



**HAL**  
open science

**Modélisation du comportement mécanique par éléments discrets des ouvrages maçonnerés tridimensionnels.  
Contribution à la définition d'éléments de contacts surfaciques.**

Robert Perales

► **To cite this version:**

Robert Perales. Modélisation du comportement mécanique par éléments discrets des ouvrages maçonnerés tridimensionnels. Contribution à la définition d'éléments de contacts surfaciques.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2007. Français. NNT: . tel-00188332

**HAL Id: tel-00188332**

**<https://theses.hal.science/tel-00188332>**

Submitted on 16 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II  
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II**

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique et Génie Civil  
Formation Doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes,  
des structures et systèmes  
Ecole Doctorale : Informations, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

**Robert PERALES**

le 27 septembre 2007

**Titre :**

**MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE PAR ELEMENTS  
DISCRETS DES OUVRAGES MACONNES TRIDIMENSIONNELS.  
CONTRIBUTION A LA DEFINITION D'ELEMENTS DE CONTACTS  
SURFACIQUES.**

**JURY**

MM. F. JOURDAN	Professeur, Montpellier II	Président
M. COMO	Professeur, Università di Roma TOR VERGATA, Rome	Rapporteur
M. JEAN	Directeur de recherche émérite CNRS, Marseille II	Rapporteur
M. NEMOZ- GAILLARD	Enseignant-Chercheur, Ecole des Mines d'Alès	Examineur
C. BOHATIER	Professeur, LMGC - Montpellier II	Directeur de thèse
M. VINCHES	Enseignant-Chercheur, Ecole des Mines d'Alès	Co-directeur

Travaux réalisés à l'Ecole des Mines d'Alès - Centre des Matériaux de Grande Diffusion



# Remerciements

Je remercie en premier lieu Marc Vinches, mon encadrant de proximité, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire Centre des Matériaux de Grande Diffusion (CMGD) de l'école des Mines d'Alès. Je lui suis reconnaissant pour la confiance, la patience et la compréhension qu'il a bien voulu me témoigner, mais également pour les connaissances qu'il m'a apporté.

Je tiens à remercier Claude Bohatier, mon directeur de thèse, pour m'avoir soutenu et encadré pendant ces trois années de thèse. Les longues discussions avec lui ont pu souvent apporter des réponses à mes questions.

Je tiens également à remercier Max Nemoz-Gaillard, enseignant-chercheur au CMGD. Sa constante disponibilité, la qualité de ses conseils dans de nombreux domaines tant sur le plan scientifique que personnel et son soutien moral pendant les moments difficiles de la thèse ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Franck Jourdan pour l'honneur qu'il m'a fait de présider mon jury. Il a su m'insuffler son enthousiasme et m'orienter dans mes premiers pas dans le monde de la recherche scientifique.

Je souhaite de plus remercier Frédéric Dubois pour son investissement dans le développement de la plateforme numérique LMGC90. Ses connaissances dans le domaine de la mécanique et ses nombreux conseils m'ont permis de mener à bien ces travaux.

Je suis grandement reconnaissant à Michel Jean, directeur de recherche émérite CNRS ainsi qu'à Mario Como, professeur à l'université de Rome Tor Vergata d'avoir accepté la tâche souvent longue et difficile de rapporteur de ce mémoire de thèse.

J'ai effectué ma thèse au sein du CMGD de l'école des Mines d'Alès. Je remercie chaleureusement les membres de ce laboratoire et plus particulièrement Madame Mireille Fouletier, directrice du CMGD de m'avoir accepté au sein de son laboratoire.

N'oublions pas les secrétaires qui ont contribué au bon déroulement des démarches administratives : Martine, Christiane, Valérie, Danièle et Sylvie.

Je remercie grandement les membres du Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil de Montpellier pour leur accueil lors de mes nombreux séjours ainsi que le personnel administratif : Reine, Elisabeth, Gilbert... qui a contribué au suivi et à la bonne réalisation de mon parcours scientifique.

Je tiens à saluer mes compagnons de thèse : Nicolas C., Jean-Sébastien, Julien, Stéphanie, Adamah, Anne, Benjamin, Nicolas P., Vincent, Rodolphe, Rémy, Mohammad, Ali, Mohammed, Adnane...

pour les bons moments partagés à la cafét, les sorties et les loisirs.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide inconditionnelle de ma famille, en particulier mes parents et mon frère qui m'ont toujours encouragé et soutenu tout au long de ces années.

Enfin, je terminerais cette liste en remerciant particulièrement Sandra pour sa patience et son soutien. Merci également à ma Belle Famille pour leurs encouragements.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Description des maçonneries : des constituants aux structures</b>	<b>21</b>
1.1	Les éléments corps . . . . .	23
1.1.1	Les matériaux minéraux . . . . .	23
1.1.2	Les matériaux organiques . . . . .	26
1.1.3	Les matériaux végétaux . . . . .	26
1.2	Les éléments de "joints" . . . . .	26
1.2.1	Fonctions du mortier . . . . .	26
1.2.2	Différents matériaux composant le mortier . . . . .	27
1.3	Présentation des différentes maçonneries . . . . .	29
1.4	L'appareil . . . . .	31
1.4.1	Position des éléments dans l'appareillage . . . . .	32
1.4.2	Règles d'appareillage à respecter . . . . .	34
1.5	D'un point de vue mécanique - les éléments corps . . . . .	36
1.5.1	Essais et résultats de la résistance en compression uniaxiale . . . . .	37
1.5.2	Essais et résultats de la résistance à la traction (méthode indirecte) . . . . .	39
1.5.3	Vitesse des ondes élastiques . . . . .	44
1.5.4	Choix des matériaux - exemple sur une structure maçonnée : une coupôle . . . . .	45
1.5.5	Conclusion . . . . .	46
1.6	D'un point de vue mécanique - les éléments joints : le mortier . . . . .	46
1.6.1	Ouvrabilité . . . . .	47
1.6.2	Prise . . . . .	48
1.6.3	Résistances mécaniques . . . . .	48
1.7	Propriétés de l'interface . . . . .	51
1.7.1	Interface bloc/bloc . . . . .	52
1.7.2	Interface bloc/mortier . . . . .	57
1.8	Propriétés des maçonneries . . . . .	61
1.8.1	Comportement des maçonneries en compression uniaxiale . . . . .	61
1.8.2	Comportement des maçonneries en traction uniaxiale . . . . .	62
1.8.3	Comportement biaxial des maçonneries . . . . .	63
1.9	Conclusion . . . . .	67
<b>2</b>	<b>Approche numérique pour modéliser une maçonnerie</b>	<b>69</b>
2.1	Modélisation continue des maçonneries . . . . .	72
2.1.1	Modélisation par un milieu à une phase : macro-modélisation . . . . .	73
2.1.2	Modélisation par un milieu à plusieurs phases : micro-modélisation . . . . .	78
2.2	Choix de la méthode de modélisation . . . . .	84
2.3	Généralités sur les méthodes par éléments discrets . . . . .	86

2.3.1	Méthodes smooth . . . . .	86
2.3.2	Méthodes non-smooth . . . . .	90
2.3.3	Conclusions sur les méthodes smooth et non smooth . . . . .	91
2.4	Modélisation discrète des maçonneries . . . . .	92
2.4.1	Relations de contact frottant . . . . .	92
2.4.2	Description du mouvement d'un corps en présence de "contacts" . . . . .	94
2.4.3	Méthode de résolution . . . . .	98
2.4.4	Modélisation du contact avec cohésion . . . . .	100
2.4.5	Méthode de résolution : résolution du problème contact, frottement et adhérence en 3D . . . . .	102
2.5	Conclusion et perspectives . . . . .	103
<b>3</b>	<b>Algorithme de détection des contacts dans les géométries régulières, spécificités des maçonneries</b>	<b>105</b>
3.1	Spécificités des structures maçonnées . . . . .	106
3.1.1	Quelques algorithmes pour la détection des contacts . . . . .	109
3.1.2	Approche choisie . . . . .	111
3.2	Pré-détection des contacts . . . . .	112
3.3	Détection "fine" des contacts spécifique aux maçonneries . . . . .	113
3.3.1	Mise en place d'un plan séparateur par la méthode de Cundall . . . . .	113
3.3.2	Algorithme pour positionner le plan séparateur . . . . .	114
3.3.3	Projection des sommets sur le plan séparateur . . . . .	119
3.4	Calcul de l'enveloppe convexe . . . . .	124
3.4.1	Méthode utilisée pour le calcul de l'enveloppe convexe . . . . .	124
3.4.2	Détermination de la zone de recouvrement . . . . .	126
3.5	Typologie des situations de contacts . . . . .	128
3.6	Originalité de la modélisation proposée et exemples d'application de l'algorithme à des structures réelles en 3D . . . . .	129
3.6.1	Structures réelles à grand nombre de blocs . . . . .	129
3.6.2	Structures réelles précontraintes : escalier Ridolfi et coupôle de Junas . . . . .	132
3.6.3	Structure académique impliquant une épaisseur de joint . . . . .	136
3.7	Conclusion . . . . .	137
<b>4</b>	<b>Traitement des contacts surfaciques et application aux maçonneries</b>	<b>139</b>
4.1	Résolution locale de problèmes statiquement indéterminés . . . . .	140
4.1.1	Modélisation des réactions de contact avec frottement dans le cas 2D . . . . .	140
4.1.2	Modélisation des réactions de contact sans/avec frottement en 3D . . . . .	145
4.1.3	Algorithme de résolution . . . . .	153
4.2	Mise en oeuvre numérique . . . . .	157
4.3	Applications à un contact solide plan . . . . .	158
4.3.1	Surface de contact à 3 noeuds . . . . .	158
4.3.2	Surface de contact à 4 noeuds . . . . .	166
4.3.3	Cas limite : le solide tend vers le basculement . . . . .	176
4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	177

<b>5 Etude du comportement mécanique des structures réelles et validation numérique tridimensionnelle</b>	<b>179</b>
5.1 Apport de notre modélisation dans l'étude du comportement des structures maçonnées soumises à des sollicitations dynamiques . . . . .	180
5.1.1 Maçonnerie à joints secs : tests de cisaillement et tassement différentiel . . .	181
5.1.2 Comportement d'un pont maçonné sous charge ponctuelle . . . . .	189
5.1.3 Structure en grand appareil ruinée sous charge cyclique . . . . .	194
5.1.4 Conclusion . . . . .	196
5.2 Résolution numérique du problème de contacts : application aux maçonneries . . .	197
5.2.1 Modélisation d'ouvrages en grand appareil comportant un nombre de blocs important . . . . .	197
5.2.2 Modélisation d'ouvrages précontraints . . . . .	201
5.2.3 Conclusion . . . . .	213
5.3 Problème statiquement indéterminé . . . . .	213
5.3.1 Instabilité de la surface de contact due à un nombre insuffisant de noeuds .	213
5.3.2 Application numérique au cas d'un mur suivant deux procédés de construction	215
5.3.3 Apport de la méthode de résolution "couplée" sur la stabilité de la solution	218
5.3.4 Conclusion . . . . .	222
5.4 Conclusion . . . . .	222
<b>6 Conclusion et perspectives</b>	<b>225</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>231</b>





# Table des figures

1.1	Illustration d'une pile de briques pleines . . . . .	24
1.2	Illustration d'une boutisse parpaigne . . . . .	24
1.3	Cathédrale Notre-Dame-de-Paris . . . . .	25
1.4	La Grande Muraille de Chine . . . . .	29
1.5	Voûte du temple de Diane - Nîmes . . . . .	29
1.6	Illustration d'une assise . . . . .	30
1.7	Coupe d'un mur en pierres sèches . . . . .	31
1.8	Détail de la porte Saint-André de l'enceinte Gallo-Romaine d'Autun. La partie de gauche est en grand appareil régulier, celle du centre en petit appareil régulier. Ce parement forme un coffrage pour le blocage de droite (pierres noyées dans du ciment)	32
1.9	Mur de Mycènes . . . . .	32
1.10	Mosaïque moderne et assise régulière . . . . .	33
1.11	Exemples de dispositions des briques dans l'appareil . . . . .	34
1.12	Absence de joints verticaux . . . . .	35
1.13	Présence de parpaings de solidarisation . . . . .	35
1.14	Harpage . . . . .	36
1.15	Essai de compression - éprouvette cylindrique . . . . .	37
1.16	Résultats des essais de compression uniaxiale : résistance à la compression et module d'élasticité, Beck & al (Beck (2006)) . . . . .	38
1.17	Courbes contrainte-déformation lors de l'essai en compression uniaxiale pour différents états hydriques du tuffeau et de la pierre de Sébastopol, Beck & al (Beck (2006)) . . . . .	39
1.18	Essai de traction indirecte (essai brésilien) . . . . .	40
1.19	Résultats des essais de traction indirecte, Beck & al (Beck (2006)) . . . . .	41
1.20	Courbes contrainte-déformation lors de l'essai brésilien pour différents états hydriques du tuffeau et de la pierre de Sébastopol, Beck & al (Beck (2006)) . . . . .	42
1.21	Dispositions des pierres selon leurs caractéristiques mécaniques dans une structure maçonnée : une coupôle . . . . .	45
1.22	Composition granulométrique du sable de référence CEN . . . . .	46
1.23	Table à chocs . . . . .	47
1.24	Principe de fonctionnement du maniabilimètre B, LCPC . . . . .	47
1.25	Appareil de Vicat muni de l'aiguille avec une surcharge . . . . .	48
1.26	Moule pour moulage des éprouvettes de mortier . . . . .	49
1.27	Dispositif pour l'essai de résistance à la flexion . . . . .	49
1.28	Propriétés mécaniques des joints suivant le dosage, source AFNOR A179 . . . . .	50
1.29	Relation entre la composition du mortier, la résistance à la compression et le pouvoir de rétention d'eau, source AFNOR A179 . . . . .	51

1.30	Profil de rugosité de la pierre et valeur du JRC équivalent, Barton & al (Barton et Choubey (1977)) . . . . .	52
1.31	Exemples de pierres avec leurs coefficients de rugosité : JRC, JCS et angle de frottement, Bhowmik & al (Bhowmik et Dutta (2004)) . . . . .	54
1.32	Représentation des contraintes de cisaillement et de déplacement pour différents coefficients de rugosité JRC. [M]=model [P]=prototype, Barton & al (Barton et Choubey (1977)) . . . . .	55
1.33	Essais de cisaillement de l'interface pierre/pierre, Villemus & al (Villemus (2004)) .	56
1.34	Essais de cisaillement d'interface pierre/pierre, Armand & al (Armand et al. (1997))	57
1.35	Représentation de différents types d'essais dans l'interface bloc/mortier. Essais possibles pour caractériser la résistance à la traction : (a) et (b) Essais 3-points, (c) essais 4-points, (d) essais de flexion, (e) essais de compression, Lourenço & al (Lourenço (2006)) . . . . .	58
1.36	Comportement de l'interface bloc/mortier à la traction : (a) traction directe, (b) diagramme contrainte-déplacement (fissure) pour une brique pleine composée d'argile (l'aire représente l'enveloppe de 4 essais), Van Der Pluijm (Van Der Pluijm (1997))	58
1.37	Rapport de la surface d'arrachement par traction à la surface totale de contact, Lourenço & al (Lourenço (2006)) . . . . .	59
1.38	Essais de cisaillement : (a) essais couplés, (b) essais "triplés", Lourenço & al (Lourenço (2006)) . . . . .	60
1.39	Essais de cisaillement : (a) échantillon, (b) forces appliquées sur l'échantillon, Van der Pluijm (Van Der Pluijm (1993)) . . . . .	60
1.40	Mode II de rupture de l'interface bloc/mortier : (a) Diagramme contrainte-déplacement pour différents états de contraintes (l'aire représente l'enveloppe de 3 essais), (b) énergie $G_f^{II}$ de rupture, Lourenço & al (Lourenço (2006)) . . . . .	61
1.41	Comportement uniaxial des maçonneries sous chargement normal au plan de joint. Représentation, sur la figure de gauche de l'échantillon RILEM. Représentation, sur la figure de droite, du diagramme contrainte-déplacement ( $f_{m0}$ est la résistance à la compression du mortier, Lourenço & al (Lourenço (2006)) . . . . .	61
1.42	Test de traction dans la direction parallèle au plan de joint, Backes & al (Backes (1985)) . . . . .	62
1.43	Diagramme contrainte-déplacement sous des essais de traction dans la direction parallèle au plan de joint : (a) rupture du joint en zigzag, (b) rupture verticale des joints et des blocs, Backes & al (Backes (1985)) . . . . .	63
1.44	Comportement biaxial des maçonneries : (a) chargement uniaxial, (b) chargement biaxial, Page & al (Page (1981)) . . . . .	64
1.45	Enveloppe de résistance de la maçonnerie en fonction de l'inclinaison du chargement biaxial, Page & al (Page (1981)) . . . . .	65
1.46	Différents modes de rupture de la maçonnerie sous chargement biaxial, Dhanasekar & al (Dhanasekar et Page (1985)) . . . . .	66
1.47	Influence de l'orientation des joints sur le type de rupture de la maçonnerie, Abdou & al (Abdou (2005)) . . . . .	67
2.1	Mécanismes de rupture d'une maçonnerie : (a) fissure du joint en traction ; (b) glissement du joint ; (c) fissure du bloc par traction directe ; (d) fissure du bloc par traction diagonale ; (e) compression de la maçonnerie, Lourenço & al (Lourenço (2006)) . .	71
2.2	Stratégies de modélisation d'une maçonnerie, Lourenço (Lourenço (2006)) . . . . .	72

2.3	Analyse limite. (a) Mur chargé hors du plan, contraint sur un bord (Orduna et Lourenço (2005b)); (b) Pile de blocs (Ferris et Tin-Loi (2001)); (c) Pont en 2D (Orduna (2003)) . . . . .	75
2.4	Endommagement. Critère de Rankine, Critère de Mohr-Coulomb, Lofti & al (lofti et Shing (1994)) . . . . .	76
2.5	Milieux de Cosserat. Notations pour le solide plan . . . . .	77
2.6	Matériau hétérogène périodique et définition du V.E.R, De Buhan & al (De Buhan et De Felice (1997)) . . . . .	80
2.7	Différents endommagements possibles dans les maçonneries, Luciano & al (Luciano et Sacco (1997)) . . . . .	81
2.8	Volume élémentaire représentatif dans le cas des maçonneries, De Buhan & al (De Buhan et De Felice (1997)) . . . . .	82
2.9	Façade du colisée à Rome . . . . .	84
2.10	Vue générale de l'aqueduc d'Arles et de l'aqueduc des moulins, au vallon des Arcs, à Fontvieille. . . . .	85
2.11	Modèle des maçonneries en grand appareil en partie inférieure, et en petit appareil et maçonnerie de blocage en partie supérieure, du deuxième aqueduc d'Arles, au vallon des Arcs, à Fontvieille (Cotte et al. (2001)) . . . . .	85
2.12	Photo de gauche : Vue partielle des arènes de Nîmes, détail de maçonneries en grand appareil. Photo de droite : Arènes de Nîmes. Exemple de géométrie modélisée. . . . .	86
2.13	Loi de contact élastique linéaire. Contact entre deux particules . . . . .	89
2.14	Graphe de la condition de Signorini . . . . .	92
2.15	Graphe de la loi de Coulomb . . . . .	93
2.16	Résolution du problème de contact frottant standard en 2D . . . . .	99
3.1	Enveloppe régulière d'un bloc . . . . .	107
3.2	Cas d'un contact à joint de mortier . . . . .	108
3.3	Cas d'un contact à joint vif . . . . .	108
3.4	Schématisation du joint sec et du joint en présence de mortier . . . . .	109
3.5	Les boîtes min-max, les containers et les voxelisations. Algorithme de Garcia-Alonso & al (Garcia-Alonso et al. (1994)) . . . . .	110
3.6	Organigramme de notre contribution sur le développement de l'algorithme de détection	112
3.7	Méthode de détection grossière par la boîte englobante . . . . .	113
3.8	Principe du plan séparateur, Cundall & al (Cundall (1988a)) . . . . .	114
3.9	Trièdre défini sur le plan séparateur, Cundall & al (Cundall (1988a)) . . . . .	115
3.10	Perturbations autour du vecteur $\vec{s}_j$ , Cundall & al (Cundall (1988a)) . . . . .	116
3.11	Perturbations autour du vecteur $\vec{t}_j$ , Cundall & al (Cundall (1988a)) . . . . .	116
3.12	Trois configurations de contact : interpénétré, affleurant et non-contact, Cundall & al (Cundall (1988a)) . . . . .	117
3.13	Algorithme de positionnement du plan séparateur (Cundall (1988a)) . . . . .	118
3.14	Alignement des normales avec la normale moyenne . . . . .	119
3.15	Détermination de la distance d'alerte . . . . .	119
3.16	Détermination de la distance d'alerte suivant les trois configurations de contact . . . . .	121
3.17	Faces des polyèdres en vis-à-vis avec le plan séparateur . . . . .	121
3.18	Distance entre $G_{ant}$ et $V_{ant}$ . . . . .	122
3.19	Définition de l'épaisseur du joint . . . . .	123
3.20	Méthode de l'enveloppe convexe : nuage de points . . . . .	124
3.21	Méthode de l'enveloppe convexe : point initial P1 . . . . .	125

3.22	Méthode de l'enveloppe convexe : point secondaire P2 . . . . .	125
3.23	Méthode de l'enveloppe convexe : algorithme généralisé à n points . . . . .	125
3.24	Zone de recouvrement des surfaces détectées . . . . .	126
3.25	Test d'appartenance des sommets à la zone de recouvrement . . . . .	126
3.26	Sommets résultants de l'intersection de segments des surfaces détectées . . . . .	127
3.27	Algorithme de détection des contacts spécifiques : typologie des situations de contact	128
3.28	Structure réelle du Pont Julien . . . . .	129
3.29	Répartition des déplacements des blocs dans le pont . . . . .	130
3.30	Nombre de contacts en fonction de leur nature (pont Julien) . . . . .	131
3.31	Détection imparfaite de contacts face/face . . . . .	131
3.32	L'escalier sur chantier, et à la 40 <sup>ieme</sup> foire de Vérone . . . . .	132
3.33	Structure C.A.O d'une marche (a) et contact entre deux marches (b) . . . . .	132
3.34	Répartition des déplacements des blocs dans l'escalier . . . . .	133
3.35	Nombre de contacts en fonction de leur nature (escalier Ridolfi) . . . . .	134
3.36	Représentation des noeuds de contact dans la coupôle . . . . .	134
3.37	Représentation des vitesses des blocs dans la coupôle . . . . .	135
3.38	Nombre de contacts en fonction de leur nature (coupôle de Junas) . . . . .	136
3.39	Intégration d'un joint d'épaisseur non nulle entre les blocs . . . . .	137
4.1	Hypothèse de répartition des réactions tangentielles dans une direction en 2D . . .	141
4.2	Représentation de l'accélération linéaire et de la vitesse linéaire du solide en 2D . .	144
4.3	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du solide 2D (voir figure 4.1) . . . .	145
4.4	Modélisation des réactions normales en fonction d'une charge appliquée . . . . .	146
4.5	Illustration d'une hypothèse de proportionnalité entre 2 noeuds . . . . .	148
4.6	Localisation des réactions aux noeuds et répartition des réactions tangentielles . . .	149
4.7	Projection perpendiculaire de l'effort $T_i$ sur les axes liés au mobile $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ . . .	149
4.8	Représentation de la décomposition du vecteur tangentiel et du vecteur vitesse (le cerce est la trace du cône de Coulomb) . . . . .	151
4.9	Hypothèse de proportionnalité tangentielle - 3 noeuds principaux + noeuds supplé- mentaires . . . . .	152
4.10	Algorithme de résolution numérique, des cas non-glissant et glissant, pour un pro- blème d'hyperstaticité . . . . .	158
4.11	Géométrie du prisme . . . . .	159
4.12	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $F_x = 3000N$ . . . .	160
4.13	Représentation des accélérations linéaires $\Gamma_x$ et $\Gamma_y$ au centre de gravité du prisme pour $F_x = 10000N$ . . . . .	161
4.14	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $F_x = 10000N$ . . .	162
4.15	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $M_z = -200Nm$ . .	163
4.16	Représentation des accélérations linéaires $\Gamma_x, \Gamma_y$ et de rotation $\dot{\Omega}_z$ au centre de gravité du prisme pour $M_z = -60000Nm$ . . . . .	164
4.17	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $M_z = -60000Nm$ .	165
4.18	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $F_x = -m * g * f$ N	166
4.19	Géométrie du cube . . . . .	167
4.20	Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour $F_x = 1000N$ et $F_y =$ $-1000N$ . . . . .	168
4.21	Représentation des accélérations linéaires $\Gamma_x$ et $\Gamma_y$ au centre de gravité du cube pour $F_x = 40000N$ et $F_y = -40000N$ . . . . .	169

4.22 Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour $F_x = 40000N$ et $F_y = -40000N$ . . . . .	170
4.23 Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour $M_z = -400Nm$ . . .	171
4.24 Représentation des accélérations linéaires $\Gamma_x$ , $\Gamma_y$ et de rotation $\dot{\Omega}_z$ au centre de gravité du cube pour $M_z = -40000Nm$ . . . . .	172
4.25 Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour $M_z = -40000Nm$ . .	173
4.26 Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour $F_x = -m * g * f$ N et $F_y = m * g * f$ N . . . . .	174
4.27 Transition non-glissant/glissant au niveau du noeud 1 du cube . . . . .	175
4.28 Influence de la valeur du module de $F_x$ et $F_y$ sur les valeurs des réactions $T_x$ et $T_y$	175
4.29 Modélisation du basculement . . . . .	176
4.30 Cas limite : le parallélépipède tend vers le basculement . . . . .	177
5.1 Géométrie de la structure et chargements. Tests de cisaillement, Roca & al (Roca et al. (2001)) . . . . .	182
5.2 Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture - Ruptures expérimentales observées, Roca & al (Roca et al. (2001)) . . . . .	183
5.3 Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture. Modèle de Lourenço & al (Lourenço et Rots (1997)) . . . . .	184
5.4 Cisaillement du mur SW200 jusqu'à la rupture. Modèle de Carol & al (Carol et al. (2001)) . . . . .	184
5.5 Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture. Simulation obtenue en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts . . . . .	185
5.6 Cisaillement du mur SW200 jusqu'à la rupture. Simulation obtenue en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts . . . . .	186
5.7 Diagramme charges horizontales en fonction des déplacements horizontaux, (Lourenço et Rots (1997)) et (Carol et al. (2001)) . . . . .	187
5.8 Diagramme charges horizontales en fonction des déplacements horizontaux, avec le nouvel algorithme de détection des contacts . . . . .	187
5.9 Tassement différentiel. Configurations initiale et finale du mur, Biénié & al (Biénié et al. (2002)) . . . . .	189
5.10 Le pont SNCF de la Millette . . . . .	190
5.11 Découpage en voussoirs, Domède & al (Domède (2006)) . . . . .	191
5.12 Déformée du pont - Contraintes principales de compression dans le pont obtenues avec CASTEM, Domède & al (Domède (2006)) . . . . .	191
5.13 Glissement de la culée : courbe obtenue avec CASTEM, Domède & al (Domède (2006))	192
5.14 Déformée longitudinale du pont obtenue avec LMGC90, en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts . . . . .	193
5.15 Glissement de la culée : courbe obtenue avec LMGC90, en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts . . . . .	193
5.16 Ruine des deux aqueducs soumis à un tremblement de terre. Simulations réalisées avec l'algorithme d'intersection de Saussine, (Chetouane (2004)) . . . . .	195
5.17 Ruine des deux aqueducs soumis à un tremblement de terre. Simulations réalisées avec le nouvel algorithme de détection spécifique aux maçonneries . . . . .	196
5.18 Structure réelle du pont Julien . . . . .	197
5.19 Répartition des efforts dans le pont Julien . . . . .	198
5.20 Descente de charge sur un pilier du pont Julien . . . . .	199
5.21 Pont Julien soumis à un tassement de sol de 28cm . . . . .	200

---

5.22	Répartition des efforts dans les aqueducs Romains . . . . .	201
5.23	Géométrie de la coupôle de Junas . . . . .	202
5.24	Positions des blocs dans la coupôle suivant leurs caractéristiques mécaniques . . . . .	203
5.25	Ruine de la coupôle . . . . .	203
5.26	Câble de précontrainte dans la coupôle . . . . .	204
5.27	Répartition des efforts dans la coupôle . . . . .	206
5.28	Descente de charge par pied de la coupôle . . . . .	207
5.29	Tassement différentiel : tassement numérique de sol de 10cm en "haut" et tassement de sol de 60cm en "bas" . . . . .	208
5.30	Câble de précontrainte dans l'escalier . . . . .	209
5.31	Représentation du câble de précontrainte entre deux marches de l'escalier . . . . .	210
5.32	Répartition des efforts dans les marches de l'escalier . . . . .	211
5.33	Escalier ruiné par défaut de précontrainte . . . . .	211
5.34	Escalier avec une charge de 50kg par marche . . . . .	212
5.35	Influence du nombre de noeuds de contact : modèle de contact bloc/bloc . . . . .	214
5.36	Coupôle modélisée avec trois noeuds de contacts par surface détectée. . . . .	215
5.37	Mise en place des blocs suivant un procédé réaliste de construction . . . . .	216
5.38	Simulation du mur suivant un procédé réaliste de construction . . . . .	216
5.39	Simulation du mur sans procédé de construction . . . . .	217
5.40	Comparaison de la descente de charges entre les murs calculés "directement" et en suivant un procédé réaliste de construction . . . . .	218
5.41	Géométrie du cube . . . . .	219
5.42	Modèle de basculement . . . . .	221

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques mécaniques des roches intactes, Bienawski (Bienawski (1974)) . . .	43
1.2	Caractéristiques mécaniques des roches moyennement fracturées, Bienawski (Bienawski (1974)) . . . . .	43
1.3	Caractéristiques mécaniques des roches fortement fracturées, Bienawski (Bienawski (1974)) . . . . .	43
5.1	Charges verticales et horizontales mesurées. Le mur est désigné par SW.n.m où m est le nombre de murs soumis à la charge verticale n (en kN), Roca & al (Roca et al. (2001)) . . . . .	182
5.2	Caractéristiques mécaniques des maçonneries du pont SNCF de la Millette, Domède & al (Domède (2006)) . . . . .	190
5.3	Caractéristiques de l'interface brique-mortier du pont SNCF, Domède & al (Domède (2006)) . . . . .	191
5.4	Valeurs des efforts sur les sommiers de la coupôle . . . . .	204
5.5	Cas non-glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "couplée"	220
5.6	Cas non-glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "classique NSCD" . . . . .	220
5.7	Cas glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "couplée"	221
5.8	Cas glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "classique NSCD" . . . . .	221
5.9	Cas de basculement. Valeurs des réactions sur chaque noeud du nouveau polyèdre - méthode "couplée" . . . . .	222
5.10	Cas de basculement. Valeurs des réactions sur chaque noeud du nouveau polyèdre - méthode "classique NSCD" . . . . .	222





# Introduction

Un milieu divisé est un assemblage de nombreux éléments solides disposés dans l'espace de façon régulière ou apparemment aléatoire, de formes différentes (du polyèdre régulier ou quelconque à la sphère), de tailles variables (du grain de sable au bloc de pierre de plusieurs mètres) et d'états de surface divers (lisses, rugueux). Chaque élément est traité de façon indépendante, modélisé soit en corps rigide soit en corps déformable, qui peut interagir avec ses voisins par des actions de contact. Suivant les cas, ces interactions peuvent être assimilées à du contact de type frottant et/ou cohésif. Les milieux granulaires sont présents dans tous les secteurs industriels et à toutes les échelles : du génie civil (ballast de voies ferrées, sables, ciments, sols, ouvrages en maçonnerie) aux secteurs agro-alimentaire (céréales en silos, farine) ou biomédical (médicaments en poudres ou comprimés).

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement du code de calcul LMGC90, d'une part, par l'amélioration de la gestion du contact dans certains cas spécifiques (détection, description, définition d'éléments de contacts surfaciques persistants), d'autre part, par la modélisation dans les cas statique et dynamique de structures maçonnées en trois dimensions. L'originalité réside dans la simulation, par le code LMGC90, de structures de pierre en grand appareil composées d'un grand nombre de blocs et éventuellement précontraintes. Dans l'ensemble de nos travaux, les blocs sont des polyèdres convexes, supposés rigides.

Les éléments de maçonnerie sont constitués de blocs et de joints. Ils peuvent être qualifiés de composites. Les discontinuités géométriques sont évidentes : l'approche continue ne permet pas leur prise en compte dans le cas général de structures tridimensionnelles, pour lesquelles il n'est pas possible de définir un volume élémentaire représentatif. Pour caractériser la présence de contacts et d'interfaces entre les blocs, une approche discrète, qui tient compte de cet aspect discontinu, semble plus adaptée. Selon les structures étudiées, les données du problème diffèrent : le milieu peut être plus ou moins dense, la sollicitation peut être quasi-statique ou dynamique... . Diverses méthodes numériques discrètes ont été développées afin de retenir les spécificités de ces matériaux et des phénomènes étudiés. On peut citer notamment (Cundall (1971), Cundall (1988b), Acary (2001), Dubois et Jean (2003), Dubois (2003)). Toutefois, l'approche discrète est peu utilisée dans le domaine des maçonneries en grand appareil comportant un grand nombre de polyèdres.

Dans ce travail, on propose d'étudier le comportement tridimensionnel des structures à l'aide de méthodes par éléments discrets avec l'approche Contact Dynamics, initiée et développée par Moreau et Jean (Moreau (1988), Jean (1993)).

L'emploi de cette méthode permet de mieux comprendre les phénomènes entre les différents corps rigides interagissants dans une structure. Le comportement mécanique est mieux appréhendé dans le cas où la structure est soumise à une sollicitation dynamique (par exemple, le passage d'un train sur un pont maçonné). Dans ce cadre, un algorithme de détection des contacts spécifique aux maçonneries est développé, s'intéressant notamment à la définition et à la gestion, dans le temps, des éléments de contacts surfaciques.

La première partie de cette thèse expose la définition des différents constituants d'une maçonnerie et leurs mises en place dans une structure. Les constituants sont de deux sortes : bloc et mortier. Leurs agencements sont de diverses formes et décrits par un vocabulaire spécifique. Il en existe plusieurs avec des règles d'appareillage à respecter.

Pour caractériser le comportement mécanique des blocs et des mortiers, plusieurs descriptions expérimentales sont présentées. L'objectif est d'optimiser le placement des blocs et du mortier dans la maçonnerie pour favoriser la stabilité de la structure.

Une étude de l'interface bloc/bloc et bloc/mortier est effectuée localement afin de déterminer ses différents modes de rupture en fonction des chargements. On exploite ensuite à un niveau global cette étude par des essais de structures afin d'en analyser le comportement mécanique sous diverses

sollicitations.

La seconde partie met en évidence les différentes approches numériques existantes pour modéliser une maçonnerie. L'approche par la méthode des éléments finis est limitée dans le cadre des maçonneries en raison des discontinuités géométriques et dans la plupart des cas de la non-existence d'un volume élémentaire représentatif. Une approche par éléments discrets semble plus appropriée pour simuler des structures maçonnées réelles. Les avantages et inconvénients des différentes méthodes par éléments discrets sont abordés.

La troisième partie traite de la détection des contacts. Dans un modèle discret, la détection des contacts est très importante et conditionne la qualité du calcul de stabilité des structures. L'étude des différents algorithmes de détection des contacts existants dans les domaines de la robotique et de la réalité virtuelle, y compris l'algorithme implémenté jusqu'à notre contribution dans le code de calcul LMGC90 met en évidence des problèmes dans la gestion des contacts.

Devant une détection perfectible des polyèdres entre eux, un nouvel algorithme de détection des contacts a été développé. Celui-ci est spécifique aux maçonneries dans lesquelles le contact entre solides est essentiellement de type face/face et arête/face. Des situations de contacts particulières de type arête/arête et arête/face peuvent apparaître dans certaines structures. Dans cette partie, l'efficacité de ce nouvel algorithme est mise en évidence sur des cas académiques puis à travers l'analyse du comportement de structures composées d'un grand nombre de blocs, à géométrie particulière, ou comprenant des dispositifs de précontrainte.

La quatrième partie présente la notion d'éléments de contacts surfaciques. L'algorithme de détection des contacts exposé précédemment, a permis de déterminer des points de contacts spécifiques (noeuds). Sur chacun de ces noeuds, des réactions d'efforts, réactions normale et tangentielles sont calculées. Cependant, à partir de trois noeuds, le système devient hyperstatique (plus d'inconnues que d'équations). Des hypothèses pour lever l'indétermination des réactions normales et tangentielles sont proposées. Par l'analyse des résultats de simulation numérique sur des cas académiques, ces hypothèses sont validées. La méthode de résolution traite simultanément tous les noeuds d'une liaison plane. Cette méthode consiste à "coupler" l'ensemble des équations pour chaque noeud et à construire un vecteur nodal et une matrice élémentaire. La rapidité de convergence de l'algorithme a été établie.

La cinquième et dernière partie traite de l'étude et de la validation numérique de l'algorithme de détection mis en oeuvre dans des maçonneries en trois dimensions. Les résultats mettent en évidence la robustesse de l'algorithme, développé dans la partie 3, à détecter les contacts. Pour cela, des simulations dynamiques sont réalisées dans lesquelles les blocs peuvent se déplacer dans plusieurs directions entraînant tous types de contact (arête/arête, sommet/face, sommet/sommet, etc.). Ces tests permettent de vérifier la non-interpénétration des blocs entre eux et de démontrer l'efficacité de l'algorithme.

La validation des réactions de contacts est effectuée par une analyse concrète de diverses descentes de charges et de tassements différentiels. Enfin, la méthode "couplée", définie dans la partie 4, est comparée à la méthode de résolution précédemment implémentée dans le code de calcul LMGC90.

L'ensemble des simulations a été réalisé grâce au code de calcul LMGC90 (Logiciel de Mécanique Gérant le Contact)(Dubois et Jean (2003)) . Le nouvel algorithme de détection des contacts spécifique aux maçonneries est implémenté dans ce logiciel.



---

# Chapitre 1

## Description des maçonneries : des constituants aux structures

### Sommaire

---

<b>1.1 Les éléments corps</b> . . . . .	<b>23</b>
1.1.1 Les matériaux minéraux . . . . .	23
1.1.2 Les matériaux organiques . . . . .	26
1.1.3 Les matériaux végétaux . . . . .	26
<b>1.2 Les éléments de "joints"</b> . . . . .	<b>26</b>
1.2.1 Fonctions du mortier . . . . .	26
1.2.2 Différents matériaux composant le mortier . . . . .	27
<b>1.3 Présentation des différentes maçonneries</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>1.4 L'appareil</b> . . . . .	<b>31</b>
1.4.1 Position des éléments dans l'appareillage . . . . .	32
1.4.2 Règles d'appareillage à respecter . . . . .	34
<b>1.5 D'un point de vue mécanique - les éléments corps</b> . . . . .	<b>36</b>
1.5.1 Essais et résultats de la résistance en compression uniaxiale . . . . .	37
1.5.2 Essais et résultats de la résistance à la traction (méthode indirecte) . . . . .	39
1.5.3 Vitesse des ondes élastiques . . . . .	44
1.5.4 Choix des matériaux - exemple sur une structure maçonnée : une coupole . . . . .	45
1.5.5 Conclusion . . . . .	46
<b>1.6 D'un point de vue mécanique - les éléments joints : le mortier</b> . . . . .	<b>46</b>
1.6.1 Ouvrabilité . . . . .	47
1.6.2 Prise . . . . .	48
1.6.3 Résistances mécaniques . . . . .	48
<b>1.7 Propriétés de l'interface</b> . . . . .	<b>51</b>
1.7.1 Interface bloc/bloc . . . . .	52
1.7.1.a Comportement mécanique du joint . . . . .	53
1.7.1.b Comportement en compression . . . . .	53
1.7.1.c Comportement au cisaillement . . . . .	54
1.7.1.d Critère de rupture . . . . .	55
1.7.1.e Essais de laboratoire . . . . .	56
1.7.2 Interface bloc/mortier . . . . .	57
1.7.2.a Rupture par traction <b>model I</b> . . . . .	57
1.7.2.b Rupture par cisaillement <b>model II</b> . . . . .	59

<b>1.8 Propriétés des maçonneries</b> . . . . .	<b>61</b>
1.8.1 Comportement des maçonneries en compression uniaxiale . . . . .	61
1.8.2 Comportement des maçonneries en traction uniaxiale . . . . .	62
1.8.3 Comportement biaxial des maçonneries . . . . .	63
<b>1.9 Conclusion</b> . . . . .	<b>67</b>

---

Avec le développement des programmes de préservation du patrimoine, un intérêt accru est porté à l'étude des ouvrages maçonnés et à leur modélisation sous différentes sollicitations extérieures. L'ICOMOS (ICOMOS (1964)) est le conseil international des monuments et des sites. C'est une association mondiale de professionnels qui regroupe actuellement plus de 7000 membres dans le monde. L'ICOMOS se consacre à la conservation et à la protection des monuments, des ensembles et des sites du patrimoine culturel.

La maçonnerie est définie comme "l'art de bâtir" une construction par assemblages de différents éléments. Elle est considérée comme la technique de construction la plus répandue. Les éléments d'une construction sont classés en deux catégories :

- les éléments dits "corps" : constituent l'objet essentiel de la construction. Ces éléments sont de trois types : les matériaux minéraux, les matériaux organiques et les matériaux végétaux.

- les éléments dits "joints" : sont le "joint" sans mortier (ou "joint sec") et le "joint" avec mortier (ou "joint de mortier"). Ces éléments permettent la liaison entre les éléments "corps".

Les ouvrages réalisés en maçonnerie sont divers et variés : murs, cloisons, piliers et colonnes, voûtes et coupôles... .

Dans cette partie, on définit les différents éléments constituant une maçonnerie, en détaillant la nature des éléments corps et des éléments joints. On expose ensuite, d'un point de vue mécanique, l'importance du choix des matériaux dans une maçonnerie. Enfin, on montre le comportement des maçonneries face à diverses sollicitations extérieures.

## 1.1 Les éléments corps

### 1.1.1 Les matériaux minéraux

Parmi l'ensemble des matériaux minéraux existants, on expose ici les différentes catégories de briques et de pierres.

- **La brique**

La brique est utilisée depuis des millénaires. Elle est constituée d'argile, celle-ci est une roche sédimentaire, mélangée à du sable. La fabrication de la brique se faisait en trois temps : elle était tout d'abord moulée dans des caissettes sans fond ni couvercle pour la retirer facilement, ensuite était mise à sécher pendant plusieurs jours et enfin était cuite au four. Celle qui était placée près du feu, était parfois déformée et décolorée par la chaleur, la plus éloignée pouvait ne pas être parfaitement cuite, tandis que celle du milieu était juste à point. Les briques étaient triées selon la qualité (uniformité de taille et de couleur), réservant les plus belles pour la façade et gardant les autres pour les côtés de l'immeuble et l'intérieur du mur.

Deux types de briques sont distingués :

la brique creuse, inventée au *XIX<sup>e</sup>* siècle est de nos jours la brique la plus utilisée, comparée à la brique pleine qui est un matériau traditionnel très ancien.

En construction, la brique pleine peut être employée comme un matériau de parement (face extérieur d'un mur) (comme illustré sur la figure 1.1). La ville de Toulouse est connue pour l'utilisation



généralisée de la brique apparente dans la plupart des constructions.



FIG. 1.1 – Illustration d'une pile de briques pleines

### • La pierre

Voici quelques exemples de roches qui sont les plus utilisées en construction :

- le granite : roche magmatique plutonique à structure composée de grains dont la taille est supérieure à 1mm,
- le calcaire : roche sédimentaire,
- le grès : roche détritique qui est une roche composée d'au moins 50% de débris,
- la pierre meulière : roche sédimentaire siliceuse utilisée jusqu'aux environs de 1880 pour fabriquer des meules à grain,
- la marne "appelée aussi pierre de France" : roche sédimentaire contenant du calcaire  $CaCO_3$  et de l'argile en quantités à peu près équivalentes,
- l'ardoise et le marbre.

En maçonnerie, la pierre est définie par différents termes de vocabulaire. Les principaux termes sont :

- la pierre angulaire (ou pierre d'encoignure) qui, comme son nom l'indique, est placée à l'angle d'un édifice et participe à son soutènement (solidité),
- la pierre de liaison, équivalent au terme "boutisse parpaingne", est la pierre la plus grande de l'édifice. Elle est placée en boutisse c'est-à-dire que sa longueur se trouve dans l'épaisseur du mur et ses deux bouts en parement (fig.1.2),

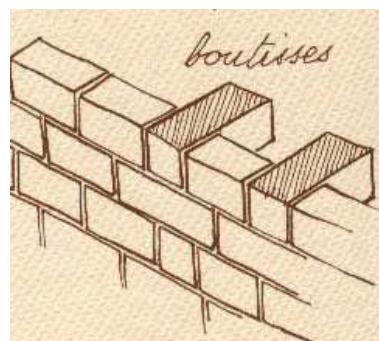


FIG. 1.2 – Illustration d'une boutisse parpaingne

- la pierre crue (ou écrue), est laissée à son état naturel (état brut),
- la pierre de calage, comme son nom l'indique, sert de cale pour assurer la stabilité,
- la pierre de tout venant est une pierre brute, non triée, non calibrée et employée dans un mur au fur et à mesure qu'elle vient,
- la pierre nue est une pierre de parement non enduite,
- la pierre sèche (ou pierres essuyte) est une pierre maçonnée à sec, sans mortier,
- la pierre de taille désigne le bloc de pierre dont toutes les faces sont dressées, c'est-à-dire taillées pour obtenir des plans plus ou moins parfaits. Les joints du parement sont alors rectilignes et l'appareil (c'est-à-dire l'arrangement de la maçonnerie) est polygonal.

Le plus souvent extraite dans des carrières spécifiques, la pierre de taille, ou grès de construction, est l'un des principaux matériaux utilisés pour l'embellissement des cathédrales (figure 1.3).



FIG. 1.3 – Cathédrale Notre-Dame-de-Paris

Dans l'Europe médiévale, les tailleurs de pierre étaient regroupés en un groupe de professionnels : ces professions artisanales étaient respectées (corporation). A l'heure actuelle, il existe encore des formations de tailleurs de pierres à travers le compagnonnage.

Pour montrer l'importance de la pierre dans la construction d'ouvrages maçonnés, on présente trois types de pierre :

- la pierre de Caen, calcaire de très bonne qualité et extraite dans la région de Caen, est employée depuis le *XI<sup>e</sup>*. Les différents monuments construits sont : l'abbaye aux Hommes (Hotel de Ville à Caen), l'abbaye aux Dames (Conseil régional de Basse Normandie), le Mémorial à Caen, le château de Caen, l'abbaye de Westminster à Londres pour laquelle la pierre avait été acheminée par bateau, etc,

- la pierre de Jaumont (Vaglio (2000)), calcaire oolithique <sup>1</sup>, était exploitée pour les constructions de la porte des Allemands, le théâtre de Metz, etc. Une étude sur la pierre dans l'architecture rurale en Lorraine a été réalisée par Guillaume (Guillaume (2005)),

- la pierre d'Euville, calcaire du Jurassique supérieur -150 millions d'années, était essentiellement exploitée dans la ville de Nancy. Les différents monuments construits sont : les bâtiments

---

<sup>1</sup>calcaire oolithique : sphères de 1mm de diamètre du Jurassique supérieur entre -154 et -135 millions d'années.

"Art Nouveau" du mouvement de l'école de Nancy ainsi que la plupart des bâtiments construits au *XIX<sup>e</sup>* siècle, la basilique de Saint-Nicolas-de-Port (*XVI<sup>e</sup>*), la cathédrale Saint-Etienne de Toul (*XIII<sup>e</sup> – XVI<sup>e</sup>*), les bâtiments de style Ecole de Nancy en dehors de la ville. Pour les édifices de Paris, comme l'aile du Louvre édifiée sous Napoléon III, le Grand Palais ainsi que le Petit Palais, l'opéra Garnier, la gare de l'Est.

### 1.1.2 Les matériaux organiques

- **Le pisé** est un système constructif monolithique en terre crue compactée dans un coffrage. La terre crue étant le terme utilisé pour désigner la terre en tant que matériau de construction.

Le pisé est une technique ancienne, qui a connu un regain d'intérêt dans le monde occidental suite aux travaux de François Cointereaux (architecte lyonnais *XVII<sup>e</sup> siècle*). En France, on trouve une grande quantité de bâtiments ruraux en pisé datant des *XVIII<sup>e</sup>, XIX<sup>e</sup>* et début du *XX<sup>e</sup>* siècle dans la région Rhône-Alpes : Isère, vallée de la Saône et du Rhône, etc. . Le pisé est également répandu au Maroc, en Chine, en Amérique du Sud. La technique connaît du succès dans des utilisations contemporaines ; cependant le pisé est presque toujours fortement stabilisé au ciment dans les pays tels que l'Australie, les Etats-Unis, en Allemagne, Suisse et Autriche.

### 1.1.3 Les matériaux végétaux

- **La paille** est la partie de la tige de certaines graminées, dites céréales à paille (blé, orge, avoine, seigle, riz), coupée lors de la moisson et rejetée, débarassée des grains sur le champ par la moissonneuse-batteuse sous forme d'andains.

- **La tourbe** est le produit de la fossilisation de débris végétaux. Cette matière, parfois considérée comme roche ou comme sol, est constituée de 10 à 20% de matière végétale peu décomposée, le reste étant composé d'eau.

La tourbe sert de matériau de construction dans les régions où le bois fait défaut. Au Moyen-Age, en Islande, elle a beaucoup été utilisée pour la construction de fermes ; des briques de tourbes sont alors agencées pour former les murs.

Parmi les éléments "corps", la pierre et la brique tiennent une place très importante dans la construction d'ouvrages. On présente dans la suite les éléments de "joints".

## 1.2 Les éléments de "joints"

Les éléments de "joints" sont en général constitués de mortier mais il arrive aussi qu'on se dispense de l'utilisation du mortier (on parle alors de joints vifs ou secs).

En règle générale, le mortier à maçonnerie est un matériau polyvalent, pouvant satisfaire à une variété d'exigences parfois contradictoires. Il sert de liant entre les matériaux (pierres, briques) de construction des murs. Le concepteur ne pourra choisir le mélange (le plus adapté) que s'il a une bonne connaissance des matériaux qui entrent dans la composition du mortier et de leurs propriétés.

### 1.2.1 Fonctions du mortier

La fonction principale du mortier est de liasonner les éléments de maçonnerie de manière à ce qu'ils constituent un seul bloc. Par ailleurs, le mortier sépare les éléments et remplit toutes les fentes et

fissures en formant une surface de contact homogène. Le liaisonnement doit permettre de renforcer les propriétés structurales des éléments et en même temps empêcher la pénétration de la pluie. Ceci exige alors une adhérence complète, si elle est réalisée le mur aura une durabilité suffisante pour résister aux intempéries.

Les mortiers à maçonnerie contiennent des matériaux liants, souvent à base de ciment, des granulats et de l'eau. Dans une construction, le mortier constitue le liant unissant les éléments (tels que la brique ou la pierre); il confère à l'ensemble sa résistance mécanique. On présente les différents matériaux entrant dans la composition du mortier.

### 1.2.2 Différents matériaux composant le mortier

Dans la composition du mortier, il est essentiel de tenir compte de l'effet qu'auront ses propriétés, sur celles de la maçonnerie.

#### • Le liant

Le liant peut être du ciment Portland, de la chaux, du ciment de maçonnerie ou un des divers mélanges de ces matériaux. Ces trois sortes de liant doivent satisfaire aux normes respectives de l'AFNOR.

- Le ciment Portland donne au mortier de maçonnerie sa résistance mécanique en particulier sa résistance initiale qui est indispensable. Cependant, les mortiers de ciment Portland manquant de plasticité ont un faible pouvoir de rétention d'eau, et sont donc moins faciles à travailler.

- La chaux, qui est le composant traditionnel du mortier, possède une plasticité et un pouvoir de rétention d'eau excellent, mais sa résistance mécanique est faible et sa cure est lente. La chaux grasse obtenue par extinction de la chaux vive et en la laissant vieillir, est le produit de qualité que l'on devrait utiliser mais le vieillissement prend beaucoup de temps : par conséquent le travail de la chaux grasse est très salissant. C'est pourquoi il est plus pratique d'utiliser la chaux hydratée sèche. La cure des mortiers de chaux s'effectue lentement par carbonatation sous l'effet carbonique de l'air, ce processus peut être fortement ralenti par temps froid et humide.

- Le ciment de maçonnerie est un produit déposé contenant du ciment Portland, un "filler" minérale inerte (calcaire) et des adjuvants tels que des agents mouillants, des agents hydrofuges et des entraîneurs d'air.

Les adjuvants donnent la plasticité et le pouvoir de rétention d'eau que confère la chaux au mortier de ciment. Certains ciments de maçonnerie sont des mélanges de ciment Portland et de chaux hydratée avec, en plus, des adjuvants.

#### • Les granulats

Le sable est le granule employé le plus fréquemment. Il est inerte et sert tout d'abord à accroître la compacité. Ses limites granulométriques sont indiquées dans la norme AFNOR A82.56. Malheureusement, la plupart des granulats sont choisis pour des raisons de coûts et de disponibilités. Il peut y avoir une certaine variation granulométrique sans que les propriétés du mortier soient fortement altérées mais sa qualité serait certainement améliorée si le granulat était choisi avec plus de soin.

- **L'eau**

L'eau joue un double rôle : elle sert, d'une part à hydrater le ciment et d'autre part à contribuer à son ouvrabilité. Les exigences relatives à l'eau de gâchage diffèrent beaucoup pour les mortiers et les bétons. Les mortiers doivent contenir une quantité d'eau maximale, compatible avec une ouvrabilité maximale. Pour être utilisée, l'eau doit être propre et ne contenir aucun produit nocif tels que des acides, des alcalis et des matières organiques.

En clair, une bonne composition du mélange, et l'utilisation de matériaux de qualité permettent en général d'obtenir une maçonnerie solide.

Faisons un retour en arrière pour retracer l'évolution de l'utilisation de la chaux dans le mortier.

Les premiers mortiers étaient faits de boue ou d'argile, ces matériaux étaient utilisés en raison de leur disponibilité et de leurs faibles coûts. Les égyptiens utilisaient les mortiers de gypse pour lubrifier l'assise des grosses pierres et ainsi les déplacer pour les mettre en place. Toutefois, ces matériaux n'étaient pas très efficaces en présence d'humidité élevée et d'eau. Le premier usage de la chaux comme matériau de construction remonte à environ 4000 ans av. J.-C., alors que les Égyptiens l'utilisaient pour plâtrer les pyramides (Boynton (2001)). Le début de l'utilisation de la chaux dans les mortiers. L'Empire Romain utilisait couramment la chaux dans les mortiers. Vitruvius, un architecte romain donnait les grandes lignes pour la préparation des mortiers de chaux (Vitruvius. (1931)).

Les mortiers, contenant uniquement de la chaux et du sable, nécessitent du dioxyde de carbone contenu dans l'air pour faire prise, reprendre la forme de la pierre calcaire et durcir. Les mortiers de sable et de chaux durcissent lentement mais ne durcissent pas sous l'eau. Les Romains ont créé des mortiers hydrauliques, qui contenaient de la chaux et des pouzzolanes telles que la poussière de brique et la cendre volcanique. Ces mortiers étaient destinés à des applications où la présence d'eau ne permettait pas une carbonatation adéquate du mortier (Davey (1961)). Les progrès les plus importants de l'utilisation des pouzzolanes dans les mortiers sont survenus au cours du *XVIII<sup>e</sup>* siècle. En 1756, James Smeaton a peut-être mis au point le premier produit de chaux hydraulique en calcinant de la pierre calcaire Blue Lias contenant de l'argile. Pour donner plus de résistance, il était ajouté de la terre pouzzolanique d'Italie (Cowper (1927)). Ce mélange de mortier a servi à construire le phare Eddystone en 1792 ; James Parker a breveté un produit appelé ciment romain ou ciment naturel en 1796. Le ciment naturel était produit en brûlant ensemble un mélange de pierre calcaire et d'argile dans des fours similaires aux fours utilisés pour la chaux. Le produit qui en résultait était broyé et entreposé dans des contenants étanches. Les ciments naturels contenaient généralement plus d'argile que les produits de chaux hydrauliques, ce qui offrait une plus grande résistance. Les mortiers de ciment naturel étaient utilisés dans la construction lorsque la maçonnerie était soumise à de l'humidité.

Joseph Aspdin, un constructeur/maçon anglais brevetait en 1824 un matériau appelé ciment portland. L'ajout du ciment Portland aux mortiers de chaux accélère la vitesse du processus de construction des édifices de maçonnerie grâce à l'obtention plus rapide d'une résistance mécanique.

Les produits de chaux ont joué un rôle important dans la construction des maçonneries pendant des milliers d'années. Avant 1930, la plupart des constructions en maçonnerie utilisaient des mortiers à base de chaux. La chaux offre une durabilité éprouvée comme en témoignent des structures telles que la Grande Muraille de Chine (fig. 1.4), qui existe depuis des centaines d'années. Les raisons qui justifiaient l'utilisation de la chaux dans le mortier il y a 2000 ans sont toujours valides aujourd'hui.



FIG. 1.4 – La Grande Muraille de Chine

Après avoir détaillé les éléments nécessaires à la construction (éléments dits "corps" et éléments dits "joints"), voyons maintenant les différents types de maçonnerie que l'on peut retenir de ces diverses combinaisons.

### 1.3 Présentation des différentes maçonneries

- **La maçonnerie à joints vifs**

Il s'agit d'une maçonnerie de pierres de tailles appareillées sans liant. Ce type de maçonnerie est propre aux architectures savantes (figure 1.5).



FIG. 1.5 – Voûte du temple de Diane - Nîmes

On citera par exemple les constructions romanes où il était fréquent de n'utiliser aucun mortier mais de jouer sur les lois de la physique pour faire tenir un édifice (cas des voûtes romanes où les contraintes se transmettent par effort normal de bloc en bloc).

- **La maçonnerie à pierres crues (ou écrues)**

C'est une maçonnerie en l'absence de mortier (pierres brutes).

• **La maçonnerie à pierres sèches (ou à sec)**

La maçonnerie à pierres sèches (ou à sec) est la pose de moellons (le moellon est une pierre de construction aisément manipulable du fait de son poids et de sa forme), de blocs, de dalles, bruts ou ébauchés, sans aucune présence de mortier pour monter un mur, une voûte...

Ce type de maçonnerie est employé pour la confection d'une part de murs extérieurs (de clôture, de démarcation, de soutènement, d'épierrement...), d'autre part des murs d'habitations rurales et de bâtiments annexes.

Le matériau utilisé est généralement un matériau provenant de zones proches de la surface du sol, soit issu du dérochement lors de la réalisation de champs ou de terrasses, soit fourni par l'épierrement des parcelles cultivées. Plus rarement, c'est un matériau extrait de découvertes ou de carrières.

Du fait de l'absence de mortier, la construction d'un mur doit obéir à plusieurs règles :

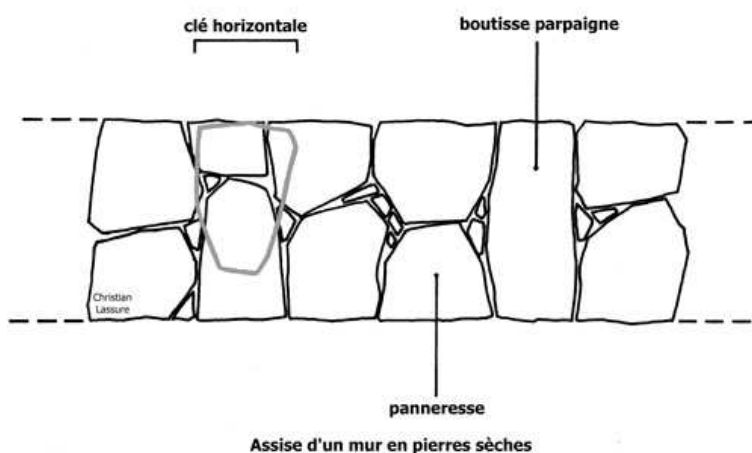


FIG. 1.6 – Illustration d'une assise

- assemblage des pierres de façon à former une assise (rang de pierres de même hauteur) (figure 1.6),
- disposition des fondations lorsque le sol est de terre ou de cailloutis,
- l'édification d'assise horizontale autant que le matériau le permet, puisque la charge transmise est verticale,
- la pose des pierres dans le sens du lit de carrières de manière ordonnée de façon à ce qu'elles n'éclatent pas sous le poids de la maçonnerie,
- un ajustage serré des pierres de façon à avoir des joints réduits au minimum,
- le remplissage des interstices entre les pierres par des éclats de calage (insertion de cales sous ou entre les pierres pour les immobiliser), voire de la terre,
- l'imbrication verticale des pierres de façon à obtenir des joints croisés (ou découpés),
- le pendage des pierres, s'il est intérieur, admet une meilleure résistance aux poussées latérales (pour les murs de soutènement) ou, s'il est extérieur, permet une meilleure imperméabilité du parement (pour les murs de soutènement également),
- la pose de blocs plus lourds et plus allongés dans les deux dernières assises de façon à renforcer le liaisonnement.

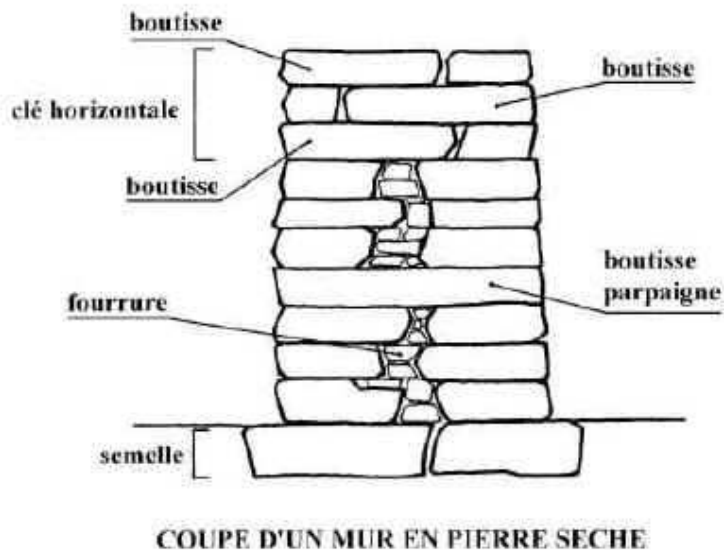


FIG. 1.7 – Coupe d'un mur en pierres sèches

Globalement, une maçonnerie en pierres sèches requiert un choix ainsi qu'un positionnement judicieux du matériau, mais aussi un ajustage minutieux et un emboîtement précis des éléments.

- **La maçonnerie avec mortier**

Outre une nécessité d'étanchéisation (à la pluie ou à l'air), il n'est plus nécessaire d'être minutieux dans le choix, l'agencement et l'équilibrage des pierres (commodité et rapidité d'exécution).

- **La maçonnerie brouillée (ou mélangée)**

Maçonnerie mélangeant les pierres de toutes les dimensions.

- **La maçonnerie liée**

Maçonnerie dont les éléments sont assemblés à l'aide d'un mortier avec liant.

- **La maçonnerie de blocage**

En maçonnerie liée ou sèche, débris de pierres brutes ou de moellons remplissant l'intérieur d'un mur entre ses deux parements (bocaille).

- **La maçonnerie en liaison**

Maçonnerie où les pierres sont disposées de manière qu'une pierre d'une assise couvre le joint vertical de deux pierres de l'assise inférieure.

- **La maçonnerie élargée**

Maçonnerie composée de pierres de différentes grandeurs.

Dans la maçonnerie, l'arrangement des pierres ou briques est désigné par l'appareil.

## 1.4 L'appareil

- **L'appareil régulier** est formé de pierres de taille de longueur variable mais de même assise,
- **l'appareil irrégulier** est formé de pierres tout juste dégrossies et qui n'ont pas forcément les mêmes tailles,



- le **petit appareil**, quand les moellons ont une dimension inférieure à 20cm,
- le **moyen appareil** se situe entre le grand appareil et le petit appareil,
- le **grand appareil** fait allusion aux pierres dont les dimensions ont plus de 30cm de haut,

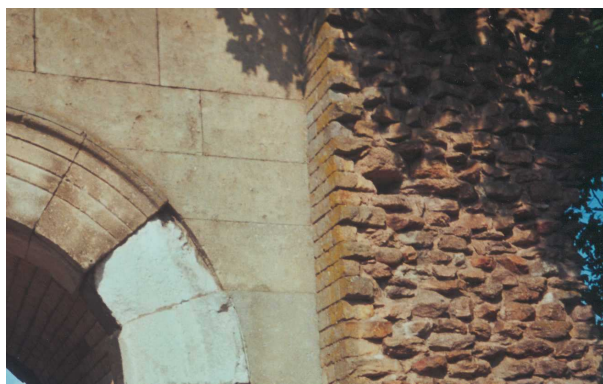


FIG. 1.8 – Détail de la porte Saint-André de l'enceinte Gallo-Romaine d'Autun. La partie de gauche est en grand appareil régulier, celle du centre en petit appareil régulier. Ce parement forme un coffrage pour le blocage de droite (pierres noyées dans du ciment)

- l'**appareil est dit "cyclopéen"**, quand les pierres ont des dimensions telles, qu'on imagine mal comment elles ont été mises en place.



FIG. 1.9 – Mur de Mycènes

Mycènes était une très ancienne cité grecque située sur une colline au nord-est de la plaine d'Argos, dans le Péloponnèse.

#### 1.4.1 Position des éléments dans l'appareillage

Cinq types d'éléments de maçonnerie taillée ou moulée (pierres de taille, moellon, brique, etc.) sont distingués en fonction de leurs positions dans l'appareil.

- **La panneresse**, c'est-à-dire pierre placée dans la maçonnerie avec sa longueur en parement,
- **le carreau**, élément de maçonnerie dont les dimensions de parement sont importantes par rapport aux faces de joint ou de queue (partie d'un moellon noyée dans la maçonnerie, dont la longueur se mesure depuis le parement),

- **la boutisse**, pierre dont la longueur se trouve dans l'épaisseur du mur et dont l'un des bouts est en parement,
- **le parpaing**, élément de maçonnerie qui présente un parement sur chacune des deux faces opposées d'un mur. Le parpaing assure la fonction de chaînage (cohésion d'ensemble) de la maçonnerie, il est important d'en mettre suffisamment,
- **la blocaille (ou blocaux)**, pierres sans forme précise de format moyen, trop petites pour être assisées en parement mais utilisées en blocage (noyées dans un bain de mortier entre deux parois appareillées).

Tous les appareillages modernes proviennent de ceux de l'antiquité grecque et romaine, avec quelques variantes et peuvent se regrouper en deux grandes familles :

- l'opus incertum, qui lui est surtout employé pour les fondations (grès, granit, meulière),
- la maçonnerie de moellons : mosaïque moderne et appareillages assisés (figure 1.10).

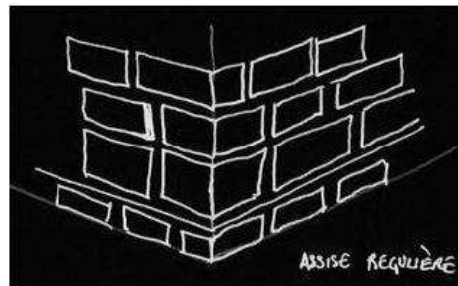
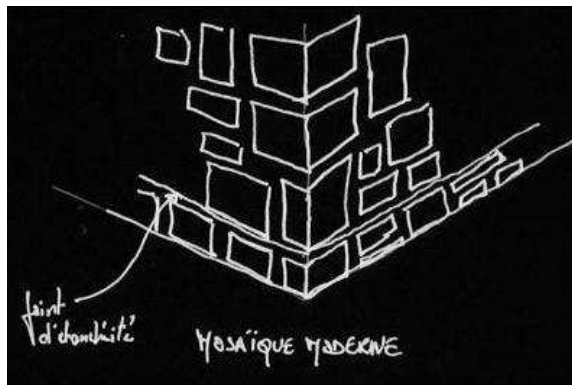


FIG. 1.10 – Mosaïque moderne et assise régulière

On présente, dans la figure 1.11, quelques exemples de dispositions de blocs dans l'appareil.

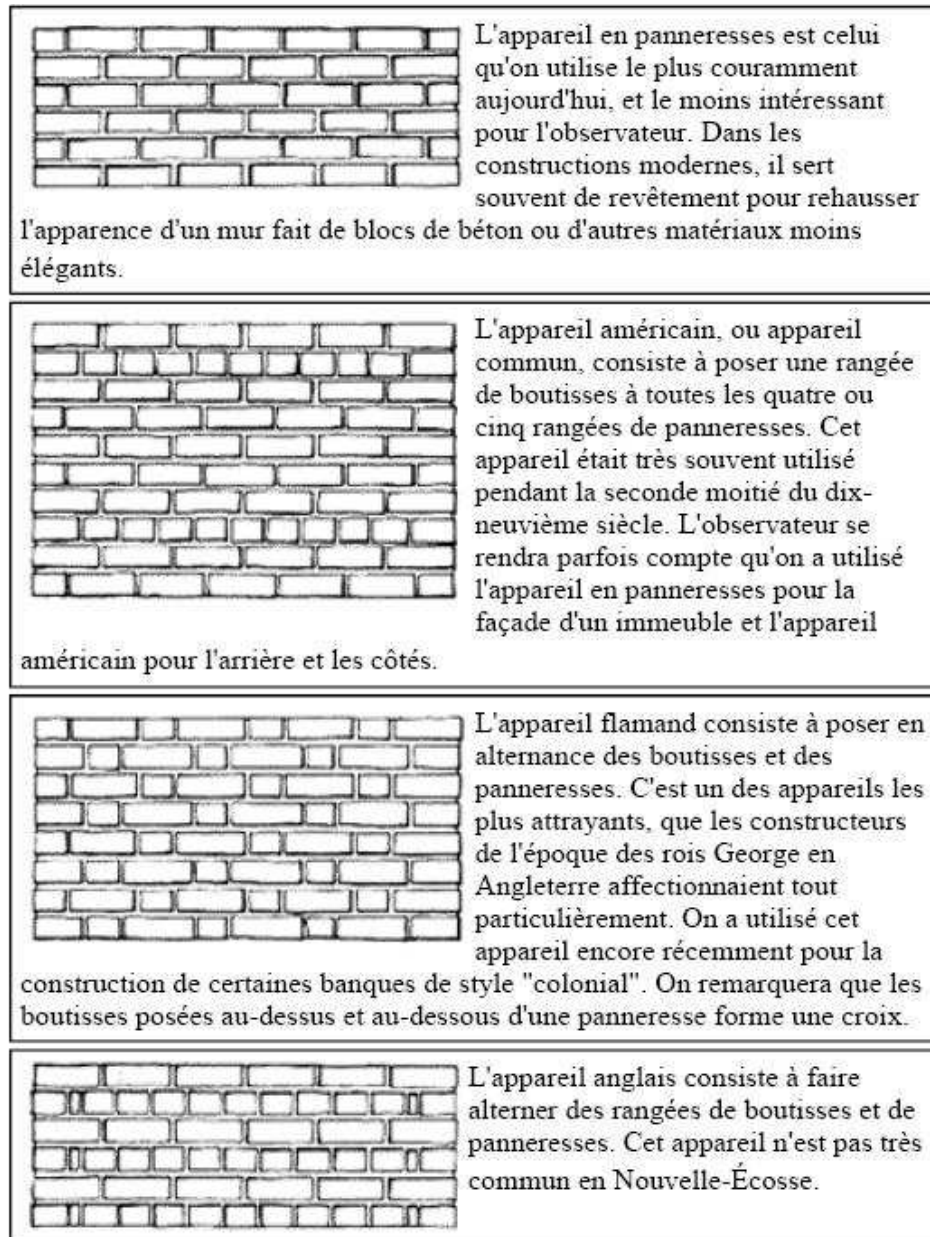


FIG. 1.11 – Exemples de dispositions des briques dans l'appareil

#### 1.4.2 Règles d'appareillage à respecter

- Les pierres sont disposées à l'intérieur et en parements de la maçonnerie de telle sorte qu'aucun joint vertical ne passe à travers des deux assises (figure 1.12).

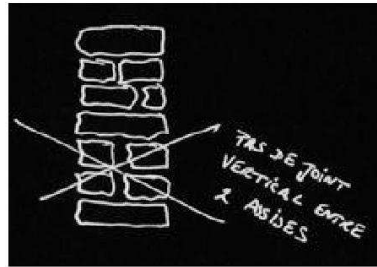


FIG. 1.12 – Absence de joints verticaux

- Le nombre de parpaings doit être suffisant pour assurer la solidarisation des deux parements du mur (environ 30%) (figure 1.13).

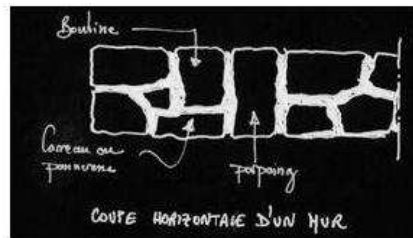
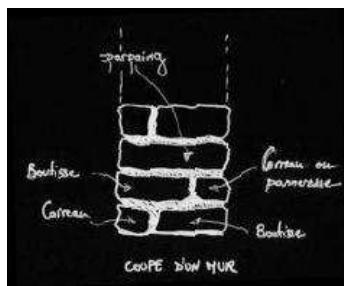


FIG. 1.13 – Présence de parpaings de solidarisation

- Les pierres les plus importantes doivent être placées dans les angles : c'est le harpage afin de constituer un chaînage (figure 1.14).

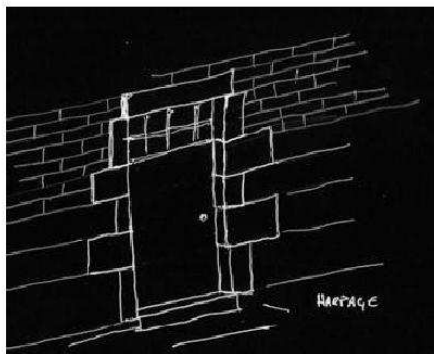


FIG. 1.14 – Harpage

- La fonction des joints entre les pierres est de permettre une transmission uniforme des efforts d'une assise à l'autre, malgré les irrégularités des pierres :
  - l'épaisseur des joints est proportionnelle aux irrégularités de la pierre.
  - cette épaisseur doit être réduite au maximum, c'est-à-dire inférieure à 3cm.

## 1.5 D'un point de vue mécanique - les éléments corps

Les essais mécaniques réalisés en laboratoire sur des éprouvettes homogènes constituent le principal outil de détermination des lois de comportement, des solides en général et des géomatériaux en particulier. L'homogénéité de l'éprouvette est un facteur important car elle permet de déterminer le comportement mécanique "moyen" de la roche. En mécanique des roches et des sols, les données expérimentales utilisées pour définir ces lois de comportement proviennent d'essais triaxiaux classiques (un essai de compression uniaxiale correspond à un essai triaxial avec un confinement nul) ou d'essais spéciaux, de type oedométrique ou de type brésilien. Ce dernier permet la mesure, de façon indirecte, de la résistance à la traction.

Pour décrire les propriétés mécaniques d'une roche (la roche, une fois extraite devenant pierre), le dispositif expérimental le plus utilisé est la résistance à la compression uniaxiale. La résistance mécanique d'une roche dépend de plusieurs paramètres, telle que la forme et la taille des grains, la composition minéralogique, l'anisotropie texturale... .

Avec le temps, les pierres peuvent devenir poreuses, c'est-à-dire qu'elles ne sont plus imperméables face à l'eau ; comme le souligne Beck (Beck (2006)), les caractéristiques mécaniques en compression et en traction des matériaux poreux sont plus ou moins dépendantes de leur teneur en eau. Ce facteur ne doit donc pas être négligé pour connaître de façon rigoureuse la résistance de la pierre soumise à une charge par exemple.

Par la suite, on décrit l'ensemble des dispositifs expérimentaux mis en place pour définir les caractéristiques mécaniques des pierres.

### 1.5.1 Essais et résultats de la résistance en compression uniaxiale

Dans cet essai, l'éprouvette est placée entre les plateaux d'une presse (figure 1.15) et la force axiale est augmentée jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Généralement, l'éprouvette est de forme cylindrique.



FIG. 1.15 – Essai de compression - éprouvette cylindrique

La valeur maximale  $F$  de la force permet de calculer la résistance en compression uniaxiale  $R_c$  de la roche :

$$R_c = \frac{F_{max}}{S} = \frac{F_{max}}{\Pi r^2} \quad (1.5.1)$$

Avec,

$R_c$  : représente la résistance à la compression (en MPa),

$F_{max}$  : la force maximale appliquée lors de la rupture (en N),

$S$  : la surface d'application de la force (en  $mm^2$ ),

$r$  : est le rayon de la section de l'éprouvette cylindrique.

La mesure des déformations lors d'une compression uniaxiale permet de déterminer les paramètres élastiques de déformabilité de la roche : son module de Young (pente de la courbe de déformation longitudinale) ainsi que son coefficient de Poisson (rapport de la déformation transversale à la déformation longitudinale).

Beck & al (Beck et Al-Mukhtar (2004), Beck et Al-Mukhtar (2005)), ont mis en place un dispositif expérimental pour caractériser l'essai de compression uniaxiale (selon la norme AFNOR P94-420 (norme AFNOR (2000)) en tenant compte de l'état hydrique (eau) dans la pierre. Ce dispositif permet de faire un essai sur deux états hydriques extrêmes (sec et saturé : imbibition sous vide de la pierre avec de l'eau pendant 24heures).

#### • Description de l'essai et résultats

Une éprouvette cylindrique d'élancement égal à 2 (diamètre : 40mm et hauteur : 80mm) est placée verticalement, soumise à un effort de compression croissant (vitesse de chargement : 0.05mm/min), dans l'axe de l'éprouvette jusqu'à la rupture (entre 5 et 30 minutes). L'essai est réalisé sur une série de trois éprouvettes découpées dans le sens parallèle au lit de la pierre et une série taillée dans le

sens perpendiculaire.

Les essais mécaniques sont réalisés sur deux pierres tendres de construction, à savoir le tuffeau blanc (roche calcaire blanchâtre, largement employée dans les constructions du Val de Loire) et la pierre de Sébastopol (qui est aussi une roche calcaire, très utilisée en région parisienne). Certaines de leurs caractéristiques sont assez semblables comme la porosité totale ou encore leurs résistances mécaniques.

Ce qui en ressort de l'étude est que la présence d'eau joue un rôle important dans la chute de la résistance à la compression uniaxiale. La présence d'eau dans les pores de la roche conduit à une réduction de la résistance mécanique, pouvant s'expliquer par une diminution de l'énergie de surface de contact entre les grains constitutifs par conséquent une modification des liens intergranulaires (Ojo et Brook (1990), Dessandier et al. (2000)). Le rôle d'une pression interstitielle, lors de l'essai, serait aussi à analyser.

	Résistance à la compression Rc (MPa)		Indice d'anisotropie
	état sec	état saturé	
Tuffeau blanc	sens $\perp$ : $11,67 \pm 0,33$ sens $\parallel$ : $9,13 \pm 0,35$	sens $\perp$ : $4,83 \pm 0,33$ sens $\parallel$ : $3,86 \pm 0,15$	21 %
Pierre de Sébastopol	sens $\perp$ : $9,88 \pm 0,50$ sens $\parallel$ : $8,43 \pm 0,42$	sens $\perp$ : $6,28 \pm 0,30$ sens $\parallel$ : $5,41 \pm 0,28$	15 %

	Module élastique E (MPa)		Indice d'anisotropie
	état sec	état saturé	
Tuffeau blanc	sens $\perp$ : $2037 \pm 234$ sens $\parallel$ : $1481 \pm 196$	sens $\perp$ : $988 \pm 115$ sens $\parallel$ : $687 \pm 106$	29 %
Pierre de Sébastopol	sens $\perp$ : $1968 \pm 291$ sens $\parallel$ : $1806 \pm 243$	sens $\perp$ : $1500 \pm 210$ sens $\parallel$ : $1342 \pm 146$	10 %

FIG. 1.16 – Résultats des essais de compression uniaxiale : résistance à la compression et module d'élasticité, Beck & al (Beck (2006))

Entre l'état saturé et à sec (figure 1.16), la perte de résistance atteint 58% pour le tuffeau blanc et 36% pour la pierre de Sébastopol.

Cet essai met aussi en évidence l'anisotropie des matériaux qui est de 21% pour le tuffeau blanc et de 15% pour la pierre de Sébastopol : la résistance à la compression est plus élevée dans le sens perpendiculaire au lit de la pierre.

