



**HAL**  
open science

# Contributions au calcul géométrique effectif avec des objets courbes de faible degré

Sylvain Petitjean

► **To cite this version:**

Sylvain Petitjean. Contributions au calcul géométrique effectif avec des objets courbes de faible degré. Génie logiciel [cs.SE]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2007. tel-00187348

**HAL Id: tel-00187348**

**<https://theses.hal.science/tel-00187348v1>**

Submitted on 14 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contributions au calcul géométrique effectif avec des objets courbes de faible degré

## Thèse d'habilitation

présentée et soutenue publiquement le 12 octobre 2007

pour l'obtention de l'Habilitation à diriger des recherches

**Institut National Polytechnique de Lorraine**  
(Spécialité Informatique)

par

Sylvain Petitjean

### Composition du jury

- Rapporteurs :* Jean-Daniel Boissonnat, directeur de recherche, INRIA Sophia-Antipolis  
Thorsten Theobald, professeur, J.W. Goethe-Universität Frankfurt  
Gert Vegter, professeur, Rijksuniversiteit Groningen
- Examineurs :* Jean-Claude Paul, professeur invité, Tsinghua University  
Jean Ponce, professeur, ENS Ulm et University of Illinois at Urbana-Champaign  
Marie-Françoise Roy, professeur, université Rennes 1  
Karl Tombre, professeur, Institut national polytechnique de Lorraine
- Autres évaluateurs :* Hazel Everett, professeur, université Nancy 2  
Richard Pollack, professeur, Courant Institute, New York University



# Table des matières

<b>Résumé(s)</b>	<b>1</b>
Résumé en français . . . . .	1
Résumé en anglais . . . . .	1
<b>En guise de préambule</b>	<b>3</b>
<b>I Dossier de présentation</b>	<b>5</b>
<b>Curriculum vitæ détaillé</b>	<b>7</b>
État civil . . . . .	7
Situation actuelle . . . . .	7
Diplômes . . . . .	7
Expérience professionnelle . . . . .	8
Résumé de l'activité de recherche . . . . .	8
Publications majeures . . . . .	20
Résumé du projet de recherche . . . . .	21
Réalisation et diffusion de logiciels . . . . .	22
Valorisation et transfert technologique . . . . .	23
Encadrement d'activités de recherche . . . . .	24
Diffusion de l'information scientifique . . . . .	26
Responsabilités collectives . . . . .	26
Rayonnement scientifique . . . . .	27
Liste complète de publications . . . . .	28
<b>II Synthèse</b>	<b>33</b>
<b>Introduction</b>	<b>35</b>
Calcul géométrique exact . . . . .	35
Tour d'horizon . . . . .	36
Philosophie . . . . .	38
Survol du document . . . . .	38
<b>1 Intersection de quadriques de <math>\mathbb{P}^3(\mathbb{R})</math> : problématique et cas générique</b>	<b>41</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	42
1.2 Aperçu de l'algorithme . . . . .	43
1.3 Le cas des quartiques lisses . . . . .	44
1.4 Paramétrage d'une quadrique d'inertie $(2, 2)$ passant par un point rationnel . . . . .	48

1.5	Paramétrage d'une quartique lisse . . . . .	50
1.6	Comportement en pratique . . . . .	51
1.7	Test d'optimalité . . . . .	53
1.8	Exemples . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Classification et identification des faisceaux de quadriques de <math>\mathbb{P}^3(\mathbb{R})</math></b>	<b>57</b>
2.1	Comment classifier les faisceaux de quadriques ? . . . . .	58
2.2	Classification dans le cas réel . . . . .	61
2.3	Algorithmes de classification . . . . .	62
2.4	Un exemple . . . . .	63
2.5	Orbites de faisceaux réels . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Paramétrage des intersections de quadriques singulières de <math>\mathbb{P}^3(\mathbb{R})</math></b>	<b>67</b>
3.1	Paramétrage des paires de plans et des cônes . . . . .	67
3.2	Cas 1 : quartique cuspidale . . . . .	69
3.3	Cas 2 : deux coniques tangentes . . . . .	69
3.4	Cas 3 : conique et deux droites ne se coupant pas sur la conique . . . . .	70
3.5	Bilan . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Invariants et combinants de faisceaux de coniques</b>	<b>75</b>
4.1	Invariants et covariants : quelques rappels . . . . .	76
4.2	Paires de formes quadratiques ternaires . . . . .	79
4.3	Invariants et covariants de formes binaires . . . . .	81
4.4	Combinants de faisceaux de coniques . . . . .	83
4.5	Orbites de faisceaux . . . . .	87
4.6	Discrimination . . . . .	88
4.7	Exemples . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Tangentes communes à quatre sphères</b>	<b>93</b>
5.1	Préliminaires . . . . .	94
5.2	Centres affinement indépendants . . . . .	95
5.3	Centres colinéaires . . . . .	96
5.4	Prédicats géométriques . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Transversales aux sphères et théorème de type Helly</b>	<b>99</b>
6.1	Préliminaires . . . . .	100
6.2	Cône des directions . . . . .	100
6.3	Absence d'inflexion sur le bord du cône . . . . .	102
6.4	Convexité du cône . . . . .	103
6.5	Implications . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>107</b>
7.1	Conclusions . . . . .	107
7.2	Perspectives . . . . .	108
7.3	Objectifs logiciels . . . . .	115
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

<b>III Publications liées au document de synthèse</b>	<b>127</b>
<b>8 Parameterization of the Intersection of Quadrics: I. The Generic Algorithm</b>	<b>129</b>
<b>9 Parameterization of the Intersection of Quadrics: II. Classification of Pencils</b>	<b>131</b>
<b>10 Parameterization of the Intersection of Quadrics: III. Singular Cases</b>	<b>133</b>
<b>11 Intersecting Quadrics: An Efficient and Exact Implementation</b>	<b>135</b>
<b>12 Common Tangents to Spheres in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>137</b>
<b>13 Helly-Type Theorems for Line Transversals to Disjoint Unit Balls</b>	<b>139</b>
<b>14 Line Transversals to Disjoint Balls</b>	<b>141</b>



# Résumé(s)

## Résumé en français

Le monde physique dans lequel nous vivons est essentiellement géométrique. Le calcul géométrique est une brique centrale de nombreux domaines, comme la conception assistée par ordinateur, le graphisme, la robotique, la vision artificielle et bien d'autres. Depuis plus de trois décennies, la géométrie algorithmique est la discipline dédiée à l'établissement de bases solides pour l'étude des algorithmes géométriques qui relèvent de ces applications. Elle s'est historiquement et traditionnellement concentrée sur le traitement d'objets linéaires. Pour de nombreuses applications, il est nécessaire de manipuler des objets généraux comme des courbes et des surfaces complexes. L'extension du répertoire de la géométrie algorithmique aux objets courbes pose de nombreuses difficultés : refonte des structures de données et algorithmes fondamentaux ; irruption massive de questions algébriques ; explosion du nombre de cas dégénérés...

Cette thèse d'habilitation contribue à l'établissement d'un calcul géométrique effectif pour les objets courbes de faible degré. Elle reprend mes principales contributions sur le sujet ces dernières années. Mentionnons notamment : un algorithme exact, optimal et efficace pour le calcul du paramétrage de l'intersection de deux quadriques à coefficients entiers ; la caractérisation des positions relatives de deux coniques projectives à l'aide de prédicats géométriques de faible degré, mis au jour grâce à la théorie des invariants algébriques ; la caractérisation des dégénérescences du problème de tangentes réelles communes à quatre sphères ; la convexité du cône des directions de droites perçant trois boules disjointes, et les conséquences importantes de ce résultat en théorie de transversales géométriques. Le manuscrit se conclue par un panel de directions de recherche poursuivant et étendant les résultats obtenus à ce jour.

## Résumé en anglais

The physical world in which we live is essentially geometric. Geometric computing is a central building block in many fields, such as computer-aided design, computer graphics, robotics, computer vision and many others. For over three decades, computational geometry has been dedicated to supplying a solid foundation for the study of geometric algorithms which are relevant to all these applications. It has historically and traditionally focussed on the treatment of linear objects. For many applications, it is necessary to manipulate more general objects such as complex curves and surfaces. There are numerous issues involved in extending the repertoire of computational geometry to curved objects, namely: a complete rework of even its most basic data structures and algorithms; the massive intrusion of algebraic issues; the explosion of the number of degenerate cases...

This habilitation thesis contributes to the unfolding of an effective geometric computing

dedicated to low-degree curved objects. It summarizes my main contributions on the subject over recent years. Let us mention in particular: an exact, optimal and efficient algorithm for computing a parameterization of the intersection of two quadrics with integer coefficients; the characterization of the relative position of two projective conics with low-degree geometric predicates, uncovered using algebraic invariant theory; the characterization of the degeneracies in the problem of real common tangents to four spheres; the convexity of the cone of directions of lines piercing three disjoint balls, and the important consequences of this result in geometric transversal theory. The manuscript concludes with an overview of many research directions to extend the results obtained thus far.

# En guise de préambule

Figure imposée du parcours académique français, l'Habilitation à diriger des recherches (HDR) est paradoxalement aussi une figure libre. Car il n'y a pas de définition claire et de consensus sur ce qu'est, ou ce que doit être, une HDR. Les textes légaux, à cet égard, sont pour le moins laconiques.

Livré pour l'essentiel à lui-même, le postulant à l'HDR doit se faire sa propre idée sur le format à adopter, en tenant compte des habitudes du domaine, des us et coutumes locaux et de ce qu'il voit. Or que voit-il justement ?

Certains font un bilan, une sorte de rapport d'activité, respectant la chronologie de leurs travaux. Le Curriculum Vitae détaillé de la Partie I relève de cette conception.

D'autres proposent le survol d'un domaine et zooment sur certains de leurs travaux s'y rattachant. La synthèse de la Partie II répond pour l'essentiel à cette vision des choses.

D'autres encore saisissent l'occasion pour exprimer un point de vue ou échafauder de nouvelles pistes de recherche. Le Chapitre 4 entre dans ce cadre.

D'autres enfin insistent sur les perspectives de recherche et leur vision de l'« avenir ». Le Chapitre 7, qui clôt la Partie II, va dans ce sens.

Dans ce mémoire d'Habilitation, j'ai tâché de privilégier l'intuition en évitant autant que possible les détails techniques (sauf pour les parties nouvelles). Difficile toutefois de laisser entièrement les équations de côté quand justement une partie des contributions consiste à organiser intelligemment les calculs et à mettre en œuvre les « bons » outils mathématiques. La Partie II contient donc une dose « nécessaire » de symboles en tout genre. Espérons qu'elle ne soit pas trop indigeste. Le lecteur intéressé par les preuves des différentes assertions est invité à se reporter aux publications reprises dans la Partie III.

Comme chacun peut le constater, une grande partie de mes travaux est le produit de collaborations. Ceci explique pourquoi dans le reste de ce mémoire j'abandonnerai largement le « je » en faveur du « nous », ne revenant à la forme personnelle que pour ébaucher certaines idées nouvelles.

Enfin, pour faciliter la lecture du document, les références aux publications dont je suis (co-) auteur sont séparées des autres, les premières utilisant des clés numériques, les secondes des clés alphanumériques.



**Première partie**  
**Dossier de présentation**



# Curriculum vitæ détaillé

---

## État civil

---

### Sylvain Petitjean

Né le 10 août 1968 à Nancy (54)

Nationalité française

Célibataire

---

## Situation actuelle

---

Chargé de recherche CNRS, Département ST2I, affecté au LORIA (UMR 7503)

Responsable permanent de l'équipe VEGAS (« Algorithmes géométriques effectifs pour la visibilité et les surfaces »)

Thème INRIA Sym B (« Structures algébriques et géométriques, algorithmes »)

e-mail : [Sylvain.Petitjean@loria.fr](mailto:Sylvain.Petitjean@loria.fr)

URL : <http://www.loria.fr/~petitjea>

---

## Diplômes

---

- 1995      Thèse de doctorat de l'INPL (Institut national polytechnique de Lorraine), intitulée *Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application aux graphes d'aspects d'objets courbes*. Mention très honorable avec félicitations.  
Jury : R. Mohr (ENSIMAG), J. Ponce (Univ. d'Urbana-Champaign, États-Unis), J. Koenderink (Univ. d'Utrecht, Pays-Bas), B. Teissier (ENS Ulm), M.-C. Portmann (INPL), G. Masini (CNRS, directeur de thèse).
- 1992      Master of Science in Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign. Titre du mémoire : *Computing Aspect Graphs of Curved Objects Bounded by Smooth Algebraic Surfaces*.
- 1991      Diplôme d'ingénieur civil des Mines, spécialité informatique. École des Mines de Nancy.

---

## Expérience professionnelle

---

- 2005-            Responsable permanent de l'équipe VEGAS (« Algorithmes géométriques effectifs pour la visibilité et les surfaces ») du LORIA.
- 2004-2005    Responsable scientifique de l'équipe ISA (« Modèles, algorithmes et géométrie pour l'informatique graphique et la vision ») du LORIA.
- 2001-2004    Responsable permanent de l'équipe ISA.
- 1999-2001    Responsable du groupe « Modélisation et calculs géométriques » de l'équipe ISA.
- 1995-            Chargé de recherche au CNRS (1<sup>re</sup> classe depuis 1999).
- 1992-1995    Allocataire de recherche MESR.
- 1991-1992    Assistant de recherche, University of Illinois.

---

## Résumé de l'activité de recherche

---

Dans ce qui suit, je présente mes activités de recherche jusqu'à ce jour en trois périodes distinctes. Les références bibliographiques numériques correspondent à mes différentes publications, dont la liste exhaustive est donnée en fin de cv.

Mon activité de recherche a eu pour cadre le groupe du professeur Ponce à UIUC de 1990 à 1992, puis successivement les projets MOVI (1992-1995), ISA (1995-2005) et VEGAS (2005-) du LORIA (auparavant, le CRIN) et de l'INRIA Lorraine.

### De 1990 à 1995, vision théorique

Durant mon Master aux États-Unis puis ma thèse au CRIN, j'ai travaillé sur une représentation d'objets populaire en vision artificielle connue sous le nom de graphe d'aspects [KvD76,KvD79].

Le graphe d'aspects énumère toutes les apparences topologiquement distinctes d'un objet géométrique. Choisir un modèle de caméra (généralement projection orthographique ou perspective) et un point de vue détermine l'aspect de l'objet (c'est-à-dire la structure de la silhouette observée). L'ensemble des points de vue utilisé peut être partitionné en régions connexes maximales qui « observent » des aspects identiques et il est possible d'attacher un représentant à chacune de ces cellules. Le changement observé à la frontière entre deux régions est appelé événement visuel. Les régions maximales et leurs représentants forment les sommets d'un graphe, dont les arêtes correspondent aux frontières entre régions adjacentes.

---

[KvD76] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn. The singularities of the visual mapping. *Biological Cybernetics*, 24:51–59, 1976.

[KvD79] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn. The internal representation of solid shape with respect to vision. *Biological Cybernetics*, 32:211–216, 1979.

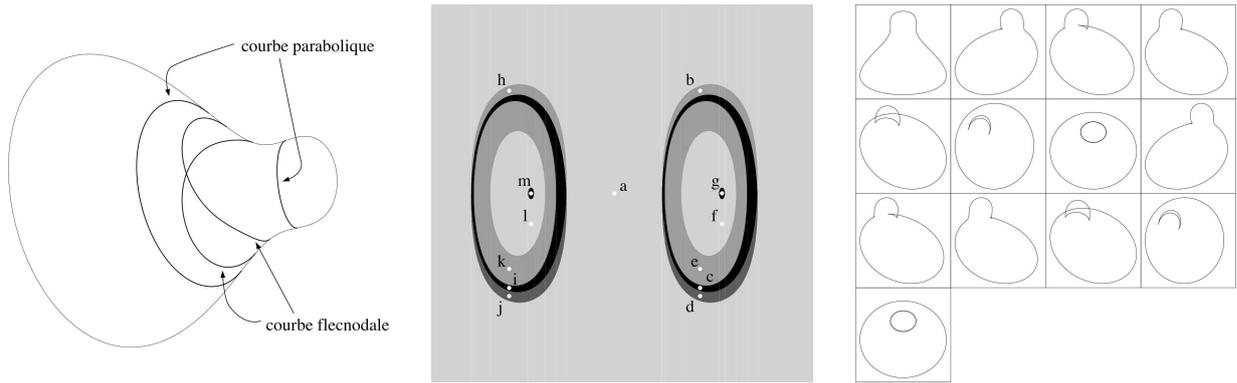


FIG. A – Construction du graphe d'aspects orthographique d'objets courbes. À gauche, l'objet en forme de gourde et les courbes d'événement visuel local. Au centre, la partition de l'espace en cellules de vue équivalente. À droite, les vues représentatives des cellules.

Par abus de langage, ce graphe, ainsi que le partitionnement de l'espace en cellules de vue équivalente, sont appelés graphe d'aspects de l'objet.

Dans ma thèse de Master (1990-1992), j'ai présenté le premier algorithme, et son implantation, permettant de construire automatiquement le graphe d'aspects d'un solide lisse défini par une équation algébrique implicite observé sous projection orthographique [39]. La première étape consiste à classifier les événements visuels en catégories, suivant un critère de stabilité. Dans le cas de la projection orthographique, le domaine d'observation peut être modélisé par une sphère de vue et les événements visuels majeurs (les moins instables) surviennent lorsque le point de vue se trouve sur certaines courbes (appelées courbes d'événement visuel) appartenant à cette sphère. Construire le graphe d'aspects consiste alors à obtenir une représentation algébrique de ces courbes, les intersecter deux-à-deux, réaliser ainsi un découpage de la sphère en régions bordées par des portions de courbes d'événement visuel et calculer une vue représentative pour chacune des régions (cf. Fig. A). Cet algorithme s'appuie fortement sur la résolution de systèmes d'équations polynomiales (méthode de continuation d'homotopie <sup>[Mor87]</sup>) et il est, à ce jour, le seul de son genre à avoir surmonté les problèmes d'instabilité inhérents aux manipulations de variétés polynomiales [18, 32, 35].

Mon travail de doctorat au sein du projet MOVI (1992-1995) a consisté en partie à étudier des problèmes théoriques liés à ces graphes d'aspects, dans le cas plus général de la projection en perspective [38]. L'espace des points de vue est alors l'espace à trois dimensions entier. Les événements visuels les plus importants s'observent lorsque le point de vue est situé sur des surfaces, appelées surfaces d'événement visuel, qui découpent l'espace de vue en cellules. J'ai montré qu'il était possible d'obtenir, pour différents types d'objets, le degré (ainsi que d'autres invariants numériques) de toutes les surfaces d'événement visuel. J'ai également obtenu une mesure de la complexité du graphe d'aspects, qui donne une borne supérieure sur le nombre d'aspects topologiquement distincts d'un objet [17, 28, 30, 34]. Le contexte général est celui de la géométrie énumérative, sous-branche de la géométrie algébrique dont le but est de répondre aux questions du type suivant : combien d'entités algébro-géométriques d'un type fixé satisfont certaines conditions géométriques données ? Plus spécifiquement, je

[Mor87] A.P. Morgan. *Solving Polynomial Systems using Continuation for Engineering and Scientific Problems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.

me suis placé dans le cadre de la théorie des points multiples de fonctions, dont j'ai donné la première implantation [29]. Les points forts de la méthode sont nombreux. Elle permet de ne jamais manipuler les équations sous-jacentes et de travailler à un niveau abstrait. Une des conséquences est que les calculs se font de manière exacte, alors que la seule autre approche connue n'a permis que d'obtenir des bornes sur la complexité des surfaces d'événement visuel. Le cadre de travail est en outre très général, se prête facilement à une algorithmisation et peut être adapté sans trop de difficultés à d'autres besoins. J'ai ainsi pu donner d'autres applications de la géométrie énumérative, concernant des variétés dans des espaces projectifs à plus de trois dimensions et des systèmes de droites. Cela m'a entre autres permis pour la première fois de valider l'intégralité d'un ensemble de formules énumératives donné il y a plus d'un siècle par Hermann Schubert [Sch79].

Plus généralement, je me suis largement intéressé durant cette période aux applications et utilisations de la géométrie algébrique réelle et du calcul algébrique en vision artificielle et dans les domaines connexes [14, 31].

## De 1995 à 2000, géométrie appliquée, projet ISA

En octobre 1995, j'ai été recruté au CNRS, section 7, sur un poste « interactions des mathématiques et de l'informatique », affecté au CRIN. À peu près à cette époque, le projet MOVI a fusionné avec l'équipe GRAPH'IS (synthèse d'images et illumination) pour former un nouveau projet, ISA. Le responsable scientifique du nouvel ensemble, le professeur Jean-Claude Paul, m'a confié la tâche de « soutenir » les recherches de nature appliquée dès lors qu'elles rencontraient des difficultés d'ordre théorique et mathématique (essentiellement géométriques).

La collaboration avec les groupes de synthèse d'images et de vision artificielle a été très fructueuse. Je donne ici un aperçu des résultats obtenus.

**Réalité augmentée et calcul du point de vue.** De 1995 à 1997, j'ai pris part à un projet de recherche sur la réalité augmentée, technique qui permet d'enrichir des images réelles par adjonction d'informations réelles ou synthétiques. La réalité augmentée est très prometteuse dans des domaines où une simulation *in situ* serait soit impossible à réaliser, soit peu réaliste, soit encore trop coûteuse. Les applications en imagerie médicale, en conception urbaine et pour l'intervention en milieu industriel sont d'un intérêt tout particulier.

L'application que nous avons développée concerne l'illumination des ponts de la Seine autour de l'Île de la Cité (cf. Fig. B). Certains de ces ponts étaient alors pauvrement mis en valeur par le système d'éclairage. Tester un nouvel éclairage directement sur le site aurait demandé de gros moyens logistiques et financiers. La solution a alors consisté à illuminer le pont par une méthode de synthèse d'images (algorithme de radiosité), à incruster une image de ce pont de synthèse dans l'image de départ, et à en calculer le reflet sur l'eau pour ajouter au réalisme. L'enjeu majeur à cet égard est de correctement « recaler » le pont de synthèse sur le pont réel. Pour cela, il faut calculer avec précision la position de la caméra ayant pris l'image de départ (inversion perspective), position qu'il peut être délicat de mesurer directement lorsque l'on filme un pont depuis un autre pont avec un caméscope. L'idée est donc d'utiliser certains éléments notables du pont, en l'occurrence des segments coplanaires

---

[Sch79] H.C.H. Schubert. *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1879.

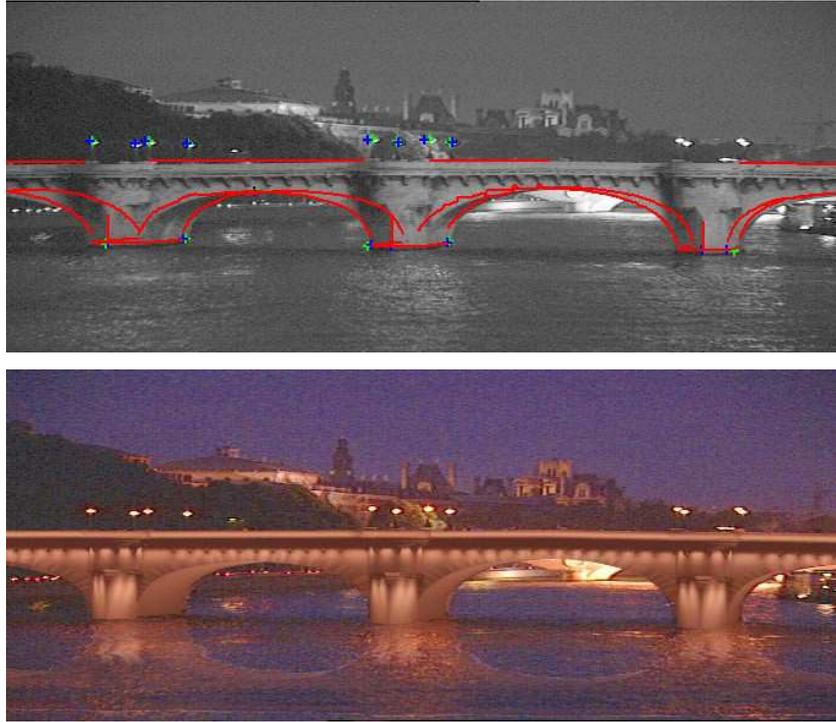


FIG. B – Projet d'illumination des ponts de Paris. En haut, les indices utilisés pour le recalage du pont. En bas, le pont de synthèse incrusté dans l'image réelle.

ou arcs de cercles, pour déterminer l'emplacement du point de vue. Lorsque l'on travaille avec une séquence d'images, comme cela est le cas ici, il peut être judicieux de n'effectuer un calcul complet que pour la première image, puis d'utiliser ce résultat comme initialisation pour l'image suivante. On converge alors vers la position correcte par itération.

Grâce à ces méthodes, nous avons mis au point un système robuste et performant de réalité augmentée [15, 27]. Les méthodes développées pour l'application des ponts de Paris ont depuis été appliquées dans plusieurs autres contextes.

**Reconstruction de surfaces.** Calculer l'approximation d'un objet à partir de points échantillonnés sur sa surface est un problème difficile aux nombreuses applications en vision par ordinateur, graphisme et géométrie algorithmique. C'est ce qu'on appelle reconstruire une surface à partir d'un nuage de points. De nombreuses méthodes de reconstruction ont été proposées dans la littérature, qui tombent dans plusieurs catégories : subdivision spatiale, approximation des zéros d'une fonction de distance signée, déformation de surface, construction incrémentale, ... L'accent a en particulier été mis sur la définition de critères d'échantillonnage d'une surface garantissant qu'un échantillon respectant ce critère permet la reconstruction topologiquement exacte de la surface.

En pratique, la surface sous-jacente est inconnue (le nuage de points provient d'un balayage laser par exemple) et il est donc vain de chercher à savoir si l'échantillon est suffisamment dense pour permettre la reconstruction de la surface dont il est issu. Partant de cette réflexion, nous avons proposé une nouvelle technique de reconstruction qui se base sur une « discrétisation » des critères d'échantillonnage habituellement utilisés dans le domaine. Le critère de

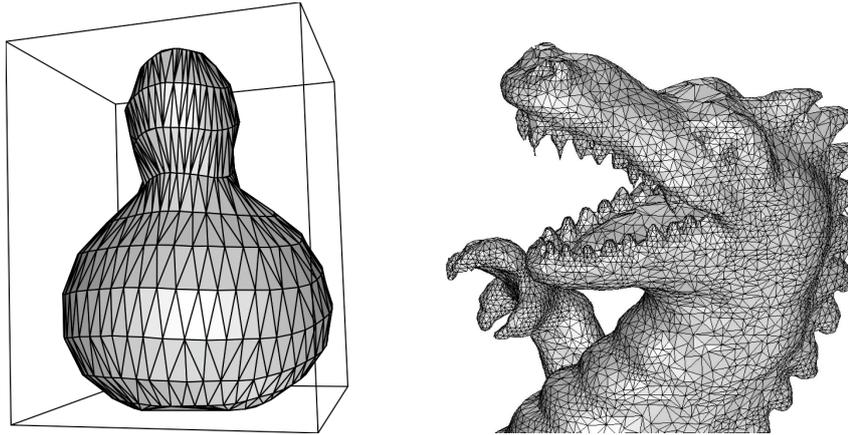


FIG. C – Reconstruction par la méthode des interpolants réguliers. À gauche, données réelles extraites du suivi de contours occultants dans une séquence d’images. À droite, données synthétiques.

régularité discret mène en fait à des propriétés de densité que doit respecter l’échantillon et se traduit aisément en une algorithmique efficace de reconstruction [13, 26]. L’implantation réalisée permet la reconstruction de nuages constitués de plusieurs dizaines de milliers de points en quelques secondes (cf. Fig. C).

**Paramétrage de surfaces triangulées et placage de textures.** Durant la période 1995-2000, j’ai également contribué à plusieurs projets de recherche dans le domaine de l’image de synthèse et du rendu réaliste. Le premier problème sur lequel j’ai travaillé est la paramétrisation globale de surfaces triangulées. Paramétrer une surface consiste à la décomposer en « disques topologiques » (c’est-à-dire en parties dépliables sans recouvrement et sans trou) et à mettre ces parties en correspondance avec des sous-ensembles du plan. De nombreuses applications sont possibles, dans les domaines du placage de textures, de la re-triangulation de surfaces (homogénéisation de la densité d’un maillage) ou encore de la compression de données. Les méthodes de paramétrisation globale existant alors étaient soit trop fortement contraintes, soit sans garanties suffisantes. Nous avons étudié de nouvelles méthodes de paramétrisation de surfaces maillées offrant à la fois une plus grande souplesse que les méthodes existantes et de meilleures propriétés théoriques.

Après nous être intéressés aux aspects « placage de textures » du problème, nous avons défini une nouvelle technique de paramétrisation qui minimise les déformations angulaires, mettant ainsi l’accent sur une propriété dite de conformité [10, 25]. Il est connu que la paramétrisation d’une surface triangulée ne peut généralement pas être parfaitement conforme, et nous avons en fait défini un critère de minimisation aux moindres carrés basé sur les équations de conformité de Cauchy-Riemann (d’où son nom : *Least Squares Conformal Maps* ou LSCM). Grâce à cette mise en équation, nous avons été en mesure de prouver un ensemble de résultats remarquables sur notre paramétrisation quasi-conforme (existence et unicité de la solution, préservation des propriétés métriques locales, indépendance par rapport à la résolution du maillage, ...). La méthode a depuis été largement reprise à la fois dans la communauté de graphisme et dans l’industrie. Elle donne d’excellents résultats (cf. Fig. D).

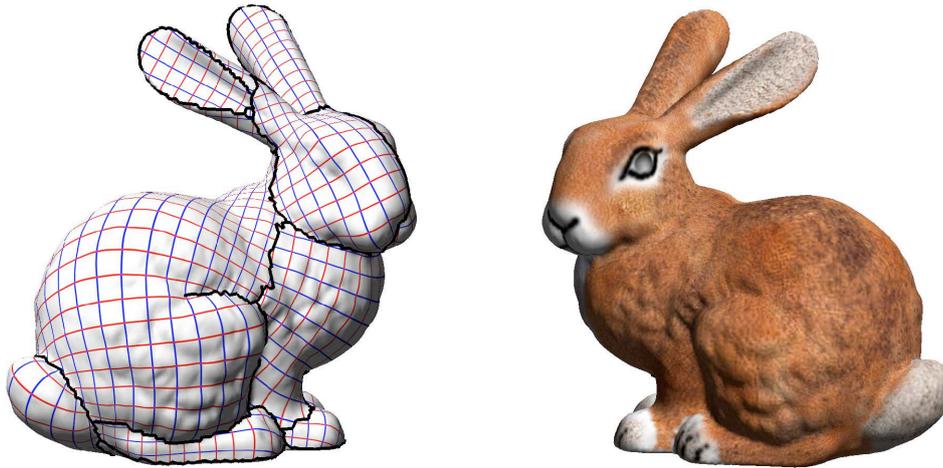


FIG. D – Paramétrages quasi-conformes de maillages. À gauche, un modèle de lapin faisant apparaître les zones paramétrées globalement, le quadrillage induit par le paramétrage étant superposé. À droite, le modèle de lapin texturé.

**Illumination de surfaces courbes et maillage virtuel.** Les surfaces algébriques simples couvrent une variété de formes suffisante pour représenter la majorité des objets rencontrés dans les domaines du *design*, de l'architecture et de l'industrie manufacturière. Ainsi, on estime que 95 % des pièces mécaniques sont bien modélisées par des carreaux de quadriques (surfaces de degré 2, comprenant notamment les plans, les sphères, les cylindres et les cônes) et de tores [RV82]. Il convient donc d'être en mesure de manipuler ces surfaces simplement et de manière efficace en vue de leur utilisation en synthèse d'images.

Nous avons introduit une technique (dite du « maillage virtuel ») permettant pour la première fois d'effectuer des calculs d'illumination globale « exacts »<sup>1</sup> sur des surfaces courbes paramétriques simples et nous en avons proposé une implantation efficace. Jusque là, la prise en compte des objets courbes dans les algorithmes de radiosité passait par une discrétisation de leur surface, induisant des erreurs numériques et un manque de réalisme. L'idée du maillage virtuel est partie d'une constatation simple : puisque les techniques de radiosité sur des objets triangulés sont bien maîtrisées, comment utiliser cet attirail pour illuminer des objets courbes ? La technique a alors consisté à prendre en compte les objets courbes non pas dans l'espace géométrique d'origine mais dans un espace paramétrique où ils sont plats. La collection des espaces paramétriques des différents objets est alors baptisée maillage virtuel [12]. Dans ce projet, qui demandait des compétences diverses, je me suis attaché à développer le cadre mathématique permettant de réaliser les transferts entre l'espace de départ et l'espace paramétrique, en calculant des transformations à Jacobien constant pour des objets courbes simples.

Grâce à la technique du maillage virtuel, nous avons pu calculer sur la plate-forme CANDELA

<sup>1</sup>Au sens où la géométrie des objets est prise intégralement en compte lors de la simulation, sans passer par une discrétisation.

[RV82] A. Requicha and H. Voelcker. Solid modeling: a historical summary and contemporary assessment. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2(1):9–24, 1982.

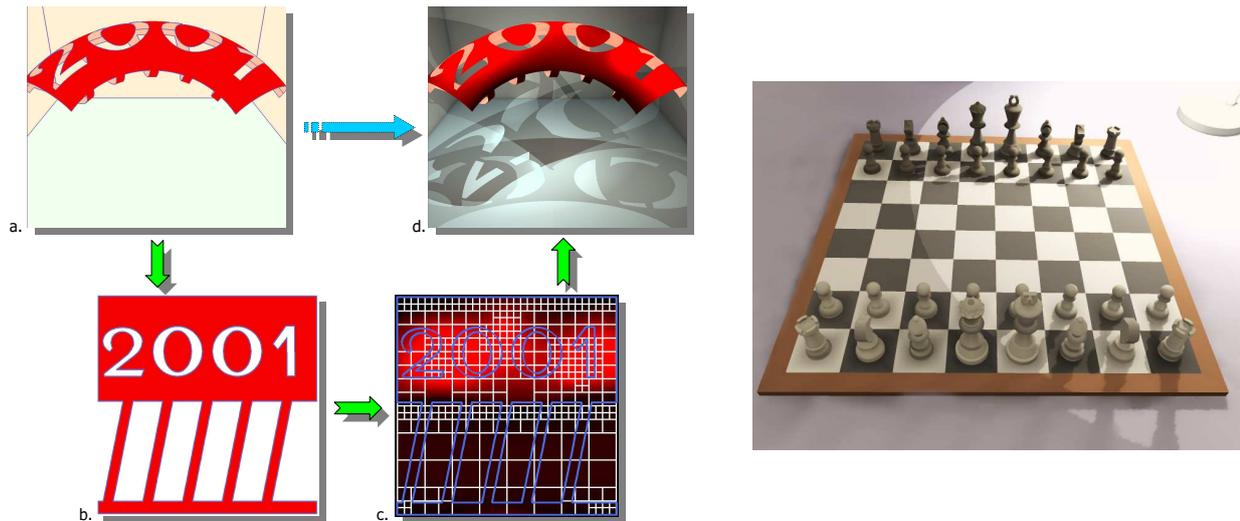


FIG. E – Le maillage virtuel. À gauche, principe schématique de la méthode. À droite, un jeu d'échecs modélisé avec des quadriques illuminé grâce à cette méthode.

du projet ISA de superbes illuminations de modèles courbes constitués de morceaux de quadriques et de tores (cf. Fig. E).

**Enveloppes visuelles.** Dans toutes les applications graphiques de l'informatique, une partie non négligeable des calculs est consacrée à effectuer des requêtes de visibilité. Dans les algorithmes de radiosité ou de radiance, les calculs de visibilité peuvent représenter jusqu'à 70 pour cent du temps total de calcul. Il est donc fondamental de développer des structures de visibilité permettant de réaliser ces calculs le plus efficacement possible. De telles structures de visibilité « exacte » ont été proposées ces dernières années en géométrie algorithmique, notamment par Pocchiola et Vegter [PV96] et Durand *et al.* [DDP97] (complexes et squelettes de visibilité).

Dans ce contexte, je me suis intéressé à une structure de visibilité introduite dans la communauté vision et appelée enveloppe visuelle [Lau94]. En vision, l'enveloppe visuelle est la meilleure approximation d'un objet qu'il est possible de reconstruire depuis une zone d'observation donnée par intersection des cônes de vue. Autrement dit, depuis n'importe quel point de cette zone d'observation, il est impossible de distinguer un objet de son enveloppe visuelle. J'ai présenté le premier algorithme optimal dans le plan de construction d'enveloppes visuelles d'objets courbes et ai donné le meilleur algorithme à ce jour de construction d'enveloppes visuelles de scènes polyédriques dans l'espace. J'ai également montré tous les liens existant entre enveloppes visuelles, graphes d'aspects et complexes de visibilité, liens

- [PV96] M. Pocchiola and G. Vegter. The visibility complex. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(3):1–30, 1996.
- [DDP97] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The visibility skeleton: a powerful and efficient multi-purpose global visibility tool. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 31:89–100, 1997. Proceedings of SIGGRAPH.
- [Lau94] A. Laurentini. The visual hull concept for silhouette-based image understanding. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2):150–162, February 1994.

qui suggèrent un cadre d'élaboration commun [16]. La géométrie des enveloppes visuelles reste toutefois largement à explorer.

## Depuis 2000, calcul géométrique effectif, projets ISA et VEGAS

Malgré ces succès, l'évidence s'est progressivement imposée que faire sortir les algorithmes proposés hors du périmètre de la recherche demandait plus qu'une simple utilisation d'outils géométriques connus. Rien n'illustre mieux cette prise de conscience que le travail sur le maillage virtuel, c'est-à-dire l'illumination exacte de surfaces paramétriques par la méthode de radiosité. Les seuls modèles courbes dont nous disposions étaient des modèles volumiques à base de volumes quadratiques élémentaires (l'idée de partir de maillages triangulaires pour en extraire des parties courbes ayant été rapidement abandonnée [11]). Or les techniques de radiosité ne peuvent travailler que sur des objets surfaciques. Une étape préliminaire (ou tout du moins ce que nous considérons comme telle à l'époque) consistait donc à extraire la « peau » de modèles volumiques simples, un problème connu sous le nom de conversion CSG-BRep. Ce travail *a priori* élémentaire, impliquant de calculer de manière robuste l'intersection de deux surfaces quadratiques, s'est révélé être un cauchemar du point de vue numérique. Ce n'est qu'au prix d'une intervention manuelle massive que nous sommes finalement parvenus à construire la représentation surfacique de quelques modèles simples (comme le jeu d'échecs de la Fig. E). Comme nous l'avons alors découvert, la conversion automatique robuste d'objets quadratiques en position quelconque était totalement hors de portée. Sur ce problème d'apparence simple, un important travail théorique restait encore à faire.

Les recrutements successifs en 1999 de S. Lazard et H. Everett ont permis de renforcer la composante géométrique du projet ISA. Petit à petit, nous sommes collectivement arrivés à la conclusion que deux projets complémentaires pouvaient coexister au sein d'ISA : un projet avec des objectifs à court terme, bien adapté au paysage à évolution rapide du graphisme 3D, avec des résultats rapidement transférables ; et un autre projet avec des objectifs à plus long terme, en phase avec la communauté de géométrie algorithmique et de calcul géométrique, dont l'objectif est de revisiter les fondements mathématiques de problèmes fondamentaux en rendu photoréaliste et modélisation des solides. C'est ainsi qu'un groupe de géométrie a vu le jour au sein d'ISA. Il s'est progressivement renforcé et a évolué au point d'être suffisamment mûr pour devenir un projet (au sens INRIA) à part entière en 2005, sous le nom de VEGAS.

**Intersection de quadriques.** Le travail sur le maillage virtuel nous a poussé à nous pencher sur le problème de l'intersection de quadriques et la caractérisation des intersections dégénérées. Le seul algorithme général connu jusque là, dû à Levin <sup>[Lev76,Lev79]</sup>, était loin d'être robuste. De plus, il impliquait des calculs menant à des expressions très compliquées, avec plusieurs niveaux de racines carrées imbriquées. Partant de ce constat, nous avons complètement repris le problème à la base et proposé une nouvelle approche. Le résultat scientifique majeur de ces dernières années est le développement du premier algorithme exact, complet, quasi-optimal et utilisable jamais produit pour paramétrer l'intersection de deux quadriques

[Lev76] J. Levin. A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces. *Communications of the ACM*, 19(10):555–563, 1976.

[Lev79] J. Levin. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces. *Computer Graphics and Image Processing*, 11(1):73–87, 1979.

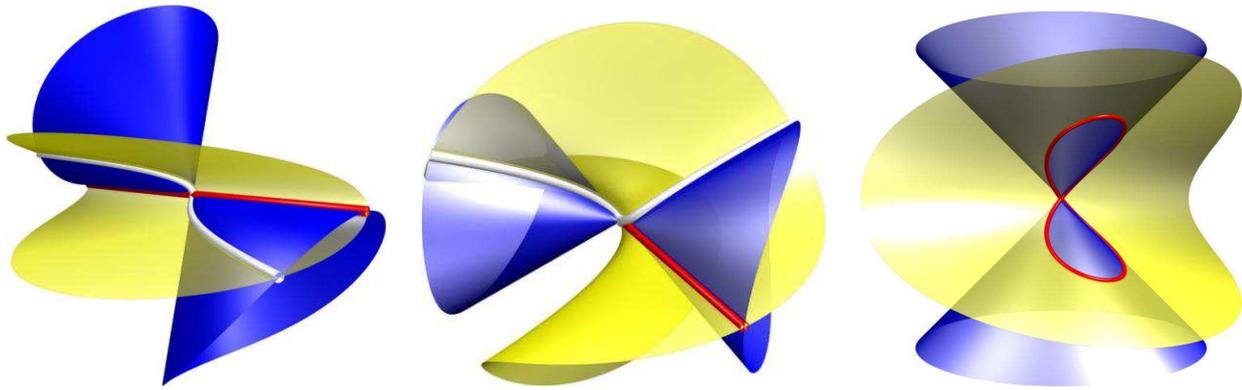


FIG. F – Quelques types possibles d’intersection de deux quadriques : cubique et droite secante (à gauche), cubique et droite tangente (au centre) et quartique nodale (à droite).

projectives [22, 24, 33]. Cet algorithme représente une avancée fondamentale sur une question ouverte depuis des décennies et, bien qu’il y ait encore quelques possibilités d’amélioration, le problème est maintenant largement résolu.

Sur le plan théorique, nos contributions sont de trois ordres. 1. Nous avons présenté la première énumération complète de tous les types possibles d’intersection réelle entre deux quadriques projectives (Fig. F). 2. Nous avons proposé un algorithme efficace permettant de caractériser le type réel de l’intersection de deux quadriques quelconques. 3. Nous avons donné des algorithmes quasi-optimaux pour paramétrer l’intersection dans tous les cas.

Nous avons également démontré que notre algorithme était tout aussi pratique que théorique en en proposant une implantation C++ très efficace, baptisée Qi [8, 23]. Notre logiciel est distribué librement et a trouvé des applications dans des domaines inattendus et non anticipés. Il calcule le paramétrage exact de l’intersection de deux quadriques dont les coefficients sont des entiers de précision arbitraire. Il identifie correctement, sépare et paramètre toutes les composantes connexes de l’intersection, en donnant toutes les informations de nature topologique (incidence, ...). Les paramétrages calculés sont optimaux en leurs fonctions de définition et quasi-optimaux en la taille de l’extension sur laquelle leurs coefficients sont définis.

Tout ce travail a fait l’objet d’une série de publications totalisant plus de 150 pages, actuellement en cours de soumission [2, 3, 4]. Depuis l’écriture de ces articles, j’ai proposé plusieurs améliorations de notre algorithme. Tout d’abord, j’ai abaissé la complexité arithmétique du paramétrage des quartiques lisses, qui est le cas le plus complexe et le plus coûteux. Ensuite, nous avons obtenu des résultats d’optimalité dans certains des cas de quasi-optimalité qui restaient. La solution s’est réduite à décider si une certaine conique possédait ou non un point rationnel et à calculer un tel point dans l’affirmative. Nous avons obtenu ce résultat en implémentant en C++ un algorithme proposé par le mathématicien Denis Simon [Sim05].

**Visibilité 3D globale.** En visibilité 3D, des objets spatialement éloignés peuvent avoir des interactions visuelles très complexes et peu intuitives. De ce fait, les requêtes de visibilité

[Sim05] D. Simon. Solving quadratic equations using reduced unimodular quadratic forms. *Math. Comp.*, 74(251):1531–1543, 2005.

sont d'une nature intrinsèquement globale. C'est en partie ce qui explique que, jusqu'à aujourd'hui, les chercheurs ont principalement eu recours à des structures *ad hoc*, d'une portée limitée, permettant de répondre à la volée à des requêtes particulières. Hélas, l'expérience a montré que ces structures supportent difficilement le passage à l'échelle. Faute de manquer d'un cadre mathématique bien défini et d'exploiter les propriétés intrinsèques de la visibilité 3D, elles sont inutilisables sur des modèles comportant plusieurs centaines de milliers de primitives, tant du point de vue de la complexité que de celui de la robustesse (dégénérescences géométriques, surfaces alignées, ...).

Nous avons choisi une voie alternative qui consiste à précalculer (donc hors ligne) une structure de visibilité 3D globale dans laquelle des requêtes très efficaces sont ensuite effectuées à la volée (en ligne). Le complexe de visibilité 3D est une structure de ce type, introduite il y a quelques années en infographie. Nous avons abordé les problèmes de visibilité 3D globale selon deux directions : d'une part, nous en avons étudié les bases théoriques et nous avons travaillé, d'autre part, sur les aspects pratiques liés au développement d'algorithmes de visibilité efficaces et robustes.

Un aspect des structures de visibilité 3D sur lequel nous avons particulièrement travaillé concerne leur complexité. Il n'est guère difficile de montrer que cette complexité, pour  $n$  triangles dans  $\mathbb{R}^3$ , est de  $\Theta(n^4)$  dans le pire des cas. Cette complexité semble rédhibitoire en terme d'applications et explique le relatif désintérêt pour ces structures. Nous avons pourtant montré une série de résultats probabilistes qui tendent à indiquer que les structures de visibilité globales, bien qu'étant d'une complexité théorique très élevée, ont en fait un comportement pratique (en moyenne) très raisonnable qui les rend utilisables à grande échelle. En particulier, nous avons montré que la taille du complexe de visibilité de  $n$  boules unité de  $\mathbb{R}^3$  distribuées uniformément était en  $\Theta(n)$  en moyenne [9]. Le résultat, qui nécessite une estimation minutieuse des événements apparaissant au bord du domaine contenant les sphères, s'étend à d'autres types de primitives. Nous avons également prouvé des bornes théoriques et fait une étude expérimentale de la taille du complexe de visibilité d'objets distribués aléatoirement dans le plan [6, 21].

Nous avons par ailleurs travaillé à la caractérisation des situations de dégénérescence en matière de visibilité pour des objets polyédriques et des objets courbes usuels. Nous avons notamment obtenu une caractérisation des configurations de quatre sphères en 3D admettant une infinité de tangentes communes [7]. Entre 2001 et 2005, sept articles de journaux ont exploré des variantes plus simples de ce problème (avec des sphères congruentes ou remplacées pour certaines par des droites) [ST06]. Notre caractérisation est complète et élémentaire : les sphères doivent avoir leurs centres alignés et admettre au moins une tangente commune. Nous avons ensuite étendu ce travail au cas de quatre quadriques de  $\mathbb{P}^3$  [37].

