Killing obéit à une équation de la forme :

$$\xi_{\mu;\nu;\rho} = -R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} \xi_{\sigma} , \quad (2.1.4)$$

ce qui montre que toutes les dérivées successives de $\xi_{\mu}(x)$ sont connues comme combinaisons linéaires des seules composantes $\xi_{\mu}(x)$ et $\xi_{\mu;\nu}(x)$, et que donc ξ_{μ} au voisinage d'un point x peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $\xi_{\mu}(x)$ et $\xi_{\mu;\nu}(x)$ (grâce à un développement de Taylor). Si l'on considère un ensemble de P vecteurs de Killing ξ^i , pour tout i compris entre 1 et P , il existe⁵ N quantités ξ_{μ}^i et $N(N-1)/2$ quantités linéairement indépendantes $\xi_{\mu;\nu}^i$. Ce qui implique que les P vecteurs de Killing sont linéairement indépendants si et seulement si⁶ $P < N(N+1)/2$. Le nombre maximal de vecteurs de Killing d'une variété de dimension N est donc de $N(N+1)/2$. On appelle variété maximale symétrique une variété de dimension N qui possède exactement $N(N+1)/2$ vecteurs de Killing. Pour une telle variété, les N vecteurs ξ^i engendrent les N translations infinitésimales au voisinage d'un point donné, et les $N(N-1)/2$ tenseurs indépendants $\nabla\xi^i$ représentent les rotations autour d'un point donné. Ainsi, l'on voit que l'espace riemannien homogène et isotrope résultant de l'application du principe cosmologique strict est simplement une sous-variété de genre espace maximale symétrique de l'espace-temps. Une dérivation complète de la forme de la métrique d'une variété qui possède une sous-variété maximale symétrique peut être trouvée dans le livre de référence de S. Weinberg [3]. Pour une variété à N dimensions dont la sous-variété maximale symétrique a M dimensions, on peut introduire M coordonnées v^a sur la sous-variété, et $N-M$ coordonnées u^i pour compléter la base. Alors, l'élément de longueur peut s'écrire :

$$ds^2 = g_{ab}(u)du^a du^b + f(u)\tilde{g}_{ij}(v)dv^i dv^j . \quad (2.1.5)$$

\tilde{g} est la métrique de la sous-variété maximale symétrique. Si l'on particularise ce résultat au cas d'un espace-temps localement difféomorphe à un espace-temps

⁵A cause de la relation (2.1.3).

⁶Il suffit de considérer les ξ_{μ}^i et $\xi_{\mu\nu}^i$ comme les composantes de P vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $N(N+1)/2$.

de Minkowski, on a $N = 4$ et $M = 3$, et l'élément de longueur (2.1.5) devient :

$$ds^2 = g(u)du^2 + f(u) \left(d\vec{v}^2 + \frac{k(\vec{v} \cdot d\vec{v})^2}{1 - k\vec{v}^2} \right), \quad (2.1.6)$$

où $k \in \mathbb{R}$; g est une fonction à valeurs strictement négatives, et f une fonction à valeurs positives. Un changement de coordonnées $(u, \vec{v}) \mapsto (t, r, \theta, \psi)$ défini par :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g(u)} du &= t \\ v^1 &= r \sin \theta \cos \psi \\ v^2 &= r \sin \theta \sin \psi \\ v^3 &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

assorti de la définition d'une fonction $a(t) \equiv \sqrt{f(u)}$, permet alors de réécrire :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\psi^2 \right). \quad (2.1.7)$$

Dans la suite, nous allons préciser le sens de ces coordonnées et étudier les caractéristiques de cette métrique.

2.1.4 Les Univers de Friedmann

Un Univers satisfaisant au principe cosmologique strict tel qu'énoncé ci-dessus peut donc être décrit par une métrique spatio-temporelle impliquant l'élément de longueur dit de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW ci-après) de la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\psi^2 \right], \quad (2.1.8)$$

où le triplet (r, θ, ψ) représente les coordonnées sphériques locales telles que déduites de celles de \mathbb{R}^3 . k traduit la courbure constante des hypersurfaces de genre espace; il est nul pour un espace plat, positif si l'espace est à courbure positive et négatif s'il est à courbure négative. Il faut noter que la nature de la courbure est une information géométrique, donc locale; elle ne contraint absolument pas la topologie des hypersurfaces spatiales. Par exemple, un espace avec $k = 0$ a une géométrie plane, mais il peut aussi bien avoir la topologie du plan euclidien \mathbb{R}^3 que celle du 3-tore \mathbb{T}^3 . Ces coordonnées sont dites comobiles dans la mesure où les observateurs initialement au repos dans ces coordonnées restent au repos par rapport à eux. De tels observateurs sont alors dits comobiles. La coordonnée t est appelé temps cosmique, et $a(t)$ facteur d'échelle. Ce dernier traduit comment la

distance entre deux observateurs comobiles varie avec le temps ; la relation entre la distance physique $l(t)$ et la distance comobile r (qui ne dépend pas du temps) est donnée par : $l(t) = a(t)r$. Pour un Univers en expansion, les distances physiques entre les observateurs comobiles croissent, donc $a(t)$ est une fonction croissante du temps ; nous supposerons pour le moment que c'est bien le cas, et nous verrons dans la section suivante que c'est un résultat qui découle du contenu matériel de l'Univers.

Cinématique des modèles FLRW

Afin d'explorer plus avant la cinématique dans un Univers friedmannien, considérons maintenant une particule en chute libre dans une métrique de Friedmann. Soit $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ la quadri-vitesse de la particule. Alors la composante temporelle de l'équation des géodésiques de cette particule s'écrit :

$$\frac{du^0}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \|\vec{u}\| = 0, \quad (2.1.9)$$

où $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$, et $\|\vec{u}\| \equiv g_{ij}u^i u^j$. Par quelques manipulations, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d\|\vec{u}\|}{dt} + \frac{\dot{a}}{a} \|\vec{u}\| = 0. \quad (2.1.10)$$

Ainsi, la vitesse particulière d'une particule en chute libre évolue comme $\|\vec{u}\| \propto a^{-1}$, c'est-à-dire que dans un Univers en expansion, une particule en chute libre qui ne serait pas immédiatement au repos par rapport aux coordonnées comobiles, y retournerait du fait de l'expansion. Ceci indique que les coordonnées comobiles sont les coordonnées "naturelles" pour un espace-temps dont les sections spatiales sont homogènes, isotropes et en expansion. La 3-vitesse avec laquelle deux observateurs comobiles situés à une distance physique relative l s'éloignent est donnée par :

$$v(t) = \frac{dl(t)}{dt} = H(t)l(t) \text{ avec } H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.1.11)$$

On retrouve donc une généralisation de la loi de Hubble, et c'est pourquoi $H(t)$ est appelé paramètre de Hubble. Il traduit le taux d'expansion (ou de contraction) de l'Univers.

Une des caractéristiques fondamentales des espace-temps de Friedmann en expansion est l'existence d'un horizon des particules, c'est-à-dire d'une surface spatiale qui limite la portion de l'espace qui a eu un contact causal avec un observateur comobile situé en (r_0, θ_0, ψ_0) entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant t . Afin de cal-

culer la taille d'un tel horizon, on considère un signal lumineux émis en (r_1, θ_0, ψ_0) ⁷ à l'instant $t = 0$. Un tel signal suit une géodésique de genre lumière, et par conséquent, on a le long du trajet du signal : $ds^2 = 0$, soit :

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (2.1.12)$$

Or, la distance physique entre l'observateur et l'horizon, $d_H(t)$ est obtenue en intégrant l'élément de longueur radiale entre l'observateur et l'horizon :

$$d_H(t) = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{g_{rr}} dr , \quad (2.1.13)$$

donc la taille de l'horizon des particules associé à un observateur est à un instant t donné :

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} . \quad (2.1.14)$$

Si $d_H(t)$ est finie, cela signifie que le cône de lumière passé d'un observateur est limité par l'horizon des particules : alors une fraction seulement de l'Univers a pu être en contact causal avec l'observateur depuis le Big-Bang (correspondant à $a(t) = 0$). La forme de l'intégrand montre que la finitude de $d_H(t)$ dépend essentiellement du comportement du facteur d'échelle au tout début de l'Univers, lorsque $a(t) \sim 0$.

Pour conclure cette présentation de la cinématique des modèles FLRW, il nous reste à introduire une quantité fondamentale pour la cosmologie observationnelle : le décalage vers le rouge. Considérons un photon de longueur d'onde λ_1 émis à l'instant t_1 par un objet astrophysique (par exemple une galaxie) situé en $(r_1, 0, 0)$ et reçu à l'instant t_0 par un observateur situé en $(r_0, 0, 0)$. La longueur d'onde "coordonnée" du photon est donnée par la grandeur adimensionnée $\bar{\lambda} = \lambda_1/a(t_1)$. Cette grandeur ne dépendant pas du temps, la longueur d'onde du signal reçu par l'observateur est : $\lambda_0 = a(t_0)\bar{\lambda}$. On a donc :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} . \quad (2.1.15)$$

On définit alors le décalage vers le rouge z de la source astrophysique par $z = (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1$, et on a :

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} . \quad (2.1.16)$$

⁷Les coordonnées angulaires sont choisies arbitrairement pour coïncider avec celles de l'observateur car du fait de l'isotropie de l'espace, ces coordonnées ne jouent aucun rôle ; autrement dit, l'horizon à un instant donné est une 2-sphère centrée sur l'observateur.

On comprend donc pourquoi cette grandeur est appelée décalage vers le rouge : pour un Univers en expansion, comme $a(t_0) > a(t_1)$, on a bien $\lambda_0 > \lambda_1$, donc la longueur d'onde de la lumière a été décalée vers la zone des plus grandes longueurs d'onde du spectre électromagnétique, c'est-à-dire vers le rouge pour un photon du domaine visible. Dans la suite, les grandeurs portant un indice 0 désigneront les valeurs de ces grandeurs aujourd'hui. Le décalage vers le rouge des objets astrophysiques est par exemple toujours défini pour un observateur situé sur Terre aujourd'hui (c'est le seul observateur dont on dispose!).

Dynamique des modèles FLRW

Nous pouvons maintenant écrire les équations d'Einstein pour les Univers de Friedmann, à condition de nous donner une prescription pour leur contenu matériel. Considérons donc un fluide cosmologique parfait comobile caractérisé par sa densité ρ et sa pression p . Du fait de la symétrie homogène et isotrope des hypersurfaces spatiales, ρ et p ne dépendent que de t , et le tenseur énergie-impulsion du fluide s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &= p(t)g_{\nu}^{\mu} + (\rho(t) + p(t))u^{\mu}u_{\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -\rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Les équations d'Einstein donnent alors, après une légère manipulation, les équations dites de Friedmann :

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho(t)}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2(t)} \quad (2.1.18)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.1.19)$$

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho(t) + p(t)) = 0. \quad (2.1.20)$$

On voit que, si l'on dispose d'un modèle pour le fluide parfait cosmique, sous la forme $p(t) = p[\rho(t)]$, ce système constitue un système contraint de trois équations différentielles à deux inconnues, a et ρ ; la première équation est en effet une équation de contrainte, appelée contrainte hamiltonienne dans la décomposition 3 + 1 de la Relativité Générale (cf annexe B).

Classiquement, on introduit le taux d'expansion de l'Univers, ou facteur de Hubble, $H(t)$ déjà vu ci-dessus, le taux de décélération $q(t)$ et les densités adim-

mensionnées sous la forme :

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.1.21)$$

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2(t)} \quad (2.1.22)$$

$$\Omega_m(t) \equiv \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} \quad (2.1.23)$$

$$\Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{\Lambda}{3H^2(t)} \quad (2.1.24)$$

$$\Omega_k(t) \equiv -\frac{k}{a^2(t)H^2(t)}, \quad (2.1.25)$$

et l'on suppose que le fluide parfait cosmique est barotropique, c'est-à-dire que $p(t) = \omega\rho(t)$ avec ω une constante, si bien que le système (2.1.18)-(2.1.20) donne :

$$\Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1 \quad (2.1.26)$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega_m(t)(1 + 3\omega) - \Omega_\Lambda(t). \quad (2.1.27)$$

On définit alors l'âge de l'Univers par l'intégrale :

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{da}{aH(a)}. \quad (2.1.28)$$

Utilisant les systèmes (2.1.18)-(2.1.20) et (2.1.26)-(2.1.27), et définissant le paramètre $\lambda = \ln(a)$, on peut alors écrire un système dynamique pour le triplet $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k)$, en notant $u' \equiv du/d\lambda$:

$$\Omega'_m = \Omega_m [(1 + 3\omega)(\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \quad (2.1.29)$$

$$\Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [(1 + 3\omega)\Omega_m + 2(1 - \Omega_\Lambda)] \quad (2.1.30)$$

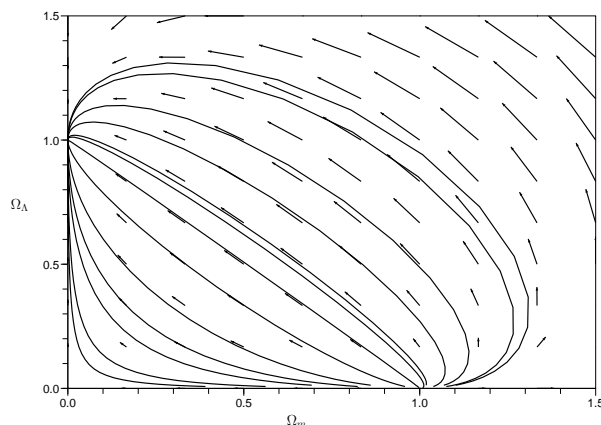
$$\Omega'_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \quad (2.1.31)$$

Ce système admet trois points fixes pour la dynamique :

$$\begin{aligned} (\bar{\Omega}_m, \bar{\Omega}_\Lambda, \bar{\Omega}_k) &= (1, 0, 0) : \text{Univers d'Einstein-de Sitter} \\ &= (0, 1, 0) : \text{Univers de de Sitter} \\ &= (0, 0, 1) : \text{Univers vide dominé par la courbure.} \end{aligned}$$

Le linéarisé du système dynamique au voisinage d'un de ces points fixes est caractérisé par la différentielle du champ de vecteur prise au point fixe :

$$L = \begin{pmatrix} (1 + 3\omega)(2\bar{\Omega}_m - 1) - 2\bar{\Omega}_\Lambda & -2\bar{\Omega}_m \\ (1 + 3\omega)\bar{\Omega}_\Lambda & (1 + 3\omega)\bar{\Omega}_m + 2(1 - 2\bar{\Omega}_\Lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.1.32)$$

FIG. 2.1.1 – Portrait de phase du système (2.1.29)-(2.1.30) pour $w = 1/3$.

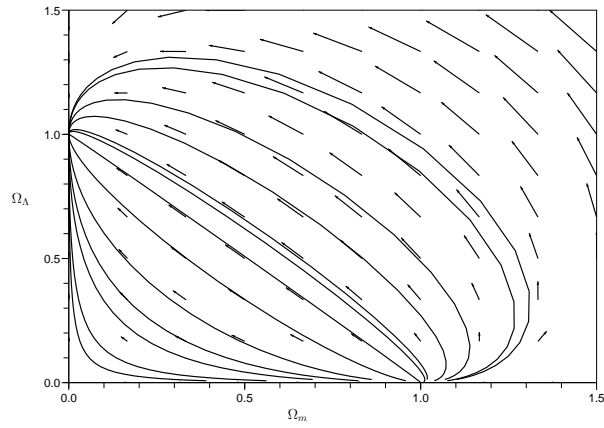
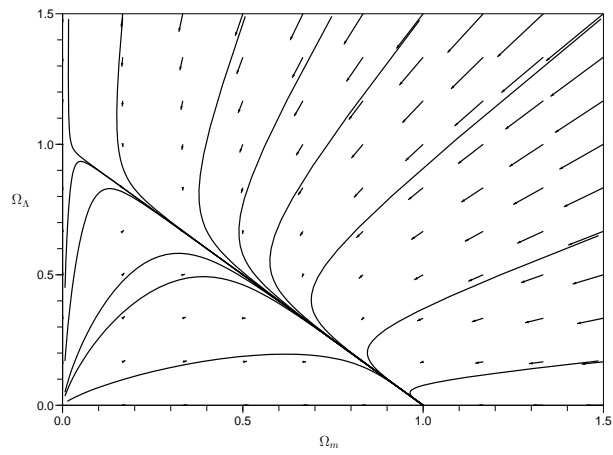
Les valeurs propres de cette matrice L sont :

$$\text{Pour } (1, 0, 0) \quad : \quad (1 + 3\omega) \text{ et } 3(1 + \omega)$$

$$\text{Pour } (0, 1, 0) \quad : \quad -2 \text{ et } -3(1 + \omega)$$

$$\text{Pour } (0, 0, 1) \quad : \quad 2 \text{ et } -(1 + 3\omega) .$$

Ainsi, le point fixe $(0, 0, 1)$ est instable (son linéarisé possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive) ; l'Univers de Einstein-de Sitter, correspondant à $(1, 0, 0)$, est un point fixe stable de la dynamique si $\omega < -1$ et instable si $\omega > -1$; inversement, l'Univers de de Sitter $(0, 1, 0)$ est un point fixe stable si $\omega > -1$ et instable si $\omega < -1$. Le cas où $w = -1$ ne peut être traité par cette méthode car le système n'est plus hyperbolique au voisinage des points $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ (l'une des valeurs propres du linéarisé est nulle). Cependant, ce cas se réduit à celui d'une constante cosmologique dans un Univers de courbure k car un fluide barotrope avec $\omega = -1$ a une densité d'énergie constante ; sa dynamique peut donc être étudié très simplement. Il suffit d'introduire une constante cosmologique "habillée" $\tilde{\Lambda} = \lambda + 8\pi G\rho$; on a alors un système unidimensionnel avec deux points fixes $(\Omega_{\tilde{\Lambda}}, \Omega_k) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, le premier étant stable et le second instable. Les portraits de phase du système (2.1.29)-(2.1.30) sont présentés sur les figures 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3 pour certaines valeurs du paramètre ω .

FIG. 2.1.2 – Portrait de phase du système (2.1.29)-(2.1.30) pour $w = 0$.FIG. 2.1.3 – Portrait de phase du système (2.1.29)-(2.1.30) pour $w = -1.2$.

2.2 Histoire thermique de l'Univers

Nous avons étudié ci-dessus les trajectoires dans l'espace des phases pour un Univers ne contenant qu'un seul type de fluide ; or notre Univers comprend de multiples sortes de champs de matière : radiation, baryons, matière noire etc. Après avoir fait une courte liste de ce contenu matériel, nous allons donc décrire les différentes phases de l'histoire de l'Univers, et les phénomènes physiques marquants se déroulant au cours de ces phases : nous rentrons de plein pied dans la cosmologie physique !

2.2.1 Contenu de l'Univers

On peut commencer par constater que notre environnement proche dans l'Univers est composé d'un certain nombre de particules, qui ont été intégrées dans le cadre plus large du modèle standard de la physique des particules ; ce sont :

- des leptons, sous la forme d'électrons et de neutrinos ;
- des baryons, dans les noyaux atomiques, composés de protons et de neutrons ;
- des photons, particules associées aux ondes électromagnétiques.

Les photons sont des particules sans masses et l'on peut considérer que dans l'Univers, ils forment un fluide parfait de particules relativistes de densité d'énergie ρ_γ et de pression p_γ dont l'équation d'état est $w_\gamma = p_\gamma/\rho_\gamma = 1/3$ (cf Annexe A). Les neutrinos du modèle standard semblent très légers (la somme de leurs masses est inférieure à quelques dixièmes d'électronvolts et l'on considèrera donc qu'ils forment également un fluide parfait relativiste avec $w_\nu \sim 1/3$ très tôt dans l'histoire de l'Univers. Pour ce qui est des baryons et des électrons, leur comportement dépend des conditions de température régnant dans l'Univers. Cependant, nous pourrions considérer que pour l'immense majorité de l'histoire de l'Univers (sauf lorsque nous devons étudier des effets fins tels que la nucléosynthèse primordiale) ils constituent un fluide parfait de particules non relativistes dite matière baryonique (car la masse des baryons, si l'on suppose la compensation stricte globale des charges, domine largement la masse des électrons) d'équation d'état $w_b = 0$ (cf Annexe A). C'est ce que l'on appellera la matière ordinaire, celle qui constitue les atomes.

Cependant, l'énumération ne semble pas s'arrêter là. Les observations de Zwicky en 1933 [30] sur la rotation des galaxies spirales, étayées plus tard par de multiples autres observations ont mis en évidence un fait troublant : la vitesse képlérienne des étoiles dans la galaxie devrait être donnée, en fonction de leur distance au centre r dans l'approximation newtonienne, par :

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(< r)}{r}}, \quad (2.2.1)$$

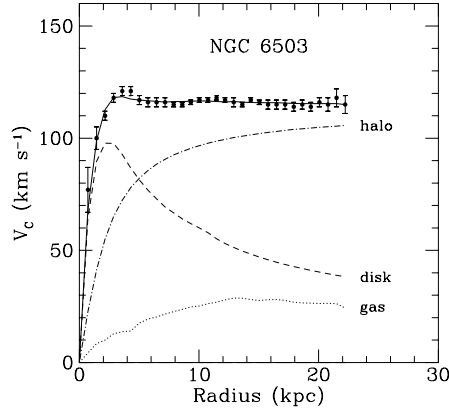


FIG. 2.2.1 – Figure tirée de [31]. Courbe de rotation de la galaxie NGC6503. La courbe en points représente la contribution du gaz, celle en pointillés la contribution du disque, et celle alternant tirés et points la contribution du halo de matière sombre.

où $M(< r)$ est la masse totale située à une distance au centre inférieure à r . Les étoiles étant essentiellement contenues dans les régions centrales de la galaxie (ce que l'on sait par leur brillance de surface), si toute la masse galactique était dans les étoiles, $M(< r)$ tendrait vers une constante lorsque r croîtrait, et la vitesse des étoiles devrait par conséquent décroître en $1/\sqrt{r}$ au bord de la galaxie. Or, les courbes de rotation des galaxies ne montrent pas ce comportement ; au contraire, la vitesse des étoiles semble se stabiliser à partir d'un certain rayon, comme illustré sur la figure 2.2.1.

D'autre part, l'application du théorème du viriel aux amas de galaxies, ainsi que des mesures récentes de leur masse par effet de lentille gravitationnelle indiquent que la matière visible, sous forme de galaxies ou de gaz ne représente pas plus de quelques 20% de la masse totale déduite par les effets gravitationnels. Qu'est-ce à dire ? Certains ont proposé que ces désaccords pourraient venir d'une modification de la gravité aux faibles accélérations : c'est l'hypothèse MOND [32, 33, 34]. On trouvera une description détaillée des différentes formulations possibles d'une telle dynamique dans le cadre d'une théorie des champs, les problèmes posés par ces formulations, ainsi que des pistes de solutions dans une revue récente [35]. Néanmoins, l'observation par effet de lentille gravitationnelle de la collision de deux amas de galaxies [36] semble poser un certain nombre de problèmes à cette hypothèse, et la seule façon connue aujourd'hui de la réconcilier avec cette observation serait d'avoir des neutrinos ayant une masse d'environ 1 eV, ce qui n'est ni confirmé, ni infirmé. Dans le modèle standard que nous présentons ici, ces désaccords ont été

interprétés comme le signe de l'existence d'une composante de matière sombre, c'est-à-dire n'ayant aucune interaction électromagnétique. Les simulations numériques de la formation des structures montrent que cette matière sombre doit être constituée de particules massives non relativistes ayant une faible dispersion de vitesse : c'est la matière noire froide. Plusieurs candidats existent pour cette matière sombre : particule supersymétrique la plus légère, axions etc ; LHC devrait pouvoir éclairer la communauté sur ce point dans les années à venir. Pour nous, la matière sombre sera donc simplement un fluide parfait non relativiste d'équation d'état $w_{CDM} = 0$.

2.2.2 Les différentes ères

Connaissant les équations d'état des différents fluides cosmiques, nous pouvons déduire l'évolution des densités d'énergie de ces fluides en considérant qu'ils n'interagissent pas entre eux. En effet, l'absence d'interaction garantit que chacun de ces fluides obéit à une équation du type (2.1.20). Alors, considérons N fluides de densités d'énergie ρ_i et de pression $p_i = \omega_i \rho_i$, pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a :

$$\dot{\rho}_i + 3(1 + \omega_i) \frac{\dot{a}}{a} \rho_i = 0, \quad (2.2.2)$$

donc :

$$\rho_i(a) = \rho_i(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega_i)}. \quad (2.2.3)$$

Pour les fluides dont nous avons vu qu'ils peuplaient notre Univers nous avons par conséquent :

$$\text{Pour la radiation électromagnétique} : \rho_\gamma(a) = \rho_\gamma(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}$$

$$\text{Pour les neutrinos légers} : \rho_\nu(a) = \rho_\nu(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}$$

$$\text{Pour la matière ordinaire} : \rho_b(a) = \rho_b(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}$$

$$\text{Pour la matière sombre froide} : \rho_{CDM}(a) = \rho_{CDM}(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}.$$

On peut donc distinguer essentiellement deux composantes distinctes quant à leur évolution au cours de l'expansion :

- un fluide relativiste, composé de photons, et de neutrinos, de densité totale $\rho_R(a) = \rho_R(a_0) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}$, et de pression donnée par $p_R = \rho_R/3$;

- un fluide non relativiste, dit poussière, composé de matière ordinaire (baryons et électrons) et de matière noire froide, de densité totale $\rho_D(a) = \rho_D(a_0) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$, et de pression nulle, $p_D = 0$.

Pour un Univers de Friedmann plat ($k = 0$) et sans constante cosmologique ($\Lambda = 0$), on peut résoudre simplement les équations de Friedmann (2.1.18)-(2.1.20) et obtenir le comportement du facteur d'échelle en fonction du temps :

$$a(t) \propto t^{1/2} \text{ pour } w = 0 \quad (2.2.4)$$

$$a(t) \propto t^{2/3} \text{ pour } w = 1/3 . \quad (2.2.5)$$

Pour un Univers vide avec une simple constante cosmologique (ce que nous avons appelé ci-dessus un Univers de de Sitter), on trouve de même :

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) . \quad (2.2.6)$$

cela justifie a posteriori le fait que nous ayons considéré depuis le début que le facteur d'échelle était une fonction croissante du temps : tous les types de matière classique présents dans l'Univers observé mènent à un Univers de Friedmann en expansion, pourvu qu'il ait été en expansion à un moment donné du passé. Un corollaire évident de ce résultat est qu'il existe un instant $t = 0$ dans le passé où $a(0) = 0$; c'est le fameux Big-Bang!⁸

Aujourd'hui, les densités de photons et de neutrinos sont très faibles par rapport aux densités de matière ordinaire et de matière noire froide ; cependant, les lois d'évolution présentées ci-dessus montrent que cela n'a pas toujours été le cas. En effet, l'Univers étant en expansion, le facteur d'échelle a été plus petit par le passé qu'aujourd'hui, donc, si a_0 est choisi pour le facteur d'échelle aujourd'hui, le rapport :

$$\frac{\rho_R}{\rho_D}(a) = \frac{\rho_R}{\rho_D}(a_0) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1} \quad (2.2.7)$$

augmente lorsque l'on remonte vers dans le passé de l'Univers. Cela signifie qu'il existe un instant t_{eq} où les densités d'énergie des fluides relativiste et non relativiste sont égales, à cet instant, le facteur d'échelle et le décalage vers le rouge valent :

$$a_{eq} = \frac{\rho_R(a_0)}{\rho_D(a_0)} a_0$$

$$z_{eq} = \frac{\rho_D(a_0) - \rho_R(a_0)}{\rho_R(a_0)} ,$$

⁸Le choix $t = 0$ pour l'instant initial est arbitraire ; ce qui compte, c'est l'existence de cet "instant initial", et l'on peut toujours alors redéfinir le temps de sorte qu'il coïncide avec 0.

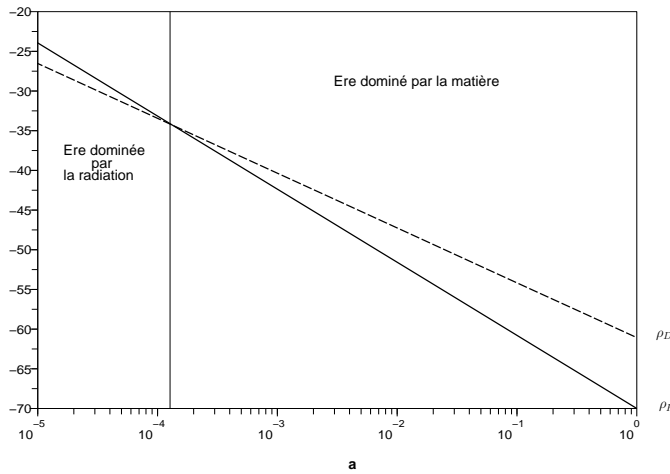


FIG. 2.2.2 – Evolution des densités de fluide relativiste ρ_R (en trait plein) et non relativiste ρ_D (en pointillés). L'axe des ordonnées est gradué en échelle du logarithme des densités. Le trait vertical indique le facteur a_{eq} .

soit, pour les valeurs du modèle de concordance (cf section 2.3) : $z_{eq} \sim 2.32 \times 10^4$, ou $T_{eq} \sim 5.5$ eV. On distingue donc deux grandes ères dans l'histoire thermique de l'Univers :

- Au début de l'histoire de l'Univers, pour des températures supérieures à T_{eq} , l'ère dominée par la radiation (EDR ci-après), durant laquelle l'expansion de l'Univers est dominée par le fluide relativiste. Loin dans cette ère, la densité totale est bien approchée par la densité ρ_R , et la pression totale par p_R .
- Pour des températures inférieures à T_{eq} , l'ère dominée par la matière (EDM ci-après), durant laquelle l'expansion de l'Univers est dominée par le fluide non relativiste. Loin dans cette ère, la densité totale est bien approchée par la densité ρ_D , et la pression totale est nulle.

Cette section s'intitule "histoire thermique" de l'Univers; pourtant, il est, stricto sensu, impossible de définir un équilibre thermique pour l'Univers, celui-ci n'étant pas dans un état fixe, c'est-à-dire statique (la métrique FRW ne possède pas de vecteur de Killing de genre temps). Cependant, l'usage est de définir une température pour l'Univers qui correspond à la température équivalente du gaz de photons contenu dans cet Univers. La thermodynamique d'un gaz de Bose-Einstein nous donne, pour la densité d'un fluide de particules relativistes à la température

T (cf annexe A) :

$$\rho_R \propto T^4 . \quad (2.2.8)$$

Or, nous avons vu qu'un tel fluide, dont l'équation d'état est $p_R/\rho_R = 1/3$ se comporte, en fonction du facteur d'échelle, comme : $\rho_R \propto a^{-4}$. Ainsi, ces deux relations suggèrent que l'on peut définir la température de l'Univers à un instant donné en utilisant la température du gaz de photons et en posant : $T(t) \propto a^{-1}(t)$, soit :

$$\frac{T(t)}{T(t_0)} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z(t) . \quad (2.2.9)$$

Cette température a un sens bien défini tant que les différents fluides restent intimement couplés et maintiennent un équilibre thermodynamique entre eux. Nous verrons par la suite l'importance de ces couplages.

L'évolution des densités est présentée sur la figure 2.2.2.

2.2.3 L'Univers très primordial

À des températures supérieures à $T \sim 10^{16}$ GeV règne la gravité quantique. Les phénomènes mis en jeu échappent largement à tout ce que la physique actuelle peut prédire de façon solide, et il faudra sûrement attendre l'unification de la gravitation avec la théorie quantique des champs pour pouvoir sonder la phénoménologie de cette période. Plus tard, suivent un ensemble de transitions phases à haute énergie :

- Vers 10^{16} à 10^{14} GeV. Fin de la grande unification, qui marque la séparation de l'interaction forte d'avec l'interaction électrofaible.
- Vers 300 GeV. Brisure spontanée de la symétrie électrofaible, au cours de laquelle les bosons de jauge et les autres particules acquièrent une masse grâce au mécanisme de Higgs.
- Vers 300 à 100 MeV. Transition quarks/hadrons au cours de laquelle les baryons et les mésons se forment à partir d'une brisure de la symétrie chirale et l'apparition du confinement des quarks.

Cette période de l'histoire de l'Univers, encore mal connue, recevra certainement de nombreux éclaircissements des expériences qui commenceront bientôt autour de l'accélérateur LHC du CERN.

2.2.4 Nucléosynthèse primordiale

Entre 10 MeV et 10 keV, se déroule la première phase de l'Univers primordial qui nous permette de contraindre le modèle standard de la cosmologie : la nucléosynthèse primordiale. Il s'agit d'un ensemble de phénomènes nucléaires qui ont conduit à la synthèse des noyaux légers : du deutérium jusqu'au ${}^7\text{Li}$ essentiellement. Nous allons insister sur le déroulement de cette phase importante dans l'histoire

de l'Univers, car nous y reviendrons dans la deuxième partie de cet ouvrage, pour traiter des modifications que peut y apporter une théorie scalaire-tenseur de la gravité.

Réactions nucléaires et équilibre statistique

Deux notions sont très importantes pour traiter de l'histoire thermique de l'Univers en général, et de la nucléosynthèse primordiale en particulier : celle d'efficacité d'une réaction, et celle d'équilibre statistique.

Une réaction (nucléaire par exemple) est caractérisée par un taux de réaction, homogène à l'inverse d'un temps. Dans un Univers en expansion, il existe, à chaque temps t , une quantité caractéristique homogène à un temps : le taux d'expansion, ou facteur de Hubble $H(t)$. Si l'on considère une réaction i donnée, dont le taux de réaction Γ_i est calculé à partir du modèle standard de la physique des particules ou d'un modèle de physique nucléaire, deux situations peuvent se produire :

- Si $\Gamma_i/H > 1$, alors le temps caractéristique de la réaction $1/\Gamma_i$ est inférieur au temps caractéristique de l'expansion, et la réaction est alors possible.
- Si $\Gamma_i/H < 1$, alors, l'expansion "dilue" les particules trop vite, ce qui inhibe la réaction, qui se gèle.

Parmi l'ensemble des réactions nucléaires qui vont nous intéresser par la suite, certaines sont d'une importance particulière : ce sont celles assurant un équilibre statistique entre espèces nucléaires. Il nous faut donc ici développer brièvement leurs propriétés.

Pour un noyau de masse m_A , de nombre de masse A avec Z protons, non relativiste à la température T ($m_A \ll T$), et à l'équilibre cinétique, la densité numérique est donnée par :

$$n_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_A - m_A}{T} \right), \quad (2.2.10)$$

où μ_A est le potentiel chimique et g_A le nombre de degrés de liberté internes de l'espèce nucléaire considérée.

Si les réactions responsables de l'interconversion entre l'espèce de nombre de masse $A(Z)$ et un système à Z protons et $A - Z$ neutrons sont rapides par rapport à l'expansion, l'équilibre chimique est maintenu, et l'on peut écrire :

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n, \quad (2.2.11)$$

où μ_p et μ_n sont les potentiels chimiques respectifs des protons et des neutrons. Alors, en exprimant l'énergie de liaison d'un noyau $A(Z)$:

$$B_A = Zm_p + (A - Z)m_n - m_A, \quad (2.2.12)$$

et en négligeant la différence de masse entre neutrons et protons ($m_p = m_n = m_N$) dans les facteurs non exponentiés, on a :

$$n_A = g_A A^{3/2} 2^{-A} \left(\frac{2\pi}{m_N T} \right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp\left(\frac{B_A}{T}\right). \quad (2.2.13)$$

On a l'habitude d'introduire la densité numérique totale de nucléons : $n_N = n_n + n_p + \sum_i A_i n_{Ai}$, où l'on a indexé symboliquement les espèces nucléaires autres que les protons et les neutrons par i . Grâce à cette densité, on peut définir les abondances adimensionnées, ou fractions de masse :

$$X_A \equiv \frac{n_A A}{n_n}, \text{ avec : } \sum_i X_i = 1, \quad (2.2.14)$$

dont l'expression est donnée par :

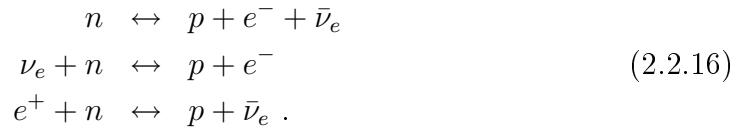
$$X_A = C(A) \left(\frac{T}{m_N} \right)^{3(A-1)/2} \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp\left(\frac{B_A}{T}\right); \quad (2.2.15)$$

$\eta \equiv n_n/n_\gamma$ est le rapport du nombre baryonique au nombre de photons et $C(A) = 2^{(3A-5)/2} g_A \zeta(3)^{A-1} \pi^{(1-A)/2} A^{5/2}$. Le rapport η est actuellement estimé [13] à $\eta \sim 6.14 \times 10^{-10}$: l'Univers contient bien plus de photons que de noyaux non relativistes ; c'est ce qui explique que l'on dise parfois que l'Univers est "chaud".

La figure 2.2.3 montre le réseau de 32 relations nucléaires prises en compte dans le calcul de abondances primordiales. Les traits pointillés représentent les réactions réciproques du type $a + b \leftrightarrow c + d$, alors que les traits pleins avec une flèche représentent les réactions du type $a + b \rightarrow c + d$, la réaction inverse étant toujours significativement défavorisée.

Conditions initiales

Comme nous le verrons, la quasi totalité des neutrons libres vont être incorporés, durant la nucléosynthèse, dans les noyaux d' ^4He . aussi est-il important de connaître l'évolution de la densité de neutrons au cours de l'expansion. L'équilibre entre neutrons et protons est établi par les processus d'interactions faibles suivants :



Lorsque ces réactions sont efficaces, c'est-à-dire lorsque leur taux de réaction sont grands comparés au taux d'expansion, l'équilibre chimique est atteint, et en

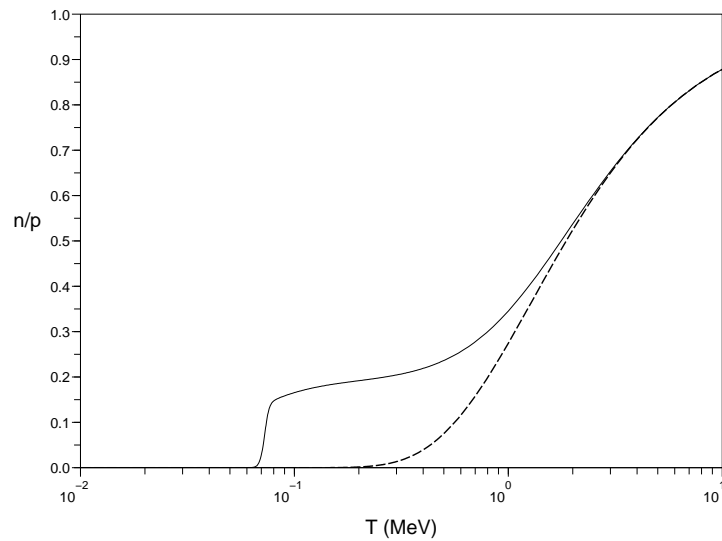


FIG. 2.2.4 – Evolution du rapport n/p en fonction de la température. La courbe en pointillés représente l'évolution du rapport n/p à l'équilibre thermodynamique (2.2.17) et la courbe en trait plein l'évolution de ce rapport au cours de la nucléosynthèse. On voit clairement le décrochage dû au gel des interactions faibles. La chute brutale du rapport vers 70 keV vient du fait qu'à cette température, les processus de nucléosynthèse incorporent la quasi-totalité des neutrons dans les noyaux atomiques.

Aux températures au voisinage de 1 MeV, l'équilibre statistique est encore valide pour les espèces nucléaires plus lourdes que les nucléons, et leur fraction de masse peut être calculée à partir de l'expression (2.2.15). on peut estimer grossièrement les températures pour lesquelles une espèce de nombre de masse A devient thermodynamiquement favorisée en résolvant l'équation $X_A \sim 1$; on trouve alors la relation :

$$T_A \sim \frac{B_A}{(A-1)(1.5 \ln(m_N/T_A) - \ln(\eta))}. \quad (2.2.20)$$

Pour la valeur de η rapportée ci-dessus, on obtient, $T_4 \sim 0.28$ MeV pour l' ^4He , $T_3 \sim 0.11$ MeV pour l' ^3He et $T_2 \sim 0.07$ MeV pour le deutérium. Ces températures relativement basses comparées aux énergies de liaison de ces noyaux s'expliquent par la forte entropie de l'Univers qui rend η très petit.

Synthèse des éléments légers

Nous venons de voir que les éléments légers étaient synthétisés à des températures voisines de 100 keV; c'est la phase centrale de la nucléosynthèse qu'il nous faut décrire dans ce paragraphe. Vers $T \sim 0.3$ MeV, la fraction de masse d' ^4He calculée par l'équilibre statistique est proche de 1; pourtant, la synthèse de l' ^4He ne commence que vers 0.1 MeV car les fractions de D, ^3He et ^3H ne sont pas alors suffisantes pour produire l' ^4He par les réactions⁹ : $\text{D}(\text{D},\text{n})^3\text{He}$, $\text{D}(\text{D},\text{p})^4\text{He}$, $\text{D}(\text{D},\gamma)^4\text{He}$ et $\text{D}(\text{D},\text{p})^3\text{H}$, $\text{D}(\text{D},\text{n})^4\text{He}$. Au moment de la synthèse de l' ^4He , la quasi-totalité des neutrons libres sont emprisonnés dans les noyaux d' ^4He , qui sont les noyaux légers les plus fortement liés; la fraction de masse obtenue est alors :

$$X_4 = \frac{4n_4}{n_N} = \frac{4(n_N/2)}{n_N} = \frac{2(n/p)_g}{1 + (n/p)_g} \sim 0.3 \quad (2.2.21)$$

On peut s'étonner du fait que des noyaux plus fortement liés, tels que ^{12}C ou ^{16}O ne soit pas produit; cela peut être relié à l'existence d'une barrière de Coulomb importante due à la répulsion entre protons. De plus, une fraction non négligeable de deutérium et d' ^3He n'est pas détruite par la production d' ^4He car les réactions citées ci-dessus se gèlent dès lors que ces fractions passent en dessous d'un certain seuil. Finalement, une petite fraction de ^7Li est également produite vers $T \sim 70$ keV. Les abondances prédites par le modèle standard sont :

⁹En effet, les taux de réactions dépendent linéairement des densités numériques des réactants. Dans la suite, nous adopterons la notation $a(b, c)d$ pour la réaction nucléaire $a+b \leftrightarrow c+d$ mettant en jeu les particules a,b,c et d, chacune pouvant être un noyau ou un photon; ces derniers seront conventionnellement notés γ .

$$\begin{aligned}
Y_p &= 0.2484_{-0.0005}^{+0.0004} \\
\text{D/H} &= 2.75_{-0.19}^{+0.24} \times 10^{-5} \\
{}^7\text{Li/H} &= 3.82_{-0.60}^{+0.73} \times 10^{-10} .
\end{aligned}$$

Nous reviendrons, dans la partie suivante de cette thèse, sur l'accord de ces prédictions avec les observations. Nous pouvons d'ores et déjà signaler que l'abondance d' ${}^4\text{He}$ est en très bon accord avec les observations, et que cette prédiction constitue un solide pilier du modèle standard de Big-Bang chaud.

2.2.5 Découplage et fond de rayonnement cosmologique

Dans l'Univers primordial, tant que la température est grande devant l'énergie de liaison des atomes d'hydrogène, photons et électrons sont fortement couplés par l'intermédiaire des diffusions Compton ; les électrons et les noyaux atomiques restent alors en équilibre avec le gaz de photons sous la forme d'un plasma emplissant l'Univers. Pendant ce temps, la matière sombre, qui n'est pas couplée aux photons par des processus électromagnétiques, subit un effondrement gravitationnel standard pour un fluide sans pression. Dès que la diffusion Compton n'est plus assez efficace, vers $T \sim 3000 \text{ K} \sim 0.26 \text{ eV}$, c'est-à-dire peu après l'égalité entre matière et rayonnement, les électrons et les noyaux se découplent des photons pour former les atomes électriquement neutres¹⁰. Les photons voient alors leur libre parcours moyen augmenter de façon importante et un fond diffus de rayonnement est libéré, que l'on appelle fond de rayonnement cosmologique. Les propriétés principales de ce fond diffus ont été prévues par Gamow [27] suivi de Alpher et Herman [26], puis il a été observé par Penzias et Wilson [28]. Si l'on néglige les faibles fluctuations de température, ce fond est homogène, caractérisé par un spectre de corps noir :

$$I(\nu, T) \propto \frac{\nu^3}{\exp(\nu/T) - 1} . \quad (2.2.22)$$

La température de ce corps noir a été mesurée avec une grande précision par l'expérience COBE [8]. Aujourd'hui, elle est de $T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}$. La figure 2.2.5 montre les mesures du spectre du fond de rayonnement comparées à celui d'un corps noir à la température de 2.726 K.

Ce spectre de corps noir permet de déduire que les photons du fond de rayonnement cosmologique ont une distribution de Planck à la température T_0 , si bien

¹⁰On attendrait naïvement que cette température soit comparable à l'énergie de liaison des atomes d'hydrogène ; en fait, elle est beaucoup plus faible car la recombinaison est retardée par la grande entropie de l'Univers.

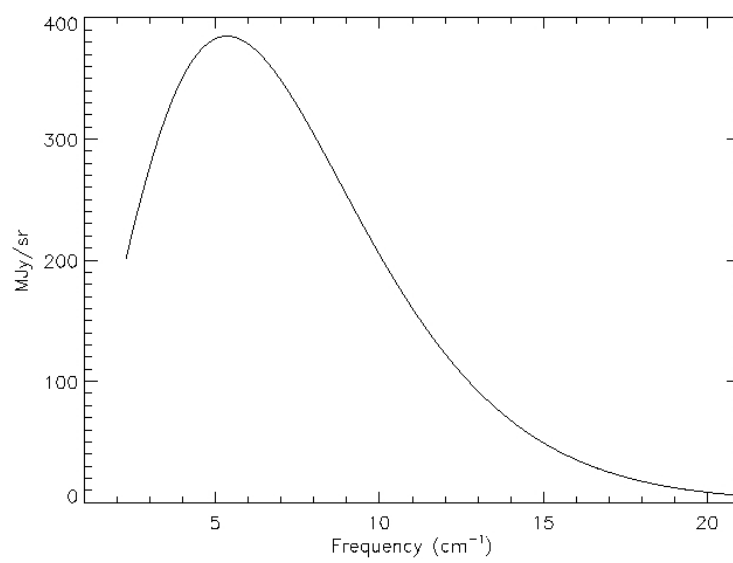


FIG. 2.2.5 – Spectre du fond de rayonnement cosmologique. Les barres d'erreur de la mesure sont tellement petites qu'elles sont cachées par la courbe d'ajustement. Extrait de [39].

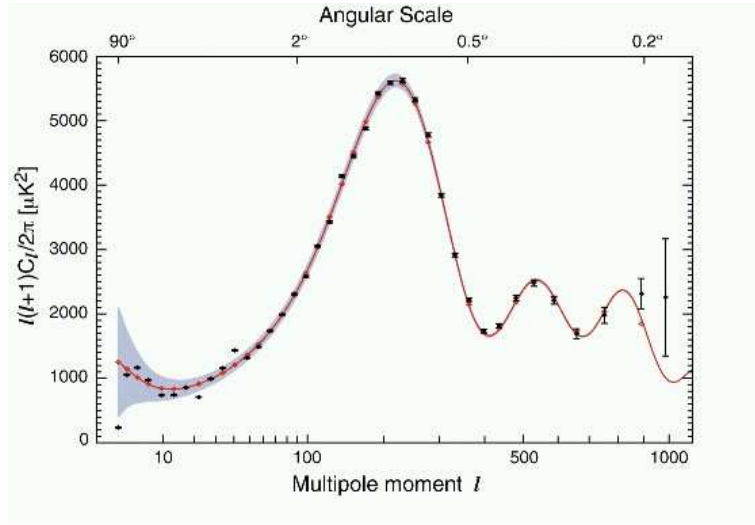


FIG. 2.2.6 – Résultats de WMAP : spectre de puissance des anisotropies du fond de rayonnement cosmologique obtenu par la mission WMAP. La courbe rouge montre le meilleur ajustement pour un modèle cosmologique standard en présence de matière sombre et d'une constante cosmologique. Obtenue à partir du site de WMAP [40].

que l'on peut déduire la densité numérique de photons dans l'Univers actuel : $n_{\gamma 0} \sim 410.44 \text{ cm}^{-3}$.

Cependant, la distribution de matière au moment du découplage n'était pas parfaitement homogène. Une fois retirée la composante homogène de corps noir, ainsi que le dipôle dû au mouvement de la Terre par rapport aux coordonnées comobiles, il reste dans la distribution des photons, une composante inhomogène d'amplitude relative $\Delta T/T_0 \sim 10^{-5}$, qui traduit les fluctuations de densité dans le plasma au moment du découplage. La faiblesse de ces fluctuations est à l'origine de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de notre Univers qui conduit à la formulation du principe cosmologique. Ces fluctuations, identifiées dans les observations de COBE, ont depuis été mesurées précisément par un ensemble d'expériences [8, 9, 10, 11, 12, 13], la plus spectaculaire étant certainement WMAP [12, 13], dont les résultats sont présentés par la figure 2.2.6. Les fluctuations dans la matière correspondantes sont les "graines" qui ont donné naissance aux structures cosmologiques actuelles.

On trouvera, dans la littérature, de nombreuses études détaillées des processus responsables de la forme du spectre présenté sur la figure 2.2.6 [41, 42]; nous décrivons ici qualitativement ce spectre. Pour le construire, on décompose le signal des fluctuations de température $\Theta(\theta, \phi)$ observé sur la sphère du ciel sur les

harmoniques sphériques $Y(\theta, \phi)$:

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) , \text{ avec } a_{lm} \in \mathbb{C} . \quad (2.2.23)$$

Puis, utilisant la base des polynômes de Legendre, on définit le spectre de puissance angulaire C_l , qui représente la variance des fluctuations de température à une échelle angulaire θ donnée, avec $l = \pi/\theta$:

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle . \quad (2.2.24)$$

Un phénomène saute immédiatement aux yeux : le spectre présente deux zones bien distinctes. Pour l inférieure à 90, c'est-à-dire pour des échelles angulaires plus grandes que 2° , le spectre de puissance est quasiment plat, alors que pour des échelles angulaires plus petites, on voit une suite de pics. Cette structure est bien comprise ; elle ressort d'une analyse de la physique du plasma photon-matière avant le découplage. L'échelle $l_d \sim 90$ correspond à la taille sur le ciel aujourd'hui de l'horizon sonique au moment du découplage. Les échelles plus petites étant entrées dans l'horizon avant le découplage ont connues une série d'oscillations acoustiques dues à la compétition des effets de pression et d'effondrement gravitationnel du plasma dans les puits de potentiel de la matière noire (qui, elle n'étant pas couplée aux photons, s'effondre sous l'effet de sa propre gravité). C'est pourquoi ces pics sont appelés pics acoustiques. Les échelles plus grandes que l_d , ne pouvant subir d'effets de pression causaux, ne présentent pas de structure en pics. La position du premier pic acoustique est donc reliée à la taille apparente sur le ciel de l'horizon au moment du découplage ; jouant ainsi le rôle d'une règle standard, elle donne une excellente estimation de la distance angulaire au découplage, et par conséquent, elle permet d'estimer la courbure de l'espace¹¹ $\Omega_k h^2$. La hauteur du premier pic, quant à elle, permet d'estimer la densité de matière totale $\Omega_m h^2$ car les échelles correspondantes n'ont connu qu'un effondrement. Enfin, la hauteur relative des deux premiers pics permet d'estimer la densité de baryons $\Omega_b h^2$. Nous reviendrons à ces contraintes dans la dernière section du présent chapitre.

2.2.6 Structuration à grande échelle de l'Univers

Après le découplage, la matière ordinaire est assimilable à un fluide sans pression. Elle va donc s'effondrer sous l'effet de sa propre gravité et par interaction gravitationnelle avec la matière sombre, qui s'effondre elle aussi. Durant toute l'ère dominée par la matière, ce phénomène d'effondrement va structurer l'Univers et

¹¹On a l'habitude de noter $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$, avec H_0 exprimé en km/s/Mpc.

faire émerger les galaxies et amas de galaxies pour les structures visibles, mais aussi les filaments de matière sombre et les vides¹². Nous avons vu qu'au moment du découplage de la matière et de la radiation, peu après le début de l'ère dominée par la matière, l'Univers était très homogène, les inhomogénéités dans le champ de matière étant de l'ordre de :

$$\left(\frac{\delta\rho_m}{\rho_m}\right)_{dec} \sim 10^{-3} . \quad (2.2.25)$$

Aujourd'hui, ce rapport est de l'ordre de 10^5 dans les galaxies, et de 10^2 à 10^3 dans les amas de galaxies. Après le découplage, la matière évolue librement sous l'effet de sa propre gravité. Les conditions initiales au moment du découplage sont telles que l'on peut décomposer la densité $\rho(t, \vec{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \vec{x})$ en une partie homogène¹³ $\bar{\rho}$ et une partie perturbée $\delta\rho$; on doit également inclure la vitesse particulière du fluide $\vec{v}(t, \vec{x})$ par rapport à l'expansion, avec $|\delta\rho| \ll \bar{\rho}$ et $\|\vec{v}\| \ll \bar{H}$. Au premier ordre des perturbations, durant l'ère dominée par la matière ($\Omega_m = 1$), on peut alors écrire une équation pour l'évolution du contraste de densité $\delta \equiv \delta\rho/\rho$:

$$\ddot{\delta} + 2\bar{H}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 . \quad (2.2.26)$$

La solution générale de cette équation peut être décomposée suivant deux modes indépendants, l'un croissant, et l'autre décroissant :

$$\delta_+(a) = \delta_+(1)a , \delta_-(a) = \delta_-(1)a^{-1} . \quad (2.2.27)$$

Avec, au moment du découplage, $\delta_+(a_{dec}) \sim 10^{-3}$, et $a_{dec} \sim 1/1100$, on trouve donc que le contraste de densité linéaire aujourd'hui est de l'ordre de $\delta_+(1) \sim 1$. L'écart avec les contrastes observés dans les galaxies et amas peut être relié au fait que ces objets sont déjà entrés dans le régime non-linéaire de l'effondrement gravitationnel, régime au cours duquel le contraste de densité croît beaucoup plus vite que durant la phase linéaire : typiquement, $\delta_{NL} \propto a^n$ avec $n \leq 3$. Les faibles perturbations de la distribution homogène de matière dans l'Univers primordial peuvent donc raisonnablement être les graines qui ont donné naissance aux structures que nous observons aujourd'hui.

Il est intéressant, pour des raisons tant observationnelles que théoriques, de considérer le contraste de densité $\delta(t, \vec{x}_1)$ à un temps donné t et en un point donné \vec{x}_1 , comme une variable aléatoire. Si on suppose cette distribution gaussienne, elle est entièrement caractérisée par son espérance $\langle \delta(t, \vec{x}_1) \rangle$ et sa variance $\langle \delta^2(t, \vec{x}_1) \rangle$. Comme nous disposons alors d'une infinité de variables aléatoires (une en chaque

¹²Dans cette sous-section, nous considérons un Univers de Friedmann plat rempli d'un fluide non relativiste : $\Omega_k = 0$ et $\Omega_\Lambda = 0$.

¹³Dans cette sous-section, toutes les quantités homogènes seront marquées d'une barre.

point de l'espace, à un temps donné), il est aussi crucial de connaître la covariance de cet ensemble de variables aléatoires : $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \langle \delta(t, \vec{x}_1) \delta(t, \vec{x}_2) \rangle$. Le symbole $\langle \cdot \rangle$ représente ici l'espérance probabiliste, c'est-à-dire une moyenne d'ensemble, définie, pour toute variable aléatoire réelle à valeur dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, par :

$$\langle Y(\vec{x}) \rangle \equiv \int_I y(\vec{x}) f_Y(y(\vec{x})) dy , \quad (2.2.28)$$

où f_Y est la densité de probabilité associée à la variable Y . Ces grandeurs théoriques nous sont hélas inaccessibles, car nous ignorons la loi de probabilité du contraste de densité local. En revanche, nous avons accès à la distribution spatiale du contraste de densité, il est donc commode d'invoquer ici une sorte de principe ergodique, mais spatial au lieu d'être temporel (comme il l'est habituellement en physique statistique), c'est-à-dire de considérer que les moyennes d'ensemble $\langle \cdot \rangle$ peuvent être approximées par des moyennes spatiales. Alors :

$$\langle \delta(t, \vec{x}) \rangle = \int_{\vec{x}} \delta(t, \vec{x}) f_\delta(\vec{x}) d^3x = 0 \text{ par définition} \quad (2.2.29)$$

$$\sigma_\delta^2(t) = \langle \delta^2(t, \vec{x}) \rangle = \int_{\vec{x}} \delta^2(t, \vec{x}) f_\delta(\vec{x}) d^3x , \quad (2.2.30)$$

$f_\delta(\vec{x})$ étant la densité de probabilité associée à la variable δ distribuée spatialement. Grâce à cette équivalence, la covariance $\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est la fonction de corrélation à deux points de la distribution spatiale du contraste de densité. L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie la force donc à ne dépendre que de la distance $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$, et dans la suite, on notera $\xi(r)$, pour r réel positif. On a immédiatement $\xi(0) = \sigma_\delta^2$. Il s'avère enfin très utile de considérer non pas l'espace réel, mais l'espace de Fourier associé :

$$\hat{\delta}(t, \vec{k}) \equiv \int \delta(t, \vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x . \quad (2.2.31)$$

Les modes \vec{k} sont des nombres d'onde, avec $\|\vec{k}\| = k = 2\pi/\lambda$, λ étant une longueur d'onde comobile. On définit finalement la quantité importante, qui contient toute l'information sur la distribution de matière (car les processus aléatoires sont supposés gaussiens) : le spectre de puissance $P(t, k)$, qui est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}(t, \vec{k}_1) \hat{\delta}(t, \vec{k}_2) \rangle &\equiv P(t, k_1) \delta_D(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) , \\ \text{avec } P(k) &= \int \xi(r) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r . \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

$\delta_D(\vec{u})$ est simplement l'opérateur usuel de Dirac. La figure 2.2.7 montre des exemples de spectres de puissance pour différents modèles. La solution croissante $\delta_+(t, \vec{x})$ de

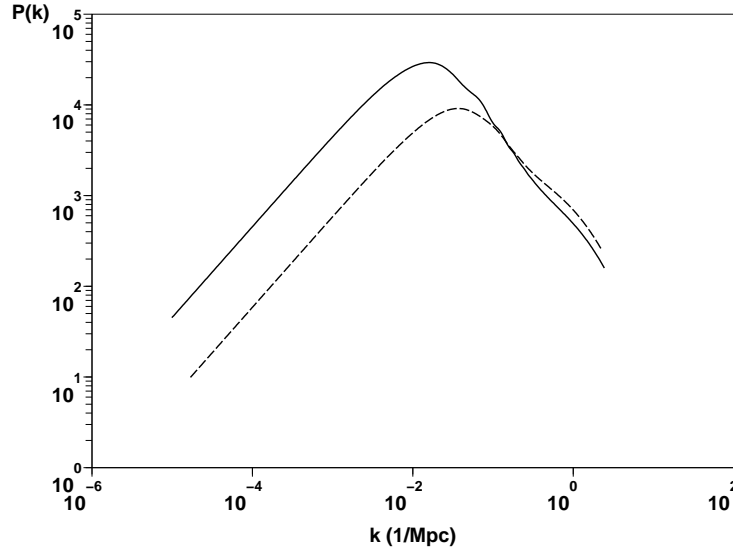


FIG. 2.2.7 – Spectres de puissance non linéaires avec $\Omega_{\Lambda,0} = 0.73$ et $\Omega_{m,0} = 0.27$ (trait plein) et avec $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ et $\Omega_{m,0} = 1$ (trait en pointillés).

(2.2.27) nous montre que durant l'ère de matière, et en régime linéaire, on a simplement : $P(t, k) = a^2(t)P(t_i, k)/a(t_i)$: le spectre de puissance conserve sa forme ; seule son amplitude augmente au cours du temps. Ceci est le reflet direct du mode de croissance linéaire, qui ne couple pas les modes de Fourier.

La forme détaillée des spectres de la figure 2.2.7 résulte de l'analyse de la croissance des fluctuations durant les ères de rayonnement et de matière. On en trouvera des études exhaustives dans les ouvrages classiques [43, 44, 45, 38].

2.2.7 Accélération tardive de l'Univers

Le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique peut être à peu près quelconque, tant on peut imaginer de contenus différents interagissant entre eux. Cependant, l'intuition physique permet d'écrire un certain nombre de conditions qu'un fluide "raisonnable" (c'est-à-dire communément utilisé) doit satisfaire. La première de ces conditions est dites condition d'énergie faible :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \forall V^\mu \in T_p \mathcal{M}, V^\mu \text{ de genre temps}, T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (2.2.33)$$

Pour un fluide parfait dont le tenseur énergie-impulsion est donné par (2.1.17), et un vecteur V^μ pris égal à la 4-vitesse d'un observateur comobile avec le fluide, cela se traduit par $\rho \geq 0$ en tout point de l'espace-temps, c'est-à-dire qu'un observateur

comobile observe un fluide d'énergie positive. Cela paraît être une hypothèse très faible. En adjoignant à la condition d'énergie faible la condition supplémentaire : ($\forall V^\mu \in T_p\mathcal{M}$, V^μ de genre temps, $T_{\mu\nu}V^\mu$ n'est pas de genre espace), on obtient la condition d'énergie dominante, qui assure pour les observateurs cosmologiques comobiles que $\rho \geq 0$ et que le flot local d'énergie est causal, c'est-à-dire : $\rho \geq |p|$. Enfin (bien que de façon non exhaustive), on mentionne souvent une dernière condition d'énergie, liée au comportement des géodésiques de genre temps : la condition d'énergie faible assure qu'un faisceau quelconque de géodésiques de genre lumière n'est pas divergent (c'est-à-dire que deux géodésiques voisines ne s'éloignent pas sous l'influence de la matière) ; on peut assurer la même chose pour les géodésiques de genre temps et on obtient la condition d'énergie forte :

$$\forall V^\mu \in T_p\mathcal{M}, V^\mu \text{ de genre temps, } T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq \frac{1}{2}V^\mu V_\mu T. \quad (2.2.34)$$

Pour un observateur comobile du fluide cosmologique, cela se traduit, si $\Lambda \equiv 0$, par :

$$\rho + p \geq 0 \text{ et } \rho + 3p \geq 0. \quad (2.2.35)$$

En examinant les équations de Friedmann (2.1.18)-(2.1.20), on constate qu'un fluide cosmologique respectant la condition d'énergie forte en l'absence de constante cosmologique mène nécessairement à $\ddot{a} \leq 0$, c'est-à-dire que dans un tel Univers, l'expansion des longueurs ne peut qu'être ralentie par la présence de la matière. C'est ce que l'on attend intuitivement de la gravitation. En écrivant le facteur d'échelle sous la forme d'un développement de Taylor, on a :

$$a(t) = 1 + H(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}q(t_0)H^2(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2). \quad (2.2.36)$$

Considérons alors une source émettant un rayonnement électromagnétique à un temps $t < t_0$. La distance comobile r parcourue par les photons entre cette source et un observateur placé au centre des coordonnées au temps t_0 est donnée par :

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.2.37)$$

A l'aide du développement (2.2.36) réécrit pour le décalage vers le rouge, on peut alors écrire :

$$t - t_0 = -\frac{1}{H_0}(z - (1 + \frac{1}{2}q_0)z^2) + o(z^2). \quad (2.2.38)$$

De plus :

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin^{-1}(\sqrt{kr}) & \text{si } k > 0 \\ r & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh^{-1}(\sqrt{-kr}) & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (2.2.39)$$

On peut donc déduire la relation entre distance et décalage vers le rouge :

$$r = \frac{1}{H_0} \left(z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 \right) + o(z^2) . \quad (2.2.40)$$

L'angle sous lequel est vue la source, celle-ci étant supposée de taille D petite devant la distance à l'observateur $a(t)r$, est donnée par :

$$\theta = \frac{D}{a(t)r} . \quad (2.2.41)$$

La distance angulaire de la source est alors :

$$d_A(z) \equiv \frac{D}{\theta} = a(t)r . \quad (2.2.42)$$

On peut alors, en utilisant la relation de réciprocity [46], écrire la distance de luminosité de la source :

$$d_L(z) = (1 + z)^2 d_A(z) = \frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 \right) + o(z^2) . \quad (2.2.43)$$

Cette dernière distance est mesurable car on peut la relier aux luminosités absolue L et apparente l de la source :

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} . \quad (2.2.44)$$

Ainsi, en identifiant les relations (2.2.43) et (2.2.44), on voit qu'une mesure conjointe de la luminosité apparente des sources extragalactiques et de leur décalage vers le rouge permet d'évaluer H_0 et q_0 , à condition que l'on connaisse la luminosité absolue de ces sources. C'est le concept de chandelle standard : si l'on est capable d'identifier dans l'Univers proche un type de source dont la luminosité absolue peut être calculée indépendamment du modèle cosmologique, et si ces sources sont comobiles avec l'expansion, alors on peut connaître le taux d'expansion et le paramètre de décélération de l'Univers actuel. Il est remarquable que les phénomènes stellaires fournissent un type de chandelle standard sous la forme des supernovae de type 1a (SN1a). Ce sont des explosions de naines blanches dont la luminosité est comparable à celle d'une galaxie entière, ce qui permet de les observer à des distances cosmologiques. Fort de ces marqueurs de l'expansion cosmologique, on peut donc estimer la relation distance/décalage vers le rouge. Pratiquement, on a plutôt l'habitude de représenter le module de distance $m - M$, donné en fonction de la distance de luminosité par :

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{10 \text{ pc}} \right) , \quad (2.2.45)$$

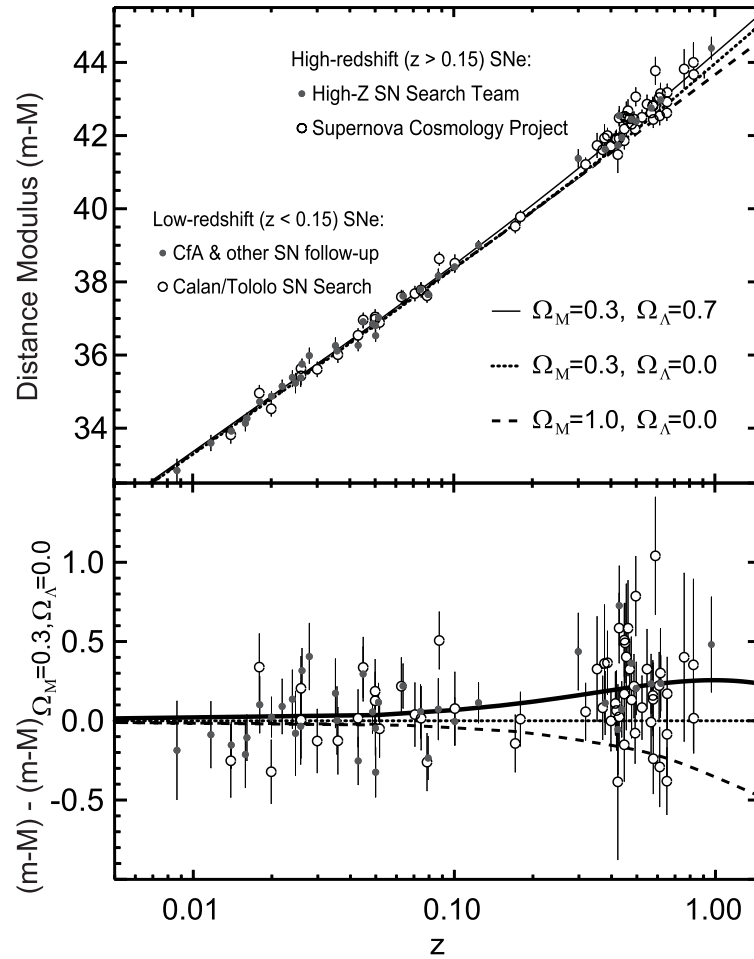


FIG. 2.2.8 – Relation entre le module de distance $m - M$ et le décalage vers le rouge mesuré à partir de l'observation des Supernovæ par le Supernova Cosmology Project et l'équipe de High- z Supernova (ainsi que CfA et l'équipe Calan/Tololo pour les faibles décalages spectraux ($z < 0.15$)). La figure du bas indique le module de distance relatif à celui d'un Univers avec $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0$. Tirée de [47].

où m est la magnitude apparente et M la magnitude absolue. La figure 2.2.8 présente les résultats des mesures effectuées par un ensemble de projets.

Toutes ces observations montrent que $q_0 < 0$, indépendamment du contenu matériel de l'Univers, puisque la relation (2.2.43) est purement cinématique. Dans le contexte des Univers de Friedmann-Lemaître, on peut donc dire que l'expansion de l'Univers accélère aux époques récentes. Cela est impossible si le contenu matériel est dominé par la matière non relativiste. C'est pourquoi l'étude de la relation luminosité/décalage vers le rouge est considérée dans le modèle standard de la cosmologie comme la preuve de l'existence d'une énergie dite sombre, de nature inconnue, qui domine l'évolution de l'Univers tardif et dont l'équation d'état effective est telle que $\ddot{a} > 0$, soit $p_{DE}/\rho_{DE} < -1/3$. Le cas le plus simple d'une telle énergie exotique, puisque violant la condition d'énergie forte, est celui d'une constante cosmologique. Les données actuelles sont pleinement compatibles avec une contribution constante aussi simple; la mesure précise de l'équation d'état effective de cette énergie sombre, et de son éventuelle variation au cours de l'expansion devrait permettre dans l'avenir de confirmer ou d'infirmer ce modèle simple, et de faire ainsi la lumière sur l'origine de cette contribution inattendue à la dynamique de l'Univers.

2.3 Le modèle de concordance

Nous avons vu jusqu'à présent ce qui caractérise la dynamique de l'Univers dans le modèle standard de la cosmologie, ainsi qu'une brève histoire des phénomènes physiques qui se sont déroulés au sein de celui-ci par le passé. Ce modèle simple possède un certain nombre de paramètres libres :

- La valeur actuelle du facteur de Hubble : H_0 ;
- Les densités adimensionnées : $\Omega_{DM}, \Omega_b, \Omega_R, \Omega_\Lambda$;
- Les conditions initiales pour les fluctuations dans le champ de matière.

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il existe de bonnes raisons de penser que le spectre des fluctuations primordiales est invariant d'échelle (ou quasiment invariant d'échelle). D'autre part, il est aujourd'hui possible, grâce à de multiples observations, de contraindre l'ensemble de ces paramètres, car chaque phénomène observé dépend de façon propre des paramètres. Ainsi, bien qu'il y ait des dégénérescences entre paramètres sur une observation donnée, l'utilisation conjointe d'observations à des époques différentes et sur des observables différentes permet de lever ces dégénérescences. C'est pourquoi le modèle standard de la cosmologie est souvent qualifié de modèle de concordance : on peut trouver un ensemble statistiquement favorisé de paramètres cosmologiques tel que l'analyse croisée de toutes les observations soit cohérente.

La figure 2.3.1 présente les contraintes d'une telle concordance dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$.

On voit que les contraintes issues des amas de galaxies sont très fortes sur la densité de matière totale (baryons et matière noire), mais mauvaises pour la densité de constante cosmologique. Parallèlement, les supernovae et le fond diffus cosmologique ont des dégénérescences dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, mais ces dernières sont différentes. Ainsi, le croisement de toutes ces contraintes permet de sélectionner une très petite zone de l'espace des paramètres, ce qu'aucune observation n'aurait pu faire individuellement.

L'ordre de grandeur des contraintes sur les paramètres cosmologiques déduites de cette concordance et que nous retiendrons par la suite sont :

$$\begin{aligned}\Omega_{\Lambda,0} &\sim 0.73 \\ \Omega_{m,0} &\sim 0.27 \\ |\Omega_{k,0}| &< 10^{-2} .\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

On voit en particulier que la courbure de l'Univers est très faible, et on suppose généralement pour une raison de simplicité qu'elle est nulle (nous verrons au chapitre suivant qu'il existe une raison à cette approximation). Cela vient essentiellement de l'analyse des fluctuations du fond de rayonnement : la taille sur le ciel de la surface de dernière diffusion prise comme règle standard de mesure impose en effet $1 - \Omega_{k,0} \sim 1$.

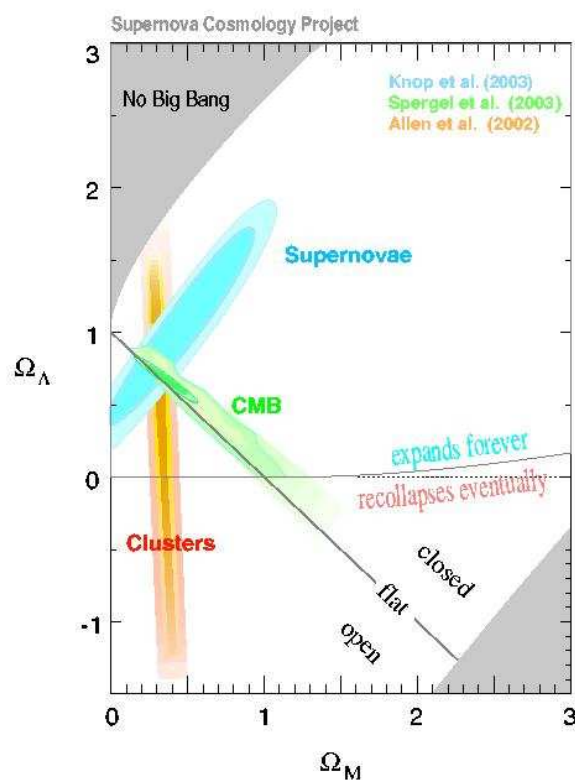


FIG. 2.3.1 – Contraintes statistiques dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, montrant la concordance de trois jeux d'observations différents : Supernovæ, fond de rayonnement cosmologique et amas de galaxies.

Chapitre 3

Au-delà du modèle standard : les champs scalaires en cosmologie

Le modèle standard que nous avons rapidement exploré dans le chapitre précédent est extraordinairement satisfaisant à bien des titres : il permet de comprendre l'histoire thermique de l'Univers, notamment les abondances des éléments légers et l'origine du fond de rayonnement cosmologique ; il explique la formation des structures grâce à l'instabilité gravitationnelle des faibles surdensités primordiales. Cependant, il laisse de côté un certain nombre de points cruciaux pour comprendre notre Univers :

- La nature des phénomènes qui fixent les conditions initiales du modèle de Big Bang chaud ; notamment l'explication de la platitude de l'Univers et de sa remarquable homogénéité.
- La nature des composantes sombres.

Nous allons voir que les champs scalaires cosmologiques apparaissent précisément au niveau de ces limites, comme des descriptions effectives tendant à éclaircir ces zones d'ombre du modèle standard, au moins en ce qui concerne les conditions initiales et la nature de l'énergie sombre. La matière sombre est un problème différent, que nous n'aborderons pas dans cet ouvrage.