Les courbes, représentées sur les figures 1.17, montrent l'évolution de la déformation en fonction de la contrainte imposée et des différents états hydriques.

Les trois grandes étapes typiques du comportement mécanique d'une roche se retrouvent, à savoir : tout d'abord, une phase de mise en charge, suivie d'un comportement élastique et enfin d'une allure élasto-plastique de la courbe jusqu'à la rupture du matériau (Guégen et Palciauskas (1992)). Dans le cas de la compression uniaxiale, les contraintes principales  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont nulles.

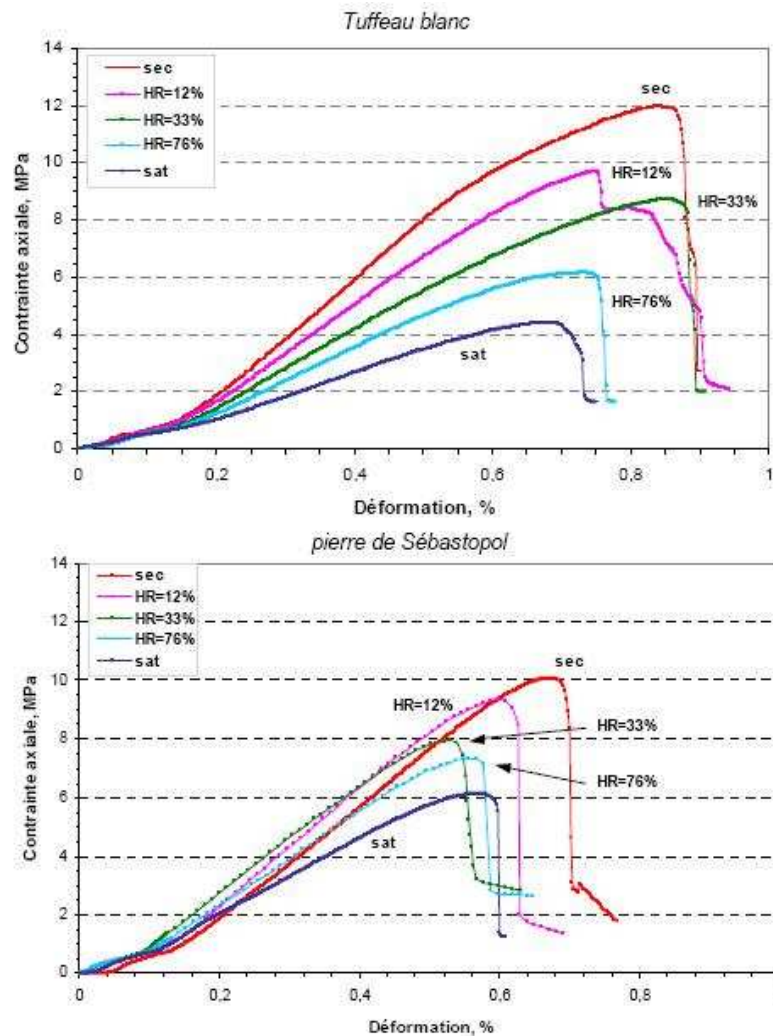


FIG. 1.17 – Courbes contrainte-déformation lors de l’essai en compression uniaxiale pour différents états hydriques du tuffeau et de la pierre de Sébastopol, Beck & al (Beck (2006))

### 1.5.2 Essais et résultats de la résistance à la traction (méthode indirecte)

L’essai de résistance à la traction indirecte, dit aussi essai brésilien (Wang et al. (2004), Fairhurst (1964)), est réalisé en comprimant entre les plateaux de la presse une éprouvette le long de deux génératrices opposées (figure 1.18) : la rupture est obtenue par traction au centre de l’éprouvette. Comme pour l’essai à la compression uniaxiale, l’éprouvette est généralement de forme cylindrique.

Ces essais permettent ainsi d’éviter de coller les têtes, ce qui serait nécessaire pour un essai de traction directe. En général, la résistance à la traction mesurée par l’essai brésilien est du même ordre de grandeur que celle mesurée par l’essai de traction directe (Tourenq et Denis (1970)).



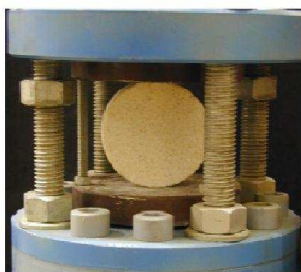


FIG. 1.18 – Essai de traction indirecte (essai brésilien)

Si  $F$  est l'effort fourni par la presse au moment de la rupture,  $r$  le rayon de l'éprouvette et  $H$  sa hauteur, la résistance à la traction indirecte est donnée par :

$$R_t = \frac{F}{\pi r H} \quad (1.5.2)$$

Avec,

$R_t$  : la résistance à la traction (en MPa),

$F_{max}$  : la force maximale appliquée lors de la rupture (en N),

Un essai de traction indirecte est caractérisé par les contraintes principales  $\sigma_1 = R_t$ ,  $\sigma_2 = 0$  et  $\sigma_3 = -kR_c$

Beck & al ont aussi mis en place un dispositif expérimental caractérisant l'essai de traction indirecte (selon la norme AFNOR P94-422 (norme AFNOR (2001))). Les essais sont réalisés dans les mêmes conditions que pour la compression uniaxiale.

### • Description de l'essai et résultats

Une éprouvette cylindrique d'élanement égal à 1 (diamètre : 40mm et hauteur : 40mm), placée horizontalement, est soumise à un effort de compression croissant selon deux génératrices diamétralement opposées, jusqu'à la rupture. Hormis les zones de contact avec les plateaux, l'éprouvette se trouve alors en tension avec un maximum de tension au centre, et le positionnement par rapport au lit de pierre se fait en connaissance du sens des zones en tension.

Les résultats trouvés convergent avec ceux des essais en compression, à savoir que la présence d'eau joue un rôle important dans la résistance du matériau (forte diminution de la résistance en traction entre l'état sec et l'état saturé en eau).

La perte de résistance à la traction, entre l'état sec et l'état saturé, pour le tuffeau atteint 68% et 38% pour la pierre de Sébastopol (voir figure 1.19). Cet essai confirme aussi l'anisotropie mécanique : la résistance est plus forte dans le sens parallèle au lit de la pierre.

	Résistance à la traction $R_t$ (MPa)		Indice d'anisotropie
	état sec	état saturé	
Tuffeau blanc	sens $\perp$ : $1,30 \pm 0,11$ sens $\parallel$ : $1,48 \pm 0,09$	sens $\perp$ : $0,38 \pm 0,08$ sens $\parallel$ : $0,51 \pm 0,06$	19 %
Pierre de Sébastopol	sens $\perp$ : $0,92 \pm 0,14$ sens $\parallel$ : $0,98 \pm 0,08$	sens $\perp$ : $0,52 \pm 0,08$ sens $\parallel$ : $0,66 \pm 0,04$	13 %

FIG. 1.19 – Résultats des essais de traction indirecte, Beck &amp; al (Beck (2006))

Les courbes, représentées sur les figures 1.20, montrent l'évolution de la déformation en fonction de la contrainte imposée et des différents états hydriques.

Comme représenté sur ces deux types de courbes, la rupture se produit assez nettement selon le diamètre vertical de l'échantillon cylindrique, c'est-à-dire sur la ligne de tension maximale.

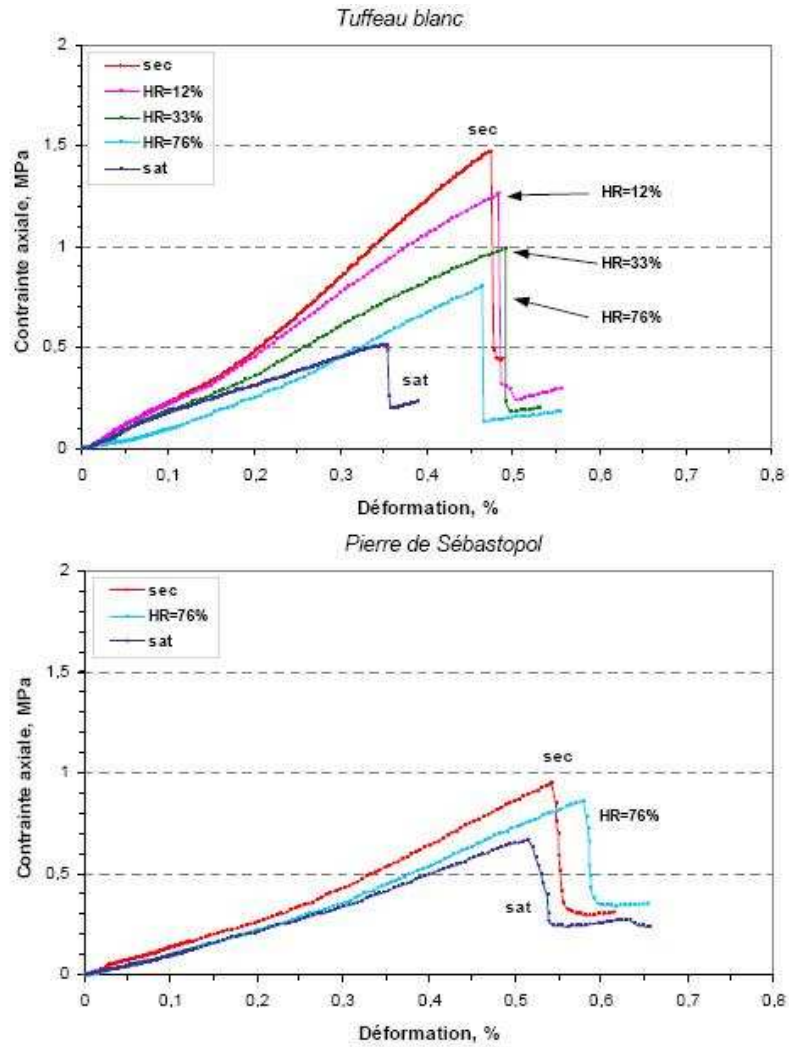


FIG. 1.20 – Courbes contrainte-déformation lors de l’essai brésilien pour différents états hydriques du tuffeau et de la pierre de Sébastopol, Beck & al (Beck (2006))

Les trois tableaux 1.1, 1.2 et 1.3 suivants exposent : les valeurs des résistances à la compression  $\sigma_c$ , des résistances à la traction  $\sigma_t$ , des modules de Young  $E$  ainsi que des coefficients de poisson  $\nu$  de divers types de matrices rocheuses (caractéristiques données dans Bienawski (Bienawski (1974))).

	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)	E (GPa)	$\nu$
Norite	300	20	100	0.24
Granit	166	12	45	0.23
Quartzite	250	25	90	0.16
Grès	100	6	22	0.24
Dolérite	280	20	70	0.20
Calcaire	102	14	48	0.25

TAB. 1.1 – Caractéristiques mécaniques des roches intactes, Bienawski (Bienawski (1974))

	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_t$ (kPa)	E (GPa)
Norite	19	480	50
Granit	10.5	265	22.5
Quartzite	15.8	665	45
Grès	6.3	266	11
Dolérite	17.7	657	35
Calcaire	6.5	578	24

TAB. 1.2 – Caractéristiques mécaniques des roches moyennement fracturées, Bienawski (Bienawski (1974))

	$\sigma_c$ (kPa)	$\sigma_t$ (kPa)	E (GPa)
Norite	950	23	20
Granit	525	12.7	9
Quartzite	790	31	18
Grès	315	12.5	4
Dolérite	885	31	14
Calcaire	320	25	10

TAB. 1.3 – Caractéristiques mécaniques des roches fortement fracturées, Bienawski (Bienawski (1974))

Chaque pierre a ses caractéristiques mécaniques propres. Le faible module de Young de certaines roches (roches tendres (Dobereiner et De Freitas (1986)) comme le Tuffeau ou la pierre de Sébastopol par exemple) est signe d'une grande capacité à se déformer sous l'action de contraintes mécaniques. Ce paramètre est important car la résistance d'une structure maçonnée est directement liée à la résistance de ces éléments constitutifs ("corps" et "joints").

### 1.5.3 Vitesse des ondes élastiques

La mesure de la vitesse des ondes élastiques a souvent été utilisée pour donner des informations sur les propriétés structurales de la roche. C'est un moyen d'investigation non-destructif, complémentaire des essais mécaniques (Yasar et Erdogan (2004)). Les amplitudes des constantes élastiques sont sensibles à l'assemblage minéralogique et sont affectées par les formes, la distribution, l'orientation cristallographique préférentielle des composants. Elles sont aussi affectées par la présence, la taille et l'orientation des défauts tels que des pores et des fissures et de la présence ou non des fluides interstitiels. Les propriétés élastiques peuvent être déterminées à partir des mesures statiques des contraintes et des déformations ou par des méthodes dynamiques. Dans ces derniers cas, les vitesses sismiques des ondes élastiques sont généralement mesurées, en utilisant des méthodes basées sur les modes de résonance des échantillons ou sur la propagation des ondes élastiques dans les échantillons.

Lorsqu'un solide est soumis à une perturbation d'origine mécanique, des ondes élastiques prennent naissance et se propagent dans ce solide. La propagation des ondes est basée sur les théories de l'élasticité qui relient efforts et faibles déformations. Ces ondes élastiques sont polarisées selon deux directions perpendiculaires en deux ondes planes : l'onde longitudinale de compression appelée onde primaire (onde P) représentant la vibration des particules parallèlement au sens de propagation de l'onde et l'onde transversale de cisaillement appelée onde secondaire (onde S) représentant la vibration des particules perpendiculairement au sens de propagation.

L'avantage de l'utilisation combinée des profils P et S est qu'elle donne en principe les paramètres élastiques du milieu supposé homogène et isotrope.  $V_p$  et  $V_s$  s'expriment facilement en fonction des coefficients élastiques de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  et de la masse volumique du milieu  $\rho$  tel que :

$$(V_p)^2 = \frac{(\lambda + 3\mu)}{\rho} \text{ et } (V_s)^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5.3)$$

Le rapport  $\frac{V_p}{V_s}$  ne fait pas intervenir la densité.

$$\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \quad (1.5.4)$$

Les vitesses  $V_p$  et  $V_s$  sont toutes les deux affectées par la présence de microfissures dans le milieu élastique où elles se propagent. L'influence des discontinuités sur  $V_p$  est très importante lorsque la direction de propagation est perpendiculaire au plan de fissuration.  $V_p$  est par-contre peu affectée lorsque cette propagation s'effectue dans ce plan.

La porosité  $n(\%)$  a un effet important sur la vitesse des ondes (du Jean et al. (1983)). Les premiers travaux sont probablement dus à Wyllie & al (Wyllie et Gardner (1958a), Wyllie et Gardner (1958b)). Ces auteurs mesurent  $V_p$  (avec une technique d'ultrasons) dans un grand nombre de matériaux poreux, naturels et synthétiques, à température ambiante et sous pression. Les éprouvettes sont soit sèches, soit saturées en divers fluides (eau, liquides organiques...). L'ensemble de

ces mesures a permis de trouver une relation simple (la relation moyenne sur le temps) entre le pourcentage de porosité de la roche  $n\%$ , la vitesse des ondes P (de compression) dans le milieu  $V$ , la vitesse de la matrice solide  $V_M$  et la vitesse dans le fluide saturant  $V_F$ .

#### 1.5.4 Choix des matériaux - exemple sur une structure maçonnée : une coupôle

La structure est une voûte en pierre de 8m de diamètre et 4m de hauteur. Elle s'inscrit dans une demi-sphère. Elle repose sur cinq piliers de 2m de hauteur, 0.70m de largeur et 0.40m d'épaisseur. Selon la localisation dans la coupôle, les blocs (pierres) ont des caractéristiques mécaniques différentes. Il est ainsi judicieux de choisir une pierre plus lourde, plus résistante aux pieds et plus légère au niveau du sommet pour réduire les contraintes de poids s'exerçant sur la base. Cette coupôle, une fois construite, sera exposée aux agressions climatiques (pluie, neige).

Le tailleur de pierre, en fonction des propriétés de chaque pierre, va ainsi construire la structure. Dans le cadre d'une étude que nous avons entreprise avec le tailleur de pierre Deltour, a été adoptée le principe de constitution (figure 1.21) de la coupôle suivant :

sommet : pierre de Junas

assises supérieures : pierre de Beaulieu

2<sup>ème</sup> assise : pierre d'Estailade

1<sup>ère</sup> assise : pierre de Junas

arches et sommiers : pierre de Lens

pieds : pierre de Lens

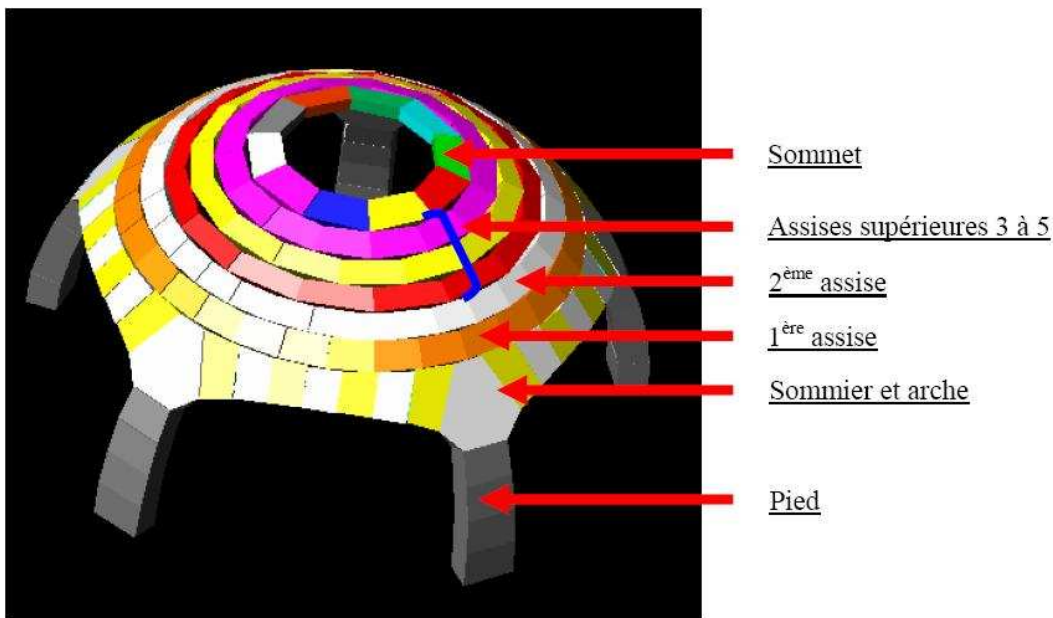


FIG. 1.21 – Dispositions des pierres selon leurs caractéristiques mécaniques dans une structure maçonnée : une coupôle

Cette coupôle sera modélisée dans le chapitre 5.

### 1.5.5 Conclusion

Les pierres de construction sont destinées à être mises en oeuvre dans une structure. Posées dans un bâtiment, elles seront soumises à de fortes contraintes mécaniques, que ce soit en compression ou en traction. L'étude sur le choix mécanique des pierres paraît donc très importante et dépend de plusieurs paramètres : position dans la structure, exposition à la pluie, à la neige... pour une stabilité optimale de la structure au cours du temps.

## 1.6 D'un point de vue mécanique - les éléments joints : le mortier

Les caractéristiques principales des mortiers sont :

- leur ouvrabilité ;
- leur prise ;
- leurs résistances mécaniques ;
- leurs caractéristiques de retrait et de gonflement, ... .

Pour pouvoir évaluer les caractéristiques des mortiers, on prend souvent comme référence le mortier 1/3 composé en poids de : une partie de liant et 3 parties de sable normalisé dont les grains s'échelonnent de 80 microns à 2 mm, et 45% d'une partie d'eau (figure 1.22). Le rapport classique eau/liant est ainsi de 0.45.

Ce mortier est malaxé et mis en place dans des moules métalliques suivant des méthodes normalisées. Des essais rhéologiques sont réalisés sur ce mortier. Eventuellement, on caractérise la prise et la chaleur d'hydratation.

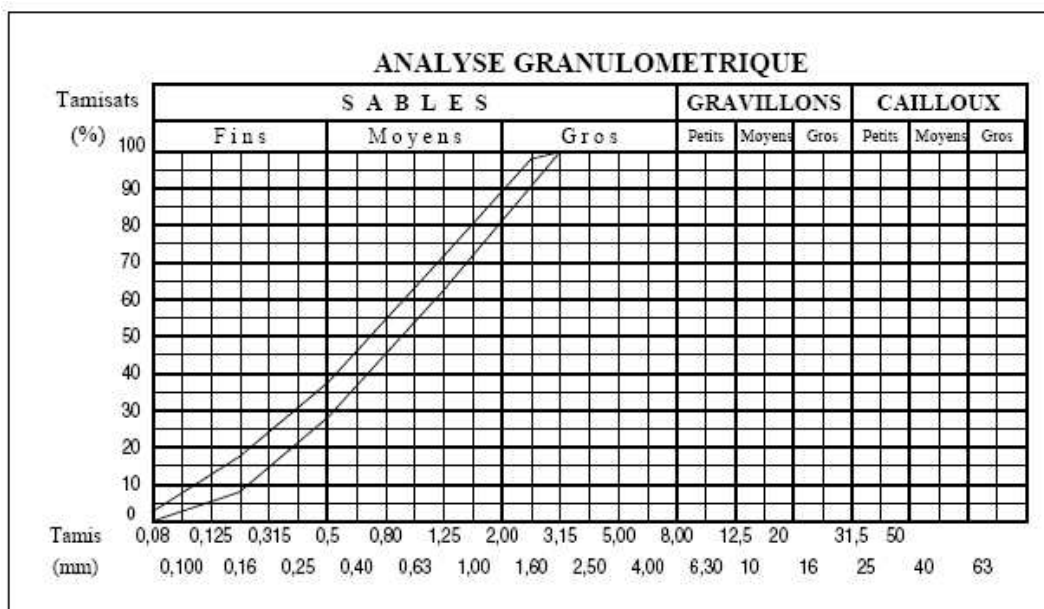


FIG. 1.22 – Composition granulométrique du sable de référence CEN

### 1.6.1 Ouvrabilité

L'ouvrabilité d'un mortier se mesure à l'aide de divers appareils. Les plus connus sont :

- **la table à chocs** : le mortier, après avoir été mis en place et démoulé d'un moule tronconique, reçoit 15 chocs en 15 secondes. On mesure le diamètre de la galette ainsi obtenue. L'étalement en % est donné par la formule :

$$E\% = 100 \frac{D_r - D_i}{D_i} \quad (1.6.1)$$

où  $D_r$  représente le diamètre final,  
 $D_i$  représente le diamètre initial.

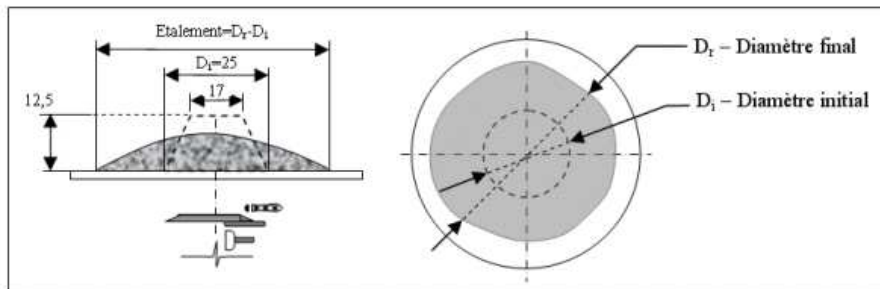


FIG. 1.23 – Table à chocs

- **le maniabilimètre du LCPC** : il est constitué d'un moule parallélépipédique comportant une paroi mobile et un vibreur. Le principe de l'essai consiste, après avoir enlevé la paroi mobile, à mesurer le temps mis par le mortier sous vibrations pour atteindre un repère gravé sur la face intérieure du moule,

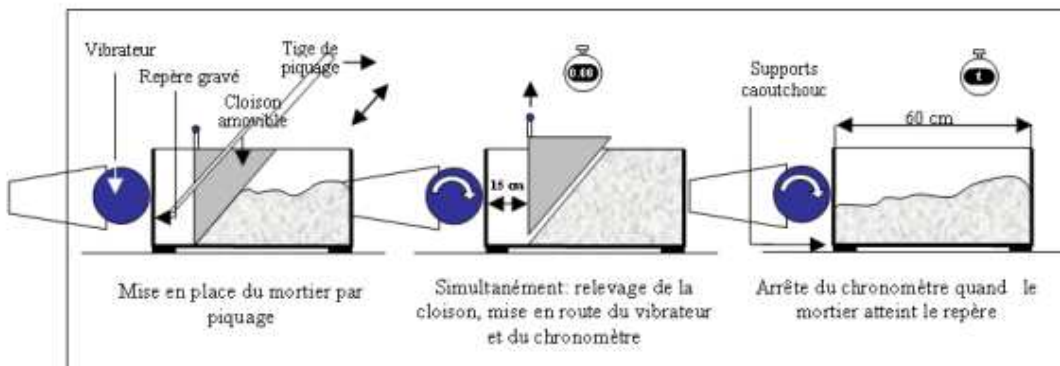


FIG. 1.24 – Principe de fonctionnement du maniabilimètre B, LCPC

- **le cône** : dans le cas d'un mortier fluide, on peut mesurer le temps d'écoulement d'une certaine



quantité de mortier au travers d'un ajustage calibré situé à la partie inférieure d'un cône. Le cône peut aussi être muni d'un vibreur.

### 1.6.2 Prise

Le temps de prise se mesure habituellement sur une pâte pure de ciment de consistance normale (24 à 30% d'eau) et conformément à la norme concernée (à l'aide de l'appareil de Vicat). Il est possible d'obtenir (hors norme) le temps de prise d'un mortier avec le même appareillage mais en plaçant une surcharge de 700 grammes sur le plateau supérieur. Le poids de l'aiguille pénétrant dans le mortier est de 1000 grammes. Le début de prise est l'instant où l'aiguille s'arrête à 2,5mm du fond (taille des plus gros grains de sable) et la fin de prise, est l'instant où l'aiguille s'arrête à 2,5mm du niveau supérieur.

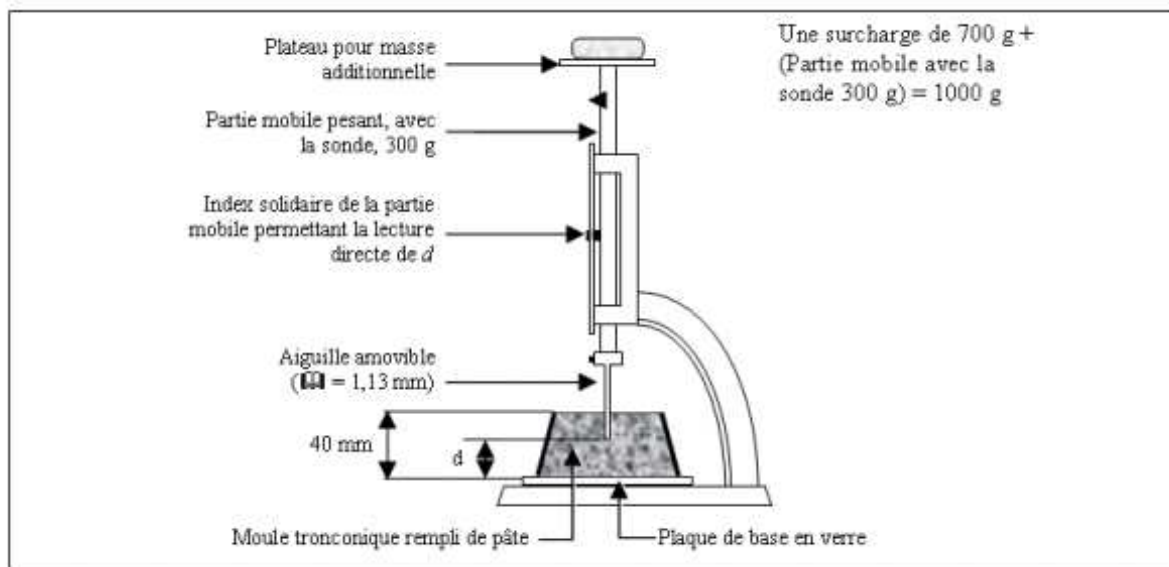


FIG. 1.25 – Appareil de Vicat muni de l'aiguille avec une surcharge

### 1.6.3 Résistances mécaniques

Beaucoup d'essais de laboratoires se font sur les prismes de 4x4x16 cm conservés dans l'eau à 20° (figure 1.26). Les éprouvettes sont rompues en traction par flexion puis en compression. Les résistances, aussi bien en traction par flexion qu'en compression, progressent à peu près comme logarithme du temps (entre 1 et 28 jours) (figure 1.27).

Les résistances des mortiers (comme dans le cas des bétons) dépendent de très nombreux facteurs :

- nature et dosage en ciment ;
- rapport E/C (eau/ciment) ;
- granulométrie et nature du sable ;
- énergie de malaxage et mise en oeuvre ;
- protection les tous premiers jours (cure).

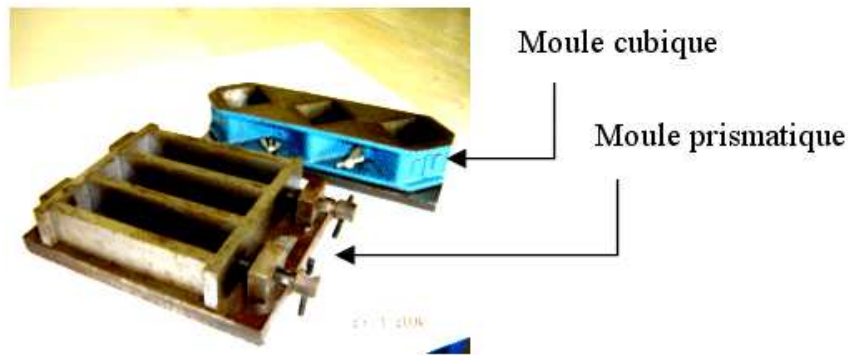


FIG. 1.26 – Moule pour moulage des éprouvettes de mortier

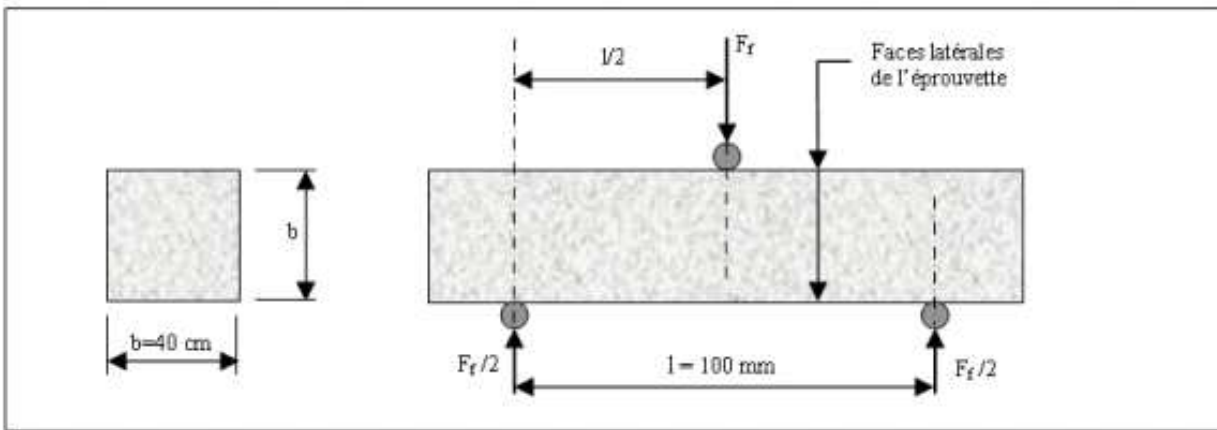


FIG. 1.27 – Dispositif pour l'essai de résistance à la flexion

La norme AFNOR A179 s'applique à cinq types de mortiers où peuvent être combinés du ciment portland et du ciment de maçonnerie (voir figure 1.28). Le mortier de type M contient surtout du ciment portland et possède une forte résistance à la compression. Les mortiers de type S, N, O et K contiennent des proportions progressivement plus élevées de chaux ou de ciment de maçonnerie. Les valeurs minimales de résistance mécanique sont indiquées pour chacun des cinq types de mortier. Bien que les valeurs de résistance mécanique diminuent du mortier M au mortier K, la norme exige un pouvoir de rétention d'eau minimal de 70%. Les mortiers peuvent être classés selon la proportion des composants basée sur les propriétés connues des liants et des granulats qui entrent dans la composition des mortiers, ou bien selon les propriétés des mortiers eux-mêmes.

**Tableau I. Proportions de mortier (en volume)**

		Ciment Type portland	Ciment de maçonnerie	Chaux vive ou chaux grasse	Granulats	Résistance minimale à la compression au 28ème jour (en lb/po <sup>2</sup> )
Résistance mécanique ↑ accrue ↓ Ouvrabilité accrue	M	1	1	-	Au moins	2500
		1	-	¼	2¼ et au	
	S	½	1	-	plus 3	1800
		1	-	½	fois la	
	N	-	1	-	somme	750
		1	-	1	des	
	O	-	1	-	volumes	350
		1	-	2	de ciment	
	K	1	-	1	et de	75
		-	-	1	chaux	
					utilisés	

FIG. 1.28 – Propriétés mécaniques des joints suivant le dosage, source AFNOR A179

La figure 1.28 indique toute la série de propriétés des mortiers de ciment et de chaux cités dans la norme AFNOR A179. Dans le cas extrême, on obtient un mortier contenant surtout du ciment et possédant une forte résistance à la compression et un faible pouvoir de rétention d'eau.

Entre ces deux extrêmes, il existe diverses combinaisons de ciment et chaux capables de donner au mortier toute une gamme de propriétés intéressantes dues aux avantages de chaque liant c'est-à-dire une forte résistance mécanique et une prise rapide (ciment) modifiées par une ouvrabilité et un pouvoir de rétention d'eau excellents (chaux). Le point d'intersection des deux courbes, de la figure 1.29, indique que le mortier possédant la plus forte résistance mécanique compatible avec un pouvoir de rétention d'eau optimal se trouve dans les limites d'un mortier de type N.

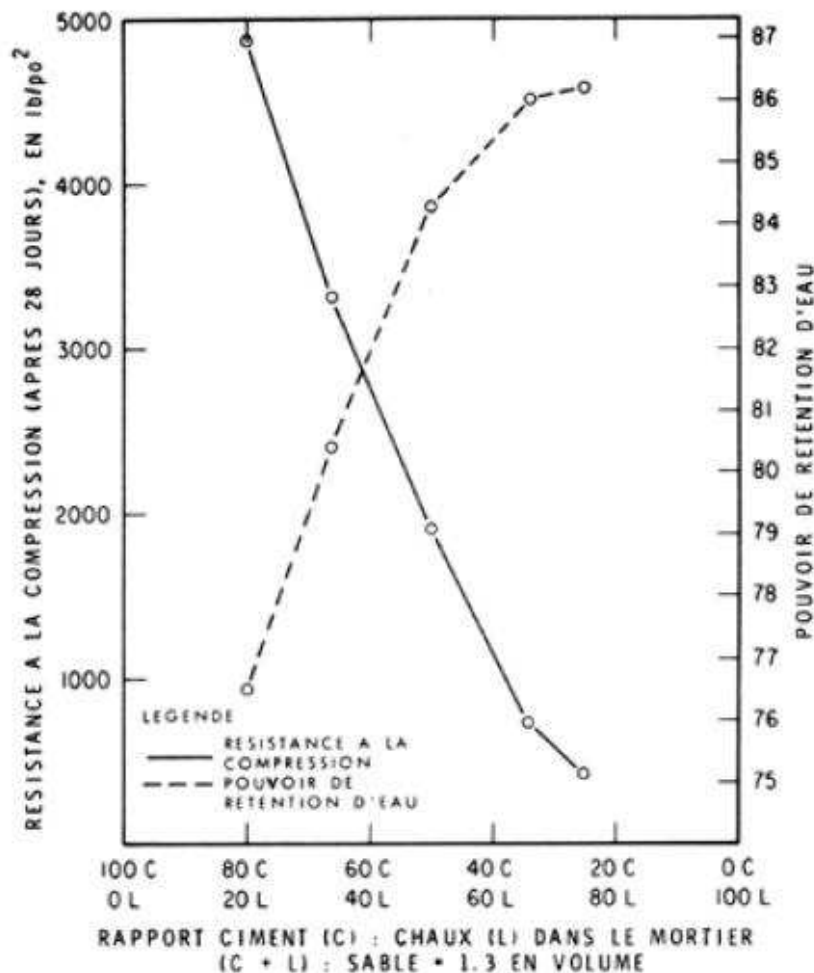


FIG. 1.29 – Relation entre la composition du mortier, la résistance à la compression et le pouvoir de rétention d'eau, source AFNOR A179

Deux grands types d'essais sont réalisés pour caractériser le comportement mécanique des mortiers. Le premier essai considère le mortier comme un matériau seul ; il teste ses propriétés élastiques, ses résistances en traction-compression. Par-contre, un deuxième type d'essai consiste à prendre en compte l'interaction entre le mortier et le bloc.

On caractérise alors le joint comme une interface par son comportement normal en traction-compression, et son comportement tangentiel en cisaillement.

Des travaux ont été réalisés concernant le comportement tangent sous sollicitations cycliques par Hamid & al (Hamid et al. (1979)), Atkinson & al (Atkinson et al. (1989)) et par Armand & al (Armand et al. (1997)) concernant les mortiers anciens.

## 1.7 Propriétés de l'interface

Rigoureusement, l'interface est définie comme la surface de contact bloc/bloc ou la surface de contact bloc/mortier.

Dans le premier cas, les blocs sont en contact frottant sec. Il est important de bien connaître la loi de frottement à l'interface entre les pierres puisqu'une majeure partie des mécanismes de ruine est régie par le comportement des joints et par les glissements qui y ont lieu. Numériquement, la loi utilisée dans les structures est souvent de type frottement sec de Coulomb standard. Dans le deuxième cas, les blocs sont en contact avec du mortier. Il ne faut alors pas confondre l'interface avec le joint lui-même. En effet, une rupture pourra survenir aussi bien à l'interface qu'à l'intérieur du joint (mortier). Numériquement, de nombreuses lois cohésives ont été développées (Acary (2001)).

### 1.7.1 Interface bloc/bloc

Dans le cas du contact bloc/bloc, la rugosité d'un joint a son influence. En effet, la rugosité est définie à l'échelle du grain les irrégularités de surface de la pierre. On peut citer les travaux de Barton (Barton et Choubey (1977)) qui caractérise l'état de surface d'une pierre par le JRC (Joint Roughness Coefficient). Il existe deux méthodes pour déterminer le JRC : l'une visuelle et l'autre empirique.

La première méthode consiste en une comparaison visuelle entre le profil étudié et les profils de Barton & al (Barton et Choubey (1977)). Sur la figure 1.30, les différents états de surface sont donnés avec le coefficient de JRC équivalent.

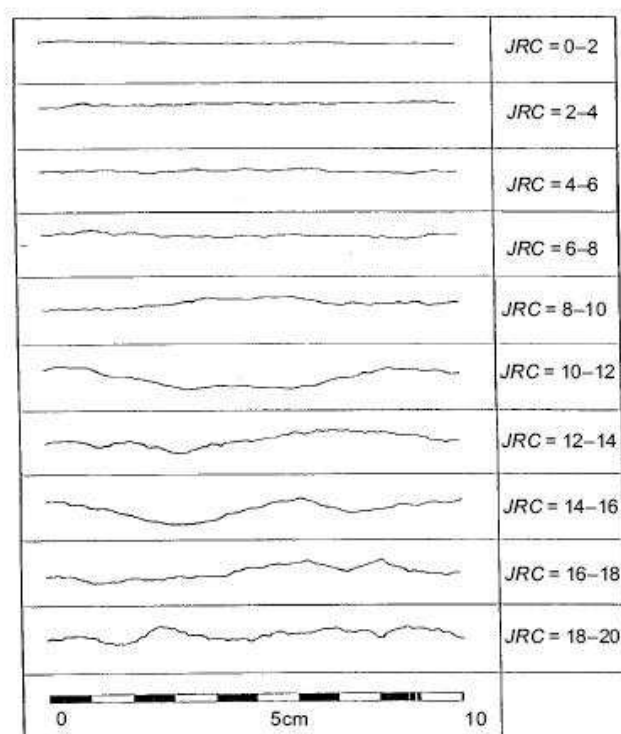


FIG. 1.30 – Profil de rugosité de la pierre et valeur du JRC équivalent, Barton & al (Barton et Choubey (1977))

Une valeur de JRC est ainsi affectée à un profil.

La deuxième méthode consiste en une détermination expérimentale du JRC en utilisant un essai de basculement qui consiste à incliner un échantillon contenant un joint jusqu'au moment où l'éponte supérieure glisse. L'angle d'inclinaison  $\alpha$  au moment du glissement étant alors déterminé, le JRC se calcule avec l'équation 1.7.1 :

$$JRC = \frac{\alpha_s - \phi_r}{\log_{10}(JCS/\sigma_{n0})} \quad (1.7.1)$$

où,

Coefficient JCS : est la résistance en compression uniaxiale du matériau,

$\alpha_s$  : est l'angle d'inclinaison pour lequel le glissement des deux blocs commence,

$\sigma_{n0}$  : est la contrainte normale au joint quand le glissement se produit,

$\phi_r$  : est l'angle de frottement résiduel.

La contrainte normale est calculée par :

$$\sigma_{n0} = \frac{W \cos \beta_s}{A} \quad (1.7.2)$$

où,

$W$  est le poids du bloc supérieur,

$A$  est la zone de contact brut,

$\beta_s$  est l'angle d'inclinaison.

Sur la figure 1.31, quelques exemples de pierre sont présentées avec leurs JRC correspondants (Bhowmik et Dutta (2004), Grasselli et Egger (2003)).

### 1.7.1.a Comportement mécanique du joint

Les propriétés mécaniques du joint peuvent être définies en modélisant son comportement sous l'effet d'une contrainte normale et sous sollicitation tangentielle. Son comportement mécanique dépend de plusieurs paramètres tels que la zone de contact, du fait notamment de sa rugosité. De nombreux travaux, dans le cadre de la mécanique des roches, ont été développés pour mettre en évidence le comportement type d'un joint dans les directions normale et tangentielle. On peut citer les travaux de Jaeger & al (Jaeger et Cook (1979)), Barton & al (Barton et Choubey (1977)), Bandis & al (Bandis et al. (1983)), Bandis & al (Bandis et al. (1981)), Barton & al (Barton et Bandis (1980)).

### 1.7.1.b Comportement en compression

Sous une compression normale  $\sigma_n$ , le joint tend à se refermer d'une quantité  $u_n$  appelée déplacement relatif. Une loi hyperbolique entre la contrainte normale  $\sigma_n$  et la fermeture normale  $u_n$  est généralement utilisée pour modéliser ce comportement. Cette loi est définie par :

$$\sigma_n = \frac{u_n k_{n0} V_m}{V_m - u_n} \quad (1.7.3)$$

Sample Number	Rock Type	JRC	Rebound Hardness Number	Density, kg/m <sup>3</sup>	JCS, MPa	$\varphi_b$ , Degree
1	Shale	1	17.00	23.92	23.60±15.0	19.83
2	Sandstone	4	20.50	21.02	24.20±16.0	22.55
3	Carbonaceous shale	2	24.50	20.26	28.23±18.5	17.96
4	Sandstone	3	20.50	21.02	24.20±16.0	25.92
5	Gritty sandstone	4	12.00	21.70	17.70±7.0	21.12
6	Silty sandstone	2	20.50	17.10	22.30±2.0	23.08
7	Shale	1	14.00	23.92	20.00 ±0.0	16.10
8	Silty sandstone	3	23.00	17.10	24.20±16.0	20.44
9	Gritty sandstone	2	20.00	21.70	25.00±16.5	19.91
10	Sandstone	4	21.75	21.02	26.50±8.0	21.96

FIG. 1.31 – Exemples de pierres avec leurs coefficients de rugosité : JRC, JCS et angle de frottement, Bhowmik & al (Bhowmik et Dutta (2004))

où,

$V_m$  désigne la fermeture maximale du joint,

$k_{n0}$  est défini tel que :

$$k_{n0} = \frac{d\sigma_n}{du_n}(u_n = 0) \quad (1.7.4)$$

### 1.7.1.c Comportement au cisaillement

L'échantillon est soumis à un effort de cisaillement s'appliquant au niveau du joint.

La contrainte de cisaillement  $\tau$  croît rapidement avec le déplacement tangentiel relatif  $u_t$  jusqu'à une valeur de pic  $\tau_p$ , et décroît pour atteindre une valeur dite contrainte résiduelle  $\tau_r$  où elle se stabilise. Cette valeur de pic correspond au point de résistance maximum des aspérités composant le joint. Celles-ci sont ensuite progressivement écrasées conduisant alors à la valeur résiduelle de la contrainte tangentielle. Sous une contrainte de cisaillement, un déplacement relatif normal  $u_n$  apparaît. Ces deux types de déplacements (tangentiel et normal) sont liés par la dilatance, carac-

térisée par l'angle  $d$  de dilatance :

$$d = \text{Arctan} \frac{du_n}{du_t} \quad (1.7.5)$$

Barton & al (Barton et Choubey (1977)) ont défini l'équation suivante pour l'estimation de la rigidité maximale de cisaillement (MPa/m) :

$$K_s = \frac{100}{L_x} \sigma_n \tan [JRC \log_{10}(JCS/\sigma_n) + \phi_r] \quad (1.7.6)$$

où,

$L_x$  est la longueur du joint en mètre.

La figure 1.32 suivante montre le déplacement tangentiel du modèle en fonction de la contrainte de cisaillement pour différents états de surface de contact (JRC).

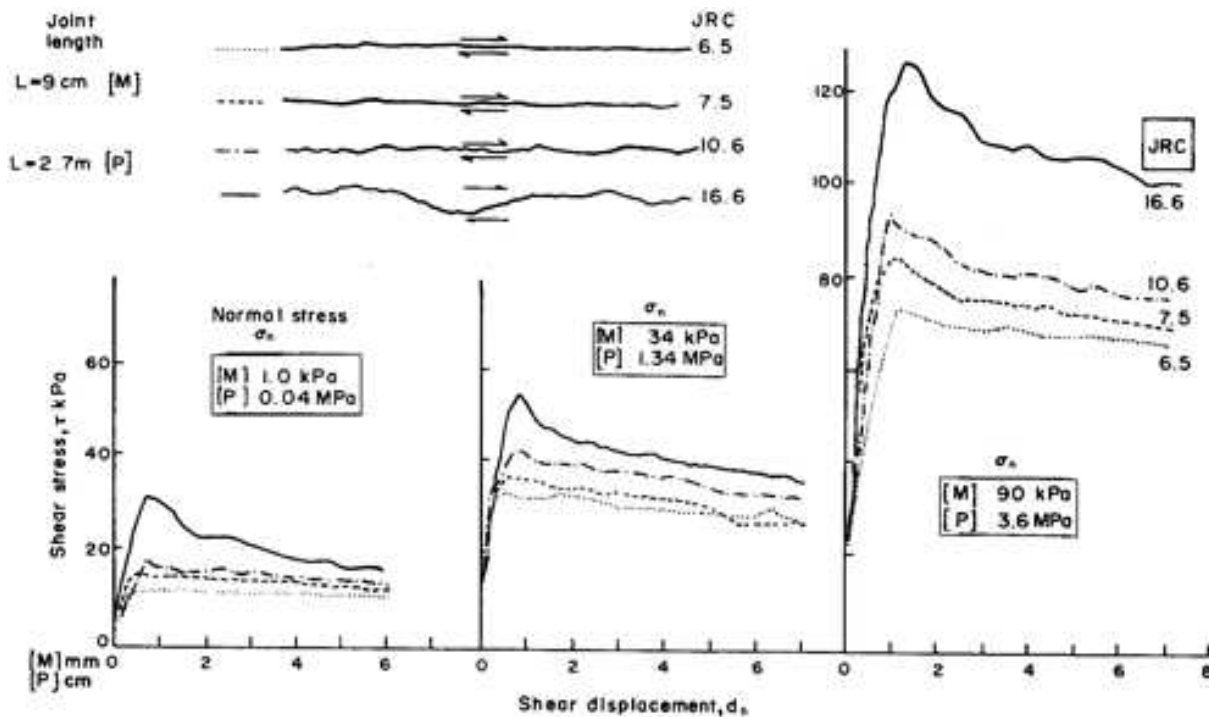


FIG. 1.32 – Représentation des contraintes de cisaillement et de déplacement pour différents coefficients de rugosité JRC. [M]=modèle [P]=prototype, Barton & al (Barton et Choubey (1977))

#### 1.7.1.d Critère de rupture

Devant la complexité des phénomènes se produisant aux interfaces entre les éléments (usure, interactions physico-chimiques...) la loi de frottement de Coulomb est la plus utilisée, dans la pratique des ingénieurs.

Le modèle de Mohr-Coulomb relie la contrainte de cisaillement  $\tau$  à la contrainte normale  $\sigma_n$ , selon



la loi :

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (1.7.7)$$

où,

$\phi$  : est l'angle de frottement du joint plan,

$c$  : est la cohésion.

Le modèle de Barton-Bandis définit l'équation pour la résistance au cisaillement d'un joint de roche de la façon suivante :

$$\tau = \sigma_n \tan \left[ \phi_b + JRC \log_{10} \left( \frac{JCS}{\sigma_n} \right) \right] \quad (1.7.8)$$

où,

$\phi_b$  est l'angle de frottement de la surface de rupture,

### 1.7.1.e Essais de laboratoire

Chetouane (Chetouane (2004)) a réalisé des essais pour caractériser le comportement des joints en utilisant la boîte de Casagrande. Pendant les essais réalisés, une vitesse de cisaillement de  $0.01 m.s^{-1}$  a été choisie. De cette étude, il en ressort que :

- dans tous les cas, l'allure de la courbe est bien décrite par la loi de Coulomb,
- la cohésion est fonction de la rugosité de la pierre. Plus la rugosité est importante, plus il sera difficile de désolidariser les deux blocs sous l'effet du cisaillement. La cohésion sera donc forte.

Villemus (Villemus (2004)) a mis en place un dispositif expérimental pour caractériser le comportement du joint au cisaillement. Le principe est de placer une pierre découpée, pour s'affranchir des problèmes de rugosité, dans une demi-boîte inférieure (dimension de la boîte 30cmx30cm), de façon à ce que la surface de la pierre corresponde au plan de cisaillement de la boîte. Ensuite, un autre échantillon de même taille est posé sur la première pierre, dans une deuxième boîte (voir figure 1.33).

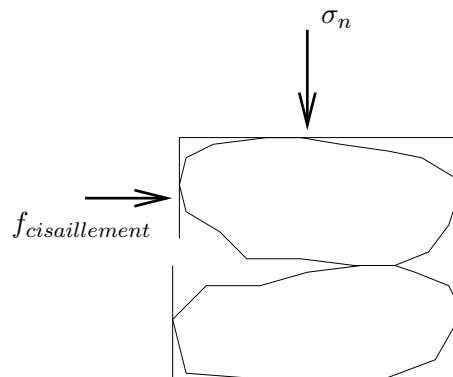


FIG. 1.33 – Essais de cisaillement de l'interface pierre/pierre, Villemus & al (Villemus (2004))

Une contrainte normale  $\sigma_n$  est appliquée, ainsi qu'une force de cisaillement.

Il ressort de ces essais que le frottement obéit à la loi de Coulomb, c'est-à-dire que le frottement est proportionnel à la contrainte normale, avec un coefficient de proportionnalité qui ne dépend pas de la surface de contact au niveau du joint. Le dispositif de Villemus a également été mis en place sur un lit de pierres.

Essai de Armand & al (Armand et al. (1997)) :

Dans le cas des joints vifs, le contact entre les blocs est direct et la stabilité de la structure est assurée par la gravité et la répartition des efforts au sein même de la structure. La figure suivante montre des essais réalisés par Armand & al en 1997 sur deux blocs de pierre de Dionysos pour des vitesses de cisaillement et des pressions normales variables.

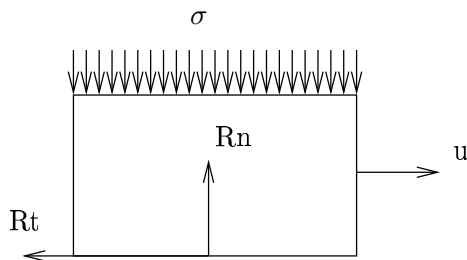


FIG. 1.34 – Essais de cisaillement d'interface pierre/pierre, Armand & al (Armand et al. (1997))

Dans ces essais, il est constaté que :

- pour de faibles vitesses de cisaillement, la loi de Coulomb est vérifiée, le seuil de glissement est proportionnel à la pression normale exercée.
- pour de grandes vitesses de cisaillement, la présence d'un coefficient de proportionnalité entre la réaction tangentielle et la réaction normale est montrée.

Dans le cas de contact frottant, la loi de Coulomb est toujours vérifiée. Cette hypothèse sera prise en compte dans la suite de nos travaux (notamment au chapitre 4).

## 1.7.2 Interface bloc/mortier

L'interface entre le bloc et le mortier est souvent le plan de faiblesse des maçonneries. La réponse non-linéaire des joints, qui est alors contrôlée par l'interface bloc/mortier, est une des plus significatives caractéristiques du comportement des maçonneries. Lourenço (Lourenço (2006)) a montré qu'il existe deux phénomènes pouvant se produire à l'interface : le premier mode est associé à la rupture par traction **mode I**, le deuxième mode est associé à la rupture par cisaillement **mode II**. Il a été observé par Heymann (Heymann (1966)) qu'il existe un troisième type de rupture de l'interface par compression. Cependant, ce mode de rupture est rarement obtenu sur des structures réelles.

### 1.7.2.a Rupture par traction mode I

Différents tests ont été réalisés pour caractériser le comportement en traction (tension) de l'interface bloc/mortier. Ces tests incluent des essais de flexion (3-points, 4-points), des essais de compression (fendage) et des essais de traction directe (figure 1.35). Pour la simulation numérique, l'essai de

traction directe est le mieux adapté pour la représentation complète du diagramme déplacement-contrainte.

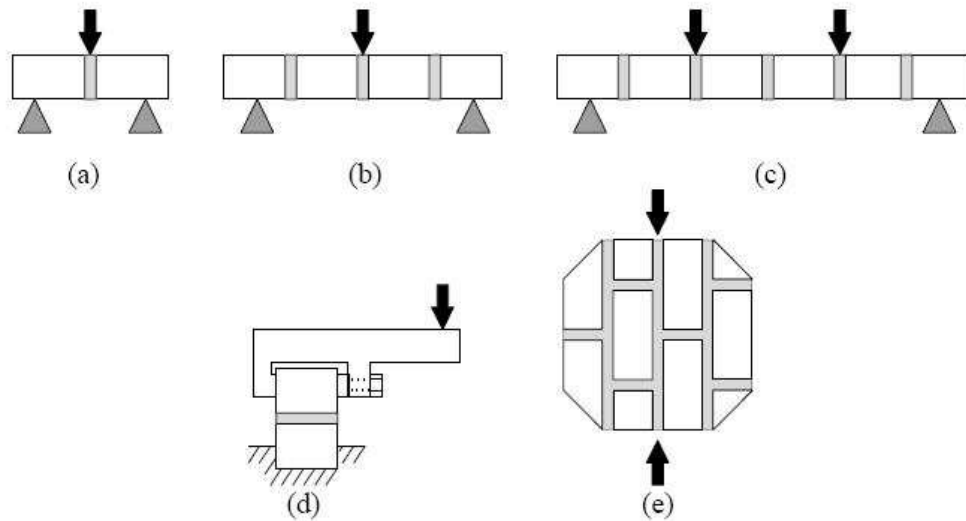


FIG. 1.35 – Représentation de différents types d'essais dans l'interface bloc/mortier. Essais possibles pour caractériser la résistance à la traction : (a) et (b) Essais 3-points, (c) essais 4-points, (d) essais de flexion, (e) essais de compression, Lourenço & al (Lourenço (2006))

Van Der Pluijm (Van Der Pluijm (1997)) a testé des petits échantillons de maçonnerie, composés par des blocs, d'argile ou de calcaire (figure 1.36).

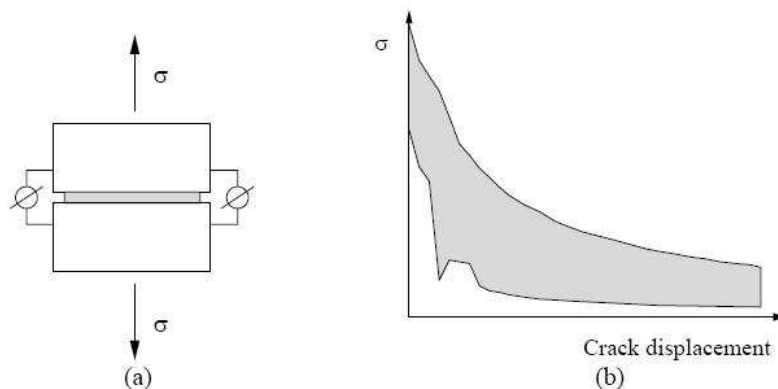


FIG. 1.36 – Comportement de l'interface bloc/mortier à la traction : (a) traction directe, (b) diagramme contrainte-déplacement (fissure) pour une brique pleine composée d'argile (l'aire représente l'enveloppe de 4 essais), Van Der Pluijm (Van Der Pluijm (1997))

Il a constaté, en adoptant des efforts de traction allant de  $0.3N/mm^2$  à  $0.9N/mm^2$  que la surface de fissuration est concentrée dans la partie centrale de l'interface bloc/mortier. Par ces essais, il a montré que la surface d'arrachement est à peu près égale à 35% de la surface totale. Enfin, il a projeté cette constatation à l'exemple d'un mur pour en conclure qu'en négligeant les joints

verticaux, la zone d'arrachement par traction est égale à 59% de la surface transversale d'un mur (figure 1.37).

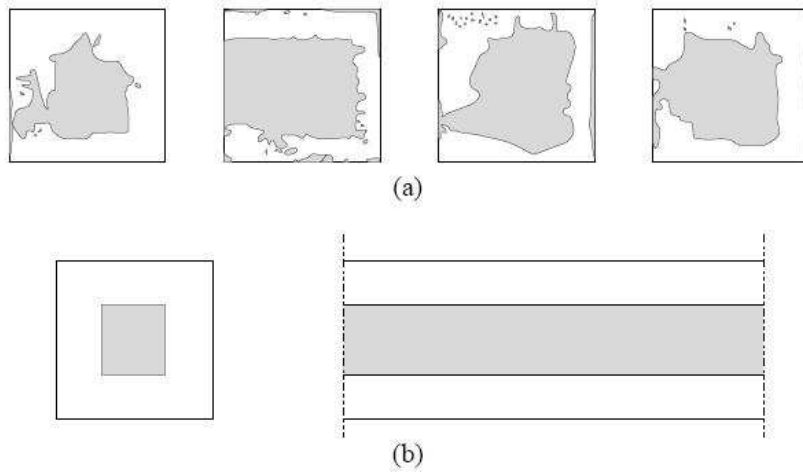


FIG. 1.37 – Rapport de la surface d'arrachement par traction à la surface totale de contact, Lourenço & al (Lourenço (2006))

### 1.7.2.b Rupture par cisaillement mode II

La réponse au cisaillement des joints de maçonnerie peut poser quelques difficultés dans la mise en place de l'essai. En effet, un aspect important dans la détermination de l'essai est d'être capable de générer un état uniforme de contrainte dans le joint. Cet objectif est difficile à atteindre car les états d'équilibre présentent des contraintes normales non-uniformes, du fait des irrégularités de surface. Différents tests ont été mis en place pour la caractérisation du comportement de l'interface bloc-mortier en cisaillement. Ceux-ci incluent des essais direct de cisaillement (Sinha et Hendry (1966), Hofmann et Stockl (1986)) et des tests dits "triplés" (Smith et Carter (1977), Hendry (1978)), qui intègrent trois blocs pour cisailer deux interfaces à la fois. Pour obtenir un régime post-pic, le problème expérimental est de garder constante la contrainte normale sur les joints horizontaux (figure 1.38).

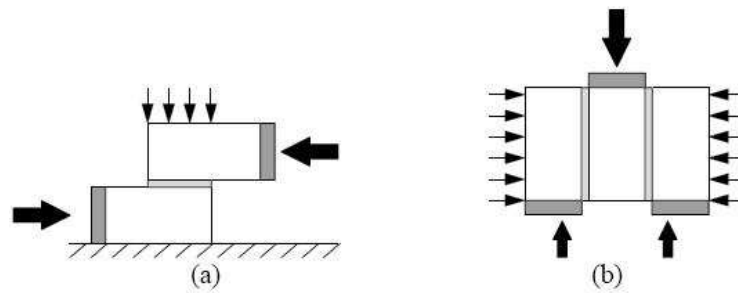


FIG. 1.38 – Essais de cisaillement : (a) essais couplés, (b) essais "triplés", Lourenço & al (Lourenço (2006))

Dans son article (Van Der Pluijm (1993)), Van der Pluijm présente une caractérisation complète du comportement en cisaillement de la maçonnerie, composée de blocs d'argiles pleins et de silicate de calcium. L'essai de la figure 1.39 permet de garder une pression de confinement normale constante sur le cisaillement. Des contraintes (de compressions) de confinement sont appliquées : 0.1, 0.5 et 1  $N/mm^2$ .

Un phénomène de fatigue et d'usure est observé (voir figure 1.40 montrant une allure exponentielle de la courbe). On assiste à une diminution de la cohésion dans les modèles de Coulomb. L'aire définie par le diagramme contrainte-déplacement et le niveau de cisaillement du frottement sec résiduel est appelée l'énergie  $G_f^{II}$  de rupture du **mode II**, avec des valeurs s'étendant de 0.01 à 0.25  $Nmm/mm^2$  pour des valeurs de la cohésion initiale  $c$  s'étendant de 0.1 à 1.8  $N/mm^2$ . La valeur de l'énergie de rupture dépend également de la valeur de la contrainte de confinement.

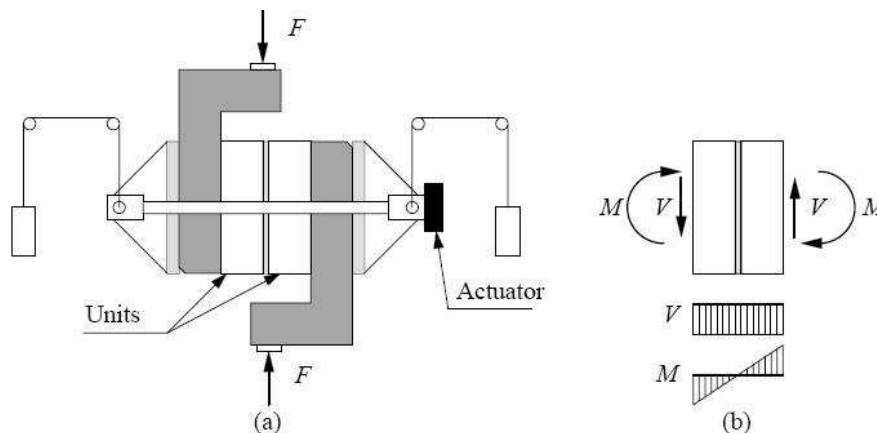


FIG. 1.39 – Essais de cisaillement : (a) échantillon, (b) forces appliquées sur l'échantillon, Van der Pluijm (Van Der Pluijm (1993))

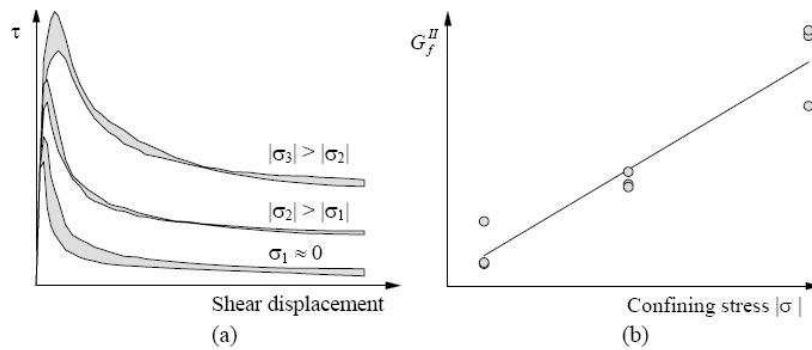


FIG. 1.40 – Mode II de rupture de l'interface bloc/mortier : (a) Diagramme contrainte-déplacement pour différents états de contraintes (l'aire représente l'enveloppe de 3 essais), (b) énergie  $G_f^{II}$  de rupture, Lourenço & al (Lourenço (2006))

## 1.8 Propriétés des maçonneries

### 1.8.1 Comportement des maçonneries en compression uniaxiale

La résistance à la compression de la maçonnerie dans une direction normale aux plans de joints a souvent été considérée comme la propriété mécanique majeure. Le comportement en compression uniaxiale d'une maçonnerie est traditionnellement obtenu par un essai de compression simple perpendiculairement aux plans de joints.

Un type d'essai pouvant être réalisé pour identifier le comportement en compression uniaxiale des maçonneries est l'essai RILEM (normalisé)(voir figure 1.41). Cet essai est souvent réalisé sur un assemblage multi-couche de blocs de dimensions totale  $500 \times 250 \times 600 \text{ mm}^3$ .

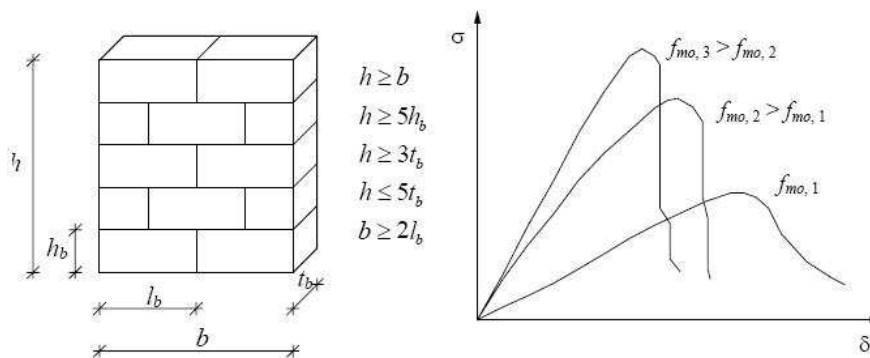


FIG. 1.41 – Comportement uniaxial des maçonneries sous chargement normal au plan de joint. Représentation, sur la figure de gauche de l'échantillon RILEM. Représentation, sur la figure de droite, du diagramme contrainte-déplacement ( $f_{m0}$  est la résistance à la compression du mortier, Lourenço & al (Lourenço (2006))

Depuis le travail pionnier de Hilsdorf (Hilsdorf (1969)), la communauté de l'étude du comportement mécanique des maçonneries a validé que la différence dans les propriétés élastiques entre le bloc et le joint de mortier est la cause de la rupture d'une maçonnerie. La compression uniaxiale de la maçonnerie mène à un état de compression triaxial dans le mortier et un état de compression/traction biaxiale dans le bloc. Les travaux de Mann & al ont observé que, au départ, des fissures apparaissent dans les blocs en suivant la ligne moyenne de l'échantillon, c'est-à-dire en continuité du joint vertical. Lors d'une déformation croissante (c'est-à-dire en augmentant le chargement), des fissures verticales additionnelles apparaissent sur l'épaisseur de l'échantillon favorisant ainsi la rupture par fractionnement.

Binda & al (Binda et al. (1988)) ont montré l'importance de la résistance à la compression du mortier comme influençant fortement celle de l'échantillon (voir figure 1.41).

Les essais de compression uniaxiale dans la direction parallèle aux plans de joints ont suscité moins d'attention de la part de la communauté scientifique. Cependant, la maçonnerie régulière est un matériau anisotrope et, dans le cas d'une faible pression longitudinale des blocs, la résistance à la charge de compression parallèle aux plans de joints peut avoir un effet décisif sur la charge porteuse. Selon Hoffmann & al (Hoffmann et Schubert (1994)), le rapport entre la charge compressive uniaxiale parallèle et perpendiculaire (normale) au plan de joint s'étend de 0,2 à 0,8.

Il est à souligner que la compression uniaxiale est rarement pilotée en déplacement.

### 1.8.2 Comportement des maçonneries en traction uniaxiale

Pour des essais de traction (chargement perpendiculaire au plan des joints), la rupture est généralement due à une rupture au niveau de l'interface bloc/mortier. On peut alors assimiler la résistance à la traction d'une maçonnerie à celle de l'interface.

Cependant, dans certains cas, pour des maçonneries composées par des blocs de faible résistance à la traction et dont le mortier a une bonne résistance à la traction, la rupture peut se réaliser par dépassement de la résistance à la traction des blocs (Abdou et al. (2006)). On peut alors approximer la résistance à la traction de la maçonnerie par celle des blocs.

Dans Backes (Backes (1985)), des résultats d'essais de traction dans la direction des joints, réalisés sur un panneau en maçonnerie en traction horizontale sont présentés (voir figure 1.42). Par ces essais, il a été mis en évidence les deux types de rupture possibles par traction (voir figure 1.43). En effet, il existe deux modes de rupture différents en fonction des résistances à la traction du mortier et du bloc.

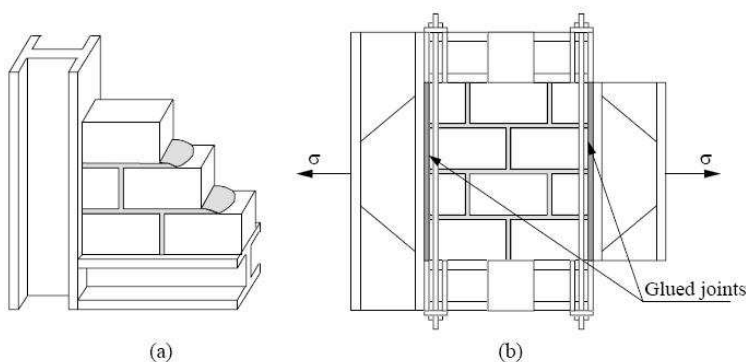


FIG. 1.42 – Test de traction dans la direction parallèle au plan de joint, Backes & al (Backes (1985))

Pour le premier mode I (voir figure 1.43a), la fissure fait un zigzag entre les joints horizontaux et verticaux. Le diagramme de déplacement-contrainte montre une courbe typique d'un essai de cisaillement, avec une contrainte résiduelle lors de l'augmentation du déplacement. Le régime post-pic est bien piloté par l'énergie de fracturation des joints verticaux et le régime post-pic en mode II des joints horizontaux.

Dans le second type de rupture, la fracture passe par les joints verticaux (voir figure 1.43b) et traverse les blocs. Après la première discontinuité visible dans le diagramme déplacement-contrainte, le régime post-pic se déclenche par une fracturation des blocs. Une deuxième discontinuité apparaît alors jusqu'à la fracturation du mortier.

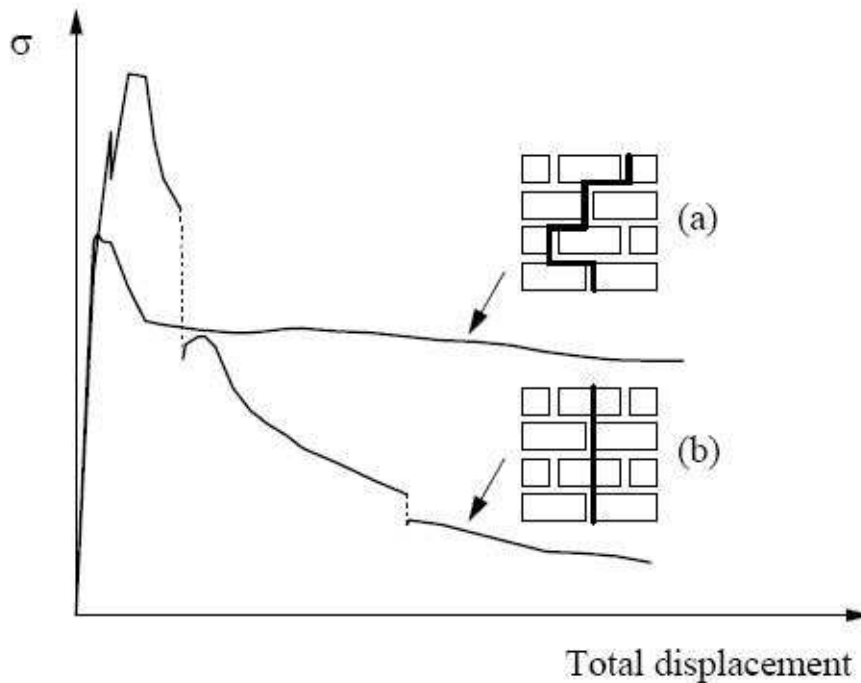


FIG. 1.43 – Diagramme contrainte-déplacement sous des essais de traction dans la direction parallèle au plan de joint : (a) rupture du joint en zigzag, (b) rupture verticale des joints et des blocs, Backes & al (Backes (1985))

### 1.8.3 Comportement biaxial des maçonneries

Le comportement biaxial des maçonneries ne peut pas être décrit seulement à partir du comportement uniaxial. La maçonnerie étant un matériau anisotrope, les contraintes ne peuvent pas se réduire à une contrainte principale mais à un ensemble de contraintes. Ces contraintes, que l'on peut visualiser sur la figure 1.44 font un angle  $\theta$  avec les plans d'essais de la maçonnerie. Deux tests sont effectués, l'un avec une pression uniaxiale (Hamid et Drysdale (1981), Samarasinghe et Hendry (1980)) et l'autre avec un état de pression biaxiale (Page (1981)).



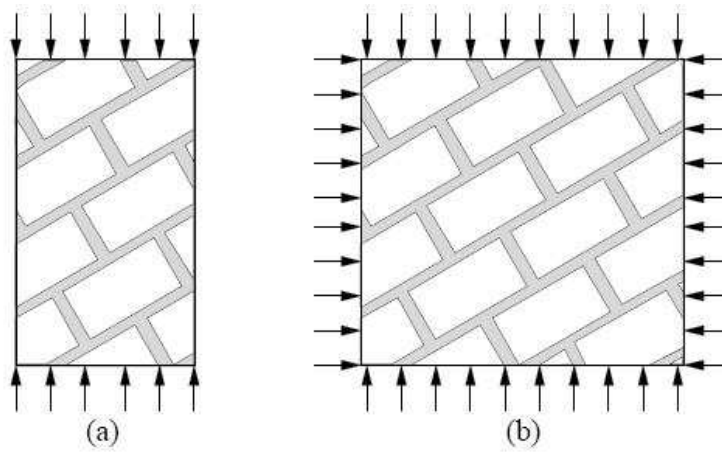


FIG. 1.44 – Comportement biaxial des maçonneries : (a) chargement uniaxial, (b) chargement biaxial, Page & al (Page (1981))

Le procédé expérimental le plus complet pour la caractérisation du comportement biaxial des maçonneries est celui de Page (Page (1981), Page (1983)). Les essais réalisés consistent à définir une enveloppe de résistance de la maçonnerie ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) en fonction de l'inclinaison des joints (voir figure 1.45).

Il en ressort que l'orientation des contraintes principales par rapport aux axes du matériau et les valeurs des contraintes principales ont une influence sur le mode de rupture et les valeurs de résistance du mur testé.

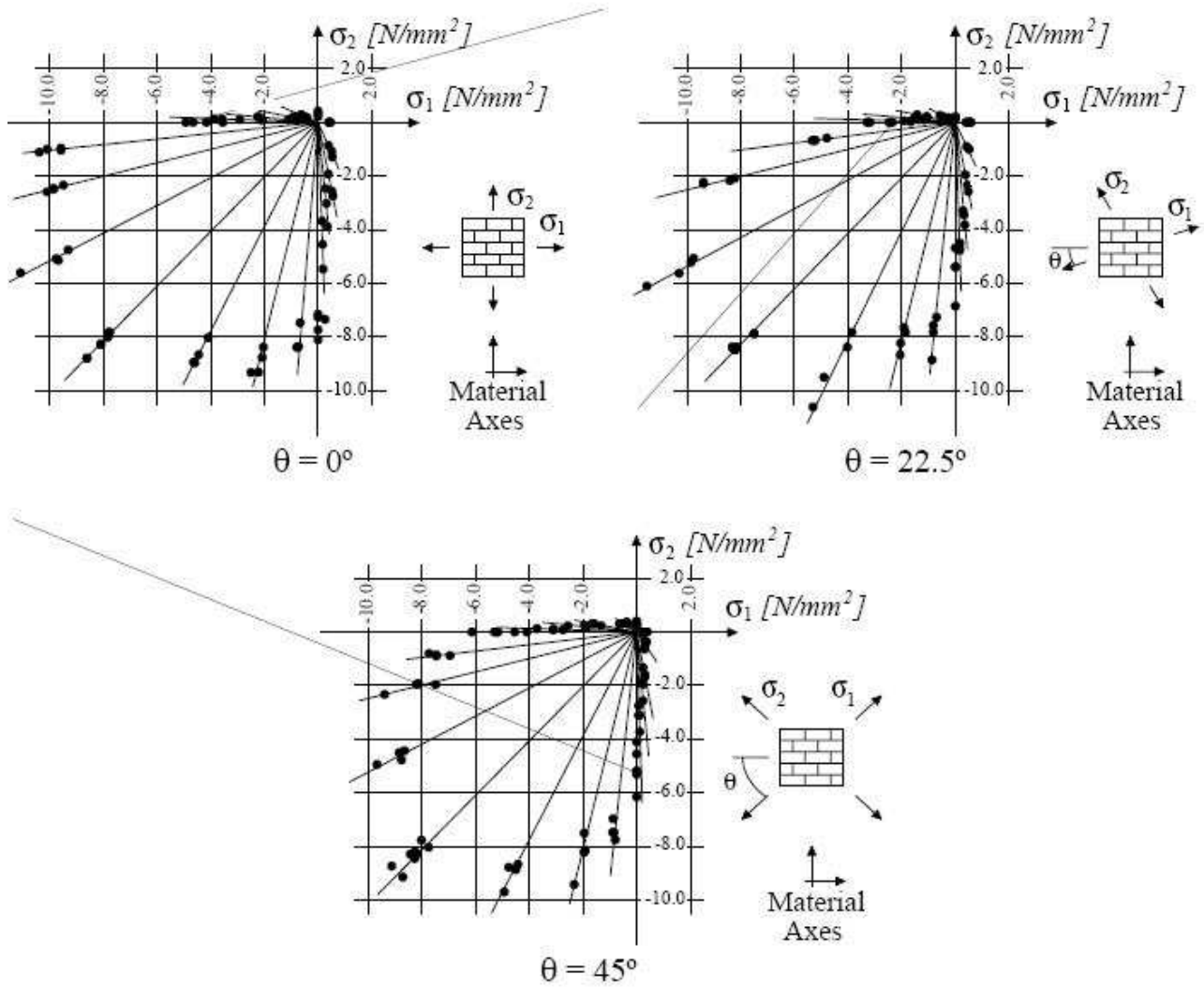


FIG. 1.45 – Enveloppe de résistance de la maçonnerie en fonction de l'inclinaison du chargement biaxial, Page & al (Page (1981))

Voici les différents modes de rupture de la maçonnerie (voir figure 1.46), donnés par Dhanasekar (Dhanasekar et Page (1985)).

