



**HAL**  
open science

# Asservissement Visuel à partir d'Images Echographiques. Application à la chirurgie intra-cardiaque.

Marie-Aude Vitrani

► **To cite this version:**

Marie-Aude Vitrani. Asservissement Visuel à partir d'Images Echographiques. Application à la chirurgie intra-cardiaque.. Automatique / Robotique. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00188463

**HAL Id: tel-00188463**

**<https://theses.hal.science/tel-00188463>**

Submitted on 17 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE de DOCTORAT

*présentée à*

L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
- Pierre et Marie Curie -

*par*

**Marie-Aude VITRANI**

*pour obtenir le titre de*  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
*Spécialité ROBOTIQUE*

---

## Asservissement visuel à partir d'images échographiques. Application à la chirurgie intra-cardiaque.

---

*Soutenue le 06 décembre 2006*

*le jury était composé de :*

P. BIDAUD	Professeur - Université Pierre et Marie Curie - Paris 6	<i>Directeur de thèse</i>
P. CHALLANDE	Professeur - Université Pierre et Marie Curie - Paris 6	<i>Examineur</i>
E. DOMBRE	Directeur de recherche - CNRS - LIRMM Montpellier	<i>Président</i>
M. de MATHELIN	Professeur - Université Louis Pasteur - Strasbourg 1	<i>Rapporteur</i>
G. MOREL	Maître de conférences - Université Pierre et Marie Curie - Paris 6	<i>Examineur</i>
J. TROCCAZ	Directrice de recherche - CNRS - TIMC Grenoble	<i>Rapporteur</i>



# Remerciement

Je remercie bien sûr Philippe Bidaud et Guillaume Morel.

Merci à tous les partenaires du projet GABIE, en particulier merci à Etienne Dombre et à Jocelyne Troccaz.

Mes remerciements sont aussi adressés à Pascal Challande et à Michel de Mathelin.

Les expériences in vivo n'auraient pas pu être réalisées sans l'aide de Nicolas Bonnet. Merci à lui.

Merci enfin à Barthélémy, Hubert, Nabil, Samuel et Tobias.



# Résumé

L'objectif principal de ce travail de thèse est de proposer des solutions robotiques pour l'assistance au chirurgien lors d'interventions écho-guidées. Au début du manuscrit, un état de l'art des méthodes de couplage imagerie - robotique pour les applications médicales montre que l'asservissement visuel est une solution de choix pour réaliser cette assistance. Dès lors, notre travail s'est organisé autour de la mise en œuvre d'un système robotique basé sur un asservissement visuel échographique. Ce système permet au chirurgien de sélectionner la position désirée d'un instrument dans une image échographique et de commander un robot pour qu'il déplace automatiquement l'instrument jusqu'à la position spécifiée. L'application considérée est la réparation d'une valve mitrale à cœur battant.

Les principales contributions de ce travail se situent au niveau de la modélisation de l'imageur échographique, de la modélisation du système robotique et de sa commande. La modélisation de l'échographe est faite à partir d'une étude de l'interaction des ultrasons avec un instrument de chirurgie. Cette étude permet d'établir un modèle géométrique du système instrument+sonde mais aussi de proposer une procédure d'estimation paramétrique par optimisation au sens des moindres carrés. Le système robotique est quant à lui modélisé cinématiquement. Une analyse de la transmission des vitesses permet de définir la configuration relative de l'instrument et de la sonde ainsi que la géométrie de l'instrument de sorte que le système soit commandable. Plusieurs lois de commande à découplage par modèle cinématique inverse sont alors proposées. Elles sont évaluées à travers des études de stabilité par la méthode indirecte de Lyapunov et des simulations. De plus, la commande du système est robustifiée grâce à une adaptation en ligne des gains. Enfin, le système proposé est mis en œuvre et validé à travers des expériences *in vitro* et *in vivo* sur cochon, à cœur battant.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Conception et modélisation d'un système échoguidé d'endochirurgie</b>	<b>25</b>
Introduction . . . . .	25
1.1 Fonctionnement général d'un échographe . . . . .	26
1.1.1 Principe de fonctionnement de la sonde échographique . . . . .	26
1.1.2 Paramètres de l'onde ultrasonore . . . . .	27
1.1.3 Formation de l'image échographique . . . . .	28
1.2 Visualisation de l'instrument avec une sonde échographique . . . . .	31
1.2.1 Choix d'un matériau échogène . . . . .	31
1.2.2 Choix de l'angle d'observation de l'instrument . . . . .	34
1.3 Modélisation géométrique . . . . .	37
1.3.1 Hypothèse de modélisation . . . . .	37
1.3.2 Mise en équation pour un mors . . . . .	38
1.3.3 Vérification expérimentale . . . . .	39
1.4 Commandabilité d'un instrument endochirurgical . . . . .	47
1.4.1 Analyse générale des singularités cinématiques . . . . .	48
1.4.2 Géométrie relative des mors de l'instrument . . . . .	52
1.5 Système pour la chirurgie mini-invasive guidée par échographie . . . . .	53
Conclusion . . . . .	56
<b>2 Asservissement visuel</b>	<b>57</b>
Introduction . . . . .	57
2.1 Principe de l'asservissement visuel . . . . .	58
2.1.1 Principe général . . . . .	58
2.1.2 Exemple d'application : un pendule à deux degrés de liberté . . . . .	61
2.1.3 Conclusion . . . . .	66
2.2 Asservissement visuel par contrôle de points dans l'image . . . . .	67
2.2.1 Loi de commande . . . . .	67
2.2.2 Étude de stabilité . . . . .	69
2.2.3 Conclusion . . . . .	72
2.3 Asservissement visuel sans connaissance de la configuration géométrique du système . . . . .	72
2.4 Asservissement visuel avec contrôle de l'orientation de l'instrument . . . . .	78
2.4.1 Loi de commande . . . . .	78