3.1 Inflation

Le modèle standard souffre de deux problèmes majeurs de conditions initiales : la platitude et l'homogénéité. Nous avons vu que l'observation du fond de rayonnement cosmologique impliquait qu'aujourd'hui $|\Omega_{k,0}| < 10^{-2}$; c'est-à-dire que dans un modèle de Friedmann, l'Univers actuel est très proche de la platitude. Cepen-

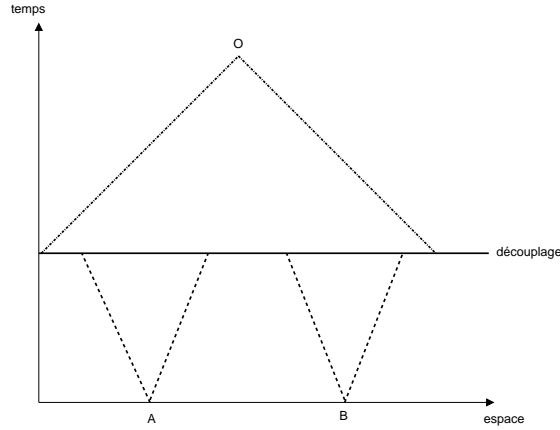


FIG. 3.1.1 – Régions causales au moment du découplage.

dant, lorsque l'on remonte dans le passé, on trouve que :

$$\Omega_k(z) \sim \frac{2\Omega_{k,0}}{\Omega_{m,0}} \frac{1 + z_{eq}}{(1 + z)^2}, \quad (3.1.1)$$

ce qui, avec les contraintes du modèle de concordance donne : $|\Omega_k(z)| < 100(1 + z)^{-2}$. Plus on remonte dans le passé de l'Univers, plus ce terme est faible ; au temps de Planck, temps initial du modèle de Big-Bang chaud, on a alors : $|\Omega_k(z_{Pl})| < 10^{-60}$. Pour que l'Univers soit plat aujourd'hui, il faut qu'il ait été extraordinairement plat à ses débuts ! La moindre déviation à la soixantième décimale au début de l'expansion entraînerait une erreur sur les paramètres cosmologiques actuels ; c'est un problème classique d'ajustement fin des conditions initiales. Le fond diffus est également révélateur d'une autre tension du modèle standard. Ce fond est effectivement homogène à 10^{-5} près sur l'ensemble du ciel. Or, l'angle apparent sur le ciel d'une région causalement connectée au moment du découplage est de l'ordre de 1° (il sous-tend une longueur caractéristique de $H^{-1}(z_{dec})$). La surface de dernière diffusion était donc, au moment du découplage, composée d'environ 10^9 régions causalement indépendantes (cf figure 3.1.1). Il est par conséquent impossible de justifier l'homogénéité du fond de rayonnement par un ensemble de processus causaux : il faut supposer qu'initialement, les 10^9 régions indépendantes étaient toutes quasiment dans le même état thermique. C'est encore un problème d'ajustement fin des conditions initiales, dit problème de l'horizon.

Il existe un mécanisme capable de résoudre ces problèmes, tout en permettant également d'expliquer l'origine des fluctuations de densité ayant donné naissance aux structures : c'est ce que l'on appelle le paradigme de l'inflation. Il s'agit d'introduire, au début de l'histoire de l'Univers, avant le modèle standard dont nous

avons parlé une phase très courte d'expansion fortement accélérée :

$$\ddot{a}(t) > 0 . \quad (3.1.2)$$

Pour avoir une phase d'accélération initiale, en négligeant la constante cosmologique (négligeable à ce moment-là puisqu'elle ne contribue que dans l'Univers tardif), nous avons vu qu'il faut que le fluide cosmologique vérifie : $\rho + 3p < 0$, ou $\omega = p/\rho < -1/3$. Or, nous avons l'équation d'évolution tirée de (2.1.29)-(2.1.31) :

$$\Omega'_k = (1 + 3\omega)\Omega_k(1 - \Omega_k) . \quad (3.1.3)$$

Ainsi, durant une phase d'accélération, comme $(1 + 3\omega) < 0$, $\Omega_k = 0$ est un point fixe stable de la dynamique, alors que dans les phases ultérieures, dominées par la radiation puis par la matière non relativiste, c'est un point fixe instable. Il faut donc que la phase d'accélération soit suffisante pour compenser la déviation qui va résulter des phases ultérieures. Entre l'instant initial t_i et l'instant final t_f de l'inflation, on a la relation :

$$\left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| = \left(\frac{a(t_i)H(t_i)}{a(t_f)H(t_f)} \right)^2 \equiv \exp(-2N) \left(\frac{H(t_i)}{H(t_f)} \right)^2 ; \quad (3.1.4)$$

où l'on a défini le nombre de "e-folds" $N = \ln(a(t_f)/a(t_i))$. D'autre part, la condition (3.1.2) implique que le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ diminue au cours de l'inflation :

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 . \quad (3.1.5)$$

Autrement dit, deux points qui étaient à une distance inférieure au rayon de Hubble (donc en contact causal) au début de l'inflation, peuvent ne plus être en contact causal à la fin de l'inflation (cf figure 3.1.2). Afin de résoudre le problème de l'horizon, il suffit que l'Univers observable aujourd'hui ait été une région causale au début de l'inflation, soit : $(a(t_i)H(t_i))^{-1} \geq H_0^{-1}$. En introduisant (3.1.4) dans cette condition, et en supposant que lorsque l'inflation se termine, on rentre dans l'ère dominée par la radiation, on a par continuité : $H(t_f)^2 = H_0^2 \Omega_{R,0} a(t_f)^{-4}$, et on trouve :

$$a(t_f)^{-2} \Omega_{R,0} \left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| \leq 1 . \quad (3.1.6)$$

Or, si l'on souhaite résoudre le problème de la platitude, il faut que $\Omega_k(t_f) \geq 10^{-60}$, et que $\Omega_k(t_i) \sim O(1)$, donc, pour résoudre conjointement les problèmes de platitude et de l'horizon, on peut écrire la condition suffisante :

$$10^{-60} a(t_f)^{-2} \Omega_{R,0} \leq 1 , \quad (3.1.7)$$

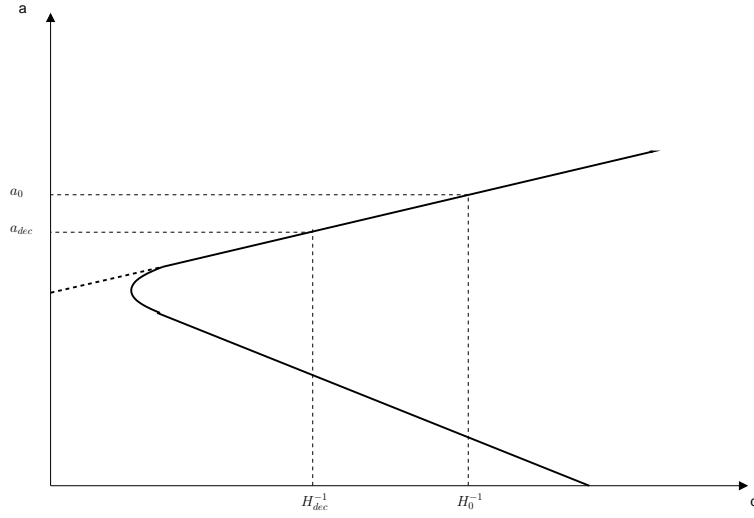


FIG. 3.1.2 – Evolution de rayon de Hubble comobile.

qui permet de trouver une contrainte sur la température à la sortie de l'inflation T_f :

$$T_f \leq 10^{18} \text{ GeV.} \quad (3.1.8)$$

Ainsi, une phase d'expansion accélérée permet sous certaines conditions de résoudre les problèmes du Big Bang chaud. Reste à comprendre comment une telle phase est susceptible de se produire. C'est là que les champs scalaires entrent en jeu. En effet, la façon classique d'introduire une phase d'inflation dans le modèle cosmologique consiste à supposer que dans l'Univers primordial existe un champ scalaire φ , appelé inflaton, qui domine la dynamique de l'Univers¹. Si l'inflation dure suffisamment longtemps, la courbure peut être négligée devant la contribution de φ à l'énergie totale, et on peut alors écrire les équations :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3} (V(\varphi) - \dot{\varphi}^2) \quad (3.1.10)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi}(\varphi) = 0, \quad (3.1.11)$$

¹Il existe également des formulations à plusieurs champs scalaires, dites génériquement inflation hybride. Les mécanismes à l'oeuvre sont analogues au cas d'un champ, et nous n'aborderons pas les subtilités de ces modèles ici.

où $V(\varphi)$ est le potentiel de l'inflaton.

Durant la phase d'inflation, comme l'on veut avoir $\ddot{a} > 0$ pendant suffisamment longtemps, le champ doit être en roulement lent, c'est-à-dire varier peu :

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \text{ et } \ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} . \quad (3.1.12)$$

Ces deux conditions peuvent être réécrites :

$$\left(\frac{dV/d\varphi}{V(\varphi)} \right)^2 \ll 24\pi G \text{ et } \frac{|d^2V/d\varphi^2|}{V(\varphi)} \ll 24\pi G . \quad (3.1.13)$$

Le potentiel de l'inflaton doit donc être très plat.

Nous allons illustrer ce mécanisme sur un exemple simple d'inflation à grand champ :

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \quad (3.1.14)$$

Pendant la phase de roulement lent, la solution est donnée par :

$$\varphi(t) = \varphi_i - \frac{mm_p}{\sqrt{12\pi}}(t - t_i) \quad (3.1.15)$$

$$a(t) = a_i \exp\left(\frac{2\pi}{m_p^2}(\varphi_i^2 - \varphi^2(t))\right) . \quad (3.1.16)$$

où l'on a noté $m_p = G^{-1/2}$ la masse de Planck, $a_i = a(t_i)$ et $\varphi_i = \varphi(t_i)$, t_i étant le temps initial. Ce roulement lent se termine dès que les conditions (3.1.13) ne sont plus vérifiées, c'est-à-dire à l'instant t_f pour lequel $\varphi_f = m_p/\sqrt{4\pi}$. Le nombre total de "e-folds" est alors :

$$N = 2\pi \left(\frac{\varphi_i}{m_p} \right)^2 - \frac{1}{2} . \quad (3.1.17)$$

Revenant à l'équation (3.1.4), comme H est presque constant au cours du roulement lent, on a :

$$\left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| = \exp(-2N) ; \quad (3.1.18)$$

si bien que la condition :

$$|\Omega_k(t_f)| \leq 10^{-60} \text{ et } |\Omega_k(t_i)| \sim O(1) \quad (3.1.19)$$

mène à $N \geq 70$, soit $\varphi_i \geq 3m_p$. On peut également vérifier que le problème de l'horizon est résolu par ce modèle. Il semble donc que l'on ait résolu les problèmes de conditions initiales du modèle standard ; c'est d'autant plus vrai que les prédictions de l'inflation ne dépendent quasiment pas de la condition initiale à t_i : il suffit dans

notre exemple que $\varphi_i \geq 3m_p$. Mais l'inflation fait mieux que cela ; les fluctuations quantiques de l'inflaton durant la phase de roulement lent sont données par :

$$|\delta\varphi(x)| \sim \frac{H(\varphi)}{2\pi} . \quad (3.1.20)$$

Or, au cours de la phase de roulement lent, $H(\varphi)$ est à peu près constant. On peut alors montrer que le spectre des fluctuations de φ est quasiment indépendant de l'échelle k . Or, après la phase de roulement lent, l'inflaton oscille rapidement dans le puits de son potentiel. S'il est couplé aux autres champs, il est alors converti dans ces champs : c'est le mécanisme de "réchauffage". Le spectre des fluctuations de ces champs est alors proportionnel à celui des fluctuations de φ , et donc indépendant de l'échelle :

$$\frac{\delta\rho(k)}{\rho} \sim cste. \quad (3.1.21)$$

Ces fluctuations, générées au cours de l'inflation, sont alors à l'origine des inhomogénéités observées dans le fond de rayonnement cosmologique, et donc les graines dont viennent les structures actuelles de l'Univers. Une description complète de l'inflation et de sa phénoménologie, détaillant les résultats présentés succinctement ici, peut être consultée dans [48, 49].

3.2 Quintessence

Dans la section précédente, l'introduction d'un champ scalaire, l'inflaton, dominant la dynamique de l'expansion au début de l'histoire de l'Univers, a permis de résoudre les problèmes de conditions initiales du modèle standard. Nous avons vu que la clé de ce succès résidait dans le fait que l'inflaton est responsable d'une phase d'expansion accélérée, cette accélération venant essentiellement de la platitude du potentiel du champ scalaire. Or, il semble que l'Univers connaisse (ou du moins ait connu) une seconde phase d'accélération, celle-ci tardive. Dans le modèle standard, cette accélération est attribuée à la présence d'une constante cosmologique ; cependant, ce scénario n'est pas sans poser quelques problèmes

3.2.1 Les problèmes de la constante cosmologique

Les données cosmologiques semblent donc favoriser la présence d'une constante cosmologique Λ telle que :

$$\Omega_{\Lambda,0} \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \sim 0.7 . \quad (3.2.1)$$

Compte tenu de la valeur de $H_0 \sim 70$ km/s/Mpc, cette relation donne : $\Lambda \sim 10^{-84}$ GeV², ou $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G \sim 10^{-47}$ GeV⁴. On peut concevoir la constante cosmologique de deux manières : soit il s'agit d'une constante de la nature, traduisant

une propriété particulière de notre espace-temps, soit elle émerge de processus microscopiques et apparaît comme une contribution énergétique au tenseur énergie-impulsion total du contenu matériel de l'Univers. Hélas, aucune de ces deux conceptions n'est, à l'heure actuelle, satisfaisante.

D'une part, voir la constante cosmologique comme une simple constante de la nature apparaît un peu artificiel. En effet, il faut noter que les constantes de la physique sont habituellement des constantes multiplicatives, c'est à dire qu'elles servent à convertir des grandeurs dans une unité donnée en d'autres grandeurs dans une autre unité (la vitesse de la lumière transforme les temps en distances, la constante de Planck les fréquences en énergies etc.) et apparaissent dans les lois comme des constantes multiplicatives. D'une certaine manière, on peut dire qu'elles servent d'étalon à nos mesures. Ce n'est pas le cas de la constante cosmologique, qui est une constante additive. Dans l'action, c'est bien une constante multiplicative, à savoir qu'elle multiplie la métrique ; cependant, elle ne garde pas ce statut dans les équations du mouvement, à la différence des constantes telles que c ou \hbar (qui n'apparaissent jamais comme additives). En physique on trouve deux types de constantes de la nature : les couplages et les limites. La constante cosmologique n'appartient manifestement pas à la première catégorie. Elle pourrait être de la deuxième catégorie, comme limite inférieure de l'énergie contribuant à la gravitation, comme si la densité des champs saturait à ρ_Λ . A ma connaissance, aucun mécanisme n'est à même d'expliquer une telle saturation.

D'autre part, on peut considérer Λ comme une contribution particulière à l'énergie-impulsion. Compte tenu de l'équation d'état effective correspondante, $p_\Lambda/\rho_\Lambda = -1$, une seule source paraît aujourd'hui correspondre : l'énergie du vide des champs. Or, en l'état actuel de la théorie quantique des champs, cette densité d'énergie est divergente. Pour des champs de masse m , elle est donnée par :

$$\rho_{vac} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (3.2.2)$$

qui possède une divergence ultraviolette en k^4 . On peut cependant l'évaluer en introduisant une coupure dans le spectre des fluctuations, k_m , à l'échelle jusqu'à laquelle la théorie des champs reste valable : $\rho_{vac} \sim k_m^4/16\pi^2$. Pour différentes coupures nous avons donc :

- $\rho_{vac} \sim 10^{74}$ GeV⁴ si $k_m \sim m_p$,
- $\rho_{vac} \sim 10^{-3}$ GeV⁴ si $k_m \sim \Lambda_{QCD} \sim 10^{-1}$ GeV, échelle caractéristique de la chromodynamique.

Le désaccord de ces estimations avec la valeur déduite de la cosmologie (3.2.1) est patent ; de plus la contribution de cette énergie du vide devrait largement dominer la dynamique de l'Univers depuis ses origines, ce qui n'est manifestement pas le cas. C'est le fameux problème de la constante cosmologique [50]. Il existe de

nombreuses tentatives pour résoudre ce problème : scénarios supersymétriques (en supersymétrie, il y a autant de bosons que de fermions ; les deux familles contribuant à ρ_{vac} avec des signes opposés, leurs contributions devraient se compenser), supergravité, modèles inspirés de la théorie des cordes (cf [51] partie IV pour un état de l'art et les références). Une tentative intéressante consiste à considérer que l'énergie du vide n'est pas mesurable, et que ce sont les fluctuations de la densité d'énergie du vide qui contribuent à ρ_Λ ([52]).

La faiblesse de ρ_Λ , alliée au problème décrit ci-dessus, a ainsi rendu possible une autre démarche, qui consiste à supposer une raison inconnue pour laquelle $\Lambda = 0$, et à étudier l'éventualité d'une énergie sombre dynamique, le modèle le plus simple d'une telle composante dynamique étant...un champ scalaire, appelé quintessence.

3.2.2 La quintessence

Dans les premiers modèles d'énergie sombre présentant une alternative à la constante cosmologique, la quintessence est un champ scalaire ϕ minimalement couplé au champ de gravitation, possédant un potentiel $V(\phi)$, et ne présentant aucun couplage direct aux autres champs de matière. Son action est simplement :

$$S_\phi = \int \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x . \quad (3.2.3)$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons que le modèle de Friedmann est plat : $k = 0$. Les équations des champs dans ce contexte prennent la forme suivante :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3p + 2V(\phi) - 2\dot{\phi}^2 \right) \quad (3.2.5)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 , \quad (3.2.6)$$

où ρ et p représentent, respectivement, la densité d'énergie et la pression du fluide cosmologique. L'équation d'état de la quintessence est :

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} , \quad (3.2.7)$$

et dépend a priori du temps. Lorsque le champ scalaire domine la dynamique (on néglige ρ et p), l'accélération de l'expansion se produit lorsque : $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, le cas d'une inflation correspondant à $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, c'est-à-dire $w_\phi \sim -1$. Si l'on cherche,

toujours dans le cas d'une expansion dominée par le champ scalaire, des solutions de la forme $a(t) \propto t^n$ (accélération pour $n > 1$), on peut reconstruire le champ scalaire correspondant. Son potentiel est donné par :

$$V(\phi) = \frac{n(3n-1)}{8\pi G} \exp\left(-2\sqrt{\frac{4\pi G}{n}}\phi\right). \quad (3.2.8)$$

Ainsi, tout modèle avec un potentiel décroissant moins vite que l'exponentiel pourra produire une phase d'accélération. C'est pourquoi les premiers modèles de quintessence possédaient des potentiels en lois de puissance inverse :

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}, \quad (3.2.9)$$

où M est une échelle de masse, et α un réel positif. Ce sont les potentiels de Ratra-Peebles [53]. Afin qu'un tel potentiel soit à l'origine de l'énergie sombre, il faut [53] :

$$\phi(t_0) \sim m_p \text{ et } M = (\rho_\Lambda m_p^{\alpha-2})^{1/(4+\alpha)}. \quad (3.2.10)$$

Ces potentiels sont relativement ad hoc, mais il est possible de motiver une forme de potentiel relativement similaire à partir de la physique des particules, en utilisant la supergravité [54, 55] :

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\phi^2\right). \quad (3.2.11)$$

On trouvera une étude détaillée de la dynamique des champs de quintessence dans plusieurs articles [56, 57, 58]. La propriété essentielle de ces modèles est l'existence d'attracteurs de la dynamique prenant la forme de solutions en lois de puissances, tels que : $\rho_\phi/\rho = cste$. Cela permet de résoudre les problèmes d'ajustement fin de l'énergie sombre, dans la mesure où la densité du champ scalaire, pour toutes les conditions initiales, rejoint cet attracteur et "traque" la densité de la matière qui domine la dynamique. Afin d'illustrer cette propriété, considérons les potentiels (3.2.8) et (3.2.9) présentés ci-dessus. Pour les potentiels $V_1(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\phi)$ et $V_2(\phi) = \Lambda^{4+\alpha}\phi^{-\alpha}$, l'équation d'état du champ scalaire en présence d'un fluide de matière d'équation d'état w_b dominant la dynamique de l'expansion est donnée par [53] (pour $k = 0$) :

$$w_{\phi,1} = w_b, \quad (3.2.12)$$

$$w_{\phi,2} = \frac{\alpha w_b - 2}{\alpha + 2}. \quad (3.2.13)$$

Pendant les ères dominées par la radiation, puis la matière, l'équation d'état du champ scalaire est donc une fonction affine simple de l'équation d'état du fluide

dominant, et les solutions en lois de puissance associées sont des attracteurs (ce que l'on peut démontrer en linéarisant l'équation du champ au voisinage des solutions en lois de puissance). L'introduction d'un champ de quintessence semble donc résoudre l'un des problèmes posés par la constante cosmologique : grâce aux attracteurs en lois de puissance les conditions initiales n'ont pas besoin d'être ajustées précisément afin d'expliquer l'énergie sombre aujourd'hui. Cependant, l'échelle d'énergie du potentiel, par exemple $M = (\rho_\Lambda m_p^{\alpha-2})^{1/(4+\alpha)}$ pour le potentiel de Ratra-Peebles, bien que pouvant maintenant être fixée au alentour du TeV, demande encore un ajustement fin. Enfin, le fait que le champ scalaire n'interagisse pas explicitement avec les autres champs de matière apparaît également peu naturel. C'est pourquoi on a introduit des quintessences couplées à la matière, ce qui, en pratique, revient à considérer des modifications de la gravité dont un cas particulier sont les théories scalaire-tenseur, dont nous parlerons dans la partie suivante de cet ouvrage. On trouvera des détails sur ces quintessences couplées dans [59, 60, 61, 62, 63] et les références citées dans ces articles. Signalons également, dans la même famille, la possibilité intéressante d'expliquer l'accélération tardive de l'Univers à l'aide d'un champ scalaire non minimalement couplé, avec des couplages différents pour la matière sombre et la matière ordinaire (ce qui implique une violation du principe d'équivalence faible) [64].

Deuxième partie

Le principe d'équivalence en
cosmologie : une exploration à l'aide
des théories scalaire-tenseur de la
gravité

Chapitre 4

Introduction aux théories scalaire-tenseur de la gravité

4.1 Pourquoi des théories scalaire-tenseur ?

Les théories scalaire-tenseur ont une filiation double, nées d'une part, très tôt, de la prise en compte de dimensions supplémentaires [65], et, d'autre part, de questionnements sur le principe d'équivalence et sur la possibilité d'étendre celui-ci dans un cadre plus large que la Relativité Générale [66, 67, 68]. Avant d'aborder ces théories du point de vue de la cosmologie moderne, il est donc essentiel de faire un rapide détour par leurs origines, détour qui éclairera leur forme actuelle et leur importance dans les discussions sur la nature de la gravitation.

4.1.1 Retour sur le principe d'équivalence

Dans la première partie, nous avons vu que la Relativité Générale telle que construite par A. Einstein reposait sur un principe clé : le principe d'équivalence. Dans sa version faible, c'est-à-dire celle testée par les expériences du type de l'expérience historique d'Eötvös, il peut être formulé ainsi :

Principe d'équivalence d'Einstein (PEE) :

Toutes les lois non gravitationnelles de la physique peuvent être formulées, localement, comme si le champ de gravitation était absent.

On sait que dans le cadre de la Relativité Générale, cela se traduit par le fait que, localement, la variété d'espace-temps est difféomorphe à un espace-temps de Minkowski, si bien que les lois de la physique (comme par exemple l'électrodynamique) sont, localement, celles formulées dans le cadre d'une théorie respectant la

Relativité Restreinte. En fait, ce principe et une extension du principe d'équivalence faible, ou mécanique, formulé par Galilée et Newton, qui suppose que les masses inertielle et gravitationnelle passive sont égales, ou, formulé autrement, que dans un champ de gravitation externe, les corps tombent tous de la même manière, indépendamment de leur constitution interne et de leur masse. Cependant, il s'avère que par construction, la Relativité Générale va plus loin que ce qui est énoncé dans le principe d'équivalence d'Einstein : non seulement les lois de la physique peuvent être formulées comme si le champ de gravitation était absent, mais encore leur contenu numérique, c'est-à-dire les constantes fondamentales, doivent être les mêmes en tout point de l'espace-temps. Cette propriété structurelle de la Relativité Générale peut être reliée au fait que la gravitation y est décrite par le seul tenseur métrique. On peut pourtant imaginer un cadre théorique plus étendu, dans lequel la gravitation ne serait plus seulement véhiculée par un tenseur métrique, mais par un tenseur métrique et un ou plusieurs champs additionnels de nature scalaire ou vectorielle par exemple. Afin de respecter le principe d'équivalence dans sa version faible, les champs additionnels devront avoir des couplages spécifiques. C'est dans cet esprit que C. Brans et R. H. Dicke [68] ont introduit, en 1961, la désormais célèbre théorie qui porte leurs noms. L'adjonction de champs supplémentaires était motivée, dans leur travaux, par une tentative de formulation claire et non ambiguë d'une théorie de l'espace-temps qui incorporerait le principe de Mach ou du moins une version affaiblie de celui-ci. En effet, C. Brans et R. H. Dicke soulignent dans leur article [68] que l'invariance du contenu numérique des lois de la dynamique n'est pas compatible avec l'idée de Mach selon laquelle l'inertie des corps doit être reliée à leur accélération relativement à la distribution locale de matière (c'est là l'affaiblissement par rapport à la formulation originelle de Mach, et à la tentative de Dirac [66] qui traitent plutôt de l'ensemble de la distribution de matière dans l'Univers). Aussi ont-ils formulé un cadre théorique dans lequel des expériences non gravitationnelles locales ne peuvent mettre en évidence la présence d'un champ de gravitation, respectant ainsi le principe d'équivalence d'Einstein stricto sensu, tout en permettant une variation spatio-temporelle du contenu numérique des lois physiques. Considérant l'extension la plus simple, ils ont supposé que la gravitation était en partie métrique, et en partie due à l'effet d'un champ scalaire Φ , et ont écrit l'action suivante :

$$S = \int \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{16\pi}{c^4} L_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m] \right) \sqrt{-g} d^4x . \quad (4.1.1)$$

Ici, le champ scalaire Φ , qui a pour dimension $ML^{-3}T^2$ joue le rôle de l'inverse d'un couplage gravitationnel $G(x^\mu)$ qui peut a priori varier suivant la position dans l'espace-temps, et le facteur $1/\Phi$ devant le terme cinétique de Φ permet à la seule constante, ω , d'être sans dimension. On voit que le principe d'équivalence d'Einstein découle du fait que Φ n'intervient pas explicitement dans le lagran-

gien de matière $L_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m]$, dans lequel les champs de matière symbolisés par Ψ_m ne se couplent qu'au tenseur métrique. Ainsi, localement, on peut toujours choisir des coordonnées dans un référentiel en chute libre tels que la métrique se réduisent à la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Le lien avec le principe de Mach n'est pas évident a priori, mais il faut se souvenir que les seules grandeurs pertinentes en physique sont celles exprimées sans dimension. Or, la grandeur $m_{pl} = (\hbar c/G)^{1/2}$, dite masse de Planck est la seule masse que l'on puisse former à partir des deux constantes fondamentales \hbar et c , et du couplage caractéristique de la gravitation G . Ainsi, la masse inertielle d'une particule, pour avoir un sens, peut être comparée, en tout point de l'espace-temps à cette masse. On voit alors que la seule variation décelable est celle du produit $m_I\sqrt{G}$: on peut par conséquent reformuler toute variation de la constante de gravitation en terme d'une variation de la masse inertielle ; ce point important ne sera pas approfondi ici car il fera l'objet d'un traitement précis et de remarques lorsque nous aborderons les théories scalaire-tenseur générales. Cependant, il est lié à un important problème sémantique concernant les théories scalaire-tenseur. On peut lire ou entendre, souvent, que les théories scalaire-tenseur, tout en respectant le principe d'équivalence dans sa version faible, viole explicitement une version plus forte de ce principe d'équivalence. Cette version plus forte se réfère tantôt à l'invariance du contenu numérique des lois non gravitationnelles par déplacement de la position de l'expérience dans l'espace-temps, tantôt au fait que le couplage gravitationnel est une constante dans l'espace-temps. En fait ces deux ajouts au PEE sont intimement liés, sinon même complètement équivalents, et par la suite, on appellera principe d'équivalence fort (PEF) l'un ou l'autre de ces points de vue, et on tentera, lors d'une discussion sur les représentations conformes des théories scalaire-tenseur de montrer que ces deux formulations du PEF ne sont que des formulations différentes d'une même phénoménologie. On voit donc que dès l'origine, les théories scalaire-tenseur plongent leurs racines dans d'importantes questions sur la nature même de la gravitation et son lien avec une interprétation métrique des phénomènes qui lui sont associés. L'autre programme qui a vu émerger des théories scalaire-tenseur est lui aussi associé à des questions fondamentales quant à la structure de notre espace-temps, à savoir le nombre et la nature des dimensions de celui-ci.

4.1.2 Un détour par la physique des hautes énergies

Dès 1955, P. Jordan [65], en essayant de plonger une variété courbe quadridimensionnelle dans un espace-temps plat à 5 dimensions est conduit, tout en analysant les liens de sa théorie avec celle de Kaluza et Klein [69, 70], à proposer une action similaire à celle que C. Brans et R. H. Dicke proposeront quelques années plus tard dans le contexte présenté ci-dessus. La seule différence fondamentale avec l'action (4.1.1) vient de ce que le lagrangien de matière dépend également,

dans le travail de P. Jordan du champ scalaire Φ , introduisant ainsi une violation explicite du PEE. Ce n'était là que les balbutiements d'un programme d'envergure qui va traverser la deuxième moitié du XX^{ème} siècle et qui aujourd'hui se poursuit encore : la construction d'espaces internes compacts reliés aux symétries internes des particules à la Kaluza-Klein, les limites de basses énergies de la théorie des cordes, ou les modèles branaires inspirés de cette même théorie des cordes sont autant d'exemples de tentatives théoriques d'unification du champ de la physique qui ont mené à l'apparition de champs scalaires du type scalaire-tenseur, bien que génériquement ces champs ne respectent pas le PEE.

La présentation exhaustive de ces modèles de physique de hautes énergies sort largement du cadre de ce mémoire, mais il est intéressant de voir émerger une structure à basses énergies similaire (bien que différentes sur des aspects importants, notamment la violation du PEE) à celle, plus phénoménologique, introduite par C. Brans et R. H. Dicke sur un exemple simple.

D'après une idée originale de Kaluza [69], plus tard réactualisée dans le contexte de la théorie des cordes [71, 72], on suppose ici que la Relativité Générale est une description valable de la dynamique d'un espace-temps à $D = (4 + n)$ dimensions dont n dimensions spatiales sont compactifiées le long de cercles de 'petit' rayon $A(x^a)$ où x^a représente les coordonnées sur l'espace 'externe' à quatre dimensions ; ce rayon est choisi suffisamment petit, de sorte que l'espace tel qu'un observateur macroscopique, c'est-à-dire à basse énergie, le perçoit est constitué de quatre dimensions d'extension infinie. Dans la suite, les indices a, b, c sont attachés aux coordonnées sur l'espace-temps à quatre dimensions, les indices μ, ν à celles de la variété à $D = (4 + n)$ dimensions, et α, β, γ à celles des dimensions compactes. Le choix de la métrique à $D = (4 + n)$ dimensions n'est pas unique, et on choisira ici, par souci de clarté, l'ansatz suivant :

$${}^{(D)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab}(x^c) & 0 \\ 0 & A^2(x^c)\tilde{g}_{\alpha\beta}(\theta^\gamma) \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Cela revient essentiellement à ne pas prendre en compte les termes non-diagonaux (par blocs) qui représentent des champs vectoriels de jauge. Les coordonnées θ^γ , $\gamma \in 1, 2, 3, \dots, n$, sont des coordonnées angulaires sur les dimensions compactifiées. L'action à $(4 + n)$ dimensions s'écrit alors :

$$S_D = \int \sqrt{-{}^{(D)}g} R[{}^{(D)}g_{\mu\nu}] d^4x d^n\theta, \quad (4.1.3)$$

où ${}^{(D)}g$ est le déterminant de la métrique ${}^{(D)}g_{\mu\nu}$. En notant $V_n = A^n(x^c) \int \sqrt{\tilde{g}} d^n\theta$ le volume de l'espace compactifié, avec \tilde{g} le déterminant de la métrique de l'espace interne, on peut alors définir une action effective à 4 dimensions en divisant S_D par

V_n/A^n . L'expression explicite de R en fonction des degrés de liberté donne alors :

$$S_4 = \int \sqrt{-g} \left[\frac{n}{8(n-1)} \Phi^{2(4)} R - \frac{1}{2} g^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} - \frac{\tilde{r}}{2} \left(\frac{n}{4(n-1)} \Phi^2 \right)^{1-2/n} \right] d^4x , \quad (4.1.4)$$

où $n \neq 1$, \tilde{r} est une caractéristique de la courbure des dimensions compactes, et l'on a défini le champ scalaire :

$$\Phi = 2 \sqrt{\frac{n-1}{n}} A^{n/2} . \quad (4.1.5)$$

On notera que cette expression est valable pour $n \neq 1$, le cas $n = 1$ se réduisant un champ scalaire Φ sans terme cinétique, et avec $\tilde{r} = 0$. L'action (4.1.4) montre que la présence de dimensions supplémentaires compactes se réduit, quant à la physique à 4 dimensions, à la présence d'un champ scalaire non minimalement couplé à la gravitation. Le lien avec le champ scalaire "à la Brans et Dicke" est obtenu en posant :

$$\psi = \frac{n}{8(n-1)} \Phi^2 . \quad (4.1.6)$$

alors :

$$S_4 = \int \sqrt{-g} \left[\psi R - \frac{(n-1)}{n\psi} g^{ab} \psi_{,a} \psi_{,b} - V(\psi) \right] d^4x , \quad (4.1.7)$$

qui est similaire à l'action (4.1.1) pour un couplage $\omega = (n-1)/n$, avec toutefois la présence d'un potentiel pour le champ scalaire :

$$V(\psi) = \frac{\tilde{r}}{2} \psi^{1-2/n} , \quad (4.1.8)$$

qui, il faut le remarquer, mène à une constante cosmologique pour $n = 2$. De plus, le couplage à la matière n'est pas explicité ici.

4.2 Formulation des théories scalaire-tenseur

Il existe différentes façons de formuler les théories scalaire-tenseur, selon que l'on souhaite modifier les équations du champ gravitationnel (formulation de Dicke-Jordan) ou celles des champs matériels (formulation d'Einstein). Dans ce qui suit, nous verrons comment aborder les théories scalaire-tenseur à travers ces deux types de représentations, puis nous montrerons qu'il existe une transformation dans l'espace des champs qui permet de reformuler toute relation écrite dans l'une des représentations à l'aide du langage de l'autre représentation. Cette équivalence des deux formulations permet des prédictions physiques à partir de l'une quelconque

d'entre elles, mais l'interprétation des prédictions et leur lien avec l'expérience sont conditionnés par les procédés utilisés au cours du processus expérimental, les procédés auxquels nous avons accès sélectionnant le cadre de Dicke-Jordan qui sera par conséquent également dénommé cadre observable. Enfin, nous terminerons par un rapide état des contraintes imposées sur les théories scalaire-tenseur par les tests du principe d'équivalence dans le système solaire (contraintes en champ faible).

4.2.1 Constructions de l'action et équations des champs

Dans les théories scalaire-tenseur, la gravitation contient un nouveau degré de liberté scalaire, qui se couple explicitement aux champs de matière présents dans l'espace-temps. La gravitation est donc caractérisée par le couple d'un champ tensoriel de degré 2, et d'un champ scalaire : $(g_{\mu\nu}, \varphi)$. Le champ $g_{\mu\nu}$ est la métrique standard de l'espace-temps, et son action est donc l'action d'Einstein-Hilbert usuelle. L'action de la théorie s'écrit alors [73] :

$$S = \frac{1}{4\pi G} \int \left(\frac{R}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - V(\varphi) \right) \sqrt{-g} d^4x + S_m[\psi_m, A^2(\varphi)g_{\mu\nu}], \quad (4.2.1)$$

où comme d'habitude, $g = \det(g_{\mu\nu})$. Les termes de cette action méritent d'être commentés séparément. Tout d'abord, ici, G désigne une constante de gravitation nue (de dimension M^{-2}), qui n'est pas nécessairement égale à la constante présente dans la théorie de Newton. Ensuite, on voit que l'action du tenseur $g_{\mu\nu}$ ne fait intervenir que le scalaire de courbure R , et s'identifie à l'action d'Einstein-Hilbert ; c'est pourquoi on dira que la théorie écrite sous cette forme est décrite dans la formulation d'Einstein. Pour rester au plus proche des notations traditionnelles (celles de Brans et Dicke, et non celles de la théorie des champs), le champ scalaire φ est adimensionné ; il est caractérisé par deux fonctions : son potentiel d'auto-interaction $V(\varphi)$ qui a une dimension M^2 , et son couplage aux champs de matière $A(\varphi)$ qui est une fonction sans dimension et ne s'annulant pour aucune valeur de φ . Le terme $S_m[\psi_m, A^2(\varphi)g_{\mu\nu}]$ symbolise formellement l'action de tout champ de matière ψ_m , et exprime que tous les champs de matière se couplent, dans leur action, avec le champ φ de la même manière, à savoir que la métrique que l'on doit utiliser pour construire leur action n'est pas le véritable degré de liberté tensoriel $g_{\mu\nu}$, mais une métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$ qui mélange les degrés de liberté tensoriel et scalaire. Ce couplage universel des champs de matière à la métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$ est une traduction du fait que les théories scalaire-tenseur respectent le principe d'équivalence dans sa version faible telle que formulée dans le PEE : comme tous les constituants ψ_m des corps composés de matière sont couplés à la même métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$, leur chute libre s'effectue le long des géodésiques de

cette métrique (et non le long des géodésiques de $g_{\mu\nu}$), donc aucune expérience de chute de corps ne peut distinguer deux constituants différents. On voit donc l'importance physique de la métrique effective ; bien qu'elle ne détermine pas les géodésiques mathématiques de l'espace-temps, les corps matériels vont suivre les géodésiques qui lui correspondent. En un sens, on peut donc dire qu'elle structure l'espace-temps observable, auquel on ne peut avoir accès qu'à l'aide d'expériences mettant en jeu, à tout le moins des champs matériels, et en pratique lorsque l'on mesure la gravitation, des corps étendus. Il est donc intéressant de transformer l'action (4.2.1) pour l'exprimer en terme de $\tilde{g}_{\mu\nu}$. La transformation de la métrique est une simple transformation conforme ; si l'on note \tilde{R} le scalaire de courbure associé à la métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$, on a la relation [5] :

$$\tilde{R} = A^{-2}(\varphi)R - 6A^{-3}(\varphi)A_{,\mu;\nu}g^{\mu\nu} \quad (4.2.2)$$

En introduisant un nouveau champ scalaire $\phi = A^{-2}(\varphi)$, et en notant [74] :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} \\ U(\phi) &= 2A^4(\varphi(\phi))V(\varphi(\phi)) \\ |3 + 2\omega(\phi)| &= \alpha^{-2}(\varphi), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

l'action s'écrit alors

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int \left(\phi \tilde{R} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - U(\phi) \right) \sqrt{-\tilde{g}} d^4x \\ &+ S_m[\psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Cette représentation est appelée formulation de Dicke-Jordan. On voit que dans cette formulation, tout à fait analogue à la formulation historique donnée par C. Brans et R. H. Dicke (4.1.1), l'action des champs de matière a sa forme standard : la partie scalaire de la gravitation, ici représentée par ϕ ne se couple plus explicitement aux champs de matière : les équations du mouvement pour ces champs ne font donc plus intervenir le champ scalaire additionnel, et prennent la forme qu'elles ont en Relativité Générale. En d'autres termes, les corps matériels suivent les géodésiques de la métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Cependant, il a fallu payer un prix pour cela : dans cette représentation, il n'existe plus de partie libre à l'action gravitationnelle, c'est-à-dire que l'action de la métrique effective n'est plus l'action d'Einstein-Hilbert, mais fait intervenir le champ ϕ , et que le lagrangien du champ scalaire ϕ possède un terme cinétique non standard. Comme nous l'avons vu ci-dessus, cette modification fut introduite historiquement pour rendre compte de variations du couplage gravitationnel, et on voit en effet que la première partie de l'action est tout à fait similaire à celle d'Einstein-Hilbert à condition de

remplacer le couplage nu G par le couplage effectif, a priori dépendant de la position dans l'espace-temps G/ϕ . Dans toute la suite de cette partie, les grandeurs marquées d'une tilde se référeront à la formulation de Dicke-Jordan, et celle sans tilde à la formulation d'Einstein. En appliquant un principe de moindre action, écrivons maintenant les équations des champs dans les deux représentations. Dans la formulation d'Einstein, elles s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\varphi} \quad (4.2.5)$$

$$\square\varphi = -4\pi G\alpha(\varphi)T + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \quad (4.2.6)$$

$$\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = \alpha(\varphi)T\nabla_{\mu}\varphi, \quad (4.2.7)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci associé à la métrique $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ est le tenseur énergie-impulsion des champs de matière, T représente sa trace, et $T_{\mu\nu}^{\varphi} \equiv 2\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - (g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta})g_{\mu\nu} - 2V(\varphi)g_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire φ . Le premier jeu d'équations correspond exactement aux équations d'Einstein pour la métrique $g_{\mu\nu}$ en présence de matière et d'un champ scalaire standard φ ; mais, les cinq autres équations, portant sur les champs de matière et le champ φ font apparaître des termes de sources non standard : $-4\pi G\alpha(\varphi)T$ et $\alpha(\varphi)T\nabla_{\mu}\varphi$ qui proviennent du couplage explicite entre les champs de matière et φ . Dans la formulation de Dicke-Jordan, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} \right) &= 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) \right) \\ &\quad + \phi_{,\nu;\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\beta})_{;\alpha} - \tilde{g}_{\mu\nu}U(\phi) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega(\phi)}{\phi}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha})_{;\beta} &= -R - \left(\frac{1}{\phi}\frac{d\omega(\phi)}{d\phi} - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \right)(\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) \\ &\quad + 2\frac{dU(\phi)}{d\phi} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\tilde{T}_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (4.2.10)$$

où, les indices sont levés et descendus avec la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$, et, $\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière dans la représentation de Dicke-Jordan. Il existe une relation importante entre les tenseurs énergie-impulsion dans les deux représentations :

$$T_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\tilde{T}_{\mu\nu} = \phi^{-1}\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (4.2.11)$$

On voit que le mélange des modes scalaire et tensoriel, qui caractérise la représentation de Dicke-Jordan complique singulièrement la forme des équations, à l'exception notable de l'équation de conservation de l'énergie-impulsion pour la matière, qui a retrouvé sa forme habituelle. En particulier, le passage au référentiel

minkowskien local nous permet de retrouver la loi de conservation simple de la Relativité Restreinte $\tilde{T}_{\nu,\mu}^\mu = 0$.

4.2.2 Transformation conforme et observables physiques

Comme souligné précédemment, la formulation d'Einstein assure que le champ de métrique suit les lois de la gravité qui ont cours en Relativité Générale, alors que les champs de matière et les corps matériels obéissent à des lois modifiées qui font intervenir le nouveau degré de liberté scalaire φ . A l'opposé, la formulation de Dicke-Jordan consiste à modifier les équations du champ de gravitation, tout en conservant la forme covariante des équations sur les champs matériels. Nous avons vu que cela induisait un résultat important : dans une expérience de chute libre, les corps suivent les géodésiques de la métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$, et non celle du degré de liberté de spin 2, $g_{\mu\nu}$. La question se pose alors de savoir quelle formulation est la représentation du monde observable (si l'on s'intéresse, par exemple, au calcul de l'expansion locale d'un fluide soumis à un fort champ de gravitation, il nous faut pouvoir faire le lien entre cette expansion observable, telle qu'elle pourrait être mesurée, et la déviation géodésique prévue par la théorie ; il est clair que cette déviation géodésique n'est pas la même dans les deux représentations). La question n'est bien entendu pas de savoir quelle formulation est physique, une telle question n'ayant a priori aucun sens, mais plutôt de déterminer le lien entre ce que la théorie sait calculer, et ce que l'on observe au cours des expériences que l'on peut mener (dans l'exemple du fluide, cela revient à se demander par rapport à quelles géodésiques on définit la chute libre). Cette question de la formulation "observable" a suscité un vif et intense débat, et il n'est pas dans l'objectif de ces développements d'en commenter tous les aspects. Cependant, je voudrais formuler ici quelques remarques ¹ et indiquer le choix qu'elles m'ont amené à faire. Pour commencer, insistons sur le fait que les observables physiques, en tant que grandeurs adimensionnées, ne dépendent pas de la représentation choisie. Pour ce faire, décrivons l'expérience suivante dans les deux représentations. On considère un laboratoire de petite taille en chute libre dans le potentiel gravitationnel du Soleil ; dans ce laboratoire, on soumet un électron de masse m à un champ magnétique constant \vec{B} orthogonal à la vitesse initiale de l'électron \vec{v}_i dans le référentiel du laboratoire. On se place dans le référentiel en chute libre attaché au laboratoire dans chacune des deux représentations, c'est-à-dire, par rapport à $\tilde{g}_{\mu\nu}$ dans la représentation de Dicke-Jordan, et par rapport à $g_{\mu\nu}$ dans celle d'Einstein. On notera le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu} = 2\mathcal{A}_{[\mu,\nu]}$ où \mathcal{A}_μ est le 4-potential du champ électromagnétique. L'action de Dicke-Jordan s'écrit, après passage dans le

¹Je tiens à remercier Gilles Esposito-Farèse pour les discussions qui ont conduit à ces réflexions.

référentiel local (on transforme $\tilde{g}_{\mu\nu}$ en $\eta_{\mu\nu}$) :

$$S = -m \int d\tilde{s} - e \int \mathcal{A}_\mu dx^\mu . \quad (4.2.12)$$

L'équation du mouvement de l'électron s'écrit donc :

$$\frac{d\tilde{u}_\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{e}{m} F_{\mu\nu} \tilde{u}^\nu , \quad (4.2.13)$$

où $\tilde{u}^\mu \equiv dx^\mu/d\tilde{\tau}$ est la 4-vitesse de l'électron dans le référentiel de Dicke-Jordan. D'autre part, l'action dans la représentation d'Einstein est obtenue en remplaçant $\tilde{g}_{\mu\nu}$ par $A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$, puis en prenant la limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$:

$$S = -m \int A(\varphi) ds - e \int A^{-2}(\varphi) \mathcal{A}_\mu dx^\mu , \quad (4.2.14)$$

et l'équation du mouvement est alors, si l'on suppose que φ est constant sur les échelles de temps et d'espace mises en jeu par l'expérience :²

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{mA(\varphi)} F_{\mu\nu} u^\nu , \quad (4.2.15)$$

avec $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ la 4-vitesse de l'électron dans le référentiel d'Einstein. La fréquence cyclotron de l'électron est donc différente dans les deux représentations : dans celle de Dicke-Jordan, elle s'écrit $\nu_{JF} = e/m$, et dans celle d'Einstein, $\nu_{EF} = e/(mA(\varphi))$, comme si la masse inertielle de l'électron dépendait alors du champ φ . Cependant, ce résultat ne doit pas surprendre : il existe bien une seule valeur observationnelle de la fréquence cyclotron de l'électron. En effet, la fréquence d'une même horloge varie entre les deux représentations, et le rapport des fréquences d'horloge est donné par $f_{EF}/f_{JF} = A^{-1}(\varphi)$, ce qui assure que les rapports ν_{EF}/f_{EF} et ν_{JF}/f_{JF} , qui sont les seules quantités observables en tant qu'elles sont adimensionnées, sont égaux. Localement, on ne peut donc pas détecter la présence du champ scalaire par des expériences non gravitationnelles. C'est bien ce qui est allégué par le principe d'équivalence faible. Cet exemple illustre l'importance du fait de considérer des grandeurs adimensionnées. En effet, la présence du champ scalaire équivaut, lorsque celui-ci est constant du moins, à un simple rééchelonnage des unités de mesure de temps et d'espace. Aussi est-il important de modifier de façon cohérente, comme nous l'avons vu ci-dessus, tous les étalons de mesure lorsque l'on passe d'une représentation à l'autre. L'exemple de la fréquence cyclotron explique pourquoi la représentation de Dicke-Jordan est appelée observable :

²Ceci paraît raisonnable si ce champ est d'origine cosmologique, et nous verrons que dans la limite post-newtonienne des théories scalaire-tenseur, la contribution dominante au champ scalaire dans le système solaire est donnée par sa valeur cosmologique.

dans ce cadre-là, en effet, les équations non gravitationnelles ne sont pas modifiées, et par conséquent, les étalons ne font pas intervenir le champ scalaire, contrairement à ce qui se passe dans la représentation d'Einstein. Généralement, au cours d'un raisonnement physique, le rapport d'une mesure dimensionnée à son étalon est implicite, et on parle toujours de grandeurs dimensionnées (ce sera par exemple le cas, en cosmologie, du taux d'expansion de l'Univers, qui est homogène à l'inverse d'un temps), raison pour laquelle dans tout ce qui suivra, on calculera les grandeurs dimensionnées observables dans la représentation de Dicke-Jordan, sans pour autant conférer à cette dernière un statut ontologique particulier. Ce choix est seulement commode : tant que le champ scalaire est dans une configuration statique, comme ci-dessus, la définition de l'observable dans la représentation d'Einstein ne pose aucun problème (c'est simplement une reparamétrisation conforme), mais nous verrons (en particulier pour le taux d'expansion de l'Univers), que les choses sont plus délicates dans le cas général.

Pour terminer cette discussion de l'équivalence des représentations, il est intéressant de revenir sur le lien dont nous avons parlé dans la section précédente entre variation du contenu numérique des lois non-gravitationnelles et non-universalité de la chute des corps dont l'énergie interne est principalement de nature gravitationnelle. Nous avons en effet inclus dans le terme de principe d'équivalence fort (PEF), l'exigence que ces deux phénomènes n'appartiennent pas en propre à la gravitation. L'exemple de la fréquence cyclotron ci-dessus nous a montré que dans la représentation d'Einstein, la masse inertielle des particules dépend explicitement du champ scalaire φ . D'autre part, l'action dans la représentation de Dicke-Jordan (4.2.4) suggère que le couplage gravitationnel effectif ressenti par un corps dépend, dans cette représentation, du champ scalaire ϕ ; si l'on définit³ $G_{eff} = G/\phi$, on voit dans les équations (4.2.8)-(4.2.10) que le couplage de l'énergie-impulsion à la métrique est exactement G_{eff} , et non G . Comme nous avons vu que les observables sont les mêmes dans les deux représentations, cette structure suggère donc qu'il existe une équivalence (une dégénérescence) entre variation du couplage gravitationnel et variation de la masse inertielle des corps. Cela se comprend très bien dans la mesure où, dans les expériences gravitationnelles, c'est toujours le produit du couplage et de la masse inertielle qui intervient (penser à l'équation de Poisson ou à l'expression de la force gravitationnelle en mécanique newtonienne).

4.2.3 Contraintes observationnelles

Les tests de la gravitation dans le système solaire sont nombreux et précis [75], que se soient les tests classiques (déflexion de la lumière, retard Shapiro, avance

³Dans la sous-section suivante nous verrons que dans une expérience de type Cavendish permettant de mesurer le couplage gravitationnel, celui-ci est légèrement différent de G_{eff} tel que défini ici. Cela n'affecte cependant pas la présente discussion.

du périhélie de Mercure), ou d'autres plus récents (effet Nordvedt). Il existe un cadre général permettant de tester toutes les théories métriques de la gravitation : le formalisme post-newtonien, dont nous allons rapidement décrire les résultats pour une théorie scalaire-tenseur. Ces résultats s'expriment à l'aide de la paramétrisation d'Eddington [75]. Considérant une masse ponctuelle isolée M , on décrit l'espace-temps autour de cette masse par une métrique statique à symétrie sphérique, asymptotiquement plate, avec l'élément de longueur suivant :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{\beta - \gamma}{2} \frac{R_S^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 + \gamma \frac{R_S}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.2.16)$$

où $R_S = 2GM$. Pour $\gamma = \beta = 1$, cet élément de longueur correspond exactement à celui de la métrique de Schwarzschild en Relativité Générale, R_S étant le rayon de Schwarzschild. Les paramètres γ et β sont les paramètres post-newtoniens ; ils traduisent comment la masse M agit sur l'espace-temps pour une théorie métrique de la gravitation donnée. Dans le cas d'une théorie scalaire-tenseur, ces paramètres sont reliés aux paramètres de la théorie par [73]⁴ :

$$\beta - 1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2(\varphi_0)}{(1 + \alpha^2(\varphi_0))^2} \frac{d\alpha}{d\varphi}(\varphi_0) \quad (4.2.17)$$

$$\gamma - 1 = -2 \frac{\alpha^2(\varphi_0)}{1 + \alpha^2(\varphi_0)}, \quad (4.2.18)$$

$$(4.2.19)$$

où φ_0 est la valeur du champ scalaire φ à l'infini spatial, que l'on identifie à la valeur cosmologique du champ scalaire aujourd'hui, dans la mesure où le système solaire, décrit par la métrique statique à symétrie sphérique, est considéré plongé dans l'Univers en expansion. Ce résultat est obtenu en considérant d'une part que φ_0 est constante, ce qui est raisonnable puisque son temps caractéristique de variation est cosmologique, donc beaucoup plus long que les temps caractéristiques dans le système solaire (notamment celui d'une expérience) ; d'autre part, on néglige l'effet du potentiel $V(\varphi)$ en considérant que $(d^2V/d\varphi^2)(\varphi_0) \ll M$, ce qui est raisonnable pour toute application cosmologique. De plus, la constante de gravitation effective, telle que mesurée par une expérience de type Cavendish est donnée par :

$$G_{eff} = GA^2(\varphi_0) (1 + \alpha^2(\varphi_0)) . \quad (4.2.20)$$

Les contraintes à ce jour portent essentiellement sur le paramètre γ , le paramètre β étant contraint moins précisément à un ordre de grandeur près. La mesure

⁴La métrique correspondant à (4.2.16) est exprimée dans le Dicke-Jordan frame, mais les tildes sont oubliées ici pour simplifier l'écriture.

la plus précise repose sur l'effet Shapiro subi par les signaux radios entre la Terre et la sonde Cassini lorsqu'ils passent au voisinage du Soleil, et donne [76] :

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5} . \quad (4.2.21)$$

On en déduit donc, pour une théorie scalaire-tenseur, que :

$$\alpha(\varphi_0) \leq 10^{-3} . \quad (4.2.22)$$

Ce test impose donc à la théorie d'être très proche de la Relativité Générale aujourd'hui : la valeur cosmologique du champ scalaire doit être telle que le couplage à la matière n'est que d'une partie pour mille aujourd'hui. Ce résultat est une motivation importante pour trouver des théories scalaire-tenseur qui possèdent un mécanisme cosmologique d'attraction vers la Relativité Générale. En effet, en l'absence d'un tel mécanisme, comme pour une théorie de Brans-Dicke classique, la contrainte post-newtonienne (4.2.22) impose à la théorie d'être très proche de la Relativité Générale durant toute l'histoire cosmologique : si l'on veut étudier des effets significatifs de la présence du champ scalaire, il faut donc lui permettre de dévier des φ_0 qui satisfont à (4.2.22), tout en assurant qu'au temps longs, il converge vers un tel φ_0 . Nous reviendrons sur ce point lorsque nous traiterons de la dynamique cosmologique des théories scalaire-tenseur.

4.3 Cosmologies scalaire-tenseur

Le contexte général des théories scalaire-tenseur étant bien établi, nous donnerons dans cette section les équations des champs appliquées aux cosmologies homogènes et isotropes. L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie s'appliquant à l'Univers observable, nous supposons donc que l'élément de longueur dans la représentation de Dicke-Jordan prend la forme déduite de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker :

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right) . \quad (4.3.1)$$

De plus, en définissant $dt = A^{-1}(\varphi)d\tilde{t}$ et $a(t) = A^{-1}(\varphi)\tilde{a}(\tilde{t})$, comme l'élément de longueur dans la représentation d'Einstein s'écrit $ds^2 = A^{-2}(\varphi)d\tilde{s}^2$ d'après la relation conforme entre les deux représentations, on a :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right) , \quad (4.3.2)$$

si bien que dans ces coordonnées, l'Univers homogène et isotrope a une métrique de FLRW dans la représentation d'Einstein également. Le fluide cosmologique

est décrit par le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait de densité d'énergie $\tilde{\rho}$ et de pression \tilde{p} dans la représentation de Dicke-Jordan, ce fluide ayant une densité d'énergie $\rho = A^4(\varphi)\tilde{\rho}$ et une pression $p = A^4(\varphi)\tilde{p}$ dans la représentation d'Einstein, d'après la relation (4.2.11). Les équation des champs s'écrivent donc, dans la représentation d'Einstein :

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}V(\varphi) - \frac{k}{a^2} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}V(\varphi) \quad (4.3.4)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = -4\pi G\alpha(\varphi)(\rho - 3p) \quad (4.3.5)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = \alpha(\varphi)(\rho - 3p)\dot{\varphi}, \quad (4.3.6)$$

où, comme à l'accoutumée, $H = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble, et $\dot{u} \equiv du/dt$. Dans la représentation de Dicke-Jordan, on a, de façon équivalente, avec $\tilde{H} = (d\tilde{a}/d\tilde{t})/\tilde{a}$:

$$\tilde{H}^2 = \frac{8\pi G\tilde{\rho}}{3\Phi} + \frac{\omega(\Phi)}{6\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{t}} \right)^2 - \frac{\tilde{H}}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tilde{t}} + \frac{U(\Phi)}{3\Phi} - \frac{k}{\tilde{a}^2} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d^2\tilde{a}}{d\tilde{t}^2} &= -\frac{4\pi G}{3\Phi}(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) - \frac{\omega(\Phi)}{3\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{t}} \right)^2 - \frac{\tilde{H}}{2\Phi} \frac{d\Phi}{d\tilde{t}} \\ &\quad - \frac{1}{2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\tilde{t}^2} + \frac{U(\Phi)}{3\Phi} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} (3 + 2\omega(\Phi)) \frac{d^2\Phi}{d\tilde{t}^2} &= 8\pi G(\tilde{\rho} - 3\tilde{p}) - 15\tilde{H} \frac{d\Phi}{d\tilde{t}} + 4U(\Phi) - 2\Phi \frac{dU}{d\Phi} \\ &\quad + \left(\frac{\omega(\Phi)}{2\Phi} - \frac{d\omega}{d\Phi} \right) \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{t}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\tilde{\rho} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho} + \tilde{p}) = 0. \quad (4.3.10)$$

La comparaison des systèmes (4.3.3)-(4.3.6) et (4.3.7)-(4.3.10) fait apparaître la complexité des équations dans la représentation de Dicke-Jordan. Dans la représentation d'Einstein au contraire, les équations de la dynamique des champs sont tout à fait standard, à l'exception de l'équation portant sur le fluide cosmologique, qui s'intègre de toute façon très simplement, dans le cas d'un fluide barotropique avec $p = \omega\rho$ (qui est équivalent à $\tilde{p} = \omega\tilde{\rho}$) en :

$$\rho(a) \propto A(\varphi)^{1-3\omega} a^{-3(1+\omega)}. \quad (4.3.11)$$

On aura donc tout intérêt à étudier la dynamique dans la représentation d'Einstein, pour ensuite calculer explicitement les observables dans la représentation de Dicke-Jordan.

Chapitre 5

Dynamiques cosmologiques des théories scalaire-tenseur

Dans ce chapitre, nous allons étudier la dynamique cosmologique des théories scalaire-tenseur, c'est-à-dire le comportement des solutions du système (4.3.3)-(4.3.6). Cette étude a été longuement développée par le passé, principalement pour des champs scalaires sans potentiel [77, 78]. Nous résumerons ces résultats antérieurs, puis nous analyserons ce qui se passe dans le cas où le champ scalaire possède un potentiel d'auto-interaction. Cette analyse est capitale pour s'assurer que l'on étudie, lorsque l'on s'intéresse aux conséquences observables de la présence du champ scalaire, des théories qui peuvent converger vers la Relativité Générale aux temps longs, afin de satisfaire les contraintes obtenues dans le système solaire.

Pour mener à bien cette étude, inspiré par les travaux cités ci-dessus [77, 78], on peut commencer par dériver du système (4.3.3)-(4.3.6) une équation indépendante pour le champ scalaire φ . A cette fin, introduisons le paramètre d'évolution $\lambda = \ln(a)$ tel que $d\lambda = H dt$. En choisissant de noter $u' \equiv du/d\lambda$ pour toute fonction u de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on obtient par quelques manipulations l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{2(1 - \epsilon(\lambda) + \eta(\lambda, \varphi))}{3 - \varphi'^2} \varphi'' + (1 - w_b(\lambda) - \frac{4}{3}\epsilon(\lambda) + 2\eta(\lambda, \varphi)) \varphi' \\ = -\Theta(\lambda, \varphi) - (1 - 3w_b)\alpha(\varphi) , \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

dans laquelle on a défini :

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= \frac{3k}{8\pi G\rho(\lambda)a^2(\lambda)} \quad , \quad w_b(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\rho(\lambda)} \\ \eta(\lambda, \varphi) &= \frac{V(\varphi)}{4\pi G\rho(\lambda)} \quad , \quad \Theta(\lambda, \varphi) = \frac{1}{4\pi G\rho(\lambda)} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} . \end{aligned}$$

Dans un espace plat ($k = 0$), si $w_b = cste$ (par exemple si l'on a un seul fluide barotropique), cette équation est manifestement autonome pour une théorie sans

potentiel : $V(\varphi) \equiv 0$, mais ses coefficients dépendent explicitement du temps dès lors que le champ scalaire acquiert un terme d'auto-interaction. C'est hélas ce qui rendra cette méthode peu utile pour étudier ces dernières théories. En revanche, dans le cas où $V(\varphi) \equiv 0$, nous allons pouvoir mener une analyse complète.

5.1 Les champs scalaires sans auto-interaction

Commençons par supposer que $k = 0$. Alors, en posant $X = \varphi$ et $Y = \varphi'$, l'équation (5.0.1) donne :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = F(X, Y) = \begin{pmatrix} Y \\ \frac{Y^2-3}{2} ((1-w_b)Y + (1-3w_b)\alpha(X)) \end{pmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Si l'on se place dans une ère précise, on peut poser que w_b est une constante. Le système étant autonome, on trouve alors naturellement les points fixes¹ :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= 0 \text{ et} \\ w_b &= \frac{1}{3} (\bar{X} \text{ quelconque}) \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \alpha^{-1}(0). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Dans cette section α^{-1} représente l'inverse de la fonction α supposée au moins C^1 . Ainsi, dans le cas d'un fluide relativiste, avec $w_b = 1/3$, le champ scalaire est découplé de la matière, sa vitesse est amortie et le champ se gèle à une valeur finie dépendant des conditions initiales. La solution exacte prend alors la forme [77] :

$$\varphi(\lambda) = \varphi_\infty - \sqrt{3} \ln \left(K \exp(-\lambda) + (1 + K^2 \exp(-2\lambda))^{1/2} \right), \quad (5.1.3)$$

où φ_∞ est la valeur du champ sur l'attracteur ($\lambda \rightarrow +\infty$), et :

$$K = \frac{\varphi'_0}{\sqrt{3 - \varphi'^2(0)}} \text{ avec } \varphi'_0 = \varphi'(0). \quad (5.1.4)$$

Le champ se gèle alors sur l'attracteur à la valeur :

$$\varphi_\infty = \varphi(0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{1 + \varphi'_0/\sqrt{3}}{1 - \varphi'_0/\sqrt{3}} \right). \quad (5.1.5)$$

¹Le cas d'un modèle de Brans et Dicke, avec $\alpha = cste$ n'est pas traité ici, car les contraintes postnewtoniennes forcent α à être très petit, si bien que le champ scalaire n'a aucune incidence cosmologique observable. Dans la limite où $|\varphi'| \ll \sqrt{3}$, on peut trouver la solution exacte : $\varphi(\lambda) = (2 \exp(-3(1-w_b)\lambda/2)/3 + (1-3w_b\alpha\lambda))/(w_b-1)$.

Dans le cas d'un fluide avec $w_b \neq 1/3$, le champ se gèle à une valeur $\bar{X} = \alpha^{-1}(0)$, correspondant à la Relativité Générale ($\alpha(\bar{X}) = 0$). Si le point (\bar{X}, \bar{Y}) est stable, nous avons alors un mécanisme de convergence dynamique de la théorie scalaire-tenseur vers la Relativité Générale, tant que $w_b \neq 1/3$. C'est un point très important dans la mesure où les contraintes postnewtonniennes contraignent la valeur du champ aujourd'hui à être telle que la théorie diffère peu de la Relativité Générale. Une convergence dynamique au cours de l'histoire cosmologique (notamment durant l'ère dominée par la matière, avec $w_b = 0$) est donc une propriété intéressante dans la mesure où elle permet d'envisager des déviations passées à la Relativité Générale tout en assurant une déviation faible aujourd'hui. Il nous faut donc examiner la nature du point fixe $(\bar{X}, \bar{Y}) = (\alpha^{-1}(0), 0)$. La différentielle du champ de vecteurs $F(X, Y)$ de (5.1.1) est :

$$DF(X, Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{Y^2-3}{2}(1-3w_b)\frac{d\alpha}{dX}(X) & \frac{3}{2}(1-w_b)(Y^2-1) + (1-3w_b)Y\alpha(X) \end{pmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Pour $w_b = 1/3$, les valeurs propres de cette différentielle prise en $(\bar{X}, 0)$ sont 0 et -1 ; on ne peut donc pas conclure sur la stabilité de cet équilibre par cette méthode. En fait c'est un équilibre stable, ce que l'on peut vérifier en remarquant que la fonction $E(\varphi, \varphi') = -\ln(1 - \varphi'^2/3)$ est une fonction de Lyapunov pour la solution. Pour $w_b \neq 1/3$, la différentielle (5.1.6) prise en $(\alpha^{-1}(0), 0)$ a deux valeurs propres :

$$v_{1,2} = -\frac{3}{4}(1-w_b) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3} \frac{1-3w_b}{(1-w_b)^2} \frac{d\alpha}{dX}(\bar{X})} \right). \quad (5.1.7)$$

Dans la suite, on se restreindra au cas où $w_b < 1$, qui contient tous les cas intéressants pour la cosmologie. Deux cas mènent à $v_{1,2} = -3(1-w_b)/2 \pm ib$, c'est-à-dire à un équilibre asymptotiquement stable atteint par une suite (infinie) d'oscillations amorties :

$$\begin{aligned} w_b < \frac{1}{3} & \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dX}(\bar{X}) > \frac{3(1-w_b)^2}{8(1-3w_b)}, \\ w_b > \frac{1}{3} & \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dX}(\bar{X}) < \frac{3(1-w_b)^2}{8(1-3w_b)}. \end{aligned}$$

Enfin, si l'argument sous la racine est positif, deux cas mènent à des valeurs propres réelles strictement négatives, donc à un équilibre asymptotiquement stable atteint sans oscillation :

$$\begin{aligned} w_b > \frac{1}{3} & \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dX}(\bar{X}) < 0, \\ w_b < \frac{1}{3} & \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dX}(\bar{X}) > 0. \end{aligned}$$

Remarquons le cas particulier d'une ère dominée par la matière ordinaire : $w_b = 0$. Alors, l'équilibre est stable si et seulement si $(d\alpha/dX)(\bar{X}) > 0$, le champ connaissant des oscillations si $(d\alpha/dX)(\bar{X}) > 3/8$ et pas d'oscillations si $(d\alpha/dX)(\bar{X}) < 3/8$. Ainsi, il suffit que la fonction de couplage ait une dérivée positive au voisinage de l'attracteur pour qu'il existe un mécanisme de convergence durant l'ère dominée par la matière, assurant dès lors que les contraintes postnewtoniennes seront vérifiées par la théorie. La figure 5.1.1 présente la dynamique de certaines théories dans le plan de phase, au voisinage du point critique associé. Par le théorème d'Hartman-Grossmann, le portrait de phase au voisinage du point critique est topologiquement équivalent au portrait de phase du linéarisé (5.1.6), pour un système hyperbolique (c'est-à-dire un système dont le linéarisé n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle).

Lorsque le système n'est pas hyperbolique, c'est-à-dire si $(d\alpha/dX)(\bar{X}) = 0$ ou $\omega_b = 1$, il faut intégrer l'ensemble du système pour obtenir le portrait de phase. Je me suis efforcé, pour le cas $(d\alpha/dX)(\bar{X}) = 0$ de trouver une fonction de Lyapunov, mais je n'en ai pas trouvé : bien qu'il existe des fonctions strictement décroissantes le long des solutions, elles ne sont pas définies sur un voisinage compact du point critique. On trouvera une analyse de ce type de théories scalaire-tenseur par d'autres méthodes dans [79, 80].

5.2 Les champs scalaires avec auto-interaction

Lorsque le champ scalaire possède un potentiel (ou les sections spatiales une courbure non nulle), l'équation (5.0.1) n'est plus autonome, si bien que toutes les techniques usuelles d'étude des attracteurs ne peuvent plus être utilisées. Pour certaines formes de potentiels et de couplages (il faut que l'un et l'autre soient inversibles), cependant, il est possible de réécrire le système sous une forme autonome, en introduisant des variables adimensionnées ; on trouvera une description de ces méthodes dans [51] et les références citées dans cette monographie. Dans cette section, nous allons présenter les principes d'une méthode différente, qui, a priori, s'applique à toutes les théories possibles. Utilisée pour étudier la dynamique cosmologique en présence d'un champ scalaire, tant minimalement couplé [81, 82], que non-minimalement couplé [83], elle repose sur le principe de Maupertuis-Jacobi [82, 84].

5.2.1 Méthode de Maupertuis-Jacobi

Dans le but d'éclairer cette méthode considérons un système de mécanique classique lagrangienne caractérisé par N variables de configuration $(q^i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$

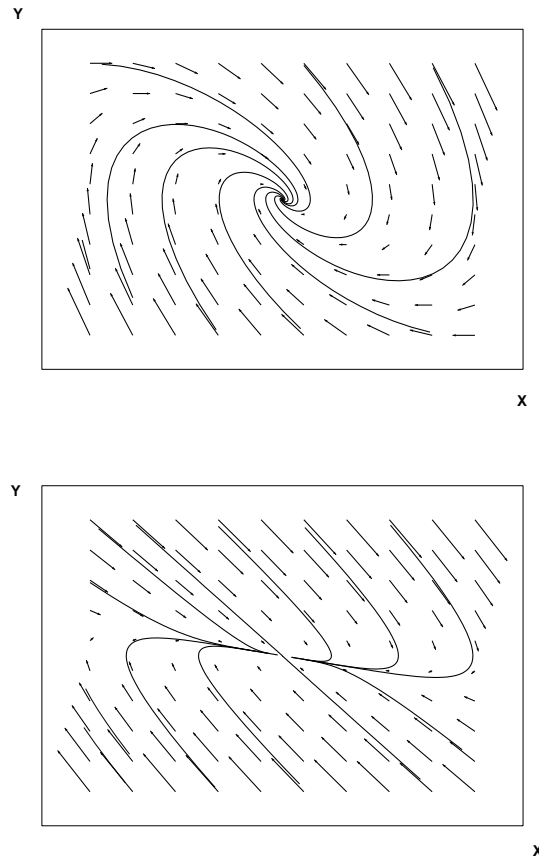


FIG. 5.1.1 – Portraits de phase au voisinage du point critique $(0,0)$ pour $\alpha(\varphi) = \beta\varphi$ et $w_b = 0$. La figure du dessus montre le cas où $\beta = 1 > 3/8$, et la figure du dessous le cas où $\beta = 0.2 < 3/8$.

dont le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(q^k, \dot{q}^k) = \frac{1}{2} g_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^k) , \quad (5.2.1)$$

avec $\dot{q}^k \equiv dq^k/dt$, et g_{ij} une métrique riemannienne sur l'espace des configurations. En définissant les impulsions généralisées :

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij} \dot{q}^j , \quad (5.2.2)$$

on peut alors écrire le hamiltonien du système :

$$\mathcal{H}(q^k, p_k) \equiv \dot{q}^i p_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + V(q) . \quad (5.2.3)$$

Les équations d'Euler-Lagrange correspondant à (5.2.1) s'écrivent :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = -g^{ij} \partial_j V(q^k), \quad (5.2.4)$$

où $\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{ij})$ représente l'ensemble des connections affines associées à la métrique g_{ij} . Le hamiltonien (5.2.3) est simplement l'énergie totale du système à N degrés de liberté. C'est une constante du mouvement. Pour une valeur donnée de cette énergie totale, E , les trajectoires dans l'espace des phases \mathcal{P} à $2N$ dimensions sont donc contraintes à rester sur une hypersurface $\mathcal{C}_E = \{(q^k, p^l) \in \mathcal{P}, H(q^k, p^l) = E\} \subset \mathcal{P}$. De plus, dans l'espace des configurations \mathcal{Q} , les trajectoires sont contenues dans le domaine :

$$\mathcal{D}_E = \{q^k \in \mathcal{Q}, V(q^k) \leq E\}, \quad (5.2.5)$$

dont le bord éventuel est $\partial\mathcal{Q} = \{q^k \in \mathcal{Q}, V(q^k) = E\}$. A l'intérieur de \mathcal{D}_E , c'est-à-dire sur $\mathcal{D}_E \setminus \partial\mathcal{D}_E$, en introduisant le paramètre affine s tel que :

$$\frac{ds}{dt} = 2(E - V(q^k)), \quad (5.2.6)$$

on peut mettre les équations du mouvement (5.2.4) sous la forme suivante :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \frac{d^2 q^i}{ds^2} + \hat{\Gamma}_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0, \quad (5.2.7)$$

avec $\hat{\Gamma}_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} \hat{g}^{il} (\partial_j \hat{g}_{lk} + \partial_k \hat{g}_{jl} - \partial_l \hat{g}_{ij})$, et :

$$\hat{g}_{ij} = 2(E - V(q^k)) g_{ij}. \quad (5.2.8)$$

Ainsi, les équations du mouvement sont équivalentes, sur l'intérieur de \mathcal{D}_E , aux équations des géodésiques de la métrique effective \hat{g}_{ij} . L'étude des propriétés métriques de l'espace des configurations vu comme une variété différentiable de dimension N munie de la métrique \hat{g}_{ij} permet de caractériser la dynamique du système.