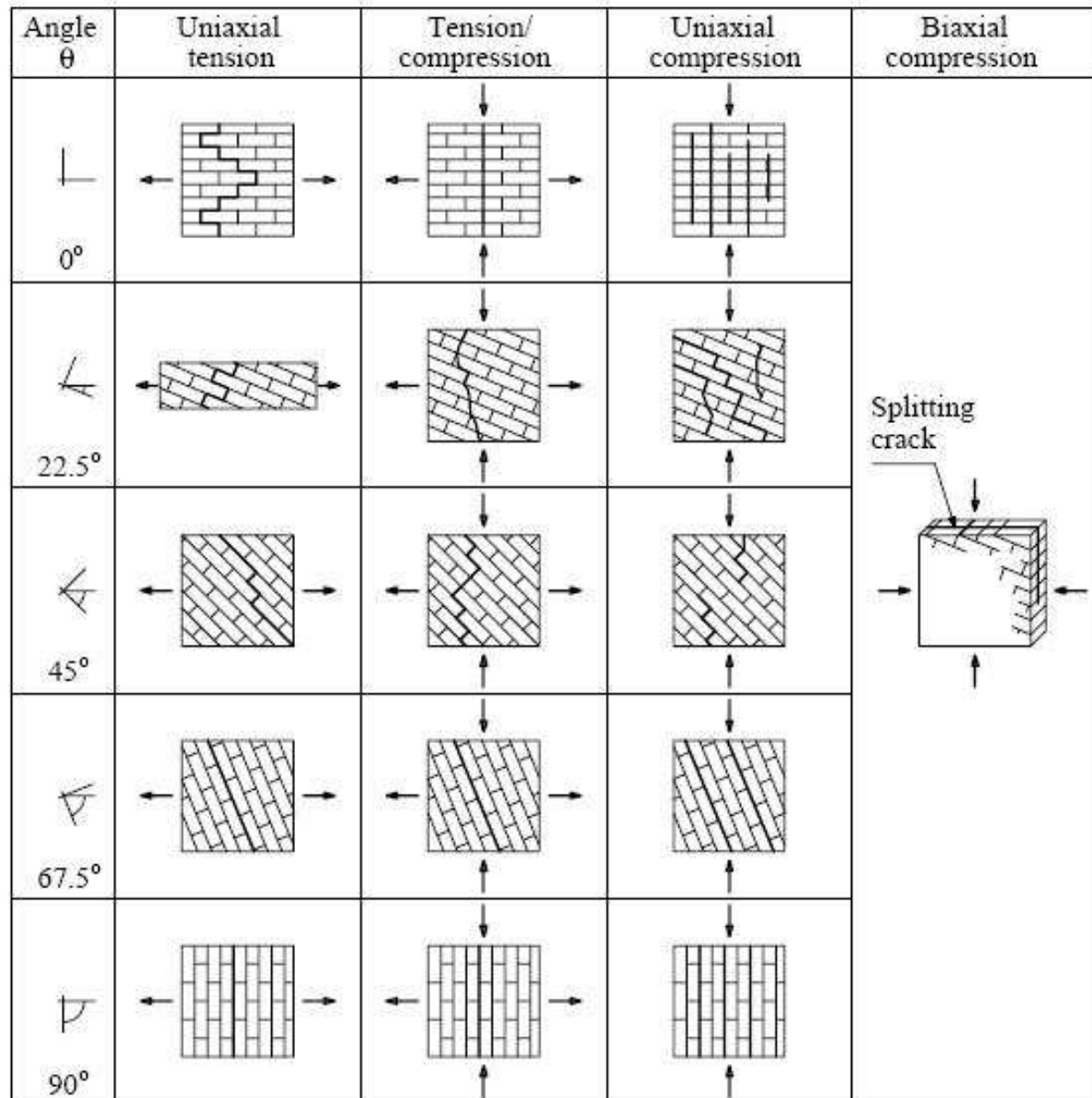


FIG. 1.46 – Différents modes de rupture de la maçonnerie sous chargement biaxial, Dhanasekar & al (Dhanasekar et Page (1985))

Les essais menés par Abdou & al (Abdou (2005)) conduisent à deux types de rupture :

- la fissuration des blocs et du mortier,
- la rupture au niveau de l'interface bloc/mortier des joints.

Ces modes de rupture sont fonction de l'angle d'orientation des joints :

- pour  $a < 30^\circ$  : rupture par fissuration verticale le long des blocs et du mortier,
- pour  $30^\circ < a < 45^\circ$  : rupture par fissuration verticale le long des blocs et du mortier mais aussi rupture au niveau de l'interface bloc/mortier,
- pour  $45^\circ < a < 70^\circ$  : rupture au niveau de l'interface bloc/mortier.

Au-delà de  $80^\circ$  ( $a > 80^\circ$ ), la rupture a lieu le long des blocs et du mortier par fissuration verticale mais aussi au niveau de l'interface bloc/mortier.

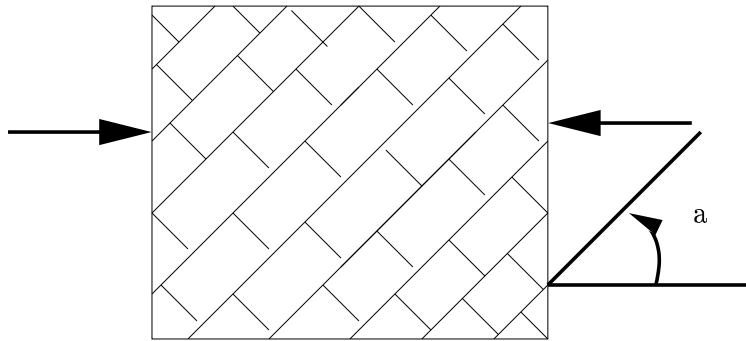


FIG. 1.47 – Influence de l'orientation des joints sur le type de rupture de la maçonnerie, Abdou & al (Abdou (2005))

## 1.9 Conclusion

Dans les paragraphes précédents, on a présenté les différents constituants d'une maçonnerie :

- les éléments "corps" : brique, pierre, ...,
- les éléments "joints" : joint vif ou joint de mortier.

Les diverses règles d'appareillage ont été abordées.

D'un point de vue mécanique, on s'est intéressé aux comportements de la pierre et du mortier.

Pour la pierre, la prise en compte de la porosité et donc de sa résistance mécanique dans un état hydrique donné est très importante. En effet, la pierre est mécaniquement plus "fragile" dans un état saturé d'eau qu'à sec. De plus, des informations sur les résistances à la traction, à la compression sont nécessaires avant d'intégrer ces pierres dans une structure. Le cas de la coupôlle est un exemple, les blocs doivent être placés selon leurs capacités de résistance.

Pour le joint, l'interface entre le bloc et le mortier est souvent le plan de faiblesse des maçonneries. Les différents essais mettent en évidence que la rupture peut apparaître au niveau soit de l'interface soit du mortier.

Deux comportements principaux sont associés aux maçonneries :

- l'endommagement fragile plus ou moins progressif suivant la qualité des blocs et des mortiers :
  - pour des essais de traction (chargement perpendiculaire au plan des joints), l'endommagement se traduit par une rupture fragile au niveau de l'interface bloc/mortier. Dans certains cas, pour des maçonneries composées par des blocs de faible résistance à la traction et dont le mortier a une bonne résistance à la traction, la rupture peut se réaliser par dépassement de la résistance à la traction des blocs.
  - l'orientation des contraintes principales par rapport aux axes du matériau et les valeurs des contraintes principales ont une influence sur le mode de rupture et les valeurs de résistance (figure 1.46).
- la plasticité non associée. Les différents essais ont montré que pour les joints vifs et les joints de mortier anciens, la loi de frottement de Coulomb est toujours vérifiée. A souligner que pour les joints cohésifs, une résistance supplémentaire au seuil de frottement doit être prise en compte (Acary (2001)).

Dans la suite, afin de modéliser une maçonnerie, on s'intéresse aux outils numériques disponibles et adaptés .

---

## Chapitre 2

# Approche numérique pour modéliser une maçonnerie

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modélisation continue des maçonneries</b>	<b>72</b>
2.1.1	Modélisation par un milieu à une phase : macro-modélisation	73
2.1.1.a	Calcul à la rupture, analyse limite et "No-Tension Material (NTM)"	73
2.1.1.b	Modélisation avec endommagement	75
2.1.1.c	Approche par les milieux de Cosserat	76
2.1.2	Modélisation par un milieu à plusieurs phases : micro-modélisation	78
2.1.2.a	Approche par homogénéisation périodique	79
2.1.2.b	La méthode des éléments discrets	83
<b>2.2</b>	<b>Choix de la méthode de modélisation</b>	<b>84</b>
<b>2.3</b>	<b>Généralités sur les méthodes par éléments discrets</b>	<b>86</b>
2.3.1	Méthodes smooth	86
2.3.2	Méthodes non-smooth	90
2.3.3	Conclusions sur les méthodes smooth et non smooth	91
<b>2.4</b>	<b>Modélisation discrète des maçonneries</b>	<b>92</b>
2.4.1	Relations de contact frottant	92
2.4.1.a	Condition de Signorini	92
2.4.1.b	Loi de frottement	93
2.4.2	Description du mouvement d'un corps en présence de "contacts"	94
2.4.2.a	Intégration temporelle	94
2.4.2.b	Intégration de la dynamique non-régulière	95
2.4.2.c	Discrétisation des relations de passage entre variables locales et globales	95
2.4.2.d	Discrétisations des relations de contact frottant	96
2.4.2.e	Bilan des équations discrétisées	97
2.4.2.f	Condensation du système	97
2.4.3	Méthode de résolution	98
2.4.3.a	Résolution 2D du problème de contact frottant standard	98
2.4.3.b	Résolution 3D du problème de contact frottant standard	99
2.4.4	Modélisation du contact avec cohésion	100
2.4.4.a	Partie normale	100
2.4.4.b	Partie tangente	101

2.4.4.c	Evolution de l'intensité d'adhésion . . . . .	101
2.4.4.d	Système à résoudre en présence de cohésion . . . . .	102
2.4.5	Méthode de résolution : résolution du problème contact, frottement et adhérence en 3D . . . . .	102
<b>2.5</b>	<b>Conclusion et perspectives . . . . .</b>	<b>103</b>

---

La maçonnerie possède diverses propriétés directionnelles à cause du joint de mortier qui constitue un plan de faiblesse de la structure. Dans le premier chapitre, une présentation succincte des différents types de maçonnerie existante a été faite. Le terme "maçonnerie" recouvre une grande catégorie de matériau du point de vue du comportement mécanique et ceci principalement en raison de la diversité des constituants et de leurs arrangements.

La modélisation d'ouvrages maçonnés peut s'avérer délicat du fait de la dimension des blocs, l'anisotropie, l'épaisseur des joints, l'arrangement des blocs... ; en général, la maçonnerie est un assemblage anisotrope et inélastique.

Lourenço (Lourenço (2006)) a montré qu'un modèle doit inclure cinq types de mécanismes de base pour caractériser la maçonnerie :

- fissuration du joint en traction,
- glissement le long d'un joint d'assise ou d'un joint supérieur pour les faibles valeurs de contraintes normales,
- fissure de l'élément de maçonnerie par traction directe,
- fissuration diagonale par traction des éléments de maçonnerie pour des valeurs de contraintes normales suffisantes pour développer du frottement dans les joints,
- "scission" des éléments en traction résultant de la dilatance du mortier pour de grandes valeurs de la contrainte normale.

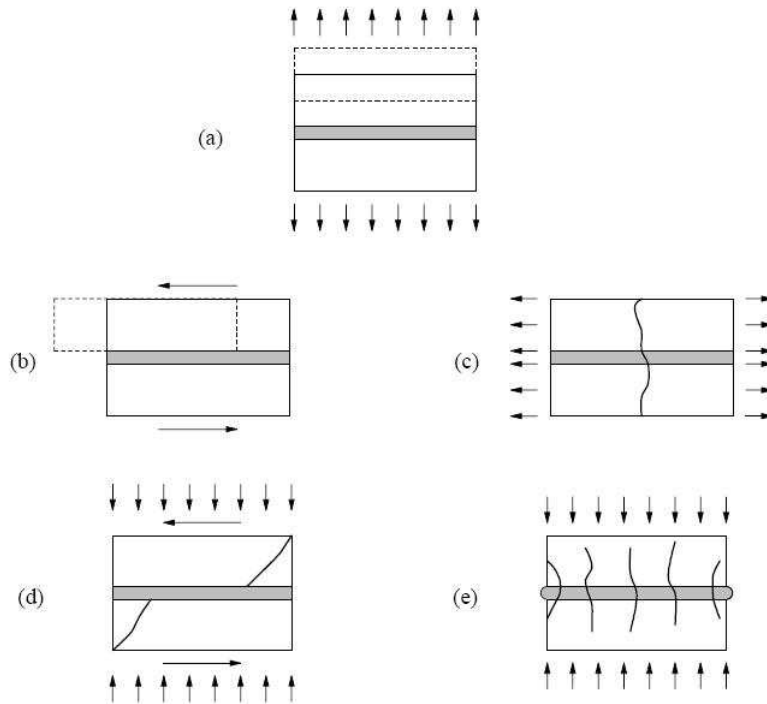


FIG. 2.1 – Mécanismes de rupture d'une maçonnerie : (a) fissure du joint en traction ; (b) glissement du joint ; (c) fissure du bloc par traction directe ; (d) fissure du bloc par traction diagonale ; (e) compression de la maçonnerie, Lourenço & al (Lourenço (2006))



Il existe deux grandes classes pour caractériser les modèles maçonnés : les modèles continus et les modèles discrets :

- les modèles continus sont utilisés dans le cas des maçonneries composées de blocs (briques ou pierres) et d'un joint de mortier. La loi de comportement des modèles continus est décrite par une loi de type contrainte/déformation qui dérive d'un modèle à une ou deux phases, (Beskos (1993 No 216, 1994 No 217)),
- les modèles discrets sont adaptés pour étudier une structure en grand appareil, (Acary (2001)). Dans ce cas, les blocs sont supposés rigides ou déformables et la surface de contact est souvent régie par une loi de contact frottant unilatéral.

On présente tout d'abord la modélisation des maçonneries par la méthode des éléments finis (méthode numérique la plus répandue), puis par la méthode des éléments discrets. On fera un choix sur la méthode que nous utiliserons pour la suite de nos travaux en tentant de montrer les motivations.

## 2.1 Modélisation continue des maçonneries

Selon le niveau de précision et de simplification souhaité (2.2), il est possible d'utiliser les stratégies de modélisations par deux types d'approches :

- une approche de type macro-modélisation : c'est l'échelle de la structure, elle est de l'ordre du mètre. Dans ce type d'approche, on peut considérer la structure comme étant homogène et continue. Une loi de comportement homogène y est associée, reliant contraintes et déformations macroscopiques.
- une approche de type micro-modélisation : il devient difficile de parler de milieux continus, les maçonneries présentent une forte hétérogénéité caractérisée par une microstructure à la fois chaotique et aléatoire. Cette modélisation doit inclure le comportement de chaque constituant : les blocs, les joints de mortier et l'interface bloc/mortier. Cette approche est bien adaptée aux structures en petit appareil.

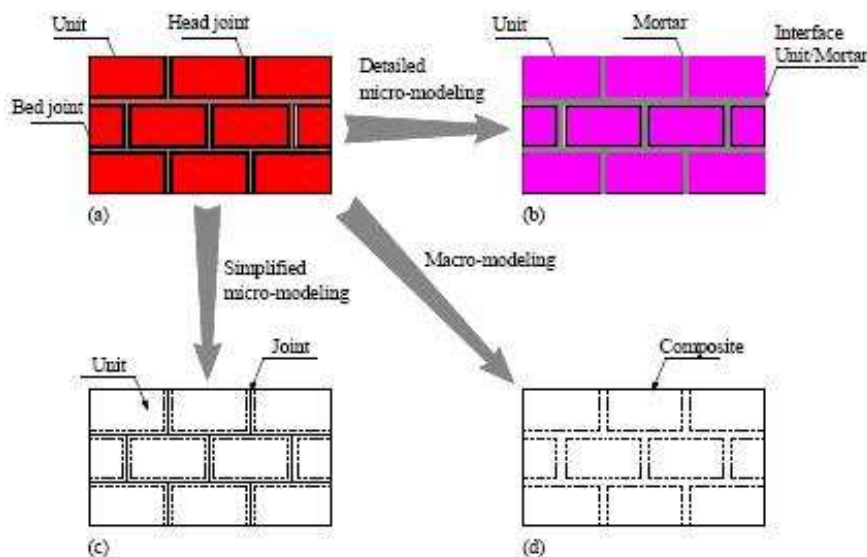


FIG. 2.2 – Stratégies de modélisation d'une maçonnerie, Lourenço (Lourenço (2006))

Acary (Acary (2001)) donne un panorama exhaustif des différentes approches de modélisation des structures maçonnées.

### 2.1.1 Modélisation par un milieu à une phase : macro-modélisation

Dans l'approche à une phase, on construit un modèle macro-mécanique basé sur des considérations micro-mécaniques. On traite donc l'ensemble des blocs d'un appareillage comme un milieu homogénéisé équivalent. De nombreuses lois de comportement ont été étudiées, et nous allons présenter brièvement leurs hypothèses ainsi que les avantages et inconvénients.

#### 2.1.1.a Calcul à la rupture, analyse limite et "No-Tension Material (NTM)"

L'objectif de cette méthode est de définir un cadre suffisamment simple, capable de fournir des résultats analytiques et numériques, avec un minimum de paramètres caractérisant le matériau. Cette approche a abouti à deux types de modélisations différentes :

- le calcul à la rupture

Dans ces méthodes, les seules hypothèses formulées reposent sur les efforts dans le matériau et le domaine de résistance qui leur est associé. Les travaux de Coulomb (Coulomb (1773)) sont à l'origine de nombreuses méthodes d'analyse de stabilité mises en oeuvre par les ingénieurs. Ainsi, pour les ouvrages en maçonnerie, on peut citer les travaux de Méry (Méry (1840)), Durand-Claye (Durand-Claye (1867), Durand-Claye (1880)) dont on trouvera des analyses précises par Heymann (Heyman (1972)) (Heymann a appliqué la méthode pour les ponts, voûtes et cathédrales) et par Delbecq (Delbecq (1981)).

La méthode permet l'obtention d'un domaine de chargements supportables sans avoir d'informations supplémentaires. Les domaines de résistance s'appuient généralement sur la donnée d'une résistance limite à la compression, d'une résistance faible en traction (souvent nulle) et d'un critère de frottement de Coulomb.

Cependant, elle ne permet pas de conclure sur la stabilité des chargements "potentiellement supportables", comme cela peut être le cas en analyse limite, où le principe de dissipation plastique maximale est vérifié.

- l'analyse limite et les NTM

Les hypothèses concernant les NTM ont été formulées par Heyman (Heymann (1966)) dans ses travaux d'analyse limite. Ces hypothèses supplémentaires sont au nombre de trois :

H1 : la maçonnerie n'a aucune résistance à la traction,

H2 : la maçonnerie a une résistance illimitée à la compression,

H3 : aucun glissement ne peut avoir lieu dans la maçonnerie.

Ces hypothèses sont assez restrictives : classe des matériaux NTM.

De nombreux travaux ont été récemment développés dans le cadre de la méthode des éléments finis ; on peut citer Onate & al (Onate et al. (1997)), Alves & al (Alves et Alves (1997)), Cuomo & al (Cuomo et Ventura (2000)).

L'hypothèse H1 implique que la contrainte normale  $t_n = \sigma n$  où  $n$  est un vecteur normal unitaire sortant de la surface, doit être négative ou nulle :

$$t_{nj}n_j = \sigma_{ij}n_in_j \leq 0 \quad \forall n_i \quad i \in [1, 3] \quad (2.1.1)$$

Cette hypothèse rend compte de la faible résistance à la traction de la maçonnerie. Généralement l'interface est très sensible.

L'hypothèse H2 n'impose aucune condition sur les contraintes. La ruine de la maçonnerie n'est jamais atteinte par écrasement des blocs.

Enfin, l'hypothèse H3 qui affirme qu'aucun glissement ne peut avoir lieu au niveau des joints : les déformations sont décomposées en une partie élastique et en une partie inélastique, dues au développement de l'initiation de l'ouverture du joint perpendiculairement au plan de la contrainte maximale (non négative). Cette déformation ne peut provoquer que des dilatations, dans ce cas  $\epsilon^a$  ne peut pas être négative. La condition s'écrira de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^e + \epsilon^a \\ \epsilon_{ij}^a n_i n_j &\geq 0 \quad \forall n_i \quad i \in [1, 3] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Du fait de l'existence d'une séparation éventuelle, l'équation 2.1.2 peut s'écrire, en fonction du saut de déplacement  $[[u]]$  :

$$[[u]].n \geq 0 \quad (2.1.3)$$

L'hypothèse de normalité entre déformations et contraintes s'écrira :

$$\sigma.n.n \leq 0, \quad [[u]].n \geq 0, \quad (\sigma.n.n)([[u]].n) = 0 \quad (2.1.4)$$

On reconnaît la condition de Signorini (2.1.4).

L'analyse limite s'applique sur un modèle rigide de plasticité parfaite afin d'évaluer la capacité de charge et le mécanisme de rupture de la structure.

L'application de l'analyse limite sur les structures maçonnées, modélisées comme un assemblage de blocs rigides liaisonnés entre eux par des joints, dépend de quelques hypothèses basiques ((Orduna (2003)), (Orduna et Lourenço (2003)), énoncées et discutées par Heyman (Heymann (1966)) : l'interface entre deux blocs ne résiste pas à des efforts de traction, résiste à des efforts de compression illimitée et la rupture en cisaillement est contrôlée par la loi de Coulomb. On trouvera différents exemples d'applications dans Orduna et Lourenço (Orduna et Lourenço (2001a), Orduna et Lourenço (2001b)), formulation complète d'analyse limite pour un assemblage de blocs rigides (Orduna et Lourenço (2005a), Orduna et Lourenço (2005b)).

L'analyse limite peut donc être considérée comme un outil informatique pratique, puisque d'une part elle exige un nombre de paramètres matériaux réduit et d'autre part fournit de bons résultats sur la charge limite et le modèle de rupture.

(Orduna (2003)) présente une recherche sur les possibilités de l'analyse limite dans des assemblages de blocs rigides afin d'évaluer la structure des maçonneries anciennes (voir figure 2.3). Ferris & al (Ferris et Tin-Loi (2001)) proposent un schéma numérique simple pour résoudre les problèmes d'analyse limite pour des structures composées de blocs de grandes tailles.

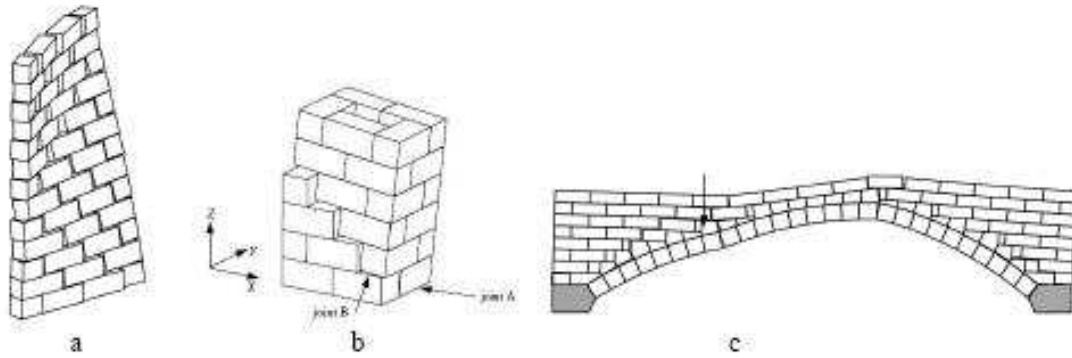


FIG. 2.3 – Analyse limite. (a) Mur chargé hors du plan, contraint sur un bord (Orduna et Lourenço (2005b)); (b) Pile de blocs (Ferris et Tin-Loi (2001)); (c) Pont en 2D (Orduna (2003))

### 2.1.1.b Modélisation avec endommagement

Les maçonneries peuvent être modélisées par une approche continue, incluant l'endommagement. En effet, une décohésion entre la matrice cimentaire et les grains de sable du mortier peut occasionner des micro-fissures (Acary (2001)). Ces microfissures grandissent au fur et à mesure que le chargement progresse pour former des macro-fissures qui amèneront la structure jusqu'à la ruine. Contrairement au phénomène de plasticité parfaite, le phénomène d'endommagement dégrade les propriétés élastiques des matériaux. On peut facilement constater ce phénomène à partir d'un essai de chargement/déchargement sur un matériau endommageable (Lemaitre et Chaboche (1985)). Deux critères de plasticité sont employés pour tenir compte de la nature non-associative des matériaux. Le premier critère, de type Rankine, est défini dans le plan de contraintes principales et est utilisé pour définir l'état de contraintes internes à l'élément de mortier ou de la brique (voir figure 2.4).

L'interface bloc/mortier et le comportement en cisaillement des blocs sont définis par le critère de Mohr-Coulomb (montré sur la figure 2.4), en tenant compte de la contrainte normale au plan de joint.

Dans Lofti & al (lofti et Shing (1994)), le critère de Rankine contrôle l'initiation des microfissures. Lorsque la contrainte principale atteint le seuil de résistance en traction, les microfissures se développent dans la direction perpendiculaire à cette contrainte. Le matériau isotrope devient alors orthotrope, les caractéristiques étant définies pour les directions parallèle et normale à la fissure.

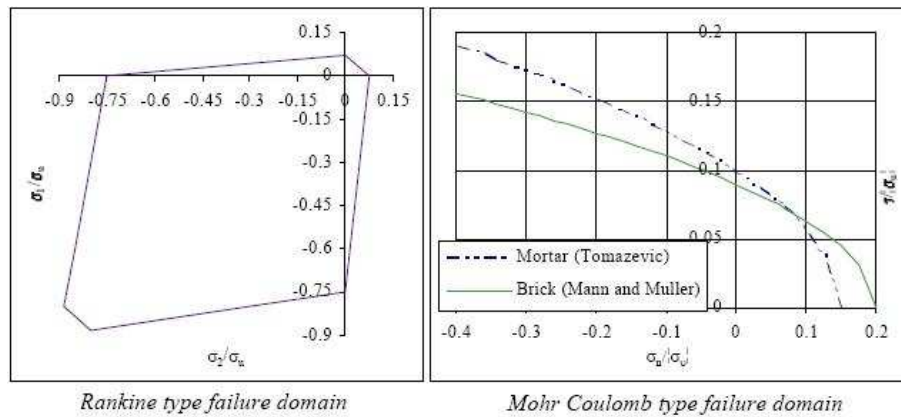


FIG. 2.4 – Endommagement. Critère de Rankine, Critère de Mohr-Coulomb, Lofti & al (lofti et Shing (1994))

### 2.1.1.c Approche par les milieux de Cosserat

Une approche macroscopique pour la modélisation des maçonneries basée sur l'utilisation de la théorie des milieux de Cosserat a été envisagée.

Un milieu de Cosserat est un milieu micro-polaire pour lequel on suppose que le micro-volume est un corps rigide. Par conséquent, un milieu de Cosserat est un milieu continu qui associe à chaque point matériel un vecteur vitesse de translation et un vecteur de rotation individuelle différente de la rotation d'ensemble (macro-rotation).

Les quantités cinématiques correspondantes, gradient de rotation et de vitesse (courbure) sont associées respectivement à travers le principe des travaux virtuels à un tenseur de couple de contraintes et un tenseur non-symétrique de contrainte. Un milieu de Cosserat est donc un milieu contenant une cinématique plus riche qu'un milieu classique car chaque point matériel va posséder trois degrés de liberté de rotation en plus des trois degrés de liberté de translation d'un milieu continu classique, indépendants de la partie antisymétrique du gradient de déplacement.

L'homogénéisation par les milieux de Cosserat apparaît comme une alternative aux approches par modèles discrets (que nous présenterons dans la suite) lorsque les mécanismes agissant au niveau de la microstructure ont un rôle prépondérant sur le comportement macroscopique. Pour les milieux granulaires par exemple, la théorie de Cosserat a été utilisée pour étudier la localisation des déformations (Muhlhaus et Vardoulakis (1987), Vardoulakis et Sulem (1995)) et le comportement des interfaces (Bauer et Huang (2001), De Borst et al. (1993)).

La théorie de Cosserat est utilisée pour décrire le comportement des milieux granulaires non cohérents comme les sables pour lesquels la prise en compte de la rotation des grains à l'intérieur de la bande de cisaillement est importante.

Les relations constitutives d'un milieu micro-polaire élastique linéaire sont définies dans la suite. On considère un corps rigide plan comme présenté sur la figure 2.5. Les lois d'interfaces sont élastiques linéaires.

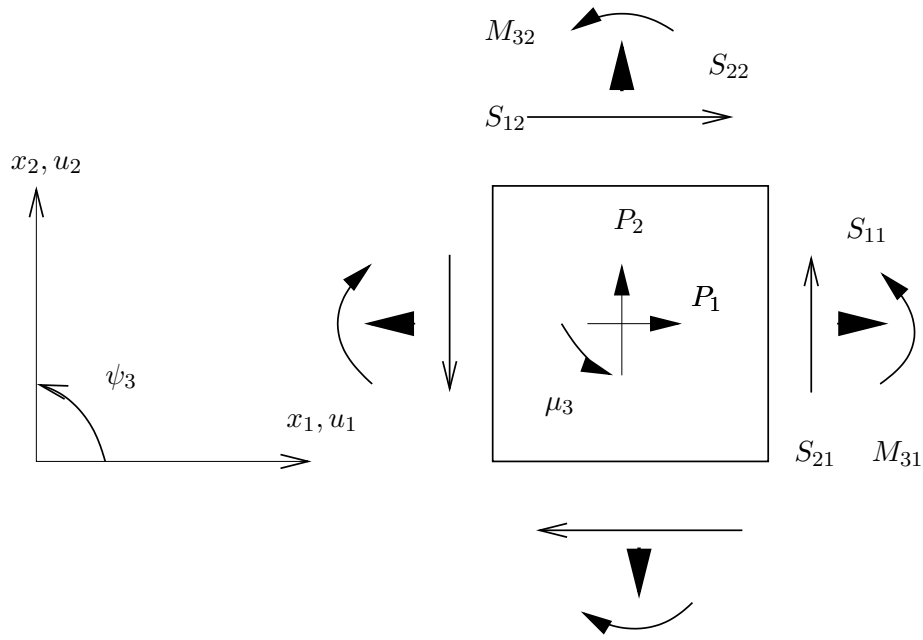


FIG. 2.5 – Milieux de Cosserat. Notations pour le solide plan

Deux déplacements  $\{u_1, u_2\}$  et une rotation  $\psi_3$  sont associés à chaque point.  $S_{\alpha\beta}$  et  $M_{3\alpha}$  sont respectivement les composantes du tenseur effort et du tenseur moment.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= 0 & \text{in } \Omega \\ M_{3\alpha,\alpha} + \epsilon_{3\alpha\beta} S_{\beta\alpha} + \mu_3 &= 0 & \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Et les conditions aux frontières :

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} n_\beta - S_{\alpha\beta} n_\beta &= 0 & \text{on } d\Omega \\ M_{3\alpha} n_\alpha - m_3 &= 0 & \text{on } d\Omega \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Où,  $p_\alpha$  et  $\mu_3$  sont respectivement la force extérieure et le couple appliqués au solide;  $n_1$  et  $n_2$  sont les composantes de la normale extérieure à la frontière  $d\Omega$ ;  $S_\alpha$  et  $m_3$  sont les tractions et les couples pré-définies;  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Le travail virtuel externe, noté  $W_e$  et le travail virtuel interne, noté  $W_i$ , sont définis par :

$$W_e = \int_{\Omega} (p_\alpha u_\alpha + \mu_3 \psi_3) dV + \int_{d\Omega} (S_\alpha u_\alpha + m_3 \psi_3) dA \quad (2.1.7)$$

$$W_i = \int_{\Omega} (S_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + M_{3\alpha} K_{3\alpha}) dV \quad (2.1.8)$$

$W_e = W_i$  et les équations d'équilibre définies par 2.1.5 et 2.1.6 mènent à la définition des tenseurs

de contraintes  $E_{\alpha\beta}$  et  $K_{3\alpha}$  :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= u_{\alpha,\beta} + \epsilon_{3\alpha\beta}\psi_3 \\ K_{3\alpha} &= \psi_{3,\alpha} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Les équations 2.1.9 montrent que les contraintes de cisaillements ne sont pas symétriques car elles sont affectées par la rotation locale  $\psi_3$ . En particulier, pour  $\alpha \neq \beta$ , il faut distinguer "la contrainte symétrique de cisaillement"  $E_s$ , la "macro-rotation"  $E_w$  et la "micro-rotation relative"  $E_\psi$  :

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ E_w &= \frac{1}{2}(-u_{1,2} + u_{2,1}) \\ E_\psi &= E_w - \psi_3 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

D'où,

$$\begin{aligned} E_{12} &= E_s - E_\psi \\ E_{21} &= E_s + E_\psi \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Pour une maçonnerie dont la texture des blocs est périodique, les relations constitutives peuvent être écrites (Trovalusci et Masiani (1999)) :

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\theta} E_{\gamma\theta} \\ M_{3\alpha} &= D_{3\alpha 3\beta} K_{3\beta} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Sulem & al (Sulem et Sab (2002)) présente un modèle continu de Cosserat pour les structures de maçonnerie. L'introduction d'une rotation de Cosserat et de couples de contraintes permet de prendre en compte la rotation individuelle des blocs et leur rigidité en flexion : ils montrent que le domaine de validité de cette homogénéisation est étendu au cas de structures comportant un faible nombre de blocs.

### 2.1.2 Modélisation par un milieu à plusieurs phases : micro-modélisation

Traditionnellement, la maçonnerie est prise comme un milieu hétérogène composée de blocs arrangés régulièrement et séparés par des joints.

Dans l'approche par micro-modélisation, la pierre et le mortier sont modélisés séparément par un milieu continu régi par une loi de comportement appropriée (prenant en compte les paramètres de frottement, raideur, ouverture). L'interface, entre la pierre et le mortier (ou joint de mortier) est représentée, soit par des éléments continus, soit par des éléments discontinus, pouvant eux aussi être régis par une loi de comportement (frottement, raideur, ouverture...). Le modèle micro-mécanique pourra être modélisé par deux ou trois phases (D. Hatzigeorgiou et al. (1999)).

Le modèle à deux phases prend en compte le comportement inélastique et l'anisotropie entre les deux composantes de la maçonnerie (le bloc et le mortier). Le comportement mécanique de l'interface (bloc/mortier) est pris en compte dans la loi d'interface. Le module de Young, le coefficient de Poisson et éventuellement les propriétés inélastiques du mortier et des blocs sont prises en compte. Ces modèles ont été développés dans le cadre de la technique d'homogénéisation en conjonction avec la méthode des éléments finis. De nombreux travaux, dans le cadre de ce modèle à deux phases,

ont été réalisés (Pegon et Anthoine (1997)), (Luciano et Sacco (1998)).

Le modèle à trois phases permet de définir une micro-modélisation plus détaillée. Dans ce type de modèle, les blocs et les joints de mortier sont représentés par des éléments finis et l'interface bloc/mortier est représenté par un élément discontinu. Très souvent, les joints ont été modélisés par des éléments interfaces (Page (1978)).

### 2.1.2.a Approche par homogénéisation périodique

L'homogénéisation périodique est applicable dans le cas d'un assemblage régulier de blocs reliés par une couche de mortier. La seule condition pour pouvoir utiliser une telle approche est d'avoir une certaine périodicité géométrique de la structure.

La technique d'homogénéisation permet d'obtenir "un corps équivalent" (Sanchez-Palencia (1987), M. Suquet (1982)).

Plusieurs techniques d'homogénéisation, basées sur les méthodes micro-mécaniques sont proposées dans la littérature afin d'étudier le comportement linéaire ou non de la maçonnerie. La première approche de l'homogénéisation de la maçonnerie est due à Pande & al, 1989 (Pande et al. (1989)). Ils ont utilisé (Kralj et al. (1991)) la méthode de Mori-Tanaka (Mori et Tanaka (1973)) et la théorie des laminés en deux temps. Initialement, la méthode de Mori-Tanaka a été adoptée pour définir un matériau intermédiaire, obtenu en négligeant la présence des joints horizontaux. La théorie des laminés est ensuite utilisée pour tout homogénéiser. Par sa forme structurelle périodique, sa nature discontinue et ses caractéristiques hétérogènes, Pietruszczak & al (Pietruszczak et Niu (1992)) considèrent la maçonnerie comme un milieu stratifié composé de deux milieux superposés dont l'un est horizontal homogénéisé, et l'autre est un milieu ayant des plans faibles verticaux (les joints verticaux). La procédure d'homogénéisation est donc faite en deux étapes : utilisation de la méthode de Mori et Tanaka, puis la théorie des laminés. L'ensemble est ainsi modélisé en éléments finis par un modèle anisotrope élastofragile.

Afin de surmonter les hypothèses de simplification précédentes, Anthoine (Anthoine (1995)) a proposé une application "rigoureuse" (et non de manière approximative) de la théorie d'homogénéisation pour les milieux périodiques, basée sur l'analyse asymptotique (Bensoussan et al. (1978), Sanchez-Palencia (1980)). En suivant cette approche, la périodicité est caractérisée par la structure de référence et c'est suffisant à définir les caractéristiques mécaniques du milieu sur un petit domaine (cellule), à répéter par translation. L'approche numérique proposée dérivant des coefficients élastiques globaux de la maçonnerie, tient compte de l'élasticité des deux éléments (bloc et mortier) aussi bien que l'épaisseur des joints.

Alpa & al, 1994 (Alpa et Monetto (1994)) ont défini la surface limite admissible dans l'espace des contraintes en représentant une maçonnerie en pierres sèches (joints vifs) comme des blocs ayant du frottement entre eux.

Avec une approche similaire, De Buhan & al (De Buhan et De Felice (1997)) ont utilisé une méthode précédemment développée pour les sols renforcés, pour les massifs rocheux discontinus puis récemment pour les problèmes de maçonnerie. Cette approche est directement applicable aux cas où la rupture des blocs doit aussi être prise en compte dans l'analyse. La technique d'homogénéisation est basée sur l'homogénéisation des milieux périodiques hétérogènes et permet de construire un critère de rupture macroscopique pour les maçonneries considérées comme un assemblage de blocs séparés par des interfaces. Ce critère montre les caractéristiques anisotropes du milieu équivalent, dues aux orientations préférentielles des joints.



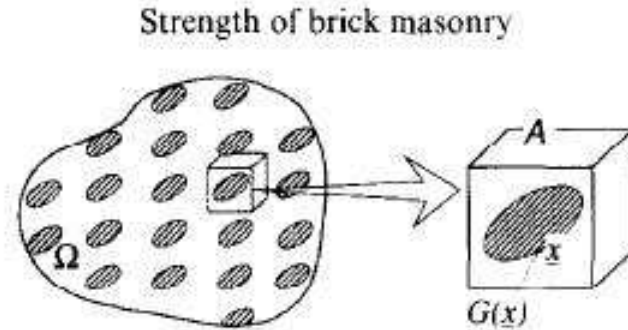


FIG. 2.6 – Matériau hétérogène périodique et définition du V.E.R, De Buhan & al (De Buhan et De Felice (1997))

D'après Luciano & al (Luciano et Sacco (1997)), le modèle micro-mécanique d'endommagement peut être énuméré en trois étapes :

- définition de la géométrie de la microstructure (volume élémentaire représentatif V.E.R),
- définition d'une loi cinétique fragile,
- Estimation du comportement non-linéaire global en utilisant une approche micro-mécanique par homogénéisation (V.E.R) (figure 2.6).

Les hypothèses posées par Luciano et Sacco sont les suivantes :

- les fissures n'ont lieu que dans le mortier de façon élasto-fragile,
- les briques sont indéfiniment élastiques,
- la raideur du mortier est faible, les fissures peuvent se développer seulement verticalement ou horizontalement,
- quand une fissure commence à se développer, on admet que le joint correspondant est complètement fissuré (figure 2.7).

A partir de ces huit états d'endommagements possibles, ils définissent les six chemins qui amènent la structure de l'état (S1) à l'état (S8). Le but de leur modèle est de déterminer les modules élastiques des six milieux homogénéisés équivalents. Les auteurs montrent l'importance des conditions aux limites sur les résultats trouvés.

Les approches précédentes sont basées sur l'hypothèse périodique de la structure : ceci implique une maçonnerie constituée par des blocs réguliers, des dimensions fixes, un joint de mortier uniforme. Le modèle est constitué donc d'un arrangement de brique et d'un joint de mortier périodique. Ces

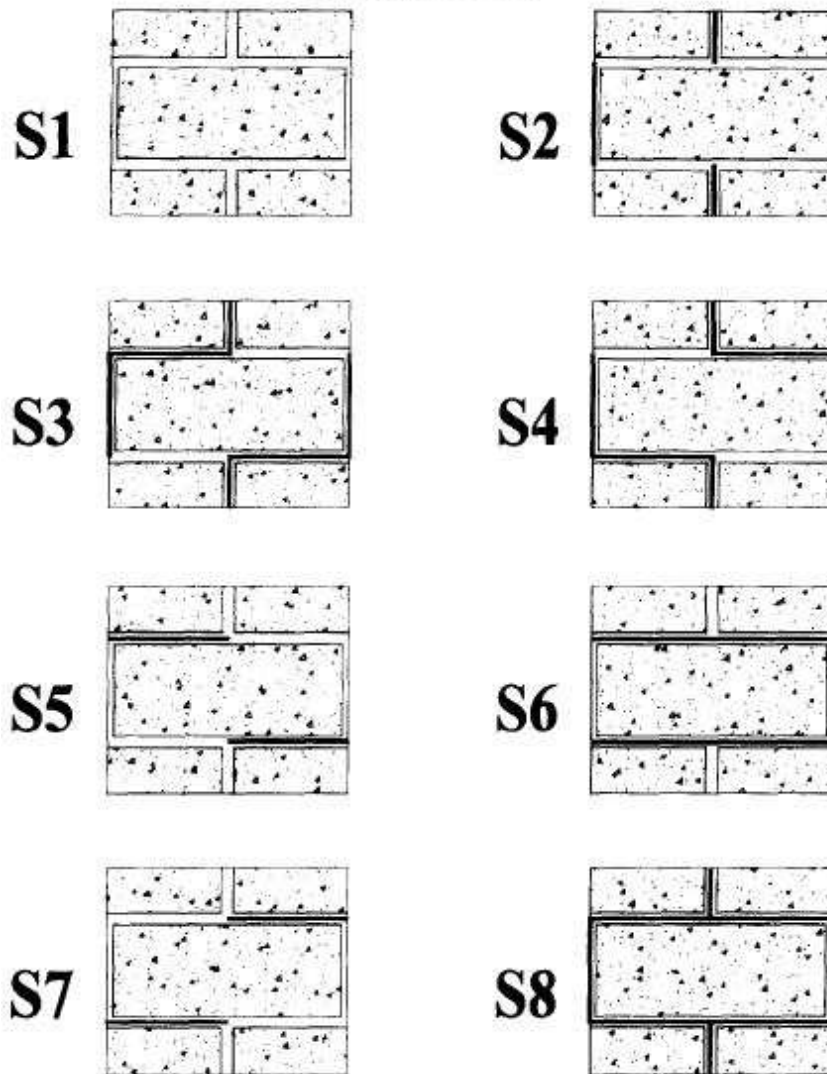


FIG. 2.7 – Différents endommagements possibles dans les maçonneries, Luciano & al (Luciano et Sacco (1997))

dispositifs peuvent être seulement suivis dans une maçonnerie récente.

L'analyse d'une maçonnerie ancienne permet de constater qu'elle est constituée par des blocs de différentes dimensions, arrangés dans un modèle non-périodique. De plus, le joint a une épaisseur de mortier différent. Afin d'appliquer la théorie d'homogénéisation à ce type de maçonnerie, il est nécessaire d'employer une approche différente.

- **Volume élémentaire représentatif V.E.R**

Le concept de la cellule périodique est remplacé ici par celui de l'élément de volume élémentaire représentatif (VER). Il est défini comme une partie du matériau composite avec les dispositifs suivants (Aboudi (1991), Christensen (1980)) :

- la structure présente un nombre suffisant de blocs,
- la taille des blocs reste négligeable devant les dimensions globales de la structure.

Si la structure est sous un état homogène c'est-à-dire avec une répartition uniforme des contraintes, alors toutes les parties de la structure subissent les mêmes conditions de charges. L'idée est donc de définir des champs de contraintes, de déformations et un domaine de résistance macroscopique d'un milieu homogène équivalent à la structure globale.

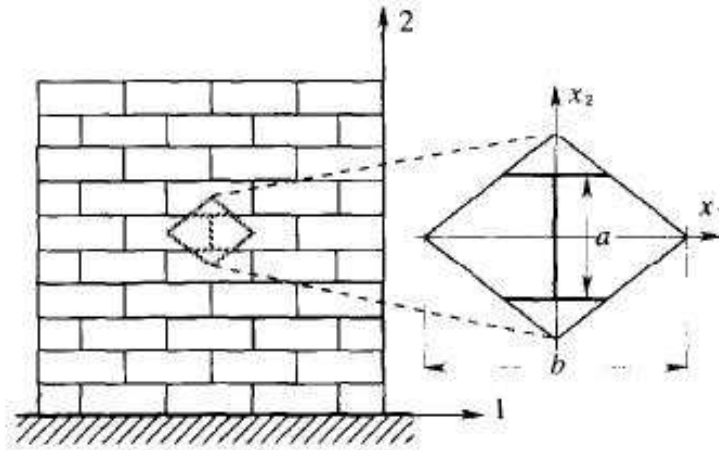


FIG. 2.8 – Volume élémentaire représentatif dans le cas des maçonneries, De Buhan & al (De Buhan et De Felice (1997))

Les propriétés du milieu homogène peuvent être définies par la mise en place d'un VER (figure 2.8) : en détail, une relation entre les valeurs moyennes des contraintes et de déformations est établie. Ces valeurs moyennes valent :

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Ces propriétés peuvent être définies en appliquant différentes conditions aux limites du VER :

- en termes de déplacement  $u_i$ ,

$$u_i = \epsilon_{ij}^{\circ} x_j\tag{2.1.14}$$

Où  $\epsilon_{ij}^{\circ}$  sont les déformations constantes et  $x_j$  les coordonnées du point.

- en termes de contraintes  $t_i$ ,

$$t_i = \sigma_{ij}^{\circ} n_j\tag{2.1.15}$$

Où  $\sigma_{ij}^{\circ}$  sont les contraintes constantes et  $n_j$  les composantes du vecteur normal à la frontière.

Les valeurs moyennes des déformations, dans les conditions de l'équation 2.1.14 sont :  $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^{\circ}$ . Les valeurs moyennes des contraintes dans les conditions de l'équation 2.1.15 sont :  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ}$ . Il est possible de trouver les valeurs moyennes des contraintes dans les conditions de l'équation 2.1.14 et les valeurs moyennes des déformations dans les conditions de l'équation 2.1.15 telles que :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= S_{ijkl}\bar{\sigma}_{kl}\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Où,  $C_{ijkl}$  est une raideur élastique constante et  $S_{ijkl}$  est la compliance élastique.

Pour un matériau composé de deux phases (bloc et mortier), comme une maçonnerie, les expressions de contraintes moyennes et de déformations moyennes sont définies par :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= c_1\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + c_2\bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= c_1\bar{\epsilon}_{ij}^{(1)} + c_2\bar{\epsilon}_{ij}^{(2)}\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

Où,  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement des concentrations partielles par volume des phases 1 et 2,  $c_1 + c_2 = 1$ . En écrivant les relations entre les contraintes et les déformations dans les phases comme :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)} &= C_{ijkl}^{(1)}\epsilon_{kl}^{(1)} ; \epsilon_{ij}^{(1)} = S_{ijkl}^{(1)}\sigma_{kl}^{(1)} \\ \sigma_{ij}^{(2)} &= C_{ijkl}^{(2)}\epsilon_{kl}^{(2)} ; \epsilon_{ij}^{(2)} = S_{ijkl}^{(2)}\sigma_{kl}^{(2)}\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

les relations suivantes entre les contraintes moyennes globales et les déformations moyennes globales dans les deux phases peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= c_1C_{ijkl}^{(1)}\bar{\epsilon}_{kl}^{(1)} + c_2C_{ijkl}^{(2)}\bar{\epsilon}_{kl}^{(2)} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= c_1S_{ijkl}^{(1)}\bar{\sigma}_{kl}^{(1)} + c_2S_{ijkl}^{(2)}\bar{\sigma}_{kl}^{(2)}\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

On peut donc déduire les relations entre les moyennes sur une seule phase et la moyenne globale comme ceci :

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ij}^{(1)} &= A_{ijkl}^{(1)}\bar{\epsilon}_{kl} ; \bar{\epsilon}_{ij}^{(2)} = A_{ijkl}^{(2)}\bar{\epsilon}_{kl} \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} &= B_{ijkl}^{(1)}\bar{\sigma}_{kl} ; \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = B_{ijkl}^{(2)}\bar{\sigma}_{kl}\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

Les termes  $A^{(1)}, A^{(2)}, B^{(1)}, B^{(2)}$  sont des matrices, où  $c_1A^{(1)} + c_2A^{(2)} = I$  et  $c_1B^{(1)} + c_2B^{(2)} = I$ .  $I$  étant la matrice identité.

Pour les maçonneries en grand appareil (pont Julien, aqueduc d'Arles), il est difficile de définir un VER qui reflètent le comportement mécanique de la structure globale.

### 2.1.2.b La méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets MED a été développée initialement par Cundall (Cundall (1971)) pour traiter des problèmes de mécanique des roches. Cette méthode permet de simuler le comportement des matériaux granulaires par un ensemble de particules interagissant entre elles au niveau

de leurs points de contact. Ce principe de simulation discrète permet, au niveau macroscopique, des déformations ainsi que des discontinuités au sein du modèle (ce qui n'est pas le cas de la méthode des éléments finis MEF).

Des mécanismes de rupture complexes ou des mouvements relatifs très importants de part et d'autre d'une interface sont ainsi envisageables. La modélisation à l'échelle granulaire est conditionnée par des lois locales de comportement et de contact empêchant l'introduction directe des lois de comportement telles qu'elles sont définies par la mécanique des milieux continus. Un changement d'échelle est alors nécessaire pour passer des paramètres géotechniques mesurables (frottement, cohésion...) aux paramètres du modèle numérique. L'application de cette méthode à un problème physique spécifique, elle nécessite donc une phase initiale de calibrage. Le comportement global restitué par un ensemble de particules granulaires est fonction de l'arrangement des particules entre elles (distribution granulaire, imbrication et porosité) et des caractéristiques de contact (loi de comportement des contacts). D'une simulation à l'autre, une procédure rigoureuse de mise en place des particules du modèle doit être scrupuleusement suivie pour contrôler très précisément la répartition et l'arrangement des particules. Le calage entre les paramètres micromécaniques et les paramètres géophysiques est établi par des simulations numériques et expérimentales d'essais de laboratoire réalisés dans des conditions contrôlées (essais biaxiaux, essais de cisaillement...).

La méthode des éléments discrets est utilisée dans de nombreux domaines en statique et en dynamique (sable, roches, grains dans des silos, etc.). On détaillera dans la suite la méthode des éléments discrets.

## 2.2 Choix de la méthode de modélisation

De nombreux ouvrages de génie civil sont des structures maçonnées. Généralement, ces structures sont étudiées comme des milieux continus. La méthode des éléments finis non linéaires n'est pas toujours capable de décrire tous les phénomènes pouvant se produire dans ce type de structure, par exemple les maçonneries en grand appareil où la discontinuité physique est évidente. De plus, les modèles continus présentent une grande faiblesse face à la description de la dynamique des structures maçonnées en raison du comportement discontinu des joints entre blocs (figure 2.9).



FIG. 2.9 – Façade du Colisée à Rome

Ces structures en grand appareil peuvent être considérées comme une collection de corps rigides ou déformables entre lesquels des relations d'interaction de contact avec frottement sont susceptibles de s'établir ou de se rompre. La modélisation par les méthodes par éléments discrets (MED) est basée sur le traitement à l'échelle locale des contacts et à l'échelle globale des lois de la dynamique. Les vitesses et les réactions sont déterminées localement, puis remontées à une échelle globale, celle de la structure. A cette échelle, on obtient des informations sur le comportement macroscopique : contrainte moyenne, compacité, déformation sur un volume donné (Chetouane et al. (2003)). Les modes de construction (faces de blocs planes, blocs montés à sec) ainsi que les faciès de ruine ne permettent pas de considérer les ouvrages étudiés comme continus ( voir figures 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12).



FIG. 2.10 – Vue générale de l'aqueduc d'Arles et de l'aqueduc des moulins, au vallon des Arcs, à Fontvieille.

L'approvisionnement en eau de la ville d'Arles a nécessité, au  $I^{er}$  avant J.C, la construction d'un aqueduc, aqueduc d'Arles en grand appareil, pour franchir le vallon des Arcs.

A la suite de la construction d'un deuxième aqueduc, à l'Est, dit aqueduc de Barbegal, alimentant une meunerie industrielle, il semble que le premier aqueduc d'Arles (2.10) ait été ruiné. Un deuxième aqueduc a été reconstruit sur les piles du premier, en utilisant une technique de petit appareillage en façade et une maçonnerie de blocage à l'intérieur de la structure supérieure de l'ouvrage comme schématisé figure 2.11.



FIG. 2.11 – Modèle des maçonneries en grand appareil en partie inférieure, et en petit appareil et maçonnerie de blocage en partie supérieure, du deuxième aqueduc d'Arles, au vallon des Arcs, à Fontvieille (Cotte et al. (2001))

Dans le cadre des études entreprises sous l'impulsion de la Direction Régionale des Affaires Culturelles de la région Languedoc Roussillon, concernant les arènes de Nîmes (figure 2.12), il est apparu nécessaire de modéliser le bâtiment de façon à obtenir des plans de coupe, de recollement d'interventions et des indications réalistes en termes de masses de maçonneries mises en oeuvre, descentes de charges, suivis des pathologies, etc. . La relative complexité de la géométrie (figure 2.12), réellement tridimensionnelle de l'édifice, l'agencement particulier des blocs de pierre utilisés pour la partie la plus externe de l'édifice (galeries extérieures, et de l'attique), les techniques de construction des arcs de décharge en façade, et des linteaux de la galerie extérieure du premier étage ne sont évidemment pas prises en compte dans un modèle continu élastique.

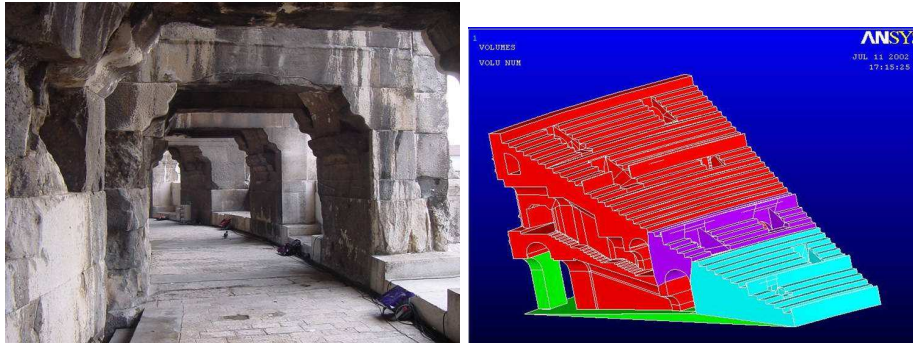


FIG. 2.12 – Photo de gauche : Vue partielle des arènes de Nîmes, détail de maçonneries en grand appareil. Photo de droite : Arènes de Nîmes. Exemple de géométrie modélisée.

- **Logiciel de calcul éléments finis**

Il existe de nombreux logiciels d'éléments finis (ELFEN, STRAND, LUSAS, ABAQUS, STRAUS, DIANA, ANSYS, CASTEM). Ces logiciels peuvent traiter de nombreux problèmes physiques. Cependant, jusqu'à présent ces logiciels EF n'ont pas eu la puissance de modéliser une structure de maçonnerie en détail.

## 2.3 Généralités sur les méthodes par éléments discrets

Jean & al (Jean et Cambou (2001)) proposent une classification de méthodes de résolution en deux principales catégories :

- les méthodes smooth, pour laquelle les lois d'interaction entre particules sont des fonctions continues et dérivables,
- les méthodes non-smooth, pour laquelle les lois d'interactions entre grains sont régies par des lois de chocs, à seuils, entraînant des sauts de vitesses et des seuils de forces.

### 2.3.1 Méthodes smooth

Les méthodes smooth considèrent des interactions continues et dérivables entre particules, décrites par des fonctions (interstices et vitesses relatives) régulières. On cite deux exemples de cette méthode :

- la **Dynamique Moléculaire DM**, initialement mise en oeuvre pour des bulles de gaz et qui

s'est par la suite complexifiée (considère des particules sphériques). Cette approche a fait l'objet d'extension afin de modéliser l'écoulement de fluide contenant également des particules solides (Leonenko et Vinogradoc (2001)),

- la **Méthode des Éléments Distincts MED** de Cundall est basée sur la seconde loi de Newton (loi de la dynamique) et une loi force-déplacement appliquée aux contacts. La loi de Newton décrit le mouvement d'une particule sous l'effet des forces qui lui sont appliquées. La loi force-déplacement est utilisée pour trouver la force de contact à partir de l'interpénétration, elle-même calculée explicitement à partir des conditions initiales au début du pas de temps. L'interaction entre les particules est régie par des analogies à des ressorts et des amortisseurs, à réponse linéaire ou non.

En 1971, Cundall développe la première méthode numérique dédiée à la simulation des milieux discrets afin de traiter des problèmes de la mécanique des roches (Cundall (1971)). Cette approche est reprise à la fin des années 1970 par Cundall & Strack (Cundall et Strack (1979)) afin de l'appliquer à la mécanique des sols.

L'ensemble des programmes développés est rassemblé dans un code de calcul UDEC (Universal Distinct Element Code) dont les spécificités sont :

- la possibilité d'associer dans le même calcul des blocs rigides et déformables,
- la possibilité d'engendrer un champ de fracture.

Cundall a aussi développé une formulation tridimensionnelle 3DEC (ITASCA (2007)); cette formulation est basée sur un algorithme par pas de temps explicite qui permet la prise en compte de grands déplacements, de rotations et d'un comportement constitutif non-linéaire général, à la fois pour la matrice rocheuse et pour les joints. La résolution des équations de la dynamique utilise une méthode de différence finie explicite. Les particules sont autorisées à s'interpénétrer et l'intensité de cette interpénétration est directement reliée à la force de contact. Il est important de signaler que ces interpénétrations sont négligeables devant les dimensions des particules.

Le principe fondamental de la dynamique est défini comme suit pour une particule de masse  $m$  :

$$m\ddot{x}_i = F_i + F_i^a \text{ et } I\dot{w}_i = M_i - \alpha I w_i \quad (2.3.1)$$

Avec,

$F_i^a$  : la force d'amortissement définie comme étant une fraction de la somme des forces subies par la particule,

$I$  : moment d'inertie de la particule,

$w_i$  : rotation de la particule,

$\ddot{x}_i$  : accélération de la particule,

$\alpha$  : viscosité,

$M_i$  : moment résultant.

C'est grâce à cette hypothèse d'amortissement virtuel que des milieux soumis à une déformation quasi-statique sont correctement représentés par ce code de calcul basé sur des considérations dynamiques.

### • Pas de temps

Du fait de la nature explicite de l'algorithme de résolution numérique et de la modélisation des réactions de contact, la stabilité de la MED est conditionnée par le pas de temps de discrétisation  $\delta t$ . Le pas de temps critique dépend des propriétés mécaniques des grains. Les interactions entre grains peuvent en première approximation être assimilées à un système masse-ressort. Une condition nécessaire sur  $\delta t$  est que la vitesse de propagation de l'onde numérique soit supérieure



à celle de l'onde élastique. En d'autres termes, le pas de temps doit être suffisamment petit pour que les perturbations dues au mouvement d'une particule restent locales, c'est-à-dire cantonnées à son voisinage immédiat. Le pas de temps doit être une fraction de la période propre d'oscillation du système. La valeur critique du pas de temps est calculée pour chaque degré de liberté de chaque particule :

$$\Delta t_{crit} = \min\left[\sqrt{\frac{m}{k_{tran}^i}}, \sqrt{\frac{I}{k_{rot}^i}}\right] \quad (2.3.2)$$

Avec,

$m$  est la masse de la particule,

$I$  son sommet d'inertie (particule sphérique),

$k_{tran}^i$  et  $k_{rot}^i$  sont les raideurs de translation et de rotation de la particule.

Il apparaît que pour minimiser le temps de calcul, c'est-à-dire augmenter le pas de temps, il est préférable soit de définir des raideurs de contact faible, soit de définir des masses importantes pour les particules. Les raideurs de contact sont fonction du matériau pris en compte, d'autre part, il est nécessaire que la raideur ne soit pas trop faible afin d'éviter des interpénétrations au contact trop importante vis-à-vis des dimensions des particules.

### • Modèles d'interaction

Le code de calcul de Cundall possède deux lois de contact élastique :

- un contact élastique linéaire,

- un contact élastique non linéaire de type contact de Hertz-Mindlin.

Il est possible d'intégrer d'autres types de loi en programmation C++.

### • Loi de contact élastique linéaire

Le contact linéaire élastique relie la force de contact aux interpénétrations (figure 2.13). Ainsi, les forces normales et tangentielles au contact sont définies par :

$$F_i^n = K^n U^n n_i \text{ et } \delta F_i^t = -K^t \delta U_i^t \quad (2.3.3)$$

Avec,

$U^n$  : interpénétration au contact,

$\delta U_i^t$  : incrément de déplacement tangentiel,

$K^t$  : la raideur tangente au contact,

$K^n$  : la raideur normale au contact.

Les raideurs de contact sont fonction des raideurs définies pour les deux particules a et b en contact telles que :

$$K^n = \frac{k_a^n k_b^n}{k_a^n + k_b^n} \text{ et } K^s = \frac{k_a^s k_b^s}{k_a^s + k_b^s} \quad (2.3.4)$$

Il est à noter que :

- pour des particules présentant la même raideur, la raideur de contact est la moitié de la raideur définie pour chaque particule,

- dans le cas d'un contact d'une particule avec un plan, les mêmes relations sont appliquées avec

$K_{mur}^n$  et  $K_{mur}^s$  en lieu et place de  $k_b$ .

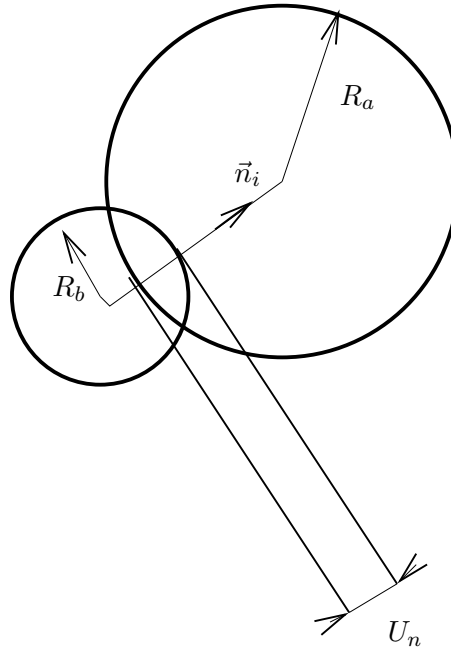


FIG. 2.13 – Loi de contact élastique linéaire. Contact entre deux particules

• **Loi de contact élastique non-linéaire : Hertz-Mindlin**

La loi de contact non-linéaire a la même expression que la loi linéaire, les expressions 2.3.3 sont appliquées. En revanche, les expressions des raideurs normales et tangentielles au contact sont directement liées aux caractéristiques physiques et dimensions des particules en contact par les relations suivantes :

$$K^n = \frac{2G\sqrt{2R}}{3(1-\mu)}\sqrt{U^n} \text{ et } K^t = \frac{2(3RG^2(1-\mu))^{1/3}}{2-\mu}|F^n|^{1/3} \quad (2.3.5)$$

Avec,

$G$  : module de cisaillement moyen des particules a et b en contact,

$$G = \frac{(G_a + G_b)}{2} \quad (2.3.6)$$

$\mu$  : le coefficient de Poisson moyen des particules a et b en contact,

$$\mu = \frac{(\mu_a + \mu_b)}{2} \quad (2.3.7)$$

$R$  : est fonction de la taille des deux particules ( $R_a$  et  $R_b$ )

$$R = \frac{(2R_a R_b)}{R_a + R_b} \quad (2.3.8)$$

Dans le cas de contact avec un plan, seul le rayon de la particule, son coefficient de Poisson et son module de cisaillement sont pris en compte.

Il est à noter que :

- ce type de contact n'est défini que pour des particules sphériques,
- la mise en place de ce type de contact est grandement consommateur de temps de calcul.

### • Modèle de frottement de type Coulomb

Le frottement entre deux éléments est décrit de manière à limiter la valeur atteinte par la force tangentielle de contact suivant le critère de Coulomb. La force tangentielle au contact ne peut être supérieure à  $F_{max}^t$  dépendant linéairement de la force normale au contact.

$$F^t \leq F_{max}^t = \mu |F^n| \quad (2.3.9)$$

## 2.3.2 Méthodes non-smooth

Les méthodes non-smooth (Contact Dynamics CD) consistent à utiliser des lois d'interaction entre grains, non nécessairement régulières, c'est-à-dire faisant intervenir des sauts de vitesse ou des lois à seuils. Il s'agit principalement de la méthode Non Smooth Contact Dynamics initiée et développée par Moreau (Moreau (1988), Moreau (1994), Moreau (1997), Moreau (2000)) et Jean (Jean (1993), Jean (1999)) (Jean et J. Moreau (1992), Jean et Cambou (2001)). Elle est parfaitement adaptée pour simuler le comportement et l'évolution dynamique d'un ensemble de particules rigides de tailles différentes, ayant une géométrie convexe interagissant par contact. En effet, elle permet par son schéma numérique implicite de prendre en compte les éventuels chocs et les irrégularités qui peuvent en découler. Les actions inter granulaires de contact frottant sont décrites par des conditions unilatérales (loi de Signorini), du frottement de Coulomb et des lois de chocs élastiques et inélastiques. D'autres lois, telles que le comportement cohésif entre blocs, avec une limite de résistance au cisaillement admissible entre les blocs ont été expérimentées.

Numériquement, la méthode NSCD est implémentée dans le code de calcul LMGC90<sup>1</sup> ; contrairement à la méthode de Cundall, cette méthode ne tolère aucune interpénétration entre les grains, sauf erreur numérique.

Le schéma de résolution est basé sur le principe fondamental de la dynamique, il est ainsi nécessaire de déterminer les vitesses et forces de contact pour chaque contact chaque cycle de calcul. Cette résolution est réalisée de manière implicite par convergence d'un algorithme itératif (pour chaque contact, les solutions sont déterminées en faisant l'hypothèse des valeurs pour les autres contacts).

### • Pas de temps

Pour gérer l'évolution en temps dans le cas non-régulier, deux approches sont possibles (Moreau (1999a)) :

-méthode dite Event-Driven : qui consiste à identifier au cours de l'évolution du système les instants de transition comme par exemple l'apparition (choc) ou la disparition (décollement) d'un contact (partie non-régulière du mouvement) et à déterminer les intervalles de temps au cours desquels les

---

<sup>1</sup>LMGC90 est un logiciel de mécanique gérant le contact, développé par M. Jean et F. Dubois à l'université MontpellierII, basé sur la méthode NSCD initiée par Moreau et Jean (Dubois et Jean (2003))

statuts des contacts ne varient pas (partie régulière). Ces instants de transition délimitent donc des intervalles de temps : le mouvement du système est régulier. Cette technique est efficace dans le cas où le nombre global de transitions survenant pendant l'évolution du système n'est pas trop grand et permet l'utilisation de méthodes d'intégration d'ordre élevé fournissant des résultats précis et donnant la possibilité de se déplacer rapidement entre les transitions. Cependant, lorsque le nombre de contact devient trop grand, cette méthode est inutilisable (le temps entre deux événements non-réguliers est trop petit),

-méthode dite de Time-Stepping (pas à pas) : le découpage en temps est fixé de manière arbitraire et non nécessairement constant. La méthode est capable d'intégrer les équations du mouvement au cours d'un pas de temps donné. Dans ce cas, l'ordre de l'intégrateur est nécessairement faible.

La méthode de Time-stepping est la mieux adaptée pour aborder le problème de discontinuités temporelles.

### 2.3.3 Conclusions sur les méthodes smooth et non smooth

#### **Pour la méthode de Cundall**

Les inconvénients de cette méthode, dans le cadre particulier des maçonneries, tiennent pour la plupart aux choix qui sont faits pour privilégier l'efficacité numérique :

- inconvénients des schémas explicites d'intégration des équations de Newton-Euler : les résultats des schémas explicites sont entachés de bruits générés par des artefacts numériques, l'interprétation des résultats devenant ainsi très difficile,
- pertinence des lois de contact : la régularisation des lois de contact oblige à définir des paramètres supplémentaires comme les raideurs normales et tangentielles qui ne sont pas disponibles expérimentalement,
- sensibilité aux méthodes de régularisation : que ce soit pour obtenir la convergence du système vers un état d'équilibre ou pour "adoucir" la raideur du système, l'effet de l'introduction d'une rigidité, ou d'une viscosité, artificielle est souvent mal maîtrisée,
- nombre de solides plus limité qu'avec la méthode NSCD, temps de calcul plus grand.

Ces inconvénients contribuent à la dégradation de la fiabilité des résultats et l'on constate alors que si l'efficacité numérique de cette méthode constitue un avantage majeur, son coût en terme de perte de qualité des résultats est élevé.

#### **Pour la méthode NSCD**

L'étude du comportement d'un ouvrage soumis à diverses sollicitations nécessite la prise en compte de plusieurs milliers de blocs. Le système à étudier sera le plus souvent compact, le nombre de contact pourra être important. Nous adopterons, dans l'ensemble de nos modélisations, l'approche par la méthode dite de "time stepping". Dans cette méthode, le découpage en temps est fixé de manière arbitraire et non nécessairement constant.

La méthode NSCD nous est apparue plus adaptée que la méthode de Cundall en raison de la possibilité d'utiliser des pas de temps plus importants pour la résolution numérique. De plus, on montre, par la suite, notre contribution de son adaptation au cas des contacts plans, prépondérants dans le domaine particulier des maçonneries. On présente cette méthode avec ses caractéristiques.

## 2.4 Modélisation discrète des maçonneries

### 2.4.1 Relations de contact frottant

#### 2.4.1.a Condition de Signorini

La condition unilatérale de Signorini est une loi non-régulière. Les principaux caractères de l'unilatéralité sont :

- \* Elle consiste à exprimer la non-interpénétration entre deux corps : l'interstice  $g_N$  (distance entre deux corps) doit rester positif ( $g_N \geq 0$ ) :
  - Si le contact est établi, on a  $g_N = 0$  et la réaction qui permet d'assurer la liaison peut satisfaire diverses lois (telle que la cohésion ou l'adhésion), prendre  $R_N \geq 0$  exclut ces phénomènes.
  - S'il n'y a pas contact, alors  $g_N > 0$  et la réaction normale  $R_N$  est nulle ( $R_N = 0$ ).
- \* On suppose que le corps n'exerce pas d'attraction : la réaction normale doit rester positive :  $R_N \geq 0$

Ces conditions se traduisent par une relation de complémentarité (ou relation de Signorini) donnée par :

$$g_N \geq 0, \quad R_N \geq 0, \quad g_N R_N = 0 \quad (2.4.1)$$

J.J.Moreau a établi la formulation équivalente à 2.4.1 en vitesse :

$$\begin{aligned} g_N(t_0) &\geq 0 \quad \text{au temps initial } t_0 \\ g_N(t) \leq 0 &\Rightarrow U_N^+ \geq 0, \quad R_N(t) \geq 0, \quad U_N^+(t)R_N(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

La relation 2.4.2 est complétée par la relation  $g_N(t) > 0 \Rightarrow R_N(t) = 0$

Si  $U$  existe (mouvement assez régulier) et  $R_N$  est une fonction continue du temps alors la condition de Signorini exprimée en (2.4.1) est équivalente à la formulation en vitesse donnée en (2.4.2). Le graphe des relations est représenté sur la figure 2.14.

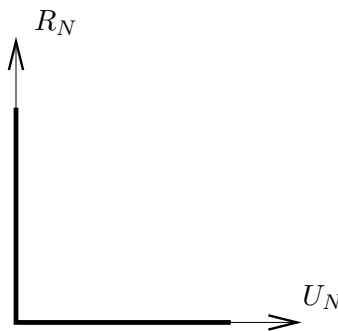


FIG. 2.14 – Graphe de la condition de Signorini

On pourra résumer la condition de Signorini sous la forme :

$$\text{Signor}(U_N, R_N) \quad (2.4.3)$$

### 2.4.1.b Loi de frottement

La loi de frottement utilisée dans les maçonneries à joints vifs est celle de Coulomb. En effet, en général, on est dans la configuration où le contact entre les blocs est de type frottement sec. Elle implique une relation reliant la force de frottement  $R_T$  à la vitesse de glissement  $U_T$  pour exprimer la résistance au glissement tangentiel.

Elle est déterminée par la relation suivante :

$$\begin{cases} U_T = 0, & \|R_T\| < \mu R_N & \text{(Non glissement)} \\ U_T = -\lambda \frac{R_T}{\|R_T\|}, & \|R_T\| = \mu R_N & \text{(Glissement)} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Dans la première relation, la composante normale  $R_N$  de la réaction  $R$  est considérée comme positive (à cause de l'unilatéralité) et  $\mu$  représente le coefficient de frottement. Elle indique de plus que la réaction  $R$  telle que  $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$  reste dans un cône appelé cône de Coulomb.

Concernant la deuxième relation, on remarque que si un glissement se produit, c'est-à-dire la vitesse tangentielle  $U_T \neq 0$ , alors la réaction tangentielle ou force de frottement s'oppose au glissement.

Le graphe de la loi de Coulomb est représenté sur la figure 2.15.

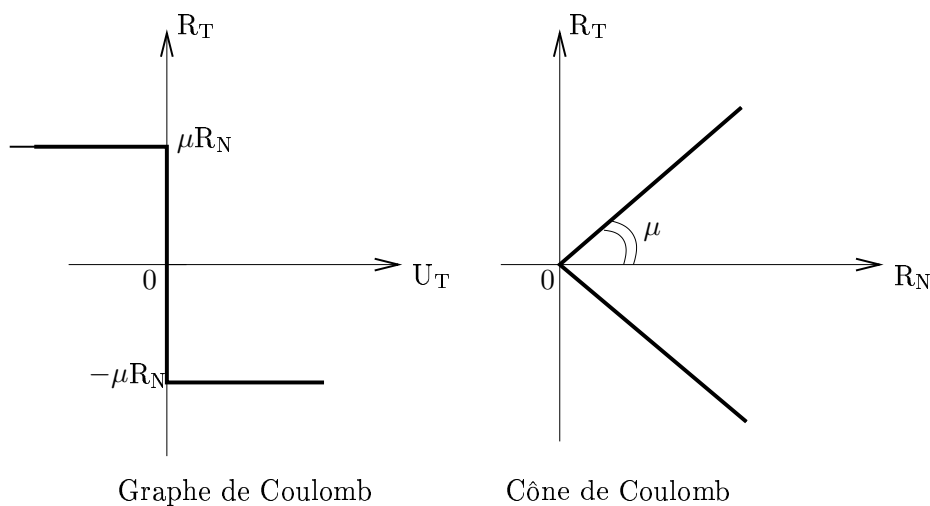


FIG. 2.15 – Graphe de la loi de Coulomb

En cas de glissement, la force de frottement  $R_T$  est proportionnelle à la réaction normale  $R_N$ .

### 2.4.2 Description du mouvement d'un corps en présence de "contacts"

Pour un corps rigide, l'équation se réduit à dire que le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs et de contacts. Le système différentiel à résoudre est celui de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\dot{u} = P(t) + r \\ I\dot{w} = -w \wedge (Iw) + M_{p(t)} + M_r \end{cases} \quad (2.4.5)$$

où  $u$  est la vitesse du centre de masse,  $w$  la vitesse angulaire autour du centre d'inertie,  $\dot{w}$  la dérivée du vecteur vitesse dans le repère lié au solide,  $P(t)$  et  $M_{p(t)}$  sont respectivement la résultante et le moment résultant au centre de masse des efforts appliqués.  $r$  et  $M_r$  sont respectivement la résultante et le moment résultant au centre de masse des efforts de contact,  $m$  et  $I$  sont respectivement les matrices de masse et d'inertie.

Le terme  $-w \wedge (Iw)$ , à priori non-linéaire, est nul dans le cas 2D et en 3D lorsque le corps est géométriquement isotrope (symétrie sphérique).

Les équations de la dynamique pour un corps en présence de contact (mais en l'absence d'évènement non-régulier : chocs) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(q)\dot{u} &= \mathbb{F}(q, u, t) + \mathbb{P}(t) + \mathbb{R} \\ &+ \text{Conditions initiales et conditions aux limites} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  sont des variables de Lagrange généralisées (les déplacements des noeuds pour un corps déformable ou le déplacement et la rotation du centre de gravité d'un corps rigide),  $u \in \mathbb{R}^n$  le vecteur vitesse et  $\mathbb{R} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des contributions des efforts de contact (réactions de contact). Le vecteur  $\mathbb{F}(q, u, t)$  représente les termes gyroscopiques et centrifuges et le vecteur  $\mathbb{P}(t)$  l'ensemble des forces extérieures explicitement connues. Enfin  $\mathbb{M}(q) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}^{n \times n}$  est la matrice d'inertie.

#### 2.4.2.a Intégration temporelle

Les interactions entre corps sont susceptibles de générer des discontinuités sur les vitesses. On cherche à obtenir une solution discrète des équations de la dynamique.

Pour tout  $\tau$  et  $t$  dans  $]0, T]$ , la vitesse  $u$  est considérée intégrable sur l'intervalle  $[\tau, t]$  et reliée à  $q$  par la relation suivante :

$$q(t) = q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \quad (2.4.7)$$

Pour gérer l'évolution en temps dans le cas non-régulier, l'approche par la méthode dite de Time-stepping (pas à pas) est la mieux adaptée : le découpage en temps est fixé de manière arbitraire et non nécessairement constant. La méthode est capable d'intégrer les équations du mouvement au cours d'un pas de temps donné. Dans ce cas, l'ordre de l'intégrateur est nécessairement faible.

### 2.4.2.b Intégration de la dynamique non-régulière

En présence de chocs entre les particules (discontinuités en vitesse), les dérivées doivent être interprétées au sens des distributions. Le découpage est adapté à l'évolution des événements.

#### Ecriture en termes de mesures différentielles

On considère des pas de temps  $]t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h = t_{i+1} - t_i$ . En intégrant les deux membres de l'équation 2.4.5 sur l'intervalle de temps  $]t_i, t_{i+1}]$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(u(t_{i+1}) - u(t_i)) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t)dt + \int_{]t_i, t_{i+1}] } r d\nu \\ q(t) &= q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

L'impulsion moyenne

$$r(i+1) = \frac{1}{h} \int_{]t_i, t_{i+1}] } r d\nu \quad (2.4.9)$$

apparaît comme une inconnue naturelle.

On réalise maintenant une intégration implicite des termes supposés continus par une  $\theta$ -méthode avec  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ , pour :

- $\theta = 1$ , on retrouve le schéma d'Euler implicite.

En notant le pas de temps  $h = t_{i+1} - t_i$ , on a la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(u_{i+1} - u_i) &= h[(1 - \theta)P_i + \theta P_{i+1}] + hr_{i+1} \\ q_{i+1} - q_i &= h[(1 - \theta)u_i + \theta u_{i+1}] \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

### 2.4.2.c Discrétisation des relations de passage entre variables locales et globales

D'après le système d'équations 2.4.10, les variables cinématiques en fin de pas (c'est-à-dire éventuellement après le choc) et l'impulsion moyenne sont les inconnues au problème.

Le schéma de résolution est à deux niveaux :

- un niveau GLOBAL, qui est celui de l'équation de la dynamique semi-discrétisée. Les variables manipulées à ce niveau sont les vitesses généralisées  $u$  et les efforts duaux  $r$  (efforts de contacts).
- un niveau LOCAL, qui est celui des conditions unilatérales. Les variables manipulées sont alors les vitesses relatives au contact  $U$  et les efforts de liaisons duaux  $R$ .

La boucle représentée en (2.4.11) présente bien la dualité entre les différents espaces.

$$\begin{array}{ccc} \text{Niveau global} & q, u & \xleftarrow{\text{Equation de la dynamique}} & r \\ & \downarrow H^*(q) & & \uparrow H(q) \\ \text{Niveau local} & U^\alpha & \xrightarrow[\text{Conditions unilatérales}]{\text{Lois de contact}} & R^\alpha \end{array} \quad (2.4.11)$$



Les relations entre ces niveaux s'effectuent grâce aux applications  $H^*(q)$  et  $H(q)$ .

Pour un contact  $\alpha$ ,

- on peut ainsi écrire la vitesse relative au contact en fonction de la vitesse des corps :

$$U^\alpha = H^{*\alpha}(q)u \quad (2.4.12)$$

- on peut ainsi définir la contribution  $r^\alpha$  des efforts de contacts au niveau global en fonction des efforts de contacts au niveau local  $R^\alpha$  :

$$r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha \quad (2.4.13)$$

Les opérateurs  $H^{*\alpha}, H^\alpha$  sont transposés l'un par rapport à l'autre.

On définit l'application  $H^*$  et  $H$  qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} H^\alpha : R = [R^\alpha, \alpha = 1..n_c] \rightarrow r &= \sum_{\alpha}^{n_c} H^\alpha(q)R^\alpha \\ H^{*\alpha} : u = [u^i, i = 1..n_{ddl}] \rightarrow U &= \sum_{\alpha}^{n_c} H^{*\alpha}(q)u \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Les vitesses relatives sont reliées aux réactions locales  $R^\alpha$  par les lois d'interactions : Signorini et Coulomb.