**Théorie des droites transversales.** En 1923, le mathématicien Eduard Helly démontre un résultat fondamental, de nature combinatoire, sur les ensembles convexes : une famille de convexes de  $\mathbb{R}^d$  est d'intersection non-vide si et seulement si toute sous-famille de taille  $d + 1$  est d'intersection non-vide. Si on reformule l'expression « être d'intersection non-vide » par « être intersecté par un point », on peut légitimement se demander si ce résultat ne s'étend pas à des intersections par d'autres primitives : droites, plans, ... On s'intéresse en particulier au

---

[ST06] F. Sottile and T. Theobald. Line problems in nonlinear computational geometry. arXiv math.MG/0610407, 2006.

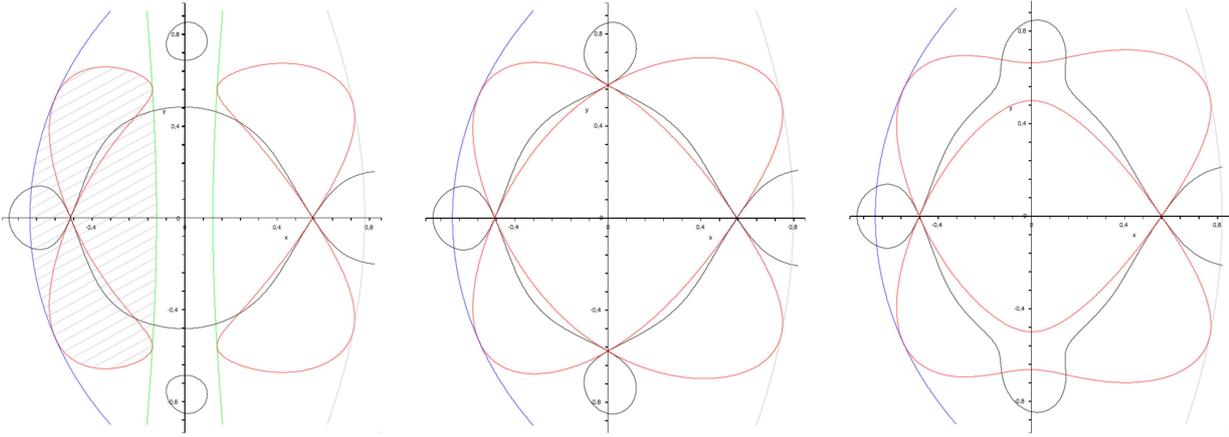


FIG. G – L'évolution d'une composante de directions de droites transversales à trois sphères quand deux sphères, précédemment disjointes (à gauche), deviennent tangentes (au centre) puis s'intersectent transversalement (à droite).

cas des droites, baptisées transversales. Hélas, il n'est pas possible de prouver des résultats aussi généraux que le théorème de Helly pour le cas des droites. Quelques résultats sont toutefois connus. Le premier est dû à Danzer, qui prouve que  $n$  disques unité disjointes dans  $\mathbb{R}^2$  ont une transversale commune si et seulement si toute sous-famille de 5 disques admet une transversale commune [Dan57]. La même année, Hadwiger démontre que  $n$  convexes disjointes de  $\mathbb{R}^2$  ont une transversale commune si chaque triplet admet une transversale les perçant dans un ordre fixé [Had57].

En 3D, la situation est encore moins brillante, puisqu'il n'existe pas de théorème de type Helly pour les droites transversales quand les objets sont des translatés d'objets convexes, pas même avec une restriction sur l'ordre (à la Hadwiger) [HM04]. Le seul cas véritablement intéressant du point de vue des transversales semble être celui des sphères. Poursuivant le travail de Holmsen *et al.* [HKL03] et Cheong *et al.* [CGH05], nous avons démontré le premier théorème de type Helly en toute dimension, pour des sphères unité. Plus spécifiquement, nous avons prouvé que, étant données  $n$  boules unité disjointes dans  $\mathbb{R}^d$ , si tout sous-ensemble de  $4d - 1$  boules est percé par une droite alors il existe une droite perçant toutes les boules [5]. Ce théorème, qui établit une conjecture due à Danzer [Dan57], repose sur une propriété de convexité de l'ensemble des directions de droites perçant les boules dans un ordre donné.

Nous avons récemment étendu ce travail aux boules disjointes de rayon arbitraire. En utilisant des techniques nouvelles, de nature algébrique, nous avons prouvé que l'ensemble des directions de droites frappant trois sphères de  $\mathbb{R}^3$  dans un ordre fixé est un ensemble stric-

[Dan57] L. Danzer. Über ein Problem aus der kombinatorischen Geometrie. *Arch. der Math.*, 8:347–351, 1957.

[Had57] H. Hadwiger. Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden. *Portugal Math.*, 6:23–29, 1957.

[HM04] A. Holmsen and J. Matoušek. No Helly theorem for stabbing translates by lines in  $\mathbb{R}^d$ . *Discrete Comput. Geom.*, 31:405–410, 2004.

[HKL03] A. Holmsen, M. Katchalski, and T. Lewis. A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 29:595–602, 2003.

[CGH05] O. Cheong, X. Goaoc, and A. Holmsen. Hadwiger and Helly-type theorems for disjoint unit spheres in  $\mathbb{R}^3$ . In *Proc. 20th Ann. Symp. on Computational Geometry*, pages 10–15, 2005.

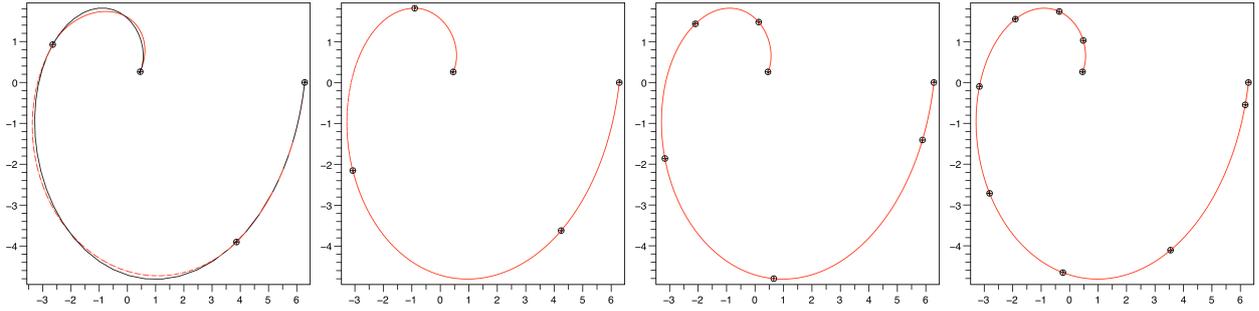


FIG. H – Approximation d'une spirale par des arcs de coniques générales, pour les valeurs  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  and  $10^{-4}$ .

tement convexe. La preuve nécessite l'examen minutieux des courbes (coniques et sextique) bordant une composante connexe de transversales dans l'espace des directions (Fig. G). Le résultat est ensuite étendu en toute dimension : les droites intersectant une famille de sphères disjointes de  $\mathbb{R}^d$  dans un ordre fixé forment un ensemble strictement convexe de la sphère des directions  $\mathbb{S}^{d-1}$  [1, 20]. Si ce résultat ne permet pas de donner un théorème de type Helly pour des boules de rayon arbitraire (on sait qu'il n'en existe pas), il permet néanmoins de donner un résultat de type Hadwiger, avec une constante  $2d$ . Il permet surtout de conclure qu'il y a équivalence entre « percer les boules dans un ordre donné » et « appartenir à une composante connexe de transversales ». On montre grâce à cette équivalence que le nombre de composantes connexes de transversales de  $n$  boules disjointes dans  $\mathbb{R}^d$  est  $\Theta(n^{d-1})$ . La précédente borne était en  $O(n^{2d-4})$ .

**Approximation par des splines coniques.** Nous avons récemment étudié le problème de l'approximation de courbes suffisamment lisses dans le plan par des primitives de faible degré. En particulier, nous avons travaillé sur l'approximation par des arcs de paraboles et plus généralement de coniques. Nous nous sommes attachés à prouver des résultats de qualité d'approximation par une spline conique avec continuité de tangente et de courbure, qui est un approximant optimal du point de vue de la distance de Hausdorff.

Un résultat bien connu, dû à Fejes Tóth, affirme que l'approximation d'une courbe lisse convexe par une courbe linéaire par morceaux à distance de Hausdorff au plus  $\varepsilon$  requiert  $O(\varepsilon^{-1/2})$  éléments linéaires [Tót48]. Nous avons montré que l'approximation d'une courbe de courbure non-nulle par une spline conique à distance de Hausdorff inférieure à  $\varepsilon$  requiert  $c_1 \varepsilon^{-1/4}$  morceaux si la spline est constituée d'arcs paraboliques et  $c_2 \varepsilon^{-1/5}$  morceaux si la spline est composée d'arcs de coniques générales [19, 36]. Les constantes  $c_1$  and  $c_2$  sont fonction des courbures Euclidienne et affine de la courbe à approximer.

Nous avons également montré que la distance de Hausdorff entre une courbe et un arc de conique optimal avec tangence aux deux extrémités était une fonction croissante de l'abscisse curviligne, si la courbure affine le long de l'arc est monotone. Cette propriété fournit un algorithme simple pour la construction par bisection d'une spline parabolique ou conique optimale. Un exemple de résultat est donné dans la Fig. H.

[Tót48] L. Fejes Tóth. Approximations by polygons and polyhedra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:431–438, 1948.

---

## Publications majeures

---

Je donne ici mes six publications que je considère comme les plus importantes ou ayant eu le plus d'impact, avec quelques lignes d'explication pour chacune.

- [A] O. Cheong, X. Goaoc, A. Holmsen, and S. Petitjean. Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete and Computational Geometry*, 2007. To appear.

Cet article donne le premier théorème de type Helly pour des droites transversales en dimension quelconque, prouvant ainsi une vieille conjecture due à Danzer (1957). Il a été considéré comme « un des articles particulièrement forts du domaine » et, à ce titre, invité par J. Goodman, J. Pach et R. Pollack, rédacteurs en chef de *Discrete & Computational Geometry*, à faire partie d'un numéro spécial consacré aux vingt ans de la revue.

- [B] C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard, and S. Petitjean. Common tangents to spheres in  $\mathbb{R}^3$ . *Discrete and Computational Geometry*, 35(2) :287–300, 2006.

Cette article montre, en utilisant des outils de géométrie complexe, que quatre sphères dans  $\mathbb{R}^3$  ont une infinité de droites tangentes réelles communes si et seulement si elles ont leurs centres alignés et une tangente commune. Ce résultat illustre parfaitement le type de résultats que l'on peut espérer dans ce domaine lorsque les mathématiques ad hoc sont mises en œuvre. C'est aussi un exemple de collaboration réussie avec un mathématicien (C. Borcea est professeur de mathématiques à la Rider University, États-Unis).

- [C] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : Parts I, II and III. *Journal of Symbolic Computation*, 2006. Submitted (90 pages).

Cet article en trois parties regroupe l'ensemble de nos résultats sur l'intersection de quadriques. Il donne la description complète du premier algorithme exact, quasi-optimal et utilisable de paramétrage de l'intersection de deux quadriques projectives arbitraires. C'est une avancée considérable sur un problème ouvert depuis plusieurs décennies.

- [D] B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray, and J. Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3) :362–371, 2002. Proceedings of SIGGRAPH 2002.

Cet article présenté à la prestigieuse conférence SIGGRAPH présente notre méthode pour paramétrer des maillages en préservant au mieux les angles au sens des moindres carrés (LSCM pour *Least Squares Conformal Maps*). La méthode est simple, facile à implanter, donne de bons résultats et a été largement utilisée dans la communauté de graphisme.

- [E] L. Alonso, F. Cuny, S. Petitjean, J.-C. Paul, S. Lazard, and E. Wies. The virtual mesh : a geometric abstraction for efficiently computing radiosity. *ACM Transactions on Graphics*, 20(3) :169–201, 2001.

Cet article présente la technique du maillage virtuel pour illuminer de manière exacte (c.-à-d. sans passer par une discrétisation) des objets courbes par la méthode de radiosité. Implantée dans la plate-forme expérimentale développée au sein du projet ISA, cet algorithme a permis de produire de magnifiques images d'environnements modélisés à base de quadriques et de tores.

- [F] C. Borcea, X. Goaoc, and S. Petitjean. Line transversals to disjoint balls. *ACM Symposium on Computational Geometry*, 2007. To appear.

Cet article démontre que l'ensemble des directions de droites perçant trois sphères disjointes de rayon quelconque dans un ordre donné est strictement convexe. Cette propriété très attendue permet d'améliorer de nombreux résultats combinatoires sur les ensembles de droites transversales à des sphères en dimension quelconque.

---

## Résumé du projet de recherche

---

### *Calcul géométrique effectif avec des objets courbes de faible degré (ou quand l'algèbre rencontre la géométrie)*

Le calcul géométrique est une brique essentielle de nombreux domaines comme la conception assistée par ordinateur, le graphisme, la biologie algorithmique, la robotique, la vision artificielle et bien d'autres. Depuis plus de trois décennies, la géométrie algorithmique s'est attachée à fournir des bases solides pour l'étude des algorithmes géométriques pertinents pour toutes ces applications. Elle s'est avant tout penchée sur la manipulation d'objets linéaires (points, droites, segments de droites, plans), ne s'aventurant que récemment dans le monde des objets courbes. L'extension du répertoire classique de la géométrie algorithmique à de tels objets est un énorme challenge, qui recouvre à la fois des problèmes de taille constante et des problèmes de nature combinatoire.

Mes travaux de recherche entrent dans le cadre de ce que l'on appelle le calcul géométrique exact. Travailler sous ce paradigme signifie réaliser des opérations géométriques où les quantités numériques (baptisées « prédicats géométriques ») sont évaluées avec une précision suffisante pour que la structure combinatoire sous-jacente soit mathématiquement exacte. Lorsque l'on travaille avec des objets polynomiaux, l'algèbre joue un rôle de premier plan dans ce tableau. De nombreuses opérations au cœur des algorithmes maniant des primitives courbes se réduisent à évaluer, manipuler et résoudre des équations ou systèmes d'équations polynomiales. La géométrie algébrique classique et la théorie des invariants algébriques sont deux des champs mathématiques ayant beaucoup à offrir dans ce contexte.

Mon principal objectif de recherche est de contribuer à donner des fondations solides au calcul géométrique effectif avec des objets non-linéaires simples, en validant les avancées théoriques par des implantations robustes et efficaces. Les trois directions de recherche que je poursuis sont : le calcul de l'intersection de surfaces de faible degré et la résolution des problèmes de taille constante qui s'y rattachent, le calcul d'arrangements de quadriques et l'étude des applications de ces arrangements, et enfin l'exploration des aspects algébriques de la visibilité 3D et de la théorie des droites.

**Intersection de surfaces de faible degré et problèmes afférents.** Les surfaces algébriques réelles de faible degré représentent un bon compromis entre simplicité, flexibilité et pouvoir de modélisation. Elles jouent un rôle de premier plan dans la construction de modèles informatiques fidèles d'environnements réels pour la simulation et le prototypage. Malgré cette omniprésence et des décennies de recherche dans la communauté de CAO/CGAO, ces surfaces sont loin d'être suffisamment bien comprises au niveau théorique pour être manipulées de façon robuste et efficace par les algorithmes géométriques.

Je travaille sur des problèmes de taille constante liés à l'intersection de surfaces de faible degré, allant dans le sens de l'amélioration de notre travail sur les quadriques et de son

extension dans plusieurs directions : pour mieux comprendre les différents cas dégénérés, reconnaître plus facilement la morphologie de l'intersection, prendre en compte des primitives plus complexes, et travailler en dimension supérieure. La théorie des invariants (c.-à-d. l'étude des formes algébriques qui restent inchangées sous l'effet de transformations linéaires) joue ici un rôle de tout premier ordre pour identifier des prédicats de « faible degré ».

**Arrangements de quadriques et applications.** Les arrangements d'objets géométriques jouent un rôle fondamental en géométrie combinatoire et algorithmique depuis plusieurs décennies. Ils ont été utilisés pour résoudre des problèmes dans une grande variété d'applications, comme la planification de trajectoires de robots mobiles, la vision artificielle, la chirurgie assistée par ordinateur, ou la biologie moléculaire algorithmique. Leur attrait tient essentiellement au fait qu'ils permettent de discrétiser de manière fine et topologiquement exacte des problèmes continus.

Dans ce cadre, je travaille sur les structures de données, les algorithmes et les prédicats pour calculer efficacement les arrangements de surfaces de faible degré et d'autres structures du même ordre. Les efforts portent tout particulièrement sur un sous-problème connu sous le nom de conversion CSG-BRep, c.-à-d. le calcul du « bord » d'un modèle construit par assemblage (unions, intersections, différences) de volumes courbes élémentaires. Je développe et j'implante un algorithme pour la construction efficace et exacte de BReps de modèles bornés par des quadriques en position quelconque. Sur le long terme, j'étudierai les applications des arrangements et sous-arrangements de quadriques.

**Aspects algébriques de la visibilité 3D et théorie des droites.** Les calculs de visibilité sont au centre de nombreuses applications en graphisme. Dans les trois décennies qui ont suivi l'émergence des problèmes de visibilité 3D, le fossé entre la théorie et la pratique s'est considérablement creusé, les performances des cartes graphiques sans cesse accrues masquant graduellement le manque de compréhension théorique.

Pour développer des solutions novatrices et mathématiquement fondées aux problèmes de visibilité, je cherche à mieux comprendre la théorie des droites sous-tendant les questions de visibilité 3D. Pour les objets polyédriques, la visibilité est bien comprise même si la plupart des solutions actuelles échouent à exploiter la nature intrinsèquement globale de la visibilité. L'implantation robuste d'algorithmes pour construire des structures de visibilité globales et y faire des requêtes achoppe sur l'identification de prédicats de « faible degré » et sur l'élaboration de stratégies d'évaluation efficaces. Pour les objets courbes, même les plus simples, la situation est encore moins reluisante, puisqu'on ne dispose pas à l'heure actuelle d'un ensemble de prédicats polynomiaux satisfaisants. Dans ce cadre, je travaille sur les courbes et surfaces d'événement visuel qui entrent en jeu lorsque l'on s'intéresse à la visibilité pour les objets courbes généraux. Enfin, j'explore les relations entre les ensembles de droites au cœur des questions de visibilité et des problèmes en théorie des transversales.

---

## Réalisation et diffusion de logiciels

---

**Intersection de quadriques.** Notre logiciel d'intersection de quadriques s'appelle QI. C'est la première implantation exacte, efficace et utilisable d'un algorithme de paramétrage de l'intersection de deux quadriques arbitraires, données sous forme implicite, à coefficients

entiers. L'implantation fournit la première solution robuste complète à ce qui est sans doute le problème le plus fondamental de la modélisation à base de surfaces implicites courbes.

QI est écrit en C++. Je suis le principal auteur du code ( $\approx 70\%$ ), l'autre grand contributeur étant Sylvain Lazard. L'implantation a nécessité environ 6 mois de travail. Elle représente approximativement 20 000 lignes de code. QI a été enregistré à l'Agence de protection des programmes (APP). Sa première diffusion publique a eu lieu en juin 2004. Le logiciel est actuellement distribué sous licence INRIA (gratuit pour une utilisation non-commerciale) et sera prochainement proposé sous licence publique GNU. QI est disponible au téléchargement sur la forge de l'INRIA<sup>2</sup>.

QI a été intégré à la bibliothèque géométrique EXACUS<sup>3</sup> développée au Max-Planck-Institut für Informatik (Sarrebruck, Allemagne). En dehors du calcul géométrique et de la CGAO (Conception géométrique assistée par ordinateur), QI a trouvé des utilisations dans une gamme assez vaste et inattendue d'applications, comme l'a confirmé le retour des internautes ayant téléchargé le code. Par exemple, il est utilisé en photochimie pour l'étude des interactions entre surfaces d'énergie potentielle (Imperial College, Londres), en vision artificielle pour calculer l'image de coniques vues par une caméra catadioptrique avec miroir paraboloidal (IRIT, Toulouse) ou encore en mathématiques pour le calcul du flot d'hyper-surfaces de révolution selon la courbure moyenne à volume constant (Université de Lomé, Togo).

***Least Squares Conformal Maps.*** L'algorithme LSCM pour le paramétrage de maillages triangulaires a eu un impact industriel significatif. En particulier, il a été implanté dans Maya, la solution de modélisation, animation et rendu 3D développée par Autodesk, dans le modèleur 3D *open source* Blender et dans le logiciel de modélisation 3D de nouvelle génération Silo développé par Nevercenter Ltd Co<sup>4</sup>. Il a également été intégré à la bibliothèque CGAL, le standard en matière d'algorithmes géométriques.

---

## Valorisation et transfert technologique

---

***Collaboration industrielle.*** Depuis 2000, nous avons une collaboration suivie (mais informelle) avec le CIRTES<sup>5</sup>, le Centre européen de prototypage rapide et outillage rapide, situé à Saint-Dié-des-Vosges (France). La collaboration porte sur la principale technique de prototypage rapide développée au CIRTES, baptisée Stratoconception<sup>®</sup>. Cette technique consiste à décomposer la pièce par calcul en un ensemble de couches élémentaires simples (« strates ») dans lesquelles sont introduits des renforts et inserts. Les pièces élémentaires sont identifiées et usinées directement par des procédés rapides et classiques (microfraisage, découpe laser, découpe jet d'eau, ...) à partir de matériaux en plaques. Ces strates sont ensuite assemblées pour reconstituer l'objet final. C'est actuellement le seul procédé capable de réaliser des prototypes de machines ou pièces mécaniques de grandes dimensions en liant plusieurs matériaux.

---

<sup>2</sup><http://libqi.gforge.inria.fr/>

<sup>3</sup><http://www.mpi-inf.mpg.de/projects/EXACUS/>

<sup>4</sup><http://www.autodesk.com>, <http://www.blender3d.org>, <http://www.nevercenter.com>

<sup>5</sup><http://www.cirtes.fr>

Tous les objets ne peuvent pas être parfaitement fabriqués par cette approche. Certaines régions sont en effet inaccessibles à l'outil d'usinage qui a en général un nombre réduit de degrés de liberté. Le choix de la direction d'usinage et la position des strates a un impact fort sur la qualité du produit fini. Calculer la stratégie de découpage optimale et la meilleure direction d'usinage de manière à minimiser le volume des régions inaccessibles est un problème ouvert. Nous avons proposé une solution pratique approchée à ce problème qui a été testée avec succès et est maintenant utilisée par le CIRTES. Ce travail a fait l'objet de la thèse de G. Lauvaux (voir ci-dessous).

**Start-up.** J'ai été membre fondateur et consultant scientifique de VSP-Technology, une start-up créée en 2001 par deux anciens doctorants du projet ISA (F. Cuny et C. Winkler). Pendant plusieurs années, la société a développé et commercialisé des solutions logicielles pour la simulation de l'éclairage dans des environnements 3D et la visualisation haute performance. Malheureusement, elle a dû fermer ses portes en 2006.

---

## Encadrement d'activités de recherche

---

Je supervise actuellement les doctorants et post-doctorants suivants (avec la part prise dans leur encadrement) :

- Maria Pentcheva (2004-), doctorante, sur la conversion CSG-BRep de solides formés d'assemblages de volumes quadratiques ( $\approx 70\%$ ). Ce travail devrait mener à la première implantation exacte d'un algorithme d'évaluation du bord pour des objets courbes en position arbitraire. M. Pentcheva est co-encadrée par S. Lazard.
- Luis Peñaranda (2006-), doctorant, sur l'interfaçage de logiciels algébriques (FGb-RS) avec CGAL, la conception d'un noyau algébrique utilisant ces logiciels et l'utilisation efficace et robuste du noyau de calcul pour des applications comme le calcul d'arrangements de courbes algébriques dans le plan ( $\approx 50\%$ ). Nous espérons ainsi démontrer que la machinerie algébrique certifiée est aujourd'hui suffisamment mûre pour être utilisée de façon routinière. L'encadrement est partagé avec S. Lazard.
- Elias Tsigaridas (2006-), postdoc de l'Université nationale d'Athènes, sur l'optimisation des calculs algébriques en petit degré et l'utilisation du calcul algébrique certifié pour des problèmes comme le calcul de la topologie de courbes algébriques planes ( $\approx 50\%$ ). L'étudiant est co-encadré par S. Lazard.

Je suis également impliqué, bien que de façon moins significative ( $\approx 20\%$ ), dans l'encadrement des thèses de Marc Glisse (2004-), sur les aspects combinatoires de la géométrie des droites et de la visibilité 3D, et de Linqiao Zhang (2003-), sur l'implantation robuste et effective du squelette de visibilité 3D.

Par le passé, j'ai co-encadré les thèses et stages postdoctoraux suivants :

- François Cuny ( $\approx 40\%$ ), thèse intitulée *Radiosité à base d'ondelettes sur des surfaces paramétriques*, soutenue le 13 octobre 2000 (avec J.-C. Paul). F. Cuny est secrétaire du groupe thématique OCDS (Outils de conception et développement de systèmes) du pôle de compétitivité System@TIC Paris-Région. Il était auparavant PDG de la start-up VSP-Technology.

- Xavier Goaoc ( $\approx 30\%$ ), thèse intitulée *Structures de visibilité globales : taille, calcul et dégénérescences*, soutenue le 10 mai 2004 (avec S. Lazard). X. Goaoc est chargé de recherche à l'INRIA Lorraine.
- Laurent Dupont ( $\approx 50\%$ ), thèse intitulée *Paramétrage quasi-optimal de l'intersection de deux quadriques : théorie, algorithme et implantation*, soutenue le 6 octobre 2004 (avec S. Lazard). L. Dupont est maître de conférences à l'Université Nancy 2.
- Geoffroy Lauvaux ( $\approx 30\%$ ), thèse CIFRE intitulée *La réalisation d'œuvres d'art par prototypage rapide avec le procédé de Stratoconception<sup>®</sup>*, soutenue le 17 juin 2005 (avec H. Everett et S. Lazard). G. Lauvaux est ingénieur de recherche au CIRTES.
- Cédric Lamathe ( $\approx 50\%$ ), postdoc (2003-2004) sur la complexité des algorithmes de conversion CSG-Brep pour des objets courbes (avec S. Lazard). C. Lamathe est professeur associé à l'Université du Québec à Montréal.
- Hyeon-Suk Na ( $\approx 30\%$ ), postdoc (2001-2002) sur la complexité des structures de visibilité 3D d'objets distribués aléatoirement (avec H. Everett et S. Lazard). H.-S. Na est professeur à l'Université Soongsil, Séoul, Corée du Sud.

Au fil des années, j'ai également encadré les étudiants suivants en stages de DEA ou Master :

- Gilles Simon (1995) sur le calcul du point de vue à partir d'une image d'une scène calibrée. G. Simon est maître de conférences à l'Université Henri Poincaré.
- Sylvain Cunzi (1996) sur le calcul de facteurs de forme pour des objets courbes. S. Cunzi est directeur technique de la société Coyote Software, studio de développement de jeux vidéo.
- Hervé Barthélemy (1998) sur l'implantation de la fonction plénoptique. H. Barthélemy est professeur à l'EISTI.
- Nicolas Ray (1998) sur la visualisation de données volumiques. N. Ray est chargé de recherche à l'INRIA Lorraine.
- Éric Colin de Verdière (1999) sur le calcul d'enveloppes visuelles externes. É. Colin de Verdière est chargé de recherche CNRS à l'ENS Paris.
- Laurent Dupont (2000) sur l'implantation de la méthode de Levin pour le calcul de l'intersection de quadriques. L. Dupont est maître de conférences à l'Université Nancy 2.
- Clovis Schaff (2003) sur la détection rapide du type de l'intersection de deux quadriques. C. Schaff travaille pour la société de services européenne Amadeus.
- Lacramioara Astefanoaei (2006) sur l'intersection de quadriques dynamiques. L. Astefanoaei est en thèse à l'Université d'Utrecht, Pays-Bas.

Enfin, j'ai fait partie des jurys de thèse extérieurs suivants :

- Frank Da, thèse intitulée *L'interpolation de formes*, soutenue le 21 janvier 2002 à l'INRIA Sophia Antipolis (directeur de thèse : Jean-Daniel Boissonnat).
- Marc Pouget, thèse intitulée *Géométrie des surfaces : de l'estimation des quantités différentielles locales à l'extraction robuste d'éléments caractéristiques globaux*, soutenue le 2 décembre 2005 à l'INRIA Sophia Antipolis (directeur de thèse : Frédéric Cazals).

## Diffusion de l'information scientifique

---

Je suis actuellement membre du comité éditorial de *La Lettre du LORIA*. Cette publication trimestrielle, largement diffusée à l'extérieur, a pour objet de présenter divers aspects de la recherche construite au sein du laboratoire. Il s'agit avant tout d'un travail de vulgarisation à destination des responsables politiques régionaux et des partenaires industriels et académiques du laboratoire.

## Responsabilités collectives

---

**Animation scientifique.** En 1999, j'ai créé et pris la tête du groupe « Modélisation et calcul géométrique » du projet ISA du LORIA. En 2001, je suis devenu responsable permanent du projet. ISA était alors un gros projet, avec plus de 35 personnes. Le responsable scientifique, Jean-Claude Paul, était à ce moment-là président du Comité des projets de l'INRIA Lorraine. Je le secondais dans la gestion et la supervision des trois groupes de recherche au sein d'ISA (les deux autres étant « Réalité augmentée » et « Synthèse d'images et illumination globale »). Après le départ du professeur Paul pour la Chine en 2004, je suis devenu responsable scientifique d'ISA pour les deux années suivantes, pendant que les trois groupes s'engageaient sur la voie de la création de projets INRIA autonomes. J'ai pris une part prépondérante dans la rédaction de notre projet de recherche sur le calcul géométrique effectif. Notre groupe de modélisation est officiellement devenu projet INRIA, sous le nom de VEGAS, en septembre 2005 (les deux autres groupes devenant les projets MAGRIT, thème INRIA Cog B, et ALICE, thème INRIA Cog D). Je suis responsable permanent de VEGAS depuis sa création.

**Implication dans des programmes nationaux et internationaux.** En 2005-2006, j'ai été coordinateur de l'ARC (Action de recherche coopérative) INRIA ARCADIA sur les arrangements de quadriques<sup>6</sup>. Cette ARC rassemblait des chercheurs du Laboratoire d'algorithmique géométrique et algébrique de l'Université nationale d'Athènes, du projet GEOMETRICA de l'INRIA Sophia Antipolis et du projet VEGAS.

J'ai auparavant été porteur d'une ACI Jeunes chercheurs du ministère de l'Éducation et de la Recherche pour la période 2003-2006. Cette ACI avait pour thème la « Géométrie effective pour le rendu réaliste de scènes complexes ». J'ai également porté une ATIP (Action thématique incitative sur programme) Jeune équipe du CNRS sur un thème similaire, sur la période 2003-2005.

Au fil des années, j'ai pris part à de nombreux programmes nationaux et internationaux, notamment l'équipe associée INRIA McGill-ISA<sup>7</sup>; les ARCs INRIA CoSTIC (2000-2001), VISI3D (2000-2001), PLASMA (2002-2003), DOCKING (2003-2004); ou encore le projet CNRS-INRIA-Université de l'Illinois sur les problèmes d'optimisation en topologie algorithmique (2005-2006).

**Autres responsabilités.** De 1998 à 2004, j'ai été membre titulaire de la Commission de spécialistes 27<sup>e</sup> section de l'Université Henri Poincaré. De 2002 à 2006, j'ai été président, après

---

<sup>6</sup><http://www.loria.fr/~petitjea/Arcadia/>

<sup>7</sup><http://www.loria.fr/~everett/McGill-ISA/McGill-ISA.html>

en avoir été membre, du Comité des thèses de l'AFIT (Association française d'informatique théorique), qui décerne tous les ans un prix à la meilleure thèse en informatique théorique soutenue en France dans l'année.

---

## Rayonnement scientifique

---

**Organisation de colloques.** En 2002, j'ai été co-organisateur (avec H. Everett et S. Lazard) des Journées de géométrie algorithmique, la conférence annuelle de la communauté française de géométrie algorithmique. La conférence a eu lieu à Obernai, avec plus de 50 participants. J'ai également organisé deux *workshops* sur les arrangements de quadriques en 2005 à Nancy et 2006 à Athènes. Enfin, j'organise (avec H. Everett, X. Goaoc et S. Lazard) le 24<sup>e</sup> *European Workshop on Computational Geometry*, qui aura lieu à Nancy du 17 au 19 mars 2008. Plus de 100 participants sont attendus.

**Participation à des comités de programme.** J'ai fait partie du comité de programme de la conférence ICCV (IEEE International Conference on Computer Vision) en 2001, 2003 et 2007, de la conférence CVPR (IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition) en 2005 et 2007, et de la conférence ECCV (European Conference on Computer Vision) en 2006.

**Collaborations nationales et internationales.** J'ai actuellement plusieurs collaborations actives avec des chercheurs étrangers, notamment : Otfried Cheong (Korea Advanced Institute of Science and Technology, Corée du Sud) et Andreas Holmsen (Département de mathématiques, Université de Bergen, Norvège) sur la théorie des droites transversales et les théorèmes de type Helly pour les transversales ; Ciprian Borcea (Rider University, États-Unis) sur les aspects algébriques de la visibilité 3D ; Gert Vegter (Université de Groningue, Pays-Bas) sur l'approximation de courbes planaires par des splines coniques ; et Elmar Schömer et Michael Hemmer (Université de Mayence, Allemagne) sur le calcul des intersections de triplets de quadriques. Sur le plan national, je collabore essentiellement avec d'autres projets INRIA, en particulier GEOMETRICA (Olivier Devillers et Monique Teillaud) à l'INRIA Sophia Antipolis et SALSA (Daniel Lazard et Fabrice Rouillier) à l'INRIA Rocquencourt.

**Évaluation d'articles (peer reviewing).** Évaluateur régulier pour les revues *ACM Transactions on Graphics*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, *International Journal of Computer Vision*, *Computational Geometry : Theory and Applications*, *Journal of Symbolic Computation*, *Acta Mathematica*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, *Computer Vision and Image Understanding* ainsi que pour les conférences majeures ICCV, CVPR, ECCV, SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry), ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation) et SIGGRAPH (International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques).

Évaluateur pour *Mathematical Reviews*, une base de données publiée par l'American Mathematical Society où l'ensemble de la production mondiale en mathématiques est référencée et annotée.

**Prix et distinctions.** Prix de thèse de l'Institut national polytechnique de Lorraine (INPL) en 1996.

---

## Liste complète de publications

---

### Journaux internationaux

- [1] C. Borcea, X. Goaoc, and S. Petitjean. Line transversals to disjoint balls. *Discrete and Computational Geometry*, 2007. Accepted. (pages 19 et 99)
- [2] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: I. The generic algorithm. *Journal of Symbolic Computation*, 2007. Accepted. (pages 16 et 41)
- [3] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: II. A classification of pencils. *Journal of Symbolic Computation*, 2007. Accepted. (pages 16 et 57)
- [4] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: III. Parameterizing singular intersections. *Journal of Symbolic Computation*, 2007. Accepted. (pages 16 et 67)
- [5] O. Cheong, X. Goaoc, A. Holmsen, and S. Petitjean. Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete and Computational Geometry*, 2007. To appear. (pages 18 et 99)
- [6] H. Everett, S. Lazard, S. Petitjean, and L. Zhang. On the expected size of the 2D visibility complex. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 2007. To appear. (page 17)
- [7] C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard, and S. Petitjean. Common tangents to spheres in  $\mathbb{R}^3$ . *Discrete and Computational Geometry*, 35(2):287–300, 2006. (pages 17, 93 et 95)
- [8] S. Lazard, L. M. Peñaranda, and S. Petitjean. Intersecting quadrics: an efficient and exact implementation. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 35(1–2):74–99, 2006. (pages 16, 41, 50, 51 et 67)
- [9] O. Devillers, V. Dujmovic, H. Everett, X. Goaoc, H.-S. Na, and S. Petitjean. The expected number of 3D visibility events is linear. *SIAM Journal on Computing*, 32(6):1586–1620, 2003. (page 17)
- [10] B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray, and J. Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3):362–371, 2002. Proceedings of SIGGRAPH 2002. (page 12)
- [11] S. Petitjean. A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. *ACM Computing Surveys*, 34(2):211–262, 2002. (page 15)
- [12] L. Alonso, F. Cuny, S. Petitjean, J.-C. Paul, S. Lazard, and E. Wies. The virtual mesh: a geometric abstraction for efficiently computing radiosity. *ACM Transactions on Graphics*, 20(3):169–201, 2001. (page 13)

- [13] S. Petitjean and E. Boyer. Regular and non-regular point sets: properties and reconstruction. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 19(2-3):101–126, 2001. (page 12)
- [14] S. Petitjean. Algebraic geometry and computer vision: polynomial systems, real and complex roots. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10(3):191–220, 1999. (page 10)
- [15] M.-O. Berger, B. Wrobel-Dautcourt, S. Petitjean, and G. Simon. Mixing synthetic and video images of an outdoor urban environment. *Machine Vision and Applications*, 11:145–159, 1999. (page 11)
- [16] S. Petitjean. A computational geometric approach to visual hulls. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 8(4):407–436, 1998. Special issue on applied computational geometry, edited by Ming Lin and Dinesh Manocha. (page 15)
- [17] S. Petitjean. The enumerative geometry of projective algebraic surfaces and the complexity of aspect graphs. *International Journal of Computer Vision*, 19(3):1–27, 1996. (page 9)
- [18] S. Petitjean, J. Ponce, and D.J. Kriegman. Computing exact aspect graphs of curved objects: algebraic surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 9(3):231–255, December 1992. (pages 9 et 115)

## Conférences internationales

- [19] S. Petitjean, S. Ghosh, and G. Vegter. Complexity of approximation by conic splines. In *Proc. of EuroCG (European Workshop on Computational Geometry)*, 2007. To appear. (page 19)
- [20] C. Borcea, X. Goaoc, and S. Petitjean. Line transversals to disjoint balls. *Proc. of SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry)*, 2007. To appear. (pages 19 et 99)
- [21] H. Everett, S. Lazard, S. Petitjean, and L. Zhang. An experimental assessment of the 2D visibility complex. In *Proc. of CCCG (Canadian Conference on Computational Geometry)*, 2005. (page 17)
- [22] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: theory and implementation. In *Proc. of International Conference on Polynomial System Solving*, 2004. (page 16)
- [23] S. Lazard, L. M. Peñaranda, and S. Petitjean. Intersecting quadrics: an efficient and exact implementation. In *Proc. of SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry)*, pages 419–428, 2004. (page 16)
- [24] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics. In *Proc. of SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry)*, pages 246–255, 2003. (page 16)

- [25] B. Lévy and S. Petitjean. Least squares conformal maps. In *Proc. of International Conference on Curves and Surfaces*, 2002. (page 12)
- [26] E. Boyer and S. Petitjean. Curve and surface reconstruction from regular and non-regular point sets. In *Proc. of CVPR (International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition)*, pages 659–665, 2000. (page 12)
- [27] M.-O. Berger, G. Simon, S. Petitjean, and B. Wrobel-Dautcourt. Mixing synthesis and video images of outdoor environments: application to the bridges of Paris. In *Proc. of ICPR (International Conference on Pattern Recognition)*, volume 1, pages 90–94, 1996. (page 11)
- [28] S. Petitjean. The number of views of piecewise-smooth algebraic objects. In E. Mayr and C. Puech, editors, *Proc. of STACS (Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science)*, volume 900 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 571–582. Springer-Verlag, 1995. München, Germany, March 2-4. (page 9)
- [29] S. Petitjean. Automating the construction of stationary multiple-point classes. In *Proc. of ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, pages 9–14, Oxford, United Kingdom, July 1994. ACM Press. (page 10)
- [30] S. Petitjean. On the enumerative geometry of aspect graphs. In J.-O. Eklundh, editor, *Proc. of ECCV (European Conference on Computer Vision)*, volume 800-1 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 421–426. Springer-Verlag, 1994. (page 9)
- [31] S. Petitjean. Algebraic geometry and object representation in computer vision. In M. Hebert, J. Ponce, T. Boult, and A. Gross, editors, *Proceedings of the International NSF/Arpa Workshop on Object Representation in Computer Vision*, volume 994 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 155–166. Springer-Verlag, 1995. New-York, December 5-7, 1994. (page 10)
- [32] J. Ponce, S. Petitjean, and D.J. Kriegman. Computing exact aspect graphs of curved objects: algebraic surfaces. In G. Sandini, editor, *Proc. of ECCV (European Conference on Computer Vision)*, volume 588 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 599–614. Springer-Verlag, 1992. (page 9)

## Chapitres d’ouvrage

- [33] L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard, and S. Petitjean. Towards the robust intersection of implicit quadrics. In J. Winkler and M. Niranjana, editors, *Uncertainty in Geometric Computations*, volume 704 of *International Series in Engineering and Computer Science*, chapter 5, pages 59–68. Kluwer Academic Publishers, 2002. (page 16)
- [34] S. Petitjean. The complexity and enumerative geometry of aspect graphs of smooth surfaces. *Progress in Mathematics*, 143:317–352, 1996. Proceedings of MEGA (International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry), Santander, Spain, April 1994. (page 9)

- [35] J. Ponce, D.J. Kriegman, S. Petitjean, S. Sullivan, G. Taubin, and B. Vijayakumar. Representations and algorithms for 3D curved object recognition. In P. Flynn and A. Jain, editors, *Three-Dimensional Object Recognition Systems*, pages 327–352. Elsevier Press, 1993. (page 9)

## Soumissions et prépublications

- [36] S. Petitjean, S. Ghosh, and G. Vegter. Complexity of approximation by conic splines. *Mathematics in Computer Science*, 2007. Submitted (30 pages). (page 19)
- [37] C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard, and S. Petitjean. On tangents to quadric surfaces. *Proc. of Edinburgh Mathematical Society*, 2006. In preparation (50 pages). (pages 17 et 93)

## Thèses

- [38] S. Petitjean. *Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires: application aux graphes d'aspects d'objets courbes*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine, CRIN-CNRS & INRIA Lorraine, March 1995. (page 9)
- [39] S. Petitjean. Computing exact aspect graphs of curved objects bounded by smooth algebraic surfaces, 1992. Master's Thesis, University of Illinois. (page 9)



## **Deuxième partie**

### **Synthèse**



# Introduction

Le monde physique dans lequel nous vivons est essentiellement géométrique. Les calculs impliquant des modèles d'objets réels doivent gérer des données géométriques. Les applications de nature calculatoire qui manipulent des modèles géométriques sont donc omniprésentes en science. Le calcul géométrique est une brique centrale de nombreux domaines, comme la conception assistée par ordinateur, le graphisme, la biologie moléculaire, la robotique, la vision artificielle et bien d'autres. Les progrès rapides des cartes graphiques, des réseaux et des systèmes de visualisation rendent le calcul géométrique encore plus fondamental.

Depuis plus de trois décennies, la géométrie algorithmique est la discipline dédiée à l'établissement de bases solides pour l'étude des algorithmes géométriques qui relèvent de ces applications. Elle s'est historiquement et traditionnellement concentrée sur le traitement d'objets linéaires comme des segments de droites et des polygones dans le plan, et des ensembles de points et des polytopes dans l'espace 3D. Pour de nombreuses applications, particulièrement dans les domaines du graphisme et de la modélisation de solides, il est nécessaire de manipuler des objets généraux comme des courbes et des surfaces complexes. L'approximation usuelle par des primitives de plus faible degré (typiquement des triangles), bien que très utile dans de nombreuses applications, présente plusieurs inconvénients : introduction d'erreurs numériques intempestives, impossibilité d'assurer la cohérence topologique, forte augmentation de la complexité des modèles pour représenter fidèlement la géométrie, etc.

Malgré un volume d'acquis énorme, la géométrie algorithmique classique a peu à offrir pour prendre en compte la géométrie exacte des objets courbes. Parmi les problèmes induits par l'ouverture de la géométrie algorithmique aux objets courbes, mentionnons : l'extension (voir même la refonte complète) des structures de données et algorithmes même parmi les plus basiques (diagrammes de Voronoï, algorithmes de balayage, arrangements, ...); l'irruption massive de questions algébriques et donc le besoin impérieux d'outils de résolution algébrique efficaces; l'explosion du nombre de cas dégénérés (dans les applications géométriques, ils sont souvent la norme, non l'exception) et par conséquent la difficulté accrue d'écrire des logiciels robustes; ou encore la nécessité de réviser la notion habituelle de complexité pour y incorporer la complexité arithmétique, l'hypothèse que les opérations prennent un temps constant (modèle *real RAM*) n'étant plus réaliste.

## Calcul géométrique exact

Diverses tentatives visant à gérer de manière robuste les dégénérescences parmi des objets non-triviaux ont mené au développement du *calcul géométrique exact*. Rappelons qu'un objet géométrique consiste en deux choses : une structure combinatoire (qui, par exemple, encode les incidences entre les éléments constitutifs de l'objet) et un ensemble de quantités numériques décrivant le plongement de l'objet dans l'espace. Comme il y a des contraintes de cohérence gouvernant la relation entre l'information combinatoire et les quantités nu-

mériques, l'instabilité numérique des algorithmes géométriques est intimement liée à cette double nature des objets géométriques. Travailler sous le paradigme du calcul exact signifie faire des calculs dans lesquels les quantités numériques sont évaluées avec une précision suffisante (voir même exactement si besoin est) pour que la structure combinatoire sous-jacente soit mathématiquement exacte.

La dépendance de décisions combinatoires sur des calculs numériques est encapsulée dans la notion de *prédicats géométriques*. Évaluer un prédicat géométrique consiste en général à déterminer le signe d'une expression polynomiale en les quantités en entrée. Le signe lui-même encode la réponse à une requête géométrique simple comme « un point dans le plan est-il à l'intérieur, à l'extérieur ou sur un cercle ? » ou « étant données deux surfaces, sont-elles disjointes, tangentes ou s'intersectent-elles transversalement ? ». Le paradigme du calcul géométrique exact nécessite que les prédicats soient évalués correctement, assurant que les branchements faits par l'algorithme sont corrects, que le logiciel ne va pas « planter », boucler indéfiniment ou retourner un résultat faux, et donc que la structure topologique de la sortie est correcte.

Les difficultés inhérentes à l'extension du répertoire de la géométrie algorithmique aux objets courbes, dans la philosophie du calcul exact, sont de plusieurs ordres, notamment mathématiques, algorithmiques et calculatoires. Alors que la majorité des résultats passés de la géométrie algorithmique sont de nature combinatoire et s'intéressent à la complexité asymptotique, le calcul effectif avec des objets courbes nécessite également la résolution de problèmes géométriques de taille constante, c.-à-d. des problèmes comme « quatre surfaces données admettent-elles des tangentes réelles communes ? ». Réussir dans cette entreprise impose de développer une recherche pluridisciplinaire couvrant la géométrie projective, l'algèbre linéaire, l'algèbre algorithmique, les mathématiques des courbes et des surfaces, la théorie des invariants, et la géométrie algébrique réelle et complexe.