2.4.2	Étude de stabilité et résultats de simulation . . . . .	82
2.5	Asservissement visuel avec contrôle explicite de l'écartement des mors . . .	87
	Conclusion . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale du système et application à la chirurgie de la valve mitrale</b>	<b>91</b>
	Introduction . . . . .	91
3.1	Mise en œuvre expérimentale du système robotisé . . . . .	91
3.1.1	Système de manipulation . . . . .	91
3.1.2	Système imageur . . . . .	98
3.1.3	Procédure d'étalonnage du système . . . . .	101
3.2	Validation de l'asservissement visuel in vitro . . . . .	103
3.3	Application à la chirurgie de la valve mitrale . . . . .	109
3.3.1	Description de l'intervention considérée . . . . .	109
3.3.2	Expériences in vivo . . . . .	113
	Conclusion . . . . .	116
	<b>Conclusion générale</b>	<b>121</b>
	<b>Publications</b>	<b>125</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>
	<b>Annexes</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique</b>	<b>133</b>
A.1	Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique pour un instrument à un mors . . . . .	133
A.2	Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique pour un instrument à deux mors . . . . .	134
<b>B</b>	<b>Commandabilité du vecteur <math>u</math></b>	<b>137</b>
<b>C</b>	<b>Modélisation cinématique</b>	<b>141</b>
C.1	Modèle cinématique pour un mors . . . . .	141
C.2	Calcul du jacobien . . . . .	143
C.3	Modèle cinématique inverse . . . . .	144
<b>D</b>	<b>Preuves de Stabilité</b>	<b>149</b>
D.1	Preuve de la propriété 4 . . . . .	149
D.2	Preuve de la propriété 5 . . . . .	150

# Introduction

## Contexte et problématique

Les systèmes d'imagerie ultrasonore ont été introduits en médecine dans les années 1950. Ces appareils produisent des images à haute résolution en temps réel. Comme les rayons X, les systèmes à ultrasons permettent de visualiser l'intérieur du corps tout en étant placés à l'extérieur. Les ultrasons, contrairement aux rayons X, ne présentent aucun risque connu pour l'organisme. Les sondes échographiques sont donc utilisées le plus souvent possible. Dans un tout premier temps, les ultrasons ont été utilisés en médecine pour détecter les tumeurs cérébrales et mammaires. Mais ce n'est que lorsque les systèmes d'imagerie ultrasonore ont permis de visualiser les tissus mous que l'échographie a connu un véritable essor. Depuis, de très nombreux systèmes ont été développés, de plus en plus petits, de plus en plus précis.

Si aujourd'hui de nombreux laboratoires travaillent sur la mise au point d'une échographie à trois dimensions, les systèmes commercialisés ne permettent de visualiser qu'une coupe en deux dimensions du volume observé. Pour pouvoir interpréter correctement les images obtenues, il faut donc savoir dans quelle position et dans quelle orientation la sonde est placée sur le corps. Le praticien reconstruit alors mentalement le volume qu'il est entrain d'observer à partir des déplacements qu'il fait avec la sonde. De ce fait, l'échographie sert principalement pour établir un diagnostic. Cependant, elle est parfois utilisée pour le guidage d'instruments lors de procédures interventionnelles. On parle alors d'interventions «échoguidées». Il faut lors de ces interventions que l'instrument et la cible soient tous les deux visibles dans l'image pendant toute la durée de l'intervention. Ces interventions restent majoritairement limitées à des ponctions, [Angelini 1999]. Deux types de techniques sont possibles.

La plupart du temps, le chirurgien utilise une sonde classique à laquelle est fixé un guide au travers duquel est insérée l'aiguille de ponction. L'aiguille est mécaniquement contrainte à rester dans le champ des ultrasons et donc à être visible dans l'image. Après visualisation de la cible par les techniques normales, le chirurgien maintient la sonde dans sa position optimale et l'aiguille est introduite dans le guide et enfoncée jusqu'à la cible, figure 1. Parfois, le chirurgien préfère la technique dite «main libre», [Fornage 2004]. Dans ce cas, il n'utilise pas de guide pour insérer l'aiguille, figure 2. Il peut alors réorienter l'aiguille dans l'image en cours d'intervention. Ces interventions requièrent un entraînement long



FIG. 1 – Guide pour l'aiguille lié à la sonde échographique

et une dextérité excellente pour que le praticien arrive à maintenir manuellement l'instrument et la cible tous deux visibles dans l'image. En effet, il manipule la sonde d'une main et de l'autre il doit déplacer l'aiguille vers la cible de sorte que l'aiguille et la cible restent dans le même plan de coupe : le faisceau d'ultrasons. Toute perception de la profondeur est perdue ce qui rend difficile la coordination «main-oeil».



FIG. 2 – Intervention échoguidée «main libre »

Les interventions échoguidées sont donc restreintes aux gestes ne nécessitant que deux degrés de liberté : l'inclinaison et la pénétration d'une aiguille.

Pour faciliter la manipulation sous échographie, et ainsi permettre des interventions plus complexes, une solution possible consiste à utiliser des moyens robotisés. En particulier, dans le travail proposé ici, on s'intéresse à l'automatisation de la coordination «main/oeil». D'un point de vue pratique, on cherche à utiliser les images échographiques pour permettre de déplacer vers une cible un instrument manipulé par un robot.

## Robotique et imagerie médicale

Dans le domaine médical, la plupart des systèmes robotiques font intervenir des images obtenues par endoscopie, rayons X, IRM (Imagerie par Résonance Magnétique), fluoroscopie, échographie, etc. [Taylor 2003, Peters 2000].

La collaboration entre système imageur et robot peut se faire de trois façons différentes qui peuvent se combiner :

1. par l'intermédiaire du praticien : l'imageur et le robot sont deux outils utilisés simultanément mais indépendamment par le praticien ; en particulier, le robot n'utilise pas l'information fournie par l'imageur, ni directement ni indirectement.
2. de façon indirecte, par une reconstruction en trois dimensions (3D) : l'imageur est exploité, en préopératoire et/ou en per-opératoire, pour reconstruire des informations 3D (une localisation relative ou même un modèle géométrique des organes) et le robot travaille à partir de ces informations 3D sur lesquelles il doit se recalculer.
3. de façon directe par asservissement visuel : la reconstruction 3D est évitée en spécifiant les déplacements directement dans l'image.

### Collaboration par l'intermédiaire du praticien

Dans de nombreux dispositifs, l'image n'est pas liée directement au système robotique. Le retour visuel est alors utilisé par le praticien comme dans une intervention non robotisée, pour établir un diagnostic ou pour observer le site de l'intervention.

C'est le cas dans les systèmes télémanipulés (ou manipulés à distance) et dans certains systèmes comanipulés (c'est-à-dire pour lesquels la commande est partagée entre le robot et le praticien), [Low 2004].

Les systèmes de téléopération ont pour objectifs de permettre des soins ou des examens à distance. Ils sont constitués d'un robot maître manipulé par un chirurgien et d'un robot esclave qui recopie les mouvements du maître.