5.2.2 Cosmologie avec un champ scalaire

Nous allons voir que la méthode décrite précédemment s'applique bien à l'étude d'un Univers de Friedmann en présence d'un champ scalaire. Considérant une théorie scalaire-tenseur en présence d'un champ de matière ψ_m , le lagrangien s'écrit, génériquement :

$$\mathcal{L} = (R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 4V(\varphi) + F(g^{\mu\nu}, \varphi, \psi_m)) \sqrt{-g}, \quad (5.2.9)$$

où F est une fonctionnelle prenant en compte les couplages explicites à la matière, et où l'on a posé $16\pi G = 1$. En particulierisant ce lagrangien pour un Univers homogène et isotrope, dont la métrique est celle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, avec un champ de matière considéré comme un fluide parfait barotropique de densité d'énergie ρ et de pression $p = (\gamma - 1)\rho$, l'action peut s'écrire (on note $\dot{u} \equiv du/dt$) :

$$S = \int \mathcal{L}(a, \varphi, \dot{a}, \dot{\varphi}) dt , \quad (5.2.10)$$

avec :

$$\mathcal{L}(a, \varphi, \dot{a}, \dot{\varphi}) = -6a\dot{a}^2 + 2a^3\dot{\varphi}^2 + 6ka - 4a^3V(\varphi) + a^3F(a, \varphi) . \quad (5.2.11)$$

Il reste à déterminer la fonctionnelle F . Pour ce faire, on écrit les équations d'Euler-Lagrange du lagrangien (5.2.11) et on écrit qu'elles doivent être équivalentes aux équations des champs (4.3.3)-(4.3.6). Cela donne deux équations pour F , à savoir :

$$-\frac{1}{2}F(a, \varphi) - \frac{a}{6} \frac{\partial F}{\partial a}(a, \varphi) = -\frac{1}{2}(\gamma - 1)\rho \quad (5.2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(a, \varphi) = -\alpha(\varphi)(4 - 3\gamma)\rho . \quad (5.2.13)$$

ρ peut être déterminé à l'aide de l'équation de conservation dans la représentation de Dicke-Jordan, en utilisant la transformation conforme : $\rho = A^{4-3\gamma}(\varphi)a^{-3\gamma}$. On peut alors résoudre les équations (5.2.12)-(5.2.13), et l'on trouve, à une constante près :

$$F(a, \varphi) = -\rho_0 A^{4-3\gamma}(\varphi) a^{-3\gamma} . \quad (5.2.14)$$

Donc, le lagrangien considéré dans cette section prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\phi^A, \phi^B) = \frac{1}{2}G_{AB}(\phi^C)\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B - W(\phi^C) , \quad (5.2.15)$$

où l'on a défini les variables de configurations :

$$(\phi^1, \phi^2) \equiv (a, \varphi) , \quad (5.2.16)$$

le potentiel :

$$W(\phi^C) \equiv 4a^3V(\varphi) + \rho_0 A^{4-3\gamma}(\varphi) a^{3(1-\gamma)} - 6ka , \quad (5.2.17)$$

et la métrique sur l'espace de configuration :

$$G_{AB}(\phi^C) \equiv \begin{pmatrix} -12a & 0 \\ 0 & 4a^3 \end{pmatrix} , \quad (5.2.18)$$

les indices A,B,C prenant leurs valeurs dans $\{1, 2\}$. C'est exactement la forme du lagrangien (5.2.1) ; ici, l'espace de configuration est bidimensionnel. Les impulsions associées aux variables de configurations (a, φ) sont :

$$p_1 = -12a\dot{a} \quad (5.2.19)$$

$$p_2 = 4a^3\dot{\varphi} , \quad (5.2.20)$$

et le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}(\phi^C, p_C) = 6a^3 \left(- \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}V(\varphi) + \frac{\rho_0}{6}A^{4-3\gamma}(\varphi)a^{-3\gamma} \right) . \quad (5.2.21)$$

En comparant cette expression avec la première équation du système (4.3.3), on voit immédiatement que, le long des trajectoires :

$$\mathcal{H}(\phi^C, p_C) = 0 . \quad (5.2.22)$$

Tout le formalisme de la section précédente peut donc être appliqué, en posant $E = 0$. Si $W(\phi^C) \equiv 0$, les équations du mouvement sont automatiquement les géodésiques associées à la métrique (5.2.18). Dans le cas contraire, on définit la métrique sur l'espace de configuration :

$$\hat{G}_{AB}(\phi^C) \equiv -2|W(\phi^C)|G_{AB} , \quad (5.2.23)$$

et le paramètre affine s tel que :

$$\frac{ds}{dt} = -2W(\Phi^C) . \quad (5.2.24)$$

Alors, les trajectoires dans l'espace des configurations sont exactement les géodésiques de la métrique (5.2.23) parcourue avec le paramètre affine s :

$$\frac{d^2\phi^A}{ds^2} + \hat{\Gamma}_{BC}^A \frac{d\phi^B}{ds} \frac{d\phi^C}{ds} = 0 . \quad (5.2.25)$$

De plus, la contrainte $\mathcal{H}(\phi^A, p_A) = 0$ s'écrit :

$$\hat{G}_{AB} \frac{d\phi^A}{ds} \frac{d\phi^B}{ds} = Sgn(W(\phi^C)) , \quad (5.2.26)$$

ce qui montre que les géodésiques correspondant aux trajectoires sont de "genre a" si $W > 0$ et de "genre φ " si $W < 0$. Cette dénomination est une réminiscence du langage utilisé dans le cas de la métrique d'espace-temps : on remarque en effet que dans la métrique (5.2.23), a joue le rôle d'un temps dans une variété localement

difféomorphe à un espace-temps de Minkowski (coefficient de la métrique \hat{G}_{11} négatif), et φ le rôle d'une dimension d'espace (coefficient \hat{G}_{22} positif). En principe, l'étude des propriétés de la métrique \hat{G}_{AB} , c'est-à-dire essentiellement de celles des géodésiques (5.2.25), permet de caractériser la dynamique du champ scalaire cosmologique. La métrique (5.2.25) est manifestement conformément reliée à la métrique de Milne :

$$ds^2 = -\hat{c}^2 \frac{da^2}{a^2} + d\varphi^2, \quad (5.2.27)$$

où $\hat{c}^2 \equiv 3$. Par le changement de variable $\eta = \ln(a)$, (5.2.25) est donc conformément reliée à un espace de Minkowski :

$$ds^2 = -\hat{c}^2 d\eta^2 + d\varphi^2. \quad (5.2.28)$$

Le cône de lumière de (5.2.25) est donc exactement celui de la métrique de Minkowski (5.2.28) :

$$\hat{\varphi}_{\pm} = \pm \hat{c}\eta + cste, \quad (5.2.29)$$

et \hat{c} joue le rôle de "vitesse" limite dans l'espace des configurations (η, φ) .

Pour chaque type de potentiel $V(\varphi)$, de couplage $A(\varphi)$ et de matière caractérisée par γ , on peut trouver une suite de changement de variables $T(\eta, \varphi)$ et $X(\eta, \varphi)$, permettant de réécrire la métrique (5.2.25) sous la forme d'une métrique de Minkowski² :

$$d\hat{s}^2 = -dT^2 + dX^2. \quad (5.2.30)$$

La suite de l'étude consiste donc à examiner la structure du cône de lumière dans ces coordonnées (T, X) , pour lesquelles les géodésiques sont simplement des droites. Cela devrait permettre, à terme, de caractériser le comportement asymptotique des théories scalaire-tenseur en présence d'un potentiel et d'un champ de matière. Des résultats préliminaires semblent indiquer que durant une ère dominée par la radiation ($\gamma = 4/3$), il existe une différence importante entre un potentiel de la forme $V(\varphi) \propto \varphi^2$ et des potentiels plus raides : $V(\varphi) \propto \varphi^{2n}$ avec $n > 1$. En effet, les géodésiques semblent se rapprocher du cône de lumière dans le premier cas et pas dans le second, ce qui tendrait à signifier que les théories avec $V(\varphi) \propto \varphi^2$ sont instables durant une ère dominée par la radiation, avec une vitesse du champ $d\varphi/d\eta$ tendant vers $\sqrt{3}$, et donc une contribution énergétique Ω_{φ} tendant vers 1 : aux temps longs, la dynamique serait alors dominée par le champ scalaire, lequel se comporterait comme un fluide de matière raide. Ces résultats sont très préliminaires et demandent à être vérifiés en détail, mais la méthode présentée ci-dessus semble prometteuse.

²Ces changements de variables sont tout à fait analogues à ceux utilisés dans le cadre de l'étude des trous noirs, et menant à la construction de diagramme de Carter-Penrose[4, 2].

Chapitre 6

Effets cosmologiques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à quelques conséquences cosmologiques des théories scalaire-tenseur. Dans une première section, nous aborderons un des tests centraux des scénarios cosmologiques non standard : la nucléosynthèse primordiale. En particulier, nous verrons que l'existence d'un degré de liberté scalaire pour la gravitation durant l'ère dominée par la radiation peut expliquer l'abondance anormale de ${}^7\text{Li}$ observée dans les étoiles. Puis, dans une seconde section, nous présenterons succinctement les modifications attendues dans la formation des structures en raison de la présence d'un champ scalaire explicitement couplé à la matière.

6.1 Nucléosynthèse primordiale

La nucléosynthèse primordiale est l'un des piliers du modèle de Big-Bang chaud en tant qu'elle constitue le seul phénomène physique primordial (à l'exception notable cependant de la formation d'éventuels défauts topologiques lors des brisures spontanées de symétrie, électrofaible par exemple) suffisamment bien compris sur des bases extérieures à la cosmologie. L'idée, fréquemment exprimée et bien plus souvent encore implicite, selon laquelle les récentes mesures des fluctuations du fond de rayonnement cosmologique seraient un test permettant de contraindre de façon univoque la micro-physique de l'Univers très primordial, et notamment les scénarios inflationnaires doit en effet être nuancée : les contraintes ainsi obtenues dépendent fortement du modèle choisi pour décrire l'expansion de l'Univers au cours de cette période primordiale, ainsi que dans les phases plus tardives ; en atteste la profusion de modèles de l'Univers primordial permettant, avec ou sans phase inflationnaire, de générer un spectre de fluctuations initiales quasiment invariant d'échelle. Si bien qu'il est aujourd'hui impossible de valider (et d'ailleurs d'invalider) nombre de scénarios de l'Univers (j'entends par là la phy-

sique non-gravitationnelle, c'est-à-dire celle qui "se déroule" au sein de l'Univers en expansion) antérieurement à la nucléosynthèse primordiale, sinon par des arguments théoriques. Ce n'est pas le cas de la nucléosynthèse primordiale, qui repose sur des processus de physique nucléaire bien compris. Bien sûr, les prédictions de la nucléosynthèse dépendent du modèle d'Univers considéré, mais les phénomènes nucléaires à l'œuvre au cours de la nucléosynthèse sont incontestables et s'imposent raisonnablement à tout scénario cosmologique moderne. C'est pourquoi c'est un indicateur important de l'évolution de l'espace-temps au cours de l'ère dominée par la radiation : les processus de physique microscopique étant bien compris, l'indétermination théorique principale réside dans l'arrière-plan cosmologique dans lequel se déroulent les réactions nucléaires. Aussi, toute observation permettant de contraindre les abondances des éléments légers peut être considérée comme un excellent test de la cosmologie durant l'ère dominée par la matière radiative. On voit donc l'intérêt que revêt cette période dans la construction d'une cosmologie en théorie scalaire-tenseur : toute déviation de la Relativité Générale au cours de l'ère radiative doit avoir laissé une trace sur l'abondance des éléments légers. Dans cette section, je présenterai d'abord les effets que l'on peut attendre, en insistant sur l'intérêt de la nucléosynthèse quant à la question de savoir si le champ scalaire possède ou non des termes d'auto-interaction. Puis, afin d'illustrer cela, j'étudierai en détail le problème de l'abondance du ${}^7\text{Li}$, et les façons de le résoudre en théorie scalaire-tenseur.

6.1.1 Modifier la nucléosynthèse

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la présence d'un champ scalaire non minimalement couplé se manifeste en cosmologie par une modification du taux d'expansion de la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$, \tilde{H} . Deux facteurs interviennent dans cette modification, qui s'entremêlent dans la représentation de Dicke-Jordan ; il est donc plus commode de les analyser dans la représentation d'Einstein. Le premier, commun à tous les champs, vient du tenseur énergie-impulsion du champ : la géométrie de l'espace-temps se couple au contenu matériel par l'intermédiaire des équations d'Einstein. Le taux d'expansion associé à la métrique $g_{\mu\nu}$ fait donc intervenir la densité d'énergie de φ . Le second est spécifique au couplage non-minimal. Il provient du fait que la métrique observable résulte d'un couplage explicite entre $g_{\mu\nu}$ et φ : la valeur de φ à un instant donné fixe la valeur du couplage gravitationnel effectif, et la variation temporelle de φ rentre également en jeu, reflet de ce que les règles servant à calculer les longueurs, et les horloges indiquant les temps, voient leurs étalons varier avec les variations de φ . Cela résulte alors dans le taux d'expansion observable :

$$\tilde{H}(\tilde{t}) = A^{-1}(\varphi(t)) (H(t) + \alpha(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)) . \quad (6.1.1)$$

Le facteur $A^{-1}(\varphi)$ traduit la variation du couplage gravitationnel, et le terme $\alpha(\varphi)\dot{\varphi}$ provient de la variation des étalons de mesure. L'énergie du champ scalaire, quant à elle, est implicitement présente dans $H(\tilde{t})$, au même titre que celle des autres champs. Puisque dans cette partie, nous allons analyser les différences introduites par la présence du champ scalaire, il est commode d'introduire le rapport du taux d'expansion de la cosmologie scalaire-tenseur et de celui d'une cosmologie en présence du même fluide parfait, envisagée dans le cadre de la Relativité Générale¹ :

$$\xi = \frac{\tilde{H}}{H_{GR}} \text{ avec } H_{GR} = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}. \quad (6.1.2)$$

Ce rapport, nommé en anglais 'speed-up factor', permet de caractériser la cosmologie scalaire-tenseur relativement à la cosmologie en Relativité Générale : lorsque $\xi > 1$ (respectivement $\xi < 1$), cela signifie que l'expansion de l'Univers est plus rapide (respectivement plus lente) que si l'interaction gravitationnelle était gouvernée par la Relativité Générale. Or, nous avons vu, dans l'exposé général sur le modèle de Big-Bang chaud que l'efficacité des réactions nucléaires à une température donnée dans l'Univers primordial dépendait du rapport entre leur taux de réaction et le taux d'expansion : si ce rapport est plus grand que 1 (respectivement plus petit que 1), cela signifie que le temps caractéristique de la réaction est plus court (respectivement plus long) que le temps caractéristique de l'expansion, et donc que la réaction est possible (respectivement impossible). Ce comportement se comprend fort bien si l'on considère que l'expansion 'dilue' les particules du fluide de matière. Ainsi, le 'speed-up factor', en comparant les taux d'expansion, nous permettra de comparer les efficacités des réactions nucléaires dans les cosmologies, en scalaire-tenseur et en Relativité Générale². C'est le cœur de toutes les modifications qui vont être présentées dans la suite.

Rappelons que l'analyse de la dynamique cosmologique du champ scalaire au chapitre précédent a montré que durant une ère dominée par de la matière relativiste ($p = \rho/3$), le champ scalaire φ était découplé du fluide de matière et évoluait comme un champ scalaire classique suivant l'équation :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (6.1.3)$$

En première approximation, cette équation décrit très fidèlement la dynamique du champ φ durant la nucléosynthèse. Cependant, l'annihilation des paires e^+e^- à une température d'environ $m_e/3$, juste avant le gel des processus responsables

¹La densité qui intervient dans H_{GR} est bien $\tilde{\rho}$, qui suit la même loi de conservation qu'en Relativité Générale.

²Il faut remarquer ici que les taux de réaction ne sont pas affectés par l'introduction du champ scalaire ; autrement dit, on ne modifie rien à la physique nucléaire, ce qui va dans le sens de notre hypothèse de respect du principe d'équivalence faible.

de l'interconversion entre protons et neutrons transfère l'entropie de ces paires au gaz de photons, modifiant par là même l'équation d'état du fluide cosmologique, de sorte que pendant un temps très court (comparé à celui de la nucléosynthèse), le terme d'entraînement dû au couplage explicite à la matière peut jouer un rôle important. Il conviendra donc, lors des calculs numériques visant à une prédiction précise des abondances, de résoudre la dynamique exacte, à la fois pour φ , et pour le fluide cosmologique. Cependant, l'étude de l'équation (6.1.3) nous permet de dégager certains traits dynamiques importants. Ainsi, nous avons vu au chapitre précédent qu'en l'absence de potentiel d'auto-interaction, la solution de (6.1.3) dans un Univers plat donnait :

$$\varphi'^2 = \frac{3C^2}{e^{2\lambda} + C^2}, \quad (6.1.4)$$

où comme au chapitre précédent $\varphi' \equiv d\varphi/d\ln a$, et $C = \varphi_i'^2/(3 - \varphi_i'^2)$ dépend de la valeur φ_i' de φ' à l'instant initial. Ainsi, l'on voit que le champ scalaire, si sa vitesse initiale est petite devant $\sqrt{3}$, est très vite gelé à une valeur constante durant toute l'ère dominée par la radiation, et l'on peut considérer que durant la nucléosynthèse primordiale, φ est une constante φ_i (que l'on prend comme condition initiale juste avant la nucléosynthèse). Alors, le taux d'expansion observable (6.1.1) se réduit à :

$$\tilde{H} = \frac{H}{A(\varphi_i)} = \sqrt{\frac{8\pi G A^2(\varphi_i)}{3}} \tilde{\rho}, \quad (6.1.5)$$

où la deuxième égalité vient de l'expression de H et du lien $\rho = A^4(\varphi)\tilde{\rho}$. On voit donc que durant toute la nucléosynthèse, $\xi = A(\varphi_i)$: le taux d'expansion suit la même loi (en fonction de la température par exemple) que celui de la Relativité Générale et n'en diffère que d'un facteur constant. Lorsque l'on impose à une telle théorie scalaire-tenseur de reproduire les abondances observées d'hélium et de deutérium, les contraintes sur la fonction de couplage sont très fortes, voire plus fortes que celles imposées par les tests postnewtoniens dans le système solaire [85, 86, 87, 88]. Cependant, nous avons vu que l'introduction d'un potentiel dans le lagrangien du champ scalaire renouvelait les propriétés dynamiques du champ scalaire ; en particulier, son comportement durant l'ère dominée par la radiation devient plus complexe et plus riche, permettant d'envisager des modifications plus subtiles des processus de nucléosynthèse. C'est ce qu'illustre la suite de cette section sur l'exemple du ${}^7\text{Li}$.

6.1.2 Une solution au problème du ${}^7\text{Li}$

Le problème du ${}^7\text{Li}$ dans la cosmologie standard

Il existe aujourd'hui deux méthodes robustes et indépendantes pour estimer la densité de baryons dans l'Univers : la nucléosynthèse primordiale et la mesure

du spectre des anisotropies du fond de rayonnement cosmologique (FRC). Leur indépendance en tant que phénomène, et le fait qu'ils se produisent à des moments très différents de l'histoire cosmologique font de ce test croisé un excellent 'crible' pour sélectionner les modèles d'Univers. L'estimation de la densité baryonique par les anisotropies du FRC repose sur la hauteur relative du deuxième et du premier pics dans le spectre, et donne [89], d'après les mesures récentes de WMAP combinées aux mesures antérieures de CBI [90] et ACBAR [11] :

$$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009 , \quad (6.1.6)$$

ou, de manière équivalente (dans la mesure où la densité de photons est très bien connue) : $\eta_{10} = \eta \times 10^{10} = 6.14 \pm 0.25$. Une telle valeur du rapport baryon-photon conduit à des abondances pour les éléments légers dans le cadre de la nucléosynthèse standard (c'est-à-dire avec trois familles de neutrinos légers, une demi-vie du neutron de $\tau_n = 885.7 \pm 0.8$ s, une gravitation décrite par la Relativité Générale et un Univers homogène et isotrope) données par :

$$\begin{aligned} Y_p &= 0.2484_{-0.0005}^{+0.0004} \\ D/H &= 2.75_{-0.19}^{+0.24} \times 10^{-5} \\ {}^7\text{Li}/H &= 3.82_{-0.60}^{+0.73} \times 10^{-10} . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

D'autre part, les abondances estimées par les observations sont :

$$\begin{aligned} Y_p &= \begin{cases} 0.2391 \pm 0.0020 & \text{ref. [91]} \\ 0.2452 \pm 0.0015 & \text{ref. [92]} \end{cases} \\ D/H &= 2.78_{-0.38}^{+0.44} \times 10^{-5} \text{ ref. [93]} \\ {}^7\text{Li}/H &= \begin{cases} 1.23_{-0.32}^{+0.68} \times 10^{-10} & \text{ref. [94]} \\ 2.19_{-0.38}^{+0.46} \times 10^{-10} & \text{ref. [95]} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Les deux estimations données pour l' ${}^4\text{He}$ proviennent d'observations de régions extragalactiques d'hydrogène ionisé pauvres en métaux; l'estimation du deutérium est réalisée à partir d'observations de nuages cosmologiques distants interceptant la ligne de visée de quasars à grand décalage vers le rouge; enfin, les estimations de l'abondance de ${}^7\text{Li}$ ont été réalisées par l'observation d'étoiles du halo galactique [94], et d'étoiles de l'amas globulaire NGC 6397 [95]. La confrontation de ces estimations observationnelles avec les résultats prédits par le scénario cosmologique standard lorsque l'on suppose le rapport baryon-photon donné par WMAP révèle un résultat surprenant : alors que les abondances prédites et déduites de l'observation concordent relativement bien dans les cas de l'hélium et du deutérium, on constate une erreur relative importante sur l'abondance de ${}^7\text{Li}$. Il n'est pas exclu que cette différence provienne de problèmes dans les modèles de nucléosynthèse stellaire ou de structuration des étoiles, bien que le plateau de Spite

[96] soit un fait observationnel assez robuste ; dans la suite, on supposera correctes les valeurs déterminées observationnellement. Dans ce cas, le désaccord persistant entre l'abondance de ${}^7\text{Li}$ déduite des observations et celle prédite par le modèle standard, par ailleurs si précis quant aux abondances des autres éléments, a suscité nombre de tentatives de résolution. L'approche la plus conservatrice, fondée sur une prise en compte des incertitudes sur les taux de réactions nucléaires ne semble pas suffisante [97]. Il est alors loisible de considérer des modifications du modèle standard de la cosmologie : nucléosynthèse inhomogène [98] qui produit trop de ${}^7\text{Li}$; désintégration tardive de particules modifiant le rapport baryon-photon entre la nucléosynthèse et le FRC qui permet de faire baisser l'abondance de ${}^7\text{Li}$ mais qui modifie trop l'abondance de D [99, 100, 101] ; enfin, un dernier exemple, qui amène à une résolution du problème, passe par l'introduction de 'Q-balls' permettant la création de baryons après la nucléosynthèse et une asymétrie leptonique avant [102]. Ici, nous allons voir que le remplacement de la Relativité Générale par une théorie scalaire-tenseur permet de rendre compte de cette faible abondance de ${}^7\text{Li}$ tout en conservant des valeurs standard pour les autres abondances, c'est-à-dire en conservant le rapport baryon-photon déduit des observations des fluctuations du FRC, à condition que le champ scalaire introduit ait une dynamique non triviale durant l'ère dominée par la radiation.

Présentation du code numérique de nucléosynthèse

Avant d'en venir à la résolution proprement dite du problème du ${}^7\text{Li}$, il nous faut introduire rapidement le code numérique, rédigé en Fortran 77, qui permet de déterminer les abondances des éléments légers dans un modèle cosmologique donné³. Ce calcul numérique comprend deux parties distinctes : la détermination de l'arrière-fond cosmologique, puis le calcul explicite des abondances dans cet arrière-fond. Le calcul du modèle cosmologique est effectué grâce à un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 6 appliqué à deux équations : l'une pour le facteur d'échelle, l'autre pour le champ scalaire. De plus, cette intégration est possible tant dans la représentation d'Einstein que dans celle de Dicke-Jordan, et soit dans le sens du temps cosmique (c'est-à-dire à partir de conditions initiales jusqu'à aujourd'hui) soit dans le sens inverse (c'est-à-dire à partir des conditions aujourd'hui et en remontant le temps cosmique). Une fois le modèle d'Univers déterminé, on dispose en particulier d'une valeur du taux d'expansion pour chaque valeur du facteur d'échelle (ou, de façon équivalente, de la température), et on peut alors calculer les processus de nucléosynthèse primordiale se déroulant dans ce modèle cosmologique particulier, et les abondances qui en résultent. Ceci est

³Je remercie Arturo Serna à qui revient la paternité de ce code, de m'avoir permis, grâce à ses patientes explications, de l'utiliser et d'adapter la partie permettant d'intégrer le modèle cosmologique.

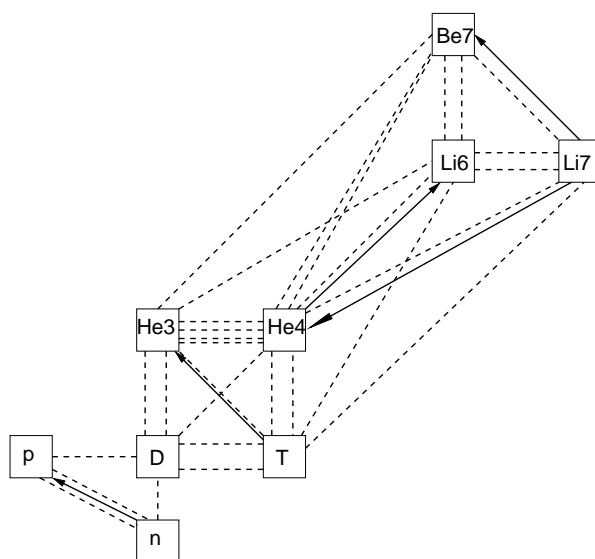


FIG. 6.1.1 – Réseau de réactions nucléaires utilisées dans le schéma de Beaudet-Yahil permettant de calculer les abondances primordiales des éléments légers.

réalisé grâce au réseau de réactions présenté sur la figure 6.1.1, en utilisant un schéma de Beaudet et Yahil [37]. Les taux de réactions utilisés sont ceux des références suivantes : [103, 104, 105].

Champ scalaire sans potentiel

Pour commencer notre recherche d'une solution au problème du ${}^7\text{Li}$, il paraît naturel d'étudier le cas simple dont nous avons parlé ci-dessus, d'un champ scalaire sans potentiel. Nous avons vu que dans ce cas, si la vitesse initiale du champ φ'_i est faible (en valeur absolue) devant $\sqrt{3}$, le champ scalaire peut être considéré comme constant durant toute la phase de nucléosynthèse primordiale. Alors, l'équation (6.1.5) montre que la dynamique de l'Univers est équivalente à celle d'un modèle fondé sur la Relativité Générale, avec une constante de couplage gravitationnelle effective donnée par :

$$G_{eff} = GA^2(\varphi_i) . \quad (6.1.9)$$

Or, Cyburt a déterminé la dépendance des abondances des éléments légers en fonction de la valeur d'un couplage gravitationnel constant, toutes les autres grandeurs prenant leur valeur standard [106] :

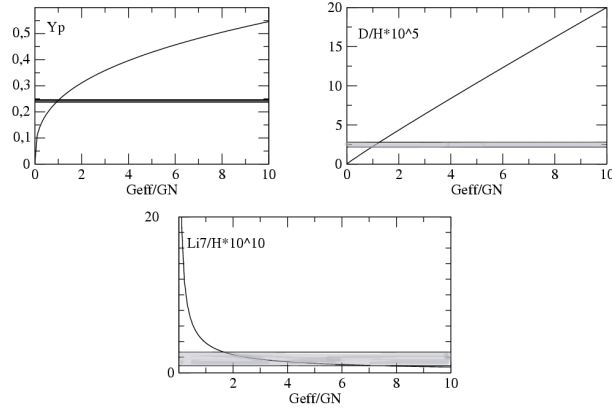


FIG. 6.1.2 – Abondances primordiales en fonction de G_{eff}/G . Les régions grisées correspondent aux abondances observées (6.1.8).

$$Y_p = 0.2484 \left(\frac{G_{eff}}{G} \right)^{0.35} \quad (6.1.10)$$

$$D/H = 2.75 \left(\frac{G_{eff}}{G} \right)^{0.95} 10^{-5} \quad (6.1.11)$$

$${}^3\text{He}/H = 8.65 \left(\frac{G_{eff}}{G} \right)^{0.34} 10^{-6} \quad (6.1.12)$$

$${}^7\text{Li}/H = 3.82 \left(\frac{G_{eff}}{G} \right)^{-0.72} 10^{-10} \quad (6.1.13)$$

La figure 6.1.2 montre ces lois d'échelle, sur lesquelles on a superposé les contraintes observationnelles (6.1.8). Il est clair qu'il n'existe aucune valeur de G_{eff}/G qui permette d'expliquer simultanément toutes les abondances observées : une résolution du problème du ${}^7\text{Li}$ exige $G_{eff}/G > 1.8$ alors que les abondances de D et ${}^4\text{He}$ forcent une valeur de ce rapport très proche de 1. Ainsi, quelle que soit la fonction de couplage utilisée, tant que le champ scalaire n'a pas de potentiel et que sa dérivée φ' est nulle (ou très faible) au début de la nucléosynthèse, on ne peut pas résoudre le problème du ${}^7\text{Li}$.

Cependant, si on lève l'hypothèse sur la dérivée initiale de φ , et que l'on s'autorise à considérer des théories telles que le champ scalaire puisse avoir une vitesse très grande au début de l'Univers ($\varphi'_i \sim \pm\sqrt{3}$, ce qui correspond à $\Omega_\varphi(t_i) \sim 1$), alors, il est possible de résoudre le problème du ${}^7\text{Li}$. Cette stratégie est exposée dans l'annexe de l'article [107], joint à ce mémoire dans l'appendice C. Dans la

suite, nous allons continuer à supposer que le champ scalaire est dans un état initial tel que φ' est faible devant $\sqrt{3}$, voire nulle.

Champ scalaire avec potentiel

Dans le cadre des conditions initiales exposées ci-dessus, qui trouvent une justification dans l'effet des processus d'annihilation de paires particule-antiparticule à très haute énergie sur la dynamique du champ scalaire [87], une théorie scalaire-tenseur dont le champ scalaire ne possède pas d'auto-interaction ne peut, nous l'avons vu, expliquer la faible abondance de ${}^7\text{Li}$ observée. Cependant, la présence d'un potentiel d'auto-interaction modifie considérablement le comportement du champ scalaire, notamment durant l'ère dominée par la radiation. Peut-être avons-nous là un moyen de réduire l'abondance du ${}^7\text{Li}$ sans affecter de façon notable les abondances des autres éléments légers ? C'est l'objet des développements suivants de montrer que c'est bien le cas ; mais avant, il nous faut revenir sur le calcul des abondances. Nous avons vu que la quasi-totalité des neutrons sont incorporés aux noyaux d' ${}^4\text{He}$ au cours de la nucléosynthèse ; ainsi, l'abondance de l' ${}^4\text{He}$ est reliée très simplement à la proportion de neutrons parmi les nucléons :

$$Y_p \simeq \frac{2(n/p)_{fr}}{1 + (n/p)_{fr}} , \quad (6.1.14)$$

où $(n/p)_{fr}$ représente le rapport du nombre de neutrons au nombre de protons au moment où les interactions faibles, $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ et $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$, responsables de leur inter-conversion, cessent d'être efficaces et ne peuvent plus maintenir l'équilibre entre les deux espèces de nucléons.

Alors, le rapport (n/p) se gèle à la valeur :

$$(n/p)_{fr} = \exp(-\Delta m/T_{fr}) , \quad (6.1.15)$$

avec $\Delta m = m_p - m_n$ la différence de masse entre protons et neutrons. Cette sortie de l'équilibre se produit à une température T_{fr} proche de 1 MeV, bien au-dessus des températures auxquelles se produit la synthèse des éléments légers (entre 100 keV et 10 keV environ). Ainsi, l'abondance d' ${}^4\text{He}$ est déterminée, in fine, par des processus ayant lieu à des températures de l'ordre de 1 MeV. D'autre part, dans le cas du ${}^7\text{Li}$, l'abondance dépend des processus de la nucléosynthèse proprement dite, à des températures plus basses, et dans une certaine mesure, cette hiérarchie en énergie va nous permettre de traiter les deux phénomènes séparément, au moins au niveau de la discussion qualitative des résultats. Pour un rapport baryons-photons $\eta > 3 \times 10^{-10}$, comme c'est le cas pour la valeur déduite des observations de WMAP ($\eta \times 10^{10} = 6.14 \pm 0.25$), le ${}^7\text{Li}$ est principalement produit par

la réaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ suivie d'une capture électronique par le noyau de ${}^7\text{Be}^4$. Ainsi, l'abondance finale de ${}^7\text{Li}$ dépend à la fois de l'abondance d'hélium, et de l'efficacité de la réaction ci-dessus. Si l'on note Γ le taux de réaction de ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, l'efficacité de cette dernière réaction est donnée par $\Gamma/H = (\Gamma/H_{GR})/\xi(T)$, ce qui montre qu'une expansion de l'Univers plus rapide (respectivement plus lente) qu'en Relativité Générale au moment de la synthèse du ${}^7\text{Be}$ conduit à une production moins (respectivement plus) efficace du ${}^7\text{Li}$ primordial. De fait, comme nous l'avons vu ci-dessus, la Relativité Générale permet de prédire une abondance d' ${}^4\text{He}$ en bon accord avec les observations, et une autre théorie de la gravitation, si rien d'autre n'est modifié que la gravité, doit par conséquent conduire à $\xi(T) \sim 1$ pour des températures proches de 1 MeV. D'autre part, lorsque la température est de l'ordre de la centaine de keV, alors que les réactions responsables de la synthèse des éléments légers se mettent à jouer, le 'speed-up factor' doit avoir crû significativement, afin, comme expliqué précédemment, de réduire la production de ${}^7\text{Be}$. Enfin, la nécessaire convergence des théories scalaire-tenseur vers la Relativité Générale, imposée par les expériences testant le principe d'équivalence dans le système solaire, implique que ξ doit décroître à un certain moment après la nucléosynthèse. La solution cosmologique au problème du ${}^7\text{Li}$ impliquant une simple modification de la gravité conduit donc naturellement à considérer des théories scalaire-tenseur avec des couplages tels que ces théories convergent vers la Relativité Générale sur des échelles de temps cosmologiques, et conduisent à un 'speed-up factor' non monotone avec un maximum local. Ce 'speed-up factor' doit être légèrement inférieur à 1 au moment du gel du rapport neutron/proton ($T \sim 1$ MeV) de façon à produire un peu moins d' ${}^4\text{He}$ qu'en Relativité Générale (puisqu'il y en aura moins de consommé pour produire le ${}^7\text{Li}$) ; puis il doit croître afin de bloquer la production du ${}^7\text{Li}$ ($T \sim 70$ keV), avant de décroître et de se stabiliser au voisinage de 1.

Dans la suite, nous allons présenter une solution concrète au problème du ${}^7\text{Li}$ en considérant des théories scalaire-tenseur avec $\alpha(\varphi) = a\varphi^2$ et $V(\varphi) = \Lambda^2\varphi^{2n}$. Le couplage quadratique présente l'avantage de permettre au 'speed-up factor' initial d'être légèrement inférieur à 1. En effet, puisque nous avons restreint l'analyse à des champs scalaires dont la dérivée initiale φ' est faible devant $\sqrt{3}$, le champ est quasiment gelé au début de la phase de nucléosynthèse primordiale, donc, $\xi \sim A(\varphi_i)$. On voit donc que si le couplage avait été linéaire, $\xi \sim \exp(\beta\varphi^2/2) > 1$, alors qu'avec un couplage quadratique, $\xi \sim \exp(a\varphi^3/3)$ qui est inférieur à 1 pour $\varphi < 0$. De plus, ce couplage quadratique déstabilisant le point $\varphi = 0$ qui correspond à la limite Relativité Générale, l'introduction d'un potentiel ayant la forme d'un puits au voisinage de 0 permet de stabiliser la théorie. Cependant, il semble qu'un potentiel quadratique ne puisse pas assurer la convergence de la théorie vers la

⁴Lorsque $\eta < 3 \times 10^{-10}$, la réaction dominant la production de ${}^7\text{Li}$ est en revanche ${}^4\text{He}({}^3\text{H}, \gamma){}^7\text{Li}$.

Relativité Générale sur des temps comparables à l'âge de l'Univers (cf chapitre précédent); c'est pourquoi nous considérerons le cas le plus simple qui permette la convergence, et que nous prendrons $n = 2$, soit $V(\varphi) = \Lambda\varphi^4$.

Les figures 6.1.3 et 6.1.4 montrent les comportements respectifs du champ scalaire φ et du 'speed-up factor' pour un modèle particulier résolvant le problème du ${}^7\text{Li}$, caractérisé par $a = 1$, $\Lambda = 0.3 \text{ s}^{-1}$, et , une valeur initiale du champ à $\varphi_{init} = -1.3$. On voit que le 'speed-up factor' a le comportement attendu. Numériquement, les modèles avec $-1.5 < \varphi_{init} < -0.9$ résolvent le problème du ${}^7\text{Li}$ pour des valeurs de a et Λ qui sont peu contraintes. En effet, la seule exigence porte sur Λ qui ne doit pas être trop petit afin que le mécanisme d'attraction vers la Relativité Générale se produise au cours de la nucléosynthèse, à une température entre 10 MeV et 1 MeV. En se reportant à l'équation (5.0.1) pour $w_b = 1/3$ et une courbure nulle, on voit que l'équation d'évolution du champ φ au cours de la nucléosynthèse s'écrit :

$$\frac{2(1+\eta)}{3-\varphi'^2}\varphi'' + 2\left(\frac{1}{3} + \eta\right)\varphi' = -\frac{1}{4\pi G\rho} \frac{dV}{d\varphi} . \quad (6.1.16)$$

En forçant l'analogie, on peut dire que c'est l'équation d'un oscillateur amorti de masse variable $m_{eff} = 2(1+\eta)/(3-\varphi'^2)$, de friction variable $f_{eff} = 2(1/3 + \eta)$ et de potentiel effectif :

$$V_{eff}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{4\pi G\rho} V(\varphi) . \quad (6.1.17)$$

Ce potentiel devient de plus en plus raide au fur et à mesure de l'expansion, car $1/\rho(\lambda)$ est une fonction croissante de λ . On peut donc penser que, pour $|\varphi| \sim 1$ le potentiel se met à jouer un rôle et à tirer le champ vers son minimum (en 0) dès que $\Lambda^2 \sim G\rho(\lambda)$; avec $\rho \propto (T/T_0)^4$, et T entre 10 MeV et 1 MeV, cela conduit à : $0.1 \text{ s}^{-1} < \Lambda < 6 \text{ s}^{-1}$. La figure 6.1.5 représente en grisé dans le plan (a, Λ) les modèles qui permettent d'obtenir des abondances en accord avec les abondances observées pour $\varphi_{init} = -1.3$.

Pour le modèle type correspondant aux figures 6.1.3 et 6.1.4, nous avons tracé l'évolution du rapport n/p et de l'abondance cumulée des éléments de numéro atomique 7 (c'est-à-dire ${}^7\text{Be}$ et ${}^7\text{Li}$) respectivement sur les figures 6.1.5 et 6.1.6. Sur la première, on voit que le rapport n/p s'écarte de sa valeur à l'équilibre légèrement plus tard qu'en Relativité Générale, laissant une fraction de neutrons disponible pour la nucléosynthèse légèrement inférieure, en accord avec le mécanisme explicité ci-dessus.

Signalons enfin qu'il est possible d'obtenir une bonne approximation de la sous-production de ${}^7\text{Li}$ dans un modèle scalaire-tenseur du type de ceux présentés dans cette section. En effet, la réaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ est la principale responsable de la création du ${}^7\text{Be}$ (qui devient ensuite du ${}^7\text{Li}$ par capture électronique) durant

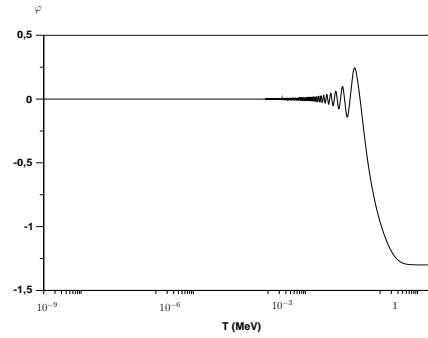


FIG. 6.1.3 – Comportement du champ scalaire φ en fonction de la température pour le modèle type avec $a = 1$ et $\Lambda = 0.3 \text{ s}^{-1}$.

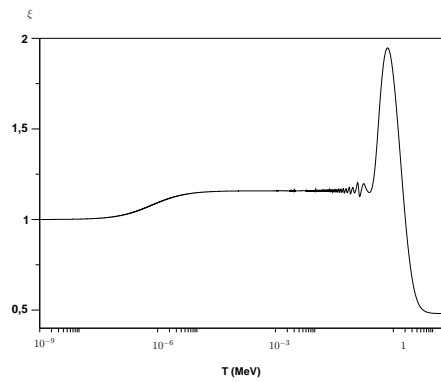


FIG. 6.1.4 – Speed-up factor en fonction de la température pour le modèle type avec $a = 1$ et $\Lambda = 0.3 \text{ s}^{-1}$.

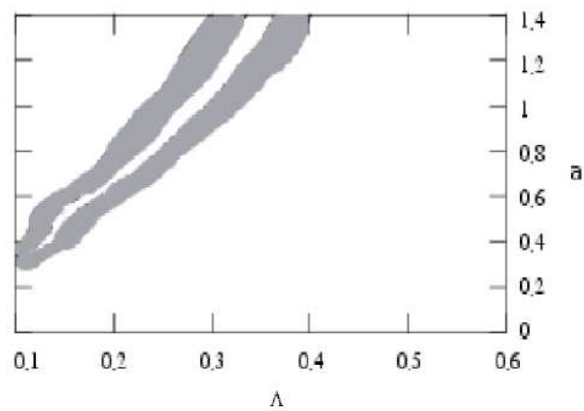
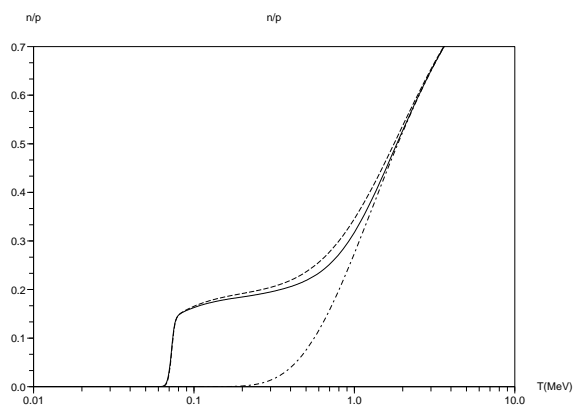
FIG. 6.1.5 – Contraintes dans le plan (a, Λ) .

FIG. 6.1.6 – Evolution du rapport n/p en fonction de la température. La courbe en pointillés représente cette évolution en Relativité Générale, celle en trait plein dans le même modèle que pour les figures 6.1.3 et 6.1.4, et la courbe alternant pointillés et points la valeur du rapport à l'équilibre thermodynamique.

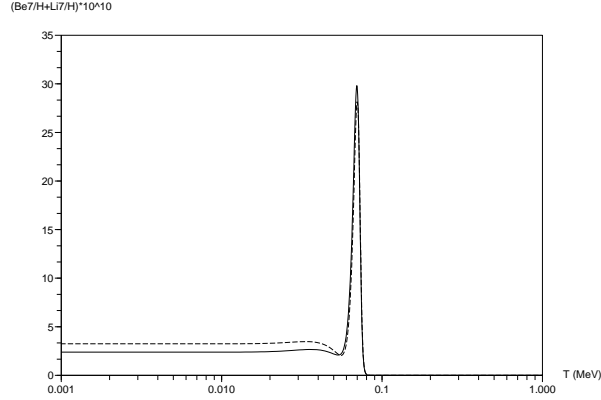


FIG. 6.1.7 – Evolution de l’abondance ${}^7\text{Be} + {}^7\text{Li}$ en fonction de la température en Relativité Générale (courbe pointillée) et dans le modèle correspondant aux figures 6.1.3 et 6.1.4 (courbe en trait plein).

la nucléosynthèse primordiale. Aussi, en négligeant la destruction du ${}^7\text{Be}$ par la réaction ${}^7\text{Be}(n,p){}^7\text{Li}$, qui est inefficace à cause de la faible abondance de neutrons, l’abondance finale de ${}^7\text{Be}$ peut être estimée grossièrement, à partir de l’équation de la réaction :

$$\frac{dY_{\text{Be}7}}{dT} = \frac{\Gamma}{TH} Y_{\text{He}3} Y_{\text{He}4} , \quad (6.1.18)$$

où Y_i représente l’abondance de l’espèce nucléaire i . En passant aux petites variations, cette équation donne

$$\Delta Y_{\text{Be}7} = \frac{\Gamma}{H} Y_{\text{He}3} Y_{\text{He}4} \Delta \ln T . \quad (6.1.19)$$

La figure 6.1.7 montre que les abondances de ${}^7\text{Be} + {}^7\text{Li}$ diffèrent significativement entre la Relativité Générale et le modèle considéré uniquement à des températures comprises entre 0.06 MeV et 0.03 MeV. Cet intervalle de température est donc suffisamment petit pour que l’on puisse appliquer la formule (6.1.19) et estimer la production de ${}^7\text{Be}$ entre le début et la fin de la nucléosynthèse ; on trouve⁵ :

$$\frac{\Delta Y_{\text{Be}7}}{\Delta Y_{\text{Be}7}^{\text{GR}}} \sim \xi^{-1} \frac{Y_{\text{He}3} Y_{\text{He}4}}{Y_{\text{He}3}^{\text{GR}} Y_{\text{He}4}^{\text{GR}}} , \quad (6.1.20)$$

puisque le “speed-up factor” reste quasiment constant à la valeur 1.16 dans l’intervalle de température considéré (cf figure 6.1.4). De plus, les abondances d’ ${}^3\text{He}$ et

⁵Les grandeurs portant l’exposant GR représentent ces grandeurs en cosmologie standard.

d⁴He restent également constantes dans cette plage de température, avec $Y_{He3} \sim Y_{He3}^{GR}$ et $Y_{He4} \sim Y_{He4}^{GR}$ (c'est une des conditions pour résoudre le problème du ⁷Li sans toucher aux autres abondances). Alors, si l'on considère que tout le ⁷Be est transformé en ⁷Li par capture électronique (donc l'abondance finale Y_{Li7} est égale à la production totale de ⁷Be donnée par ΔY_{Be7}), la relation (6.1.20) conduit à :

$$Y_{Li7} \sim 0.8Y_{Li7}^{GR} . \quad (6.1.21)$$

Cette évaluation est en bon accord avec le résultat obtenu numériquement par l'intégration de tout le réseau de réactions nucléaires : $Y_{Li7} \sim 0.74Y_{Li7}^{GR}$.

6.2 Fond de rayonnement cosmologique et formation des structures

Dans cette section, nous allons décrire les principales caractéristiques de l'évolution des perturbations en théorie scalaire-tenseur, avant de revenir sur les modifications introduites par les théories qui résolvent le problème du ⁷Li.

6.2.1 Evolution des perturbations

On trouvera une étude détaillée du problème des perturbations en cosmologie dans [108] ; ici, à des fins illustratives, nous nous restreignons à l'étude des perturbations scalaires de la métrique dans la jauge longitudinale. La métrique dans la représentation de Dicke-Jordan s'écrit :

$$\tilde{d}s^2 = -(1 + 2\phi(\tilde{t}, \vec{x}))\tilde{d}t^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t})(1 - 2\psi(\tilde{t}, \vec{x}))d\vec{l}^2 , \quad (6.2.1)$$

où ϕ et ψ sont des fonctions à valeurs réelles telles que $|\phi| \ll 1$ et $|\psi| \ll 1$. Dans la représentation d'Einstein la métrique prend alors la forme suivante :

$$ds^2 = -(1 + 2\phi(\tilde{t}(t), \vec{x}))dt^2 + a^2(t)(1 - 2\psi(\tilde{t}(t), \vec{x}))d\vec{l}^2 . \quad (6.2.2)$$

Ainsi, les perturbations de la métrique ne sont pas affectées par la transformation conforme, et sont les mêmes dans les deux représentations. De même, si l'on décompose la densité d'énergie et la pression du fluide cosmologique en une partie homogène et une perturbation :

$$\rho(t, \vec{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \vec{x}) , \quad p(t, \vec{x}) = \bar{p}(t) + \delta p(t, \vec{x}) , \quad (6.2.3)$$

avec $|\delta\rho| \ll \bar{\rho}$ et $|\delta p| \ll \bar{p}$, le contraste de densité $\delta(t, \vec{x}) \equiv \delta\rho/\rho$ n'est pas affecté par la transformation conforme : $\tilde{\delta} = \delta$. On peut donc faire l'ensemble des

calculs dans la représentation d'Einstein, représentation qui permet de simplifier considérablement les calculs, puisque les équations d'Einstein gardent leur forme habituelle. Dans la suite, on se place dans le cas d'une courbure nulle : $k = 0$. En utilisant le système (4.2.5)-(4.2.7), écrit pour la métrique (6.2.2) et la matière (6.2.3), puis en séparant les ordres 0 et 1 du développement perturbatif, on obtient les équations (4.3.3)-(4.3.6) à l'ordre 0, décrivant le fond homogène et isotrope, et à l'ordre 1, les équations décrivant les perturbations scalaires :

$$\phi = \psi \quad (6.2.4)$$

$$-3\bar{H} \left(\bar{H}\psi + \dot{\psi} \right) + \bar{a}^{-2} \Delta \psi = 4\pi G \delta\rho + \dot{\bar{\varphi}} \delta\varphi + \frac{dV}{d\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}) \delta\varphi \quad (6.2.5)$$

$$\left(\bar{H}\psi + \dot{\psi} \right)_{,i} = 4\pi G (\bar{\rho} + \bar{p}) v_i + \dot{\bar{\varphi}} \delta\varphi_{,i} \quad (6.2.6)$$

$$\left(2\frac{\ddot{\bar{a}}}{\bar{a}} + \bar{H}^2 \right) \psi + 4\bar{H}\dot{\psi} + \ddot{\psi} = 4\pi G \delta p + \dot{\bar{\varphi}} \delta\dot{\varphi} - \frac{dV}{d\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}) \delta\varphi \quad (6.2.7)$$

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi} + 3\bar{H}\delta\dot{\varphi} - \bar{a}^{-2} \Delta \delta\varphi &= -4\pi G (\delta\rho - 3\delta p) \alpha(\bar{\varphi}) - \frac{d^2V}{d\bar{\varphi}^2}(\bar{\varphi}) \delta\varphi \\ &\quad - 4\pi G (\bar{\rho} - 3\bar{p}) \frac{d\alpha}{d\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}) \delta\varphi + 2\dot{\bar{\varphi}} (2\dot{\psi} - 3\bar{H}\psi) \\ &\quad - (8\pi G (\bar{\rho} - 3\bar{p}) + 2\frac{dV}{d\bar{\varphi}}) \psi + 2\dot{\bar{\varphi}} (2\dot{\psi} - 3\bar{H}\psi) \\ &\quad - \left(8\pi G (\bar{\rho} - 3\bar{p}) \alpha(\bar{\varphi}) + 2\frac{dV}{d\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}) \right) \psi \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho} + (\bar{\rho} + \bar{p}) \bar{a}^{-1} v_{i,i} + 3\bar{H}(\delta\rho + \delta p) &= 3\dot{\bar{\varphi}} (\bar{\rho} + \bar{p}) + \alpha(\bar{\varphi}) (\delta\rho - 3\delta p) \dot{\bar{\varphi}} + \frac{d\alpha}{d\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}) (\bar{\rho} - 3\bar{p}) \dot{\bar{\varphi}} \delta\varphi \\ &\quad + \alpha(\bar{\varphi}) (\bar{\rho} - 3\bar{p}) \dot{\delta\varphi} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_t ((\bar{\rho} + \bar{p}) v_i) + 4\bar{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) v_i &= -\bar{a}^{-1} \delta p_{,i} - \bar{a}^{-1} (\bar{\rho} + \bar{p}) \psi_{,i} \\ &\quad - \alpha(\bar{\varphi}) (\bar{\rho} - 3\bar{p}) \bar{a}^{-1} \delta\varphi_{,i} . \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Les quantités surmontées d'une barre sont les valeurs prises par la solution de fond homogène (ordre 0), Δ est l'opérateur laplacien associé aux coordonnées spatiales, et v_i est la vitesse particulière des éléments de fluide (c'est-à-dire la composante de leur vitesse qui ne se réduit pas au flot de Hubble).

Si l'on se restreint à un fluide cosmologique de poussière, afin d'étudier le comportement des perturbations au cours de l'ère dominée par la matière, on a : $\bar{p} = 0$, et $\delta p / \delta\rho = 0$ (c'est-à-dire que la vitesse du son est nulle). De plus, pour les perturbations à des échelles plus petites que la taille de l'horizon, on peut négliger les dérivées temporelles du potentiel ψ par rapport à ses dérivées spatiales. En effet, dans l'espace de Fourier, le laplacien de ψ donne un terme en $k^2\psi$, donc pour $k \gg \bar{H}$, on peut toujours négliger les termes en $\bar{H}\dot{\psi}$ (et $\bar{H}^2\psi$) par rapport au terme

en $\Delta\psi$. De même, le champ scalaire envisagé ici jouant un rôle cosmologique, sa masse $d^2V/d\bar{\varphi}$ est supposée petite devant les échelles considérées. On obtient alors l'analogie d'une équation de Poisson :

$$\bar{a}^{-2}\Delta\psi = 4\pi G(\delta\rho + \delta\rho_\varphi) , \quad (6.2.11)$$

où on a noté $4\pi G\delta\rho_\varphi \equiv (\dot{\bar{\varphi}} + dV(\bar{\varphi})/d\bar{\varphi})\delta\varphi$. De plus, le contraste de densité $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$, sous les mêmes hypothèses, obéit à l'équation :

$$\ddot{\delta} + (2\bar{H} + \alpha(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}})\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 , \quad (6.2.12)$$

et les fluctuations du champ scalaires vérifient :

$$\bar{a}^{-2}\Delta\delta\varphi = 4\pi G\bar{\rho}\alpha(\bar{\varphi})\delta . \quad (6.2.13)$$

L'équation (6.2.13) montre qu'en présence d'un couplage non-minimal $\alpha(\bar{\varphi})$ pas trop faible, les fluctuations du champ scalaire sur les petites échelles suivent celles du champ de matière, si bien que, contrairement au cas minimalement couplé, on ne peut pas a priori négliger les fluctuations du champ scalaire (sauf si le couplage est faible durant l'ère dominée par la matière). On voit donc que, dans le régime de croissance linéaire des perturbations, le champ scalaire a plusieurs effets distincts :

- Sa composante homogène $\bar{\varphi}$ intervient dans l'énergie totale et affecte donc le taux d'expansion \bar{H} ;
- Cette même composante homogène intervient par une modification de la gravité, qui est plus apparente dans la représentation de Dicke-Jordan, où l'équation (6.2.11) se réécrit : $\tilde{a}^{-2}\Delta\psi = 4\pi GA^2(\bar{\varphi})\tilde{\rho}(\tilde{\delta} + \delta\rho_\varphi)$. Le couplage gravitationnel $GA^2(\bar{\varphi})$ varie donc avec $\bar{\varphi}$ au cours du temps. Dans la représentation d'Einstein, cela apparaît sur le second terme du membre de gauche de l'équation (6.2.12), par l'intermédiaire du terme en $\alpha(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}\dot{\delta}$.
- Ses fluctuations sur les mêmes échelles que celles de la matière ne peuvent pas a priori être négligées, et contribuent au bilan énergétique dans l'équation de Poisson (6.2.11). C'est un effet important du couplage explicite entre le champ scalaire et la matière.

Par conséquent, la présence du couplage $\alpha(\varphi)$, si elle n'est pas dynamiquement supprimée avant l'ère dominée par la matière, doit laisser une empreinte sur la formation des structures, et un code numérique de formation des structures doit prendre en compte pleinement les différents effets.

6.2.2 Solution au problème du ${}^7\text{Li}$ et conséquences durant l'ère de matière

Dans la suite, on se bornera à étudier l'effet sur la formation des structures de champs scalaires du type de ceux étudiés dans la section précédente, qui permettent

de résoudre le problème du ${}^7\text{Li}$, et pour les estimations numériques, nous nous concentrerons plus particulièrement sur l'exemple du modèle défini par :

$$\alpha(\varphi) = \varphi^2 \quad (6.2.14)$$

$$V(\varphi) = 0.3^2 \varphi^4 . \quad (6.2.15)$$

A la fin de la nucléosynthèse, ce modèle vérifie $\alpha(\varphi) < 10^{-5}$ et $A(\varphi) \sim 1$, si bien que la constante de gravitation n'est quasiment plus affectée par le champ scalaire, et prend sa valeur newtonienne : on peut considérer que dès la fin de la nucléosynthèse, la théorie a convergé vers la Relativité Générale. Cependant, le taux d'expansion au sortir de la nucléosynthèse n'est pas strictement égal au taux d'expansion en Relativité Générale en présence d'un fluide de poussière et d'un fluide relativiste. Cela apparaît sur la figure 6.1.4 où l'on voit que le "speed-up factor" oscille autour de la valeur 1.16 jusqu'à la fin de l'ère dominée par la radiation, avant de converger vers 1 au début de l'ère dominée par la matière. Aussi, on peut s'attendre à ce que la présence d'une composante énergétique additionnelle venant du champ scalaire, puisqu'elle modifie le taux d'expansion, modifie des observables telles que le spectre des fluctuations de la matière, et le spectre des fluctuations du fond de rayonnement cosmologique. Insistons encore sur le fait que ces modifications sont d'une nature différente de celles qui ont été étudiées dans un ensemble de travaux sur les théories scalaire-tenseur [109, 63, 110, 111, 112]. En effet, dans ces articles, la densité d'énergie du champ scalaire est toujours négligeable aux époques considérées, et ce sont les effets de modification de la gravité (en fait essentiellement la variation du couplage gravitationnel effectif) qui font l'objet d'une étude. Dans notre cas, la modification de la gravité a joué un rôle crucial au cours de la nucléosynthèse, mais par la suite, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, elle est négligeable et c'est la densité d'énergie résiduelle du champ qui est la source des modifications des propriétés de la structuration de la matière. Le taux d'expansion reste notablement modifié jusqu'au tout début de l'ère dominée par la matière. Or, il existe dans le spectre de puissance de la matière une échelle caractéristique associée à la transition entre les ères dominées par la radiation et la matière : cette échelle, notée k_T , correspond à la taille de l'horizon au moment de l'égalité entre les densités de la matière et de radiation, c'est-à-dire à $H^{-1}(z_{eq})$ [113]. Elle sépare les échelles qui sont entrées dans l'horizon pendant l'ère dominée par la radiation ($k > k_T$) de celles qui y sont entrées pendant l'ère dominée par la matière ($k < k_T$). Le décalage entre la valeur de cette échelle en Relativité Générale et sa valeur dans le modèle qui nous intéresse est donc donné par [63] :

$$\frac{\delta k_T}{k_T} = - \left(\frac{\delta H^{-1}}{H^{-1}} \right)_{eq} . \quad (6.2.16)$$

Si l'on introduit la valeur du "speed-up factor" au moment de l'égalité matière-rayonnement, ξ_{eq} , on peut écrire (6.2.16) sous la forme :

$$\frac{\delta k_T}{k_T} = \xi_{eq} - 1 . \quad (6.2.17)$$

Or, pour le modèle défini par (6.2.14)-(6.2.15), on trouve que $\xi_{eq} \sim 1.075$, donc :

$$\frac{\delta k_T}{k_T} \sim 7.5\% . \quad (6.2.18)$$

Ce petit décalage est entièrement compatible avec les incertitudes actuelles sur les données concernant le spectre de puissance [114]. La position du premier pic acoustique dans le spectre des fluctuations du fond de rayonnement cosmologique est une autre observable affectée par une modification du taux d'expansion au début de l'ère dominée par la matière. En effet, les oscillations acoustiques se produisent à une échelle angulaire proportionnelle à la taille de l'horizon au moment du découplage et inversement proportionnelle à la distance comobile entre l'observateur et la surface de dernière diffusion. En fonction du temps conforme :

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} , \quad (6.2.19)$$

le moment multipolaire associé au premier pic acoustique est donné par :

$$l_p \propto \frac{\tau_0 - \tau_{dec}}{\tau_{dec}} , \quad (6.2.20)$$

où τ_0 est le temps conforme de l'observateur (donc correspondant à $t = t_0$), et τ_{dec} celui du découplage. Le décalage entre la valeur prédite en Relativité Générale et celle obtenue à partir du modèle (6.2.14)-(6.2.15) peut être calculé numériquement, le taux d'expansion H_0 étant identique dans les deux modèles :

$$\frac{\delta l_p}{l_p} = \frac{l_p - l_p^{GR}}{l_p^{GR}} \sim 8\% . \quad (6.2.21)$$

C'est un décalage important compte tenu de la grande précision des données sur la position du premier pic [115]. Cependant, il faut noter que la valeur de l_p dépend fortement de la valeur de H_0 , qui a été conservée identique dans les deux modèles afin de caractériser simplement le décalage introduit par la théorie scalaire-tenseur. Aussi, en utilisant un taux d'expansion actuel différent dans les deux modèles, tout en restant dans les bornes connues pour sa valeur, on peut réduire ce décalage jusqu'à ce qu'il soit inférieur à 1%, et donc acceptable. Une meilleure connaissance de H_0 permettrait en revanche de lever cette dégénérescence. Pour conclure, on s'attend également à ce que les modèles résolvant le problème du ${}^7\text{Li}$ donnent lieu à d'autres distortions, à plus petites échelles, dans le spectre des fluctuations du fond de rayonnement, étant donné que le taux d'expansion est différent de celui obtenu en Relativité Générale durant toute l'ère dominée par la radiation.

Troisième partie

Le principe cosmologique revisité

[...] Dans la vie, il est deux simplicités qui tranchent l'une sur l'autre : ce qui est simple d'avance, et ce qui ne l'est qu'après coup, ne sont pas simples de la même façon. Ce qui est simple d'avance, quoi que ce puisse être, l'est le plus souvent par manque de contenu et de forme, c'est donc aussi un peu simplet, ou mal observé. Mais ce qui *devient* simple, qu'il s'agisse d'une idée, d'une manœuvre ou de la volonté, participe et détient en soi quelque chose de la puissance de la vérité et du pouvoir qui maîtrise la confusion du divers.

R. Musil, *L'homme sans qualités*, fragments posthumes, 1943.

Les succès du modèle standard en font certainement un modèle de référence extraordinairement prédictif. Cependant, certains problèmes entachent ce succès, le plus important à ce jour étant la nature inconnue et troublante, dans ses manifestations, du phénomène d'énergie sombre. Le modèle standard repose, nous l'avons vu, sur une hypothèse de nature plus philosophique que physique : le principe cosmologique strict. Dans cette partie, nous nous proposons de montrer qu'il existe d'autres manières de faire de la cosmologie, peu développées jusqu'à présent, en partie en raison du succès du modèle standard de concordance, et en partie à cause de difficultés tant théoriques qu'observationnelles. Dans le chapitre qui suit, nous présenterons différentes approches possibles pour étudier la cosmologie : après une mise en perspective du modèle standard, nous discuterons l'approche observationnelle, puis la construction de modèles homogènes différents du modèle standard⁶. Ce dernier angle d'attaque, fondé sur une version faible du principe cosmologique, occupera la suite de cette partie. Dans le deuxième chapitre, nous aborderons les bases d'une méthode inspirée des méthodes de renormalisation bien connues en théorie statistique des champs. Le dernier chapitre, enfin, sera consacré à une méthode moins complète et satisfaisante, mais plus simple, qui nous permettra de présenter un modèle cosmologique effectif homogène alternatif au modèle standard.

⁶On trouvera une présentation très complète de ces différentes approches de la cosmologie dans [116].

Chapitre 7

Construction d'un modèle cosmologique

7.1 Retour sur le modèle standard

Nous avons décrit dans la première partie comment était construit le modèle standard de la cosmologie. Il repose sur une hypothèse ab initio sur la structure géométrique de l'espace-temps. Celui-ci est choisi tel que les hypersurfaces de genre espace sont maximalelement symétriques. L'Univers décrit dans ce cadre est alors parfaitement homogène et isotrope spatialement : aucun point spatial ne peut être différencié d'un autre. Cependant, la présence des structures indique clairement que les potentiels gravitationnels, donc la métrique de l'espace-temps, sont inhomogènes. Dans le modèle standard, on décrit ce fait en décomposant la métrique suivant un fond et des perturbations à ce fond :

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \text{ avec } \|\delta g_{\mu\nu}\| \ll \|\bar{g}_{\mu\nu}\| , \quad (7.1.1)$$

où $\bar{g}_{\mu\nu}$ est la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (2.1.8). Pour l'écrire plus correctement, on considère la variété réelle $(\mathbf{M}, g_{\mu\nu}, x^\mu)$, et une variété de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker $(\mathbf{F}, \bar{g}_{\mu\nu}, y^\mu)$ telle qu'il existe une application Φ de \mathbf{M} dans \mathbf{F} générant l'application C^1 -difféomorphe ϕ de $T_p\mathbf{M}$ dans $T_{\Phi(p)}\mathbf{F}$ avec : $\forall x \in T_p\mathbf{M}, \exists! y \in T_{\Phi(p)}\mathbf{F}, \phi(x) = y$. Alors, on définit la perturbation au fond homogène et isotrope par :

$$\delta g(y) \equiv g(\phi^{-1}(y)) - \bar{g}(y) , \quad (7.1.2)$$

d'où :

$$\delta g_{\mu\nu}(y) = \bar{g}_{\alpha\beta}(y) \frac{\partial[\phi(x)]^\alpha}{\partial x^\mu}(y) \frac{\partial[\phi(x)]^\beta}{\partial x^\nu}(y) - \bar{g}_{\mu\nu}(y) . \quad (7.1.3)$$

C'est donc un tenseur de rang deux défini sur la variété homogène et isotrope $(\mathbf{F}, \bar{g}_{\mu\nu})$. Puis, on écrit les équations de la dynamique pour les champs de matière

et la métrique $g_{\mu\nu}$, et l'on sépare les ordres, en considérant que la décomposition (7.1.1) donne lieu à un développement perturbatif. Ainsi, la dynamique de l'Univers est décrite par un modèle de Friedmann correspondant à l'ordre 0 de la série de perturbations, l'ordre 1 donnant la solution linéaire pour la formation des structures au sein de l'Univers décrit par l'ordre 0. L'avantage remarquable de cette méthode perturbative, c'est que l'évolution de l'univers aux grandes échelles et la formation des structures par effondrement gravitationnel dépendent du même jeu de paramètres, qui sont ceux du modèle homogène à l'ordre 0 décrivant la dynamique aux grandes échelles. Les paramètres additionnels spécifiques aux structures se réduisent soit à des conditions initiales (la forme et l'amplitude du spectre de fluctuations primordiales), soit à la normalisation des fluctuations. Le principe de la démarche standard est donc une sorte de dérivation à partir des principes :

- Définition d'un modèle théorique de la géométrie de l'Univers fondé sur le principe cosmologique fort ;
- Etude des propriétés dynamiques de ce modèle et dérivation des observables ;
- Détermination des paramètres du modèle par une comparaison (statistique) des observables avec l'Univers observé. Cette dernière étape, et son succès, est ce qui vaut le qualificatif de modèle de concordance à cette approche standard.

7.2 Cosmologie Observationnelle

Il existe une façon assez différente d'envisager la cosmologie, qui ne repose sur aucun principe extra-physique préalable. Il s'agit, en supposant uniquement la validité d'une théorie de la gravitation donnée (par exemple la Relativité Générale), de tenter de reconstruire la structure géométrique de l'espace-temps à partir des observations astrophysiques. Les bases de cette approche, appelée cosmologie observationnelle, ont été données par Kristian et Sachs [117] à partir du travail de McCrea [118]. Elle repose sur une procédure symétrique de celle du modèle standard :

- A partir des observations, on détermine la géométrie à l'intérieur et sur notre cône de lumière passé ;
- Puis, à l'aide des équations d'Einstein, on détermine comment ce cône de lumière s'insère dans l'espace-temps ;
- Enfin, en intégrant les équations d'Einstein, on détermine la géométrie de l'espace-temps et la distribution de matière dans l'ensemble de l'espace-temps.

Ce programme est réalisé en introduisant des coordonnées dites observationnelles (w, v, θ, φ) , w étant une coordonnée de genre lumière équivalente à un temps, θ et φ des angles sur le ciel, et v un paramètre affine mesurant la distance le long du cône

de lumière passé. Alors, pour des observations idéales, on peut montrer (cf [116, 119] et les références citées dans ces articles) que la métrique et la distribution de matière peuvent être complètement déterminées à partir de quantités observables sur notre cône de lumière passé :

- la taille angulaire des sources dont on connaît par ailleurs la taille réelle ;
- le champ de vitesse et le décalage vers le rouge des objets ;
- le nombre de sources par unité de volume, connaissant par ailleurs la relation masse/luminosité.

Une fois la géométrie et la distribution de matière déterminées de cette façon, on peut tester le modèle en comparant ses prédictions à d'autres observations, comme le spectre des anisotropies du fond de rayonnement cosmologique ou l'abondance des éléments légers. Hélas, bien que ce programme puisse être mené à son terme en principe, les observations réelles dont nous disposons sont imparfaites et parcellaires, ce qui limite la possibilité de cette reconstruction *ex nihilo* (ou presque). Par exemple, la détermination des champs de vitesse n'est pas possible avec une précision suffisante dès que l'on s'éloigne trop de l'observateur le long du cône de lumière ; de même, le fait que les sources observées soient isolées pose un sérieux problème de reconstruction de grandeurs continues telles que la métrique. Ces limitations, et d'autres encore, entraînent donc la nécessité d'une approche moins ambitieuse, ce qui revient en général à admettre tout de même quelques principes pour construire un modèle cosmologique.

7.3 Cosmologie lissée

Le modèle standard est séduisant par sa simplicité et sa capacité à mettre en concordance des observations variées à l'aide d'un petit nombre de paramètres. Le programme de cosmologie observationnelle, quant à lui, est satisfaisant car il n'est fondé sur aucune hypothèse forte et invérifiable, mais repose au contraire sur une démarche très "humble" et constructiviste consistant à déduire les symétries de la nature de l'observation. Les avantages de chacune de ces deux méthodes sont les inconvénients de l'autre : le modèle standard repose sur le principe cosmologique strict, hypothèse très forte, et se contente d'un ajustement paramétrique aux observations sans explication de la nature de certaines de ses composantes (comme l'énergie sombre par exemple) ; le programme de la cosmologie observationnelle, aussi bien posé soit-il, paraît très difficile à mener à son terme, à cause de l'imperfection des observations astrophysiques. Il peut donc être intéressant de chercher un moyen terme entre ces approches. C'est ce que nous allons tenter à l'aide d'un principe cosmologique faible. Rappelons que les observations de l'Univers dans les différentes longueurs d'ondes électromagnétiques favorisent l'existence d'une longueur caractéristique L_H au delà de laquelle la distribution de matière apparaît

homogène et isotrope. Une description de l'Univers sur des échelles plus grandes que cette longueur caractéristique d'homogénéité peut donc être faite dans le cadre d'un modèle homogène de la dynamique. Par conséquent, la formulation la plus faible que l'on puisse imaginer d'un principe cosmologique est la suivante :

Principe cosmologique faible :

L'univers peut être convenablement décrit par un modèle spatialement homogène à des échelles supérieures à son échelle d'homogénéité L_H .

Le modèle standard étant homogène à toutes les échelles satisfait naturellement ce principe cosmologique faible. Par ailleurs, tout modèle spatialement inhomogène dont la distribution de matière lissée sur une échelle supérieure à L_H apparaît homogène le satisfait également. Il reste à préciser une procédure de lissage afin de pouvoir comparer pratiquement des régions de l'Univers d'une taille donnée L et de pouvoir ainsi déterminer l'existence (ou non) d'une longueur d'homogénéité L_H . Le lissage est un processus non trivial en Relativité Générale, et les deux prochains chapitres seront consacrés à l'étude de cette question. Cependant, on peut d'ores et déjà présenter le programme d'une cosmologie fondée sur le principe cosmologique faible. Dans ce cadre, il n'est pas nécessaire de supposer quoi que ce soit sur la métrique ; en particulier, aucune hypothèse de symétrie n'est exigée a priori. La seule hypothèse est la validité de la Relativité Générale sur une échelle élémentaire "microscopique". La Relativité Générale étant testée à l'échelle du système solaire, il faudrait en toute rigueur prendre cette échelle comme élémentaire. Mais, pour la cosmologie, cela constitue certainement un raffinement superflu, et l'on considère en général qu'une bonne échelle élémentaire est celle des galaxies (de l'ordre de quelques dizaines de kpc) ou des amas de galaxies (de l'ordre de 10 Mpc), sur laquelle on suppose donc la théorie de la gravitation connue. Une fois une procédure de lissage explicitée, on construit un modèle effectif homogène en lissant à la fois la distribution de matière et la géométrie. Ce dernier point est essentiel, et c'est la source des principales difficultés que nous allons aborder, mais aussi des phénomènes majeurs qui différencient cette approche du modèle standard. En effet, admettons l'existence d'une procédure de lissage $\langle \cdot \rangle$, et supposons que l'Univers est décrit à l'échelle fondamentale (indiqué par l'indice 0) par les équations d'Einstein :

$$G_{\mu\nu}^{(0)}[g_{\mu\nu}] = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(0)} . \quad (7.3.1)$$

Alors, on peut définir un tenseur énergie-impulsion lissé $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, et une métrique lissée $\langle g_{\mu\nu} \rangle$; mais, à cause de la non-linéarité des équations d'Einstein, il n'y a aucune raison pour que la métrique $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ obéisse aux équations d'Einstein pour la matière lissée [116] :

$$G_{\mu\nu}[\langle g_{\mu\nu} \rangle] \neq \langle T_{\mu\nu} \rangle . \quad (7.3.2)$$

Le modèle standard peut être vu comme l'approximation consistant à négliger la différence (7.3.2) de manière abrupte et sans précaution. Il vaut donc la peine de s'interroger sur cette approximation en commençant par ne pas négliger les termes supplémentaires qui peuvent apparaître dans les équations en raison du lissage.

Chapitre 8

Une approche par le groupe de renormalisation

Afin de préciser la discussion initiée à la fin du chapitre précédent, nous allons maintenant tenter de clarifier la notion de lissage habituellement implicite en cosmologie. Pour ce faire, nous serons guidés par la méthode de “coarse-graining” qui est au coeur de la renormalisation dans l’espace réel en théorie statistique des champs¹. Les développements qui vont suivre sont tirés de ma lecture des articles de Mauro Carfora, Thomas Buchert et Kamilla Piotrkowska, qui, à ma connaissance, sont les seuls traitements cohérents et clairs de ce genre de problème [122, 123, 124, 125, 126]. Je me bornerai à en donner les principaux résultats et à les commenter, sans détailler les preuves. La première étape de ce programme est la définition d’analogues pour le “réseau” et les blocs usuels de la renormalisation.

8.1 Lissage

On se place dans le cadre de la formulation 3+1 de la Relativité Générale (cf Annexe B) : l’espace-temps est donc feuilleté par une famille $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d’hyper-surfaces spatiales. Concentrons-nous sur l’une de ses hypersurfaces, notée Σ pour alléger les notations. Σ est alors une variété différentielle riemannienne de dimension 3. De plus, nous supposons, afin de pouvoir recouvrir une telle variété par une famille finie de boules métriques, que Σ est compacte et sans bord. Alors, il est possible de montrer que, pour une distance d définie sur Σ (le long des géodésiques de Σ), et pour un réel ϵ positif, on peut toujours trouver un ensemble fini de N points de Σ , $(p_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$ tel que, si l’on définit la boule géodésique (ou métrique)

¹Pour une introduction aux méthodes du groupe de renormalisation, on pourra se reporter à [120] et [121].

ouverte centrée en p_i et de rayon ϵ par :

$$\mathcal{B}(p_i, \epsilon) \equiv \{x \in \Sigma, d(p_i, x) < \epsilon\} , \quad (8.1.1)$$

on a :

$$\forall x \in \Sigma, \exists i \in 1, 2, \dots, N, x \in \mathcal{B}(p_i, \epsilon) . \quad (8.1.2)$$

A une échelle ϵ donnée, on peut donc recouvrir Σ avec un nombre fini de boules du type (8.1.1). L'ensemble des boules $(\mathcal{B}(p_i, \epsilon))_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$ fournit alors un modèle discret de la variété initiale Σ si l'on identifie tous les points à l'intérieur d'une boule $\mathcal{B}(p_i, \epsilon)$ au point p_i . Pour définir les variables de bloc et préciser ce réseau, introduisons une suite d'échelles $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que l'échelle initiale est donnée par ϵ_0 et les autres par : $\epsilon_n = (n+1)\epsilon_0$. Ainsi, lorsque n augmente, on perd en raffinement de notre réseau. Les variables de bloc associées peuvent alors être définies, pour une grandeur scalaire f donnée par :

$$\psi_n(i, f) \equiv \int_{\mathcal{B}(p_i, \epsilon_n)} f d\mu_g , \quad (8.1.3)$$

où μ_g est la mesure riemannienne associée à la métrique g de Σ . Les valeurs de i indiquent à quel point du réseau est reliée la variable de bloc $\psi_n(i, f)$. Ces variables représentent bien des variables de bloc au sens de la renormalisation puisqu'elles suppriment toutes les fluctuations du champ f à des échelles inférieures à ϵ_n , qui joue le rôle d'un "cut-off". Après de longues manipulations, et l'introduction d'une partition de l'unité sous-tendue par la famille de boules géodésiques, il est possible d'obtenir une relation de récurrence pour ces variables de bloc, en considérant le recouvrement de $\mathcal{B}(p_i, \epsilon_{n+1})$ par les boules à l'ordre n [122] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \psi_{n+1}(i, f) = \sum_{k=1}^{N_i(n, n+1)} \psi_n(k, f) , \quad (8.1.4)$$

où $N_i(n, n+1)$ est le nombre d'ensembles ouverts $\{\mathcal{B}(p_i, \epsilon_{n+1}) \cap \mathcal{B}(p_j, \epsilon_n)\}$.