- Les relations cinématiques 2.4.14 s'écrivent :

$$\begin{aligned} U_{i+1}^\alpha &= H^{*\alpha}(\hat{q})u_{i+1} \\ r_{i+1}^\alpha &= H^\alpha(\hat{q})R_{i+1}^\alpha \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

La variable  $\hat{q}$  désigne la configuration qui sert à déterminer les repères locaux :

$$\hat{q} = q_i + h(1 - \theta)\dot{q}_i \quad (2.4.16)$$

On pourra évaluer la distance entre les points de contact que l'on appelle interstice noté  $g$  :

$$(\dot{g}_\alpha)_{i+1} = U_N^\alpha \quad (2.4.17)$$

#### 2.4.2.d Discrétisations des relations de contact frottant

La forme discrète de la condition de Signorini s'écrit :

$$R^\alpha(i + 1) = 0 \quad (2.4.18)$$

Sauf si un contact est établi, alors on a :

$$U_N^\alpha(i+1) \geq 0, \quad R_N^\alpha(i+1) \geq 0, \quad U_N^\alpha(i+1)R_N^\alpha(i+1) = 0 \quad (2.4.19)$$

La forme discrète de la condition de Signorini s'écrit :

$$Signor(U_N^\alpha(i+1), R_N^\alpha(i+1)) \quad (2.4.20)$$

Comme loi de frottement, on écrit la loi de Coulomb discrétisée sous la forme :

$$Coul_{\mu^\alpha R_N^\alpha(i+1)}(U_T^\alpha(i+1), R_T^\alpha(i+1)) \quad (2.4.21)$$

#### 2.4.2.e Bilan des équations discrétisées

On fait une synthèse des différentes équations du modèle :

- Equations du mouvement :

$$\mathbb{M}(u_{i+1} - u_i) = h[(1 - \theta)P_i + \theta P_{i+1}] + hr_{i+1}$$

$$q_{i+1} - q_i = h[(1 - \theta)u_i + \theta u_{i+1}]$$

- Relations de passage :

$$U_{i+1}^\alpha = H^{*\alpha}(\hat{q})u_{i+1}$$

$$r_{i+1} = \sum_\alpha H^\alpha(\hat{q})R_{i+1}^\alpha$$

- Graphes des lois de contact :

$$Signor(U_N^\alpha(i+1), R_N^\alpha(i+1))$$

$$Coul_{\mu^\alpha R_N^\alpha(i+1)}(U_T^\alpha(i+1), R_T^\alpha(i+1))$$

#### 2.4.2.f Condensation du système

La solution de notre problème doit vérifier un système d'équations de la dynamique globale (2.4.10) et des lois d'interactions locales (quasi-choc Signorini, frottement de Coulomb). En utilisant les relations cinématiques (2.4.15) et la forme discrétisée de l'équation de la dynamique (2.4.10), on a :

$$U^\alpha(i+1) = U_{free}^\alpha + \sum_\beta W^{\alpha\beta} h R^\beta(i+1) \quad (2.4.22)$$

$$U_{free}^\alpha = H^{*\alpha}(u_i + M^{-1}P(i))$$

$$W^{\alpha\beta} = H^{*\alpha} \mathbb{M}^{-1} H^\beta$$

avec,

$W$ =opérateur de Delassus,

$U_{free}^\alpha$  représente la valeur de  $U^\alpha(i+1)$  en supposant les impulsions de contacts nulles ( $R=0$ ).

Le terme  $U_{locfree}$  est la vitesse relative «libre» c'est-à-dire en l'absence de réactions de contact ( $R=0$ ).

On réécrit le système 2.4.22 :

$$U^\alpha(i+1) = U_{locfree}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha(i+1) \quad (2.4.23)$$

Le terme  $U_{locfree}^\alpha$  est défini par :

$$U_{locfree}^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(i+1) \quad (2.4.24)$$

Le problème de Signorini, Coulomb se traduit par un système d'équations où il s'agit de trouver  $U$  et  $R$  tels que :

$$\begin{cases} U^\alpha = U_{locfree}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha \\ Signor(U_N^\alpha, R_N^\alpha) \\ Coul_{\mu R_N^\alpha}(U_T^{alpha}, R_T^\alpha) \end{cases} \quad (2.4.25)$$

L'ensemble de ces équations 2.4.25 se compose d'une forme linéarisée de l'équation de la dynamique donnant la vitesse relative au candidat  $\alpha$  comme une fonction affine de son impulsion et des relations de contact frottant.

$W$  est une matrice de dimension (2,2) ou (3,3) et les termes  $U$ ,  $R$  et  $U_{locfree}$  sont des vecteurs appartenant à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  selon que le problème est à deux ou trois dimensions.

### 2.4.3 Méthode de résolution

La méthode de résolution utilisée est de type algorithme de Gauss-Seidel non linéaire par bloc. Le principe est de calculer la solution élémentaire du problème pour le contact  $\alpha$  en supposant des valeurs provisoires pour les autres contacts  $\beta$  ( $\beta \neq \alpha$ ). La solution du problème complet est obtenue en itérant sur la liste des contacts des résolutions élémentaires jusqu'à convergence.

#### 2.4.3.a Résolution 2D du problème de contact frottant standard

On peut obtenir explicitement une solution grâce à une intersection de graphes.

On pose la matrice  $W$  (opérateur de Delassus) :

$$W^{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} W_{TT}^{\alpha\alpha} & W_{TN}^{\alpha\alpha} \\ W_{NT}^{\alpha\alpha} & W_{NN}^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}, \quad h R_{locstick}^\alpha = -W^{\alpha\alpha-1} U_{locfree}^\alpha \quad (2.4.26)$$

Le terme  $R_{stick}$  représente la réaction prise lorsque la vitesse relative est nulle ( $U_N = 0$ )

On suppose que :

$$-1 < -\mu \frac{W_{NT}^{\alpha\alpha}}{W_{NN}^{\alpha\alpha}} < 1 \quad (2.4.27)$$

L'algorithme d'intersection s'écrit alors :

Si,

- $U_{locfreeN}^\alpha > 0$ ,

alors pas contact :  $hR_N = 0$  et  $hR_T = 0$ .

- $U_{locfreeN}^\alpha \leq 0$  et  $(R_{locstick}^\alpha)_T + \mu(R_{locstick}^\alpha)_N < 0$ ,

alors il y a glissement frottant avant :  $hR_N^\alpha = -\frac{1}{(1-\mu\frac{W_{NT}^{\alpha\alpha}}{W_{NN}^{\alpha\alpha}})W_{NN}^{\alpha\alpha}}U_{locfreeN}^\alpha$  et  $R_T^\alpha = -\mu R_N^\alpha$

- $U_{locfreeN}^\alpha \leq 0$  et  $(R_{locstick}^\alpha)_T - \mu(R_{locstick}^\alpha)_N > 0$ ,

alors il y a glissement frottant arrière :  $hR_N^\alpha = -\frac{1}{(1+\mu\frac{W_{NT}^{\alpha\alpha}}{W_{NN}^{\alpha\alpha}})W_{NN}^{\alpha\alpha}}U_{locfreeN}^\alpha$  et  $R_T^\alpha = \mu R_N^\alpha$

- $U_{locfreeN}^\alpha \leq 0$  et  $(R_{locstick}^\alpha)_T + \mu(R_{locstick}^\alpha)_N \geq 0$  et  $R_T - \mu R_N \leq 0$

alors non-glissement :  $R^\alpha = R_{locstick}^\alpha$

La loi de Signorini-Coulomb est représentée sur la figure 2.16.

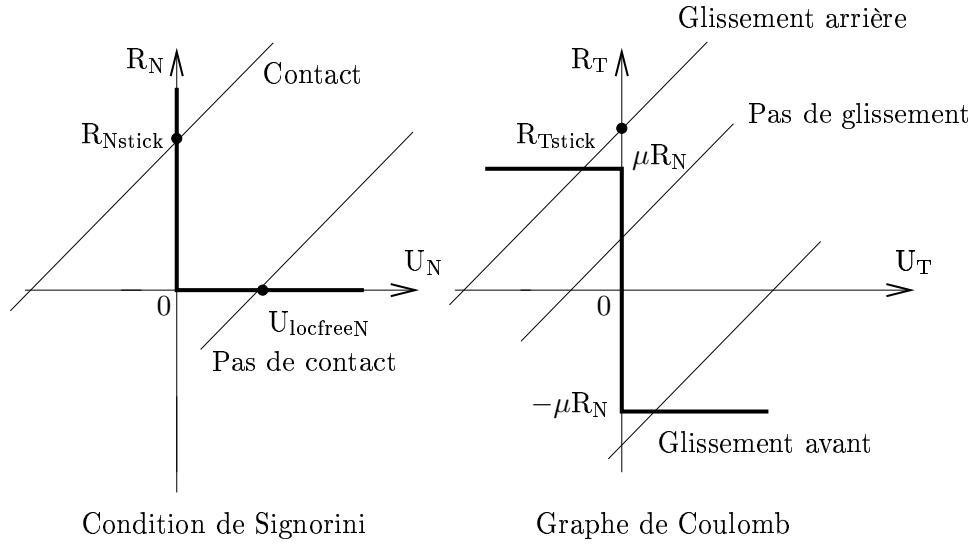


FIG. 2.16 – Résolution du problème de contact frottant standard en 2D

### 2.4.3.b Résolution 3D du problème de contact frottant standard

Le système 2.4.25 est réécrit sous la forme mixte :

$$\begin{cases} U^\alpha - U_{locfree}^\alpha - W^{\alpha\alpha}hR^\alpha = 0 \\ R_N^\alpha - \text{proj}_{\mathbb{R}_+}(R_N^\alpha - \rho_N U_N^\alpha) = 0 \\ R_T^\alpha - \text{proj}_{(D\mu R_N^\alpha)}(R_T^\alpha - \rho_N U_T^\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.4.28)$$

où  $D(\mu R_N^\alpha)$  est le disque de rayon  $\mu R_N^\alpha$  centré à l'origine. Ces deux systèmes sont équivalents pour  $\rho > 0$ .

$$2.4.28 \Leftrightarrow \phi(U^\alpha, R^\alpha) = 0 \tag{2.4.29}$$

où  $\phi$  est une fonctionnelle non-linéaire.

Les racines de cette équation non-linéaire sont donc calculées par un algorithme de Newton généralisé aux fonctions non-régulières (Alart et Curnier (1988)).

### 2.4.4 Modélisation du contact avec cohésion

Dans cette partie, on prend en compte l'adhérence dans le cadre de la méthode NSCD, en considérant chaque point de contact comme une zone cohésive.

Acary & al (Acary (2001), Acary et Jean (2001)) et Monerie & al (Bretelle et al. (2001), Jean et al. (2001), Bretelle et al. (2000)) ont proposé une formulation dynamique et une résolution numérique du problème avec des zones cohésives frottantes. Le modèle introduit une variable  $\beta$  qui représente l'intensité d'adhésion, sa valeur est comprise entre 0 et 1. Cette variable a été définie par Frémond (Fremond (1982)).

Pour,

- $\beta = 1 \Rightarrow$  la zone de contact est vierge,
- $\beta = 0 \Rightarrow$  la zone de contact est rompue,
- $0 < \beta < 1 \Rightarrow$  la zone de contact est partiellement rompue.

On dira que la variable  $\beta$  peut être associée à une variable d'endommagement.

Le modèle considère à la fois le contact unilatéral, le frottement sec de Coulomb et l'adhésion.

Le contact cohésif peut s'écrire comme une condition de complémentarité et une loi de frottement de la façon suivante.

#### 2.4.4.a Partie normale

Pour un modèle admettant des joints vifs ou lorsque les joints de mortiers sont assez anciens, on fait l'hypothèse que la résistance du joint en traction est négligeable : la loi unilatérale s'écrit donc comme on l'a vu précédemment.

En présence de mortiers de bonne qualité, on est face à de la cohésion entre les joints avec une résistance à la traction dans la direction normale.

La condition sur les variables normales du comportement de contact normal s'écrit donc :

$$(R_N + \beta^2 c_N [|u_N|]) \geq 0, \quad [|u_N|] \geq 0, \quad (R_N + \beta^2 c_N [|u_N|]) [|u_N|] = 0 \tag{2.4.30}$$

où,

$[|u_N|]$  représente le saut de déplacement normal,

$R_N$  représente la réaction normale au contact,

$\beta$  représente l'intensité d'adhésion,

$c_N$  la raideur interfaciale normale, homogène à un module d'élasticité par unité de longueur.

En écrivant le changement de variable :

$$\tilde{R}_N = R_N + \beta^2 c_N [|u_N|] \quad (2.4.31)$$

On pourra résumer le comportement de contact normal sous la forme :

$$\phi_N(|u_N|, \tilde{R}_N) \quad (2.4.32)$$

#### 2.4.4.b Partie tangente

Il y a prise en compte d'une cohésion supplémentaire dans la direction tangentielle.

La loi de frottement de comportement de contact tangentiel s'écrit donc, pour une valeur de pression normale égale à  $R_N + \beta^2 c_N [|u_N|]$  :

$$\begin{cases} R_T = R_T^r + R_T^{ir} \\ \|U_T\| \geq 0, \quad \|R_T^{ir}\| = \mu(\beta)(R_N + \beta^2 c_N [|u_N|]), \quad \frac{R_T^{ir}}{\|R_T^{ir}\|} = -\frac{U_T}{\|U_T\|}, \\ \|U_T\| = 0, \quad \|R_T^{ir}\| < \mu(\beta)(R_N + \beta^2 c_N [|u_N|]) \end{cases} \quad (2.4.33)$$

où,

$R_T^{ir}$  représente la contribution du frottement sec de Coulomb à la réaction tangentielle.

$U_T$  représente la vitesse tangentielle,

La contribution de l'adhésion  $R_T^r = -\beta^2 c_T [|u_T|]$ ,

$|u_T|$  représente le saut de déplacement tangentiel,

$c_T$  la raideur interfaciale tangente, homogène à un module d'élasticité par unité de longueur.

En écrivant le changement de variable :

$$\tilde{R}_T = R_T + \beta^2 c_T [|u_T|] \quad (2.4.34)$$

On pourra résumer le comportement de contact tangentiel sous la forme :

$$\phi_T(|u_T|, \tilde{R}_T) \quad (2.4.35)$$

#### 2.4.4.c Evolution de l'intensité d'adhésion

L'intensité d'adhésion  $\beta$  est donnée par la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} b\dot{\beta} = -[(wh'(\beta) - \beta(c_N U_N^2 + c_T \|U_T\|^2) - k\nabla\beta)^-]^{(1/p)}, & si \beta \in [0, 1] \\ b\dot{\beta} \leq -[(wh'(\beta) - \beta(c_N U_N^2 + c_T \|U_T\|^2) - k\nabla\beta)^-]^{(1/p)}, & si \beta = 1 \end{cases} \quad (2.4.36)$$

Où,

$b$  est une viscosité,

$w$  représente l'énergie dissipée dans le processus de cohésion à l'exception de toute dissipation visqueuse (la limite de l'énergie de décohésion),

$p$  un entier déterminant la puissance de la loi de dissipation sur  $\dot{\beta}$ ,

$h(\beta)$  est une fonction qui permet de paramétrer la forme de l'énergie dissipée en fonction de  $\beta$ ,

$k$  est une constante homogène à une énergie.

#### 2.4.4.d Système à résoudre en présence de cohésion

Le modèle avec cohésion se traduit par un système d'équations suivant :

$$\begin{cases} U^\alpha = U_{locfree}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha \\ \phi_N(U_N, \tilde{R}_N) \\ \phi_T(U_T, \tilde{R}_T) \end{cases} \quad (2.4.37)$$

est réécrit sous la forme mixte :

$$\begin{cases} U^\alpha - U_{locfree}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h R^\alpha = 0 \\ \tilde{R}_N^\alpha - proj_{\mathbb{R}_+}(\tilde{R}_N^\alpha - \rho_N U_N^\alpha) = 0 \\ \tilde{R}_T^\alpha - proj_{(D_\mu R_N^\alpha)}(\tilde{R}_T^\alpha - \rho_N U_T^\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.4.38)$$

#### 2.4.5 Méthode de résolution : résolution du problème contact, frottement et adhérence en 3D

La méthode de résolution est comme précédemment de type algorithme de Gauss-Seidel non linéaire par bloc.

La prise en compte de l'adhérence dans les problèmes de contact frottant se réalise à l'aide de changement de variable :

$$\tilde{R} = R + R_{adh}, \quad R_{adh} \text{ est une force de résistance supplémentaire.} \quad (2.4.39)$$

avec,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_N &= R_N + R_{adhN} \text{ et } R_{adhN} = \beta^2 c_N [|u_N|], \\ \tilde{R}_T &= R_T + R_{adhT} \text{ et } R_{adhT} = \beta^2 c_T [|u_T|] \end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable pour faire apparaître  $\tilde{R}$  :

$$U^\alpha - U_{locfree}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h (\tilde{R}^\alpha - R_{adh}^\alpha) = 0 \quad (2.4.40)$$

En écrivant la vitesse locale libre (modifiée par la cohésion) par :

$$\tilde{U}_{locfree}^\alpha = U_{locfree}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h R_{adh}^\alpha \quad (2.4.41)$$

On obtient un système équivalent au paragraphe (2.4.3.b) qui se résoud par un algorithme de Newton-généralisé.

## 2.5 Conclusion et perspectives

Les méthodes de résolution spécifiques aux maçonneries dépendent de l'échelle considérée. Ainsi, les résultats peuvent ne pas être précis ou même devenir contestables.

A l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de la structure, la description mécanique est globale. La maçonnerie est considérée comme un matériau homogène et l'objectif est de définir un critère de rupture portant sur des grandeurs macroscopiques. A cette échelle, il existe trois types de modélisation d'une structure :

- élastique linéaire isotrope : cette modélisation néglige l'aspect discontinu de la structure. Les résultats sont souvent contestables,
- les modèles de type NTM. Ces modèles sont basés sur des hypothèses formulées par Heyman (Heymann (1966)), les hypothèses utilisées sont restrictives et leurs formulations mathématiques sont assez complexes.
- le modèle élasto-plastique : prise en compte de l'anisotropie et de l'endommagement au niveau des interfaces.

Une recherche expérimentale est nécessaire pour connaître les caractéristiques mécaniques des matériaux employés. Dans le domaine des maçonneries, dans lesquelles la discontinuité physique est évidente, ces modélisations macroscopiques ne sont pas adaptées.

A l'échelle microscopique, c'est-à-dire à l'échelle du bloc, il existe deux types de modélisations, continue et discrète :

- approche macromécanique/micromécanique où le modèle continu se base sur l'homogénéisation périodique. Cette homogénéisation consiste à définir un VER (Volume Élémentaire Représentatif). Le VER est représentatif des hétérogénéités de la structure. L'inconvénient est de définir correctement la taille du VER.
- le modèle discret est parfaitement adapté pour simuler le comportement et l'évolution dynamique d'un ensemble de particules rigides de tailles différentes, ayant une géométrie convexe interagissant par contact.

Dans une maçonnerie, la détection des contacts est très importantes en vue de la modélisation des interactions ponctuelles, linéaires ou planes. En effet, cette détection conditionne la qualité du calcul de stabilité des structures.

Dans le chapitre suivant, on propose un nouvel algorithme de détection des contacts, implémenté dans le code de calcul LMGC90. Ce nouvel algorithme prend en compte toutes les spécificités d'une maçonnerie.





---

## Chapitre 3

# Algorithme de détection des contacts dans les géométries régulières, spécificités des maçonneries

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Spécificités des structures maçonnées</b>	<b>106</b>
3.1.1	Quelques algorithmes pour la détection des contacts	109
3.1.2	Approche choisie	111
<b>3.2</b>	<b>Pré-détection des contacts</b>	<b>112</b>
<b>3.3</b>	<b>Détection "fine" des contacts spécifique aux maçonneries</b>	<b>113</b>
3.3.1	Mise en place d'un plan séparateur par la méthode de Cundall	113
3.3.2	Algorithme pour positionner le plan séparateur	114
3.3.2.a	Initialisation	114
3.3.2.b	Calcul des distances des sommets	114
3.3.2.c	Mise en place de perturbations	115
3.3.2.d	Translation du point de référence	117
3.3.2.e	Algorithme de positionnement du plan séparateur	118
3.3.3	Projection des sommets sur le plan séparateur	119
3.3.3.a	Contact à joint vif	119
3.3.3.b	Contact à joint de mortier	122
<b>3.4</b>	<b>Calcul de l'enveloppe convexe</b>	<b>124</b>
3.4.1	Méthode utilisée pour le calcul de l'enveloppe convexe	124
3.4.2	Détermination de la zone de recouvrement	126
<b>3.5</b>	<b>Typologie des situations de contacts</b>	<b>128</b>
<b>3.6</b>	<b>Originalité de la modélisation proposée et exemples d'application de l'algorithme à des structures réelles en 3D</b>	<b>129</b>
3.6.1	Structures réelles à grand nombre de blocs	129
3.6.2	Structures réelles précontraintes : escalier Ridolfi et coupôle de Junas	132
3.6.3	Structure académique impliquant une épaisseur de joint	136
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

---

La détection des contacts entre deux corps est importante pour assurer la stabilité mécanique de la maçonnerie. Il est donc indispensable que l'algorithme détecte bien les milliers de contacts existants dans une structure complète comme c'est le cas par exemple pour le pont Julien. Cette structure comporte un grand nombre de blocs et sa tenue est démontrée depuis des siècles.

Le but de ce chapitre est de présenter un nouvel algorithme de détection des contacts entre polyèdres convexes rigides tri-dimensionnels adapté aux structures maçonnées en grand appareil, montées avec du liant ou à joints vifs. Il permet de déterminer s'il y a contact entre deux corps et dans ce cas de donner des informations nécessaires et suffisamment précises afin de pouvoir résoudre le problème. Ces informations sont :

- les coordonnées dans l'espace de travail du ou des points de contacts,
- le repère local de contact.

D'un point de vue géométrique, les contacts sont essentiellement de type face/face et arête/face. Certaines structures peuvent néanmoins présenter des contacts de type arête/arête et arête/face que le nouvel algorithme est capable de gérer. Après avoir comparé les différents algorithmes existants et retenu certains de leurs avantages, on sélectionne certains sommets des polyèdres en vis-à-vis. On effectue ensuite une projection particulière de ces sommets sur le plan de contact, de façon à obtenir les noeuds de contacts.

On présentera l'application de cet algorithme sur trois structures réelles maçonnées et un cas académique.

### 3.1 Spécificités des structures maçonnées

Dans le cadre des maçonneries, quel que soit le type d'appareil (Varène (1992)) utilisé dans la construction, les points de contacts entre les blocs sont positionnés différemment suivant que le contact est de type face/face ou arête/face. Le choix des lieux de contacts devient difficile et le calcul des interactions se complique en raison du nombre de liaisons nettement plus important que par exemple dans les milieux granulaires sphériques ou de formes irrégulières présentant de nombreuses facettes (cas du ballast). Il existe trois catégories principales d'algorithmes de détection des contacts : en robotique, en mécanique des roches et dans les modèles numériques basés sur la méthode NSCD.

- Beaucoup de travaux ont été publiés sur les algorithmes dans le domaine de la robotique ou de la réalité virtuelle (Lin et Canny (1991), Van Den Bergen (1999), Li et al. (2003), Gilbert et Hong (1989), Segura et Feito (1998), Garcia-Alonso et al. (1994), Gilbert et al. (1988), Xu et al. (2005), Dequidt et al. (2003)). Le principe consiste en la détection de la collision entre deux objets. L'utilisation de ce type d'algorithme n'admet qu'un nombre d'objets restreint, quelques dizaines et très facétisés.

- Cundall développe la première méthode numérique dédiée à la simulation des milieux discrets afin de traiter des problèmes de la mécanique des roches (Cundall (1971), Cundall et Strack (1983), Cundall et Lemos (1990)). Il met en place un algorithme pour des roches en deux ou trois dimensions (UDEDEC et 3DEDEC (Hart (1991))). Le principe consiste à positionner un plan séparateur entre deux polyèdres de façon à maximiser l'interstice, "gap", entre les deux blocs en appliquant des perturbations.

Cependant, la transmission des forces au niveau du contact est réalisée seulement sur un point de contact avec un éventuel couple; il est alors difficile de définir correctement ce couple.

- Saussine & al (Saussine (2004), Saussine et al. (2004)) ont développé un algorithme de détection des contacts basé sur l'intersection des blocs. Le système de tri et le choix des points de contacts qu'ils utilisent entre polyèdres convexes fonctionne relativement bien quand on est en présence d'angles vifs (essentiellement contacts de type sommet/face et sommet/sommet). Il connaît cependant quelques difficultés quand on est en présence de contacts de type face/face polygonale (appareil régulier en maçonnerie).

Les monuments étudiés vont des structures en pierres massives, cas du simple appareil régulier (mur) ou irrégulier (Pont du Gard, amphithéâtres), aux structures mixtes présentant des associations béton-pierre, pierre-précontrainte.

Les géométries, souvent "non-parfaites" car présentant des irrégularités de surface, sont prises en compte par une enveloppe 3D régulière englobante (voir figure 3.1). Les défauts macro-géométriques de position sont pris en compte dans la facétisation des blocs par des plans moyens et les irrégularités de surface, à petite échelle, au moyen de la loi de contact entre faces de blocs.

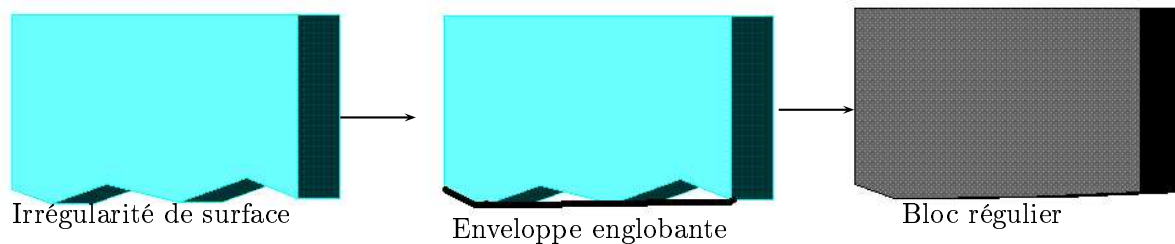


FIG. 3.1 – Enveloppe régulière d'un bloc

On présente deux structures réelles pour illustrer deux cas de contacts entre blocs :

- la figure 3.2, représentant les arènes de Nîmes, montre un contact à joint de mortier (encadré sur la photo).

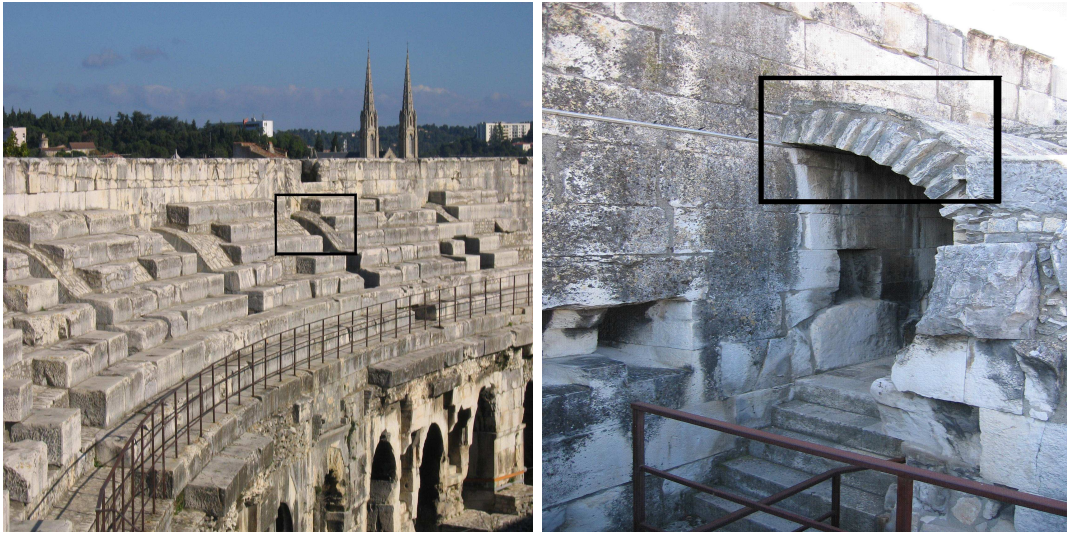


FIG. 3.2 – Cas d'un contact à joint de mortier

- la figure 3.3, représentant le pont du Gard, montre un contact à joint vif sur le grand appareil (encadré sur la photo).



FIG. 3.3 – Cas d'un contact à joint vif

La difficulté pour modéliser de telles structures en maçonnerie réside dans l'obtention d'un nombre de points de contacts adapté et prenant en compte les spécificités du problème c'est-à-dire le contact de type face/face, comme schématisé sur la figure 3.4.

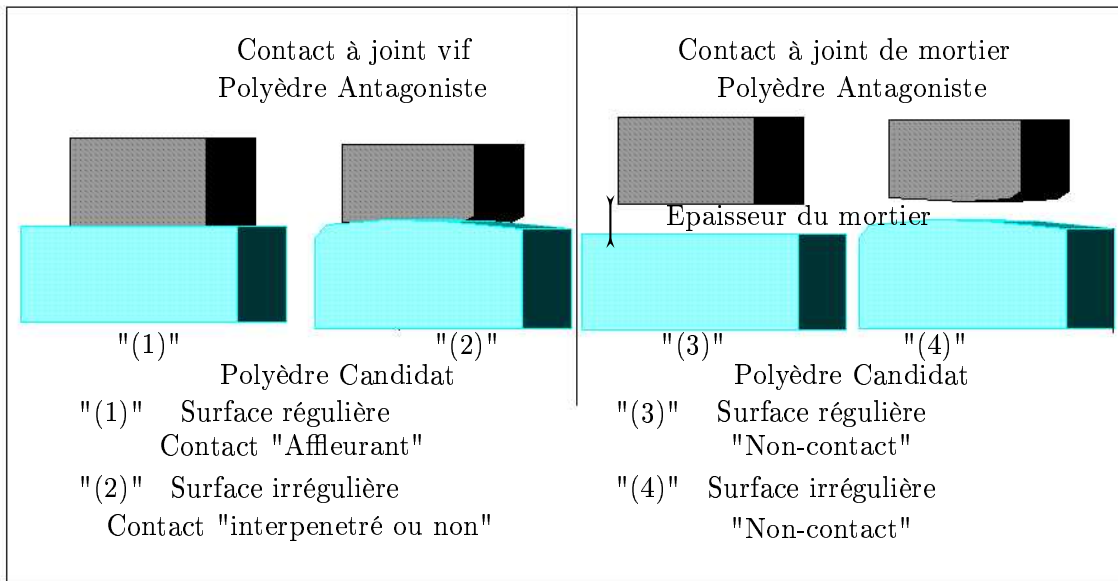


FIG. 3.4 – Schématisation du joint sec et du joint en présence de mortier

Contrairement au cas d'un contact à joint de mortier, pour le contact à joint vif, le polyèdre antagoniste est posé directement sur le polyèdre candidat. La distance entre les surfaces de contact les plus proches est alors nulle ce qui n'est pas le cas dans la première simulation où il faut tenir compte de l'épaisseur du mortier.

On exposera, dans la suite, quelques exemples d'algorithmes de détection des contacts. Plus précisément en montrant leurs capacités à modéliser de telles structures seront étudiées.

### 3.1.1 Quelques algorithmes pour la détection des contacts

Il existe plusieurs algorithmes de détection des contacts entre polyèdres.

**L'algorithme de Gilbert-Johnson-Keerthi** calcule de façon itérative la distance entre deux enveloppes convexes de deux ensembles de points en trois dimensions (Gilbert et al. (1988)). La valeur de cette distance est calculée lorsque les enveloppes convexes sont séparées ; en cas de collision, l'algorithme est appliqué sur l'instant précédent la collision afin d'estimer la profondeur d'interpénétration. L'algorithme est très utilisé dans le domaine de la robotique (bras de robot...).

**L'algorithme de Lin-Canny** (Lin et Canny (1991)) fournit itérativement les deux points les plus proches de deux polyèdres convexes. Le principe consiste à déterminer le contact minimisant la distance entre deux éléments caractéristiques (sommet, arête, face) des deux polyèdres. A chaque itération, des critères locaux permettent de vérifier si les deux éléments caractéristiques trouvés sont effectivement les plus proches. Dans ce cas, l'algorithme s'arrête ; sinon, à partir de la position relative de ces deux caractéristiques, l'algorithme itère. L'algorithme converge lorsque,

entre deux itérations successives, la distance entre les deux caractéristiques choisies diminue. Cet algorithme ne donne les deux points les plus proches que lorsque les deux polyèdres sont séparés ; il ne fonctionne que pour des polyèdres convexes qui ne s'interpénètrent pas. Il peut être utilisé par exemple pour la détection de la collision, en calculant la distance entre deux polyèdres en 3D, dans le domaine de la robotique.

**L'algorithme de Garcia-Alonso et al.** (Garcia-Alonso et al. (1994)) représentent l'objet par plusieurs niveaux :

le premier niveau de représentation est un parallélépipède dont les facettes sont parallèles aux axes de coordonnées globales du système 3D. Ce parallélépipède est appelé boîte min-max (voir figure 3.5),

le deuxième niveau de représentation est le "container" qui est le parallélépipède minimal qui contient le polyèdre et dont les axes principaux coïncident,

le troisième niveau de représentation est la décomposition du container en plusieurs voxels. Cette décomposition est modélisée par une matrice tri-dimensionnelle. Un voxel est ainsi affecté de la valeur 1 s'il contient une partie de l'objet ou la valeur 0 dans le cas contraire.

Lorsque les deux polyèdres sont assez éloignés, un simple test permet de calculer la distance entre leurs boîtes min-max. Quand les boîtes min-max sont en contact, l'algorithme vérifie si les containers sont en contact. Dans ce cas, l'algorithme calcule l'intersection de ces deux containers. Cette intersection correspond à deux ensembles de voxels. Pour chaque couple de voxels, on détecte le contact entre eux et on détermine les facettes qui correspondent à ces voxels.

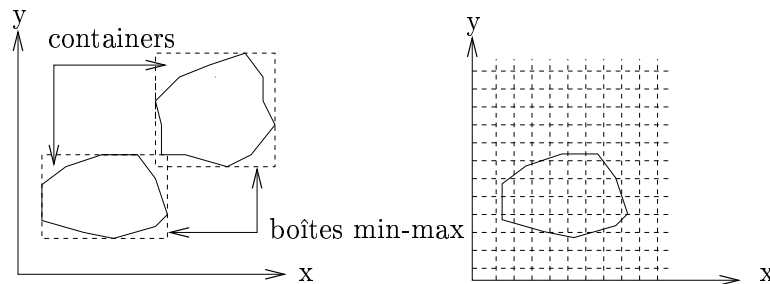


FIG. 3.5 – Les boîtes min-max, les containers et les voxelisations. Algorithme de Garcia-Alonso & al (Garcia-Alonso et al. (1994))

**L'algorithme de Saussine** (Saussine (2004)) est implémenté dans le code de calcul LMGC90. Cet algorithme détermine s'il existe un plan tel que deux polyèdres soient contenus dans les deux demi-espaces dont il forme la frontière. Cette étape ne permet pas de statuer s'il y a contact mais de déterminer une direction pour laquelle l'overlap entre deux polyèdres est le plus petit. Cela permet de sélectionner les faces des polyèdres candidates au contact. Les faces étant discrétisées en triangle, le contact apparaît lorsque l'intersection de ces triangles est non nul. Cet algorithme est adapté aux grains de ballast (présentant des angles vifs), utilisés dans les voies de chemin de fer (S.N.C.F).

**L'algorithme de Cundall** (Cundall (1988a)) est basée sur la recherche d'un plan séparateur entre deux polyèdres. Cet algorithme est itératif. Il consiste à positionner ce plan entre les deux polyèdres de façon à maximiser l'interstice, "gap", entre les deux blocs en appliquant des

perturbations. L'algorithme peut considérer les trois situations de contact suivantes : "interpénétrant", contact "affleurant" et "non-contact".

Dans la suite, cet algorithme sera détaillé puis modifié.

**L'algorithme de Nezami et al.** (Nezami et al. (2004), Nezami et al. (2006)) est une adaptation de l'algorithme de Cundall dont le but est d'optimiser le plan séparateur en réduisant la recherche des possibles positions du plan dans l'espace 3D.

L'étude des différents algorithmes de détection montre qu'ils ne sont que partiellement adaptés aux structures en maçonnerie : ils ne sont pas assez robustes mécaniquement, ou ils n'assurent pas la condition d'unilatéralité, ou enfin ils ne sont pas adaptés pour le traitement du contact face/face.

### 3.1.2 Approche choisie

Le développement d'un nouvel algorithme (Perales et al. (2007)) spécifique aux maçonneries est apparu comme une nécessité. Cet algorithme, implémenté dans le code de calcul LMGC90, passe par deux phases de détection :

- une phase de pré-détection des contacts (ou détection "grossière"),
- une phase de détection "fine" des contacts.

Il s'adapte à toutes les situations de contacts : face/face, arête/face, sommet/face, arête/arête, sommet/sommet et sommet/arête, et permet de traiter le contact à joint vif et à joint de mortier (voir figure 3.4).

Les surfaces des blocs n'étant pas nécessairement parallèles, la description du contact entre deux polyèdres se fait par la mise en place d'un plan séparateur (méthode de Cundall) ce qui permet de construire un plan de glissement ainsi qu'une normale de projection (normale au plan séparateur). On enrichit l'algorithme de Cundall afin de gérer les configurations de contact apparaissant lors de la modélisation des maçonneries. La spécificité de l'algorithme de détection proposé par rapport à celui de Cundall consiste en la détection des sommets des polyèdres dont les faces sont en vis-à-vis, en utilisant ce plan séparateur. Les sommets sont ensuite projetés sur le plan séparateur. Deux stratégies de projection sont possibles :

- pour le contact à joint vif, on ne projette que les sommets appartenant aux faces en vis-à-vis,
- pour le contact à joint de mortier, on ne projette que les sommets détectés en prenant en compte l'épaisseur du joint de mortier.

Les enveloppes convexes des faces de part et d'autre du plan sont définies ; leur intersection caractérise la zone polygonale de contact dont les sommets sont les noeuds de contact. Ces différentes étapes seront détaillées dans la suite.

Le choix des points de contact permet d'éviter d'une part les problèmes d'indétermination liés à de l'hyperstaticité (plus d'inconnues que d'équations) et d'autre part de prévoir les différents mouvements éventuels de translations et/ou rotations dus notamment à des problèmes d'instabilités (basculement...).

On présente l'organigramme global sur la figure 3.6 concernant notre contribution pour le développement de l'algorithme de détection des contacts.



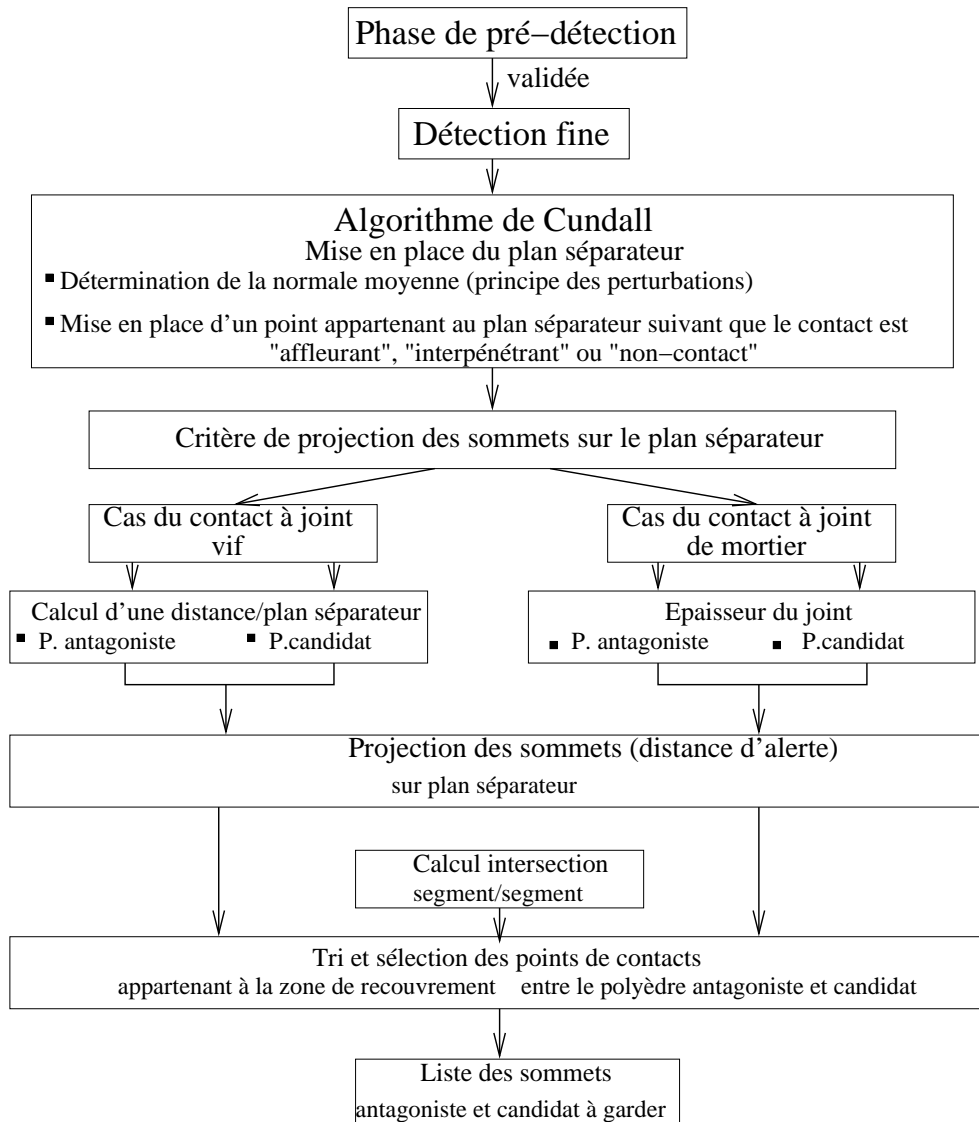


FIG. 3.6 – Organigramme de notre contribution sur le développement de l'algorithme de détection

## 3.2 Pré-détection des contacts

Cette étape permet d'éliminer les cas de non contact. On utilise pour cela la méthode de la boîte englobante (voir figure 3.7).

On définit le rayon d'encombrement d'un polyèdre de la manière suivante, considérant un polyèdre antagoniste  $A$ , de barycentre  $G_A$  :

$$R_{ant} = \max(\|G_A S_A\|, S_A \in Vert(A))$$

Le test consiste donc à examiner la distance entre deux polyèdres par rapport à la somme de leurs rayons d'encombrement. Ce test est rapide et efficace, adapté dans le cas des maçonneries.

L'utilisation d'une boîte englobant un polyèdre peut permettre d'éliminer de nombreux cas mais doit être employée de manière efficace. L'objectif est de déterminer s'il existe un intervalle selon l'axe  $Ox, Oy$  ou  $Oz$  pour lequel les projections des polyèdres sur un de ces axes ne se recoupent

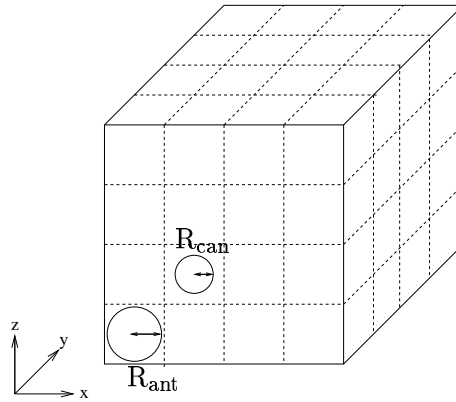


FIG. 3.7 – Méthode de détection grossière par la boîte englobante

pas.

Les coordonnées de la boîte sont définies par deux points extrémaux,  $P1(A)$  et  $P2(A)$  telles que :

$$P1_x = \min(OS.Ox, S \in Vert(A)) \text{ (resp. } y, z)$$

$$P2_x = \max(OS.Ox, S \in Vert(A)) \text{ (resp. } y, z)$$

Considérons deux polyèdres A (antagoniste) et B (candidat), dont les barycentres sont  $G_A$  et  $G_B$ . Le test selon l'axe  $Ox$  consiste à évaluer (resp.  $Oy, Oz$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } O_A O_B.Ox > 0 \text{ then} \\ \text{If } (P1_x(B) - P2_x(A)) > 0 \quad \text{then No-contact} \\ \text{Else} \\ \text{If } (P1_x(B) - P2_x(B)) < 0 \quad \text{then No-contact} \\ \text{End If} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Si l'étape de pré-détection est validée : il y a éventuellement contact entre les éléments testés.

On passe alors à la détection "fine" pour les contacts potentiels.

### 3.3 Détection "fine" des contacts spécifique aux maçonneries

#### 3.3.1 Mise en place d'un plan séparateur par la méthode de Cundall

La méthode développée par Cundall est basée sur la recherche d'un plan séparateur appelé "Common Plane". Elle consiste à déterminer un plan entre deux polyèdres tel que les enveloppes des blocs soient séparées par ce plan. Ce plan est présent dans les trois cas de contact : "affleurant", "non-contact" et "interpénétration".

Du point de vue théorique, les contacts affleurants sont difficiles à trouver mis à part lorsque les conditions de contact plan sont imposées au départ. Par contre on pourrait introduire une tolérance dans laquelle on considère le contact affleurant.

Cette méthode permet de déterminer la position d'un point C (milieu du segment reliant les deux centres de gravités des polyèdres antagoniste et candidat) appartenant au plan ainsi que la normale -moyenne- au plan notée  $N_{moy}$  (voir figure 3.8).

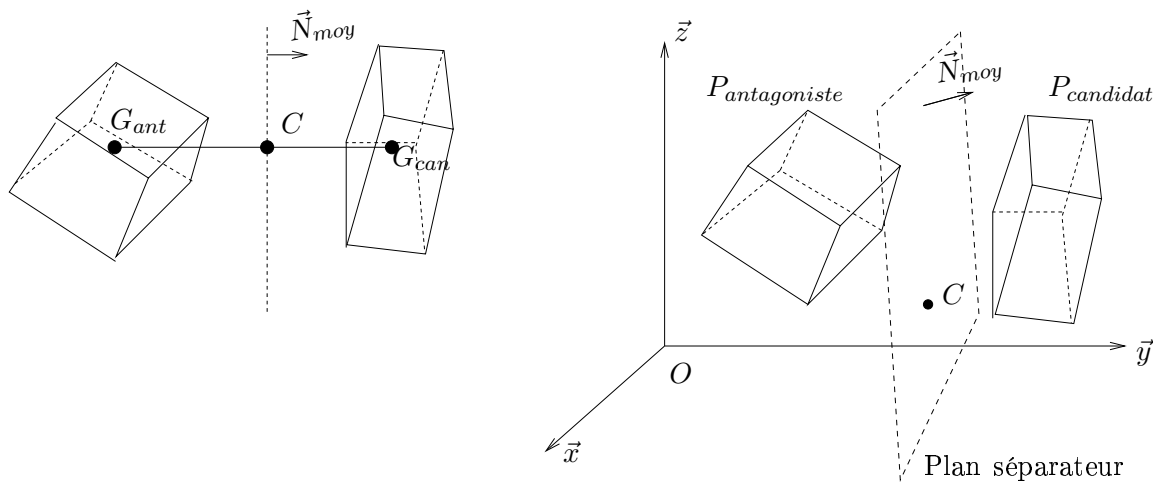


FIG. 3.8 – Principe du plan séparateur, Cundall & al (Cundall (1988a))

### 3.3.2 Algorithme pour positionner le plan séparateur

Soient deux polyèdres notés respectivement  $P_{ant}$  pour l'antagoniste et  $P_{can}$  pour le candidat. Leurs sommets respectifs sont notés  $S_i^{ant}$  et  $S_j^{can}$ ,  $i$  et  $j$  représentant le nombre de sommets de chacun des polyèdres. On note :

- $G_{ant}$  le centre de gravité du polyèdre antagoniste,
- $G_{can}$  le centre de gravité du polyèdre candidat.

#### 3.3.2.a Initialisation

On détermine :

- un point de référence noté  $C$ , milieu du segment reliant les deux centres de gravités :  

$$C = \frac{G_{ant} + G_{can}}{2},$$
- une normale -moyenne-  $N_{moy}$  au plan définie par  $N_{moy} = \frac{G_{ant} - G_{can}}{\|G_{ant} - G_{can}\|}$ .

Ces deux paramètres vont évoluer permettant ainsi de trouver un plan qui maximise la distance entre le plan séparateur et les sommets les plus proches du plan, chacun appartenant aux polyèdres candidat et antagoniste.

On appellera l'interstice la somme de ces deux distances algébriques.

On teste l'ensemble des sommets de chaque polyèdre pour déterminer leur distance par rapport au plan séparateur.

On sélectionne le sommet du polyèdre antagoniste et le sommet du polyèdre candidat les plus proches du plan séparateur.

#### 3.3.2.b Calcul des distances des sommets

Distance des sommets au plan séparateur :

- pour le polyèdre antagoniste :

$$d_{ant} = \max_{i=1, \dots, N_{ant}} \{ \vec{N}_{moy} \cdot \vec{C} S_i^{ant} \}$$

$d_{ant}$  représente la distance algébrique de  $S_i^{ant}$  à la droite joignant les centres  $G_{ant}$  et  $G_{can}$ .

- pour le polyèdre candidat :

$$d_{can} = \min_{j=1, \dots, N_{can}} \{ \vec{N}_{moy} \cdot \vec{C}S_j^{can} \}$$

$d_{can}$  représente la distance algébrique de  $S_j^{can}$  à la droite joignant les centres  $G_{ant}$  et  $G_{can}$ .

L'étape suivante consiste à effectuer des rotations (perturbations) du plan séparateur autour du point de référence C. Ces perturbations vont permettre de positionner dans l'espace le plan séparateur de façon à n'intersecter aucun polyèdres.

### 3.3.2.c Mise en place de perturbations

L'algorithme consiste à appliquer quatre perturbations au vecteur  $N_{moy}^{\rightarrow}$ . L'interstice est défini comme la valeur maximale de  $[d_{can} - d_{ant}]$  des quatre perturbations.

On définit deux vecteurs orthogonaux, notés  $\vec{t}$  et  $\vec{s}$  formant un trièdre avec  $N_{moy}^{\rightarrow}$ .

Pour déterminer le vecteur  $\vec{t}$ , on projette un sommet du polyèdre antagoniste sur le plan séparateur.

On appelle Sp l'ensemble des sommets du polyèdre considéré, projetés sur le plan, S1 un point quelconque de l'espace et C un point appartenant au plan.

On écrit la projection :

$$O\vec{S}p = O\vec{S}1 + S1\vec{S}p \quad (3.3.1)$$

Avec,

$$S1\vec{S}p = S1\vec{C} + C\vec{S}p = ((S1\vec{O} + O\vec{C}) \cdot \vec{N}_{moyen}) \cdot \vec{N}_{moyen} + (C\vec{S}p \cdot \vec{N}_{moyen}) \cdot \vec{N}_{moyen}$$

Et,

$$C\vec{S}p \cdot \vec{N}_{moyen} = 0$$

D'où,

$$O\vec{S}p = O\vec{S}1 - ((-O\vec{C} + O\vec{S}1) \cdot \vec{N}_{moyen}) \cdot \vec{N}_{moyen} \quad (3.3.2)$$

On forme ainsi un vecteur  $\vec{t}$  reliant le sommet projeté Sp et le point C tel que  $\vec{t} = \frac{S\vec{p}C}{\|S\vec{p}C\|}$ ; le vecteur  $\vec{s}$  s'obtient par le produit vectoriel entre le vecteur  $N_{moy}^{\rightarrow}$  et le vecteur  $\vec{t}$  en respectant le sens direct du trièdre (voir figure 3.9). Les quatre perturbations sont décrites ci-dessous :

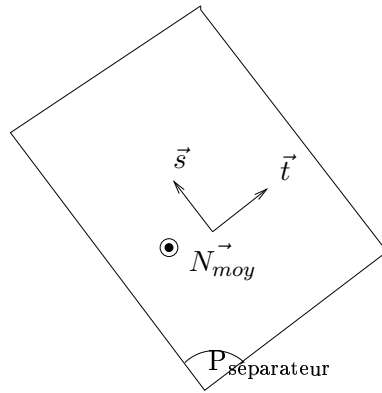


FIG. 3.9 – Trièdre défini sur le plan séparateur, Cundall & al (Cundall (1988a))

On crée tout d'abord une rotation du trièdre autour du vecteur  $\vec{s}$  d'un angle  $+\theta$ , le nouveau vecteur  $N_{moy}^{\rightarrow}$  devient :

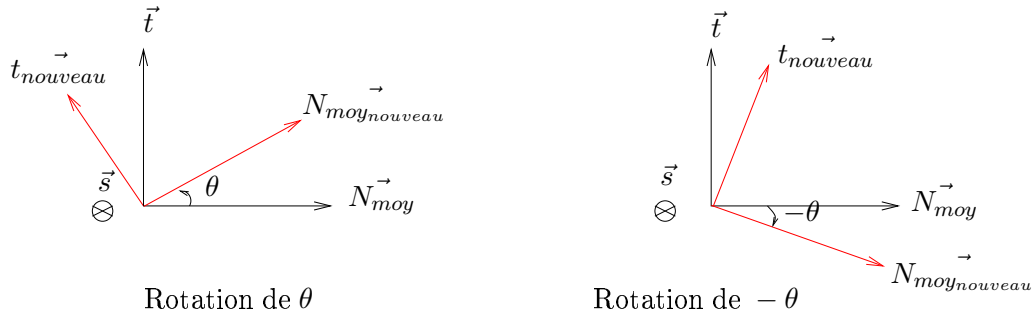


FIG. 3.10 – Perturbations autour du vecteur  $\vec{s}$ , Cundall & al (Cundall (1988a))

- suivant  $+\theta$  (figure 3.10 gauche) :  

$$N_{moynouveau}^{\rightarrow} = N_{moy}^{\rightarrow} * \cos(\theta) + \vec{t} * \sin(\theta)$$
- suivant  $-\theta$  (figure 3.10 droite) :  

$$N_{moynouveau}^{\rightarrow} = N_{moy}^{\rightarrow} * \cos(\theta) - \vec{t} * \sin(\theta)$$

On crée ensuite une rotation d'un angle  $+\theta$  du trièdre autour du vecteur  $\vec{t}$ , le nouveau vecteur  $N_{moy}^{\rightarrow}$  devient :

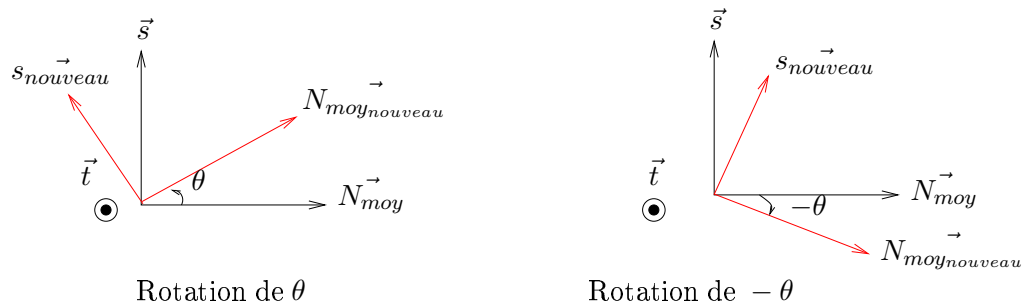


FIG. 3.11 – Perturbations autour du vecteur  $\vec{t}$ , Cundall & al (Cundall (1988a))

- suivant  $+\theta$  (figure 3.11 gauche) :  

$$N_{moynouveau}^{\rightarrow} = N_{moy}^{\rightarrow} * \cos(\theta) + \vec{s} * \sin(\theta)$$
- suivant  $-\theta$  (figure 3.11 droite) :  

$$N_{moynouveau}^{\rightarrow} = N_{moy}^{\rightarrow} * \cos(\theta) - \vec{s} * \sin(\theta)$$

On recalcule l'interstice dans ce nouveau repère.

Dans le cas où on trouve un interstice plus grand que l'interstice calculé précédemment, on récupère la normale maximale et on lui fait subir les quatre perturbations précédentes avec les nouveaux vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{s}$  déterminés de la façon suivante :

Le nouveau vecteur  $\vec{t}$  devient :

- suivant  $+\theta$  :  $\vec{t} = -N_{moy} \vec{t} * \sin(\theta) + \vec{t} * \cos(\theta)$
- suivant  $-\theta$  :  $\vec{t} = N_{moy} \vec{t} * \sin(\theta) + \vec{t} * \cos(\theta)$

Et le nouveau vecteur  $\vec{s}$  devient :

- suivant  $+\theta$  :  $\vec{s} = -N_{moy} \vec{s} * \sin(\theta) + \vec{s} * \cos(\theta)$
- suivant  $-\theta$  :  $\vec{s} = N_{moy} \vec{s} * \sin(\theta) + \vec{s} * \cos(\theta)$

Pour éviter de sortir prématurément de l'algorithme, les axes de perturbations sont tournés de  $30^\circ$ .

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'interstice est plus petit ou égal au précédent, on réalise le même procédé de perturbations avec une nouvelle valeur de l' angle  $\theta$  telle que  $\theta = \frac{\theta}{2}$ . L'algorithme s'arrête si  $\theta < \theta_{min}$  ; on obtient ainsi la normale moyenne donnant l'interstice maximal.

Les paramètres  $\theta$  et  $\theta_{min}$  sont fixés au début de l'algorithme et valent respectivement  $\theta = \theta_{max} = 5^\circ$  et  $\theta_{min} = 0.01^\circ$  (Cundall (1988a)).

Une fois la normale moyenne (donnant l'interstice maximal) déterminée, la dernière étape consiste à réaliser une translation du point de référence C.

### 3.3.2.d Translation du point de référence

Trois cas se présentent (voir figure 3.12) :

- soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est strictement négative, les deux blocs s'interpénètrent et le point de référence C est défini par :  $C = C + \frac{(d_{can} + d_{ant}) * N_{moymax}}{2}$ ,
- soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est nulle, les deux blocs sont en contact affleurant et le point de référence est le milieu des deux sommets les plus proches du plan séparateur :  $C = \frac{[S_i^{ant(max)} + S_j^{can(min)}]}{2}$ ,
- soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est strictement positive, les deux blocs ne sont pas en contact et le point de référence est le milieu des deux sommets les plus proches du plan séparateur :  $C = \frac{[S_i^{ant(max)} + S_j^{can(min)}]}{2}$ .

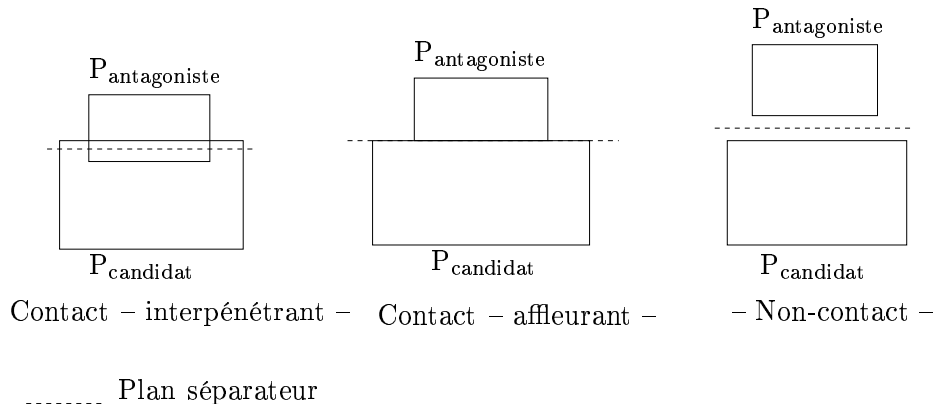


FIG. 3.12 – Trois configurations de contact : interpénétré, affleurant et non-contact, Cundall & al (Cundall (1988a))

L'intérêt de cet algorithme est d'insérer un plan séparateur dans le cas de non-contact. Ce plan permet de déterminer les faces des polyèdres antagoniste et candidat en vis-à-vis. On peut ainsi prendre en compte, par exemple, la rugosité des polyèdres ou modéliser une épaisseur de mortier.

Le schéma global de l'algorithme est présenté sur la figure 3.13.

### 3.3.2.e Algorithme de positionnement du plan séparateur

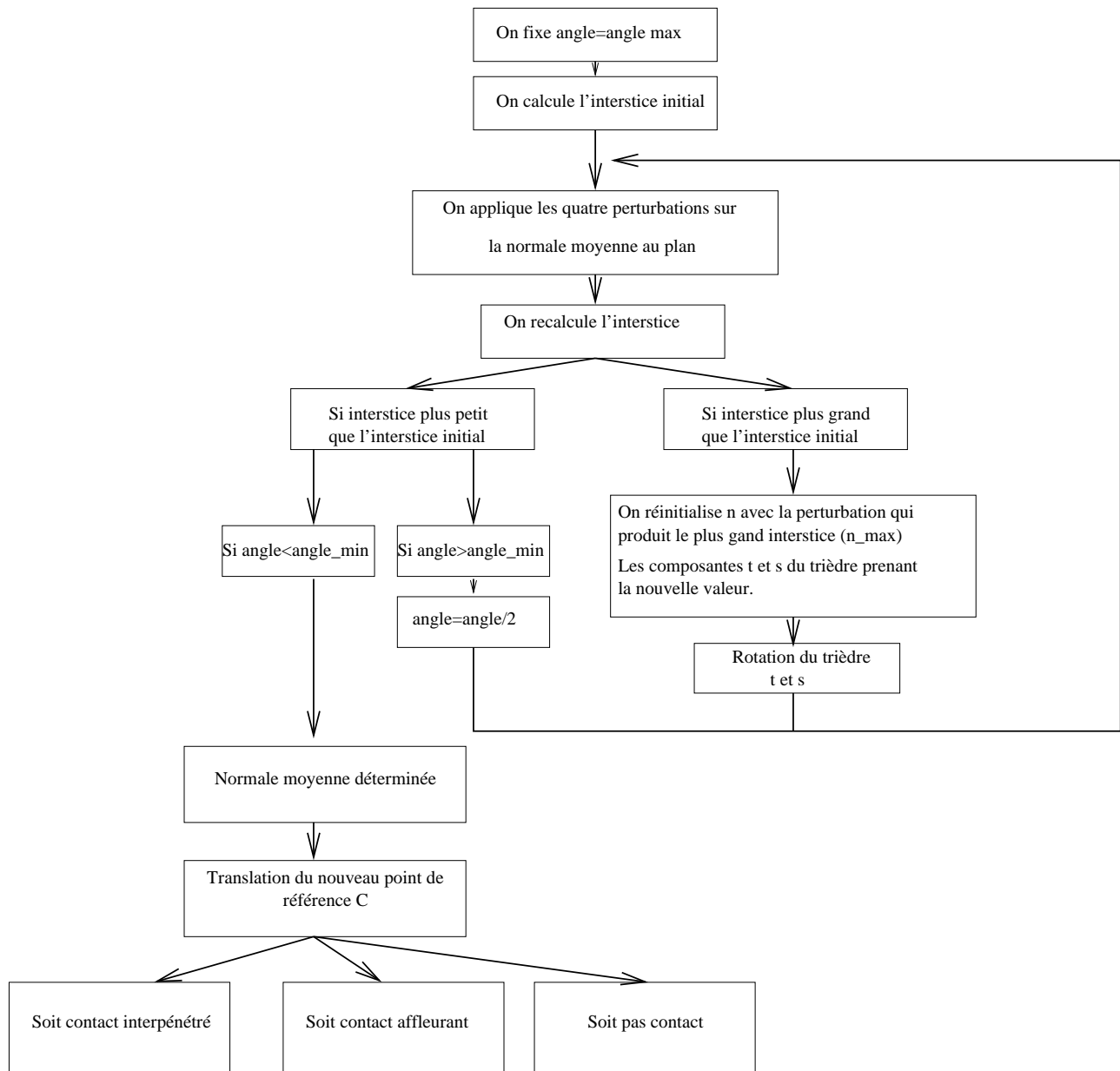


FIG. 3.13 – Algorithme de positionnement du plan séparateur (Cundall (1988a))

### 3.3.3 Projection des sommets sur le plan séparateur

Cette partie porte sur le choix des sommets susceptibles d'être projetés sur le plan.

#### 3.3.3.a Contact à joint vif

- Une méthode de projection existe : choix des faces dont les normales sont les plus alignées (critère de tolérance de  $\pm x$  degrés) avec la normale moyenne au plan.

Si les faces en vis-à-vis sont parallèles avec le plan, la méthode est assez rapide et efficace; par contre, si les faces sont suffisamment inclinées (valeur absolue du critère supérieur à  $x$  degrés), certains sommets risquent de ne pas être pris en compte alors qu'ils sont nécessaires pour la détermination des actions de contact.

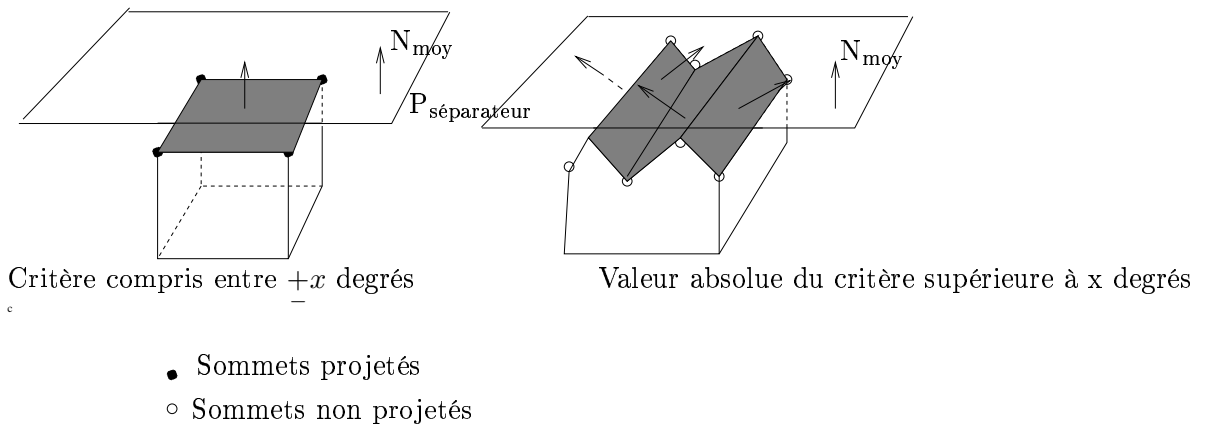


FIG. 3.14 – Alignement des normales avec la normale moyenne

Pour affiner la projection ( cas de rugosité des faces voir schéma 3.14), on détecte les faces des polyèdres qui sont en vis-à-vis avec le plan séparateur (définies dans la partie précédente).

- Une seconde méthode que nous utilisons est basée sur la définition d'une distance d'alerte -adist- (figure 3.15).

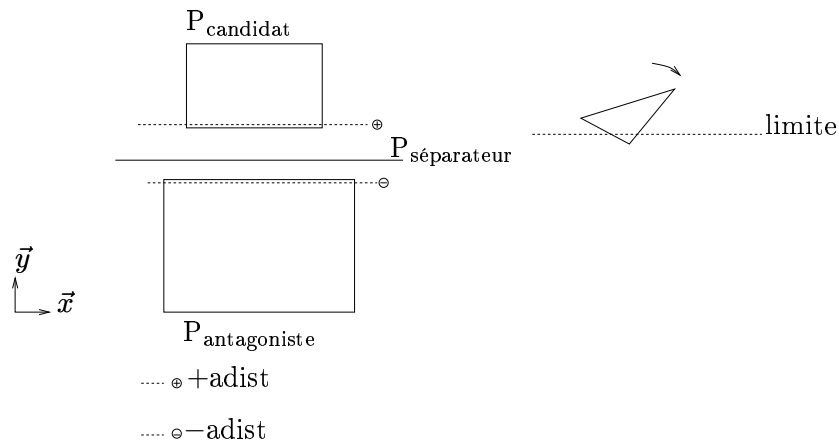


FIG. 3.15 – Détermination de la distance d'alerte



Le but est de choisir les sommets qui se trouvent sous cette distance d'alerte par rapport au plan séparateur ; si on est dans une configuration de basculement de bloc, dès que le sommet supérieur traversera cette limite alors il sera pris pour être projeté.

### Principe

Connaissant la distance algébrique minimale pour le polyèdre candidat noté  $d_{can}$  et la distance algébrique maximale pour le polyèdre antagoniste noté  $d_{ant}$ , définies par Cundall :

- $d_{can} = \min_{j=1, \dots, N_{can}} \{ \vec{N}_{moy} \cdot \vec{CS}_j^{can} \}$  représente la distance algébrique du plus proche sommet noté  $V_{can}$  du polyèdre candidat au plan séparateur,
- $d_{ant} = \max_{i=1, \dots, N_{ant}} \{ \vec{N}_{moy} \cdot \vec{CS}_i^{ant} \}$  représente la distance algébrique du plus proche sommet noté  $V_{ant}$  du polyèdre antagoniste au plan séparateur.

On est confrontés à trois situations :

- Soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est strictement positive : on a alors "non-contact",
- Soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est nulle : on a alors un contact "affleurant",
- Soit la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est strictement négative : on a alors un contact "interpénétré".

Le principe est de déterminer une distance moyenne " $d_{moy}$ ", intégrant les deux distances algébriques auxquelles est ajoutée une distance d'alerte :

$$d_{moy} = + \left( \frac{d_{can} - d_{ant}}{2} \right) + \underline{adist} = \underline{+A} + \underline{adist} \quad (3.3.3)$$

Le terme  $\left( \frac{d_{can} - d_{ant}}{2} \right)$  représente la valeur moyenne des deux distances.

Dans le cas d'un contact "interpénétré", la différence  $(d_{can} - d_{ant})$  est strictement négative ; pour éviter de se trouver avec des valeurs négatives de A, on lui attribue la valeur maximale de l'intervalle  $[0; \frac{d_{can} - d_{ant}}{2}]$ .

Dans la figure suivante, on précise le rôle des signes  $\underline{+}$  de la formule (3.3.3). (la figure 3.16 est différente de ce que propose Nezami (Nezami et al. (2004)) dans son article.

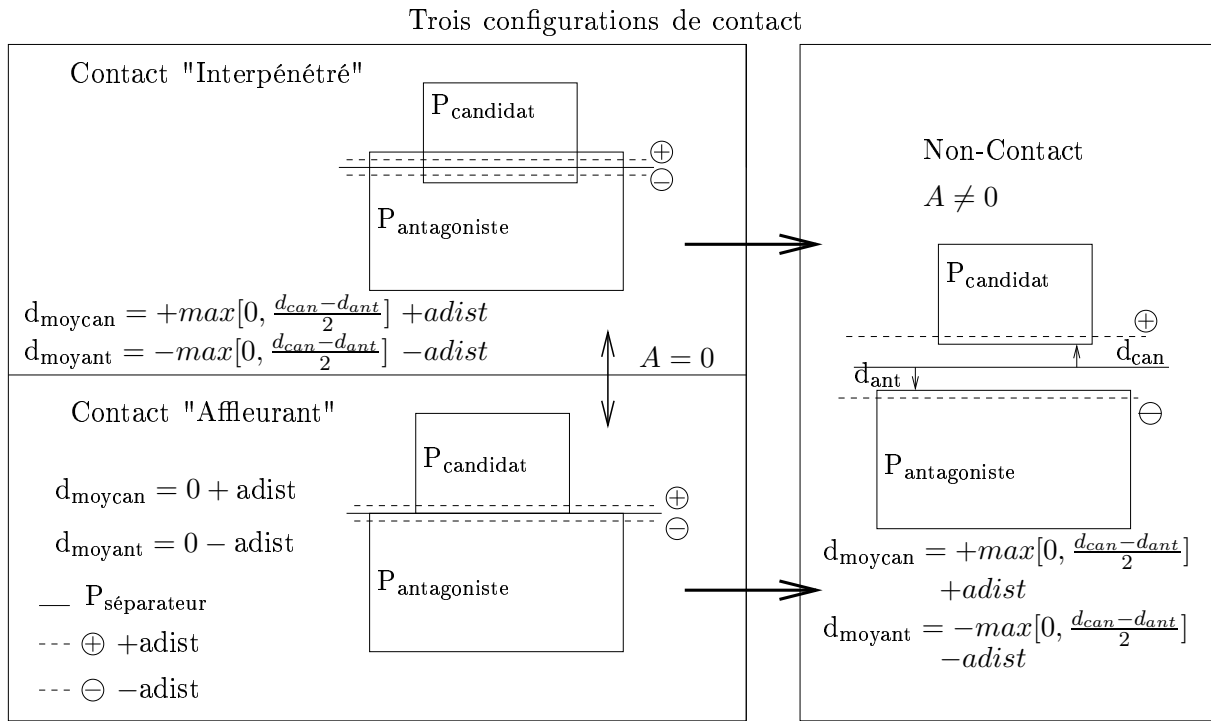


FIG. 3.16 – Détermination de la distance d’alerte suivant les trois configurations de contact

On en déduit alors les sommets à projeter grâce à la distance d’alerte (voir figure 3.17).

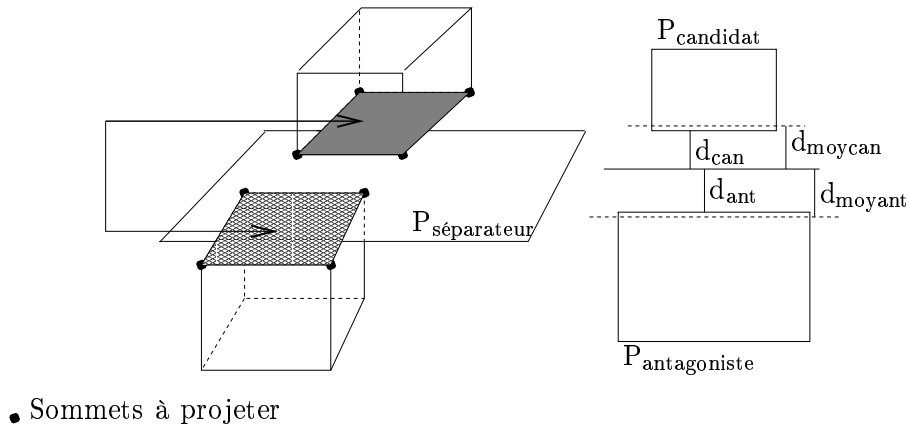


FIG. 3.17 – Faces des polyèdres en vis-à-vis avec le plan séparateur

- Pour l’antagoniste  $d_{ant} \geq d_{moyant}$ ,
- Pour le candidat  $d_{can} \leq d_{moycan}$ .

Pour ne projeter que les sommets appartenant aux faces en vis-à-vis, on définit une distance d’alerte variable " $adist_{var}$ " dépendant de la taille de chaque polyèdre.

### Détermination de la distance d’alerte variable

- Pour le polyèdre antagoniste

Connaissant le barycentre du polyèdre  $G_{ant}$  et le point critique défini par Cundall (le sommet noté  $V_{ant}$  le plus proche du plan séparateur), on définit une distance (norme d’ordre 2) entre ces deux points :

$$D_{ant} = \|\vec{G}_{ant}V_{ant}\|$$

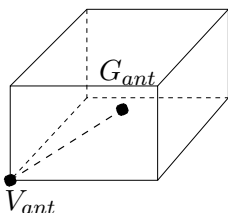


FIG. 3.18 – Distance entre  $G_{ant}$  et  $V_{ant}$

- Pour le polyèdre candidat

On fait de même pour le polyèdre candidat c’est-à-dire que, on calcule la norme d’ordre 2 entre le barycentre du polyèdre et le point critique défini par Cundall (le sommet noté  $V_{can}$  le plus proche du plan séparateur), on en déduit la distance entre ces deux points :

$$D_{can} = \|\vec{G}_{can}V_{can}\|$$

On choisit la distance d’alerte variable comme étant la valeur minimale entre la distance  $D_{an}$  et  $D_{cd}$  :  $adist_{var} = \min(D_{an}, D_{cd})$  On a ainsi un ordre de grandeur à ne pas dépasser.

On choisit de prendre une distance d’alerte petite, la norme sera multipliée par un  $\epsilon$  de l’ordre de  $10^{-2}$

La distance d’alerte variable s’écrit ainsi :

$$adist_{var} = \epsilon * \min(D_{an}, D_{cd})$$

D’où :

- pour le candidat  $d_{moycandidat} = +\max[0; \frac{d_{can}-d_{ant}}{2}] + \epsilon * \min(D_{an}, D_{can})$ ,
- pour l’antagoniste  $d_{moyantagoniste} = -\max[0; \frac{d_{can}-d_{ant}}{2}] - \epsilon * \min(D_{an}, D_{can})$

#### 3.3.3.b Contact à joint de mortier

En présence de mortier entre les blocs, l’épaisseur du joint n’est pas négligeable. Pour prendre en compte ce volume, on a besoin d’un nombre de points de contact important.

Deux stratégies de projection des sommets sont possibles :

- stratégie de détection des sommets par la méthode de Cundall

Cette méthode a ses limites, comme on peut le constater sur la figure 3.19 . En effet, elle ne prend pas en compte tous les sommets (risque de détecter seulement un segment : difficulté pour créer le volume du joint à partir de ce segment).

- stratégie de prise en compte de l'épaisseur du joint.

Connaissant le plan séparateur, on divise l'épaisseur du joint en deux et on récupère tous les sommets qui sont à une distance du plan séparateur inférieure à cette demi épaisseur.

Le nombre de contact est beaucoup plus important que lors de l'utilisation de la stratégie précédente : ceci garantit la mise en place du volume de joint entre les blocs.

Comme précédemment, une fois les sommets détectés, on insère une distance d'alerte dépendant de la taille du polyèdre.

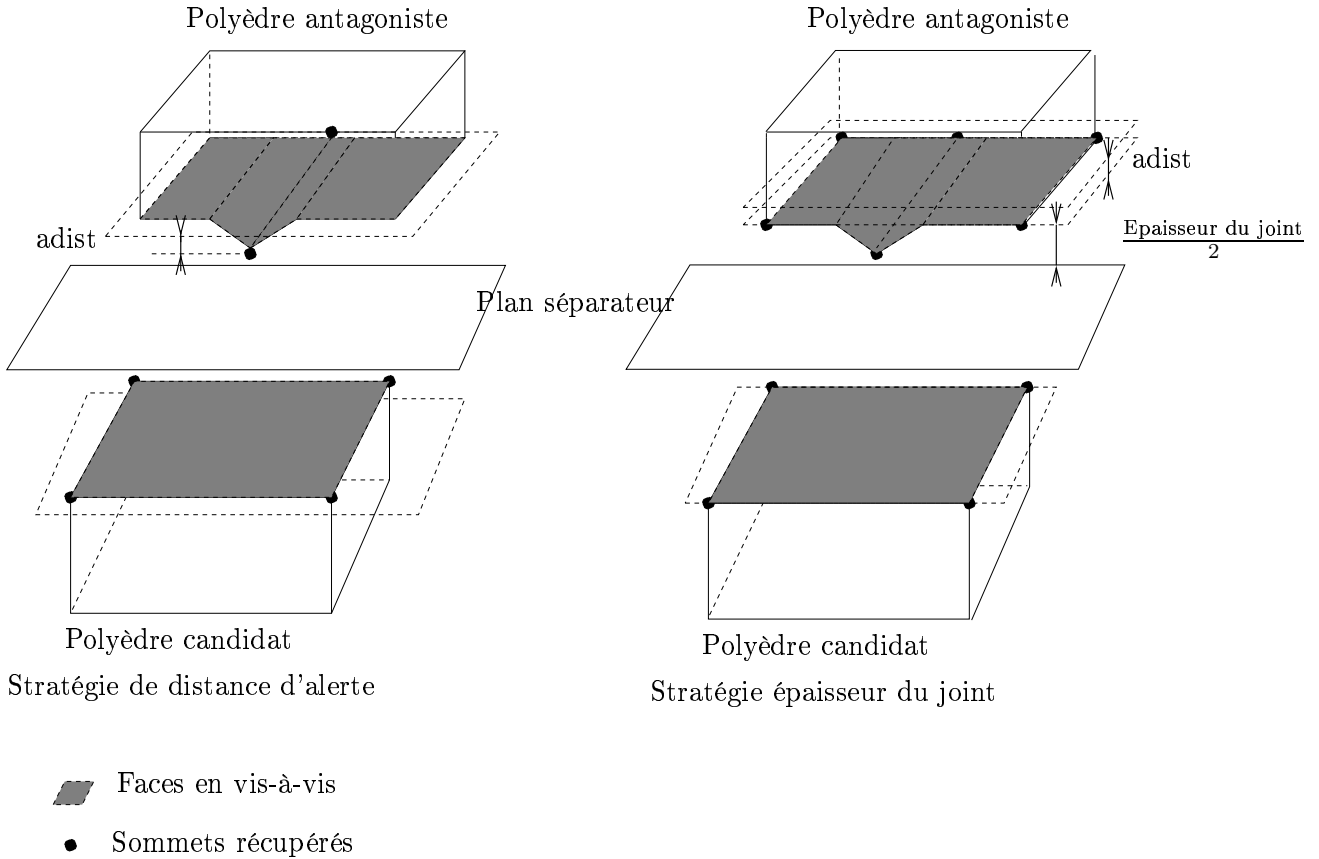


FIG. 3.19 – Définition de l'épaisseur du joint

La détection "fine" est ainsi établie. On a un ensemble de points (sommets de l'antagoniste et sommets du candidat) projetés sur le plan séparateur.