Les recherches dans ce domaine ont toutes les chances d'avoir un impact fort sur les applications, en particulier en modélisation géométrique, Conception géométrique assistée par ordinateur (CGAO) et Conception assistée par ordinateur (CAO). Il est connu que la plupart des logiciels commerciaux de modélisation ne sont pas fiables et butent sur les instances de problèmes quasi-dégénérées.

## Tour d'horizon

La dernière décennie a connu une accélération marquée des travaux, en géométrie algorithmique et dans les domaines connexes, des travaux sur la manipulation exacte d'objets courbes. Les groupes de recherche en Europe ont été à l'avant-garde des efforts dans ce domaine, notamment avec les projets européens ECG (*Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, 2002-2005) – cf. [BT06] – et son successeur ACS (*Algorithms for Complex Shapes*, 2005-2008). Mentionnons également le projet européen GAIA II (2002-2005) dont l'objectif était de combiner des techniques de CGAO et de géométrie algébrique classique pour améliorer les algorithmes d'intersection dans les systèmes de CAO.

Le travail réalisé peut grossièrement se classer en trois catégories complémentaires : structures de données et algorithmes pour les courbes et les surfaces, problèmes algébriques en calcul géométrique, et questions de robustesse et traitement des dégénérescences.

Une partie importante des travaux sur les structures de données et les algorithmes s'est concentrée sur le calcul exact d'arrangements d'objets courbes. Rappelons que, étant donnée une collection finie d'objets géométriques, leur arrangement est la subdivision de l'espace ambiant en cellules induites par les objets. L'attrait de ces structures vient essentiellement du fait qu'elles permettent de discrétiser de manière précise et topologiquement correcte des problèmes continus. Beaucoup de travaux ont cherché à étendre l'algorithme classique de balayage (Bentley-Ottmann) pour des courbes algébriques planes et à identifier les fonctions et prédicats appropriés [FHK<sup>+</sup>06]. Cette tâche a été menée à bien pour des arcs de cercles [DFMT02], de coniques [BEH<sup>+</sup>02], de cubiques [EKSW04, EKSW06] et de quartiques [Ber04, BHK<sup>+</sup>05]. Le plongement à précision finie conservant la topologie (*snap rounding*) a récemment été étendu aux courbes de Bézier [EKW07b]. En 3D, un algorithme a été proposé pour balayer un arrangement de quadriques [MTT05] mais son intérêt pratique est limité tant il fait intervenir des constructions algébriques de degré important. Les arrangements de quadriques ont également été étudiés sous l'angle de la projection d'intersections de quadriques sur un plan et du balayage de l'arrangement de courbes quartiques résultant de cette projection [SW06, Wol02].

La géométrie algorithmique sur/avec des objets courbes est une source importante de problèmes pour l'amélioration des logiciels de calcul algébrique [MPS<sup>+</sup>06] et il donc pas surprenant de trouver les même auteurs impliqués dans les deux domaines. Par exemple, balayer des courbes algébriques générales implique d'en déterminer la topologie [DET07, GVN02, EKW07a, Ker06, SW05], un problème difficile. De nombreux outils algébriques sont nécessaires pour la résolution efficace et robuste de problèmes de ce genre. Parmi eux, mentionnons, sans ordre particulier : les résultants, les suites de Sturm(-Habicht), la règle des signes de Descartes [BPR03], les représentations univariées rationnelles [Ouc06, Rou99], l'isolation de racines réelles [ET06, RZ04], la comparaison de nombres algébriques de faible degré [ET04], ... Des travaux se sont également penchés sur la manipulation des expressions radicales, notamment la détermination par des calculs numériques du signe d'expressions contenant des racines imbriquées [BFM<sup>+</sup>01, LY01].

La conception de logiciels géométriques sûrs repose sur l'identification des instances dégénérées du problème considéré et sur la détection efficace de ces instances sous la forme de l'évaluation du signe de prédicats polynomiaux. Ces dernières années, l'accent a été mis sur l'étude des dégénérescences et la détermination de prédicats simples pour des problèmes comme les tangentes/transversales aux droites et sphères [Meg01, MPT01, MST03, MS05, ST06, The02, The03], le diagramme de Voronoï d'ellipses [ETT06, ET07], les structures différentielles sur les surfaces [CFPR06a, CFPR06b, Gra04] et la morphologie et l'intersection de primitives courbes simples [ABB06, Bri07, EGdR06, WWK01].

La principale motivation du paradigme du calcul exact étant de fournir des implantations réalistes et robustes, les chercheurs du domaine ont multiplié les efforts visant à traduire les progrès obtenus sur le plan théorique en logiciels robustes. La majorité des résultats du projet européen ECG a été intégrée dans les bibliothèques CGAL (*Computational Geometry Algorithms Library*) [EKP<sup>+</sup>04, FGK<sup>+</sup>00, FT06] et EXACUS (*Efficient and Exact Algorithms for Curves and Surfaces*) [BEH<sup>+</sup>05]. Mentionnons également deux autres bibliothèques supportant le paradigme du calcul géométrique exact, à savoir LEDA [KN04, MN99] et CORE [KLPY99]. Sur le front algébrique, plusieurs bibliothèques ont été développées qui permettent de manipuler des courbes et surfaces implicites et paramétriques, et d'identifier

les zéros réels de systèmes polynomiaux généraux, notamment AXEL, SYNAPS et FGb/RS. Elles reposent sur des implantations d'arithmétique entière en précision arbitraire comme GMP ou des arithmétiques par intervalles comme MPFI et BOOST.

## Philosophie

L'algèbre joue clairement un rôle de premier plan dans le calcul géométrique exact. De nombreuses opérations au cœur des algorithmes travaillant sur des primitives courbes se réduisent à évaluer, manipuler et résoudre des systèmes d'équations polynomiales. Fort heureusement, les performances de l'algèbre algorithmique ont très fortement augmenté ces dernières années. L'algèbre est aujourd'hui suffisamment mûre pour résoudre des problèmes de taille conséquente. Mais malgré de nombreux succès récents, les algorithmes d'algèbre algorithmique nécessitent toujours des calculs intensifs et restent possiblement difficiles à mettre en œuvre de façon routinière. Par conséquent, ma philosophie est que le recours aux outils algébriques ne doit se faire qu'en toute fin de parcours, lorsque le problème a été complètement mis à plat d'un point de vue géométrique. L'intuition dicte (et l'expérience prouve) que plus les courbes et surfaces considérées sont de faible degré, plus les algorithmes peuvent tirer avantage de la géométrie.

De ce fait, je me concentre ici sur des *problèmes de taille constante* impliquant des *objets algébriques de faible degré*, où la géométrie jouera un rôle important. En toute généralité, résoudre un problème géométrique de taille constante dans le paradigme du calcul exact implique de : caractériser les dégénérescences, qu'elles soient intrinsèques ou artificiellement créées par des choix algorithmiques ; traduire chaque décision géométrique (et branchement attaché de l'algorithme) en l'évaluation du signe d'une expression algébrique ; et évaluer exactement et efficacement le signe de ces expressions. L'évaluation est en général réalisée grâce à un mélange d'arithmétique par intervalles (quand la valeur de l'expression est suffisamment éloignée de zéro) et d'arithmétique entière (autrement). Il faut souligner que je ne m'intéresse pas ici à la conception de filtres arithmétiques. Cependant, il est important de réaliser que le degré des polynômes exprimant les prédicats géométriques est une mesure directe du nombre de bits requis et de l'efficacité de l'implantation : plus le prédicat est de degré élevé, plus souvent les filtres échoueront et donc plus coûteuse sera l'évaluation exacte. Traduire chaque décision géométrique en prédicats de « faible degré » est donc critique pour limiter strictement les besoins arithmétiques de l'implantation.

## Survol du document

Dans ce mémoire, je présente plusieurs résultats qui contribuent à donner des fondations solides au calcul géométrique effectif pour des simples non-linéaires. Le « fil conducteur » de ces travaux est la compréhension de la façon dont la géométrie contraint l'algèbre quand on manipule des primitives algébriques de faible degré.

Les Chapitres 1-3 se focalisent sur le problème du paramétrage exact et efficace d'intersections de quadriques à coefficients entiers dans l'espace projectif réel à 3 dimensions. Les nombreuses contributions à ce problème sont réparties sur trois chapitres. Le Chapitre 1 montre comment paramétrer l'intersection de manière quasi-optimale dans le cas générique,

c.-à-d. quand l'intersection est une quartique lisse. L'accent est mis sur la « complexité algébrique » et sur la « complexité arithmétique ». Le Chapitre 2 montre comment obtenir une énumération complète de tous les types possibles d'intersection réelle de deux quadriques quelconques, quand l'intersection est singulière (c.-à-d. non-générique). Puis des algorithmes sont présentés pour déterminer le type de l'intersection de deux quadriques arbitraires données. Enfin, le Chapitre 3 montre comment chaque type d'intersection singulière peut être paramétré avec l'idée de limiter au maximum l'apparition de racines carrées.

Le Chapitre 4 semble faire un pas en arrière, puisqu'il se penche sur la caractérisation des positions relatives de deux coniques projectives et sur la mise au jour de prédicats de faible degré permettant de réaliser cette caractérisation. Mais au-delà de la simplicité des prédicats trouvés, la partie intéressante ici est la manière dont ces prédicats apparaissent. L'analyse est en effet basée sur la théorie classique des invariants, c.-à-d. l'étude des propriétés intrinsèques de systèmes polynomiaux. Il est assez naturel que cette théorie apparaisse dans un tel contexte, puisqu'elle était vue comme un pont entre la géométrie et l'algèbre par les mathématiciens du 19<sup>e</sup> siècle (culminant avec le fameux Programme d'Erlangen de Felix Klein).

Le Chapitre 5 étudie le problème des droites tangentes à des sphères. Plus spécifiquement, il montre comment caractériser les positions de quatre sphères ayant une infinité de tangentes réelles communes. La réponse s'avère être simple : les sphères doivent avoir leurs centres alignés et avoir une tangente réelle commune. Une telle condition peut être testée par l'évaluation de prédicats géométriques simples, que nous décrivons.

Partant du cadre défini au Chapitre 5, le Chapitre 6 étudie l'ensemble des droites transversales à des boules. Il montre tout d'abord que les directions de droites transversales à trois boules disjointes de rayon quelconque de  $\mathbb{R}^3$  forment un ensemble strictement convexe de la sphère des directions. Ce résultat est obtenu en inspectant les morceaux de courbes algébriques apparaissant sur le bord de cet ensemble et en montrant qu'aucune inflexion ne peut apparaître lorsque les boules sont disjointes. Le résultat est ensuite étendu à un nombre fini de boules en toute dimension. Ce résultat important a de nombreuses implications en théorie des transversales, que nous explorons.

Le Chapitre 7 conclut le document et présente une large gamme d'extensions des résultats actuels et des perspectives pour les années à venir.

Les publications sur lesquelles les chapitres de ce mémoire sont basés ont été rassemblées, pour faciliter la tâche du lecteur, dans la Partie III.



# Chapitre 1

## Intersection de quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ : problématique et cas générique

### Résumé

Dans ce chapitre, nous introduisons le problème du paramétrage de l'intersection de deux quadriques projectives de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Nous présentons les grandes lignes de nos contributions dans le cas où l'intersection est générique, c.-à-d. une quartique lisse.

Ce chapitre fait un survol des publications [2] et [8], reprises respectivement dans les Chapitres 8 (page 129) et 11 (page 135). Il donne également quelques résultats nouveaux, notamment à partir de la Section 1.4, qui améliorent la complexité arithmétique des paramétrages dans le cas générique présentée dans [8].

Soient  $Q_S, Q_T$  deux quadriques projectives réelles de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Soit  $C = Q_S \cap Q_T$  leur intersection.  $C$  est une courbe de degré 4 qui peut prendre de nombreuses formes : quartique lisse, quartique singulière, cubique et droite, deux coniques sécantes, deux droites doubles, quatre droites concourantes, ... L'objectif est d'obtenir un paramétrage le « plus simple possible » de chacune des composantes de  $C$ . Cette « simplicité » se mesure selon trois critères :

1. type de fonctions définissant les coordonnées du paramétrage (polynômes, ... ) ;
2. taille de l'extension des coefficients des fonctions ci-dessus (nombre de racines carrées, racines imbriquées) ;
3. hauteur des coefficients (nombre de bits nécessaires pour la représentation, relativement à la taille de l'entrée).

La difficulté de ce travail est que l'on souhaite minimiser la complexité du résultat selon ces trois critères simultanément.

Inutile de refaire ici l'historique du calcul de paramétrages de l'intersection de quadriques. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles correspondants. Contentons-nous de mettre en avant quelques contributions-clés sur ce qui constitue sans doute le problème le plus fondamental en modélisation des solides : la méthode du faisceau de J. Levin [Lev76, Lev79], premier algorithme général ; la méthode algébrique de Farouki *et al.* [FNO89] ; les méthodes géométriques, restreintes à certains types de quadriques, de Miller et Goldman [MG95] et Shene et Johnstone [SJ94] ; la méthode par projection sur une cubique de Wang *et al.* [WJG02] ; ou encore les améliorations récentes de la méthode de Levin proposées par Wang *et al.* [WGT03].

Malgré plusieurs décennies de recherche, personne n'avait encore proposé une méthode de paramétrage à la fois générale, efficace et utilisable en pratique. Le travail que nous présentons dans ce chapitre et dans les suivants comble ce vide. Sans entrer dans une explication détaillée

de ce qui a permis d'arriver à ce résultat, il est assez frappant de constater que tous les travaux précédents se plaçaient dans un cadre Euclidien, alors que nous avons travaillé intégralement avec une vision projective des choses. L'expérience a montré que la géométrie projective fournit souvent un cadre qui est beaucoup plus approprié que la géométrie Euclidienne (à la fois au niveau théorique et au niveau algorithmique) pour la gestion des dégénérescences dans les algorithmes géométriques. Quitte, en fin de course, à revenir à des considérations Euclidiennes lorsque cela est nécessité par l'application...

Les exemples présentés dans ce chapitre et dans les suivants ont été calculés avec notre logiciel, QI, qu'il est possible d'interroger directement en ligne<sup>1</sup>.

## 1.1 Préliminaires

Dans ce qui suit, toutes les matrices sont carrées symétriques réelles. Soit  $S$  une telle matrice, de taille  $n + 1$ . On appelle *quadrique projective* associée à  $S$  l'ensemble

$$Q_S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n \mid \mathbf{x}^T S \mathbf{x} = 0\},$$

où  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  désigne l'espace projectif réel de dimension  $n$ . Dans ce document, la plupart des objets vivent dans un espace projectif. Il est important de toujours garder cela présent à l'esprit. Ainsi, un point de  $\mathbb{P}^3$  a quatre coordonnées et le paramétrage d'une courbe a quatre composantes.

La matrice  $S$  étant symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles. Soit  $\sigma^+$  (resp.  $\sigma^-$ ) le nombre de valeurs propres positives (resp. négatives). La paire

$$\sigma(S) = (\sigma^+(S), \sigma^-(S))$$

est appelée l'*inertie* de  $S$ . Le *rang* de  $S$  est la somme  $\text{rg}(S) = \sigma^+ + \sigma^-$ . Une matrice  $S$  de taille  $n + 1$  et sa quadrique associée  $Q_S$  sont dites *singulières* quand le déterminant de  $S$  est nul ou, de manière équivalente, quand  $\text{rg} S < n + 1$ .

Comme la surface  $Q_S$  est inchangée lorsque  $S$  est multipliée par un scalaire non-nul, et comme les valeurs propres de  $-S$  sont les opposées des valeurs propres de  $S$ , on peut considérer les inerties  $(\sigma^+(S), \sigma^-(S))$  et  $(\sigma^-(S), \sigma^+(S))$  comme équivalentes. Par convention, nous choisirons  $\sigma^+(S) \geq \sigma^-(S)$ .

Dans  $\mathbb{P}^3$ , les quadriques non-singulières sont celles d'inertie  $(4, 0)$ ,  $(3, 1)$  et  $(2, 2)$ . Les quadriques d'inertie  $(4, 0)$  sont vides de point réel. Une quadrique de rang 3 est appelée *cône projectif*. Le cône est *réel* si son inertie est  $(2, 1)$ , *imaginaire* autrement. Un cône imaginaire ne contient qu'un seul point réel, son sommet, qui est aussi son seul point singulier. Une quadrique de rang 2 est appelée *paire de plans*, *réelle* si son inertie est  $(1, 1)$ , *imaginaire* autrement. Une paire de plans imaginaire contient une droite de points réels, son lieu singulier, qui est la droite d'intersection des deux plans de la paire. Une quadrique d'inertie  $(1, 0)$  est appelée *plan double*, et est nécessairement réelle. Dans  $\mathbb{P}^3$ , toutes les quadriques sont réglées par des droites réelles sauf les quadriques d'inertie  $(3, 1)$ . Ces quadriques d'inertie  $(3, 1)$  sont aussi les seules à avoir un déterminant négatif.

Deux matrices sont dites *congruentes* par une transformation réelle ou *projectivement équivalentes* si et seulement si il existe une matrice non-singulière  $P$  à coefficients réels telle

---

<sup>1</sup>[http://www.loria.fr/equipements/vegas/qi/new\\_server/](http://www.loria.fr/equipements/vegas/qi/new_server/)

que

$$S' = P^T S P.$$

La transformation envoyant  $S$  sur  $S'$  est appelée *congruence réelle* ou simplement *transformation projective réelle*.

Le résultat fondamental suivant sous-tend tous nos travaux sur les quadriques projectives :

**Théorème 1.1** (Loi d'inertie de Sylvester [Syl52]). *Soient  $S, S'$  deux matrices symétriques réelles.  $S$  et  $S'$  sont congruentes par une transformation réelle si et seulement si  $\sigma(S) = \sigma(S')$ .*

L'inertie forme un ensemble complet d'invariants d'une matrice symétrique par congruence réelle [Lam73].

Soient  $S$  et  $T$  deux matrices symétriques réelles de même taille et soit  $R(\lambda, \mu) = \lambda S + \mu T$ . L'ensemble

$$\{R(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

est appelé le *faisceau* de matrices engendré par  $S$  et  $T$ , noté simplement  $(S, T)$ . Par simplicité, on notera parfois un membre du faisceau

$$R(\lambda) = \lambda S - T, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

La forme binaire

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det R(\lambda, \mu)$$

est appelée *forme caractéristique* ou *polynôme caractéristique* du faisceau. Associé à un faisceau de matrices, on a un faisceau de quadriques  $\{Q_{R(\lambda, \mu)} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ , noté  $(Q_S, Q_T)$ . Rappelons que l'intersection de deux quadriques distinctes d'un faisceau est indépendante du choix particulier des deux quadriques.

## 1.2 Aperçu de l'algorithme

Soient  $S, T$  deux matrices symétriques réelles de taille 4, à coefficients entiers. Soit  $C = Q_S \cap Q_T$  l'intersection des formes quadratiques associées. Pour paramétrer  $C$ , l'idée, depuis Levin, consiste à chercher dans le faisceau  $(Q_S, Q_T)$  une quadrique réglée  $Q_R$ , à la paramétrer, puis à plonger le paramétrage  $\mathbf{X}_R$  dans une des quadriques de départ, disons  $Q_S$ , pour obtenir l'équation suivante :

$$\Omega : \mathbf{X}_R^T S \mathbf{X} = 0. \tag{\Omega}$$

Rappelons que les quadriques réglées dans un faisceau de quadriques réelles de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  sont celles d'inertie  $(2, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, 0)$ . L'Équation  $(\Omega)$  est rendue particulièrement simple par le fait que  $Q_R$  est réglée : il existe un paramétrage de  $Q_R$  qui est linéaire en (au moins) un de ses paramètres et qui fait que  $(\Omega)$  est donc quadratique en un paramètre. Sa résolution est donc aisée et permet d'obtenir un paramétrage de  $C$ .

De plus, si on note  $C_\Omega$  la courbe tracée dans l'espace des paramètres de  $Q_R$  par l'Équation  $(\Omega)$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2.** *Le paramétrage de  $Q_R$  définit un isomorphisme entre la courbe  $C$  et la courbe  $C_\Omega$ . En particulier,  $C$  et  $C_\Omega$  ont le même genre et la même décomposition en facteurs.*

Une analyse de  $C_\Omega$  permet donc d'obtenir le type topologique de  $C$  et un paramétrage de ses composantes.

Pour répondre au critère 1 de simplicité (fonctions définissant le paramétrage), il convient de distinguer deux cas, à la lueur du résultat suivant :

**Proposition 1.3.** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *l'intersection de  $Q_S$  et  $Q_T$  admet un paramétrage par des fonctions rationnelles ;*
- *l'intersection est singulière ;*
- *le polynôme caractéristique du faisceau  $a$  (au moins) une racine multiple.*

**Remarque.** Il n'est sans doute pas inutile de faire ici un aparté sur le mot « rationnel », qui prend plusieurs sens dans ce qui suit. En géométrie algébrique, une variété de genre 0 est dite rationnelle, c'est-à-dire paramétrable par des fonctions rationnelles (quotients de polynômes). Mais nous parlerons aussi de droite rationnelle ou de conique rationnelle, pour souligner que les équations les définissant sont à coefficients rationnels.

Lorsque l'intersection est singulière, la courbe admet un paramétrage par des fonctions rationnelles (Proposition 1.3), c'est-à-dire, dans  $\mathbb{P}^3$ , par des polynômes homogènes. La simplicité au sens du critère 1 est donc atteinte. Dans les Chapitres 2 et 3, nous nous intéresserons à la simplicité des paramétrages au sens du critère 2, tout en essayant de faire « pour le mieux » au sens du critère 3 (on ne sait rien dire à propos de l'optimalité de la hauteur des coefficients).

On s'intéresse ici à l'autre cas : l'intersection est une quartique lisse, de genre 1, et n'est donc pas paramétrable par des fonctions rationnelles. L'Équation ( $\Omega$ ) est irréductible et le polynôme caractéristique a quatre racines simples (Proposition 1.3). En termes de surfaces réglées, le faisceau contient toujours une infinité de quadriques d'inertie (2, 2) – voir ci-dessous – et au mieux quatre quadriques d'inertie (2, 1). Comme les racines d'un polynôme générique de degré 4 n'ont aucune raison d'être rationnelles (une conséquence du théorème d'irréductibilité de Hilbert), les quadriques d'inertie (2, 1), attachées à ces racines, ont des coefficients trop compliqués pour être utilisés. On s'intéresse donc dans ce qui suit aux quadriques d'inertie (2, 2) et on montre comment utiliser le fait qu'il y en a une infinité pour optimiser la « complexité algébrique » des paramétrages (critère 2). On travaille également à minimiser la « complexité arithmétique » (critère 3).

## 1.3 Le cas des quartiques lisses

Plaçons nous dans le cas où l'intersection est générique, c.-à-d. constituée d'une quartique lisse sur  $\mathbb{C}$ . Concrètement, pour détecter que nous sommes bien dans ce cas, il suffit de montrer que le pgcd des dérivées partielles en  $\lambda$  et  $\mu$  du polynôme caractéristique vaut 1.

### 1.3.1 Morphologies

Sur les réels, il y a plusieurs types de quartiques lisses, comme le montre le théorème suivant. Rappelons qu'un ensemble de points  $L$  de  $\mathbb{P}^3$  est dit *affinement fini* s'il existe un plan projectif  $P$  tel que  $P \cap L = \emptyset$  ;  $L$  est dit *affinement infini* autrement.

**Théorème 1.4** ([TWW02]). Soient  $Q_S$  et  $Q_T$  deux quadriques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  s'intersectant sur  $\mathbb{C}$  en une quartique lisse  $C$ . Sur  $\mathbb{R}$ ,  $C$  peut avoir plusieurs morphologies différentes, suivant le nombre de racines réelles de la forme caractéristique :

- Si  $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$  a quatre racines réelles simples, alors  $C$  a deux composantes connexes réelles affinement finies ou est vide.
- Si  $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$  a deux racines réelles et deux racines complexes, alors  $C$  a une composante connexe réelle affinement finie.
- Si  $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$  a quatre racines complexes, alors  $C$  a deux composantes connexes réelles affinement infinies.

Pour finir la classification des quartiques lisses sur les réels, on combine ce résultat avec le théorème suivant dû au mathématicien allemand Paul Finsler (1936/1937) :

**Théorème 1.5** ([Fin37]). Supposons  $n \geq 3$ . Soient  $S, T$  deux matrices symétriques réelles de taille  $n$ . Alors  $Q_S \cap Q_T = \emptyset$  si et seulement si le faisceau de matrices engendré par  $S$  et  $T$  contient une matrice d'inertie  $(n, 0)$ .

Notons que l'existence d'une quadrique d'inertie  $(n, 0)$  dans le faisceau implique que toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles.

### 1.3.2 Paramétrage des quadriques d'inertie $(2, 2)$

Dans tous les cas de quartiques lisses que nous venons d'identifier, le faisceau contient une quadrique d'inertie  $(2, 2)$ . Pour s'en convaincre, nous prouvons le lemme suivant, qui utilise la réduction d'une paire de matrices symétriques réelles par congruence réelle que nous explorerons plus en détails dans le Chapitre 2. (Ce lemme n'apparaît pas dans nos publications.)

**Lemme 1.6.** Soient  $S, T$  deux matrices symétriques réelles de taille  $2m$ . Si  $S$  ou  $T$  est d'inertie différente de  $(m, m)$ , alors  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T)$  a au moins une racine réelle.

*Démonstration.* On prouve la contraposée. Par le Théorème 2.3,  $S$  et  $T$  sont simultanément congruentes à deux matrices diagonales par blocs  $S'$  et  $T'$ . Ces blocs sont de la forme  $E_i$  pour  $S'$  et  $E_i J_i$  pour  $T'$ . Pour que  $\mathcal{D}$  n'ait pas de racine réelle, il faut que les  $J_i$  soient tous des blocs de Jordan complexes, donc nécessairement de taille paire  $2k$ . Les inerties de  $S'$  et  $T'$  étant la somme des inerties de leurs blocs respectifs, il nous suffit d'évaluer l'inertie des matrices  $E_i$  et  $E_i J_i$ .

Soit  $f_k(l)$  (resp.  $g_k(l)$ ) le polynôme caractéristique d'un bloc  $E_i^{2k}$  (resp.  $E_i^{2k} J_i^{2k}$ ) de dimension  $2k$ ,  $k \geq 1$ . Il est aisé de réaliser par induction sur  $k$  que

$$f_k(l) = \det(E_i^{2k} - lI_{2k}) = (l^2 - 1)^k.$$

En d'autres termes, comme  $f_k(l)$  est un polynôme en  $l^2$ , l'inertie de  $E_i^{2k}$  est égale à  $(k, k)$ . En sommant, on voit que l'inertie de  $S'$  est  $(m, m)$ .

Soit maintenant  $\theta = a^2 + b^2$  le carré du module du nombre complexe  $a + ib$  associé au bloc de Jordan complexe  $J_i^{2k}$ . En développant le déterminant  $g_k(l)$ , on prouve la relation de récurrence suivante :

$$g_k(l) = \det(E_i^{2k} J_i^{2k} - lI_{2k}) = (l^2 - \theta - 1)g_{k-1}(l) - \theta g_{k-2}(l), \quad k \geq 2,$$

avec

$$g_1(l) = \begin{vmatrix} b-l & a \\ a & -b-l \end{vmatrix} = l^2 - \theta, \quad g_0(l) = 1.$$

Cela signifie que  $g_k(l)$  est un polynôme en  $l^2$ , et comme  $E_i^{2k} J_i^{2k}$  a  $2k$  valeurs propres réelles ( $T$  est symétrique, donc a toutes ses valeurs propres réelles), on conclue que l'inertie de  $E_i^{2k} J_i^{2k}$  est égale à  $(k, k)$ , donc celle de  $T$  à  $(m, m)$ .  $\square$

Revenons au cas de deux quadriques  $Q_S$  et  $Q_T$  dans  $\mathbb{P}^3$  s'intersectant en une quartique lisse. Une des nombreuses conséquences du Lemme 1.6 est l'existence d'une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  dans le faisceau, c'est-à-dire d'un  $(\lambda_0, \mu_0)$  tel que  $\mathcal{D}(\lambda_0, \mu_0) > 0$ . Comme l'inertie est invariante sur un intervalle de  $(\lambda, \mu)$  sans changement de signe de  $\mathcal{D}$ , il y a en fait une infinité de quadriques de ce type dans le faisceau et donc on peut choisir  $(\lambda_0, \mu_0)$  rationnel. Soit  $R_0 = \lambda_0 S + \mu_0 T$ .

L'idée est donc maintenant de paramétrer une quadrique  $Q_{R_0}$  d'inertie  $(2, 2)$  du faisceau à coefficients rationnels et de plonger le paramétrage dans une des quadriques de départ, pour former l'Équation  $(\Omega)$ . Par une transformation de Gauss à coefficients rationnels, on amène cette quadrique sous la forme

$$Q_{R'_0} : ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0, \quad a, b, c, d > 0 \text{ dans } \mathbb{Q}.$$

On introduit le paramétrage suivant de cette quadrique réduite, qui est linéaire en chacun de ses paramètres :

$$\mathbf{X} = \left[ \frac{ut + avs}{a}, \frac{us - bvt}{b}, \frac{ut - avs}{\sqrt{ac}}, \frac{us + bvt}{\sqrt{bd}} \right], \quad (u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}). \quad (1.1)$$

On montre que ce paramétrage est propre et induit une bijection entre la quadrique et son espace de paramètres. On peut donc paramétrer une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  à coefficients rationnels avec au plus deux racines carrées.

Avec le résultat suivant, on montre en fait que, pour descendre à une seule racine carrée, il faut disposer d'un point rationnel sur la surface. Ce point n'existe pas toujours, et, pour la classe des paramétrages doublement linéaires, il existe des cas où on ne peut pas faire moins que deux racines carrés.

**Proposition 1.7.** *Une quadrique projective  $Q$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$  ( $a, b, c, d > 0$ ) admet un paramétrage rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$  si et seulement si elle contient un point rationnel. Connaissant un tel point, on peut calculer une congruence réelle à coefficients rationnels envoyant  $Q$  sur la quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 - abcdw^2 = 0$  pour laquelle le paramétrage de l'Équation 1.1 est rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ .*

*À l'inverse, il existe des quadriques d'inertie  $(2, 2)$  sans point rationnel et donc sans paramétrage rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ , par exemple la quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 11w^2 = 0$ .*

Ce résultat nous amène à la réflexion suivante. Si on part d'une quadrique  $Q_{R_0}$  comme nous l'avons indiqué, on se retrouvera dans certains cas avec un paramétrage de la quartique contenant deux racines carrées. Profitant de l'infinité de quadriques d'inertie  $(2, 2)$  dans le faisceau, on peut procéder autrement. On trouve un point rationnel « simple »  $\mathbf{p}$  (il en existe toujours) par lequel passe une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  du faisceau. Cette quadrique  $Q_R$ ,  $R = \lambda_1 S + \mu_1 T$ , est telle que  $(\lambda_1, \mu_1)$  est solution de

$$\mathbf{p}^T (\lambda_1 S + \mu_1 T) \mathbf{p} = 0.$$

Dès lors, par la Proposition 1.7,  $Q_R$  admet un paramétrage  $\mathbf{X}_R$  avec (au plus) une seule racine carrée.

On peut se demander s'il est possible de se débarrasser d'un seul coup des deux racines carrées du paramétrage. Nous verrons que la réponse à cette question est non-triviale (Section 1.7).

### 1.3.3 Algorithme générique

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour mettre en place l'algorithme de paramétrage des quartiques lisses. Suivant la Section 1.2, on suppose ici que le polynôme caractéristique a quatre racines (possiblement complexes) distinctes.

Compte-tenu de la section précédente, il nous faut un contrôle sur les intervalles de  $(\lambda, \mu)$  tels que  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) > 0$ . Pour cela, nous isolons les zéros réels du polynôme caractéristique, en utilisant un algorithme dit d'Uspensky [RZ04] basé sur la règle des signes de Descartes [BPR03]. Si  $\mathcal{D}$  a 0 ou 2 racines réelles, on passe à l'étape suivante. Si  $\mathcal{D}$  a 4 racines réelles, il y a deux intervalles de valeurs de  $(\lambda, \mu)$  tels que  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) > 0$ . On choisit une valeur test dans chacun de ces intervalles. Si la matrice du faisceau associée est d'inertie  $(4, 0)$ , l'intersection est vide (Théorème 1.5) et on s'arrête là.

Soit  $(\lambda_0, \mu_0)$  tel que  $\mathcal{D}(\lambda_0, \mu_0) > 0$ . On construit un paramétrage de  $Q_{R_0}$ ,  $R_0 = \lambda_0 S + \mu_0 T$ . Inutile de prendre ici un soin particulier, le seul intérêt de ce paramétrage est de pouvoir générer un point de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  « au-dessus » de la zone où  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) > 0$ . Soit donc  $\mathbf{p}_0$  un point sur  $Q_{R_0}$ . Ce point n'a aucune raison d'avoir des coordonnées rationnelles. Calculons une approximation simple  $\mathbf{p}$  à coordonnées rationnelles de  $\mathbf{p}_0$ , en prenant soin que  $\mathbf{p}$  soit toujours au-dessus d'un intervalle tel que  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) > 0$  (on est garanti de rester dans cette zone si on ne s'éloigne pas trop de  $\mathbf{p}_0$ ). On a alors trouvé un point rationnel  $\mathbf{p}$  par lequel passe une quadrique  $Q_R$  d'inertie  $(2, 2)$ . D'après les résultats de la section précédente (en particulier la Proposition 1.7), il existe un paramétrage  $\mathbf{X}_R$  de  $Q_R$  contenant une seule racine carrée. On montre dans la Section 1.4 comment calculer efficacement  $\mathbf{X}_R$  de façon à minimiser la taille des coefficients qui apparaissent.

Supposons que  $Q_S \neq Q_R$ . On plonge  $\mathbf{X}_R = \mathbf{X}_R((u, v), (s, t))$  dans  $Q_S$ , et on résout l'Équation  $(\Omega)$  :

$$\Omega : \mathbf{X}_R^T S \mathbf{X}_R = a(u, v) s^2 + b(u, v) st + c(u, v) t^2 = 0,$$

où  $a, b, c$  sont des polynômes quadratiques homogènes en  $(u, v)$ . Soit  $\Delta(u, v) = b(u, v)^2 - 4a(u, v)c(u, v)$ . On exprime (par exemple)  $\tau = (s, t)$  en fonction de  $\xi = (u, v)$ , et on obtient le paramétrage de la quartique

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_R(\xi, \tau(\xi)) = \mathbf{X}_1(\xi) \pm \mathbf{X}_2(\xi) \sqrt{\Delta(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad \Delta(\xi) \geq 0.$$

$\Delta$  et les polynômes de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  sont dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$ , où  $\delta = \det R$ .  $\Delta$  est de degré 4, les polynômes de  $\mathbf{X}_1$  sont de degré 3 et ceux de  $\mathbf{X}_2$  sont de degré 1.

On donne des exemples de calcul dans la Section 1.8.

## 1.4 Paramétrage d'une quadrique d'inertie (2, 2) passant par un point rationnel

Je m'intéresse ici au paramétrage d'une quadrique  $Q_R$  d'inertie (2, 2) passant par un point rationnel  $\mathbf{p}$ . Le paramétrage fait apparaître des polynômes multivariés homogènes en les coefficients de  $R$  d'une part et en les coordonnées de  $\mathbf{p}$  d'autre part. Je parle dans ce qui suit de bidegré pour mesurer cette double dépendance<sup>2</sup>.

Le théorème suivant établit un résultat sur le bidegré des coefficients du paramétrage. Sa preuve donne également un algorithme de construction.

**Théorème 1.8.** *Soit  $R$  une matrice symétrique réelle  $4 \times 4$  d'inertie (2, 2), à coefficients entiers. Soit  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  un point sur  $Q_R$  à coordonnées entières. Il existe un paramétrage propre  $\mathbf{X}_R$  de  $Q_R$ , linéaire en tous ses paramètres, qui s'écrit sous la forme*

$$\mathbf{X}_R((u, v), (s, t)) = [M_1 + \sqrt{\delta}M_2] \begin{pmatrix} ut \\ vs \\ us \\ vt \end{pmatrix}, \quad (u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}),$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des matrices réelles  $4 \times 4$  à coefficients entiers,  $M_1$  est de bidegré (4, 3),  $M_2$  est de bidegré (2, 3) et  $\delta$  est de bidegré (4, 0).

*Démonstration.* Soit  $P$  la matrice de transformation projective envoyant le point de coordonnées (0, 0, 0, 1) sur  $\mathbf{p}$ , complétée par trois points canoniques  $\mathbf{t}_i, i = 0, 1, 2$  de sorte que  $\mathbf{t}_2$  ne soit pas sur le plan tangent à  $Q_R$  en  $\mathbf{p}$  et que  $\det P \neq 0$ .

Soit  $R' = P^T R P$ . Écrivons

$$Q_{R'} = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4xz + 2a_5yz + a_6z^2 + 2a_7xw + 2a_8yw + 2a_9zw. \quad (1.2)$$

Par hypothèse,  $a_9 = \mathbf{t}_2^T R \mathbf{p} \neq 0$ . Il n'est guère difficile de réaliser que  $a_1, \dots, a_6$  sont de bidegré (1, 0) et  $a_7, \dots, a_9$  sont de bidegré (1, 1). Réécrivons (1.2) de la manière suivante :

$$Q_{R'} = \frac{1}{a_9^2} [(a_7x + a_8y + a_9z)(k_1x + k_2y + a_6a_9z + 2a_9^2w) + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2], \quad (1.3)$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= 2a_4a_9 - a_6a_7, & k_2 &= 2a_5a_9 - a_6a_8, \\ \alpha &= a_1a_9^2 + a_6a_7^2 - 2a_4a_7a_9, & \beta &= a_2a_9^2 + a_6a_7a_8 - a_4a_8a_9 - a_5a_7a_9, \\ & & \gamma &= a_3a_9^2 + a_6a_8^2 - 2a_5a_8a_9. \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont de bidegré (3, 2).

---

<sup>2</sup>Par abus de langage, on dira qu'un polynôme  $p_1 + \sqrt{p_3}p_2$ , où  $p_1, p_2, p_3$  sont à coefficients entiers, est de bidegré  $(k_1, k_2)$  lorsqu'à la fois 1. le bidegré de  $p_1$  est  $(k_1, k_2)$  et 2. la somme du bidegré de  $p_2$  et de la moitié du bidegré de  $p_3$  est égale à  $(k_1, k_2)$ . Par extension, on parlera du bidegré d'une matrice de polynômes ayant tous le même bidegré comme étant précisément ce bidegré, etc.

Paramétrons maintenant  $Q_{R'}$  dans sa forme de l'Équation (1.3). Pour cela, soit  $M'$  la matrice dont l'adjoint est

$$M'^* = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & a_6 a_9 & 2a_9^2 \\ a_7 & a_8 & a_9 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons  $M'$  :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a_9^3 & 2a_9^3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2a_9^3\alpha \\ 0 & -2a_9^2\alpha & 2a_7a_9^2 & 2a_9^3\tau_1 \\ -\alpha a_9 & a_6a_9\alpha & 2a_9\kappa & 2a_9^3\tau_2 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \tau_1 &= a_5a_7^2 + a_1a_8a_9 - a_2a_7a_9 - a_4a_7a_8, \\ \tau_2 &= a_8a_4^2 + a_1a_5a_9 + a_2a_6a_7 - a_1a_6a_8 - a_2a_4a_9 - a_4a_5a_7, \quad \kappa = a_4a_9 - a_6a_7. \end{aligned}$$

$\tau_1$  est de bidegré (3, 2),  $\tau_2$  de bidegré (3, 1) et  $\kappa$  de bidegré (2, 1). Simplifions les colonnes de  $M'$ , en faisant en sorte qu'au final les coefficients de la matrice de paramétrage soient tous du même degré. On garde pour  $M'$  la matrice suivante :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_9^2 & a_9\beta \\ 0 & 0 & 0 & -a_9\alpha \\ 0 & 2a_9\alpha & a_7a_9 & a_9\tau_1 \\ 1 & -a_6\alpha & \kappa & a_9\tau_2 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathbf{X}' = [X, Y, Z, T]^T$ . On a :

$$\mathbf{X}'^T M'^T R' M' \mathbf{X}' = a_9^2 \alpha (4XY + Z^2 - \det R' W^2). \quad (1.4)$$

Notons qu'il y a ici un problème quand  $\alpha = 0$ . Comme  $\beta^2 - \alpha\gamma = a_9^2 \det R'$ , on a nécessairement  $\beta \neq 0$  (et, accessoirement,  $\delta$  est un carré) quand  $\alpha = 0$ . On peut donc dans ce cas remplacer la troisième ligne de  $M'^*$  par  $(2\beta \ \gamma \ 0 \ 0)$  et on obtient une matrice dont le déterminant est non-nul. Nous laissons ici ce cas de côté.

Supposons donc  $\alpha \neq 0$ . Soit  $\theta = \det P$ . Par la propriété d'invariance du déterminant, on a :

$$\det R' = (\det P)^2 \det R = \theta^2 \delta.$$

On détermine aisément un paramétrage propre de la quadrique obtenue en (1.4) :

$$\mathbf{X}' = \left[ \theta^2 \delta \, ut, \, vs, \, \theta \sqrt{\delta} (us - vt), \, us + vt \right], \quad (u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

$\theta$  est de bidegré (0, 1) et  $\delta$  de bidegré (4, 0).

On peut réécrire  $M' \mathbf{X}'$  sous la forme  $M[ut, vs, us, vt]$ , où

$$M = M_1 + \sqrt{\delta} M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_9\beta & a_9\beta \\ 0 & 0 & -a_9\alpha & -a_9\alpha \\ 0 & 2a_9\alpha & a_9\tau_1 & a_9\tau_1 \\ \theta^2\delta & -a_6\alpha & a_9\tau_2 & a_9\tau_2 \end{pmatrix} + \theta \sqrt{\delta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_9^2 & a_9^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_7a_9 & -a_7a_9 \\ 0 & 0 & \kappa & -\kappa \end{pmatrix}.$$

Il reste à multiplier à gauche par la matrice de transformation initiale  $P$ . Les bidegrés des coefficients sont tels qu'annoncés.  $\square$

On note d'ores et déjà que la « complexité » des coefficients du paramétrage est meilleure que ce que nous avons jusque là, à savoir un bidegré (5, 4) (cf. [8]). Cela va avoir un impact sur le degré des coefficients du paramétrage d'une quartique lisse, comme nous le verrons.

**Exemple 1.9.** Considérons la matrice symétrique

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule  $\delta = \det R = 18$ , donc  $R$  est d'inertie (2, 2) ou est vide de point réel. Soit le point  $\mathbf{p} = (1, 1, 0, 0)$ . On vérifie que  $Q_R$  contient le point  $\mathbf{p}$ , donc de fait  $R$  est nécessairement d'inertie (2, 2).

On construit la matrice de transformation  $P$  en plaçant  $\mathbf{p}$  en dernière colonne, puis en complétant par exemple par  $\mathbf{t}_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{t}_1 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{t}_2 = (0, 0, 0, 1)$ . On note que  $\mathbf{t}_2^T R \mathbf{p} \neq 0$  et  $\theta = \det P = 1 \neq 0$ . On obtient  $Q_{R'}$ , où  $R' = P^T R P$ . Ses coefficients sont :

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = -1, a_4 = -1, a_5 = 0, a_6 = -1, a_7 = 0, a_8 = 4, a_9 = -1.$$

Calculons les quantités utilisées dans la preuve du Théorème 1.8 :

$$\alpha = 1, \beta = -1, \tau_1 = -4, \tau_2 = 5, \kappa = 1.$$

En calculant  $M$ , puis  $PM$ , on obtient que  $Q_R$  a pour paramétrage :

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{pmatrix} 18 & 1 & -4 & -4 \\ 18 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} ut \\ vs \\ us \\ vt \end{pmatrix}.$$

## 1.5 Paramétrage d'une quartique lisse

Dans ce qui suit, nous revenons au cas d'une quadrique d'inertie (2, 2), passant par un point rationnel, trouvée dans un faisceau de quadriques  $Q_S, Q_T$ . La dépendance, mesurée par le bidegré, est donc en  $S, T$  d'une part et le point rationnel  $\mathbf{p}$  d'autre part.

**Théorème 1.10.** *Le paramétrage*

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}_1(u, v) \pm \mathbf{X}_2(u, v) \sqrt{\Delta(u, v)}, \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad \Delta(u, v) \geq 0,$$

de la quartique lisse intersection de  $Q_S$  et  $Q_T$  est tel que  $\mathbf{X}_1$  est de bidegré (25, 33),  $\mathbf{X}_2$  de bidegré (8, 11) et  $\Delta$  de bidegré (34, 44).

*Démonstration.* Pour évaluer la dépendance en  $S$  et  $T$ , on note que la matrice  $R$  est la matrice  $\lambda_0 S + \mu_0 T$  du faisceau qui satisfait à l'équation

$$\mathbf{p}^T (\lambda_0 S + \mu_0 T) \mathbf{p} = 0.$$

Donc  $(\lambda_0, \mu_0) = (-\mathbf{p}^T T \mathbf{p}, \mathbf{p}^T S \mathbf{p})$ . Par conséquent, la matrice  $R = \lambda_0 S + \mu_0 T$  est de bidegré  $(2, 2)$ . Par le Théorème 1.8, le paramétrage  $\mathbf{X}_R$  est de degré  $4 \times 2 = 8$  en  $S, T$  et  $4 \times 2 + 3 = 11$  en  $\mathbf{p}$ .

Lorsque l'on substitue le paramétrage de  $Q_R$  dans l'équation d'une des deux quadriques initiales (disons  $Q_S$ , à supposer que  $Q_S \neq Q_R$ ), on obtient une équation biquadratique en les variables  $(u, v)$  et  $(s, t)$  qui s'écrit

$$\Omega : a s^2 + b s t + c t^2 = 0,$$

où  $a, b$  et  $c$  sont homogènes en  $(u, v)$ . Il s'ensuit que  $a, b, c$  sont de degré  $2 \times 8 + 1 = 17$  en  $S, T$  et  $2 \times 11 = 22$  en  $\mathbf{p}$ .

Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Lorsque l'on substitue la solution  $(s = 2c, t = -b \pm \sqrt{\Delta})$  dans le paramétrage  $\mathbf{X}_R$ , on obtient un paramétrage de la quartique lisse où chaque coordonnée est de la forme

$$\alpha(u, v) \pm \beta(u, v) \sqrt{\Delta}.$$

Le degré de  $\alpha$  est  $8 + 17 = 25$  en  $S, T$  et  $11 + 22 = 33$  en  $\mathbf{p}$ . Le degré de  $\beta$  est 8 en  $S, T$  et 11 en  $\mathbf{p}$ . Enfin, le degré de  $\Delta$  est  $2 \times 17 = 34$  en  $S, T$  et  $2 \times 22 = 44$  en  $\mathbf{p}$ .  $\square$

Le point rationnel  $\mathbf{p}$  dont il est question ici n'est pas indépendant des quadriques initiales. Pour mieux comprendre cette dépendance, il faudrait pouvoir relier les données  $S, T$  à la taille de la « fenêtre » de points rationnels « au-dessus » des intervalles où  $\det(\lambda S + \mu T) > 0$ , elle-même fonction de la longueur de ces intervalles, c.-à-d. la distance entre les zéros de la forme caractéristique. Nous n'avons pas trouvé de moyen simple d'approcher cette dépendance. En pratique, cela n'est guère important puisque nous avons observé que le point  $\mathbf{p}$  calculé a ses coordonnées entières entre  $-2$  et  $2$  dans la majorité des cas. La « complexité » du paramétrage de la quartique lisse est donc pour l'essentiel gouvernée par sa dépendance à  $S$  et  $T$ . Dans ce qui suit, nous négligeons donc la dépendance à  $\mathbf{p}$ .