La moyenne "naturelle" de f sur Σ définie par :

$$\langle f \rangle_\Sigma \equiv \frac{\int_\Sigma f d\mu_g}{\int_\Sigma d\mu_g} \quad (8.1.5)$$

est alors évaluée, à la précision ϵ_n , par :

$$\langle f \rangle_{\epsilon_n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_n} \psi_n(k, f)}{\sum_{k=1}^{N_n} \text{vol}(\mathcal{B}(p_k, \epsilon_n))} , \quad (8.1.6)$$

où N_n est le nombre de boules du recouvrement à la précision ϵ_n et $\text{vol}(\mathcal{B}(p_k, \epsilon_n))$ le volume riemannien de la boule $\mathcal{B}(p_k, \epsilon_n)$. La variation de cette moyenne au cours

d'une transformation de bloc faisant passer de $\psi_n(i, f)$ à $\psi_{n+1}(j, f)$ est alors, à l'ordre dominant [122] :

$$\langle f \rangle_{\epsilon_{n+1}}(\psi_{n+1}) - \langle f \rangle_{\epsilon_n}(\psi_n) = \frac{1}{5(n+1)} \left(\langle \Delta f \rangle_{\epsilon_n} + \frac{1}{3} (\langle R \rangle_{\epsilon_n} \langle f \rangle_{\epsilon_n} - \langle Rf \rangle_{\epsilon_n}) \right) \epsilon_n^2 + o(\epsilon_n^2), \quad (8.1.7)$$

où R désigne le scalaire de Ricci associé à la métrique g de Σ . Cette relation met en évidence le fait qu'une procédure de lissage correcte couple nécessairement les fluctuations du champ scalaire f aux fluctuations de la géométrie sur Σ .

8.2 Flot de Ricci-Hamilton

Grâce au recouvrement par les boules géodésiques, nous avons donc pu construire une procédure de construction de blocs pour notre variété discrétisée, ainsi que la relation (8.1.7) qui permet de passer de la valeur moyenne d'un scalaire f à la précision ϵ_n à sa valeur à la précision ϵ_{n+1} . Il est temps maintenant d'introduire le champ de matière cosmologique, et de lui appliquer ces résultats. Considérons donc un fluide parfait barotrope de densité de quadri-vitesse u_μ , d'énergie ρ , de pression $p = \omega\rho$ et de densité de moment J_μ ; si l'on note n^μ le champ de vecteurs orthonormal à Σ , son tenseur énergie-impulsion prend la forme :

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) + 2J_{(\mu} u_{\nu)}. \quad (8.2.1)$$

Le hamiltonien de ce fluide est donné par :

$$H(\rho, J_i) = N\rho + N^i J_i, \quad (8.2.2)$$

où N et N^i sont respectivement le lapse et le shift associés à la décomposition 3+1. En choisissant un "cut-off" initial ϵ_0 à une échelle où la Relativité Générale est valable, et en appliquant la définition des variables de bloc (8.1.3) à $f = H(\rho, J_i)$, nous pouvons mener le programme de renormalisation pour le champ de matière en tenant compte de son couplage à la géométrie. Si l'on considère ρ et J_i comme des variables aléatoires à l'échelle ϵ_0 distribuées sur le réseau associé, la loi de probabilité conjointe $P^{(0)} \left((\rho(k), J_i(k))_{k \in \{1, \dots, N\}} \right)$ de trouver le fluide dans l'état $(\rho(k), J_i(k))_{k \in \{1, \dots, N\}}$ sur le réseau s'écrit :

$$P^{(0)} \left((\psi_0(k, \rho, J_i))_{k \in \{1, \dots, N\}} \right) = \frac{1}{Z} \exp(-\langle H(\rho, J_i) \rangle_{\epsilon_0}), \quad (8.2.3)$$

où $Z = \sum_{\rho, J_i} \exp(-\langle H(\rho, J_i) \rangle_{\epsilon_0})$ est la fonction de partition du système. A partir de cette probabilité, on peut définir la probabilité $P^{(n)} \left((\psi_n(k, \rho, J^i))_{i \in \{1, \dots, N_n\}} \right)$ de

trouver les variables de bloc à l'ordre n dans un état donné : par récurrence, on a :

$$P^{(n+1)} \left((\psi_{n+1}(k, \rho, J^i))_{i \in \{1, \dots, N_{n+1}\}} \right) = \sum_{(\psi_n(k, \rho, J^i))_{i \in \{1, \dots, N_n\}}} P^{(n)} \left((\psi_n(k, \rho, J^i))_{i \in \{1, \dots, N_n\}} \right), \quad (8.2.4)$$

où la somme est prise uniquement sur les configurations à l'ordre n compatibles avec la configuration à l'ordre $n + 1$ considérée. Si l'on suppose, comme habituellement, qu'au cours d'une transformation de bloc $\psi_n(k, \rho, J^i) \leftarrow \psi_{n+1}(l, \rho, J^i)$, le hamiltonien du système garde la même forme fonctionnelle, on a :

$$P^{(n)} \left((\psi_n(k, \rho, J_i))_{k \in \{1, \dots, N_n\}} \right) = \frac{\exp(-\langle N\rho^n + N^j J_j^n \rangle_{\epsilon_n})}{\sum_{\rho, J^i} \exp(-\langle N\rho^{(n)} + N^j J_j^{(n)} \rangle_{\epsilon_n})}; \quad (8.2.5)$$

ce qui définit des densités d'énergie et de courant renormalisées à l'ordre n : $\rho^{(n)}$ et $J_i^{(n)}$. A l'ordre 0, où la Relativité Générale est supposée valable, le hamiltonien $H(\rho, J_i)$ est une partie du hamiltonien total, dit Hamiltonien ADM (pour Arnowitt-Deser-Misner) [127, 4]. Dans ce hamiltonien, le lapse N et le shift N^i sont des multiplicateurs de Lagrange, qui sont présents pour assurer la validité des contraintes hamiltonienne et de moments sur la variété spatiale Σ . Ces contraintes s'écrivent :

$$\frac{1}{\det(g)} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi_i^i)^2 \right) - R(g) + 8\pi G \rho = 0 \quad (8.2.6)$$

$$-2\pi_{j;i}^i + 16\pi G \sqrt{\det(g)} J_j = 0, \quad (8.2.7)$$

où le moment conjugué à la métrique π^{ij} s'exprime en fonction de la courbure extrinsèque de Σ : $\pi^{ij} \equiv \sqrt{\det(g)} (K^{ij} - K_k^k g^{ij})$. Ainsi, ρ et J^i s'expriment comme des fonctionnelles de la métrique g_{ij} . Si l'on suppose que les contraintes (8.2.6) restent valables à toutes les étapes de la renormalisation, ce qui permet de conserver au lapse et au shift leur nature de multiplicateurs de Lagrange et donc d'assurer l'invariance par difféomorphismes de la théorie à toutes les étapes, on peut relier $\rho^{(n)}$ et $J_i^{(n)}$ à une métrique renormalisée $g^{(n)}$ pour tout n . C'est cette métrique qui devient alors l'analogue du couplage renormalisé de la renormalisation standard. L'effet du passage des blocs d'ordre n aux blocs d'ordre $n + 1$ induit donc une renormalisation (non linéaire) de la métrique :

$$g_{ij}^{(n+1)} = \mathcal{R} \left(g_{ij}^{(n)} \right), \quad (8.2.8)$$

\mathcal{R} étant l'opérateur formel de renormalisation que nous allons expliciter maintenant, et qui définit un flot dans l'espace des métriques riemanniennes de dimension 3. Pour l'instant, l'opérateur \mathcal{R} est discret, mais nous allons passer à la limite

continue dans l'équation (8.1.7) en considérant n très grand et $\epsilon_0 \ll n\epsilon_0$. Alors, l'équation (8.1.7) devient, pour un paramètre continu η :

$$\epsilon^{-1} \frac{d\langle f \rangle_{\epsilon+\eta}}{d\eta} = \frac{1}{15} (\langle R \rangle_{\epsilon} \langle f \rangle_{\epsilon} - \langle Rf \rangle_{\epsilon}) , \quad (8.2.9)$$

où le terme en laplacien a disparu car il se réduit à un terme de bord et Σ est sans bord. Afin de satisfaire le principe cosmologique faible, nous souhaitons que les propriétés à longues distances de la distribution de matière soient invariantes, c'est-à-dire que nous voulons qu'elles ne soient pas affectées par un changement simultané du cut-off ϵ et de la métrique g_{ij} . Cela se traduit par l'invariance de la fonction de partition :

$$\left(-\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} + \beta_{ij}(g) \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) \sum_{\rho, J^i} \exp(-H(\rho, J^i)) = 0 , \quad (8.2.10)$$

où la fonction β est définie par :

$$\beta_{ij}(g) \equiv \epsilon \frac{\partial g_{ij}}{\partial \epsilon} . \quad (8.2.11)$$

Une condition suffisante est alors :

$$\left(-\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} + \beta_{ij}(g) \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) \langle N\rho + N^i J_i \rangle_{\epsilon} = 0 . \quad (8.2.12)$$

En utilisant (8.2.9), on peut alors montrer que la fonction β satisfaisant à (8.2.12) est exactement donnée par :

$$\beta_{ij}(g) = \frac{\partial g_{ij}(\eta)}{\partial \eta} = \frac{2}{3} \langle R(\eta) \rangle g_{ij}(\eta) - 2R_{ij}(g(\eta)) , \quad (8.2.13)$$

où $\eta \propto \ln(\epsilon)$, et $\langle R(\eta) \rangle$ est la courbure moyennée sur Σ associée à $g(\eta)$. L'équation (8.2.13) est connue sous le nom de flot de Ricci-Hamilton [128]. C'est l'équation de renormalisation que nous cherchions ici. Elle permet de savoir comment le couplage effectif g change lorsque l'on fait varier le "cut-off" ϵ , c'est-à-dire la taille caractéristique de lissage de la cosmologie. Σ étant compact, cette renormalisation doit mener à des classes d'universalité pour la cosmologie sur des distances finies, lorsque le "cut-off" est de l'ordre de la distance de corrélation de la distribution de matière. Ce flot a une propriété intéressante [128] : la métrique limite $\bar{g}_{ij} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} g_{ij}(\eta)$, si elle est atteinte, est à courbure constante. On peut trouver surprenant de prendre ici la limite $\eta \rightarrow +\infty$, dans la mesure où l'on a relié η au "cut-off" spatial sur une variété compacte. Cela vient du fait que la dérivation du

flot de Ricci-Hamilton (8.2.13) présentée ci-dessus est en fait valable uniquement localement, pour des petites variations de la taille des blocs. Pour une dérivation plus rigoureuse, permettant de passer à la limite, on se reportera à [124], où le paramètre d'évolution η perd son sens physique et n'est plus relié à la distance de "cut-off"; il devient un simple paramètre fictif permettant de parcourir le flot dans l'espace des métriques. Afin d'éclaircir complètement le lien entre η et le "cut-off" spatial, il faudrait résoudre les équations générales de flot dans l'espace des métriques, dites équations de Peterson [129], qui sont non-linéaires. Le flot de Ricci est en fait une linéarisation de ces équations. En dimension 3 il existe 8 points critiques différents; on trouvera une discussion et une analyse des points fixes de ce flot dans le contexte cosmologique dans [122, 124]. Ici, nous nous contenterons de remarquer ce qu'il implique pour la cosmologie. Puisque les contraintes hamiltonienne et de moments sont satisfaites à toutes les étapes du processus de renormalisation, à la limite où $\eta \rightarrow +\infty$, on a :

$$\frac{2}{3}\bar{K} = 8\pi G\bar{\rho} - \bar{R} , \quad (8.2.14)$$

où $\bar{K} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} K_i^i(g(\eta))$, $\bar{\rho} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \rho(g(\eta))$, et $\bar{R} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} R(g(\eta))$, \bar{R} étant une courbure constante. La densité renormalisée prend la forme [122, 124] :

$$8\pi G\bar{\rho} = 8\pi G\langle\rho\rangle_0 + \bar{R} - \langle R\rangle_0 + \langle\sigma^{ij}\sigma_{ij}\rangle_0 + \frac{2}{3}\left(\langle(K_i^i)^2\rangle_0 - \langle K_i^i\rangle_0^2\right) . \quad (8.2.15)$$

Dans cette expression $\sigma_{ij} = K_{ij} - K_i^l g_{lj}/3$ est le cisaillement, et le symbole $\langle\cdot\rangle_0$ représente la moyenne par rapport à la métrique originale. Si l'on définit un paramètre de Hubble, de façon usuelle par :

$$\bar{H}^2 \equiv \frac{2}{9}\bar{K}^2 , \quad (8.2.16)$$

l'équation (8.2.14) prend la forme de l'équation de Friedmann classique :

$$\bar{H}^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3} - \frac{\bar{R}}{3} . \quad (8.2.17)$$

La courbure \bar{R} étant constante, elle s'écrit $\bar{R} = 3/a^2$, où a est le facteur d'échelle de la métrique de Friedmann effective \bar{g} . L'équation de Friedmann (8.2.17) fait donc intervenir une densité d'énergie $\bar{\rho}$ renormalisée qui n'est pas simplement la moyenne sur la variété de la densité d'énergie du fluide. C'est ce résultat non trivial qui nous intéresse, et nous verrons au chapitre suivant que nous obtenons un résultat analogue par une méthode différente dans son principe, et plus simple : il n'y a a priori aucune raison pour que le modèle homogène effectif à grande

échelle soit strictement un modèle de Friedmann avec une source lissée naïvement. Une dernière remarque s'impose ici : nous avons lissé la métrique et le champ de matière de façon conjointe sur une "feuille" d'espace de l'espace-temps, mais le flot de Ricci ne donne pas d'équation d'évolution pour le système. Opérationnellement, il faudrait donc laisser évoluer le champ de matière couplé à la métrique par les équations d'Einstein, le lissage n'intervenant sur chaque hypersurface Σ_t qu'une fois que nous connaissons la solution exacte à tout temps. Lisser les conditions initiales puis faire évoluer le modèle de Friedmann obtenu ne donne pas la véritable solution car évolution et lissage ne commutent pas. Encore une fois, ce point sera éclairci par la suite, mais il est important de remarquer que cela implique qu'un Univers initialement très homogène n'évolue pas forcément comme un modèle de Friedmann : si les inhomogénéités croissent en son sein à cause de l'instabilité gravitationnelle, le lissage à un temps ultérieur peut fort bien entraîner l'apparition de sources supplémentaires non négligeables dans $\bar{\rho}$.

Chapitre 9

Une approche par le champ moyen

Dans ce chapitre, nous allons présenter une approche mathématiquement plus simple que celle utilisant le flot de Ricci : au lieu de lisser la métrique, nous allons moyenniser la partie scalaire des équations dynamiques. Ce faisant, nous perdrons une partie de l'information contenue dans la structure géométrique de l'espace-temps, mais nous serons à même de formuler des résultats sur des propriétés intégrales de la cosmologie. Il faut insister sur le fait que notre démarche est différente, et complémentaire, de celle présentée dans le chapitre précédent : nous ne modifions pas les lois de la physique par une procédure de renormalisation, mais nous construisons un modèle dynamique pour les grandeurs intégrales caractérisant la cosmologie relativiste. Après avoir introduit le formalisme que nous allons utiliser, nous présenterons des solutions particulières ; les premières sont des lois de puissance et la seconde repose sur la théorie de perturbations. La fin de cette partie sera consacrée au problème de l'énergie sombre dans cette approche. À partir d'un modèle simple, nous discuterons la nature des mécanismes potentiellement à l'œuvre dans l'Univers tardif, pouvant fournir une origine classique (c'est-à-dire formulée dans le cadre de la Relativité Générale) à l'énergie sombre. Nous verrons ensuite qu'il est possible d'établir une correspondance entre les cosmologies moyennées et les champs scalaires cosmologiques du modèle standard. Une discussion du statut des observations dans le cadre des cosmologies moyennées conclura ces développements.

9.1 Cosmologies inhomogènes moyennées

9.1.1 Equations locales

On considère, comme dans toute cette partie, un Univers rempli d'un fluide parfait irrotationnel, et décrit dans le contexte de la Relativité Générale. Le tenseur

énergie-impulsion d'un tel fluide, de quadri-vitesse u^μ est alors donné par :

$$T_{\mu\nu} = (\rho(x^\sigma) + p(x^\sigma))u_\mu u_\nu + p(x^\sigma)g_{\mu\nu} , \quad (9.1.1)$$

où ρ et p sont des fonctions des coordonnées d'espace-temps représentant respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide. D'après les résultats présentés dans l'annexe B, on peut alors feuilleter l'espace-temps en considérant un ensemble d'hypersurfaces spatiales $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dont le champ de vecteurs normaux unitaires à chaque t est le champ de quadri-vitesse du fluide $u^\mu(t, x^k)$. Les coordonnées gaussiennes introduites dans l'annexe B sont particulièrement pratiques pour décrire cette situation, puisqu'elles correspondent aux coordonnées lagrangiennes pour le fluide, c'est-à-dire qu'un observateur attaché à un élément de fluide n'a pas de déplacement spatial : $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $u^i = 0$. Plaçons-nous donc dans ces coordonnées :

$$ds^2 = -N^2(t, X^i)dt^2 + g_{ij}(t, X^i)dX^i dX^j . \quad (9.1.2)$$

En prenant $n^\mu = u^\mu = (1/N, \vec{0})$ dans les résultats de l'annexe B, on obtient alors les équations ADM (B.0.6)-(B.0.9) :

$$\mathcal{R} - K_j^i K_i^j + K^2 = 16\pi G\rho + 2\Lambda \quad (9.1.3)$$

$$\nabla_i K_j^i - \nabla_j K = 0 \quad (9.1.4)$$

$$\frac{1}{N}\partial_t g_{ij} = -2K_{ij} \quad (9.1.5)$$

$$\frac{1}{N}\partial_t K_j^i = R_j^i + K K_j^i - \Lambda \delta_j^i - 4\pi G(\rho - p)\delta_j^i - \frac{1}{N}\nabla^i \nabla_j N . \quad (9.1.6)$$

Ici, la courbure extrinsèque K_{ij} des hypersurfaces spatiales est reliée très simplement à la quadri-vitesse du fluide¹ : $K_{i,j} = -u_{\mu;\nu} h_i^\mu h_j^\nu = -u_{i;j}$. On peut décomposer $u_{\mu;\nu}$ suivant sa partie symétrique sans trace, $\sigma_{\mu\nu}$, le cisaillement de l'élément fluide, et sa trace, $\theta \equiv u_{;\alpha}^\alpha$, qui est le taux d'expansion local de l'élément de fluide [130] :

$$u_{\mu;\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} - \frac{1}{N}u_\nu \partial_t u_\mu . \quad (9.1.7)$$

Puis, définissant le cisaillement projeté sur Σ_t : $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{\mu\nu} h_i^\mu h_j^\nu$, on a :

$$K_{ij} = - \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta g_{ij} \right) , \quad (9.1.8)$$

si bien que la trace de la courbure extrinsèque est donnée par $K_i^i = K = -\theta$.

¹Il s'agit d'une dérivée covariante à 4 dimensions, et non à 3, ce qui explique que, bien que $u^i \equiv 0$, K_{ij} est non nulle, car elle reçoit une contribution de $\Gamma_{ij}^0 u_0$.

En plus des équations (9.1.3)-(9.1.6), afin de clore le système d'équations, il nous faut écrire les équations de conservation pour le fluide : $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$. En projetant cette relation sur u^{μ} , et sur l'hypersurface Σ_t , on obtient :

$$\partial_t \rho + N\theta(\rho + p) = 0 \quad (9.1.9)$$

$$\partial_i p + \frac{\partial_i N}{N}(\rho + p) = 0. \quad (9.1.10)$$

Il faut insister un instant sur les propriétés de cette dernière équation. En l'absence de pression, $p \equiv 0$, nous voyons qu'elle est consistante avec une distribution de matière non triviale (c'est-à-dire ρ non identiquement nulle) si et seulement si $N = N(t)$, fonction qui peut être simplement absorbée dans une redéfinition de la coordonnée temporelle t . Au contraire, si la pression est non identiquement nulle, et non homogène sur les hypersurfaces spatiales, on ne peut pas choisir de coordonnées spatiales gaussiennes telles que $N(t, X^k)$ soit une simple fonction du temps. Le type de matière dont le flot sert à feuilleter l'espace-temps contraint donc le choix des coordonnées. On peut également déduire de la projection des équations de conservation sur Σ_t une expression pour la quadri-accélération du fluide a_{μ} :

$$h_{\mu\alpha} T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N} \partial_t u_{\alpha} = -\frac{1}{\rho + p} (\partial_{\alpha} p + \frac{1}{N} \partial_t(p) u_{\alpha}), \quad (9.1.11)$$

d'où :

$$a_0 = 0 \text{ et } a_i = -\frac{\partial_i p}{\rho + p}. \quad (9.1.12)$$

En comparant (9.1.12) avec la deuxième équation de (9.1.9), on voit que :

$$a_i = \frac{\partial_i N}{N}. \quad (9.1.13)$$

9.1.2 Modèle moyenné

Les équations (9.1.3)-(9.1.6) et (9.1.9)-(9.1.10) établies précédemment, liées à un choix de coordonnées (par l'intermédiaire du choix du lapse N) gouvernent la dynamique exacte du champ gravitationnel et de la matière, pourvu que la Relativité Générale et l'approximation de fluide parfait irrotationnel soient valables. Cependant, notre but est de construire un modèle cosmologique ; comme dans le chapitre précédent, nous souhaitons donc pouvoir décrire les propriétés physiques de l'Univers sur les grandes échelles, sans nous préoccuper ni de la distribution locale exacte de matière, ni de la métrique locale, grandeurs qui sont par ailleurs difficiles, voire impossibles, à connaître dans le cadre cosmologique. C'est pourquoi il nous faut une méthode d'approximation en fonction de l'échelle

("coarse-graining"), nous permettant de formuler une théorie à une échelle donnée tout en nous affranchissant des détails à plus petite échelle. Dans ce chapitre, nous allons étudier la construction de modèles effectifs homogènes à une échelle donnée [131, 132, 133]. Pour les définir, il existe, dans le contexte de la décomposition 3+1 de l'espace-temps, une procédure "naturelle" : prendre les grandeurs scalaires $\Psi(t, X^k)$ et les moyenner sur un domaine lagrangien $\mathcal{D} \in \Sigma_t$ donné, afin d'obtenir des grandeurs $\langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}}(t)$ ne dépendant plus que du temps :

$$\langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}}(t) \equiv \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \Psi(t, X^k) J d^3 X , \quad (9.1.14)$$

où $J \equiv \sqrt{\det(g_{ij})}$ et $V_{\mathcal{D}} \equiv \int_{\mathcal{D}} J d^3 X$ représente le volume(riemannien) du domaine \mathcal{D} . Hélas, cette procédure n'est bien définie que sur les grandeurs scalaires, et ne peut être utilisée pour les vecteurs et tenseurs, car l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ appliqué à un tenseur ne donne pas un tenseur. Nous reviendrons sur ce problème à la fin de la section. On a la règle de commutation suivante, pour tout scalaire Ψ :

$$[\partial_t \cdot, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}] \Psi \equiv \partial_t \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \partial_t \Psi \rangle_{\mathcal{D}} = \langle N \theta \Psi \rangle_{\mathcal{D}} - \langle N \theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} . \quad (9.1.15)$$

Prenons donc la trace des deux dernières équations du système (9.1.3) :

$$\frac{1}{N} \partial_t J = -JK \quad (9.1.16)$$

$$\frac{1}{N} \partial_t K = \mathcal{R} + K^2 - 12\pi G(\rho + p) - 3\Lambda - \frac{1}{N} \Delta N , \quad (9.1.17)$$

où $\Delta = \nabla^i \nabla_i$ est l'opérateur laplacien spatial. En utilisant la décomposition (9.1.8), la première équation de (9.1.9), ainsi que la contrainte hamiltonienne, nous obtenons alors le système d'équations scalaires :

$$\mathcal{R}(t, \vec{X}) + \frac{2}{3} \theta^2(t, \vec{X}) - 2\sigma^2(t, \vec{X}) = 16\pi G \rho(t, \vec{X}) + 2\Lambda \quad (9.1.18)$$

$$\frac{1}{N(t, \vec{X})} \partial_t J(t, \vec{X}) = J(t, \vec{X}) \theta(t, \vec{X}) \quad (9.1.19)$$

$$-\frac{1}{N(t, \vec{X})} \partial_t \theta(t, \vec{X}) + 12\pi G \left(\rho(t, \vec{X}) - p(t, \vec{X}) \right) = \theta^2(t, \vec{X}) + \mathcal{R}(t, \vec{X}) - a_i(t, \vec{X}) a^i(t, \vec{X}) - \nabla^i a_i(t, \vec{X}) \quad (9.1.20)$$

$$\partial_t \rho(t, \vec{X}) + N \theta(t, \vec{X}) \left(\rho(t, \vec{X}) + p(t, \vec{X}) \right) = 0 , \quad (9.1.21)$$

où $\sigma^2 \equiv \sigma_j^i \sigma_i^j / 2$ est le taux de cisaillement.

La dynamique d'un domaine spatial \mathcal{D} considéré comme homogène est entièrement caractérisée par l'évolution de son volume (à la forme des bords près) ; on

peut donc introduire une quantité adimensionnée, qui traduit les propriétés du modèle homogène sur le domaine \mathcal{D} : le facteur d'échelle volumique $a_{\mathcal{D}}$ défini par :

$$a_{\mathcal{D}}(t) = \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}_i}} \right)^{1/3}, \quad (9.1.22)$$

$V_{\mathcal{D}_i}$ étant le volume initial du domaine \mathcal{D} . Par analogie avec le modèle de Friedmann, on appelle facteur de Hubble effectif la grandeur $H_{\mathcal{D}}$ qui vérifie :

$$3H_{\mathcal{D}} \equiv 3 \frac{\partial_t a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{\partial_t V_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = \langle N\theta \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (9.1.23)$$

Les équations pour ce facteur d'échelle et la matière se déduisent alors du système (9.1.18)-(9.1.21) :

$$6H_{\mathcal{D}}^2 - 16\pi G \langle N^2 \rho \rangle_{\mathcal{D}} = - (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle N^2 \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (9.1.24)$$

$$3 \frac{\partial_t^2 a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \langle N^2 (\rho + 3p) \rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \quad (9.1.25)$$

$$\partial_t \langle N^2 \rho \rangle_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \langle N^2 (\rho + p) \rangle_{\mathcal{D}} = [\langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}, \partial_t \cdot] p + \langle 2N \partial_t N \rho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (9.1.26)$$

avec les définitions :

- 3-courbure moyenne : $\langle N^2 \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$;
- Backreaction cinématique : $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \equiv \frac{2}{3} (\langle N^2 \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle N\theta \rangle_{\mathcal{D}}^2) - 2 \langle N^2 \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}$;
- Backreaction dynamique : $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \equiv \langle N^2 \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle \theta \partial_t N \rangle_{\mathcal{D}}$ où $\mathcal{A} \equiv a_{,\mu}^{\mu}$.

La backreaction cinématique comprend deux termes qui agissent de façons opposées :

- le taux de cisaillement moyen, $\langle N^2 \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}$, qui tend à augmenter le taux d'expansion effectif $H_{\mathcal{D}}$,
- les fluctuations moyennes de l'expansion locale, $\langle N^2 \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle N\theta \rangle_{\mathcal{D}}^2$, qui tendent à le faire diminuer.

La backreaction dynamique, quant à elle, est formée de l'accélération moyenne $\langle N^2 \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}}$ et d'un terme difficile à éclairer physiquement, $\langle \theta \partial_t N \rangle_{\mathcal{D}}$, chacun pouvant avoir un signe quelconque. Afin d'assurer la cohérence entre les équations (9.1.24) et (9.1.25), les grandeurs définies ci-dessus doivent vérifier la condition d'intégrabilité :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 4H_{\mathcal{D}} \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \\ = 16\pi G ([\langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}, \partial_t \cdot] p + \langle 2N \partial_t N \rho \rangle_{\mathcal{D}}) \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

L'équation (9.1.26), qui est simplement le résultat de l'application de l'opérateur de moyennisation (9.1.14) à la loi de conservation locale de l'énergie, présente un aspect singulier : on voit que pour un fluide dont la pression est non identiquement

nulle, la loi de conservation pour les quantités moyennes n'est pas standard, mais fait apparaître un terme de source non trivial. Ainsi, en général, la densité d'énergie moyenne du fluide inhomogène n'obéit pas à une loi de conservation analogue à celle d'un modèle de Friedmann. En introduisant une densité d'énergie et une pression effectives :

$$\rho_{eff}^{\mathcal{D}} \equiv \langle N^2 \rho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle N^2 \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (9.1.28)$$

$$p_{eff}^{\mathcal{D}} \equiv \langle N^2 p \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} \left(\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \langle N^2 \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{4}{3} \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \right), \quad (9.1.29)$$

$$(9.1.30)$$

et en utilisant la condition d'intégrabilité (9.1.27), le système (9.1.24)-(9.1.26) gouvernant la dynamique de champ moyen se réécrit :

$$H_{\mathcal{D}}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{eff}^{\mathcal{D}} \quad (9.1.31)$$

$$\frac{\partial_t^2 a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{eff}^{\mathcal{D}} + 3p_{eff}^{\mathcal{D}}) \quad (9.1.32)$$

$$\partial_t \rho_{eff}^{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} (\rho_{eff}^{\mathcal{D}} + p_{eff}^{\mathcal{D}}) = 0. \quad (9.1.33)$$

Ce système, aussi bien que (9.1.24)-(9.1.26), n'est pas clos, au sens où il possède 3 inconnues, $a_{\mathcal{D}}$, $\rho_{eff}^{\mathcal{D}}$ et $p_{eff}^{\mathcal{D}}$, pour seulement 2 équations indépendantes. Cela ne doit pas nous surprendre, dans la mesure où nous n'avons moyenné que la partie scalaire des équations locales. Il faut donc, afin de clore ce système, disposer de prescriptions, soit sur la structure locale de l'espace-temps, soit sur le modèle homogène sur le domaine \mathcal{D} (par exemple à l'aide d'observations). Nous reviendrons sur ce point dans la suite, et nous discuterons certaines possibilités pour de telles relations de fermeture.

9.1.3 Fluide de poussière

Les équations établies ci-dessus pour le modèle homogène effectif sont valables a priori pour tout type de fluide parfait irrotationnel. Les développements suivants, dont l'objet principal sera l'état de l'Univers tardif, motivés entre autre par une tentative de compréhension de l'énergie sombre, nous poussent à concentrer notre attention sur le comportement du modèle effectif en présence d'un fluide parfait irrotationnel sans pression, qui décrit convenablement la matière dominant le contenu de l'Univers tardif. Posons donc dans toute la suite de cette partie $p \equiv 0$. Dans ce cas, les équations (9.1.24)-(9.1.26) prennent une forme particulièrement simple. En effet, le système (9.1.9)- (9.1.10) montre que le lapse $N(t, X^i)$ est une simple fonction du temps, prise constante et égale à 1, quitte à redéfinir le temps

coordonné t . De plus, l'accélération donnée par (9.1.13) est alors nulle : $a_i \equiv 0$. Cela entraîne la nullité de la backreaction dynamique : $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \equiv 0$, et les équations du système effectif deviennent :

$$H_{\mathcal{D}}^2 = \frac{8\pi G}{3} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{6} (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (9.1.34)$$

$$\frac{\partial_t^2 a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -\frac{4\pi G}{3} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{1}{3} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \quad (9.1.35)$$

$$\partial_t \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = 0, \quad (9.1.36)$$

où la backreaction cinématique est maintenant donnée par :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (9.1.37)$$

L'équation de conservation du (9.1.36) s'intègre immédiatement en :

$$\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \rho_i \rangle_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^{-3}; \quad (9.1.38)$$

ce qui traduit simplement le fait que l'énergie totale du fluide contenu dans le domaine \mathcal{D} est constante. C'est un résultat assez intuitif pour un domaine qui est comobile avec un fluide sans pression (donc sans flux à travers le bord du domaine). Finalement, l'équation d'intégrabilité pour le système (9.1.34)-(9.1.36) s'écrit :

$$\partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0. \quad (9.1.39)$$

Par analogie avec la cosmologie standard, on peut introduire des densités adimensionnées effectives :

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} \equiv \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} \equiv -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} \text{ et } \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} \equiv -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (9.1.40)$$

qui obéissent à :

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = 1. \quad (9.1.41)$$

De même, on peut définir un paramètre de décélération effectif :

$$q^{\mathcal{D}} \equiv -\frac{\partial_t^2 a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}} H_{\mathcal{D}}^2} = \frac{1}{2} \Omega_m^{\mathcal{D}} + 2\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}. \quad (9.1.42)$$

Le système formé par (9.1.34)-(9.1.36) et la condition d'intégrabilité (9.1.39), une fois précisée une condition de fermeture, constitue un modèle dynamique effectif gouvernant l'évolution temporelle d'un modèle homogène de la cosmologie sur le domaine spatial \mathcal{D} . L'identité stricte de l'équation de Friedmann effective, c'est-à-dire de la première équation du système (9.1.34), avec l'équation obtenue

à partir du flot de Ricci (8.2.17) est remarquable, et tendrait à prouver que la démarche simple et intuitive présentée ici est potentiellement riche d'enseignements, et capable de capturer de nombreux phénomènes non triviaux. Il est notamment important d'insister sur le fait que la courbure moyenne $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ n'est pas, a priori, une courbure constante du type friedmannien. En effet, il est toujours possible de réécrire le terme $-(\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle R \rangle_{\mathcal{D}})/6$ intervenant dans l'analogie de l'équation de Friedmann en fonction d'une courbure friedmannienne, et on trouve :

$$-\frac{1}{6}(\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) = -\frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} + \frac{2}{3a_{\mathcal{D}}^2} \int_1^{a_{\mathcal{D}}} a \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(a) da . \quad (9.1.43)$$

La différence entre $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ et une courbure constante $k_{\mathcal{D}_i}/a_{\mathcal{D}}^2$ peut donc être attribuée au couplage entre courbure moyenne et backreaction, explicite dans la condition d'intégrabilité (9.1.39). Le terme intégral montre que la relation entre courbure moyenne et courbure constante fait intervenir toute l'histoire du terme de backreaction entre l'instant initial et le moment où l'on calcule la courbure. Cette intégrale peut être importante même pour une backreaction faible. Les paramètres adimensionnés pouvant remplacer $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$ et $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}$ si l'on choisit de représenter le système (9.1.34) avec une courbure friedmannienne donnée par (9.1.43) s'écrivent :

$$\Omega_k^{\mathcal{D}} \equiv -\frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \text{ et } \Omega_{\mathcal{Q}N}^{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \int_1^{a_{\mathcal{D}}} a \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(a) da , \quad (9.1.44)$$

pour lesquels on a : $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}N}^{\mathcal{D}}$.

Le cœur des cosmologies moyennées peut essentiellement être rapporté à la non commutativité des opérations d'évolution et de moyennisation exprimée par la relation (9.1.15) qui prend dans le cas d'un fluide de poussière la forme suivante :

$$[\partial_t \cdot, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}] \Psi \equiv \partial_t \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \partial_t \Psi \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \theta \Psi \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \Psi \rangle_{\mathcal{D}} . \quad (9.1.45)$$

Si l'on applique la relation (9.1.45) à $\Psi = \rho$, on obtient :

$$[\partial_t \cdot, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}}] \rho = \frac{\partial_t S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})}{V_{\mathcal{D}}} , \quad (9.1.46)$$

où la fonction $S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})$ est définie par :

$$S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}) \equiv \int_{\mathcal{D}} \rho \ln \frac{\rho}{\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}} J d^3 X ; \quad (9.1.47)$$

en théorie de l'information, cette fonctionnelle est connue sous le nom de fonctionnelle de Kullback-Leibler (cf [134] pour une discussion et les références). $S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})$ est nulle pour un Univers de Friedmann, dans lequel la densité locale est partout

égale à la densité moyenne : $\rho = \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}$; elle est positive pour toute autre configuration du champ de matière (car sur \mathbb{R}_+^* , on a $\ln x < x - 1$). Ainsi, c'est une bonne mesure de la structuration du champ de matière, et l'on peut dire qu'en tant que telle, elle forme une source pour la non-commutativité des opérations d'évolution et de moyennisation. Dans la relation (9.1.46), l'évolution de la fonctionnelle $S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})$ et celle du volume sont en compétition dans un Univers en expansion : si le volume croît plus vite que le taux d'évolution de $S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})$, on atteint la commutation des opérations. En écrivant la densité et l'expansion locales comme une partie homogène et des déviations (non nécessairement petites) :

$$\rho(t, \vec{X}) = \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}(t) + \delta\rho(t, \vec{X}) \text{ et } \theta(t, \vec{X}) = \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}(t) + \delta\theta(t, \vec{X}) , \quad (9.1.48)$$

la source de non-commutativité s'écrit :

$$\frac{\partial_t S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})}{V_{\mathcal{D}}} = - \langle \delta\rho\delta\theta \rangle_{\mathcal{D}} . \quad (9.1.49)$$

On voit donc que de "l'information" est produite par la structuration de l'Univers (c'est-à-dire $\partial_t S > 0$) si et seulement si le domaine \mathcal{D} contient plus de régions sous-denses en expansion et de régions sur-denses en contraction que le contraire. C'est l'état qui semble favorisé par la formation des structures dans un Univers en expansion, comme tendent à le montrer les simulations numériques et l'analyse de l'instabilité gravitationnelle. La relation (9.1.46) et l'expression (9.1.48) mettent par conséquent clairement en évidence le lien entre formation des structures et non commutativité du lissage et de l'évolution. Toute la question est de savoir si la variation de "l'entropie" S peut dominer l'effet de volume afin de faire croître la non-commutativité, ou si, au contraire, on peut négliger cette non-commutativité dans la mesure où, dynamiquement le rapport $\partial_t S/v_{\mathcal{D}}$ tend vers 0 au cours de l'évolution de l'Univers. C'est donc un cadre bien posé pour tester la validité des modèles de Friedmann. Finalement, remarquons que la relation (9.1.49) nous permet d'obtenir une borne supérieure à la non-commutativité ; en effet, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\left| \frac{\partial_t S(\rho | \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}})}{V_{\mathcal{D}}} \right| \leq \Delta\rho\Delta\theta , \quad (9.1.50)$$

où $\Delta\rho \equiv \sqrt{\langle \delta\rho^2 \rangle_{\mathcal{D}}}$ et $\Delta\theta \equiv \sqrt{\langle \delta\theta^2 \rangle_{\mathcal{D}}}$ sont les amplitudes des fluctuations dans la densité de matière et le taux d'expansion, respectivement. Dans la suite de ce chapitre, nous allons tout d'abord explorer diverses façons de clore le système (9.1.34)-(9.1.36) afin d'en donner une solution. Puis, nous discuterons de la possibilité d'expliquer l'énergie sombre dans ce contexte, avant d'ouvrir quelques pistes concernant le lien de ces modèles moyennés avec les observations.

9.2 Etudes de quelques solutions

Le système (9.1.34)-(9.1.39) n'est pas clos, dans le sens où il manque une équation indépendante pour en déterminer la solution complète. Dans cette section, nous allons présenter différentes façons d'introduire une telle relation de fermeture. La première, d'ordre mathématique, consiste à étudier une sous-classe de solutions en forme de lois de puissance. La seconde, plus physique, présente un calcul explicite des termes de backreaction dans le modèle perturbatif de la croissance des structures.

9.2.1 Lois de puissance

Détermination des solutions

Commençons donc par considérer des solutions de la forme :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n; \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^p, \quad (9.2.1)$$

où n et p sont deux réels, $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$ étant les valeurs initiales de la backreaction et de la courbure moyenne, respectivement. Ces solutions, bien que n'ayant aucune justification physique, ont l'avantage d'être simples, et de pouvoir convenablement approcher le comportement des termes de backreaction et de courbure moyenne sur un temps suffisamment court. Elles ont été étudiées dans [135]. En réécrivant l'équation d'intégrabilité (9.1.39) sous la forme :

$$a_{\mathcal{D}}^{-6} \partial_{a_{\mathcal{D}}} (a_{\mathcal{D}}^6 \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}) + a_{\mathcal{D}}^{-2} \partial_{a_{\mathcal{D}}} (a_{\mathcal{D}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}), \quad (9.2.2)$$

et en introduisant les solutions (9.2.1) dans cette relation, on trouve deux cas distincts de solutions :

– $n \neq p$: alors la seule solution est :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-6} \text{ et } \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2}; \quad (9.2.3)$$

– $n = p$: alors on a une famille de solutions paramétrée par le rapport $r = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} / \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$ de la backreaction et de la courbure moyenne² :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = r \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = r \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{n(r)} \text{ avec } n(r) = -2 \frac{1+3r}{1+r} \text{ si } r \neq -1; \quad (9.2.4)$$

si $r = -1$, il n'y a pas de solution non identiquement nulle.

²Ce rapport dépend en fait du domaine \mathcal{D} , mais nous avons supprimé la référence à cette dépendance évidente par souci de clarté d'écriture.

Le premier type de solution (9.2.3) correspond au cas où chaque terme de l'équation (9.2.2) s'annule indépendamment de l'autre. D'une certaine manière, on peut donc dire que cette solution traduit une situation où la backreaction et la courbure moyenne sont découplées et évoluent indépendamment; cet état du système mène à une courbure moyenne exactement identique à une courbure constante friedmannienne, et à une backreaction évoluant comme $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}^2$. Au cours de l'expansion du domaine \mathcal{D} , cette solution tend donc rapidement vers un état avec une simple courbure constante, et nous dirons qu'il correspond à un état quasi-friedmannien. Au contraire, la forme de la famille de solutions (9.2.4) traduit, au moins pour $r \neq 0$, un couplage très fort entre la backreaction et la courbure moyenne, puisqu'elles évoluent exactement de la même manière. Le couplage, générique et apparent dans l'équation (9.1.39), peut donc être vu comme étant responsable d'un soutien de la backreaction à des niveaux plus élevés que dans la solution quasi-friedmannienne (du moins pour $r > -1$), grâce à un "réservoir" représenté par la courbure moyenne. Il est important de remarquer que l'équation (9.2.2) est linéaire dans les quantités $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$, si bien que la combinaison linéaire de deux solutions est encore une solution. En particulier, on peut toujours ajouter un terme en $1/a_{\mathcal{D}}^2$ à la courbure moyenne. Notons finalement que seuls les cas $r = 0$ et $r = -1$ pour les solutions (9.2.4) mènent à un Univers friedmannien (mais dépendant de l'échelle) respectivement avec et sans courbure constante (au sens friedmannien).

Paramètres cosmologiques effectifs

Les paramètres cosmologiques adimensionnés (9.1.40) et (9.1.44) obéissent, pour les solutions en lois de puissance (9.2.4) à des relations additionnelles très simples :

$$\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = r\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} \quad (9.2.5)$$

$$\Omega_k^{\mathcal{D}} = (1+r)a_{\mathcal{D}}^{\frac{4r}{1+r}}\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = (1+r)\frac{H_{\mathcal{D}_i}^2}{H_{\mathcal{D}}^2}a_{\mathcal{D}}^2\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}. \quad (9.2.6)$$

La relation (9.2.6) montre maintenant très clairement que la courbure friedmannienne $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ n'est pas, en général, la courbure moyenne d'un Univers inhomogène : dès que la backreaction cinématique est présente (c'est-à-dire dès que les distributions de matière et de courbure sont présentes), son couplage à la courbure moyenne peut faire évoluer cette dernière de façon très différente d'une courbure constante. Si l'on évalue cette expression de la courbure friedmannienne à l'instant initial, on peut relier la courbure constante à la courbure moyenne initiale par :

$$k_{\mathcal{D}_i} = \frac{1+r}{6}\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}. \quad (9.2.7)$$

Une remarque anticipant légèrement sur le programme à venir : si l'on souhaite expliquer l'énergie sombre par la présence des fluctuations dans le champ de matière, on peut identifier le terme $\Omega_{Q_N}^{\mathcal{D}}$ comme la source de l'énergie sombre ; alors il doit prendre une valeur d'ajustement Ω_{Λ}^F aujourd'hui dans un modèle de Friedmann effectif. La valeur de Ω_{Λ}^F dépend naturellement de la valeur initiale de $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ (ce qui n'est pas le cas pour un modèle de Friedmann "vrai") :

$$\Omega_{\Lambda}^F = \Omega_k^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^{n(r)+2} . \quad (9.2.8)$$

Cette relation permet de contraindre les valeurs de r compatibles avec les valeurs du meilleur ajustement aux données des paramètres friedmanniens effectifs Ω_{Λ}^F et $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ (à condition de connaître $a_{\mathcal{D}_0}$) [135]. Remarquons finalement que pour les solutions en lois de puissance, le modèle est très conservatif en ce qu'il force le terme $\Omega_{Q_N}^{\mathcal{D}}$ à s'annuler strictement à l'instant initial, alors que, si cet instant initial est fixé au moment de l'émission du fond de rayonnement cosmologique, par exemple, les observations permettent à ce terme, de valoir quelques pourcents³ [136, 137, 138].

Espace des solutions

Nous allons maintenant étudier l'espace des solutions correspondant à la famille (9.2.4). Cet espace possède deux dimensions, car les trois quantités caractéristiques $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}$, $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$ et $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ sont soumises à la contrainte $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_m^{\mathcal{D}} = 1$. Dans le cas des solutions en loi de puissance, toutes les propriétés des solutions sont réductibles à la valeur du paramètre r . Pour représenter l'espace des solutions, on choisit, plutôt que deux densités adimensionnées effectives, de caractériser le système par sa position dans le plan $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}})$. On a en effet simplement :

$$q^{\mathcal{D}} = \frac{2r}{1+r} + \frac{1-3r}{2(1+r)} \Omega_m^{\mathcal{D}} = -\frac{n+2}{2} + \frac{n+3}{2} \Omega_m^{\mathcal{D}} , \quad (9.2.9)$$

de sorte qu'une solution en loi de puissance donnée est décrite par une droite dans le plan $(\Omega_m^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}})$. De plus, on peut voir que toutes les droites correspondant à une loi de puissance se croisent au point $(1, 1/2)$ qui correspond à un Univers d'Einstein-de Sitter friedmannien plat. Cet espace de solution est présenté sur la figure 9.2.1, où nous avons restreint l'analyse au cas $\Omega_m^{\mathcal{D}} \leq 1$. Les flèches représentent l'évolution des solutions le long des droites caractérisées par (9.2.9) au cours de l'expansion

³Ceci vaut en tant qu'il est considéré comme un terme de quintessence, ce qui reste questionnable. Il vaudrait mieux le considérer à partir de son origine physique dans les modèles inhomogènes, et nous reviendrons sur ce point dans la sous-section suivante consacrée au modèle perturbatif.

de l'Univers. Elles se déduisent des relations :

$$q^{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2} \frac{1 + c_1 a_{\mathcal{D}}^{n(r)+3}}{1 + c_2 a_{\mathcal{D}}^{n(r)+3}} \quad (9.2.10)$$

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} = \frac{1}{1 + c_2 a_{\mathcal{D}}^{n(r)+3}} \quad , \quad (9.2.11)$$

dans lesquelles $c_1 = 4rc_2/(1+r)$ et $c_2 = (1 - \Omega_m^{\mathcal{D}_i})/\Omega_m^{\mathcal{D}_i}$. On voit donc que l'Univers friedmannien d'Einstein-de Sitter est un point-selle dans ce diagramme, les attracteurs étant situés sur la demi-droite correspondant à $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0$, et $q^{\mathcal{D}} < 0.5$. Une solution réaliste au problème de backreaction a peu de chances d'être une simple loi de puissance (car la formation des structures, qui "nourrit" la backreaction, est un processus complexe et transitoire); une solution plus réaliste peut être obtenue en considérant une combinaison linéaire de loi de puissance :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \sum_i \alpha_i a_{\mathcal{D}}^{p(i)} \quad . \quad (9.2.12)$$

Alors, la trajectoire est courbe dans l'espace des solutions, et on peut localement l'approximer par une droite associée à une loi de puissance donnée. Par cette suite de transition entre des lois de puissance "pures", elle est dynamiquement conduite vers les attracteurs cités ci-dessus, si l'un des $p(i)$ est égal $n(r) = -2(1+3r)/(1+r)$ avec $r < 1/3$; dans le cas contraire, elle tend vers le point-selle d'Einstein-de Sitter.

9.2.2 Backreaction à partir des perturbations

Les solutions présentées ci-dessus sont simples, mais ne sont pas motivées physiquement. Nous allons donc voir ici un exemple explicite de calcul de l'effet des fluctuations, grâce à un développement perturbatif. Les résultats présentés dans cette section sont inspirés de [139]. Si l'on suppose que l'Univers est très proche de l'homogénéité au moment du découplage, ce qu'indique la structure des fluctuations du fond de rayonnement cosmologique, on peut essayer de décrire l'Univers comme étant proche d'un modèle de Friedmann, avec de petites perturbations dans la métrique et la distribution de matière. Cette description semble échouer, sur les petites échelles, à décrire l'Univers tardif [140, 141], mais nous pouvons suivre les modes de la backreaction issus de cette théorie de perturbations entre le fond de rayonnement et aujourd'hui, sans préjuger de l'existence (ou non) d'autres modes. Plaçons-nous donc dans un Univers rempli d'un fluide parfait irrotationnel de poussière. Afin de respecter la forme de la métrique adoptée jusqu'ici, (9.1.2) avec $N \equiv 1$, nous considérerons les perturbations dans la jauge synchrone :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}\chi) dx^i dx^j \quad , \quad (9.2.13)$$

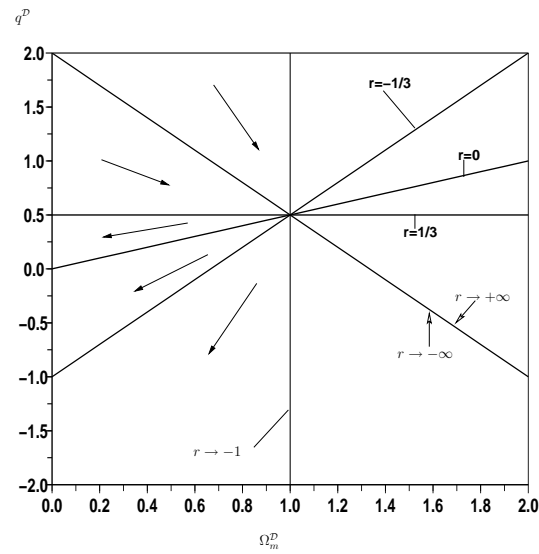


FIG. 9.2.1 – Espace des solutions en lois de puissance dans le plan (Ω_m^D, q^D) . Chaque solution, indexée par une valeur de r , correspond à une droite passant par le modèle friedmannien d'Einstein-de Sitter plat $(1, 1/2)$. La ligne vertical correspondant à $(1, q^D)$ n'est pas associée à une solution au problème de backreaction. Elle est en fait dégénérée sur le point $(1, 1/2)$.

où Ψ et χ sont les perturbations scalaires de la métrique et $D_{ij} \equiv \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta$, Δ étant le laplacien standard de l'espace euclidien à trois dimensions. On décompose également la densité d'énergie du fluide en une partie d'ordre 0 homogène $\bar{\rho}$ et une perturbation d'ordre 1, $\delta\rho$. Les solutions de ce modèle perturbatif sont connues et sont données par [139] :

$$\Psi(t, \vec{x}) = A(\vec{x})t^{2/3} + B(\vec{x})t^{-1} + \zeta(\vec{x}) \quad (9.2.14)$$

$$\chi(t, \vec{x}) = C(\vec{x})t^{2/3} + E(\vec{x})t^{-1} . \quad (9.2.15)$$

A , B , C , E et ζ sont des constantes d'intégration reliées aux conditions initiales, et qui vérifient :

$$A = -\frac{1}{6} \Delta C, \quad B = -\frac{1}{6} \Delta E \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{5}{9} \frac{a_0^2}{t_0^{4/3}} C . \quad (9.2.16)$$

Notons qu'elles sont en relation avec le champ gravitationnel non cosmologique φ défini par $\Delta\varphi(\vec{x}) = 4\pi G a^2 \delta\rho$:

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{3}{5} \zeta(\vec{x}) = -\frac{a_0^2}{3t_0^{4/3}} C(\vec{x}) . \quad (9.2.17)$$

Notons enfin que le facteur d'échelle friedmannien a obéit à :

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} . \quad (9.2.18)$$

Grâce à cette solution, nous pouvons déduire l'évolution de la backreaction et de la courbure moyenne.

9.2.3 Calcul au premier ordre

Au premier ordre, l'élément de volume riemannien J prend la forme :

$$J = a^3 (1 - 3\Psi) . \quad (9.2.19)$$

Si l'on considère une grandeur $G^{(0)}$ d'ordre 0, c'est une pure fonction du temps, donc sa moyenne est naturellement donnée par sa valeur. Pour une grandeur du premier ordre $G^{(1)}$, d'après (9.2.19), on a, au premier ordre :

$$\langle G^{(1)} \rangle_{\mathcal{D}} \equiv \frac{\int_{\mathcal{D}} G^{(1)} J d^3x}{\int_{\mathcal{D}} J d^3x} = \frac{\int_{\mathcal{D}} G^{(1)} d^3x}{\int_{\mathcal{D}} d^3x} . \quad (9.2.20)$$

Si l'on note $\langle G \rangle_E$ la moyenne euclidienne de G , on a donc : $\langle G^{(1)} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle G^{(1)} \rangle_E$, si bien que la perturbation dans l'élément de volume ne joue aucun rôle au premier ordre.

Les grandeurs locales qui nous intéressent s'écrivent de plus, dans la jauge synchrone, au premier ordre :

$$\theta = 3\frac{\dot{a}}{a} - 3\dot{\Psi} \quad (9.2.21)$$

$$\sigma_j^i = \frac{1}{2}D_j^i\dot{\chi} \quad (9.2.22)$$

$$R = 12\ddot{\Psi} + 18\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} . \quad (9.2.23)$$

Notons que R est une quantité du premier ordre, donc :

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}}^{(1)} = \langle R \rangle_E = \frac{16\langle A \rangle_E}{3t^{4/3}} + \frac{12\langle B \rangle_E}{t^3} , \quad (9.2.24)$$

De plus, $\sigma_j^i\sigma_i^j$ et $\langle(\theta - \langle\theta\rangle_{\mathcal{D}})^2\rangle_{\mathcal{D}}$ sont des quantités du second ordre, donc on a :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{(1)} = 0 \quad (9.2.25)$$

au premier ordre.

Notons que $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}^{(1)}$ possède deux contributions qui, d'après (9.2.18) sont respectivement proportionnelles à a^{-2} et $a^{-9/2}$, si bien qu'au premier ordre le terme dominant correspond à une simple courbure constante friedmannienne. De plus, d'après (9.2.16), les constantes $\langle A \rangle_E$ et $\langle B \rangle_E$ peuvent se réécrire, en terme de C et de E comme des termes de surface, c'est-à-dire comme des intégrales sur le bord $\partial\mathcal{D}$ du domaine \mathcal{D} .

9.2.4 Calcul au deuxième ordre

A priori, il peut paraître difficile de calculer les corrections dues à la backreaction au second ordre, car la détermination de la solution pour les perturbations au second ordre met en jeu des calculs longs et difficiles. Heureusement, pour calculer les termes moyennés $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, nous allons voir qu'il suffit de connaître la solution au premier ordre. Une analyse des moyennes montre qu'au deuxième ordre, on a :

$$\langle G^{(1)} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle G^{(1)} \rangle_E - 3\langle \Psi G^{(1)} \rangle_E + 3\langle G^{(1)} \rangle_E \langle \Psi \rangle_E \quad (9.2.26)$$

$$\langle G^{(2)} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle G^{(2)} \rangle_E , \quad (9.2.27)$$

où $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ sont des quantités du premier et du deuxième ordres respectivement. En décomposant : $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)}$, et en utilisant (9.2.26), on a alors :

$$\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2 = \langle \theta^{(1)2} \rangle_E - \langle \theta^{(1)} \rangle_E^2 . \quad (9.2.28)$$

De plus, on voit immédiatement que $\sigma^2 = \frac{1}{8}D_j^i \dot{\chi} D_i^j \dot{\chi}$ implique uniquement des produits de grandeurs du premier ordre, car χ ne possède pas de contribution d'ordre 0. Ainsi, on peut calculer $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, qui est du deuxième ordre, en utilisant uniquement des quantités du premier ordre, puisqu'elle n'est constituée que de produits de grandeurs du premier ordre. Tous calculs faits, on trouve :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{(2)} = \frac{S_1^{\mathcal{D}}}{t^{2/3}} + \frac{S_2^{\mathcal{D}}}{t^{7/3}} + \frac{S_3^{\mathcal{D}}}{t^4}, \quad (9.2.29)$$

avec :

$$S_1^{\mathcal{D}} = \frac{8}{3} (\langle A^2 \rangle_E - \langle A \rangle_E^2) - \frac{1}{9} \langle D_j^i C D_i^j C \rangle_E \quad (9.2.30)$$

$$S_2^{\mathcal{D}} = -8 (\langle AB \rangle_E - \langle A \rangle_E \langle B \rangle_E) + \frac{1}{3} \langle D_j^i C D_i^j E \rangle_E \quad (9.2.31)$$

$$S_3^{\mathcal{D}} = 6 (\langle B^2 \rangle_E - \langle B \rangle_E^2) - \frac{1}{4} \langle D_j^i E D_i^j E \rangle_E. \quad (9.2.32)$$

En utilisant les relations (9.2.16), on peut, par une série d'intégrations par partie, et en notant que $\partial\partial\mathcal{D} = 0$, c'est-à-dire que le bord de \mathcal{D} n'a pas de bord, montrer que $S_1^{\mathcal{D}}$, $S_2^{\mathcal{D}}$ et $S_3^{\mathcal{D}}$ se réduisent à des intégrales sur le bord $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} . De plus, comme l'on a (9.2.18), on voit que $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ présente trois contributions :

- celle impliquant "l'autocorrélation" des modes croissants, $S_1^{\mathcal{D}}$, évolue en a^{-1} ;
- celle impliquant "l'autocorrélation" des modes décroissants, $S_3^{\mathcal{D}}$, évolue en a^{-6} ;
- celle impliquant la "corrélacion croisée" des modes croissants et décroissants, $S_2^{\mathcal{D}}$, évolue en $a^{-7/2}$.

Il nous faut maintenant calculer $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ au second ordre ; cependant, comme $R = -\theta^2 - 4\dot{\theta} - 3K_j^i K_i^j$, le deuxième terme, $\dot{\theta}$, introduit une dépendance dans le deuxième ordre, $\theta^{(2)}$ de θ , et nous ne pouvons plus, a priori, nous contenter d'utiliser uniquement les perturbations au premier ordre. Heureusement, la condition d'intégrabilité (9.1.39) est une relation non perturbative, qui, étant linéaire dans les solutions $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$, est a fortiori vraie à l'ordre 2. Comme nous connaissons $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{(2)}$, il nous suffit donc d'utiliser (9.1.39) pour déterminer $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}^{(2)}$. Pour cela, il nous faut $H_{\mathcal{D}}$ au premier ordre. Comme $\theta = 3\dot{a}/a - 3\dot{\Psi}$ au premier ordre, on a

$$H_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{\dot{a}}{a} - \langle \dot{\Psi} \rangle_E, \quad (9.2.33)$$

au premier ordre. Soit, toujours au premier ordre :

$$\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{2}{3t} - \frac{2}{3t^{1/3}} \langle A \rangle_E + \frac{3\langle B \rangle_E}{t^2}; \quad (9.2.34)$$

d'où l'on déduit, au premier ordre :

$$\frac{a_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}_0}} = \frac{t_0^{2/3}}{a_0} \left((1 + \langle A \rangle_E t_0^{2/3} + \langle B \rangle_E t_0^{-1}) a - \frac{\langle A \rangle_E t_0^{2/3}}{a_0} a^2 - \frac{a_0^{3/2} \langle B \rangle_E}{t_0} a^{-1/2} \right). \quad (9.2.35)$$

En utilisant (9.1.39), on obtient alors une équation différentielle d'ordre 1 pour $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}^{(2)}$, qui, une fois résolue, donne :

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}}^{(2)} = \frac{\alpha_1^{\mathcal{D}}}{t^{2/3}} + \frac{\alpha_2^{\mathcal{D}}}{t^{4/3}} + \frac{\alpha_3^{\mathcal{D}}}{t^{7/3}} + \frac{\alpha_4^{\mathcal{D}}}{t^3} + \frac{\alpha_5^{\mathcal{D}}}{t^4}. \quad (9.2.36)$$

Les $\alpha_i^{\mathcal{D}}$ sont des constantes qui dépendent des A , B , C et E , mais également, pour α_2 , d'une constante d'intégration qui n'est pas déterminée par cette méthode. Les parties dépendant des A , B , C et E peuvent encore s'écrire comme des termes de bord (intégrales sur $\partial\mathcal{D}$).

Si l'on résume les résultats présentés ci-dessus, nous pouvons donc écrire qu'au second ordre de la théorie de perturbations, on a :

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{S_1^{\mathcal{D}}}{t^{2/3}} + \frac{S_2^{\mathcal{D}}}{t^{7/3}} + \frac{S_3^{\mathcal{D}}}{t^4} \quad (9.2.37)$$

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\alpha_1^{\mathcal{D}}}{t^{2/3}} + \left(\alpha_2^{\mathcal{D}} + \frac{16\langle A \rangle_E}{3} \right) \frac{1}{t^{4/3}} + \frac{\alpha_3^{\mathcal{D}}}{t^{7/3}} + \frac{\alpha_4^{\mathcal{D}} + 12\langle B \rangle_E}{t^3} + \frac{\alpha_5^{\mathcal{D}}}{t^4} \quad (9.2.38)$$

On voit donc que seuls les termes en $t^{-4/3}$ et t^{-3} reçoivent des contributions d'ordre 1, les autres termes étant d'ordre 2. On constate que l'un des modes évolue en a^{-1} , donc décroît plus lentement que la densité de matière : au cours de l'expansion, la backreaction acquiert de plus en plus d'importance ; cependant, il faut noter que dans ce calcul perturbatif, le coefficient de ce mode est d'ordre deux, donc plus faible que le coefficient pour la densité de matière, qui est d'ordre 0. Aux temps longs, on peut négliger les autres modes et écrire :

$$Q_{\mathcal{D}} \sim \frac{S_1^{\mathcal{D}}}{a}, \quad (9.2.39)$$

et, d'après le développement de $a_{\mathcal{D}}$ (9.2.35), $S_1^{\mathcal{D}}$ étant d'ordre 2 :

$$Q_{\mathcal{D}} \sim \frac{S_1^{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}_0}}{t_0^{2/3} a_{\mathcal{D}}}. \quad (9.2.40)$$

Le développement perturbatif entraîne donc l'apparition d'un terme décroissant moins vite que la densité de matière dans le modèle effectif moyenné de l'Univers tardif : la backreaction est un effet qui pourrait avoir un effet non négligeable

dans le cadre d'une cosmologie de haute précision (cf [139] pour une discussion sur le lien entre les constantes et les observables physiques). Enfin, nous avons vu que les constantes de ce modèle se réduisent à des termes de bord, ce qui n'est pas le cas pour un traitement totalement non perturbatif de la backreaction. En effet, cette propriété est une réminiscence de ce qui se passe dans l'approximation newtonienne [142], et vient de ce que l'élément de volume friedmannien se réduit à l'élément de volume euclidien. Dans le cas général, les termes intégrés ne peuvent s'écrire comme des divergences pures (c'est la différence entre la divergence de la vitesse $u_{i,i}$ qui intervient dans le formalisme newtonien, et la trace de la courbure extrinsèque K_{ij} , qui la "remplace" en Relativité Générale). Pour clarifier ce point, il serait intéressant de traiter les ordres supérieurs, pour lesquels "l'astuce" utilisée ici, consistant à calculer les grandeurs à l'ordre 2 uniquement grâce aux perturbations à l'ordre 1 et à la condition d'intégrabilité, ne peut plus être appliquée; l'exploration de certaines méthodes non perturbatives pourrait aussi constituer un élément intéressant. Pour conclure cette discussion du modèle perturbatif, calculons la fonctionnelle de Kullback-Leibler (9.1.47) au deuxième ordre. En ne considérant que les modes croissants pour une raison de simplicité, on trouve, tous calculs faits :

$$S = \beta_1 t^{7/3} + \beta_2 t^{4/3} . \quad (9.2.41)$$

C'est donc bien une fonction croissante : la structuration de l'Univers agit ainsi comme une source de non-commutativité.

9.3 Energie sombre et backreaction

Les deux phénomènes qualitativement les plus importants dans l'Univers tardif sont la formation (non linéaire) des structures cosmologiques, et la faiblesse du flux lumineux nous parvenant des Supernovae de type Ia lointaines, faiblesse interprétée, dans le cadre des modèles de Friedmann, comme un effet de l'accélération de l'expansion. Il est donc tentant d'essayer de relier ces deux phénomènes ; d'autant plus que si la structuration de l'Univers était responsable de l'accélération de l'expansion (vraie ou apparente), le problème de la coïncidence, que nous avons signalé dans la première partie, serait résolu de facto. Exhiber une origine classique au problème de l'énergie sombre permettrait également de s'abstraire du recours à des sources "exotiques", souvent phénoménologiques, ne respectant pas les conditions d'énergie.

Dans cette famille de raisonnements, il existe deux approches assez différentes, de part leurs buts et leurs moyens. La première façon d'aborder le problème de l'énergie sombre dans les cosmologies inhomogènes consiste à tenter de rendre

compte des observations sans invoquer une accélération de l'expansion. Les photons qui nous parviennent des galaxies lointaines traversent en effet l'Univers local qui est aujourd'hui inhomogène, sur des échelles plus petites qu'environ 100 Mpc (cf section 2.1.1 dans la première partie). Les modifications apportées à la distance de luminosité par la présence de ces inhomogénéités pourraient alors être responsables des effets observés sur la relation magnitude/décalage vers le rouge. Une étude détaillée de l'effet des fluctuations sur la distance de luminosité [143] a montré qu'à l'ordre linéaire de la théorie de perturbations, une telle explication n'était pas possible. Cependant, l'Univers local présente des structures qui sont déjà dans le régime d'effondrement non linéaire. C'est pourquoi un traitement non-perturbatif a été tenté. Une façon commode de traiter l'Univers local sans passer par un modèle de Friedmann perturbé consiste à lever l'hypothèse d'homogénéité et à considérer un Univers local à symétrie sphérique autour de l'observateur. Cela mène à l'étude des solutions de Lemaître-Tolman-Bondi [144, 145] dans un Univers rempli d'un fluide de poussière. Cette étude a montré qu'il était possible d'imiter un effet d'accélération par la présence d'inhomogénéités [146, 147, 148, 149, 150]. Cependant, de tels modèles inhomogènes doivent naturellement mener à des effets de natures différentes sur différentes observations. Par exemple, il est difficile de voir comment ils pourraient influencer de façon concordante sur la distance de luminosité et la distance angulaire, de sorte à rendre compte des différentes mesures qui supportent l'existence d'une phase d'expansion accélérée. De plus, ces modèles présentent plus de paramètres libres que le modèle standard avec une constante cosmologique. Le fait qu'ils puissent expliquer une observation au moins aussi bien que le modèle standard n'est donc pas très surprenant. C'est pourquoi leur test crucial sera l'élaboration, dans ce cadre, d'une sorte de modèle de concordance.

L'autre approche est directement inspirée des cosmologies inhomogènes moyennées dont nous traitons ici. Ces cosmologies, rappelons-le, retiennent du modèle standard son principe le plus marquant : l'homogénéité de l'Univers aux grandes échelles. Nous l'avons vu, cela permet de construire un modèle effectif homogène sous la forme d'un système dynamique pour les propriétés intégrales de la cosmologie. Plus succinctement, cela revient à définir un facteur d'échelle effectif et à en étudier la dynamique. Dans ces modèles, l'accélération de l'expansion est réelle ; elle est simplement due au fait que l'on choisit de décrire notre Univers à l'aide d'un modèle homogène alors qu'il est inhomogène en réalité : le flot géodésique local peut être tel qu'en chaque point, le taux d'expansion local décélère, tout en conduisant à un modèle effectif homogène en expansion accélérée. C'est en ce sens que l'argument, souvent avancé, selon lequel cette accélération dans les modèles homogènes effectifs n'est pas physique [151] est inapproprié : l'argument de contradiction est exactement le coeur de la méthode. Décider du caractère physique ou non d'un effet paraît douteux dans ce contexte : le modèle de Friedmann

est-il physique ? Il suppose la parfaite homogénéité pour décrire la dynamique d'un objet qui est manifestement plus complexe. Au contraire, les modèles effectifs moyennés proposent une procédure explicite de construction d'un modèle des grandes échelles de l'Univers, modèle qui est en principe testable, et qui permet, qui plus est, d'intégrer les modèles de Friedmann dans un cadre plus large. Savoir si la backreaction est effectivement responsable de l'accélération est un autre problème, d'ordre quantitatif (en bref, a-t-on $Q_D > 4\pi G \langle \rho \rangle_D$ dans l'Univers tardif), mais nous avons vu que même dans un traitement perturbatif cette backreaction est bien présente ; bien que faible, elle exhibe dès l'ordre 2, c'est-à-dire dès le premier ordre auquel elle apparaît, un comportement non trivial qui la fait décroître moins vite que la densité moyenne de matière. C'est pourquoi il apparaît important d'étudier cet effet : même s'il ne doit pas mener à une explication de l'énergie sombre, il permet de comprendre la structure d'un modèle homogène, et d'en tester les hypothèses. Une remarque plus pertinente à mon sens concerne le problème de jauge. Toujours dans [151], et plus récemment dans [152], les auteurs ont avancé qu'une backreaction importante pouvait être un artefact dû au choix de coordonnées comobiles. Intuitivement, on peut comprendre cela si l'on se rappelle que l'invariance de la Relativité Générale sous les difféomorphismes permet de décrire l'espace-temps dans n'importe quel jeu de coordonnées. Par exemple, un espace-temps euclidien est caractérisé par un tenseur de Riemann identiquement nul : $R_{\nu\rho\sigma}^\mu \equiv 0$, et non par une métrique "plate" : si les coordonnées x^μ rendent la métrique plate, on peut trouver des coordonnées e^μ quelconques telles que dans ces nouvelles coordonnées, la métrique prenne une forme non apparemment plate, mais on aura toujours $R_{\nu\rho\sigma}^\mu \equiv 0$. Pour notre problème on a de même des fluctuations qui peuvent apparaître comme des modes dus au choix de coordonnées. Par conséquent, la backreaction, qui est un effet des fluctuations, peut être forte dans des coordonnées particulières, alors qu'elle est faible dans un autre système. Jusque là, la remarque des auteurs de [151] et [152] est tout à fait fondée, et leur résultat physiquement clair : les coordonnées comobiles sont un choix particulier de coordonnées ; si l'on avait choisi le feuilletage maximal souvent utilisé en Relativité numérique [153] et dans lequel $K_{ij} \equiv 0$, la backreaction aurait été nulle. Cependant, il faut rappeler que l'énergie sombre, en tant qu'elle est interprétée comme due à l'accélération de l'expansion, est un effet qui trouve sa place et son sens physique dans le modèle standard de la cosmologie, qui repose lui-même sur les Univers de Friedmann. Or, ces derniers sont représentés dans des coordonnées correspondant à un ensemble d'observateurs comobiles. Dès lors, en quoi l'accélération dans les modèles moyennés serait-elle non physique car due à un choix de coordonnées ? Peut-être est-elle justement due au fait que l'on singularise des observateurs comobiles dans un Univers inhomogène qui choisissent de décrire ce dernier avec un modèle homogène aux grandes échelles. Une observation, comme

l'énergie sombre, peut n'être qu'un effet de coordonnées ; il n'y a là aucune contradiction apparente lorsque l'on précise exactement le programme que l'on poursuit. L'erreur serait patente seulement si l'accélération était un phénomène réellement indépendant des coordonnées, ce qui, pour une accélération, serait pour le moins surprenant.

Pour en revenir plus directement à ce problème de l'énergie sombre, il a été démontré que les fluctuations plus grandes que le rayon de Hubble ne pouvaient pas produire d'accélération (elles se somment pour donner une contribution en $a_{\mathcal{D}}^{-2}$ dans la contrainte hamiltonienne moyennée) [154, 155, 140]. De même, comme nous l'avons vu, jusqu'au second ordre en théorie des perturbations, l'effet reste trop faible pour rendre compte de l'accélération de l'expansion [156, 157, 158, 159]. La seule possibilité pour expliquer l'accélération dans le contexte des cosmologies moyennées reste donc un effet des fluctuations plus petites que l'horizon, le modèle prenant en compte les non-linéarités de façon plus satisfaisante que dans la théorie de perturbations ; en fait, un traitement non perturbatif serait sûrement plus correct : les Univers homogènes effectifs qui sont significativement différents d'un modèle de type friedmannien, dans l'espace des solutions, nécessitent une prise en compte rigoureuse du couplage entre courbure et fluctuations dans la distribution de matière. Il n'est pas sûr que la théorie de perturbations permette de rendre compte de ce couplage. En fait, on ne sait même pas si cette série est bien définie, dans le sens où elle aurait une limite finie à tout temps [141] : dès que les perturbations, sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle, sont de l'ordre de grandeur des quantités homogènes, d'une part les développements limités tronqués sont faux, d'autre part la séparation de la métrique en une partie de fond et une perturbation pose un réel problème d'interprétation des données.