On est alors face à deux situations :

- soit le nombre de sommets est inférieur ou égal à trois : on récupère directement la liste ordonnée des sommets ( $liste_{Sant}$  et  $liste_{Scan}$ ) ,
- soit le nombre de sommets est strictement supérieur à trois : on en calcule alors l'enveloppe convexe et on obtient ainsi une liste ordonnée des sommets.

### 3.4 Calcul de l'enveloppe convexe

L'objectif est de calculer la "surface" (ou "zone") de recouvrement de l'ensemble de points, provenant des sommets de l'antagoniste et du candidat.

On commence par calculer l'enveloppe convexe de chaque ensemble de sommets. Après quoi, on calculera l'intersection des deux contours. Enfin, on positionnera les points de contacts dans cette surface.

Afin de faciliter la résolution de ces différentes étapes, on travaille dans un repère lié au plan séparateur.

#### 3.4.1 Méthode utilisée pour le calcul de l'enveloppe convexe

L'algorithme utilisé est celui de Jarvis (Leroy et Trimoreau (2000), O'Rourke (1998), Pion (1999), Guigue (2003)).

Méthode de l'emballage de paquets :

l'algorithme de Jarvis, appelé aussi parcours de Jarvis, calcule l'enveloppe convexe d'un ensemble de points par la technique du paquet cadeau (celle-ci simule l'enroulement de l'ensemble des points par une ficelle).

- En partant d'un sommet de l'enveloppe, on effectue un balayage circulaire avec une droite jusqu'à rencontrer un nouveau point qui devient le sommet suivant ; l'algorithme s'arrête lorsqu'on tombe sur le point de départ.
- Comme point de départ, on peut choisir un point dont l'une des coordonnées est minimale ou maximale.
- L'algorithme est similaire au tri par sélection où, à chaque étape, on sélectionne le point qui minimise le changement d'angle.
- L'angle peut être approximé par une fonction theta.

#### Calcul de l'enveloppe convexe

On réalise tout d'abord un changement de variable, passant du repère général au repère du plan séparateur.

Au départ, on a un nuage de points comme ceux représentés sur la figure 3.20.

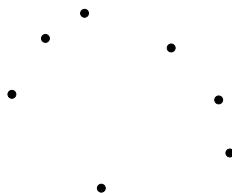


FIG. 3.20 – Méthode de l'enveloppe convexe : nuage de points

Ce nuage de points a la particularité d'être convexe ; en effet, la projection des sommets sur le plan séparateur est réalisée à partir de la face convexe antagoniste en vis-à-vis avec la face convexe candidate.

On choisit le point ayant la plus grande abscisse noté P1 et on trace une droite verticale passant par P1 de coordonnées  $(x_1, y_1)$  et le point A (le point A a les coordonnées suivantes  $(x_1, y_1+1)$ )

c'est-à-dire la même abscisse que  $P_1$  et l'ordonnée est augmenté de un vis-à-vis de l'ordonnée de  $P_1$ ).

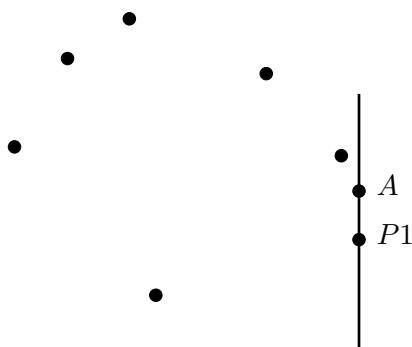


FIG. 3.21 – Méthode de l'enveloppe convexe : point initial  $P_1$

On cherche ensuite le sommet suivant  $P_2$  tel que l'angle entre le vecteur  $P_1\vec{A}$  et le vecteur  $P_1\vec{P}_i$  soit minimal ( $P_i$  représente l'ensemble des sommets à parcourir). Un test supplémentaire est réalisé afin d'éviter que les coordonnées de  $P_i$  ne soient égales à celles de  $P_1$ . Pour cela, on calcule la norme entre le sommet  $P_1$  et les sommets  $P_i$  : il faut que la norme soit supérieure à  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ). Une fois le point  $P_2$  trouvé, on trace une droite entre le sommet  $P_1$  et le sommet  $P_2$  ; on refait le test avec l'ensemble des sommets.

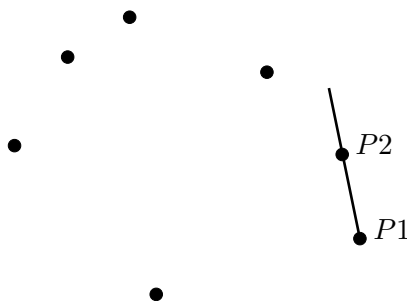


FIG. 3.22 – Méthode de l'enveloppe convexe : point secondaire  $P_2$

On généralise ce test pour l'ensemble des points.

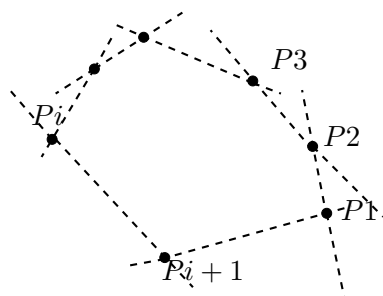


FIG. 3.23 – Méthode de l'enveloppe convexe : algorithme généralisé à  $n$  points

Un test d'arrêt est réalisé permettant ainsi de terminer le test lorsque le point  $P(i+1)$  est en  $P1$ . Une fois le calcul de l'enveloppe établi pour les sommets projetés de l'antagoniste et les sommets projetés du candidat, on a deux listes de points ordonnés notées  $list_{e_{antagoniste}}$  et  $list_{e_{candidat}}$ .

### 3.4.2 Détermination de la zone de recouvrement

L'exemple de la figure 3.24 illustre un cas de contact que nous pouvons rencontrer dans des structures en maçonnerie.

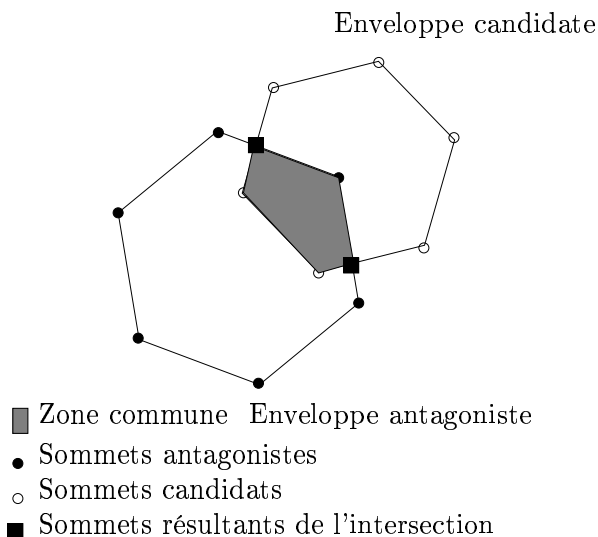


FIG. 3.24 – Zone de recouvrement des surfaces détectées

Deux étapes sont nécessaires :

- détermination des sommets appartenants à la zone commune (zone de recouvrement des faces) (figure 3.24) (cours d'infographie (Plastock et Kalley (2000))).

Pour déterminer si un sommet appartient à la zone commune, on calcule un produit vectoriel entre les segments orientés de l'enveloppe antagoniste avec l'ensemble des sommets candidats à tester et vis-versa.

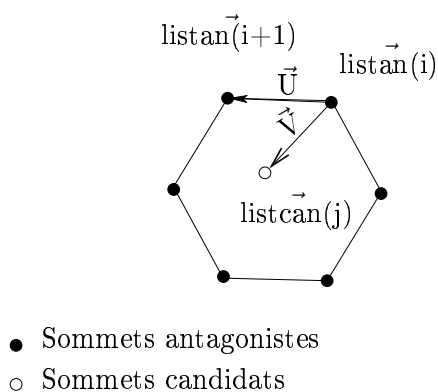


FIG. 3.25 – Test d'appartenance des sommets à la zone de recouvrement

Soit,

- listan(i) : liste ordonnée des sommets antagonistes,
- listcan(j) : liste ordonnée des sommets candidats,
- $\vec{U} = \text{listan}(i)\vec{\text{listan}}(i + 1)$ ,
- $\vec{V} = \text{listan}(i)\vec{\text{listcan}}(j)$ .

Si pour  $j \in [1, nb\_sommets\_can]$ ,

Pour tout  $i \in [1, nb\_sommets\_ant]$   $\vec{U} \cdot \vec{V} \leq 0$  ou  $\vec{U} \cdot \vec{V} \geq 0 \Rightarrow S_j^{can} \in [\text{enveloppe commune}]$

Le test est réalisé dans l'autre sens :

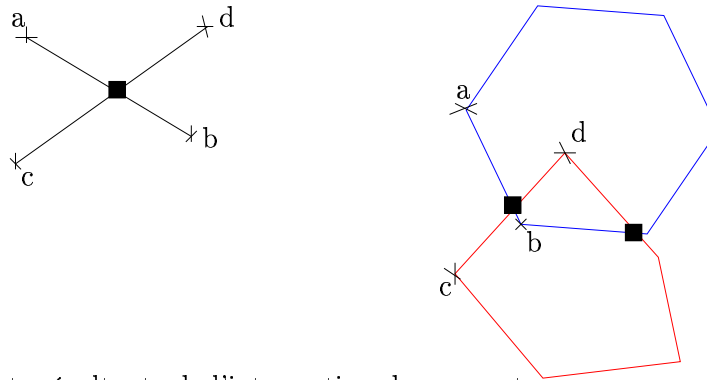
Si pour  $i \in [1, nb\_sommets\_ant]$ ,

Pour tout  $j \in [1, nb\_sommets\_can]$   $\vec{U} \cdot \vec{V} \leq 0$  ou  $\vec{U} \cdot \vec{V} \geq 0 \Rightarrow S_i^{ant} \in [\text{enveloppe commune}]$

A la fin des deux tests, on a une liste des sommets antagonistes et une liste des sommets candidats qui sont communs aux deux enveloppes.

- définition de nouveaux points de contacts résultants de l'intersection des deux enveloppes (figure 3.24).

Cette partie traite des sommets résultants de l'intersection entre segments, comme représentés sur la figure 3.26, pour les segments [ab] et [cd] : Pour trouver les coordonnées du point d'intersection



■ Sommets résultants de l'intersection de segments

FIG. 3.26 – Sommets résultants de l'intersection de segments des surfaces détectées

entre les segments [ab] et [cd], on écrit la représentation paramétrique de l'ensemble des segments (O'Rourke (1998)).

Pour un segment [ab], la représentation paramétrique s'écrit :  $p(s) = a + s \cdot A$ .

Avec,

$$A = b - a$$

$$s \in [0; 1]$$

On fait de même pour le segment [cd] :  $q(t) = c + t \cdot A$ .

Avec,

$$A = d - c$$

$$t \in [0; 1]$$



On a donc les paramètres  $s$  et  $t$  définis par :

$$s = [a_0(d_1 - c_1) + c_0(a_1 - d_1) + d_0(c_1 - a_1)] / D$$

$$t = -[a_0(c_1 - b_1) + b_0(a_1 - c_1) + c_0(b_1 - a_1)] / D$$

avec  $D$  le dénominateur défini par :

$$D = a_0(d_1 - c_1) + b_0(c_1 - d_1) + d_0(b_1 - a_1) + c_0(a_1 - b_1)$$

0 et 1 indiquent respectivement les coordonnées  $x$  et  $y$

Si  $D=0$  alors les segments sont parallèles ; dans notre cas, on prendra  $D$  différent de zéro.

Les coordonnées du point d'intersection s'écrivent :

$$p(x) = a_0 + s * (b_0 - a_0)$$

$$p(y) = a_1 + s * (b_1 - a_1)$$

On a ainsi les coordonnées des sommets intersections.

### 3.5 Typologie des situations de contacts

On présente différentes situations de contact de type : face/face, arête/face, arête/arête, sommet/face, sommet/sommet et sommet/arête) dans la figure 3.27.

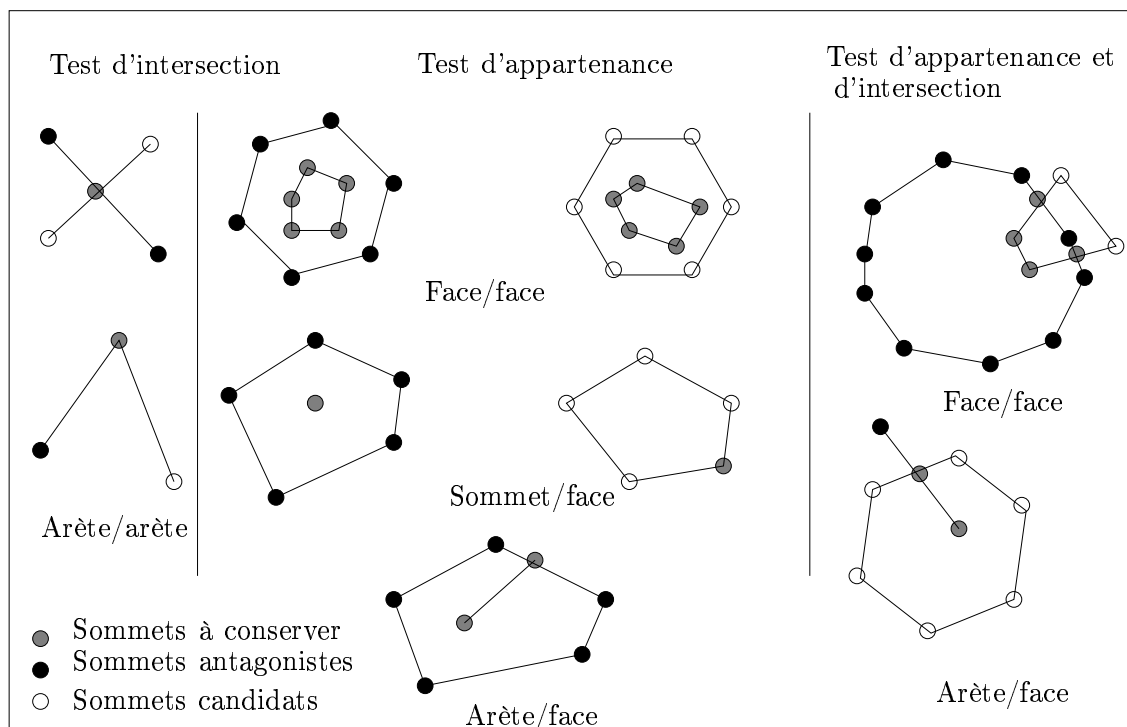


FIG. 3.27 – Algorithme de détection des contacts spécifiques : typologie des situations de contact

Le nouvel algorithme de détection couvre l'ensemble des situations de contacts et permet ainsi de gérer la plupart des assemblages en maçonnerie.

Parmi l'ensemble des points de contact, on en conserve au maximum quatre par surface détectée. Ces quatre points permettent de représenter la géométrie de la surface de contact qui est souvent de forme polygonale dans les maçonneries. De plus, la stabilité est mieux gérée et permet

de prévoir les éventuels problèmes de basculement. Ces points de contacts seront appelés "noeuds" c'est-à-dire le lieu où les réactions de contact seront calculées.

Dans la situation où le nombre de noeuds est supérieur à quatre par surface détectée, on calcule le barycentre du nuage de noeuds. On applique la notion "d'augmentation d'inertie" du nuage jusqu'à obtenir quatre noeuds; ceux-ci seront donc les plus éloignés du barycentre.

On verra dans le chapitre 5 que le nombre de noeuds de contacts peut influencer la stabilité de la surface de contact.

Au final, l'algorithme retourne les coordonnées des noeuds dans le repère général, la normale au plan séparateur et un repère associé au plan séparateur.

### 3.6 Originalité de la modélisation proposée et exemples d'application de l'algorithme à des structures réelles en 3D

L'algorithme de résolution est basé sur la méthode NSCD (Non-Smooth Contact Dynamics) (Jean (1995a), Jean et Moreau (1992), Moreau (1988), Moreau (1994)). Cette méthode permet de modéliser le comportement mécanique d'assemblage de blocs interagissant entre eux, en dynamique. Les actions inter granulaires de contact frottant sont décrites par des conditions unilatérales, des lois de chocs élastiques ou inélastiques, du frottement sec de Coulomb.

On présente ci-dessous trois structures réelles et un cas académique modélisés avec le nouvel algorithme de détection des contacts.

Les informations sur la géométrie des structures sont :

- soit données à partir de relevés de mesures effectués directement sur le site,
- soit fournies par des tailleurs de pierre.

#### 3.6.1 Structures réelles à grand nombre de blocs

Le pont Julien illustre la possibilité de modéliser une structure en grand appareil comportant un grand nombre de blocs.

La modélisation reprend la géométrie des blocs de la structure réelle (figure 3.28) (Chetouane (2004)). La phase de détection des contacts est très importante dans une telle structure car elle



FIG. 3.28 – Structure réelle du Pont Julien

met en oeuvre des milliers de contacts pour en assurer la stabilité. Le contact est essentiellement de type face/face et arête/face.

- **Contraintes et exigences**

La structure est composée de 3267blocs.

La loi d'interaction entre les blocs est de type frottement sec de Coulomb standard, avec une valeur du coefficient de frottement de 0,8 (Chetouane et al. (2005)). La structure est modélisée sous poids propre afin de vérifier l'efficacité de l'algorithme pour détecter l'ensemble des contacts.

- **Evaluation des déplacements des blocs dans le pont**

A la fin du calcul, la structure a atteint sa position d'équilibre (figure 3.29) :

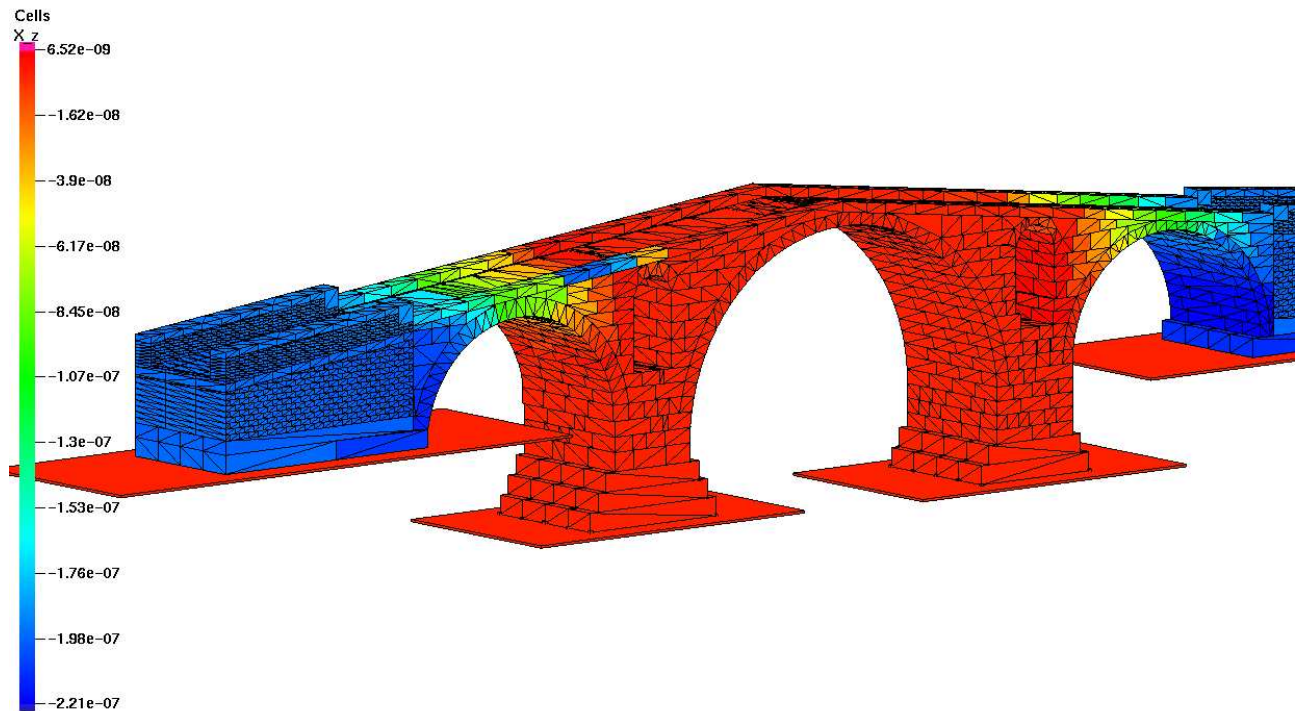


FIG. 3.29 – Répartition des déplacements des blocs dans le pont

Le terme  $X_Z$  de la figure 3.29 représente le déplacement du bloc suivant la direction verticale. Durant la simulation, les iso-déplacements montrent qu'aucun bloc n'a bougé de façon physiquement significative.

La figure 3.30 présente l'évolution au cours du temps du nombre de contacts détectés en fonction de leur nature (glissant, collant ou non-contact). L'efficacité de ce nouvel algorithme montre d'une part que les contacts de type "non-contact" sont au nombre de 0 (l'algorithme détecte donc tous

les polyèdres candidats au contact) et d'autre part que le nombre de contact de type "collant" est quasiment égal au nombre "total" des contacts. La structure se stabilise au bout de 60 itérations ( $h = 10^{-4}s$ ).

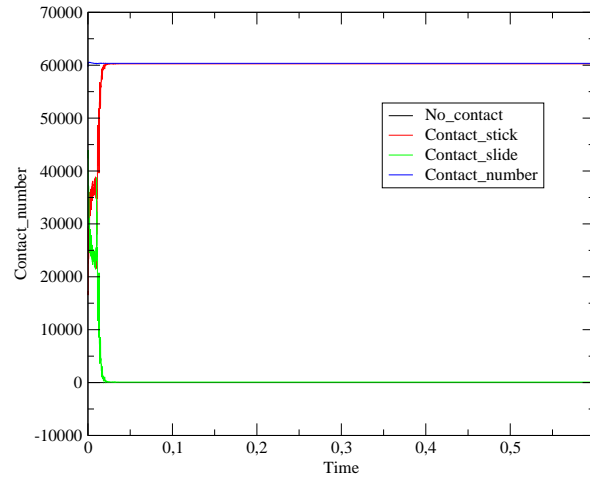


FIG. 3.30 – Nombre de contacts en fonction de leur nature (pont Julien)

La modélisation de ce pont, en utilisant l'algorithme existant avant notre contribution, a montré ses limites à la détection des contacts de type face/face. Comme on peut le constater sur la figure 3.31, après quelques pas de temps, certains blocs tombent et les joints s'ouvrent.

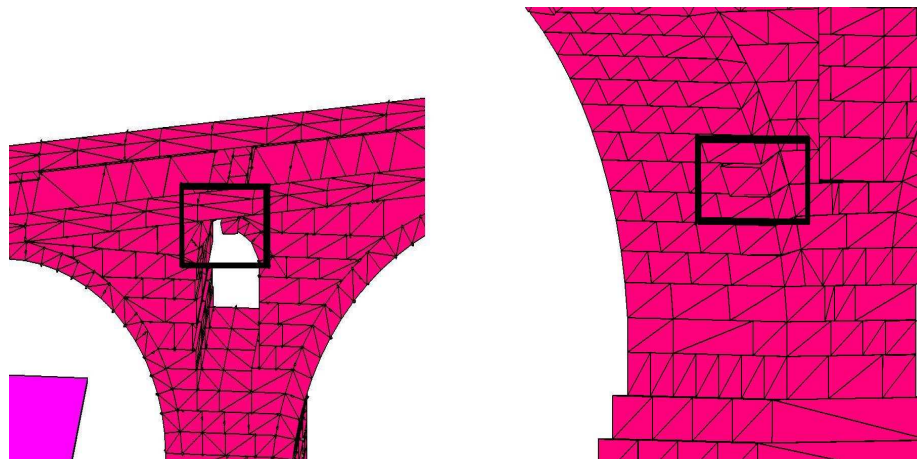


FIG. 3.31 – Détection imparfaite de contacts face/face

### 3.6.2 Structures réelles précontraintes : escalier Ridolfi et coupôle de Junas

- Escalier Ridolfi

L'escalier Ridolfi illustre la possibilité d'intégrer des précontraintes dans une structure. Les caractéristiques de cet escalier, ont été fournies par la faculté d'architecture de Bari (D'Amato (D'amato (2005))). L'ouvrage, présenté à la 40<sup>ième</sup> foire de Vérone en 2005 (figure 3.32) est monté à sec et armé avec des câbles en acier. L'équilibre est obtenu grâce à une précontrainte dans la structure.

- Structure de l'escalier



FIG. 3.32 – L'escalier sur chantier, et à la 40<sup>ième</sup> foire de Vérone

La figure 3.33 présente la géométrie de la marche dessinée sous le logiciel de CAO Autocad 2000.

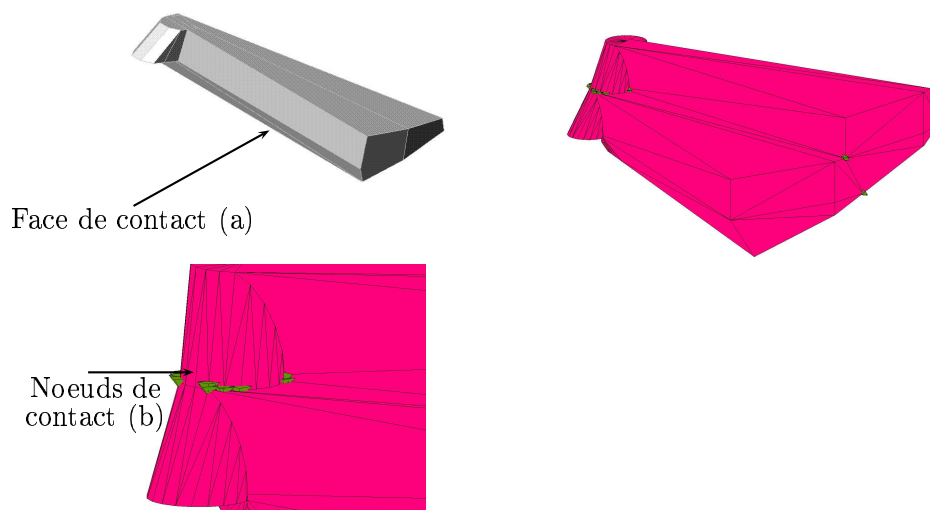


FIG. 3.33 – Structure C.A.O d'une marche (a) et contact entre deux marches (b)

La forme initiale concave d'une marche est subdivisée en un assemblage de dix blocs convexes, afin

de pouvoir utiliser l'algorithme développé. Pour la simulation numérique, chaque bloc convexe est décomposé en tétraèdres. Le contact entre deux marches est de type face/face (figure 3.33).

- **Contraintes et exigences**

L'escalier est constitué de 20 marches (203 blocs).

La loi de comportement à l'interface entre les marches est de type frottement sec de Coulomb standard. Le coefficient de frottement est de 0.8. La mise en place de la précontrainte et son dimensionnement seront présentés dans le chapitre 5. La structure précontrainte est modélisée sous poids propre.

- **Evaluation de la répartition des déplacements des marches dans l'escalier**

A la fin du calcul, la structure atteint sa position d'équilibre (figure 3.34) :

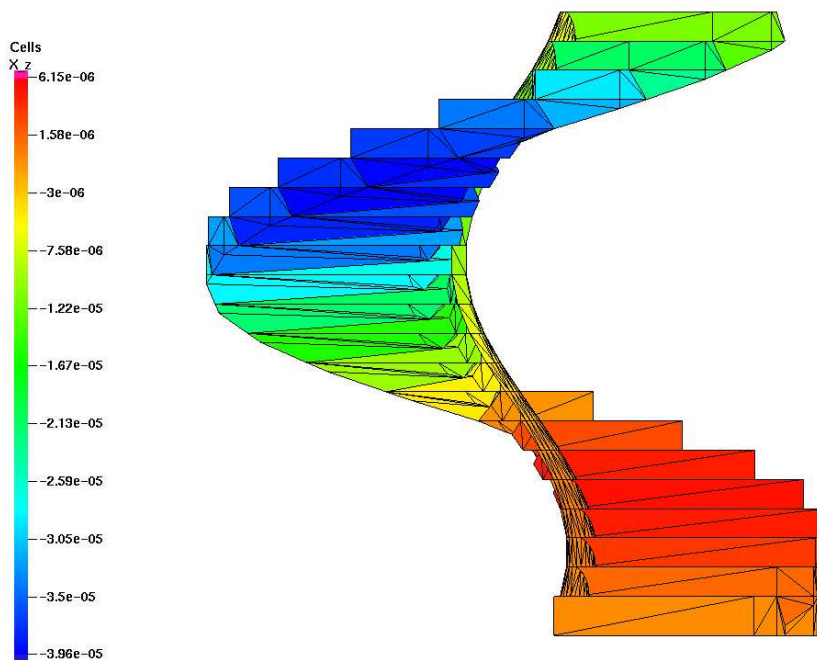


FIG. 3.34 – Répartition des déplacements des blocs dans l'escalier

Les iso-déplacements montrent qu'aucun bloc n'a bougé de façon physiquement significative. Comme pour l'exemple du Pont Julien, la figure 3.35 représente l'évolution au cours du temps du nombre de contacts en fonction de leur nature (glissant, collant ou non-contact). On retrouve les mêmes conclusions que pour l'exemple précédent à savoir que la majorité des contacts est de type "collant" et que les "non-contact" sont au nombre de 0. La structure se stabilise au bout de 40 itérations ( $h = 10^{-5} s$ ).

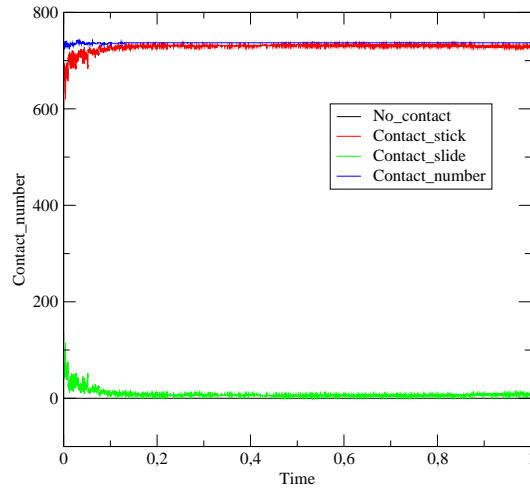


FIG. 3.35 – Nombre de contacts en fonction de leur nature (escalier Ridolfi)

• **Coupôle de Junas**

Comme l’escalier, la coupôle illustre la possibilité d’intégrer une précontrainte. De plus, la conception de cette structure a la particularité d’avoir des contacts essentiellement de type arête/face et arête/arête (figure 3.36).

La structure est constituée de blocs en grand appareil, sans mortier, et renforcée par un câble de précontrainte permettant la stabilité de la structure.

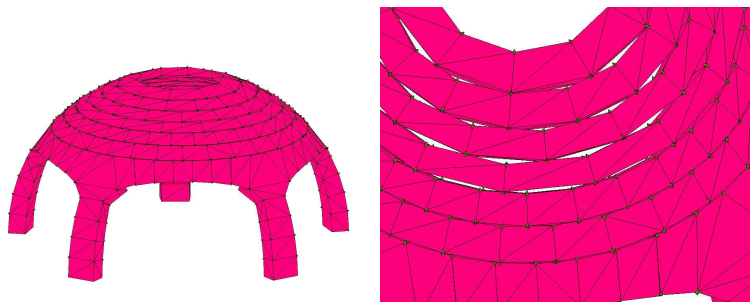


FIG. 3.36 – Représentation des noeuds de contact dans la coupôle

• **Contraintes et exigences**

La structure, constituée de 180 blocs, est une voûte en pierre de huit mètres de diamètre et quatre mètres de hauteur, elle s’inscrit dans une demi-sphère. Elle comporte un trou au sommet d’un mètre de diamètre. Elle repose sur cinq piliers de deux mètres de hauteur, soixante dix centimètres de largeur et quarante centimètres d’épaisseur. La loi de comportement à l’interface entre les marches

est de type frottement sec de Coulomb standard. Le coefficient de frottement est de 0.8. La mise en place de la précontrainte ainsi que son dimensionnement seront précisés dans le chapitre 5.

- **Evaluation de la répartition des déplacements des blocs dans la coupôle**

A la fin du calcul, la structure atteint sa position d'équilibre (figure 3.37).

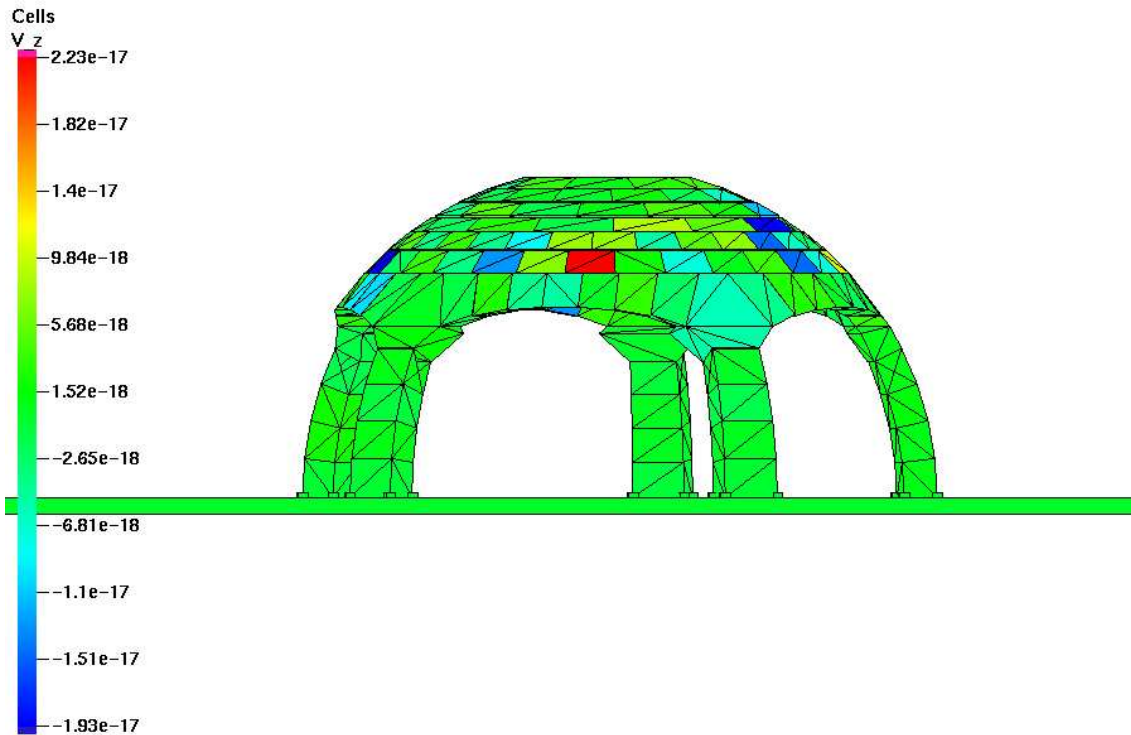


FIG. 3.37 – Représentation des vitesses des blocs dans la coupôle

Le terme  $V_z$  de la figure 3.37 représente la vitesse du bloc dans la direction verticale. Les iso-vitesses montrent qu'aucun bloc n'a bougé durant la simulation, de façon physiquement notable.

Comme pour l'exemple du Pont Julien, la figure 3.38 représente l'évolution au cours du temps du nombre de contacts en fonction de leur nature (glissant, collant ou non-contact). On retrouve les mêmes conclusions que dans l'exemple précédent à savoir que la majorité des contacts est de type "collant" et que les "non-contact" sont au nombre de 0. La structure se stabilise au bout de 40 itérations ( $h = 10^{-4}s$ ).



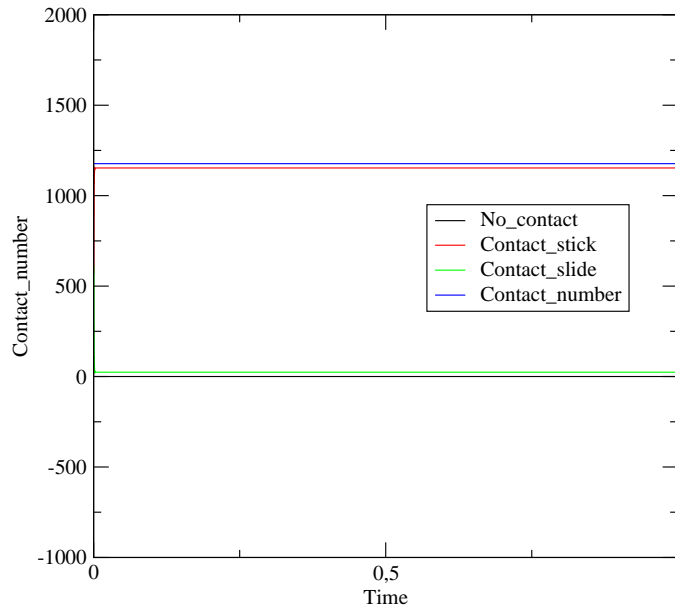


FIG. 3.38 – Nombre de contacts en fonction de leur nature (coupôle de Junas)

### 3.6.3 Structure académique impliquant une épaisseur de joint

Cet exemple illustre la possibilité d'intégrer une interface d'épaisseur non-nulle intégrant un comportement propre.

- **Contraintes et exigences**

Les blocs sont tous des cubes d'un mètre de côté.

La loi de comportement à l'interface entre les blocs est de type frottement sec de Coulomb standard. Le coefficient de frottement est de 0.6. On intègre, dans la loi de contact, un gap initial non nul. Ce gap initial correspond à l'épaisseur de joint, sa valeur ici vaut 1cm. La structure est modélisée sous poids propre afin de montrer que la détection est efficace dans les situations de non-contact.

- **Evaluation de la répartition des déplacements des blocs dans le pilier**

A la fin du calcul, la structure atteint sa position d'équilibre (figure 3.39).

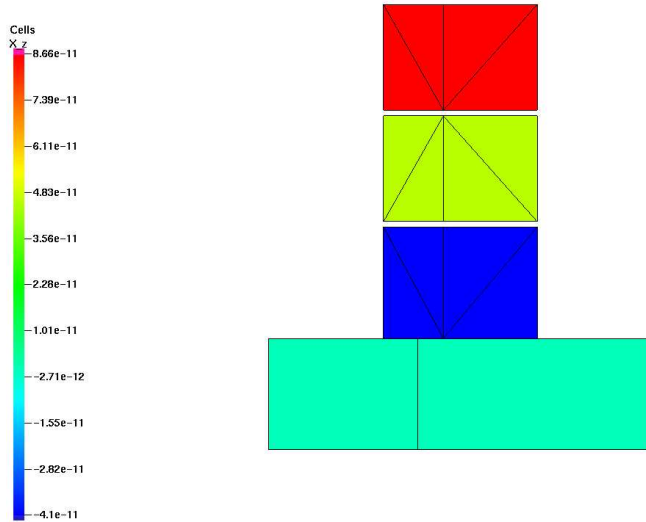


FIG. 3.39 – Intégration d'un joint d'épaisseur non nulle entre les blocs

Le déplacement des blocs suivant la verticale est négligeable (figure 3.39). L'algorithme, dans le cas de "non-contact", montre ainsi son efficacité.

### 3.7 Conclusion

Ce travail présente un nouvel algorithme de détection des contacts entre polyèdres rigides 3D convexes dont l'originalité consiste à considérer des contacts surfaciques et à les traiter de manière particulière. Les contacts dans une maçonnerie sont essentiellement de type face/face et arête/face. Le choix s'est porté sur la prise en compte au maximum de quatre noeuds de contacts par surface détectée. On verra dans le chapitre 5 que le nombre de noeuds de contacts peut influencer la stabilité numérique du contact et donc de la structure.

La spécificité de l'algorithme proposé consiste en la détection des sommets des polyèdres dont les faces sont en vis-à-vis en utilisant le plan séparateur de Cundall. Les sommets sont ensuite projetés sur ce plan. Les enveloppes convexes de part et d'autre du plan sont définies ; leurs intersections caractérisent la zone polygonale de contact dont les sommets sont les noeuds de contacts.

Des simulations numériques ont permis de vérifier l'efficacité de l'algorithme à détecter les contacts dans une structure à grand nombre de blocs (pont Julien), précontrainte (escalier Ridolfi), précontrainte avec une géométrie de contact complexe (coupôle de Junas), ou sur un cas académique intégrant une épaisseur de joint.

L'approche proposée pour l'évaluation des déplacements dans les structures maçonnées apporte des informations plus précises que les méthodes classiques. Ce nouvel algorithme permet d'envisager l'intégration d'une loi de contact cohésive pour modéliser la présence d'un mortier.

Les surfaces de contacts conduisent souvent à un problème statiquement indéterminé (nombre d'inconnues d'efforts plus importants que le nombre d'équations). Cet aspect fait l'objet du chapitre 4.



---

## Chapitre 4

# Traitement des contacts surfaciques et application aux maçonneries

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Résolution locale de problèmes statiquement indéterminés . . . . .</b>	<b>140</b>
4.1.1	Modélisation des réactions de contact avec frottement dans le cas 2D . . .	140
4.1.2	Modélisation des réactions de contact sans/avec frottement en 3D . . . .	145
4.1.2.a	Contact sans frottement - Modélisation des réactions normales .	146
4.1.2.b	Contact avec frottement- Modélisation des réactions tangentielles	148
4.1.3	Algorithme de résolution . . . . .	153
4.1.3.a	Initialisation du problème-résolution des équations statiques dans le repère local . . . . .	154
4.1.3.b	Résolution des équations dynamiques dans le repère local . . . .	156
<b>4.2</b>	<b>Mise en oeuvre numérique . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>4.3</b>	<b>Applications à un contact solide plan . . . . .</b>	<b>158</b>
4.3.1	Surface de contact à 3 noeuds . . . . .	158
4.3.2	Surface de contact à 4 noeuds . . . . .	166
4.3.3	Cas limite : le solide tend vers le basculement . . . . .	176
<b>4.4</b>	<b>Conclusion et perspectives . . . . .</b>	<b>177</b>

---

Les contacts entre les polyèdres réguliers sont essentiellement de type face/face et arête/face. On a vu dans le chapitre 3 que la détection des contacts entre deux blocs est importante pour assurer la qualité de la stabilité numérique de la solution. Le traitement des réactions de contact avec frottement se complique alors en raison du nombre de liaisons nettement plus important que dans les milieux granulaires de formes aléatoires ou sphériques. Ces liaisons de contacts conduisent souvent à un problème statiquement indéterminé, c'est-à-dire à une indétermination du système d'équations due au nombre d'inconnues d'efforts de contact plus important que le nombre d'équations de la dynamique.

On propose dans ce chapitre, la définition d'éléments de contact entre solides rigides polyédriques convexes basés sur un principe de localisation des efforts d'interaction en des noeuds et conditionnés pour une résolution locale sans indétermination. L'algorithme de résolution général utilisé dans la méthode Contact Dynamics (Moreau (1999b), Moreau (1997)) est basé sur :

- l'étude de l'équilibre relatif successif de chaque solide de la structure,
- la connaissance des approximations successives des interactions réduits à une action ponctuelle,
- une résolution noeud par noeud de contact.

Dans certaines applications, le frottement et le nombre de noeuds de contact conduisent à une indétermination du système d'équations (Moreau (2005)). Sans frottement, une liaison plane doit être définie par trois contacts ponctuels pour être isostatique et dans le cas avec frottement, le problème est déjà statiquement indéterminé.

C'est pourquoi, nous proposons une nouvelle approche qui consiste :

- d'une part, en une modélisation des contacts surfaciques et linéiques sous forme d'élément de contact évitant l'indétermination locale, permettant de calculer localement les inconnues de liaisons entre deux solides,
- d'autre part, en un algorithme de résolution du problème utilisant une stratégie d'activation successive des liaisons permettant de lever l'indétermination du problème global.

## 4.1 Résolution locale de problèmes statiquement indéterminés

On s'intéresse d'abord au cas en deux dimensions pour expliquer plus simplement les hypothèses qui seront généralisées par la suite au cas en trois dimensions.

### 4.1.1 Modélisation des réactions de contact avec frottement dans le cas 2D

Dans un modèle en deux dimensions, le contact entre polygones convexes est réduit à un segment. Pour illustrer cette modélisation, on considère un parallélépipède en contact avec un plan horizontal. Les réactions de contact sont localisées aux deux extrémités A et B.

Sur l'exemple de la figure 4.1, le parallélépipède a une hauteur de  $a$ , le segment de contact a une longueur de  $b$  et n'est soumis qu'à son poids propre ( $P = m * g$  avec  $g = -9.81m.s^{-2}$ ,  $m$  : masse du solide) au niveau de son centre de gravité. Pour modéliser un éventuel glissement, on applique une force  $\vec{F}$  telle que  $\vec{F} = F_x.\vec{x} + F_y.\vec{y}$ .

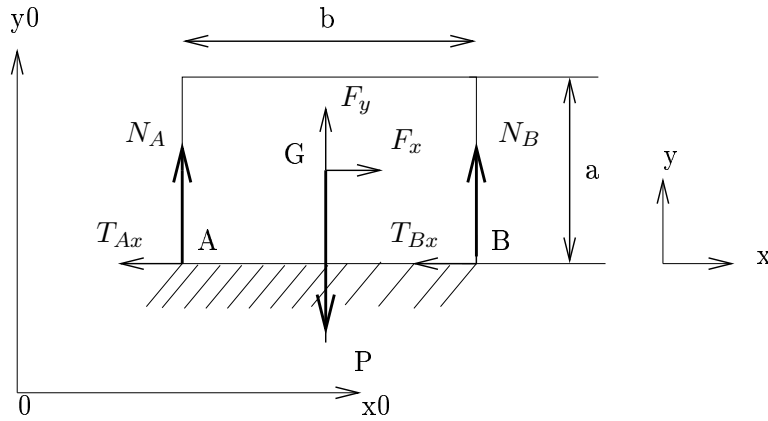


FIG. 4.1 – Hypothèse de répartition des réactions tangentielles dans une direction en 2D

Le parallélépipède est considéré restant toujours en contact frottant sec. L'accélération horizontale est inconnue et peut être nulle ainsi que la vitesse de translation dans le cas d'adhérence. Les 4 inconnues scalaires des réactions de contact sont  $(T_{Ax}, N_A)$  et  $(T_{Bx}, N_B)$ . La loi de frottement est la loi de Coulomb,  $f$  étant le coefficient de frottement. Nous sommes face à deux cas :

- soit la force appliquée n'est pas suffisante pour mettre en mouvement le solide (le module de  $F_x$  est inférieur à celui de la réaction tangentielle  $T$ ), le solide ne bouge pas (cas non-glissant). Le principe fondamental de la statique s'écrit :

$$T_{Ax} + T_{Bx} + F_x = 0 \quad (4.1.1)$$

$$N_A + N_B + F_y + P = 0 \quad (4.1.2)$$

$$-(T_{Ax} + T_{Bx})\frac{a}{2} + (N_A - N_B)\frac{b}{2} = 0 \quad (4.1.3)$$

Le nombre d'équations n'est pas suffisant pour résoudre le système. Nous ajoutons une relation supplémentaire non-linéaire en faisant l'hypothèse d'une proportionnalité des composantes tangentielles par rapport aux composantes normales dans la direction  $\vec{AB}$  :

$$\frac{T_{Ax}}{N_A} = \frac{T_{Bx}}{N_B} \quad (4.1.4)$$

Le parallélépipède est supposé rigide, la relation (4.1.4) traduit que le rapport effort tangentiel/effort normal du noeud A est le même que celui du noeud B : elle permet de lever l'indétermination. Des équations (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3), on déduit :

$$N_B = \frac{a}{2b}F_x - \frac{P}{2} - \frac{F_y}{2} \quad (4.1.5)$$

$$N_A = -\frac{a}{2b}F_x - \frac{P}{2} - \frac{F_y}{2} \quad (4.1.6)$$

Et de l'équation supplémentaire (4.1.4) :

$$T_{Bx} = -F_x \left( \frac{N_B}{N_A + N_B} \right) \quad (4.1.7)$$

$$T_{Ax} = -F_x + F_x \left( \frac{N_B}{N_A + N_B} \right) \quad (4.1.8)$$

Les 4 réactions de contact sont donc déterminées.

• soit la force appliquée est suffisante pour mettre en mouvement le solide c'est-à-dire que la loi de glissement de Coulomb  $T = P * f$  est vérifiée, le solide bouge (cas de glissement). Le système d'équations ci-dessous se résoud itérativement. L'indice n correspond à la numérotation de l'itération ; h le pas de temps de l'itération et u : la vitesse du solide suivant l'axe  $\vec{Ox}$ .

Compte tenu des discontinuités des fonctions vitesse et forces, les dérivées temporelles sont interprétées au sens des distributions. Les équations s'écrivent alors en termes de mesures différentielles.

On considère des pas de temps  $]t_i, t_{i+1}[$  de longueur  $h = t_{i+1} - t_i$ . Les équations s'écrivent :

$$h * T_{Ax}^{n+1} + h * T_{Bx}^{n+1} + h * F_x = m * (u^{n+1} - u^n) \quad (4.1.9)$$

$$N_A^{n+1} + N_B^{n+1} + F_y + P = 0 \quad (4.1.10)$$

$$-(T_{Ax}^{n+1} + T_{Bx}^{n+1}) \frac{a}{2} + (N_A^{n+1} - N_B^{n+1}) \frac{b}{2} = 0 \quad (4.1.11)$$

Comme pour le cas non-glissant, le système n'est pas déterminé (ici, une inconnue supplémentaire s'ajoute au système d'équations : la vitesse notée u). Nous ajoutons alors deux relations supplémentaires : l'hypothèse d'une proportionnalité des composantes tangentielles par rapport aux composantes normales dans la direction  $\vec{AB}$ . Le matériau est supposé isotrope, en rapport avec la condition de glissement de Coulomb, on définit deux relations supplémentaires :

$$\frac{T_{Ax}}{N_A} = \frac{T_{Bx}}{N_B} = f \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{Ax}}{N_A} = f \quad \text{et} \quad \frac{T_{Bx}}{N_B} = f \quad (4.1.12)$$

Pour être cohérent avec les conditions de glissement de Coulomb, on écrit :

$$\frac{T_{Ax}}{N_A} = -f \cdot \text{sign}(u) \quad \text{et} \quad \frac{T_{Bx}}{N_B} = -f \cdot \text{sign}(u) \quad (4.1.13)$$

Le signe des réactions tangentielles T peut être initialisé avec le contact collant (condition de non-glissement).

Les réactions tangentielles s'opposent au sens de déplacement du solide.

Une approche, à l'initialisation du cas statique, consiste à vérifier le signe des réactions tangentielles pour en déduire celui de la vitesse u telle que :

$$u = \frac{1}{-f \cdot N_A} T_{Ax} \cdot \text{sign}(T_{Ax}) = \frac{1}{-f \cdot N_B} T_{Bx} \cdot \text{sign}(T_{Bx}) \quad (4.1.14)$$

Le problème est alors bien posé et d'après les équations (4.1.9), (4.1.10) et (4.1.13), on en déduit la vitesse  $u$  :

$$u^{n+1} - u^n = \frac{h}{m}(f.Psign(u) + F_x) \quad (4.1.15)$$

puis, d'après les équations (4.1.9), (4.1.10) et (4.1.11),

$$N_B = -\frac{P}{2} - \frac{F_y}{2} + \frac{a}{2b}F_x - \frac{a}{2h.b}m.(u^{n+1} - u^n) \quad (4.1.16)$$

$$N_A = -\frac{P}{2} - \frac{F_y}{2} - \frac{a}{2b}F_x + \frac{a}{2b}m.(u^{n+1} - u^n) \quad (4.1.17)$$

enfin, d'après les équations (4.1.13),

$$T_{Ax} = -fsign(u).N_A \quad (4.1.18)$$

$$T_{Bx} = -fsign(u).N_B \quad (4.1.19)$$

Toutes les inconnues, de contacts et de mouvement, sont déterminées. Cependant, cette hypothèse de répartition des réactions tangentielles ne permet pas de gérer l'après basculement.

Pour illustrer le résultat des calculs selon nos hypothèses, dans les cas non-glissant et glissant, on présente un exemple numérique (voir figure 4.1).

### Application numérique

Nous avons choisi les paramètres numériques suivants :

- coefficient de frottement :  $f=0.4$ ,
- hauteur du solide :  $a=0.1\text{m}$ ,
- longueur du solide :  $b=0.2\text{m}$ ,
- masse du solide :  $m=10\text{kg}$ ,
- pas de temps :  $h = 10^{-3}\text{s}$ ,
- accélération de la pesanteur :  $g = -9.81\text{ms}^{-2}$ ,
- conditions initiales :  $N_A = N_B = -\frac{m*g}{2}$  ;  $u = 0\text{ms}^{-1}$ .

#### • Cas de non-glissement

Ce cas a été validé avec plusieurs valeurs de force appliquée en G ne permettant pas de déplacer le solide. A titre d'exemple, on choisit l'exemple numérique suivant.

Pour une force appliquée au centre de gravité G du solide telle que  $F_x = +20\text{N}$   
 ( $\|F\| < \|T\|$  et  $\|T\| = P.f = 39.24\text{N}$ ).



D'après les équations (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8), le résultat donne :

$$\begin{aligned} N_B &= 54.05N, \\ N_A &= 44.05N, \\ T_{Bx} &= -11.02N, \\ T_{Ax} &= -8.98N, \end{aligned}$$

La somme des réactions normales  $N_A$  et  $N_B$  donne le poids du bloc. Le rapport  $\frac{T_{Ax}}{N_A} = \frac{T_{Bx}}{N_B} = 0.204$  est vérifié. Les résultats du cas non-glissant sont ceux attendus, dans le cadre des hypothèses faites.

• Cas de glissement

Dans le cas glissant, la loi de frottement de Coulomb  $\frac{|T|}{N} = f$  est vérifiée. Les discontinuités de vitesses impliquent que celles-ci soient traitées au sens des distributions (méthode NSCD : Jean (1995b), Moreau (1988), Jean et Moreau (1992)). Les simulations numériques sont réalisées avec le code MatLab.

Ce cas a été validé avec plusieurs valeurs de force appliquée en G permettant de déplacer le solide. A titre d'exemple, on choisit la simulation numérique suivante.

Les valeurs de départ de la figure 4.3 sont initialisées aux valeurs du cas statique (voir précédemment).

Pour une force appliquée au centre de gravité G du solide telle que  $F_x = +50N$  :

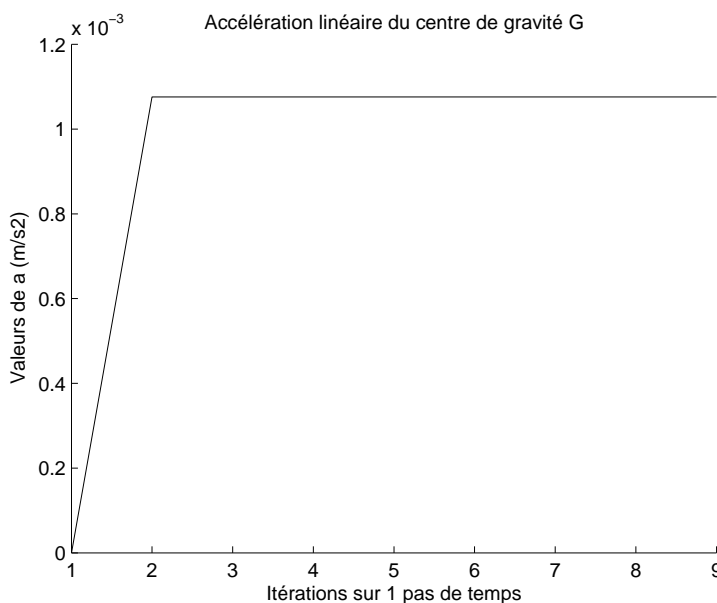


FIG. 4.2 – Représentation de l'accélération linéaire et de la vitesse linéaire du solide en 2D

La courbe de la figure 4.2 montre que le modèle prédit bien le mouvement attendu : le solide se déplace dans la direction  $O\vec{x}$  positivement (figure 4.2).

La valeur de l'accélération est en effet constante ( $F_x - T = ma$  et  $T = P.f = 39.24N$ ) car la force

extérieure est constante. La vitesse est positive selon l'axe  $O\vec{x}$  conformément à la direction de la force extérieure. Le solide glisse donc sur l'axe  $O\vec{x}$ .

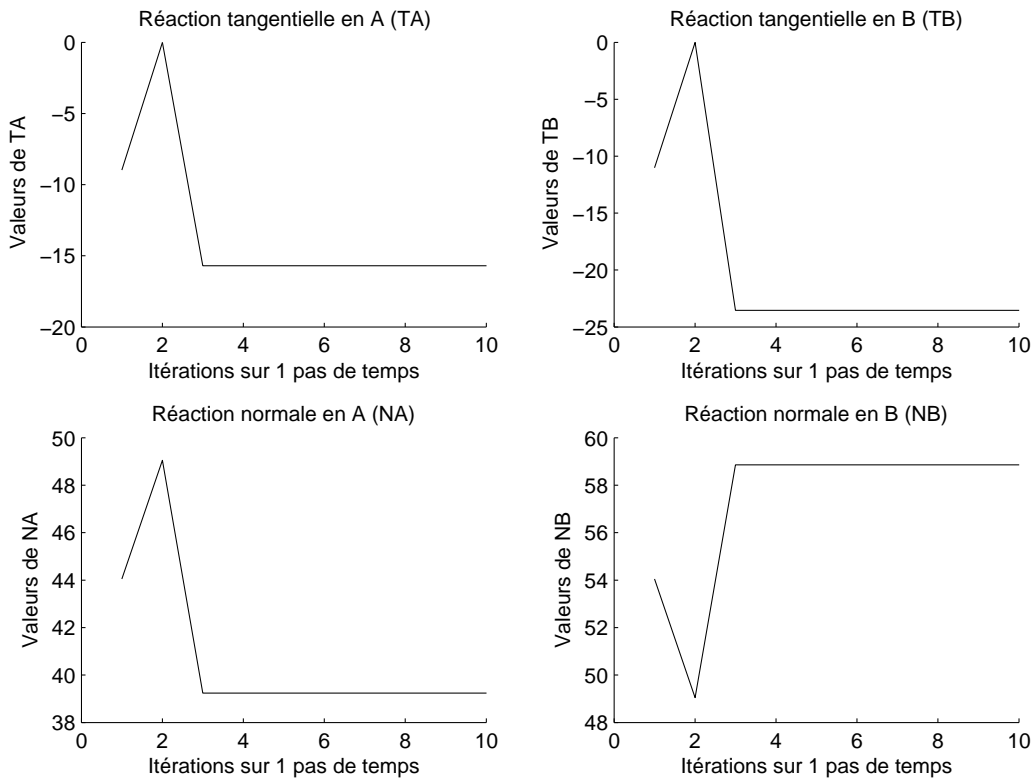


FIG. 4.3 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du solide 2D (voir figure 4.1)

Les courbes des figures 4.2 et 4.3 sont tracées pour 10 itérations. La solution dynamique converge au bout de 3 itérations et se stabilise vers la valeur finale.

Le modèle permet de retrouver le coefficient de frottement :  $f = \frac{|T|}{N}$ .

Les réactions tangentielles sont négatives (s'opposent à la force) et les réactions sont plus élevées au niveau du noeud B qu'au noeud A, en accord avec nos attentes (le solide glisse de A vers B donc il s'appuie plus en B).

Si la force appliquée au centre de gravité du solide n'est pas suffisante pour le faire glisser, l'algorithme passe à une résolution statique.

Cette approche peut être appliquée en 3D au cas du contact d'une arête sur un plan ; nous pouvons alors appeler élément de contact linéique, le segment avec ses deux points aux extrémités. Nous étendons dans le paragraphe suivant cette approche au cas des contacts surfaciques en 3D.

#### 4.1.2 Modélisation des réactions de contact sans/avec frottement en 3D

Dans le cas 3D, le contact entre polyèdres convexes s'effectue sur des points, des lignes ou des surfaces. Le cas de contact ponctuel ne pose pas de problème de résolution des inconnues d'interaction ; le cas du contact linéique peut se ramener au cas 2D c'est-à-dire dans le plan de la ligne de

contact ; le cas de contact surfacique s'effectue sur un plan et le contour de la zone de contact est un polygone convexe. Nous localiserons les réactions de contact sur les sommets de ces polygones que nous appellerons noeuds.

• **Dans le cas de contact sans frottement**, si on considère trois noeuds de contact, le système est parfaitement déterminé. Si le nombre de noeuds est supérieur à trois, alors on ajoute une hypothèse de répartition linéaire spatiale des réactions normales sur l'ensemble des noeuds. Nous illustrons cette hypothèse dans la suite de nos travaux.

• **Dans le cas de contact avec frottement**, quel que soit le nombre de noeuds, supérieur ou égal à trois, le système d'équations est insuffisant pour déterminer toutes les inconnues.

#### 4.1.2.a Contact sans frottement - Modélisation des réactions normales

Pour modéliser un problème comportant plus d'inconnues normales que d'équations, on présente un cas académique. Celui-ci est un carré de côté 1 (voir figure 4.4). Les quatre sommets du carré sont les noeuds de contact  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ . On considère que le modèle évolue sur le plan  $(O, x, y)$  sans frottement et la charge normale  $N$  est appliquée au point  $C$ . Pour modéliser un éventuel glissement, on applique une force  $\vec{F}$  au centre de gravité  $G$  du carré telle que  $\vec{F} = F_x \cdot \vec{x} + F_y \cdot \vec{y}$ .

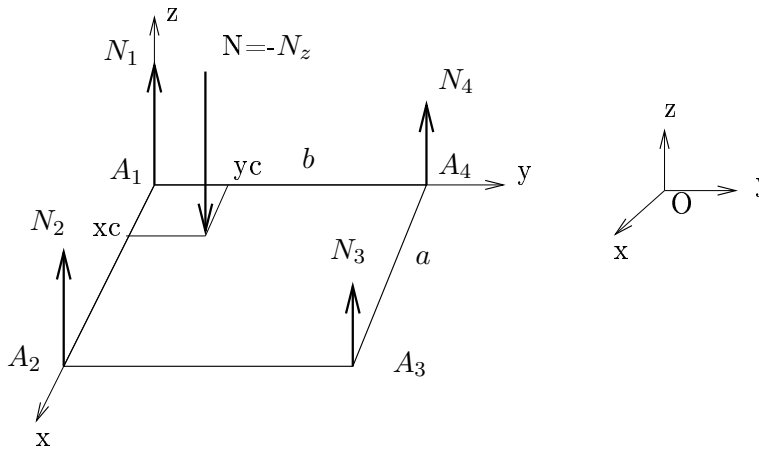


FIG. 4.4 – Modélisation des réactions normales en fonction d'une charge appliquée

Les 4 inconnues de contact sont notées  $(N_i)_{i=1,4}$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N = 0 \tag{4.1.20}$$

$$F_x = m \cdot \gamma_x \tag{4.1.21}$$

$$F_y = m \cdot \gamma_y \tag{4.1.22}$$

$$b.N_3 + b.N_4 = -N.yc \quad (4.1.23)$$

$$a.N_2 + a.N_3 = -N.xc \quad (4.1.24)$$

Les équations (4.1.20), (4.1.21), (4.1.22), (4.1.23) et (4.1.24) sont découplées. Les inconnues  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  valent respectivement  $\frac{F_x}{m}$  et  $\frac{F_y}{m}$ .

Nous avons quatre inconnues ( $N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$ ) et trois équations (4.1.20), (4.1.23) et (4.1.24). On introduit une équation supplémentaire en supposant que la répartition des efforts dépend linéairement de la position spatiale du contact : les extrémités des quatre réactions normales appartiennent à un même plan, ce qui se traduit par le calcul du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{A4} \\ y_{A1} & y_{A2} & y_{A3} & y_{A4} \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.25)$$

ce qui donne dans notre cas :

$$N_1 - N_2 + N_3 - N_4 = 0 \quad (4.1.26)$$

Cette quatrième équation vient s'ajouter au système (4.1.20), (4.1.23) et (4.1.24), dont la solution est :

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{2}N.x_C - \frac{1}{2}N.y_C + \frac{3}{4}N \\ N_2 = \frac{1}{2}N.x_C - \frac{1}{2}N.y_C + \frac{1}{4}N \\ N_3 = \frac{1}{2}N.y_C + \frac{1}{2}N.x_C - \frac{1}{4}N \\ N_4 = -\frac{1}{2}N.x_C + \frac{1}{2}N.y_C + \frac{1}{4}N \end{cases} \quad (4.1.27)$$

Si la charge appliquée au point C se trouve au centre du carré, on vérifie bien l'équi-répartition des réactions (système (4.1.27)) :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}N \\ N_2 = \frac{1}{4}N \\ N_3 = \frac{1}{4}N \\ N_4 = \frac{1}{4}N \end{cases} \quad (4.1.28)$$

Le principe de répartition linéaire spatiale des réactions normales peut s'appliquer à un nombre de noeuds supérieur à 4. Chaque noeud supplémentaire aux 3 noeuds principaux et l'hypothèse de

répartition fourniront respectivement 1 inconnue et 1 équation supplémentaire.

Il est cependant plus intéressant d'utiliser l'algorithme de détection (voir chapitre 3) pour se ramener à un nombre de noeuds égal à 4 plutôt que de conserver un nombre de noeuds  $p$  supérieur à 4 et de résoudre  $p$  équations.

#### 4.1.2.b Contact avec frottement- Modélisation des réactions tangentielles

Pour lever l'indétermination du système, nous sommes amenés à proposer une hypothèse de proportionnalité des réactions tangentielles.

Pour mettre en place nos hypothèses de proportionnalité, on considère le cas de la figure 4.6 où les réactions de contact sont localisées en trois noeuds. Le repère général est  $\{O, x_0, y_0, z_0\}$ ; le repère mobile, c'est-à-dire lié au solide rigide est  $\{G, x, y, z\}$ . Nous travaillons dans le repère mobile, la vitesse de celui-ci par rapport au repère général est définie par le vecteur vitesse  $V(\vec{G}) = (u, v, 0)$  et le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ; les indices  $i$  et  $j$  correspondent respectivement au numéro du noeud ainsi qu'à la direction (figure 4.6).

Pour une direction donnée  $j$ , le rapport  $\frac{T}{N}$  est le même en chaque noeud.

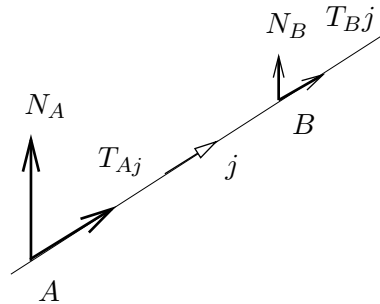


FIG. 4.5 – Illustration d'une hypothèse de proportionnalité entre 2 noeuds

Comme illustré sur la figure 4.5, on écrit, suivant la direction  $j$ , que :

$$\frac{T_{Aj}}{N_A} = \frac{T_{Bj}}{N_B} \quad (4.1.29)$$

Nous allons introduire cette notion dans le cas de la figure 4.6. Pour cela, nous mettons en place des vecteurs supplémentaires notés  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ . Ces vecteurs serviront à définir des hypothèses de proportionnalité entre les réactions de chaque noeud.

L'effort, en chaque noeud, est décomposé en effort tangentiel et en effort normal :

$$\vec{F}_i = \vec{T}_i + \vec{N}_i \quad (4.1.30)$$

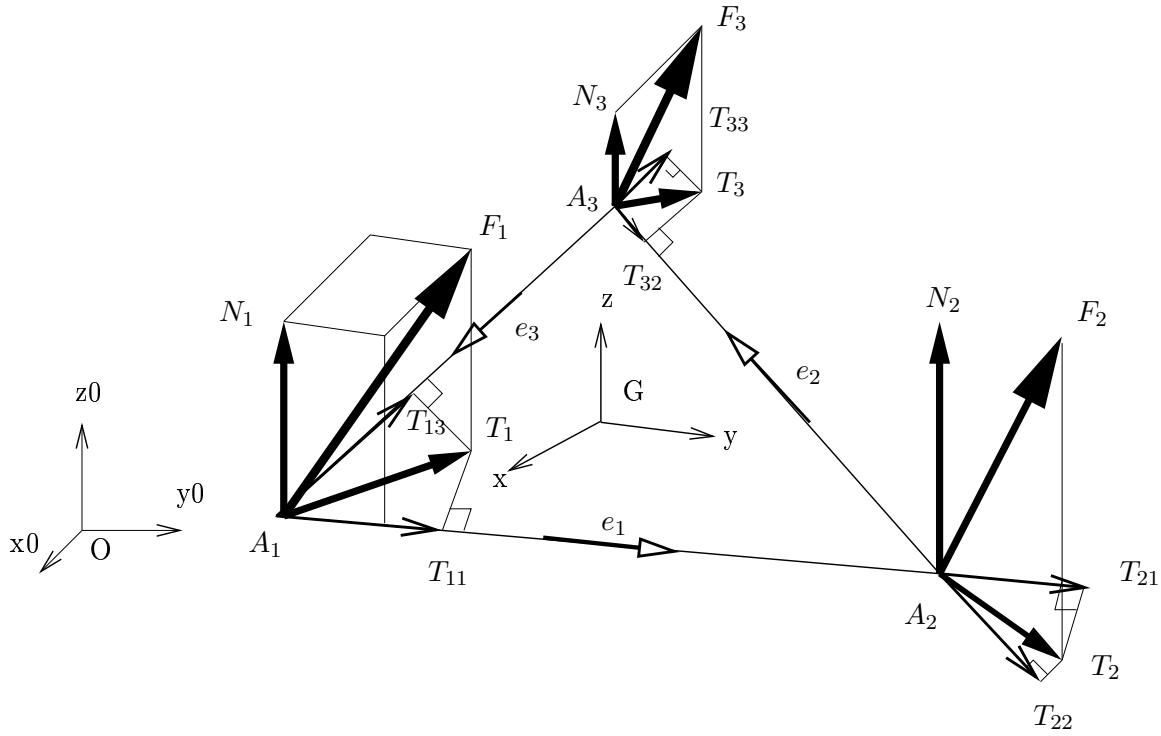


FIG. 4.6 – Localisation des réactions aux noeuds et répartition des réactions tangentielles

Chaque effort tangential, à son tour, se décompose suivant les directions  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  définies précédemment (voir figure 4.6).

A titre d'exemple au noeud  $A_1$ , l'effort tangential  $T_1$  se projète, suivant les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_3$  en deux composantes covariantes  $T_{11}$  (parallèle à l'axe  $\vec{e}_1$  telle que  $T_{11} = \vec{T}_{11} \cdot \vec{e}_1$ ) et  $T_{13}$  (parallèle à l'axe  $\vec{e}_3$  telle que  $T_{13} = \vec{T}_{13} \cdot \vec{e}_3$ ) (voir figure 4.7).

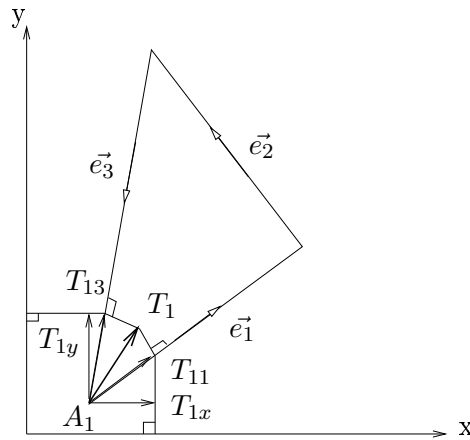


FIG. 4.7 – Projection perpendiculaire de l'effort  $T_i$  sur les axes liés au mobile  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$

• Dans le cas de non-glisement ( $\frac{|T|}{N} < f$ )

On définit alors une hypothèse de proportionnalité entre les réactions tangentielles :

$$\frac{T_{11}}{N_1} = \frac{T_{21}}{N_2} \quad \text{suivant } \vec{e}_1 \quad (4.1.31)$$

$$\frac{T_{22}}{N_2} = \frac{T_{32}}{N_3} \quad \text{suivant } \vec{e}_2 \quad (4.1.32)$$

$$\frac{T_{13}}{N_1} = \frac{T_{33}}{N_3} \quad \text{suivant } \vec{e}_3 \quad (4.1.33)$$

Les réactions tangentielles, définies dans le repère mobile  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , sont projetées dans le repère mobile  $\{G, x, y, z\}$ . A titre d'exemple au noeud  $A_1$ , les composantes covariantes  $T_{11}$  et  $T_{13}$  (repère associé :  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ) s'écrivent dans le repère mobile  $\{G, x, y, z\}$  :

$$\begin{aligned} T_{11} &= (T_{1x} \cdot \vec{x} + T_{1y} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{e}_1 = T_{1x} \cdot \cos(T_{1x}, T_{11}) + T_{1y} \cdot \sin(T_{1y}, T_{11}) \\ T_{13} &= (T_{1x} \cdot \vec{x} + T_{1y} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{e}_3 = T_{1x} \cdot \cos(T_{1x}, T_{13}) + T_{1y} \cdot \sin(T_{1y}, T_{13}) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

d'où, d'un point de vue général :

$$T_{ij} = (T_{ix} \vec{x} + T_{iy} \vec{y}) \cdot \vec{e}_j = T_{ix} \cdot \cos(T_{ix}, T_{ij}) + T_{iy} \cdot \sin(T_{iy}, T_{ij}) \quad (4.1.35)$$

• Dans le cas de glissement ( $\frac{|T|}{N} = f$ )

Les hypothèses de proportionnalité sont directement définies dans le repère mobile  $\{G, x, y, z\}$  :

$$\frac{|T_1|}{N_1} = f \quad \text{et} \quad T_1 = T_{1x} \vec{x} + T_{1y} \vec{y} \quad (4.1.36)$$

$$\frac{|T_2|}{N_2} = f \quad \text{et} \quad T_2 = T_{2x} \vec{x} + T_{2y} \vec{y} \quad (4.1.37)$$

$$\frac{|T_3|}{N_3} = f \quad \text{et} \quad T_3 = T_{3x} \vec{x} + T_{3y} \vec{y} \quad (4.1.38)$$

Sur un plan (surface de contact), la condition de glissement de Coulomb est définie par :

$$\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} = f \cdot N_i \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_{ix}^2 + T_{iy}^2 = f^2 \cdot N^2 \quad (4.1.39)$$

L'effort tangentiel est opposé au vecteur vitesse. La norme de la vitesse s'écrit :

$$\|v_i\| = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} \quad (4.1.40)$$

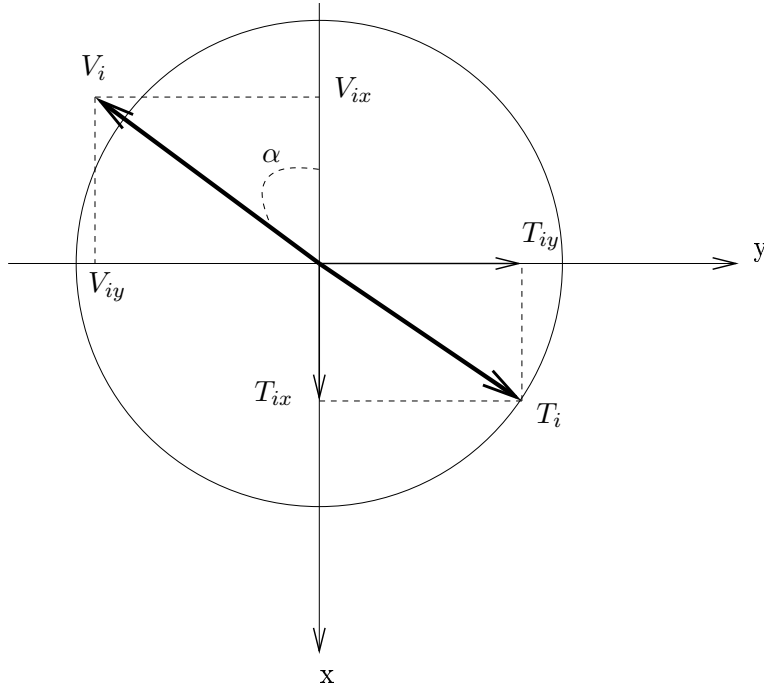


FIG. 4.8 – Représentation de la décomposition du vecteur tangentiel et du vecteur vitesse (le cercle est la trace du cône de Coulomb)

Les réactions tangentielles  $T_{ix}$  (suivant l'axe  $\vec{x}$ ) et  $T_{iy}$  (suivant l'axe  $\vec{y}$ ) peuvent s'écrire :

$$T_{ix} = -\frac{v_{ix}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot fN_i \quad (4.1.41)$$

$$T_{iy} = -\frac{v_{iy}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot fN_i \quad (4.1.42)$$

Dans le repère mobile  $\{G, x, y, z\}$ , la vitesse au noeud  $A_i$  est :  $V(\vec{A}_i)_{/O} = V(\vec{G})_{/O} + \vec{\Omega} \wedge G\vec{A}_i$ .

D'où,

$$v_{ix} = u - \Omega \cdot GA_{iy} \quad (4.1.43)$$

$$v_{iy} = v + \Omega \cdot GA_{ix} \quad (4.1.44)$$

Ainsi en chaque noeud on peut écrire :

$$T_{ix} = -\frac{u - \Omega \cdot GA_{iy}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot fN_i \quad (4.1.45)$$



$$T_{iy} = -\frac{v + \Omega \cdot GA_{ix}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot f N_i \quad (4.1.46)$$

Le problème est bien déterminé.

Cette méthode se généralise à un nombre de noeuds supérieur à 3, il suffit de remarquer qu'à chaque noeud supplémentaire, deux relations de proportionnalité sont ajoutées.

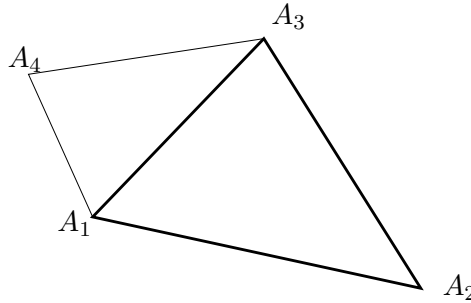


FIG. 4.9 – Hypothèse de proportionnalité tangentielle - 3 noeuds principaux + noeuds supplémentaires

Si on prend l'exemple de la figure 4.9, en plus des directions principales  $A_1A_2$  et  $A_2A_3$  et  $A_3A_1$ , il faut exprimer les relations supplémentaires dans les directions  $A_3A_4$  et  $A_4A_1$ .

• **Bilan des hypothèses**

- Hypothèse de répartition dans une direction donnée des réactions tangentielles,
  - \* cas de non-glissement
  - Proportionnalité des composantes tangentielles par rapport aux composantes normales dans une direction donnée j :

$$\frac{T_{Aj}}{N_A} = \frac{T_{Bj}}{N_B} \quad (4.1.47)$$

Cette relation définit, d'un point de vue physique, un comportement équivalent des noeuds dans une direction donnée.

- \* cas de glissement

Le matériau étant supposé isotrope, l'hypothèse 4.1.47 peut se découpler en deux relations supplémentaires :

$$\frac{T_{Ax}}{N_A} = -f \cdot \text{sign}(u) \quad \text{et} \quad \frac{T_{Bx}}{N_B} = -f \cdot \text{sign}(u) \quad (4.1.48)$$

- Hypothèse de répartition linéaire spatiale des réactions normales,
  - Pour une surface de contact à n noeuds, cette hypothèse définit que les extrémités des réactions normales passent par un même plan.

Les 3 noeuds principaux 1, 2 et 3 sont choisis. Les  $m$  équations supplémentaires relatives aux inconnues normales supplémentaires sont définies par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_j \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_j \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour tous les } j \in [1, m] \quad (4.1.49)$$

La validation des hypothèses sur la répartition linéaire des inconnues normales et la proportionnalité des réactions tangentielles est faite au paragraphe 4.3 par la mise en place de deux modèles numériques, dans les cas non-glissant et glissant.