Une première utilisation des systèmes de téléopération permet de déplacer les instruments chirurgicaux. Parmi ces dispositifs, on trouve les deux systèmes commercialisés et utilisés en routine clinique : ZEUS (ex-Computer Motion Inc.) et Da Vinci (Intuitive Surgical Inc.) [Ghodoussi 2002, Guthart 2000], figure 3. Le robot esclave est utilisé pour déplacer des instruments chirurgicaux. Dans ces deux systèmes, le chirurgien pilote les instruments à partir d'une console éloignée de la table d'intervention pendant qu'il observe le site chirurgical par imagerie endoscopique comme il le ferait en chirurgie mini-invasive manuelle. Un état de l'art des systèmes de téléopération en chirurgie est présenté dans [Low 2004].

Une autre modalité d'utilisation consiste à déplacer non plus des instruments mais l'imageur lui-même. L'objectif est alors par exemple de pratiquer un examen à distance. Le plus



(a) Système Zeus de ex-Computer Motion

(b) Robot esclave du système Da Vinci de Intuitive Surgery

FIG. 3 – Systèmes de télé-chirurgie utilisés en routines cliniques

célèbre de ces systèmes est le porte endoscope Aesop (Automatic Endoscopic System for Optimal Positioning) de Computer Motion, [Uecker 1994]. Un autre porte-endoscope, le système LER (Robot porte-Endoscope Léger) est décrit dans [Berkelman 2003]. Ces deux robots permettent de déplacer un endoscope en fonction d'instructions vocales donnés par le chirurgien.

La téléopération est aussi utilisée pour manipuler d'autres systèmes imageurs, en particulier des sondes échographiques. Le système MIDSTEP (Multimedia Interactive DemonStrator TElePresence) est un dispositif dont l'objectif était de montrer la possibilité d'utiliser de la télé-échographie pour assister un chirurgien lors d'une intervention télé-échoguidée, [de Cunha 1998]. Les robots OTELO (mOBile Tele-Echography with an ultra Light rObot) et TER (Télé-Echographie Robotisée) sont quant à eux des manipulateurs de sondes échographiques pour le diagnostic à distance [Vilchis 2002, Delgorge 2005], figure 4.

Dans les systèmes de comanipulation, le praticien et le robot manipulent ensemble un même instrument. Un des premiers systèmes de comanipulation est le robot passif PA-DyC (Passive Arm with Dynamics Constraints). Ce système permet de réaliser une ponction péricardique. Le chirurgien manipule l'aiguille, tandis que le robot interdit certains déplacements en fonction d'un geste établi au préalable [Schneider 2001]. Dans le système Hippocrate, [Pierrot 1999], une sonde échographique est déplacée par le praticien et le robot le long des artères. La comanipulation est utilisée pour que le praticien puisse positionner de façon intuitive la sonde à des positions qu'il choisit et qui définissent les points de passage du robot. Le robot permet alors de faire le déplacement souhaité en garantissant un effort constant sur la peau du patient. La qualité des images échographiques se trouve ainsi améliorée.

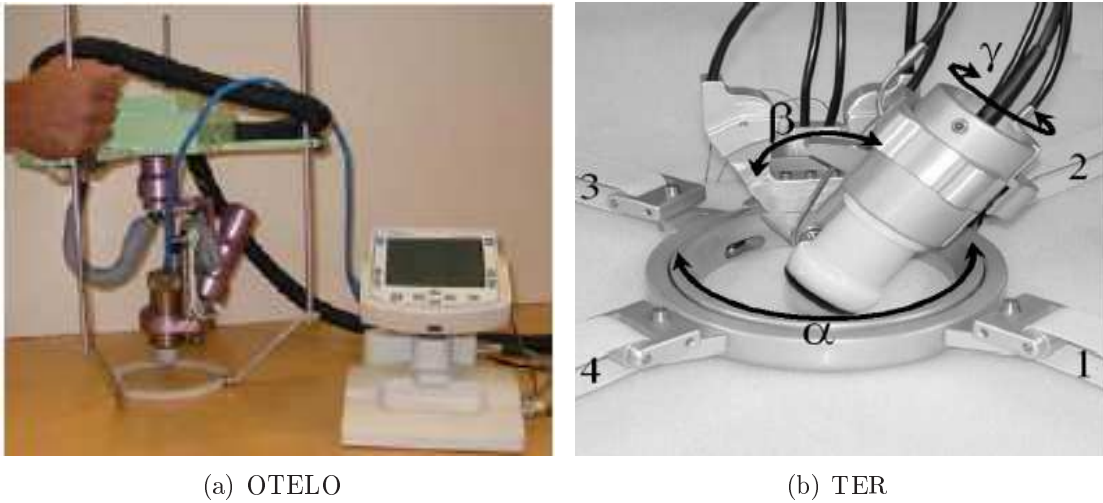


FIG. 4 – Exemples de robots esclaves porteurs d'un sonde échographique

Dans tous ces systèmes, l'image sert simplement à fournir une vue des organes et/ou des instruments au chirurgien exactement comme pour les interventions manuelles. Ces systèmes ne permettent pas de guider un instrument à partir d'images. En effet, l'image n'est pas utilisée pour contrôler les déplacements d'un robot. En particulier, les systèmes télémanipulés ou comanipulés ne permettent pas d'améliorer les capacités de synchronisation main-oeil par rapport à un geste réalisé manuellement. Ce type de configuration n'est donc pas adapté au problème considéré.

### Collaboration indirecte : la reconstruction 3D

A la différence des systèmes précédents, on considère ici des dispositifs de planification et de reconstruction qui exploitent des informations 3D extraites des images pour déterminer les déplacements du robot.

#### Un modèle 3D du patient pour établir une planification pré-opératoire

Dans les systèmes de planification, l'idée est d'acquérir des images pré-opératoires pour établir un modèle du patient, (figure 5). La trajectoire de l'instrument et donc la commande du robot peuvent être déterminées en référence à ce modèle pour planifier un geste. Ces systèmes supposent qu'entre le moment où le modèle est établi et l'opération du patient, les données acquises ne varient pas.

Au moment de l'intervention, le modèle est alors recalé sous l'hypothèse de modèle rigide du patient. Le recalage peut se faire soit par palpation (par exemple de la surface des os), soit en installant des marqueurs sur les différentes parties du système : instrument, imageur, robot, voire structure anatomique. Ces marqueurs peuvent être passifs ou actifs

(magnétiques, laser, etc.). Les différentes transformations géométriques sont alors calculées à partir des mesures obtenues grâce aux marqueurs. Les mouvements du robot étant définis avant l'intervention, le robot ne peut pas intégrer les modifications de l'environnement dans lequel il évolue et modifier son comportement en conséquence.