## 1.6 Comportement en pratique

On souhaite maintenant avoir une idée du nombre de bits nécessaires pour la représentation en machine du paramétrage d'une quartique lisse calculé par l'algorithme que nous avons décrit. Pour cela, nous introduisons la notion de « hauteur » d'une quantité polynomiale  $f$  fonction des coefficients de  $S$  et  $T$ . On se reportera à la définition précise, assez longue, donnée dans [8] (Chapitre 11). Contentons-nous ici de définir informellement la hauteur de  $f$  comme étant le logarithme de  $f$  à base le maximum (en valeur absolue) des coefficients de  $S$  et  $T$ . Il n'est guère difficile de se convaincre qu'asymptotiquement, quand le maximum des coefficients de  $S$  et  $T$  tend vers l'infini, la hauteur de  $f$  tend vers son degré.

Par extension, la hauteur d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de  $S, T$  est le maximum des hauteurs de ses coefficients. La hauteur d'un polynôme dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes en les coefficients de  $S, T$  est le maximum des hauteurs des coefficients.

L'intersection de deux quadriques à coefficients choisis aléatoirement est une quartique lisse, sur  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , avec probabilité 1. Sur les réels, l'intersection est soit une quartique lisse d'une des trois morphologies identifiées ou l'ensemble vide. Pour faire des mesures de hauteur, il suffit donc de générer des quadriques aléatoires avec coefficients dans un certain intervalle

$[-10^s, 10^s]$  et de filtrer les intersections qui sont vides. On réalise deux types de mesures : des mesures brutes et des mesures avec « optimisation », où on divise les coefficients (d'une matrice, d'un polynôme) par leur pgcd. Pour chaque valeur de  $s$ , on prend la moyenne de la hauteur pour plusieurs échantillons. Puis on lisse la courbe obtenue en interpolant entre les valeurs calculées.

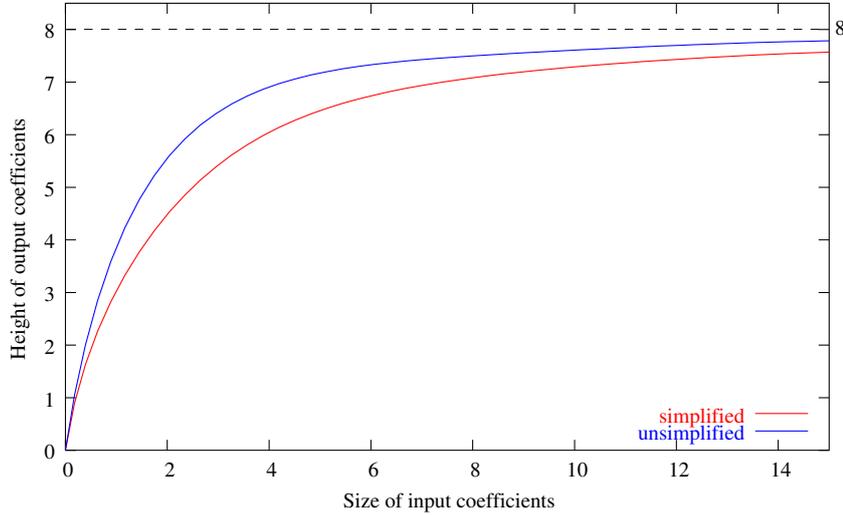


FIG. 1.1 – Hauteur du paramétrage d'une quadrique d'inertie (2,2) du faisceau passant par un point rationnel, pour différentes valeurs de  $s$ .

Le premier graphisme (Fig. 1.1) montre la hauteur de la matrice de paramétrage de la quadrique intermédiaire  $Q_R$  d'inertie (2,2). Ici, la hauteur converge vers la valeur prédite de 8 (cf. la section précédente), que ce soit pour les mesures brutes, en bleu, ou les mesures avec simplification des coefficients, en rouge. Il n'en va pas de même pour les coefficients de l'équation biquadratique (Fig. 1.2). En effet, si dans ce cas les hauteurs brutes tendent vers la valeur anticipée de 17, les hauteurs simplifiées semblent converger vers une valeur de 16. Pourquoi cette différence ? Offrons ici une tentative d'explication. Si  $\mathbf{X}_R$  est le paramétrage de  $Q_R$ , on a l'identité :

$$\mathbf{X}_R^T R \mathbf{X}_R = 0 = \lambda_0 \mathbf{X}_R^T S \mathbf{X}_R + \mu_0 \mathbf{X}_R^T T \mathbf{X}_R.$$

Les valeurs  $(\lambda_0, \mu_0) = (-\mathbf{p}^T T \mathbf{p}, \mathbf{p}^T S \mathbf{p})$  peuvent raisonnablement être considérées comme étant aléatoires quand les matrices  $S$  et  $T$  le sont. Quand  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  sont premiers entre eux,  $\mu_0$  divise  $\mathbf{X}_R^T S \mathbf{X}_R$ . Comme  $\mu_0$  est de hauteur 1 en  $S, T$ , les coefficients de l'équation biquadratique sont donc de hauteur  $17 - 1 = 16$  en  $S, T$ . Il reste à noter que deux entiers choisis aléatoirement entre 1 et  $N$  ont une certaine probabilité  $P_N$  d'être premiers entre eux, et  $P_N$  tend vers  $\frac{6}{\pi^2} \approx 0.60792$  quand  $N$  tend vers l'infini.

Si on regarde les hauteurs du paramétrage de la quartique lisse, on observe le même phénomène (Fig. 1.3). Les valeurs 25 (pour  $\mathbf{X}_1$ ), 8 (pour  $\mathbf{X}_2$ ) et 34 (pour  $\Delta$ ), observées sur les données brutes, sont bien celles du Théorème 1.10. Par contre, ces valeurs chutent lorsque l'on simplifie les coefficients des matrices et polynômes par leur pgcd.

Au passage, on a ici la confirmation que la « complexité » du paramétrage de la quartique lisse est bel et bien gouvernée par sa dépendance à  $S, T$  et non celle au point rationnel  $\mathbf{p}$ .

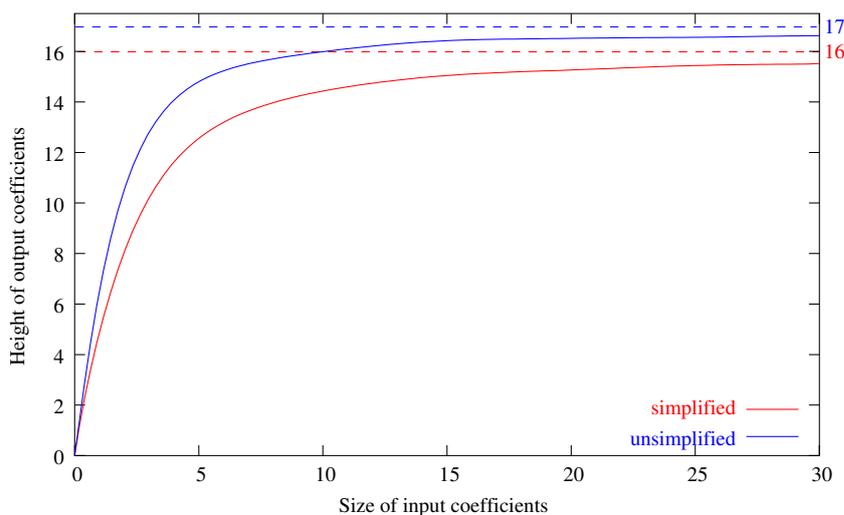


FIG. 1.2 – Hauteur des coefficients de l'équation biquadratique.

## 1.7 Test d'optimalité

Dans notre algorithme de paramétrage des quartiques lisses, il est assez clair que le choix du point rationnel  $\mathbf{p}$ , et donc de la quadrique  $Q_R$  du faisceau qui passe par ce point, influence directement l'extension sur laquelle sont définis les coefficients du paramétrage. Si le déterminant de  $R$  n'est pas un carré, ces coefficients contiennent une racine carrée et, dans l'idéal, on aimerait savoir si une telle racine carrée est vraiment nécessaire ou non. Le critère est donné par la proposition suivante :

**Proposition 1.11.** *Lorsque l'intersection est générique, elle peut être paramétrée dans  $\mathbb{Q}[\xi, \sqrt{\Delta}]$  with  $\Delta \in \mathbb{Q}[\xi]$  si et seulement si il existe une quadrique du faisceau à coefficients rationnels et dont le discriminant est un carré dans  $\mathbb{Q}$ .*

On peut traduire cette proposition de la manière suivante. Considérons l'équation :

$$\sigma^2 = \det((\mathbf{x}^T T \mathbf{x}) S - (\mathbf{x}^T S \mathbf{x}) T), \quad \mathbf{x} = (x, y, z, c)^T,$$

où  $c \in \mathbb{Q}$  est une constante telle que le plan  $w = c$  ne contienne le sommet d'aucun cône du faisceau. L'existence d'une solution rationnelle à cette équation (de degré 8) est une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un paramétrage de la quartique lisse avec coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

Malheureusement, on sait qu'il n'existe pas d'algorithme général pour décider de l'existence d'une solution à une équation diophantienne (dixième problème de Hilbert). Le problème est connu comme étant décidable pour les courbes de genre zéro et, sous certaines conditions, pour les courbes de genre 1, mais peu de résultats sont connus pour des variétés de dimension 2 ou plus [Poo01].

Dans notre cas, le mieux que l'on puisse faire est de montrer, manuellement et dans quelques cas bien précis, que la courbe hyperelliptique d'équation

$$\sigma^2 = \det(S + \lambda T) \tag{1.5}$$

n'a pas de solution rationnelle, par des réductions modulo un petit entier  $m$  (principe local-global, dit de Hasse). Cela implique nécessairement qu'une racine carrée est nécessaire dans les coefficients du paramétrage de la quartique.

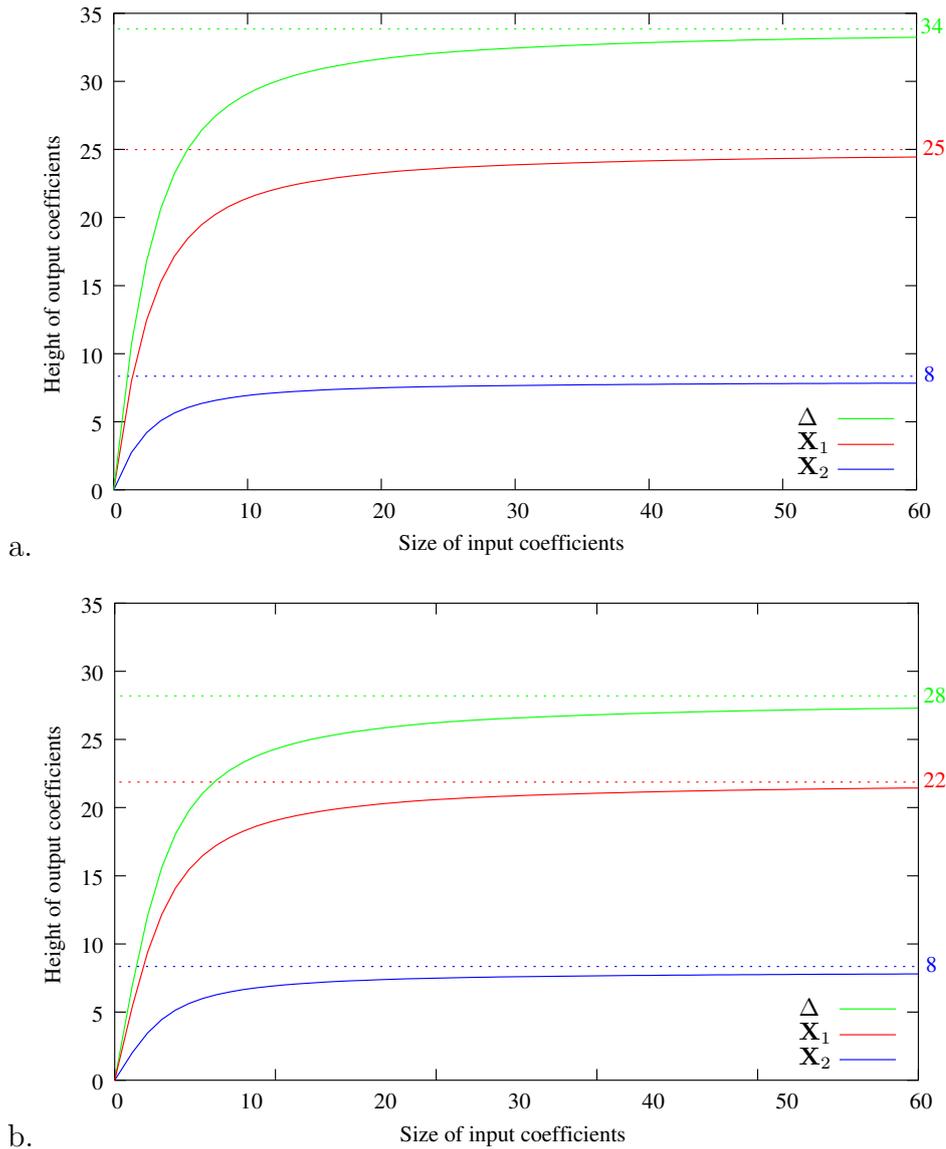


FIG. 1.3 – Hauteur du paramétrage de la quartique lisse. a. Mesures brutes. b. Mesures avec simplifications par le pgcd des coefficients.

## 1.8 Exemples

Nous donnons maintenant deux exemples de calcul de paramétrage dans le cas où l'intersection est lisse, en illustrant plusieurs cas possibles.

Pour notre premier exemple (Fig. 1.4), le pgcd des dérivées partielles de la forme caractéristique donne 1, indiquant que l'intersection (complexe) est une quartique lisse. Cette forme a deux racines réelles, donc la quartique est réelle et est constituée d'une unique composante affinement finie (Théorème 1.4). Ici, les deux quadriques initiales sont de déterminant négatif. On construit un point rationnel au-dessus de l'intervalle de  $(\lambda, \mu)$  où le déterminant des quadriques du faisceau est positif. Puis on construit la quadrique  $Q_R$  d'inertie  $(2, 2)$  passant par ce point. Par chance, son déterminant est un carré. Par la Proposition 1.7 et le Théorème

---

```

>> quadric 1:  $x^2 - x*y - y^2 - y*w + z^2 + w^2$ 
>> quadric 2:  $2*x^2 - x*y + y^2 - y*z + y*w + z^2$ 

>> launching intersection
>> characteristic polynomial:  $-6*m^4 - 12*m^3 + 3*m^2 + 6*m - 2$ 
>> gcd of derivatives of characteristic polynomial: 1
>> complex intersection: smooth quartic
>> real intersection: smooth quartic, one real affinely finite component
>> number of real roots: 2
>> intervals: ]-2, -1[, ]-1, 0[
>> picked test point 1 at [ -1 1 ], sign > 0 -- inertia [ 2 2 ] found
>> quadric (2,2) found:  $x^2 + 2*y^2 - y*z + 2*y*w - w^2$ 
>> decomposition of its determinant [a,b] (det =  $a^2*b$ ): [ 2 1 ]
>> a point on the quadric: [ 0 0 1 0 ]
>> param of quadric (2,2):  $[-s*u + t*v, -2*s*v, (2*s + 2*t)*u + (-4*s + 2*t)*v, s*u + t*v]$ 
>> status of smooth quartic param: optimal
>> end of intersection

>> parameterization of smooth quartic, branch 1:
[- 4*u^3 + u^2*v + 6*u*v^2 + 2*v^3 - u*sqrt(Delta), - 6*u^3 - 8*u^2*v - 4*u*v^2, - 4*u^3
+ 2*u^2*v + (2*u + 2*v)*sqrt(Delta), 4*u^3 + 5*u^2*v + 2*u*v^2 + 2*v^3 + u*sqrt(Delta)]
>> parameterization of smooth quartic, branch 2:
[- 4*u^3 + u^2*v + 6*u*v^2 + 2*v^3 + u*sqrt(Delta), - 6*u^3 - 8*u^2*v - 4*u*v^2, - 4*u^3
+ 2*u^2*v + (-2*u - 2*v)*sqrt(Delta), 4*u^3 + 5*u^2*v + 2*u*v^2 + 2*v^3 - u*sqrt(Delta)]
Delta = - 2*u^4 + 10*u^3*v - 9*u^2*v^2 - 8*u*v^3 - 2*v^4

>> time spent: 10 ms

```

---

FIG. 1.4 – Trace de l'exécution pour l'exemple 1.

rème 1.8,  $Q_R$  peut être paramétrée sans racine carrée. Le reste du calcul est comme indiqué plus haut, après résolution de l'équation biquadratique.

Dans notre deuxième exemple, on arrive comme précédemment à la conclusion que l'intersection est une quartique lisse en complexe. Mais cette fois, la forme caractéristique n'a pas de zéro réel, donc la quartique est composée de deux composantes réelles affinement infinies (Théorème 1.4). Ici, la quadrique  $Q_R$  passant par le point rationnel  $\mathbf{p}$  choisi n'a pas pour discriminant un carré, donc les coefficients du paramétrage de la quartique contiennent une racine carrée. Dans l'incapacité de déterminer si cette racine carrée est nécessaire ou non, notre algorithme conclue à la quasi-optimalité du paramétrage. Il s'avère que dans ce cas la racine est effectivement inévitable, ce dont on peut se convaincre en effectuant une réduction modulo 4 de la forme caractéristique et en concluant à l'absence de solution rationnelle à l'Équation (1.5) (cf. Chapitre 8).

---

```

>> quadric 1: x^2 - 2*y^2 + 4*z*w
>> quadric 2: x*y + z^2 + 2*z*w - w^2

>> launching intersection
>> characteristic polynomial: 2*1^4 + 4*1^3*m + 5*1^2*m^2 + 2*1*m^3 + 2*m^4
>> gcd of derivatives of characteristic polynomial: 1
>> number of real roots: 0
>> complex intersection: smooth quartic
>> real intersection: smooth quartic, two real affinely infinite components
>> quadric (2,2) found: x*y + z^2 + 2*z*w - w^2
>> decomposition of its determinant [a,b] (det = a^2*b): [ 2 2 ]
>> a point on the quadric: [ 1 0 0 0 ]
>> param of quadric (2,2): [4*t*u, - 2*s*v, s*u + t*v, s*u + t*v] + sqrt(2)*[0, 0, 0,
- s*u + t*v]
>> status of smooth quartic param: near-optimal
>> end of intersection

>> parameterization of smooth quartic, branch 1:
[- 4*u*v^2 + 4*v*sqrt(Delta), - 2*u^3 - 8*u*v^2 + 2*u^3*sqrt(2), 4*v^3 - u^2*v*sqrt(2)
+ u*sqrt(Delta), - 2*u^2*v + 4*v^3 + (u^2*v + 4*v^3)*sqrt(2) + (u - u*sqrt(2))*sqrt(Delta)]
>> parameterization of smooth quartic, branch 2:
[- 4*u*v^2 - 4*v*sqrt(Delta), - 2*u^3 - 8*u*v^2 + 2*u^3*sqrt(2), 4*v^3 - u^2*v*sqrt(2)
- u*sqrt(Delta), - 2*u^2*v + 4*v^3 + (u^2*v + 4*v^3)*sqrt(2) - (u - u*sqrt(2))*sqrt(Delta)]
Delta = 2*u^4 + 10*u^2*v^2 - 4*v^4 + (- 2*u^4 - 4*v^4)*sqrt(2)

>> time spent: 10 ms

```

---

FIG. 1.5 – Trace de l'exécution pour l'exemple 2.

## Chapitre 2

# Classification et identification des faisceaux de quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

### Résumé

Une étape intermédiaire de notre algorithme de paramétrage de l'intersection réelle de deux quadriques projectives est la détermination du type de cette intersection. Nous montrons comment nous avons obtenu la première classification des intersections réelles de quadriques, qui permet d'extraire un ensemble d'éléments caractéristiques utilisés pour le calcul du type. Cette classification est obtenue en raffinant une classification bien connue sur les complexes. On indique ensuite comment traduire cette classification en un algorithme de calcul du type.

Ce chapitre résume les résultats de la publication [3], qui est reprise dans le Chapitre 9 (page 131). La fin du chapitre ébauche des résultats nouveaux où l'on cherche à raffiner la classification des faisceaux en orbites différentes et non seulement selon le type morphologique de l'intersection. Pour mieux en saisir la portée, il n'est pas inutile de se référer au Chapitre 4.

Nous avons montré dans le chapitre précédent comment calculer efficacement un paramétrage de l'intersection de quadriques lorsque cette intersection est générique. Tournons-nous maintenant vers les cas singuliers.

Nous avons choisi de diviser le traitement des cas singuliers en deux phases : une phase de détection du type réel de l'intersection, et une phase de paramétrage proprement dit. Ce découpage a un double intérêt. D'une part, il peut être intéressant pour certaines applications de calculer uniquement le type de l'intersection et il est important que cette routine soit isolée du reste de l'algorithme. D'autre part, la détection hâtive du type de l'intersection « contraint » l'arbre des possibilités, évitant au maximum les erreurs dans les phases ultérieures, et permet à l'algorithme de ne calculer qu'un ensemble d'informations minimal pour arriver au paramétrage final.

Dans ce qui suit, nous commençons par rappeler la classification des faisceaux de quadriques sur les complexes due à Segre. Nous nous appuyons sur cette classification, que nous raffinons, pour obtenir notre classification des faisceaux réels, la première de son genre. Pour chaque cas obtenu, nous extrayons un ensemble d'éléments caractéristiques – une sorte de « signature » – de ce cas (en général, type réel ou complexe des racines du polynôme caractéristique, multiplicité des racines, inertie des quadriques singulières associées). L'algorithme de calcul du type cherche alors, pour un faisceau inconnu, à en déterminer la signature.

À noter qu'une classification similaire a été présentée par Tu *et al.* [TWMW07]. Plutôt que d'inférer le type du faisceau en regardant l'inertie des quadriques associées aux racines multiples, Tu *et al.* s'intéressent à l'inertie des quadriques entre les racines du polynôme caractéristique et s'appuient sur un développement de Puiseux pour déduire des informations

aux racines (multiples). Elle ne prend toutefois pas en compte tous les cas et aucun algorithme n'est présenté.

## 2.1 Comment classifier les faisceaux de quadriques ?

Nous rappelons ici les grandes lignes de la classification des faisceaux de quadriques sur les complexes initiée, à l'âge de 20 ans, par le mathématicien italien Corrado Segre [Seg83]. On trouvera des présentations plus accessibles que l'original dans [Bro06, HP53].

### 2.1.1 Sur les complexes : la caractéristique de Segre

On se donne ici un faisceau de quadriques de  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  sous sa forme matricielle  $R(\lambda, \mu) = \lambda S + \mu T$ , où les matrices sont de taille  $n$ , en supposant que  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det R(\lambda, \mu)$  n'est pas identiquement nul. En général,  $\mathcal{D}$  a  $n$  zéros complexes auxquels correspondent  $n$  cônes projectifs complexes. L'affaire se corse lorsqu'un zéro  $(\lambda_0, \mu_0)$  de  $\mathcal{D}$  apparaît avec multiplicité supérieure à 1. Il se peut également que  $(\lambda_0, \mu_0)$  annule non seulement  $\mathcal{D}$  mais aussi tous ses sous-déterminants d'ordre  $n - t + 1$ ,  $t > 0$ . Cela implique que la quadrique singulière associée a pour ensemble singulier un espace linéaire de dimension  $t - 1$ .

Soient  $(\lambda_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , les zéros de  $\mathcal{D}$  et  $m_i$  leur multiplicité respective. Notons par  $m_i^j$  la plus petite multiplicité avec laquelle le zéro  $(\lambda_i, \mu_i)$  apparaît dans les sous-déterminants d'ordre  $n - j$  de  $\mathcal{D}$ . Soit  $t_i \geq 1$  le plus petit entier tel que  $m_i^{t_i} = 0$ . On voit que  $m_i^j \geq m_i^{j+1}$  pour tout  $j$ . Définissons une suite d'indices  $e_i^j$  comme suit :

$$e_i^j = m_i^{j-1} - m_i^j, \quad j = 1, \dots, t_i,$$

avec  $m_i^0 = m_i$ . La multiplicité  $m_i$  de  $(\lambda_i, \mu_i)$  est la somme  $e_i^1 + \dots + e_i^{t_i}$ . On a par conséquent :

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_i - \mu\lambda_i)^{m_i} \mathcal{D}^*(\lambda, \mu) = (\lambda\mu_i - \mu\lambda_i)^{e_i^1} \dots (\lambda\mu_i - \mu\lambda_i)^{e_i^{t_i}} \mathcal{D}^*(\lambda, \mu),$$

où  $\mathcal{D}^*(\lambda_i, \mu_i) \neq 0$ .

L'étude des facteurs  $(\lambda\mu_i - \mu\lambda_i)$  et de leurs exposants  $e_i^j$  (« nombres caractéristiques ») remonte à Karl Weierstrass [Wei68]. Ultérieurement, Segre a introduit la notation suivante pour « encoder » les différents nombres caractéristiques associés aux quadriques singulières d'un faisceau :

$$\sigma_n = [(e_1^1, \dots, e_1^{t_1}), (e_2^1, \dots, e_2^{t_2}), \dots, (e_p^1, \dots, e_p^{t_p})],$$

avec la convention que les parenthèses autour des nombres caractéristiques d'un zéro  $(\lambda_i, \mu_i)$  sont oubliées lorsque  $t_i = 1$ . Cette notation est connue comme la caractéristique de Segre ou le symbole de Segre du faisceau.

Le théorème suivant, essentiellement dû à Weierstrass, montre qu'un faisceau de quadriques et l'intersection qu'il définit sont uniquement et entièrement caractérisés, sur les complexes, par leur symbole de Segre.

**Théorème 2.1.** *Soient deux faisceaux de quadriques  $R(\lambda_1, \mu_1) = \lambda_1 S_1 + \mu_1 T_1$  et  $R(\lambda_2, \mu_2) = \lambda_2 S_2 + \mu_2 T_2$  dans  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ . Supposons que  $\det R(\lambda_1, \mu_1)$  et  $\det R(\lambda_2, \mu_2)$  ne sont pas identiquement nuls et notons par  $(\lambda_{1,i}, \mu_{1,i})$  et  $(\lambda_{2,i}, \mu_{2,i})$  leurs racines respectives. Alors les deux faisceaux sont projectivement équivalents si et seulement si ils ont le même symbole de Segre et s'il existe un automorphisme de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  envoyant  $(\lambda_{1,i}, \mu_{1,i})$  sur  $(\lambda_{2,i}, \mu_{2,i})$ .*

Avec la définition ci-dessus, on voit que  $(\lambda_i, \mu_i)$  est racine de tous les sous-déterminants de  $R(\lambda, \mu)$  d'ordre  $n - t_i + k, k > 0$ , mais n'est racine d'aucun sous-déterminant d'ordre  $n - t_i$ . En d'autres termes, le rang  $r_i$  de  $R(\lambda_i, \mu_i)$  est  $n - t_i$ . De plus, comme  $m_i = e_i^1 + \dots + e_i^{t_i}$ , on a les inégalités  $n - 1 \geq r_i \geq n - m_i$ . Énumérer tous les cas possibles pour les  $e_i^j$  dans les limites imposées par les contraintes induites par leur définition donne naissance à tous les types possibles d'intersection complexe et aux symboles de Segre associés.

Illustrons le propos dans le cas de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Ici, la forme caractéristique est de degré 4, donc  $p \leq 4$  et  $\sum m_i = 4$ . Commençons par le cas  $p = 4$ . Alors nécessairement  $m_i = 1, t_i = 1$  et le seul symbole possible est  $[1111]$ , qui correspond à une quartique lisse. Passons à  $p = 3$ . On a alors  $m_1 = m_2 = 1$  et  $m_3 = 2$ . Donc  $t_1 = t_2 = 1$  et  $t_3 \leq 2$ . Si  $t_3 = 1$ , alors  $e_3^1 = 2$  et on obtient le symbole  $[112]$ , soit une quartique nodale. Si  $t_3 = 2$ , alors  $e_3^1 = e_3^2 = 1$  et on a le symbole  $[11(11)]$ , qui correspond à deux coniques sécantes. Passant à  $p = 2$  puis  $p = 1$ , on termine la classification des faisceaux non singuliers, obtenant les symboles et types d'intersection suivants :

- $\sigma_4 = [13]$  : quartique cuspidale ;
- $\sigma_4 = [22]$  : cubique et droite sécante ;
- $\sigma_4 = [1(12)]$  : deux coniques tangentes ;
- $\sigma_4 = [1(111)]$  : conique double ;
- $\sigma_4 = [2(11)]$  : conique et deux droites ne se coupant pas sur la conique ;
- $\sigma_4 = [(11)(11)]$  : quatre droites, formant un quadrilatère gauche ;
- $\sigma_4 = [(13)]$  : conique et deux droites se coupant sur la conique ;
- $\sigma_4 = [(22)]$  : deux droites simples et une droite double ;
- $\sigma_4 = [(112)]$  : deux droites doubles ;
- $\sigma_4 = [(1111)]$  : toute quadrique non-triviale du faisceau.

On note incidemment que le couple  $(m_i, r_i)$  est suffisant pour caractériser le faisceau sauf dans le cas  $(m_i, r_i) = (4, 2)$ .

Nous laissons ici de côté les cas où le faisceau est dégénéré, c.-à-d.  $\mathcal{D} \equiv 0$ .

### 2.1.2 Formes canoniques

Le Théorème 2.1 peut être utilisé pour obtenir une forme canonique d'un faisceau de quadriques (cf. [HP53]). Considérons le faisceau  $R(\lambda) = \lambda S - T$  et son polynôme caractéristique  $\mathcal{D}(\lambda)$ , de racines  $\lambda_i$ , multiplicité  $m_i$ . Soit

$$[(e_1^1, \dots, e_1^{t_1}), (e_2^1, \dots, e_2^{t_2}), \dots, (e_p^1, \dots, e_p^{t_p})]$$

le symbole de Segre du faisceau. Alors il existe une transformation de  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  amenant simultanément  $S$  et  $T$  sous la forme bloc diagonales

$$\begin{aligned} S' &= \text{diag} (E_1^1, \dots, E_1^{t_1}, \dots, E_p^1, \dots, E_p^{t_p}), \\ T' &= \text{diag} (E_1^1 J_1^1, \dots, E_1^{t_1} J_1^{t_1}, \dots, E_p^1 J_p^1, \dots, E_p^{t_p} J_p^{t_p}), \end{aligned}$$

où

$$E_i^k = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

de taille  $e_i^k$ . Les  $J_i^k$  sont les habituels blocs de Jordan de la décomposition du même nom. La caractéristique de Segre d'un faisceau n'est donc rien d'autre que la séquence des tailles des blocs de Jordan associés aux zéros du polynôme caractéristique.

### 2.1.3 Sur les réels

On s'intéresse maintenant à une transformation projective réelle amenant les deux quadriques initiales sous forme canonique. L'idée, intuitivement, est la suivante. Partons de la décomposition de la section précédente.

Quand  $\lambda_i$  est réelle, les blocs de Jordan associés  $J_i^k$  sont réels. La somme des tailles des blocs correspondant à  $\lambda_i$  est  $\sum_{k=1}^{t_i} e_i^k = m_i$  et le nombre de ces blocs est  $t_i = n - r_i$ .

Quand  $\lambda_i$  est complexe, soit  $\lambda_j$  sa conjuguée. Il est clair que  $t_i = t_j$  dans la décomposition complexe et que les blocs de Jordan associés  $J_i^k$  et  $J_j^k$  ont la même taille, c.-à-d.  $e_i^k = e_j^k$ . Pour parvenir à une transformation réelle, il faut combiner ces blocs complexes conjugués pour former de nouveaux blocs, réels cette fois, de taille  $2e_i^k$ .

Formalisons maintenant cette intuition, en commençant par préciser la notion de bloc de Jordan réel ou complexe.

**Définition 2.2.** Soit  $M$  une matrice carrée de la forme

$$(\ell) \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \ell & e & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell \end{pmatrix}.$$

Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $e = 1$ ,  $M$  est appelée *bloc de Jordan réel* associé à  $\ell$ . Si

$$\ell = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0, \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$M$  est appelée *bloc de Jordan complexe* associé à  $a + ib$ .

La réduction simultanée de deux matrices symétriques par une transformation projective réelle s'écrit alors comme suit (cf. [Uhl73, Uhl76]).

**Théorème 2.3** (Forme canonique d'une paire de matrices). *Soient  $S$  et  $T$  deux matrices symétriques réelles de taille  $n$ , avec  $S$  non-singulière. Supposons que  $S^{-1}T$  a pour forme de Jordan réelle  $\text{diag}(J_1, \dots, J_r, J_{r+1}, \dots, J_m)$ , où  $J_1, \dots, J_r$  sont des blocs de Jordan réels associés aux valeurs propres réelles de  $S^{-1}T$  et  $J_{r+1}, \dots, J_m$  sont des blocs de Jordan complexes associés aux valeurs propres complexes conjuguées de  $S^{-1}T$ . Alors :*

- (a) *Le polynôme caractéristique de  $S^{-1}T$  et  $\det(\lambda S - T)$  ont les mêmes racines  $\lambda_j$  avec les mêmes multiplicités (algébriques)  $m_j$ .*

(b)  $S$  et  $T$  sont simultanément congruentes, par une transformation réelle, à

$$\text{diag}(\varepsilon_1 E_1, \dots, \varepsilon_r E_r, E_{r+1}, \dots, E_m)$$

et

$$\text{diag}(\varepsilon_1 E_1 J_1, \dots, \varepsilon_r E_r J_r, E_{r+1} J_{r+1}, \dots, E_m J_m),$$

respectivement, où  $\varepsilon_i = \pm 1$  et  $E_i$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de même taille que  $J_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Les signes  $\varepsilon_i$  sont uniques (à permutation près) pour chaque ensemble d'indices  $i$  qui sont associés à un ensemble de blocs de Jordan réels  $J_i$  identiques.

(c) La somme des tailles des blocs correspondant à une racine  $\lambda_j$  est égale à la multiplicité  $m_j$  si  $\lambda_j$  est réelle et à deux fois cette multiplicité si  $\lambda_j$  est complexe. Le nombre de ces blocs (la multiplicité géométrique de  $\lambda_j$ ) est  $t_j = n - r_j$ , et  $1 \leq t_j \leq m_j$ .

Toute la difficulté consiste ici à identifier, parmi tous les choix possibles des  $\varepsilon_i$ , ceux qui mènent à des morphologies différentes de l'intersection. Hélas, rien n'est connu à ce sujet et il n'existe pas, dans le cas réel, d'équivalent du symbole de Segre pour « encoder » et énumérer les différents types de faisceaux. Les calculs doivent être menés au cas par cas, à la main.

## 2.2 Classification dans le cas réel

Indiquons maintenant comment il est possible d'obtenir un ensemble d'informations suffisant pour être en mesure de reconnaître le type réel d'un faisceau inconnu de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Le processus est à chaque fois le même. On commence avec une certaine caractéristique de Segre. On en déduit le nombre, la multiplicité et le type des racines du polynôme caractéristique (s'il y a une seule racine multiple, cette racine est forcément réelle ; s'il y a deux racines de même multiplicité, elles peuvent être toutes deux réelles ou toutes deux complexes, ...). Puis on utilise le Théorème 2.3, ce qui donne une forme canonique du faisceau. Enfin, on applique des changements de coordonnées simples (en général, des changements d'échelle) qui amènent le faisceau en une forme particulièrement simple, dite normale. Il ne reste plus alors qu'à « lire » les différents cas sur cette forme simple.

Prenons le cas  $\sigma_4 = [1(12)]$ , qui correspond à deux coniques tangentes sur  $\mathbb{C}$ . Le polynôme caractéristique du faisceau a deux racines, une racine triple  $\lambda_1$  et une racine simple  $\lambda_2$ .  $\lambda_1$  est nécessairement réelle (ou le polynôme caractéristique aurait une deuxième racine triple, complexe conjuguée) et la matrice associée est de rang 2. Il lui correspond deux blocs de Jordan, un de taille 2 et l'autre de taille 1. L'autre racine,  $\lambda_2$ , est également réelle et engendre une matrice de rang 3. Appliquons le Théorème 2.3, qui donne pour  $S$  et  $T$  les formes canoniques :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 Q_S - Q_T = -\varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 (\lambda_1 - \lambda_2) w^2, \\ \lambda_2 Q_S - Q_T = \varepsilon_1 (2(\lambda_2 - \lambda_1) xy - y^2 + (\lambda_2 - \lambda_1) z^2). \end{cases}$$

On applique les transformations

$$\sqrt{|\lambda_1 - \lambda_2|} w \mapsto w, \quad \sqrt{|\lambda_2 - \lambda_1|} z \mapsto z, \quad 2(\lambda_2 - \lambda_1)x - y \mapsto x,$$

et il reste les équations

$$\begin{cases} y^2 + a w^2 = 0, \\ xy + z^2 = 0, \end{cases}$$

où  $a \in \{-1, 1\}$ . La première équation correspond à une paire de plans, réelle quand  $a = -1$ , imaginaire quand  $a = 1$ . La seconde équation correspond à un cône réel. On a donc deux cas :

- $a = 1$  : La partie réelle de la paire de plans est réduite à la droite  $y = w = 0$ . Cette droite intersecte le cône en un point double  $(0, 1, 0, 0)$ . L'intersection réelle est donc constituée de ce seul point.
- $a = -1$  : Chacun des plans réels de la paire de plans intersecte le cône en une conique réelle. Les deux coniques s'intersectent en le point double  $(0, 1, 0, 0)$  et ont une tangente commune en ce point.

Le calcul de l'inertie de la quadrique associée à la racine triple permet donc ici de discriminer entre les deux morphologies réelles associées au symbole de Segre  $\sigma_4 = [1(12)]$ . C'est le cas la plupart du temps. Alors que dans le cas complexe la multiplicité  $m_i$  et le rang  $r_i$  étaient presque suffisants pour caractériser un faisceau, ici le rang est remplacé par l'inertie. Il n'y a guère qu'un ou deux cas où des informations supplémentaires sont nécessaires.

## 2.3 Algorithmes de classification

Comme nous venons de le voir, le nombre, le type et la multiplicité des racines du polynôme caractéristique, ainsi que l'inertie des quadriques singulières associées à ces racines sont souvent des informations suffisantes pour déterminer le type de l'intersection réelle de deux quadriques projectives. Notre algorithme de classification suit donc exactement ce schéma. On commence par déterminer si  $\mathcal{D}$  est identiquement nul et sinon la nature de ses racines (cf. l'Algorithme 2.1). Puis on « branche » suivant ce que l'on a déterminé : racines simples, une racine double, deux racines doubles, une racine triple, une racine quadruple.

Nous donnons dans ce qui suit les algorithmes dans le cas d'une racine triple (Algorithme 2.2) et d'une racine quadruple (Algorithme 2.3). Notons que dans les deux cas la racine en question est nécessairement réelle (sinon son conjugué complexe serait également racine multiple) et rationnelle (sinon son conjugué algébrique serait également racine multiple).

Une subtilité survient dans le cas d'une racine quadruple. Comme déjà indiqué dans la Section 2.1, deux cas différents (symboles de Segre  $[(22)]$  et  $[(31)]$ ) mènent à une racine quadruple avec une quadrique de rang 2 associée. La situation ne s'améliore pas sur les réels puisque dans les deux cas, cette quadrique peut prendre l'inertie  $(2, 0)$  et  $(1, 1)$ . Pour différencier les deux, on note que dans le premier cas (symbole  $[(22)]$ ) la droite singulière de la paire de plans  $R(\lambda_0, \mu_0)$  est entièrement contenue dans toutes les quadriques du faisceau.

---

**Algorithme 2.1** Boucle principale pour la classification des faisceaux.

---

**Entrée:** un faisceau de quadriques  $R(\lambda, \mu) = \lambda S + \mu T$ 

```

1: calculer  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) := \det R(\lambda, \mu)$ 
2: si  $\mathcal{D} \equiv 0$  alors {polynôme caractéristique identiquement nul}
3:   exécuter l'Algorithme ad hoc
4: sinon
5:   calculer  $\mathcal{H} := \gcd(\partial\mathcal{D}/\partial\lambda, \partial\mathcal{D}/\partial\mu)$ , soit  $d := \deg(\mathcal{H}, \{\lambda, \mu\})$ 
6:   si  $d = 0$  alors {pas de racine multiple}
7:     réponse: quartique lisse ( $\mathbb{C}$ ) – voir le Chapitre 1
8:   sinon si  $d = 1$  alors {racine double}
9:     exécuter l'Algorithme ad hoc
10:  sinon si  $d = 2$  alors
11:    si discriminant ( $\mathcal{H}$ ) = 0 alors {racine triple}
12:      exécuter l'Algorithme 2.2
13:    sinon {deux racines doubles}
14:      exécuter l'Algorithme ad hoc
15:    fin si
16:  sinon { $d = 3$  : racine quadruple}
17:    exécuter l'Algorithme 2.3
18:  fin si
19: fin si

```

---



---

**Algorithme 2.2** Classification : le cas d'une racine triple.

---

**Entrée:**  $R(\lambda, \mu), \mathcal{D}$  (de l'Algorithme 2.1)**Entrée:** racine triple réelle  $(\lambda_0, \mu_0)$ , inertie  $I_0$  et rang  $r_0$  de  $R(\lambda_0, \mu_0)$ 

```

1: si  $r_0 = 3$  alors {quartique cuspidale ( $\mathbb{C}$ )}
2:   réponse: quartique cuspidale
3: sinon si  $r_0 = 2$  alors {deux coniques tangentes ( $\mathbb{C}$ )}
4:   si  $I_0 = (1, 1)$  alors {la paire de plans  $R(\lambda_0, \mu_0)$  est réelle}
5:     réponse: deux coniques tangentes
6:   sinon {la paire de plans  $R(\lambda_0, \mu_0)$  est imaginaire}
7:     réponse: point
8:   fin si
9: sinon { $r_0 = 1$  : conique double ( $\mathbb{C}$ )}
10:  soit  $I_1$  l'inertie de  $R(\lambda_1, \mu_1)$ ,  $(\lambda_1, \mu_1)$  la seconde racine (réelle) de  $\mathcal{D}$ 
11:  si  $I_1 = (2, 1)$  alors {le cône  $R(\lambda_1, \mu_1)$  est réel}
12:    réponse: conique double
13:  sinon {le cône  $R(\lambda_1, \mu_1)$  est imaginaire}
14:    réponse:  $\emptyset$ 
15:  fin si
16: fin si

```

---

## 2.4 Un exemple

Considérons la paire de quadriques suivante :

$$\begin{cases} Q_S : -4x^2 + y^2 - 4yw + 4w^2, \\ Q_T : -2xy + 4xw - 8y^2 - 4yz + 8zw. \end{cases}$$

**Algorithme 2.3** Classification : le cas d'une racine quadruple.

---

**Entrée:**  $R(\lambda, \mu), \mathcal{D}$  (de l'Algorithme 2.1)

**Entrée:** racine quadruple réelle  $(\lambda_0, \mu_0)$ , inertie  $I_0$  et rang  $r_0$  de  $R(\lambda_0, \mu_0)$

```

1: soit  $s := \text{sgn } \mathcal{D}(\lambda, \mu) / (\mu_0\lambda - \lambda_0\mu)^4$ 
2: si  $r_0 = 3$  alors {cubique et droite tangente ( $\mathbb{C}$ )}
3:   réponse: cubique et droite tangente
4: sinon si  $r_0 = 2$  alors {conique et deux droites se croisant sur la conique, ou deux droites
   simples et une droite double ( $\mathbb{C}$ )}
5:   si  $I_0 = (2, 0)$  alors {paire de plans  $R(\lambda_0, \mu_0)$  est imaginaire}
6:     réponse: droite double
7:   sinon {paire de plans  $R(\lambda_0, \mu_0)$  est réelle}
8:     si  $s = +1$  alors
9:       soit  $l_0$  la droite singulière de  $R(\lambda_0, \mu_0)$ 
10:      si  $l_0$  est contenue dans  $Q_S$  et  $Q_T$  alors
11:        réponse: deux droites simples et une droite double
12:      sinon
13:        réponse: conique et deux droites se croisant sur la conique
14:      fin si
15:    sinon  $\{s = -1\}$ 
16:      réponse: conique
17:    fin si
18:  fin si
19: sinon si  $r_0 = 1$  alors {deux droites doubles ( $\mathbb{C}$ )}
20:   si  $s = +1$  alors
21:     réponse: deux droites doubles sécantes
22:   sinon  $\{s = -1\}$ 
23:     réponse: point
24:   fin si
25: sinon  $\{r_0 = 0 : \text{quadrique lisse } (\mathbb{C})\}$ 
26:   si  $S$  ou  $T$  est d'inertie  $(4, 0)$  alors
27:     réponse:  $\emptyset$ 
28:   sinon
29:     réponse: quadrique lisse
30:   fin si
31: fin si

```

---

Le polynôme caractéristique est

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T) = -\lambda\mu^3.$$

Le pgcd des dérivées partielles est  $\mathcal{H} = \mu^2$ . Le discriminant de  $\mathcal{H}$  est nul, donc d'après l'Algorithme 2.1,  $\mathcal{D}$  a une racine triple  $(\lambda_0, \mu_0) = (1, 0)$ .

On suit maintenant les lignes de l'Algorithme 2.2. Soit  $R_0 = \lambda_0 S + \mu_0 T$ . On a :

$$\det(R_0 - \alpha I) = \alpha^4 - \alpha^3 - 20\alpha^2.$$

D'après la règle des signes de Descartes [BPR03],  $R_0$  est d'inertie  $(1, 1)$ . On conclue que l'intersection est constituée de deux coniques tangentes. Avec les algorithmes du Chapitre 3,

ces coniques peuvent être paramétrées comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1(u, v) &= (-2v^2, 2uv + 4v^2, -2u^2 - 8uv - 7v^2, uv), \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= (-2v^2, -2uv - 4v^2, 2u^2 + 8uv + 9v^2, -uv),\end{aligned}$$

pour  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Les deux coniques sont tangentes au point  $(0, 0, -1, 0)$ .

## 2.5 Orbites de faisceaux réels

La théorie de Segre et son raffinement sur les réels encodent l'invariance d'une paire de matrices/quadratiques par transformation projective simultanée des deux matrices/quadratiques. Pour l'application qui consiste à calculer un paramétrage de l'intersection, la classification induite est suffisante. En effet, seul le type réel de l'intersection compte vraiment. Par contre, pour d'autres applications comme l'étude des intersections de quadratiques dynamiques, il faut sans doute aller plus loin et s'intéresser à l'invariance non pas d'une paire de quadratiques mais du faisceau qu'elles engendrent.

Le but de cette section est de montrer sur un exemple qu'un même type d'intersection réel peut se retrouver dans plusieurs orbites de faisceau sous l'action de  $G = \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ . Il n'est pas ici question d'identifier l'ensemble des orbites de faisceaux réels, qui sera l'objet d'un travail futur (en se basant sur les travaux de Ja'Ja' [Ja'79], Atkinson [Atk91] et plus récemment Pervouchine [Per02]).