### 4.1.3 Algorithme de résolution

L'apport de notre travail concerne ici une amélioration dans la résolution numérique de l'étape locale.

La méthode existante dans le code LMGC90 consiste à résoudre le problème de contact d'une liaison plane "séquentiellement" noeud après noeud.

Nous proposons ici une méthode de résolution qui traite simultanément tous les noeuds d'une liaison plane. Cette méthode consiste à "coupler" l'ensemble des équations écrites pour chaque noeud et construire un vecteur nodal (constitué par les inconnues aux noeuds que sont les réactions et les déplacements du centre de gravité G) et une matrice élémentaire (matrice "raideur" par analogie avec le vocable éléments finis) caractérisant la liaison plane.

- Mise en place du problème

On considère un parallélépipède de centre de gravité G en contact avec un plan. Le repère lié au plan de contact est  $\{0, x_O, y_O\}$ . Le repère lié au solide est  $\{G, x, y, z\}$ . Le parallélépipède pourra être en mouvement ou immobile. Il n'est soumis qu'à son poids propre ( $P = m * g$  avec  $g = -9.81 m.s^{-2}$ ,  $m$  : masse du solide) au niveau de son centre de gravité. Le contact entre le solide et le plan est de type frottant, avec  $f$  le coefficient de frottement.

Les vecteurs positions des noeuds numérotés de 1 à  $p$  sont définis par :

$$O\vec{A}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (4.1.50)$$

Les coordonnées du centre de gravité G étant :

$$O\vec{G} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{p} \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{p} \\ \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{p} \end{pmatrix} \quad (4.1.51)$$

Les réactions de contact localisées aux noeuds sont notées :

$$\vec{R}_i = \begin{pmatrix} T_{ix} \\ T_{iy} \\ N_i \end{pmatrix} \quad (4.1.52)$$

Nous considérons que toutes les réactions extérieures y compris les forces d'inerties sont réduites au centre de gravité du polyèdre avec comme résultante générale :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (4.1.53)$$

Et le moment extérieur :

$$M(\vec{F})_{/G} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ P \end{pmatrix} \quad (4.1.54)$$

On travaille sur le repère mobile, le calcul des moments des forces en chaque noeud, et des vitesses sont réalisés par rapport au centre de gravité G du polyèdre.

#### 4.1.3.a Initialisation du problème-résolution des équations statiques dans le repère local

Après contact, on considère, au départ, qu'il n'y a pas de glissement et que le choc est mou (les auteurs (Stoianovici et Hurmuzlu (2001), Hurmuzlu (1998)) mettent en évidence qu'il n'y a pas de restitution normale). On résoud alors un problème statique.

Les équations d'équilibre réduites en G s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^p T_{ix} + F_x = 0 \quad (4.1.55)$$

$$\sum_{i=1}^p T_{iy} + F_y = 0 \quad (4.1.56)$$

$$\sum_{i=1}^p N_i + F_z = 0 \quad (4.1.57)$$

Le solide étant rigide, les moments en chaque noeud calculés par rapport au centre de gravité G restent constants au cours du calcul.

$$T_{iy} \left( \sum_{i=1}^p \frac{z_i}{p} (1-p) \right) - N_i \left( \sum_{i=1}^p \frac{y_i}{p} (1-p) \right) + L = 0 \quad (4.1.58)$$

$$N_i \left( \sum_{i=1}^p \frac{x_i}{p} (1-p) \right) - T_{ix} \left( \sum_{i=1}^p \frac{z_i}{p} (1-p) \right) + M = 0 \quad (4.1.59)$$

$$T_{ix} \left( \sum_{i=1}^p \frac{y_i}{p} (1-p) \right) - T_{iy} \left( \sum_{i=1}^p \frac{x_i}{p} (1-p) \right) + P = 0 \quad (4.1.60)$$

Les 3 noeuds principaux 1, 2 et 3 sont choisis.

Les  $m$  équations supplémentaires relatives aux inconnues normales supplémentaires sont définies par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_j \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_j \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour tous les } j \in [1, m] \quad (4.1.61)$$

Les relations de compatibilité pour les 3 noeuds principaux sont définies par :

$$\frac{T_{11}}{N_1} = \frac{T_{21}}{N_2} \quad \text{suivant } \vec{e}_1 \quad (4.1.62)$$

Ou,

$$T_{11}N_2 - T_{21}N_1 = 0 \quad \text{suivant } \vec{e}_1 \quad (4.1.63)$$

$$\frac{T_{22}}{N_2} = \frac{T_{32}}{N_3} \quad \text{suivant } \vec{e}_2 \quad (4.1.64)$$

Ou,

$$T_{22}N_3 - T_{32}N_2 = 0 \quad \text{suivant } \vec{e}_2 \quad (4.1.65)$$

$$\frac{T_{13}}{N_1} = \frac{T_{33}}{N_3} \quad \text{suivant } \vec{e}_3 \quad (4.1.66)$$

Ou,

$$T_{13}N_3 - T_{33}N_1 = 0 \quad \text{suivant } \vec{e}_3 \quad (4.1.67)$$

Les vecteurs supplémentaires  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  sont définis comme :

$$\vec{e}_1 = \frac{A_1 \vec{A}_2}{\|A_1 \vec{A}_2\|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{A_2 \vec{A}_3}{\|A_2 \vec{A}_3\|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{A_3 \vec{A}_1}{\|A_3 \vec{A}_1\|} \quad (4.1.68)$$

Lorsque les composantes tangentielles sont décomposées dans le repère  $\{G, x, y, z\}$  alors les composantes covariantes sont données par :

$$T_{ij} = (T_{ix} \cdot \vec{x} + T_{iy} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{e}_j = T_{ix} \cdot \cos(T_{ix}, T_{ij}) + T_{iy} \cdot \sin(T_{iy}, T_{ij}) \quad (4.1.69)$$

### • Bilan des équations

Les équations linéaires (4.1.57), (4.1.58) et (4.1.59) associées aux équations supplémentaires (4.1.61) peuvent être résolues indépendamment pour obtenir les réactions normales.

Les équations (4.1.55), (4.1.56) et (4.1.60) auxquelles sont associées les équations non linéaires (4.1.63), (4.1.65) et (4.1.67), permettent de déterminer les réactions tangentielles.

L'ensemble du système d'équations est posé et la résolution du problème se fait de manière itérative.

#### 4.1.3.b Résolution des équations dynamiques dans le repère local

Dans le cas de la dynamique, des forces d'inertie faisant intervenir les composantes de la vitesse du centre d'inertie et de la rotation viennent s'ajouter au système d'équations statiques.

A titre d'exemple, pour le mouvement d'un solide en contact persistant sur un plan fixe, les 12 inconnues du problème sont :

- les 9 composantes des réactions de contact  $(T_{ix}, T_{iy}, N_i, i = 1, 3)$ ,
- les 3 inconnues cinématiques (2 composantes de vitesse  $(u, v, 0)$ ) et 1 composante de rotation  $(0, 0, \Omega)$  (rotation suivant la normale au plan de contact).

Les équations permettant la résolution sont données par les 6 équations de la dynamique et les équations (4.1.45), (4.1.46) de compatibilité de glissement. L'initialisation du processus de résolution itératif est donnée par le cas statique qui donne le sens des réactions tangentielles admissibles.

Le système d'équations ci-dessous se résout itérativement.

Le contact se fait sur une surface plane de normale  $\vec{z}$ .

$I_{zz}$  est le moment d'inertie suivant la normale au plan,  $m$  la masse du solide ;  $n$  correspond à la numérotation de l'itération et  $p$  correspond au nombre de points nodaux ;  $h$  le pas de temps de l'itération.

Comme pour le cas en deux dimensions, on écrira les équations de la dynamique en termes de quantités de mouvement.

Les équations de la dynamique s'écriront :

$$h * \sum_{i=1}^p T_{ix}^{n+1} + h * F_x = m * (u^{n+1} - u^n) \quad (4.1.70)$$

$$h * \sum_{i=1}^p T_{iy}^{n+1} + h * F_y = m * (v^{n+1} - v^n) \quad (4.1.71)$$

$$\sum_{i=1}^p N_i^{n+1} + F_z = 0 \quad (4.1.72)$$

$$h * T_{iy}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{z_i}{p} (1-p) \right) - h * N_i^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{y_i}{p} (1-p) \right) + h * L = m * (v^{n+1} - v^n) \quad (4.1.73)$$

$$h * N_i^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{x_i}{p} (1-p) \right) - h * T_{ix}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{z_i}{p} (1-p) \right) + h * M = -m * (u^{n+1} - u^n) \quad (4.1.74)$$

$$h * T_{ix}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{y_i}{p} (1-p) \right) - h * T_{iy}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^p \frac{x_i}{p} (1-p) \right) + h * P = I_{zz} * (\Omega^{n+1} - \Omega^n) \quad (4.1.75)$$

Et les équations supplémentaires :

$$T_{ix} = -\frac{u - \Omega \cdot GA_{iy}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot f N_i \quad (4.1.76)$$

$$T_{iy} = -\frac{v + \Omega \cdot GA_{ix}}{\|\vec{v}_i\|} \cdot f N_i \quad (4.1.77)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_j \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_j \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour tous les } j \in [1, m] \quad (4.1.78)$$

- Si les résultats sont compatibles avec l'inégalité de la loi de frottement de Coulomb ( $\frac{T}{N} < f$ ), c'est-à-dire que les réactions de contact restent "dans" le cône de Coulomb alors le problème statique local est résolu.

- Si une action de contact est "sur" le cône de frottement, la résolution se fait itérativement avec les équations de la dynamique.

## 4.2 Mise en oeuvre numérique

Les itérations dans le cas de non-glissement gèrent la mise en place des contacts en fonction du temps, pour un solide immobile.

Les itérations dans le cas de glissement gèrent la mise en place des contacts en fonction du temps, pour un solide en mouvement.

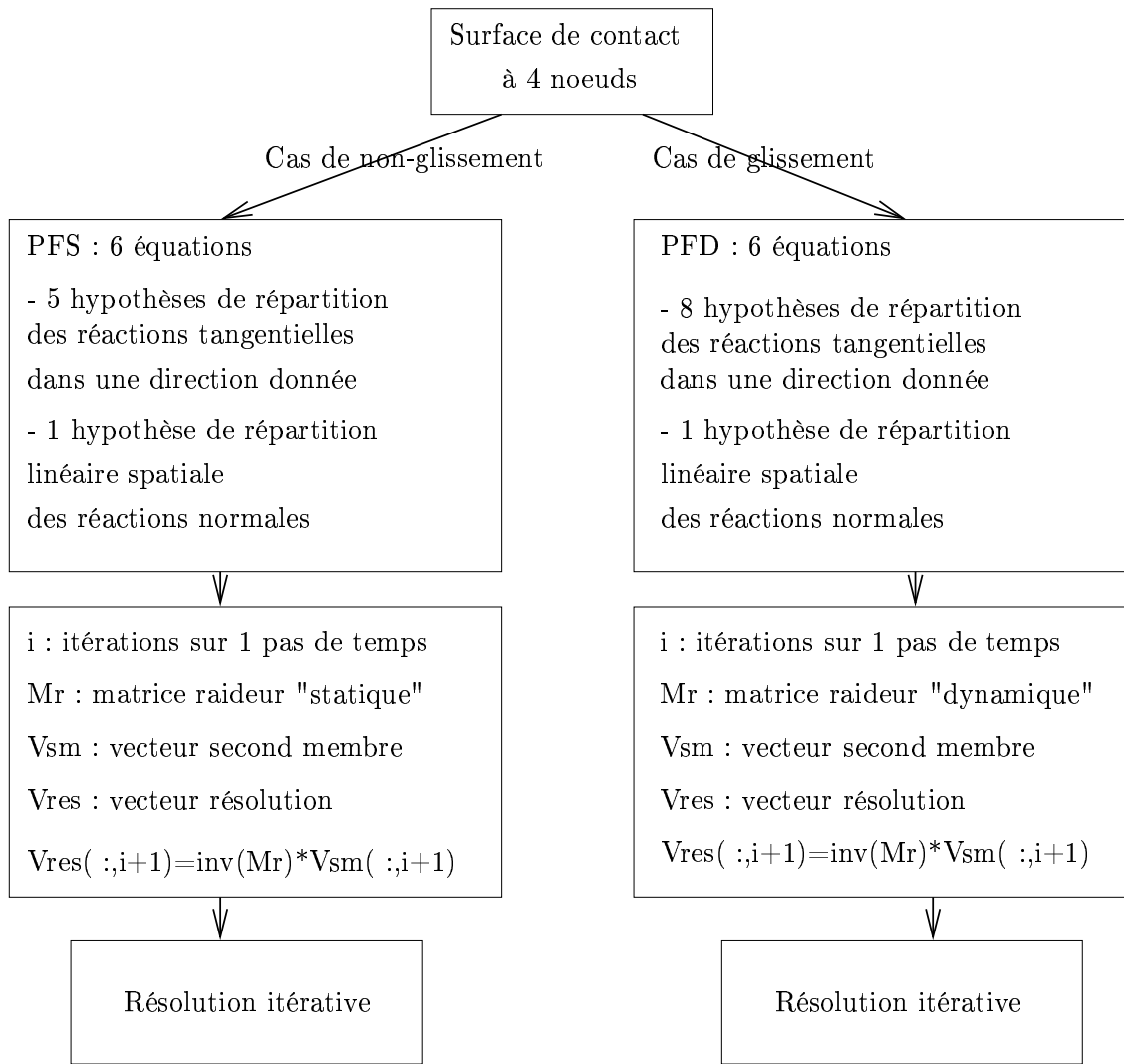


FIG. 4.10 – Algorithme de résolution numérique, des cas non-glissant et glissant, pour un problème d’hyperstaticité

Pour valider l’ensemble de notre travail sur les hypothèses mises en place précédemment, nous étudions quelques exemples académiques. Les simulations sont réalisées avec MatLab.

### 4.3 Applications à un contact solide plan

On étudie le cas d’un prisme droit posé sur un plan en considérant ses sommets comme étant les trois noeuds de contacts. Cet exemple permet de valider les hypothèses faites pour lever l’indétermination des réactions tangentielles.

#### 4.3.1 Surface de contact à 3 noeuds

On considère un prisme en contact sur sa base triangulaire avec un plan horizontal. Les actions de contact sont localisées au niveau des trois noeuds  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ , sommets de la face en contact.

Sur l'exemple de la figure 4.11, le prisme a une hauteur de  $a$  et n'est soumis qu'à son poids propre ( $P = m * g$  avec  $g = -9.81m.s^{-2}$ ,  $m$  : masse du solide) au niveau de son centre de gravité.

Le torseur des efforts extérieurs est :

$$\{ T_{\text{ext}} \} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Le torseur cinématique est :

$$\{ T_{\text{cin}} \} = \begin{Bmatrix} v_x & 0 \\ v_y & 0 \\ 0 & \Omega_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Le prisme est considéré restant toujours en contact.

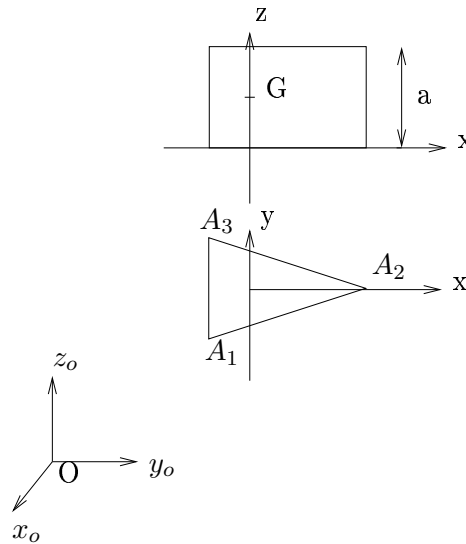


FIG. 4.11 – Géométrie du prisme

Nous prenons les paramètres numériques suivants :

- Coefficient de frottement :  $f=0.4$ ,
- Hauteur du solide :  $a=1m$ ,
- Masse du solide :  $m=1000kg$ .
- Coordonnées des noeuds :  $A_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, -1)$ ;  $A_2 = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 1)$ ;  $A_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -1)$
- Pas de temps :

\* dans le cas non-glissant, le système d'équations est résolu de façon itérative c'est-à-dire que le calcul des réactions aux noeuds dépend du temps. Le paramètre temps  $h$  est alors pris en compte dans la suite,

\* dans le cas glissant,  $h = 10^{-4}s$  (par analogie avec le code de calcul LMGC90).



- Conditions initiales :  $N_1 = N_2 = N_3 = -\frac{m \cdot g}{3}$  ;  $u = v = 0m.s^{-1}$  et  $\Omega = 0rad.s^{-1}$  (cas de glissement).

La géométrie du prisme est symétrique autour de son axe de rotation. Le torseur des efforts extérieurs est toujours appliqué au centre de gravité du solide.

• On applique une force extérieure  $\vec{F} = 3000\vec{x}$ , la simulation numérique donne les résultats suivants :

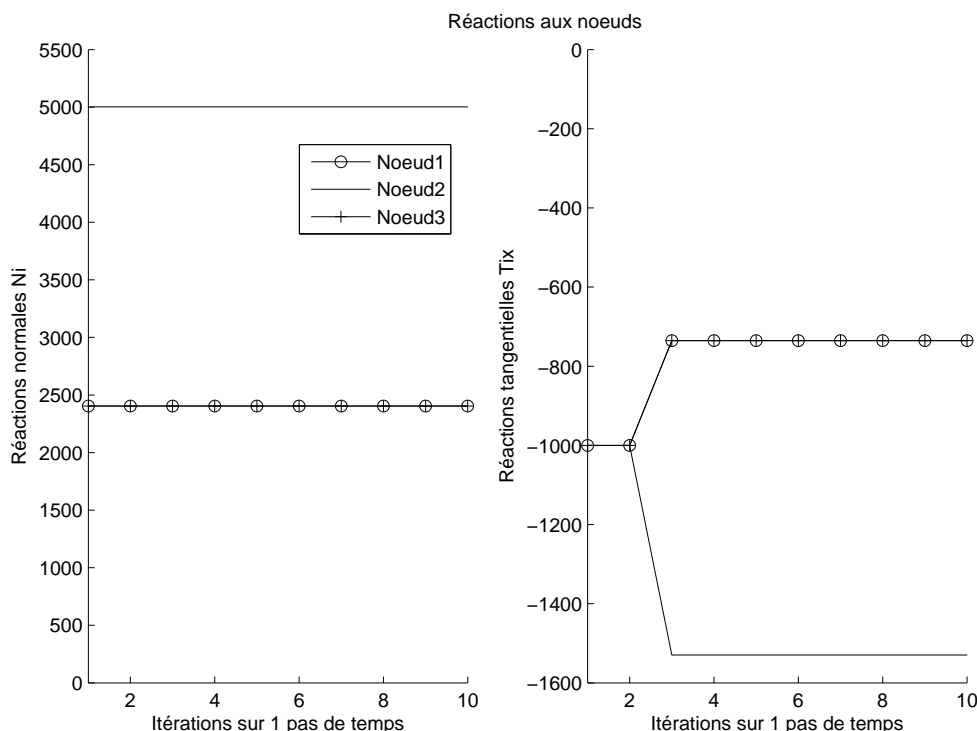


FIG. 4.12 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $F_x = 3000N$

Le torseur cinématique a toutes ses composantes nulles : le solide reste immobile. Ce résultat était prévisible, en accord avec la valeur de la force extérieure appliquée.

Les courbes de la figure 4.12 sont tracées pour 10 itérations.

Comme pour l'exemple en 2 dimensions, les réactions tangentielles s'opposent à la force extérieure et les réactions sont plus élevées au niveau du noeud  $A_2$  qu'aux noeuds  $A_1$  et  $A_3$ . La direction de la force extérieure est positive suivant l'axe  $\vec{Ox}$ . Le solide s'appuie plus sur son noeud  $A_2$  qu'aux deux autres noeuds. La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  donne le poids du bloc. La condition de non-glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} < f N_i$  ( $i=1,3$ ) est vérifiée. Les résultats du cas statique sont cohérents avec les hypothèses faites.

La solution statique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale. Pour le cas dynamique le pas de temps est choisi à  $10^{-4}s$ , ici les noeuds de contacts restent immobiles et stables durant les itérations. On choisit alors un pas de temps de  $10^{-3}s$  par analogie avec le code de calcul LMGC90.

Le calcul des réactions est arrêté avec un test de convergence. On fera de même par la suite.

- Dans la deuxième simulation, on augmente la valeur de la force extérieure  $\vec{F} = 10000\vec{x}$  : La courbe de la figure 4.13 montre que le modèle prédit bien le mouvement attendu.

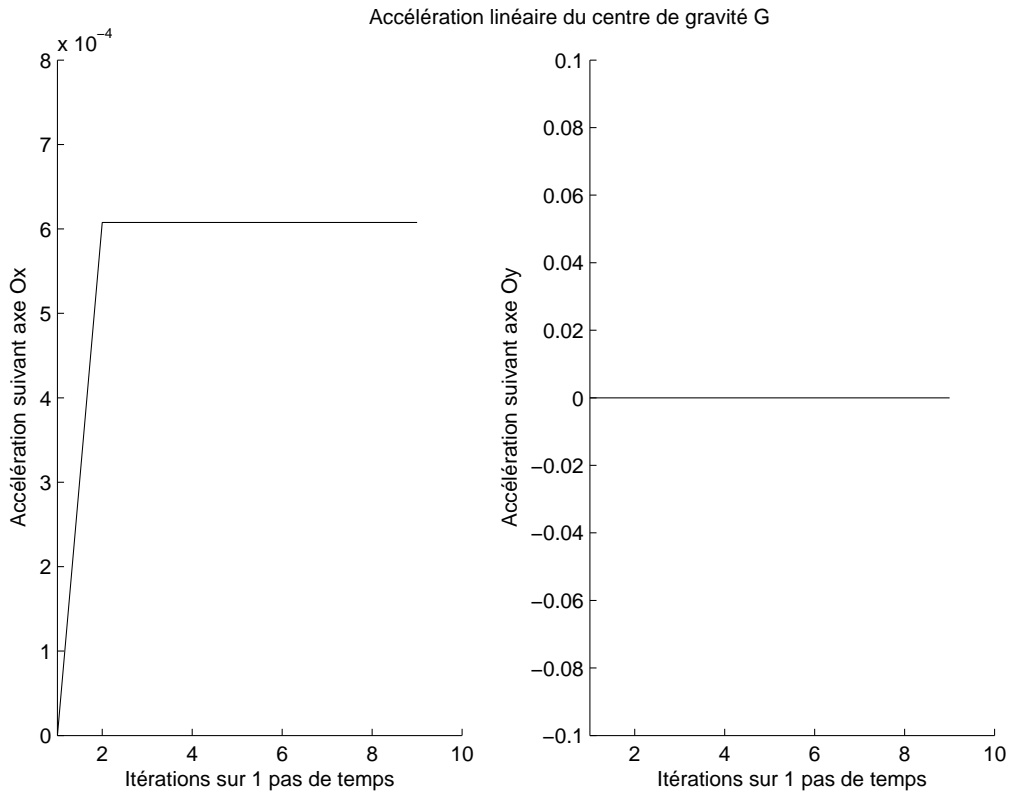
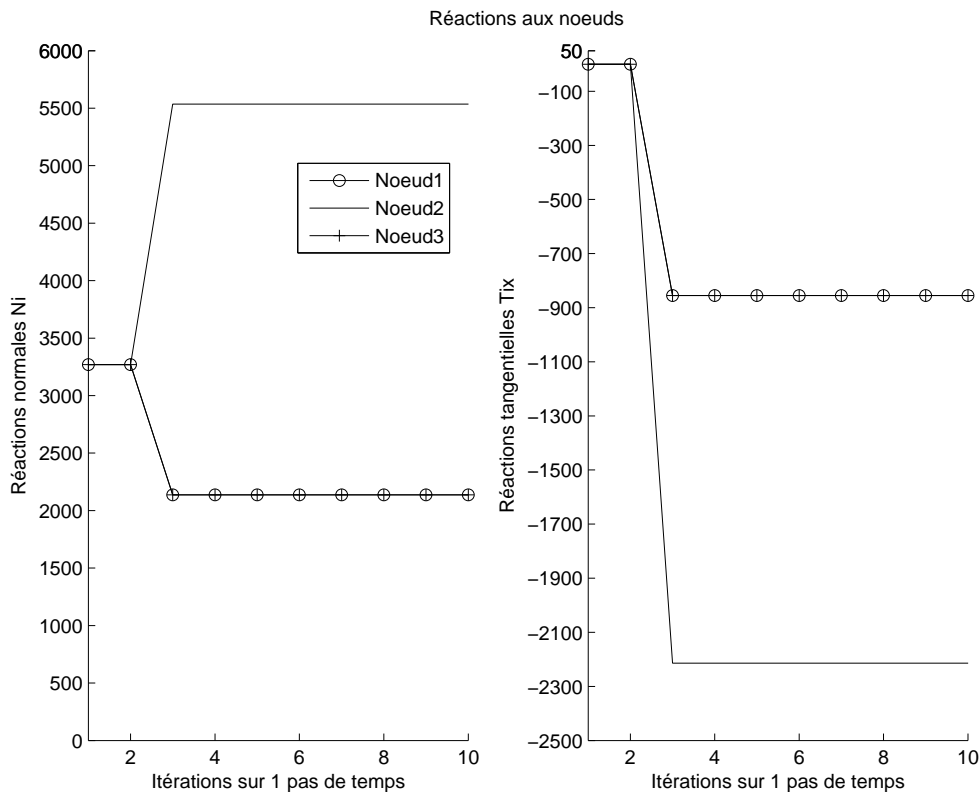


FIG. 4.13 – Représentation des accélérations linéaires  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_y$  au centre de gravité du prisme pour  $F_x = 10000N$

La valeur de l'accélération linéaire  $\Gamma_x$  suivant l'axe  $\vec{Ox}$  est constante ( $F_{ext} = constante$ ) et positive. Le solide se déplace suivant la direction  $\vec{Ox}$  (cas glissant).


 FIG. 4.14 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $F_x = 10000N$ 

Les courbes des figures 4.13 et 4.14 sont tracées pour 10 itérations.

On retrouve les mêmes conclusions que celles de l'exemple précédent à savoir que les réactions tangentielles s'opposent au sens de glissement du solide et que les valeurs des réactions sont plus élevées au niveau du noeud  $A_2$  qu'aux noeuds  $A_1$  et  $A_3$ . Les valeurs en chaque noeud des réactions tangentielles sont plus élevées que dans le cas statique car la condition de glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} = fN_i$  ( $i=1,3$ ) est vérifiée. La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  donne le poids du bloc.

On a montré que l'équation de la dynamique suivant l'axe  $\vec{Ox}$  pouvait s'écrire en termes de mesures différentielles de la façon suivante :

$$h * T_{1x}^{n+1} + h * T_{2x}^{n+1} + h * T_{3x}^{n+1} + h * F_x = m * (u^{n+1} - u^n) \quad (4.3.3)$$

Le terme  $\frac{(u^{n+1}-u^n)}{h}$  représente la valeur de l'accélération. Une autre manière de montrer que les hypothèses faites sont conformes est la résolution numérique de l'équation (4.3.3) .

### Application numérique

$$- \frac{(u^{n+1}-u^n)}{h} = 6.05m.s^{-2},$$

$$- \sum T_{ix} = -3950N,$$

Ainsi,  $F_x + \sum T_{ix} = 10000 - 3950 = 6050N$  et  $m * \frac{(u^{n+1}-u^n)}{h} = 1000 * 6.05 = 6050N$ . L'équation (4.3.3) est vérifiée.

Les résultats du cas glissant sont cohérents avec les hypothèses faites pour lever l'indétermination. La solution dynamique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale.

• On applique maintenant un moment extérieur  $\vec{M}(\vec{F}) = -200\vec{z}$ , la simulation numérique donne :

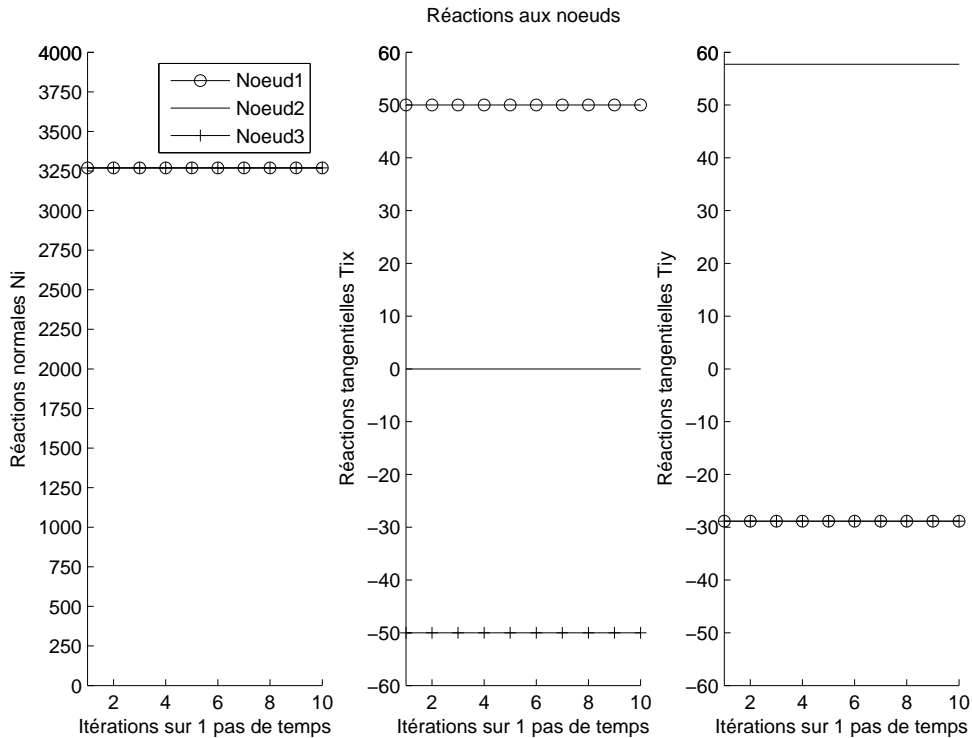


FIG. 4.15 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $M_z = -200Nm$

Les composantes du torseur cinématique sont toutes nulles : le solide reste immobile. La valeur du moment extérieur appliqué n'est pas suffisante pour déplacer le solide. Les courbes de la figure 4.15 sont tracées pour 10 itérations.

Le prisme a une géométrie symétrique par rapport à son axe de rotation, les trois réactions normales sont identiques. Les réactions tangentielles sont respectivement découplées, symétriques suivant l'axe  $\vec{Ox}$  et la somme  $T_{1y} + T_{3y} = -T_{2y}$  suivant l'axe  $\vec{Oy}$ .

La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  donnent le poids du bloc. La condition de non-glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} < fN_i$  ( $i=1,3$ ) est vérifiée. Les résultats du cas statique sont cohérents avec les hypothèses faites.

Ces résultats sont conformes avec la géométrie du solide. Le signe des réactions tangentielles dépend du signe du moment extérieur appliqué et la valeur des réactions tangentielles dépend de leurs positions par rapport à l'axe de rotation et des axes  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$ .

La solution statique converge au bout d'une itération et se stabilise à la valeur finale.

• Comme pour les deux simulations précédentes, on augmente ici la valeur du moment extérieur  $\vec{M}(\vec{F}) = -60000\vec{z}$ , la simulation numérique donne :

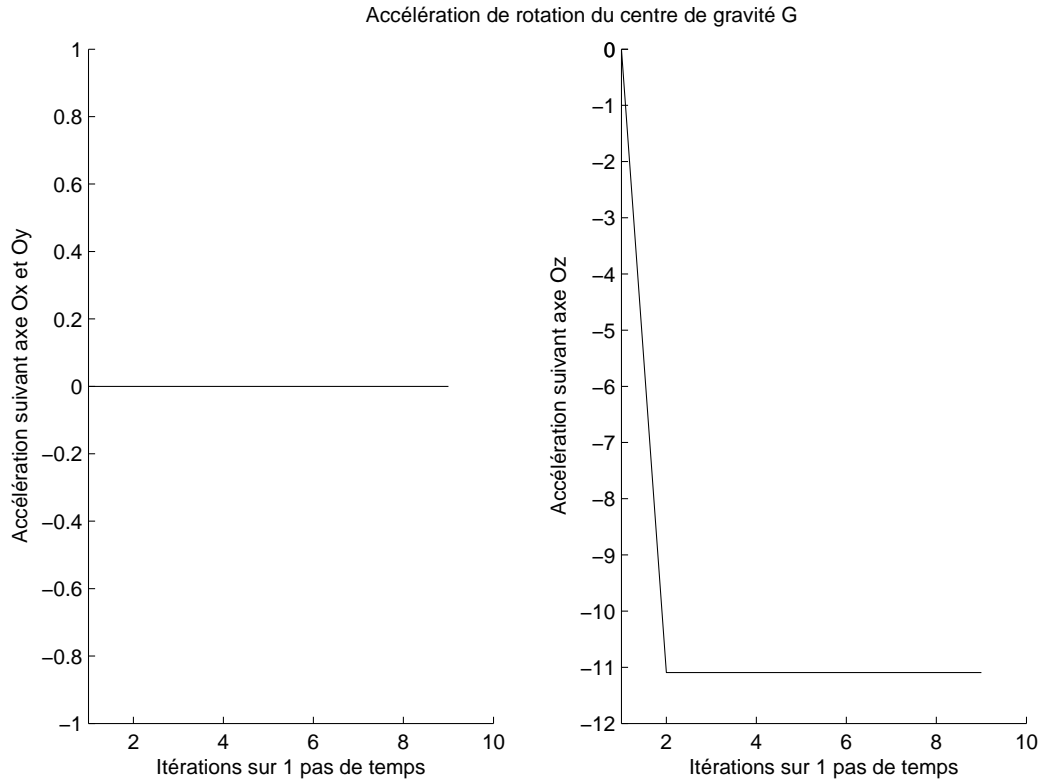


FIG. 4.16 – Représentation des accélérations linéaires  $\Gamma_x, \Gamma_y$  et de rotation  $\dot{\Omega}_z$  au centre de gravité du prisme pour  $M_z = -60000Nm$

Les courbes de la figure 4.16 montrent que la valeur du moment extérieur appliqué est suffisante pour faire bouger le solide (cas glissant).

La valeur de l'accélération de rotation  $\dot{\Omega}_z$  suivant l'axe  $\vec{Oz}$  est constante et négative. Le prisme, au vue de sa symétrie par rapport à son axe de rotation, tourne sur lui-même autour de  $\vec{Oz}$ , à accélération constante.

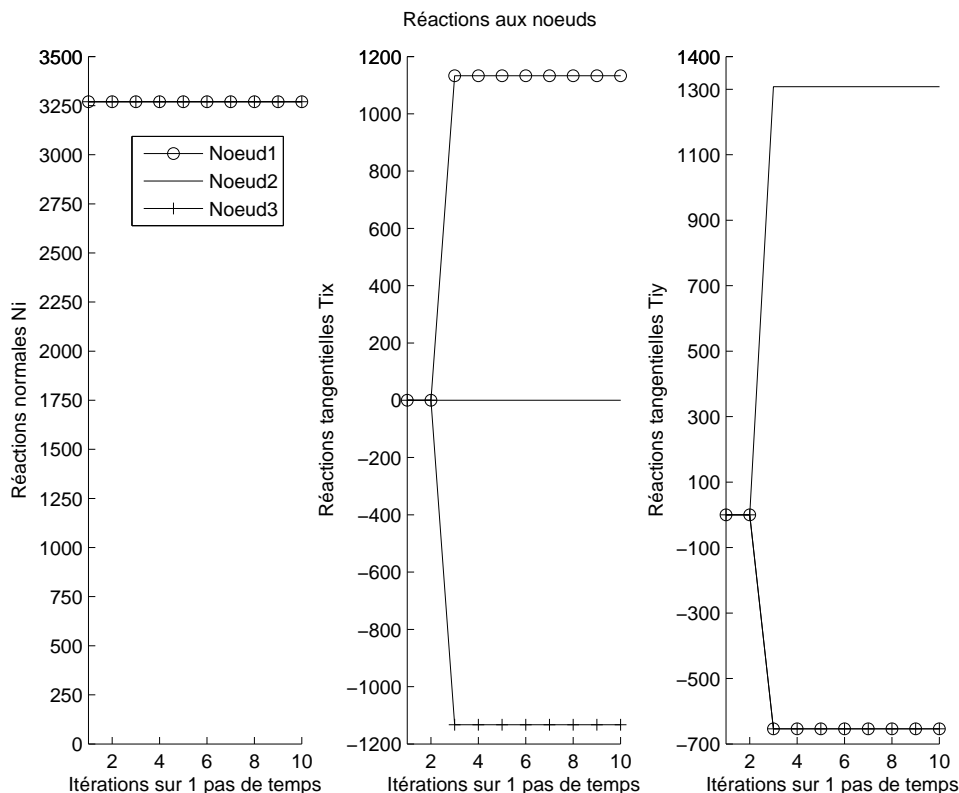


FIG. 4.17 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $M_z = -60000Nm$

Les courbes des figures 4.16 et 4.17 sont tracées pour 10 itérations.

On retrouve les mêmes conclusions que celles de l'exemple précédent à savoir que les trois réactions normales sont identiques. Les réactions tangentielles sont respectivement découplées, symétriques suivant l'axe  $\vec{O}x$  et la somme est  $T_{1y} + T_{3y} = -T_{2y}$  suivant l'axe  $\vec{O}y$ .

Les valeurs en chaque noeud des réactions tangentielles sont plus élevées que dans le cas statique car la condition de glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} = fN_i$  ( $i=1,3$ ) est vérifiée. La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  donnent le poids du bloc. Les résultats du cas dynamique sont cohérents avec les hypothèses faites.

La solution dynamique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale.

### Premier bilan des simulations

Sur cette première série de simulations réalisées avec le code MatLab, on remarque que :

- les réactions tangentielles s'opposent toujours au sens de glissement. Ces résultats sont conformes avec les lois de frottement classiques de Coulomb,
- si le prisme glisse dans une direction donnée, alors quel que soit le module de la force extérieure appliquée au centre de gravité du solide, les valeurs des réactions normales et tangentielles restent identiques. Dans le cas où on applique un moment extérieur autour de l'axe  $\vec{O}z$ , les valeurs des réactions sont cohérentes avec la symétrie et l'axe de rotation du solide,

- la convergence, dans les cas non-glissant et glissant, est très rapide (1 à 3 itérations).

On propose d'étudier la transition du cas de non-glissement au cas de glissement. Le but est de vérifier si les réactions à la limite du glissement sont identiques aux réactions lorsque le solide glisse.

- On applique une force extérieure  $\vec{F} = -m * g * f \vec{x}$ , la simulation numérique donne :

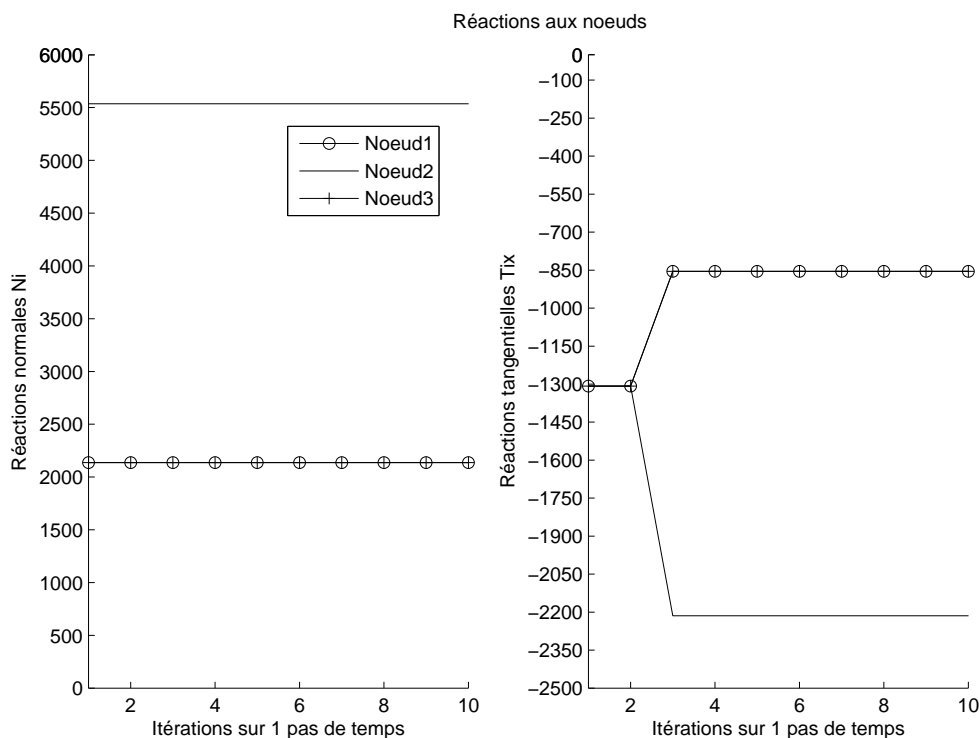


FIG. 4.18 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $F_x = -m * g * f N$

Les valeurs des réactions normales et tangentielles de la figure 4.18 sont identiques aux valeurs trouvées dans la figure 4.14. La transition du cas de non-glissement au cas de glissement se fait de façon continue.

On étudie maintenant le cas d'un cube posé sur un plan pour modéliser quatre noeuds de contacts. Cet exemple permet de valider les hypothèses pour lever l'indétermination des réactions normales et tangentielles. Par rapport à l'exemple du prisme, l'hypothèse de répartition linéaire sur les actions normales est ajoutée.

### 4.3.2 Surface de contact à 4 noeuds

On considère un cube en contact avec un plan horizontal. Les actions de contact sont localisées au niveau des quatre noeuds  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , sommets de la face en contact. Sur l'exemple de la figure 4.19, le cube a une hauteur de  $a$  et n'est soumis qu'à son poids propre

( $P = m * g$  avec  $g = -9.81m.s^{-2}$ ,  $m$  : masse du solide) au niveau de son centre de gravité.

$$\{ T_{\text{ext}} \} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Le torseur cinématique est :

$$\{ T_{\text{cin}} \} = \begin{Bmatrix} v_x & 0 \\ v_y & 0 \\ 0 & \Omega_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

Le cube est considéré restant toujours en contact.

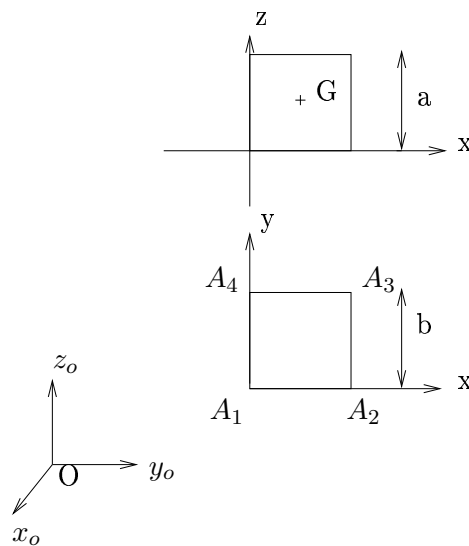


FIG. 4.19 – Géométrie du cube

Nous prenons les paramètres numériques suivants :

- Coefficient de frottement :  $f=0.4$ ,
- Hauteur du solide :  $a=1m$ ,
- Largeur du solide :  $b=1m$ ,
- Masse du solide :  $m=1000kg$ .
- Coordonnées des noeuds :  $A_1 = (0, 0, -1)$ ;  $A_2 = (1, 0, -1)$ ;  $A_3 = (1, 1, -1)$ ;  $A_4 = (0, 1, -1)$
- Pas de temps : comme pour l'exemple précédent,
  - \* dans le cas non-glissant, le système d'équations est résolu de façon itérative. Le paramètre temps  $h$  est pris en compte,
  - \* dans le cas glissant,  $h = 10^{-4}s$  (par analogie avec le code de calcul LMGC90).
- Conditions initiales :  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\frac{m*g}{4}$ ;  $u = v = 0m.s^{-1}$  et  $\Omega = 0rad.s^{-1}$  (cas glissant).

La géométrie du cube est symétrique autour de son axe de rotation. Le torseur des efforts extérieurs



est toujours appliquée au centre de gravité du solide.

• On applique une force extérieure au cube  $\vec{F} = 1000\vec{x} - 1000\vec{y}$  (inclinée à  $45^\circ$  par rapport aux côtés du cube), la simulation numérique donne les résultats suivants :

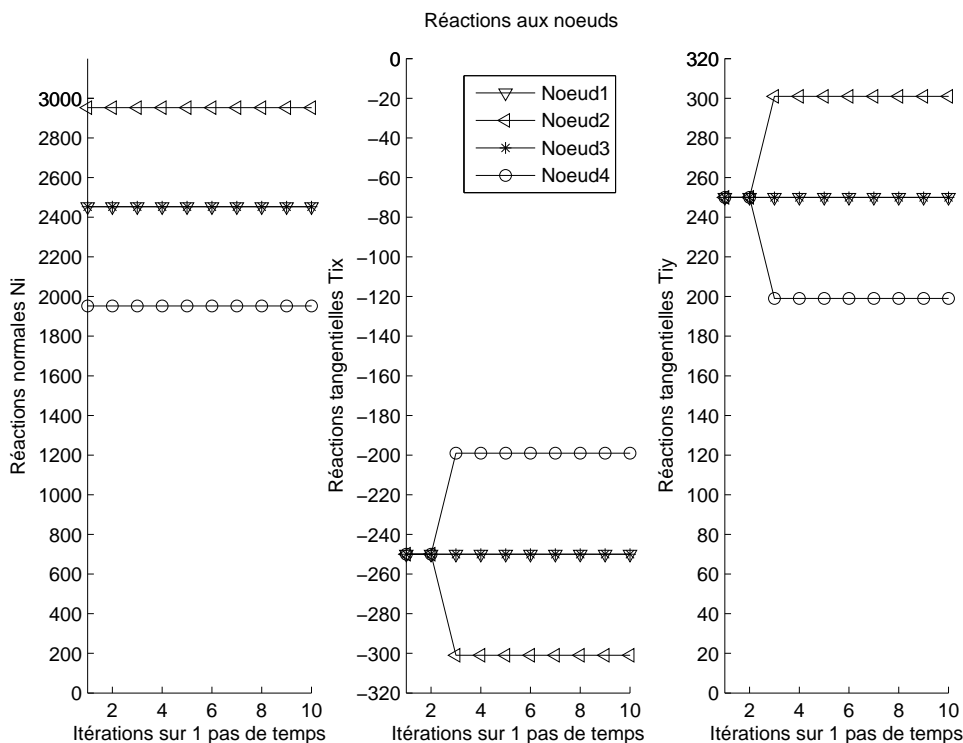


FIG. 4.20 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour  $F_x = 1000N$  et  $F_y = -1000N$

Le torseur cinématique a toutes ses composantes nulles : le solide reste immobile. Ce résultat était prévisible, en accord avec les valeurs de la force extérieure appliquée.

Les courbes de la figure 4.20 sont tracées pour 10 itérations.

Comme pour l'exemple du prisme, les réactions tangentielles s'opposent à la force extérieure. La direction de la force extérieure est positive suivant l'axe  $\vec{O}x$  et négative suivant l'axe  $\vec{O}y$ . En raison de la symétrie du cube et de l'application de la force suivant la diagonale de la surface de contact, les valeurs des réactions sont les plus élevées au niveau du noeud  $A_2$ , identiques au niveau des noeuds  $A_1$  et  $A_3$ , et les moins élevées au niveau du noeud  $A_4$ . Le solide s'appuie donc plus sur le noeud  $A_2$  que sur le noeud  $A_4$ .

La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  donne le poids du bloc. La condition de non-glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} < fN_i$  ( $i=1,4$ ) est vérifiée. Les résultats du cas statique sont cohérents avec les hypothèses faites.

La solution statique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale. Comme pour l'exemple du prisme, le pas de temps par rapport au cas glissant peut être augmenté :  $h = 10^{-3}s$ .

- Dans la deuxième simulation, on propose d'augmenter les valeurs de la force  $\vec{F} = 40000\vec{x} - 40000\vec{y}$  (inclinée à  $45^\circ$  par rapport aux côtés du cube) :

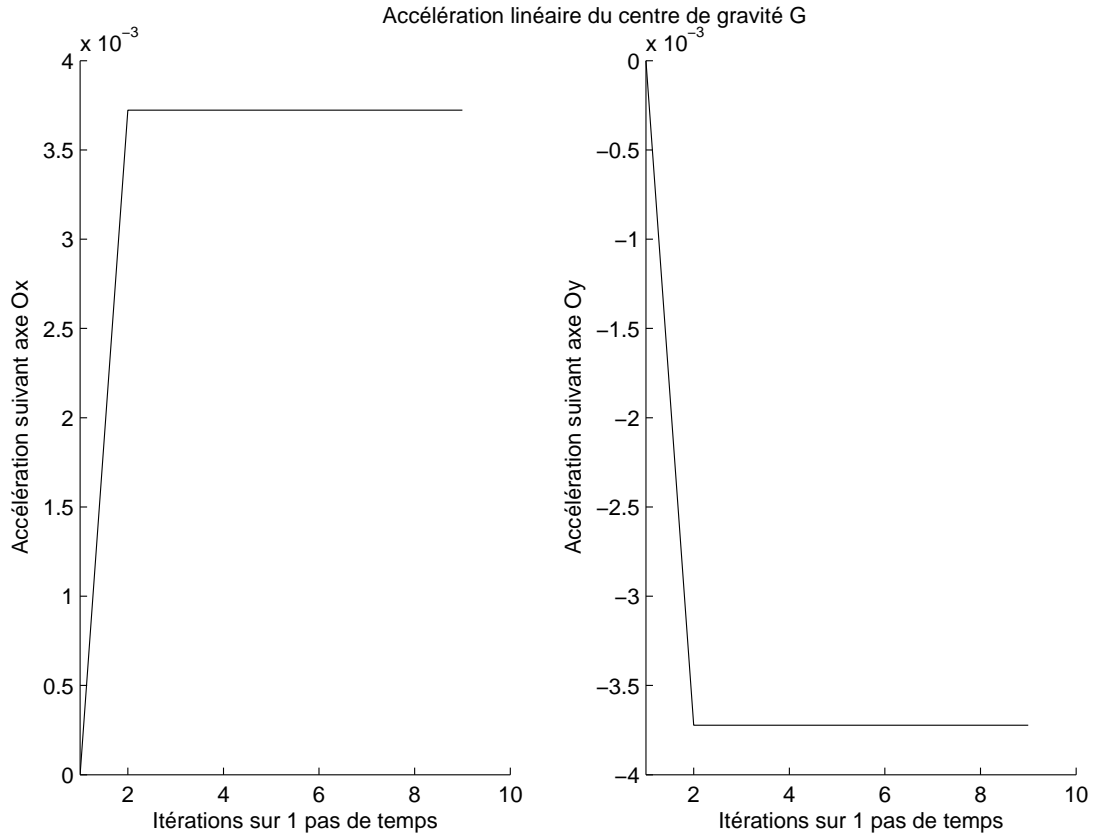


FIG. 4.21 – Représentation des accélérations linéaires  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_y$  au centre de gravité du cube pour  $F_x = 40000N$  et  $F_y = -40000N$

La courbe de la figure 4.21 montre que le modèle prédit bien le mouvement attendu. Les valeurs des accélérations linéaires  $\Gamma_x$  suivant les axes  $\vec{Ox}$  et  $\Gamma_y$  suivant les axes  $\vec{Oy}$  sont respectivement constante positive et constante négative. Le solide se déplace sur une trajectoire inclinée de  $45^\circ$  par rapport aux directions initiales de ses côtés, dans le repère général.

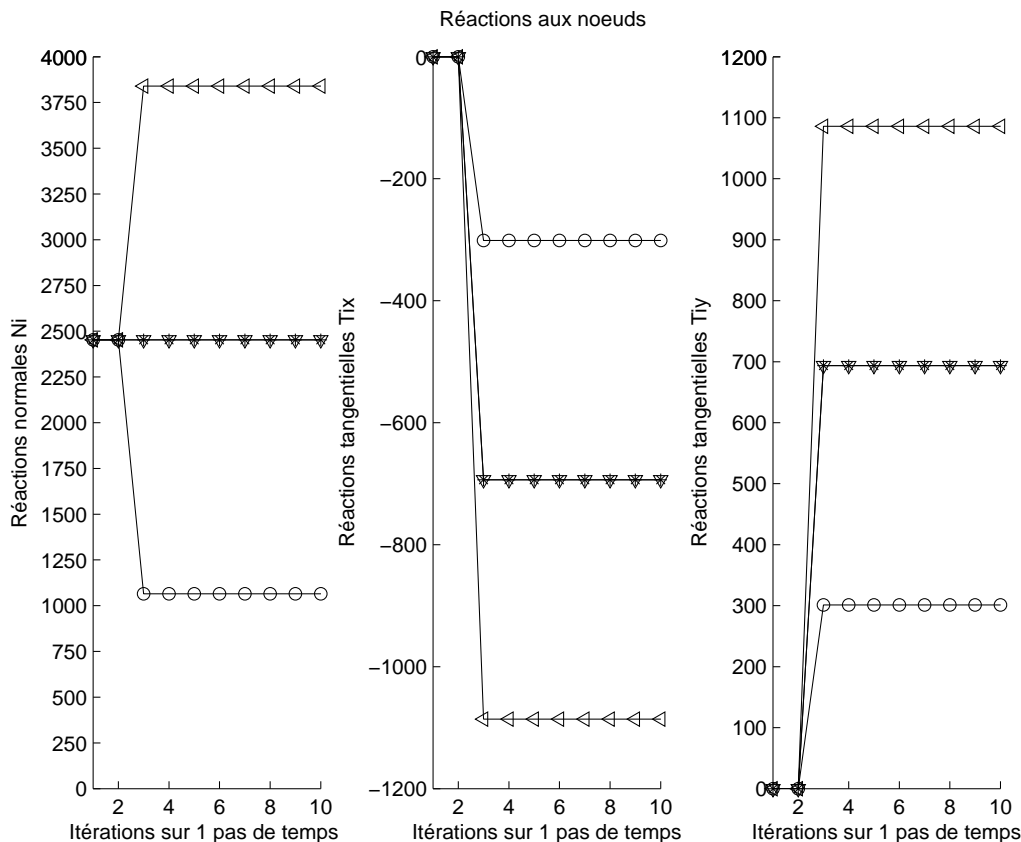


FIG. 4.22 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour  $F_x = 40000N$  et  $F_y = -40000N$

Les courbes des figures 4.21 et 4.22 sont tracées pour 10 itérations.

On retrouve les mêmes conclusions que l'exemple précédent à savoir que les réactions tangentielles s'opposent au sens de glissement du solide et que les valeurs des réactions sont plus élevées au niveau du noeud  $A_2$  qu'aux noeuds  $A_1$ ,  $A_3$  et  $A_4$ . Les valeurs en chaque noeud des réactions tangentielles sont plus élevées que dans le cas statique car la condition de glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} = fN_i$  ( $i=1,4$ ) est vérifiée.

La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  donne le poids du bloc. Les résultats du cas dynamique sont conformes avec les hypothèses faites.

La solution dynamique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale.

• On propose d'appliquer maintenant un moment extérieur de module  $\vec{M}(\vec{F}) = -400\vec{z}$  pour vérifier si les résultats sont cohérents avec ceux proposés par le prisme. La simulation numérique donne :

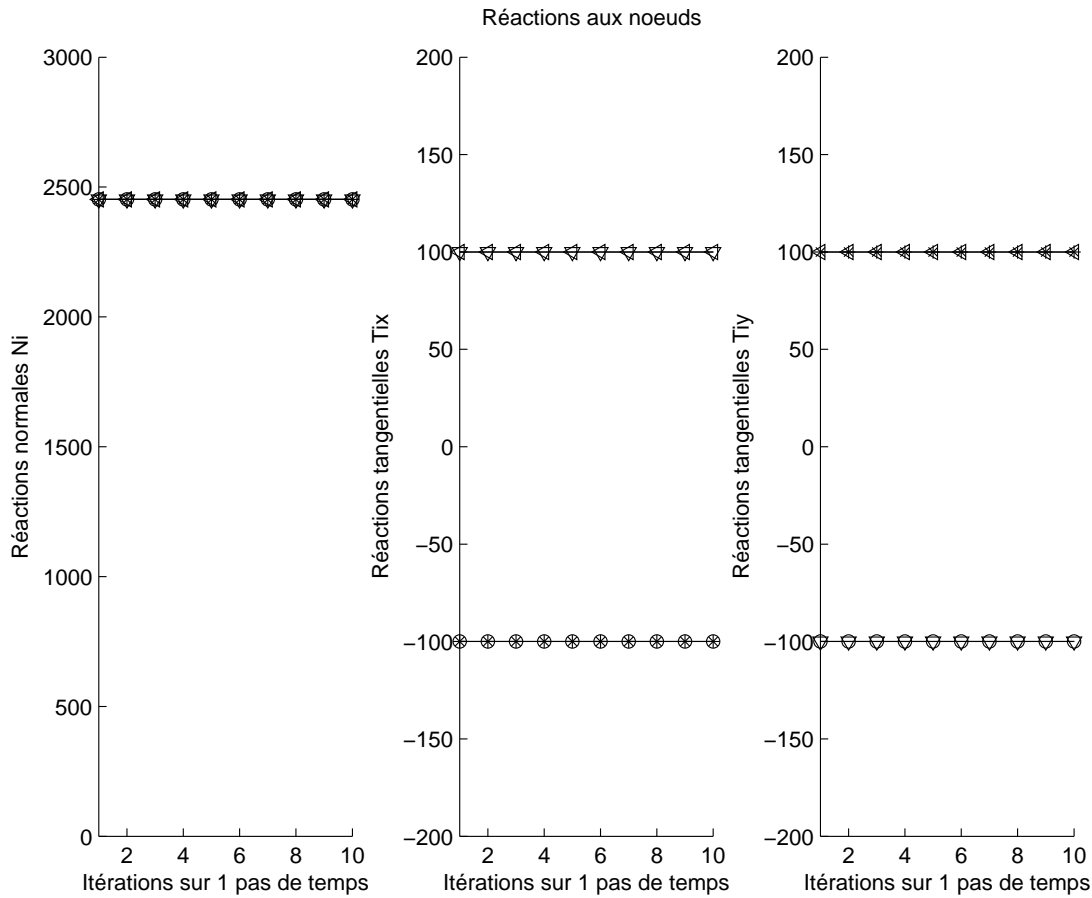


FIG. 4.23 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour  $M_z = -400Nm$

Les composantes du torseur cinématique sont toutes nulles : le solide reste immobile. La valeur du moment extérieur appliqué n'est pas suffisante pour déplacer le solide.

Les courbes de la figure 4.23 sont tracées pour 10 itérations.

Comme pour l'exemple du prisme, en raison de la géométrie du cube, les quatre réactions normales sont identiques. Les réactions tangentielles sont symétriques suivant les axes  $\vec{O}x$ ,  $\vec{O}y$  et  $T_{1x} + T_{2x} = -(T_{3x} + T_{4x})$ ,  $T_{1y} + T_{4y} = -(T_{2y} + T_{3y})$ .

La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  donne le poids du bloc. La condition de non-glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} < fN_i$  ( $i=1,4$ ) est vérifiée. Les résultats du cas statique sont cohérents avec les hypothèses faites.

Ces résultats sont conformes aux hypothèses de symétrie du solide. Le signe des réactions tangentielles dépend du signe du moment extérieur appliqué et la valeur des réactions tangentielles dépend

de leur position par rapport à l'axe de rotation du solide et aux axes  $\vec{O}x$  et  $\vec{O}y$ .

La solution statique converge au bout d'une itération et se stabilise à la valeur finale.

• Comme pour les deux exemples précédents, on augmente la valeur du moment extérieur  $\vec{M}(\vec{F}) = -40000\vec{z}$ . On obtient les résultats suivants :

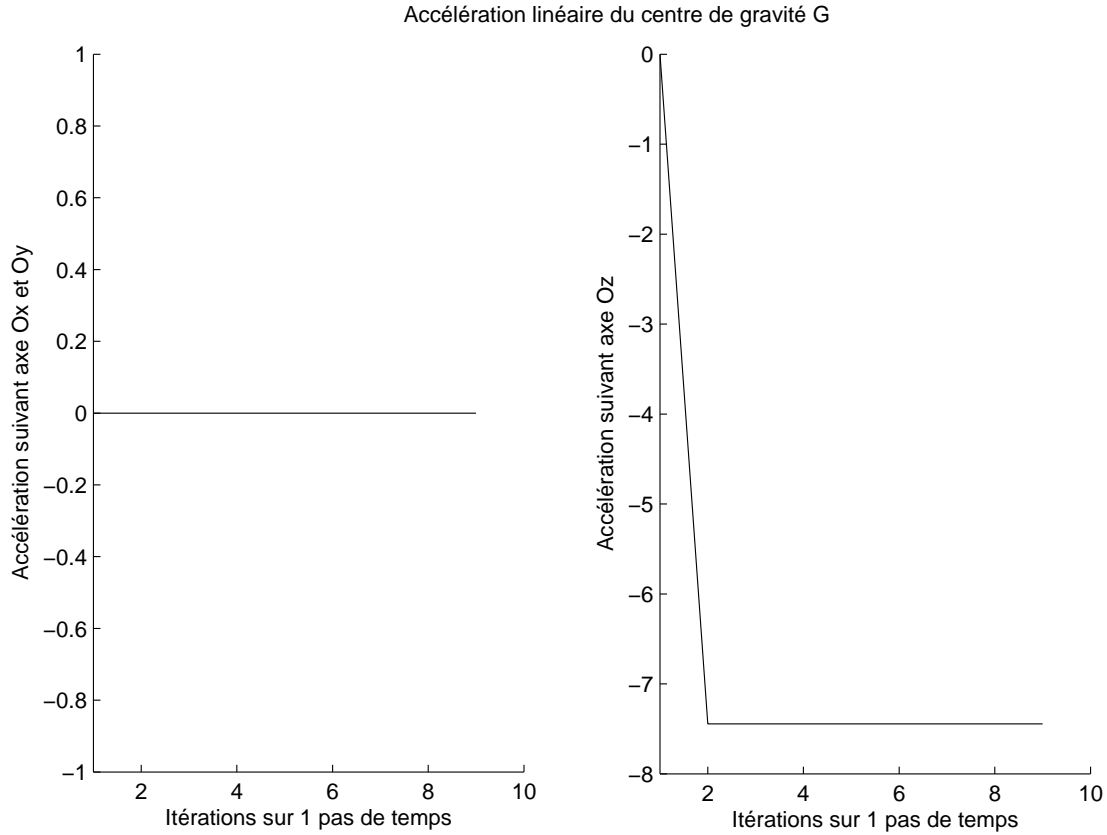


FIG. 4.24 – Représentation des accélérations linéaires  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  et de rotation  $\dot{\Omega}_z$  au centre de gravité du cube pour  $M_z = -40000Nm$

Les courbes de la figure 4.24 montrent que la valeur du moment extérieur appliquée est suffisante pour faire bouger le solide (cas glissant).

La valeur de l'accélération de rotation  $\dot{\Omega}_z$  suivant l'axe  $\vec{O}z$  est constante et négative. Le cube, du fait de sa symétrie par rapport à son axe de rotation, tourne sur lui-même autour de  $\vec{O}z$ .

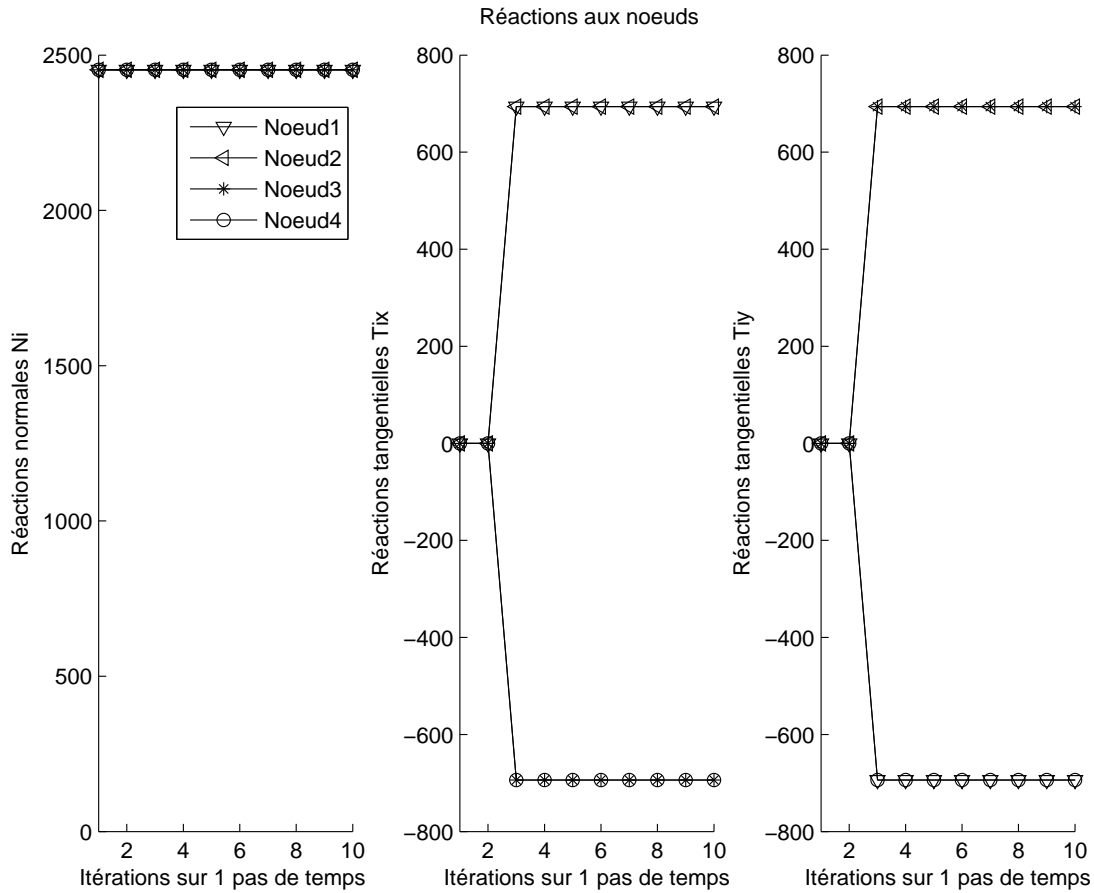


FIG. 4.25 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du cube pour  $M_z = -40000Nm$

Les courbes 4.24 et 4.25 sont tracées pour 10 itérations.

On retrouve les mêmes conclusions que pour le cas du prisme et pour l'exemple précédent.

Les valeurs en chaque noeud des réactions tangentielles sont plus élevées que dans le cas statique car la condition de glissement  $\sqrt{T_{ix}^2 + T_{iy}^2} = fN_i$  ( $i=1,4$ ) est vérifiée. La somme des réactions normales  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  donne le poids du bloc. Les résultats du cas dynamique sont cohérents avec les hypothèses faites.

La solution dynamique converge au bout de 3 itérations et se stabilise à la valeur finale.

• On applique une force extérieure  $\vec{F} = -m * g * f \vec{x} + m * g * f \vec{y}$  pour vérifier le cas limite de glissement. La simulation numérique donne :

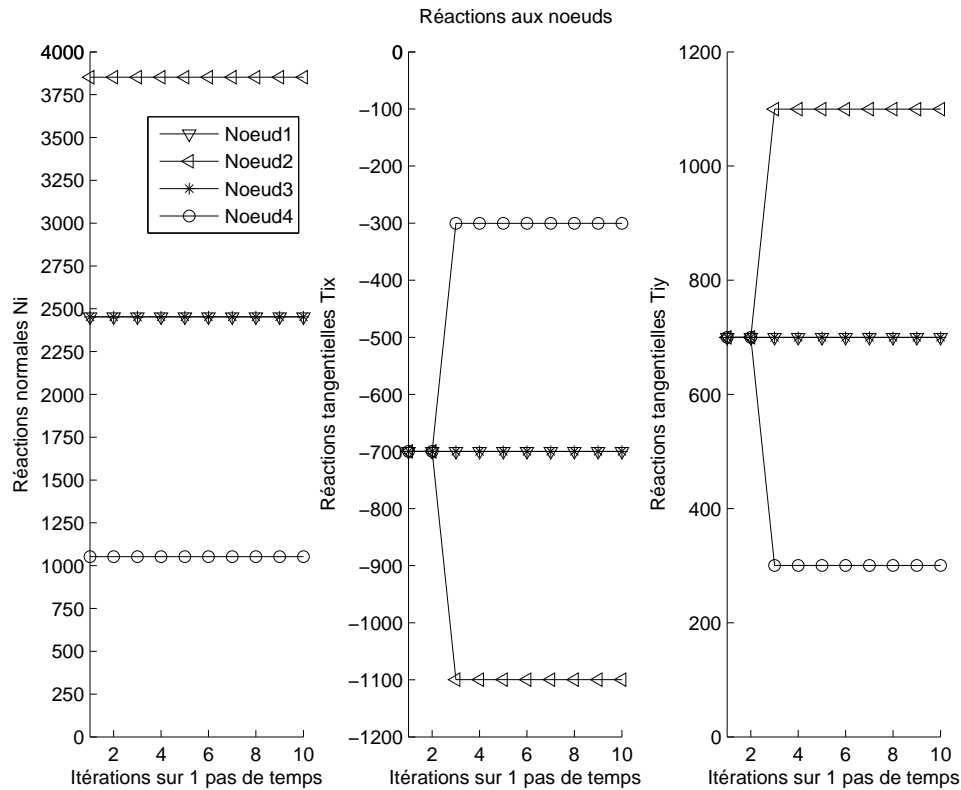


FIG. 4.26 – Réactions normales et tangentielles aux noeuds du prisme pour  $F_x = -m * g * f$  N et  $F_y = m * g * f$  N

Comme pour l'exemple du prisme, les valeurs des réactions normales et tangentielles de la figure 4.26 sont identiques aux valeurs trouvées dans la figure 4.22. La transition du cas de non-glissement au cas de glissement se fait de façon continue.

### Bilan général des simulations

Les hypothèses supplémentaires de proportionnalité des réactions tangentielles et de répartition linéaire des réactions normales ont été testées dans les cas statique et dynamique pour un nombre de noeuds égal à 3 et 4.

Pour valider ces hypothèses :

- des conditions de non-glissement et glissement sont vérifiées,
- la simulation sur la transition non-glissant/glissant réalisée pour les cas du prisme et du cube a montré que les résultats à la limite du glissement sont équivalents à ceux du glissement,
- quelque soit l'initialisation, les valeurs des réactions convergent vers une solution unique,
- on a représenté sur la figure 4.27 la réaction tangentielle  $\|T\| = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2}$  au niveau du noeud

1 du cube en fonction de la valeur de la force extérieure  $F_{ext}^{\vec{}} = F_x \vec{x}$ .

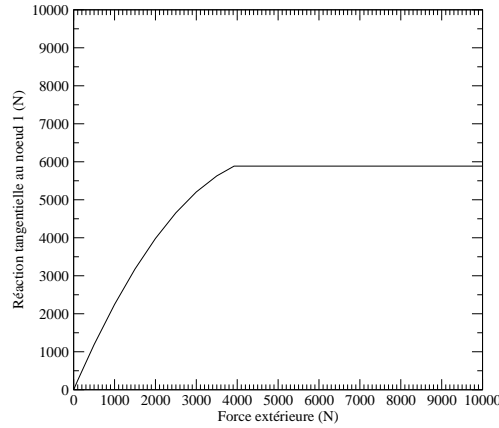


FIG. 4.27 – Transition non-glissant/glissant au niveau du noeud 1 du cube

La valeur de la réaction tangentielle croît (cas de non-glissement, c'est-à-dire à l'intérieur du cône de Coulomb) jusqu'à atteindre une valeur seuil (cas de glissement, à savoir sur le cône de Coulomb). Le passage entre les cas non-glissant et glissant se produit ici pour  $F_{ext}^{\vec{}} = -m * g * f \vec{x}$  c'est-à-dire  $F_x = 3924N$ .

- si un solide glisse suivant une direction inclinée de l'angle  $\theta$  (figure 4.28) par rapport à l'axe  $\vec{Ox}$ , les valeurs des réactions à un noeud donné dépendent de  $\theta$ . A titre d'exemple, on vérifie les réactions tangentielles au noeud  $A_1$  du cube.

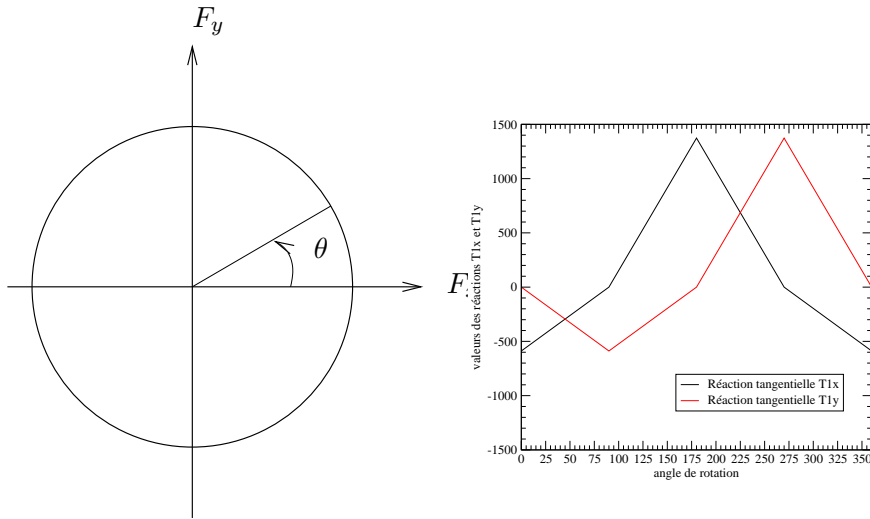


FIG. 4.28 – Influence de la valeur du module de  $F_x$  et  $F_y$  sur les valeurs des réactions  $T_x$  et  $T_y$



Conditions initiales : pour  $\theta = 0^\circ$ ,  $F_x = 10000N$  et  $F_y = 0N$ .

Les courbes présentées à droite sur la figure 4.28 ne sont pas centrées en 0 car les calculs des réactions sont réalisées au noeud  $A_1$  du cube. Ce noeud est excentré par rapport au centre de gravité G.

On peut noter le décalage de  $90^\circ$  sur les courbes  $T_{1x}$  et  $T_{1y}$  :  $T_{1x}(\theta) = T_{1y}(\theta + 90^\circ)$ .

On s'intéresse maintenant à un cas limite : le solide tend vers le basculement. Pour créer ce dernier, on considère un parallélépipède dont les dimensions sont déterminées sur la figure 4.29. Pour assurer physiquement le mouvement de basculement du solide, on a choisi de faire varier la hauteur du parallélépipède plutôt que celle de la force appliquée.

### 4.3.3 Cas limite : le solide tend vers le basculement

Pour illustrer cette modélisation, on considère un cube en contact avec un plan horizontal. Les actions de contact sont localisées au niveau des quatre noeuds  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , sommets de la face en contact.

Sur l'exemple de la figure 4.29, le cube a une surface de contact de  $a*b$  et une hauteur variable  $c$ . Ce solide n'est soumis qu'à son poids propre ( $P = m*g$  avec  $g = -9.81m.s^{-2}$ ,  $m$  : masse du solide).

Au niveau de son centre de gravité.

$$\{ T_{\text{ext}} \} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.6)$$

Le torseur cinématique est :

$$\{ T_{\text{cin}} \} = \begin{Bmatrix} v_x & 0 \\ v_y & 0 \\ 0 & \Omega_z \end{Bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Le cube est considéré restant toujours en contact.

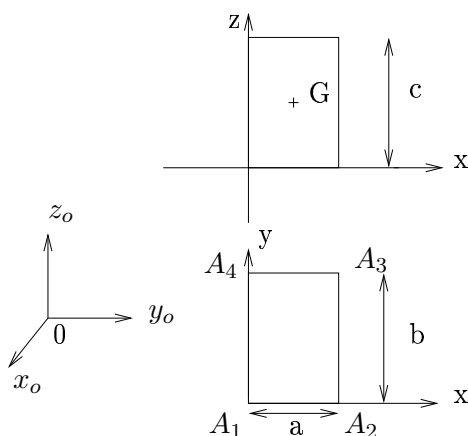


FIG. 4.29 – Modélisation du basculement

Nous prenons les paramètres numériques suivants :

- Coefficient de frottement :  $f=0.4$ ,
  - surface de contact :  $a=1\text{m}$ ;  $b=4\text{m}$ ,
  - Hauteur variable du solide :  $c=X\text{m}$ ,
  - Masse du solide :  $m=1000\text{kg}$ .
  - Coordonnées des noeuds :  $A_1 = (0, 0, x)$ ;  $A_2 = (4, 0, x)$ ;  $A_3 = (4, 1, x)$ ;  $A_4 = (0, 1, x)$
  - Pas de temps :  $h = 10^{-3}\text{s}$  (cas de non-glissement) et  $h = 10^{-4}\text{s}$  (cas de glissement).
  - Conditions initiales :  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\frac{m \cdot g}{4}$ ;  $u = v = \Omega = 0\text{m.s}^{-1}$  (cas de glissement).
- La force extérieure est toujours appliquée au centre de gravité du solide  $F_x = 10000\text{N}$ .

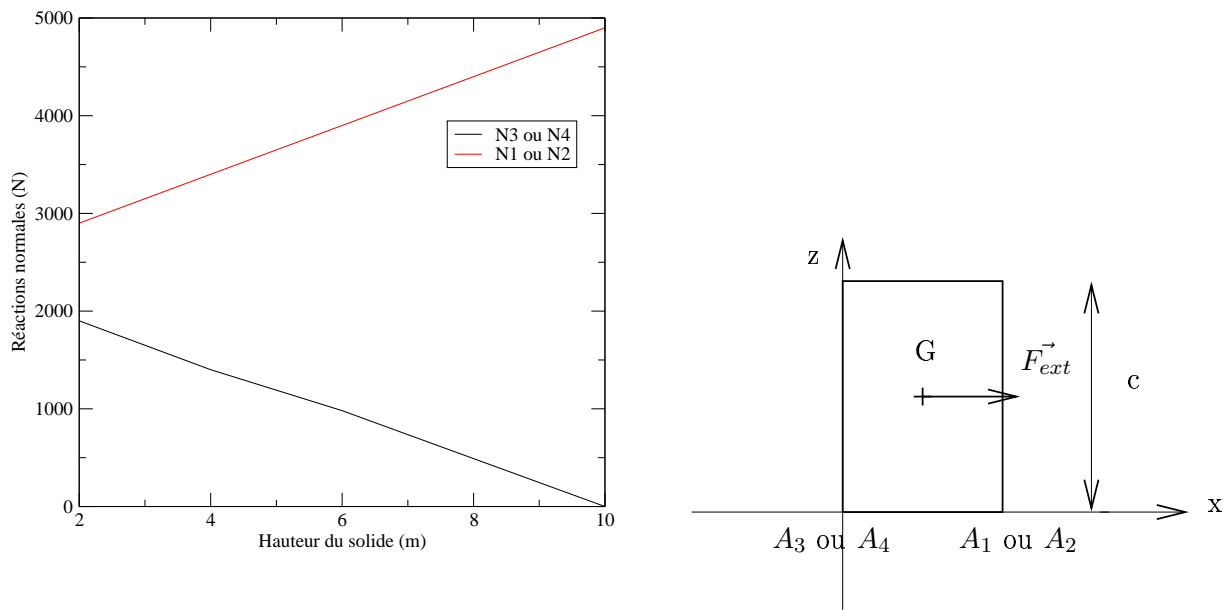


FIG. 4.30 – Cas limite : le parallélépipède tend vers le basculement

Sur cet exemple, la hauteur limite de basculement est de 10m. Pour cette hauteur, les réactions normales des noeuds  $N_3$  et  $N_4$  sont nulles et le poids du parallélépipède est repris par les noeuds  $N_1$  et  $N_2$  soit  $N_1 + N_2 = P$ . La méthode de résolution permet d'atteindre la limite de basculement c'est-à-dire l'annulation des noeuds  $N_3$  et  $N_4$ .

## 4.4 Conclusion et perspectives

Dans une maçonnerie, on est confronté à une indétermination de deux types : indétermination locale et indétermination globale.

L'indétermination locale est associée au nombre de contacts ponctuels définissant une liaison plane. Sans frottement, cette dernière doit être définie par trois contacts ponctuels pour être isostatique. Avec frottement, le problème est inconditionnellement statiquement indéterminé.

L'indétermination globale est associée à la prise en compte de l'ensemble des liaisons planes entre

les blocs dans la structure.