9.3.1 Principe d'une solution

Commençons donc par examiner un modèle-jouet [160] constitué de deux régions homogènes et isotropes de type Friedmann disjointes sans nous préoccuper des conditions de raccord entre ces deux régions⁴. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser la formation d'une structure : l'une des régions modélisera une surdensité, et l'autre une sous-densité environnante. Chacune de ces régions est caractérisée par un facteur d'échelle $(a_i)_{i \in \{1,2\}}$, et par un taux d'expansion $(H_i)_{i \in \{1,2\}}$. L'indice 1 désignera la région sous-dense, et l'indice 2 la région surdense. On a donc $H_1 > H_2$. Le domaine de moyennisation sera pris égal à l'union des deux régions 1 et 2 ; son volume est donc simplement donné par :

$$V_{\mathcal{D}} = a_1^3 + a_2^3, \quad (9.3.1)$$

⁴Pour une approche de ce genre de raccord, voir, dans un autre contexte,[161].

et le facteur d'échelle effectif s'écrit :

$$a_{\mathcal{D}} = (a_1^3 + a_2^3)^{1/3} . \quad (9.3.2)$$

On peut alors calculer le taux d'expansion et le paramètre de décélération effectifs de façon purement cinématique :

$$H_{\mathcal{D}} = \frac{a_1^3}{a_1^3 + a_2^3} H_1 + \frac{a_2^3}{a_1^3 + a_2^3} H_2 = H_1(1 - v + hv) \quad (9.3.3)$$

$$q^{\mathcal{D}} = q_1 \frac{1 - v}{(1 - v + hv)^2} + q_2 \frac{vh^2}{(1 - v + hv)^2} - 2 \frac{v(1 - v)(1 - h)^2}{(1 - v + hv)^2} , \quad (9.3.4)$$

où l'on a défini la fraction de volume occupé par la région surdense :

$$v \equiv \frac{a_2^3}{a_1^3 + a_2^3} , \quad (9.3.5)$$

et le rapport des taux d'expansion : $h \equiv H_2/H_1$; enfin, q_i est le paramètre de décélération de la région i . On voit que le taux d'expansion effectif est simplement la moyenne des taux d'expansion dans chaque région, pondérée par le volume de chaque région. Le paramètre de décélération, au contraire, présente, par le biais du troisième terme, une contribution non triviale. Si l'on considère un ensemble de N régions, avec N grand, ce terme est relié à la variance de la distribution des taux d'expansion ; il joue exactement le rôle physique et mathématique de $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$. On peut remarquer que ce terme $-2v(1 - v)(1 - h)^2/(1 - v + hv)^2$ est toujours négatif (correspondant à $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 0$) et tend donc toujours à accélérer l'expansion moyenne. Afin de simplifier les calculs, nous considérerons que la région sous-dense 1 est vide. On a alors :

$$H_1^2 = -\frac{k}{a_1^2} , \quad (9.3.6)$$

avec $k < 0$, si bien que $a_1 \propto t$. La région 2, elle, est assimilée à un modèle de Friedmann à courbure positive :

$$H_2^2 = \frac{8\pi G\rho_2}{3} - \frac{k}{a_2^2} , \quad (9.3.7)$$

avec $k > 0$. La solution de (9.3.7) peut être représentée sous forme paramétrique en introduisant ϕ tel que :

$$t \propto \phi - \sin \phi \text{ et } a_2 \propto 1 - \cos \phi . \quad (9.3.8)$$

ϕ varie entre 0 et 2π : pour $\phi = 0$, la région 2 est réduite à un point et l'on est à l'instant initial (Big Bang) ; puis cette région surdense subit une expansion jusqu'à

ce que $\phi = \pi$, pour ensuite s'effondrer sur elle-même. Ce scénario est singulier en $\phi = 2\pi$, mais dans ce genre de modèle, on considère en général que la structure en effondrement se stabilise (par des processus non décrit dans le modèle) lorsque son rayon est égal à la moitié de son rayon au moment où elle a commencé à s'effondrer, c'est-à-dire pour $\phi = 3\pi/2$. On peut alors écrire :

$$h = \frac{(\phi - \sin \phi) \sin \phi}{(1 - \cos \phi)^2} \quad (9.3.9)$$

$$v = \frac{\pi^3 f_2 (1 - \cos \phi)^3}{\pi^3 f_2 (1 - \cos \phi)^3 + 8(1 - f_2 (\phi - \sin \phi)^3)}, \quad (9.3.10)$$

où f_2 représente la fraction d'espace dans la région surdense 2 au moment où la structure commence à s'effondrer : $f_2 = v(\phi = \pi)$. La figure 9.3.1 montre l'évolution de $q^{\mathcal{D}}$ et des densités adimensionnées pour ce modèle, avec $f_2 = 0.3$. On voit que le modèle effectif homogène commence à accélérer lorsque la zone surdense commence à se contracter ($\phi \sim \pi$). Cela s'explique car, lorsque cette zone se contracte, la fraction de volume qu'elle occupe, v , diminue, donnant de plus en plus d'importance à la zone sous-dense. Simultanément, la courbure moyenne s'inverse, passant de positive à négative (c'est-à-dire $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$ passant de valeurs négatives à des valeurs positives); la région sous-dense domine alors l'expansion moyenne; dans le même temps, la backreaction se stabilise car la variance du taux d'expansion augmente, contrebalançant l'effet de volume.

Cela suggère donc un mécanisme général pouvant expliquer l'accélération dans les modèles moyennés plus généraux : bien que l'expansion locale décélère en chaque point, l'expansion moyenne peut accélérer à condition que la fraction de volume occupé par les vides deviennent suffisamment importante. Plus il y a de différence de taux d'expansion entre les zones sous-denses et les zones surdenses, plus le volume relatif occupé par les zones sous-denses (dont l'expansion est la plus rapide) croît rapidement, expliquant l'accélération. Cependant, les régions sous-denses ne doivent pas être en expansion trop rapide, sans quoi elles occupent rapidement la quasi-totalité du volume, avant que l'effet des régions surdenses ait pu être ressenti. On voit sur la figure 9.3.2 que dans le modèle à deux zones, l'accélération se produit lorsque la fraction de vide a atteint environ 70%. Si l'on varie le seul paramètre libre du modèle, c'est-à-dire f_2 , cette valeur reste stable; cf figure 9.3.3.

Bien entendu, l'Univers réel n'est pas réductible à ce modèle à deux zones. Cependant, nous avons pu comprendre qu'il existe un lien fort entre la fraction de volume occupé par les zones sous-denses et le phénomène d'accélération. Il serait intéressant de savoir si la fraction de 70%, "universelle" pour le modèle à deux zones, persiste pour des modèles plus compliqués et plus réalistes. De toute façon, le mécanisme que nous avons décrit ci-dessus semble robuste, et même si la fraction de vides nécessaire pour produire l'accélération s'avérait différente de

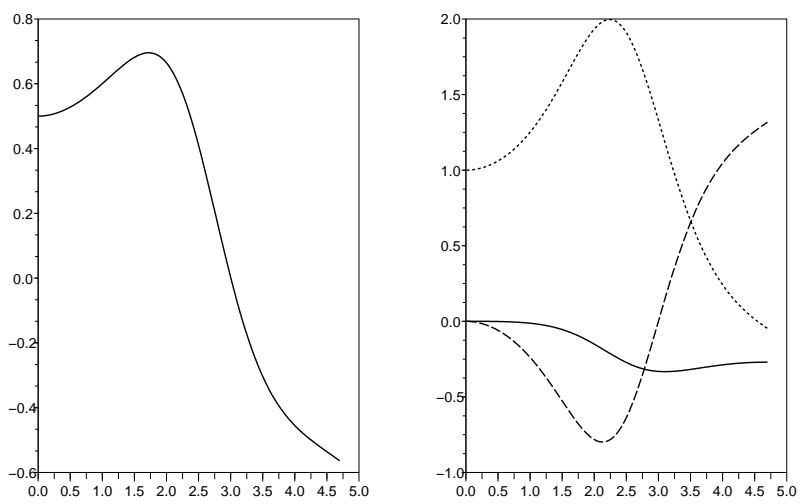


FIG. 9.3.1 – Figure de gauche : évolution du paramètre de décélération q^D en fonction de ϕ pour le modèle à deux zones ; figure de droite : évolution des paramètres adimensionnés pour le modèles à deux zones en fonction de ϕ : Ω_m^D est représenté par le trait en pointillés courts, Ω_Q^D est en trait plein, et $\Omega_{\mathcal{R}}^D$ en pointillés longs.

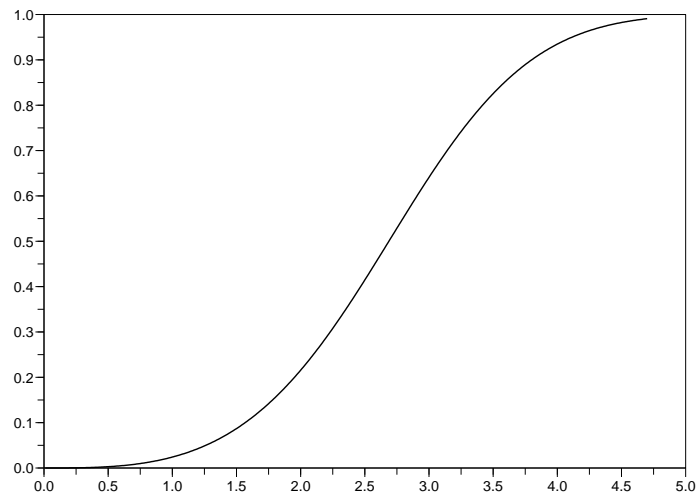


FIG. 9.3.2 – Fraction de volume occupé par la région vide en fonction de ϕ dans le modèle à deux zones.

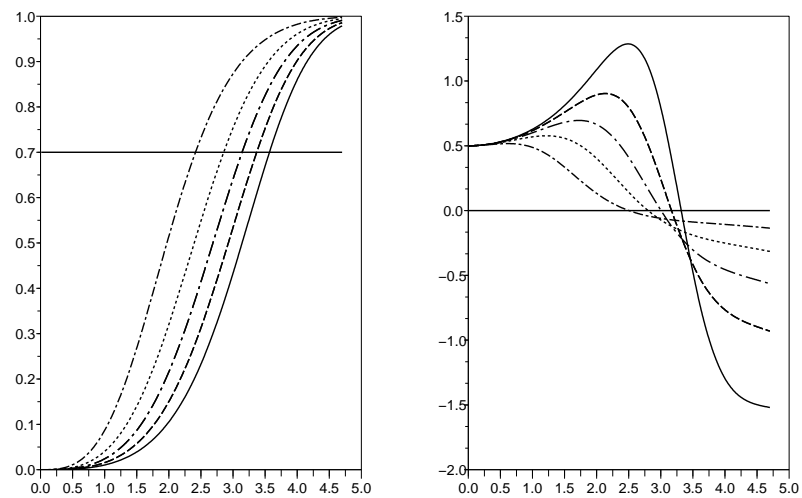


FIG. 9.3.3 – Fraction de vide (gauche) et paramètre de décélération (droite) en fonction de ϕ pour le modèle à deux zones. En trait plein : $f_2 = 0.5$; en pointillés : $f_2 = 0.4$; en points- longs pointillés : $f_2 = 0.3$; en points- pointillés : $f_2 = 0.2$; en points- pointillés courts : $f_2 = 0.1$.

70%, l'estimation de la fraction de vides dans le passé proche de notre Univers apparaît comme un test crucial des modèles de backreaction. Les estimations de la fraction de vides dans l'Univers tardif ne sont pas toutes concordantes, mais placent celle-ci entre 0.6 et 1 [162, 163, 164]; si notre estimation simple de 70% nécessaire pour produire une phase d'expansion accélérée s'avérait valable pour des modèles plus réalistes, ces bornes rendraient donc l'explication de l'énergie sombre par la backreaction tout à fait plausible.

Remarquons, pour conclure sur cet exemple que la backreaction est très faible dans le modèle correspondant à la figure 9.3.1, bien que le modèle soit très différent du modèle standard, essentiellement à cause de la courbure moyenne. Le fait qu'une backreaction faible puisse avoir un impact important sur la cosmologie avait déjà été remarqué pour des modèles newtoniens [165]; ceci est d'autant plus vrai lorsque la backreaction est couplée à la courbure moyenne.

9.3.2 Le morphon

Les termes de fluctuations $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et de courbure moyenne $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ jouent le rôle de sources pour la dynamique du facteur d'échelle dans le système (9.1.34)-(9.1.36). Traditionnellement, du moins dans les modèles les plus simples, lorsque l'on étudie l'énergie sombre dans les Univers de Friedmann, celle-ci est décrite soit par une constante (la constante cosmologique), soit par un champ scalaire phénoménologique baptisé quintessence, dont nous avons parlé dans la première partie de cet ouvrage (voir entre autres, dans la foisonnante littérature sur le sujet : [166, 167, 168, 51, 169, 170]). L'étude du modèle à deux zones, dans la sous-section précédente, a permis de dégager quelques caractéristiques d'une accélération due à la backreaction; le lien avec la formation des structures favorise un modèle dynamique pour l'énergie sombre : l'amplitude des termes de source doit a priori varier avec le temps, puisque la structuration de l'Univers est elle-même un phénomène dynamique. Si l'on pense que la façon correcte de définir un modèle homogène pour l'Univers passe par la définition de propriétés intégrales, donc par l'utilisation du système (9.1.34)-(9.1.36), cela indique une possible réinterprétation du champ de quintessence comme un champ moyen dû à la croissance des fluctuations dans la géométrie et la distribution de matière à grande échelle. Nous allons donc étudier la correspondance que l'on peut établir entre les sources $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ et un champ scalaire effectif. Cette correspondance a été proposée et étudiée dans [135]; le champ scalaire effectif est appelé morphon dans le sens où il traduit l'effet sur le modèle homogène de la structure spatiale de la distribution de matière et de géométrie, donc la "forme" de l'espace-temps à des échelles inférieures à l'échelle de moyennisation. Cette correspondance présente l'avantage de fournir une origine physique claire aux champs phénoménologiques de quintessence; par exemple, elle permet de déterminer l'échelle d'énergie du potentiel de quintessence en fonction

de grandeurs directement reliées à la structuration de l'Univers, ainsi que la nature de ce champ scalaire (c'est-à-dire le signe de son terme cinétique). Enfin, une fois la correspondance établie, tout l'effort de reconstruction du champ scalaire de quintessence à partir des observations [171, 172, 173] peut être directement utilisé pour contraindre la backreaction cinématique et la courbure moyenne du modèle effectif moyenné.

Définition et propriétés du morphon

Décrivons donc les sources du système (9.1.34)-(9.1.36) :

$$\rho_{eff}^{\mathcal{D}} = \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (9.3.11)$$

$$p_{eff}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{3} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} - \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \right), \quad (9.3.12)$$

sous la forme :

$$\rho_{eff}^{\mathcal{D}} \equiv \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \rho_{\Phi}^{\mathcal{D}}, \quad p_{eff}^{\mathcal{D}} \equiv p_{\Phi}^{\mathcal{D}}, \quad (9.3.13)$$

où :

$$\rho_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \frac{\epsilon}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}), \quad p_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \frac{\epsilon}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}). \quad (9.3.14)$$

Les équations (9.3.13) et (9.3.14) constituent une définition du morphon $\Phi_{\mathcal{D}}$ muni du potentiel $U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}})$; ϵ vaut 1 ou -1, afin que le morphon puisse représenter un champ scalaire standard, ou un "fantôme" dont le terme cinétique est négatif. Par l'identification des sources (9.3.11)-(9.3.12) et de la définition du morphon (9.3.13), on a alors :

$$-\frac{1}{8\pi G} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}} \quad (9.3.15)$$

$$-\frac{1}{8\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 3U_{\mathcal{D}}. \quad (9.3.16)$$

Ainsi, la courbure moyenne est directement reliée, par une simple proportionnalité, au potentiel du champ scalaire effectif. En insérant (9.3.15)-(9.3.16) dans la condition d'intégrabilité (9.1.39), on trouve l'équation d'évolution pour le champ scalaire :

$$\ddot{\Phi}_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}}\dot{\Phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{dU_{\mathcal{D}}}{d\Phi_{\mathcal{D}}} = 0. \quad (9.3.17)$$

La dynamique du facteur d'échelle effectif $a_{\mathcal{D}}$ et des champs est alors exactement celle d'un modèle de Friedmann en présence d'un fluide de poussière et d'un champ

scalaire minimalement couplé :

$$H_{\mathcal{D}}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{\epsilon}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}) \right) \quad (9.3.18)$$

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{4\pi G}{3} \left(-\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} - 2\epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + 2U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}) \right) \quad (9.3.19)$$

$$\partial_t \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = 0 \quad (9.3.20)$$

$$\ddot{\Phi}_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{dU_{\mathcal{D}}}{d\Phi_{\mathcal{D}}} = 0 . \quad (9.3.21)$$

On peut, dans cette approche, reformuler le lien que nous avons déjà signalé, lors de la présentation de la fonctionnelle de Kullback-Leibler (9.1.47), entre état hors de l'équilibre et backreaction. En effet, le champ scalaire $\Phi_{\mathcal{D}}$ suggère une définition simple des énergies “cinétique” et “potentielle” associées à la backreaction :

$$E_k^{\mathcal{D}} \equiv \frac{\epsilon}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 V_{\mathcal{D}} \text{ et } E_p^{\mathcal{D}} \equiv -U_{\mathcal{D}} V_{\mathcal{D}} . \quad (9.3.22)$$

Le rapport de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle est alors donné par :

$$\frac{E_k^{\mathcal{D}}}{E_p^{\mathcal{D}}} = -\frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{Q_{\mathcal{D}}}{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}} \right) ; \quad (9.3.23)$$

on voit qu'en l'absence de backreaction (tant que $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \neq 0$), on retrouve une “condition du viriel” : $E_p^{\mathcal{D}} + 2E_k^{\mathcal{D}} = 0$ pour le domaine autogravitant \mathcal{D} , et la backreaction s'identifie donc à une déviation de l'équilibre sur ce domaine. Les modèles de Friedmann correspondent par ce biais à une “condition du viriel” satisfaite à toutes les échelles.

Un exemple de reconstruction : les lois de puissance.

Afin d'illustrer l'émergence naturelle des champs scalaires cosmologiques lors de la moyennisation des cosmologies inhomogènes, nous allons reconstruire explicitement le morphon issu des solutions en lois de puissance étudiées en 9.2.1., en nous limitant aux solutions couplées du type (9.2.4) :

$$Q_{\mathcal{D}} = r \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = r \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{n(r)} \text{ avec } n(r) = -2 \frac{1+3r}{1+r} . \quad (9.3.24)$$

Grâce à (9.3.15)-(9.3.16), on peut écrire :

$$\dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 = -\epsilon \frac{\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{8\pi G} \left(r + \frac{1}{3} \right) a_{\mathcal{D}}^{n(r)} \quad (9.3.25)$$

$$U_{\mathcal{D}} = -\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} a_{\mathcal{D}}^{n(r)} . \quad (9.3.26)$$

Cette correspondance définit donc un morphon ayant un potentiel positif pour $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$; de plus, ce morphon est un champ scalaire réel (cas que nous considérerons par la suite) pour $\epsilon\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}(r + 1/3) < 0$. Si $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$, le morphon est un champ scalaire standard si $r > -1/3$, et un “fantôme” si $r < -1/3$; au contraire, pour $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$, le champ est standard pour $r < -1/3$, et c’est un fantôme pour $r > -1/3$. L’inversion du système (9.3.25)-(9.3.26) afin de reconstruire le potentiel passe par l’intégration de la première équation afin de trouver $\Phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}})$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) &= \frac{2\sqrt{\epsilon(1+3r)(1+r)}}{(1-3r)\sqrt{\pi G}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{-(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{(1-3r)/(1+r)}}{16\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_i}}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-2\epsilon n(r)}}{(n(r)+3)\sqrt{\pi G}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{(1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{n(r)+3}} \right),\end{aligned}\quad (9.3.27)$$

où l’on a défini la fraction initiale de densités de courbure et de matière : $\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} \equiv \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}/\Omega_m^{\mathcal{D}_i}$. Cette relation impose que $r \neq -1$ et $r \neq -1/3$. Le cas $r = -1/3$ correspond en fait à une constante cosmologique effective $\Lambda_{\mathcal{D}}$, comme on peut le voir dans (9.3.25) où alors $\dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 = 0$. Le cas $r = -1$ est dégénéré, comme nous l’avons signalé dans la section 9.2.1, puisqu’il correspond à une annulation de la backreaction et de la courbure moyenne. Le potentiel du champ scalaire s’écrit finalement :

$$\begin{aligned}U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}) &= \frac{-(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} \left((1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} \right)^{2\frac{(1+3r)}{(1-3r)}} \sinh^{-4\frac{(1+3r)}{(1-3r)}} \left(\frac{(1-3r)\sqrt{\pi G}}{\sqrt{\epsilon(1+3r)(1+r)}} \Phi_{\mathcal{D}} \right) \\ &= \frac{2(1+r)}{3} \left((1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} \right)^{\frac{3}{(n+3)}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_i} \sinh^{\frac{2n}{(n+3)}} \left(\frac{(n+3)}{\sqrt{-\epsilon n}} \sqrt{2\pi G} \Phi_{\mathcal{D}} \right).\end{aligned}\quad (9.3.28)$$

Dans ce modèle simple, l’échelle d’énergie du potentiel (9.3.28) est déterminée par les conditions initiales sur la densité d’énergie moyenne $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_i}$ et la courbure moyenne $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$, faisant explicitement le lien entre le moment où se produit l’accélération et la distribution des inhomogénéités dans l’Univers. Le cas $r = 1/3$ est exclu de cette reconstruction; il correspond en fait à $n = -3$, c’est-à-dire à un Univers de Einstein-de Sitter effectif avec une densité de matière renormalisée à l’instant initial : $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_i} - \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}/36\pi G$. Notons que ce type de potentiel est connu dans les scénarios de quintessence [168, 174, 175]. La dérivation du potentiel précédente supposait que la densité de matière n’était pas nulle; dans le cas contraire, la reconstruction du potentiel mène à :

$$U_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathcal{D}}) = -\frac{-\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} \exp \left(-4\sqrt{\frac{\epsilon(1+3r)}{1+r}} \sqrt{\pi G} \Phi_{\mathcal{D}} \right). \quad (9.3.29)$$

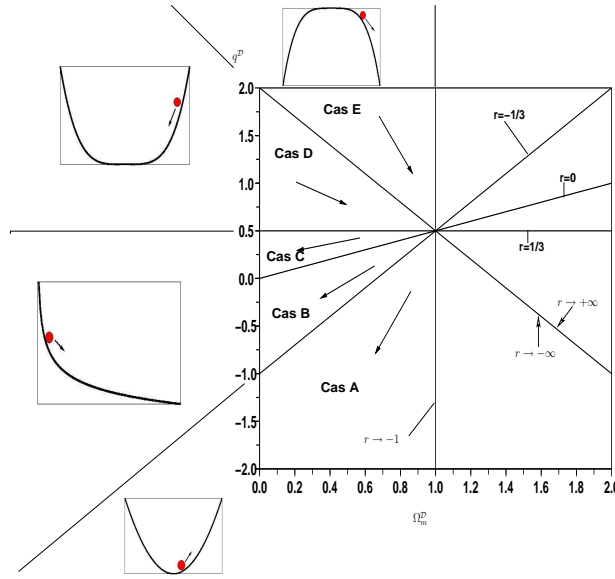


FIG. 9.3.4 – Espace des solutions en lois de puissance, identique à la figure 9.2.1, avec la forme des potentiels du morphon associé à chaque cas.

Au facteur de normalisation $(1+r) \left((1+r) \gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}_1} \right)^{2(1+3r/(1-3r))}$ près, qui traduit la présence de matière, c'est exactement le potentiel (9.3.28) dans la limite $\Phi_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$. La différence entre les potentiels (9.3.28) et (9.3.29) nous indique donc comment la présence de matière affecte le morphon : elle modifie l'échelle d'énergie du potentiel, et change le comportement dynamique du morphon quand le volume du domaine \mathcal{D} est petit (la limite $\Phi_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$ correspond à $a_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$ d'après la formule (9.3.27)). Au contraire, lorsque le domaine est devenu grand, la dynamique du morphon rejoint sa dynamique dans le vide, ce qui correspond bien au fait que la densité de matière a été diluée par l'expansion. Les modèles de champs scalaires définis par (9.3.28) correspondent à une répartition constante de l'énergie entre énergies cinétique et potentielle :

$$E_k^{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{1+3r}{2} E_p^{\mathcal{D}} = 0, \quad (9.3.30)$$

et l'équation d'état du morphon est également constante :

$$w_{\Phi}^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{3} \frac{1-3r}{1+r} = -\frac{1}{3}(n(r) + 3); \quad (9.3.31)$$

on a $w_{\Phi}^{\mathcal{D}} < -1/3$ (donc accélération possible) si et seulement si $r \in]-1; 0[$.

La figure 9.3.4 est une reprise de la figure 9.2.1, où l'on a rajouté le type de champ scalaire correspondant à chacun des cas suivants :

- Cas A : pour $r \in [-1; -1/3]$, le champ scalaire est un “fantôme” ($\epsilon = -1$) s’échappant d’un potentiel de la forme $U_{\mathcal{D}} \propto \sinh^{\beta}(\alpha\Phi_{\mathcal{D}})$, avec $\beta > 0$. Ces modèles peuvent produire une expansion accélérée.
- Pour $r = -1/3$, le modèle correspond à la présence d’une constante cosmologique effective, dépendant de l’échelle : $\Lambda_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} = -\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}/3$.
- Pour $r > -1/3$, le champ scalaire est standard ($\epsilon = +1$), et l’on a les différents cas :
 - Cas B : pour $r \in]-1/3; 0[$, le potentiel est de la forme $\sinh^{\alpha_1}(\Phi_{\mathcal{D}})$, avec $\alpha_1 \in]-4; 0[$; ces modèles correspondent à des champs de quintessence qui peuvent produire une expansion accélérée. Au début de l’évolution, lorsque $\Phi_{\mathcal{D}} \sim 0$, le potentiel est assimilable à un potentiel de Ratra-Peebles $U_{\mathcal{D}} \propto \Phi_{\mathcal{D}}^{-\alpha_2}$, avec $\alpha_2 = 4(1+3r)/(1-3r)$. Lorsque le champ devient grand, le potentiel devient une exponentielle : $U_{\mathcal{D}} \propto \exp(-\alpha_3\Phi_{\mathcal{D}})$, avec $\alpha_3 = 2\sqrt{(1+3r)/(1+r)}$. Ce genre de potentiel ne souffre pas ici du problème posé par la nucléosynthèse aux potentiels exponentiels habituels [176, 166], dans la mesure où il émerge durant l’ère dominée par la matière à cause de la moyennisation.
 - Cas C : pour $r \in]0; 1/3[$, le potentiel est toujours de la forme $\sinh^{\alpha_4}(\Phi_{\mathcal{D}})$, mais avec $\alpha_4 < -4$, si bien que le potentiel est trop pentu pour produire de l’accélération.
 - Pour $r = 1/3$, le modèle correspond à un Univers de Einstein-de Sitter avec une densité de matière renormalisée.
 - Cas D : pour $r > 1/3$, le potentiel s’écrit $U_{\mathcal{D}} \propto \sinh^{\alpha_5}$, avec $\alpha_5 > 4$, et le modèle ne produit pas d’accélération.
 - Cas E : pour $r < -1$, le champ scalaire, qui est standard, descend le long d’un potentiel négatif non borné inférieurement. Ce type de champ scalaire est pathologique lorsqu’il est considéré comme un champ fondamental, mais ici, le champ est effectif, et ne présente donc pas, a priori, de problème d’instabilité. Enfin, les quatre cas précédents correspondaient à une courbure moyenne négative, $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$, alors que ce dernier cas se produit pour $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$.

Signalons enfin que tous les modèles avec $r < 0$ correspondent à une backreaction positive $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 0$, alors que pour $r > 0$ on a $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} < 0$: autrement dit, pour un taux de conversion r entre la courbure et la backreaction négatif, les fluctuations sont dominées par les fluctuations d’expansion, alors que dans le cas contraire, elles sont dominées par le cisaillement.

9.3.3 Observables : quelques considérations

Le système (9.1.34)-(9.1.36) nous donne l’évolution temporelle du facteur d’échelle effectif $a_{\mathcal{D}}$ caractérisant les propriétés dynamiques du domaine \mathcal{D} considéré comme homogène. Nous avons, jusqu’à présent étudié un certain nombre de ces proprié-

tés dynamiques, et nous avons vu, sur un exemple simple mais éclairant, que la fraction de vide dans le domaine \mathcal{D} était un paramètre important pour cette dynamique, notamment pour expliquer l'expansion accélérée. La construction du morphon nous a également montré que tous les types de champs scalaires cosmologiques étaient en principe reproductibles par les backreactions, fournissant donc une origine physique claire de ces champs scalaires. Cependant, il y a une question fondamentale que nous n'avons pas encore abordée ; c'est celle du statut des observations astrophysiques dans ce cadre. Cela pose la question de la façon dont on envisage la géométrie, c'est-à-dire la façon de mesurer les distances dans le contexte des cosmologies inhomogènes moyennées. Puisque nous avons construit un modèle homogène et la dynamique de son facteur d'échelle $a_{\mathcal{D}}$, il est loisible de penser que la géométrie de cet Univers effectif est donnée par la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker avec le facteur d'échelle $a_{\mathcal{D}}$. Mais, quelle est alors la courbure associée ? En effet, les modèles de backreaction impliquent qu'à cause du couplage entre la backreaction et la courbure moyenne, cette dernière évolue, génériquement, de façon différente d'une courbure constante. En d'autres termes, les rayons lumineux qui nous parviennent des objets distants traversent un espace-temps inhomogène de courbure $\mathcal{R}(t, \vec{X})$; cette courbure une fois moyennée, lorsque l'on choisit de considérer l'Univers inhomogène comme homogène, ne se réduit pas à une courbure en $k_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}^2$. L'analyse faite dans le chapitre 8 a montré que le lissage, à temps fixé, de l'espace menait à une partie spatiale de la métrique correspondant à celle d'une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Une approximation possible du problème observationnel est alors de considérer que :

- l'évolution temporelle du modèle homogène est donnée par (9.1.34)-(9.1.36), et nous donne donc une fonction $a_{\mathcal{D}}(t)$;
- à chaque temps t le domaine \mathcal{D} est homogène de courbure spatialement constante $k_{\mathcal{D}}(t)$.

Alors, la métrique effective de l'espace-temps peut être prise égale à :

$$ds_{\mathcal{D}}^2 = -dt^2 + \frac{1}{H_{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}} a_{\mathcal{D}}^2 \left(\frac{dr^2}{1 - k_{\mathcal{D}}(t)r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (9.3.32)$$

Il faut insister sur le fait que cette métrique, qui n'est évidemment pas homogène, n'est pas une solution des équations d'Einstein pour un fluide de poussière homogène de densité $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}$. Mais peu importe. Ici, la dynamique est donnée par les équations (9.1.34)-(9.1.36), les équations d'Einstein étant vérifiées au niveau "microscopique" (c'est-à-dire localement). La métrique (9.3.32) ne sert qu'à calculer les distances. On a donc un découplage entre dynamique et géométrie qui trouve sa source dans le fait d'avoir "forcé" la description homogène d'un Univers non-homogène. L'élément de longueur (9.3.32) est donc une prescription, inspirée du

flot de Ricci, pour rendre compte du fait que les photons traversent un Univers inhomogène. Ainsi, les inhomogénéités jouent ici deux rôles distincts : elles modifient la dynamique à grande échelle par l'intermédiaire du système (9.1.34)-(9.1.36), et elles agissent sur la mesure des distances à travers la dépendance temporelle non-triviale introduite dans (9.3.32). Dès lors, quelle prescription choisir pour $k_{\mathcal{D}}(t)$? Un choix raisonnable doit relier cette courbure constante spatialement à un temps donné à la courbure moyenne vraie $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$. Deux choix "naturels" sont alors possibles : soit on prend la courbure friedmannienne (9.1.43) déduite formellement des équations (9.1.34)-(9.1.36), soit on choisit de définir $k_{\mathcal{D}}(t)$ comme l'écart de $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$ à une courbure friedmannienne : $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \propto k_{\mathcal{D}}(t)/a_{\mathcal{D}}^2$. Si l'on fait le premier choix, $k_{\mathcal{D}}$ ne dépend plus du temps, par définition, et on perd le raffinement inspiré du flot de Ricci. Choisissons donc :

$$k_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) \equiv \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}})}{|\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}_1}|} a_{\mathcal{D}}^2 . \quad (9.3.33)$$

L'équation des géodésiques pour un rayon lumineux nous parvenant radialement est alors simplement donnée par $ds_{\mathcal{D}}^2 = 0$, avec $d\theta = 0$ et $d\phi = 0$.

Prenons pour simplifier le propos une backreaction et une courbure moyenne données par des solutions en lois de puissance (9.2.4) :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = r(n)\beta a_{\mathcal{D}}^n \quad (9.3.34)$$

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}} = \beta a_{\mathcal{D}}^n + \frac{k}{a_{\mathcal{D}}^2} . \quad (9.3.35)$$

n , β et k sont des constantes réelles⁵. Alors, si l'on définit le décalage vers le rouge effectif $z_{\mathcal{D}}$ tel que $1 + z_{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{D}_0}/a_{\mathcal{D}}$, la distance coordonnée obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dr}{dz_{\mathcal{D}}} = a_{\mathcal{D}_0} \sqrt{\frac{1 - k_{\mathcal{D}}(z_{\mathcal{D}})r^2}{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}(1 + z_{\mathcal{D}})^3 + \Omega_X^{\mathcal{D}_0}(1 + z_{\mathcal{D}})^{-n} + \Omega_k^{\mathcal{D}_0}(1 + z_{\mathcal{D}})^2}} \quad (9.3.36)$$

$$r(0) = 0 , \quad (9.3.37)$$

avec :

$$k_{\mathcal{D}}(z_{\mathcal{D}}) = -\frac{(n+6)\Omega_X^{\mathcal{D}_0}(1+z_{\mathcal{D}})^{-(n+2)} + 4\Omega_k^{\mathcal{D}_0}}{|(n+6)\Omega_X^{\mathcal{D}_0}a_{\mathcal{D}_0}^{-(n+2)} + 4\Omega_k^{\mathcal{D}_0}|} . \quad (9.3.38)$$

⁵ k n'a rien à voir avec la courbure géométrique effective $k_{\mathcal{D}}$.

Dans ces expressions, les densités adimensionnées sont définies par :

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} = \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} \quad (9.3.39)$$

$$\Omega_X^{\mathcal{D}} = -\frac{2\beta a_{\mathcal{D}}^n}{3(n+6)H_{\mathcal{D}}^2} \quad (9.3.40)$$

$$\Omega_k^{\mathcal{D}} = -\frac{ka_{\mathcal{D}}^{-2}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (9.3.41)$$

et vérifient la contrainte : $\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_X^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} = 1$. Ce modèle comporte donc seulement trois paramètres libres.

Si on a la solution $\bar{r}(z_{\mathcal{D}})$ de (9.3.36), on peut alors calculer la distance angulaire dans notre espace effectif :

$$d_A^{\mathcal{D}}(z_{\mathcal{D}}) = \frac{c}{H_{\mathcal{D}_0}} \frac{\bar{r}(z_{\mathcal{D}})}{1+z_{\mathcal{D}}}. \quad (9.3.42)$$

On a rétabli la vitesse de la lumière pour des raisons pratiques de comparaison aux données observationnelles. La distance de luminosité se déduit alors de (9.3.42) par la relation de réciprocité [46] : $d_L^{\mathcal{D}} = (1+z_{\mathcal{D}})^2 d_A(z_{\mathcal{D}})$:

$$d_L^{\mathcal{D}} = \frac{c}{H_{\mathcal{D}_0}} (1+z_{\mathcal{D}}) \bar{r}(z_{\mathcal{D}}). \quad (9.3.43)$$

Le modèle (9.3.34)-(9.3.35) allié à la prescription faite pour la métrique peut alors être contraint par les données des Supernovae de type 1a. Pour une première analyse, on peut poser $k = 0$ dans la prescription (9.3.34)-(9.3.35). Le modèle comporte alors deux paramètres libres, et les contraintes données par les Supernovae sont présentées sur la figure 9.3.5 dans le plan $(\Omega_m^{\mathcal{D}_0}, n)$. Les contours noirs présentent les contraintes pour le modèle standard de concordance avec une énergie sombre d'équation d'état constante $w_{DE} = -(n+3)/3$, et les régions colorées les contraintes pour le modèle présenté ici. Cette figure traduit donc directement l'influence de la distance de luminosité modifiée (9.3.43), qui est la seule chose qui distingue les deux modèles. En effet, la dynamique du facteur d'échelle est équivalente dans les deux cas ; seule la distance de luminosité n'est pas calculée de la même manière. L'introduction d'une distance de luminosité du type (9.3.43) décale les contours de confiance vers des plus grandes valeurs de $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ et les n négatifs. Autrement dit, la prise en compte d'une courbure effective évoluant avec le temps permet de rendre compte des observations des Supernovae à l'aide de modes de backreaction du type d'une quintessence, tout en assurant, pour un mode donné, une densité de matière plus importante que dans le modèle standard correspondant. Par exemple, dans le modèle considéré dans cette sous-section, le mode dominant

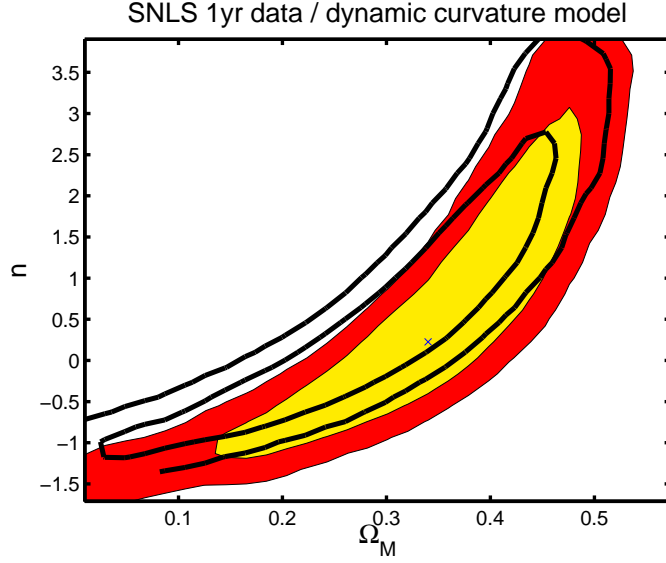


FIG. 9.3.5 – Contraintes dans le plan $(\Omega_m^{D_0}, n)$ obtenues à partir des données de SNLS [18]. Les contours noirs présentent les résultats pour un modèle standard avec une composante d’énergie sombre d’équation d’état constante $w_{DE} = -(n + 3)/3$; le contour intérieur délimite la région de confiance à $1-\sigma$, et le contour extérieur celle à $2-\sigma$. Les régions colorées présentent les résultats pour le modèle considéré dans cette sous-section (jaune à $1-\sigma$ et rouge à $2-\sigma$). Merci à Martin Kunz pour cette figure.

de la solution perturbative à l’ordre 2 (9.2.40), avec $n = -1$, est compatible avec les données et $\Omega_m^{D_0} \sim 0.3$ à $2-\sigma$, alors que sans la modification de la distance de luminosité, il faudrait pour ce même mode, $\Omega_m^{D_0} \sim 0.05$. Bien sûr, la solution perturbative ne permet pas d’atteindre $\Omega_m^{D_0} \sim 0.3$, car elle est du deuxième ordre, donc forcément sous-dominante. Mais il est intéressant que l’introduction de façon simple, dans la géométrie effective, d’une courbure variant avec le temps, permette de faire baisser la contribution perturbative de la backreaction nécessaire pour expliquer la luminosité des Supernovae d’environ 25%. Cela permet de penser que les effets non perturbatifs corrigeant le mode dominant en $1/a_{\mathcal{D}}$ n’ont pas nécessairement besoin d’être très importants.

Cette analyse des données demande à être affinée, notamment par l’introduction des contraintes venant du fond de rayonnement cosmologique. Ceci est l’objet d’un travail en cours [177], dans lequel nous proposerons également une tentative de déduire, statistiquement, des données la présence réelle (ou non) d’un effet géométrique de la courbure variable.

Quatrième partie

Conclusion et perspectives

Chapitre 10

Conclusion

L'étude de l'Univers en tant qu'objet physique demande une attention particulière aux conditions de validité des théories et des modèles que l'on emploie. L'extrapolation sur de multiples ordres de grandeur des lois dont l'adéquation avec l'expérience est avérée dans notre environnement local doit être soumise à une inspection minutieuse et précautionneuse. En effet, la cosmologie, en tant qu'elle se fonde sur des observations astrophysiques, a ceci de particulier par rapport aux autres branches de la physique qu'elle a pour but de décrire et d'exprimer des lois pour un ensemble de phénomènes qui ne sont ni reproductibles, ni a fortiori contrôlables par une modification des conditions initiales et des paramètres : l'Univers est donné une fois pour toute dans l'état où il se trouve. C'est pourquoi la cosmologie doit s'appuyer, plus que toute autre démarche scientifique visant à une description de la nature, sur des expériences de pensée (au sens de la "gedanken experiment"), des simulations numériques et des idéalizations de son objet. Ce faisant, elle doit néanmoins se garder d'une démarche anthropocentrique, c'est-à-dire risquant de donner à l'observateur unique construisant la théorie cosmologique une place privilégiée¹ : sa quête doit être celle d'un corpus de lois décrivant l'Univers, et non l'Univers tel qu'il est vu par un observateur sur Terre aujourd'hui² ou tel qu'il peut être décrit à travers les lois valables ici et aujourd'hui. Le principe cosmologique fort qui sert de fondement au modèle standard friedmannien de la cosmologie est une idéalisation réalisant (à l'excès peut-être) un tel déplacement, puisque les lois cosmologiques qui en résultent donnent strictement les mêmes résultats pour tous les observateurs en tout point de l'espace-temps. Par contre l'extrapolation de la

¹Le lien entre cette notion de place privilégiée et l'observateur unique est le remplacement d'un ensemble d'expériences identiques, impossible en cosmologie, par une sorte de principe ergodique consistant à générer des observateurs virtuels identiques (du point de vue des lois) à l'observateur unique.

²Bien sûr, des lois générales décrivant l'Univers doivent être capables de déterminer comment un observateur sur Terre aujourd'hui voit l'Univers.

Relativité Générale, testée à l'échelle du système solaire, sur des échelles cosmologiques pose un certain problème de ce point de vue. Cette thèse s'inscrit dans cette démarche de construction d'un modèle cosmologique à partir des principes et de leur questionnement, avec l'objectif de rendre compte de l'Univers observé en évitant les écueils d'une description trop simplifiée qui cacherait l'essentiel de la richesse de l'objet-Univers dans un secteur sombre énigmatique. Les champs scalaires ont servi de guide et de moyen techniques à cette démarche, en tant que modèles les plus simples de modifications au scénario standard.

Les théories scalaire-tenseur de la gravité, qui font l'objet de la première étude menée au cours de cette thèse, constituent un cadre théorique puissant pour étudier la validité des lois gravitationnelles sur des échelles de temps et d'espace cosmologiques³, plus spécifiquement pour élucider le statut et la validité du principe d'équivalence. Nous n'avons considéré que le cas où le champ scalaire additionnel était couplé universellement aux champs de matière, restreignant par là même notre propos à d'éventuelles violations du principe d'équivalence fort. Cependant, les modifications ainsi apportées à la cosmologie sont déjà nombreuses. Nous avons vu que la dynamique cosmologique des théories scalaire-tenseur présentait, pour certains types de couplage, une convergence naturelle vers la Relativité Générale, permettant de rendre compte des tests de la gravitation dans le système solaire. Nous avons également esquissé une étude de cette dynamique en présence d'un potentiel d'auto-interaction, présence qui semble, tout en le préservant, complètement renouveler le mécanisme de convergence. Grâce à cette convergence dynamique vers la Relativité Générale au cours de l'histoire cosmologique, il est possible d'avoir une théorie de la gravitation qui dévie significativement de la Relativité Générale par le passé, par une violation du principe d'équivalence fort. Dans ce cas, le fait que la Relativité Générale soit bien testée aujourd'hui n'assure pas du tout qu'elle soit valable à tous les temps. Cette liberté nous a permis de proposer un scénario de nucléosynthèse primordiale alternatif dans lequel, bien que le rapport du nombre de baryons et du nombre de photons soit faible, l'abondance de ${}^7\text{Li}$ synthétisé est en accord avec les observations. La solution repose sur une variation rapide du couplage gravitationnel au cours de la nucléosynthèse, cette variation entraînant une modification du taux d'expansion durant cette période. Les observations nous renseignant sur l'état passé de l'Univers, telle la nucléosynthèse ne semblent donc pas privilégier une gravitation strictement décrite par la Relativité Générale à tout temps : si l'abondance de ${}^7\text{Li}$ observée est bien celle synthétisée au moment de la nucléosynthèse primordiale (c'est-à-dire si le ${}^7\text{Li}$ n'est

³L'étude des violations spatiales du principe d'équivalence n'a pas été abordé directement dans cet ouvrage, mais les quelques remarques sur la formation des structures en donnent une première approche sur laquelle nous reviendrons lorsque nous aborderons les perspectives de ce travail de thèse.

pas détruit par des processus stellaires), le modèle standard de la cosmologie est face à un problème, que la présence d'un champ scalaire explicitement couplé à la matière peut résoudre. En cela, l'abondance anormale du ${}^7\text{Li}$ peut apparaître comme un signe d'une modification de la gravité au moment de la nucléosynthèse primordiale. Si tel est le cas, une analyse détaillée de la structuration de l'Univers durant l'ère de matière s'impose. En effet, nous avons vu que les modifications les plus simples apportées au spectre de puissance de la matière et au spectre des anisotropies du fond de rayonnement par les théories scalaire-tenseur résolvant le problème du ${}^7\text{Li}$ ne sont pas décelables dans les données actuelles. Il faudra traiter l'ensemble du problème pour savoir si d'autres manifestations peuvent apparaître ; nous y reviendrons dans le chapitre ci-après consacré aux perspectives.

Dans la seconde étude à laquelle s'est attaché ce travail de thèse, nous avons tenté de construire des modèles génériques pour décrire les propriétés à grande échelle de l'Univers. Cela nous a naturellement mené à une inspection fine du principe cosmologique, et nous avons pu constater que son statut était plus délicat à comprendre que ne le laisse voir le modèle standard. En effet, comme l'Univers (tardif) est homogène aux grandes échelles tout en présentant une structure plus complexe aux petites échelles, la construction de modèle effectifs homogènes aux grandes échelles, que ce soit par des méthodes de flot inspirées du groupe de renormalisation ou par des moyennisations spatiales simples, fait apparaître que le modèle effectif est plus riche qu'un simple modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cela est à relier au fait que les opérations d'évolution de l'espace-temps et de moyennisation ne commutent pas entre elles. Les sources effectives supplémentaires (c'est-à-dire autres que la matière), appelées la backreaction, qui apparaissent alors traduisent la présence de fluctuations dans la distribution de matière et dans la géométrie, et couplent explicitement ces fluctuations à la courbure moyenne de l'espace, indiquant l'importance d'un traitement pleinement relativiste de ce phénomène.

L'étude de quelques solutions exactes a montré que cet effet de backreaction n'était pas trivialement négligeable. D'une part, les solutions en lois de puissance ont permis de replacer le modèle standard friedmannien dans un espace de solutions effectives homogènes, et de constater qu'il apparaissait comme un point-selle dans cet espace, si bien qu'il n'est pas dynamiquement favorisé par la structure de l'espace des configurations cosmologiques ; au contraire, sa validité serait plutôt une forme de "conspiration" cosmologique permettant l'annulation de tous les effets de backreaction. D'autre part, un calcul en théorie de perturbations friedmanniennes a permis de voir qu'au voisinage de ce point-selle, les perturbations mènent naturellement à un terme dominant dans la backreaction qui déstabilise le modèle et tend à éloigner la dynamique de son comportement friedmannien. On peut donc dire que la backreaction est réellement là dans les modèles homogènes de l'Univers.

Enfin, nous avons abordé le lien potentiel entre cette backreaction et le problème de l'énergie sombre. Il est en effet tentant de faire le lien entre un effet directement relié à la structuration de l'Univers, et le phénomène majeur de l'histoire tardive de l'Univers considéré comme homogène : l'énergie sombre. Cela permettrait en effet de résoudre le problème de coïncidence : comment se fait-il qu'accélération de l'expansion et structuration de l'Univers se produisent sensiblement aux mêmes époques ? L'étude d'un modèle-jouet à deux zones nous a permis de comprendre qu'une accélération effective du modèle homogène était reliée directement à la proportion de vides dans la distribution de matière, et nous avons vu, par l'intermédiaire du morphon, comment la backreaction pouvait offrir une origine physique simple à l'ensemble des champs scalaires (minimalement couplés) qui jouent le rôle de quintessence dans le modèle standard. Pour finir, nous avons initié une méthode pour rendre compte des données dans le cadre des cosmologies inhomogènes moyennées, en modifiant, non seulement la dynamique par les sources de backreaction, mais également la façon de calculer les distances, par une première prise en compte (approximative) des effets de courbure.

Les développements résumés ci-dessus, bien que parcellaires, permettent de mettre en lumière l'importance cruciale d'une réflexion sur les principes sous-tendant la cosmologie. Au moment où la quête de données de plus en plus précises et diversifiées nous permet d'avoir accès à une connaissance détaillée des phénomènes se déroulant dans l'Univers, on ne peut pas s'en tenir à un modèle paramétrique, fût-il excellent. Au contraire, il nous faut profiter de la qualité de ces observations pour améliorer notre compréhension de l'Univers, en questionnant sans cesse les approximations qui ont permis de développer nos anciens modèles. En espérant, modestement, jeter quelques faibles lumières sur les zones encore obscures de notre Univers.

Chapitre 11

Perspectives

Ce travail de thèse est un début ; début d'un parcours de recherche qui doit mener à préciser davantage les conséquences cosmologiques des scénarios étudiés. Dans cette optique, nous proposons ici quelques pistes qu'il faudra explorer dans la continuité des travaux présentés dans cet ouvrage.

Concernant les théorie scalaire-tenseur de la gravité, il reste tout d'abord à conclure clairement quant à l'influence du potentiel sur le mécanisme de convergence. D'autre part, une grande attention doit être donnée à l'étude détaillée de la formation des structures dans ces théories. L'influence des inhomogénéités du champ scalaire est mal connue et pourrait être cruciale, même à des échelles bien inférieures au rayon de Hubble (à cause du couplage explicite). Les simulations numériques, notamment, demandent à être sérieusement repensées afin d'inclure correctement cet effet. Par exemple, les conditions de virialisation des objets en présence d'un champ scalaire, par ailleurs intéressantes par elles-mêmes, doivent être éclaircies, afin que l'identification des structures dans les simulations soit correctes. L'utilisation de la structuration de l'Univers pour discriminer différents modèles d'énergie sombre qui sont dégénérés sur les données des Supernovae est une question centrale, et le champ de compréhension de cette structuration dans les modèles incluant un champ scalaire est encore largement inexploré. Ce travail, à la fois analytique et numérique s'inscrit dans le prolongement direct de cette thèse.

Les cosmologies inhomogènes moyennées offrent également de nombreux prolongements nécessaires. Citons, par exemple :

- l'estimation de conditions initiales pour la backreaction à partir des anisotropies du fond de rayonnement cosmologique ;
- l'extension de la correspondance avec le morphon dans une ère dominée par un fluide ayant une pression (et le lien possible de cette backreaction avec des champs scalaires non minimalement couplés) afin d'étudier des modèles

inflationnaires générés par la backreaction, par exemple au début de l'ère dominée par la radiation

- le développement de méthodes d'estimation non perturbatives de la backreaction, comme le formalisme de Zeldovich relativiste ;
- la clarification de l'interprétation des données dans le contexte des modèles homogènes effectifs, à savoir le moyen de mesurer les distances effectives.
- la structure du cône de lumière moyenné, qui seul peut donner une information complète sur l'Univers observé ;
- la façon correcte d'implémenter et d'utiliser les simulations numériques en prenant en compte la backreaction.

Cette liste, non exhaustive, montre l'ampleur du travail à accomplir dans ce domaine.

Enfin, il faut noter que les deux parties de ces travaux, séparées ici à des fins de présentation, se recoupent parfois quant à leurs objectifs et leurs techniques, justifiant la nécessité de les mener de front.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Thermodynamique

L'objet de cet appendice est la présentation succincte de quelques résultats de thermodynamique à l'équilibre. Une étude détaillée des principes et des développements de la thermodynamique dans un espace en expansion peut être trouvée dans [38, 178].

La densité d'énergie, la pression et la densité numérique d'un gaz dilué de particules de masse m ayant g degrés de liberté internes sont données par :

$$\rho \equiv \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p \quad (\text{A.0.1})$$

$$p \equiv \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{\|\vec{p}\|^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}) d^3p \quad (\text{A.0.2})$$

$$n \equiv \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p, \quad (\text{A.0.3})$$

où $f(\vec{p})$ est la fonction de distribution dans l'espace des phases ; $E(\vec{p})$ est l'énergie relativiste d'une particule : $E^2 = \|\vec{p}\|^2 + m^2$. A l'équilibre cinétique, la fonction de distribution est simplement la distribution de Bose-Einstein pour des bosons de potentiel chimique μ à la température T :

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) - 1}, \quad (\text{A.0.4})$$

et la distribution de Fermi-Dirac pour des fermions de potentiel chimique μ à la température T :

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) + 1}. \quad (\text{A.0.5})$$

Ainsi, on a, en passant en coordonnées sphériques dans l'espace des phases :

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^{+\infty} \frac{E^2 \sqrt{E^2 - m^2}}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1} dE \quad (\text{A.0.6})$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^{+\infty} \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1} dE \quad (\text{A.0.7})$$

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^{+\infty} \frac{E \sqrt{E^2 - m^2}}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1} dE . \quad (\text{A.0.8})$$

Puis, en introduisant la variable $u \equiv E/T$:

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{+\infty} \frac{u^2 \sqrt{u^2 - (m/T)^2}}{\exp(u - \mu/T) \pm 1} du \quad (\text{A.0.9})$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{+\infty} \frac{(u^2 - (m/T)^2)^{3/2}}{\exp(u - \mu/T) \pm 1} du \quad (\text{A.0.10})$$

$$n = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2 - (m/T)^2}}{\exp(u - \mu/T) \pm 1} u du . \quad (\text{A.0.11})$$

Pour des particules relativistes, $T \gg m$, et l'on trouve immédiatement : $p_R = \rho_R/3$. Dans cette même limite, pour des photons, dont le nombre n'est pas conservé (penser aux réactions telles que le Brehmsstrahlung : $e^- + p \leftrightarrow e^- + p + \gamma$), le potentiel chimique est nul : $\mu = 0$, et :

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g T^4, \quad p_\gamma = \frac{\pi^2}{90} g T^4 \quad \text{et} \quad n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3; \quad (\text{A.0.12})$$

où $\zeta(3) \sim 1.202$ est la valeur de la fonction ζ de Riemann en 3. A l'inverse, pour des particules non relativistes, $T \ll m$, on a :

$$\rho_{NR} = m n_{NR} \quad (\text{A.0.13})$$

$$n_{NR} = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp(-(m - \mu)/T) \quad (\text{A.0.14})$$

$$p_{NR} = n_{NR} T \ll \rho . \quad (\text{A.0.15})$$

Pour terminer, introduisons l'entropie d'un domaine comobile S . La seconde loi de la thermodynamique s'écrit (on suppose, pour la simplicité que $\mu = 0$) :

$$TdS = d(\rho V) + pdV = d((\rho + p)V) - Vdp, \quad (\text{A.0.16})$$

où $V = a^3$ est le volume (a étant le facteur d'échelle, et le volume comobile étant pris égal à 1). La condition d'intégrabilité (relation de Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (\text{A.0.17})$$

permet d'écrire :

$$dp = \frac{\rho + p}{T} dT ; \quad (\text{A.0.18})$$

si bien que l'entropie obéit à :

$$dS = d \left(\frac{(\rho + p)V}{T} + cste \right) . \quad (\text{A.0.19})$$

S est donc donnée, à une constante près par :

$$S = \frac{a^3(\rho + p)}{T} . \quad (\text{A.0.20})$$

Grâce à la première loi, à l'équilibre thermique : $d((\rho + p)V) = Vdp$; on a donc :

$$dS = 0 . \quad (\text{A.0.21})$$

L'entropie d'un domaine comobile est donc conservée, pour des espèces à l'équilibre thermique. La densité d'entropie $s = S/V = (\rho + p)/T$ est dominée par les espèces relativistes, si bien que l'on a :

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g T^3 , \quad (\text{A.0.22})$$

g étant le nombre de degrés de liberté relativistes. L'expression (A.0.22) montre que la densité d'entropie s est proportionnelle à la densité numérique de particules relativistes. En particulier, si n_γ est la densité numérique de photons, on a :

$$s \sim 1.8gn_\gamma . \quad (\text{A.0.23})$$

C'est pourquoi l'on parle d'un Univers où le nombre de photons est très grand comme d'un Univers ayant une grande entropie.

Annexe B

Formalisme 3+1 de la Relativité Générale

Bien que la covariance soit un des piliers de la Relativité Générale, dans les situations où elle doit être appliquées, il est commode, afin de définir simplement les observables, de décomposer l'espace-temps et la dynamique suivant un ensemble d'hypersurfaces spatiales indicé par un paramètre affine jouant le rôle de dimension temporelle. La plupart des espace-temps présentant un intérêt astrophysique ou cosmologique permettent cette décomposition, dite décomposition 3+1. On trouvera une étude détaillée de ce formalisme dans les ouvrages classiques [2, 4, 5], ainsi que dans une très complète monographie d'Ericourgoulhon [153] faisant suite à un ensemble de cours donnés dans le cadre d'un trimestre de Relativité Générale à l'Institut Henri Poincaré à l'automne 2006.

On appelle surface de Cauchy une hypersurface spatiale Σ d'une variété différentiable \mathcal{M} telle que toute courbe causale (de genre temps ou nul) sans fin intersecte Σ en un point et un seul. Une variété $(\mathcal{M}, {}^{(4)}g_{\mu\nu})$ admettant une surface de Cauchy Σ est dite globalement hyperbolique. La topologie d'une telle variété est alors : $\mathcal{M} \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$. Tout espace-temps $(\mathcal{M}, {}^{(4)}g_{\mu\nu})$ globalement hyperbolique admet alors un feuilletage par une famille continue $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hypersurfaces spatiales, c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire réel t dont le gradient n'est jamais nul, et admettant pour surfaces de niveau les Σ_t , ces dernières couvrant l'ensemble de \mathcal{M} :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \exists ! t \in \mathbb{R}, p \in \Sigma_t . \quad (\text{B.0.1})$$

Dans la suite, on considérera un tel espace-temps globalement hyperbolique $(\mathcal{M}, {}^{(4)}g_{\mu\nu})$ feuilleté par une famille $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hypersurfaces spatiales. Afin de construire ces surfaces, on définit le champ de vecteurs de genre temps n^μ orthonormal à Σ_t , avec $n^\mu n_\mu = -1$. Le projecteur sur Σ_t , $h_{\mu\nu} = {}^{(4)}g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$, induit alors sur Σ_t une

métrique 3-dimensionnelle, dite première forme fondamentale de Σ_t :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, g_{ij} \equiv^{(4)} g_{\mu\nu} h_i^\mu h_j^\nu ; \quad (\text{B.0.2})$$

qui est telle que $g_{jk}g^{ki} = g_j^i = \delta_j^i$. On peut toujours écrire n^μ sous la forme :

$$n_\mu = (-N(x^\mu), \vec{0}) ; n^\mu = \frac{1}{N(x^\mu)}(1, -N^i(x^\mu)) , \quad (\text{B.0.3})$$

où $N(x^\mu)$ est appelée fonction lapse, et $N^i(x^\mu)$ vecteur shift. En notant $x^0 = t$, l'élément de longueur prend alors la forme suivante :

$$ds^2 \equiv^{(4)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2(t, x^k) dt^2 + g_{ij}(t, x^k) (dx^i + N^i(t, x^k) dt) (dx^j + N^j(t, x^k) dt) . \quad (\text{B.0.4})$$

Le choix de N et N^i est alors équivalent au choix des quatre coordonnées d'espace-temps. $N(x^\mu)dt$ est l'élément de temps propre entre Σ_t et Σ_{t+dt} , et $N^i(x^\mu)dt$ est le décalage dans la coordonnée x^i entre Σ_t et Σ_{t+dt} (le point coïncidant avec l'origine des coordonnées spatiales au temps t se trouvera en $-N^i dt$ sur l'hypersurface spatiale à l'instant $t + dt$) [4]. Le plongement des hypersurfaces $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans \mathcal{M} est caractérisé par la seconde forme fondamentale de ces hypersurfaces, K_{ij} [5, 153], définie par :

$$\forall (t, x^k) \in \mathbb{R} \times \Sigma_t, K_{ij}(t, x^k) \equiv -n_{\mu;\nu} h_i^\mu h_j^\nu = -n_{i;j}(t, x^k) . \quad (\text{B.0.5})$$

On peut alors écrire les équations d'Einstein (1.3.13) sous la forme dite Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [127] :

Contrainte hamiltonienne (ou d'énergie) :

$$\mathcal{R} - K_j^i K_i^j + K^2 = 16\pi G \epsilon + 2\Lambda \text{ où } \epsilon \equiv T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu ; \quad (\text{B.0.6})$$

Contraintes de moment :

$$\nabla_i K_j^i - \nabla_j K = 8\pi G J_j \text{ où } J_i \equiv -T_{\mu\nu} n^\mu h_i^\nu ; \quad (\text{B.0.7})$$

Equation d'évolution de la première forme fondamentale :

$$\frac{1}{N} \partial_t g_{ij} = -2K_{ij} + \frac{1}{N} (\nabla_j N_i + \nabla_i N_j) ; \quad (\text{B.0.8})$$

Equation d'évolution de la seconde forme fondamentale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \partial_t K_j^i &= \mathcal{R}_j^i + K K_j^i - \Lambda \delta_j^i - \frac{1}{N} \nabla^i \nabla_j N + \frac{1}{N} (K_k^i \nabla_j N^k - K_j^k \nabla_k N^i + N^k \nabla_k K_j^i) \\ &\quad - 8\pi G \left(S_j^i + \frac{1}{2} (\epsilon - S_k^k) \delta_j^i \right) \\ \text{où } S_{ij} &\equiv T_{\mu\nu} h_i^\mu h_j^\nu . \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

Pour alléger les notations, on a défini : $K \equiv K_i^i$, \mathcal{R}_{ij} le tenseur de Ricci de la métrique spatiale g_{ij} , et $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_j^j$ sa trace. Les noms de ces équations viennent de ce que les équations (B.0.8) et (B.0.9) suffisent à déterminer la métrique $^{(4)}g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps, dans le cadre d'un problème de Cauchy bien posé. Les équations (B.0.6) et (B.0.7) quant à elles, apparaissent comme des contraintes sur les conditions initiales du problème de Cauchy ; étant vérifiées pour les conditions initiales, elles le sont automatiquement pour tout temps t ultérieur grâce aux identités de Bianchi. On pourra se reporter à [153] pour une discussion claire de ce problème de Cauchy. Dans cet ouvrage, nous serons particulièrement intéressés par ce système d'équations exprimé dans des coordonnées simples, pour lesquels $N^i \equiv 0$. Si l'on voit n^μ comme la quadri-vitesse d'un observateur, ces coordonnées correspondent à un système dans lequel un tel observateur est au repos dans les hypersurfaces spatiales, c'est-à-dire à un observateur lagrangien, dont les coordonnées spatiales sont constantes. Cela revient à introduire des coordonnées gaussiennes X^k sur la variété Σ_t pour tout t :

$$ds^2 = -N^2(t, X^k)dt^2 + g_{ij}(t, X^k)dX^i dX^j . \quad (\text{B.0.10})$$

Les équations ADM (B.0.6) à (B.0.9) s'écrivent alors :

$$\mathcal{R} - K_j^i K_i^j + K^2 = 16\pi G\epsilon + 2\Lambda \quad (\text{B.0.11})$$

$$\nabla_i K_j^i - \nabla_j K = 8\pi G J_j \quad (\text{B.0.12})$$

$$\frac{1}{N} \partial_t g_{ij} = -2K_{ij} \quad (\text{B.0.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \partial_t K_j^i &= \mathcal{R}_j^i + K K_j^i - \Lambda \delta_j^i - \frac{1}{N} \nabla^i \nabla_j N \\ &\quad - 8\pi G \left(S_j^i + \frac{1}{2} (\epsilon - S_k^k) \delta_j^i \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

Annexe C

Articles

Cet article est paru dans *Astrophys. J.* **658** (2006) 1.

Big Bang nucleosynthesis in scalar tensor gravity : the key problem of the primordial ${}^7\text{Li}$ abundance

Julien Larena, and Jean-Michel Alimi, and Arturo Serna.

Combined with other CMB experiments, the WMAP survey provides an accurate estimate of the baryon density of the Universe. In the framework of the standard Big Bang Nucleosynthesis (BBN), such a baryon density leads to predictions for the primordial abundances of ${}^4\text{He}$ and D in good agreement with observations. However, it also leads to a significant discrepancy between the predicted and observed primordial abundance of ${}^7\text{Li}$. Such a discrepancy is often termed as 'the lithium problem'. In this paper, we analyze this problem in the framework of scalar-tensor theories of gravity. It is shown that an expansion of the Universe slightly slower than in General Relativity before BBN, but faster during BBN, solves the lithium problem and leads to ${}^4\text{He}$ and D primordial abundances consistent with the observational constraints. This kind of behavior is obtained in numerous scalar-tensor models, both with and without a self-interaction potential for the scalar field. In models with a self-interacting scalar field, the convergence towards General Relativity is ensured without any condition, thanks to an attraction mechanism which starts to work during the radiation-dominated epoch.

Keywords : nucleosynthesis ; cosmology : theory ; cosmology : early universe.

Introduction

The Big Bang Nucleosynthesis prediction for the ${}^4\text{He}$ primordial abundance is traditionally considered as a good estimate of the baryon density of the Universe. However, the recent measurement of the Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies by WMAP [179] now provides, when combined with other CMB experiments (CBI and ACBAR), another accurate estimate of the baryon density : $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009$ (or $\eta \times 10^{10} = 6.14 \pm 0.25$ in terms of the baryon to photon ratio) [89]. This value of η can be used to compute the primordial abundances of light elements (mainly ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$, D and ${}^7\text{Li}$). The comparison of predicted and observed abundances is then a way to test the concordance between BBN and the CMB data.

When one assumes the WMAP estimate of the baryon to photon ratio, the primordial abundances predicted by the standard BBN (i.e. three families of light neutrinos, a neutron mean life $\tau_n = 885.7 \pm 0.8s$, gravitation described by General

Relativity and a homogeneous and isotropic Universe) are [180] :

$$\begin{aligned} Y_p &= 0.2484_{-0.0005}^{+0.0004} \\ D/H &= 2.75_{-0.19}^{+0.24} \times 10^{-5} \\ {}^7\text{Li}/H &= 3.82_{-0.60}^{+0.73} \times 10^{-10} \end{aligned}$$

while the observed abundances are :

$$\begin{aligned} Y_p &= \begin{cases} 0.2391 \pm 0.0020 & \text{ref. [91]} \\ 0.2452 \pm 0.0015 & \text{ref. [92]} \end{cases} \\ D/H &= 2.78_{-0.38}^{+0.44} \times 10^{-5} \text{ ref. [93]} \\ {}^7\text{Li}/H &= \begin{cases} 1.23_{-0.32}^{+0.68} \times 10^{-10} & \text{ref. [181]} \\ 2.19_{-0.38}^{+0.46} \times 10^{-10} & \text{ref. [95]}. \end{cases} \end{aligned} \tag{C.0.1}$$

Here, the two values for the observed Y_p correspond to independent estimates in refs. [91] and [92] based on observations of metal-poor extragalactic ionized hydrogen regions. The D abundance is determined by observations of remote cosmological clouds on the line of sight of high redshift quasars. Finally the ${}^7\text{Li}/H$ estimate of [181] has been performed by observing halo stars, while the value of [95] comes from the observation of stars in the globular cluster NGC 6397. Although some recent estimates [182] leads to a somewhat smaller value, several other independent determinations [94, 183, 184] obtain observed primordial abundances of ${}^7\text{Li}/H$ similar to those reported either by [181] or [95].

We can see a relatively good agreement for the predicted and observed abundances of ${}^4\text{He}$ and D, but a large discrepancy for ${}^7\text{Li}/H$. There had been many attempts to account for the low ${}^7\text{Li}$ abundance indicated by observations. The first and most conservative possibility is the existence of systematic uncertainties in the observational determination of the ${}^7\text{Li}$ abundance. However, such uncertainties are not large enough to solve the problem (see [181] and [95]). In the same way, the systematic study of uncertainties on the nuclear reaction rates performed in [97] indicates that these uncertainties cannot explain the large discrepancy emphasized before. Modifications of the standard nucleosynthesis scenario then arise as possible ways to reconcile the predictions with the observations. Inhomogeneous nucleosynthesis has been analyzed [98] but overproduces ${}^7\text{Li}$. Late particles decays can deplete ${}^7\text{Li}$, but they cannot account for the observed D and D/ ${}^3\text{He}$ primordial abundances [99, 100, 101]; another possibility is provided by the creation of baryons after BBN, accompanied by a lepton asymmetry before BBN, the two processes arising from Q-balls [102].

In this work, we will address the lithium abundance problem in the framework of scalar-tensor theories of gravity [68, 185, 186, 187]. In these theories, gravitation is modified by the introduction of a scalar degree of freedom, which does not affect

the standard nuclear and particle physics. Such modifications arise as low-energy limits of superstrings theories [71, 72] and they provide a way to change the expansion history of the Universe with minimal assumptions. We will show that such theories contain a mechanism that could be responsible for a low lithium abundance, despite the high baryon to photon ratio implied by the WMAP estimate. Big Bang Nucleosynthesis in the context of a scalar-tensor cosmology has been extensively studied in the past [188, 189, 79, 86, 80, 190, 88], but the main goal of these works was to constrain the parameters of the theory thanks to the primordial abundances of ^4He , D and ^7Li , or to obtain the observed abundances with a matter density of the Universe different from its commonly assumed value. Moreover, general self-interacting scalar fields were not considered and, as we will see later, the introduction of such terms in the lagrangian can provide the mechanism necessary to explain the low ^7Li abundance.

The paper is arranged as follows. In the first section, the scalar-tensor gravity theories and the implied cosmological models are presented. Then, in the second section, we analyze the lithium problem in the framework of different kinds of scalar tensor theories. We show that the solution of this problem requires a non trivial dynamics for the scalar field at the epoch of BBN. Finally, we discuss the generality of that solution.

Scalar-tensor cosmological model

Equations and observable quantities

In scalar-tensor theories of gravity, the dynamics of the Universe contains a new scalar degree of freedom that couples explicitly to the energy content of the Universe. In units of $c = 1$, the action generically writes, in the Einstein frame :

$$S = \frac{1}{4\pi G_*} \int \left(\frac{R^*}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi^{\mu} - V(\varphi) \right) \sqrt{-g^*} d^4x + S_m(\psi_m, A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^*), \quad (\text{C.0.2})$$

G_* being a bare gravitational constant, φ the scalar field, $V(\varphi)$ its self-interaction term and $A(\varphi)$ its coupling to matter. The functional $S_m(\psi_m, A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^*)$ stands for the action of any field ψ_m that contributes to the energy content of the Universe. It expresses the fact that all these fields couple universally to a conformal metric $g_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^*$, then implying that the weak equivalence principle (local universality of free fall for non-gravitationally bound objects) holds in this class of theories. The metric $g_{\mu\nu}$ defines the Dicke-Jordan frame, in which standard rods and clocks can be used to make measurements (since in this frame, the matter

part of the action acquires its standard form). Defining

$$\alpha(\varphi) = \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi}, \quad (\text{C.0.3})$$

and considering the transformations :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^* \\ \phi &= A^{-2}(\varphi) \\ U(\phi) &= 2A^4(\varphi)V(\varphi) \\ |3 + 2\omega(\phi)| &= \alpha^{-2}(\varphi) \end{aligned}$$

the action in the Dicke-Jordan frame writes :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G_*} \int \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - U(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &+ S_m(\psi_m, g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

Despite the conformal relation, these two frames have a different status : in the Dicke-Jordan frame, where the gravitational degrees of freedom are mixed, the lagrangian for the matter fields does not contain explicitly the new scalar field : the non gravitational physics has then its standard form. In the Einstein frame, the scalar degree of freedom explicitly couples to the matter fields, then leading for example to the variation of the inertial masses of point-like particles. Of course, the two frames describe the same physical world. Nevertheless, the usual interpretation of the observable quantities is profoundly modified in the Einstein frame, whereas it holds in the Dicke-Jordan frame, where the rods and clocks made with matter are not affected by the presence of the scalar field. That is why we will refer to the Dicke-Jordan frame as the observable one.

Varying the Einstein frame action (C.0.2) with respect to the fields yields the equations :

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2}R^*g_{\mu\nu}^* = 8\pi G_*T_{\mu\nu}^* + T_{\mu\nu}^\varphi \quad (\text{C.0.5})$$

$$\square^*\varphi = -4\pi G_*\alpha(\varphi)T_* + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \quad (\text{C.0.6})$$

$$\nabla_\nu^*T_{*\mu}^\nu = \alpha(\varphi)T_*\nabla_\mu^*\varphi \quad (\text{C.0.7})$$

where T_* is the trace of the energy-momentum tensor of matter fields $T_{*\mu\nu}$, related to the observable one by $T_{\mu\nu} = A^{-2}(\varphi)T_{*\mu\nu}$, and $T_{\mu\nu}^\varphi = 2\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - g_{\mu\nu}^*(g_*^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta) - 2V(\varphi)g_{\mu\nu}^*$ is the energy-momentum tensor of the scalar field. It is important to note that these equations reduces to those of General Relativity in presence of a scalar field if $\alpha(\varphi) = 0$.

Except when the contrary is explicitly stated, all the computations presented in this paper have been performed in the Einstein frame, because it leads to well posed Cauchy problems (that is elliptic and/or hyperbolic equations with a set of initial conditions) and has a perfectly regular dynamics. Nevertheless, the cosmological evolution resulting from these computations was later expressed in the Dicke-Jordan frame, where the interpretation of the observable quantities is easier.

Homogeneous and isotropic Universe

Under the assumption of a Universe filled with various homogeneous and isotropic matter fluids, the metric reduces to the Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) form in the observable Dicke-Jordan frame :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)dl^2 \\ dl^2 &= \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \end{aligned}$$

and, also in the Einstein frame because of the conformal relation :

$$ds_*^2 = -dt_*^2 + a_*^2(t_*)dl^2$$

with $dt = A(\varphi(t_*))dt_*$ and $a(t) = A(\varphi(t_*))a_*(t_*)$.

Then, defining $H_* = (1/a_*)(da_*/dt_*)$, the fields equations (C.0.5) become :

$$H_*^2 = \frac{8\pi G_* \rho_*}{3} + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}V(\varphi) - \frac{k}{a_*^2(t_*)} \quad (\text{C.0.8})$$

$$-3\frac{\ddot{a}_*}{a_*} = 4\pi G_*(\rho_* + 3p_*) + 2\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi) \quad (\text{C.0.9})$$

$$\ddot{\varphi} + 3H_*\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = -4\pi G_*\alpha(\varphi)(\rho_* - 3p_*) \quad (\text{C.0.10})$$

where dots denote derivatives with respect to t_* , whereas ρ_* and p_* are the total mass-energy density and pressure, respectively. They are conformally related to the energy density ρ and the pressure p in the Jordan frame by $\rho_* = A^4(\varphi)\rho$ and $p_* = A^4(\varphi)p$. The observable Hubble parameter $H(t)$ is related to the Einstein frame quantities by

$$H(t) = \frac{1}{A(\varphi)}(H_*(t_*) + \alpha(\varphi(t_*))\dot{\varphi}(t_*)) \quad (\text{C.0.11})$$

Dynamics of the scalar field

In the form given above, the time evolution of the scalar field is coupled, both in the Dicke-Jordan and the Einstein frame, to that of the scale factor. Previous works

[80, 77] have found that, by introducing an appropriate change of variables, it is possible to obtain an evolution equation for the scalar field which is independent of the cosmic scale factor. Such an equation allows for the dynamical analysis of any scalar tensor theory and, in particular, its asymptotic behavior at early and late times. When the latter behavior implies a convergence mechanism towards General Relativity, one can ensure that the Solar System constraints will be satisfied. We will now extend such previous works to the general case of scalar-tensor theories with a self-interaction term.

Introducing a new evolution parameter $\lambda = \ln a_* + \text{const}$, so that $d\lambda = H_* dt_*$, and denoting $u' = du/d\lambda$, the evolution equations (C.0.8)-(C.0.10) lead to :

$$\begin{aligned} \frac{2(1 - \epsilon + \eta)}{3 - \varphi'^2} \varphi'' + (1 - w_b - \frac{4}{3}\epsilon + 2\eta)\varphi' \\ = -\Theta - (1 - 3w_b)\alpha(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{C.0.12})$$

where

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= \frac{3k}{8\pi G_* \rho_*(\lambda) a_*^2(\lambda)} \\ \eta(\varphi, \lambda) &= \frac{V(\varphi)}{4\pi G_* \rho_*(\lambda)} \\ w_b &= \frac{p_*}{\rho_*} \\ \Theta(\varphi, \lambda) &= \frac{\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}}{4\pi G_* \rho_*(\lambda)} \end{aligned}$$

This equation is similar, but not equivalent, to the motion equation of a mechanical oscillator with a varying "mass" $m_{eff} = 2(1 - \epsilon + \eta)/(3 - \varphi'^2)$, a varying "friction" $\nu_{eff} = (1 - w_b - 4\epsilon/3 + 2\eta)$ and a "force" term $F_{eff} = -\Theta - (1 - 3w_b)\alpha$. Then, one can define an effective potential $V_{eff}(\varphi, \lambda)$ that verifies the relation :

$$\frac{\partial V_{eff}(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} = \Theta(\varphi, \lambda) + (1 - 3w_b)\alpha(\varphi) \quad (\text{C.0.13})$$

In the following, we will only consider flat cosmologies ($\epsilon = 0$). In these cases, the "friction" term $(1 - w_b + 2\eta)$ is always positive, and the dynamics of the scalar field is then analogous to a damped oscillating motion in the effective potential $V_{eff}(\varphi, \lambda)$. Such an effective potential (see Eq. (C.0.13)) presents two different parts : a term due to the coupling function $\alpha(\varphi)$ and another term due to the self-interaction $V(\varphi)$ of the scalar field.