Notons la forme caractéristique du faisceau par

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T) = a\lambda^4 + b\lambda^3\mu + c\lambda^2\mu^2 + d\lambda\mu^3 + e\mu^4.$$

Cette quartique a deux invariants sous l'action de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  (qui sont donc aussi des invariants du faisceau), l'*apolaire*

$$I = 12ae - 3bd + c^2,$$

et le *catalecticant*

$$J = 72ace + 9bcd - 27ad^2 - 27eb^2 - 2c^3.$$

Par définition, l'annulation ou non-annulation de  $I$  et  $J$  sont des propriétés de faisceaux de quartiques binaires sous l'action de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . De plus,  $I$  et  $J$  sont de degré pair en les coefficients de  $S$  et en les coefficients de  $T$  (bidegré  $(4, 4)$  pour  $I$ , bidegré  $(6, 6)$  pour  $J$ ), donc leur signe est également invariant sur les orbites de faisceaux de quadratiques sous l'action de  $G$ .

Prenons l'exemple de la caractéristique de Segre  $\sigma_4 = [11(11)]$ , qui correspond sur les complexes à deux coniques sécantes. Le polynôme caractéristique a dans ce cas une racine double et deux racines simples. Lorsque les deux racines simples sont réelles, l'application du Théorème 2.3 amène la forme normale :

$$\begin{cases} Q_S : z^2 + \alpha w^2 = 0, \\ Q_T : x^2 + \beta y^2 + \gamma w^2 = 0, \end{cases}$$

où  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ ,  $Q_S$  est une paire de plans et  $Q_T$  est un cône. Le polynôme caractéristique associé est :

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \beta\lambda\mu^2(\alpha\lambda + \gamma\mu).$$

On a donc :

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = \alpha\beta, \quad d = \beta\gamma, \quad e = 0.$$

Ainsi :

$$I = \alpha^2\beta^2 > 0, \quad J = -2\alpha^3\beta^3.$$

Examinons maintenant la morphologie de l'intersection dans le cas où  $\alpha = \pm 1, \beta = 1, \gamma = 1$ . Le cône  $Q_T$  est imaginaire et son sommet  $(0, 0, 1, 0)$ , qui est son seul point réel, ne se trouve pas sur la paire de plans  $Q_S$ . L'intersection est donc vide. Or  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -1$  induisent un signe différent pour  $J$ . On voit donc bien, comme annoncé, qu'une même morphologie réelle peut se retrouver dans des orbites de faisceau distinctes sous l'action de  $G$ .

# Chapitre 3

## Paramétrage des intersections de quadriques singulières de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

### Résumé

Dans ce chapitre, nous montrons comment paramétrer l'intersection de deux quadriques projectives réelles dans les cas singuliers. L'accent est mis sur la minimisation de la complexité algébrique des paramétrages.

Ce chapitre fait un survol de la publication [4], reprise dans le Chapitre 10 (page 133). Il emprunte également quelques éléments de [8] (Chapitre 11, page 135).

Ce chapitre conclue notre travail sur les intersections de quadriques. Il se penche sur le problème du paramétrage des cas singuliers. On sait qu'il existe alors un paramétrage avec des fonctions rationnelles (Proposition 1.3). On cherche un tel paramétrage, tout en minimisant sa complexité algébrique, c.-à-d. le nombre et la profondeur des racines carrées apparaissant dans les coefficients du paramétrage. On parlera d'« optimalité » lorsque le minimum est atteint, de « quasi-optimalité » lorsque l'on est à une racine carrée de l'optimum.

Rappelons que l'on se donne deux quadriques  $Q_S, Q_T$  à coefficients entiers et on cherche un paramétrage simple de  $C = Q_S \cap Q_T$ . L'idée est de trouver une quadrique réglée  $Q_R$  dans le faisceau, de plonger son paramétrage dans une autre quadrique du faisceau et de résoudre l'Équation ( $\Omega$ ) obtenue.

Lorsque le faisceau contient des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ , on pourrait parfaitement utiliser l'algorithme générique du Chapitre 1. Cela présenterait cependant un double inconvénient : 1. on ne pourrait pas assurer que le paramétrage obtenu est polynomial (cf. le cas d'une quartique cuspidale ci-dessous), et 2. on n'obtiendrait pas nécessairement le minimum possible de racines carrées.

Dans ce qui suit, la philosophie sera de prendre pour quadrique  $Q_R$  la quadrique réglée de plus petite inertie du faisceau. Cela aura en outre pour avantage de minimiser la complexité arithmétique des coefficients du paramétrage (cf. [8]).

### 3.1 Paramétrage des paires de plans et des cônes

Dans ce qui suit, nous allons prendre des paires de plans et des cônes comme quadriques intermédiaires  $Q_R$ . Il nous faut donc savoir les paramétrer.

Commençons par les paires de plans. La quadrique d'équation  $ax^2 - by^2 = 0$  est constituée

de 2 plans que l'on paramètre comme suit :

$$\mathbf{X}_1 = \left[ u, \frac{\sqrt{ab}}{b}u, v, s \right], \mathbf{X}_2 = \left[ u, -\frac{\sqrt{ab}}{b}u, v, s \right], \quad (u, v, s) \in \mathbb{P}^2. \quad (3.1)$$

On montre alors le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *La quadrique projective  $Q$  d'équation  $ax^2 - by^2 = 0$  ( $a, b > 0$ ) admet un paramétrage rationnel dans  $\mathbb{Q}$  si et seulement si elle contient un point rationnel en dehors de sa droite singulière  $x = y = 0$ , ou de manière équivalente si et seulement si  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{Q}$ . Si c'est le cas, le paramétrage de l'équation (3.1) est rationnel.*

Passons maintenant au cas des cônes. Dans ce cas, il nous faut introduire un espace de paramètres un peu inhabituel. On appelle *espace quasi-projectif* à deux dimensions, et on note  $\mathbb{P}^{*2}$ , le quotient de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim$ , où  $(x, y, z) \sim (y_1, y_2, y_3)$  si et seulement si  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $(x, y, z) = (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda^2 y_3)$ . La quadrique d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$  admet le paramétrage

$$\mathbf{X} = \left[ uv, \frac{u^2 - av^2}{2b}, \frac{u^2 + av^2}{2\sqrt{bc}}, s \right], \quad (u, v, s) \in \mathbb{P}^{*2}.$$

On prouve alors la propriété suivante :

**Proposition 3.2.** *Une quadrique projective  $Q$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$  ( $a, b, c > 0$ ) admet un paramétrage rationnel dans  $\mathbb{Q}$  si et seulement si elle contient un point rationnel autre que son point singulier  $(0, 0, 0, 1)$ .*

*Il existe cependant des quadriques de ce type sans point rationnel et donc sans paramétrage rationnel, par exemple la quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ .*

Notons, pour compléter cette proposition, que le paramétrage d'un cône contenant un point rationnel se fait aisément. Soit  $Q_R$  un cône réel, de sommet  $\mathbf{c}$  contenant un point rationnel  $\mathbf{p} \neq \mathbf{c}$ . Appliquons à  $R$  la transformation projective  $P$  envoyant le point  $(0, 0, 0, 1)^T$  sur  $\mathbf{c}$  et le point  $(0, 0, 1, 0)^T$  sur  $\mathbf{p}$ . Le cône  $Q_{P^T R P}$  a pour équation

$$a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 yz + a_5 xz = 0.$$

Ce cône admet le paramétrage simple suivant :

$$\mathbf{X}(u, v, s) = (x, y, z, w)^T = \begin{pmatrix} a_5 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_4 & a_5 & 0 \\ -a_1 & -a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \\ s \end{pmatrix}, \quad (u, v, s) \in \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R}).$$

On obtient ainsi le paramétrage  $P\mathbf{X}$  du cône  $Q_R$ .

Nous voilà maintenant armés pour attaquer le paramétrage quasi-optimal des cas singuliers d'intersection. Dans ce qui suit, nous montrons comment procéder dans trois cas différents.

## 3.2 Cas 1 : quartique cuspidale

Dans ce cas, le symbole de Segre est  $\sigma_4 = [13]$ . L'intersection est toujours réelle. Utiliser l'algorithme générique (Chapitre 1) ne serait pas ici une bonne idée :  $C$  étant irréductible,  $C_\Omega$  l'est également (Proposition 1.2) et la résolution de l'Équation ( $\Omega$ ) amènerait inévitablement la racine d'un polynôme, évitable d'après la Proposition 1.3.

On procède donc autrement. On considère le cône  $Q_R$  associé à la racine triple (réelle et rationnelle) du polynôme caractéristique. Le point singulier de la quartique est le sommet  $\mathbf{p}$  de ce cône. L'intersection de  $Q_R$  et du plan tangent à  $Q_S$  en  $\mathbf{p}$  est une droite double, la droite tangente à  $C$  en son point de rebroussement. Étant double, cette droite est nécessairement rationnelle. Par la Proposition 3.2, le cône admet un paramétrage rationnel, que l'on trouve en prenant un point rationnel sur la droite double et en procédant comme précédemment.

Avec les notations de la Section 3.1, plonger le paramétrage de  $Q_R$  dans  $Q_S$  donne l'équation

$$\Omega : as^2 + b(u, v)s + c(u, v) = 0,$$

à coefficients rationnels. La quartique passe par le sommet de  $Q_R$ , qui correspond à la valeur  $u = v = 0$  des paramètres. En ce point  $s \neq 0$  parce que  $(u, v, s) \in \mathbb{P}^2$ . Donc  $a = 0$ ,  $\Omega$  est linéaire en  $s$  et on peut donc exprimer  $s$  comme fonction rationnelle de  $u, v$ . Plongeant cette fonction dans le paramétrage de  $Q_R$ , on obtient un paramétrage de la quartique dans  $\mathbb{Q}[\xi]$ ,  $\xi = (u, v)$ , qui est donc optimal.

Un exemple d'exécution de notre logiciel dans le cas d'une quartique cuspidale est montré dans la Figure 3.1.

---

```
>> quadric 1: - 3*x^2 - 14*x*y - 4*x*z - 6*x*w - 4*y^2 - 8*w^2
>> quadric 2: 6*x^2 - 12*x*y - 8*x*z + 4*x*w - 8*y^2

>> determinantal equation: - 1^4 - 6*1^3*m - 12*1^2*m^2 - 8*1*m^3
>> gcd of derivatives of determinantal equation: 1^2 + 4*1*m + 4*m^2
>> triple real root: [ -2 1 ]
>> inertia: [ 2 1 ]
>> complex intersection: cuspidal quartic
>> real intersection: cuspidal quartic
>> singular point: [ 0 0 1 0 ]
>> rational point on cone: [ 0 1 0 0 ]
>> parameterization of cone with rational point

>> parameterization of cuspidal quartic:
[16*v^4, - 1024*u^2*v^2 - 128*u*v^3 - 12*v^4, - 65536*u^4 - 16384*u^3*v - 1024*u^2*v^2
+ 64*u*v^3 + 21*v^4, 128*u*v^3]
>> parameterization is optimal

>> time spent: 10 ms
```

---

FIG. 3.1 – Trace de l'exécution pour l'exemple 1.

## 3.3 Cas 2 : deux coniques tangentes

Ici, la caractéristique de Segre est  $\sigma_4 = [1(21)]$ . Le polynôme caractéristique a une racine triple (réelle et rationnelle), correspondant à une paire de plans  $Q_R$ . L'autre racine (réelle et rationnelle) correspond à un cône projectif réel. Il y a deux types d'intersection sur les réels.

**Point.** La paire de plans est imaginaire et sa droite singulière (réelle et rationnelle) intersecte le cône en un point double, qui est le seul point réel de l'intersection. Ce point est nécessairement rationnel, autrement son conjugué serait également dans l'intersection. On peut calculer les coordonnées de ce point exactement comme indiqué, en paramétrant la paire de plans, en extrayant la droite singulière et en intersectant cette droite avec le cône.

**Deux coniques tangentes réelles.** La paire de plans est réelle et chacun des plans intersecte le cône. La droite singulière de  $Q_R$  est tangente au cône. Comme précédemment, le point de tangence est rationnel. Par la Proposition 3.2, le cône a un paramétrage rationnel. Plongeant ce paramétrage dans  $Q_R$ , on voit que le paramétrage des coniques est rationnel sur l'extension de  $\mathbb{Q}$  définie par les plans. Les coniques ont donc un paramétrage dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$ , où  $\delta$  est le discriminant de la paire de plans  $Q_R$ , si et seulement si  $\delta$  n'est pas un carré.

Un exemple où  $\sqrt{\delta}$  ne peut être évité est le suivant :

$$\begin{cases} x^2 - 2w^2 = 0, \\ xy + z^2 = 0. \end{cases}$$

Un exemple de calcul du paramétrage de l'intersection dans le cas de deux coniques tangentes est présenté dans la Figure 3.2.

---

```
>> quadric 1: x^2 + 6*x*y + 2*x*z + 4*y^2 + 2*y*z + 2*z^2
>> quadric 2: 5*x^2 + 24*x*y + 10*x*z + 16*y^2 + 8*y*z + 9*z^2 - 4*w^2

>> determinantal equation: l^3*m + 6*l^2*m^2 + 12*l*m^3 + 8*m^4
>> gcd of derivatives of determinantal equation: l^2 + 4*l*m + 4*m^2
>> triple real root: [ -2 1 ]
>> inertia: [ 1 1 ]
>> complex intersection: two tangent conics
>> real intersection: two tangent conics
>> rational point on cone: [ 2 -1 -2 0 ]
>> parameterization of cone with rational point
>> the two conics are tangent at [ 2 -1 -2 0 ]

>> parameterization of conic:
[2*u^2 - 14*u*v + 28*v^2, - u^2 + 10*u*v - 26*v^2, - 2*u^2 + 14*u*v - 22*v^2, 3*v^2]
>> parameterization is optimal

>> parameterization of conic:
[- 2*u^2 + 14*u*v - 28*v^2, u^2 - 10*u*v + 26*v^2, 2*u^2 - 14*u*v + 22*v^2, 3*v^2]
>> parameterization is optimal

>> time spent: 10 ms
```

---

FIG. 3.2 – Trace de l'exécution pour l'exemple 2.

### 3.4 Cas 3 : conique et deux droites ne se coupant pas sur la conique

Dans ce cas la caractéristique de Segre est égale à  $\sigma_4 = [2(11)]$ . Le polynôme caractéristique a deux racines doubles, correspondant à un cône et à une paire de plans. Ces deux racines sont nécessairement réelles et rationnelles, autrement les quadriques du faisceau qui leur sont associées auraient le même rang. Donc le cône et la paire de plans ont une équation

rationnelle. De plus, le sommet du cône appartient à la paire de plans mais n'en est pas un point singulier. D'après la Proposition 3.1, le discriminant de la paire de plans est un carré et chaque plan de la paire a un paramétrage rationnel.

Il y a trois cas distincts sur les réels.

**Point.** Le cône est imaginaire. L'intersection est réduite à son sommet, réel. L'équation du cône étant rationnelle, son sommet est rationnel.

**Point et conique.** Le cône est réel. Un des plans coupe le cône en une conique vivant dans un plan rationnel, l'autre plan coupe le cône en son sommet. Le point de  $C$  est ce sommet, qui est comme auparavant rationnel. Pour paramétrer la conique, on plonge le paramétrage du plan dans lequel elle vit dans une autre quadrique du faisceau, ce qui donne une conique dans l'espace des paramètres du plan. Une racine carrée est possiblement nécessaire pour paramétrer cette conique. On ne peut l'éviter que si on sait trouver un point rationnel sur la conique.

Un exemple où la racine carrée ne peut être évitée est le suivant :

$$\begin{cases} xw = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0. \end{cases}$$

Par la Proposition 3.2, le cône projectif n'a pas de point rationnel en dehors de son sommet  $(1, 0, 0, 0)$ . La conique  $x = y^2 + z^2 - 3w^2 = 0$  n'a donc pas de point rationnel.

**Deux droites et conique.** De nouveau, le cône est réel et un plan le coupe en une conique d'équation rationnelle. Mais maintenant l'autre plan, qui passe par le sommet du cône, le coupe également en deux droites. Le paramétrage de la conique s'obtient comme précédemment. Le paramétrage des droites s'obtient en plongeant le paramétrage de l'autre plan dans une quadrique du faisceau.

On note que si une des droites est rationnelle, l'autre l'est aussi et alors le cône, contenant un point rationnel autre que son sommet, peut être paramétré rationnellement. Dès lors, la conique, qui est l'intersection de ce cône avec un plan rationnel, admet elle-aussi un paramétrage rationnel. Donc dans ce cas les trois composantes ont un paramétrage dans  $\mathbb{Q}[\xi]$ . Si les droites sont irrationnelles, il se peut néanmoins que la conique ait un point rationnel et donc un paramétrage rationnel.

Nous donnons des exemples pour les trois situations que nous venons d'esquisser. Tout d'abord, la paire

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$$

donne naissance à deux droites rationnelles  $y = z \pm w = 0$  et à la conique rationnelle  $x = y^2 + z^2 - w^2 = 0$  qui contient le point  $(0, 0, 1, 1)$  et peut donc être paramétrée rationnellement. Ensuite, la paire de quadriques

$$\begin{cases} xy = 0, \\ 2y^2 + z^2 - 3w^2 = 0 \end{cases}$$

s'intersecte en deux droites irrationnelles  $y = z \pm \sqrt{3}w = 0$  et en la conique  $x = 2y^2 + z^2 - 3w^2 = 0$  qui contient le point rationnel  $(0, 1, 1, 1)$  et peut donc être paramétrée rationnellement. Enfin, les droites et la conique formant l'intersection des quadriques

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0 \end{cases}$$

ne peuvent être paramétrées rationnellement. En effet, par la Proposition 3.2, le cône n'a pas de point rationnel en dehors de son sommet  $(1, 0, 0, 0)$ , donc la conique  $x = y^2 + z^2 - 3w^2 = 0$  n'a pas de point rationnel.

Nous montrons dans la Figure 3.3 un exemple où les trois composantes admettent un paramétrage rationnel.

---

```
>> quadric 1: 3*x^2 - 6*x*y - 10*x*z - 6*x*w + y^2 - 2*y*z - 6*y*w + 9*z^2 - 2*z*w - 9*w^2
>> quadric 2: - 3*x^2 + 8*x*y + 12*x*z + 6*x*w - y^2 - 2*y*z + 4*y*w - 13*z^2 + 9*w^2

>> determinantal equation: 4*1^4 - 12*1^3*m + 13*1^2*m^2 - 6*1*m^3 + m^4
>> gcd of derivatives of determinantal equation: 2*1^2 - 3*1*m + m^2
>> ranks of singular quadrics: 3 and 2
>> two real rational double roots: [ 1 1 ] and [ 1 2 ]
>> complex intersection: conic and two lines not crossing
>> real intersection: conic and two lines not crossing
>> parameterization of pair of planes
>> parameterization of pair of lines
>> parameterization of conic
>> looking for rational point on conic -- Legendre says yes :-)
>> parameterization of conic with rational point

>> parameterization of line:
[u - v + v*sqrt(3), u + 6*v + 2*v*sqrt(3), u, - u - v + v*sqrt(3)]
>> parameterization is optimal

>> parameterization of line:
[u - v - v*sqrt(3), u + 6*v - 2*v*sqrt(3), u, - u - v - v*sqrt(3)]
>> parameterization is optimal

>> parameterization of conic:
[- 162*u^2 + 678*u*v - 597*v^2, 36*u^2 - 9*u*v - 162*v^2, - 36*u^2 + 9*u*v + 162*v^2,
 146*u^2 - 640*u*v + 737*v^2]
>> parameterization is optimal

>> time spent: 10 ms
```

---

FIG. 3.3 – Trace de l'exécution pour l'exemple 3.

## 3.5 Bilan

Procédant comme dans les sections précédentes, avec parfois quelques petites variantes et certaines incursions dans la théorie de Galois, on parvient à paramétrer l'intersection réelle de deux quadriques projectives réelles dans tous les cas identifiés au Chapitre 2.

On parvient également à construire l'imposant Tableau 3.1 qui montre que, dans l'immense majorité des cas, le paramétrage obtenu est optimal : il n'en existe pas qui soit défini sur une extension de  $\mathbb{Q}$  plus petite. Pour quelques cas (désignés par la mention « non-optimal »), le paramétrage obtenu par des moyens « simples » contient possiblement une racine carrée en trop par rapport à l'optimal.

Oublions le cas générique, déjà traité dans le Chapitre 1. Pour les autres cas non-optimaux, déterminer si la racine carrée supplémentaire peut être évitée ou non revient à déterminer si une certaine conique (rationnelle sauf dans un cas) contient ou non un point rationnel et à calculer un tel point dans l'affirmative. Dans notre logiciel, nous avons implanté un algorithme dû à D. Simon qui réalise cette tâche [Sim05]. On le voit précisément à l'œuvre dans l'exemple de la Figure 3.3. Dans ce cas précis, un point rationnel est trouvé sur la conique et les trois composantes de l'intersection sont rationnelles.

symbole de Segre	type réel	format du paramétrage dans le pire cas	optimalité dans le pire cas
[1111]	quartique lisse	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi, \sqrt{\Delta}]$ , $\Delta \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[112]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	quartique nodale	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[13]	quartique cuspidale	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[22]	cubique et droite sécante	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[4]	cubique et droite tangente	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[11(11)]	deux points	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$	optimal
	conique	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\mu})[\xi]$ , $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$	optimal si $\sqrt{\delta} \notin \mathbb{Q}$
	deux coniques sécantes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta'})[\xi]$	non-optimal
[1(21)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	deux coniques tangentes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[1(111)]	conique double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[2(11)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	conique et point	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
	conique et deux droites	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	non-optimal
[(31)]	conique	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	conique et deux droites	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(11)(11)]	deux points	$\mathbb{K}[\xi], \deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	deux droites	$\mathbb{K}[\xi], \deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	quatre droites	$\mathbb{K}[\xi], \deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
[(22)]	droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	deux droites simples et une droite double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(211)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	deux droites doubles	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[1{3}]	conique et droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[111]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	2 droites concourantes	$\mathbb{K}[\xi], \deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
	4 droites concourantes	$\mathbb{K}[\xi], \deg(\mathbb{K}) = 4$	optimal
[12]	droite double	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
	deux droites simples et une droite double	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[3]	droites simple et triple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[1(11)]	point	$\mathbb{Q}$	optimal
	2 droites concourantes	$\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$	optimal
[(21)]	droite quadruple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal
[11]	droite quadruple	$\mathbb{Q}[\xi]$	optimal

 TAB. 3.1 – Anneau de définition et optimalité des coordonnées des paramétrages calculés par notre algorithme.  $\delta, \delta'$  sont des rationnels.

# Chapitre 4

## Invariants et combinants de faisceaux de coniques

### Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la caractérisation du type d'intersection réelle de deux coniques projectives. On a recours pour cela à la théorie des invariants pour caractériser les orbites de faisceaux de coniques. On montre qu'en étudiant une catégorie d'invariants connus sous le nom de combinants on obtient des prédicats de plus petit degré que ceux qui étaient connus jusqu'alors.

Ces résultats ne sont pas encore publiés.

Comment caractériser la morphologie de l'intersection réelle de deux coniques ? L'affaire ne semble guère compliquée. Il est vrai que nous avons fait ce travail pour les quadriques, et on ne voit pas ce qui empêcherait de le refaire en dimension inférieure. C'est tout-à-fait exact. Toutefois, cette phase de détermination du type de l'intersection, telle que présentée dans le Chapitre 2, présente quelques inconvénients. Rappelons que l'idée est de calculer les racines multiples du polynôme caractéristique, de construire les coniques/quadriques associées, puis d'en calculer l'inertie, ce qui permet de conclure. Cette procédure marche parfaitement, mais elle a un défaut : le contrôle sur le degré des prédicats à évaluer pour classifier le faisceau est quelque peu perdu par les constructions intermédiaires (racines multiples et coniques/quadriques associées) qui sont faites, sans compter que certaines constructions introduisent des nombres algébriques.

On souhaiterait donc pouvoir discriminer entre les différents types de faisceaux grâce à des quantités polynomiales calculées directement sur les entrées. On se tourne pour cela vers la théorie classique des invariants, c.-à-d. l'étude des propriétés intrinsèques d'objets algébriques. On se penche en particulier sur les invariants de paires de formes quadratiques ternaires. On montre qu'une catégorie d'invariants, les combinants, permet de discriminer entre les différentes orbites de faisceaux de coniques projectives réelles. On améliore en particulier les résultats de Briand [Bri07], qui a fait un travail similaire à base de résultants et de suites de Sturm. Mentionnons également l'étude d'Etayo *et al.* [EGdR06] pour le cas des ellipses, possiblement paramétrées.

Que la théorie des invariants puisse apporter des réponses en calcul géométrique exact ne doit pas surprendre. Rappelons que, pour Felix Klein (le fameux « programme d'Erlangen », 1872), la géométrie est l'étude des propriétés d'un espace qui sont invariantes sous l'action d'un groupe de transformations. Il est donc assez naturel que des invariants apparaissent lorsque l'on cherche à traduire une question géométrique (deux surfaces s'intersectent-elles ? quatre droites admettent-elles une transversale réelle commune ?) en équations.

Cette relation entre invariants et géométrie n'a pourtant pas reçu l'attention qu'elle mérite en géométrie algorithmique. Parfois, des auteurs ont reconnu l'apparition de quantités invariantes, sans en comprendre totalement la portée (cf. par exemple [DFMT02] sur le balayage d'arcs de cercles). Mais la situation pourrait bien changer, notamment grâce aux travaux de plusieurs auteurs qui revisitent actuellement la théorie classique des invariants. Mentionnons à ce sujet Peter Olver [Olv99], Jaydeep Chipalkatti [Chi04, Chi06], Jens Gravesen [Gra04] et Emmanuel Briand [ABB06, Bri07].

## 4.1 Invariants et covariants : quelques rappels

La théorie classique des invariants est l'étude des propriétés intrinsèques de (systèmes de) polynômes, c'est-à-dire les propriétés qui ne sont pas affectées par un changement de variables et qui ne sont pas attachées à un système de coordonnées particulier. L'étude des invariants est fortement liée au problème de l'équivalence (quand un système polynomial peut-il être transformé en un autre système par un changement de coordonnées approprié) et à celui, voisin, de la forme canonique (trouver un changement de coordonnées qui amène le système polynomial sous une forme particulièrement simple).

Fondée par Sylvester et Cayley dans les années 1850, la théorie des invariants et des covariants a été explorée par Hilbert, Clebsch, Gordan et d'autres vers 1880 et redécouverte dans les années 1960 par Dieudonné et Dixmier, notamment.

Nous passons ici en revue quelques éléments de théorie des invariants. Le lecteur intéressé pourra se référer à des sources classiques ([GY03, Gle15, Tur29]) ou modernes ([Olv99, Stu93]) pour de plus amples informations sur ce sujet fascinant.

### 4.1.1 Formes $n$ -aires

La théorie des invariants de formes (et en particulier de formes binaires) est un volet central de la théorie classique des invariants.

Soit  $K$  un corps de caractéristique zéro, que l'on prendra égal à  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  par la suite. Soit

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \quad (4.1)$$

une forme  $n$ -aire (c.-à-d. un polynôme homogène en  $n$  variables) de degré  $d$  sur  $K$ , où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  sont des coordonnées de  $K^n$ . La somme dans (4.1) se fait sur les  $\binom{n+d-1}{d}$   $n$ -uplets d'entiers positifs ou nuls  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  tels que  $i_1 + i_2 + \dots + i_n = d$ . Les coefficients  $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$  sont supposés algébriquement indépendants sur  $K$ .

L'ensemble des  $d$ -formes  $n$ -aires est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $\binom{n+d-1}{d}$ . Il peut être identifié à  $S_d(K^n)$ , la  $d$ -ième puissance de  $K^n$ . Cela signifie que  $f$  peut être identifiée au vecteur  $\mathbf{a} = (\dots, a_{i_1 i_2 \dots i_n}, \dots)$  de ses coefficients. Ainsi  $f = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{a}$  représentent le même élément de  $S_d(K^n)$ .

Soient  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  les coordonnées duales (tangentielles). Soit  $K[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}]$  l'anneau des polynômes en les coefficients de  $f$ , les variables du primal et les variables du dual.  $K[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}]$  est l'anneau des polynômes sur l'espace vectoriel  $\Gamma = S_d(K^n) \oplus K^n \oplus (K^n)^*$ . L'action du groupe général linéaire  $\mathrm{GL}_n(K)$  sur  $K^n$  induit une action naturelle sur  $\Gamma$ . Pour chaque transformation  $P$  de  $\mathrm{GL}_n(K)$ , représentée par une matrice  $n \times n$  de déterminant non-nul,

l'action  $P : (\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$  est définie par les équations

$$\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}, \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}),$$

les coordonnées duales  $\mathbf{u}$  étant sujettes à la transformation duale (dite contragrédiente)

$$\mathbf{u} = (P^{-1})^T \bar{\mathbf{u}}.$$

Un polynôme  $C \in K[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}]$  est un *covariant* de  $f$  si

$$C(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = (\det P)^w C(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4.2)$$

où  $w$  est un entier positif ou nul baptisé *poids* de  $C$ . Le degré total de  $C$  en les éléments du vecteur de coefficients  $\mathbf{a}$  est appelé le *degré* du covariant. Son degré total en les variables  $\mathbf{x}$  est appelé l'*ordre* de  $C$ . Enfin, son degré total en les variables duales  $\mathbf{u}$  est appelé la *classe* de  $C$ .

Bien que tous les polynômes  $C$  satisfaisant (4.2) tombent sous la dénomination moderne de « covariants », la terminologie du 19<sup>e</sup> siècle faisait la distinction entre :

- les *invariants*, lorsque l'ordre et la classe valent 0,
- les *covariants*, lorsque la classe vaut 0, mais pas l'ordre,
- les *contravariants*, lorsque l'ordre vaut 0, mais pas la classe,
- les *concomitants mixtes*, quand ni l'ordre ni la classe ne valent 0.

Nous utiliserons parfois ces termes pour plus de clarté.

Il n'est pas inutile de préciser ici que les invariants tels que définis sont des invariants *relatifs* puisqu'ils ne sont conservés qu'à une puissance du déterminant de la transformation près. Ce n'est donc pas leur valeur qui est intéressante, mais leur nullité ou non-nullité, ainsi éventuellement que leur signe (lorsque leur poids et leur degré sont des nombres pairs). Notons toutefois que, étant donnés deux invariants relatifs de même poids, on peut construire un invariant *absolu* en les divisant.

**Remarque.** On ne s'intéresse ici qu'aux invariants et covariants dits *rationnels*, c'est-à-dire qui résident dans  $K[\mathbf{a}]$  et  $K[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}]$  respectivement. Ont été également considérés, dans la littérature, des invariants et covariants *irrationnels* ou *algébriques*, c.-à-d. dont les coefficients sont algébriques sur  $K[\mathbf{a}]$ .

### 4.1.2 Exemple

Pour fixer les idées, soit  $f$  une forme quadratique binaire :

$$f = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2.$$

Considérons la transformation  $P$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  définie par

$$(x, y) \mapsto (a\bar{x} + b\bar{y}, c\bar{x} + d\bar{y}), \quad \det P = ad - bc \neq 0.$$

Le polynôme transformé s'écrit  $\bar{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{a}_0 \bar{x}^2 + 2\bar{a}_1 \bar{x}\bar{y} + \bar{a}_2 \bar{y}^2 = f(\mathbf{x})$ , ce qui donne :

$$\bar{a}_0 = a_0 a^2 + 2a_1 ac + a_2 c^2, \quad \bar{a}_1 = a_0 ab + a_1(ad + bc) + a_2 cd, \quad \bar{a}_2 = a_0 c^2 + 2a_1 bd + a_2 d^2.$$

Notons par  $\Delta$  le discriminant. Alors :

$$\Delta(\bar{f}) = \bar{a}_1^2 - \bar{a}_0\bar{a}_2 = (ad - bc)^2 (a_1^2 - a_0a_2) = (\det P)^2 \Delta(f).$$

Le discriminant d'une forme quadratique est donc, ô surprise, un invariant. Comme son degré est pair, son signe est également invariant sur chaque orbite de forme quadratique binaire.

Tout cela pour dire que la théorie des invariants généralise des objets et des notions qui nous sont largement familiers.

### 4.1.3 Propriétés fondamentales

Prenons  $K = \mathbb{C}$ . L'anneau des covariants de  $f$  est la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$ . L'anneau des invariants de  $f$  est la sous-algèbre  $\mathbb{C}[\mathbf{a}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$  engendrée par ses invariants.

Le résultat fondamental de la théorie des invariants de formes est dû à David Hilbert (1888) :

**Théorème 4.1** (Théorème de finitude de Hilbert). *L'anneau des invariants et l'anneau des covariants d'une ou plusieurs formes sous l'action du groupe général linéaire sur  $\mathbb{C}$  ont un nombre fini de générateurs, baptisés invariants et covariants fondamentaux.*

Soit  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  une famille finie de formes réelles et  $\mathcal{F}$  sa complexification. Soit  $\mathcal{G}$  un groupe de transformation agissant naturellement sur  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$  sa version réelle. Un autre théorème d'importance fondamentale dit que les covariants séparent les orbites de  $\mathcal{F}$  sous l'action de  $\mathcal{G}$  [PV94]. En d'autres termes, pour deux orbites distinctes  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ , il existe un covariant s'annulant identiquement sur  $\mathcal{O}_1$  et pas sur  $\mathcal{O}_2$ , et vice-versa.

Lorsque l'on passe sur les réels, la classification des orbites sous l'action de  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$  est obtenue en raffinant la classification des orbites sous l'action de  $\mathcal{G}$ . Plus précisément, si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $\mathcal{F}$  sous l'action de  $\mathcal{G}$ , alors la trace de  $\mathcal{O}$  (c.-à-d. son intersection avec  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ) est une union d'orbites sous l'action de  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ . Hélas, contrairement au cas complexe, il n'y a aucune garantie à l'avance que l'on puisse séparer les orbites de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  sous l'action de  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$  avec uniquement des équations et des inéquations impliquant les seuls covariants. Nous verrons plus loin que, dans le cas de faisceaux de coniques projectives réelles, on peut séparer les orbites en extrayant des quantités dérivées de covariants fondamentaux.

### 4.1.4 Paire de formes

On s'intéresse maintenant à la famille  $\mathcal{F}$  des paires de formes quadratiques  $n$ -aires et aux invariants et covariants de cette famille. Soit donc  $f = f(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  et  $g = g(\mathbf{b}, \mathbf{x})$  deux telles formes. Plusieurs groupes agissent naturellement sur la famille  $\mathcal{F}$ . Le premier,  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , agit par substitutions linéaires en  $\mathbf{x}$  et donc par transformation simultanée de  $f$  et  $g$ . Cette action a été largement étudiée par le passé, mais ce n'est pas la plus intéressante pour nous. En effet, elle « n'encode » pas les propriétés de l'intersection  $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0\}$  mais les propriétés de la paire de formes  $f, g$ . De ce fait, deux paires ayant le même « type d'intersection » peuvent se retrouver dans des orbites différentes.

Plus intéressante est l'action de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , où  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  agit par substitutions linéaires en  $\mathbf{x}$  et  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  agit par substitutions linéaires en  $f$  et  $g$ , c.-à-d. par reparamétrage linéaire de la variable  $\mathbf{w} = (\lambda, \mu)$  du faisceau  $\lambda f + \mu g$  engendré par les deux formes. Cette

« double invariance » a le bon goût d'induire un partitionnement de l'espace des paires de formes exactement selon leur type d'intersection. Traduisant cette invariance et oubliant un instant la référence aux variables duales, on cherche donc des polynômes  $C \in \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{w}]$  tels que

$$C(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}}) = (\det P_1)^{w_1} (\det P_2)^{w_2} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{w}),$$

pour toutes les transformations  $P_1$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $P_2$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Sylvester (1853) appelle ces objets des *combinants*. Dans ce qui suit, nous utiliserons le terme de combinant quand la dépendance à  $\mathbf{w}$  est nulle, de *forme combinante* autrement.

Supposons maintenant que  $f$  et  $g$  sont des formes quadratiques ternaires réelles, définissant deux coniques projectives. Dans ce chapitre, la feuille de route sera la suivante. Nous commençons dans la Section 4.2 par identifier les covariants de  $f$  et  $g$  sous la seule action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ . Puis on s'intéresse dans la Section 4.3 aux invariants du faisceau  $f, g$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . On élargit dans la Section 4.4 aux combinants d'ordre non-nul. Enfin, on montre dans la Section 4.6 que les invariants d'un certain combinant quadratique permettent de discriminer une bonne partie des orbites de faisceaux de coniques projectives réelles sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ , après avoir rappelé quelles sont les différentes orbites (Section 4.5).

Nous cherchons ici à « minimiser » le degré des quantités polynomiales discriminantes sur chaque orbite. La dépendance aux données de départ (les coefficients des coniques) sera donnée sous la forme d'un bidegré  $(d_f, d_g)$ , où  $d_f$  (resp.  $d_g$ ) est le degré total en les coefficients de  $f$  (resp.  $g$ ).

## 4.2 Paires de formes quadratiques ternaires

(Notons que beaucoup de résultats de cette section pourraient être énoncés pour des formes quadratiques  $n$ -aires. Mais nous avons préféré privilégier le concret à la généralité.)

Soient  $Q_S, Q_T$  deux formes quadratiques ternaires et  $S = (s_i), T = (t_j)$  les matrices  $3 \times 3$  symétriques associées. On considère à partir de maintenant les  $s_i$  et  $t_j$  comme des indéterminées et on se place sur  $\mathbb{C}$ . On s'intéresse ici aux invariants et covariants rationnels (donc définis sur  $\mathbb{C}(s_i, t_j)$  et  $\mathbb{C}(s_i, t_j)[\mathbf{x}]$  respectivement) de la paire  $S, T$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ .

Considérons la forme caractéristique du faisceau  $(S, T)$

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T) = a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3.$$

Clairement, les coefficients de  $\mathcal{D}$  sont préservés (à un scalaire près) par transformation projective simultanée de  $S$  et  $T$ . En effet, soit  $P$  la matrice de la transformation de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en question. Alors :

$$\det(\lambda P^T S P + \mu P^T T P) = \det(P^T(\lambda S + \mu T)P) = (\det P)^2 \det(\lambda S + \mu T),$$

donc  $a, b, c, d$  sont des invariants de  $Q_S$  et  $Q_T$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ , de poids 2.  $a$  est de bidegré  $(3, 0)$ ,  $b$  de bidegré  $(2, 1)$ ,  $c$  de bidegré  $(1, 2)$  et  $d$  de bidegré  $(0, 3)$ . Ce sont en fait les seuls invariants fondamentaux.

**Théorème 4.2** ([GY03]). *Les coefficients de  $\mathcal{D}$  sont les générateurs de l'anneau des invariants d'une paire  $S, T$  de matrices symétriques  $3 \times 3$ . Tout autre invariant s'écrit sous la forme d'un polynôme homogène et isobare en  $a, b, c, d$ .*

Dans ce qui suit, nous utilisons de manière répétée le lemme suivant, corollaire du Lemme fondamental de Jacobi sur les mineurs d'un adjoint :

**Lemme 4.3.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . L'adjoint de  $A' = \text{adj}(A)$  est tel que*

$$\text{adj}(A') = (\det A)^{n-2} A.$$

Soient  $S' = \text{adj}(S)$  et  $T' = \text{adj}(T)$  les matrices adjointes. Soit  $U$  la matrice symétrique définie par

$$\text{adj}(\lambda S' + \mu T') = aS\lambda^2 + U\lambda\mu + dT\mu^2.$$

Notons  $Q_U = \mathbf{x}^T U \mathbf{x}$  la forme quadratique associée,  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ . Enfin, soit  $G$  le Jacobien

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} \frac{\partial(Q_S, Q_T, Q_U)}{\partial(x_0, x_1, x_2)}.$$

**Lemme 4.4.**  *$Q_U$  et  $G$  sont des covariants de  $Q_S$  et  $Q_T$  sous l'action de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ .  $Q_U$  est de bidegré  $(2, 2)$  et de poids 2.  $G$  est de bidegré  $(3, 3)$  et de poids 3.*

*Démonstration.* Considérons la transformation projective  $\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}$ . En notant  $P' = \text{adj}(P)$ , on a  $\text{adj}(P') = (\det P) P$ . Utilisons une barre horizontale pour désigner les matrices transformées, de sorte que  $\bar{S} = P^T S P$ ,  $\bar{S}' = P' S' P'^T$ , etc. Alors

$$\begin{aligned} \text{adj}(\lambda \bar{S}' + \mu \bar{T}') &= \text{adj}(P'(\lambda S' + \mu T')P'^T), \\ &= \text{adj}(P'^T) \text{adj}(\lambda S' + \mu T') \text{adj}(P'), \\ &= (\det P)^2 P^T \text{adj}(\lambda S' + \mu T') P, \end{aligned}$$

donc  $\bar{U} = (\det P)^2 P^T U P$ , prouvant que  $Q_U$  est un covariant de poids 2.

Le fait que  $G$  est un covariant de poids 3 s'obtient en appliquant la règle sur le calcul des dérivées partielles d'une composition de fonctions :

$$\begin{aligned} G(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{8} \frac{\partial(Q_{\bar{S}}, Q_{\bar{T}}, Q_{\bar{U}})}{\partial(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)}, \\ &= \frac{1}{8} (\det P) \frac{\partial(Q_{\bar{S}}, Q_{\bar{T}}, Q_{\bar{U}})}{\partial(x_0, x_1, x_2)}, \\ &= \frac{1}{8} (\det P)^3 \frac{\partial(Q_S, Q_T, Q_U)}{\partial(x_0, x_1, x_2)} = (\det P)^3 G(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Le bidegré de ces covariants s'obtient de façon triviale à partir de leur définition. □

**Remarque.** Les covariants  $Q_S, Q_T, Q_U$  et  $G$  ne sont pas algébriquement indépendants. Ils satisfont une syzygie fondamentale qui, quand  $Q_S = Q_T = 0$ , se réduit à

$$G^2 = Q_U^3.$$

Il s'avère que les invariants et covariants que nous venons d'identifier forment un ensemble « complet » et minimal (les covariants sont irréductibles).

**Théorème 4.5** ([GY03]). *Tout covariant rationnel peut s'exprimer rationnellement comme un polynôme à coefficients entiers en  $a, b, c, d, Q_S, Q_T, Q_U$  et  $G$ .*

Soit maintenant  $E$  la matrice symétrique définie par

$$\text{adj}(\lambda S + \mu T) = \lambda^2 S' + \lambda\mu E + \mu^2 T'.$$

Comme précédemment, notons la forme quadratique associée à  $E$  par  $Q_E = \mathbf{u}^T E \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)$ . Soit également  $H$  le Jacobien

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{8} \frac{\partial(Q_{S'}, Q_{T'}, Q_E)}{\partial(u_0, u_1, u_2)}.$$

En procédant comme pour le Lemme 4.4, on montre le résultat suivant.

**Lemme 4.6.**  $Q_E$  et  $H$  sont des contravariants de  $Q_S$  et  $Q_T$  sous l'action de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ .  $Q_E$  est de bidegré  $(1, 1)$  et de poids 2.  $H$  est de bidegré  $(3, 3)$  et de poids 5.

*Démonstration.* Par définition,  $Q_{S'}$  est de bidegré  $(2, 0)$ ,  $Q_E$  est de bidegré  $(1, 1)$  et  $Q_{T'}$  est de bidegré  $(0, 2)$ . Donc clairement  $H$  est de bidegré  $(3, 3)$ .

Quand  $\mathbf{x}$  subit la transformation  $\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{u}$  subit la transformation duale

$$\mathbf{u} = P^* \bar{\mathbf{u}}.$$

où  $P^* = (P^{-1})^T$ . Notons que  $\text{adj}(P) = (\det P) P^{*T}$ . Utilisons comme auparavant une barre horizontale pour désigner les objets transformés. Alors

$$\begin{aligned} \text{adj}(\lambda \bar{S} + \mu \bar{T}) &= \text{adj}(P^T(\lambda S + \mu T)P), \\ &= \text{adj}(P) \text{adj}(\lambda S + \mu T) \text{adj}(P^T), \\ &= (\det P)^2 P^{*T} \text{adj}(\lambda S + \mu T) P^*, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\bar{E} = (\det P)^2 P^{*T} E P^*$ .  $Q_E$  est donc un contravariant de poids 2, tout comme  $Q_{S'}$  et  $Q_{T'}$ .

Notant que  $\det P^* = (\det P)^{-1}$  et appliquant les règles sur la composition de fonctions, on conclue sur le poids de  $H$ .  $\square$

Comme précédemment, le système de contravariants formé par  $a, b, c, d, Q_{S'}, Q_{T'}, Q_E$  et  $H$  est complet et minimal.

## 4.3 Invariants et covariants de formes binaires

Penchons-nous maintenant sur l'action combinée de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  sur les variables d'espace et de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  sur la variable du faisceau. Regardons en premier lieu les combinants d'ordre 0, c.-à-d. les invariants. Heureusement, ils sont aisément identifiables :

**Théorème 4.7** ([AM99, Per02]). *L'anneau des invariants de faisceaux d'hypersurfaces quadratiques dans  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  sous l'action de  $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_2(\mathbb{C})$  est isomorphe à l'anneau des invariants de formes binaires de degré  $n$  sous l'action de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ .*

En accord avec le Théorème 4.7, nous nous intéressons dans un premier temps aux invariants et covariants de la forme caractéristique  $\mathcal{D}$ . Pour cela, nous commençons par une rapide introduction à la théorie des invariants de formes binaires.

### 4.3.1 Transvectants

Pour mettre au jour des générateurs des anneaux d'invariants et covariants de formes binaires, nous introduisons le processus fondamental de la transvection (traduction de *Überschiebung*, terme forgé par le mathématicien allemand Paul Gordan). Ce processus prend la forme d'un opérateur binaire sur l'algèbre des covariants.

Soit  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) un covariant d'une forme  $f$  de degré  $p_1$ , ordre  $q_1$  et poids  $w_1$  (resp.  $p_2, q_2$  et  $w_2$ ). On définit le  $k$ -ième transvectant de  $f_1$  et  $f_2$  comme

$$(f_1, f_2)_k = \frac{(q_1 - k)! (q_2 - k)!}{q_1! q_2!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \frac{\partial^k f_1}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \frac{\partial^k f_2}{\partial y^i \partial x^{k-i}}.$$

(Le facteur de tête n'a d'autre fonction que de lutter contre l'explosion des coefficients.) Alors  $(f_1, f_2)_k$  est un covariant de  $f$  de degré  $p_1 + p_2$ , ordre  $q_1 + q_2 - 2k$  et poids  $w_1 + w_2 + k$ . Notons que  $(f_1, f_2)_k = (-1)^k (f_2, f_1)_k$ , donc  $(f_1, f_1)_k = 0$  quand  $k$  est impair.

La formule définissant un transvectant peut sembler sortir de nulle part, mais elle correspond en fait à la décomposition d'un produit tensoriel dans une certaine base (formule dite de Clebsch-Gordan).

Le processus de transvection généralise certaines opérations bien connues. Prenons  $f_1 = a_1x + a_2y$  et  $f_2 = a_3x + a_4y$ . Alors  $(f_1, f_2)_1 = a_2a_3 - a_1a_4$  est le résultant des deux formes. Si maintenant  $f_1 = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2$ , alors  $(f_1, f_1)_2$  est, à un coefficient près, le discriminant de  $f_1$ .