- Pour la résolution locale, on est confronté à une indétermination des actions normales et tangentielles. Pour lever cette indétermination, on utilisera une stratégie en deux étapes :

- pour les actions normales, on suppose la répartition spatiale linéaire. Celle-ci crée une dépendance linéaire entre les inconnues normales,

- pour les actions tangentielles, on suppose la répartition dans une direction donnée. Cette répartition consiste à créer une dépendance entre les composantes tangentielles et normale.

- En ce qui concerne la résolution globale, on utilise l'histoire du chargement, dont l'importance a été soulignée par Moreau (Moreau (2005)). Cette méthode consiste à mettre en place successivement les blocs en suivant un procédé réaliste de construction. A chaque pas de temps, l'initialisation des variables à partir des résultats précédemment obtenus, permet de garantir la cohérence de la solution.

La méthode de résolution utilisée dans ce chapitre est une méthode "couplée". Celle-ci permet, au niveau de la surface de contact, de calculer l'ensemble des réactions aux noeuds de contact. Ces réactions sont stockées dans une matrice, appelée matrice "raideur", et sont liées.

L'étude des deux cas académiques, prisme et cube, a permis de tester la méthode. Il en ressort essentiellement que les réactions tangentielles s'opposent toujours au sens de glissement du solide, conformément aux lois classiques de Coulomb. De plus, leurs valeurs dépendent du cas considéré, soit statique soit dynamique, et de leurs positions dans la surface de contact.

La méthode de résolution implémentée dans le code de calcul LMGC90 est une méthode "séquentielle". Cette méthode permet, au niveau de la surface de contact, de résoudre séquentiellement les réactions aux noeuds.

Dans le chapitre 5, une comparaison entre les méthode "couplée" et "séquentielle" sera réalisée. La rapidité de convergence de l'algorithme "couplé" sera établie (1 à 3 itérations) et l'objectif est d'obtenir des résultats localement plus stable que la méthode "séquentielle". Nous modéliserons l'exemple du cube dans les cas non-glissant, glissant et à la limite du basculement.

---

## Chapitre 5

# Etude du comportement mécanique des structures réelles et validation numérique tridimensionnelle

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Apport de notre modélisation dans l'étude du comportement des structures maçonnées soumises à des sollicitations dynamiques . . . .</b>	<b>180</b>
5.1.1	Maçonnerie à joints secs : tests de cisaillement et tassement différentiel . .	181
5.1.2	Comportement d'un pont maçonné sous charge ponctuelle . . . . .	189
5.1.3	Structure en grand appareil ruinée sous charge cyclique . . . . .	194
5.1.4	Conclusion . . . . .	196
<b>5.2</b>	<b>Résolution numérique du problème de contacts : application aux maçonneries . . . . .</b>	<b>197</b>
5.2.1	Modélisation d'ouvrages en grand appareil comportant un nombre de blocs important . . . . .	197
5.2.2	Modélisation d'ouvrages précontraints . . . . .	201
5.2.3	Conclusion . . . . .	213
<b>5.3</b>	<b>Problème statiquement indéterminé . . . . .</b>	<b>213</b>
5.3.1	Instabilité de la surface de contact due à un nombre insuffisant de noeuds	213
5.3.2	Application numérique au cas d'un mur suivant deux procédés de construction	215
5.3.3	Apport de la méthode de résolution "couplée" sur la stabilité de la solution	218
5.3.4	Conclusion . . . . .	222
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>222</b>

---

Les modélisations numériques par approche discrète d'ouvrages maçonnés tridimensionnels en grand appareil sont peu présentes dans la littérature. On est donc contraint de définir une stratégie de validation. En effet, il est nécessaire de vérifier la robustesse de l'algorithme de détection des contacts et les hypothèses de résolution en se plaçant dans différents cas existants.

Ce dernier chapitre s'articule ainsi autour de trois parties :

- Dans la première partie, on s'intéresse aux comportements des structures maçonnées soumises à des sollicitations dynamiques. Le but est d'évaluer la robustesse de l'algorithme de détection. Les modèles sont comparés à d'autres modèles proposés dans la littérature.

- Dans la deuxième partie, les modélisations réalisées permettent de suivre la descente de charge c'est-à-dire les zones les plus contraintes au sein d'une structure. On s'intéresse ici à la validation des modélisations à partir des réactions obtenues. On évalue notamment la transmission des efforts dans des structures précontraintes ou à grand nombre de blocs et on vérifie la résolution numérique du contact.

- Dans la troisième partie, on vérifie sur des cas académiques les résultats obtenus par deux méthodes de résolution numérique. Le but est de tester l'efficacité et de comparer les résultats obtenus avec les améliorations de la méthode de résolution des réactions au noeud proposée dans le chapitre 4, à ceux obtenus à partir de la méthode implémentée dans le code LMGC90.

Globalement, on étudie dans ce chapitre un ensemble d'ouvrages. Les simulations numériques sont réalisées grâce au code de calcul LMGC90. La détection des contacts est modélisée en utilisant le nouvel algorithme développé dans le chapitre 3. Les blocs sont supposés rigides.

Les ouvrages ont été dessinés grâce à un logiciel de CAO. Les informations sur la géométrie des structures sont :

- soit données à partir de relevés de mesures effectués directement sur le site,
- soit fournies par des tailleurs de pierre (cas de la coupôle).

## 5.1 Apport de notre modélisation dans l'étude du comportement des structures maçonnées soumises à des sollicitations dynamiques

De nombreux auteurs s'intéressent au comportement des maçonneries soumises à des sollicitations extérieures. Ces sollicitations ou facteurs peuvent être de plusieurs types :

- tremblements de terre,
- augmentation des trafics sur des ponts,
- vitesse et masse des charges roulantes,
- facteurs météorologiques,
- etc.

Des questions sont ainsi fréquemment posées.

Comment la structure réagit-elle face à des sollicitations extérieures ? S'effondre-t-elle ? Subit-elle des dégâts irréversibles ? A long terme, les fissures provoquées par le passage d'un train sur un pont peuvent-elles être catastrophiques "mécaniquement" pour la tenue de la structure ?

Pour tenter de comprendre les phénomènes physiques qui ont lieu dans une structure et tenter de répondre à ces questions, des modèles expérimentaux et numériques sont mis en oeuvre. On peut par exemple citer les travaux sur le cisaillement : Lourenço & al (Lourenço (2006)), Orduna & al (Orduna (2003)), le tassement différentiel : Biénié & al (Biénié et al. (2002)), l'étude des ponts en maçonnerie : Domède & al (Domède (2006)), Fanning & al (Fanning et Boothby (2001)), le séisme : Molina & al (Molina et al. (2001)), Le Pape & al (Le Pape et al. (2001)), la restauration d'ouvrages : Binda & al (Binda et Saisi (2001)), l'analyse limite : Gilbert & al (Gilbert et al. (2006)).

### 5.1.1 Maçonnerie à joints secs : tests de cisaillement et tassement différentiel

Les constructions antiques réalisées en joints secs sont présentes dans le monde entier. Ces ouvrages sont souvent de grands monuments : on peut citer par exemple les monuments Grecs, Romains, les constructions antiques médiévales du sud de l'Europe, le temple de l'ancien Khmer au Cambodge ou la cité du grand Zimbabwe en Afrique.

Le contact frottant est un phénomène complexe, les modèles utilisés, sont en général simplifiés pour en tenir compte. Malgré ces simplifications des comportements macroscopiques peuvent être analysés. Les deux exemples traités ici mettent en évidence, par une comparaison de résultats numériques et expérimentaux, la pertinence de l'emploi de la loi de Coulomb, de l'algorithme de détection des contacts et d'une loi de choc inélastique (coefficient de restitution nul).

La complexité des phénomènes apparaissant dans ces types d'ouvrages entraîne un challenge numérique pour les logiciels de calculs existants.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'analyse d'un mur soumis à des essais de cisaillement.

Les auteurs Lourenço et Roca (Lourenço et al. (2005), Roca et al. (2001)) étudient un mur de maçonnerie à joint sec. Le but de cette étude est de caractériser la réponse mécanique des éléments de maçonnerie à joints secs soumis à des chargements plans verticaux (charges compressives) et horizontaux (cisaillement).

#### • Descriptif du dispositif expérimental

Afin de contribuer à améliorer la connaissance du comportement de la maçonnerie à joints secs, un ensemble d'expériences est réalisé dans le laboratoire de Construction Technologique de l'université Polytechnique de Catalogne.

Les dimensions de la structure sont présentées sur la figure 5.1. Le mur est composé de 55 briques assemblées en 10 couches. Les briques utilisées ont une dimension de  $20 \times 20 \times 10 \text{ cm}^3$ . L'angle de frottement entre deux briques, mesuré expérimentalement, est de  $\phi = 33^\circ$ . Cet angle de frottement est aussi valable entre la poutre supérieure et les briques. Le mur est sollicité verticalement en compression. Les forces verticales exercées sur la poutre sont 30, 100, 200 et 250 kN équivalentes à des contraintes de 0.15, 0.5, 1 et 1.25 MPa.

#### • Résultats expérimentaux

D'un point de vue expérimental, le tableau 5.1 présente la valeur de la charge horizontale (cisaillement) à appliquer en fonction de la valeur de la charge verticale (compression).

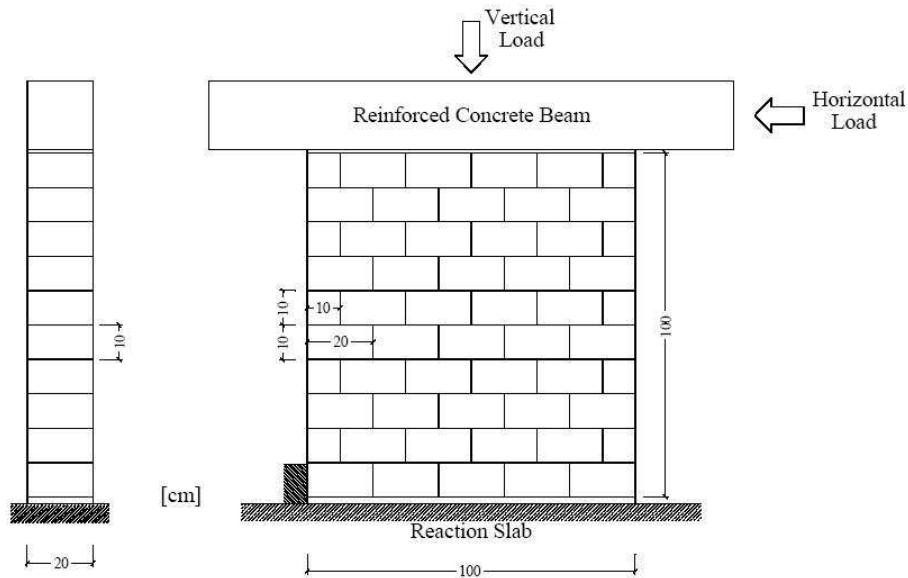


FIG. 5.1 – Géométrie de la structure et chargements. Tests de cisaillement, Roca & al (Roca et al. (2001))

Mur	Charge verticale (kN)	Charge horizontale maximum (kN)
SW.30.1	30	22
SW.30.2	30	23
SW.100.1	100	42
SW.100.2	100	49
SW.200.1	200	72
SW.200.2	200	69
SW.250.1	250	102

TAB. 5.1 – Charges verticales et horizontales mesurées. Le mur est désigné par SW.n.m où m est le nombre de murs soumis à la charge verticale n (en kN), Roca & al (Roca et al. (2001))

On présente un modèle expérimental dont la charge verticale appliquée sur la poutre est de 30kN. La figure 5.2 représente les différentes ruptures engendrées par le cisaillement.

Sur la figure 5.2, les murs SW30.1 et SW30.2 ont les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques. De plus, ils sont soumis aussi aux mêmes charges.

On constate que la rupture se propage le long du mur, dans la direction du cisaillement. Cette évolution peut être obtenue par un raisonnement qualitatif.

Cependant, les fissures ne se propagent pas de la même façon dans les deux murs. Le dispositif expérimental à mettre en oeuvre peut poser quelques problèmes au niveau des conditions aux limites et du frottement entre les blocs. Celles-ci peuvent alors perturber le déplacement des blocs et donc de la rupture.

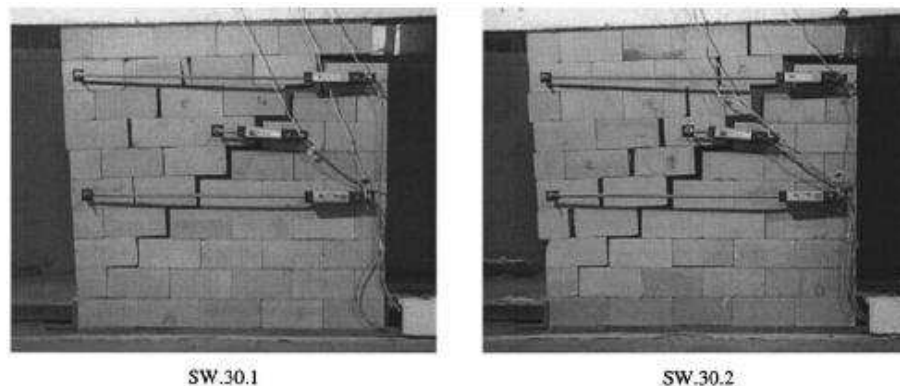


FIG. 5.2 – Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture - Ruptures expérimentales observées, Roca & al (Roca et al. (2001))

En complément de l'analyse expérimentale, une analyse numérique est réalisée.

- **Simulations numériques proposés par Lourenço et Carol**

D'un point de vue numérique, les simulations sont basées sur deux méthodes numériques différentes :

- Lourenço & al (Lourenço et Rots (1997)) proposent un modèle basé sur des éléments d'interface "multi-surface", dans une formulation éléments finis. Le modèle repose sur la théorie de la plasticité et suppose que les blocs de pierre ont un comportement élastique et les joints un comportement non-élastique. Dans les simulations numériques, les blocs de pierre sont modélisés en utilisant huit éléments continus dans le plan des contraintes et six éléments à l'interface d'épaisseur nulle. L'intégration numérique volumique est une intégration de Gauss. L'intégration numérique surfacique est de type Lobatto (Eslahchi et al. (2005)),

- Carol & al (Carol et al. (2001)) proposent un modèle basé sur des éléments d'interface, dans une formulation éléments finis. Les fissures potentielles ou développées sont représentées par des éléments d'interface d'épaisseur nulle en utilisant la mécanique de la rupture. Cette approche est formulée en termes de déplacement relatif et associée à la structure à de l'élasto-plasticité fragile.

- **Résultats numériques**

Pour l'ensemble des résultats numériques, le déplacement de la poutre, suivant l'axe de la charge horizontale appliquée, est évalué à environ 15mm.

Pour le mur SW30 (figure 5.3), la simulation numérique proposée par Lourenço & al laisse apparaître une fissure.



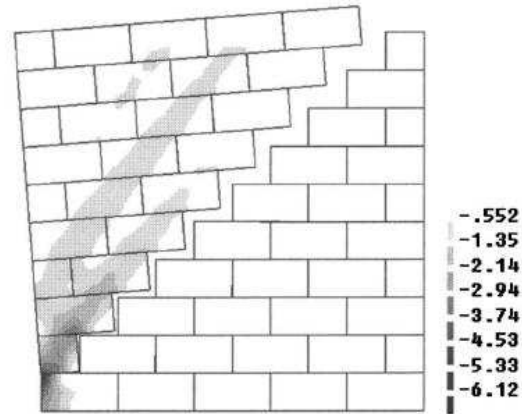


FIG. 5.3 – Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture. Modèle de Lourenço & al (Lourenço et Rots (1997))

Ce résultat est cohérent avec l'expérience (figure 5.2). La fissure se propage du haut vers le bas du mur en réponse à la sollicitation exercée par la poutre. Cependant la seconde rupture qui apparaît lors de l'expérience n'est pas retrouvée par la simulation numérique.

- Pour le mur SW200 (figure 5.4), la simulation numérique proposée par Carol & al fait apparaître différentes fissurations du mur dans le cas d'une charge verticale de 200kN.

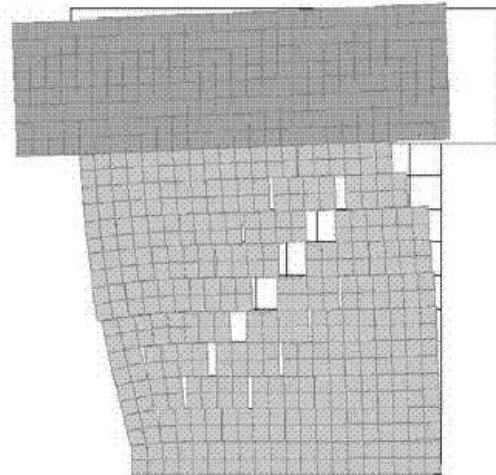


FIG. 5.4 – Cisaillement du mur SW200 jusqu'à la rupture. Modèle de Carol & al (Carol et al. (2001))

Suite à l'application du déplacement imposé, la fissure apparaît nettement de haut en bas. Cependant la seconde fissure, moins visible, est présente sur le bas du mur, parallèlement à la première. Cette rupture est moins évidente à prédire.

• **Apport de notre modélisation par approche discrète**

Cette approche, basée essentiellement sur le respect de l'impénétrabilité des éléments et l'hypothèse du frottement sec de Coulomb est adaptée à la modélisation de telles structures. Le caractère discret autorise en effet la propagation des fissures et la séparation complète des éléments. Les simulations sont obtenues grâce au code de calcul LMG90.

Le mur est étudié dans les mêmes conditions géométriques et mécaniques que celui présenté précédemment, expérimentalement et numériquement.

- Pour le mur SW30 (figure 5.5), la simulation proposée avec le nouvel algorithme de détection des contacts spécifique aux maçonneries rend compte de l'expérience plus fidèlement que le modèle précédent.

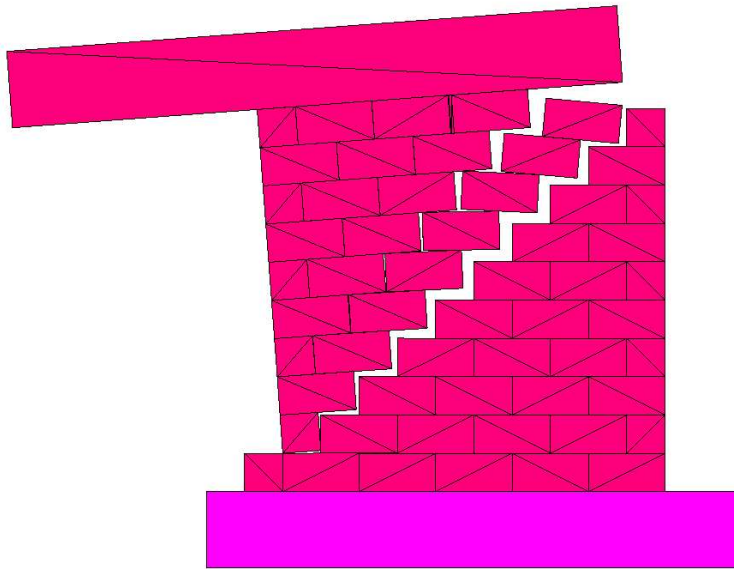


FIG. 5.5 – Cisaillement du mur SW30 jusqu'à la rupture. Simulation obtenue en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts

En effet, d'une part la fissure traversant la structure de haut en bas est bien visible et d'autre part, la seconde, parallèle, apparaît clairement.

- Pour le mur SW200 (figure 5.6), la simulation numérique de la figure 5.6 rend bien compte de l'effet produit par le cisaillement de la poutre sur le mur et permet ainsi de prédire plus exactement les déplacements des blocs donc des éventuelles ruptures.

La seconde fissure est encore plus accentuée, dans ce cas, que pour le modèle de la figure 5.4.

Des phénomènes complexes se produisent au cours des simulations avec l'apparition de fissures

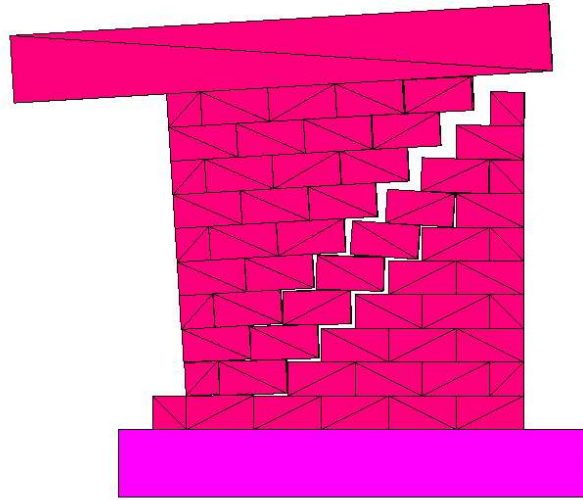


FIG. 5.6 – Cisaillement du mur SW200 jusqu'à la rupture. Simulation obtenue en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts

très difficilement perceptibles. L'algorithme de détection des contacts a été mis à l'épreuve et le modèle a reproduit les différents déplacements des blocs et donc l'apparition d'éventuelles "ruptures" au cas macroscopique.

Par ces résultats, l'algorithme a prouvé sa robustesse et son aptitude à rendre compte des résultats de l'expérience (localisations multiples de déplacements relatifs importants entre blocs).

#### • Validation de notre modèle numérique

Sur la figure 5.7, les courbes expérimentales et numériques de la force horizontale à appliquer pour que la poutre se déplace sont représentées.

On a :

- sur les courbes de gauche et pour le mur SW30 une similitude entre les résultats expérimentaux et le modèle numérique proposé par Lourenço & al,
- sur les courbes de droite et pour le mur SW200, une similitude entre les résultats expérimentaux et le modèle numérique proposé par Carol & al.

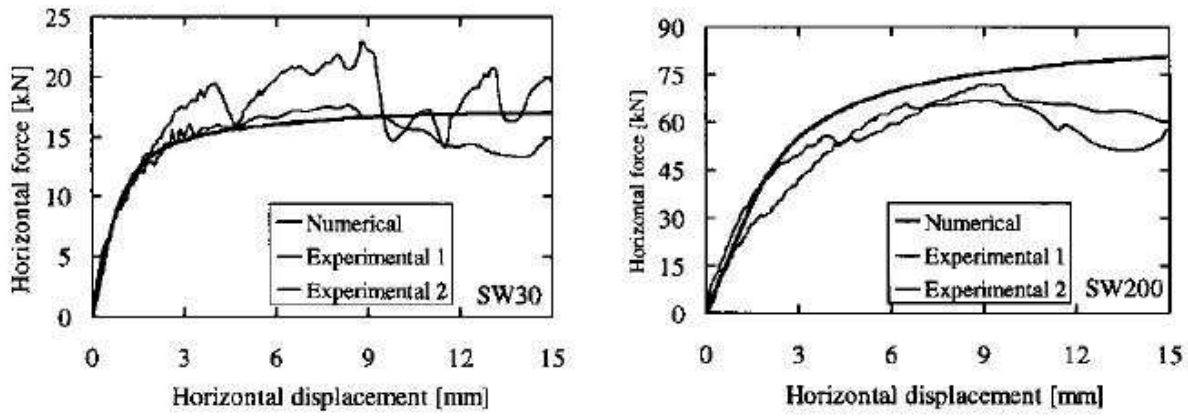


FIG. 5.7 – Diagramme charges horizontales en fonction des déplacements horizontaux, (Lourenço et Rots (1997)) et (Carol et al. (2001))

Sur la figure 5.8, les courbes sur les résultats numériques du modèle proposée en utilisant le nouvel algorithme de détection sont représentées.

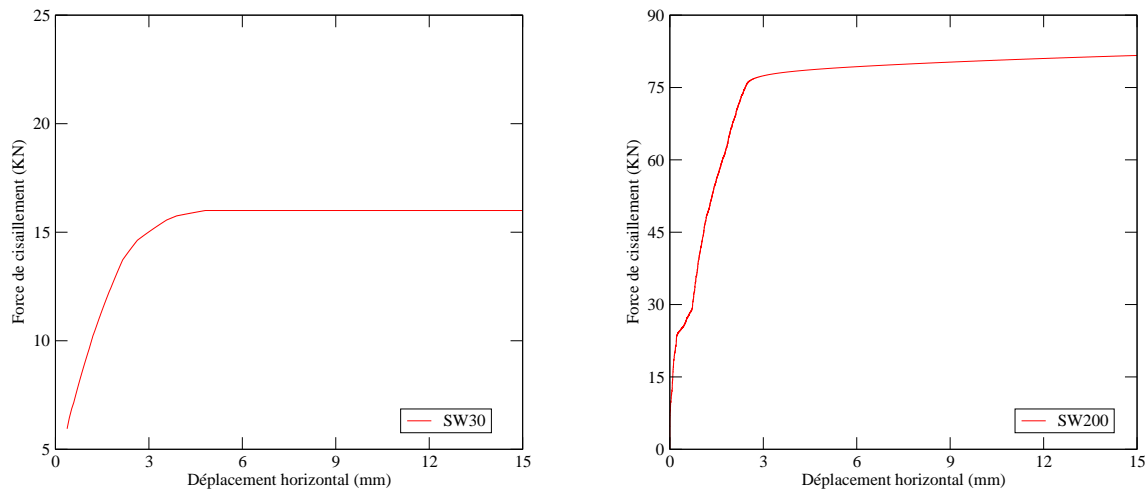


FIG. 5.8 – Diagramme charges horizontales en fonction des déplacements horizontaux, avec le nouvel algorithme de détection des contacts

On remarque sur ces résultats, que pour une même valeur appliquée de la charge horizontale, le glissement (déplacement horizontal) de la poutre sur le mur a lieu (figure 5.7). Le modèle numérique proposé est ainsi validé.

On s'intéresse maintenant à l'analyse d'un mur soumis à un tassement différentiel.

Les tassements différentiels dans les ouvrages sont une source fréquente de désordre. Leur origine réside souvent dans la variabilité spatiale des propriétés des sols, souvent imparfaitement prise en compte, nuisant ainsi à leur prévision.

A travers l'exemple suivant, on illustre un tassement différentiel afin de vérifier que l'arrangement des blocs résultant du modèle numérique simulé est proche des mesures expérimentales.

#### • Descriptif du dispositif expérimental

Biénié & al (Biénié et al. (2002)) ont modélisé un tassement de sol sur un mur. L'expérience consiste à étudier un assemblage en blocs de briques, reposant sur trois plateformes. La centrale est mobile permettant un tassement sur la partie centrale du mur. Le mur est constitué de 105 briques assemblées en 10 couches. La masse volumique de la brique est  $\mu = 2000kg/m^3$ . L'angle de frottement entre deux briques est de  $\phi = 20^\circ$  et ses dimensions sont  $0.2 \times 0.1 \times 0.05m^3$  (voir figure 5.9) (Briccoli & al, 1995 Briccoli et al. (1995)).

A partir de l'ensemble des données à notre disposition, il est apparu intéressant de réaliser cette expérience avec un modèle de corps rigides tridimensionnels. Cet exemple a pour but d'évaluer la robustesse de l'algorithme de détection des contacts et de vérifier la résolution numérique du problème de contact frottant.

Expérimentalement, la plateforme centrale s'est affaissée de 4cm. Les résultats numériques et expérimentaux sont décrits sur la figure 5.9.

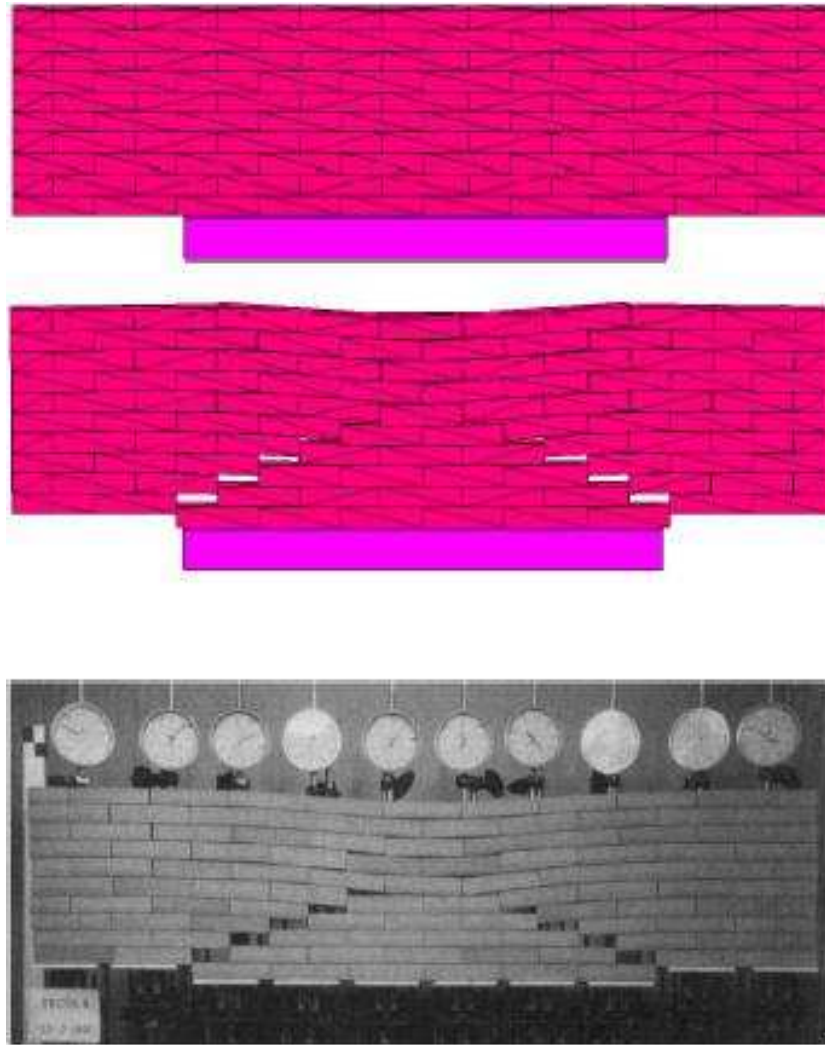


FIG. 5.9 – Tassement différentiel. Configurations initiale et finale du mur, Biénié & al (Biénié et al. (2002))

Les ouvertures de joints présentes expérimentalement ont été retrouvées par la simulation numérique. On obtient les mêmes déformées et ruptures. Le modèle numérique a montré son efficacité face à un comportement du mur assez complexe.

### 5.1.2 Comportement d'un pont maçonné sous charge ponctuelle

Très peu de recherches universitaires ont été publiées dans le domaine du calcul des ponts voûtes en trois dimensions. Citons les travaux de Fanning & al (Fanning et Boothby (2001)) qui utilisent la MEF (logiciel ANSYS) pour simuler le comportement mécanique des ponts en pierre. L'intérêt de cette recherche est de mettre en évidence la complexité des phénomènes internes transversaux et la participation de toutes les parties de l'ouvrage à la stabilité globale.

Domède & al (Domède (2006)) développent une méthode de "re-qualification" des ponts voûtes en maçonnerie. Cette méthode a été mise en oeuvre sur une voûte surbaissée, construite en 1870

	Voûte en briques	Bandeau et sommier en pierre	Murs tympans en moellons	Remplissage en moellons bruts
$E(\text{MPa})$	6800	28100	21700	21700
$\mu$	0.13	0.25	0.22	0.22
$f_e/f_c$	0.5	0.4	0.4	0.4
$f_c$ (MPa)	12	49	42	42
$\epsilon$ (mm/m)	3	2.5	3	3

TAB. 5.2 – Caractéristiques mécaniques des maçonneries du pont SNCF de la Millette, Domède & al (Domède (2006))

dans le Tarn (photo 5.10). Les sollicitations externes sont imposées par le passage de trains sur le pont.



FIG. 5.10 – Le pont SNCF de la Millette

Le terme "re-qualification" signifie l'étude qui consiste à s'assurer de l'aptitude, au service d'ouvrages existants et vieillissants et de la résistance de la structure soumise à une évolution des sollicitations (augmentation du trafic, rapidité des transports). Cette méthode est performante car elle comprend trois phases successives. La première étape consiste à rassembler par une recherche historique (géométrie, matériaux) toutes les informations nécessaires sur l'histoire de l'ouvrage et sa composition. La deuxième étape est expérimentale. Elle a pour but de déterminer une loi de comportement homogénéisée des maçonneries constitutives de l'ouvrage et une loi d'interface entre les blocs et les joints de mortier. Enfin, dans la troisième étape, des simulations numériques sont effectuées, en trois dimensions à l'aide de la méthode aux éléments finis. L'originalité est la prise en compte des "éléments joints" et des "macro-éléments" homogénéisés.

Les caractéristiques des matériaux sont regroupées dans le tableau 5.2.

#### • Dispositif des simulations

La modélisation prend en compte quatre maçonneries différentes : voûte, bandeaux et sommiers, murs et culées, remplissage (voir figure 5.11).

Cohésion	Angle de frottement interne	Résistance à la traction	Raideur normale à l'interface	Raideur tangentielle à l'interface
0.1 MPa	49°	$F_{trac} = 0.6 MPa$	$k_n = 10^7 MPa$	$K_t = 10^5 MPa$

TAB. 5.3 – Caractéristiques de l'interface brique-mortier du pont SNCF, Domède & al (Domède (2006))

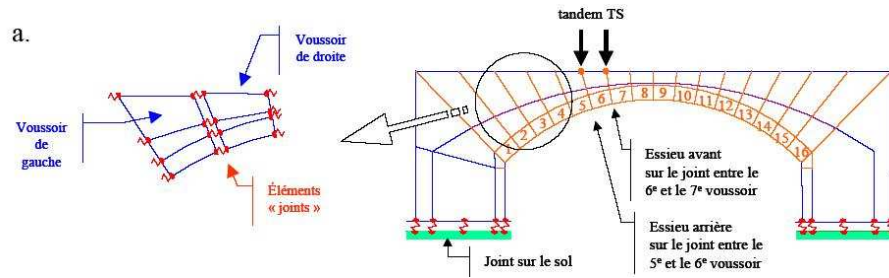


FIG. 5.11 – Découpage en voussoirs, Domède & al (Domède (2006))

Les sollicitations appliquées sont équivalentes à un tandem d'essieux de train (2\*300kN). Les charges concentrées sont imposées sous la forme de déplacements aux points d'impact des roues. Les déplacements sont augmentés jusqu'à la rupture (voir figure 5.12).

Les caractéristiques mécaniques, au niveau du contact entre les blocs, sont données dans le tableau 5.3.

### • Simulation numérique

La simulation est basée sur la méthode des éléments finis.

La figure 5.12 présente la déformée du pont obtenue grâce à CASTEM.

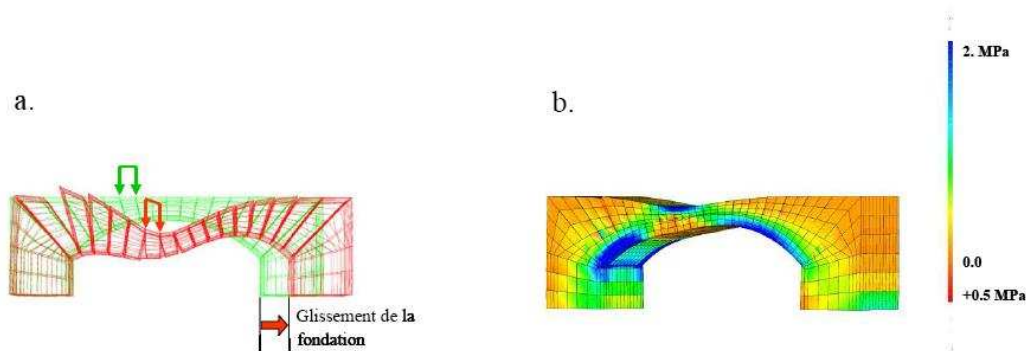


FIG. 5.12 – Déformée du pont - Contraintes principales de compression dans le pont obtenues avec CASTEM, Domède & al (Domède (2006))



La courbe de la figure 5.13 représente la charge totale à appliquer pour déplacer la culée.

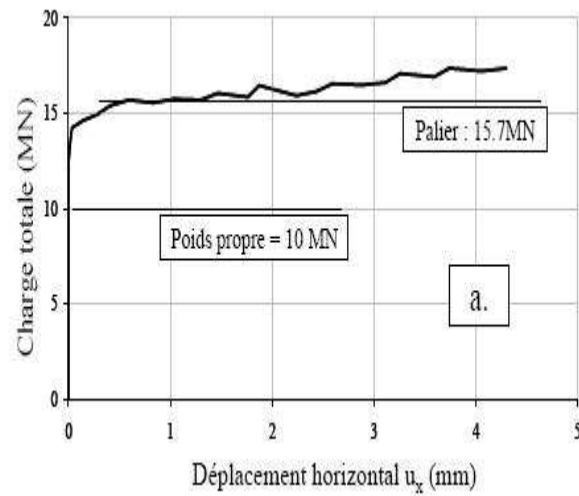


FIG. 5.13 – Glissement de la culée : courbe obtenue avec CASTEM, Domède & al (Domède (2006))

#### • Contribution à la modélisation du pont

Notre contribution ici est de modéliser le pont par la méthode des éléments discrets, en tenant compte des caractéristiques matériaux (tableau 5.2) et des caractéristiques mécaniques du contact entre les blocs (tableau 5.3),

Au niveau du joint, on utilise une loi cohésive de type MAC-CZM (Jean et al. (2001), Bretelle et al. (2001)). Cette loi intègre des raideurs initiales tangentielle et normale.

La figure 5.14 fait apparaître le déplacement horizontal de la culée en fonction de la charge appliquée.

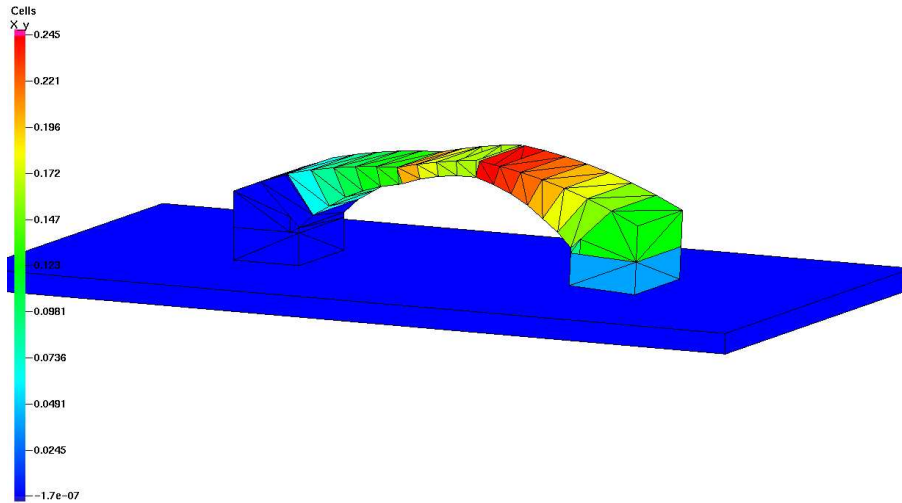


FIG. 5.14 – Déformée longitudinale du pont obtenue avec LMGC90, en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts

L'axe  $\vec{O}y$  est l'axe longitudinale du pont. Le terme  $X_y$  de la figure 5.14 correspond au déplacement des blocs suivant l'axe  $\vec{O}y$ . La déformée obtenue lors de la simulation est conforme au résultat numérique obtenue précédemment.

- Validation de notre modèle

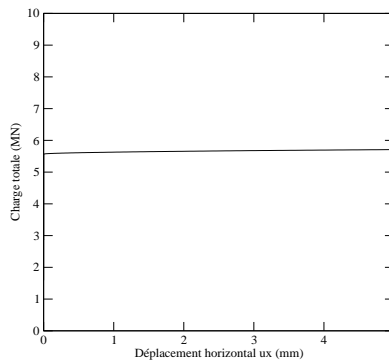


FIG. 5.15 – Glissement de la culée : courbe obtenue avec LMGC90, en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts

Le poids propre de la structure est équivalent à 10000kN.

Sur la courbe de la figure 5.13, la charge totale représente le poids de la structure et la force extérieure est de 5700kN.

Sur la courbe de la figure 5.15, la force extérieure de 5700kN est retrouvée.

On remarque donc que le glissement de la fondation (culée) se produit lorsque la force atteint 5700kN. Ce glissement autorise l'ouverture des fissures entre les voussoirs, notamment en intrados sous le point d'application de la force et en extrados près des appuis.

La méthode par éléments discrets permet de décrire le comportement d'un pont en maçonnerie, de prévoir la marge de sécurité disponible et d'apprécier l'impact des modifications qui pourraient être apportées à l'ouvrage.

### 5.1.3 Structure en grand appareil ruinée sous charge cyclique

Les aqueducs d'Arles et de Barbegal sont des ouvrages Romains présents dans la région de Fontvieille en France et datant du 1<sup>er</sup> siècle avant et 1<sup>er</sup> siècle après J.C respectivement. Dans les aqueducs antiques, l'eau circule sous l'effet de la gravité. Pour maintenir la canalisation "à niveau", la construction d'ouvrages d'art est nécessaire. Souvent, il suffit d'un simple mur de soutènement construit selon la technique du blocage, *l'opus caementicum* des Romains. Lorsqu'il devient nécessaire de déporter le canal à plus de 2m de haut, des arches (*l'opus arcatum*) prennent alors le relais du mur plein.

A l'époque romaine, l'aqueduc d'Arles (ouvrage Ouest) servait à l'adduction en eau potable de la ville d'Arles. L'aqueduc de Barbegal a été construit deux siècles plus tard à l'Est du premier (voir chapitre 2).

Il a été observé sur le site que ces deux ouvrages, mesurant chacun 250m de long, sont en ruine.

- **Simulations numériques**

On illustre la ruine des aqueducs par la mise en place d'un séisme "numérique". A partir de l'étude réalisée par Chetouane (Chetouane (2004)), les essais ont été simulés dans le but de comparer les résultats obtenus par l'algorithme de détection défini par Saussine (Saussine (2004)) (voir chapitre 3) et ceux obtenus en utilisant le nouvel algorithme de détection des contacts.

Les structures sont soumises pendant 2s à des sollicitations dynamiques équivalentes à une accélération sinusoïdale d'amplitude 0.3g (g étant l'accélération de la pesanteur), de fréquence 2Hz. Le coefficient de frottement entre les pierres est évalué à 0.6.

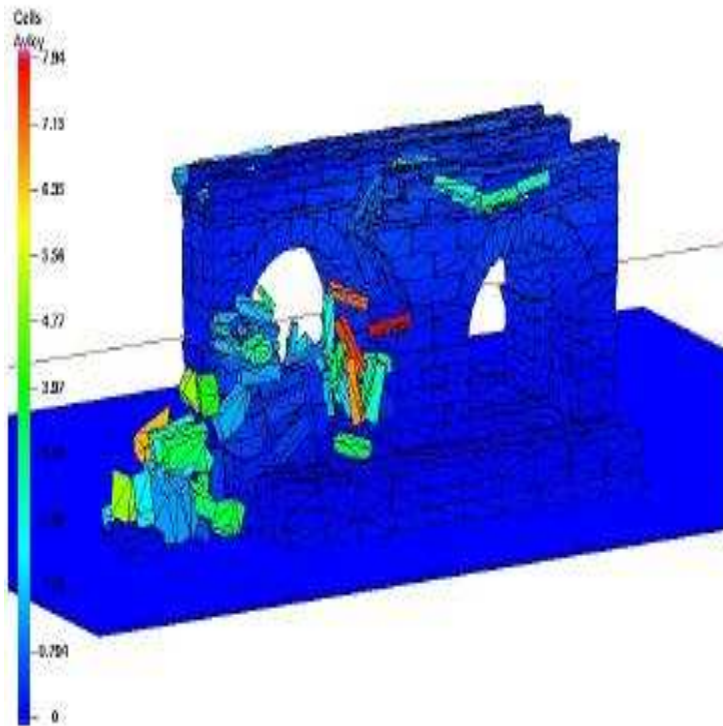


FIG. 5.16 – Ruine des deux aqueducs soumis à un tremblement de terre. Simulations réalisées avec l’algorithme d’intersection de Saussine, (Chetouane (2004))

Le terme Avlocy représente sur la figure 5.16 la vitesse moyenne des blocs dans les trois directions de l’espace.

La réponse des deux ouvrages, sur la figure 5.16, montre que l’aqueduc (ouvrage Ouest) n’a pas subi de dégâts importants. En effet, son arche est restée quasiment intacte et l’ensemble de l’ouvrage est resté "debout".

- **Apport de notre modélisation**

Les simulations ont été reproduites dans les mêmes conditions. On observe sur la figure 5.17 les dégâts causés par le séisme.

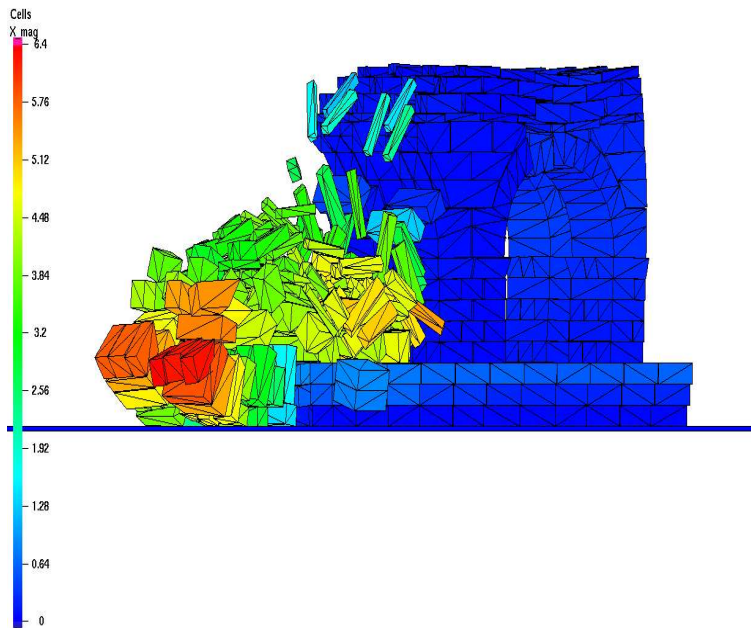


FIG. 5.17 – Ruine des deux aqueducs soumis à un tremblement de terre. Simulations réalisées avec le nouvel algorithme de détection spécifique aux maçonneries

Le terme  $X_{mag}$  représente sur la figure 5.17 le déplacement moyen des blocs dans les trois directions de l'espace.

Cette simulation fait apparaître :

- la même position géométrique de la ruine que l'étude numérique précédente,
- une ruine totale des deux arches des aqueducs d'Arles et de Barbegal.

Le modèle a mis en évidence la responsabilité du tremblement de terre dans la ruine des deux aqueducs. Comme pour l'exemple sur le tassement différentiel, l'algorithme de détection a été mis à l'épreuve et a confirmé sa robustesse par la non-interpénétration des blocs malgré un déplacement totalement aléatoire dans les trois directions de l'espace et par une comparaison fidèle avec les structures observées sur site (voir chapitre 2, figures 2.10 et 2.11).

#### 5.1.4 Conclusion

Dans le chapitre 3, on a vérifié à travers des simulations statiques l'efficacité du nouvel algorithme à détecter les polyèdres entre eux et permettre une bonne stabilité des structures considérées. Dans le cas dynamique, ces dernières présentent souvent des phénomènes complexes, parfois difficile à prédire, mettant à l'épreuve les différents logiciels de calculs existants. L'analyse des résultats expérimentaux et numériques proposées par la littérature ou observées directement sur site (aqueducs) a permis de valider la robustesse de l'algorithme de détection spécifique aux maçonneries. En effet, après sollicitations, on retrouve les mêmes arrangements des blocs.

L'originalité de notre travail réside dans la simulation d'ouvrages (aqueducs) comportant un grand nombre de blocs et mettant notamment en jeu les conditions de contact respectées (conditions de Signorini) sans régularisation. Les résultats obtenus sont fidèles à l'expérience.

## 5.2 Résolution numérique du problème de contacts : application aux maçonneries

L'originalité de la résolution proposée ici concerne la possibilité de simuler des structures en grand appareil précontraintes avec une géométrie particulière de contacts et/ou comportant un nombre important de blocs.

Dans cette partie, quatre ouvrages maçonnés sont présentés : un pont, un aqueduc, un escalier et une coupole. Parmi ces structures, trois (pont, escalier et coupole) ont été étudiées dans le chapitre 3 afin de mettre en évidence l'efficacité du nouvel algorithme de détection des contacts, pour gérer des géométries parfois complexes.

L'objectif est l'étude de ces ouvrages en termes de réactions, d'efforts, et notamment pour s'assurer de la cohérence des calculs avec les caractéristiques physiques du modèle.

Cette partie se décompose en deux points :

- une modélisation sous poids propre d'ouvrages comportant un grand nombre de blocs,
- une modélisation sous poids propre d'ouvrages renforcés par un câble de précontrainte. On vérifiera l'influence de la force de précontrainte sur la stabilité de la structure.

### 5.2.1 Modélisation d'ouvrages en grand appareil comportant un nombre de blocs important

Parmi ces ouvrages, on présente un pont et un aqueduc.

- **Pont Julien composé de 3267 blocs**

Le pont Julien est un pont romain, de l'an 3 avant J.C, situé au débouché du défilé de Roquefure à 5km au nord de Bonnieux (département du Vaucluse) et à 8km à l'Est de la ville d'Apt.



FIG. 5.18 – Structure réelle du pont Julien

Les caractéristiques géométriques de l'ouvrage sont les suivantes : longueur de 80 m, hauteur de

11.50 m, largeur de 6 m, portée de 46 m et chaussée de 4,20 m de large. Il se compose de trois arches en plein cintre, l'arche centrale étant plus élevée que les deux autres. Les piles intermédiaires sont percées de grandes baies cintrées pour faciliter l'évacuation des eaux en période de crues (dégueuloir) et munies en amont d'avant-becs semi-circulaires.

Bâti en grand appareil de calcaire provenant de carrière du Luberon, il remplaçait un pont plus ancien.

D'un point de vue numérique, la loi d'interaction entre les blocs est supposée de type frottement sec de Coulomb standard, avec une valeur du coefficient de frottement de 0,8 (Chetouane et al. (2005)). La structure est modélisée sous poids propre (aucune précontrainte initiale).

Le but de cette simulation, est de vérifier la descente de charge au niveau des piliers et des culées. Le poids ainsi trouvé doit correspondre au poids total de la structure. Cela permet donc de vérifier que la transmission des contacts et donc des efforts est bien établie entre chaque polyèdre.

- **Evaluation de la répartition des efforts dans le pont**

A la fin du calcul, la structure a atteint sa position d'équilibre (voir chapitre 3).

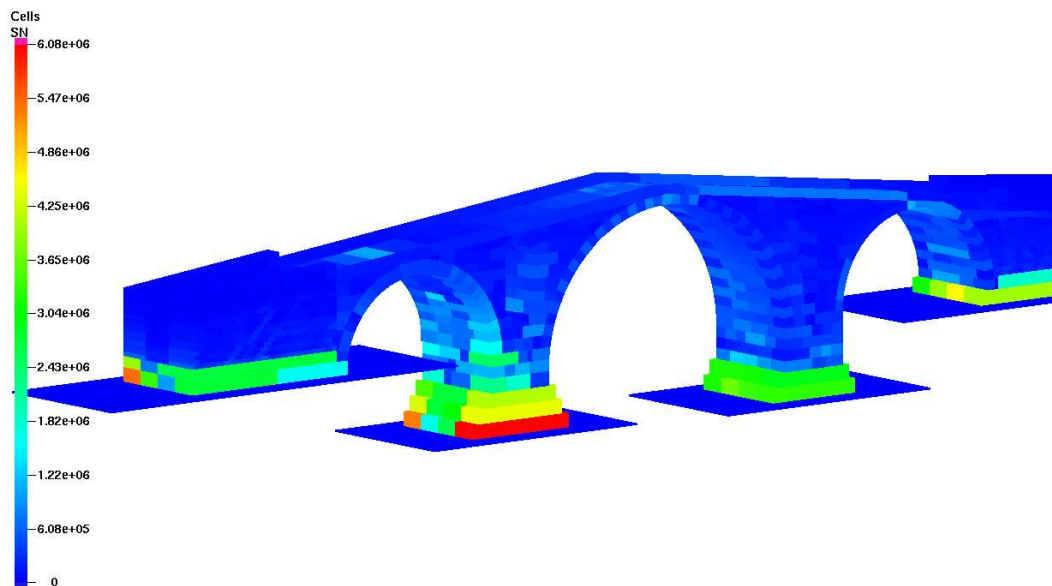


FIG. 5.19 – Répartition des efforts dans le pont Julien

Sur la figure 5.19, le terme SN représente la somme des réactions normales (N) agissant sur le bloc considéré.

Les blocs inférieurs des deux piliers sont les plus contraints. La géométrie de l'ouvrage n'étant pas symétrique, les valeurs des efforts au pied des piliers sont différentes. On remarque que le pilier le plus chargé est celui comportant trois niveaux de blocs massifs sur la surface de contact, l'autre

pilier en a seulement deux. D'un point de vue visuel, la répartition des efforts semble correcte (relativement homogène à hauteur fixée).

Pour s'assurer de la cohérence des résultats avec la réalité physique, on représente une descente de charge au niveau du pilier le plus chargé (voir figure 5.20).

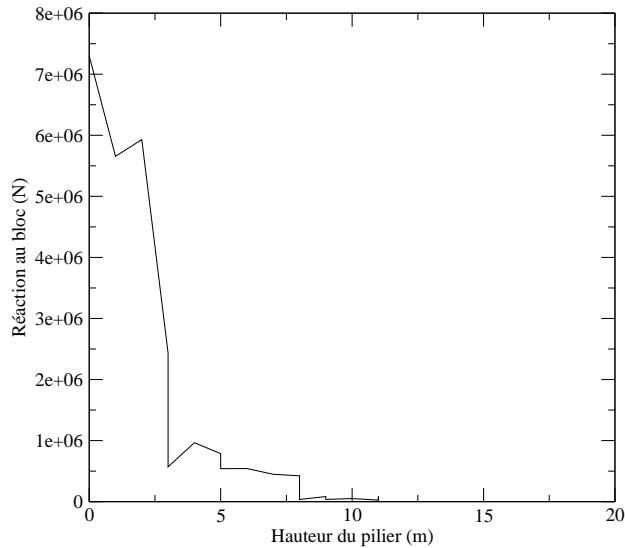


FIG. 5.20 – Descente de charge sur un pilier du pont Julien

La descente de charges est d'environ  $7,3 \cdot 10^6$  Newton sur le plan support correspondant à une masse du pilier de 730 tonnes. La descente de charge totale, au niveau des piliers et des culées, permet de retrouver le poids de la structure en réactions d'appui, correspondant à une masse de 2734 tonnes. Ce résultat est cohérent avec les caractéristiques physiques et géométriques de la structure.

#### • Tassement différentiel

Depuis sa construction, la structure est en "bon" état apparent. Pour préserver le pont, la circulation automobile est règlementée depuis 1999. On modélise un tassement de sol sur un des piliers de la structure.

Cette étude permet de s'intéresser au comportement mécanique d'une structure comportant un grand nombre de blocs face à une dénivellation d'appui.

Un tassement de sol a été simulé au niveau du pilier le plus chargé (figure 5.21). Le sol, par rapport à sa position initiale, a subi une translation verticale de 28cm vers le bas.



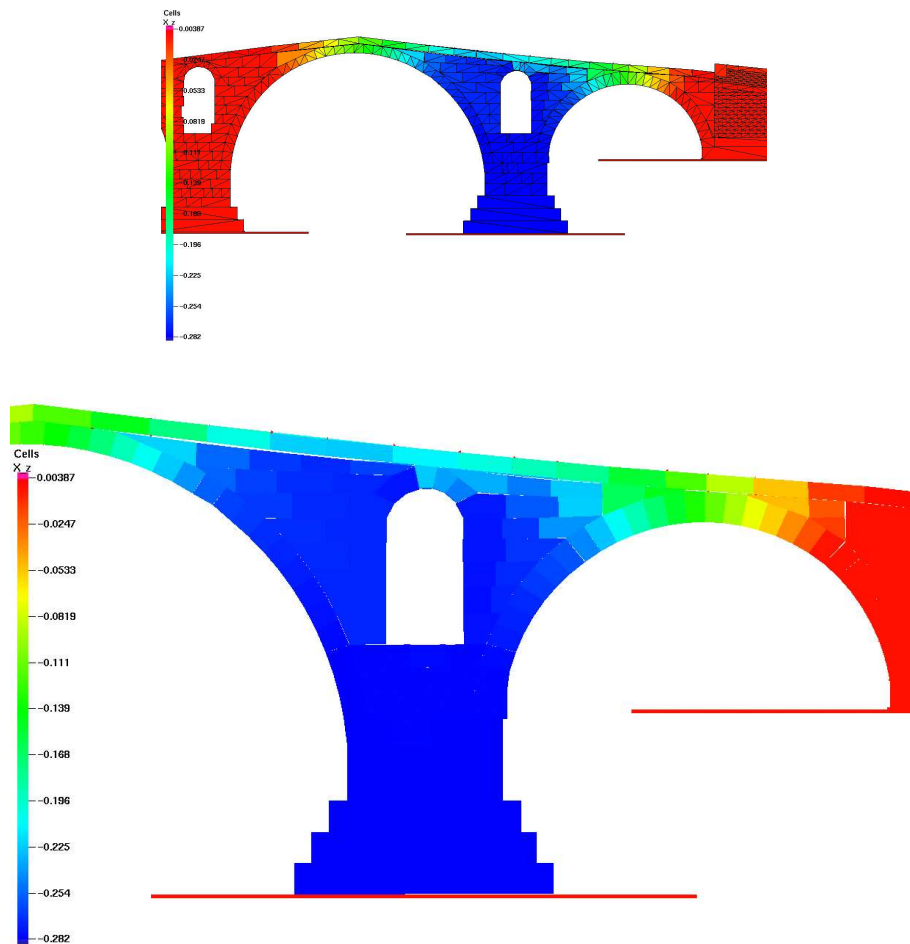


FIG. 5.21 – Pont Julien soumis à un tassement de sol de 28cm

On remarque, au niveau des iso-déplacements (figure 5.21), que le pilier le plus chargé s'effondre entièrement de façon monolithique.

Cet effondrement fait apparaître des fissures entre la baie et la chaussée (partie supérieure du pont) et aux niveaux des arches. Les blocs de la partie supérieure restent solidaires c'est-à-dire qu'il n'y a pas de glissement entre les surfaces de contacts des blocs.

Les arches s'effondrent progressivement mais plus lentement que le pilier. Les zones de faiblesses aux niveaux des arches sont bien représentées par les iso-déplacements. Les culées et l'autre pilier restent stables tout au long du calcul.

Un deuxième exemple de structure comportant un grand nombre de blocs est présenté : les aqueducs Romains.

- **Les aqueducs Romains sont composés de 883 blocs**

Dans la partie précédente, les aqueducs Romains se ruinent quasiment en totalité lorsqu'ils sont

soumis à un tremblement de terre (voir caractéristiques dans la partie précédente).

D'un point de vue numérique, la loi d'interaction entre les blocs est de type frottement sec de Coulomb standard. Le coefficient de frottement est de 0.6. La structure est modélisée ici sous poids propre (aucune précontrainte initiale).

La structure présente une symétrie. Le but de cette simulation est de vérifier si les contraintes se répartissent de façon homogène.

- **Evaluation de la répartition des efforts dans les aqueducs**

A la fin du calcul, la structure a atteint sa position d'équilibre.

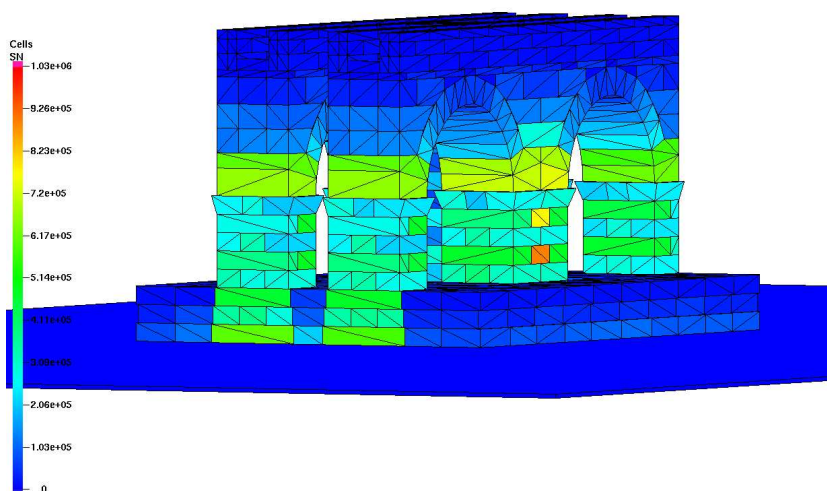


FIG. 5.22 – Répartition des efforts dans les aqueducs Romains

La répartition des efforts (figure 5.22) est homogène et symétrique. Ce résultat est prévisible.

### 5.2.2 Modélisation d'ouvrages précontraints

Parmi ces ouvrages, on présente une coupôle et un escalier.

- **La coupôle est composée de 180 blocs**

Cet exemple illustre la possibilité d'intégrer une précontrainte dans une structure, à l'état d'étude : sa construction débutera en 2008. Ce projet permet donc une analyse complète de la structure afin de dimensionner ses différents constituants pour permettre sa stabilité. Le but est l'étude de l'efficacité et de la cohérence des résultats obtenus.

Deltour, membre de l'Association des Compagnons Passants Tailleurs de pierre, a proposé de participer à la conception d'une coupôle en pierre. Ce projet rentre dans le cadre des Rencontres de la pierre de Junas qui, depuis 1988, rassemblent des tailleurs de pierre et des professionnels de la

filière venus de France et d'Europe. Avec ce projet, Deltour souhaite mettre en valeur les qualités de la pierre et le savoir-faire des tailleurs afin de renouer les fils entre architectes, ingénieurs et artisans de la pierre.

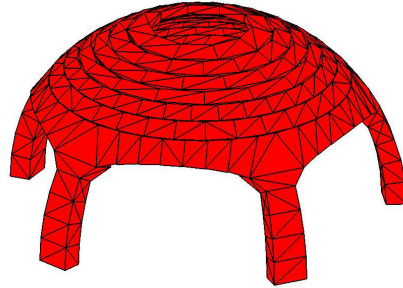


FIG. 5.23 – Géométrie de la coupôle de Junas

#### • Demande du client

Une étude antérieure sur la stabilité de la coupôle a déjà été effectuée (Chetouane (2004)). Des résultats ont montré que le choix d'un seul matériau pouvait engendrer des dégâts (fissures des blocs...) dus à des sollicitations parfois trop élevées. Le choix des pierres et leurs positions dans la structure est très important pour en assurer la stabilité (chapitre 1).

Deltour a repensé la stéréotomie et a proposé de valider les solutions retenues concernant les matériaux utilisés et la stéréotomie retenue et de déterminer les zones à renforcer.

#### • Contraintes imposées par le client et but du projet

La géométrie et les dimensions de la structure doivent être conservées. La stéréotomie, le choix des matériaux et leurs répartitions doivent aussi être conservés.

La loi de comportement à l'interface entre les pierres est de type frottement sec de Coulomb standard avec un coefficient de frottement de 0.8.

Le but de ce projet est de valider la conception actuelle de la coupôle, c'est-à-dire de déterminer la nature, la localisation et la valeur des contraintes qui s'exercent sur les différentes parties de l'édifice et sur ses fondations.

#### • La structure

La structure à modéliser est une voûte en pierre de 8m de diamètre et 4m de hauteur qui s'inscrit dans une demi-sphère. Elle comporte un trou au sommet de 1m de diamètre et repose sur cinq piliers de 2m de hauteur, 70cm de largeur et 40cm d'épaisseur. La coupôle est composée d'un ensemble de pierres provenant de différentes carrières :

- $6m^3$  de pierres de Lens,
- $2m^3$  de pierres de Junas,
- $1m^3$  de pierres d'Estailade,

-  $4m^3$  de pierres de Beaulieu.

Elles sont disposées dans la structure de la façon suivante (voir figure 5.24).

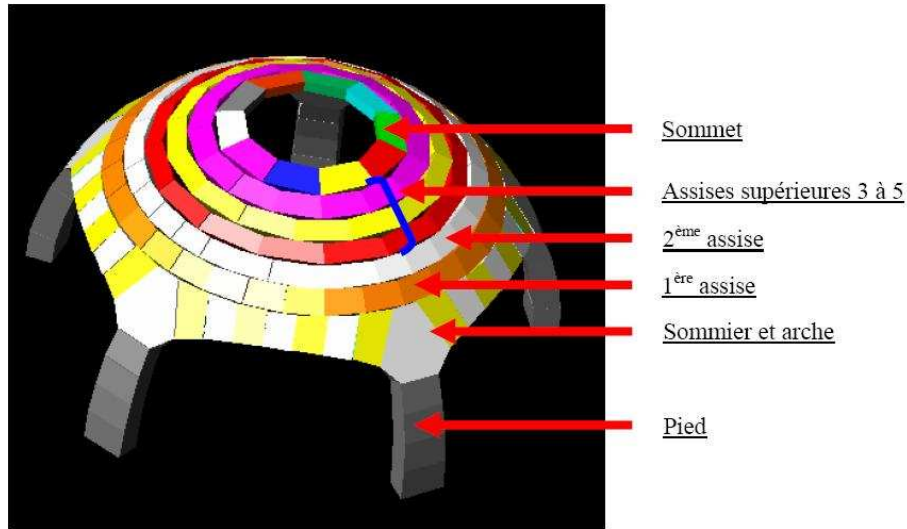


FIG. 5.24 – Positions des blocs dans la coupôle suivant leurs caractéristiques mécaniques

Le choix de la répartition des pierres est effectué en fonction de leurs caractéristiques mécaniques (masse volumique, module d'Young...).

Dans un premier temps, la coupôle est modélisée sous poids propre (figure 5.25).

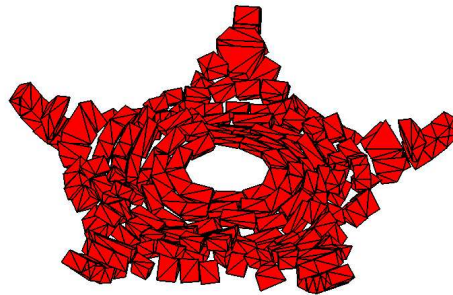


FIG. 5.25 – Ruine de la coupôle

A la fin du calcul, la structure est totalement ruinée.

On observe une concentration de contraintes au niveau des pieds. Ceux-ci s'écartent vers l'extérieur et libèrent les premières pierres qui tombent au centre des "arches". Les autres assises s'affaissent mais ne se détruisent pas totalement.

Unités (Newton)	Sommiers 1	2	3	4	5
Efforts Rx	$0,104.10^5$	$0,101.10^5$	$0,368.10^5$	$-0,304.10^5$	$-0,269.10^5$
Ry	$0,341.10^5$	$-0,314.10^5$	$0,935.10^3$	$-0,228.10^5$	$0,212.10^5$
Rz	$-0,465.10^5$	$-0,445.10^5$	$-0,444.10^5$	$-0,457.10^5$	$-0,436.10^5$
Moments Mx	$-0,537.10^4$	$-0,245.10^4$	$-0,187.10^4$	$0,512.10^3$	$0,522.10^4$
My	$0,703.10^4$	$-0,270.10^3$	$-0,100.10^3$	$0,101.10^5$	$0,527.10^4$
Mz	$0,715.10^3$	$-0,120.10^4$	$-0,895.10^4$	$-0,498.10^3$	$0,448.10^4$

TAB. 5.4 – Valeurs des efforts sur les sommiers de la coupôle

La simulation fait ainsi apparaître les zones de faiblesse ainsi qu'un effondrement de la structure. Cette modélisation s'avère nécessaire pour bien comprendre l'évolution de chaque bloc et mettre en place un renfort.

• **Proposition et dimensionnement de solutions de soutien**

Des solutions sont donc à envisager suite à l'instabilité de la construction. Au niveau des sommiers, on observe une concentration de contraintes.

Pour déterminer ces dernières, une simulation est effectuée en bloquant les sommiers. On prend les valeurs des forces auxquelles ils sont supposés résister. Les efforts transmis sont présentés dans le tableau 5.4.

La composante horizontale de chaque effort ne peut pas s'annuler avec la seule résistance du pilier. Chaque pilier est soumis à un effort radial horizontal de valeur  $(Rx^2 + Ry^2)^{\frac{1}{2}}$  représentant une poussée vers l'extérieur.

Celle-ci nécessite un renfort ; on peut par exemple imaginer une ceinture métallique passant par le centre de gravité de chaque sommier.

La force radiale à compenser, au niveau de chaque sommier, est de :  $Fr = (Rx^2 + Ry^2)^{\frac{1}{2}} = 0,4.10^5 N$ , soit une charge équivalente à une masse d'environ quatre tonnes.

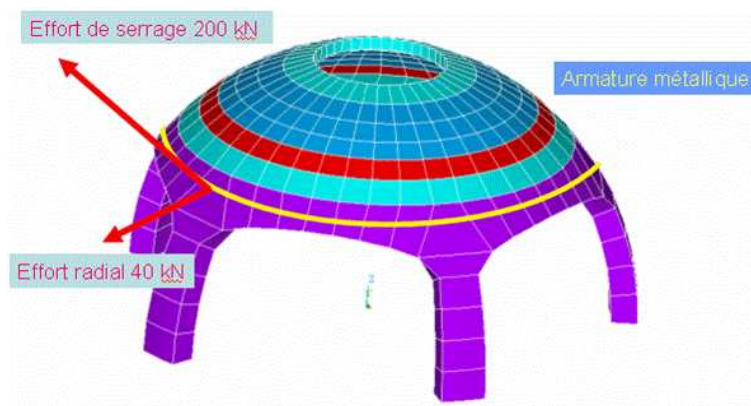


FIG. 5.26 – Câble de précontrainte dans la coupôle

### • Dimensionnement de la ceinture

La charge se répartit sur les cinq sommiers. La ceinture doit donc résister à un effort tangentiel de 200kN. On prendra, pour cette ceinture, un acier haute performance résistant à une traction de 800 MPa. Le diamètre du câble de précontrainte est défini par :

$$S = \frac{F_{tangentielle}}{R_t} \quad (5.2.1)$$

Avec,

$F_{tangentielle} = 200kN$  : effort tangentiel,

$R_t = 800MPa$  : résistance à la traction,

$S = \Pi \frac{D^2}{4} = 250mm^2$  : section,

On en déduit le diamètre de la ceinture  $D=17,84mm$ .

On choisi alors un diamètre normé de câble de 20mm.

Pour empêcher l'ouverture des joints vers l'extérieur, les piliers doivent être stabilisés. Mécaniquement, ces piliers doivent résister aux efforts et aux moments qui leurs sont appliqués. Dans le tableau précédent, le moment maximal vaut  $M = 0,7.10^4 N.m$ .

Par définition, le moment M, au centre de gravité des sommiers, est défini par  $M = F_p.d$ , avec :

$d \leq \frac{b}{6}$ ,

où :

b : largeur du bloc,

d : distance entre le centre de gravité du sommier et l'application de la force  $F_p$ ,

$F_p$  : force de précontrainte.

Pour que la force appliquée  $F_p$  reste dans le noyau central, d doit être inférieure ou égal à  $\frac{b}{6}$ . Dans notre cas,  $b=360mm$ , d'où  $d \leq 0.06m$ .

### • Dimensionnement de la précontrainte

On choisit le cas le plus défavorable c'est-à-dire  $d=0.06m$ .

La force de précontrainte est alors  $F_p = \frac{7000}{0.06} = 117kN$ .

La condition de sécurité à respecter est  $F_p \leq \alpha.Re.S$ . Cette formule permet de vérifier que la force de précontrainte calculée est suffisante pour maintenir une stabilité. Le coefficient de sécurité  $\alpha$  est pris ici à 2.

Avec,

$Re=50MPa$  : résistance en compression de la pierre de Lens,

$S = 0.36 * 0.7 = 0.252m^2$  : surface totale de contact entre les pierres,

le calcul de  $\alpha.Re.S$  donne 25200 kN. La force de précontrainte est bien inférieure à cette valeur, elle est apte à maintenir une précontrainte suffisante pour la stabilité des sommiers.

Le câble de précontrainte est modélisé entre le centre de gravité de deux blocs successifs au niveau des sommiers. Ce câble a pour particularité d'avoir une raideur en traction et aucune raideur en compression.

La force de précontrainte étant connue, on dimensionne la raideur k du câble.

- **Calcul de la raideur du câble**

Par définition, on a  $F_p = k \cdot dx$ , où  $dx$  est l'allongement du câble. La déformation  $\epsilon$  est telle que :  $\epsilon = \frac{dx}{x}$ , où  $x$  est la distance entre deux centres de gravité. On en déduit que la raideur est définie par :  $k = \frac{F_p}{\epsilon \cdot x}$ .

Numériquement, en prenant comme pré-déformation  $\epsilon = -5.10^{-2}$  et on obtient une raideur  $k$  de l'ordre de 5.85MN/m.

La mise en charge numérique de la coupôle est réalisée niveau par niveau en suivant un procédé de construction réaliste.

- **Evaluation de la répartition des efforts dans la coupôle**

A la fin du calcul, la structure atteint sa position d'équilibre (voir chapitre 3).

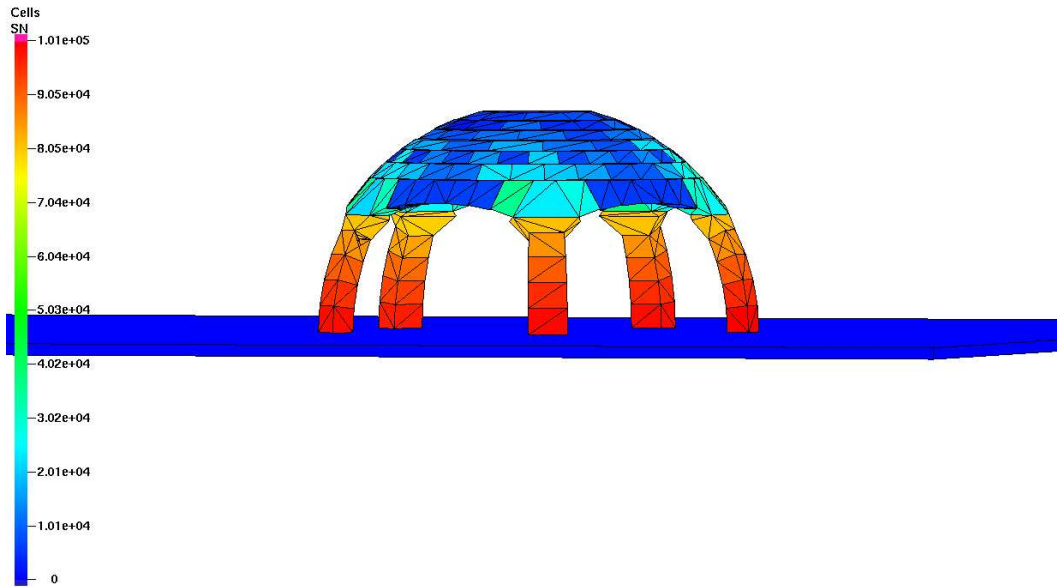


FIG. 5.27 – Répartition des efforts dans la coupôle

La géométrie de la coupôle est symétrique et complexe.

La répartition des efforts (figure 5.27) est homogène et symétrique au niveau des pieds de la coupôle.

Le câble de précontrainte pour les simulations numériques, a permis la stabilité de la structure. Bien que les contacts sont essentiellement de type arête/arête et arête/face (ce qui n'est pas commun dans les maçonneries), la transmission des efforts du sommet de la coupôle jusqu'à ses pieds a été efficace. On étudie dans la suite une descente de charge au niveau d'un pilier.

- **Etude des fondations**

Après l'étude des contraintes et des efforts engendrés par la structure, on s'intéresse maintenant à la conception des fondations qui supporteront l'édifice. La figure 5.28 représente une descente de charge au niveau d'un pilier.

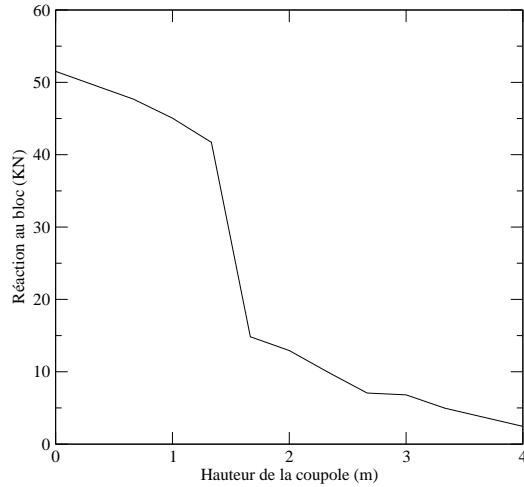


FIG. 5.28 – Descente de charge par pied de la coupôle

L'effort maximal du pilier, appliqué verticalement sur le sol, vaut environ 51 kN correspondant à une masse d'environ 5.1 tonnes. La descente de charge totale permet de retrouver le poids de la structure en réactions d'appui, correspondant à une masse de 25.5 tonnes. Ce résultat est cohérent avec les caractéristiques physiques et géométriques de la structure.

Afin de garantir une bonne stabilité de la coupôle, il est nécessaire de concevoir des fondations adaptées en termes de résistance à la pénétration dans le sol.

- **Tassement différentiel**

On a simulé un tassement de sol survenant sur un des pieds pour montrer l'efficacité de l'algorithme et la nécessité de la précontrainte. Cette simulation n'est pas représentative de conditions réelles. Les conditions sont prises en compte par l'application d'un déplacement vertical sur un des pieds.



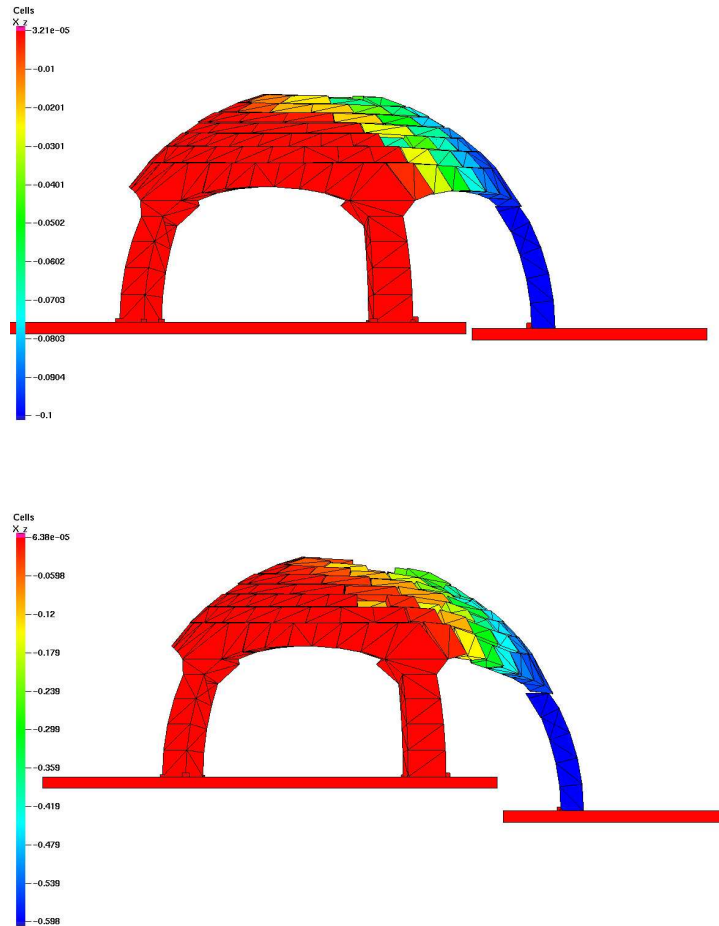


FIG. 5.29 – Tassement différentiel : tassement numérique de sol de 10cm en "haut" et tassement de sol de 60cm en "bas"

Les contraintes n'étant plus symétriques, la stabilité même de l'édifice est remise en cause. En effet, le phénomène de report et de compensation des poussées dans les pieds de la structure n'est plus présent. Par conséquent, il est nécessaire de rendre la coupôle "rigide" et "mobile" dans son ensemble. La situation néfaste où certains des pieds s'enfoncent plus dans le sol que les autres est à proscrire. Ce cas engendrerait des contraintes plus importantes, pénalisantes voire destructrices pour l'édifice. Il faut donc concevoir une fondation *monobloc* continue sous l'édifice. Afin de rendre la construction réellement solidaire, il est important d'encastrer la coupôle au sol.

Remarque : une étude par éléments finis a été réalisée sur cet ouvrage. La structure est supposée élastique, linéaire, et isotrope durant la simulation. Celle-ci a montré qu'en l'absence de précontrainte, la structure tient.