Ces systèmes ont été principalement développés pour l'orthopédie [Kazanzides 1995, Siebert 2001, Jakopcic 2003] et la neurochirurgie lors d'interventions n'entraînant pas d'affaissement du cerveau [Lavallée 1992] (figure 6). Dans ces deux types de chirurgie, l'hypothèse de corps rigides (os, crâne) est facilement vérifiable.

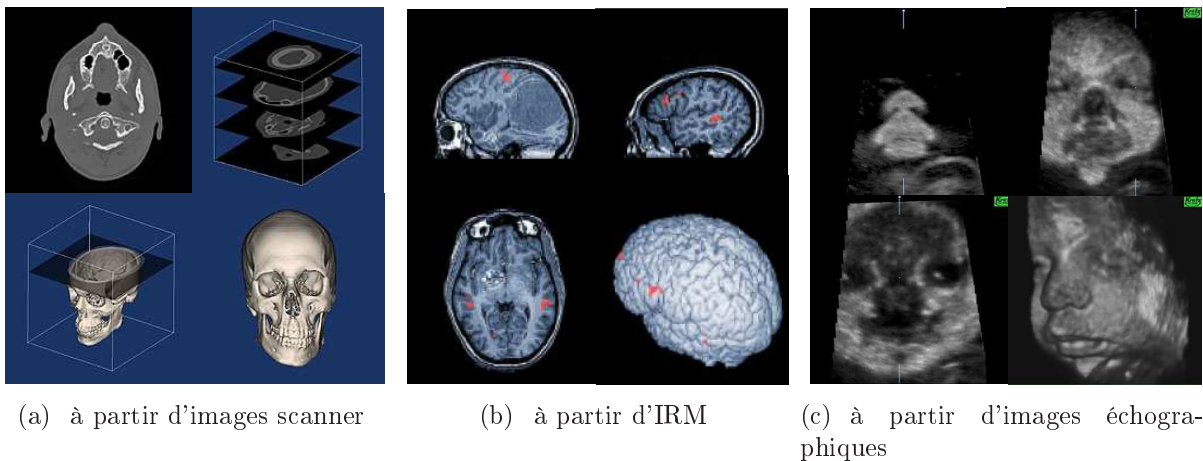


FIG. 5 – Reconstruction 3D

Ces travaux utilisent principalement les images obtenues par rayons X ou par résonance magnétique. Dans [Boctor 2004, Phee 2005], les dispositifs étudiés utilisent des images échographiques. Dans [Boctor 2004], deux robots sont utilisés. Un premier robot manipule la sonde, tandis qu'un second robot manipule une aiguille. Dans un premier temps, la sonde est déplacée par le robot, les images et la position de la sonde sont enregistrées. Le volume exploré est alors reconstruit en trois dimensions. A partir de l'image 3D reconstruite, le point d'insertion de l'aiguille, son orientation et sa pénétration sont déterminés. Le second robot peut alors positionner l'aiguille. Lors de tests *in vitro*, l'erreur de positionnement dans l'image est de l'ordre de 3 mm ce qui est meilleur que la précision obtenue lors de gestes réalisés manuellement. Le système proposé dans [Phee 2005] permet de réaliser une biopsie de la prostate. Le modèle 3D de la prostate est reconstruit à partir des images ultrasonores. L'aiguille est mécaniquement liée au porteur de la sonde ce qui permet d'éviter l'ajout de localisateur (la liaison mécanique sonde/aiguille étant de géométrie connue). Le chirurgien indique sur le modèle du patient le point d'entrée de l'aiguille et la cible à atteindre. Le système calcule alors le déplacement à effectuer par l'aiguille. Les tests sur cadavres montrent que l'erreur de positionnement finale est de l'ordre de 2,5 mm.

Les principales limites de ces systèmes sont que le recalage se fait sous l'hypothèse d'or-

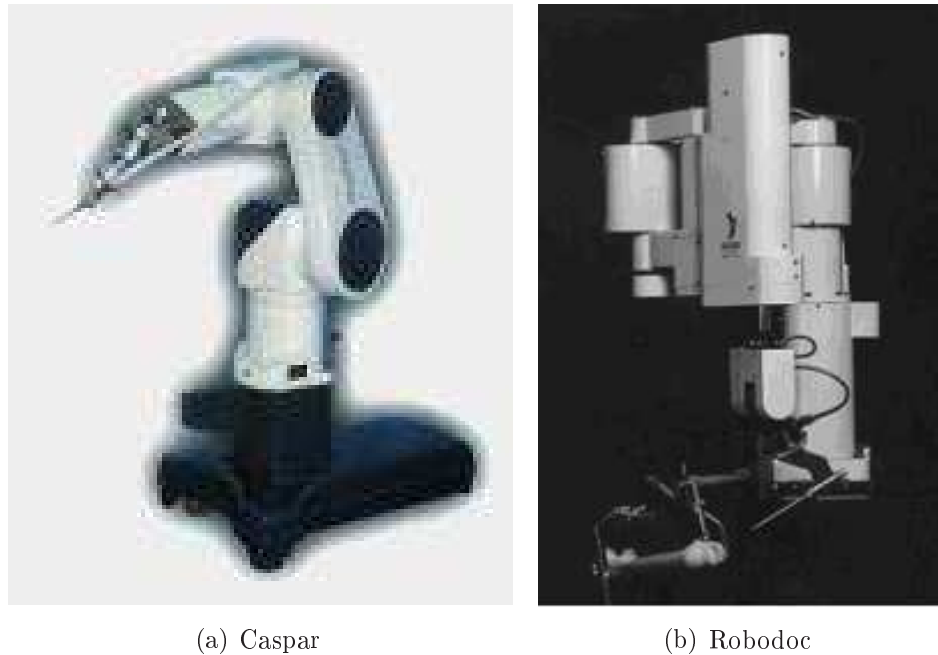


FIG. 6 – Exemples de systèmes d’orthopédie avec reconstruction 3D, planning et recalage

gane(s) rigide(s) et fixe(s) et que la trajectoire du robot est définie en pré-opérateur. Le robot ne réagit donc pas en fonction de son environnement lors de la réalisation du geste. De plus, les erreurs de reconstruction géométriques sont cumulées avec les différents dispositifs de localisation ce qui entraîne d’importantes erreurs sur le positionnement final du robot. Ces erreurs sont inacceptables pour les interventions de chirurgie dans lesquelles les cibles à atteindre sont petites et/ou mobiles.