During the matter-dominated era ($w_b = 0$), both terms are important to determine the effective potential. The minima of V_{eff} will be attractors for the dynamics

of the scalar field and determine the behavior of the theory at late times. Consequently, if the relativistic value $\varphi = 0$ is a minimum of this effective potential, the theory will converge towards General Relativity.

Instead, during the radiation-dominated era ($w_b = 1/3$), the only non-vanishing contribution to the effective potential is that due the self-interaction of the scalar field. Equation (C.0.12) then reduces to :

$$\frac{2(1+\eta)}{3-\varphi'^2}\varphi'' + \frac{2}{3}(1+3\eta)\varphi' = -\Theta \quad (\text{C.0.14})$$

At very early times, when ρ_* is very high, $\Theta \sim \eta \sim 0$ so that self-interaction has a negligible effect on the scalar field dynamics. In this case ($\Theta \sim \eta \sim 0$), the integration of equation (C.0.14) gives :

$$\varphi'^2 = \frac{3k^2}{e^{2\lambda} + k^2} \quad (\text{C.0.15})$$

where k is a constant related to the value of φ' at $\lambda = 0$ through $k^2 = \varphi_0'^2/(3-\varphi_0'^2)$. Note that the above equation implies that $-\sqrt{3} < \varphi' < \sqrt{3}$.

One can see from equation (C.0.15) that the velocity of the scalar field exponentially decreases with λ at very early times. When the initial ($\lambda = 0$) velocity is not very high (i.e., when it is not close to $\sqrt{3}$), one can assume that the scalar field reaches the epochs of interest (those prior to BBN processes) with an almost vanishing velocity :

$$\varphi' = 0 \quad (\text{before BBN}). \quad (\text{C.0.16})$$

For the sake of simplicity, we will consider throughout this paper a vanishing initial value of the scalar field velocity (see the Appendix for some examples where such a condition has been relaxed). Hereafter, all quantities at this initial time (prior to BBN) will be expressed with a subscript 'init'.

The condition (C.0.16) does not however imply a constant φ value during the whole radiation-dominated epoch. Since ρ_* is a decreasing function of λ , the contribution of $V(\varphi)$ to the effective potential will become non-negligible at some 'time' λ . If $V(\varphi)$ is chosen to be a function having a minimum at φ_m , the scalar field will start to be attracted towards φ_m . For example, the simple choice of a power law $V(\varphi) \propto \varphi^{2n}$ for the self-interaction term, will imply an attraction mechanism towards General Relativity which starts to work during the radiation-dominated epoch.

BBN in scalar-tensor theories

We will now analyze the BBN processes, and the resulting primordial abundances, in the framework of scalar-tensor theories both with and without a self-interaction term. As stated above, we will consider throughout this section that the

initial value of the scalar field is a free parameter, while its initial velocity is fixed to $\dot{\varphi}_{init} = 0$. The initial values of the remaining variables are chosen so that they imply a flat Universe and lead, at the present temperature $T_0 = 2.725$, to cosmological parameters given by : $\Omega_{m,0} = 0.27$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.73$ and $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. We assume an standard particle content of the Universe, with three families of light neutrinos, and the WMAP estimate of the present baryon to photon ratio ($\eta \times 10^{10} = 6.14 \pm 0.25$).

The numerical computation consists of two main parts : first, we use a sixth-order Runge-Kutta integrator to fully determine the cosmological model and, in particular, the evolution of the expansion rate. Once determined the cosmological evolution in a given gravitational theory, we compute the BBN processes and the resulting primordial abundances of light elements thanks to a complex network of 28 nuclear reactions, and using the Beaudet and Yahil scheme [37]. We used the reaction rates of [103] and [104] and the updated reaction rates of the NACRE collaboration [105]. The only aspect that differs from the standard BBN in General Relativity is the expansion rate of the Universe. It impacts on the various nuclear abundances because they are determined by many reactions whose efficiency depends on the ratio of the reaction rates Γ_i and the expansion rate H . Indeed, a reaction with rate Γ_i is in equilibrium when $\Gamma_i/H > 1$, whereas the reaction is frozen when $\Gamma_i/H < 1$. This is directly linked with the fact that the expansion dilutes the particles. Then, a modification in the expansion history may significantly change the nuclear abundances by modifying the dynamical structure of the network of reactions, making some reactions more efficient, and limiting others (it should be noted that this remark is valid for the nuclear reaction rates, and also for the rates of the weak interaction processes that take place before BBN and that interconvert neutrons and protons).

In order to characterize the deviation from General Relativity, it is convenient to introduce the speed-up factor, defined as the ratio between the expansion rate $H(T)$ and the corresponding expansion rate in General Relativity $H_{GR}(T)$ at the same temperature :

$$\xi(T) = \frac{H(T)}{H_{GR}(T)} \quad (\text{C.0.17})$$

When $\xi(T) > 1$ ($\xi(T) < 1$), the Universe expands faster (slower) than in General Relativity at the temperature T .

Theories without a self-interaction term

We will first consider the simplest case of scalar-tensor models without a self-interaction term. In this case, the effective potential during the radiation-

dominated epoch is (see equation (C.0.13)) :

$$V_{eff}(\varphi) = 0 \quad (\text{C.0.18})$$

and, since we are assuming the initial condition (C.0.16), the scalar field will be frozen to its initial value φ_{init} (except for a slight temporary perturbation during the annihilation of electrons and positrons around $T = 0.1$ MeV, when w_b slightly deviates from $1/3$). Consequently, $\dot{\varphi} = 0$ during all the BBN processes, and the relation (C.0.11) reduces to $H = H_*/A(\varphi_i)$. Introducing the expression (C.0.8) for H_* in this equation, we can write :

$$\begin{aligned} H(T) &= \sqrt{\frac{8\pi G_* A^2(\varphi_i)}{3} \rho} \\ &= A(\varphi_i) H_{GR}(T) \end{aligned} \quad (\text{C.0.19})$$

which implies $\xi \sim A(\varphi_i) = \text{constant}$.

Equation (C.0.19) shows that the dynamics of the Universe is the same as in General Relativity, but with an effective gravitational constant given by $G_{eff} = G_* A^2$, where $G_* = G_N$ is the usual Newtonian value ($G_N = 6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$). Cyburt [106] has determined the scaling of the various primordial abundances in terms of the physical constants. In particular, when the dynamics of the Universe is governed by General Relativity, the scaling with the effective gravitational constant is :

$$Y_p = 0.2484 \left(\frac{G_{eff}}{G_N} \right)^{0.35} \quad (\text{C.0.20})$$

$$\text{D/H} = 2.75 \left(\frac{G_{eff}}{G_N} \right)^{0.95} 10^{-5} \quad (\text{C.0.21})$$

$${}^3\text{He/H} = 8.65 \left(\frac{G_{eff}}{G_N} \right)^{0.34} 10^{-6} \quad (\text{C.0.22})$$

$${}^7\text{Li/H} = 3.82 \left(\frac{G_{eff}}{G_N} \right)^{-0.72} 10^{-10} \quad (\text{C.0.23})$$

Figure C.0.1 shows these abundances as functions of G_{eff}/G_N , as well as their observational constraints. One clearly notes from this figure that there is no consistent value for G_{eff}/G_N that can simultaneously account for all the observed abundances : the observed ${}^7\text{Li}$ primordial abundance requires $G_{eff}/G_N > 1.8$ while ${}^4\text{He}$ and D impose $G_{eff}/G_N \sim 1$.

Consequently, in absence of a self-interaction term, scalar-tensor theories with an arbitrary coupling function $\alpha(\varphi)$ (with $\dot{\varphi}_{init} = 0$) cannot constitute a solution for the lithium problem. The same conclusion can be found using the formulation of Kneller and Steigman [191]

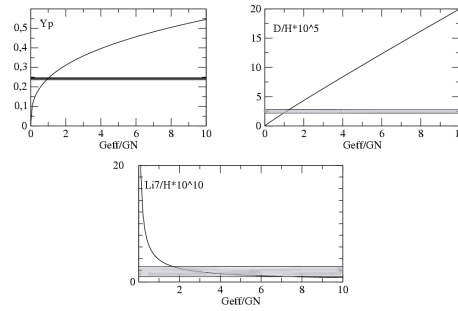


FIG. C.0.1 – Primordial abundances as functions of G_{eff}/G_N . The shaded regions are the assumed observed abundances.

Theories with a self-interaction term

We will now consider scalar-tensor models with a self-interaction term. As emphasized above, such a term acts as an effective potential even during the radiation-dominated epoch. Therefore, except for very early times (with a very high density), the scalar field does not remain frozen to its initial value and the speed-up factor is not necessarily a constant during the BBN processes.

Of course, depending on the functional form of $\alpha(\varphi)$ and $V(\varphi)$, there exist many theories that exhibit a varying speed-up factor. Before analyzing a particular choice for $\alpha(\varphi)$ and $V(\varphi)$, we may ask whether we can constrain the behavior of the speed-up factor in order to solve the ${}^7\text{Li}$ problem without affecting the other abundances.

Computation of the primordial abundances

Since essentially all the neutrons are incorporated into ${}^4\text{He}$ nuclei, the final production of ${}^4\text{He}$ is directly related to the abundance of neutrons in epochs prior to the BBN processes. Indeed, Y_p is roughly given by

$$Y_p \simeq \frac{2(n/p)_{fr}}{1 + (n/p)_{fr}} \quad (\text{C.0.24})$$

where $(n/p)_{fr}$ denotes the neutron to proton ratio when their weak reactions, $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ and $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$, freeze out of equilibrium. Such a ratio is then fixed at a temperature T_{fr} of about 1 MeV, well before the synthesis of light elements (from ~ 100 KeV to ~ 10 KeV). The $(n/p)_{fr}$ ratio, and hence the final Y_p value, strongly depends on T_{fr} through :

$$(n/p)_{fr} = \exp(-Q/T_{fr}) \quad (\text{C.0.25})$$

where Q is the difference between the neutron and proton masses. A faster (slower) expansion rate of the Universe implies a higher (lower) freezing-out temperature, resulting in higher (lower) neutron and ${}^4\text{He}$ abundances.

The ${}^7\text{Li}$ production is instead determined by the processes of BBN. In particular, when the baryon to photon ratio is greater than 3×10^{-10} , the lithium is mainly produced through the reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ followed by a decay of ${}^7\text{Be}$ through electron captures (when $\eta < 3 \times 10^{-10}$, the lithium is instead produced by ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$). Therefore, the final abundance of lithium strongly depends on both the helium production and the efficiency of the ${}^4\text{He}$ burning to give ${}^7\text{Li}$. If Γ_i denotes the reaction rate, such an efficiency is given by $\Gamma_i/H = (\Gamma_i/H_{RG})/\xi(T)$, so that a faster (slower) expansion rate of the Universe during BBN implies a less (more) efficient production of ${}^7\text{Li}$.

Since General Relativity leads to a predicted Y_p value in agreement with observations, one can expect that any other gravity theory must imply a speed-up factor close to unity at $T \sim 1$ MeV, or slightly smaller than unity to favor a less efficient production of ${}^7\text{Li}$ without implying an over-production of ${}^4\text{He}$. Later, during the BBN processes, a speed-up factor that has significantly increased above unity could help to solve the lithium problem. Obviously, since any gravity theory must converge at late times towards General Relativity (in order to be compatible with Solar System experiments), the increase of the speed-up factor must stop at some time and, afterwards, it must approach unity. Therefore, models implying a constant or monotonic $\xi(T)$ function are not good candidates to solve the lithium problem. We will then restrict our analysis to self-interacting scalar-tensor theories satisfying the following two additional conditions : 1) they imply a speed-up factor with a local maximum (it is a non-monotonic function of T), 2) they have an attraction mechanism towards General Relativity.

The analysis of the early behavior of ξ is a complex problem, specially when $\dot{\varphi}$ starts to deviate from zero (see, e.g., [86, 78] for theories without a self-interaction term). Nevertheless, the first condition (non-monotonic ξ) is more easily satisfied in theories implying $\xi < 1$ at very early times (when $\dot{\varphi}_{init} \sim 0$ and the self interaction term is still negligible). Since $\xi \simeq A(\varphi)$ at such early times, the condition $\xi_{init} < 1$ implies $A(\varphi)_{init} < 1$. Taking into account equation (C.0.3), the simple choice of a power law $\alpha(\varphi) \propto \varphi^{2n}$ for the coupling function, will imply $\xi_{init} < 1$ provided that $\varphi_{init} < 0$. On the other hand, as quoted in the first section, a similar choice $V(\varphi) \propto \varphi^{2m}$ for the self interaction term, will imply the existence during the radiation-dominated epoch of an attraction mechanism towards General Relativity (ξ will not remain frozen to its initial value). Nevertheless, a self-interaction corresponding to $m = 1$, in other words, a simple mass term, is not a viable choice because the scalar field is not damped efficiently. In fact, by a simple dimensional analysis of equation (C.0.12), one can define a characteristic time for the friction : $\tau_{fric} = \frac{m_{eff}}{\nu_{eff}}$,

and a characteristic time for the dragging in the effective potential : $\tau_{drag} = \sqrt{\frac{m_{eff}}{|F_{eff}|}}$. When comparing the ratio $\frac{\tau_{drag}}{\tau_{fric}}$ for a model with $m \geq 2$ and a model with $m = 1$, if the constant coefficients are of the same order of magnitude (which is required by the fact that the self-interaction must play a role at temperatures relevant for BBN), one finds, when $\varphi \ll 1$ that :

$$\left(\frac{\tau_{drag}}{\tau_{fric}}\right)_{m \geq 2} > \left(\frac{\tau_{drag}}{\tau_{fric}}\right)_{m=1}$$

That means that the friction is less efficient in the case $m = 1$, when the scalar field has converged in a neighbourhood of 0. This is supported by numerical computations that show that the scalar field quickly reach a neighbourhood of 0, but is not damped enough during the radiation dominated era with a self-interaction of the type $V(\varphi) \propto \varphi^2$. In such a case, the energy contribution of the scalar field becomes more and more important until the beginning of the matter dominated era. Such models might eventually lead to a very different estimation of the baryon to photon ratio through CMB anisotropies, then invalidating the hypotheses at the basis of the computations presented in this paper.

In order to analyze the possible implications of scalar-tensor theories with a self-interaction term, we will adopt here the simple choice :

$$\alpha(\varphi) = a\varphi^2; \quad V(\varphi) = \Lambda^2\varphi^4 \quad (\text{C.0.26})$$

with $\dot{\varphi}_{init} = 0$ and $\varphi_{init} < 0$.

The effective potential for these theories writes :

$$V_{eff}(\varphi, \lambda) = (1 - 3w_b)\frac{a}{3}\varphi^3 + \frac{\Lambda^2\varphi^4}{4\pi G_*\rho_*(\lambda)}, \quad (\text{C.0.27})$$

which means that, during the radiation dominated period, $V_{eff}(\varphi, \lambda) = \Lambda^2\varphi^4/(4\pi G_*\rho_*)$, leading to an attraction towards 0 that is effective as soon as $\Lambda^2\varphi^4 \sim 4\pi G_*\rho_*(\lambda)$, or in other words, as soon as the energy density of the scalar field is of the same order as the energy density of radiation.

Using (C.0.26), and varying the parameters $(a, \Lambda, \varphi_{init})$, we have numerically computed the BBN processes and the resulting primordial abundances. We have found that all models with $-1.5 < \varphi_{init} < -0.9$ lead to primordial abundances that agree with all the observational constraints mentioned in the Introduction. Consequently, there is not a lithium problem for such models. The parameters a and Λ are not strongly constrained. The only requirement is that Λ should not be too small in order for the attraction mechanism described above to occur during BBN, at temperatures between 10 MeV and 1 MeV. Indeed, from equation (C.0.12), we know that the attraction mechanism approximately (when $|\varphi| \sim 1$)

occurs when $\Lambda^2 \sim G_* \rho_*(\lambda)$; for $1 \text{ MeV} < T < 10 \text{ MeV}$, which correspond to the period of BBN, since $\rho_*(\lambda) \propto (T/T_0)^4$, we are left with $\sim 0.1 \text{ s}^{-1} < \Lambda < \sim 6 \text{ s}^{-1}$.

To be more precise, we now present a special case by fixing the initial conditions to $\dot{\varphi}_{init} = 0$ and $\varphi_{init} = -1.3$. Figure (C.0.2) displays, in the (a, Λ) plane, the regions of theories leading to the observed primordial abundances. The constraints only come from the ${}^4\text{He}$ and D abundances, which means that the ${}^7\text{Li}$ abundance is in perfect agreement with the observations for a much wider range of parameters. The two separated regions correspond to the two different constraints imposed on the ${}^4\text{He}$ abundance [91, 92].

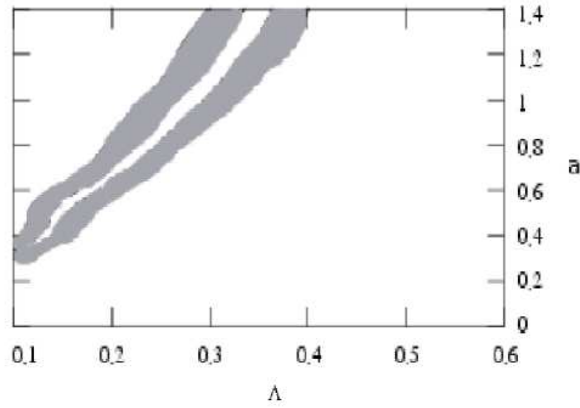


FIG. C.0.2 – Space of the parameters (a, Λ) for the theory defined by $\alpha(\varphi) = a\varphi^2$ and $V(\varphi) = \Lambda^2\varphi^4$ with fixed initial conditions : $\varphi_i = -1.3$ and $\dot{\varphi}_i = 0$. The acceptable theories are represented by the shaded regions.

The dynamics of the scalar field and of the speed-up factor are respectively shown in figures (C.0.3) and (C.0.4) for the particular choice $(a, \Lambda) = (1, 0.3 \text{ s}^{-1})$. In a first phase, the self-interaction plays no role and the field is almost constant until $T \sim 5 \text{ MeV}$, leading to an expansion slower than in General Relativity. Then, the φ^4 term starts to dominate the effective potential and attracts the scalar field towards zero. The expansion factor also oscillates and is driven to values greater than those obtained in General Relativity. The primordial abundances predicted in this case are $Y_p = 0.2449$, $\text{D}/\text{H} = 3.030 \times 10^{-5}$ and ${}^7\text{Li}/\text{H} = 2.387 \times 10^{-10}$, in agreement with observations.

The clues for the success of this kind of scalar-tensor theories in solving the lithium problem have been already advanced at the beginning of this subsection. The evolution of the (n/p) ratio, as well as that of the ${}^4\text{He}$ overproduction in the scalar-tensor model exemplified here, are shown in figure (C.0.5). As can be noticed

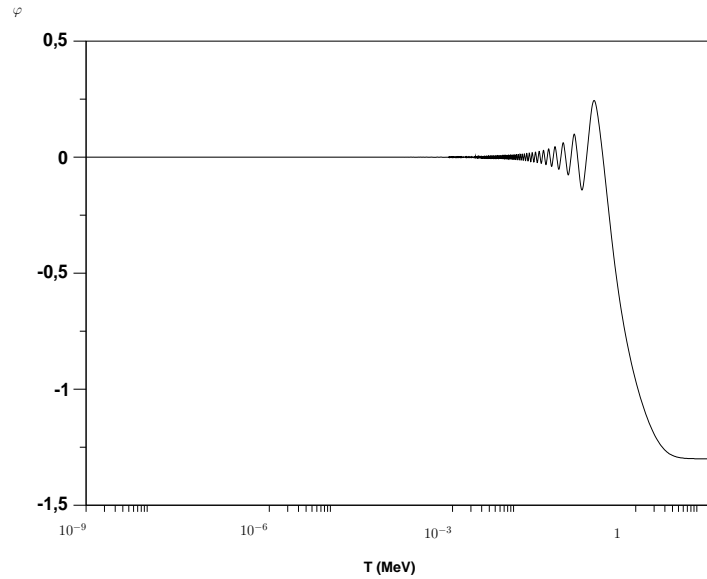


FIG. C.0.3 – Evolution of the scalar field φ during BBN for the scalar tensor theory defined by $\alpha(\varphi) = \varphi^2$ and $V(\varphi) = 0.3^2\varphi^4$ with $\varphi_i = -1.3$ and $\dot{\varphi}_i = 0$.

on that figure, the effect of the speed-up factor on the n/p ratio is an integrated effect at temperatures between a few MeV and a few hundreds of keV. The fact that the speed-up factor is less than 1 at temperatures higher than 1 MeV implies that the n/p ratio departs from thermal equilibrium slightly later than in General Relativity, and this effect is partly compensated by a speed-up factor greater than one after 1 MeV, resulting in a n/p ratio that decreases faster in General Relativity than in the scalar-tensor model between 1 MeV and 0.1 MeV. These two effects almost compensate each other and result in a n/p ratio at the beginning of BBN comparable in the two models, and so, in a ${}^4\text{He}$ abundance in the scalar-tensor model that is not very different from the one obtained in General Relativity. During the whole BBN period, the speed-up factor is instead significantly higher than unity. Then, the burning of ${}^4\text{He}$ to produce heavier elements is less efficient than in General Relativity, and the resulting final ${}^7\text{Li}$ abundance is low enough to be consistent with the observed value. Indeed, the reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ dominates the creation of ${}^7\text{Be}$ (and then of ${}^7\text{Li}$ by β -decay of ${}^7\text{Be}$) during BBN. Therefore, neglecting the destruction of ${}^7\text{Be}$ through the reaction ${}^7\text{Be}(n, p){}^7\text{Li}$ that is inefficient because of the low neutron abundance, a rough estimate of the final abundance of these elements can be obtained from $dY_{\text{Be}7}/dT = \Gamma Y_{\text{He}3} Y_{\text{He}4}/(TH)$ or, for small variations :

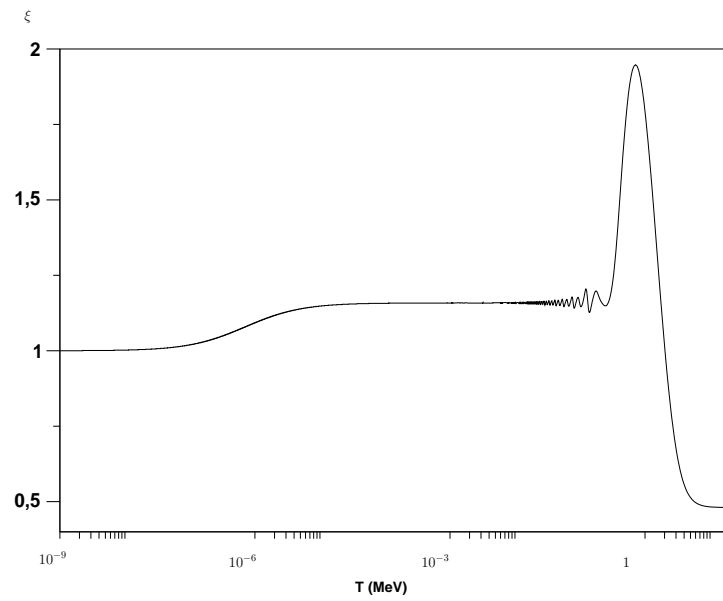


FIG. C.0.4 – Speed-up factor as a function of the temperature for the scalar tensor theory defined by $\alpha(\varphi) = \varphi^2$ and $V(\varphi) = 0.3^2\varphi^4$ with $\varphi_i = -1.3$ and $\dot{\varphi}_i = 0$. The speed-up factor converges towards 1 as soon as the matter-radiation equality is reached.

$$\Delta Y_{Be7} = \frac{\Gamma}{H} Y_{He3} Y_{He4} \Delta \ln T \quad (\text{C.0.28})$$

where Γ is the reaction rate of ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, while Y_{Be7} , Y_{He3} and Y_{He4} denote the abundances of ${}^7\text{Be}$, ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$, respectively.

The lower panel of figure C.0.5 shows the evolution of the ${}^7\text{Be}+{}^7\text{Li}$ abundance in this scalar-tensor model as well as in General Relativity (GR). It can be seen from this figure that both predictions start to significantly deviate only at temperatures smaller than 0.06 MeV, and reach their final constant values at about $T \sim 0.03$ MeV. By applying the equation (C.0.28) within such a small range of temperatures, we have :

$$\frac{\Delta Y_{Be}}{\Delta Y_{Be}^{GR}} \sim \xi^{-1} \frac{Y_{He3} Y_{He4}}{Y_{He3}^{GR} Y_{He4}^{GR}}, \quad (\text{C.0.29})$$

that also provides an estimate of the final Y_{Li7}/Y_{Li7}^{GR} ratio. At temperatures below 0.06 MeV, the abundances of ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$ are constant in both models, with $Y_{He3} \sim Y_{He3}^{GR}$ and $Y_{He4} \sim Y_{He4}^{GR}$, while the speed-up factor oscillates around $\xi \sim 1.16$. Therefore, equation (C.0.29) implies $Y_{Li7} \sim 0.8 Y_{Li7}^{GR}$, in rough agreement with our result obtained from the full integration of the nuclear reaction network : $Y_{Li7} = 0.74 Y_{Li7}^{GR}$.

Of course, other theories with a different coupling function and/or a different potential could have the same effect on the ${}^7\text{Li}$ abundance, provided that they lead to a speed-up factor with a time evolution similar to that found in the models analyzed in this section. As an example, the Appendix shows that, when the $\dot{\varphi}_{init} = 0$ condition is relaxed in scalar tensor theories without a self-interaction term (then, the convergence towards General Relativity is not ensured, and requires additional conditions), some of the resulting models can also solve the lithium problem. Therefore, the mechanism found here, based on a specific shape of the variation of the expansion rate during BBN, can be achieved in a great variety of scalar-tensor cosmological models.

Beyond BBN processes : effects on CMB and matter power spectrum

It is important to note that, in the analysis of the previous subsection, at the end of BBN, $\alpha(\varphi) < 10^{-5}$ and $A(\varphi) \sim 1$, so that $G_{eff}/G_N \sim 1$; moreover, $\alpha(\varphi)$ goes on decreasing because φ decreases, so that one can consider that gravitation is indistinguishable from General Relativity already at the end of BBN. Nevertheless, the scalar field still has a non negligible energy density, and consequently, the expansion rate is not the one of General Relativity with matter dust and radiation fluids, but receives an additional contribution from the scalar field energy density. This is why the speed-up factor is not immediately 1 but oscillates around a value

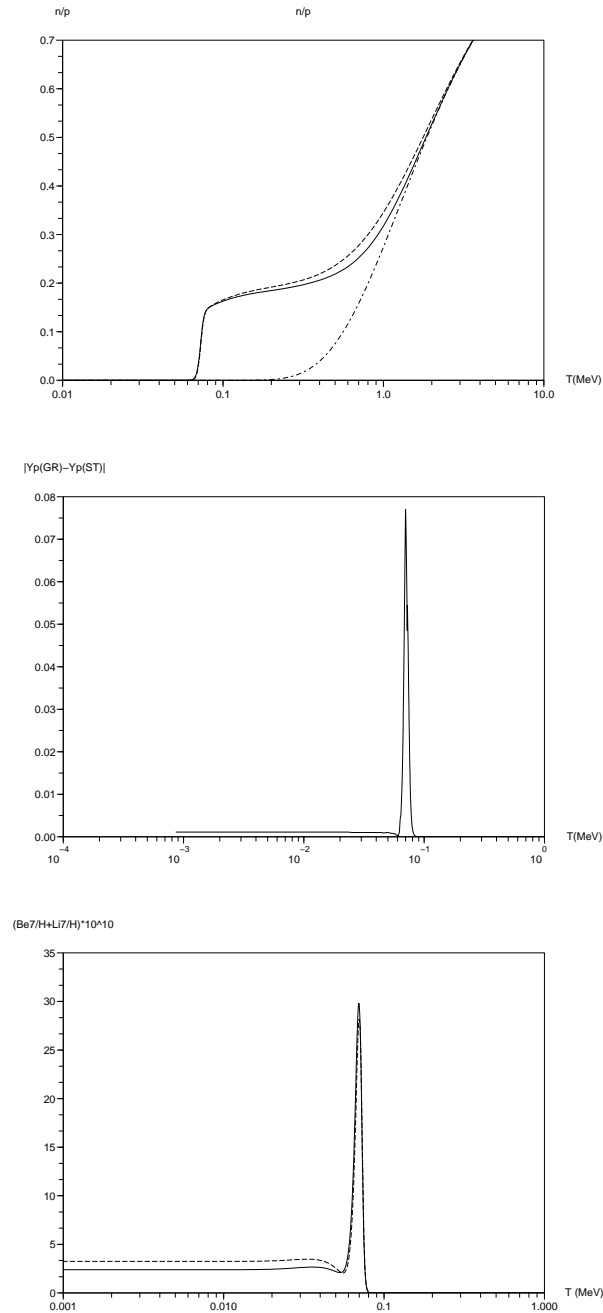


FIG. C.0.5 – Upper panel : Evolution of (n/p) as a function of the temperature in General Relativity (dashed line) and in the same model as in Figure C.0.4 (solid line). The dashed dotted line represents the (n/p) ratio at equilibrium. Medium panel : Evolution of the difference between ^4He abundances in General Relativity and in the same model as in Figure C.0.4. Lower panel : Evolution of the abundance of $^7\text{Be} + ^7\text{Li}$ as a function of temperature in General Relativity (dashed line) and in the same model as in Figure C.0.4 (solid line).

of 1.16 until the end of the radiation dominated era and converges towards 1 when dust matter begins to dominate. As a consequence, we expect that such a model will have some impact on observables such as the matter power spectrum or the CMB. This is actually the case, but, these impacts are really of a different nature than the ones that were previously investigated in the context of scalar-tensor theories [109, 63, 110, 111, 112] : these works address the effects of modification of gravity (mainly variations of the gravitational coupling) on the CMB and matter power spectrum. In the models presented in this paper, the variation of the gravitational coupling plays a very important role during BBN (as exemplified above), well before the matter dominated era, but at the epoch of matter-radiation equality, the gravitational coupling no longer significantly varies, and the scalar field behaves almost like a standard scalar field ($\alpha(\varphi) \sim 0$). Let's now consider the impact of our model on the matter power spectrum and on the CMB. The matter power spectrum turn-over is defined by the scale entering the Hubble horizon at the matter radiation equality (that is H_{eq}^{-1}) [113]. Since the expansion rate is slightly faster in the model presented here than in General Relativity at the time of equality, we expect a shift in the turn over given by [63] :

$$\frac{\delta k_T}{k_T} = - \left(\frac{\delta H^{-1}}{H^{-1}} \right)_{eq}, \quad (\text{C.0.30})$$

Which yields, if we define the speed-up factor at equality by ξ_{eq} :

$$\frac{\delta k_T}{k_T} = \xi_{eq} - 1. \quad (\text{C.0.31})$$

With $\xi_{eq} \sim 1.075$, one then has : $\delta k_T/k_T \sim 7.5\%$. This small shift is completely compatible with the current uncertainties on data [114].

The position of the first acoustic peak in the CMB power spectrum is also affected. The acoustic oscillations occur at an angular scale proportional to the size of the CMB sound horizon at decoupling and inversely proportional to the comoving distance between the observer and the last scattering surface. So, if one defines the conformal time :

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{C.0.32})$$

the multipole moment associated with the first peak is given by :

$$l_p \propto \frac{\tau_0 - \tau_{dec}}{\tau_0} \quad (\text{C.0.33})$$

where τ_0 is the conformal time of the observer (today), and τ_{dec} the conformal time at decoupling. Then the shift in the position of the first peak : $\delta l_p/l_p =$

$(l_p - l_p^{GR})/l_p^{GR}$ can be numerically inferred from the simulation. For the model presented above, one finds : $\delta l_p/l_p \sim 8\%$. This is a rather important shift [115], but it should be stressed that it depends strongly on the value of the expansion rate today, and that it has been assumed, to make a significant comparison that this expansion rate today was the same in the two models (General Relativistic cosmology and scalar-tensor cosmology). It is possible to play with the acceptable value of H_0 (that is to give different values of H_0 to the two models) to make this shift smaller.

Finally, one expects that the model presented above will lead to other distortions in the CMB power spectrum at small scales since the expansion rate is different from the one of General Relativity during the whole radiation dominated era, when the small scales (those smaller than the one of the firsts acoustic peak) are entering the sound horizon, but investigating these problem demands a detailed analysis of the CMB physics in this new context that is beyond the scope of this paper, and will be dealt with in a forthcoming paper.

Conclusion

In the framework of the standard BBN, the WMAP measurement of the baryon density of the Universe $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009$ leads to a serious discrepancy between the predicted and observed ${}^7\text{Li}$ abundance, even when systematic errors are cautiously taken into account. We addressed this problem by renewing the standard BBN scenario in a simple way : by considering that gravitation is described by a scalar-tensor theory. The expansion of the Universe during BBN is then modified, then modifying the conditions and the efficiency of nuclear reactions while assuming the standard nuclear physics. We showed that it is possible to obtain a small enough ${}^7\text{Li}$ abundance and, at the same time, to preserve the ${}^4\text{He}$ and D abundances thanks to a scalar-tensor theory of gravity with a non monotonic speed-up factor that has a generic behavior. The expansion must be similar to that found in General Relativity at $T \sim 1 - 2\text{MeV}$, so that the freezing-out temperature of the weak processes $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ and $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$ is also similar to that obtained in General Relativity, then leading to almost the same ${}^4\text{He}$ production. However, during BBN, the expansion must be faster than in General Relativity, making the reaction ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ less efficient to burn ${}^4\text{He}$ and to produce ${}^7\text{Li}$.

Consequently, the ${}^7\text{Li}$ abundance obtained for the baryon density inferred from WMAP could be a good imprint for the presence of a scalar field explicitly coupled to matter at the beginning of the Universe, challenging our understanding of the primordial Universe and the nature of gravity at early epochs. It could then be valuable to study the possible signatures of this scalar field in inflationary scenarios and to perform a detailed analysis of its impact on CMB physics and structure

formation.

Acknowledgments

We would like to thank Pr. G. Steigman for valuable comments on this work.

APPENDIX : Varying speed-up factor in theories without a self-interaction term

All the models analyzed in this paper starts from $\dot{\varphi}_{init} = 0$. As a consequence, in any theory without a self-interaction term, the scalar field has a constant value during the whole radiation-dominated period. Nevertheless, previous works [86, 78] have shown that, when the condition $\dot{\varphi}_{init} = 0$ is relaxed, many of these theories also imply a non-monotonic evolution of the speed-up factor. The convergence of these theories towards General Relativity has instead important differences with respect to that found for the models analyzed in this paper. In non-monotonic scalar-tensor theories without a self-interaction term, the convergence towards General Relativity is not ensured independently of the initial conditions.

One of the main conclusions of this paper is that the lithium problem can be solved in many scalar-tensor theories, defined by different coupling functions and/or different potentials, but implying an evolution of the speed-up factor with the same general properties as those found in the section dedicated to the theories with a self-interaction term. In this Appendix, we explore the impact on BBN of a theory defined, in the Dicke-Jordan frame, by

$$3 + 2\omega(\phi) = \frac{a}{|\phi - 1|} + b \quad (\text{C.0.34})$$

with $\phi_{init} > 1$ (this is a necessary condition for the speed-up factor to be less than unity at the beginning).

In the limit close to general relativity ($\phi \rightarrow 1$), the above theory leads [80, 190] to an Einstein frame formulation with $\alpha(\varphi) \propto |\varphi|^{1/2}$ and $\varphi_{init} < 0$. The effective potential defined in (C.0.13) then becomes

$$V_{eff}(\varphi) = \text{sgn}(\varphi) \frac{2(1 - 3w_b)}{3} |\varphi|^{\frac{3}{2}}, \quad (\text{C.0.35})$$

where $\text{sgn}(x) = -1, 0, 1$ if x is negative, zero or positive, respectively. This effective potential does not have a minimum, but a stationary point at $\varphi = 0$. So, if the scalar field does not have a high enough initial velocity, it will roll down its effective potential during the matter-dominated era, pushing the theory far from General

Relativity. Then, in these theories, one must give an initial velocity to the scalar field so that it can reach the opposite side of the stationary point 0 before the matter dominated era. In [77], it was shown that, during the radiation dominated era, the total displacement of the scalar fields is given by :

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{1 + \varphi'_i/\sqrt{3}}{1 - \varphi'_i/\sqrt{3}} \right) \quad (\text{C.0.36})$$

So that we can deduce the initial velocity necessary to reach 0, starting from φ_i . It is given by :

$$\varphi'_i = \sqrt{3} \frac{\exp(-2)\varphi_i/\sqrt{3} - 1}{1 + \exp(-2)\varphi_i/\sqrt{3}} \quad (\text{C.0.37})$$

that is always finite and bounded by $-\sqrt{3}$ and $\sqrt{3}$.

Since it is not possible to perform the analytical transformation (C.0.4) to find its exact form in the Einstein frame, the models defined by (C.0.34) have been integrated in the Dicke-Jordan frame. Moreover, the integration was performed backward in time, then replacing the initial condition on the scalar field by the present value of the coupling function $\omega(\phi)$. The present value of the derivative of the scalar field was fixed to zero.

By varying the three remaining parameters ($a, b, \omega(\phi_0)$), we identified the cosmological models that lead to the observed abundances of light elements. The results were not sensitive to $\omega(\phi_0)$ as long as $\omega(\phi_0)$ is sufficiently large to pass the Solar System tests. Then, restricting the analysis to the parameters a and b , the figure (C.0.6) shows (as shaded regions) the (a, b) couples leading to primordial abundances of ${}^4\text{He}$, D and ${}^7\text{Li}$ compatible with observations. Again, the two distinct admissible regions are related to the two different observations considered for the ${}^4\text{He}$ abundance [91, 92].

As an illustration of these theories, the figure (C.0.7) shows the evolution of speed-up factor corresponding to the particular choice $a = 4$, $b = 2.68$ and $\omega(\phi_0) = 10^{14}$. It exhibits the behavior we described previously in order to solve the lithium problem and to preserve the ${}^4\text{He}$ abundance. The predicted primordial abundances in this example were in fact : $Y_p = 0.2405$, $\text{D}/\text{H} = 2.871 \times 10^{-5}$ and ${}^7\text{Li}/\text{H} = 2.601 \times 10^{-10}$.

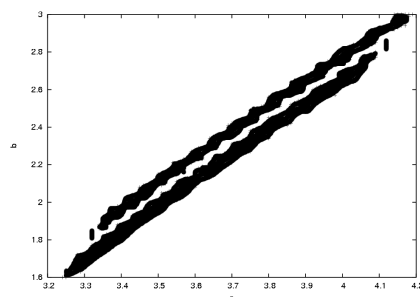


FIG. C.0.6 – Acceptable theories are represented by the shaded regions in the (a, b) plane, for $3 + 2\omega(\phi) = \frac{a}{|\phi-1|} + b$ in the Dicke-Jordan frame.

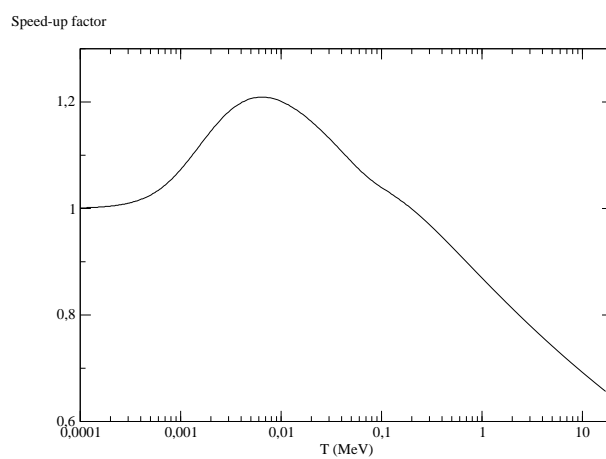


FIG. C.0.7 – Speed-up factor as a function of the temperature (in MeV) during BBN.

C.1 Article 2 : Intégrabilité des modèles de Bianchi

Cet article est paru dans *Class. Quantum Grav.* **24** (2007) 2901-2915.

Integrability of anisotropic and homogeneous Universes in scalar-tensor theory of gravitation

Julien Larena and Jérôme Pérez

In this paper, we develop a method based on the analysis of the Kovalewski exponents to study the integrability of anisotropic and homogeneous Universes. The formalism is developed in scalar-tensor gravity, the general relativistic case appearing as a special case of this larger framework. Then, depending on the rationality of the Kovalewski exponents, the different models, both in the vacuum and in presence of a barotropic matter fluid, are classified, and their integrability is discussed.

Greek indexes run from 0 to 4, Latin indexes run from 1 to 3 and ∇^μ indicates a covariant derivative.

Dynamical equations

Homogeneous spaces

The classification of homogeneous and anisotropic $3D$ spaces gives 11 different types of spaces associated to distinct families of structure group constants

$$C_{ab}^c = \varepsilon_{abd} N^{dc} + \delta_b^c A_a - \delta_a^c A_b \quad (\text{C.1.1})$$

where ε_{abd} is the usual totally antisymmetric unit tensor, δ_b^c the Kronecker symbol, N^{ab} is the contravariant component of an order 2 symmetric tensor, and the vector A must follows

$$N^{ab} A_b = N_{ab} A^b = 0. \quad (\text{C.1.2})$$

Without loss generality, one can write $N^{ab} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$ and $A_b = [a, 0, 0]$ provided that $an_1 = 0$. Distinct homogeneous and anisotropic spaces in $3D$ can then be classified in the following table :

	n_1	n_2	n_3	a	Name
0 is eigenvalue of N with multiplicity 3	0	0	0	0	B_I
	0	0	0	\forall	B_V
0 is eigenvalue of N with multiplicity 2	1	0	0	0	B_{II}
	0	1	0	\forall	B_{IV}
0 is eigenvalue of N with multiplicity 1	1	1	0	0	B_{VII_o}
	0	1	1	\forall	B_{VII_a}
	1	-1	0	0	B_{VI_o}
	0	1	-1	$\neq 1$	B_{VI_a}
	0	1	-1	1	B_{III}
0 is not an eigenvalue of N	1	1	1	0	B_{IX}
	1	1	-1	0	B_{VIII}

Note that each case is degenerate, for example $n_1 = -1, n_2 = 1, n_3 = -1$ and $a = 0$ is in the equivalence class of B_{IX} which contains all the possibilities with a positive signature and 0 out of the spectrum of N . This is the well known Bianchi classification (see [192],[193]).

Scalar-tensor theory of gravitation

In scalar-tensor theories of gravity, the dynamics of the Universe contains a new scalar degree of freedom that couples explicitly to the energy content of the Universe [68, 185, 187, 186, 73]. In units of $c = 1$, the action generically writes, in the so-called Einstein frame :

$$S = \frac{1}{4\pi G} \int \left(\frac{R}{4} - \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu} - U(\varphi) \right) \sqrt{-g} d^4x + S_m(\psi_m, \Theta^2(\varphi) g_{\mu\nu}), \quad (\text{C.1.3})$$

G being a bare gravitational constant, φ the scalar field, $U(\varphi)$ its self-interaction term and $\Theta(\varphi)$ its coupling to matter. The functional $S_m(\psi_m, \Theta^2(\varphi) g_{\mu\nu})$ stands for the action of any field ψ_m that contributes to the energy content of the Universe. It expresses the fact that all these fields couple universally to a conformal metric $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Theta^2(\varphi) g_{\mu\nu}$, then implying that the weak equivalence principle (local universality of free fall for non-gravitationally bound objects) holds in this class of theories. The metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ defines the Dicke-Jordan frame, in which standard rods and clocks can be used to make measurements (since in this frame, the matter part of the action acquires its standard form). Despite the conformal relation, these two frames have a different status : in the Dicke-Jordan frame, where the gravitational degrees of freedom are mixed, the Lagrangian for the matter fields does not contain explicitly the new scalar field : the non gravitational physics has then its standard form. In the Einstein frame, the scalar degree of freedom explicitly couples to the

matter fields, then leading for example to the variation of the inertial masses of point-like particles. Of course, the two frames describe the same physical world. Nevertheless, the usual interpretation of the observable quantities is profoundly modified in the Einstein frame, whereas it holds in the Dicke-Jordan frame, where the rods and clocks made with matter are not affected by the presence of the scalar field. That is why one usually refers to the Dicke-Jordan frame as the observable one. However, the dynamics of the fields is generally more easily described in the Einstein frame, so that in this work, since we are interested in the integrability of the models rather than in their physical content, the analysis will be done in the Einstein frame.

Varying the Einstein frame action (C.1.3) with respect to the fields yields the equations :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\varphi} \quad (\text{C.1.4})$$

$$\square\varphi = -\frac{\chi}{2}\omega(\varphi)T + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \quad (\text{C.1.5})$$

$$\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = \omega(\varphi)T\nabla_{\mu}\varphi \quad (\text{C.1.6})$$

where $\chi = 8\pi G$, T is the trace of the energy-momentum tensor of matter fields $T_{\mu\nu}$, and $T_{\mu\nu}^{\varphi} = 2\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}) - 2U(\varphi)g_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor of the scalar field. Moreover, we have defined the coupling $\omega(\varphi) = \frac{d\ln\Theta}{d\varphi}$. It is important to note that these equations reduce to those of General Relativity in presence of a scalar field iff $\omega(\varphi) = 0$.

Dynamical equations of scalar-tensor theory in homogeneous spaces

If one denotes by t the physical time and by τ a conformal time such that $dt = N(\tau)d\tau$, where $N(\tau)$ is generally called "lapse function", the line element of the 3 + 1 physical space reads :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j - dt^2 = \gamma(\tau)\omega^i\omega^j - N^2(\tau)d\tau^2 \quad (\text{C.1.7})$$

As explained in [194], one can find an invariant basis of differential forms $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ in each Bianchi space such that γ is diagonal ; we note hereafter $\gamma(\cdot) = \text{diag}(\alpha_i(\cdot))$.

Taking $V(\tau) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2}$ as a lapse function, and introducing $A_i = \ln(\alpha_i)$, the scalar-tensor dynamical equations in homogeneous and anisotropic Universe

read :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi V^2 [3(P + P_\varphi) + \rho + \rho_\varphi] = -(\ln(V^2))'' + \frac{1}{2}((\ln(V^2))')^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{1}{2}(A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \\ \chi V^2 \omega(\varphi) [\rho - 3P] = -2\varphi'' - 4(\ln V)' \varphi' - 2\frac{dU}{d\varphi} V^2 \end{array} \right.$$

In these equations we have written ' for $d/d\tau$; in addition the Universe is filled by a perfect fluid with pressure P and energy density ρ ; finally we have noted :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\varphi := [\varphi'^2/2 + U(\varphi)]/\chi \\ P_\varphi := [\varphi'^2/2 - U(\varphi)]/\chi \end{array} \right. \quad (\text{C.1.8})$$

Taking $U \equiv 0$, and reorganizing the first dynamical equation using the three others, the system (C.1.8) becomes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p - 4\chi\rho V^2 - 4\chi\rho_\varphi V^2 \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 [\rho + \rho_\varphi - (P + P_\varphi)] = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \\ \chi V^2 \omega(\varphi) [\rho - 3P] = -2\varphi'' - 4(\ln V)' \varphi' \end{array} \right. \quad (\text{C.1.9})$$

where

$$E_c := A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \quad \text{and} \quad E_p := \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i}$$

The energy-momentum conservation, that in scalar-tensor theory is :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \omega(\varphi) T_{\lambda\beta} g^{\lambda\beta} \partial_\nu \varphi \quad (\text{C.1.10})$$

coupled to the hypothesis of a barotropic fluid :

$$P = (\Gamma - 1)\rho \quad (\text{C.1.11})$$

allows us to obtain a relation between ρ , V and φ which is :

$$\rho = \rho_o V^{-\Gamma} \Theta^{4-3\Gamma} \quad \text{with} \quad \rho_o \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad (\text{C.1.12})$$

One should note that a fluid of radiation ($\Gamma = 4/3$) doesn't couple directly to the scalar field. Assuming a power law dependence of φ' in V , more precisely :

$$\varphi' = \varphi'_o V^\Delta \quad (\text{C.1.13})$$

and making use of (C.1.12) one can solve the last equation of system (C.1.8), and obtain an explicit dependence on V for $\Theta(\varphi)$:

$$\rho_o \Theta^{4-3\Gamma} = \frac{a^2}{2\chi} V^{2(\Delta-1)+\Gamma} \quad \text{where } a^2 = \frac{4(\Delta+2)}{2(1-\Delta)-\Gamma} \varphi_o'^2 \quad (\text{C.1.14})$$

Assuming $\rho_o > 0$ (which corresponds to non exotic matter) and $0 \leq \Gamma \leq 2$ (which corresponds to the largest class of barotropic fluid), relation (C.1.14) holds under the condition :

$$-2 < \Delta < \frac{2-\Gamma}{2} \quad (\text{C.1.15})$$

The assumption (C.1.13) is a constraint on the entire dynamical system rather than on the scalar-tensor theory itself. Indeed, any choice of coupling function $\omega(\varphi)$ can be done, but then the resulting behavior of $V(\tau)$ is completely fixed by the last equation of system (C.1.9). Conversely, imposing a behavior for the volume $V(\tau)$ determines the corresponding coupling function. For example, imposing a Brans-Dicke theory, i.e. $\omega(\varphi) = \omega_0 = \text{cste}$ results in $V(\tau) \propto \tau^{1/(2-\Delta)}$; on the contrary, a volume evolving as $V \propto e^{\lambda\tau}$ leads to

$$\Theta(\varphi) \propto \varphi^{\frac{2(\Delta-1)+\Gamma}{(4-3\Gamma)\Delta}}, \quad (\text{C.1.16})$$

that is, $\omega(\varphi) \propto \frac{1}{\varphi}$ and $\varphi \propto e^{\lambda\Delta\tau}$. To sum up, the only constraint imposed by assumption (C.1.13) is on the couple $(V(\tau), \omega(\varphi))$, through the relation :

$$\frac{\rho}{\rho_\varphi} = \frac{4(\Delta+2)}{2(1-\Delta)-\Gamma} V^{-2}, \quad (\text{C.1.17})$$

that implies that, at any time, the ratio of the densities of the barotropic fluid and of the scalar field scales with the inverse of the square of the volume. This is a sufficient constraint to make the Kovalevski formalism tractable in scalar-tensor gravity. Replacing (C.1.14) into (C.1.12), and considering (C.1.13) after (C.1.8), the dynamical system associated with the homogeneous Universe in scalar-tensor theory is :

$$\begin{cases} E_c + E_p &= 2a^2 V^{2\Delta} + 2\varphi_o'^2 V^{2\Delta+2} \\ 2[2-\Gamma] a^2 V^{2\Delta} &= A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ 2[2-\Gamma] a^2 V^{2\Delta} &= A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ 2[2-\Gamma] a^2 V^{2\Delta} &= A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (\text{C.1.18})$$

It is important to note that whereas this system seems independent on Γ , it actually depends on it through the parameter Δ that fully characterizes our solution. In fact, for each coupling function, there exists a non-ambiguous link between Γ and

Δ . For example in the case of a radiation fluid when $\Gamma = 4/3$, the LHS of the last equation in system (C.1.9) vanishes and one can find that $\varphi' \propto V^{-2}$ and then $\Delta = -2$.

A direct inspection of the first equation of system (C.1.18) shows that we can predict qualitatively the behavior of the case : $\Delta = 0$. Indeed, in this case, one of the two terms of $E_c + E_p$ reduces to a positive constant and the other one tends to 0 as V tends to 0. It is well known (e.g. [195]) that such a case breaks the Kasner cycle (e.g. [196]) for B_{VIII} and B_{IX} , and then suppresses the chaotic behaviour toward the $t = 0$ singularity for these models. The case $\Delta = -1$ seems to be similar, but the other term now diverges and then this simple analysis cannot be done.

Hamiltonian formalism

The quantity called $E_c = A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2$ is a quadratic form of $A_{i=1,2,3}$ derivatives. Then, one can diagonalize it using a linear change of variables :

$$\begin{cases} q_1 = (A_1 - A_2) / \sqrt{2} \\ q_2 = (A_1 + A_2 - 2A_3) / \sqrt{6} \\ q_3 = 2(A_1 + A_2 + A_3) / \sqrt{6} \end{cases} \quad (\text{C.1.19})$$

Introducing the associated conformal time derivatives $p_{i=1,2,3} := q'_{i=1,2,3}$, the first equation of the system (C.1.18) becomes :

$$H := \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) + e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_3} \xi(q_1, q_2) - 2a^2 e^{\frac{\sqrt{6}}{2} \Delta q_3} - 2\varphi_o'^2 e^{\frac{\sqrt{6}}{2} (\Delta+1) q_3} = 0 \quad (\text{C.1.20})$$

the so-called potential ξ is defined by :

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) &= -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 + \sqrt{2} q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 - \sqrt{2} q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3} q_2} \\ &+ 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.1.21})$$

In terms of (q_i, p_i) variables, the dynamical system (C.1.18) is quasi-Hamiltonian (e.g. [197] and later [198],[199],[200])

$$\begin{aligned} q'_{1,2} &= \frac{dq_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} & p'_{1,2} &= \frac{dp_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_{1,2}} \\ q'_3 &= \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_3} & p'_3 &= \frac{dp_3}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (\text{C.1.22})$$

The minus that breaks the strict Hamiltonian symmetry comes from the minus signature of the quadratic form associated with E_c .

Integrability of homogeneous Universes

The case of Bianchi Universes

The following work has been initiated by Melnikov's team (see e.g. [201] and [202] and references therein). In the special case of B_{IX} , [203] consists in an application ; a generalization in the context of the whole class A (i.e. $a = 0$) was tried by [204]. However, a lot of imprecisions in this last work need this new reformulation and extension to scalar-tensor theory.

Bianchi universes as generalized Toda systems

Introducing the following vectors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &:= [0, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3] & \mathbf{a}_2 &:= [\sqrt{2}/2, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3] & \mathbf{a}_3 &:= [-\sqrt{2}/2, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3] \\ \mathbf{a}_4 &:= [\sqrt{2}, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3] & \mathbf{a}_5 &:= [-\sqrt{2}, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3] & \mathbf{a}_6 &:= [0, -2\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3] \\ \mathbf{a}_7 &:= [0, 0, \sqrt{6}\Delta/2] & & & \mathbf{a}_8 &:= [0, 0, \sqrt{6}(\Delta + 1)/2] \end{aligned} \quad (C.1.23)$$

the 3-forms :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{aligned} (x, y) &:= +x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ \langle x, y \rangle &:= -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned} \quad (C.1.24)$$

and the constants :

$$\begin{aligned} k_1 &:= 2n_1n_2 & k_2 &:= 2n_1n_3 & k_3 &:= 2n_2n_3 \\ k_4 &:= -n_1^2 & k_5 &:= -n_2^2 & k_6 &:= -n_3^2 \\ k_7 &:= -2a^2 & k_8 &:= -2\varphi_o'^2 \end{aligned} \quad (C.1.25)$$

it is clear that the Hamiltonian (C.1.20) reads :

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^8 k_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})} \quad (C.1.26)$$

which is a classical form of a generalized Toda dynamical system.

Following Melnikov [201], we change $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ variables to $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ones, such that :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^8, u_{i=1, \dots, 8} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^8, v_{i=1, \dots, 8} := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}) \end{cases} \quad (C.1.27)$$

Through this change, the number of degrees of freedom jumps from 6 in $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ to 16 in terms of $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Still writing ' for the derivatives with respect to the

conformal time τ , the dynamical equations then read :

$$\forall i = 1, \dots, 8 \quad \begin{cases} v'_i = u_i v_i \\ u'_i = \sum_{j=1}^8 m_{ij} v_j \end{cases} \quad \text{with } m_{ij} := -k_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \quad (\text{C.1.28})$$

This new formulation is now polynomial. Using the appendix notations, one can directly prove that the system (C.1.28) is autosimilar with any non vanishing index and weight \mathbf{g} such that :

$$g_1 = \dots = g_8 = 1 \quad \text{and} \quad g_9 = \dots = g_{16} = 2 \quad (\text{C.1.29})$$

\mathbf{g} is unique provided that (C.2.39) is fulfilled. A particular autosimilar solution of (C.1.28) is then

$$[\tilde{\mathbf{u}} \ \tilde{\mathbf{v}}]^T = \mathbf{c} t^{-\mathbf{g}} = [\lambda_1 t^{-1}, \dots, \lambda_8 t^{-1}, \mu_1 t^{-2}, \dots, \mu_8 t^{-2}]^T \quad (\text{C.1.30})$$

provided that the constant non vanishing vector $\mathbf{c} = [\lambda, \mu] = [\lambda_1, \dots, \lambda_8, \mu_1, \dots, \mu_8]$ is a solution of the algebraic system of equations :

$$\forall i = 1, \dots, 8 \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^8 m_{ij} \mu_j = -\lambda_i \\ \lambda_i \mu_i = -2\mu_i \end{cases} \quad (\text{C.1.31})$$

Hence, to any non vanishing solution of this last system corresponds a set of 16 Kovalewski exponents that allows to write the solution of the system (C.1.22) (cf Appendix A). A necessary condition for the system to be integrable is that all its Kovalewski exponents be rational. So, the rest of the paper will be devoted to the analysis of these exponents in order to study the integrability of different types of homogeneous and anisotropic Universes.

Solutions of the algebraic system

In the more general case (that is scalar-tensor theory in presence of matter barotropic fluids), the algebraic system (C.1.31) makes use of the 8×8 matrix

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ 0 & 0 & -4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ 0 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ -4n_1n_2 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2a^2\Delta & 2\varphi'_o{}^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2\Delta & -2n_1n_3\Delta & -2n_3n_2\Delta & n_1^2\Delta & n_2^2\Delta & n_3^2\Delta & 3a^2\Delta^2 & 3\varphi'_o{}^2\Delta_1\Delta \\ -2n_1n_2\Delta_1 & -2n_1n_3\Delta_1 & -2n_3n_2\Delta_1 & n_1^2\Delta_1 & n_2^2\Delta_1 & n_3^2\Delta_1 & 3a^2\Delta\Delta_1 & 3\varphi'_o{}^2\Delta_1^2 \end{bmatrix} \quad (C.1.32)$$

where $\Delta_1 := \Delta + 1$. One can straightforwardly check that M is of rank 3.

The vector $\vec{0}$ is always a solution of the system (C.1.31), but it is not relevant for the quest of Kovalewski exponents that needs non trivial solutions. A systematic study of the solutions of the system (C.1.31) is possible : for $p = 6, 7$ or 8 let $E_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$, we consider the minor determinants :

$$\forall (i, j, k) \in E_p \times E_p \times E_p \quad \zeta_i = m_{ii} \quad , \quad \zeta_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{vmatrix} \\ \zeta_{i,j,k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix} \quad (C.1.33)$$

and the determinants :

$$d_{2i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} \\ 2 & m_{jj} \end{vmatrix}, \quad d_{2j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 \\ m_{ji} & 2 \end{vmatrix} \quad (C.1.34)$$

$$d_{3i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} & m_{ik} \\ 2 & m_{jj} & m_{jk} \\ 2 & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad d_{3j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 & m_{ik} \\ m_{ji} & 2 & m_{jk} \\ m_{ki} & 2 & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad d_{3k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & 2 \\ m_{ji} & m_{jj} & 2 \\ m_{ki} & m_{kj} & 2 \end{vmatrix} \quad (C.1.35)$$

Solutions of System (C.1.31) are then classified into three classes :

1. Type 1 solutions (T1) : $\exists! i \in E_p$ such that $\mu_i \neq 0$ and $\forall j \in E_p \setminus \{i\}, \mu_j = 0$: then $\lambda_i = -2$ and
 - if $\zeta_i = 0$: there is no solution.
 - if $\zeta_i \neq 0$: $\mu_i = 2/\zeta_i$ and $\forall j \in E_p \setminus \{i\}, \lambda_j = -2m_{ji}/\zeta_i$
2. Type 2 solutions (T2) : $\exists! (i, j) \in E_p \times (E_p \setminus \{i\})$ such that $\{\mu_i, \mu_j\} \neq \{0, 0\}$ and $\forall k \in E_p \setminus \{i, j\}, \mu_k = 0$: then $\lambda_i = \lambda_j = -2$ and

- if $\zeta_{i,j} = 0$: there is no solution.
 - if $\zeta_{i,j} \neq 0$: $\mu_i = d_{2i}/\zeta_{i,j}$ and $\mu_j = d_{2j}/\zeta_{i,j}$ moreover $\forall k \in E_p \setminus \{i, j\}$,
 $\lambda_k = (m_{ki}d_{2i} + m_{kj}d_{2j})/\zeta_{i,j}$
3. Type 3 solutions (T3) : $\exists! (i, j, k) \in E_p \times (E_p \setminus \{i\}) \times (E_p \setminus \{i, j\})$ such that $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k\} \neq \{0, 0, 0\}$ and $\forall l \in E_p \setminus \{i, j, k\}$, $\mu_l = 0$: then $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = -2$ and
- if $\zeta_{i,j,k} = 0$: there is no solution
 - if $\zeta_{i,j,k} \neq 0$: $\mu_i = d_{3i}/\zeta_{i,j,k}$, $\mu_j = d_{3j}/\zeta_{i,j,k}$ and $\mu_k = d_{3k}/\zeta_{i,j,k}$ moreover
 $\forall l \in E_p \setminus \{i, j, k\}$, $\lambda_l = (m_{li}d_{3i} + m_{lj}d_{3j} + m_{lk}d_{3k})/\zeta_{i,j,k}$

Kovalewski exponents for Bianchi Universes

In what follows, we will examine the Kovalewski exponents for Bianchi Universes in 4 different cases that are included in the formalism presented above : scalar-tensor gravity with or without matter fluids, and General Relativity with or without matter fluids. We proceed in three steps.

1. Select a Universe. It corresponds to choosing a set of $n_{i=1,2,3}$ in table C.1. This step determines the theory of gravitation and the matter content of interest, and this choice is made by considering different forms for the matrix M defined in (1) :
 - Barotropic matter filled Universe in scalar-tensor theory of gravitation : $p = 8$. This is the most general case that was presented in detail in the preceding subsection.
 - Empty Universe in scalar-tensor theory of gravitation : $p = 7$. The associated matrix is M but without the 7th line and the 7th column :

$$M_{STV} := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ 0 & 0 & -4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ 0 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ -4n_1n_2 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2\varphi_o'^2\Delta_1 \\ -2n_1n_2\Delta_1 & -2n_1n_3\Delta_1 & -2n_3n_2\Delta_1 & n_1^2\Delta_1 & n_2^2\Delta_1 & n_3^2\Delta_1 & 3\varphi_o'^2\Delta_1^2 \end{bmatrix}$$

- Barotropic matter filled Universe in Einstein General Relativity : $p = 7$. The associated matrix is M but with the 8th line and 8th column removed, and the 7th line and 7th column adapted. Noting γ for $2 - \Gamma$ we have :

$$M_{GRM} := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2\rho_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2\rho_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2\rho_o\chi\gamma \\ 0 & 0 & -4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\rho_o\chi\gamma \\ 0 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\rho_o\chi\gamma \\ -4n_1n_2 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2\rho_o\chi\gamma \\ -n_1n_2\gamma & -n_1n_3\gamma & -n_3n_2\gamma & n_1^2\gamma/2 & n_2^2\gamma/2 & n_3^2\gamma/2 & 3\rho_o\chi\gamma^2/2 \end{bmatrix}$$

- Empty Universe in Einstein General Relativity : $p = 6$. The associated matrix is M but with the 7th and 8th lines and the 7th and 8th columns removed :

$$M_{GRV} := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 \\ 0 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 \\ -4n_1n_2 & -4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 \end{bmatrix}$$

We then have to apply the following algorithm to the appropriate matrix.

2. Determine all the non vanishing minor determinants ζ which could be extracted from the considered matrix.
3. For each ζ , compute the associated set of $2p$ Kovalewski exponents. In our polynomial case, as indicated in appendix A this set is the set of eigenvalues of the matrix :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{p1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_p & \ddots & \vdots & \vdots & & M & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & m_{1p} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{pp} \\ \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 + 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p + 2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.36})$$

The particular form of the matrix K and the weak rank of the matrix M allows an explicit calculation of the eigenvalues in all the cases $p = 6, 7, 8$ and for

all the Bianchi Universes. There exists several hundreds of non vanishing minor determinants in all the cases considered. They correspond to 92 distinct sets of Kovalewski exponents with length $2p = 12, 14$ or 16 . All the details are presented in appendix B. In all cases, calculations are explicit, and in order to organize it we use formal calculus computational tools.

Exponents analysis and conclusions

The full set of Kovalewski exponents is presented in appendix B. The analysis of the sets of exponents results in four classes for Bianchi models : Class I contains uniquely B_I models, Class II contains B_{II} and B_{IV} , Class III is composed by B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ and $B_{VII_{o,a}}$, and finally Class IV contains B_{VIII} and the famous B_{IX} . Each class is characterized by the same set of Kovalewski exponents, therefore corresponding models have the same characteristic dynamics. Let us review for each class the algebraic properties of Kovalewski exponents :

- Class I – For all the cases we studied, all the Kovalewski exponents belonging to this class, are rational provided that the barotropic index Γ and/or the scalar-tensor parameter Δ are rational. This restriction corresponds to physical cases¹.
- Class II – Kovalewski exponents of models belonging to this class fall into four subcases :
 - Empty Universe in General Relativity (EUGR) : exponents belonging to this class are integers.
 - Barotropic Matter filled Universe in General Relativity (BMUGR) : due to A_{\pm}^* , all exponents are rational iff $\Gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, \Gamma_0]$ with $\Gamma_0 = (11 - \sqrt{73})/3 \approx 0.81$.
 - Empty Universe in Scalar-Tensor Theory (EUSTT) : due to A_{\pm} , all exponents are rational iff $\Delta \in \mathbb{Q} \cap [\Delta_0, 1]$ with $\Delta_0 = (-11 + \sqrt{73})/6 \approx -0.40$.
 - Barotropic Matter filled Universe in Scalar-Tensor Theory (BMUSTT) : Due to A_{\pm} and D_{\pm} , all exponents are rational iff $\Delta \in \mathbb{Q} \cap [\Delta_1, 1]$ with $\Delta_1 = (-5 + \sqrt{73})/6 \approx 0.59$.
- Class III – As previously, four classes of sets of Kovalewski exponents can be identified
 - EUGR : exponents belonging to this class are integers.
 - BMUGR : due to A_{\pm}^* , B_{\pm}^* and C_{\pm}^* , all exponents are rational iff $\Gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, \Gamma_0]$. This case is then equivalent to the corresponding case of class II models. Let us remark the special value $\Gamma = 2/3$ for which $(A_+^*, A_-^*, B_+^*, B_-^*, C_+^*, C_-^*) = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$.

¹As a matter of fact, physical power laws or barotropic index must be rational in order to be full of physical meaning

- EUSTT : due to A_{\pm}, B_{\pm} and a_{\pm} all exponents are rational iff $\Delta \in \mathbb{Q} \cap [\Delta_0, 1]$. This case is then equivalent to the corresponding case of class II models. Let us remark the special value $\Delta = -1/3$ for which $(A_+, A_-, B_+, B_-, a_+, a_-) = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$.
- BMUSTT : due to $A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm}, D_{\pm}, a_{\pm}$ and b_{\pm} , all exponents are rational iff $\Delta \in \mathbb{Q} \cap [\Delta_2, 1]$ with $\Delta_2 = 16/25 = 0.64$.
- Class IV – all models of this class contain at least two conjugated complex Kovalewski exponents.

>From such an analysis, taking into account Yoshida's theorems (see [205, 206]) whose context is detailed in appendix A, we can conclude that :

- Empty Universes whose metrics correspond to classes I, II or III defined below are generically associated to algebraically integrable dynamics.
- Class IV Universes are always associated to non algebraically integrable dynamics. This result holds for General Relativity and/or scalar-tensor theory we are interested in, the Universe being empty and/or filled of barotropic matter.
- BMUGR of class II and III are associated to non integrable dynamics if the barotropic index ranges in the interval $[\Gamma_0, 2]$ with $\Gamma_0 = (11 - \sqrt{73})/3 \approx 0.81$.
- EUSTT of class II and III are associated to non integrable dynamics if the power law of the scalar-tensor modelization (C.1.13) ranges in the interval $[-2, \Delta_0]$ with $\Delta_0 = (-11 + \sqrt{73})/6 \approx -0.40$.
- BMUSTT of class II are associated to non integrable dynamics if the power law of the scalar tensor modelization (see C.1.13) ranges in the interval $[-2, \Delta_1]$ with $\Delta_1 = (-5 + \sqrt{73})/6 \approx -0.40$.
- BMUSTT of class III are associated to non integrable dynamics if the power law of the scalar tensor modelization (C.1.13) ranges in the interval $[-2, \Delta_2]$ with $\Delta_2 = 16/25 = 0.64$.

The integrability of homogeneous Universes depends on multiple factors.

It is well known, since the pioneering works by Elskens and Henneaux [207], that the number of dimensions D of the spatial sections of the Universe is one of this factors. It influences the form of the potential $\xi(q)$ in relation (C.1.21) or/and increases the number of components of the vectors $\{\mathbf{a}_i\}$ in (C.1.23). The net result in the simplified context of generalized Kasner metric is that chaos disappears – and then system becomes always integrable, in a classical context – when $D \geq 11$.

Modification of the gravitation theory by introducing a scalar-tensor component seems here to have a different contribution. As a matter of fact, in the case we consider, the potential $\xi(q)$ is not modified, but a volume dependent Toda potential is added in the Hamiltonian. In a general way, this produces a slowing down for the cushions' velocity in the billiard representation (see [200] and references therein). One can then reasonably suppose that this feature does not change

drastically the dynamical properties of homogeneous Universes inherited from General Relativity. The integrability analysis based on Kovalewski exponents we have done confirms such a conjecture.

Appendix A : Integrability of autosimilar differential systems

Let \mathbf{f} be a continuous function from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n and $\mathbf{x} = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.2.37})$$

If there exists a positive real λ and a rational vector $\mathbf{g} := [g_1, \dots, g_n]^T$ such that the transformation

$$\begin{aligned} t &\mapsto t/\lambda \\ \forall i = 1, \dots, n \quad x_i &\mapsto \lambda^{g_i} x_i \end{aligned} \quad (\text{C.2.38})$$

leaves the system (C.2.37) invariant, this system is called autosimilar with index λ and weight \mathbf{g} .

When it exists \mathbf{g} , it is unique if

$$A(\mathbf{x}) \in M_n(\mathbb{R}) \quad , \quad A_{ij} = x_j \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \delta_{ij} f_i(\mathbf{x}) \quad (\text{C.2.39})$$

is invertible for almost all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Autosimilar systems always admit at least one autosimilar particular solution

$$\tilde{\mathbf{x}}_{as} = [c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n}]^T \quad (\text{C.2.40})$$

where $\mathbf{c} := [c_1, \dots, c_n]^T$ is solution of the algebraic equation :

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{c}) = -g_1 c_1 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{c}) = -g_n c_n \end{cases} \quad (\text{C.2.41})$$

Linearization of the system (C.2.37) around the solution $\tilde{\mathbf{x}}_{as}$ gives

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as}) \mathbf{z} \quad (\text{C.2.42})$$

where $D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as})$ is the Jacobian matrix of $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ evaluated at $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_{as}$. A theorem by Fuchs (see [208] §5.6 and 5.7) then shows that the general solution of (C.2.42) is autosimilar and reads :

$$\mathbf{z} = [k_1 (t - t_o)^{\rho_1 - g_1}, \dots, k_n (t - t_o)^{\rho_n - g_n}]^T \quad (\text{C.2.43})$$

The quantities $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ are called Kovalewski exponents. More practically, one can compute them because there are also eigenvalues of the matrix :

$$K := D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g}). \tag{C.2.44}$$

As shown by Conte (see [208] §5.6 and 5.7), they are of great importance for the study of integrability of the original non linear system (C.2.37). As a matter of fact each component $x_{i=1,\dots,n}$ of a solution x of this system can be written as :

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_i^{(k)}(t) \quad \text{with} \quad \begin{cases} x_i^{(0)} = c_i (t - t_o)^{g_i} \\ x_i^{(1)} = k_i (t - t_o)^{\rho_i - g_i} \\ \exists 1 \leq p, q \leq n, \quad x_i^{(2)} = c_p k_q (t - t_o)^{g_p + \rho_q - g_q} \\ \text{etc} \dots \end{cases} \tag{C.2.45}$$

hence

$$x_i(t) \propto (t - t_o)^{g_i} S[(t - t_o)^{\rho_1}, \dots, (t - t_o)^{\rho_n}] \tag{C.2.46}$$

where $S[]$ is a multiple series. This allows to understand a theorem by Yoshida (see [205, 206]) : a necessary condition for a differential system to be integrable is that all its Kovalewski exponents are rational. If there exists at least one exponent irrational or complex the corresponding differential system is not algebraically integrable.