La transvection peut être utilisée pour construire de nouveaux invariants/covariants à partir de covariants déjà connus. En fait, le premier théorème fondamental de la théorie des invariants affirme que tout invariant et covariant polynomial d'un système de formes peut être construit par itération de l'opérateur de transvection. Plus précisément, tout covariant de  $f$  est une combinaison linéaire sur  $\mathbb{Q}$  de transvectants composés de la forme

$$(\dots, ((f, f)_{r_1}), f)_{r_2}, \dots, f)_{r_l}.$$

Soit  $f$  une forme binaire de degré  $n \geq 3$ . Définissons les entiers  $l, m$  tels que  $m + l = n - 1$  de sorte que si  $n = 2m$  est pair, alors  $l = m - 1$ , tandis que si  $n = 2m + 1$  est impair, alors  $l = m$ . Le seul covariant d'ordre 1 de  $f$  (à un multiple près) est  $f$  lui-même. Il existe  $m$  covariants quadratiques (c.-à-d. de degré 2) indépendants

$$S_k(f) = (f, f)_{2k}, k = 1, \dots, m.$$

$S_k$  est d'ordre  $2n - 4k$  et de poids  $2k$ . En particulier,  $S_1$  est le Hessian de  $f$  et, pour  $n$  pair,  $n = 2m$ ,  $S_m$  est d'ordre 0, c'est donc un invariant de  $f$ . Au-delà, il existe de nombreux covariants cubiques (c.-à-d. de degré 3). Les plus importants sont :

$$T_k(f) = (f, S_k)_1, k = 1, \dots, l.$$

$T_k$  est d'ordre  $3n - 4k - 2$  et de poids  $2k + 1$ .

La détermination d'un ensemble algébriquement indépendant de covariants est un problème extrêmement difficile. Par contre, le théorème de Stroh-Hilbert [Hil93] affirme que les  $n$  covariants fondamentaux  $f, S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_l$  forment une base rationnelle de l'algèbre des covariants de  $f$ .

### 4.3.2 Le cas des cubiques

Revenons maintenant à la forme caractéristique  $\mathcal{D}$  du faisceau de coniques. On s'intéresse aux invariants et covariants de  $\mathcal{D}$ , une cubique [Cre01]. Les covariants rationnels non-constants de  $\mathcal{D}$  sont  $\mathcal{D}$  lui-même, sa Hessienne (degré 2, ordre 2)

$$\mathcal{H}(\lambda, \mu) = -\frac{9}{2}(\mathcal{D}, \mathcal{D})_2 = (b^2 - 3ac)\lambda^2 + (bc - 9ad)\lambda\mu + (c^2 - 3bd)\mu^2,$$

et le Jacobien de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{H}$  (degré 3, ordre 3)

$$\mathcal{G}(\lambda, \mu) = 6(\mathcal{D}, \mathcal{H})_1 = (2b^3 + 27a^2d - 9abc)x^3 + \dots$$

Le seul invariant de  $\mathcal{D}$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  est son discriminant, qui est aussi celui de  $\mathcal{H}$  :

$$\Delta = \frac{2}{3}(\mathcal{H}, \mathcal{H})_2 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

$\Delta$  est égal, à un facteur près, au discriminant classique d'une cubique, à savoir  $-\frac{1}{a} \mathrm{Res}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$  si on considère un instant  $\mathcal{D}$  comme un polynôme en  $\lambda$  (supposant  $a \neq 0$ ). C'est un invariant de bidegré (6, 6). Comme son degré en  $Q_S$  et  $Q_T$  est pair, son signe est également un invariant sous l'action de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ .

On note pour finir que les covariants ne sont pas algébriquement indépendants puisqu'ils satisfont la syzygie suivante :

$$4\mathcal{H}^3 - \mathcal{G}^2 - 3^3\Delta\mathcal{D}^2 = 0.$$

Cette relation explique pourquoi  $\mathcal{G}$  ne jouera aucun rôle dans ce qui suit.

## 4.4 Combinants de faisceaux de coniques

Nous avons identifié dans la section précédente un combinant ( $\Delta$ ) et plusieurs formes combinantes ( $\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{G}$ ) d'un faisceau de coniques projectives. Voyons maintenant comment mettre au jour de nouveaux combinants.

### 4.4.1 Propriétés des covariants et contravariants

On prouve dans un premier temps quelques identités dont on aura besoin plus tard. Pour s'affranchir de certaines restrictions artificielles apparaissant sur les coefficients, on aura fréquemment recours au résultat suivant, dû à Hermann Weyl [Wey46] :

**Théorème 4.8** (Principe de l'absence d'incidence des inégalités algébriques). *Soit  $R$  un domaine d'intégrité (c.-à-d. un anneau commutatif unitaire intègre) infini et  $n$  indéterminées indépendantes  $x_1, \dots, x_n$ . Soient  $p \neq 0$  et  $q$  des polynômes de  $R[x_1, \dots, x_n]$  tels que  $q(r_1, \dots, r_n) = 0$  si  $p(r_1, \dots, r_n) \neq 0$ , pour certains  $r_i$  de  $R$ . Alors  $q \equiv 0$ .*

Prouvons maintenant quelques identités sur les covariants et contravariants de la paire  $Q_S, Q_T$ .

**Lemme 4.9.** *On a les identités suivantes :*

$$aE = bS' - S'TS', \quad dE = cT' - T'ST'.$$

*Démonstration.* On forme le produit de  $\lambda S + \mu T$  avec son adjoint :

$$(\lambda S + \mu T) \operatorname{adj}(\lambda S + \mu T) = \det(\lambda S + \mu T) \mathcal{I}_3,$$

où  $\mathcal{I}_3$  est la matrice identité de taille 3. En développant ce produit, on obtient les identités suivantes par identification terme à terme des coefficients :

$$SE + TS' = b\mathcal{I}_3, \quad ST' + TE = c\mathcal{I}_3.$$

Par suite :

$$S'TS' = S'(b\mathcal{I}_3 - SE) = bS' - aE.$$

De manière similaire,  $T'ST' = cT' - dE$ . □

**Lemme 4.10.** *La forme caractéristique du faisceau dual est :*

$$\det(\lambda S' + \mu T') = a^2\lambda^3 + ac\lambda^2\mu + bd\lambda\mu^2 + d^2\mu^3.$$

*Démonstration.* On écrit :

$$S(\lambda S' + \mu T')T = d\mu S + a\lambda T.$$

En prenant le déterminant à gauche et à droite, on obtient :

$$ad \det(\lambda S' + \mu T') = (d\mu)^3 a + (d\mu)^2 a\lambda b + d\mu(a\lambda)^2 c + (a\lambda)^3 d.$$

On obtient le résultat en supposant dans un premier temps que  $ad \neq 0$  puis en appliquant le Principe de Weyl. □

**Lemme 4.11.** *On a les identités suivantes :*

$$ST'S = cS - U, \quad ST'U = bdS - adT.$$

*Démonstration.* On forme le produit de  $\lambda S' + \mu T'$  avec son adjoint :

$$(\lambda S' + \mu T') \operatorname{adj}(\lambda S' + \mu T') = \det(\lambda S' + \mu T') \mathcal{I}_3.$$

Il suffit de développer ce produit et d'utiliser le Lemme 4.10. On obtient les identités recherchées par identification terme à terme des coefficients, en multipliant à gauche par  $S$ . □

**Lemme 4.12.** *On a les identités suivantes :*

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\lambda S' + \mu T' + \kappa E) = \\ aS\lambda^2 + dT\mu^2 + (cS + bT - U)\kappa^2 + U\lambda\mu + (bS + aT)\lambda\kappa + (dS + cT)\mu\kappa, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\lambda S + \mu T + \kappa U) = \\ S'\lambda^2 + T'\mu^2 + (bdS' + acT' - adE)\kappa^2 + E\lambda\mu + (cS' + aT')\lambda\kappa + (dS' + bT')\mu\kappa. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On note tout d'abord que :

$$\begin{aligned} ad(\lambda S' + \kappa E) &= (a\lambda + b\kappa)dS' - d\kappa S'TS', & (\text{par le Lemme 4.9}) \\ &= (a\lambda + b\kappa)T'TS' - d\kappa S'TS', \\ &= ((a\lambda + b\kappa)T' - d\kappa S')TS'. \end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant l'adjoint à gauche et à droite, en utilisant le développement de  $\text{adj}(\lambda S' + \mu T')$  et en appliquant le Lemme 4.11, on a :

$$\begin{aligned} a^2 d^2 \text{adj}(\lambda S' + \kappa E) &= \text{adj}(S') \text{adj}(T) \text{adj}((a\lambda + b\kappa)T' - d\kappa S'), \\ &= aST'(aS(-d\kappa)^2 + U(-d\kappa)(a\lambda + b\kappa) + dT(a\lambda + b\kappa)^2), \\ &= a^2 d^2 (aS\lambda^2 + (bS + aT)\lambda\kappa + (cS + bT - U)\kappa^2). \end{aligned}$$

On a ainsi déterminé les coefficients de  $\lambda^2$ ,  $\lambda\kappa$  et  $\kappa^2$  dans le développement recherché, la restriction sur  $a$  et  $d$  étant levée par application du Principe de Weyl. Le coefficient de  $\lambda\mu$  étant connu, on obtient les coefficients manquants en calculant, par symétrie,  $\text{adj}(\mu T' + \kappa E)$ .

La seconde identité s'obtient de manière similaire.  $\square$

**Lemme 4.13.** *Soit  $Q_A$  une forme combinante quadratique covariante, d'ordre  $o_2$  en  $\mathbf{w}$ , de poids  $w_1$  (resp.  $w_2$ ) vis-à-vis des transformations de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  (resp.  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ ). Alors  $Q_{\text{adj}(A)}$  est une forme combinante quadratique contravariante, d'ordre  $2o_2$  en  $\mathbf{w}$ , de poids  $2w_1 + 2$  (resp.  $w_2$ ) vis-à-vis des transformations de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  (resp.  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ ).*

*Démonstration.* Soit  $A$  la matrice associée à  $Q_A$ . Soit  $P$  une transformation de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ . Vis-à-vis de cette transformation, la transformée de  $A$  satisfait à la propriété :

$$\bar{A} = (\det P)^{w_1} P^T A P.$$

En prenant l'adjoint, et en notant que  $\text{adj}(P) = (\det P)P^{*T}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\text{adj}(A)} &= \text{adj}(\bar{A}) = (\det P)^{2w_1} \text{adj}(P)A' \text{adj}(P^T), \\ &= (\det P)^{2w_1+2} P^{*T} A' P^*. \end{aligned}$$

Le reste du lemme ne présente pas de difficultés.  $\square$

## 4.4.2 Principaux combinants

Intéressons nous maintenant à la construction de combinants de faisceaux de coniques autres que les invariants et covariants de la forme caractéristique  $\mathcal{D}$ .

Notons tout d'abord que nous avons déjà croisé deux combinants du faisceau :  $G$  et  $H$ , tous deux de bidegré  $(3, 3)$ . L'invariance de  $G$  et  $H$  vis-à-vis des transformations de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$  étant déjà établie, il ne reste qu'à voir l'invariance vis-à-vis des reparamétrages linéaires du faisceau. Or il n'est guère difficile de s'en convaincre : lorsqu'on applique la transformation  $Q_S \mapsto \alpha_1 Q_S + \alpha_2 Q_T$ ,  $Q_T \mapsto \alpha_3 Q_S + \alpha_4 Q_T$ , le covariant  $Q_U$  se transforme en une combinaison linéaire de  $Q_S$ ,  $Q_T$  et  $Q_U$ . Le Jacobien  $G$  des trois formes reste donc inchangé. Il en va de même pour  $H$ .

Pour générer de nouveaux combinants, nous allons utiliser un outil déjà rencontré dans le cadre des formes binaires : la transvection. On va donc partir de formes combinantes et

les composer par transvection pour « éliminer » la variable  $(\lambda, \mu)$  du faisceau. Notons qu'il n'est pas question ici de faire une étude exhaustive des combinants d'un faisceau de coniques, juste de mettre au jour ceux que nous avons identifiés comme étant les plus pertinents pour discriminer simplement entre les orbites de faisceaux.

Des formes combinantes, nous en avons croisé plusieurs : la forme caractéristique  $\mathcal{D}$ , sa Hessienne  $\mathcal{H}$  ou encore

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \lambda Q_S + \mu Q_T.$$

En utilisant le Lemme 4.13, on voit (ce qui n'était guère difficile à observer) que

$$\mathcal{S}(\lambda, \mu) = \lambda^2 Q_{S'} + \lambda\mu Q_E + \mu^2 Q_{T'}$$

est une autre forme combinante, contravariante cette fois-ci. Son discriminant est donc un combinant (contravariant) du faisceau :

$$\mathcal{B} = -2(\mathcal{S}, \mathcal{S})_2 = Q_E^2 - 4Q_{S'}Q_{T'}$$

$\mathcal{B}$  est de bidegré  $(2, 2)$ .

À partir de là, on prouve le résultat suivant :

**Proposition 4.14.** *Le covariant quadratique*

$$Q_{\mathcal{J}} = -cQ_S - bQ_T + 3Q_U$$

est un combinant de bidegré  $(2, 2)$  du faisceau de coniques engendré par  $Q_S$  et  $Q_T$ . Son discriminant est égal à  $\Delta$ .

*Démonstration.* Prenons tout d'abord le deuxième transvectant de  $\mathcal{H}$ , la Hessienne de la forme caractéristique, et de  $\mathcal{S}$  :

$$\frac{1}{72}(\mathcal{H}, \mathcal{S})_2 = 2(c^2 - 3bd)Q_{S'} + (9ad - bc)Q_E + 2(b^2 - 3ac)Q_{T'}.$$

Ce contravariant est un combinant du faisceau. Calculons l'adjoint de la matrice  $\mathcal{K}$  associée, grâce au Lemme 4.12. Cela donne :

$$\Delta(-cS - bT + 3U).$$

Soit  $\mathcal{J}$  la matrice  $-cS - bT + 3U$ . D'après le Lemme 4.13,  $Q_{\Delta\mathcal{J}} = \Delta Q_{\mathcal{J}}$  est un combinant covariant du faisceau.  $\Delta$  étant lui-même un invariant du faisceau,  $Q_{\mathcal{J}}$  est un combinant du faisceau  $(Q_S, Q_T)$ .

En utilisant la seconde identité du Lemme 4.12, on montre que

$$\text{adj } \mathcal{J} = -\mathcal{K}.$$

Prenant l'adjoint à droite et à gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} (\det \mathcal{J})\mathcal{J} &= \text{adj}(\text{adj } \mathcal{J}), \\ &= \text{adj } \mathcal{K} = \Delta\mathcal{J}, \end{aligned}$$

ce qui prouve, avec le Principe de Weyl, que  $\det \mathcal{J} = \Delta$ . □

On sait exactement quels sont les invariants de ce combinant quadratique :

**Corollaire 4.15.** *L'inertie de  $\mathcal{J}$  est un invariant « réel » du faisceau engendré par  $Q_S$  et  $Q_T$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ .*

L'inertie de  $\mathcal{J}$  s'obtient par inspection de son polynôme caractéristique :

$$\det(\ell\mathcal{I}_3 - \mathcal{J}) = \ell^3 - \mathrm{Tr}(\mathcal{J})\ell^2 + \gamma(\mathcal{J})\ell - \Delta.$$

$\mathcal{J}$  étant symétrique, la règle des signes de Descartes [BPR03] nous apprend que le nombre de valeurs propres positives de  $\mathcal{J}$  est le nombre de changements de signes dans la séquence :

$$(+, - \mathrm{sgn}(\mathrm{Tr}(\mathcal{J})), \mathrm{sgn}(\gamma(\mathcal{J})), - \mathrm{sgn}(\Delta))$$

Le nombre de valeurs propres négatives est le nombre de changements de signes dans la séquence :

$$(-, - \mathrm{sgn}(\mathrm{Tr}(\mathcal{J})), - \mathrm{sgn}(\gamma(\mathcal{J})), - \mathrm{sgn}(\Delta))$$

Notons que  $\mathrm{Tr}(\mathcal{J})$  est de bidegré (2, 2) et que  $\gamma(\mathcal{J})$  est de bidegré (4, 4).

**Remarque.** Dans ce qui suit, nous traitons les combinants comme des quantités algébriques dont on évalue le signe ou la nullité sur les orbites de faisceaux de coniques. Nous ne nous sommes pas intéressés à la relation entre ces quantités algébriques et les propriétés « fines » du faisceau (multiplicité des racines, rang des coniques singulières, ...). Par exemple, on peut montrer sans difficulté que  $G$  est identiquement nul si et seulement si il existe une conique de rang 1 (c.-à-d. une droite double) dans le faisceau. Il serait intéressant d'avoir une meilleure compréhension de ces phénomènes et de relier la classification ci-dessous à celle que l'on peut obtenir en analysant les formes canoniques obtenues grâce au Théorème 2.3.

## 4.5 Orbites de faisceaux

Il nous faut maintenant identifier un représentant pour chaque classe d'équivalence de faisceaux de coniques réelles sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ . Pour ce faire, nous pourrions une nouvelle fois avoir recours au théorème des formes canoniques de paires de matrices symétriques réelles d'Uhlig [Uhl76]. Il s'avère que c'est inutile puisque la tabulation, pour le cas restreint des coniques, a déjà été faite par d'autres moyens. Levy [Lev64] identifie ainsi 9 orbites de faisceaux de coniques non-dégénérés (c.-à-d. ayant exactement quatre points de base dans l'espace projectif complexe, comptés avec multiplicité) sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ . Ces orbites appartiennent à 5 groupes (notés I, II, III, IV et V), les orbites de chaque groupe ayant la même morphologie dans l'espace complexe.

Pour chaque orbite, donnons maintenant un (faisceau) représentant, sous la forme d'une paire de générateurs, et la morphologie réelle associée :

- I (quatre points simples) :  $y^2 - z^2 = x^2 - z^2 = 0$  ;
- Ia (ensemble vide) :  $y^2 + z^2 = x^2 + z^2 = 0$  ;
- Ib (deux points simples) :  $yz = x^2 + y^2 - z^2 = 0$  ;
- II (deux points simples et un point double) :  $y^2 - z^2 = xy = 0$  ;
- IIa (un point double) :  $y^2 + z^2 = xy = 0$  ;

- III (deux points doubles) :  $z^2 = x^2 - y^2 = 0$  ;
- IIIa (ensemble vide) :  $z^2 = x^2 + y^2 = 0$  ;
- IV (un point simple et un point triple) :  $xz + y^2 = yz = 0$  ;
- V (un point quadruple) :  $y^2 = z^2 + xy = 0$ .

Pour être complet, ajoutons à cette liste les orbites des faisceaux dégénérés, en s'arrêtant toutefois au cas où le faisceau de coniques se ramène à un faisceau de formes quadratiques binaires :

- VI (conique initiale) :  $x^2 + y^2 \pm z^2 = x^2 + y^2 \pm z^2 = 0$  ;
- VII ( $\mathcal{D} \equiv 0$ , les coniques n'ont pas de point singulier commun) :  $xy = xz = 0$  ;
- VIII+ ( $\mathcal{D} \equiv 0$ , les coniques ont un point singulier commun) : faisceau de formes quadratiques binaires.

## 4.6 Discrimination

Voyons maintenant comment les combinants identifiés à la Section 4.4 permettent de discriminer entre les différentes orbites.

Commençons par le cas où  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) \neq 0$ . En accord avec le Théorème 4.7, notre premier « discriminant » sera le seul invariant du faisceau sous l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , c.-à-d.  $\Delta$ . En calculant le signe de  $\Delta$  pour le représentant de chacune des orbites identifiées précédemment, on obtient sans peine le premier découpage suivant :

- $\Delta > 0$  : I, Ia ;
- $\Delta < 0$  : Ib ;
- $\Delta = 0$  : II, IIa, III, IIIa, IV, V.

Pour  $\Delta < 0$ , il n'y a donc plus rien à faire.

Pour  $\Delta > 0$ , calculons l'inertie de  $\mathcal{J}$ , ce qui donne :

- I :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (3, 0)$ ,
- Ia :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (1, 2)$ .

Pour l'orbite I, on obtient ainsi les conditions suivantes, qui la différencient de l'orbite Ia :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} := \mathrm{Tr}(\mathcal{J}) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{J}) > 0.$$

Passons maintenant au cas  $\Delta = 0$  et évaluons l'inertie de  $\mathcal{J}$  sur chacune des orbites :

- II :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (2, 0)$ ,
- IIa :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (1, 1)$ ,
- III :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (1, 0)$ ,
- IIIa :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (0, 1)$ ,
- IV :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (1, 0)$ ,
- V :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (0, 0)$ .
- VI :  $\mathrm{in}(\mathcal{J}) = (0, 0)$ .

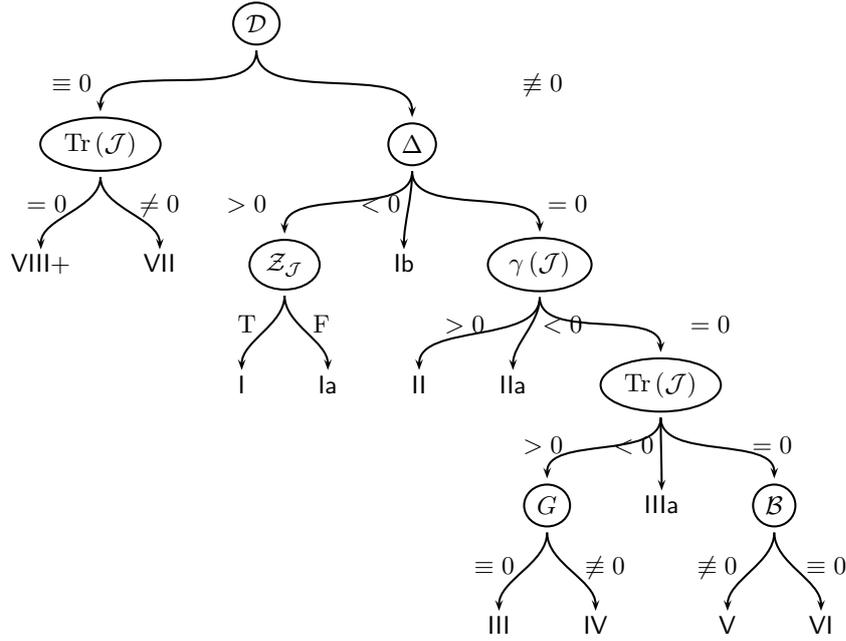


FIG. 4.1 – Caractérisation de l'orbite d'un faisceau de coniques projectives réelles.

On voit donc que le signe de  $\gamma(\mathcal{J})$  permet d'obtenir un nouveau découpage :

- $\gamma(\mathcal{J}) > 0$  : II ;
- $\gamma(\mathcal{J}) < 0$  : IIa ;
- $\gamma(\mathcal{J}) = 0$  : III, IIIa, IV, V, VI.

Quand  $\gamma(\mathcal{J}) = 0$ , le signe de la trace de  $\mathcal{J}$  fournit une nouvelle ligne de partage :

- $\text{Tr}(\mathcal{J}) > 0$  : III, IV ;
- $\text{Tr}(\mathcal{J}) < 0$  : IIIa ;
- $\text{Tr}(\mathcal{J}) = 0$  : V, VI.

Pour discriminer entre les cas restants, il suffit de noter que pour l'orbite III  $\mathcal{H} \neq 0$  et  $G \equiv 0$  alors que pour l'orbite IV  $\mathcal{H} \equiv 0$  et  $G \neq 0$ . Enfin,  $\mathcal{B} \neq 0$  sur l'orbite V et  $\mathcal{B} \equiv 0$  sur l'orbite VI.

**Remarque.** Les deux seuls cas où  $\mathcal{J}$  a plus de valeurs propres négatives que de valeurs propres positives sont exactement les cas où l'intersection est vide (orbites Ia et IIIa).

Passons brièvement en revue le cas où  $\mathcal{D}(\lambda, \mu) \equiv 0$ . Là encore, l'inertie de  $\mathcal{J}$  permet de discriminer :

- VII :  $\text{in}(\mathcal{J}) = (1, 0)$  ;
- VIII+ :  $\text{in}(\mathcal{J}) = (0, 0)$ .

Par conséquent,  $\text{Tr}(\mathcal{J}) \neq 0$  sur l'orbite VII et  $\text{Tr}(\mathcal{J}) = 0$  ailleurs.

On obtient au final l'arbre de décision de la Fig. 4.1. Le principal enseignement de ce travail est que l'on peut discriminer entre les orbites d'un faisceau de coniques projectives réelles avec des prédicats de bidegré au plus (6, 6). En d'autres termes, le discriminant de la forme caractéristique du faisceau est le prédicat le plus « complexe » que l'on ait à évaluer.

Il s'agit là d'une amélioration notable par rapport aux résultats de Briand [Bri07], où la discrimination nécessite un prédicat de bidegré (13, 6).

## 4.7 Exemples

Prenons maintenant deux exemples et appliquons la procédure de décision que nous venons d'établir.

### 4.7.1 Exemple 1

Prenons le faisceau engendré par les deux coniques d'équation :

$$\begin{cases} Q_S : 28x^2 + 12xy - 62xz + 2y^2 - 12yz + 43z^2 = 0, \\ Q_T : -37x^2 - 18xy + 80xz - 3y^2 + 18yz - 52z^2 = 0. \end{cases}$$

La forme caractéristique du faisceau est :

$$\mathcal{D}(\lambda, \mu) = 162\lambda^3 - 567\lambda^2\mu + 648\lambda\mu^2 - 243\mu^3.$$

Le discriminant de cette forme est  $\Delta = 0$ .

Construisons le combinant  $Q_{\mathcal{J}}$ . On commence par déterminer  $U$ . Pour cela, on calcule les adjoints de  $S$  et  $T$ , puis on extrait le coefficient de  $\lambda\mu$  dans l'équation :

$$\text{adj}(\lambda S' + \mu T') = aS\lambda^2 + U\lambda\mu + dT\mu^2.$$

Cela donne, sous forme d'équation :

$$Q_U = 12798x^2 + 5832xy - 28026xz + 972y^2 - 5832yz + 18873z^2.$$

Puis on forme le combinant :

$$Q_{\mathcal{J}} = -cQ_S - bQ_T + 3Q_U = -81(3x + y - 3z)^2.$$

On vérifie que le discriminant de cette conique (c.-à.-d.  $\Delta$ ) est bien nul. On voit également que la conique est de rang 1, i.e.  $\gamma(\mathcal{J}) = 0$ . Enfin,  $\text{Tr}(\mathcal{J}) < 0$ . L'arbre de la Fig. 4.1 nous apprend donc que nous sommes sur l'orbite IIIa. En d'autres termes, l'intersection des deux coniques est vide de points réels.

### 4.7.2 Exemple 2

On souhaite savoir pour quelles valeurs du paramètre  $t$  les deux coniques suivantes sont d'intersection vide :

$$\begin{cases} Q_S : x^2 + 2txy - 4txz + ty^2 + z^2 = 0, \\ Q_T : x^2 + 2xy - 2yz - 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Les invariants fondamentaux de la paire de coniques sont :

$$a = t - t^2 - 4t^3, \quad b = -4t + 7t^2, \quad c = -2 + 7t, \quad d = 2.$$

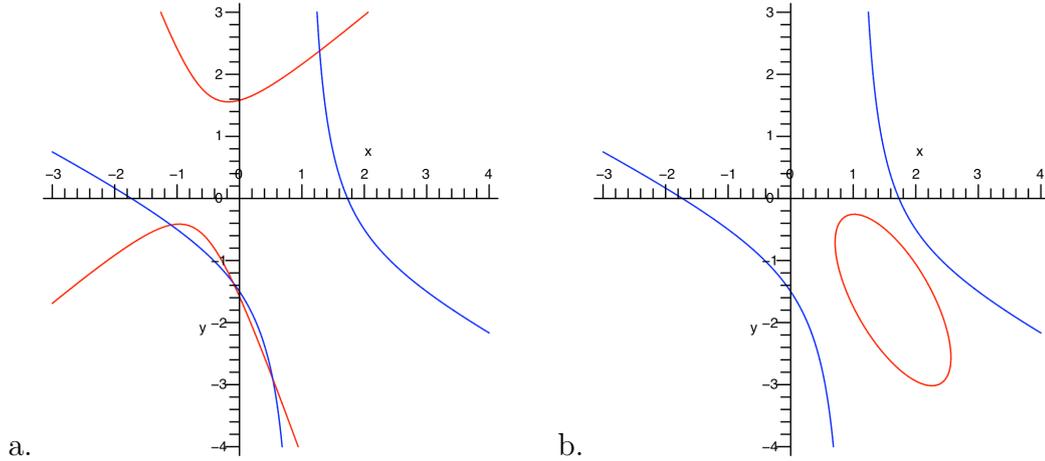


FIG. 4.2 – Intersection d'une conique dynamique (en rouge) et d'une conique fixe (en bleu). a. Cas où l'intersection est constituée de quatre points réels. b. Cas où l'intersection est vide.

On obtient la valeur de  $\Delta$ , un polynôme de degré 6 en  $t$  :

$$\Delta = -t(-32 + 124t + 360t^2 - 1536t^3 - 676t^4 + 3639t^5).$$

$\Delta > 0$  lorsque  $t \in ]-0.582, -0.333[$  et  $t \in ]0, 0.504[$ . Sur chacun de ces intervalles, la morphologie de l'intersection ne change pas. Si c'était le cas, on passerait nécessairement par une intersection singulière, et donc par une valeur de  $t$  annulant  $\Delta$ . La condition

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} = \text{Tr}(\mathcal{J}) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{J}) > 0$$

est donc soit globalement vérifiée sur chaque intervalle, soit globalement violée. Il suffit de la vérifier pour une valeur de  $t$  quelconque appartenant à chaque intervalle. On calcule d'abord

$$\gamma(\mathcal{J}) = -8 + 72t + 20t^2 - 804t^3 + 916t^4, \quad \text{Tr}(\mathcal{J}) = -2 - 26t + 67t^2.$$

Pour le premier intervalle, on évalue par exemple en  $t = t_0 = -1/2$  :

$$\gamma(\mathcal{J})_{t_0} = \frac{475}{4}, \quad \text{Tr}(\mathcal{J})_{t_0} = \frac{111}{4}.$$

Sur cet intervalle, l'intersection est donc constituée de quatre points simples réels (Fig. 4.2.a). Pour le second intervalle, évaluons en  $t = t_1 = 1/2$  :

$$\gamma(\mathcal{J})_{t_1} = -\frac{41}{4}, \quad \text{Tr}(\mathcal{J})_{t_1} = \frac{7}{4}.$$

La condition mentionnée précédemment est violée, et l'intersection est vide sur cet intervalle (cf. Fig. 4.2.b).



# Chapitre 5

## Tangentes communes à quatre sphères

### Résumé

L'objet de ce chapitre est l'étude des instances dégénérées de quadruplets de sphères du point de vue de leurs tangentes réelles communes. On obtient une caractérisation très simple de ces quadruplets : ils doivent avoir leurs centres alignés et au moins une tangente réelle commune. Cette caractérisation se traduit en un ensemble de prédicats de faible degré.

Ce chapitre résume les résultats de l'article [7], repris dans le Chapitre 12 (page 137). L'extension au cas des quadriques est explorée dans l'article [37].

Un problème majeur auquel est confronté le calcul géométrique exact est la prise en compte des instances dégénérées des données en entrée, qui permet de concevoir des algorithmes robustes. Dans les problèmes de visibilité 3D, omniprésents dans les applications de graphisme et de synthèse d'images, on identifie les configurations non-génériques par un ensemble de tangentes de dimension « anormale ».

L'étude des droites (réelles) tangentes à des objets géométriques simples a été très active ces dernières années (cf. [ST06, The03]). Deux directions de recherche ont été particulièrement explorées, la caractérisation des configurations dégénérées et l'énumération des droites satisfaisant certaines contraintes géométriques. En général, ces problèmes sont approchés sous l'angle de l'étude des dégénérescences et le comptage des solutions d'un certain système polynomial. La difficulté réside souvent dans l'élimination des solutions imaginaires, des solutions à l'infini, et des composantes de dimension positive de solutions pour ne retenir que les solutions réelles affines.

Le cas des tangentes aux sphères a été très largement étudié. Macdonald *et al.* [MPT01] ont prouvé que quatre sphères unité disjointes en position générale ont au plus 12 tangentes réelles communes (la borne est atteinte) et qu'elles ont une infinité de tangentes communes si et seulement si leurs centres sont alignés. Dans le cas d'un nombre fini de tangentes et de centres coplanaires mais non alignés, la borne chute à 8 [Meg01]. Par contre, la borne de 12 s'étend au cas de sphères de rayons arbitraires. Sottile et Theobald [ST02] ont prouvé qu'elle s'étend en toute dimension, en montrant qu'il y a  $3 \cdot 2^{n-1}$  tangentes complexes communes à  $2n - 2$  sphères de  $\mathbb{R}^n$  en position générale. De plus, il existe un choix de sphères pour lequel toutes ces tangentes sont réelles.

Génériquement, quatre « objets » de  $\mathbb{R}^3$  ont un nombre fini de tangentes/transversales communes. Des travaux se sont intéressés à caractériser les instances pour lesquelles le nombre de tangentes/transversales réelles est infini, notamment pour trois droites et une sphère [The02], deux droites et deux sphères [MST03], et une droite et trois sphères [MS05].

La question qui nous intéresse ici est la caractérisation des positions de quatre sphères de rayon quelconque ayant une infinité de tangentes réelles communes. Nous apportons la réponse suivante :

**Théorème 5.1.** *Quatre sphères disjointes de  $\mathbb{R}^3$  ont une infinité de tangentes réelles communes si et seulement si elles ont leurs centres alignés et au moins une tangente réelle commune. Ces conditions peuvent être vérifiées par des prédicats polynomiaux de degré au plus 5.*

## 5.1 Préliminaires

### Notations

Les preuves utilisent des points et vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et des espaces projectifs réels et complexes de dimension  $n$ ,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  and  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . On ne fait aucune distinction entre un point  $p$  et le vecteur allant de l'origine du repère à  $p$ . Pour deux points ou vecteurs  $a, b$ , on note  $a \cdot b$  leur produit scalaire et  $|a|^2$  le produit  $a \cdot a$ .

Soit  $\mathcal{S}_i$  la sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $c_i$  et de rayon  $r_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, 4$ . On se place dans un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^3$  et on suppose, sans perte de généralité, que  $c_1$  est l'origine du repère.

### Droites tangentes

Nous commençons par rappeler la description des tangentes communes à quatre sphères comme solutions d'un système polynomial, donnée dans [MPT01]. On représente une droite de  $\mathbb{R}^3$  par son point le plus proche de l'origine  $p \in \mathbb{R}^3$  et son vecteur directeur  $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Soit  $M$  la matrice  $[c_2, c_3, c_4]^T$ , et  $\Phi_0$  et  $\Phi_2(v)$  les vecteurs

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} |c_2|^2 + r_1^2 - r_2^2 \\ |c_3|^2 + r_1^2 - r_3^2 \\ |c_4|^2 + r_1^2 - r_4^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(v) = - \begin{pmatrix} (c_2 \cdot v)^2 \\ (c_3 \cdot v)^2 \\ (c_4 \cdot v)^2 \end{pmatrix}.$$

En traduisant les hypothèses en équations, il n'est guère difficile d'obtenir, après quelques manipulations, la caractérisation suivante :

**Lemme 5.2.** *Les droites tangentes aux quatre sphères  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$  sont les solutions communes  $(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  des équations*

$$p \cdot v = 0, \tag{5.1}$$

$$|p|^2 = r_1^2, \tag{5.2}$$

$$2|v|^2 Mp = \Phi_2(v) + |v|^2 \Phi_0. \tag{5.3}$$

L'approche utilisée pour montrer que quatre sphères ont une infinité de tangentes communes uniquement lorsque leurs centres sont alignés est la suivante. On élimine  $p$  des Équations (5.1)-(5.3), ce qui donne deux courbes dans l'espace projectif 2D des directions. L'intersection de ces deux courbes (une cubique et une quartique lorsque les centres des sphères sont affinement indépendants, une conique et une sextique lorsque les centres sont coplanaires sans que trois d'entre eux soient alignés) encode les directions le long desquelles on observe une tangente commune aux quatre sphères. On prouve ensuite que ces deux courbes ont un nombre fini de points d'intersection lorsque les centres ne sont pas alignés.

L'idée clé de la démonstration est que si deux courbes, considérées comme deux courbes projectives complexes, avaient une composante commune de dimension positive, alors cette composante intersecterait la conique imaginaire  $|v|^2 = 0$  et nous montrons que ce n'est pas le cas. Cette idée est inspirée par la relation entre la Grassmannienne des droites de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  avec le système de coordonnées  $(p, v)$ , bien adapté à la représentation des droites dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Il n'est pas inutile de mettre le doigt sur une difficulté récurrente de ce type de travaux. Alors que, dans les applications, nous sommes en général intéressés par les solutions réelles, le cadre naturel d'étude des problèmes algébriques est le corps des complexes. Ici, nous voulons caractériser les instances dégénérées du problème des tangentes communes à quatre sphères, mais le système d'équations est « nativement » sur  $\mathbb{C}$ . Nos preuves s'orientent ainsi vers la caractérisation des dégénérescences complexes, mais comme leur explicitation complète n'est ni utile ni aisée, les calculs sont court-circuités par des hypothèses de réalité.

Dans ce qui suit, nous donnons l'idée de la preuve dans le cas où les centres sont affinement indépendants. L'autre cas, plus technique, est élaboré dans [7]. Le lecteur intéressé est invité à se reporter au Chapitre 12.

## 5.2 Centres affinement indépendants

Nous indiquons ici comment prouver le résultat recherché dans le cas où les centres sont indépendants.

**Proposition 5.3.** *Quatre sphères dont les centres sont affinement indépendants ont au plus 12 tangentes réelles communes.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que la matrice  $M$  est inversible puisque les centres sont indépendants. Considérant  $(p, v)$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , on a  $|v|^2 \neq 0$  donc les Équations (5.1)-(5.3) sont équivalentes aux trois équations

$$p = M^{-1} \left( \frac{\Phi_2(v)}{2|v|^2} + \frac{1}{2}\Phi_0 \right), \quad (5.4)$$

$$(M^{-1} (\Phi_2(v) + |v|^2 \Phi_0)) \cdot v = 0, \quad (5.5)$$

$$|M^{-1} (\Phi_2(v) + |v|^2 \Phi_0)|^2 = 4r_1^2 |v|^4. \quad (5.6)$$

L'Équation (5.4) exprime le point  $p$  en fonction du vecteur directeur  $v$ , prouvant qu'il y a au plus une droite tangente aux quatre sphères avec une direction donnée. Les autres équations sont une cubique (5.5) et une quartique (5.6) en  $v$ , dont les intersections représentent les directions  $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  le long desquelles il existe une tangente aux quatre sphères. On veut prouver que ces intersections sont en nombre fini dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . On prouve cette propriété dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , par contradiction.

Si la cubique et la quartique ont une composante commune de dimension positive dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , cette composante intersecte la conique  $|v|^2 = 0$ . Montrons que l'intersection de la cubique, de la quartique et de la conique à l'infini est vide. Le système d'équations se simplifie en

$$\begin{cases} |v|^2 = 0, \\ (M^{-1}\Phi_2(v)) \cdot v = 0, \\ |M^{-1}\Phi_2(v)|^2 = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations expriment le fait que  $M^{-1}\Phi_2(v)$  est sur la tangente en  $v$  à la conique lisse  $|v|^2 = 0$ , et la dernière le fait que  $M^{-1}\Phi_2(v)$  est un point de cette conique. Il s'ensuit que  $M^{-1}\Phi_2(v)$  et  $v$  sont un seul et même point projectif. Il existe donc  $\mu \neq 0$  dans  $\mathbb{C}$  tel que

$$M^{-1}\Phi_2(v) = \mu v, \quad \text{c.-à-d.} \quad \Phi_2(v) = \mu Mv.$$

Développer cette dernière égalité donne  $-(c_i \cdot v)^2 = \mu c_i \cdot v$ , pour  $i = 2, \dots, 4$ , ce qui implique que chaque terme  $c_i \cdot v$  vaut soit 0 soit  $-\mu$ . Cela mène à

$$Mv = -\mu \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

où chaque  $a_i$  est égal à 0 ou 1. Soit  $a$  le vecteur des  $a_i$ . En remplaçant  $v = \mu M^{-1}a$  dans l'équation de la conique  $|v|^2 = 0$ , on obtient

$$\mu^2 |M^{-1}a|^2 = 0.$$

Le vecteur  $M^{-1}a$  est réel, donc  $\mu = 0$  ou  $a = 0$ . Dans les deux cas, l'Équation (5.7) implique que  $v = 0$ . Il n'y a donc pas de solution commune à la conique, la cubique et la quartique, donc la cubique et la quartique ne peuvent s'intersecter en une courbe. Par le théorème de Bezout, elles s'intersectent en au plus 12 points réels. Comme il y a au plus une tangente aux quatre sphères avec une direction donnée, le résultat est démontré.  $\square$

### 5.3 Centres colinéaires

On suppose maintenant établi le fait que, pour que quatre sphères aient une infinité de tangentes communes, trois d'entre elles doivent avoir leurs centres alignés. On s'attache ici à finir la preuve du Théorème 5.1.

Pour cela, nous avons besoin d'un lemme intermédiaire.

**Lemme 5.4.** *Les tangentes réelles communes à trois sphères de centres alignés et sans intersection commune sont, si elles existent, le ou les réglages d'une unique quadrique de révolution dont l'axe de symétrie est la droite des centres. Cette quadrique peut être un cône, un cylindre ou un hyperboloïde à une nappe.*

On peut maintenant prouver le Théorème 5.1.

*Démonstration du Théorème 5.1.* Considérons quatre sphères distinctes ayant une infinité de tangentes réelles communes. En vertu des sections précédentes, les centres d'au moins trois des sphères doivent être alignés.

Si ces trois sphères s'intersectent en un cercle, leurs tangentes communes sont les tangentes aux cercles dans le plan le contenant. Pour être tangent à une infinité de ces droites, la quatrième sphère doit contenir ce cercle. Donc les quatre sphères ont leurs centres alignés.

Si les trois sphères n'ont pas d'intersection commune, alors par le Lemme 5.4 leurs tangentes communes forment le ou les réglages d'une quadrique ayant la droite des centres pour axe de révolution. Pour être tangent à une infinité de ces droites, la quatrième sphère doit avoir son centre sur l'axe de révolution, et les quatre sphères ont donc leurs centres alignés.

Inversement, quatre sphères de centres alignés et ayant au moins une tangente réelle commune a une infinité de tangentes réelles communes, par symétrie de révolution. Le résultat est donc établi.  $\square$

## 5.4 Prédicats géométriques

Traduisons maintenant le Théorème 5.1 en prédicats. Supposons que les sphères sont sans intersection commune et que leurs centres se trouvent sur l'axe des  $y$  dans un certain plan  $(x, y)$ . Ce plan intersecte la quadrique de révolution des droites tangentes en une conique symétrique par rapport à l'axe des  $y$ , de forme générale :

$$x^2 + Ay^2 + By + C = 0, \quad A \leq 0, \quad B^2 - 4AC \leq 0.$$

Le plan  $(x, y)$  intersecte aussi les sphères en quatre cercles, de centres  $(0, \alpha_i)$  et de rayons  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , qui sont tangents à la conique. La conique et un cercle sont tangents s'ils s'intersectent en exactement deux points avec la même coordonnée en  $y$ . Cette condition signifie que l'équation

$$(x^2 + Ay^2 + By + C) - (x^2 + (y - \alpha_i)^2 - r_i^2) = 0$$

a une racine double en  $y$ , c.-à-d. que son discriminant en  $y$  s'annule :

$$\delta_i = (B + 2\alpha_i)^2 - 4(A - 1)(C + r_i^2 - \alpha_i^2) = 0.$$

Pour les quatre cercles, cela donne un système de quatre équations en les trois indéterminées  $(A, B, C)$ . Ces quatre équations ont une solution commune si et seulement si la relation obtenue en éliminant  $A, B, C$  est satisfaite. On peut mettre cette relation sous une forme invariante par permutation en fonction des distances orientées  $d_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$  et des rayons des sphères  $r_k$  :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{r_k^2}{\prod_{i \neq k} d_{ki}} = 0. \quad (5.8)$$

Pour obtenir une infinité de tangentes réelles, les coefficients  $A, B, C$  doivent satisfaire aux conditions semi-algébriques

$$A \leq 0, \quad B^2 - 4AC \leq 0. \quad (5.9)$$

On peut obtenir une expression de ces polynômes en fonction des distances orientées et des rayons en résolvant le système  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ , ce qui donne :

$$A = \frac{1}{D} (r_1^2 d_{23} + r_2^2 d_{31} + r_3^2 d_{12}),$$

$$B^2 - 4AC = \frac{1}{d_{23}d_{31}d_{12}D} (r_1 d_{23} + r_2 d_{31} + r_3 d_{12}) (r_1 d_{23} + r_2 d_{31} - r_3 d_{12}) \\ (r_1 d_{23} - r_2 d_{31} + r_3 d_{12}) (r_1 d_{23} - r_2 d_{31} - r_3 d_{12}),$$

où  $D = d_{23} d_{31} d_{12} + r_1^2 d_{23} + r_2^2 d_{31} + r_3^2 d_{12}$ .

Le cas des sphères s'intersectant en un cercle commun (ou tangentes en un point commun) est un cas limite de la situation précédente. Les sphères sont donc sujettes aux mêmes conditions algébriques et semi-algébriques dans ce cas.

Supposons maintenant donnée une configuration de quatre sphères, spécifiées par leur centre  $c_i = (x_i, y_i, z_i)$  et leur rayon  $r_i$ . Exprimer l'alignement des centres se fait trivialement par des prédicats de degré 2 en leurs coordonnées. En outre, on note que

$$\frac{d_{ij}}{d_{ik}} = \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = \frac{y_j - y_i}{y_k - y_i} = \frac{z_j - z_i}{z_k - z_i},$$

donc vérifier la condition de l'Équation (5.8) peut se faire avec un prédicat de degré 5 en les  $c_i$  et  $r_i$ . Pour les prédicats (5.9), il est clair que le signe de  $A$  peut être déterminé par un prédicat de degré 3, tandis que le signe de  $B$  peut être déterminé par des prédicats de degré 2.

# Chapitre 6

## Transversales aux sphères et théorème de type Helly

### Résumé

On continue ici de s'intéresser aux droites interagissant avec des sphères, mais selon un point de vue plus combinatoire. On s'intéresse en particulier aux composantes connexes de droites orientées perçant un ensemble de  $\geq 3$  sphères en dimension quelconque et on montre que les directions de ces droites forment un ensemble convexe. Ce résultat a de nombreuses applications en théorie des droites transversales, que nous explorons.

Ce chapitre résume les résultats de plusieurs articles ([1, 5, 20]), sans en respecter la chronologie. Ces articles sont repris dans les Chapitres 13 (page 139) et 14 (page 141).

En 1923, le mathématicien Eduard Helly démontre un résultat fondamental, de nature combinatoire, sur les ensembles convexes : une famille de convexes de  $\mathbb{R}^d$  est d'intersection non-vide si et seulement si toute sous-famille de taille  $d+1$  est d'intersection non-vide [Hel23]. Ce résultat a ouvert un vaste champ d'investigation connu aujourd'hui sous le nom de théorie des transversales. Son objet est l'étude des  $k$ -plans intersectant tous les éléments d'une famille d'objets de  $\mathbb{R}^d$ . Fidèle à ses origines, la théorie des transversales implique souvent une forme de convexité, soit dans ses hypothèses, soit dans ses preuves, parfois dans les deux.