### Une reconstruction 3D temps réel

Pour ne pas être contraint par la condition de corps rigides, quelques systèmes utilisent les images pour faire, en temps réel, une reconstruction 3D de la position à atteindre et non plus pour établir un modèle des organes en pré-opérateur [Schweikard 1998]. La trajectoire peut ainsi être adaptée au cours de l’intervention. Dans ces systèmes, la cible à atteindre est détectée et suivie automatiquement dans une image. Un modèle de l’imageur permet alors de reconstruire la position 3D de la cible dans un repère lié à l’imageur. On connaît donc la position de la cible par rapport à l’imageur. Un système de localisation permet de connaître les transformations géométriques entre l’imageur et le robot. On peut alors calculer la position 3D de la cible dans un référentiel lié au robot. Cette position est ensuite envoyée au contrôleur du robot. Dans ces systèmes, la trajectoire est recalculée à chaque image ce qui permet au robot de tenir compte de l’environnement (mouvements des organes par exemple).





FIG. 7 – Cyberknife

Le dispositif CyberKnife de Accuray Inc., (figure 7) est utilisé en routine clinique pour la radiochirurgie cérébrale à partir d'images rayon X, [Cleary 2005]. La tumeur est détectée en temps réel dans l'image ce qui permet d'adapter la position du robot en fonction d'éventuels mouvements du patient. Le système CTBOT (figure 8) s'appuie lui aussi sur les images rayon X. Il comprend des marqueurs visibles dans l'image et de géométries connues ce qui permet de reconstruire la position de l'effecteur du robot, [Maurin 2005]. Ce système permet de positionner une aiguille à l'endroit indiqué dans l'image par le chirurgien. La pénétration de l'aiguille est réalisée manuellement ou par téléopération tandis que le robot contraint la direction de l'insertion.

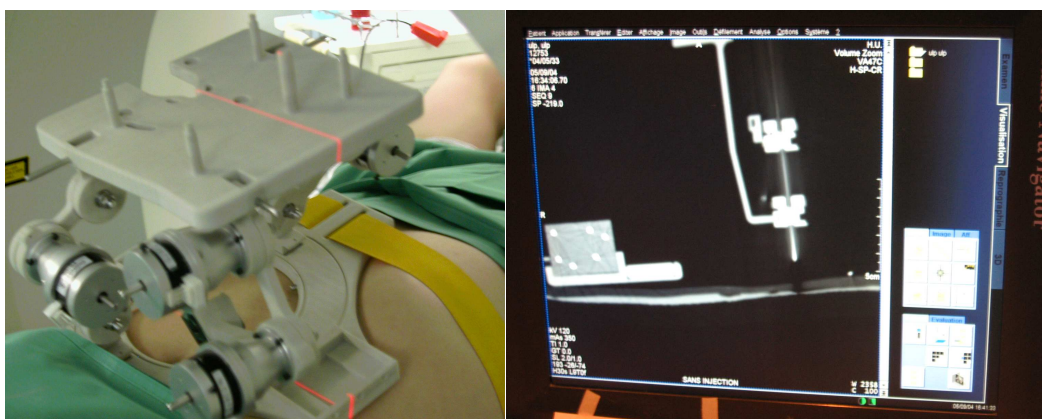


FIG. 8 – Le robot CTBOT

Le robot RPL (Robot de Ponction Léger) est conçu selon un principe similaire au CTBOT, pour guider un instrument à partir d'images à résonance magnétique, figure 9. L'erreur de positionnement de ce système lors d'expériences sur animal est de l'ordre du

centimètre, [Taillant 2004]. Dans [Stoll 2001, Megali 2001], les systèmes présentés sont des manipulateurs qui déplacent un instrument vers une cible repérée dans une image échographique. L'erreur moyenne de positionnement dans l'image obtenue lors d'expériences in vitro est de l'ordre de 2 mm pour chacun de ces deux systèmes.

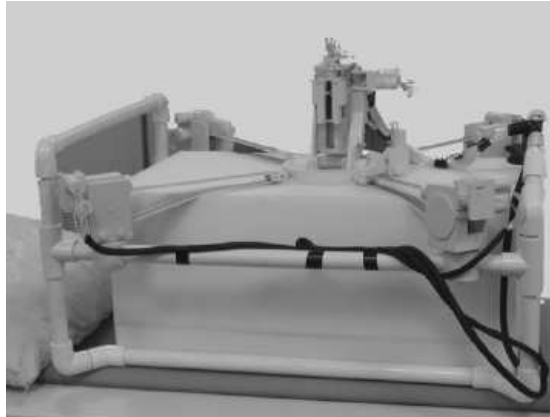


FIG. 9 – Robot de Ponction Léger (RPL)

Contrairement aux dispositifs utilisés pour reconstruire un modèle des organes, ces robots permettent de réaliser une tâche de positionnement lors d'intervention sur des organes déformables. Par contre, la position du robot est encore une fois commandée à partir d'une mesure 3D obtenue par traitement d'image et étalonnage du système (recalage des divers appareils). La précision finale du positionnement reste donc un problème pour les systèmes utilisant une reconstruction 3D temps réel comme pour les systèmes de planification.

## Asservissement visuel : spécification des déplacements dans l'image

Dans les systèmes de positionnement par imagerie, la cible à atteindre est définie directement dans l'image et non pas comme une position 3D. Une façon de s'affranchir des erreurs liées aux imprécisions d'un recalage géométrique consiste à spécifier les déplacements directement dans l'image, sans passer par une reconstruction 3D de l'environnement. C'est le principe de l'asservissement visuel : dans l'image, on détecte en temps réel la position courante ; on spécifie la position désirée dans l'image ; l'erreur de position mesurée dans l'image est alors utilisée pour produire le déplacement vers la position désirée.

L'asservissement visuel est une technique de positionnement désormais classique en robotique pour des systèmes utilisant des images provenant de caméras, [Chaumette 2002]. Ce type de commande garantit que l'erreur finale de position est nulle dans l'image si la stabilité est obtenue.