Appendix B : Details of Kovalewski exponents

When only non exotic barotropic matter ($0 \leq \Gamma < 2$) is considered, we have noted $\gamma = (3\Gamma - 2)/(\Gamma - 2)$. For any $K = 3, 5, 7$ and 15 we note $2K^{\pm i} = 1 \pm i\sqrt{K}$ and

$$\begin{aligned} 2A_{\pm}^* &= 1 \pm \sqrt{\frac{16 - 22\Gamma + 3\Gamma^2}{4 - 2\Gamma}} & 2B_{\pm}^* &= 1 \pm \sqrt{5 - 6\Gamma} \\ 2C_{\pm}^* &= 1 \pm \sqrt{\frac{25\Gamma - 18}{\Gamma - 2}} & 2D_{\pm}^* &= 1 \pm \sqrt{\frac{18 - 41\Gamma + 24\Gamma^2}{2 - \Gamma}} \end{aligned}$$

$$E_{\gamma} := \{-1, 2, 1(\times 6), \frac{2\gamma}{3}(\times 6)\} \quad E_o := \{-1, 4(\times 3), 2(\times 3), 1(\times 5)\}$$

Moreover

$$E_{\delta} = [\{-1, 1(\times 6), 2, 2\delta_1/3(\times 6)\}]$$

$$\delta_1 = (3\Delta + 1)(\Delta + 1)^{-1} \quad \text{and} \quad \delta_2 = (3\Delta - 2)\Delta^{-1}$$

$$2A_{\pm}=1 \pm \sqrt{\frac{3(\Delta - \Delta_A^+)(\Delta - \Delta_A^-)}{|\Delta + 1|}} \quad 6\Delta_A^{\pm} = -11 \pm \sqrt{73}$$

$$2D_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{3(\Delta - \Delta_D^+)(\Delta - \Delta_D^-)}{|\Delta|}} \quad 6\Delta_D^{\pm} = -5 \pm \sqrt{73}$$

$$2B_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{25\Delta + 9}{|\Delta + 1|}}$$

$$2C_+ = 1 \pm \sqrt{\frac{25\Delta - 16}{|\Delta|}}$$

$$2E_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{48\Delta^2 + 41\Delta + 9}{|\Delta + 1|}} \quad 48\Delta^2 + 41\Delta + 9 > 0$$

$$2F_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{48\Delta^2 - 55\Delta + 16}{|\Delta|}} \quad 48\Delta^2 - 55\Delta + 16 > 0$$

$$2a_{\pm} = 1 \pm \sqrt{5 + 12\Delta} \quad 2b_{\pm} = 1 \pm \sqrt{-7 + 12\Delta}$$

Using the notations defined above we have computed all the Kowalewski exponents for all Bianchi Universes, in the case of empty or barotropic filled Universes and for General Relativity(GR) and Scalar-Tensor (ST) theory of gravitation :

B_I		
RG	Empty (N=6)	Barotropic Matter (N=7)
T1	\emptyset	E_{γ}
T2	\emptyset	\emptyset
T3	\emptyset	\emptyset
ST	Empty (N=7)	Barotropic Matter (N=8)
T1	E_{δ}	$-1, 1(\times 7), 2, 2\delta_2/3(\times 6), -2/\Delta$ $-1, 1(\times 7), 2, 2(\Delta + 1)^{-1}, 2\delta_1/3(\times 6)$
T2	\emptyset	\emptyset
T3	\emptyset	\emptyset

B_{II} and B_{IV}		
GR	Empty (N=6)	Barotropic Matter (N=7)
T1	E_o	E_γ $-1, 1(\times 6), 2(\times 3), 4(\times 3), 3 - \Gamma/2$
T2	\emptyset	$-1, 1(\times 5), 2, \gamma/2(\times 2), \gamma(\times 3), A_\pm^*$
T3	\emptyset	\emptyset
ST	Empty (N=7)	Barotropic Matter (N=8)
T1	$-1, 1(\times 6), 2(\times 3), 4(\times 3), \Delta + 3$ E_δ	$-1, 1(\times 7), 2, 2(\Delta + 1)^{-1}, 2\delta_1/3(\times 6)$ $-1, 1(\times 7), 2, 2\delta_2/3(\times 6), -2/\Delta$ $-1, 1(\times 7), 2(\times 3), 4(\times 3), \Delta + 3, \Delta + 2$
T2	$-1, 1(\times 5), 2, \delta_1/2(\times 2), \delta_1(\times 3), A_\pm$	$-1, 1(\times 6), 2, \delta_2/2(\times 2), \delta_2(\times 3), -2/\Delta, D_\pm$ $-1, 1(\times 6), 2, \delta_1/2(\times 2), \delta_1(\times 3), 2(\Delta + 1)^{-1}, A_\pm$
T3	\emptyset	\emptyset

$B_{III}, B_{VI_{o,a}}, B_{VII_{o,a}}$		
GR	Empty (N=6)	Barotropic Matter (N=7)
T1	E_o	E_γ $-1, 1(\times 6), 2(\times 3), 4(\times 3), 3 - \Gamma/2$
T2	\emptyset	$-1, 1(\times 5), 2, \gamma/2(\times 2), \gamma(\times 3), A_\pm^*$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 5), 2, 2\gamma, \gamma(\times 2), B_\pm^*$
T3	\emptyset	$-1, 0, 1(\times 4), 2, 2\gamma, \gamma(\times 2), B_\pm^*, C_\pm^*$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 5), 2, 2\gamma, \gamma(\times 2), B_\pm^*$
ST	Empty (N=7)	Barotropic Matter (N=8)
T1	$-1, 1(\times 6), 2(\times 3), 4(\times 3), \Delta + 3$ E_δ	$-1, 1(\times 7), 2, 2\delta_1/3(\times 6), 2(\Delta + 1)^{-1}$ $-1, 1(\times 7), 2, 2\delta_2/3(\times 6), -2\Delta^{-1}$ $-1, 1(\times 7), 2(\times 3), 4(\times 3), \Delta + 3, \Delta + 2$
T2	$-1, 1(\times 5), 2, \delta_1/2(\times 2), \delta_1(\times 3), A_\pm$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 5), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), a_\pm$	$-1, 0(\times 2), 1(\times 6), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), 2(\Delta + 1)^{-1}, a_\pm$ $-1, 1(\times 6), 2, \delta_1/2(\times 2), \delta_1(\times 3), 2(\Delta + 1)^{-1}, A_\pm$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 6), 2, 2\delta_2, \delta_2(\times 2), -2\Delta^{-1}, b_\pm$ $-1, 1(\times 6), 2, \delta_2/2(\times 2), \delta_2(\times 3), -2\Delta^{-1}, D_\pm$
T3	$-1, 0, 1(\times 4), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), a_\pm, B_\pm$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 5), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), a_\pm$	$-1, 0, 1(\times 5), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), 2(\Delta + 1)^{-1}, a_\pm, B_\pm$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 6), 2, 2\delta_1, \delta_1(\times 2), 2(\Delta + 1)^{-1}, a_\pm$ $-1, 0(\times 2), 1(\times 6), 2, 2\delta_2, \delta_2(\times 2), -2\Delta^{-1}, b_\pm$ $-1, 0, 1(\times 5), 2, \delta_2(\times 2), 2\delta_2, -2\Delta^{-1}, b_\pm, C_\pm$

B_{VIII} and B_{IX}		
GR	Empty (N=6)	Barotropic Matter (N=7)
T1	E_o	E_γ -1, 1(×6), 2(×3), 4(×3), 3 - $\Gamma/2$
T2	-1, -2(×3), $7^{\pm i}$, 2(×2), 1(×4) -1, 2, $15^{\pm i}$, 1(×4), 0(×4)	-1, 1(×5), 2, $\gamma/2$ (×2), γ (×3), A_\pm^* -1, 0(×2), 1(×5), 2, 2 γ , γ (×2), B_\pm^* -2(×3), -1, 1(×5), 2(×2), $7^{\pm i}$, $2\Gamma - 2$ -1, 0(×4), 1(×5), 2, $15^{\pm i}$, -1 + $3\Gamma/2$
T3	-1, 2, $15^{\pm i}$ (×2), 1(×3), 0(×3) -1, 2, $3^{\pm i}$ (×2), 1(×3), 0(×3) -1, 2, $15^{\pm i}$, 1(×4), 0(×4) -1(×2), 2(×2), $7^{\pm i}$, 1(×3), 0(×3)	-1, 0(×3), 1(×4), 2, $3^{\pm i}$ (×2), -1 + $3\Gamma/2$ -1, 1(×4), 2, -2 γ , 2 γ (×3), C_\pm^* , D_\pm^* -1, 0(×3), 1(×4), 2, $15^{\pm i}$ (×2), -1 + $3\Gamma/2$ -1, 0(×4), 1(×5), 2, $15^{\pm i}$, -1 + $3\Gamma/2$ -1, 0, 1(×4), 2, 2 γ , γ (×2), B_\pm^* , C_\pm^* -1(×2), 0(×3), 1(×4), 2(×2), $7^{\pm i}$, -1 + $3\Gamma/2$ -1, 0(×2), 1(×5), 2, 2 γ , γ (×2), B_\pm^*
ST	Empty (N=7)	Barotropic Matter (N=8)
T1	E_δ -1, 1(×6), 2(×3), 4(×3), $\Delta + 3$	-1, 1(×7), 2, $2\delta_2/3$ (×6), - $2\Delta^{-1}$ -1, 1(×7), 2(×3), 4(×3), $\Delta + 3$, $\Delta + 2$ -1, 1(×7), 2, $2\delta_1/3$ (×6), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$
T2	-1, 0(×2), 1(×5), 2, δ_1 (×2), 2 δ_1 , a_\pm -2(×3), -1, 1(×5), 2(×2), $7^{\pm i}$, - $4\Delta - 2$ -1, 0(×4), 1(×5), 2, $15^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$ -1, 1(×5), 2, $\delta_1/2$ (×2), δ_1 (×3), A_\pm	-1, 1(×6), 2, D_\pm , $\delta_2/2$ (×2), δ_2 (×3), - $2\Delta^{-1}$ -1, 0(×2), 1(×6), 2, 2 δ_2 , δ_2 (×2), - $2\Delta^{-1}$, b_\pm -1, 0(×2), 1(×6), 2, 2 δ_1 , δ_1 (×2), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$, a_\pm -1, 1(×6), 2, $\delta_1/2$ (×2), δ_1 (×3), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$, A_\pm -2(×3), -1, 1(×6), 2(×2), $7^{\pm i}$, - $4\Delta - 2$, - $4\Delta + 2$ -1, 0(×4), 1(×6), 2, $15^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$, - $3\Delta + 2$
T3	-1, 0(×2), 1(×5), 2, 2 δ_1 , δ_1 (×2), a_\pm -1, 0(×4), 1(×5), 2, $15^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$ -1, 0(×3), 1(×4), 2, $15^{\pm i}$ (×2), - $3\Delta - 1$ -1, 0(×3), 1(×4), 2, $3^{\pm i}$ (×2), - $3\Delta - 1$ -1, 0, 1(×4), 2, 2 δ_1 , δ_1 (×2), a_\pm , B_\pm -1(×2), 0(×3), 1(×4), 2(×2), $7^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$ -1, 1(×4), 2, -2 δ_1 , 2 δ_1 (×3), B_\pm , E_\pm	-1, 1(×5), 2, -2 δ_1 , 2 δ_1 (×3), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$, B_\pm , E_\pm -1, 1(×5), 2, -2 δ_2 , 2 δ_2 (×3), - $2\Delta^{-1}$, C_\pm , F_\pm -1, 0(×3), 1(×5), 2, $3^{\pm i}$ (×2), - $3\Delta - 1$, - $3\Delta + 2$ -1, 0(×3), 1(×5), 2, $15^{\pm i}$ (×2), - $3\Delta - 1$, - $3\Delta + 2$ -1(×2), 0(×3), 1(×5), 2(×2), $7^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$, - $3\Delta + 2$ -1, 0, 1(×5), 2, 2 δ_1 , δ_1 (×2), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$, a_\pm , B_\pm -1, 0, 1(×5), 2, 2 δ_2 , δ_2 (×2), - $2\Delta^{-1}$, b_\pm , C_\pm -1, 0(×2), 1(×6), 2, 2 δ_2 , δ_2 (×2), - $2\Delta^{-1}$, b_\pm -1, 0(×2), 1(×6), 2, 2 δ_1 , δ_1 (×2), 2($\Delta + 1$) $^{-1}$, a_\pm -1, 0(×4), 1(×6), 2, $15^{\pm i}$, - $3\Delta - 1$, - $3\Delta + 2$

C.3 Article 3 : Correspondance entre champs scalaires cosmologiques et “backreaction” cinématique

Cet article est paru dans *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 6379-6408.

Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies — the ‘morphon field’

Thomas Buchert, and Julien Larena, and Jean-Michel Alimi

Spatially averaged inhomogeneous cosmologies in classical general relativity can be written in the form of effective Friedmann equations with sources that include backreaction terms. In this paper we propose to describe these backreaction terms with the help of a homogeneous scalar field evolving in a potential; we call it the ‘morphon field’. This new field links classical inhomogeneous cosmologies to scalar field cosmologies, allowing to reinterpret, e.g., quintessence scenarios by routing the physical origin of the scalar field source to inhomogeneities in the Universe. We investigate a one-parameter family of scaling solutions to the backreaction problem. Subcases of these solutions (all without an assumed cosmological constant) include scale-dependent models with Friedmannian kinematics that can mimic the presence of a cosmological constant or a time-dependent cosmological term. We explicitly reconstruct the scalar field potential for the scaling solutions, and discuss those cases that provide a solution to the Dark Energy and coincidence problems. In this approach, Dark Energy emerges from morphon fields, a mechanism that can be understood through the proposed correspondence: the averaged cosmology is characterized by a weak decay (quintessence) or growth (phantom quintessence) of kinematical fluctuations, fed by ‘curvature energy’ that is stored in the averaged 3-Ricci curvature. We find that the late-time trajectories of those models approach attractors that lie in the future of a state that is predicted by observational constraints.

Introduction

The fact that the spatially averaged inhomogeneous Universe does not evolve as the standard model of cosmology, furnished by a homogeneous–isotropic solution of Einstein’s laws of gravity, has recently become a major topic aiming at a possible solution to the Dark Energy problem [209], [210], [211]. While the averaging problem in relativistic cosmology has a long history, initiated by George Ellis [116] (references may be found in [212] and [213]), the backreaction terms, i.e. those averaged contributions that lead to deviations from a Friedmannian cosmology, have been considered quantitatively unimportant. Recent work that conjectures a large backreaction effect (e.g. [140]) has been accompanied both by counter conjectures (e.g. [151]) and special solutions of the averaged Einstein equations [132] that sup-

port the claim that backreaction could be made responsible for the Dark Energy gap (e.g. [214], [215], [216], [155, 160], [217] and references and discussion in [212]).

In parallel to this discussion, other models have been extensively investigated, most notably quintessence models that invoke the presence of a scalar field source, this scalar field being a standard one or a phantom field (with a negative kinetic energy) [167, 166, 169, 170] and references in the reviews [174] and [51]. Those models imply the possibility of a scenario featuring a time-dependent cosmological term. Particular properties of the scalar field potential are discussed on phenomenological grounds, which can lead to an acceleration of the regional Universe and so to an explanation of Dark Energy. A further problem in conjunction with modeling a repulsive component in universe models is known as the *coincidence problem*, i.e. a recent domination of this component is favoured, possibly occurring around the epoch of structure formation. Its solution also motivates the construction of models with a time-dependent cosmological term that needs no ‘fine-tuning’.

In this paper we also consider scalar field cosmologies, but we shift the perspective from the usual interpretation of a scalar field *source* in Einstein’s equations to a mean field description of averaged inhomogeneities. We see a number of advantages entailed by such a description that motivated the present investigation. First, a (homogeneous) scalar field as a model of spatially averaged (i.e. effectively homogeneous) geometrical degrees of freedom that are physically present does not need to be justified as an additional source arising from fundamental field theories; it has a well-defined physical status and, as such, does not suffer from a phenomenological parameterization, since it is constrained by Einstein’s field equations. Second, inhomogeneities encoded in backreaction terms *give rise to* the scalar field cosmology, fixing its potential, its equation of state, etc.; they not only influence the evolution of the scalar field, but they determine it. Third, the proposed correspondence allows a realistic reinterpretation of quintessence models and other phenomenological approaches involving scalar fields. These approaches must not be considered as independent alternatives, they here describe the same physics that also underlies the backreaction approach, and so can be confronted with physical constraints; in other words, if backreaction can indeed be made responsible for the late-time acceleration of the Universe, then the effort spent on quintessence models and other approaches [51] can be fruitfully exploited in terms of the proposed rephrasing. Fourth, since the underlying effective equations are general and do not invoke perturbative assumptions, the scalar field cosmology provides access to the whole solution space, notably to the non-perturbative regime. Finally, subcases of exact solutions include a cosmological constant, which therefore can or cannot be included in Einstein’s equations; the cosmological constant is a particular solution of the averaged inhomogeneous model without necessarily being present in Einstein’s equations.

Since the scalar field introduced in this way stems from averaged geometrical degrees of freedom, i.e. kinematical backreaction terms encoded in the extrinsic curvature of spatial hypersurfaces, as well as their scalar curvature, we call it the *morphon field* : it effectively models the inhomogeneities *shaping* the structure in the Universe and capturing the total effect of kinematical backreaction, i.e. the effect leading to a deviation from the kinematics of the standard model. Speaking in terms of geometry, we may roughly say that the morphon models the geometrical vacuum degrees of freedom in Einstein's theory, which are neglected when modeling the Universe with the help of averaged matter sources only. We call the scalar field a *morphon* only if it arises from the proposed mean field description ; we can of course still consider other scalar fields as sources of Einstein's equations. We expect, and we shall demonstrate this for quintessence fields, that the *morphon* is capable of acting like any other scalar field model, e.g., assigned to an inflaton, a curvaton, a dilaton, etc., depending on our capability to exploit the proposed correspondence, i.e. the possibility to find solutions of the averaged Einstein equations and to reconstruct the scalar field potential for this solution.

We here provide a first step that should help to appreciate the various possibilities, but this investigation does not claim to be exhaustive. In this line we are going to choose a minimal parameterization of the scalar field cosmology in the following sense : first, we do not include the cosmological constant and the constant curvature term in the 'Friedmannian part' of the averaged equations, since both arise as subcases of special solutions for the backreaction terms ; second, we choose the simplest foliation (constant lapse and vanishing shift in the ADM (Arnowitt Deser Misner) formulation of Einstein's equations) and the simplest matter model 'irrotational dust' in order to exemplify the correspondence ; third, we realize the correspondence for a particular class of scaling solutions with single-power laws. In this framework we show that the correspondence holds with a standard minimally coupled scalar field that can play the role of a quintessence field. If we include the full coordinate degrees of freedom as well as an inhomogeneous pressure source in a perfect fluid energy momentum tensor (or even imperfect fluid sources), more sophisticated scalar field cosmologies would arise. We comment on this possibility at the end of the paper.

The proposed correspondence can also be inverted, e.g. we may start with a known model of quintessence and try to recover the corresponding solution of the averaged Einstein equations. We shall not exemplify this inversion in the present paper, we just note that free parameters in a given quintessence model can be determined through this correspondence.

We proceed as follows. Section 2 recalls the basic equations and relations needed for the present work. Section 3 sets up the correspondence between kinematical backreaction and scalar field models. Section 4 investigates a family of scaling solu-

tions to the backreaction problem. Section 5 exploits the proposed correspondence. Here we explicitly reconstruct the potential for the scaling solutions, explore the solution space of inhomogeneous cosmologies with the help of the scaling solutions, and discuss some particular cases, which have been advanced before in the literature, and which are now interpreted with the help of a morphon field. We also give a concrete model and confront it with observational constraints. Section 6 contains a summary and an outlook on possible generalizations.

The backreaction context

The averaging problem in relativistic cosmology involves a variety of approaches and problems. Generally, research work in this field deals with averaging inhomogeneities in matter and/or geometry. Mostly, spatial averaging is envisaged, but also averaging on the light-cone is accessible by some averaging techniques (compare discussions and references in [116], [212], [122, 124, 125].)

In this work we focus on the comparatively simple approach of averaging the scalar parts of Einstein's equations on a given foliation of spacetime. The time-evolution of integral properties of the cosmological model on compact spatial domains can be extracted from Einstein's equation without any perturbative assumptions by Riemannian volume integration. The simplest example is the time-evolution of the volume. Thus, we do not aim at changing the physics of the inhomogeneous cosmological model. More ambitious and physically different in motivation are averaging strategies that effectively replace the inhomogeneous hypersurfaces and inhomogeneous tensor fields on these hypersurfaces by another, smoothed universe model [124], [218]. These latter techniques lead to further 'intrinsic backreaction' effects by, e.g. flowing averages on a bumpy geometry to averages on a constant-curvature 'template universe' as a fitting device. This can be nicely put into practice using the Ricci-Hamilton flow that renormalizes the averaged variables and leads to a 'dressing' of cosmological parameters by those additional 'backreaction' terms [124],[125].

With kinematical averaging we aim at an effective description of the kinematics of the inhomogeneous Universe, and we still encounter a number of scalar contributions that add up to the averaged matter sources in an inhomogeneous model ('kinematical backreaction terms') as a result of the fact that spatial averaging and time-evolution are non-commuting operations (not necessarily to be attributed to the nonlinearity of Einstein's equations). Employing a perfect fluid source in the energy momentum tensor, those 'backreaction terms' comprise a contribution from averaged expansion and shear fluctuations (i.e., terms encoding extrinsic curvature of the hypersurfaces), the averaged 3-Ricci curvature (i.e., a term that encodes intrinsic curvature of the hypersurfaces), an averaged pressure gradient (or

an averaged acceleration divergence), and frame fluctuation terms, i.e. coordinate effects (like the averaged variance of the lapse function in the ADM setting). In this framework and for vanishing shift, but arbitrary lapse and arbitrary 3–metric, the general equations were given in [133]. However, we further restrict the analysis to a universe model filled with an irrotational fluid of dust matter [132] in order to provide the most transparent framework for the purpose of setting up the correspondence with a scalar field cosmology.

Averaged ADM equations for constant lapse and vanishing shift

We employ a foliation of spacetime into flow–orthogonal hypersurfaces with the 3–metric g_{ij} in the line–element $ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dX^i dX^j$. We define the following averager, restricting attention to scalar functions $\Psi(t, X^i)$:

$$\langle \Psi(t, X^i) \rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \Psi(t, X^i) J d^3 X \ ; \ V_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} J d^3 X \ , \quad (\text{C.3.1})$$

with $J := \sqrt{\det(g_{ij})}$; g_{ij} is an arbitrary metric of the spatial hypersurfaces, and X^i are coordinates that are constant along flow lines, which are here spacetime geodesics. Defining a *volume scale factor* by the volume $V_{\mathcal{D}}$ of a simply–connected domain \mathcal{D} in a t –hypersurface, normalized by the volume of the initial domain \mathcal{D}_i ,

$$a_{\mathcal{D}} := \left(\frac{V_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}_i}} \right)^{1/3} \ , \quad (\text{C.3.2})$$

the following exact equations can be derived [132] (an overdot denotes partial time–derivative). First, by averaging *Raychaudhuri’s equation* we obtain :

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \ ; \ \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^3} \ . \quad (\text{C.3.3})$$

The first integral of the above equation is directly given by averaging the *Hamiltonian constraint* :

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6} \ , \quad (\text{C.3.4})$$

where the total restmass $M_{\mathcal{D}}$, the averaged spatial 3–Ricci scalar $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ and the *kinematical backreaction term* $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ are domain–dependent and, except the mass, time–dependent functions. The backreaction source term is given by

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := 2 \langle II \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle I \rangle_{\mathcal{D}}^2 = \frac{2}{3} \langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}} \ ; \quad (\text{C.3.5})$$

here, $I = \Theta^i_i$ and $II = \frac{1}{2}[(\Theta^i_i)^2 - \Theta^i_j \Theta^j_i]$ denote the principal scalar invariants of the expansion tensor, defined as minus the extrinsic curvature tensor $K_{ij} := -\Theta_{ij}$. In the second equality above it was split into kinematical invariants through the decomposition $\Theta_{ij} = \frac{1}{3}g_{ij}\theta + \sigma_{ij}$, with the rate of expansion $\theta = \Theta^i_i$, the shear tensor σ_{ij} , and the rate of shear $\sigma^2 := 1/2\sigma_{ij}\sigma^{ij}$; note that vorticity is absent in the present foliation; we adopt the summation convention.

The time-derivative of the averaged Hamiltonian constraint (C.3.4) agrees with the averaged Raychaudhuri equation (C.3.3) by virtue of the following *integrability condition* :

$$\partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0 \quad , \quad (\text{C.3.6})$$

where we have introduced a *volume Hubble functional* $H_{\mathcal{D}} := \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}$. The above equations can formally be recast into standard Friedmann equations for an effective perfect fluid energy momentum tensor with new effective sources [133]² :

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{48\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \quad . \quad (\text{C.3.7})$$

$$3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -\Lambda - 4\pi G(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + 3p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}) \quad ; \quad 3H_{\mathcal{D}}^2 = \Lambda + 8\pi G\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} \quad ; \quad \dot{\varrho}_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}}(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}) = 0 \quad . \quad (\text{C.3.8})$$

Eqs. (C.3.8) correspond to the equations (C.3.3), (C.3.4) and (C.3.6), respectively.

Given an equation of state of the form $p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = \beta(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}, a_{\mathcal{D}})$ that relates the effective sources (C.3.7) with a possible explicit dependence on the volume scale factor, the effective Friedmann equations (C.3.8) can be solved (one of the equations (C.3.8) is redundant). Therefore, any question posed that is related to the evolution of scalar characteristics of inhomogeneous universe models may be ‘reduced’ to finding the *cosmic state* on a given spatial scale. Although formally similar to the situation in Friedmannian cosmology, here the equation of state depends on the details of the evolution of inhomogeneities. In general it describes non-equilibrium states.

We finally wish to emphasize that these equations are limited to *regular* solutions : as in the non-averaged case, the matter model ‘dust’ generically leads to shell-crossing singularities. In the averaged equations this fact would be mirrored in a break of the boundary of the averaging domain or a merging of two boundaries (Legendrian singularities), thus inducing a jump of the Euler-characteristic of the

²Note that in this representation of the effective equations p_{eff} denotes an ‘effective pressure’; there is no pressure due to a matter source here.

boundary. This would especially happen for small collapsing domains and is related to the fragmentation and merging of structures. Here, by assumption, the domain \mathcal{D} must remain simply-connected. It is possible to cure this small-scale problem by generalizing the matter model; for example, if multi-streaming is accounted for, an extra term related to velocity dispersion would add up to the kinematical backreaction term. Such a term can regularize singularities as was discussed in detail within the Newtonian framework in [219].

Derived quantities

For later convenience we introduce a set of dimensionless average characteristics in terms of which we shall express the solutions :

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} := \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} ; \quad \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} := \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2} ; \quad \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} := -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} ; \quad \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} := -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} . \quad (\text{C.3.9})$$

We shall, henceforth, call these characteristics ‘parameters’, but the reader should keep in mind that these are functionals on \mathcal{D} . Expressed through these parameters the averaged Hamiltonian constraint (C.3.4) assumes the form of a ‘cosmic quartet’ :

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = 1 . \quad (\text{C.3.10})$$

In this set, the averaged scalar curvature parameter and the kinematical backreaction parameter are directly expressed through $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, respectively. In order to compare this pair of parameters with the ‘Friedmannian curvature parameter’ that is employed to interpret observational data, we can alternatively introduce the pair

$$\Omega_k^{\mathcal{D}} := -\frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} ; \quad \Omega_{\mathcal{Q}_N}^{\mathcal{D}} := \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt'} a_{\mathcal{D}}^2(t') , \quad (\text{C.3.11})$$

being related to the previous parameters by $\Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}_N}^{\mathcal{D}} = \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}$.

These parameters arise from inserting the first integral of Eq. (C.3.6),

$$\frac{k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt'} a_{\mathcal{D}}^2(t') = \frac{1}{6} (\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}) , \quad (\text{C.3.12})$$

into (C.3.4) :

$$\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}^2 + k_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}}{3} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt'} a_{\mathcal{D}}^2(t') . \quad (\text{C.3.13})$$

This equation is formally equivalent to its Newtonian counterpart [142], [165]. It shows that, by eliminating the averaged curvature, the whole history of the averaged kinematical fluctuations acts as a source of a generalized Friedmann equation.

Like the volume scale factor $a_{\mathcal{D}}$ and the volume Hubble functional $H_{\mathcal{D}}$, we may introduce ‘parameters’ for higher derivatives of the volume scale factor, e.g. the *volume deceleration functional*

$$q^{\mathcal{D}} := -\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \frac{1}{H_{\mathcal{D}}^2} = \frac{1}{2}\Omega_m^{\mathcal{D}} + 2\Omega_Q^{\mathcal{D}} - \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} \quad , \quad (\text{C.3.14})$$

or (*volume*) *state finders* [174, 220] (see also [221] and references therein).

In this paper we shall denote all the parameters evaluated at the initial time by the index \mathcal{D}_i , and at the present time by the index \mathcal{D}_0 .

More details concerning these equations and their solutions may be found in [132, 133, 131, 213].

The morphon field

In the above-introduced framework we distinguish the averaged matter source and averaged sources due to geometrical inhomogeneities stemming from extrinsic and intrinsic curvature (backreaction terms). The averaged equations can be written as standard Friedmann equations that are sourced by both. Thus, we have the choice to consider the averaged model as a cosmology with matter source ‘morphed’ by a mean field that is generated by backreaction terms. We shall demonstrate below that this introduction of a ‘morphon field’ provides a natural description. We say ‘natural’, because the form of the effective sources in Eq. (C.3.7) shows that, for vanishing averaged scalar curvature, backreaction obeys a stiff equation of state as suggested by the fluid analogy with a free scalar field [222], [133]. Moreover, if we also model the averaged curvature by an effective scalar field potential, we find that the integrability condition (C.3.6) provides the evolution equation for the scalar field in this potential, and it is identical to the Klein–Gordon equation, as we explain now.

Setting–up the correspondence

We now propose to model the effective sources arising from geometrical degrees of freedom due to backreaction (i.e., roughly the ‘vacuum’ part of the effective equations) by a scalar field $\Phi_{\mathcal{D}}$ evolving in an effective potential $U_{\mathcal{D}} := U(\Phi_{\mathcal{D}})^3$,

³We choose the letter U for the potential to avoid confusion with the volume functional.

both domain–dependent, as follows (recall that we have no matter pressure source here) :

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} =: \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} =: p_{\Phi}^{\mathcal{D}} \quad , \quad (\text{C.3.15})$$

with [222], [223]

$$\varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \epsilon \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + U_{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \epsilon \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}} \quad , \quad (\text{C.3.16})$$

where $\epsilon = +1$ for a standard scalar field (with positive kinetic energy), and $\epsilon = -1$ for a phantom scalar field (with negative kinetic energy). Thus, in view of Eq. (C.3.7), we obtain the following correspondence :

$$-\frac{1}{8\pi G} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}} \quad ; \quad -\frac{1}{8\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 3U_{\mathcal{D}} \quad . \quad (\text{C.3.17})$$

We see that the averaged scalar curvature directly represents the potential, whereas the kinematical backreaction term represents ‘kinetic energy density’ directly, if the averaged scalar curvature vanishes. This representation of $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ is physically sensible, since it expresses a balance between ‘kinetic energy’ $E_{\text{kin}}^{\mathcal{D}} := 1/2 \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 V_{\mathcal{D}}$ and ‘potential energy’ $E_{\text{pot}}^{\mathcal{D}} := -U_{\mathcal{D}} V_{\mathcal{D}}$. For $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = 0$ we obtain the ‘virial condition’⁴ $2\epsilon E_{\text{kin}}^{\mathcal{D}} + E_{\text{pot}}^{\mathcal{D}} = 0$, and so kinematical backreaction is identified as causing deviations from ‘equilibrium’ (defined through this balance⁵). Note that Friedmann–Lemaître cosmologies correspond to the vanishing of $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ (established ‘virial equilibrium’ or vanishing relative information entropy according to [134]) *on all scales*. The scale–dependent formulation allows to identify states in ‘virial equilibrium’ on particular spatial scales. Below we learn that this ‘virial balance’ can be stable *or* unstable.

Inserting (C.3.17) into the integrability condition (C.3.6) then implies that $\Phi_{\mathcal{D}}$, for $\dot{\Phi}_{\mathcal{D}} \neq 0$, obeys the Klein–Gordon equation :

$$\ddot{\Phi}_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \Phi_{\mathcal{D}}} U(\Phi_{\mathcal{D}}) = 0 \quad . \quad (\text{C.3.18})$$

With this correspondence the backreaction effect is formally equivalent to the dynamics of a homogeneous, minimally coupled scalar field. Given this correspondence we can try to reconstruct the potential in which the morphon field evolves. Note that there are two equations of state in this approach, one for the morphon, $w_{\Phi}^{\mathcal{D}} := p_{\Phi}^{\mathcal{D}}/\varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}}$, and the total ‘cosmic equation of state’ including the matter source term, $w_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} := p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}/\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}$.

⁴For negative potential energy (positive curvature) the sign $\epsilon = +1$, and for positive potentials the sign $\epsilon = -1$ (phantom energy) is suggested from the scalar virial theorem $2E_{\text{kin}}^{\mathcal{D}} = -E_{\text{pot}}^{\mathcal{D}}$.

⁵An alternative definition of ‘out-of-equilibrium’ states uses an information theoretical measure as proposed in [134] and discussed in the present context in [213].

It is also worth noting that a usual scalar field source in a Friedmannian model, attributed e.g. to phantom quintessence that leads to acceleration, will violate the *strong energy condition* $\varrho + 3p > 0$, i.e. :

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\varrho + 3p) = -4\pi G(\varrho_H + \varrho_\Phi + 3p_\Phi) > 0 \quad , \quad (\text{C.3.19})$$

and actually also the *weak energy condition* $\varrho + p > 0$, while for a morphon field both are not violated for the true content of the Universe, that is ordinary dust matter. It is interesting that we can write a ‘strong energy condition’ for the effective sources, i.e. :

$$3\frac{\ddot{a}_D}{a_D} = -4\pi G(\varrho_{\text{eff}}^D + 3p_{\text{eff}}^D) = -4\pi G(\langle \varrho \rangle_D + \varrho_\Phi^D + 3p_\Phi^D) = -4\pi G\langle \varrho \rangle_D + \mathcal{Q}_D < 0. \quad (\text{C.3.20})$$

While we do not need ‘exotic matter’, the above condition will be ‘violated’ in order to have volume acceleration, $\mathcal{Q}_D > 4\pi G\langle \varrho \rangle_D$ [140], [213], *cf.* the subsection on acceleration conditions.

Newtonian limit

In the Newtonian limit [142], the above correspondence persists. The sources of the morphon in the effective Friedmann equations (C.3.8) are then identified as follows, *cf.* Eqs. (C.3.11) and (C.3.12) :

$$\begin{aligned} \varrho_{\Phi N}^D &:= \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{1}{a_D^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_D \frac{d}{dt'} a_D^2(t') - \frac{3k_{D_i}}{a_D^2} \right] ; \\ p_{\Phi N}^D &:= -\frac{1}{24\pi G} \left[\frac{1}{a_D^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_D \frac{d}{dt'} a_D^2(t') - \frac{3k_{D_i}}{a_D^2} + 2\mathcal{Q}_D \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.3.21})$$

However, Newtonian cosmologies suppress the morphon degrees of freedom on some fixed large scale where the kinematical backreaction term has to vanish identically [142]. In particular, this remark applies to cosmological N–body simulations : by construction, these simulations enforce ‘virial equilibrium’ of the morphon energies on the scale of the simulation box.

The Newtonian framework also offers a concise explanation of our choice ‘morphon field’ : the kinematical backreaction term \mathcal{Q}_D can be entirely expressed through Minkowski Functionals [224] of the boundary of the averaging domain [131]. These functionals form a complete basis in the space of (Minkowski–)additive measures for the morphometry of spatial sets.

Motivation : the morphon modeling a cosmological constant

Let us give a simple example. As shown in [213], Subsect. 3.2 (also advanced as a motivation case in [140]), the effective source $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ may act as a cosmological constant. The general condition for the corresponding exact solution of the effective Friedmann equations (C.3.8) (with $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = 0$ and $\Lambda = 0$) is $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 6k_{\mathcal{D}_i}/a_{\mathcal{D}}^2 - 3\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$; $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i}$; e.g., for $k_{\mathcal{D}_i} = 0$ we have :

$$\dot{\Phi}_{\mathcal{D}} = 0 \quad ; \quad \varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}} = U_{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\Phi}^{\mathcal{D}} = -U_{\mathcal{D}} \quad ; \quad U_{\mathcal{D}} = U_{\mathcal{D}_i} . \quad (\text{C.3.22})$$

The kinematical backreaction term assumes a constant value $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = 8\pi G U_{\mathcal{D}_i}$, and the morphon potential mimics a (scale-dependent) cosmological constant. Note that the averaged curvature is non-zero, $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = -24\pi G U_{\mathcal{D}_i}$, so that simultaneously the morphon unavoidably installs a non-zero averaged scalar curvature.

We shall now exemplify this correspondence for a new class of scaling solutions that contains this and other known subcases.

A family of scaling solutions of the backreaction problem

In the following, we shall study a class of solutions that prescribes backreaction and averaged curvature functionals in the form of scaling laws of the volume scale factor $a_{\mathcal{D}}$. If not explicitly stated otherwise, we restrict attention to the case $\Lambda = 0$ throughout, and treat the cosmological constant as a particular morphon.

Exact scaling solutions

In this subsection we shall present a systematic classification of scaling behaviors for the cosmological models introduced previously. The averaged dust matter density $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}$ evolves, for a restmass preserving domain \mathcal{D} , as $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-3}$. Let us suppose that the backreaction term and the averaged curvature also obey scaling laws, that is :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n \quad ; \quad \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^p , \quad (\text{C.3.23})$$

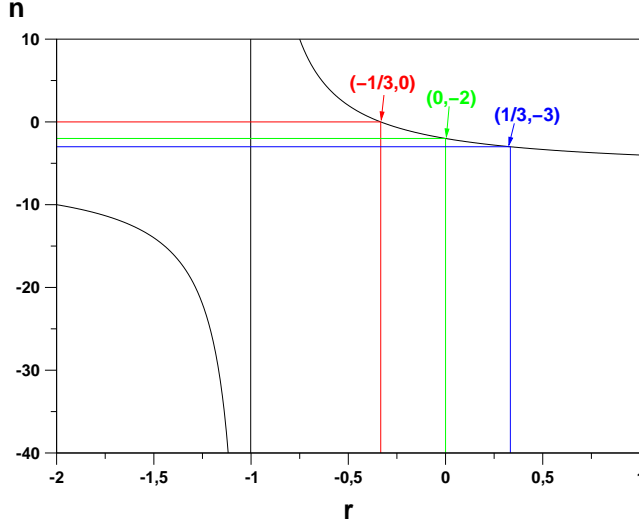
where $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i}$ and $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$ denote the initial values of $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ and $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$, respectively.

Rewriting the integrability condition (C.3.6),

$$a_{\mathcal{D}}^{-6} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^6 \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}) + a_{\mathcal{D}}^{-2} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) = 0 , \quad (\text{C.3.24})$$

a first scaling solution of that equation is obviously provided by ([132] Appendix B) :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-6} \quad ; \quad \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2} . \quad (\text{C.3.25})$$

FIG. C.3.1 – Scaling law n for the backreaction as a function of the parameter r .

Moreover, this is clearly the only solution with $n \neq p$. In the case $n = p$, we define a new ‘backreaction parameter’ $r^{\mathcal{D}}$ (that can be chosen differently for a chosen domain of averaging⁶) such that $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} \propto \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$; the solution reads :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = r \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = r \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n, \quad (\text{C.3.26})$$

where (*cf.* Fig. C.3.1)

$$n = -2 \frac{(1 + 3r)}{(1 + r)}, \quad (\text{C.3.27})$$

with $r \neq -1$. The case $r = -1$ is not represented as a solution in this class; this line of states degenerates to a point corresponding to a model with Einstein–de Sitter kinematics, i.e. it has vanishing backreaction and vanishing averaged curvature. Note here, that the vanishing of $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, if required on all domains, is necessary, but also sufficient for the reduction of the averaged equations to Friedmann–Lemaître cosmologies. This limiting case also appears in the relations among the cosmological parameters, discussed after the next subsection.

Discussion of the scaling solutions

The solution (C.3.25) corresponds to the case where the backreaction and the averaged scalar curvature evolve independently, leading to an averaged curvature

⁶For notational ease we henceforth drop the index \mathcal{D} and simply write r .

similar to a constant ‘Friedmannian curvature’ and an additional term that scales as $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}^2$. As the universe model expands, this solution is rapidly equivalent to a pure constant curvature term, we may say that this solution represents (and maintains) a near-Friedmannian state ($\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ decays much more rapidly $\propto V_{\mathcal{D}}^{-2}$ compared with the averaged density $\propto V_{\mathcal{D}}^{-1}$). Therefore, we shall not model this solution by a scalar field when describing the late-time dust-dominated Universe. It is interesting to note that this solution exhibits the same late-time behavior as the long-wavelength part of the solution found through the gradient expansion approximation scheme in [140].

On the contrary, the solutions (C.3.26) entail a strong coupling between kinematical backreaction and averaged scalar curvature. The coupling itself must be considered a generic property; it has been identified as being responsible for a much slower decay of kinematical fluctuations in an expanding universe model on the cost of averaged scalar curvature. This is a genuinely relativistic property. It was argued in [214] that it is this possibility which is needed for an explanation of Dark Energy through backreaction today, provided the initial conditions are appropriate.

The scaling solutions (C.3.26) can be employed to represent generic features of backreaction- or curvature-dominated cosmologies (while density fluctuations must not be large). Such cosmologies may significantly deviate from a standard Friedmann cosmology with regard to the temporal evolution of their parameters. We note that, even if deviations in the volume scale factor $a_{\mathcal{D}}$ at a final time may not be large, deviations in its history, i.e. its time-derivatives, in particular its second time-derivative related to the cosmological parameters, may be large (this insight is a result of a detailed analysis in Newtonian cosmology [165]).

Let us make a general remark concerning the solution subspace of the scaling solutions given above. We appreciate that the polynomial nature of (C.3.23), together with the form of the integrability condition (C.3.6), implies that any linear combination of these solutions provides a new solution. In particular, one can always add a constant curvature term to a particular solution. We also infer that only the case $r = 0$ ($n = -2$) implies a (scale-dependent) ‘Friedmannian’ evolution of the (physical) curvature parameter $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$. Only the singular case $r = -1$ would imply a vanishing ‘Friedmannian’ curvature parameter (see below). If we would require $r = -1$ on all scales, then the model reduces to the Euclidean case (everywhere vanishing 3-Ricci curvature).

We resume this discussion in the next section with the help of concrete examples. There we also provide an illustration and further discussion of the subspace defined by the scaling solutions.

Finally let us note that, while the scaling solutions and scenarios investigated here and below satisfy the averaged equations of motions, these models are

still phenomenological and not derived non-perturbatively from the fundamental theory, i.e. there is no guarantee that corresponding realistic solutions of the original inhomogeneous Einstein equations could be found that satisfy the assumed scaling laws.

Some relations among cosmological parameters

We here write some useful relations among the dimensionless cosmological parameters, as they were introduced earlier, Eqs. (C.3.9) and (C.3.11). For the scaling solutions (C.3.27) we have :

$$\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = r \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} , \quad (\text{C.3.28})$$

and for the ‘Friedmannian curvature parameter’ we find (by integration of (C.3.12) for the solutions (C.3.27)) :

$$\begin{aligned} \Omega_k^{\mathcal{D}} &= \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} - \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_i}^t dt' \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt'} a_{\mathcal{D}}^2(t') = \\ &(1+r) a_{\mathcal{D}}^{\frac{4r}{(1+r)}} \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = (1+r) \frac{H_{\mathcal{D}_i}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} a_{\mathcal{D}}^{-2} \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i} . \end{aligned} \quad (\text{C.3.29})$$

(The latter equation follows by noting that $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i} (H_{\mathcal{D}_i}^2 / H_{\mathcal{D}}^2) a_{\mathcal{D}}^n$ and $4r/(1+r) = -(n+2)$). Eq. (C.3.29) now explicitly shows that the generally held view that $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ models the averaged curvature is a misperception : as soon as kinematical backreaction is relevant (itself or its time-history), the averaged curvature may evolve very differently compared with a constant-curvature model. Evaluating (C.3.29) at initial time, we find that initial data differ only by the parameter r in this class of solutions, which eases their observational determination :

$$\Omega_k^{\mathcal{D}_i} = (1+r) \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i} , \text{ i.e. , } k_{\mathcal{D}_i} = \frac{(1+r)}{6} \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} . \quad (\text{C.3.30})$$

Since in the sum $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = \Omega_{\mathcal{Q}_N}^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}}$, the ‘Newtonian’ parameter $\Omega_{\mathcal{Q}_N}^{\mathcal{D}}$, cf. Eq. (C.3.11), would be interpreted as a cosmological constant parameter, Ω_{Λ}^F , in a ‘Friedmannian fitting model’, we can already from these relations infer that with $\Omega_k^{\mathcal{D}} = -k_{\mathcal{D}_i} / (H_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}^2)$, $\Omega_k^{\mathcal{D}_i} = (1+r) \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}$, and $\Omega_k^{\mathcal{D}} = \Omega_k^{\mathcal{D}_i} (H_{\mathcal{D}_i}^2 / H_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}^2)$, the value of a fitted Λ -parameter would directly depend on the initial datum for $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ according to the relation

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = (1+r) \frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i} H_{\mathcal{D}_i}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} a_{\mathcal{D}}^n = \Omega_k^{\mathcal{D}_i} \frac{H_{\mathcal{D}_i}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} a_{\mathcal{D}}^2 = \Omega_k^{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^{n+2} , \quad (\text{C.3.31})$$

so that today

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}_0} = \Omega_{\Lambda}^F + \Omega_k^{\mathcal{D}_0} = \Omega_k^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^{n+2} . \quad (\text{C.3.32})$$

With this relation we can determine the dependence of the scaling solution parameter r on the cosmological parameters today, expressed through the ‘Friedmannian fitting parameters’ Ω_Λ^F and $\Omega_k^{\mathcal{D}^0}$. This allows us to put constraints on r , which will be done in the subsections called “Observational constraints on parameters” and “Constraining r by supernovæ observations”.

We see that in these estimates we also need the correct evolution of $a_{\mathcal{D}}$ in order to calculate $a_{\mathcal{D}^0}$. This is possible for the particular class of scaling solutions we consider (we have numerically evaluated the evolution for the volume scale factor below); in general it requires a detailed model for the evolution of inhomogeneities.

Finally, we emphasize that the above relations are a result of our ‘single-scaling’ model ansatz. More flexible models arise by superimposing scaling solutions (and so modeling the dynamics more realistically). The relation (C.3.31) is a consequence of this: in general, initial data for the 3-Ricci curvature and the integration constant $k_{\mathcal{D}^i}$ can be independently chosen. The reader should therefore make up their mind about a particular choice of superposition of scaling solutions that they would like to implement.

In this line our model is maximally conservative concerning the amount of ‘early’ Dark Energy [225], i.e. the value of $\Omega_{\mathcal{Q}^N}^{\mathcal{D}}$, interpreted as a (constant) Λ -parameter at the present time evolves as a time-dependent ‘cosmological term’. Its initial value can be calculated:

$$\Omega_{\mathcal{Q}^N}^{\mathcal{D}^i} = \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}^i} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}^i} - \Omega_k^{\mathcal{D}^i} = (1+r)\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}^i} - \Omega_k^{\mathcal{D}^i} = 0 . \quad (\text{C.3.33})$$

Thus, we implicitly require the initial contribution of this term to vanish, while actually a value in the range of a few percent would be allowed by observational constraints [136], [137], [138].

Morphon–quintessence

The obvious candidates for scalar field models, which come into the fore in the situation of a dust-dominated Universe, are quintessence models. We shall now exploit the proposed correspondence to explicitly reconstruct the scalar field dynamics. Since quintessence models aim at mimicking a repulsive component in the cosmological evolution, it is natural that a ‘working model’ of quintessence would, via the proposed correspondence of a ‘morphon–quintessence’, also lead to a ‘working model’ of backreaction. For the purpose of concretizing the correspondence, let us now consider solutions of the type (C.3.26). We will show that they can be put in correspondence with a one-parameter family of homogeneous scalar field solutions that act as standard or phantom quintessence fields.

Reconstructing the potential of the morphon field

The scaling solutions (C.3.26) provide :

$$\dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 = -\epsilon \frac{\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{8\pi G} \left(r + \frac{1}{3} \right) a_{\mathcal{D}}^n ; \quad U_{\mathcal{D}} = -\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} a_{\mathcal{D}}^n ; \quad n = -2 \frac{(1+3r)}{(1+r)} ; \quad \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} = r \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} . \quad (\text{C.3.34})$$

This correspondence defines a scalar field evolving in a *positive* potential, if $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$ (and in a *negative* potential if $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$), and a *real* scalar field, if $\epsilon \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} (r+1/3) < 0$. In other words, if $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$ we have a priori a phantom field for $r < -1/3$ and a standard scalar field for $r > -1/3$; if $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$, we have a standard scalar field for $r < -1/3$ and a phantom field for $r > -1/3$.

The system (C.3.34) can be inverted to reconstruct the potential of the morphon field. Indeed, the kinetic term of the scalar field can be expressed in terms of $d\Phi_{\mathcal{D}}/da_{\mathcal{D}}$, and this equation can be explicitly integrated, for $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} \neq 0$, leading to :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) &= \frac{2\sqrt{\epsilon(1+3r)(1+r)}}{(1-3r)\sqrt{\pi G}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{-(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} \frac{(1-3r)}{(1+r)}}{16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i}}} a_{\mathcal{D}}^{\frac{(1-3r)}{(1+r)}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-2\epsilon n}}{(n+3)\sqrt{\pi G}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{(1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}}} \right) , \end{aligned} \quad (\text{C.3.35})$$

where we have defined the fraction $\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}}$ of the curvature and density parameters :

$$\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}} := \frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}}{\Omega_m^{\mathcal{D}}} = \gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{(n+3)} ; \quad (n+3) = \frac{(1-3r)}{(1+r)} ; \quad \gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} := \frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}}{\Omega_m^{\mathcal{D}_i}} . \quad (\text{C.3.36})$$

In this relation, necessarily, $r \neq -1/3$ and $r \neq -1$. We immediately find that $\Phi_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}})$ is an increasing function of $a_{\mathcal{D}}$. Then, inverting that relation and inserting the result into the expression for the potential, we obtain the explicit form of the self-interaction term of the scalar field :

$$\begin{aligned} U(\Phi_{\mathcal{D}}) &= \frac{-(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} \left((1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} \right)^{2\frac{(1+3r)}{(1-3r)}} \sinh^{-4\frac{(1+3r)}{(1-3r)}} \left(\frac{(1-3r)\sqrt{\pi G}}{\sqrt{\epsilon(1+3r)(1+r)}} \Phi_{\mathcal{D}} \right) \\ &= \frac{2(1+r)}{3} \left((1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i} \right)^{\frac{3}{(n+3)}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} \sinh^{\frac{2n}{(n+3)}} \left(\frac{(n+3)}{\sqrt{-\epsilon n}} \sqrt{2\pi G} \Phi_{\mathcal{D}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3.37})$$

where $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i}$ is the initial averaged restmass density of dust matter, and where the restrictions introduced above still hold, with the new constraint $r \neq 1/3$. To sum

up, in order to obtain a consistent description in terms of a *real-valued* scalar field, we must have $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$ and $\epsilon = +1$ for $r < -1$, and $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$ for $r > -1$, with $\epsilon = -1$, if $-1 < r < -1/3$ and $\epsilon = +1$, if $r > -1/3$. One can immediately notice that the energy scale of the scalar field potential is determined by the averaged matter density : the scales that determine the scalar field dynamics are fixed by the matter distribution. As a result of our correspondence to quintessence models and in view of many results that were obtained in this field, the above potential can also be found in [168] (their Eq. (121) with a typo corrected in [174]⁷) and, e.g. [175].

We now study the cases that were excluded in the above derivations. First, let us consider the case of vanishing matter source. The correspondence given by equations (C.3.35) and (C.3.37) holds in the presence of a non-vanishing matter field, but one can also reconstruct the scalar field cosmology for the vacuum. Setting $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} = 0$ in the equations (C.3.4) and (C.3.13), and applying the same procedure as the one described above, one finds :

$$U(\Phi_{\mathcal{D}}) = -\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{24\pi G} \exp\left(-4\sqrt{\frac{\epsilon(1+3r)}{(1+r)}}\sqrt{\pi G}\Phi_{\mathcal{D}}\right). \quad (\text{C.3.38})$$

Up to the renormalization factor $(1+r)\left((1+r)\gamma_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{D}_i}\right)^{2\frac{(1+3r)}{(1-3r)}}$ that reflects the presence of matter, this is exactly the solution (C.3.37) in the case $\Phi_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$.

As noted above, the morphon field can be interpreted as representing the effect of the averaged geometrical degrees of freedom ; then the comparison of its potential in the presence of matter and in the vacuum tells us, how the matter field influences the backreaction terms : it affects the energy scale through a simple factor depending on the initial averaged matter density, and so modifies the dynamics of the morphon when the domain volume is small (because $\Phi_{\mathcal{D}}$ is an increasing function of $a_{\mathcal{D}}$; the limit $\Phi_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$ corresponds to $a_{\mathcal{D}} \rightarrow +\infty$.) On the contrary, when the domain volume becomes big, the dynamics of backreaction is similar to its dynamics in vacuum, which is natural because the averaged matter density is then diluted.

Second, we discuss the three cases of the backreaction parameter r that were not considered until now : $r = \pm 1/3$ and $r = -1$. In the case $r = 1/3$, the solution reads $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = 1/3\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-3}$; this corresponds to a scale-dependent Einstein-de Sitter scenario with a renormalized initial dust density $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} - \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}/36\pi G$ (*cf.* Appendix A). This model has zero effective pressure p_{eff} . The case $r = -1/3$ leads to $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = -1/3\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \text{const.}$, which is equivalent to a scale-dependent Friedmannian scenario with a cosmological constant : $\Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} = -\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}/3$ (that was

⁷Thanks to Varun Sahni, who has pointed this out to us.

our motivating example). The case $r = -1$ corresponds to a strict compensation between the kinematical backreaction and the averaged scalar curvature. It leads to a scale-dependent Friedmann model with only a dust matter source, in other words, to a scale-dependent Einstein-de Sitter model.

The above three cases appear as limiting cases of the scalar field model.

The scaling solutions correspond to specific scalar field models with a constant partition of energy between the kinetic and the potential energies of the scalar field. Indeed, if we define the kinetic energy by $E_{\text{kin}}^{\mathcal{D}} := \frac{1}{2}\dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 V_{\mathcal{D}}$ and the potential energy by $E_{\text{pot}}^{\mathcal{D}} := -U(\Phi_{\mathcal{D}})V_{\mathcal{D}}$ as before, we find the following ‘balance condition’ for the scalar field representation of backreaction and averaged scalar curvature in the case of the scaling solutions :

$$E_{\text{kin}}^{\mathcal{D}} + \frac{(1+3r)}{2\epsilon} E_{\text{pot}}^{\mathcal{D}} = 0 . \quad (\text{C.3.39})$$

We previously discussed the case $r = 0$ (‘zero backreaction’) for which this condition agrees with the standard scalar virial theorem. This balance between kinetic and potential energies is well known in the context of scaling solutions of quintessence (see [226, 166] and references therein).

Finally, the effective equation of state for this morphon field is constant and given by :

$$w_{\Phi}^{\mathcal{D}} = -\frac{1(1-3r)}{3(1+r)} = -\frac{1}{3}(n+3) , \quad (\text{C.3.40})$$

which is less than $-1/3$, iff $r \in]-1; 0[$. The overall ‘cosmic equation of state’ including the matter source term is given by :

$$w_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} := \frac{p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}}{\rho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}} = -\frac{1}{3} \frac{(1-3r)a_{\mathcal{D}}^{\frac{1-3r}{1+r}}}{(1+r)a_{\mathcal{D}}^{\frac{1-3r}{1+r}} + 1/\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}_i}} = w_{\Phi}^{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + a_{\mathcal{D}}^{-(n+3)}/\gamma_{km}^{\mathcal{D}_i}} , \quad (\text{C.3.41})$$

$$\text{with } \gamma_{km}^{\mathcal{D}_i} := \frac{\Omega_k^{\mathcal{D}_i}}{\Omega_m^{\mathcal{D}_i}} = (1+r)\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}_i} . \quad (\text{C.3.42})$$

Or, equivalently :

$$w_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = w_{\Phi}^{\mathcal{D}} (1 - \Omega_m^{\mathcal{D}}) . \quad (\text{C.3.43})$$

Thus, the ‘cosmic state’ asymptotically evolves, for an expanding universe model with $(n+3) = (1-3r)/(1+r) > 0$, into $w_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} \rightarrow -(n+3)/3 = w_{\Phi}^{\mathcal{D}}$. A necessary condition for the scalar field part to dominate the expansion of the universe model at late times is $n = -2(1+3r)/(1+r) > -3$, which implies $r < 1/3$. In that case, since the equation of state $w_{\Phi}^{\mathcal{D}}$ is constant, a universe model dominated by

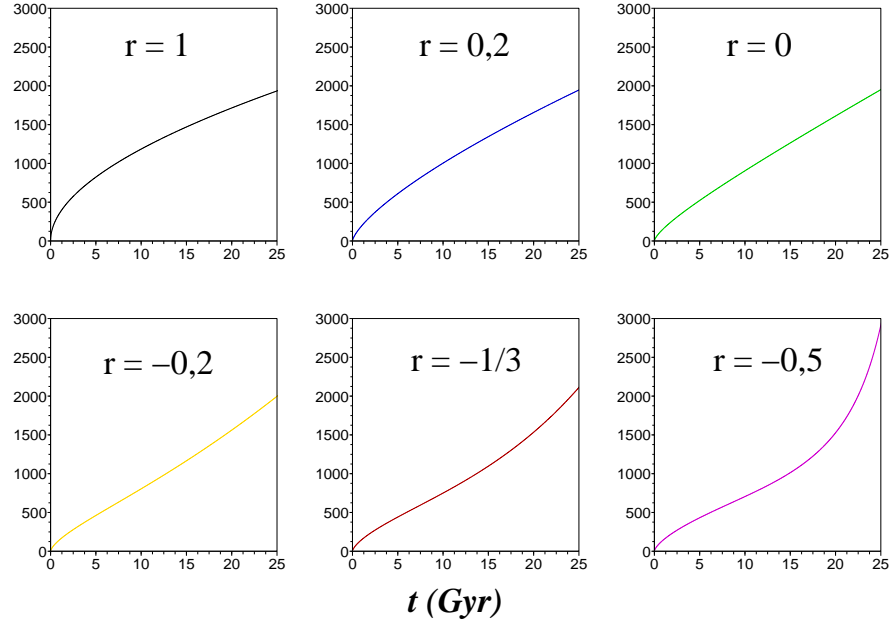


FIG. C.3.2 – Volume scale factor $a_{\mathcal{D}}$ as a function of t for various scaling solutions ; note that all the models shown have vanishing cosmological constant. The models had been integrated with $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$, $H_0 = 70$ km/s/Mpc, $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.27$ and $\Omega_Q^{\mathcal{D}_0} + \Omega_R^{\mathcal{D}_0} = 0.73$. A classification scheme comprising the various cases will be provided below. Within this scheme the first row displays examples of Case D, Case C and the Einstein–de Sitter solution ; the second row an example of Case B for a model of quintessence, the solution mimicking a cosmological constant, and an example of Case A for a model of phantom quintessence.

backreaction and averaged curvature approaches the following evolution of the volume scale factor (note $a_{\mathcal{D}_i} = a_{\mathcal{D}}(t_i) = 1$) :

$$a_{\mathcal{D}}(t) = (1 + C(t - t_i))^{(1+r)/(1+3r)} = (1 + C(t - t_i))^{-2/n} ;$$

$$\text{with } C := \frac{4(1+3r)}{9(1+r)} \sqrt{-(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}/6} = -\frac{2n}{9} \sqrt{-k_{\mathcal{D}_i}} . \quad (\text{C.3.44})$$

For the class of scaling solutions we can obtain the time–evolution of the volume scale factor, and we appreciate that the scaling solutions explore possibilities similar to a Friedmannian evolution *with* a cosmological constant. Figure C.3.2 illustrates this for some chosen values, where the density parameter is held fixed for comparison with our later analysis. For this figure we numerically integrate Eq. (C.3.4) for $\Lambda = 0$ and with the scaling solutions inserted :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^3} - \frac{(1+r)}{6} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n \\ &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^3} - k_{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n = H_{\mathcal{D}_i}^2 \left(\frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_i}}{a_{\mathcal{D}}^3} + \Omega_k^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^n \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.3.45})$$

The integration is performed using a non–stiff predictor–corrector Adams method provided by *Scilab*, with $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$, $H_{\mathcal{D}_0} = 70$ km/s/Mpc, $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.27$, and $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0} = 0.73$, which yields for the constants in the previous equation : $8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} / 3 = a_{\mathcal{D}_0}^3 H_{\mathcal{D}_0} \Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ and $(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} / 6 = -a_{\mathcal{D}_0}^{-n} H_{\mathcal{D}_0} (\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0})$.

Classification of the scaling solutions

The following classification summarizes the results :

- *Case A* : for $r \in] -1; -1/3[$ we have a phantom scalar field with a positive potential of the form $U_{\mathcal{D}} \propto \sinh^{\beta}(\alpha\Phi_{\mathcal{D}})$ with $\beta > 0$; these models may lead to an accelerated expansion. A particular example of this type is analyzed below.
- for $r = -1/3$ we have a model that corresponds to a scale–dependent cosmological constant given by $\Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} = -1/3\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$.
- for $r > -1/3$ we have a standard scalar field. Here, we can distinguish various cases :
 - *Case B* : for $r \in] -1/3; 0[$, the potential is positive and of the form $\sinh^{\alpha_1}(\Phi_{\mathcal{D}})$, with $\alpha_1 \in] -4; 0[$, leading to a quintessence field that may produce an accelerated expansion. At the beginning, when $\Phi_{\mathcal{D}} \sim 0$, the potential is an inverse power–law one, corresponding to the so–called Ratra–Peebles potential [53] $U(\Phi_{\mathcal{D}}) \propto \Phi_{\mathcal{D}}^{-\alpha_2}$, with $\alpha_2 = 4(1+3r)/(1-3r)$;

when $\Phi_{\mathcal{D}}$ becomes big, the potential is equivalent to an exponential potential, also well-known in the quintessence context [53, 176] : $U(\Phi_{\mathcal{D}}) \propto \exp(-\alpha_3 \Phi_{\mathcal{D}})$, with $\alpha_3 = 2\sqrt{(1+3r)/(1+r)}$. It should be noted that the problem emphasized in [226, 166] for this kind of potential (that is the necessarily small scalar field density because of primordial nucleosynthesis constraints) doesn't hold here, since this potential arises during the matter-dominated era as a result of backreaction, so that in such a scenario the scalar field is significantly sourced only during late stages of the matter-dominated era. The more r approaches $-1/3$, the more this field mimics a cosmological constant.

- *Case C* : for $r \in [0; 1/3[$ the potential still behaves as $\sinh^{\alpha_4}(\Phi_{\mathcal{D}})$, but with $\alpha_4 < -4$. This potential is too stiff and the model cannot produce an accelerated expansion ($w_{\Phi}^{\mathcal{D}} > -1/3$).
- for $r = 1/3$, the model is equivalent to a standard Einstein-de Sitter model with a scale-dependent and renormalized initial dust density and zero effective pressure p_{eff} (cf. Appendix A).
- *Case D* : for $r > 1/3$, the potential is of the form $\sinh^{\alpha_5}(\Phi_{\mathcal{D}})$ with $\alpha_5 > 4$ and the model cannot produce an accelerated expansion.
- *Case E* : for $r < -1$, we have a standard scalar field rolling in a negative potential that is not bounded from below. Whereas such scalar fields are pathological when considered like fundamental scalar fields, this solution may be physical in the backreaction context. Indeed, the four preceding models all correspond to $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$, and this one corresponds to $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$. We expect that more realistic solutions, modelled e.g. by a suitable superposition of scaling solutions, could provide potentials with minima, hosting 'bound states'.

The solution space explored by the morphon

The various cases listed above appear as 'cosmic states' that separate 'cosmic phases', illustrated in the following phase diagram, Fig. C.3.3. To understand this diagram, we remark that the solution space for the effective cosmologies that are sourced by dust matter and 'morphed' by the scaling solutions form one-dimensional subsets in the two-dimensional space that is defined by Hamilton's constraint (taken at fixed spatial scale \mathcal{D} and at $\Lambda = 0$), $\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = 1$. Also, (scale-dependent) 'Friedmannian' models, characterized by the backreaction parameter $r = 0$ and $\Lambda = 0$, form a one-dimensional subset defined by $\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} = 1$. With the scaling solutions we are also restricted to measure zero sets, but we have a one-parameter family of them which allows us to explore the solution space.

To illustrate the solution plane, we plot, instead of $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ (related to $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$) the volume deceleration parameter $q^{\mathcal{D}} = 1/2\Omega_m^{\mathcal{D}} + 2\Omega_Q^{\mathcal{D}}$, Eq. (C.3.14), as a function of

the only free parameter $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ in the ‘cosmic phase diagram’ Figure C.3.3. For the scaling solutions we simply have :

$$q^{\mathcal{D}} = \frac{2r}{1+r} + \frac{1-3r}{2(1+r)} \Omega_m^{\mathcal{D}} = -\frac{n+2}{2} + \frac{n+3}{2} \Omega_m^{\mathcal{D}} . \quad (\text{C.3.46})$$

A priori, the scaling solutions can describe the whole plane, including cosmologies with $\Omega_m^{\mathcal{D}} > 1$. Nevertheless, $\Omega_m^{\mathcal{D}} > 1$ implies, from Hamilton’s constraint (C.3.10) with $\Lambda = 0$, that $(1+r)\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$, which is exactly the opposite condition to the one that holds in the correspondence with a real-valued scalar field. In other words, a real-valued morphon field is only defined for $\Omega_m^{\mathcal{D}} < 1$, and we shall concentrate on this class of models in the following.

Since $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$ would be interpreted, in a Friedmannian ‘fitting model’, as $\Omega_{\Lambda}^F + \Omega_k^{\mathcal{D}_0}$, with negligible k -parameter in the *concordance model* [227], we can infer the corresponding value for a fitted Λ -parameter in the same diagram, since for negligible k -parameter, $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = 1 - \Omega_m^{\mathcal{D}} \sim \Omega_{\Lambda}^F$, where with the upper index F we refer to a ‘fitted’ Λ -parameter.

Another feature in the following diagram are arrows that illustrate the time-evolution of the respective parameters. Again, the models corresponding to $\Omega_m^{\mathcal{D}} > 1$ are not analyzed here (among them are ‘Big-Crunch-models’, *cf.* Eq (C.3.47); their dynamics depends strongly on initial conditions). There are attractors and repellers⁸ in this diagram. Most notably, for the cases of interest to us that feature a late-time acceleration, ‘Friedmannian’ states are repellers, i.e. ‘near-Friedmannian’ states evolve away down to the attractor solution $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0$, where backreaction- (or curvature-) domination is completed.

Let us specifically discuss the various cases. We denote values in the solution plane by $(q^{\mathcal{D}}; \Omega_m^{\mathcal{D}})$ and concentrate in the following only on *expanding* universe models. We write :

$$q_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2} \frac{1 + c_1 a_{\mathcal{D}}^{n+3}}{1 + c_2 a_{\mathcal{D}}^{n+3}} \quad ; \quad \Omega_m^{\mathcal{D}} = \frac{1}{1 + c_2 a_{\mathcal{D}}^{n+3}} , \quad (\text{C.3.47})$$

with $c_1 = 4rc_2/(1+r)$, $c_2 = (1 - \Omega_m^{\mathcal{D}_i})/\Omega_m^{\mathcal{D}_i}$, and $a_{\mathcal{D}}$ being an increasing function of time. These formulae are helpful to determine the evolution of a particular solution in the phase plane $(q^{\mathcal{D}}; \Omega_m^{\mathcal{D}})$. We learn from Figure C.3.3 that no model corresponding to *Case C* can produce acceleration. According to Eqs. (C.3.47), scaling solutions in the sectors corresponding to negative potentials (case E) and

⁸Compare the analyses in [228] and [229]. Due to the proposed correspondence to a scalar field cosmology we can directly use the results on scaling properties of the scalar field investigated by [56] and [230]. In this context, the determination of equations of state from similarity symmetries also provides an interesting tool [231]. A full-scale investigation of a dynamical systems analysis is not provided here.

pit-type potentials (case D) are attracted towards the Einstein–de Sitter model $(1/2; 1)$. In all the other cases (A, B and C), the Einstein–de Sitter model appears as a repeller, and the attractors are located on the line $(q^{\mathcal{D}} = 2r/(1+r); \Omega_m^{\mathcal{D}} = 0)$ for $r \in]-1; 0]$. Each point of the straight line $r = 1/3$, that corresponds to a renormalized Einstein–de Sitter scenario, is a fixed point.

Hence, the Einstein–de Sitter model is a saddle point for the scaling dynamics and small inhomogeneities with $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 0$ should make the system evolve away from it. The sign of $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ is important : for all the models corresponding to $r > 0$ or $r < -1$, that is the cases C,D and E, which cannot produce accelerated expansion, we have $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} < 0$. In other words, the kinematical backreaction is dominated by shear fluctuations, *cf.* Eq. (C.3.5). This does not necessarily mean that the universe model is regionally (on the scale \mathcal{D}) anisotropic, because in these cases kinematical fluctuations decay strongly. On the other hand, cases A and B that could be responsible for an accelerated expansion correspond to $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 0$ and have subdominant shear fluctuations. Therefore, these models can be regionally almost isotropic, although kinematical fluctuations have strong influence.

Finally, recall that we have $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} < 0$ for $r > -1$ and $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i} > 0$ for $r < -1$.

Construction of a realistic model : estimation of parameters and initial conditions

The scalar field behavior (i.e. the late-time behavior of the cosmological model in the cases $r < 1/3$) essentially depends on the value of the backreaction parameter r that describes the ratio between kinematical backreaction and averaged curvature (or, in the scalar field language, the ratio between the kinetic energy of the field and its potential energy). We are going to estimate this ratio from observational constraints on the equation of state. Before we do so, let us summarize the conditions relevant for a late-time behavior featuring ‘volume acceleration’, i.e. $\ddot{a}_{\mathcal{D}} > 0$.

Acceleration conditions

The condition for an accelerating patch \mathcal{D} (which we are going to take as large as our observable Universe) follows from the averaged Raychaudhuri equation (C.3.3) [140], [213] :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} , \quad (\text{C.3.48})$$

implying with (C.3.9) and (C.3.14) :

$$-\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} > \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}}}{4} ; \quad q^{\mathcal{D}} < 0 , \quad (\text{C.3.49})$$

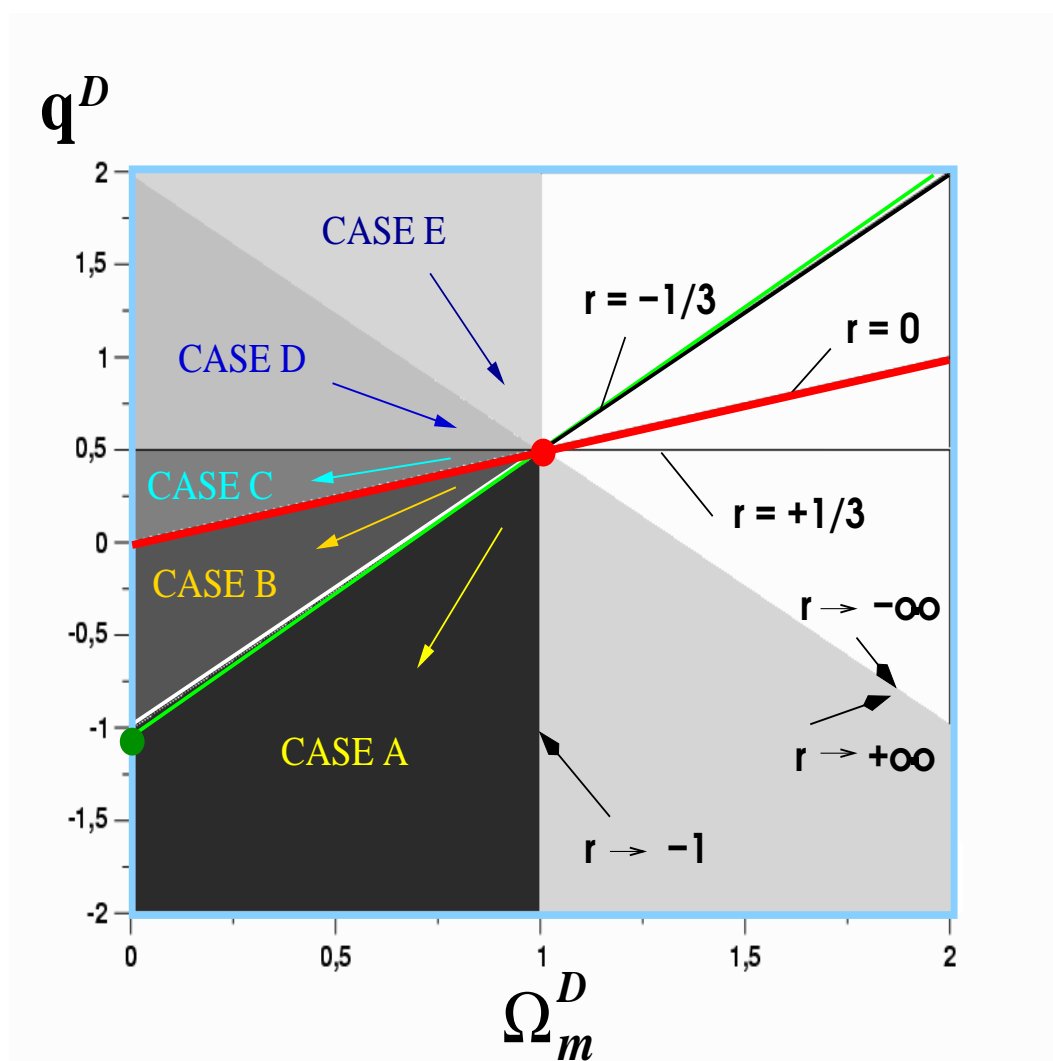


FIG. C.3.3 – This ‘cosmic phase diagram’ is valid for all times and on all scales, i.e. it can be read as a diagram for the corresponding parameters ‘today’ on the scale of the observable Universe. All the scaling solutions are represented by straight lines passing through the Einstein–de Sitter model in the center of the diagram $(1/2; 1)$. The vertical line corresponding to $(q^D; 1)$ is not associated with a solution of the backreaction problem; it degenerates to the Einstein–de Sitter model $(1/2; 1)$. This line forms a ‘mirror’: inside the cone (Case E) there are solutions with $\Omega_m^D > 1$ that cannot be related to any real-valued scalar field, but are still of physical interest in the backreaction context (models with positive averaged scalar curvature). Models with ‘Friedmannian kinematics’, but with renormalized parameters form the line $r = 1/3$. The line $r = 0$ are models with no backreaction on which the parameter Ω_k^D varies (scale-dependent ‘Friedmannian models’). Introducing Λ would just shift the whole diagram down. Below the line $r = 0$ in the ‘quintessence phase’ we find effective models with subdominant shear fluctuations (Q_D positive, Ω_Q^D negative). The line $r = -1/3$ mimics a ‘Friedmannian model’ with scale-dependent cosmological constant. The line below $r = -1/3$ in the ‘phantom quintessence phase’ represents the solution inferred from SNLS data (*cf.* subsection called “Constraining r by supernovæ observations”), and the point at $(q^D; \Omega_m^D) = (-1.03; 0)$ locates the late-time attractor associated with this solution.

and, for the class of scaling solutions (C.3.27) ($\Omega_m^{\mathcal{D}} > 0$, $\Omega_\Lambda^{\mathcal{D}} = 0$, and the definition (C.3.36)) :

$$\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} = r \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} \text{ , i.e., } -r \gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow q^{\mathcal{D}} = \Omega_m^{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} + 2r \gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}} \right) < 0 \text{ , (C.3.50)}$$

This condition is met, if (now inserting the solution (C.3.36) and the relation to the Friedmannian curvature parameter (C.3.42)) :

$$-r \gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}} = -\frac{r}{(1+r)} \gamma_{km}^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{(n+3)} > \frac{1}{4} \text{ . (C.3.51)}$$

A realistic model would meet this condition at some time in the evolution leading thereafter to the observed acceleration value, i.e. ideally at the epoch around the time of structure formation solving the coincidence problem.

From what has been said above, such realistic cases require $r < -1/3$, i.e., $n > 0$; in the limiting case $r = -1/3$ ($n = 0$) (which is the solution mimicking a cosmological constant) the condition (C.3.51) reads $\gamma_{km}^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^3 > 1/2$, and with $\Omega_k^{\mathcal{D}} = \Omega_k^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-2}$ and $\Omega_m^{\mathcal{D}} = \Omega_m^{\mathcal{D}_i} a_{\mathcal{D}}^{-3}$ we find :

$$r = -\frac{1}{3} \text{ , } n = 0 \text{ : } \gamma_{km}^{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2 > \frac{1}{2} \text{ , i.e., } \gamma_{km}^{\mathcal{D}_0} > \frac{1}{2a_{\mathcal{D}_0}^2} \text{ . (C.3.52)}$$

The marginal case $n = -3$ in the exponent of the volume scale factor (C.3.51) plays a particular role that we shall explain more in detail in Appendix A. In the context of the acceleration conditions we can gain a better understanding of the cases $n > -3$ by the following remark. In this marginal case the averaged density and the kinematical backreaction have identical decay rates with respect to the volume scale factor in an expanding universe model. This means that, in order to get a positive acceleration at the present time, already the initial data must satisfy the conditions (C.3.48) and (C.3.49). The necessary initial value for kinematical backreaction is then large and suggests that we are looking at a region \mathcal{D} that is close to satisfy the condition needed for the stationarity of the cosmos. Note, however, that the strict single-scaling solution $n = -3$ ($r = 1/3$) does not admit acceleration, *cf.* Eq. (C.3.46), but a superimposed regional fluctuation would admit acceleration (or deceleration) (*cf.* Appendix A).