- **Etude d'un escalier composé de 20 marches (soit 203 blocs voir chapitre 3)**

L'escalier Ridolfi est constitué de blocs soumis à une précontrainte.

Les caractéristiques de cet escalier ont été fournies par la faculté d'architecture de Bari (D'amato (2005)). L'ouvrage, présenté à la 40<sup>e</sup> foire internationale de Vérone en 2005, est monté à sec et armé avec des câbles en acier. Ceux-ci permettent d'obtenir une précontrainte afin d'atteindre l'équilibre de la structure en l'absence de mur de soutènement. Cet ouvrage contribue à montrer la résolution de certains problèmes critiques qui concernent l'emploi de la pierre dans l'architecture contemporaine.

#### • D'un point de vue numérique

La loi de comportement à l'interface entre les marches est la loi cohésive MAC-CZM. Le coefficient de frottement entre les blocs est de 0.8 et la cohésion est matérialisée par la présence d'une feuille de plomb et d'un mortier à l'interface.

Deux câbles "passifs" en acier passent par l'extrémité des marches (schéma 1 figure 5.30).

Un câble "actif" en acier passe par l'ensemble des centres de gravité des marches (schéma 2 figure 5.30) permettant d'obtenir une précontrainte nécessaire et suffisante pour stabiliser la structure en assurant une pression de contact entre deux marches consécutives. Comme pour la coupôle, le câble

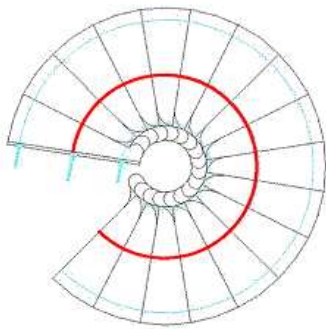


Schéma 1 : modélisation de la précontrainte initiale

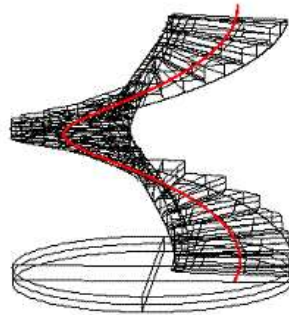


Schéma 2 : modélisation de la précontrainte utilisée

FIG. 5.30 – Câble de précontrainte dans l'escalier

actif est modélisé entre le centre de gravité de deux marches consécutives (figure 5.31). Ce câble a pour particularité d'avoir une raideur en traction et aucune raideur en compression.

Enfin, la première marche est encastrée sur un socle. La liaison est de type surface/surface (schéma 2 figure 5.30).

Pour dimensionner la raideur  $k$  du câble, on a défini la force  $F_p$  de précontrainte du câble.

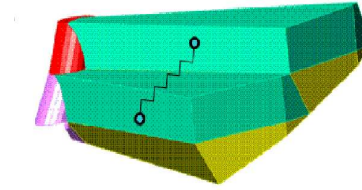


FIG. 5.31 – Représentation du câble de précontrainte entre deux marches de l’escalier

• **Calcul de la force de précontrainte**

La force  $F_p$  a été définie par D’Amato (D’amato (2005)) telle que :

$$F_p = \min \left( \frac{m \cdot g}{\sin \alpha}; \frac{1}{3} A \cdot R_c \right) \quad (5.2.2)$$

Avec les notations suivantes :

$\alpha = 17$  : pente de l’escalier,  $m$  : masse de l’escalier (3,2 tonnes),

$g = 9.81 m \cdot s^{-2}$  : accélération de la pesanteur,

$A = 0.06 m^2$  : surface totale de contact entre les marches,

$R_c = 10 MPa$  : résistance à la compression moyenne de la pierre.

La force de précontrainte est donc égale à  $F_p = 107$  kN. Elle est transmise grâce au câble dans la direction des centres de gravité des deux marches adjacentes. Le câble ne transmet pas de moment.

• **Calcul de la raideur du câble**

Par définition,  $F_p = k \cdot dx$  où  $dx$  est l’allongement du câble.

La déformation  $\epsilon$  est telle que :  $\epsilon = \frac{dx}{x}$ , où  $x$  est la distance entre deux centres de gravité.

On en déduit que la raideur est définie par :  $k = \frac{F_p}{\epsilon \cdot x}$ .

Numériquement, en prenant comme pré-déformation  $\epsilon = -5 \cdot 10^{-2}$ , on obtient une raideur  $k$  de l’ordre de 6,12MN/m.

• **Evaluation de la répartition des efforts dans l’escalier**

A la fin du calcul, la structure atteint sa position d’équilibre (voir chapitre 3).

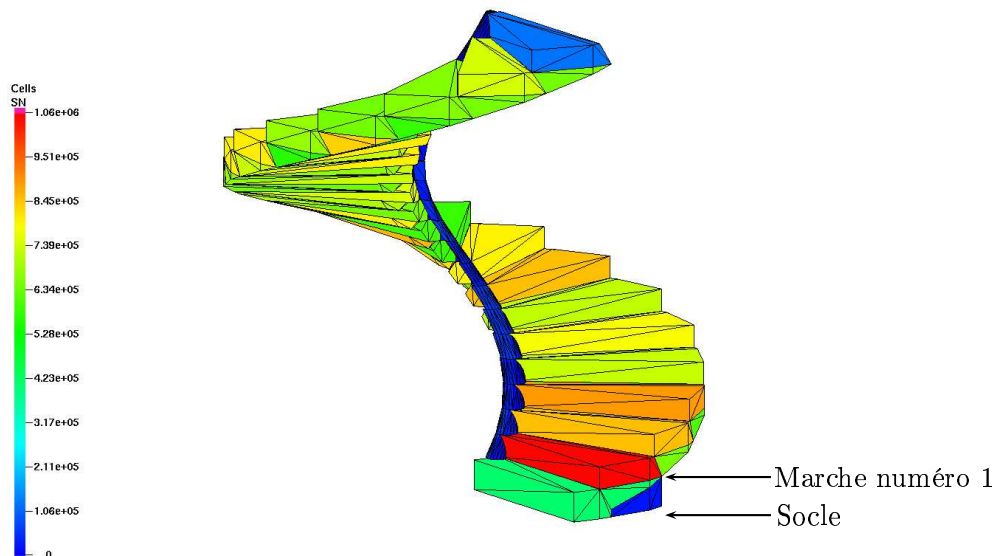


FIG. 5.32 – Répartition des efforts dans les marches de l'escalier

Les efforts dans les marches sont tous du même ordre de grandeur. Ce résultat vient du fait que la précontrainte est importante, exceptée la marche numéro 1 qui est la plus chargée (encastrement dans le socle).

- **Modèle avec une force de précontrainte limitée**

La prise en compte d'une précontrainte trop faible ( $F_p = 60$  kN), ne permet pas d'assurer un équilibre de la structure. Celle-ci se ruine (voir figure 5.33).

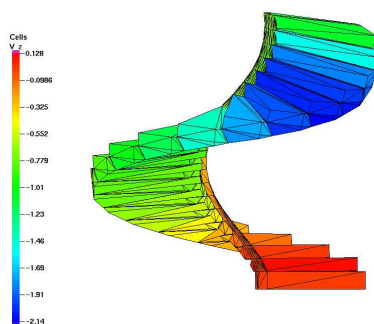


FIG. 5.33 – Escalier ruiné par défaut de précontrainte

• **Modèle avec un cas de charge**

Mécaniquement, l'escalier est stable sous poids propre.

Pour tester sa tenue face à une charge, on a ajouté une masse de 50kg sur chaque marche (figure 5.34).

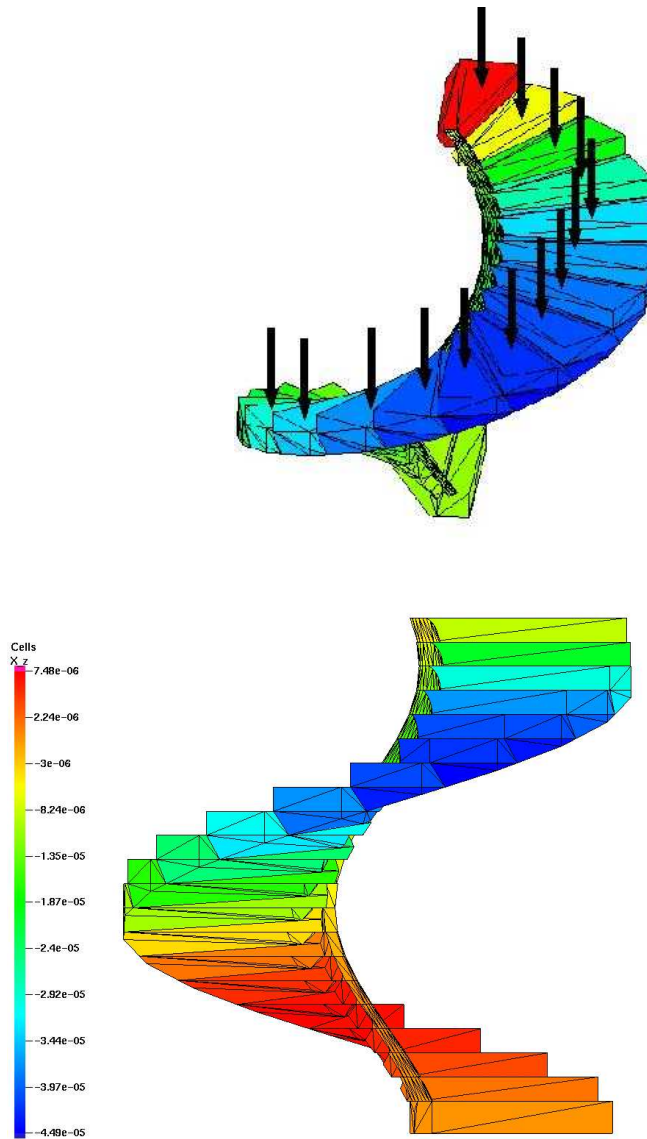


FIG. 5.34 – Escalier avec une charge de 50kg par marche

A la fin du calcul, l'escalier est toujours stable. Au-delà de cette charge, l'escalier se ruine.

Remarque : pour la résolution par éléments finis, on a choisi des matériaux élastiques linéaires et isotropes. On prend en compte de plus les présences de contacts et d'une précontrainte entre les blocs.

Pour la prise en compte de la précontrainte, la solution envisagée ici est de découper le câble en éléments de lien (link) et d'imposer un effort initial, par exemple sous la forme d'une déformation

initiale. On obtient ainsi une représentation plus précise de l'action du câble.

La modélisation par éléments finis n'a pas permis d'obtenir des résultats sur l'escalier entier à cause notamment de problèmes de convergence et de temps de calcul assez important (10 à 12 heures).

### 5.2.3 Conclusion

Les simulations présentées dans les cas d'ouvrages à grand nombre de blocs et précontraints ont montré que :

- la transmission d'effort est assez homogène pour une structure présentant une certaine symétrie,
- les blocs les plus contraints sont bien ceux qui se trouvent à la base de la structure. La descente de charge confirme cette hypothèse,
- les résultats sont cohérents avec les caractéristiques physiques et géométriques considérées,
- dans le cas d'un dimensionnement de précontrainte trop faible, la structure se ruine. La précontrainte est alors nécessaire pour maintenir la structure en équilibre,
- les simulations par la méthode des éléments finis présentent des problèmes de convergence et ne permettent pas d'obtenir des solutions.

## 5.3 Problème statiquement indéterminé

L'indétermination locale est associée aux nombres de contacts ponctuels définissant une liaison plane. Sans frottement, une liaison plane doit être définie par trois contacts ponctuels pour être isostatique. Dans le cas avec frottement, le problème est déjà statiquement indéterminé.

Dans le chapitre 3, on a fait le choix de prendre quatre noeuds de contacts par surface pour laquelle on cherche l'existence ou non de contacts. On montre, dans cette partie, l'influence du nombre de noeuds de contacts par détection sur la tenue mécanique et la stabilité de la structure. Dans un contact de type face/face, trois noeuds de contacts suffisent pour maintenir le contact stable. On choisit donc dans cette partie de simuler deux exemples avec trois noeuds de contacts par détection. On présente ensuite un mur dont la résolution numérique est réalisée suivant deux méthodes :

- résolution numérique directe de la structure,
- résolution numérique en suivant un procédé réaliste de construction.

On verra sur une descente de charges que suivant le procédé de construction choisi, la résolution numérique donne des résultats différents.

On montre enfin que les résultats numériques en termes de réactions tangentielles et normales, au niveau des éléments de réduction (surface de contact), sont équivalents dans les cas de non-glissement et glissement entre les méthodes de résolution "couplée" et "classique NSCD". Cependant, les valeurs des réactions, au niveau de chaque noeud, peuvent être différentes d'une méthode à l'autre.

### 5.3.1 Instabilité de la surface de contact due à un nombre insuffisant de noeuds

Saussine & al (Saussine (2004)) ont montré l'influence du coefficient de frottement sur la tenue à l'équilibre d'une structure (dôme). On a choisi de présenter l'influence du nombre de noeuds sur la stabilité du contact. La surface de contact est ici définie par trois noeuds.

- **Cas académique**

Le modèle concerne la mise en place d'un bloc sur un autre (figure 5.35). Ces deux blocs ne

sont soumis à aucune sollicitation.

La loi d'interaction est de type frottement sec de Coulomb standard, avec un coefficient de frottement de 0.4.

Le modèle atteint rapidement sa position d'équilibre (figure 5.35). Le terme Xmag de la figure 5.35

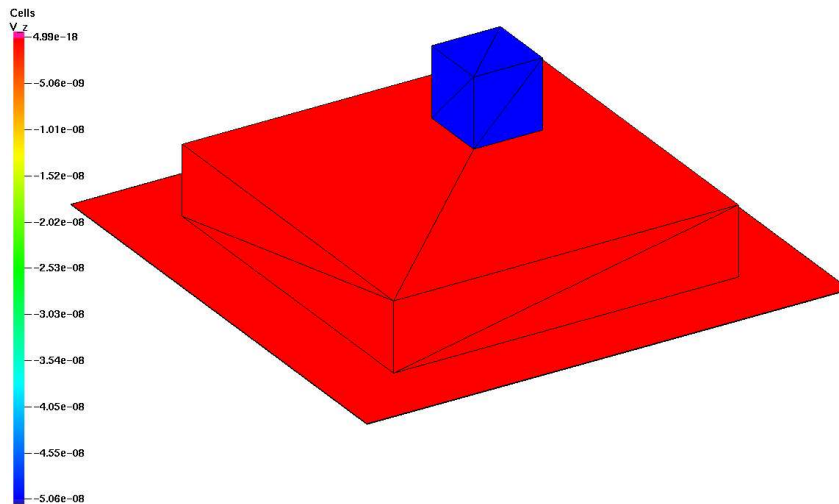


FIG. 5.35 – Influence du nombre de noeuds de contact : modèle de contact bloc/bloc

représente le déplacement moyen des blocs dans les trois directions de l'espace. Durant la simulation, aucun glissement entre les blocs ne s'est produit.

- **Application sur une structure précontrainte**

On examine maintenant l'influence de la prise en compte des trois noeuds sur la coupôle présentée dans la partie précédente. Les paramètres mécaniques sont identiques à ceux du chapitre 3. Le fait de prendre une structure précontrainte permet de vérifier si :

- malgré un nombre de noeuds de contact réduits à trois par éléments de réduction, la structure reste stable,
- malgré des glissements entre les blocs, la présence de la précontrainte joue son rôle pour maintenir la structure stable.

La figure 5.36 montre que la structure atteint sa position d'équilibre à la fin du calcul.

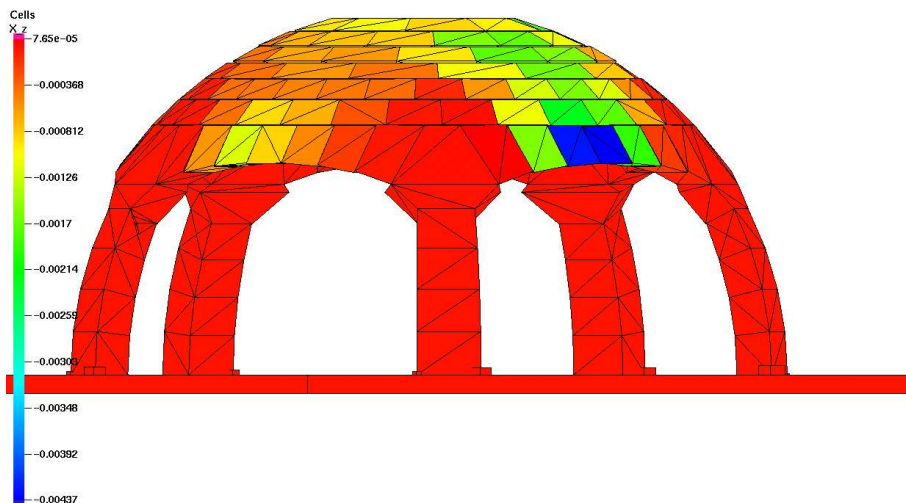


FIG. 5.36 – Coupôle modélisée avec trois noeuds de contacts par surface détectée.

Au cours du calcul, des glissements entre les blocs se sont produits (voir figure 5.36). Les déplacements verticaux ne sont pas négligeables. La présence de la précontrainte est donc nécessaire pour stabiliser la coupôle. Dans ce même exemple, la simulation numérique traitée au chapitre 3 avec quatre noeuds de contact, avait atteint la stabilité avec moins d'itérations (40 itérations au lieu de 60, pour  $h = 10^{-4}$ s).

Pour un ouvrage présentant une géométrie particulière, il est préférable de prendre quatre noeuds de contacts pour éviter les éventuels problèmes de glissement et de basculement.

### 5.3.2 Application numérique au cas d'un mur suivant deux procédés de construction

Pour illustrer deux procédés de construction, le cas d'un mur est considéré. Celui-ci est composé de 74 blocs et a pour particularité d'intégrer un linteau de 7 pierres de taille permettant la création d'une ouverture.

#### • Cadre du projet

Debreaux, membre de l'Association des Compagnons Passants Tailleurs de pierre, a proposé de travailler sur la stéréotomie des pierres de taille des linteaux.

D'un point de vue numérique, la loi de comportement à l'interface entre les blocs du mur est de type frottement sec de Coulomb standard. Le coefficient de frottement est pris à 0.8.

- Pour la mise en place des blocs suivant un procédé réaliste de construction, on utilise l'histoire du chargement de la structure, proposé par Moreau (Moreau (2005)). Cette méthode consiste à mettre en place les blocs les uns après les autres en suivant un procédé réaliste de construction (voir figure 5.37).



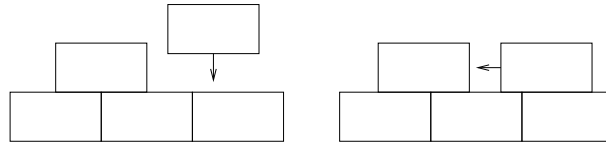


FIG. 5.37 – Mise en place des blocs suivant un procédé réaliste de construction

Cette méthode permet de suivre l'évolution, au cours du temps, de la construction. On active successivement les liaisons horizontales et verticales pour chaque bloc posé.

- **Evaluation de la répartition des efforts dans le mur**

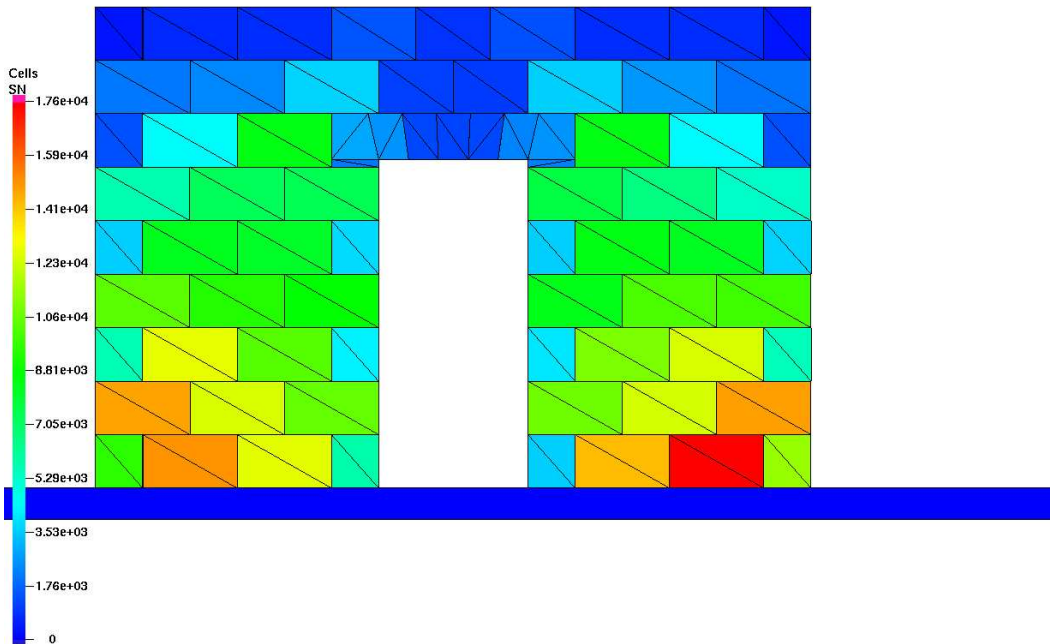


FIG. 5.38 – Simulation du mur suivant un procédé réaliste de construction

La répartition des efforts est symétrique. Numériquement, la détection est activée séquentiellement suivant un procédé réaliste (exemple du maçon qui pose ses blocs les uns après les autres).

- Pour la mise en place des blocs sans procédé de construction, on utilise la méthode classique. Numériquement, la détection des contacts est réalisée "directement" c'est-à-dire que l'ensemble des contacts est détecté dès le premier pas de temps pour la totalité de la structure. La structure atteint rapidement la stabilité (figure 5.39).

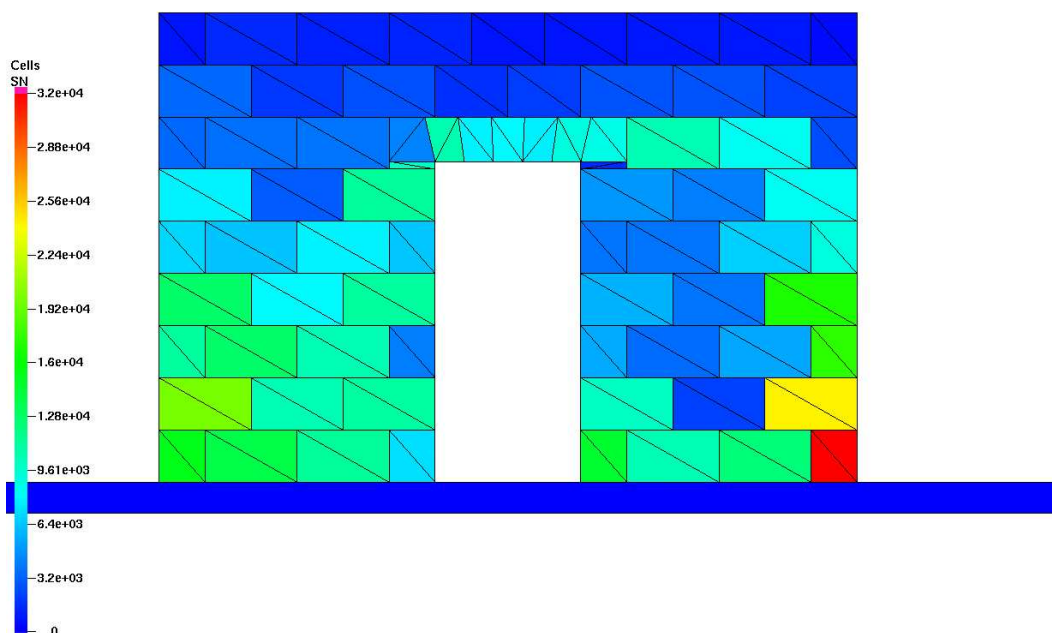


FIG. 5.39 – Simulation du mur sans procédé de construction

Cependant, la répartition des efforts n'est pas symétrique. Cette disparité entre les résultats des deux procédés peut être liée à un problème d'hyperstaticité. En effet, la résolution "directe" d'une structure peut engendrer des problèmes d'hyperstaticité plus importants que dans le cas où la mise en place de la détection des contacts est réalisée séquentiellement d'un bloc à l'autre (voir chapitre 4).

En suivant une descente de charge au niveau d'une ligne verticale positionnée au centre du côté droit du mur, le graphe 5.40 présente clairement l'efficacité numérique de la mise en place "progressive" de la détection des contacts plutôt que la mise en place "directe". La descente de charge est quasiment linéaire dans le cas de la mise en place progressive alors que pour l'autre cas, la répartition des charges est chaotique. Notons que les valeurs des réactions (voir figure 5.40) obtenues à la fin du calcul sont quasiment identiques.

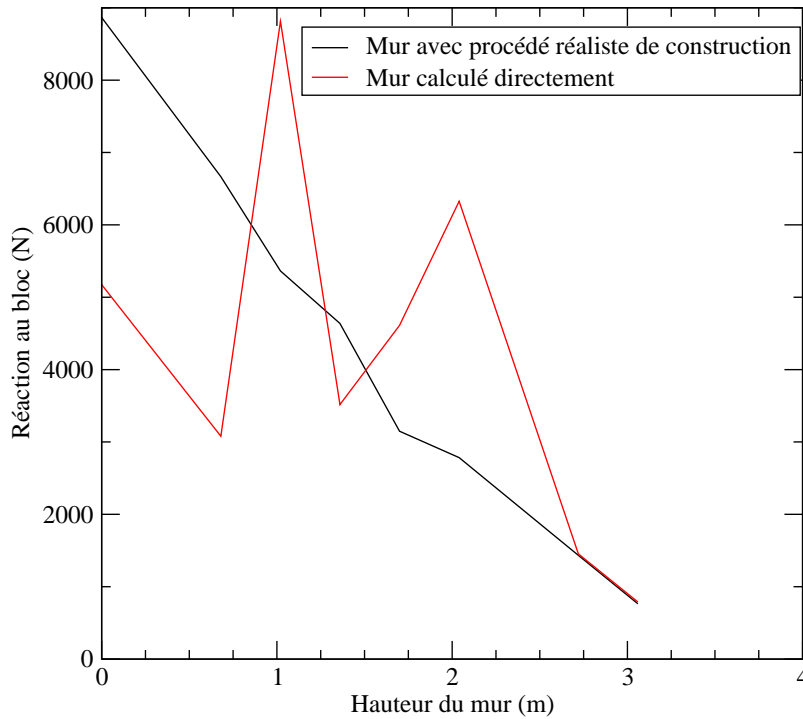


FIG. 5.40 – Comparaison de la descente de charges entre les murs calculés "directement" et en suivant un procédé réaliste de construction

### 5.3.3 Apport de la méthode de résolution "couplée" sur la stabilité de la solution

La méthode de résolution utilisée dans le chapitre 4 est une méthode "couplée". Celle-ci permet, au niveau de la surface de contact, de calculer l'ensemble des réactions aux noeuds détectés. Ces réactions sont stockées dans une matrice, appelée matrice "raideur", et sont liées.

La méthode de résolution implémentée dans le code de calcul LMGC90 est une méthode "classique NSCD". Cette méthode permet, au niveau de la surface de contact, de résoudre séquentiellement les réactions aux noeuds.

Une comparaison entre ces deux méthodes est réalisée dans cette partie sur des cas académiques. Les simulations sont réalisées pour des cas non-glissant et glissant.

• **Cas académique : contact entre deux polyèdres**

On considère le cube du chapitre 4 posé sur un parallélépipède et les notations utilisées sont les mêmes.

Le cube est considéré restant toujours en contact.

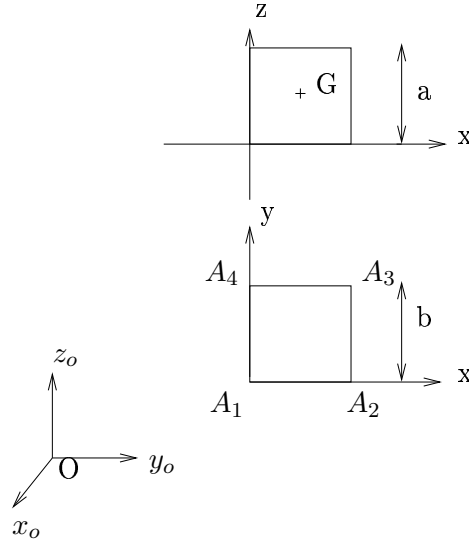


FIG. 5.41 – Géométrie du cube

Les paramètres numériques choisis dans le chapitre 4 sont :

- Coefficient de frottement :  $f=0.4$ ,
- Hauteur du solide :  $a=1\text{m}$ ,
- Largeur du solide :  $b=1\text{m}$ ,
- Masse du solide :  $m=1000\text{kg}$ .
- Coordonnées des noeuds :  $A_1 = (0, 0, -1)$ ;  $A_2 = (1, 0, -1)$ ;  $A_3 = (1, 1, -1)$ ;  $A_4 = (0, 1, -1)$
- Pas de temps :
  - \* dans le cas non-glissant,  $h = 10^{-3}\text{s}$ ,
  - \* dans le cas glissant,  $h = 10^{-4}\text{s}$ ,
- Conditions initiales :  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\frac{m \cdot g}{4}$ ;  $u = v = 0\text{m.s}^{-1}$  et  $\Omega = 0\text{rad.s}^{-1}$  (cas glissant).

La géométrie du cube est symétrique autour de son axe de rotation. Le torseur des efforts extérieurs est toujours appliquée au centre de gravité du solide. Tous les résultats dans les cas, non-glissant et glissant, sont présentés au bout de 10 pas de temps.

• **Cas de non-glissement**

A titre d'exemple, on applique au centre de gravité du cube une force extérieure  $F_x = 1000\text{N}$  et un couple extérieur  $M_z = -100\text{Nm}$ .

Les résultats obtenus par le code de calcul MatLab sont présentés dans le tableau 5.5 et par le code de calcul LMGC90 dans le tableau 5.6.

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-201.95	-247.79	-303.18	-247.08	-1000
Ty	-24.87	24.87	24.87	-24.87	0
N	2202.50	2702.50	2702.50	2202.50	9810

TAB. 5.5 – Cas non-glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "couplée"

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-0.024	37.491	-12.171	-1026.185	-1000.889
Ty	-0.012	621.646	-33.319	-597.513	-9.198
N	0.067	4405.405	499.543	4904.890	9809.905

TAB. 5.6 – Cas non-glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "classique NSCD"

Des tableaux 5.5 et 5.6, il ressort que :

- au niveau local (noeud), les réactions obtenues par la méthode "couplée" sont différentes de celles obtenues par la méthode "classique NSCD". Si on tient compte seulement de la réaction  $T_x$  par exemple, on remarque que des disparités existent entre les résultats. Par-contre, les résultats semblent plus réguliers pour la méthode "couplée" en raison des hypothèses de répartition faites dans le chapitre 4 :

\* les valeurs de la réaction tangentielle  $T_y$  sont opposées sur les noeuds (1;2) et (3;4) et de même intensités,

\* les réactions normales  $N$  sont réparties de façon homogène sur la surface de contact, ce qui n'est pas le cas pour la méthode "classique NSCD". Celle-ci dépend fortement de l'initialisation.

- au niveau global (surface de contact), la résultante générale ( $\sum T_{ix}, \sum T_{iy}, \sum N_i$ ) est quasiment équivalente entre les méthodes.

On peut remarquer que ces résultats sont très importants pour la prédiction du basculement.

#### • Cas de glissement

On applique maintenant, au centre de gravité du cube, par exemple une force extérieur de  $F_x = 10000N$  et  $F_y = -9000N$ . Le cube glisse sur le parallélépipède.

Les résultats obtenus par le code de calcul MatLab sont présentés dans le tableau 5.7 et par le code de calcul LMGC90 dans le tableau 5.8.

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-707.49	-1141.08	-750.85	-317.26	-2916.68
Ty	636.74	1026.97	675.77	285.53	2625.01
N	2379.58	3837.93	2525.42	1067.07	9810

TAB. 5.7 – Cas glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "couplée"

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-52.115	-973.245	-96.092	-1790.508	-2911.96
Ty	46.979	874.179	86.464	1616.880	2624.502
N	175.411	3270.507	323.166	6031.283	9800.367

TAB. 5.8 – Cas glissant. Valeurs des réactions sur chaque noeud du cube - méthode "classique NSCD"

Comme précédemment, pour les réactions des tableaux 5.7 et 5.8, on remarque des différences importantes entre les réactions des deux méthodes. Globalement la résultante générale est quasiment identique. D'autres cas tests ont été étudiés et n'ont pas montré d'incohérence dans les calculs.

On a analysé le cas d'un basculement. Comme vu dans le chapitre 4, la méthode que nous avons développée pour lever l'indétermination s'applique à partir de trois noeuds de contacts. Or, lors d'un basculement, seuls deux noeuds de contacts restent actifs (contact de type arête/face). On a donc vérifié que les résultats issus de la méthode "couplée" sont concordants avec ceux issus de la méthode "classique NSCD" au premier pas de temps.

#### • Cas de basculement du parallélépipède

Le modèle est montré sur la figure 5.42.

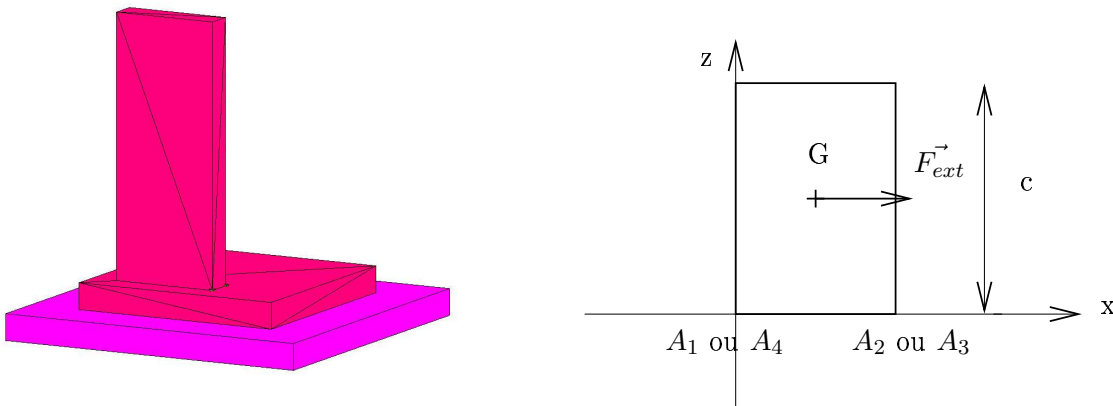


FIG. 5.42 – Modèle de basculement

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-0	-1962.00	-1962.00	-0	-3924
Ty	0	0	0	0	0
N	0	4905.00	4905.00	0	9810

TAB. 5.9 – Cas de basculement. Valeurs des réactions sur chaque noeud du nouveau polyèdre - méthode "couplée"

Unités (Newton)	Valeurs au noeud1	valeurs au noeud2	valeurs au noeud3	valeurs au noeud4	Total
Réactions Tx	-0	-1943.262	-1980.015	0	-3923.277
Ty	0	0	0.326	0.341	0.667
N	0	4858.156	4950.039	0	9808.195

TAB. 5.10 – Cas de basculement. Valeurs des réactions sur chaque noeud du nouveau polyèdre - méthode "classique NSCD"

Les caractéristiques mécaniques sont identiques à celles du modèle précédent. La géométrie du parallélépipède a changé, ses dimensions sont : longueur  $a=1m$ , largeur  $b=4m$  et hauteur  $c=10m$ . Le basculement dépend de la hauteur du polyèdre.

On applique maintenant, au niveau du centre de gravité du nouveau polyèdre, une force  $F_x = 10000N$ .

Les résultats obtenus par le code de calcul MatLab sont présentés dans le tableau 5.9 et par le code de calcul LMGC90 dans le tableau 5.10.

Par cet exemple, le modèle montre que la méthode "couplée" prédit effectivement le basculement par la nullité des réactions normales aux noeuds  $A_1$  et  $A_4$ . Les résultats du cas de basculement sont conformes avec les hypothèses faites dans le chapitre 4.

### 5.3.4 Conclusion

La méthode de résolution "couplée" que nous avons développée et exposée dans le chapitre 4 présentent les mêmes résultats que la méthode de résolution "classique NSCD", implémentée dans le code de calcul LMGC90. Les réactions, au niveau de chaque noeud, sont plus stables que celles obtenues par la méthode de résolution "classique NSCD" où seuls les éléments de réduction des efforts de contact sur le plan peuvent être considérés corrects. La méthode de résolution "couplée" a ainsi montré son efficacité.

## 5.4 Conclusion

Les différents exemples traités dans ce chapitre ont permis de vérifier la validité et la robustesse de l'algorithme de détection des contacts.

Les simulations dynamiques ont montré l'efficacité d'évaluer l'efficacité de l'algorithme de détection en raison des nombreuses situations de contacts avec des faces perpendiculaires et parallèles. L'exemple de la destruction des aqueducs soumis à un tremblement de terre a mis en évidence la non-interpénétration des blocs entre eux (condition de Signorini).

Les simulations dans le cas non-glissant ont montré l'efficacité d'évaluer la transmission des efforts

dans l'ouvrage. Par l'analyse des descentes de charge, on retrouve le poids de la structure considérée. Les résultats sont ainsi cohérents avec les caractéristiques physiques et géométriques de l'ouvrage. Dans la partie "problème statiquement indéterminé", on s'est intéressé au rôle du nombre de noeuds pris à l'échelle locale, sur la stabilité numérique du contact. Il en ressort que suivant la géométrie de la structure, trois noeuds ne suffisent pas toujours à modéliser le contact stable entre deux polyèdres. On peut, en effet, se trouver dans des situations où le bloc est très instable et la présence d'un noeud supplémentaire sur la surface de contact peut alors être suffisant (cas de la coupôle) pour éviter les éventuels problèmes de glissement.

La mise en place "numérique" des blocs dans une structure peut être réalisée suivant :

- un procédé réaliste de construction, où la détection est activée successivement d'un polyèdre à l'autre en tenant compte de la géométrie,
- un procédé direct, où la détection est réalisée sur l'ensemble des polyèdres dès le premier pas de temps.

On a constaté que le premier procédé donne des résultats plus symétriques et homogène que le second. On a conclu que la disparité des résultats pouvait être liée à un problème hyperstatique. En effet, la mise en place directe des blocs peut engendrer des problèmes d'hyperstaticité plus importants que dans la mise en place successive.

Cependant, le procédé réaliste est "numériquement" délicat à mettre en place dans une structure à grand nombre de blocs où les contacts sont horizontaux et verticaux, et présents simultanément sur plusieurs faces du polyèdre considéré.

La méthode de résolution "couplée", développée et testée avec le code de calcul MatLab dans le chapitre 4, présente des résultats sur les éléments de réduction quasiment identiques à la méthode de résolution "classique NSCD" implémentée dans le code de calcul LMGC90. Les réactions aux noeuds sont plus régulières en raison des hypothèses de répartition. La pertinence de la méthode "couplée" est validée.





## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

Les maçonneries en grand appareil sont des structures discontinues, assimilées à des milieux granulaires. Leur comportement mécanique dépend de plusieurs facteurs : taille des blocs, orientation des joints, propriétés physiques de frottement et d'adhésion entre les blocs, historique de chargement. Les sollicitations auxquelles elles sont soumises sont diverses : cisaillement, compression, déplacements imposés (tassements différentiels, dénivellation d'appuis).

Les études généralement menées dans le cadre de la mécanique des milieux continus (MMC) ont pour objectif d'identifier le comportement mécanique homogénéisé à partir de calculs sur un volume élémentaire représentatif (VER). Ce VER doit à la fois être élémentaire c'est-à-dire que ses dimensions doivent être négligeables devant la taille de la structure et représentatif c'est-à-dire qu'il doit contenir assez d'hétérogénéités pour refléter le comportement des milieux. L'utilisation de la MMC ne paraît pas être le bon cadre théorique pour traiter du comportement des maçonneries en grand appareil pour lequel les discontinuités physiques sont évidentes et les géométries tridimensionnelles ne permettent pas la définition d'un VER.

Nous avons proposé d'étudier les structures maçonnées par la méthode des éléments discrets. L'avantage d'une telle approche est de permettre, par l'intermédiaire de peu de paramètres physiques et mécaniques, de modéliser des structures au comportement complexe. Le modèle est basé sur la méthode NSCD initiée et développée par Moreau et Jean (Moreau (2000), Jean et Cambou (2001)). Elle est parfaitement adaptée pour simuler le comportement et l'évolution dynamique d'un ensemble de solides rigides, de tailles différentes, ayant une géométrie convexe interagissant par contact. En effet, elle permet par son formalisme mathématique et son schéma numérique implicite de prendre en compte les éventuels chocs et les irrégularités au sens mécanique qui peuvent en découler. Les actions inter-granulaires de contacts frottants dans une maçonnerie sont décrites par des conditions unilatérales (loi de Signorini), du frottement de Coulomb et des lois de chocs élastiques et inélastiques. Dans le cas de joints maçonnés, on introduit la loi de comportement du joint.

Le modèle développé permet :

- d'une part d'utiliser des pas de temps plus longs et de traiter des problèmes comportant un plus grand nombre de blocs que ceux utilisés dans l'approche développée par Cundall (Cundall (1988a)),
- d'autre part, de s'adapter au cas des contacts plans prépondérants dans le domaine particulier des maçonneries.

Les structures étudiées sont composées de blocs polyédriques convexes et sont modélisées à l'aide du code de calcul LMGC90

Les monuments étudiés, comme application de la méthode proposée, vont des structures en pierres massives, cas du simple appareil régulier (mur) ou irrégulier (pont Julien) aux structures précontraintes (coupôle de Junas, escalier Ridolfi).

La difficulté pour modéliser de telles structures réside dans la définition d'un nombre de points de contacts adapté pour une liaison entre deux polyèdres. L'utilisation de l'algorithme de Saussine & al (Saussine (2004)), implémenté dans le code de calcul LMGC90, a montré à travers diverses simulations des détections perfectibles dans le cas de contacts plans. La non-détection (chute des blocs) ou les ouvertures de joints (glissement des blocs entre eux) sont des exemples de la mise en défaut de cet algorithme. Les points de contacts sont géométriquement mal positionnés sur la surface de contact favorisant incorrectement le glissement et éventuellement le basculement entre deux blocs. De plus, l'étude de différents algorithmes existants dans la littérature, spécifiques aux domaines de la robotique et de la réalité virtuelle, a montré leurs inadaptations au domaine de la maçonnerie.

Nous proposons dans ce travail le développement d'un nouvel algorithme de détection des contacts entre polyèdres convexes rigides. L'originalité consiste à considérer des contacts surfaciques entre les blocs et avec un traitement spécifique. L'algorithme est implémenté dans le code de calcul

LMGC90 et s'adapte à toutes les situations de contacts de type face/face, arête/face, sommet/face, arête/arête, sommet/sommet et sommet/arête. Il permet le traitement du contact à joint vif avec frottement sec et du contact avec joint de mortier.

L'algorithme de Cundall (Cundall (1988a)) est basé sur la recherche d'un plan séparateur entre deux polyèdres. La transmission des forces au niveau du contact est réalisée seulement sur un point de contact : il est alors difficile de définir correctement le couple. Une modification a été nécessaire pour obtenir un modèle correct de contact plan.

La spécificité de l'algorithme proposé consiste en la détection des sommets des polyèdres dont les faces sont en vis-à-vis en utilisant le plan séparateur proposé par Cundall. Les sommets sont ensuite projetés sur le plan. Les enveloppes convexes des faces de part et d'autre du plan sont définies ; leur intersection caractérise la zone polygonale de contact dont les sommets sont les noeuds de contacts. Les exemples traités permettent de valider la logique et la robustesse de l'algorithme de détection. Des simulations statiques (sous poids propre) permettent de mettre en évidence l'efficacité de l'algorithme pour détecter les contacts dans une structure à grand nombre de blocs (pont Julien, 3267 blocs) ou précontrainte (escalier Ridolfi 203 blocs, coupôle de Junas 180 blocs).

Des simulations dynamiques de structures soumises à divers cas de charges (cisaillement, tassement de sol) permettent d'évaluer la robustesse de l'algorithme en raison des nombreuses situations de contacts prises en compte (faces perpendiculaires et parallèles).

Ces liaisons de contacts conduisent souvent à un problème statiquement indéterminé, c'est-à-dire à un nombre d'inconnues d'efforts de contacts plus important que le nombre d'équations. Dans une structure maçonnée, l'indétermination peut être locale ou globale.

L'indétermination locale est associée au nombre de contacts ponctuels définissant une liaison plane. Sans frottement, une liaison plane doit être définie par 3 contacts ponctuels pour être iso-statique. Avec frottement, le problème est inconditionnellement statiquement indéterminé.

L'indétermination globale est associée à la prise en compte de l'ensemble des liaisons planes entre les blocs de la structure.

- Pour la résolution locale, on est confronté à une indétermination des réactions normales et tangentielles. Pour lever cette indétermination, nous proposons une stratégie en deux étapes :

- pour les réactions normales, on suppose une répartition linéaire spatiale. Celle-ci crée une dépendance linéaire entre les inconnues normales,

- pour les réactions tangentielles, on suppose la linéarité de leur répartition dans une direction donnée. Cette hypothèse consiste à créer une dépendance entre les composantes tangentielles et normales.

- Pour la résolution globale, on utilise l'histoire du chargement, dont l'importance a été soulignée par Moreau (Moreau (2005)). Elle consiste à mettre en place les blocs les uns après les autres en suivant un procédé réaliste de construction. A chaque pas de temps, l'initialisation des variables à partir des résultats obtenus permet de garantir la pertinence de la solution.

Nous proposons une méthode de résolution qui traite simultanément tous les noeuds d'une liaison plane. Cette méthode consiste à coupler l'ensemble des équations écrites pour chaque noeud et construire un vecteur nodal (constitué par les inconnues aux noeuds : réactions et déplacements au centre de gravité  $G$ ) et une matrice élémentaire caractérisant la liaison plane. C'est un système itératif. L'étude de deux cas académiques, prisme et cube, permet de tester la pertinence de la méthode.

Sur l'ensemble des simulations réalisées grâce au code MatLab, on a vérifié que :

- les réactions tangentielles s'opposent toujours au sens de glissement,
- si un solide glisse sans basculement dans une direction donnée, quelle que soit la valeur du module de la force extérieure appliquée au centre de gravité du solide, les valeurs des réactions tangentielles et normales restent identiques. Dans le cas où l'on applique un couple, les valeurs des réactions sont cohérentes avec la symétrie et l'axe de rotation du solide considéré,
- si un solide glisse suivant deux directions, les valeurs des réactions tangentielles dépendent de la valeur du module de la force extérieure appliquée,
- la transition entre les modèles non-glissant et glissant est validée,
- la convergence, dans les cas non-glissant et glissant, est très rapide (1 à 3 itérations).

Afin de valider la méthode de résolution, on a comparé les résultats numériques de la méthode "couplée" avec celle utilisée jusqu'à présent par LMGC90. La méthode existante dans LMGC90 consiste à résoudre le problème du contact d'une liaison plane "séquentiellement" noeud après noeud.

Les simulations sur différents cas académiques montrent des résultats des éléments de réduction quasiment identiques. Les valeurs des réactions aux noeuds de la méthode "couplée" sont moins variables et déterminées d'une manière unique alors que celles fournies par la méthode "classique NSCD" peuvent être très différentes en fonction de l'initialisation. Pour la prévision du basculement, la méthode proposée ici est plus fiable.

La validation du modèle tridimensionnel n'est pas triviale. Les comparaisons avec des expériences effectuées sur des maçonneries, tirées de la bibliographie, donnent de bons résultats (déformations d'un mur de brique soumis à un cisaillement, d'un mur de brique soumis à un tassement différentiel et d'un pont SNCF soumis à une charge limite). Ces investigations mettent en évidence l'efficacité et la robustesse de l'algorithme de détection.

La résolution numérique utilisant la méthode existante "classique NSCD" a pour but d'évaluer la transmission des efforts dans des structures précontraintes, comportant un grand nombre de blocs et à géométries complexes. Par l'analyse des descentes de charge, le poids de la structure considérée est retrouvé. La mise en oeuvre d'un modèle numérique pour simuler l'effort d'une précontrainte nécessaire à la stabilité de la structure est réalisée. Le dimensionnement de la précontrainte, à partir de calculs théoriques connus, permet de valider cette mise en oeuvre. Les résultats obtenus par calcul sont cohérents avec les caractéristiques physiques et géométriques des ouvrages considérés.

Pour la suite des recherches, on peut :

- à court terme, intégrer la méthode "couplée" dans le code de calcul LMGC90. Le but est de comparer cette méthode avec la méthode existante en terme de répartition des efforts sur une structure. Le principe serait par exemple d'initialiser les valeurs des réactions, tangentielles et normales, grâce à la méthode "classique NSCD" puis d'appliquer la nouvelle méthode de résolution "couplée". Celle-ci devrait permettre de vérifier que les réactions deviennent homogènes,
- prolonger cette méthode afin de gérer le problème de l'après basculement. Actuellement, l'algorithme permet de résoudre un problème de contact frottant jusqu'à la limite du basculement,
- intégrer une interface avec une épaisseur non-nulle entre deux polyèdres. Celle-ci pourra ainsi refléter le comportement mécanique de l'interface d'une maçonnerie réelle,
- utiliser des polyèdres déformables dans une structure afin d'obtenir des informations sur sa résistance interne. Cependant, la simulation de structures avec des polyèdres déformables, avec un maillage grossier, prend jusqu'à quatre fois plus de temps de calcul que la simulation par blocs ri-

gides. On propose d'utiliser une discrétisation par un nombre limité d'éléments finis corotationnels pour ce type de modélisation.



# Bibliographie

- Abdou, L., 2005. Modélisation du comportement mécanique des murs en maçonnerie chargés dans leur plan. Phd thesis, Université de Marne La Vallée, Marne La Vallée, France.
- Abdou, L., Ami Saada, R., Meftah, F., Mebarki, A., 2006. Experimental investigations of the joint-mortar behaviour. *Mechanics Research Communications* , pp. 370–384.
- Aboudi, J., 1991. *Mechanics of composite materials : a unified micromechanical approach*. Elsevier, Amsterdam .
- Acary, V., 2001. Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés. PhD Thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille, France.
- Acary, V., Jean, M., 2001. Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method. *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS-ESM2* .
- Alart, P., Curnier, A., 1988. A generalized newton method for contact problems with friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée supplément no 1 to 7*, pp. 67–82.
- Alpa, G., Monetto, I., 1994. Microstructural model for dry block masonry walls wih in plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, pp. 1159–1175.
- Alves, B. K., Alves, M. K., 1997. No-tension elastic materials. *European Journal of Mechanics And Solids* 16, pp. 103–116.
- Anthoine, A., 1995. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures, Elsevier Science Publishers Ltd* 32, pp. 137–163.
- Armand, G., Boulon, J. C., Papadopoulos, C., Picaud, G., Reveillet, M., Rey, B., Verdys, J. F., 1997. Monuments under seismic action. *Interface Properties. Laboratoire Sols Solides Structures HMG INPG CNRS* .
- Atkinson, R. H., Amadei, B. P., Saeb, S., Sture, S., 1989. Response of masonry bed joints in direct shear. *Journal of Structural Engineering, A.S.C.E* 115, pp. 2276–2296.
- Backes, H. P., 1985. On the behaviour of masonry under tension in the direction of the bed joints. *Thèse, Ph.D. Dissertation, Aachen University of Technology*.
- Bandis, S. C., Lumsden, A. C., Barton, N. R., 1981. Experimental studies of scale effects on the shear behaviour of rock joints. *Internation Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 18, pp. 1–21.



- Bandis, S. C., Lumsden, A. C., Barton, N. R., 1983. Fundamentals of rock joint deformation. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 20, pp. 249–268.
- Barton, N., Choubey, V., 1977. The shear strength of rock joints in theory and practice. *Rock Mechanics* 10, pp. 1–54.
- Barton, N. R., Bandis, S. C., 1980. Some effects of scale on the shear strength of joints. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 17, pp. 69–73.
- Bauer, E., Huang, W., 2001. Influence of density and pressure on spontaneous shear band formations in granular materials. *Symposium on Theoretical and numerical methods in continuum mechanics of porous materials*, pp. 245–250.
- Beck, K., 2006. Etude des propriétés hydriques et des mécanismes d'altération de pierres calcaires à forte porosité. Phd thesis, Université d'Orléans, Orléans, France.
- Beck, K., Al-Mukhtar, M., 2004. The mechanical resistance properties of two limestones from France, tuffeau and sébastopol. In : Prikryl, R. (Ed.), *Dimension Stone 2004 : New Perspectives for a traditional building material*. A.A. Balkema, pp. 97–102.
- Beck, K., Al-Mukhtar, M., 2005. Multi-scale characterisation of two French limestones used in historic constructions. *International Journal of Restoration of Buildings and Monuments* 11 (4), pp. 219–226.
- Bensoussan, A., Lions, J., Papanicolau, G., 1978. Asymptotic analysis for periodic structures. Tech. rep., North-Holland, Amsterdam.
- Beskos, D. E., 1993 No 216, 1994 No 217. Use of finite and boundary elements for the analysis of monuments and special buildings. *Bull. Greek. Soc.. Civil Engineering, Athens*, 1993 pp. 31–43, 1994 pp. 15–32.
- Bhowmik, S., Dutta, P., 2004. An investigation into the shear strength of rock discontinuity. Department of Mining and Geology, Bengal Engineering College (DU) 85, pp. 11–15.
- Bienawski, Z. T., 1974. Rock mechanics design in mining and tunneling. *International Journal of Rock mechanics and Mining Sciences*, pp. 535–546.
- Binda, L., Fontana, A., Frigerio, G., 1988. Mechanical behaviour of brick masonries derived from unit and mortar characteristics. In : Courcy, d. J. W. (Ed.), *8th International Brick and Block Masonry Conference*. Elsevier Applied Science, London, pp. 205–216.
- Binda, L., Saisi, A., 2001. Non destructive testing applied to historic buildings : the case of some sicilian churches. In : Lourenço, P. B., Roca, P. (Eds.), *Historical constructions*. pp. 29–46.
- Biénié, N., Stirling, C., Pearce, C. J., 2002. Discontinuous modelling of structural masonry. In : Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J. (Eds.), *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. pp. 1–18.
- Boynton, R. S., 2001. *Chemistry and Technology of Lime and Limestone*. Wiley Interscience Second Edition, pp. 592, ISBN-10 : 0471027715.
- Bretelle, A.-S., Cocu, M., Monerie, Y., 2000. Formulation du contact avec adhérence en élasticité non-linéaire entre deux solides déformables. *Communauté Royal Académie Science Paris* 328, pp. 203–208.

- Bretelle, A.-S., Cocu, M., Monerie, Y., 2001. Unilateral contact with adhesion and friction between two hyperelastic bodies. *International Journal of Engineering Science* 39, pp. 2015–2032.
- Briccoli, S., Paradiso, M., Tempesta, G., 1995. Numerical procedure for the analysis of brickwork walls. In : Middleton, Pande (Eds.), *Computer Methods in Structural Masonry*. B&J International, pp. 303–312.
- Carol, I., Lopez, C., Roa, O., 2001. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal of Numerical Methods Engineering* 52, 193–215.
- Chetouane, B., 2004. Approche combinée : éléments finis/éléments discrets pour la modélisation des structures maçonnées. Phd thesis, Université des sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France.
- Chetouane, B., Dubois, F., Vinches, M., Bohatier, C., 2003. Stress and strain tensors in granular medium application to masonry structures. In : *IMECE 03 International ASME Mechanical Engineering Congress and Washington Exposure*, D.C. pp. 52–60.
- Chetouane, B., Dubois, F., Vinches, M., Bohatier, C., 2005. The nscd discrete element method for modeling of masonry structures. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 64, pp. 65–94.
- Christensen, R. M., 1980. *Mechanics of composite materials*. John Wiley and Sons, New York .
- Cotte, P., Marbec, O., Mathieux, S., 2001. Modélisation de deux aqueducs d'arles. Tech. rep., Projet long de l'école des mines d'Alès.
- Coulomb, C. A., 1773. Essai : Sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. Tech. rep., Mémoire présenté à l'académie royale des sciences.
- Cowper, A. D., 1927. *Lime and Lime Mortars*. Donhead, pp. 96, ISBN-10 : 1873394292.
- Cundall, P. A., 1971. Computer model for simulation progressive large. *Rock fracture proceedings of the international symposium on rock mechanics* 12, pp. 12.
- Cundall, P. A., 1988a. Formulation of a three-dimensional. distinct element model- part i. a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 25, pp. 107–116.
- Cundall, P. A., 1988b. Formulation of a three-dimensional. distinct element model- part i. a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 25, pp. 107–116.
- Cundall, P. A., Lemos, J. V., 1990. Numerical simulation of fault instabilities with a continuously-yielding joint model. *Rockbusts and seismicity in mines proceedings 2nd International symposium* , pp. 147–152.
- Cundall, P. A., Strack, O. D. L., 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29, pp. 47–65.

- Cundall, P. A., Strack, O. D. L., 1983. Modeling of microscopic mechanisms in granular material. *Mechanics of granular materials new models and constitutive relations proceedings ithaca* 7, pp. 137–149.
- Cuomo, M., Ventura, G., 2000. A complementary energy formulation of no-tension masonry-like solids. *Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering* 189, pp. 313–339.
- D. Hatzigeorgiou, E. Beskos, D., D. Teodorakopoulos, D., Sfakianakis, M., 1999. Static and dynamic analysis of the arta bridge by finite elements. *Architecture and Civil Engineering* 2, pp. 41–51.
- D'amato, C., 2005. *L'art de la stereotomie. Les compagnons du Devoir et les merveilles de la construction en pierre*. Librairie du campagnonnage. Catalogue de l'exposition organisée dans le cadre de VERONAFIERE, ISBN 2-901362-53-1.
- Davey, N., 1961. A history of building materials. *Technology and Culture* 3 (3), 323–325.
- De Borst, R., Sluys, L. J., Muhlhaus, H. B., Pamin, J., 1993. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations* 10, pp. 99–121.
- De Buhan, P., De Felice, G., 1997. A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (7), pp. 1085–1104.
- Delbecq, J. M., 1981. Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie de charles augustin coulomb à nos jours. *Annales des Ponts et Chaussées* 19, pp. 36–43.
- Dequidt, J., Grisoni, L., Meseure, P., Chaillou, C., 2003. Détection de collisions entre objets rigides convexes autonomes. *Revue Internationale de CFAO et d'informatique graphique* 18 (2).
- Dessandier, D., Bromblet, P., Mertz, J. D., 2000. Role of the clays in the modification of hygric properties : consequence on the mechanism of plates exfoliation of tuffeau. In : *Proceedings of the 9th International Congress on the Deterioration and Conservation of Stone, Venice*. p. 8.
- Dhanasekar, M., Page, A. W., 1985. The failure of brick masonry under biaxial stresses. In : *Institution Civil Engineers*. Vol. 79. pp. 295–313.
- Dobereiner, L., De Freitas, M. H., 1986. Geotechnical properties of weak sandstones. *Géotechnique* 36 (1), pp. 79–94.
- Domède, N., 2006. *Méthode de re-qualification des ponts en maçonnerie*. Tech. rep., Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions, INSA Toulouse.
- du Jean, M., Abdelkader, A., Pavone, D., 1983. Etude de diverses roches au laboratoire par ondes ultrasonores. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment* 28 (1), pp. 133–139.
- Dubois, F., 2003. Simulation of multi body problems contact. *Non Smooth Contact Dynamics - Autrans* .
- Dubois, F., Jean, M., 2003. Lmgc90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation de problèmes d'interaction. In : *M.POTIER-FERRY, M. e. A. (Ed.), 6ième colloque national en calcul des structures*. Vol. Imprimerie de l'école polytechnique. pp. 111–118.
- Durand-Claye, A., 1867. Stabilité des voûtes de maçonnerie. *Annales des ponts et chaussées* 1, pp. 63–96.

- Durand-Claye, A., 1880. Stabilité des voûtes et des arcs. *Annales des ponts et chaussées* 1, pp. 416–440.
- Eslahchi, R., Masjed-Jamei, M., Babolian, E., 2005. On numerical improvement of gauss-lobatto quadrature rules. *Applied Mathematics and Computation* 164 (3), pp. 707–717.
- Fairhurst, C., 1964. On the validity of the "brazilian" test for brittle materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* , pp. 535–546.
- Fanning, P. J., Boothby, T. E., 2001. Three-dimensional modelling and full-scale testing of stone arch bridge. *Computers and Structures* 79, pp. 2465–2662.
- Ferris, M. C., Tin-Loi, F., 2001. Limit analysis of frictional block assemblies as a mathematical program with complementarity constraints. *International Journal of Mechanical Sciences* 43, pp. 209–224.
- Fremond, M., 1982. Equilibre des structures qui adhèrent à leur support. *Compte-rendu de l'académie des sciences* 295 (SérieII), pp. 913–916.
- Garcia-Alonso, A., Serrano, N., Flaquer, J., 1994. Real time geometric interference detection for collision problem. *IEEE/Computer Graphics and Applications* 14, pp. 36–43.
- Gilbert, E., Hong, S., 1989. A new algorithm for detecting the collision of moving objects. *IEEE/Internation Conference on Robotics and Automation "ICRA"* 1, 8–14.
- Gilbert, E. G., Johnson, D. W., Keerthi, S. S., 1988. A fast procedure for computing the distance between objects in three-dimensional space. *IEEE/Internation Conference on Robotics and Automation "ICRA"* 4, 193–203.
- Gilbert, M., Casapulla, C., Ahmed, H. M., 2006. Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming. *Computers and Structures* 84, pp. 873–887.
- Grasselli, G., Egger, P., 2003. Constitutive law for shear strength of rock joints based on quantitative 3-dimensional surface parameters. *International Journal of rock Mechanics and Mining Sciences* 40.
- Guigue, P., 2003. Constructions géométriques à précision fixée. Phd thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, France.
- Guillaume, J., 2005. La pierre dans l'architecture rurale en lorraine. In : *Revue de l'inventaire*, no 6. Ministère de la culture et de la communication, pp. pp. 1–18, iSSN : 1630-7305.
- Guégen, Y., Palciauskas, V., 1992. Introduction à la physique des roches. Hermann, ISBN-10 : 2705661387.
- Hamid, A. A., Drysdale, R. G., 1981. Concrete masonry under combined shear and compression along the mortar joints. *ACI Journal* , pp. 314–320.
- Hamid, A. A., Drysdale, R. G., Heidebrecht, A. C., 1979. Shear strength of concrete masonry joints. *Journal of Structural Division A.S.C.E* 105, pp. 1227–1240.
- Hart, R. D., 1991. An introduction to distinct element modeling for rock engineering. *International Congress on Rock Mechanics* .

- Hendry, A. W., 1978. A note on the shear strength of brickwork in combined racking shear and compression. *Structural masonry* 27, pp. 47–52.
- Heyman, J., 1972. *Coulomb's memoir on statics*. Tech. rep., Cambridge University Press.
- Heymann, J., 1966. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures* 2, pp. 249–279.
- Hilsdorf, H. K., 1969. Investigation into the failure mechanism of brick masonry loaded in axial compression. In : Johnson, F. H. (Ed.), *Designing, engineering and constructing, with masonry products*. Publishing Company, Houston Texas, pp. 34–41.
- Hoffmann, G., Schubert, P., 1994. Compressive strength of masonry parallel to the bed joints. In : Shrive, N. G., Huizer Calgary Alberta, A. (Eds.), *Proc. 10th Int. Brick and Block Masonry Conf.* pp. 1453–1462.
- Hofmann, P., Stockl, S., 1986. Tests on the shear-bond behaviour in the bed-joints of masonry. *Masonry International* 9, pp. 1–15.
- Hurmuzlu, Y., 1998. An energy-based coefficient of restitution for planar impacts of slender bars with massive external surfaces. *Journal of Applied Mechanics* 65, pp. 952–962.
- ICOMOS, 1964. Conseil international des monuments et des sites, travaux basés sur les principes inscrits dans la charte internationale de 1964 sur la conservation et la restauration des monuments et des sites, dite charte de Venise. Site internet, "<http://www.international.icomos.org/>".
- ITASCA, 2007. Itasca consultants, s.a.s. Tech. rep., Bureau d'étude spécialiste en modélisation numérique.
- Jaeger, J. C., Cook, N. G. W., 1979. *Fundamentals of rock mechanics*. New-York : Chapman and Hall .
- Jean, M., 1993. Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement. Tech. rep., Journées de la société Tribologique de France, Matériaux et Techniques.
- Jean, M., 1995a. Frictional contact in collections of rigid and deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. In : Saladurai, A. P. S., Boulon, J. M. (Eds.), *Mechanics of geomaterials Interfaces*. Elsevier Science, pp. 463–486.
- Jean, M., 1995b. Frictional contact in collections of rigid and deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. In : Saladurai, A. P. S., Boulon, J. M. (Eds.), *Mechanics of geomaterials Interfaces*. Elsevier Science, pp. 463–486.
- Jean, M., 1999. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods applied Mechanical Engineering* 177 (3-4), pp. 235–257.
- Jean, M., Acary, V., Monerie, Y., 2001. Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Proceedings Royal Society A* 359, pp. 2497–2518.
- Jean, M., Cambou, B., 2001. *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Sciences .
- Jean, M., J. Moreau, J., 1992. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In : Curnier, A. (Ed.), *Contact Mechanics International Symposium*. pp. 31–48.

- Jean, M., Moreau, J. J., 1992. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In : Curnier, A. (Ed.), Contact Mechanics International Symposium. pp. 31–48.
- Kralj, B., Pande, G. N., Middleton, J., 1991. On the mechanics of frost damage to brick masonry. Computers and Structures 41, pp. 53–66.
- Le Pape, Y., Anthoine, A., Pegon, P., 2001. Seismic assessment of masonry structures- multi-scale numerical modelling. In : Lourenço, P. B., Roca, P. (Eds.), Historical constructions. pp. 963–972.
- Lemaitre, J., Chaboche, J. L., 1985. Mécanique des matériaux solides, 2ième édition. Dunod, Paris .
- Leonenko, Y., Vinogradoc, O., 2001. A molecular dynamics approach in simulations of fluid-solids particles flow. Journal of Granular Matter 3, pp. 185–191.
- Leroy, A., Trimoreau, S., 2000. Efficiency and robustness of the calculation algorithm of envelope convex. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 25, pp. 107–116.
- Li, X., Meng, X., Wang, C. Y., 2003. Detect collision of polytopes using a heuristic search for separating vectors. College of Computer Science and Technology of Shandong University, China , pp. 837–847.
- Lin, M. C., Canny, J. F., 1991. A fast algorithm for incremental distance calculation. IEEE/Internation Conference on Robotics and Automation "ICRA" .
- lofti, H. R., Shing, P. B., 1994. Interface model applied to fracture of masonry structures. ASCE Internation Journal of Structures and Engineering 1, pp. 63–80.
- Lourenço, P. B., 2006. Computational strategies for masonry structures. PhD Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade, Porto, Portugal.
- Lourenço, P. B., Oliveira, D., Roca, P., Orduna, A., 2005. Dry joint stone masonry walls subjected to in-plane combined loading. Journal of Structural Engineering, ASCE 131, pp. 1665–1673.
- Lourenço, P. B., Rots, J. G., 1997. Multisurface interface model for the analysis of masonry structures. Journal of Engineering Mechanics 123, pp. 660–668.
- Luciano, R., Sacco, E., 1997. Homogenization technique and damage model for old masonry material. International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, Ldt 34, pp. 3191–3208.
- Luciano, R., Sacco, E., 1998. Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media. European Journal of Mechanics A/Solids , pp. 599–617.
- M. Suquet, P., 1982. Plasticité et homogénéisation. PhD Thesis, Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.
- Molina, J., Le Pape, Y., Pegon, P., 2001. Seismic assessment of masonry structures- experimental program. In : Lourenço, P. B., Roca, P. (Eds.), Proceeding of the 3rd International Seminar, Guimaraes, Portugal, Historical constructions 2001. pp. 953–962.
- Moreau, J. J., 1988. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In : Moreau, J., Panagiotopoulos (Eds.), CISM Races and Readings. Vol. 302. Springer-Verlag, pp. 1–82.

- Moreau, J. J., 1994. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *European Journal of Mechanics A/Solids* 13, pp. 93–114.
- Moreau, J. J., 1997. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In : Grassberger, P., Wolf, D. (Eds.), *HRLZ-workshop one friction*. pp. 233–247.
- Moreau, J. J., 1999a. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. Special issue on computational modeling of contact and dry friction, J.A.C. Martins and A. Klarbing, editors 177, pp. 329–349.
- Moreau, J. J., 1999b. Some basics of unilateral dynamics. In : Pfeiffer, F., Glocker, C. (Eds.), *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*. pp. 1–14.
- Moreau, J. J., 2000. Contact and dry friction in dynamics of the rigid body systems. *European review of the finite elements* 9, pp. 9–28.
- Moreau, J. J., 2005. Indetermination in the numerical simulation of granular systems. *Powders and grains, Balkema, Leiden* 1, pp. 109–112.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21, pp. 571–574.
- Muhlhaus, H. B., Vardoulakis, I., 1987. The thickness of shear bands in granular materials. *geo* 3, pp. 271–283.
- Méry, E., 1840. Equilibre des voûtes en berceau. *Annales des Ponts et Chaussées* 1, pp. 50–70.
- Nezami, E. G., Hashash, Y. M. A., Zhao, D., Ghaboussi, J., 2004. A fast contact detection algorithm for 3-d discrete element method. *Computers and Geotechnics* , pp. 575–587.
- Nezami, E. G., Hashash, Y. M. A., Zhao, D., Ghaboussi, J., 2006. Shortest link method for contact detection in discrete element method. *International journal for numerical and analytical method in geomechanics* , pp. 783–801.
- norme AFNOR, 2000. Dtermination de la résistance à la compression uniaxiale, référence NF P94-420.
- norme AFNOR, 2001. Dtermination de la résistance à la traction. méthode indirecte - essai brésilien, référence NF P94-422.
- Ojo, O., Brook, N., 1990. The effect of moisture on some mechanical properties of rock. *Mining science and technology* 10, pp. 145–156.
- Onate, E., Hanganu, A., Barbat, A., Oller, S., Vitaliani, R. Y., Saetta, A., Scotta, R., 1997. Structural analysis and durability assessment of historical construction using a finite element damage model. In : Roca, P. (Ed.), *Structural analysis of historical constructions*, CIMNE Barcelona. pp. 189–224.
- Orduna, A., 2003. Seismic assessment of ancient masonry structures by rigid blocks. PhD Thesis, Universidade do Minho, Department of civil Engineering, Guimaraes, Portugal.
- Orduna, A., Lourenço, P. B., 2001a. A limit analysis approach for masonry structures. In : Abdumur, C. (Ed.), *Proceedings of the Arch Bridges ARCH01*. Presses Ponts et Chaussées : Paris, pp. 451–457.

- Orduna, A., Lourenço, P. B., 2001b. Limit analysis as a tool for the simplified assessment of ancient masonry structures. In : Lourenço, P. B., Roca, P. (Eds.), *Proceeding of the Historical Constructions*. University of Minho Press, pp. 511–520.
- Orduna, A., Lourenço, P. B., 2003. Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures. *Journal Of structures and Engineering* 129.
- Orduna, A., Lourenço, P. B., 2005a. Three-dimensional limit analysis of rigid locks assemblages. part i : Torsion failure on frictional joints and limit analysis formulation. *International Journal of Solids and Structures* 42, pp. 5140–5160.
- Orduna, A., Lourenço, P. B., 2005b. Three-dimensional limit analysis of rigid locks assemblages. part ii : Load-path following solution procedure and validation. *International Journal of Solids and Structures* 42, pp. 5161–5180.
- O'Rourke, J., 1998. *Computational Geometry in C*, second edition. Cambridge University Press, pp. 390.
- Page, A. W., 1978. Finite element model for masonry. *Journal of Structural Division A.S.C.E* 104, pp. 1267–1285.
- Page, A. W., 1981. The biaxial compressive strength of brick masonry. In : *Institution Civil Engineers*. pp. 893–906.
- Page, A. W., 1983. The strength of brick masonry under biaxial compression-tension. *International Journal of Masonry Constructions* 3 (1), pp. 26–31.
- Pande, G. N., Liang, J. X., Middleton, J., 1989. Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers and Geotechnics* , pp. 243–265.
- Pegon, P., Anthoine, A., 1997. Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening : application to the homogeneization of masonry. *Computers and Structures* 64, pp. 623–642.
- Perales, R., Vinches, M., Nemoz-Gaillard, M., Bohatier, C., 2007. A new contact detection algorithm for three-dimensional masonry structures. *Computers and Structures*, submitted .
- Pietruszczak, S., Niu, X., 1992. A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry. *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon Press, Ltd 29, pp. 531–546.
- Pion, S., 1999. *De la géométrie algorithmique au calcul géométrique*. Phd thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, France.
- Plastock, R. A., Kalley, G., 2000. *Infographie cours et problèmes*. Série SCHAUM.
- Roca, P., Oliveira, D., Lourenço, P. B., Carol, I., 2001. Mechanical response of dry joint masonry. Tech. rep., Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimaraes.
- Samarasinghe, W., Hendry, A. W., 1980. The strength of brickwork under biaxial tensile and compressive stress. In : *7th International Symposium on Load Bearing Brickwork*, London. pp. 129–139.
- Sanchez-Palencia, E., 1980. *Non homogeneous media and vibration theory*. Tech. rep., Lecture notes in physics, vol272, Springer, Berlin.



- Sanchez-Palencia, E., 1987. Homogenization techniques for composite media. Tech. rep., Lecture notes in physics No 272, Springer, Berlin, Germany.
- Saussine, G., 2004. Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast. Phd thesis, Université des sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France.
- Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P. E., Dubois, F., Bohatier, C., Moreau, J. J., 2004. Modelling ballast behaviour using a three-dimensional discrete element method. In : 21st international congress on theoretical applied mechanic. Vol. 24. pp. 331–338.
- Segura, R. J., Feito, F. R., 1998. An algorithm for determining intersection segment-polygon in 3d. Computers and Graphics 22, pp. 587–592.
- Sinha, B. P., Hendry, A. W., 1966. Further investigations of bond tension, bond shear and the effect of precompression on the shear strength of model brick masonry couplets. B.Ceram. R.A .
- Smith, B. S., Carter, C., 1977. Hypothesis for shear failure of brickwork. Journal of Structures ASCE , pp. 1055–1062.
- Stoianovici, D., Hurmuzlu, Y., 2001. A critical study of the applicability of rigid-body collision theory. Journal of Applied Mechanics 63, pp. 307–316.
- Sulem, J., Sab, K., 2002. Modélisation des structures de maçonnerie par un milieu équivalent. In : Sab, K. (Ed.), Approches multi-échelles pour les matériaux et les structures du génie civil. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, France, pp. 107–119.
- Tourenq, C., Denis, A., 1970. La résistance à la traction des roches. etude des essais de traction directe et brésilien. Rapport de recherche No 4. Laboratoires des Ponts et Chaussées , pp. 40.
- Trovalusci, P., Masiani, R., 1999. Materials symmetries of micropolar continua equivalent to lattices. International Journal of Solids and Structures 36 (14), pp. 2091–2108.
- Vaglio, 2000. Jaumont-pierre de soleil, site internet, "<http://www.pierre-de-jaumont.fr/>".
- Van Den Bergen, G., 1999. A fast and robust gjk implementation for collision detection of convex objects. Journal of Graphics Tools 4, pp. 7–25.
- Van Der Pluijm, R., 1993. Shear behaviour of bed joints. In : Hamid, A. A., Harris, H. G. (Eds.), 6th North American Masonry Conference. pp. 125–136.
- Van Der Pluijm, R., 1997. Non-linear behaviour of masonry under tension. Heron 42, pp. 25–54.
- Vardoulakis, I., Sulem, J., 1995. Bifurcation in geomechanics. Blackie Academic & Professional, Glasgow, England , pp. 459.
- Varène, P., 1992. L'enceinte gallo-romaine de Nîmes, éditions du centre national de la recherche scientifique Edition. Editions du centre national de la recherche scientifique. Ouvrage publié avec le concours du ministère de la culture, ISBN 2-222-04723-4.
- Villemus, B., 2004. Etude des murs de soutènement en maçonnerie de pierres sèches. Phd thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, Lyon, France.
- Vitruvius., 1931. De architectura. BookII, V.Frank Granger's translation. Heinemann .

- Wang, Q. Z., Jia, X. M., Kou, S. Q., Zhang, Z. X., Lindqvist, P. A., 2004. The flattened brazilian disc specimen used for testing elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks : analytical and numerical results. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 41, pp. 245–253.
- Wyllie, M. R. J., Gardner, G. H. F., 1958a. The generalized kozeny carman equation part i. *World Oil* 4, pp. 121–126.
- Wyllie, M. R. J., Gardner, G. H. F., 1958b. The generalized kozeny carman equation part ii. *World Oil* 5, pp. 210–228.
- Xu, Z., Wang, X., Chen, X., Sun, J., 2005. A robust algorithm for finding the real intersections of three quadric surfaces. *Computers Aided Geometric Design* 22, pp. 515–530.
- Yasar, E., Erdogan, Y., 2004. Correlating sound velocity with the density, compressive strength and young's modulus of carbonate rocks. *International Journal of Rock mechanics and Mining Sciences* 41, pp. 871–875.



**Résumé :** Cette thèse concerne la modélisation d'ouvrages maçonnés tridimensionnels en grand appareil, précontraints ou comportant un grand nombre de blocs. Ces structures sont des constructions en gros blocs de pierre, éventuellement liés par des joints de mortier, dont les géométries tridimensionnelles ne permettent généralement pas la définition d'un volume élémentaire représentatif. Le comportement mécanique de ces édifices ou structures, peut être étudié par des méthodes qui considèrent le comportement des blocs et leurs interactions avec des blocs voisins, par frottement sec ou en présence de mortier cohésif. Nous avons donc choisi de les modéliser par la méthode des éléments discrets Non Smooth Contact Dynamics. Les monuments étudiés sont des structures en pierres massives, simple appareil régulier (mur) ou irrégulier (pont Julien) et structures précontraintes (escalier, coupôle). D'une part, un nouvel algorithme de détection des contacts a été développé pour gérer les contacts surfaciques, spécifiques aux maçonneries. Diverses applications sur des cas réels, et des comparaisons avec des expériences issues de la littérature, ont montré la robustesse de l'algorithme. Les résultats obtenus par l'analyse des descentes de charges sont cohérents avec les caractères physiques et géométriques des ouvrages considérés. D'autre part, les liaisons de contacts conduisent souvent à un problème statiquement indéterminé au niveau local. Nous avons proposé une méthode de résolution qui traite simultanément tous les noeuds d'une liaison plane. L'étude sur des cas académiques a permis de tester la pertinence de la méthode. Une comparaison a été faite avec la méthode de résolution pré-existante, implémentée dans LMGC90.

---

**Modelling by discrete elements of the mechanical behavior of the three-dimensional built works. Contribution to the definition of planar contact elements.**

**Abstract :** This thesis concerns the modelling of three-dimensional built works in large stone course, pre-stressed or containing a large number of blocks. These structures are constructions made of stone blocks, possibly bound by joints of mortar. Their three-dimensional geometries do not generally allow the definition of a representative elementary volume. The mechanical behavior of these buildings or structures, can be studied by methods which consider the behavior of blocks and their interactions with nearby blocks, by dry friction or in the presence of cohesive mortar. We thus chose to model them by the Non Smooth Contact Dynamics discrete element method. The studied monuments are structures in massive stones, with simple regular course (wall) or irregular course (Julian bridge) and prestressed structures (staircase, cupola). On one hand, a new algorithm of detection of the contacts was developed to manage the planar contacts, specific in masonries. Diverse applications on real cases, and comparisons with experiments described in the litterature, showed the robustness of the algorithm. The results obtained by the analysis of the load distribution are coherent with the physical and geometrical characteristics of the considered works. On the other hand, the computations of contact reactions often lead to a statically indefinite problem at the local level. We proposed a method of resolution which processes simultaneously all the nodes of a flat connection. The study on academic cases allowed to test the relevance of the method. A comparison was made with the method of pre-existent resolution, implemented in the LMGC90 code.

---

**Discipline :** Mécanique

---

**Mots-clés :** Maçonnerie en grand appareil, mécanique non-régulière, détection des contacts, contacts surfaciques, précontrainte, génie civil.

---

**Centre des Matériaux de Grande Diffusion, Pôle Génie Civil  
Ecole des Mines d'Alès, 6 avenue de Clavières, 30319 Alès Cedex**