De façon tout à fait habituelle, pour les asservissements visuels à base de caméras monoculaires, on distingue trois types d'asservissements visuels selon que le retour visuel est

un vecteur de mesures 3D, un vecteur de données directement mesurées dans l'image ou un vecteur «hybride»[Chaumette 2002] :

- Si le vecteur de mesure est constitué d'informations 3D obtenues par reconstruction à partir de l'image, on parle d'«asservissement visuel 3D». Les déplacements sont contrôlés dans l'espace euclidien. Il présente de bonnes propriétés de découplage. En effet, puisqu'il utilise des mesures 3D, les orientations et les translations peuvent facilement être découplées.
- Dans le deuxième mode d'asservissement dit «asservissement visuel 2D», le retour visuel est un vecteur de mesures entièrement spécifié dans l'image. Cette commande ne nécessite donc aucun modèle a priori de la scène ou des objets. Elle est donc moins sensible aux erreurs de modélisation qu'une boucle d'asservissement visuel 3D. Par ailleurs, elle permet de contrôler les trajectoires dans l'image et non les trajectoires dans l'espace comme avec un asservissement visuel 3D. Ce mode d'asservissement est particulièrement utile dans le domaine médical. En effet, dès lors que la tâche à réaliser est un positionnement vis à vis d'organes déformables, la possibilité de s'affranchir d'un modèle du patient est un avantage indéniable.
- Enfin, lorsque le retour visuel contient à la fois des informations 3D et 2D, on parle d'«asservissement visuel hybride». Les informations 3D et 2D utilisées sont choisies de sorte que la commande présente à la fois un bon découplage et une faible sensibilité aux erreurs de reconstruction. En particulier, l'«asservissement visuel 2,5D »consiste à réaliser l'asservissement des orientations en 3D et celui des translations en 2D.

Le développement de la robotique médicale conduit à transposer ces techniques pour des systèmes utilisant des imageurs autres que les caméras. La principale limitation, outre les difficultés liées au traitement d'image, vient du fait que peu de systèmes d'imagerie sont temps réel, [Morel 2005]. Il n'existe pas, pour l'instant, de systèmes véritablement asservis sur des images rayons X ou IRM. Le système développé au Centre de Protonthérapie d'Orsay (CPO), illustré sur la figure 10, peut cependant être vu comme un asservissement séquentiel puisque le problème du positionnement est entièrement défini dans l'image, [Mazal 1997].

Dans ce système, un robot déplace un patient pour le positionner vis à vis d'un faisceau de protons. La position courante du patient est repérée sur une image rayon X. L'image est alors comparée à une image construite en per-opératoire représentant la position désirée du patient. L'erreur entre les deux images est utilisée pour déplacer le robot et corriger la position du patient. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que le patient soit correctement positionné, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'erreur entre les deux images soit nulle.

Un système équivalent, du point de vue de l'asservissement visuel, est proposé dans [Navab 2000]. Les informations obtenues dans des images fluoroscopiques sont utilisées pour positionner une aiguille de biopsie vis à vis d'une structure anatomique.

Les systèmes commandés par asservissement visuel direct utilisent pour la plupart des images endoscopiques, [Casals 1996, Wei 1997, Nakamura 2001, Krupa 2003, Ginhoux 2005].

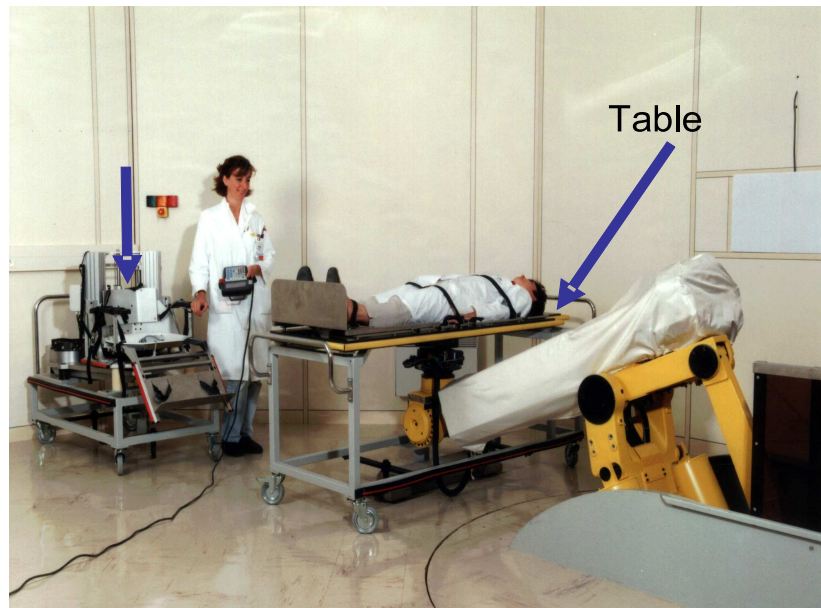


FIG. 10 – Dispositif de positionnement d'un patient au CPO

Quelques rares travaux présentent des systèmes asservis sur des images échographiques, [Salcudean 2000, Hong 2004, Krupa 2006].

Dans [Casals 1996, Wei 1997], deux robots commandés par asservissement visuel 3D sont présentés. Ces dispositifs ont pour objectif de manipuler un endoscope de façon à ce que les instrument apparaissent au centre de l'image. On obtient ainsi un système de suivi automatique des instruments. Pour reconstruire la position des instruments par rapport à l'endoscope, il suffit de disposer d'un modèle géométrique des instruments et des paramètres d'étalonnage de la caméra.

Le système proposé par [Krupa 2003] est un système de récupération d'outil, figure 11. Il utilise pour cela un asservissement visuel hybride. Un dispositif de pointage laser se trouvant dans l'axe de l'instrument permet de projeter un motif laser sur les organes. La distance entre organes et instrument est alors reconstruite à partir des coordonnées dans l'image du motif laser et de celles de marqueurs lumineux fixés sur l'extrémité de l'instrument.

Enfin, un grand nombre de dispositifs utilisent l'asservissement visuel 2D. Ce type d'asservissement permet de s'affranchir des connaissances a priori de la géométrie de la scène et est donc particulièrement adapté aux applications médicales. La majorité de ces systèmes utilise l'asservissement visuel pour déplacer l'imageur vis à vis d'une structure anatomique, d'un instrument ou d'un fantôme. Les systèmes proposés par [Ginhoux 2005, Nakamura 2001, Salcudean 2000] sont des systèmes permettant de faire une compensation visuelle de mouvements physiologiques, figure 12. L'imageur se déplace automatiquement de sorte que l'image de la structure suivie reste fixe. L'objectif de ces dispositifs est de renvoyer au praticien une image stabilisée qui lui permette de pratiquer



FIG. 11 – Système asservi sur des images endoscopiques [Krupa 2003]

son geste sur un organe virtuellement immobile.