In the cases $n > -3$, the averaged density decays faster than kinematical backreaction; hence, to attain sufficient acceleration today, the model needs the less magnitude of kinematical backreaction the weaker its decay given in terms of n . Let us take a case close to $n = -2$ (the case $n = -2$ degenerates to $r = 0$, *cf.* Eq. (C.3.27)), then kinematical backreaction can be three orders of magnitude

weaker initially, if the scale factor advanced to a value of $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$ today. This remark makes clear that the solution sector $n > -2$ ($r < 0$) contains solutions that can potentially explain the Dark Energy problem even when starting with small expansion fluctuations at the CMB (Cosmic Microwave Background) epoch. Moreover, it contains solutions which also solve the coincidence problem, although a more natural solution would not be an exact scaling solution, but one that would inject more backreaction at the formation epoch of structure. However, for models with $\Omega_m^{\mathcal{D}} < 1$, cf. Eq. (C.3.46), we have to go to values of $n \sim 0$ ($r \sim -1/3$) in order to find *sufficient* acceleration.

It should be emphasized that the interesting sector $n > -2$ is *not* what we could find in a weakly perturbed FRW (Friedmann Robertson Walker) model. These states rely on a strong coupling of kinematical fluctuations to the averaged scalar curvature of the universe model. Kinematical backreaction can only decay at such weak rates (or even grow for $r < -1/3$), if the time–evolution of the averaged scalar curvature largely deviates from the time–evolution of a constant curvature model; intuitively speaking, averaged fluctuations are strongly supplied by the ‘curvature energy reservoir’.

Observational constraints on parameters

Recall that the envisaged class of single–scaling solutions implies that our parameter choices are unambiguous: we only have to specify an initial condition, say $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}$ or $\Omega_m^{\mathcal{D}_i}$, the backreaction parameter r , and the value of the volume scale factor today $a_{\mathcal{D}_0}$.

The following estimates are done on the assumption that the effective model is based on solutions for a matter density source and a morphon field that is realized by the particular class of scaling solutions discussed in this paper. We focus on the effect of the morphon field for vanishing cosmological constant, and would like to demonstrate that an observer who is using a Friedmannian ‘template universe model’ would interpret this effect by a cosmological constant *today*. Thus, we are *forcing* the effective evolution of the volume scale factor to match with that of a Friedmannian model with Λ at initial and final time. However, all of our parameters are evolving according to the ‘best–fit’ scaling solution in the averaged *inhomogeneous* model. In particular, this implies that the time–derivatives of the volume scale factor evolve very differently compared with a standard Friedmannian model. Thanks to the existing constraints on the standard Friedmannian models, as for example Cold Dark Matter models with a Dark Energy component that has a constant equation of state, this procedure reduces the number of parameters that we have to estimate. Indeed, we then only have to determine r and one value for the initial data, e.g. $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}$.

We emphasize that the interpretation of observational data and the resulting

constraints strongly depend on model assumptions, i.e. it is commonly assumed that a standard Λ CDM model is the correct one. This implies, in particular, that we are not constraining the parameters of the averaged inhomogeneous model by observations reinterpreted within the inhomogeneous cosmology. For example, since the spatial curvature is not constant, the formulae for angular diameter and luminosity distances cannot be taken as the FRW ones. Furthermore, we point out that this reinterpretation is challenging, for all the other observational predictions that are based on a perturbative approach, like large-scale structure characteristics, must be reconsidered. It is not obvious, and this work together with others (e.g. [160] and references therein) provides plausible counter arguments, that the *late Universe* could be described by a perturbed FRW model, even if smoothed over large scales.

In this sense, our analysis is a demonstration of what the observed values of the standard cosmological parameters would imply for the averaged quantities.

With these assumptions the observer with a ‘Friedmannian template’ then faces the following relation *today* :

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{D}_0} = \Omega_{\Lambda}^F + \Omega_k^{\mathcal{D}_0} ,$$

where the latter corresponds to the ‘biased’ interpretation of the true dynamics. The parameter r is fully specified by the energy content of the Universe today, since by Hamilton’s constraint $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{D}_0} = 1 - \Omega_m^{\mathcal{D}_0}$.

Directly following from the relation (C.3.31) we have :

$$r = -\frac{n+2}{n+6} \quad \text{with} \quad (n+2) = \frac{\ln(1 + \gamma_{\Lambda k}^{\mathcal{D}_0})}{\ln a_{\mathcal{D}_0}} ; \quad \gamma_{\Lambda k}^{\mathcal{D}_0} := \frac{\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}_0}}{\Omega_k^{\mathcal{D}_0}} . \quad (\text{C.3.53})$$

Note that, again by Hamilton’s constraint, the condition $1 + \gamma_{\Lambda k}^{\mathcal{D}_0} > 0$ implies $(1 - \Omega_m^{\mathcal{D}_0})/\Omega_k^{\mathcal{D}_0} > 0$, which allows for two cases : a positive curvature today ($\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ negative) with $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} > 1$, or a negative curvature today with $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} < 1$. For our purpose of fitting the inhomogeneous model to a Friedmannian ‘template’ with cosmological constant, we choose the latter option. Furthermore, for $\Omega_{\Lambda}^F > 0$, there is still the possibility that $\Omega_{\Lambda}^F < -\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$. This last condition is clearly not satisfied in the late-time Universe, so in the following, we will restrict the analysis to $\Omega_k^{\mathcal{D}_0} > 0$.

Giving initial data from WMAP [13], $\Omega_{\Lambda}^F \sim 0.72$ and $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} \sim 0.28$, and taking $a_{\mathcal{D}_0} \sim 1000$, Eq. (C.3.53) determines the value of n to be close to but slightly larger than 0, i.e. r slightly below $r = -1/3$ pointing to a phantom quintessence. However, taking into account a variation of the initial data, we detect a large sensitivity of the precise value for r to the initial data in our scaling solutions. This is shown in Figure C.3.4. We therefore employ an orthogonal observational constraint on the Dark Energy component below.

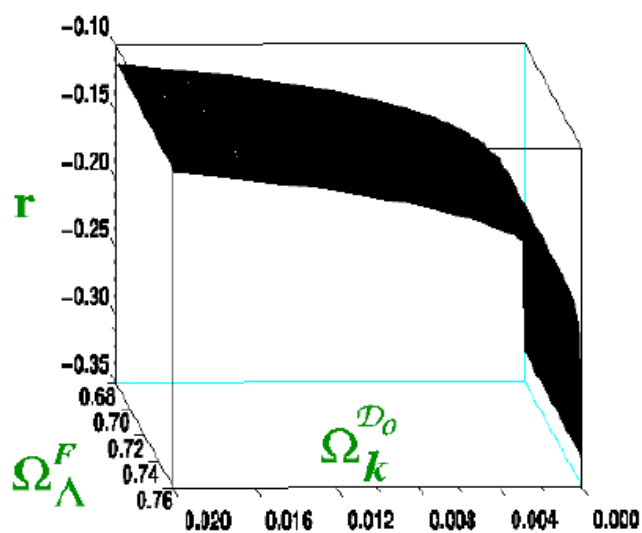


FIG. C.3.4 – The backreaction parameter r is shown as a function of $\Omega_k^{D_0}$ and Ω_Λ^F , as the effect of backreaction would be interpreted in a Friedmannian ‘template’, with $a_{D_0} \sim 1000$.

Figure C.3.4 shows r as a function of $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ and Ω_Λ^F for the bounds given by WMAP third year data [13] : $\Omega_k^{\mathcal{D}_0} \in]0; 0.006]$ and $\Omega_\Lambda^F = 0.72 \pm 0.04$, and for $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$ that roughly corresponds to a range of solutions integrated from approximately the epoch of the CMB (Cosmic Microwave Background).

We infer that when $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ tends to 0, r tends to -1 , and to 0 when $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ tends to $+\infty$. Moreover, we notice that, while increasing $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ from zero, the morphon field is first a phantom field, then a standard quintessence field. Finally, r is almost insensitive to Ω_Λ^F , and it depends strongly on $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ only in the case when $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ is very small. (Note that the latter is a ‘pathology’ of our single-scaling ansatz; this behavior could be cured by superimposing a constant-curvature solution.)

Constraining r by supernovae observations

The preceding considerations giving r in terms of Ω_Λ^F and $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ (or in terms of Ω_Λ^F and $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ by replacing $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$ with $1 - \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \Omega_\Lambda^F$ in Eq. (C.3.53)) can be used to determine r . We now estimate r through the Dark Energy equation of state that best matches supernovae observations. Then, we use relation (C.3.53) to compute the resulting value of $\Omega_k^{\mathcal{D}_0}$, in order to check the consistency with our fitting model.

There is a simple way to estimate the backreaction parameter r , by requiring that the equation of state for Dark Energy $w_\Phi^{\mathcal{D}}$, *cf.* Eq. (C.3.40), matches the one inferred from supernovae observations, denoted by w_{SN1a} , provided this one is constant. Then :

$$r = \frac{1}{3} \frac{1 + 3w_{SN1a}}{1 - w_{SN1a}} .$$

Taking into account the last SNLS best fit for a flat Friedmann model sourced by Dark Energy with a constant equation of state $w_{SN1a} \sim -1.02$, $\Omega_\Lambda^{\mathcal{D}_0} = 0.73$ and $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.27$ [18], we find $r \sim -0.34$, again suggesting a phantom quintessence. This value does not depend sensitively on variations in w_{SN1a} , and is therefore a more robust estimate compared with our previous one.

Once this ratio is fixed, we can find the values of the initial data. We assume that, today, $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_0} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}_0} = \Omega_\Lambda^F$ and find, e.g. for the initial ratio of the curvature parameter to the density parameter :

$$\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}_i} = \frac{-\mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}}{16\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_i}} = \frac{\Omega_\Lambda^F}{(1+r)\Omega_m^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^{(n+3)}} ,$$

which, at the CMB epoch, approximately setting $a_{\mathcal{D}_0}$ to the value $a_{\mathcal{D}_0} \sim 1000$, is $\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}_i} \sim 2.7 \cdot 10^{-9}$.

Here, we can check the consistency of the SNLS fitting with the curvature assumption. Indeed, in the SNLS fitting, we assumed that $\Omega_k^{\mathcal{D}_0} = 0$, and, using the inferred value for r , $r \sim -0.34$ in Equation (C.3.53), we find that $\Omega_k^{\mathcal{D}_0} \sim 5 \cdot 10^{-7} \Omega_\Lambda^F$,

in accordance with the assumption $\Omega_k^{\mathcal{D}0} = 0$. This shows that r as determined only through the Dark Energy equation of state is compatible without further assumptions.

If we define an ‘effective redshift’ through the volume scale factor as in Friedmann cosmology, we can derive the effective redshift at which the expansion accelerates. It corresponds to a ‘cosmic equation of state’ for matter plus backreaction $w_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} \sim -1/3$. Inserting (C.3.41) into this relation, we find an acceleration scale factor and an effective acceleration redshift :

$$a_{\mathcal{D}}^{\text{acc}} = \left(-1/(4r\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{D}i}) \right)^{\frac{1+r}{1-3r}} \sim 569 \quad \Rightarrow \quad z_{\text{eff}}^{\text{acc}} = \frac{a_{\mathcal{D}0}}{a_{\mathcal{D}}} - 1 \sim 0.76 \ .$$

The scalar field behavior and the potential corresponding to this model, as well as the time–evolution of various cosmological parameters, are presented in Figs. C.3.6 and C.3.5.

Concluding Remarks and Outlook

Our proposal of a mean field description of backreaction effects through a minimally coupled ‘morphon field’, does not only provide a rephrasing of the kinematics of backreaction in terms of a scalar field cosmology, but it also justifies existence of the latter due to the fact that we identify averaged inhomogeneities in Einstein gravity as the underlying fundamental physics. Thus far, such a well–defined link was missing ; alternatively, it is thought and there exist some plausible hints that the low–energy scale in some contemporary particle physics models would provide this link (e.g. [232], [233], [234]), i.e. that the scalar field emerges from the dynamical degrees of freedom stemming from extra dimensions (‘moduli fields’).

The set of spatially averaged equations together with the mean field description of kinematical backreaction by a morphon field shows, in particular, that the framework of Friedmann–type equations is very robust. We understand now that an effective and scale–dependent Friedmannian framework is applicable with the surprising new input that, besides averaged matter sources, also a scalar field component emerges and has not to be invented.

Summary

We have exploited the proposed correspondence by investigating a family of scaling solutions of the backreaction terms. The study of scaling solutions is well–advanced in research work on scalar field models, and our study allows to translate those results into the backreaction context. Here, our discussion was not exhaustive. We concentrated on exploring the solution space of inhomogeneous cosmo-

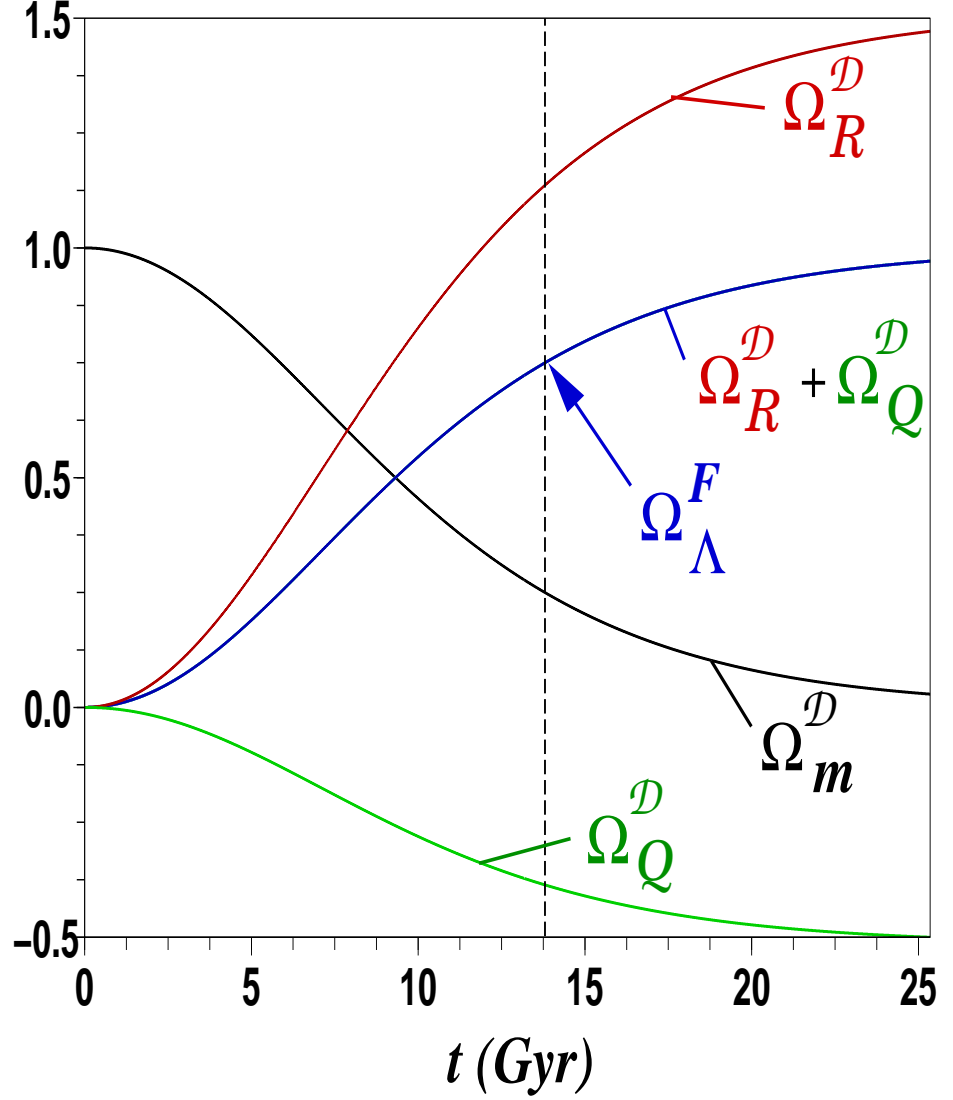


FIG. C.3.5 – The dimensionless cosmological parameters are shown as a function of time. While Ω_m^D decays from 1 to the present value ~ 0.27 , the sum $\Omega_Q^D + \Omega_R^D$ grows from 0 to the value ~ 0.73 , interpreted as the cosmological constant parameter to-day, Ω_Λ^F , in a Friedmannian ‘template model’. Kinematical backreaction \mathcal{Q}_D is positive (dominant expansion fluctuations) and grows slightly, implying a negative backreaction parameter Ω_Q^D that becomes more negative. This growth is supplied by the negative averaged curvature that evolves strongly, i.e. the positive curvature parameter Ω_R^D grows from almost 0 to a value larger than 1 at the present epoch. This behavior of the ‘physical’ curvature parameter should be compared with the evolution of the ‘Friedmannian curvature parameter’ displayed in the last figure. All solutions are calculated for the SNLS best fit model. In this model the parameters $(\Omega_m^D; \Omega_Q^D; \Omega_R^D)$ evolve towards their attractor $(0; -0, 515; +1, 515)$, where backreaction- and curvature- domination is completed. Note that the starting values differ from $(\Omega_m^{D_i} = 1; \Omega_Q^{D_i} = 0; \Omega_R^{D_i} = 0)$; if they would not, then the model evolves without backreaction as the standard model, in which the latter initial data set is maintained in the course of evolution. The standard model is a repeller for the scenario shown.

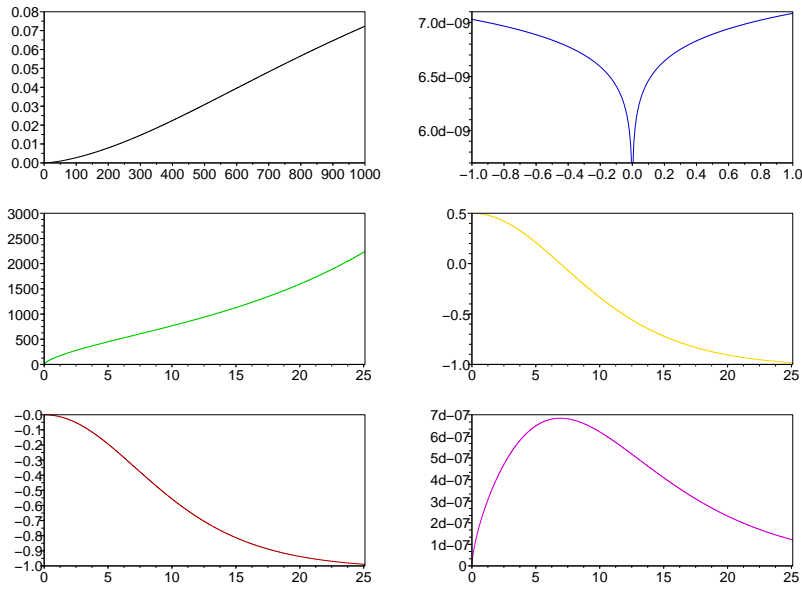


FIG. C.3.6 – Upper left : scalar field $\Phi_{\mathcal{D}}$ as a function of the volume scale factor $a_{\mathcal{D}}$, in units of $2\sqrt{\pi G}$. Upper right : Potential $U(\Phi_{\mathcal{D}})$, in GeV m^{-3} . Central left : volume scale factor as a function of time in Gyr. Central right : deceleration parameter as a function of time in Gyr. Lower left : the ‘cosmic equation of state’ w_{eff} as a function of time in Gyr. Lower right : ‘Friedmannian curvature parameter’ as a function of time in Gyr, featuring a maximum at the onset of acceleration. All solutions are calculated for the SNLS best fit model.

logies with the help of scaling solutions with a ‘minimal’ parameterization. Therefore, as a next step, this parameterization could be expanded and congruences with other work on scalar field models could be worked out. Note that an obvious such expansion would analyze superimposed scaling solutions that could be modeled either again by a single effective scalar field, or else by multiple scalar fields [235], [236]. One example of a superposition of scaling solutions is provided in Appendix A. Furthermore, observational constraints set on quintessence or phantom quintessence models have direct relevance to constraints that have to be set on morphon fields [237]. However, observations have to be reinterpreted within the inhomogeneous cosmology underlying the morphon dynamics.

In making the correspondence concrete we have not touched the question whether realistic dynamical models of the inhomogeneous Universe would comply with the class of averaged models that we singled out as ‘realistic case studies’. For the scaling solutions the scalar field correspondence revealed, that the constancy of the fraction of kinetic to potential energy of the morphon field relates to averaged models that are driven by strong coupling between averaged 3–Ricci curvature and kinematical fluctuations, the constancy implying their direct proportionality. While in the scalar field context this assumption is often employed, here we get an interesting picture of what this represents. The key for a physical interpretation of the proposed correspondence is the equivalence of the integrability condition (C.3.6) and the Klein–Gordon equation (C.3.18) :

$$a_{\mathcal{D}}^{-6} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^6 \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}) + a_{\mathcal{D}}^{-2} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) = 0 \quad , \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\Phi}_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \Phi_{\mathcal{D}}} U(\Phi_{\mathcal{D}}) = 0 \quad .$$

Although the resulting picture may appear complex, it can be structured by looking at a single player : the averaged 3–Ricci curvature. If it is positive, it represents an energy reservoir, stored in a negative potential in the correspondence. If this reservoir exceeds the ‘virial energy’, then the excess energy is converted (in the scaling solutions directly) into an excess of kinetic energy, i.e. kinematical backreaction. The averaged curvature then decays faster than the ‘Friedmannian’ curvature. On the other hand, if it is negative, then the same logic applies : the averaged curvature consequently becomes stronger negative compared with the ‘Friedmannian’ curvature. Solutions of the Dark Energy problem, where a large positive value of backreaction is needed, will have to make strong use of this conversion, while ‘near–Friedmannian’ models don’t. A Newtonian or post–Newtonian approach suppresses these degrees of freedom by freezing the averaged curvature to the ‘Friedmannian’ value (compare an attempt to work with the Friedmannian curvature parameter that, of course, needs an extra scalar field as a source for Dark Energy [238]). From these remarks we understand the importance of a strongly evolving averaged 3–Ricci curvature, if the attempt to explain Dark Energy through backreaction should be successful. In this line there is clear support for the importance of

a strongly evolving 3–Ricci curvature from the Lemaître–Tolman–Bondi solution, see [155], and in particular the recent work [217] and references to other papers on this solution therein. Recently, Räsänen [160] provided an illustrative example and a comprehensive discussion of the physics of backreaction–driven accelerated expansion.

Weakly perturbed Friedmann models have a special status if placed into the full solution space of the averaged inhomogeneous models : only if the averaged fluctuations *decouple* from the averaged curvature, i.e. if they evolve independently, then the averaged curvature evolves as a constant ‘Friedmannian’ curvature, and fluctuations decay in proportion to the square of the inverse volume. Hints that point to the likely existence of a curvature–fluctuation–coupling come again from averaging the LTB solution [215] (see also [239]) and other global solutions [213] that all show an extra term in the averaged scalar curvature. In these examples the extra term evolves in proportion to the inverse volume, hence deviates from a ‘Friedmannian’ curvature and implies maintenance of large kinematical fluctuations that decay only in proportion to the inverse volume. While this particular behavior of the backreaction terms still requires large backreaction to start with [214], e.g. a feature of globally stationary solutions [213], a stronger evolution of averaged curvature, i.e. injecting more curvature energy into kinematical fluctuations, would allow to start with ‘near–Friedmannian’ initial conditions and still explain current observations. An example for the latter possibility has been analyzed in this paper. This possibility can be interpreted such that there is some hope to find enough backreaction by starting with almost FRW initial data, as suggested by [140], although here the conversion of curvature energy into backreaction must be very efficient ; a more moderate evolution into backreaction–dominated phases would result, if we already start with ‘out–of–equilibrium’ initial data.

In this line we have also pointed out, and this is worth stressing again, that the ‘Friedmannian’ curvature parameter $k_{\mathcal{D}_i}$ is in general unrelated to the physical averaged scalar curvature, it is an integration constant and actually an integral of motion [213] : the dynamics of the averaged physical curvature is not represented by and, in most examples, deviates substantially from it. The restriction to a ‘Friedmannian’ evolution of the averaged curvature singles out the special case where the curvature–fluctuation–coupling is *strictly absent*.

Summarizing these thoughts we can say that there are two conceivable scenarios that remove the need for Dark Energy : first, a ‘soft scenario’ that was discussed in detail in [213]. Here we already have an initial global state with strong expansion fluctuations, so that regionally a moderate evolution of backreaction and averaged curvature suffices to explain the observed acceleration. It was, however, pointed out that such models imply paradigmatic changes, and observational data have to be reinterpreted in order to put firm constraints on $Q_{\mathcal{D}}$ at the CMB epoch.

Second, there is a ‘hard scenario’ (implied by the suggestion of Kolb et al. [140]) that literally creates enough backreaction out of ‘nothing’, *cf.* Eq. (C.3.33). In our example of a particular scaling solution a phantom quintessence scenario arises that complies with the strong energy condition and also with constraints in accord with those already put on the standard model. Consequently, this scenario needs strong evolution of backreaction and averaged curvature as seen best for the dimensionless cosmological parameters in Fig. C.3.5. The present work has shown that the ‘hard’ version can be made consistent with the framework of the averaged Einstein equations.

Outlook

There are obviously a number of possible routes for generalizing the scalar field correspondence. Let us briefly discuss some of them.

Spatial averages are scale–dependent, since we integrate over a given compact volume of the space sections. In this paper we left the domain–dependence untouched, all of our considerations were focussing on a fixed scale. However, the scalar field correspondence holds on every scale, which is not only reminiscent of, but also physically a manifestation of renormalizable quantities. In this respect the morphon analogues of quintessence are different from standard quintessence models. In this context we could ‘Ricci flow’ the averages to averages on a constant curvature geometry [124], or we could study other renormalization group methods to control the scale–dependence, e.g. [240], [241], [242].

A possibly fruitful investigation would consider string–motivated gravitational theories and, employing the proposed correspondence, would aim at determining the scalar field theory from the higher–dimensional geometry of extrinsic and intrinsic curvature. For this end one would have to derive the averaged equations for the extended spacetime. Brane world cosmologies could be analyzed in the spirit of this correspondence. Not only in this context it will be interesting to understand, in which cases a non–minimally coupled morphon field would arise.

Furthermore, there are other interesting strategies of a more technical nature that, however, widen the physical context of applications. For example, the introduction of a complex scalar field, which is necessary to access solutions with $\Omega_m^{\mathcal{D}} > 1$ with a positive averaged 3–Ricci curvature; the discussion of globally stationary cosmologies in [213] shows that a stationary cosmos obeys these conditions at early times, and later the averaged scalar curvature decreases fast until it becomes negative, while maintaining large kinematical backreaction. Another example is the averaging on a different foliation of spacetime, i.e. introducing coordinate degrees of freedom. The latter is actually necessary if matter sources other than ‘irrotational dust’ are considered; it results in an extra coupling of the scalar field to the matter sources stemming from a backreaction term due to the pressure

gradient that is absent in the present paper [133]. This is the subject of a follow-up work that will also allow access to realistic models of backreaction-driven inflation [243]. Here, the present investigation in principle allows to model inflationary scenarios too by translating typical characteristics of inflaton fields into corresponding morphon fields, however, within the restricted cases of ‘dust matter’ or ‘vacuum’.

Since $\Phi_{\mathcal{D}}$ models the inhomogeneous ‘vacuum part’ of the sources, there might be an interesting connection to the energy budget of gravitational waves that could be fruitfully exploited [244], and, since $\Phi_{\mathcal{D}}$ represents a ‘mean field’ of fluctuations, also a connection to statistical thermodynamics is implicit. In order to establish this latter link, however, we have to note that $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ models the averaged spatial variance of extrinsic curvature and so far not ‘fluctuations’ in the thermodynamical sense. Another intimate, but on the level of a ‘dust matter model’ formal, relation to effective thermodynamic models is suggested in the case of imperfect fluid models. They imply non-equilibrium effects that in turn can be associated with a ‘friction coefficient’ proportional to the ‘cosmic equation of state’ $p_{\text{eff}}/\rho_{\text{eff}}$. Thermodynamic arguments that were used in [245, 246] within the imperfect fluid picture lead to further possibilities of interpreting the different scaling regimes, e.g. by employing the second law of thermodynamics the authors of [245, 246] would conclude $p_{\text{eff}} < 0$, and thus $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} > 1/3\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}$, i.e. $r > 1/3$ for positive averaged scalar curvature and $r < 1/3$ for negative one. Since the first case does not give rise to acceleration one would be led to conclude that the scalar curvature has to be negative on average, a conclusion shared by other work (in Appendix A we also reach this conclusion and provide references).

A final comment related to scalar field perturbations, often investigated in a post-Newtonian setting, is in order. In those perturbative approaches, the scalar degree of freedom that emerges is a combination of matter and metric inhomogeneities. Within the well-developed standard perturbation theory [223], it is natural to first restrict the analysis to a tight range around a FRW background in order to calculate backreaction effects [247, 248], [249, 250]. The amplitude of scalar perturbations, but also their derivatives and, hence, all curvature terms have to be small [151]. Besides considerations of long-wavelength perturbations (e.g., [251]), the analysis of sub-horizon perturbations with the aim to explain Dark Energy in a perturbative setting is the focus of many recent research papers and, here, we do not enter into the details of these works. We wish to point out two aspects that emerged from the present investigation, and which may be relevant for future strategies in a perturbation analysis.

First, we address the averaging issue : a post-Newtonian approximation may (and in most cases of cosmological relevance will) be adequate *locally* or piecewise on a small range of scales. However, as soon as we are looking at integral properties, i.e. integrating out a wider range of scales, its applicability should be verified.

In standard perturbation theory spatial averages are taken with respect to a ‘background observer’. Since a major player in the mechanism that can produce large kinematical fluctuations is the averaged 3–Ricci curvature, we have to be careful in relating Euclidean ‘background averages’ to the Riemannian volume averages that govern the dynamics of the averaged cosmology.

Second, in the present approach we do not specify a metric of the space sections ; the formulation and the correspondence holds for arbitrary 3–metrics. Also, when we spoke about a ‘scale–dependent Friedmannian model’, we referred to the kinematics of the volume scale factor, we did not refer to the FRW metric. We can, however, specify a spatial metric to establish a dynamical model. Here, we think that the metric setting must allow for large deviations of the 3–Ricci curvature from the constant Friedmannian curvature. As a ‘rule of thumb’ (another was recently given in [158] for super–Hubble perturbations), we may say : *if the averaged scalar curvature evolves at or near the constant curvature model, then there is no hope to model cases that lead to enough late–time acceleration.*

A future strategy related to perturbation theory could be motivated by Newtonian cosmological models for structure formation : in the Newtonian framework, an Eulerian perturbation theory does not provide access to the highly non–linear regime. Instead, the Lagrangian point of view offers a way to move with the largely perturbed fluid. A relativistic Lagrangian perturbative approach is currently worked out aiming at generalizing the Newtonian work [165] that has employed the exact averaged equations to construct a non–perturbative model for inhomogeneities out of perturbatively calculated fluctuations. A Lagrangian perturbation scheme itself does not include non–perturbative features, that may be needed in this context ; non–perturbative effects have been recently discussed in the Newtonian framework [252].

All these efforts aim at constructing a generic evolution model. The morphon field is an effective description without any perturbative assumption. But, one would like to establish the underlying inhomogeneous dynamics in order to understand, to what the realistic case studies that ‘explain away’ the Dark Energy problem actually correspond.

Acknowledgements :

TB and JL acknowledge support by the Sonderforschungsbereich SFB 375 ‘Astroparticle physics’ by the German science foundation DFG, JL during a visit to ASC Munich. TB would like to thank the Observatory of Meudon, Paris, and the University of Bielefeld, for hospitality and support. In particular, he would like to thank Dominik Schwarz for his invitation to temporarily hold a chair in Bielefeld university, where an excellent working environment and stimulating discussions with colleagues in the physics department made this stay most enjoyable. TB and

JL would like to thank Matthew Parry and Herbert Wagner for fruitful discussions during the preparation stage of this work ; TB would like to also thank Misao Sasaki for encouraging conversations during a Dark Energy workshop held in Munich, and Mauro Carfora, Martin Kerscher, Slava Mukhanov, Syksy Räsänen, Varun Sahni and Dominik Schwarz for valuable remarks and discussions.

Appendix A : a relation to Friedmannian fitting models and the globally stationary solution

A particular scaling behavior of the solutions (C.3.27), in which kinematical backreaction and averaged scalar curvature are proportional, can be exploited to define a mapping of the solutions (C.3.27) for the particular case $r = 1/3$, i.e. $n = -3$, to a Friedmannian cosmology.

Before we explain this mapping let us recall that the case $r = 1/3$ also arises for the stationarity condition, required in [213] for the global scale (extending the domain \mathcal{D} to the whole (compact) manifold Σ , and setting $\Lambda = 0$) :

$$3 \frac{\ddot{a}_\Sigma}{a_\Sigma} = - \frac{4\pi G \langle \varrho \rangle_{\Sigma_i} + \mathcal{Q}_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^3} = 0 . \quad (\text{C.3.54})$$

This condition implies either a globally static model or a globally stationary model featuring the solution :

$$\mathcal{Q}_\Sigma = \frac{\mathcal{Q}_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^3} ; \quad \langle \mathcal{R} \rangle_\Sigma = \frac{\mathcal{R}_{\Sigma_i} - 3\mathcal{Q}_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^2} + \frac{3\mathcal{Q}_{\Sigma_i}}{a_\Sigma^3} , \quad (\text{C.3.55})$$

where $H_\Sigma = \mathcal{C}/a_\Sigma$ with : $-6\mathcal{C}^2 = \mathcal{R}_{\Sigma_i} - 3\mathcal{Q}_{\Sigma_i}$.

The relation to a Friedmannian ‘fitting model’ arises by noting that, in order to obtain the above solution, we do not need to assume the stationarity condition (C.3.54). Indeed, inserting the scaling solutions (C.3.27) into the averaged equations (C.3.3) and (C.3.4) on any given domain \mathcal{D} , and superimposing a constant curvature solution to the averaged curvature, we obtain (restricting again attention to $\Lambda = 0$) :

$$3 \frac{\ddot{a}_\mathcal{D}}{a_\mathcal{D}} + \frac{4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} - \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i}}{a_\mathcal{D}^3} = 0 ; \quad \left(\frac{\dot{a}_\mathcal{D}}{a_\mathcal{D}} \right)^2 - \frac{16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} - \left(\frac{1}{r} + 1 \right) \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i}}{6a_\mathcal{D}^3} - \frac{\mathcal{C}^2}{a_\mathcal{D}^2} = 0 . \quad (\text{C.3.56})$$

We find that, for the special case $r = 1/3$, we can simply redefine the initial constants,

$$k_{\mathcal{D}}^F := -\mathcal{C}^2 \ ; \ 4\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}_i}^F := 4\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}_i} - \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_i} \ ; \ \Omega_{mF}^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} := \Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = 1, \quad (\text{C.3.57})$$

where $\Omega_{mF}^{\mathcal{D}}$ and $\Omega_k^{\mathcal{D}}$ denote the resulting dimensionless functionals which we are going to use as Friedmannian ‘fitting parameters’, so that Eqs. (C.3.56) assume the form of a constant–(negative) curvature Friedmannian model.

Let us exemplify this correspondence. Setting $k_{\mathcal{D}}^F \sim 0$ in accord with the current observational results, we have $\Omega_{mF}^{\mathcal{D}} = 1$ throughout the evolution, i.e. a scale–dependent Einstein–de Sitter model :

$$3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + \frac{4\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}_i}^F}{3a_{\mathcal{D}}^3} = 0 \ ; \ \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 - \frac{8\pi G\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}_i}^F}{a_{\mathcal{D}}^3} = 0 \ . \quad (\text{C.3.58})$$

Suppose now that we ‘fit’ a standard Einstein–de Sitter model on some given scale \mathcal{D} to observational data, we would be in the position to evaluate the physical ‘parameters’ on that scale to be $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 1 - 4\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}$, i.e. for $\Omega_m^{\mathcal{D}} \sim 1/3$ today, we would conclude that there must be backreaction at work and it should be positive (negative kinematical backreaction mimicking a ‘kinematical dark matter’ source), $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} \sim 1/6$, and that the (physical) curvature parameter would be positive too (negative averaged curvature), $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = 3\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}} \sim 1/2$. We emphasise that the Friedmannian curvature parameter is assumed to vanish, which demonstrates that it has nothing to do with the (evolving) averaged scalar curvature of the inhomogeneous model.

The above procedure exemplifies the possibility of constructing a (non–naive) Friedmannian fitting model. It, however, assumes that, regionally, the model obeys an Einstein–de Sitter kinematics (unrelated to an underlying FRW metric), and $r = 1/3$ is ‘typical’ for the regional Universe. Both are not in accord with what we expect. We would ‘fit’ a Friedmannian model *with* a cosmological constant, which is the currently held view of the ‘concordance model’,

$$\Omega_{mF}^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} = 1 \ , \quad (\text{C.3.59})$$

then we would have to superimpose a solution $\Omega_{\mathcal{Q}2}^{\mathcal{D}}$ with, e.g., $r = -1/3$ to the above solution (this could still be interpreted as a deviation from a representative volume of a global model with $r = 1/3$). This implies, with $\Omega_{mF}^{\mathcal{D}} = \Omega_m^{\mathcal{D}} + 4\Omega_{\mathcal{Q}1}^{\mathcal{D}} \sim 1/3$; $\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} \sim 2/3$, $\Omega_k^{\mathcal{D}} \sim 0$, and

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}1}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}2}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}1}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}2}^{\mathcal{D}} = 1 \ , \quad (\text{C.3.60})$$

that

$$\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} = -2\Omega_{\mathcal{Q}2}^{\mathcal{D}} \sim \frac{2}{3} \ . \quad (\text{C.3.61})$$

We would find a positive backreaction with $\Omega_{\mathcal{Q}2}^{\mathcal{D}} \sim -1/3$ (modeling now Dark Energy), and a negative averaged scalar curvature with $\Omega_{\mathcal{R}2}^{\mathcal{D}} \sim 1$, indicating that the regional Universe should correspond to a ‘void’ within a global model with $\Omega_{\mathcal{R}1}^{\Sigma} \sim 1/2$. That our regional Universe could correspond to a regional ‘void’ has been discussed in a number of other papers, e.g. [253, 254, 255], [256], [257], [216], [258].

This example also demonstrates that we can construct cosmologies with different properties on global and regional scales by superimposing scaling solutions.

Bibliographie

- [1] E. A. Milne. Cosmological theories. *Astrophys. J.*, 91 :129–158, 1940.
- [2] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [3] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley & sons, 1972.
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and compagny, 1970.
- [5] Stephen W. Hawking and Georges F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [6] Sternberg S. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1994.
- [7] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 1987.
- [8] George F. Smoot et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys. J.*, 396 :L1–L5, 1992.
- [9] A. E. Lange et al. First estimations of cosmological parameters from BOOMERANG. *Phys. Rev. D*, 63 :042001, 2001.
- [10] A. Benoit et al. The Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum measured by Archeops. *Astron. Astrophys.*, 399 :L19–L23, 2003.
- [11] Chao-lin Kuo et al. High resolution observations of the CMB power spectrum with ACBAR. *Astrophys. J.*, 600 :32–51, 2004.
- [12] G. Hinshaw et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : Angular power spectrum. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :135, 2003.
- [13] D. N. Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology. 2006.
- [14] S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517 :565–586, 1999.
- [15] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116 :1009–1038, 1998.

- [16] Adam G. Riess et al. Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophys. J.*, 607 :665–687, 2004.
- [17] Alexander J. Conley et al. Measurement of Ω_m , Ω_Λ from a blind analysis of type ia supernovae with CMAGIC : Using color information to verify the acceleration of the Universe. *Astrophys. J.*, 644 :1, 2006.
- [18] Pierre Astier et al. The Supernova Legacy Survey : Measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447 :31–48, 2006.
- [19] David W. Hogg et al. Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies. *Astrophys. J.*, 624 :54–58, 2005.
- [20] Luciano Pietronero and Francesco Sylos Labini. Statistical physics for complex cosmic structures. *AIP Conf. Proc.*, 822 :294–300, 2006.
- [21] Michael Joyce, F. Sylos Labini, A. Gabrielli, M. Montuori, and L. Pietronero. Basic properties of galaxy clustering in the light of recent results from the Sloan Digital Sky Survey. *Astron. Astrophys.*, 443 :11, 2005.
- [22] Jaswant Yadav, Somnath Bharadwaj, Biswajit Pandey, and T. R. Seshadri. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey data release one. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 364 :601–606, 2005.
- [23] Martin Kerscher, Jens Schmalzing, Thomas Buchert, and Herbert Wagner. Fluctuations in the IRAS 1.2 Jy catalogue. *Astron. Astrophys.*, 333 :1–12, 1998.
- [24] M. Kerscher et al. Morphological fluctuations of large-scale structure : the PSCz survey. *Astron. Astrophys.*, 373 :1–11, 2001.
- [25] Chiaki Hikage et al. Minkowski functionals of SDSS galaxies I : Analysis of excursion sets. *Publ. Astron. Soc. Jap.*, 55 :911–931, 2003.
- [26] R. A. Alpher and Herman R. Evolution of the Universe. *Nature*, 162 :774, 1948.
- [27] G. Gamow. The evolution of the Universe. *Nature*, 162 :680, 1948.
- [28] Arno A. Penzias and Robert Woodrow Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, 142 :419–421, 1965.
- [29] S. J. Stoeger, William R., Roy Maartens, and G. F. R. Ellis. Proving almost homogeneity of the universe : An almost Ehlers-Geren-Sachs theorem. *Astrophys. J.*, 443 :1, 1995.
- [30] F. Zwicky. Spectral displacement of extra galactic nebulae. *Helv. Phys. Acta*, 6 :110–127, 1933.
- [31] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk. Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 405 :279–390, 2005.

- [32] Mordehai Milgrom. Solutions for the modified newtonian dynamics field equation. *Astrophys. J.*, 302 :617–625, 1986.
- [33] R. H. Sanders. Cosmology with Modified Newtonian Dynamics (MOND). *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 296 :1009–1018, 1998.
- [34] Jacob D. Bekenstein. Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys. Rev.*, D70 :083509, 2004.
- [35] Jean-Philippe Bruneton and Gilles Esposito-Farese. Field-theoretical formulations of MOND-like gravity. *arXiv :0705.4043 [gr-qc]*, 2007.
- [36] Garry W. Angus, Benoit Famaey, and HongSheng Zhao. Can MOND take a bullet? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 371 :138, 2006.
- [37] G. Beaudet and A. Yahil. More on big-bang nucleosynthesis with nonzero lepton numbers. *Astrophys. J.*, 218 :253–262, November 1977.
- [38] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. The early universe. *Front. Phys.*, 69 :1–547, 1990.
- [39] D. J. Fixsen et al. The Cosmic Microwave Background spectrum from the full COBE/FIRAS data set. *Astrophys. J.*, 473 :576, 1996.
- [40] http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/map_gh_images.cfm.
- [41] Ruth Durrer. The theory of CMB anisotropies. *J. Phys. Stud.*, 5 :177–215, 2001.
- [42] Wayne Hu. *Wandering in the background : a cosmic background explorer*. PhD thesis, University of Berkeley, 1995.
- [43] P. J. E. Peebles. *Large scale structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.
- [44] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [45] T. Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [46] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco. *Gravitational Lenses*. Gravitational Lenses, XIV, 560 pp. 112 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1992.
- [47] Saul Perlmutter and Brian P. Schmidt. Measuring cosmology with supernovae. *astro-ph/0303428*, 2003.
- [48] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge, UK : Univ. Pr. (2000) 400 p.
- [49] Andrei D. Linde. Particle physics and inflationary cosmology. *hep-th/0503203*, 2005.

- [50] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61 :1–23, 1989.
- [51] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15 :1753–1936, 2006.
- [52] T. Padmanabhan. Vacuum fluctuations of energy density can lead to the observed cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 22 :L107–L110, 2005.
- [53] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev.*, D37 :3406, 1988.
- [54] Philippe Brax and Jerome Martin. The robustness of quintessence. *Phys. Rev.*, D61 :103502, 2000.
- [55] Philippe Brax and Jerome Martin. Quintessence and supergravity. *Phys. Lett.*, B468 :40–45, 1999.
- [56] Edmund J. Copeland, Andrew R Liddle, and David Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys. Rev.*, D57 :4686–4690, 1998.
- [57] A. de la Macorra and G. Piccinelli. General scalar fields as quintessence. *Phys. Rev.*, D61 :123503, 2000.
- [58] S. C. C. Ng, N. J. Nunes, and Francesca Rosati. Applications of scalar attractor solutions to cosmology. *Phys. Rev.*, D64 :083510, 2001.
- [59] Luca Amendola. Scaling solutions in general non-minimal coupling theories. *Phys. Rev.*, D60 :043501, 1999.
- [60] Luca Amendola. Coupled quintessence. *Phys. Rev.*, D62 :043511, 2000.
- [61] Takeshi Chiba. Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Phys. Rev.*, D60 :083508, 1999.
- [62] Francesca Perrotta, Carlo Baccigalupi, and Sabino Matarrese. Extended quintessence. *Phys. Rev.*, D61 :023507, 2000.
- [63] Carlo Baccigalupi, Sabino Matarrese, and Francesca Perrotta. Tracking extended quintessence. *Phys. Rev.*, D62 :123510, 2000.
- [64] Andre Fuzfa and J. M. Alimi. Toward a unified description of dark energy and dark matter from the abnormally weighting energy hypothesis. *astro-ph/0702478*, 2007.
- [65] P. Jordan. *Schwerkraft und Weltall*. Friedrich Vieweg and Sohn, 1955.
- [66] P.A.M. Dirac. A new basis for cosmology. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 165 :199–208, April 1938.
- [67] M. Fierz. *Helv. Phys. Acta*, 29 :128–134, 1956.
- [68] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124 :925–935, 1961.

- [69] Theodor Kaluza. On the problem of unity in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921 :966–972, 1921.
- [70] O. Klein. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. *Z. Phys.*, 37 :895–906, 1926.
- [71] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 1 : Introduction. Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
- [72] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 2 : Loop amplitudes, anomalies and phenomenology. Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
- [73] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9 :2093–2176, 1992.
- [74] G. Esposito-Farese and D. Polarski. Scalar-tensor gravity in an accelerating universe. *Phys. Rev.*, D63 :063504, 2001.
- [75] C. M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Theory and Experiment in Gravitational Physics, by Clifford M. Will, pp. 396. ISBN 0521439736. Cambridge, UK : Cambridge University Press, March 1993., March 1993.
- [76] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425 :374, 2003.
- [77] T. Damour and K. Nordtvedt. Tensor - scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev.*, D48 :3436–3450, 1993.
- [78] A. Navarro, A. Serna, and J. M. Alimi. Search for scalar-tensor gravity theories with a non- monotonic time evolution of the speed-up factor. *Class. Quant. Grav.*, 19 :4361–4375, 2002.
- [79] A. Serna and J. M. Alimi. Scalar-tensor cosmological models. *Phys. Rev.*, D53 :3074–3086, 1996.
- [80] A. Serna, J. M. Alimi, and A. Navarro. Convergence of scalar-tensor theories toward general relativity and primordial nucleosynthesis. *Class. Quant. Grav.*, 19 :857–874, 2002.
- [81] Paul K. Townsend and Mattias N. R. Wohlfarth. Cosmology as geodesic motion. *Class. Quant. Grav.*, 21 :5375, 2004.
- [82] J. G. Russo and P. K. Townsend. Cosmology as relativistic particle mechanics : From big crunch to big bang. *Class. Quant. Grav.*, 22 :737–752, 2005.
- [83] Luciana A. Elias and Alberto Saa. Non-minimally coupled cosmology as geodesic motion. 2007.

- [84] Luciana A. Elias and Alberto Saa. Homogeneous cosmologies and the Maupertuis-Jacobi principle. *Phys. Rev.*, D75 :107301, 2007.
- [85] Jean-Michel Alimi and Arturo Serna. Upper limit to Ω_b in scalar-tensor gravity theories. *Astrophys. J.*, 487 :38–41, 1997.
- [86] A. Serna and J. M. Alimi. Constraints on the scalar-tensor theories of gravitation from primordial nucleosynthesis. *Phys. Rev.*, D53 :3087–3098, 1996.
- [87] T. Damour and B. Pichon. Big bang nucleosynthesis and tensor-scalar gravity. *Phys. Rev. D*, 59(12) :123502, June 1999.
- [88] Alain Coc, Keith A. Olive, Jean-Philippe Uzan, and Elisabeth Vangioni. Big bang nucleosynthesis constraints on scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev.*, D73 :083525, 2006.
- [89] D. N. Spergel et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :175, 2003.
- [90] B. S. Mason et al. The Anisotropy of the Microwave Background to $l = 3500$: Deep Field Observations with the Cosmic Background Imager. *Astrophys. J.*, 591 :540–555, 2003.
- [91] V. Luridiana, A. Peimbert, M. Peimbert, and M. Cervino. The effect of collisional enhancement of balmer lines on the determination of the primordial helium abundance. *Astrophys. J.*, 592 :846–865, 2003.
- [92] Yuri I. Izotov, Frederic H. Chaffee, Craig B. Foltz, Richard F. Green, Natalia G. Guseva, and Trinh X. Thuan. Helium abundance in the most metal-deficient blue compact galaxies : I Zw 18 and SBS 0335-052. *Astrophys. J.*, 527 :757–777, 1997.
- [93] David Kirkman, David Tytler, Nao Suzuki, John M. O’Meara, and Dan Rubin. The cosmological baryon density from the deuterium to hydrogen ratio towards QSO absorption systems : D/H towards Q1243+3047. *Astrophys. J. Suppl.*, 149 :1, 2003.
- [94] Sean G. Ryan, John E. Norris, and Timothy C. Beers. The Spite Lithium plateau : Ultra-thin but post-primordial. *Astrophys. J.*, 523 :654–677, 1999.
- [95] Piercarlo Bonifacio. On the lithium content of the globular cluster M92. *Astron. Astrophys.*, 395 :515–518, 2002.
- [96] F. Spite and M. Spite. Abundance of lithium in unevolved halo stars and old disk stars : Interpretation and consequences. *Astron. Astrophys.*, 115 :357–366, 1982.
- [97] Alain Coc, Elisabeth Vangioni-Flam, Pierre Descouvemont, Abderrahim Adahchour, and Carmen Angulo. Updated big bang nucleosynthesis confronted to WMAP observations and to the abundance of light elements. *Astrophys. J.*, 600 :544–552, 2004.

- [98] Karsten Jedamzik and Jan B. Rehm. Inhomogeneous Big Bang Nucleosynthesis : Upper limit on Ω_b and production of Lithium, Beryllium, and Boron. *Phys. Rev.*, D64 :023510, 2001.
- [99] Karsten Jedamzik. Did something decay, evaporate, or annihilate during big bang nucleosynthesis? *Phys. Rev.*, D70 :063524, 2004.
- [100] Karsten Jedamzik. Neutralinos and big bang nucleosynthesis. *Phys. Rev.*, D70 :083510, 2004.
- [101] John R. Ellis, Keith A. Olive, and Elisabeth Vangioni. Effects of unstable particles on light-element abundances : Lithium versus deuterium and He-3. *Phys. Lett.*, B619 :30–42, 2005.
- [102] Kazuhide Ichikawa, Masahiro Kawasaki, and Fuminobu Takahashi. Solving the discrepancy among the light elements abundances and WMAP. *Phys. Lett.*, B597 :1–10, 2004.
- [103] Georgeanne R. Caughlan and William A. Fowler. Thermonuclear reaction rates. 5. *Atom. Data Nucl. Data Tabl.*, 40 :283–334, 1988.
- [104] Michael S. Smith, Lawrence H. Kawano, and Robert A. Malaney. Experimental, computational, and observational analysis of primordial nucleosynthesis. *Astrophys. J. Suppl.*, 85 :219–247, 1993.
- [105] C. Angulo, M. Arnould, M. Rayet, P. Descouvemenont, D. Baye, C. Leclerc-Willain, A. Coc, S. Barhoumi, P. Aguer, C. Rolfs, et al. A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates. *Nucl. Phys. A*, 656 :3–183, 1999.
- [106] Richard H. Cyburt. Primordial nucleosynthesis for the new cosmology : Determining uncertainties and examining concordance. *Phys. Rev.*, D70 :023505, 2004.
- [107] J. Larena, J.-M. Alimi, and A. Serna. Big Bang Nucleosynthesis in scalar tensor gravity : The key problem of the primordial ${}^7\text{Li}$ abundance. *Astrophys. J.*, 658 :1–10, March 2007.
- [108] Viatcheslav F. Mukhanov, H. A. Feldman, and Robert H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. part 1. classical perturbations. part 2. quantum theory of perturbations. part 3. extensions. *Phys. Rept.*, 215 :203–333, 1992.
- [109] Xue-lei Chen and Marc Kamionkowski. Cosmic microwave background temperature and polarization anisotropy in Brans-Dicke cosmology. *Phys. Rev.*, D60 :104036, 1999.
- [110] Diego F. Torres. Quintessence, super-quintessence and observable quantities in Brans-Dicke and non-minimally coupled theories. *Phys. Rev.*, D66 :043522, 2002.

- [111] Ryo Nagata, Takeshi Chiba, and Naoshi Sugiyama. Observational consequences of evolution of primordial fluctuations in scalar-tensor cosmology. *Phys. Rev.*, D66 :103510, 2002.
- [112] Ryo Nagata, Takeshi Chiba, and Naoshi Sugiyama. WMAP constraints on scalar-tensor cosmology and the variation of the gravitational constant. *Phys. Rev.*, D69 :083512, 2004.
- [113] Kimberly Coble, Scott Dodelson, and Joshua A. Frieman. Dynamical Λ models of structure formation. *Phys. Rev.*, D55 :1851–1859, 1997.
- [114] M. Tegmark et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Phys. Rev.*, D74 :123507, 2006.
- [115] L. Page et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : Interpretation of the TT and TE angular power spectrum peaks. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :233, 2003.
- [116] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology - its nature, aims and problems. In B. Bertotti, F. de Felice, and A. Pascolini, editors, *General Relativity and Gravitation Conference*, pages 215–288, 1984.
- [117] J. Kristian and R. K. Sachs. Observations in cosmology. *Astrophys. J.*, 143 :379, February 1966.
- [118] W. H. McCrea. Observable relations in relativistic cosmology. mit 1 abbildung. *Zeitschrift fur Astrophysik*, 9 :290, 1935.
- [119] G. F. R. Ellis, S. D. Nel, R. Maartens, W. R. Stoeger, and A. P. Whitman. Ideal observational cosmology. *Phys. Rep.*, 124 :315–417, July 1985.
- [120] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman. The theory of critical phenomena : An introduction to the renormalization group. Oxford, UK : Clarendon (1992) 464 p.
- [121] Bertrand Delamotte. An introduction to the nonperturbative renormalization group. *cond-mat/0702365*, 2007.
- [122] Mauro Carfora and Kamilla Piotrkowska. A renormalization group approach to relativistic cosmology. *Phys. Rev.*, D52 :4393–4424, 1995.
- [123] Thomas Buchert and Mauro Carfora. Matter seen at many scales and the geometry of averaging in relativistic cosmology. 2000.
- [124] Thomas Buchert and Mauro Carfora. Regional averaging and scaling in relativistic cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 19 :6109–6145, 2002.
- [125] Thomas Buchert and Mauro Carfora. Cosmological parameters are dressed. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :031101, 2003.
- [126] Thomas Buchert and Mauro Carfora. The cosmic quartet - cosmological parameters of a smoothed inhomogeneous spacetime. *astro-ph/0312621*, 2003.

- [127] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The dynamics of General Relativity. *gr-qc/0405109*, 1962.
- [128] R. S. Hamilton. *J. Diff. Geom.*, 17 :255, 1982.
- [129] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171. Springer Verlag GTM, 1997.
- [130] J. Ehlers. Contributions to the relativistic mechanics of continuous media. *Gen. Rel. Grav.*, 25 :1225–1266, 1993.
- [131] Thomas Buchert. On average properties of inhomogeneous cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 9 :306–321, 2000.
- [132] Thomas Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity. I : Dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 32 :105–125, 2000.
- [133] Thomas Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity : Perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 33 :1381–1405, 2001.
- [134] Akio Hosoya, Thomas Buchert, and Masaaki Morita. Information entropy in cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :141302, 2004.
- [135] Thomas Buchert, Julien Larena, and Jean-Michel Alimi. Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies : The 'morphon field'. *Class. Quant. Grav.*, 23 :6379–6408, 2006.
- [136] Joel K. Erickson, R. R. Caldwell, Paul J. Steinhardt, C. Armendariz-Picon, and Viatcheslav F. Mukhanov. Measuring the speed of sound of quintessence. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :121301, 2002.
- [137] Robert R. Caldwell, Michael Doran, Christian M. Mueller, Gregor Schaefer, and Christof Wetterich. Early quintessence in light of WMAP. *Astrophys. J.*, 591 :L75–L78, 2003.
- [138] R. R. Caldwell and Eric V. Linder. The limits of quintessence. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :141301, 2005.
- [139] Nan Li and Dominik J. Schwarz. On the onset of cosmological backreaction. *gr-qc/0702043*, 2007.
- [140] Edward W. Kolb, S. Matarrese, and A. Riotto. On cosmic acceleration without dark energy. *New J. Phys.*, 8 :322, 2006.
- [141] Alessio Notari. Late time failure of Friedmann equation. *Mod. Phys. Lett.*, A21 :2997–3001, 2006.
- [142] Thomas Buchert and Jurgen Ehlers. Averaging inhomogeneous Newtonian cosmologies. *Astron. Astrophys.*, 320 :1–7, 1997.
- [143] Camille Bonvin, Ruth Durrer, and M. Alice Gasparini. Fluctuations of the luminosity distance. *Phys. Rev.*, D73 :023523, 2006.

- [144] G. A. Lemaître. The expanding universe. *General Relativity and Gravitation*, 29 :641–680, May 1997.
- [145] A. Krasinski. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Inhomogeneous Cosmological Models, by Andrzej Krasinski, pp. 333. ISBN 0521481805. Cambridge, UK : Cambridge University Press, July 1997., July 1997.
- [146] Marie-Noelle Celerier. Do we really see a cosmological constant in the supernovae data? *Astron. Astrophys.*, 353 :63–71, 2000.
- [147] Krzysztof Bolejko. Supernovae ia observations in the Lemaitre–Tolman model. *astro-ph/0512103*, 2005.
- [148] Reza Mansouri. Structured FRW universe leads to acceleration : A non-perturbative approach. *astro-ph/0512605*, 2005.
- [149] Kari Enqvist and Teppo Mattsson. The effect of inhomogeneous expansion on the supernova observations. *JCAP*, 0702 :019, 2007.
- [150] Tirthabir Biswas, Reza Mansouri, and Alessio Notari. Nonlinear structure formation and apparent acceleration : an investigation. *astro-ph/0606703*, 2006.
- [151] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Can the acceleration of our universe be explained by the effects of inhomogeneities? *Class. Quant. Grav.*, 23 :235–250, 2006.
- [152] R. Ali Vanderveld, Eanna E. Flanagan, and Ira Wasserman. Systematic corrections to the measured cosmological constant as a result of local inhomogeneity. *arXiv :0706.1931 [astro-ph]*, 2007.
- [153] Ericourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. *gr-qc/0703035*, 2007.
- [154] Christopher M. Hirata and Uros Seljak. Can superhorizon cosmological perturbations explain the acceleration of the universe? *Phys. Rev.*, D72 :083501, 2005.
- [155] Syksy Rasanen. Backreaction and spatial curvature in a dust universe. *Class. Quant. Grav.*, 23 :1823–1835, 2006.
- [156] Syksy Rasanen. Dark energy from backreaction. *JCAP*, 0402 :003, 2004.
- [157] Edward W. Kolb, Sabino Matarrese, Alessio Notari, and Antonio Riotto. The effect of inhomogeneities on the expansion rate of the universe. *Phys. Rev.*, D71 :023524, 2005.
- [158] Matthew F. Parry. A rule of thumb for cosmological backreaction. *JCAP*, 0606 :016, 2006.
- [159] Masumi Kasai, Hideki Asada, and Toshifumi Futamase. Toward a no-go theorem for accelerating universe by nonlinear backreaction. *Prog. Theor. Phys.*, 115 :827–832, 2006.

- [160] Syksy Rasanen. Accelerated expansion from structure formation. *JCAP*, 0611 :003, 2006.
- [161] W. B. Bonnor. The formation of the nebulae. with 3 figures. *Zeitschrift fur Astrophysik*, 39 :143, 1956.
- [162] Ravi K. Sheth and Rien van de Weygaert. A hierarchy of voids : Much ado about nothing. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 350 :517, 2004.
- [163] Jorg M. Colberg, Ravi K. Sheth, Antonaldo Diaferio, Liang Gao, and Naoki Yoshida. Voids in a Λ CDM universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 360 :216–226, 2005.
- [164] Steven Furlanetto and Tsvi Piran. The evidence of absence : Galaxy voids in the excursion set formalism. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 366 :467–479, 2006.
- [165] Thomas Buchert, Martin Kerscher, and Christian Sicka. Backreaction of inhomogeneities on the expansion : the evolution of cosmological parameters. *Phys. Rev.*, D62 :043525, 2000.
- [166] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :559–606, 2003.
- [167] C. Wetterich. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nucl. Phys.*, B302 :668, 1988.
- [168] Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky. The case for a positive cosmological Λ -term. *Int. J. Mod. Phys.*, D9 :373–444, 2000.
- [169] Valerio Faraoni. Phantom cosmology with general potentials. *Class. Quant. Grav.*, 22 :3235–3246, 2005.
- [170] Harvinder K. Jassal, J. S. Bagla, and T. Padmanabhan. The vanishing phantom menace. *astro-ph/0601389*, 2006.
- [171] Alexei A. Starobinsky. How to determine an effective potential for a variable cosmological term. *JETP Lett.*, 68 :757–763, 1998.
- [172] Dragan Huterer and Michael S. Turner. Revealing quintessence. *Phys. Rev.*, D60 :081301, 1999.
- [173] Takashi Nakamura and Takeshi Chiba. Determining the equation of state of the expanding universe : Inverse problem in cosmology. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 306 :696–700, 1999.
- [174] Varun Sahni, Tarun Deep Saini, Alexei A. Starobinsky, and Ujjaini Alam. Statefinder – a new geometrical diagnostic of dark energy. *JETP Lett.*, 77 :201–206, 2003.
- [175] L. Arturo Urena-Lopez and Tonatiuh Matos. A new cosmological tracker solution for quintessence. *Phys. Rev.*, D62 :081302, 2000.

- [176] F. Lucchin and S. Matarrese. Power law inflation. *Phys. Rev.*, D32 :1316, 1985.
- [177] J. Larena, J.-M. Alimi, T. Buchert, and M. Kunz. SN1a observations and backreaction-driven effective cosmologies with a template metric. *in preparation*, 2007.
- [178] R. C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Oxford : Clarendon Press, 1934, 1934.
- [179] C. L. Bennett et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : Preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :1, 2003.
- [180] Richard H. Cyburt, Brian D. Fields, and Keith A. Olive. Primordial nucleosynthesis in light of WMAP. *Phys. Lett.*, B567 :227–234, 2003.
- [181] Sean G. Ryan, Timothy C. Beers, Keith A. Olive, Brian D. Fields, and John E. Norris. Primordial Lithium and Big Bang Nucleosynthesis. *Astrophys. J. Lett.*, 530 :L57–L60, 2000.
- [182] Ann M. Boesgaard, Megan C. Novicki, and Alex Stephens. From Lithium to Uranium : Elemental tracers of early cosmic evolution. volume 1, pages 29–34. Cambridge University Press, 2005.
- [183] F. Thévenin, C. Charbonnel, J. A. de Freitas Pacheco, T. P. Idiart, G. Jasiewicz, P. de Laverny, and B. Plez. VLT observations of turnoff stars in the globular cluster NGC 6397. *Astron. Astrophys.*, 373 :905–915, jul 2001.
- [184] Martin Asplund, David L. Lambert, Poul Erik Nissen, Francesca Primas, and Verne V. Smith. Lithium isotopic abundances in metal-poor halo stars. *Astrophys. J.*, 644 :229–259, 2006.
- [185] Peter G. Bergmann. Comments on the scalar tensor theory. *Int. J. Theor. Phys.*, 1 :25–36, 1968.
- [186] Robert V. Wagoner. Scalar tensor theory and gravitational waves. *Phys. Rev.*, D1 :3209–3216, 1970.
- [187] Jr. Nordtvedt, Kenneth. Postnewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences. *Astrophys. J.*, 161 :1059–1067, 1970.
- [188] Robert V. Wagoner. Big bang nucleosynthesis revisited. *Astrophys. J.*, 179 :343–360, 1973.
- [189] J. D. Barrow. A cosmological limit on the possible variation of G. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 184 :677–682, sep 1978.
- [190] John D. Barrow and Paul Parsons. The behaviour of cosmological models with varying-G. *Phys. Rev.*, D55 :1906–1936, 1997.

- [191] James P. Kneller and Gary Steigman. BBN for pedestrians. *New J. Phys.*, 6 :117, 2004.
- [192] L. Bianchi. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti [on three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions]. *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza*, 11 :267–352, 1898.
- [193] L. Bianchi. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di trasformazioni [lectures on the theory of finite continuous transformation groups (1902-1903)], pisa, traduction anglaise : General relativity and gravitation, 33, 2157-2170, 2001, and general relativity and gravitation,33, 2171-2253,2001.
- [194] M. MacCallum. *Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies*. Cambridge University Press, 1979.
- [195] A. Belinskii and L. M. Khalatnikov. Effect of scalar and vector fields on the nature of the cosmological singularity. *Sov. Phys. JETP*, 36 :591, 1973.
- [196] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. *Adv. Phys.*, 19 :525–573, 1970.
- [197] Charles W. Misner. Mixmaster universe. *Phys. Rev. Lett.*, 22 :1071–1074, 1969.
- [198] Charles W. Misner. Quantum cosmology. *Phys. Rev.*, 186, 1969.
- [199] M. P. Ryan. Qualitative cosmology : Diagramatic solutions for Bianchi type IX Universes with expansion, rotation and shear. I the symmetric case. *Ann. Phys.*, 65 :506, 1971.
- [200] Robert T. Jantzen. Spatially homogeneous dynamics : A unified picture. 0200.
- [201] V. R. Gavrilov, V. D. Ivashchuk, and V. N. Melnikov. Integrable pseudo-Euclidean Toda-like systems in multidimensional cosmology with multicomponent perfect fluid. *J. Math. Phys.*, 36 :5829–5847, 1995.
- [202] A. A. Kirillov and V. N. Melnikov. Dynamics of inhomogeneities of metric in the vicinity of a singularity in multidimensional cosmology. *Phys. Rev.*, D52 :723–729, 1995.
- [203] A. E. Pavlov. The mixmaster cosmological model as a pseudo-Euclidean generalized Toda chain. *Regul. & Chaotic Dyn.*, 1 :119, 1996.
- [204] M. Szydlowski and M. Biesada. Kovalevski exponents and integrability properties in class A homogeneous cosmological models. *J. non lin. math. phys.*, 9 :L1, 2002.
- [205] H. Yoshida. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals I : Kovalevski exponents. *Celestial Mechanics*, 31 :363, 1983.

- [206] H. Yoshida. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals II : Conditions for algebraic. *Celestial Mechanics*, 31 :381, 1983.
- [207] Y. Elskens and M. Henneaux. Chaos in Kaluza-Klein models. *Class. Quant. Grav.*, 4 :L161–L167, 1987.
- [208] R. Conte. *The Painlevé approach to non linear ODE*. Springer Verlag, 1999.
- [209] Christof Wetterich. Can structure formation influence the cosmological evolution? *Phys. Rev.*, D67 :043513, 2003.
- [210] Rachel Bean, Sean Carroll, and Mark Trodden. Insights into dark energy : Interplay between theory and observation. 2005.
- [211] Norbert Straumann. Dark energy : Recent developments. *Mod. Phys. Lett.*, A21 :1083–1098, 2006.
- [212] George F. R. Ellis and Thomas Buchert. The universe seen at different scales. *Phys. Lett.*, A347 :38–46, 2005.
- [213] Thomas Buchert. On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem. *Class. Quant. Grav.*, 23 :817–844, 2006.
- [214] Thomas Buchert. A cosmic equation of state for the inhomogeneous universe : Can a global far-from-equilibrium state explain dark energy? *Class. Quant. Grav.*, 22 :L113–L119, 2005.
- [215] Yasusada Nambu and Masayuki Tanimoto. Accelerating universe via spatial averaging. *gr-qc/0507057*, 2005.
- [216] Havard Alnes, Morad Amarguioui, and Oyvind Gron. An inhomogeneous alternative to dark energy? *Phys. Rev.*, D73 :083519, 2006.
- [217] Aseem Paranjape and T. P. Singh. The possibility of cosmic acceleration via spatial averaging in Lemaitre-Tolman-Bondi models. *Class. Quant. Grav.*, 23 :6955–6969, 2006.
- [218] A. A. Coley, N. Pelavas, and R. M. Zalaletdinov. Cosmological solutions in macroscopic gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :151102, 2005.
- [219] Thomas Buchert and Alvaro Dominguez. Adhesive gravitational clustering. *Astron. Astrophys.*, 438 :443–460, 2005.
- [220] Ujjaini Alam, Varun Sahni, Tarun Deep Saini, and A. A. Starobinsky. Exploring the expanding universe and dark energy using the statefinder diagnostic. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 344 :1057, 2003.
- [221] A. K. D. Evans, I. K. Wehus, O. Gron, and Oystein Elgaroy. Geometrical constraints on dark energy. *Astron. Astrophys.*, 430 :399–410, 2005.
- [222] M. S. Madsen. Scalar fields in curved space-times. *Class. Quant. Grav.*, 5 :627–639, 1988.

- [223] V. Mukhanov. Physical foundations of cosmology. Cambridge, UK : Univ. Pr. (2005) 421 p.
- [224] K. R. Mecke, T. Buchert, and H. Wagner. Robust morphological measures for large-scale structure in the universe. *Astron. Astrophys.*, 288 :697–704, 1994.
- [225] Michael Doran, Jan-Markus Schwindt, and Christof Wetterich. Structure formation and the time dependence of quintessence. *Phys. Rev.*, D64 :123520, 2001.
- [226] Andrew R. Liddle and Robert J. Scherrer. A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions. *Phys. Rev.*, D59 :023509, 1999.
- [227] Ofer Lahav. Observational tests of FRW world models. *Class. Quant. Grav.*, 19 :3517–3526, 2002.
- [228] J. Ehlers and W. Rindler. A phase-space representation of Friedmann-Lemaître universes containing both dust and radiation and the inevitability of a big bang. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, 238 :503–521, may 1989.
- [229] Yasuhide Sota et al. Renormalization group approach in Newtonian cosmology. *Phys. Rev.*, D58 :043502, 1998.
- [230] Luca Amendola, Miguel Quartin, Shinji Tsujikawa, and Ioav Waga. Challenges for scaling cosmologies. *Phys. Rev.*, D74 :023525, 2006.
- [231] Marek Szydlowski, Włodzimierz Godłowski, and Radosław Wojtak. Equation of state for universe from the first principles. *Gen. Rel. Grav.*, 38 :795, 2006.
- [232] J. P. Derendinger, Luis E. Ibanez, and Hans Peter Nilles. On the low-energy $d = 4$, $N=1$ supergravity theory extracted from the $d = 10$, $N=1$ superstring. *Phys. Lett.*, B155 :65, 1985.
- [233] J. Polchinski. String theory. vol. 2 : Superstring theory and beyond. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 531 p.
- [234] Josef L. P. Karthauser and P. M. Saffin. Scaling solutions and geodesics in moduli space. *Class. Quant. Grav.*, 23 :4615–4624, 2006.
- [235] Edmund J. Copeland, Anupam Mazumdar, and N. J. Nunes. Generalized assisted inflation. *Phys. Rev.*, D60 :083506, 1999.
- [236] Andres Collinucci, Mikkel Nielsen, and Thomas Van Riet. Scalar cosmology with multi-exponential potentials. *Class. Quant. Grav.*, 22 :1269–1288, 2005.
- [237] Ruth Lazkoz, Roy Maartens, and Elisabetta Majerotto. Observational constraints on phantom-like braneworld cosmologies. *Phys. Rev.*, D74 :083510, 2006.

- [238] Urbano Franca. Dark energy, curvature and cosmic coincidence. *Phys. Lett.*, B641 :351–356, 2006.
- [239] Chia-Hsun Chuang, Je-An Gu, and W-Y. P. Hwang. Inhomogeneity-induced cosmic acceleration in a dust universe. 2005.
- [240] Esteban A. Calzetta, Bei Lok Hu, and Francisco D. Mazzitelli. Coarse-grained effective action and renormalization group theory in semiclassical gravity and cosmology. *Phys. Rept.*, 352 :459–520, 2001.
- [241] Jose Gaiete. Stochastic formulation of the renormalization group : Supersymmetric structure and topology of the space of couplings. *J. Phys.*, A37 :10409–10420, 2004.
- [242] Mauro Carfora. Fokker-Planck dynamics and entropies for the normalized Ricci flow. 0700.
- [243] I. Dymnikova and M. Khlopov. Decay of cosmological constant in selfconsistent inflation. *Eur. Phys. J.*, C20 :139–146, 2001.
- [244] G. Dautcourt. Classical back reaction of low-frequency cosmic gravitational radiation. *Phys. Rev.*, D60 :044008, 1999.
- [245] Winfried Zimdahl, Dominik J. Schwarz, Alexander B. Balakin, and Diego Pavon. Cosmic anti-friction and accelerated expansion. *Phys. Rev.*, D64 :063501, 2001.
- [246] Dominik J. Schwarz. Accelerated expansion without dark energy. *astro-ph/0209584*, 2002.
- [247] T. Futamase. An approximation scheme for constructing inhomogeneous universes in general relativity. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, 237 :187–200, mar 1989.
- [248] Toshifumi Futamase. Averaging of a locally inhomogeneous realistic universe. *Phys. Rev.*, D53 :681–689, 1996.
- [249] Viatcheslav F. Mukhanov, L. Raul W. Abramo, and Robert H. Brandenberger. On the back reaction problem for gravitational perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :1624–1627, 1997.
- [250] L. Raul W. Abramo, Robert H. Brandenberger, and Viatcheslav F. Mukhanov. The energy-momentum tensor for cosmological perturbations. *Phys. Rev.*, D56 :3248–3257, 1997.
- [251] Patrick Martineau and Robert H. Brandenberger. The effects of gravitational back-reaction on cosmological perturbations. *Phys. Rev.*, D72 :023507, 2005.
- [252] Thomas Buchert. The non-perturbative regime of cosmic structure formation. *Astron. Astrophys.*, 454 :415–422, 2006.

- [253] K. Tomita. Bulk flows and Cosmic Microwave Background dipole anisotropy in cosmological void models. *Astrophys. J.*, 529 :26–37, jan 2000.
- [254] K. Tomita. Distances and lensing in cosmological void models. *Astrophys. J.*, 529 :38–46, jan 2000.
- [255] Kenji Tomita. A local void and the accelerating universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 326 :287, 2001.
- [256] Andrei D. Linde, Dmitri A. Linde, and Arthur Mezhlumian. Nonperturbative amplifications of inhomogeneities in a self-reproducing universe. *Phys. Rev.*, D54 :2504–2518, 1996.
- [257] David L. Wiltshire. Viable inhomogeneous model universe without dark energy from primordial inflation. *gr-qc/0503099*, 2005.
- [258] John W. Moffat. Late-time inhomogeneity and acceleration without dark energy. *JCAP*, 0605 :001, 2006.