Passant du cas  $k = 0$  au cas  $k = 1$ , Danzer démontre en 1957 que  $n$  disques unité disjoints dans  $\mathbb{R}^2$  ont une droite transversale commune si et seulement si toute sous-famille de 5 disques admet une transversale commune [Dan57]. La même année, Hadwiger prouve que  $n$  convexes disjoints de  $\mathbb{R}^2$  ont une transversale commune si chaque triplet admet une transversale les perçant dans un ordre fixé [Had57]. L'ordre dans lequel les objets sont rencontrés est donc crucial pour prouver des résultats sur des convexes quelconques.

Ces résultats ont stimulé des recherches, en dimension quelconque, sur deux relations d'équivalence sur les droites transversales : la première, la permutation géométrique, déterminée par l'ordre dans lequel les objets disjoints sont rencontrés (à inversion de l'orientation près) et la seconde, l'isotopie, déterminée par les composantes connexes de l'espace des transversales.

La seconde relation implique la première, c.-à-d. que des droites transversales isotopes induisent la même permutation géométrique. Mais en général, pour  $d \geq 3$ , le fossé entre les deux relations est assez large : il existe des exemples de  $n \geq 4$  objets convexes disjoints ayant un nombre arbitrairement large de composantes de droites transversales pour le même ordre [GPW93]. Les familles d'objets pour lesquelles les deux notions coïncident sont donc « remarquables ». Le premier exemple d'une telle famille, identifié par Hadwiger [Had56],

est celui des boules « faiblement distribuées »<sup>1</sup>. Les travaux de Holmsen *et al.* [HKL03] et Cheong *et al.* [CGH05] ont permis d'identifier une deuxième famille remarquable : les boules unité de  $\mathbb{R}^3$ .

Le résultat de Danzer [Dan57] a motivé plusieurs tentatives pour généraliser le théorème de Helly au cas  $k = 1$ , c.-à-d. pour des droites transversales. Hélas, le cas  $k = 1$  semble beaucoup plus sensible à la géométrie des objets. Holmsen et Matoušek ont ainsi montré qu'il n'existait pas de théorème de type Helly pour les droites transversales quand les objets sont des translats d'objets convexes, pas même avec une restriction sur l'ordre (à la Hadwiger) [HM04].

Nous montrons ici que les boules disjointes, en dimension arbitraire, fournissent une famille remarquable du point de vue des droites transversales, englobant les familles connues précédemment. Hélas, cette famille n'admet pas de théorème de type Helly pour les droites transversales. Par contre, nous prouvons le premier théorème de type Helly en toute dimension pour une famille plus restreinte, celle des boules congruentes. Ce théorème établit une conjecture due à Danzer [Dan57].

Ces résultats reposent sur une propriété de convexité de l'ensemble des directions de droites perçant les boules dans un ordre donné.

**Théorème 6.1.** *Les directions de toutes les droites orientées intersectant une famille finie de boules disjointes de  $\mathbb{R}^d$  dans un ordre fixé forment un sous-ensemble strictement convexe de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .*

Dans la démonstration de ce théorème, la partie difficile concerne le cas de 3 boules dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous commençons donc par esquisser la preuve dans ce cas, avant de passer en dimension arbitraire pour  $n$  boules. Nous explorons ensuite les conséquences de ce résultat.

## 6.1 Préliminaires

On se donne trois boules  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  de centres respectifs  $c_1, c_2, c_3$  et de rayons au carré  $s_1, s_2, s_3$ ,  $s_k = r_k^2$ . Le cas des centres colinéaires étant aisément déduit du cas générique, on suppose que le triangle des centres est non dégénéré.

On s'intéresse au *cône des directions*  $K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$ , c'est-à-dire à l'ensemble des directions de droites transversales orientées rencontrant les boules dans l'ordre  $\mathcal{S}_1 \prec \mathcal{S}_2 \prec \mathcal{S}_3$ .

La direction d'une droite orientée peut être représentée par un point sur la sphère unité, ou par le rayon émanant de l'origine et passant par ce point. L'expression « cône des directions » vient de cette dernière représentation, qui convertit des questions de convexité dans  $\mathbb{S}^2$  en questions équivalentes dans  $\mathbb{R}^3$ .

## 6.2 Cône des directions

On s'intéresse dans un premier temps à caractériser le bord du cône des directions. Soit  $\sigma$  la courbe des directions de droites tangentes aux trois boules  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ . Il s'avère qu'une partie de  $\sigma$  apparaît sur le bord du cône.

---

<sup>1</sup>Une famille de boules est dite faiblement distribuée si, pour toute paire de boules, la distance entre leurs centres est supérieure à deux fois la somme de leurs rayons.

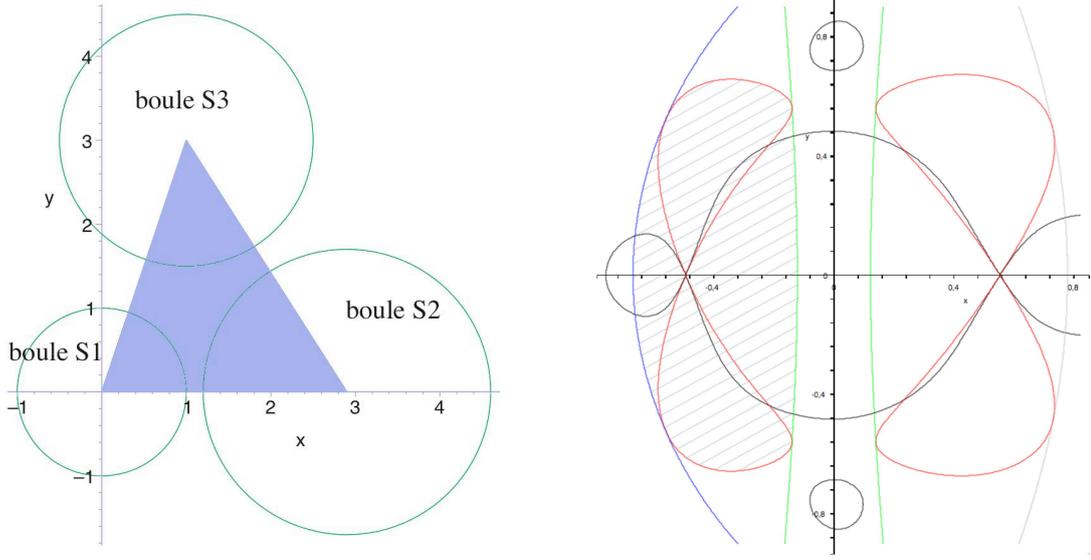


FIG. 6.1 – Illustration du cône de directions de trois boules. La sextique des directions est en rouge, sa Hessienne en noir. La région hachurée correspond aux directions de transversales à trois boules dans l'ordre  $\mathcal{S}_1 \prec \mathcal{S}_2 \prec \mathcal{S}_3$ , l'arc bleu correspondant aux bitangentes internes spéciales des boules  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$  et l'arc vert aux bitangentes internes spéciales des boules  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

On reprend les notations du chapitre précédent : une droite de  $\mathbb{R}^3$  est représentée par son point le plus proche de l'origine  $p \in \mathbb{R}^3$  et son vecteur directeur  $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Pour prendre avantage des symétries du problème, introduisons les vecteurs  $e_{ij} = c_j - c_i$ , notons  $\delta_{ij} = |e_{ij}|^2$  leurs normes au carré et écrivons

$$q = q(v) = |v|^2,$$

$$t_{ij} = t_{ji} = |e_{ij} \times v|^2 = \delta_{ij}q - (e_{ij} \cdot v)^2.$$

On obtient l'expression de  $\sigma$  en éliminant  $p$  des Équations (5.1)-(5.3) (Lemme 5.2 du chapitre précédent) :

**Proposition 6.2.** *La courbe  $\sigma$  des directions de transversales aux trois boules est une sextique d'équation :*

$$\sigma = \sigma(v) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & qs_1 & qs_2 & qs_3 \\ 1 & qs_1 & 0 & t_{12} & t_{13} \\ 1 & qs_2 & t_{12} & 0 & t_{23} \\ 1 & qs_3 & t_{13} & t_{23} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le bord du cône  $K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  consiste en certains arcs de la sextique des directions  $\sigma$  et certains arcs de directions de bitangentes internes spéciales, c.-à-d. de tangentes à deux boules passant par leur centre de similitude interne. Dans  $\mathbb{P}^2$ , ces bitangentes spéciales tracent une conique (circulaire). La Figure 6.1 illustre un cône de directions de tangentes à trois boules. Le plan de la figure doit être compris comme une partie affine  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$ .

Les points de  $\sigma$  apparaissant sur le bord  $\partial K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  du cône peuvent être caractérisés comme suit :

**Proposition 6.3.** *La direction d'une tritangente  $\ell$  rencontrant les boules  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  dans l'ordre prescrit appartient à  $\partial K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  si et seulement si  $\ell$  intersecte le triangle des centres  $c_1c_2c_3$ .*

On prouve enfin la propriété suivante, dont une conséquence est que les cônes de directions (et les composantes connexes de transversales) de trois boules disjointes de  $\mathbb{R}^3$  sont contractibles, c.-à-d. homotopes à un point.

**Proposition 6.4.** *Soient trois boules  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  disjointes. Alors :*

- (i) *le cône des directions  $K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  consiste en un unique point si et seulement si il existe une tritangente dans le plan des centres qui « cloue » la configuration des trois boules, c.-à-d. telle que la trace de  $\mathcal{S}_2$  sur le plan ne soit pas du même côté de la tritangente que les traces de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_3$  ;*
- (ii) *dans tous les autres cas, le cône des directions  $K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  est la fermeture de son intérieur.*

### 6.3 Absence d'inflexion sur le bord du cône

Après avoir décrit le bord du cône, on souhaite maintenant montrer que ce bord ne comporte aucune inflexion et mettre en œuvre des arguments de convexité. Il n'est pas inutile de garder présent à l'esprit que les régions de  $\mathbb{P}^2$  déterminées par les directions de droites transversales sont toujours contenues dans la région simplement connexe définie par une certaine conique lisse (qui est homéomorphe à un disque, l'autre région étant homéomorphe à un ruban de Möbius). Pour tester la convexité, on peut utiliser des cartes affines  $\mathbb{R}^2$  et vérifier localement, puis globalement, que le bord du cône « reste du même côté de sa tangente ».

Si cette propriété n'était pas vérifiée en un point, on se trouverait en présence d'un point d'inflexion. On prouve donc le résultat suivant :

**Proposition 6.5.** *Pour trois boules  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  disjointes, tout arc de la sextique des directions  $\sigma$  apparaissant sur le bord  $\partial K(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$  de leur cône des directions ne contient aucune inflexion ou singularité entre ses points extrémaux.*

Inflexions et points singuliers de  $\sigma$  sont localisés à son intersection avec sa Hessienne [BK86]. Rappelons que le Hessien de  $\sigma$  est défini comme le déterminant de la matrice des dérivées secondes :

$$H(\sigma) = H(\sigma)(v) = \det \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v_i \partial v_j} \right).$$

La courbe Hessienne (ou simplement la Hessienne) de  $\sigma$  est la courbe projective définie par l'ensemble des zéros de ce déterminant.

Ce qui est essentiel ici est d'obtenir un contrôle suffisant sur les inflexions de  $\sigma$ . Au premier abord, le fait que l'intersection de  $\sigma$  et de sa Hessienne  $H(\sigma)$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  aient  $6 \times 12 = 72$  points (comptés avec multiplicité) laisse peu d'espoir sur la possibilité de « pister » les inflexions. Fort heureusement, il y a une autre manière d'exploiter la Hessienne : on fixe une direction et on considère les configurations de boules ayant une tritangente avec la direction fixée et donnant la même configuration de quatre points (tangente et centres) lorsqu'on projette sur un plan orthogonal ; on exprime ensuite les Hessiennes des sextiques de directions associées et on cherche celles qui peuvent s'annuler pour la direction donnée.

Suivant la Proposition 6.3, il suffit de s'intéresser aux directions de tangentes aux trois boules qui intersectent le triangle des centres et ne sont pas des directions de bitangentes internes spéciales. En projetant le long de la tangente sur un plan orthogonal, les centres projetés forment un triangle contenant l'image de la tangente. On peut partir de cette configuration planaire, un triangle et un point intérieur, et se demander : quelles configurations de boules donnent cette configuration planaire par projection ? Les rayons des boules étant fixés, il suffit de « relever » les sommets du triangle dans la direction de la normale au plan et obtenir les configurations recherchées.

On équipe  $\mathbb{R}^3$  avec un repère tel que le triangle projeté vit dans le plan  $e_3^\perp \subset \mathbb{R}^3$  et a ses sommets en  $\tilde{c}_1 = 0, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ , avec l'idée qu'il existe un point intérieur au triangle à distances au carré  $s_i$  de ces sommets. On utilise alors trois paramètres réels  $x_1, x_2$  et  $x_3$  pour décrire les positions possibles des centres des boules :

$$c_1 = \tilde{c}_1 + x_1 e_3, \quad c_2 = \tilde{c}_2 + x_2 e_3, \quad c_3 = \tilde{c}_3 + x_3 e_3.$$

Grâce à la Proposition 6.2, on exprime  $\sigma$  et sa Hessienne  $H(\sigma)$  comme fonctions de  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  dépendant de  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, s_1, s_2, s_3$ . La Proposition 6.5 est maintenant équivalente à prouver que

$$H(\sigma)(0, 0, 1) \neq 0$$

pour toutes les données initiales (triangle et point intérieur) et tous les  $(x_1, x_2, x_3)$  correspondant à des boules disjointes. Cette preuve, purement calculatoire, est donnée dans le Chapitre 14 (page 141).

## 6.4 Convexité du cône

La convexité du cône des directions  $K(\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3)$ , dans le cas générique, est une conséquence de la propriété suivante : une boucle simple  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$  sans inflexion borne un intérieur convexe [Top06]. La stricte convexité s'obtient avec la Proposition 6.4.

**Lemme 6.6.** *Le cône des directions  $K(\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3)$  d'un triplet générique de boules disjointes de  $\mathbb{R}^3$  est strictement convexe.*

Le passage du cas générique au cas général est basé sur le lemme suivant :

**Lemme 6.7.** *Soit  $\mathcal{B} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$  une configuration de trois boules disjointes. Supposons que  $K(\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3)$  est d'intérieur non-vide. Si  $\mathcal{B}$  est la limite d'une suite de configurations  $\mathcal{B}^{(\nu)}$  dont le cône des directions associé est convexe, alors  $K(\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3)$  est convexe également.*

On a donc maintenant prouvé le Théorème 6.1 pour le cas de 3 boules de  $\mathbb{R}^3$ . Donnons maintenant la preuve pour  $n$  boules de  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration du Théorème 6.1.* Pour une collection de boules fixée dans  $\mathbb{R}^3$ , il existe une transversale aux boules avec une certaine direction si et seulement si les projections orthogonales des boules sur un plan perpendiculaire à cette direction ont une intersection non-vide. Par le Théorème de Helly dans le plan, le cône des directions pour une séquence de  $n \geq 3$  boules est l'intersection des cônes de directions pour tous ses triplets. Le cône des directions pour  $n$  boules ordonnées de  $\mathbb{R}^3$  est donc strictement convexe pour tout  $n$ .

Étant donnée une séquence  $\mathcal{S}$  de  $n$  boules disjointes de  $\mathbb{R}^d$ , soit  $K$  son cône de directions de transversales perçant les boules dans un ordre prédéfini. Soient  $u$  et  $v$  deux directions de  $K$ ,  $\ell_u$  et  $\ell_v$  deux droites transversales correspondant à ces directions et soit  $E$  l'espace affine à 3 dimensions engendré par ces deux droites (ou un espace à 3 dimensions contenant le plan qu'elles engendrent si elles sont coplanaires).  $E \cap \mathcal{S}$  est une collection de boules disjointes de  $\mathbb{R}^3$  dont le cône des directions est convexe sur  $\mathbb{S}^2$ , d'après le Théorème 6.1. Donc, pour toute direction sur le petit arc de grand cercle joignant  $u$  et  $v$ , il existe une transversale aux boules de  $\mathcal{S}$  respectant l'ordre prescrit, puisqu'une telle transversale existe déjà dans  $E$ . Par conséquent,  $K$  est convexe et, de surcroît, strictement convexe d'après le cas 3D.  $\square$

Pour être complet, il reste à noter que le cas de boules disjointes est en quelque sorte le cas limite entre convexité et non-convexité du cône des directions. La Figure 6.2 illustre l'apparition d'une composante non-convexe au moment où deux boules entrent en contact.

## 6.5 Implications

Nous explorons maintenant certaines conséquences du Théorème 6.1 en théorie des droites transversales.

### 6.5.1 Boules disjointes de rayon arbitraire

Un corollaire immédiat du Théorème 6.1 est la correspondance entre isotopie et permutations géométriques pour les droites transversales aux boules disjointes :

**Corollaire 6.8.** *L'ensemble des droites transversales à  $n$  boules disjointes de  $\mathbb{R}^d$  réalisant la même permutation géométrique est contractible.*

La famille des boules disjointes est donc « remarquable ». Cette propriété permet de traduire des résultats connus sur les permutations géométriques en résultats sur les composantes connexes de transversales. Smorodinsky *et al.* [SMS00] ont ainsi montré que, dans le pire cas,  $n$  boules disjointes de  $\mathbb{R}^d$  ont  $\Theta(n^{d-1})$  permutations géométriques. La même borne s'applique donc pour les composantes connexes de transversales, ce qui améliore les bornes précédemment connues de  $O(n^{3+\epsilon})$  pour  $d = 3$  et de  $O(n^{2d-2})$  pour  $d \geq 4$ , dues à Koltun et Sharir [KS03]. Si les rayons des boules sont dans un intervalle  $[1, \gamma]$ , où  $\gamma$  est indépendant de  $n$  et  $d$ , alors le nombre de composantes connexes de transversales est en  $O(\gamma^{\log \gamma})$ , reflétant une borne sur le nombre de permutations géométriques obtenue par Zhou et Suri [ZS03].

Donnons maintenant quelques résultats dans l'esprit de la théorie des transversales. On définit une *configuration de clouage minimale* comme une collection d'objets ayant une droite transversale isolée qui cesse d'être isolée dès qu'on retire un des objets de la configuration. Un élément-clé de la preuve du Théorème de Hadwiger [Had57] est l'observation que, dans le plan, toute configuration de clouage minimale d'objets convexes disjoints est de cardinal 3.

On souhaite donner un résultat de ce type pour des sphères disjointes. Pour cela, on met en œuvre une version topologique du Théorème de Helly, dans une forme due à Debrunner [Deb70]. Rappelons qu'une cellule d'homologie est un ensemble non-vide dont l'homologie est triviale.

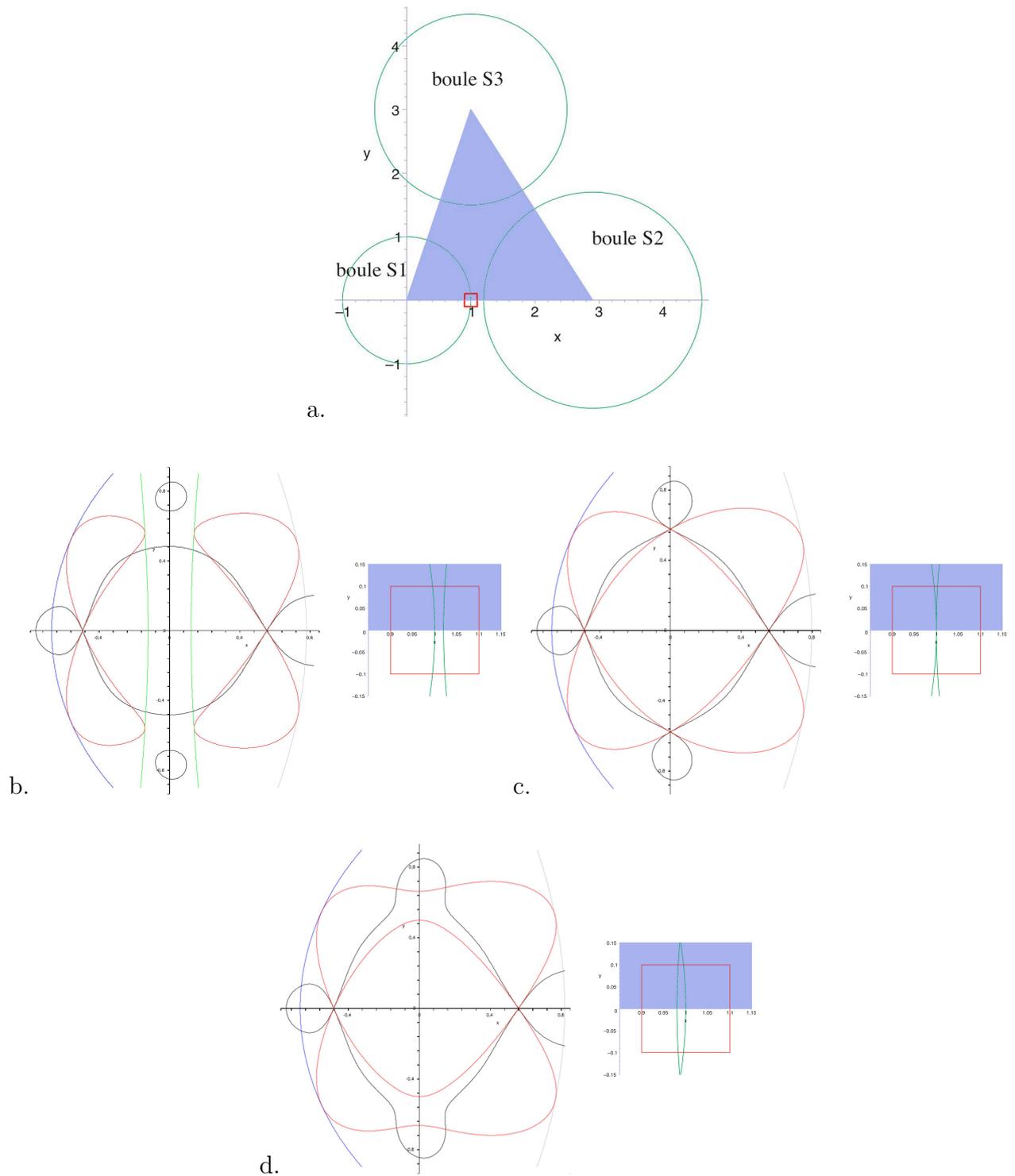


FIG. 6.2 – a. La trace de trois boules disjointes sur le plan des centres, avec la boule  $\mathcal{S}_2$  se déplaçant sur l'axe horizontal en direction de la boule  $\mathcal{S}_1$ . Le carré rouge est la zone où l'on zoom pour les figures suivantes. b. c. d. La sextique des directions (en rouge), sa Hessienne (en noir) et les coniques de bitangentes intérieures spéciales (en bleu, vert et gris), quand les boules  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont disjointes (b), tangentes (c) et s'intersectent transversalement (d).

**Théorème 6.9** (Helly topologique). *Soit  $\{X_j\}_{j \in J}$  une famille finie d'ouverts de l'espace  $\mathbb{R}^d$  telle que l'intersection  $X_{j_1} \cap \dots \cap X_{j_r}$  de chaque paquet de  $r$  ensembles de cette famille soit non-vide pour  $r \leq d + 1$  et soit en outre une cellule d'homologie pour  $r \leq d$ . Alors  $\bigcap_{j \in J} X_j$  est une cellule d'homologie.*

Pour conclure, on note dans un premier temps que la Grassmannienne des droites de  $\mathbb{R}^d$  est de dimension  $2d - 2$ . On peut paramétrer les droites transversales à une collection de boules par leurs points d'intersection avec deux hyperplans parallèles formant un angle positif avec les directions des droites. En imposant que les transversales soient « compatibles » avec une suite de boules, on montre qu'elles forment un sous-ensemble contractible de  $\mathbb{R}^{2d-2}$ . En utilisant une version allégée du Théorème 6.9, où « cellule d'homologie » est remplacé par « ensemble contractible », on obtient une borne sur la taille d'une configuration de clouage :

**Proposition 6.10.** *Toute configuration de clouage minimale de boules disjointes de  $\mathbb{R}^d$  est de cardinal au plus  $2d - 1$ .*

Enfin, on reproduit la preuve du Théorème de Hadwiger pour arriver au résultat suivant :

**Théorème 6.11.**  *$n$  boules ordonnées disjointes de  $\mathbb{R}^d$  admettent une droite transversale si toute sous-famille de taille au plus  $2d$  a une transversale respectant l'ordre.*

### 6.5.2 Boules disjointes de rayon 1

Pour prouver un résultat de type Helly, c.-à-d. sans contrainte sur l'ordre, il est nécessaire de restreindre la famille de boules considérée. On suppose donc ici que les boules sont toutes de rayon 1. On peut alors utiliser le résultat suivant :

**Théorème 6.12** ([CGN05]). *Soit une famille de au moins neuf boules unité disjointes de  $\mathbb{R}^d$ . Alors cette famille admet au plus deux permutations géométriques distinctes.*

L'idée est maintenant la suivante. On se donne une famille  $\mathcal{F}$  de boules unité, dont toute sous-famille de taille  $4d - 1$  a une transversale. On contracte uniformément les boules jusqu'à ce qu'une famille  $\mathcal{F}'$  de taille  $4d - 1$  soit sur le point de perdre sa dernière transversale. Si  $\mathcal{F}'$  admet plus d'une transversale, chacune d'entre elles doit réaliser une permutation géométrique différente. Comme il y en a au plus 2 (Théorème 6.12),  $\mathcal{F}'$  a deux transversales  $\ell_i$ . Par la Proposition 6.10, il existe, pour chaque  $\ell_i$ ,  $2d - 1$  boules de  $\mathcal{F}'$  pour lesquelles  $\ell_i$  est la seule transversale respectant l'ordre qu'elle induit. Il y a donc une sous-famille  $\mathcal{F}''$  de taille  $4d - 2$  de  $\mathcal{F}'$  pour laquelle  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont les seules transversales respectant leur ordre respectif. Comme toute sous-famille de  $4d - 1$  boules admet une transversale, toute boule de  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}''$  doit intersecter  $\ell_1$  ou  $\ell_2$ . On peut donc trouver une boule  $A$  qui intersecte, disons,  $\ell_1$ . Alors  $\mathcal{F}'' \cup \{A\}$  admet une unique transversale, qui intersecte toutes les boules de  $\mathcal{F}$ .

On arrive à la conclusion suivante, le premier théorème de type Helly pour les droites transversales en toute dimension :

**Théorème 6.13.** *Une famille finie de boules unité disjointes de  $\mathbb{R}^d$  admet une droite transversale si toute sous-famille de taille au plus  $4d - 1$  admet une transversale.*

# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

### 7.1 Conclusions

J'ai présenté dans ce document un ensemble de contributions tournant autour du calcul géométrique pour les objets courbes simples. Ces contributions incluent : une étude complète du problème du paramétrage de l'intersection de quadriques, incluant un catalogue de tous les types réels d'intersection et des résultats montrant la (quasi-)optimalité des paramétrages calculés du point de vue de la complexité algébrique ; un ensemble de prédicats de faible degré pour la caractérisation de l'intersection réelle de coniques projectives ; une caractérisation des cas où quatre sphères ont une infinité de tangentes réelles communes ; et un ensemble de résultats sur les droites transversales aux sphères, culminant avec un théorème de type Helly pour les droites transversales en toute dimension.

Les résultats présentés dans cette thèse amènent quelques commentaires. Tout d'abord, il me semble important de souligner que des progrès substantiels voire importants ont été réalisés sur des problèmes pourtant très largement étudiés par le passé. Je pense par exemple à l'intersection de quadriques, où le passage à un cadre projectif a permis de réaliser un bon en avant considérable. Après avoir travaillé plusieurs années sur le sujet, il me semble aujourd'hui évident que c'est le « bon » point de vue, ou en tout cas le plus naturel. Dieu sait pourtant qu'il a fallu du temps avant que cette évidence s'impose, avant, finalement, de parvenir à s'extraire de l'existant pour proposer un angle d'attaque nouveau.

Les mathématiques mises en œuvre dans ce document n'ont, pour l'essentiel, rien de contemporaines. Géométrie projective, géométrie complexe classique, théorie des invariants, théorie des droites, algèbre linéaire, tout cela remonte à fort loin. La richesse des mathématiques du 19<sup>e</sup> siècle semble infinie pour aborder les problèmes rencontrés en calcul géométrique. Les œuvres complètes de génies comme Arthur Cayley (plus de 900 articles !) sont loin d'avoir livrées tous leurs secrets.

Ce qui m'amène à mon troisième commentaire. Parmi les outils utilisés et utilisables, je réserve une place de choix à la théorie classique des invariants. J'espère avoir montré avec le Chapitre 4 que cette théorie, en en spécialisant certains résultats sur les réels, donnent des réponses à peu de frais sur des problèmes de caractérisation de dégénérescences. Je compte rapidement étendre les résultats obtenus pour les coniques au cas des quadriques.

Un problème sur lequel la théorie des invariants pourrait apporter des réponses est celui de l'optimalité des prédicats géométriques. La question est ici de savoir quelle est la complexité « intrinsèque » d'une question de nature géométrique, si tant est que cette question ait un sens. Par exemple, quel est le degré minimum du prédicat encodant la question « Deux surfaces données s'intersectent-elles ? ». Un prédicat donné peut-il être décomposé

en prédicats de plus faible degré ? Il semble naturel que la théorie des invariants puisse apporter des réponses dans ce cadre. Mais il faut clarifier ce qui peut être dit et dans quel cadre (réels ou complexes ?). Je travaille actuellement avec des algébristes pour tenter de donner des réponses au moins partielles à ce problème qui, dans sa pleine généralité, semble particulièrement difficile.

## 7.2 Perspectives

Dans ce qui suit, je donne une description détaillée de mon programme de recherche intitulé

*Calcul géométrique effectif avec des objets courbes de faible degré  
(ou quand l'algèbre rencontre la géométrie)*

Les trois directions de recherches que je poursuivrai dans les années à venir sont les suivantes : intersection de surfaces de faible degré et problèmes de taille constante connexes, arrangements de quadriques et applications, et aspects algébriques de la visibilité 3D et de la théorie des droites.

### 7.2.1 Intersection de surfaces de faible degré et problèmes de taille constante connexes

Les surfaces algébriques réelles de faible degré (quadriques, cubiques et quartiques) représentent un bon compromis entre simplicité, flexibilité et pouvoir de modélisation. Elles jouent un rôle de premier plan dans la construction de modèles informatiques fidèles d'environnements physiques à des fins de simulation et de prototypage, dans les domaines de la conception industrielle, de l'architecture et du *manufacturing*. Malgré cette ubiquité et des décennies de recherche dans la communauté de CGAO/CAO, ces surfaces sont loin d'être suffisamment bien maîtrisées pour être manipulées robustement et efficacement par les algorithmes géométriques.

Dans ce contexte, je me concentrerai sur des problèmes de taille constante liés à l'intersection de surfaces de faible degré, améliorant notre travail sur les quadriques et l'étendant dans plusieurs directions : pour mieux comprendre les dégénérescences possibles, pour plus facilement reconnaître la morphologie de l'intersection, pour prendre en compte des primitives plus complexes, et pour travailler en dimension supérieure.

**Identification et reconnaissance des types d'intersection.** L'objet principal d'étude lorsque l'on travaille sur l'intersection de quadriques est leur faisceau, c.-à-d. l'ensemble des combinaisons linéaires des deux quadriques. En dehors de l'étape de paramétrage proprement dite, notre travail sur les quadriques a nécessité 1. l'identification de tous les types possibles de faisceau, et donc toutes les morphologies de l'intersection, sur les réels (phase d'énumération) ; et 2. la détermination de la morphologie réelle de l'intersection (ou de l'orbite de faisceau) d'une paire de quadriques donnée (phase de classification).

En 3D, la phase d'énumération est déjà très conséquente. Utilisant le théorème des paires canoniques de formes quadratiques d'Uhlir [Uhl76], nous avons identifié plus de 50 types différents de faisceaux réels (le nombre d'orbites étant encore plus grand). Malheureusement,

tout le travail a dû être fait à la main, au cas par cas. Aucune méthode n'est connue pour éviter cette longue analyse et produire automatiquement une liste de toutes les classes possibles de faisceaux de même qu'un représentant canonique par classe. Cela constitue évidemment un obstacle pour l'extension des résultats en dimension supérieure, où le nombre de cas augmente de façon exponentielle. Les solutions à ce problème ne sont connus que dans quelques cas très restreints (cf. [AG91]) et je chercherai à les étendre.

Dans la phase de classification, des informations sont extraites d'une paire de quadriques donnée pour déterminer les types complexe et réel du faisceau qu'elles engendrent. Cette étape procède par calcul d'attributs du faisceaux identifiés comme discriminants les différentes classes dans la phase d'énumération. Cette procédure marche parfaitement, mais elle a un défaut : le contrôle sur le degré des prédicats nécessaires pour « classifier » le faisceau est quelque peu perdu par les constructions intermédiaires qui sont faites (racines multiples et quadriques associées). Heureusement, il y a une porte de sortie et il est possible de calculer des expressions simples, fonctions directes des coefficients des quadriques en entrée, qui permettent de mener à bien la classification. Il faut pour cela faire un crochet par la théorie classique des invariants. Briand [Bri07] a fait un pas dans cette direction et proposé une classification complète des faisceaux de coniques avec des quantités invariantes construites à base de résultants et de requêtes de Sturm. Cependant, certains des prédicats proposés sont inutilement compliqués et ne sont pas symétriques en les deux quadriques. Des résultats préliminaires, présentés dans le Chapitre 4, montrent que des prédicats plus simples peuvent être obtenus en étudiant une catégorie d'invariants connus sous le nom de combinants. Je m'intéresse actuellement à l'extension de cette approche aux faisceaux de quadriques.

Les prédicats les plus importants, en pratique, sont ceux qui gouvernent la question « deux surfaces s'intersectent-elles ? ». Pour le cas des coniques, mon travail sur les combinants fournit une réponse plus simple que celle qui est actuellement connue [Bri07]. Pour les quadriques, les prédicats correspondants sont beaucoup moins bien maîtrisés. Une caractérisation d'intersection vide (due à Finsler [Fin37]) est connue en toute dimension, mais elle ne se prête guère à une implantation à base de prédicats. J'ai bon espoir que l'approche à base de combinants fournisse des prédicats de faible degré pour réaliser cette requête. Un cas particulièrement intéressant est celui des ellipsoïdes. En effet, ces surfaces sont fréquemment utilisées comme volumes englobants pour les formes 3D libres [CCW+06]. L'extension en dimension supérieure sera également étudiée.

Ce dernier point nous amène à une autre direction de recherche à potentiel : l'intersection de primitives de type restreint. En supposant que les surfaces à intersecter appartiennent à un sous-ensemble de l'ensemble naturel dont elles dépendent (par exemple : les ellipsoïdes, par opposition à la classe complète des quadriques), il est peut-être possible de trouver des prédicats de meilleur degré que les prédicats « généraux ». Travaillant en ce sens, Etayo *et al.* [EGdR06] ont caractérisé les positions relatives de deux ellipses avec des outils de géométrie algébrique réelle (en particulier les suites de Sturm-Habicht). Wang *et al.* [WWK01] ont donné une réponse partielle pour le cas des ellipsoïdes en 3D. Il reste maintenant à étudier comment les prédicats obtenus dans le Chapitre 4 se spécialisent lorsque les coniques en entrée sont d'un type particulier.

**Paramétrage des intersections.** Il y a plusieurs manières d'améliorer notre algorithme de paramétrage des intersections de quadriques. L'une d'entre elles est d'essayer de minimiser

la complexité arithmétique des expressions apparaissant dans les paramétrages, qui peut être assez grande. Toute amélioration sur ce plan a un impact direct sur l'efficacité de toute application qui s'appuie sur l'algorithme de paramétrage, comme la conversion CSG-BRep et la construction d'arrangements (voir ci-dessous). Le cas le plus intéressant, car menant aux expressions de plus haut degré, est celui des quartiques lisses. Comme indiqué dans le Chapitre 1, j'ai récemment amélioré l'algorithme de paramétrage dans ce cas, et par conséquent obtenu une nouvelle borne sur la degré maximum (en fonction des coefficients des quadriques de départ) des polynômes apparaissant dans le paramétrage. Il n'est pas interdit de penser que cette borne est proche de l'optimal, mais il faut trouver des moyens de formaliser cette intuition. Il est sans doute possible d'améliorer aussi les bornes arithmétiques dans de nombreux autres cas d'intersection.

En parallèle, je souhaite introduire des aspects dynamiques dans le problème du paramétrage. En d'autres termes, étant données deux quadriques dont les coefficients sont fonctions d'un paramètre  $t$  (qui peut être par exemple le temps), je souhaite obtenir un paramétrage de l'intersection indexé par  $t$ . Cela implique en particulier d'identifier les valeurs de  $t$  où se produisent des changements de morphologie de l'intersection. Les applications à des problèmes comme la détection de collision sont claires. De plus, voyant cette fois le paramètre  $t$  comme une erreur sur l'entrée, on obtient un moyen de « mesurer » à quelle distance on se trouve d'une intersection dégénérée. Dans les applications de CGAO, on peut par exemple vouloir considérer deux surfaces presque tangentes comme étant réellement tangentes, et cette vision des choses peut permettre d'approcher ce genre de problèmes. Un contexte particulièrement intéressant est celui où les « quadriques dynamiques » peuvent être vues comme des hypersurfaces quadratiques dans l'espace projectif de dimension 4. Cela renforce l'importance d'étendre certains de nos résultats en dimension supérieure.

Il serait intéressant de généraliser le problème de l'intersection aux complexes quadratiques. Ces surfaces lisses par morceaux peuvent être vues comme des généralisations de polyèdres, les faces étant cette fois plongées dans des surfaces quadratiques et étant bornées par des arcs de coniques. Cette classe de surfaces joue un rôle important dans la conception de pièces mécaniques [LS02]. Il est également nécessaire de se pencher sur des surfaces plus générales. Les tores sont importants à cet égard, car ils apparaissent dans une large variété d'applications. Plus généralement, j'explorerai les intersections de surfaces de bidegré  $(1, 2)$  [EGL04] et de surfaces paramétrables quadratiquement [ABB06, CSS96], qui englobent les quadriques et les tores.

## 7.2.2 Arrangements de quadriques et applications

Les arrangements d'objets géométriques ont été intensivement étudiés en géométrie algorithmique. Étant donnée une collection finie d'objets géométriques, leur arrangement est la subdivision de l'espace ambiant en cellules qu'ils induisent. Dans le plan, un arrangement de cercles consiste en des sommets, des arêtes et des faces : un sommet est l'intersection de deux cercles (ou plus), une arête est une portion maximale de cercle ne contenant aucun sommet, et une face est une région maximale du plan ne contenant ni sommet, ni arête. Au-delà de leur rôle central en géométrie algorithmique, les arrangements ont été utilisés pour résoudre des problèmes dans bon nombre d'applications, notamment en planification de trajectoire de robots, vision artificielle, statistiques et biologie moléculaire. Leur attrait vient

principalement du fait qu'ils permettent de discrétiser des problèmes continus de manière fine et topologiquement correcte.

Dans ce contexte, je m'attacherai à trouver les bonnes structures de données, les algorithmes et les prédicats pour le calcul exact et efficace d'arrangements de surfaces de faible degré et de structures similaires. L'accent sera en particulier mis sur un sous-problème connu sous le nom de conversion CSG-BRep.

**BReps et sous-arrangements de quadriques.** En modélisation des solides, les deux représentations d'objets les plus répandues sont la représentation volumique dite CSG (pour *Constructive Solid Geometry*) et la représentation surfacique dite BRep (pour *Boundary Representation*). Ces deux représentations ayant leurs avantages respectives, les noyaux de modélisation doivent souvent disposer d'un moyen efficace et sûr de passer d'une représentation à l'autre. La conversion CSG-BRep est un problème bien compris pour des modèles polyédriques, mais pas pour des objets courbes. Une seule approche est connue pour des modèles non-linéaires [KKM99]. Elle utilise de l'arithmétique exacte et des structures de données efficaces, mais ne prend pas en compte les dégénérescences.

Dans les situations pratiques, les objets sont souvent en position dégénérée non par accident mais par conception. De ce fait, mon principal objectif est de développer et d'implanter un algorithme complet, exact et efficace pour la construction du BRep d'un assemblage de volumes quadratiques en position arbitraire. Ici, les sommets du BRep sont les intersections de trois quadriques (ou plus) et les arêtes sont des arcs de courbes d'intersection entre deux quadriques (ou plus). Dans une première approche, je travaillerai sur une « preuve de concept » d'un algorithme exact basé sur notre implantation du calcul du paramétrage de l'intersection de quadriques, en me focalisant sur le traitement des situations dégénérées, sans trop prêter attention à l'efficacité. Dans un deuxième temps, j'accorderai plus d'attention aux structures de données, aux algorithmes et à la complexité asymptotique. Notons que le BRep est un sous-arrangement de l'arrangement 3D complet induit par les quadriques du CSG considéré. Dans le même ordre d'idée, je travaillerai également à la construction d'autres sous-arrangements de quadriques, notamment celui qui est induit par la trace de  $n$  quadriques sur une quadrique.

À plus long terme, j'étudierai le calcul d'arrangements 3D complets de quadriques. Ce problème, qui est récemment reçu l'attention de la communauté [MTT05, SW06], est loin d'être résolu en pratique. J'espère ici bénéficier largement des outils et des algorithmes développés pour le cas de la conversion CSG-BRep et de la construction de sous-arrangements. Un problème particulièrement intéressant est celui du « plongement » des arrangements à précision fixée, c.-à-d. le calcul d'une représentation machine correcte. Ce processus dit de « l'arrondi géométrique » a récemment été étendu des segments de droites aux courbes de Bézier [EKW07b].

Enfin, je chercherai à explorer les applications des arrangements et sous-arrangements de quadriques, notamment les diagrammes de Voronoï de droites et segments de droites en 3D (les « murs » étant des carreaux de quadriques) et l'enveloppe convexe de complexes quadratiques.

**Intersection de triplets de quadriques.** Un sous-problème important de nombreuses applications impliquant des quadriques (parmi lesquelles la conversion CSG-BRep) concerne le

calcul exact et efficace des intersections de triplets de quadriques en position arbitraire. Bien qu'étant, stricto sensu, un problème de taille constante, ce calcul n'est actuellement mené que d'un point de vue purement algébrique et calculatoire, sans réelle compréhension de la géométrie sous-jacente (mais cf. ci-dessous).

Notre algorithme pour paramétrer les intersections de quadriques donne un moyen direct de calculer et de localiser les (au plus 8) points d'intersection réels de trois quadriques, lorsqu'ils sont en nombre fini. Si les quadriques en entrée ont des coefficients entiers, cela revient à trouver les racines réelles d'un polynôme univarié de degré au plus 8 dont les coefficients vivent (collectivement) dans une extension de degré au plus 2. Une partie du travail ici consiste à trouver des stratégies efficaces pour résoudre ce genre de polynômes, en collaboration avec des algébristes. Un problème relié, dont la solution exacte est requise pour la conversion CSG-BRep robuste, consiste à évaluer le signe d'un tel polynôme de degré 8 en la racine réelle d'un autre polynôme (fonction *sign at*, omniprésente en calcul géométrique exact).

Sur le long terme, une tâche importante sera de mener à bien l'identification et la caractérisation de tous les réseaux de quadriques, c.-à-d. les combinaisons linéaires de triplets de quadriques. Une telle énumération ne semble pas avoir été faite dans la littérature. Des résultats sont toutefois connus sur les singularités de tels réseaux [Wal80]. Pour la phase de classification, la compréhension des invariants de l'équation caractéristique (une quartique ternaire) est un pré-requis [Dix87]. Aller plus loin implique d'étudier les combinants de réseaux de quadriques. Seuls les invariants de triplets de quadriques (et non de réseaux) ont été explorés dans la littérature [Sco61]. Comme dans le cas de deux surfaces, l'ensemble de prédicats le plus important est celui qui encode la question : « trois quadriques données ont-elles des points réels dans leur intersection commune ? ». D'anciens résultats d'algèbre linéaire sur la caractérisation des combinaisons linéaires de formes quadratiques contenant une forme quadratique définie ou semi-définie peuvent être utiles à cet égard [Uhl79].

### 7.2.3 Aspects algébriques de la visibilité 3D et de la théorie des droites

Les calculs de visibilité occupent une place de choix dans les applications du graphisme 3D. Calculer la limite entre l'ombre et la pénombre projetées par une source de lumière, identifier l'ensemble des objets bloquant la propagation de la lumière entre deux polygones et déterminer les objets vus depuis un point donné sont autant de requêtes de visibilité essentielles au rendu réaliste de scènes 3D.

Les problèmes de visibilité tridimensionnels sont apparus il y a une trentaine d'années, avec l'avènement de la visualisation d'objets 3D. En trois décennies, le fossé entre théorie et pratique s'est considérablement creusé, les performances des matériels graphiques masquant graduellement l'absence de compréhension théorique. De nombreux problèmes sont aujourd'hui considérés comme résolus en pratique. Mais les solutions s'appuient fortement sur des heuristiques et des techniques ad hoc, sans exploiter la nature intrinsèquement globale de la visibilité (des objets distants pouvant interagir de façon complexe et non-intuitive). Conséquence de cette absence de compréhension des propriétés fondamentales des ensembles de droites au cœur des problèmes de visibilité, nombre de questions n'ont pas encore trouvé de réponse satisfaisante, passant à l'échelle.

Pour développer des solutions nouvelles, mathématiquement valides, je travaille à améliorer

la compréhension de la théorie des droites sous-tendant la visibilité 3D. Je m'intéresse en particulier aux structures de visibilité globales et aux calculs « hors ligne ».

**Prédicats fondamentaux pour la visibilité 3D.** Les objets d'étude fondamentaux en visibilité 3D sont les droites « tangentes » à quatre objets de la scène, qui sont génériquement en nombre fini. Ces droites correspondent aux sommets de structures de visibilité globales. Les arêtes de ces structures, incidentes aux sommets, correspondent aux droites « tangentes » à trois objets. Comprendre comment ces sommets et arêtes peuvent être manipulés de manière efficace et robuste est un pré-requis pour effectuer des requêtes de visibilité exactes parmi des obstacles 3D.

En particulier, l'implantation effective d'algorithmes de visibilité exacts achoppe sur l'identification de prédicats de (plus) faible degré (possible). Hélas, même pour des objets polyédriques, les degrés des expressions impliquées sont très grands. Le prédicat permettant de décider si quatre droites données, en position générale, ont 0, 1 ou 2 droites les perçant est un polynôme de degré 12 (optimal) en les points définissant les droites. Si maintenant on suppose calculée une telle droite transversale aux quatre droites de départ, déterminer si cette transversale intersecte l'intérieur d'un triangle donné requiert un prédicat de très haut degré : la meilleure instance connue de ce prédicat est de degré 90 en les coordonnées des entrées. Cela illustre la complexité inhérente aux requêtes de visibilité exactes et montre à quel point des calculs fortement non-linéaires se cachent derrière des problèmes en apparence linéaires. Je travaille dans ce cadre sur les prédicats-clés pour le problème de la visibilité 3D. Je m'intéresse à ces prédicats non seulement d'un point de vue théorique mais également sur plan pratique : les prédicats induits par des choix algorithmiques peuvent faire artificiellement grossir les besoins arithmétiques d'une implantation.