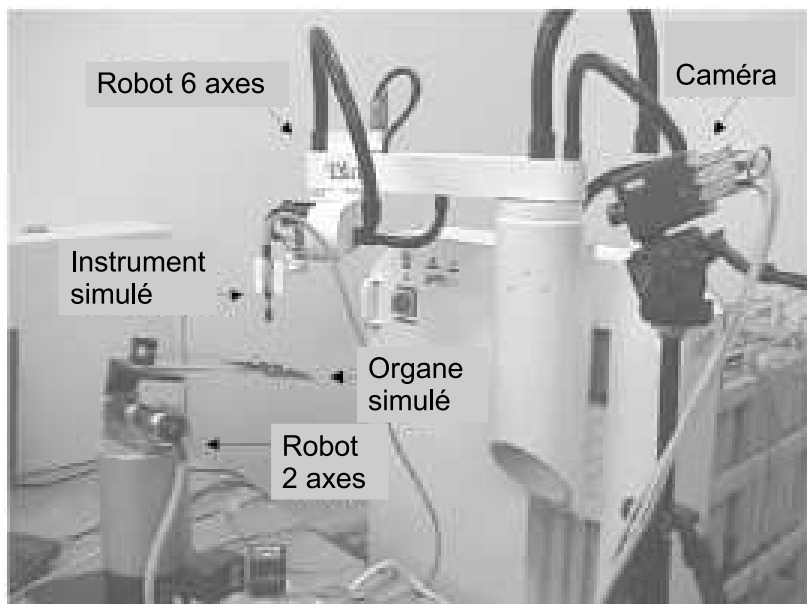


FIG. 12 – Banc d'essai de compensation de mouvements par asservissement sur des images endoscopiques [Ginhoux 2005]

Dans [Ginhoux 2005, Nakamura 2001], un retour visuel endoscopique est utilisé pour compenser les battements du cœur et les mouvements induits par la respiration. Dans [Salcudean 2000], un porteur de sonde échographique télémanipulé est présenté, figure 13(a). Sa commande est partagée entre le chirurgien et une boucle d'asservissement visuel. Cette boucle permet de suivre automatiquement des primitives extraites dans une région d'intérêt qui correspond à une structure anatomique donnée (par exemple : l'artère carotide). Dans [Krupa 2006] l'asservissement visuel est encore une fois utilisé pour déplacer l'imageur, figure 13(b). La commande permet de positionner une sonde échographique par rapport à un fantôme dont la géométrie est connue. Ce système permet d'établir une procédure d'étalonnage pour les sondes échographiques 3D.

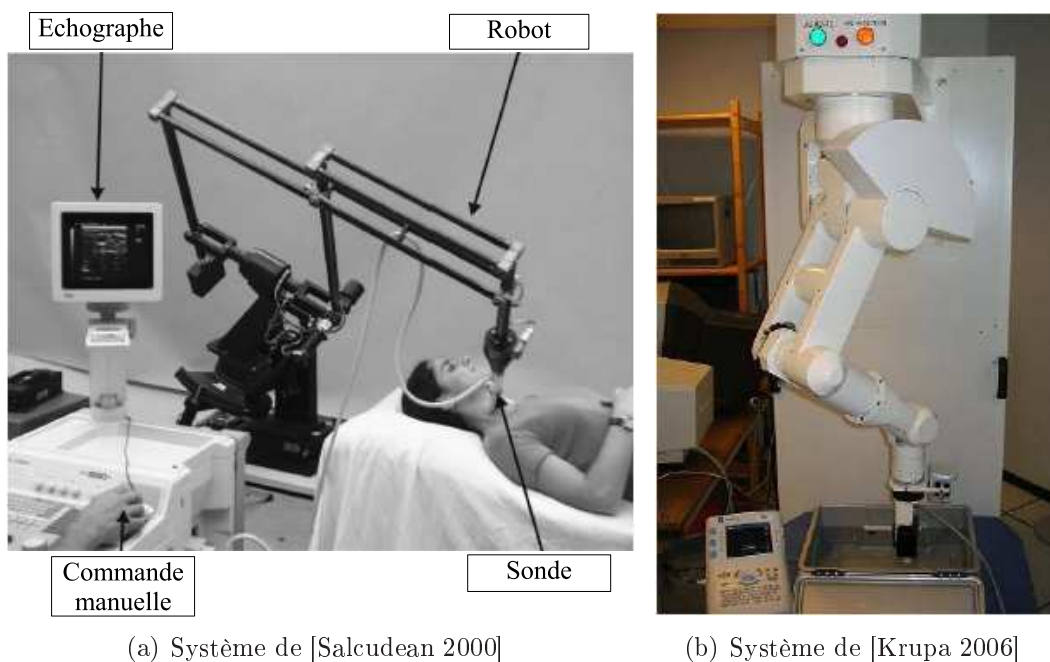


FIG. 13 – Exemples de systèmes asservis sur des images échographiques

Les deux dispositifs suivants quant à eux, utilisent l'asservissement visuel 2D pour déplacer les outils (instruments, endoscopes, etc.).

Dans [Uecker 1995] un endoscope est manipulé de sorte que les instruments apparaissent centrés dans l'image. Le déplacement de l'endoscope est réalisé en utilisant les coordonnées dans l'image de marqueurs colorés placés sur les instruments.

Enfin, un système de guidage d'instrument par asservissement visuel est proposé dans [Hong 2004]. Ce système permet de guider automatiquement une aiguille lors d'une cholécystostomie percutanée. Il est constitué d'une sonde échographique et d'un manipulateur d'aiguille à deux degrés de liberté. L'aiguille est mécaniquement contrainte à rester dans le plan échographique. Son orientation et sa pénétration sont commandées automatiquement grâce à une boucle d'asservissement visuel 2D dont l'objectif est de placer la pointe de l'aiguille à l'intérieur d'une cible prédéfinie. Dans ce système, puisque l'aiguille et la

sonde sont mécaniquement liées, il n'est pas nécessaire de disposer d'équipement supplémentaire pour localiser la sonde par rapport au manipulateur. Cependant, cette recherche ne répond qu'au cas particulier de tâches planes.



FIG. 14 – Système de guidage d'instrument asservis sur des images échographiques [Hong 2004]

## Contenu de cette thèse

### Système proposé

L'objectif est de guider un instrument à partir d'images échographiques pour réaliser des tâches complexes. L'application chirurgicale choisie est une intervention intracardiaque à cœur battant : la réparation de la valve mitrale.

Le système proposé est un système robotique commandé par asservissement visuel 2D sur des images échographiques.

Le principe de l'asservissement visuel fondé sur l'imagerie échographique est représenté sur la figure 15.