La situation pour le cas des tangentes aux sphères est encore moins avancée que pour le cas des objets linéaires par morceaux. Le problème ici n'est pas de trouver des stratégies d'évaluation efficaces mais de comprendre les configurations géométriques discriminantes et de mettre au jour des prédicats polynomiaux. Prenons l'exemple de la question « Quand quatre sphères ont-elles une infinité de tangentes réelles communes ? ». Jusqu'à récemment, la seule manière de répondre à cette question pour un quadruplet donné consistait à traduire le problème en un système polynomial, à le résoudre et à lire la réponse sur la solution. On sait maintenant, avec le travail présenté dans le Chapitre 5, que les centres doivent être alignés et les sphères doivent avoir au moins une tangente réelle commune, ce qui peut être décidé avec des prédicats de degré 5. Rien ou presque n'est connu, en terme de prédicats, quand les sphères ont un nombre fini de tangentes. On aimerait par exemple pouvoir déterminer aisément quand quatre sphères données ont exactement 12 tangentes communes (le maximum) ou zéro.

**Théorie des transversales.** En lien avec ce qui précède, je m'intéresse à des problèmes issus de la théorie des transversales géométriques. En particulier, je cherche à comprendre les propriétés des ensembles de droites perçant une collection d'objets (« droites transversales »).

La géométrie des objets détermine les propriétés discrètes, combinatoires et topologiques des ensembles de tangentes et de transversales qu'elles induisent. Par exemple, l'ensemble des droites intersectant une collection de boules congruentes disjointes de  $\mathbb{R}^3$  dans un ordre fixé est connexe, mais ce n'est pas nécessairement le cas de droites perçant trois segments. Le

paysage entre ces deux cas extrêmes est largement inconnu. Un des mes objectifs est d'améliorer la compréhension de la relation forme/transversales. Une intéressante question ouverte à cet égard est de savoir si l'ensemble des droites intersectant des objets d'« épaisseur » donnée dans un ordre prescrit est connexe<sup>1</sup>.

Une autre question en rapport avec la précédente est de déterminer quelles classes d'objets admettent un théorème de type Helly pour les droites transversales. Malheureusement, certains contre-exemples (non publiés) semblent indiquer que les boules unité sont sans doute plus l'exception que la norme. En effet, il semble que même des objets convexes « épais » puissent ne pas admettre de théorème à la Helly. Les travaux futurs devront tenter d'obtenir une meilleure compréhension de la situation.

Revenant aux boules unité disjointes en 3D, le nombre maximum de permutations géométriques est borné par 3 pour  $n \leq 8$  boules [CGN05]. Pour le cas de quatre boules, on ignore si ce nombre vaut 2 ou 3. On aurait pu penser qu'un calcul « force brute » aurait permis de venir à bout de ce problème de taille constante, mais diverses tentatives nous ont convaincu du contraire.

**Étude mathématique des courbes et surfaces d'événement visuel** Lorsque l'on s'intéresse aux objets courbes généraux, de nombreuses courbes caractéristiques nouvelles apparaissent qui n'ont pas d'équivalent dans le domaine linéaire. Les lignes de courbure, les courbes paraboliques, les courbes flecnodales et les lignes de crête (*ridges*) sont certains des exemples qui viennent à l'esprit. La plupart de ces courbes de nature différentielle a des applications dans des domaines comme l'imagerie médicale, le graphisme, la vision artificielle ou le *manufacturing*.

Je suis tout particulièrement intéressé par les points et courbes qui entrent en jeu lorsque l'on étudie la visibilité 3D d'objets courbes. Ces points « spéciaux » ont été classifiés en détails par l'école russe des singularités [Pan00, Pla81]. Les plus importants sont ceux qui apparaissent en familles de dimension 1 sur la surface, c.-à-d. les courbes paraboliques et flecnodales. L'importance de ces « courbes d'événement visuel » est apparue clairement il y a une quinzaine d'années dans des recherches en vision par ordinateur sur une structure connue sous le nom de graphe d'aspects. Beaucoup reste à faire pour pleinement comprendre les singularités de ces courbes et des surfaces d'événement visuel attachées, comme elles interagissent, quelle est leur topologie et la topologie de leur arrangement, and comment les calculer efficacement et de façon robuste pour des objets de faible degré. Il y a récemment eu un regain d'intérêt pour ces courbes dans la communauté mathématique, notamment grâce aux travaux d'Uribe-Vargas [UV06].

Un sujet que je compte explorer en particulier est celui de la description invariante des courbes d'événement visuel. Récemment, Gravesen a produit un système complet d'invariants de 3<sup>e</sup> ordre sur une surface de l'espace 3D (les invariants de second ordre étant engendrés par les courbes moyenne et de Gauss bien connues) et montré comment les équations définissant des éléments caractéristiques tels que points ombiliques et lignes de crête peuvent s'exprimer en fonction de ces invariants [Gra04]. Je souhaite utiliser ce cadre dans le contexte des courbes et surfaces d'événement visuel.

---

<sup>1</sup>L'épaisseur est définie comme le rapport du rayon circonscrit sur le rayon inscrit.

## 7.3 Objectifs logiciels

La principale motivation du paradigme du calcul géométrique exact est de fournir des implantations réalistes et robustes. Tout en poursuivant un travail fondamental, je dois donc en parallèle développer des directions de recherche plus appliquées et comprendre comment les avancées sur le plan théorique peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes concrets. Des applications « vraie grandeur » du calcul géométrique exact seront peut-être bientôt envisageables. Cet objectif à long terme doit être en permanence gardé à l'esprit et des réalisations intermédiaires allant dans le sens de ces applications doivent être faites.

**Intersection de quadriques et arrangements.** Un premier objectif est de rendre le travail sur les intersections de quadriques plus visible. Pour cela, je travaille à transformer le logiciel en un code de qualité professionnelle et à faciliter l'installation par les utilisateurs grâce à un meilleur *packaging*. Je vise également une intégration complète dans CGAL. Au-delà, je proposerai des implantations des travaux sur les intersection de quadriques de type restreint et de quadriques dynamiques. Plus généralement, chaque avancée sur le plan théorique sera traduite en réalisation logicielle.

Je travaillerai également sur des extensions de notre logiciel QI. Les deux plus immédiates, dont le développement est en cours, concernent les intersections de trois quadriques (Q3) et la conversion CSG-BRep (BE). Les deux sont dans un état avancé. Q3 utilise QI pour calculer exactement les intersections de trois quadriques via la méthode du paramétrage. BE, pour *Boundary Evaluation*, s'appuie sur QI et Q3 pour construire la représentation surfacique d'un modèle CSG à base de quadriques volumiques.

**Visibilité et graphes d'aspects.** La caractérisation des dégénérescences et l'identification de prédicats (simples) dans les problèmes de visibilité doivent être accompagnées d'une implantation robuste et efficace, puisque les requêtes géométriques sous-jacentes sont les briques de base de tout algorithme de visibilité 3D sous le paradigme du calcul géométrique exact. Par ailleurs, les progrès sur la compréhension des courbes et surfaces d'événement visuel devront à terme amener à revisiter les algorithmes de construction de graphes d'aspects d'objets courbes [18], avec l'idée de construire de manière exacte ce graphe pour des surfaces algébriques simples (de degré 4, disons).

**Intégration d'outils algébriques.** Comme déjà mentionné, je prend une part active à un projet visant à rendre les meilleurs outils algébriques actuels aisément accessibles à la communauté de calcul géométrique et géométrie algorithmique. Pour être plus précis, nous développons un noyau algébrique pour CGAL basé sur les outils FGb/RS et voulons démontrer que ces outils peuvent être utilisés de manière routinière pour des applications telles que le balayage d'arrangements de courbes algébriques dans le plan. Ce travail se fait en collaboration avec les projets INRIA Geometrica et Salsa, et bénéficie de discussions avec les autres membres de la communauté de développement de CGAL (MPII notamment).



# Bibliographie

- [ABB06] F. Aries, E. Briand, and C. Bruchou. Some covariants related to Steiner surfaces, 2006. Preprint. (pages 37, 76 et 110)
- [AG91] A. Agrachev and R. Gamkrelidze. Quadratic maps and smooth vector-valued functions. *J. Sov. Math.*, 55(4):1892–1928, 1991. (page 109)
- [AM99] D. Avritzer and R. Miranda. Stability of pencils of quadrics in  $\mathbb{P}^4$ . *The Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, III Ser. 5(2):281–300, 1999. (page 81)
- [Atk91] M. Atkinson. Extensions to the Kronecker-Weierstrass theory of pencils. *Linear and Multilinear Algebra*, 29:235–241, 1991. (page 65)
- [BEH<sup>+</sup>02] E. Berberich, A. Eigenwillig, M. Hemmer, S. Hert, K. Mehlhorn, and E. Schömer. A computational basis for conic arcs and Boolean operations on conic polygons. In *Proc. of European Symposium on Algorithms*, volume 2461 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 174–186, 2002. (page 37)
- [BEH<sup>+</sup>05] E. Berberich, A. Eigenwillig, M. Hemmer, S. Hert, L. Kettner, K. Mehlhorn, J. Reichel, S. Schmitt, E. Schömer, and N. Wolpert. Exacus: Efficient and exact algorithms for curves and surfaces. In *Proc. of 13th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2005)*, Palma de Mallorca, Spain, pages 155–166, 2005. (page 37)
- [Ber04] E. Berberich. Exact arrangements of quadric intersection curves, 2004. Master’s thesis, Universität des Saarlandes. (page 37)
- [BFM<sup>+</sup>01] C. Burnikel, S. Funke, K. Mehlhorn, S. Schirra, and S. Schmitt. A separation bound for real algebraic expressions. In *Proc. of European Symposium on Algorithms (ESA)*, pages 254–263, 2001. (page 37)
- [BHK<sup>+</sup>05] E. Berberich, M. Hemmer, L. Kettner, E. Schömer, and N. Wolpert. An exact, complete and efficient implementation for computing planar maps of quadric intersection curves. In *Proc. of 21st Annual Symposium on Computational Geometry (SCG’05)*, Pisa, Italy, pages 99–106, 2005. (page 37)
- [BK86] E. Brieskorn and H. H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. (page 102)
- [BPR03] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. (pages 37, 47, 64 et 87)

- [Bri07] E. Briand. Equations, inequations and inequalities characterizing the configurations of two real projective conics. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 18(1-2):21–52, 2007. (pages 37, 75, 76, 90 et 109)
- [Bro06] T. Bromwich. *Quadratic Forms and Their Classification by Means of Invariant Factors*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 1906. (page 58)
- [BT06] J.-D. Boissonnat and M. Teillaud, editors. *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*. Springer-Verlag, Mathematics and Visualization, 2006. (page 36)
- [CCW<sup>+</sup>06] Y.-K. Choi, J.-W. Chang, W. Wang, M.-S. Kim, and G. Elber. Real-time continuous collision detection for moving ellipsoids under affine deformation. Technical Report TR-2006-02, Hong Kong University, 2006. (page 109)
- [CFPR06a] F. Cazals, J.-C. Faugère, M. Pouget, and F. Rouillier. The implicit structure of ridges of a smooth parametric surface. *Computer Aided Geometric Design*, 23(7):582–598, 2006. (page 37)
- [CFPR06b] F. Cazals, J.-C. Faugère, M. Pouget, and F. Rouillier. Ridges and umbilics of polynomial parametric surfaces. In T. Dokken and B. Jüttler, editors, *Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces II*, pages 43–60. Springer Verlag, 2006. (page 37)
- [CGH05] O. Cheong, X. Goaoc, and A. Holmsen. Hadwiger and Helly-type theorems for disjoint unit spheres in  $\mathbb{R}^3$ . In *Proc. 20th Ann. Symp. on Computational Geometry*, pages 10–15, 2005. (page 100)
- [CGN05] O. Cheong, X. Goaoc, and H.-S. Na. Geometric permutations of disjoint unit spheres. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 30:253–270, 2005. (pages 106 et 114)
- [Chi04] J. Chipalkatti. Invariant equations defining coincident root loci. *Archiv der Math.*, 83(5):422–428, 2004. (page 76)
- [Chi06] J. Chipalkatti. On the invariant theory of the Bezoutiant. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 47(2):397–418, 2006. (page 76)
- [Cre01] J. Cremona. Classical invariants and 2-descent on elliptic curves. *Journal of Symbolic Computation*, 31(1/2):71–87, 2001. (page 83)
- [CSS96] A. Coffman, A. J. Schwartz, and C. M. Stanton. The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 13(3):257–286, 1996. (page 110)
- [Dan57] L. Danzer. Über ein Problem aus der kombinatorischen Geometrie. *Arch. der Math.*, 8:347–351, 1957. (pages 99 et 100)
- [Deb70] H. Debrunner. Helly type theorems derived from basic singular homology. *Amer. Math. Monthly*, 77:375–380, 1970. (page 104)

- 
- [DET07] D. Diochnos, I. Emiris, and E. Tsigaridas. On the complexity of real solving bivariate systems. In *Proc. of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2007), Waterloo, Canada, 2007*. To appear. (page 37)
- [DFMT02] O. Devillers, A. Fronville, B. Mourrain, and M. Teillaud. Algebraic methods and arithmetic filtering for exact predicates on circle arcs. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 22:119–142, 2002. (pages 37 et 76)
- [Dix87] J. Dixmier. On the projective invariants of quartic plane curves. *Adv. in Math.*, 64:279–304, 1987. (page 112)
- [EGdR06] F. Etayo, L. González-Vega, and N. del Rio. A new approach to characterizing the relative position of two ellipses depending on one parameter. *Computer Aided Geometric Design*, 23(4):324–350, 2006. (pages 37, 75 et 109)
- [EGL04] M. Elkadi, A. Galligo, and T. Le. Parametrized surfaces in  $\mathbb{P}^3$  of bidegree  $(1, 2)$ . In *Proc. of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 141–148, 2004. (page 110)
- [EKP+04] I. Emiris, A. Kakargias, S. Pion, M. Teillaud, and E.P. Tsigaridas. Towards an open curved kernel. In *Proc. of 20th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG 2004)*, pages 438–446, 2004. (page 37)
- [EKSW04] A. Eigenwillig, L. Kettner, E. Schömer, and N. Wolpert. Complete, exact, and efficient computations with cubic curves. In *Proc. of ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 409–418, 2004. (page 37)
- [EKSW06] A. Eigenwillig, L. Kettner, E. Schömer, and N. Wolpert. An exact, efficient, and complete arrangement computation for cubic curves. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 35:36–73, 2006. (page 37)
- [EKW07a] A. Eigenwillig, M. Kerber, and N. Wolpert. Fast and exact geometric analysis of real algebraic plane curves. In *Proc. of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2007), Waterloo, Canada, 2007*. To appear. (page 37)
- [EKW07b] A. Eigenwillig, L. Kettner, and N. Wolpert. Snap rounding of Bézier curves. *ACM Symposium on Computational Geometry*, 2007. To appear. (pages 37 et 111)
- [ET04] I. Emiris and E. Tsigaridas. Computing with real algebraic numbers of small degree. In *Proc. of 12th European Symposium on Algorithms (ESA 2004)*, pages 652–663, 2004. (page 37)
- [ET06] I. Emiris and E. Tsigaridas. Univariate polynomial real root isolation: Continued fractions revisited. In *Proc. of 14th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2006)*, pages 817–828, 2006. (page 37)

- [ET07] I. Emiris and G. Tzoumas. A real-time and exact implementation of the predicates for the Voronoi diagram of parametric ellipses. In *Proc. of ACM Symp. Solid Physical Modeling, China*, 2007. To appear. (page 37)
- [ETT06] I. Emiris, E. Tsigaridas, and G. Tzoumas. The predicates for the Voronoi diagram of ellipses. In *Proc. of ACM Symp. Comput. Geom.*, pages 227–236, 2006. (page 37)
- [FGK<sup>+</sup>00] A. Fabri, G.-J. Giezeman, L. Kettner, S. Schirra, and S. Schönherr. On the design of CGAL, a Computational Geometry Algorithms Library. *Software – Practice and Experience*, 30(11):1167–1202, 2000. Special Issue on Discrete Algorithm Engineering. (page 37)
- [FHK<sup>+</sup>06] E. Fogel, D. Halperin, L. Kettner, M. Teillaud, R. Wein, and N. Wolpert. Arrangements. In J.-D. Boissonnat and M. Teillaud, editors, *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, pages 1–66. Springer-Verlag, Mathematics and Visualization, 2006. (page 37)
- [Fin37] P. Finsler. Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen. *Comment. Math. Helv.*, 9:188–192, 1936/1937. (pages 45 et 109)
- [FNO89] R. Farouki, C. Neff, and M. O’Connor. Automatic parsing of degenerate quadric-surface intersections. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3):174–203, 1989. (page 41)
- [FT06] E. Fogel and M. Teillaud. Generic programming and the CGAL library. In J.-D. Boissonnat and M. Teillaud, editors, *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, pages 313–320. Springer-Verlag, Mathematics and Visualization, 2006. (page 37)
- [Gle15] O. Glenn. *A Treatise on the Theory of Invariants*. Ginn and Company, Boston, 1915. (page 76)
- [GPW93] J.E. Goodman, R. Pollack, and R. Wenger. Geometric transversal theory. In J. Pach, editor, *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, volume 10 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 163–198. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1993. (page 99)
- [Gra04] J. Gravesen. Third order invariants on surfaces. In T. Dokken and B. Jüttler, editors, *Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces*, pages 193–211. Springer Verlag, 2004. (pages 37, 76 et 114)
- [GVN02] L. González-Vega and I. Necula. Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves. *Computer Aided Geometric Design*, 19:719–743, 2002. (page 37)
- [GY03] J.H. Grace and A. Young. *The Algebra of Invariants*. Cambridge University Press, 1903. (pages 76, 79 et 80)

- 
- [Had56] H. Hadwiger. Problem 107, 1956. *Nieuw Arch. Wisk.*, (3)4:57, 1956; Solution. *Wiskundige Opgaven*, 20:27–29, 1957. (page 99)
- [Had57] H. Hadwiger. Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden. *Portugal Math.*, 6:23–29, 1957. (pages 99 et 104)
- [Hel23] E. Helly. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jahresbericht Deutsch. Math. Verein.*, 32:175–176, 1923. (page 99)
- [Hil93] D. Hilbert. *Theory of Algebraic Invariants*. Cambridge University Press, 1993. (page 82)
- [HKL03] A. Holmsen, M. Katchalski, and T. Lewis. A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 29:595–602, 2003. (page 100)
- [HM04] A. Holmsen and J. Matoušek. No Helly theorem for stabbing translates by lines in  $\mathbb{R}^d$ . *Discrete Comput. Geom.*, 31:405–410, 2004. (page 100)
- [HP53] W. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 1953. Volumes I and II. (pages 58 et 59)
- [Ja’79] J. Ja’Ja’. An addendum to Kronecker’s theory of pencils. *SIAM J. Appl. Math.*, 37(3):700–712, 1979. (page 65)
- [Ker06] M. Kerber. Analysis of real algebraic plane curves, 2006. Master’s thesis, Universität des Saarlandes. (page 37)
- [KKM99] J. Keyser, S. Krishnan, and D. Manocha. Efficient and accurate B-Rep generation of low degree sculptured solids using exact arithmetic: I – Representations, II – Computation. *Computer Aided Geometric Design*, 16(9):841–859, 861–882, 1999. (page 111)
- [KLPY99] V. Karamcheti, C. Li, I. Pechtchanski, and C. Yap. A core library for robust numeric and geometric computation. In *Proc. of 15th ACM Symp. on Comp. Geometry*, pages 351–359, 1999. (page 37)
- [KN04] L. Kettner and S. Näher. Two computational geometry libraries: LEDA and CGAL. In J.E. Goodman and J. O’Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pages 1435–1463. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2004. (page 37)
- [KS03] V. Koltun and M. Sharir. The partition technique for overlays of envelopes. *SIAM Journal of Computing*, 32:841–863, 2003. (page 104)
- [Lam73] T. Lam. *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*. W.A. Benjamin, Reading, MA, 1973. (page 43)
- [Lev64] H. Levy. *Projective and Related Geometries*. The Macmillan Co., New York, 1964. (page 87)

- [Lev76] J. Levin. A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces. *Communications of the ACM*, 19(10):555–563, 1976. (page 41)
- [Lev79] J. Levin. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces. *Computer Graphics and Image Processing*, 11(1):73–87, 1979. (page 41)
- [LS02] C. Lennerz and E. Schömer. Efficient distance computation for quadratic curves and surfaces. In *Proc. of 2nd Conference on Geometric Modeling and Processing*, pages 60–69, 2002. (page 110)
- [LY01] C. Li and C. Yap. A new constructive root bound for algebraic expressions. In *Proc. of Symp. on Discrete Algorithms*, pages 496–505, 2001. (page 37)
- [Meg01] G. Megyesi. Lines tangent to four unit spheres with coplanar centers. *Discrete Comput. Geom.*, 26:493–497, 2001. (pages 37 et 93)
- [MG95] J. Miller and R. Goldman. Geometric algorithms for detecting and calculating all conic sections in the intersection of any two natural quadric surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 57(1):55–66, 1995. (page 41)
- [MN99] K. Mehlhorn and S. Näher. *LEDA: A Platform for Combinatorial and Geometric Computing*. Cambridge University Press, 1999. (page 37)
- [MPS<sup>+</sup>06] B. Mourrain, S. Pion, S. Schmitt, J.-P. Tékourt, E. Tsigaridas, and N. Wolpert. Algebraic issues in computational geometry. In J.-D. Boissonnat and M. Teillaud, editors, *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, pages 117–155. Springer-Verlag, Mathematics and Visualization, 2006. (page 37)
- [MPT01] I.G. Macdonald, J. Pach, and T. Theobald. Common tangents to four unit balls in  $\mathbb{R}^3$ . *Discrete Comput. Geom.*, 26:1–17, 2001. (pages 37, 93 et 94)
- [MS05] G. Megyesi and F. Sottile. The envelope of lines meeting a fixed line and tangent to two spheres. *Discrete Comput. Geom.*, 33(4):617–644, 2005. (pages 37 et 93)
- [MST03] G. Megyesi, F. Sottile, and T. Theobald. Common transversals and tangents to two lines and two quadrics in  $\mathbb{P}^3$ . *Discrete Comput. Geom.*, 30(4):543–571, 2003. (pages 37 et 93)
- [MTT05] B. Mourrain, J.-P. Tékourt, and M. Teillaud. On the computation of an arrangement of quadrics in 3D. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 30(2):145–164, 2005. (pages 37 et 111)
- [Olv99] P.J. Olver. *Classical Invariant Theory*. Cambridge University Press, 1999. (page 76)
- [Ouc06] K. Ouchi. *Exact Polynomial System Solving for Robust Geometric Computation*. PhD thesis, Texas A&M University, 2006. (page 37)
- [Pan00] D. Panov. Special points of surfaces in the three-dimensional projective space. *Functional Analysis and Its Applications*, 34(4):276–287, 2000. (page 114)

- 
- [Per02] D. Pervouchine. *Orbits and Invariants of Matrix Pencils*. PhD thesis, Moscow State University, 2002. (pages 65 et 81)
- [Pla81] O.A. Platonova. Singularities of the mutual disposition of a surface and a line. *Russian Mathematical Surveys*, 36:248–249, 1981. (page 114)
- [Poo01] B. Poonen. Computing rational points on curves. In *Number Theory for the Millenium*. A. K. Peters, Boston, 2001. Proc. of Millennial Conference on Number Theory, 2000. (page 53)
- [PV94] V. Popov and E. Vinberg. Invariant theory. In *Algebraic Geometry IV*, volume 55 of *Encyclopaedia of Mathematical Science*, pages 123–284. Springer-Verlag, 1994. (page 78)
- [Rou99] F. Rouillier. Solving zero-dimensional systems through the rational univariate representation. *Journal of Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 9(5):433–461, 1999. (page 37)
- [RZ04] F. Rouillier and P. Zimmermann. Efficient isolation of polynomial’s real roots. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162(1):33–50, 2004. (pages 37 et 47)
- [Sco61] T. Scott. The complete irreducible system of invariants of three quadrics. *Proc. Edinb. Math. Soc., II.*, Ser. 12:197–204, 1961. (page 112)
- [Seg83] C. Segre. Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino*, 36(2):3–86, 1883. (page 58)
- [Sim05] D. Simon. Solving quadratic equations using reduced unimodular quadratic forms. *Math. Comp.*, 74(251):1531–1543, 2005. (page 73)
- [SJ94] C.-K. Shene and J. Johnstone. On the lower degree intersections of two natural quadrics. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):400–424, 1994. (page 41)
- [SMS00] S. Smorodinsky, J.S.B. Mitchell, and M. Sharir. Sharp bounds on geometric permutations for pairwise disjoint balls in  $\mathbb{R}^d$ . *Discrete Comput. Geom.*, 23:247–259, 2000. (page 104)
- [ST02] F. Sottile and T. Theobald. Lines tangent to  $2n - 2$  spheres in  $\mathbb{R}^n$ . *Transactions of the AMS*, 354(12):4815–4829, 2002. (page 93)
- [ST06] F. Sottile and T. Theobald. Line problems in nonlinear computational geometry. arXiv math.MG/0610407, 2006. (pages 37 et 93)
- [Stu93] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariant Theory*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, 1993. (page 76)
- [SW05] R. Seidel and N. Wolpert. On the exact computation of the topology of real algebraic curves. In *Proceedings of the 21st ACM Symposium on Computational Geometry, Pisa, Italy*, pages 107–115, 2005. (page 37)

- [SW06] E. Schömer and N. Wolpert. An exact and efficient approach for computing a cell in an arrangement of quadrics. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 33(1-2):65–97, 2006. (pages 37 et 111)
- [Syl52] J. Sylvester. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine*, 4:138–142, 1852. (page 43)
- [The02] T. Theobald. An enumerative geometry framework for algorithmic line problems in  $\mathbb{R}^3$ . *SIAM J. Computing*, 31(4):1212–1228, 2002. (pages 37 et 93)
- [The03] T. Theobald. New algebraic methods in computational geometry, 2003. Habilitation Thesis, Technische Universität München. (pages 37 et 93)
- [Top06] V. Toponogov. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: A Concise Guide*. Birkhäuser, 2006. (page 103)
- [Tur29] H.W. Turnbull. *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*. Blackie (London, Glasgow), 1929. (page 76)
- [TWMW07] C. Tu, W. Wang, B. Mourrain, and J. Wang. Signature sequence of intersection curve of two quadrics for exact morphological classification, 2007. <http://arxiv.org/abs/cs/0701121>. (page 57)
- [TWW02] C. Tu, W. Wang, and J. Wang. Classifying the nonsingular intersection curve of two quadric surfaces. In *Proc. of GMP'02 (Geometric Modeling and Processing)*, pages 23–32, 2002. (page 45)
- [Uhl73] F. Uhlig. Simultaneous block diagonalization of two real symmetric matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 7:281–289, 1973. (page 60)
- [Uhl76] F. Uhlig. A canonical form for a pair of real symmetric matrices that generate a nonsingular pencil. *Linear Algebra and Its Applications*, 14:189–209, 1976. (pages 60, 87 et 108)
- [Uhl79] F. Uhlig. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey. *Linear Algebra and Its Applications*, 25:219–237, 1979. (page 112)
- [UV06] R. Uribe-Vargas. A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve. *Moscow Mathematical Journal*, 6(4):731–768, 2006. (page 114)
- [Wal80] C.T.C. Wall. Singularities of nets of quadrics. *Compositio Mathematica*, 42(2):187–212, 1980. (page 112)
- [Wei68] K. Weierstrass. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. *Monatshefte Akademie der Wissenschaften, Berlin*, pages 310–338, 1868. (page 58)
- [Wey46] H. Weyl. *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*. Princeton University Press, 1946. (page 83)

- 
- [WGT03] W. Wang, R. Goldman, and C. Tu. Enhancing Levin’s method for computing quadric-surface intersections. *Computer-Aided Geometric Design*, 20(7):401–422, 2003. (page 41)
- [WJG02] W. Wang, B. Joe, and R. Goldman. Computing quadric surface intersections based on an analysis of plane cubic curves. *Graphical Models*, 64(6):335–367, 2002. (page 41)
- [Wol02] N. Wolpert. *An Exact and Efficient Approach for Computing a Cell in an Arrangement of Quadrics*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, Germany, 2002. (page 37)
- [WWK01] W. Wang, J. Wang, and M.-S. Kim. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. *Computer Aided Geometric Design*, 18(6):531–539, 2001. (pages 37 et 109)
- [ZS03] Y. Zhou and S. Suri. Geometric permutations of balls with bounded size disparity. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 26:3–20, 2003. (page 104)



# Part III

## Publications liées au document de synthèse

Articles en ligne : <http://www.loria.fr/~petitjea>

- Parameterization of the Intersection of Quadrics: I. The Generic Algorithm** **129**  
(L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. P. *Journal of Symbolic Computation*, 2007, à paraître.)
- Parameterization of the Intersection of Quadrics: II. Classification of Pencils** **131**  
(L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. P. *Journal of Symbolic Computation*, 2007, à paraître.)
- Parameterization of the Intersection of Quadrics: III. Singular Cases** **133**  
(L. Dupont, D. Lazard, S. Lazard et S. P. *Journal of Symbolic Computation*, 2007, à paraître.)
- Intersecting Quadrics: An Efficient and Exact Implementation** **135**  
(S. Lazard, L. Peñaranda et S. P. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2006.)
- Common Tangents to Spheres in  $\mathbb{R}^3$**  **137**  
(C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard et S. P. *Discrete and Computational Geometry*, 2006.)
- Helly-Type Theorems for Line Transversals to Disjoint Unit Balls** **139**  
(O. Cheong, X. Goaoc, A. Holmsen et S. P. *Discrete and Computational Geometry*, 2007, à paraître.)
- Line Transversals to Disjoint Balls** **141**  
(C. Borcea, X. Goaoc et S. P. *Discrete and Computational Geometry*, 2007.)



---

# Near-Optimal Parameterization of the Intersection of Quadrics: I. The Generic Algorithm

Laurent Dupont<sup>\*</sup>, Daniel Lazard<sup>†</sup>, Sylvain Lazard<sup>\*</sup>, Sylvain Petitjean<sup>\*</sup>

Thème SYM —Systèmes symboliques  
Projets Vegas et Salsa

Rapport de recherche n° 5667 —Septembre 2005 — 36 pages

**Abstract:** We present the first efficient algorithm for computing an exact parametric representation of the intersection of two quadrics in three-dimensional real space given by implicit equations with rational coefficients. The output functions parameterizing the intersection are rational functions whenever it is possible, which is the case when the intersection is not a smooth quartic (for example, a singular quartic, a cubic and a line, or two conics). Furthermore, the parameterization is near-optimal in the sense that the number of square roots appearing in the coefficients of these functions is minimal except in a small number of cases where there may be an extra square root. In addition, the algorithm is practical: a complete, robust and efficient C++ implementation is described in Part IV [12] of this paper.

In Part I, we present an algorithm for computing a parameterization of the intersection of two arbitrary quadrics which we prove to be near-optimal in the generic, smooth quartic, case. Parts II and III [4, 5] treat the singular cases. We present in Part II the first classification of pencils of quadrics according to the real type of the intersection and we show how this classification can be used to efficiently determine the type of the real part of the intersection of two arbitrary quadrics. This classification is at the core of the design of our algorithms for computing near-optimal parameterizations of the real part of the intersection in all singular cases. We present these algorithms in Part III and give examples covering all the possible situations in terms of both the real type of intersection and the number and depth of square roots appearing in the coefficients.

**Key-words:** Intersection of surfaces, quadrics, pencils of quadrics, curve parameterization.

<sup>\*</sup> Project Vegas, LORIA (UMR CNRS, INPL, INRIA Lorraine, Universités Nancy 1 & 2), Nancy, France; `Firstname.Lastname@loria.fr`.

<sup>†</sup> Project Salsa and LIP6 (UMR Université Pierre et Marie Curie and CNRS), Paris, France; `Daniel.Lazard@lip6.fr`.



---

# Near-Optimal Parameterization of the Intersection of Quadrics: II. A Classification of Pencils

Laurent Dupont<sup>\*</sup>, Daniel Lazard<sup>†</sup>, Sylvain Lazard<sup>\*</sup>, Sylvain Petitjean<sup>\*</sup>

Thème SYM —Systèmes symboliques  
Projets Vegas et Salsa

Rapport de recherche n° 5668 —Septembre 2005 — 37 pages

**Abstract:** While Part I [2] of this paper was devoted mainly to quadrics intersecting in a smooth quartic, we now focus on singular intersections. To produce optimal or near-optimal parameterizations in all cases, we first determine the the real type of the intersection before computing the actual parameterization.

In this second part, we present the first classification of pencils of quadrics based on the type of the real intersection and we show how this classification can be used to compute efficiently the type of the real intersection. The near-optimal parameterization algorithms in all singular cases will be given in Part III [3].

**Key-words:** Intersection of surfaces, quadrics, pencils of quadrics, classification, curve parameterization.

<sup>\*</sup> Project Vegas, LORIA (UMR CNRS, INPL, INRIA Lorraine, Universités Nancy 1 & 2), Nancy, France; `Firstname.Lastname@loria.fr`.

<sup>†</sup> Project Salsa and LIP6 (UMR Université Pierre et Marie Curie and CNRS), Paris, France; `Daniel.Lazard@lip6.fr`.



---

# Near-Optimal Parameterization of the Intersection of Quadrics: III. Parameterizing Singular Intersections

Laurent Dupont\* , Daniel Lazard<sup>†</sup> , Sylvain Lazard\* , Sylvain Petitjean\*

Thème SYM —Systèmes symboliques  
Projets Vegas et Salsa

Rapport de recherche n° 5669 —Septembre 2005 — 34 pages

**Abstract:** In Part II [3] of this paper, we have shown, using a classification of pencils of quadrics over the reals, how to determine quickly and efficiently the real type of the intersection of two given quadrics.

For each real type of intersection, we design, in this third part, an algorithm for computing a near-optimal parameterization. We also give here examples covering all the possible situations, in terms of both the real type of intersection and the number and depth of square roots appearing in the coefficients.

**Key-words:** Intersection of surfaces, quadrics, pencils of quadrics, curve parameterization, singular intersections.

\* Project Vegas, LORIA (UMR CNRS, INPL, INRIA Lorraine, Universités Nancy 1 & 2), Nancy, France; [Firstname.Lastname@loria.fr](mailto:Firstname.Lastname@loria.fr).

<sup>†</sup> Project Salsa and LIP6 (UMR Université Pierre et Marie Curie and CNRS), Paris, France; [Daniel.Lazard@lip6.fr](mailto:Daniel.Lazard@lip6.fr).



---

# Intersecting Quadrics: An Efficient and Exact Implementation

Sylvain Lazard\*

Luis Mariano Peñaranda<sup>†</sup>

Sylvain Petitjean<sup>‡</sup>

July 4, 2005

## Abstract

We present the first complete, exact, and efficient C++ implementation for parameterizing the intersection of two implicit quadrics with integer coefficients of arbitrary size. It is based on the near-optimal algorithm recently introduced by Dupont et al. [6] and builds upon Levin's seminal work [12].

Unlike existing implementations, it correctly identifies and parameterizes all the connected components of the intersection in all cases, returning parameterizations with rational functions whenever such parameterizations exist. In addition, the coefficient rings of the parameterizations are either minimal or involve one possibly unneeded square root.

We prove upper bounds on the size of the coefficients of the output parameterizations and compare these bounds to observed values. We give other experimental results and present some examples.

## 1 Introduction

Computing an explicit representation of the intersection of two general quadrics (i.e., quadratic surfaces) is a fundamental problem in areas such as solid modeling, computational geometry, and computer graphics. The range of applications covers well-known problems like computing arrangements [8, 15], boundary evaluation [17], and convex hull computation [10].

**Past work.** Until recently, the only known general method for computing a parametric representation of the intersection between two arbitrary quadrics was that of J. Levin [12]. This method is based on an analysis of the pencil generated by the two quadrics, i.e., their set of linear combinations.

Though useful for curve tracing, Levin's method has serious limitations. When the intersection is singular or reducible, a parameterization by rational functions is known to exist, but Levin's pencil method fails to find it and generates a parameterization that involves the square root of some polynomial. In addition, since it introduces algebraic numbers of very high degree (for instance in the computation of eigenvalues and eigenvectors), a correct implementation using exact arithmetic is essentially out of reach. In addition, when a floating point representation of numbers is used, the method may output results that are wrong (geometrically and topologically) and it may even fail to produce any parameterization at all and crash.

Over the years, Levin's seminal work has been extended and refined in several different directions. Wilf and Manor [24] use a classification of quadric intersections by the Segre characteristic (see [2]) to drive the parameterization of the intersection by the pencil method. Recently, Wang, Goldman, and Tu [22] further improved the method making it capable of computing structural information on the intersection and its various connected components and able to produce a parameterization by rational functions when such a parameterization exists. Whether the refined algorithm is numerically robust is open to question.

---

\*LORIA-INRIA Lorraine, Campus scientifique, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France.

<sup>†</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. Work done while this author was visiting LORIA (supported by the International Relations Delegation of INRIA).

<sup>‡</sup>LORIA-CNRS, Campus scientifique, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France.



---

# Common Tangents to Spheres in $\mathbb{R}^3$

Ciprian Borcea<sup>1</sup>, Xavier Goaoc<sup>2</sup>, Sylvain Lazard<sup>2</sup>, and Sylvain Petitjean<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Rider University, Lawrenceville, New Jersey, [borcea@rider.edu](mailto:borcea@rider.edu)

<sup>2</sup> LORIA - INRIA Lorraine, CNRS and Université Nancy 2,  
[{goaoc,lazard,petitjea}@loria.fr](mailto:{goaoc,lazard,petitjea}@loria.fr)

**Abstract.** We prove that four spheres in  $\mathbb{R}^3$  have infinitely many real common tangents if and only if they have aligned centers and at least one real common tangent.

## 1 Introduction

A major issue in geometric computing is to handle degenerate inputs properly in order to design robust algorithms. This often requires recognizing such an input to begin with. In 3D visibility problems, which are ubiquitous in computer graphics and image synthesis, objects with a set of common tangents of improper dimension constitute degenerate configurations, as detailed in the survey of Durand [3]. In this paper, we determine all degenerate configurations of four distinct spheres, that is all configurations of four spheres with infinitely many common tangents.

The study of real lines tangent to basic geometric objects has been very active in recent years. This topic includes two closely related directions of research, namely the characterization of degenerate configurations and the enumeration of lines satisfying geometric constraints. Usually, these problems are approached by studying the degeneracies and counting the number of solutions of some specific polynomial system. The difficulty often resides in eliminating imaginary solutions, solutions at infinity, and components of positive dimension of solutions in order to retain only real affine solutions.

The case of lines tangent to spheres has been persistently investigated. Macdonald *et al.* [4] proved that four unit spheres have at most 12 common tangents in general, and infinitely many common tangents if and only if the centers are aligned. The bound of 12 was independently obtained by Devillers *et al.* [2]. Examples show that, in the finite case, this bound is tight [2, 4], yet, according to Megyesi [5], it drops to 8 in the case of unit spheres with coplanar but non-collinear centers. However, the upper bound of 12 remains valid when the spheres have arbitrary radii. Sottile and Theobald [8] proved that there are  $3 \cdot 2^{n-1}$  complex common tangent lines to  $2n - 2$  general spheres in  $\mathbb{R}^n$ , and that there exists a choice of spheres with all common tangents real.

Recently, progress has also been made in understanding the varieties of common tangents to spheres and transversals to lines. Theobald [9] described the configurations of three lines and a sphere having infinitely many common tangents/transversals. Next, Megyesi *et al.* [7] characterized the families of two lines



---

# Helly-Type Theorems for Line Transversals to Disjoint Unit Balls

Otfried Cheong\*    Xavier Goaoc†    Andreas Holmsen‡    Sylvain Petitjean§

September 18, 2006

## Abstract

We prove Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls in  $\mathbb{R}^d$ . In particular, we show that a family of  $n \geq 2d$  disjoint unit balls in  $\mathbb{R}^d$  has a line transversal if, for some ordering  $\prec$  of the balls, any subfamily of  $2d$  balls admits a line transversal consistent with  $\prec$ . We also prove that a family of  $n \geq 4d - 1$  disjoint unit balls in  $\mathbb{R}^d$  admits a line transversal if any subfamily of size  $4d - 1$  admits a transversal.

## 1 Introduction

Helly's celebrated theorem, published in 1923, states that a finite family of convex sets in  $\mathbb{R}^d$  has non-empty intersection if and only if any subfamily of size at most  $d + 1$  has non-empty intersection. Subsequent results of similar flavor (that is, if every subset of size  $k$  of a set  $\mathcal{S}$  has property  $\mathcal{P}$  then  $\mathcal{S}$  has property  $\mathcal{P}$ ) have been called *Helly-type theorems* and the minimal such  $k$  is known as the associated *Helly number*. Helly-type theorems and tight bounds on Helly numbers have been the object of active research in combinatorial geometry. In this paper, we investigate Helly-type theorems for the existence of line transversals to a family of objects, i.e. lines that intersect every member of the family.

**History.** The earliest Helly-type theorems in geometric transversal theory appeared about five decades ago. In 1957, Hadwiger [12] showed that an ordered family  $\mathcal{S}$  of compact convex sets in the plane admits a line transversal if every triple admits a line transversal compatible with the ordering. (Note that a line transversal to  $\mathcal{S}$  may not respect the ordering on  $\mathcal{S}$ ; to prove the existence of a line transversal that respects the ordering on  $\mathcal{S}$  one needs the assumption that any *four*-tuple admits an order-respecting line transversal.) In what follows, we shall talk about a Hadwiger-type theorem when the family of objects under consideration is ordered.

The same year, Danzer [5] proved the following result concerning families of pairwise disjoint unit discs in the plane: if such a family consists of at least 5 discs, and if any 5 of these discs are met by some line, then there exists a line meeting all the discs of the family. This answered a question of Hadwiger [10], who gave an example (5 circles, almost touching and with centers forming a regular pentagon) which shows that 5 cannot be replaced by 4. Grünbaum [8] showed that the same result holds if “unit disc” is replaced by “unit square”, and conjectured that the result holds for families of disjoint translates of any compact convex set in the plane. This long-standing conjecture was finally proved by Tverberg [19]. A weaker form of the conjecture which assumed 128 instead of 5 had been established earlier by Katchalski [16].

Danzer [5] conjectured that Helly-type theorems exist for line transversals to disjoint unit balls in arbitrary dimension. The first positive result was obtained by Hadwiger [11] for the case of families of “thinly distributed” balls, where the distance between any two balls is at least the sum of their radii. This result

---

\*Division of Computer Science, KAIST, Daejeon, South Korea. Email: ofried@kaist.ac.kr.

†LORIA - INRIA Lorraine, Nancy, France. Email: goaoc@loria.fr.

‡Department of Mathematics, University of Bergen, Bergen, Norway. Email: andreash@mi.uib.no.

§LORIA - CNRS, Nancy, France. Email: petitjea@loria.fr.



---

# Line Transversals to Disjoint Balls

[Extended Abstract]

Ciprian Borcea  
Department of Mathematics  
Rider University  
Lawrenceville, NJ 08648, USA  
Ciprian.Borcea@rider.edu

Xavier Goaoc  
LORIA - INRIA Lorraine,  
Nancy, France  
Xavier.Goaoc@loria.fr

Sylvain Petitjean  
LORIA - CNRS Lorraine,  
Nancy, France  
Sylvain.Petitjean@loria.fr

## ABSTRACT

We prove that the set of directions of lines intersecting three disjoint balls in  $\mathbb{R}^3$  in a given order is a strictly convex subset of  $\mathbb{S}^2$ . We then generalize this result to  $n$  disjoint balls in  $\mathbb{R}^d$ . As a consequence, we can improve upon several old and new results on line transversals to disjoint balls in arbitrary dimension, such as bounds on the number of connected components and Helly-type theorems.

## Categories and Subject Descriptors

F.2.2 [Nonnumerical Algorithms and Problems]: Geometrical problems and computations

## General Terms

Theory

## Keywords

Geometric transversal theory, line transversal, disjoint balls, Helly-type theorem, Hadwiger-type theorem

## 1. INTRODUCTION

Helly's theorem [11] of 1923 opened a large field of inquiry now designated as *geometric transversal theory*. A typical concern is the study of all  $k$ -planes (also called  $k$ -flats) which intersect all sets of a given family of subsets (or objects) in  $\mathbb{R}^d$ . These are the  $k$ -transversals of the given family and they define a certain subspace of the corresponding Grassmannian. True to its origin, transversal theory usually implicates *convexity* in some form: either in its assumptions, or in its proofs, or, most likely, in both.

In what follows,  $k = 1$  and the objects will be disjoint closed balls with arbitrary radii in  $\mathbb{R}^d$ . Our main result is the following convexity theorem:

**THEOREM 1.** *The directions of all oriented lines intersecting a given finite family of disjoint balls in  $\mathbb{R}^d$  in a specific order form a strictly convex subset of the sphere  $\mathbb{S}^{d-1}$ .*

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. To copy otherwise, to republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee.

SCG'07, June 6–8, 2007, Gyeongju, South Korea.  
Copyright 2007 ACM 978-1-59593-705-6/07/0006 ...\$5.00.

with the immediate consequence that the connected components in the space of line transversals correspond with all possible *geometric permutations* of the given family, where a geometric permutation is understood as a pair of orderings defined by a single line transversal with its two orientations.

Before discussing other implications, we want to emphasize that the *key* to our theorem resides in the case of *three disjoint balls in  $\mathbb{R}^3$* , and the approach we use to settle this case is geometrically quite revealing, in that it shows the nuanced dependency of the convexity property on the *curve of common tangents* to the three bounding spheres.

## 1.1 Relations with previous work

Helly's theorem [11] states that a finite family  $\mathcal{S}$  of convex sets in  $\mathbb{R}^d$  has non-empty intersection if and only if any subfamily of size at most  $d + 1$  has non-empty intersection. Passing from  $k = 0$  to  $k = 1$ , one of the early results is due to Danzer [7] who proved that  $n$  disjoint **unit** disks in the plane have a line transversal if and only if every five of them have a line transversal. Hadwiger's theorem [9], which allows arbitrary disjoint convex sets in the plane as objects, showed the importance of the *order* in which oriented line transversals meet the objects: when every three objects have an oriented line transversal respecting some fixed order of the whole family, there must be a line transversal for the family.

This stimulated the interest of comparing, in arbitrary dimension, two equivalence relations for line transversals: the coarser one, *geometric permutation*, determined by the order in which the given disjoint objects are met (up to reversal of orientation), and the finer one, *isotopy*, determined by the connected components of the space of transversals.

In general, for  $d \geq 3$ , the “gap” between the two notions may be wide [8], and families for which the two notions coincide are thereby “remarkable”. The first examples of such families are “thinly distributed” balls<sup>1</sup> in arbitrary dimension, as observed by Hadwiger [10]. Then, the work of Holmsen et al. [13] showed that disjoint **unit** balls in  $\mathbb{R}^3$  provide “remarkable” cases as well. They verified the convexity property in the case of equal radii, and their method can be extended to the larger class of “pairwise inflatable” balls<sup>2</sup> in arbitrary dimension [5], inviting the obvious question regarding disjoint balls of arbitrary radii. The significance of this

<sup>1</sup>A family of balls is *thinly distributed* if the distance between the centers of any two balls is at least twice the sum of their radii.

<sup>2</sup>A family of balls is *pairwise inflatable* if the squared distance between the centers of any two balls is at least twice the sum of their squared radii.