La synthèse du contrôleur utilise les méthodes classiques d'asservissement visuel basé sur un modèle, [Hager 1994]. Avec un tel dispositif, le chirurgien peut sélectionner une position désirée de l'instrument en cliquant dans l'image. L'erreur dans l'image entre la position désirée et la position courante de l'instrument (calculée en temps réel) est alors utilisée pour commander le déplacement de l'instrument.

La coordination main/œil est ainsi réalisée de façon automatique et l'erreur finale de positionnement dans l'image est toujours nulle.

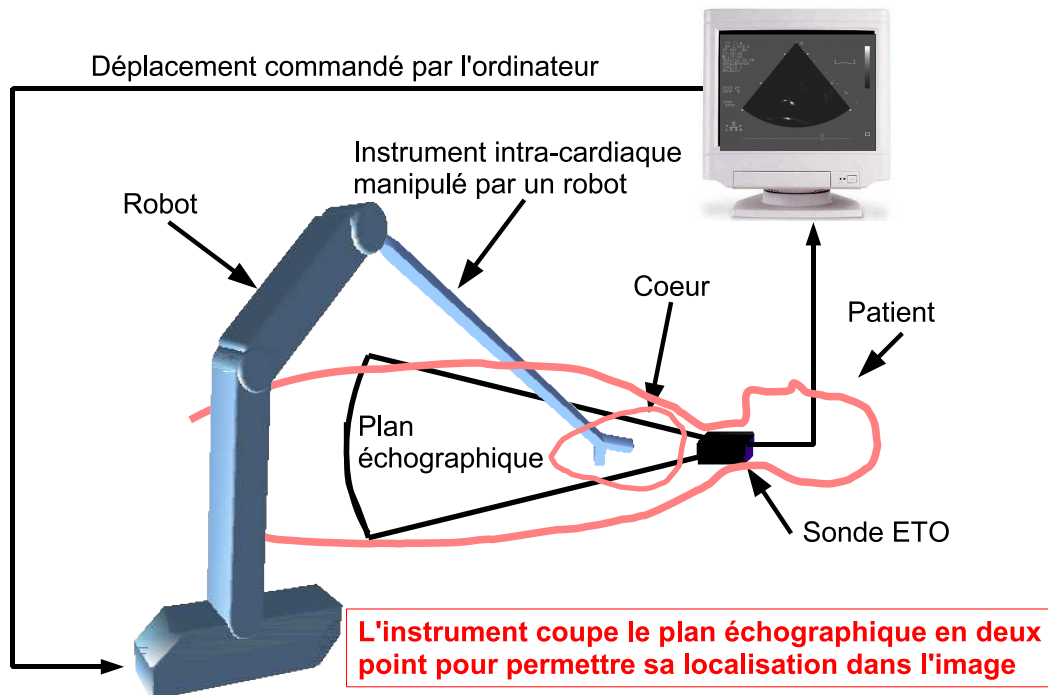


FIG. 15 – Description du système

## Articulations de la thèse

Cette thèse, en plus de l'introduction et de la conclusion, comporte trois chapitres.

Dans le chapitre 1, les modèles nécessaires à la mise en œuvre du système sont présentés. Dans un premier temps, les principes physiques et les techniques utilisés pour obtenir des informations visuelles à partir d'ultrasons sont décrits. Ensuite, l'interaction entre un faisceau d'ultrason et un instrument de chirurgie est étudiée. Cette étude permet de déterminer une configuration entre la sonde et l'instrument permettant de guider ce dernier à partir de sa trace dans l'image échographique. Elle permet aussi de proposer une hypothèse (validée expérimentalement) pour la modélisation de l'interaction sonde/instrument. Il convient alors de choisir la géométrie relative des mors de l'instrument de sorte que tous les degrés de liberté de l'instrument puissent être contrôlés à partir de sa trace dans l'image ultrasonore. Pour cela, les singularités cinématiques d'un système de deux droites coupant un plan sont déterminées. Enfin, un système pour le guidage d'un instrument endochirurgical à partir d'images échographiques est proposé.

Le chapitre 2 traite du problème de la commande pour le guidage de l'instrument. Dans un premier temps, une brève présentation des techniques d'asservissement visuel est proposée. Elle est illustrée par un exemple d'application simple (un pendule à deux degrés



de liberté). Ensuite, ces principes sont appliqués à la chirurgie mini-invasive sous échographie. Plusieurs lois de commande sont évaluées (par des analyses de stabilité et de robustesse ainsi que par des simulations) afin de déterminer une loi de commande robuste pour le guidage par échographie d'un instrument de chirurgie mini-invasive.

Enfin, le chapitre 3 est consacré à la mise en œuvre expérimentale du système et à son application à la chirurgie intracardiaque. Le système manipulateur et la commande permettant de respecter la contrainte liée au trocart sont présentés dans une première partie. Puis le système imageur ainsi que les algorithmes de traitement d'images sont décrits. Ensuite, une procédure d'identification per-opératoire de la transformation entre la sonde et la base du robot est proposée. Le système est alors évalué à travers des expériences *in vitro*. Enfin, l'application à la chirurgie intracardiaque et la validation du système à travers des expériences *in vivo* sont présentées.

# Chapitre 1

## Conception et modélisation d'un système échoguidé d'endochirurgie

---

### Introduction

Ce chapitre est consacré à la conception d'un système pour la chirurgie mini-invasive guidée par échographie.

Pour cela, dans une première partie, section 1.1, le principe de fonctionnement d'un échographe ainsi que quelques propriétés sur les ultrasons sont données. Puis une analyse de l'interaction entre un instrument et le faisceau d'ultrasons permet d'une part de choisir les matériaux constitutifs de l'instrument pour que celui-ci soit détectable automatiquement dans l'image, et d'autre part de déterminer la configuration relative instrument-sonde permettant de localiser un instrument à partir de sa trace dans une image échographique, (section 1.2).

Ensuite, dans la section 1.3, une hypothèse de modélisation géométrique est proposée et validée expérimentalement. Cette hypothèse consiste à modéliser le système par un ensemble de droites (modélisant l'instrument) coupant un plan représentant le faisceau d'ultrasons.

La géométrie de l'instrument et sa position par rapport au plan échographique peuvent entraîner des singularités cinématiques limitant le nombre de degrés de liberté commandables. La cinématique du système est donc étudiée de façon à choisir une géométrie de l'instrument qui permette de contrôler tous les degrés de liberté de l'instrument.

Enfin, un système pour le guidage d'un instrument endochirurgical à partir d'images échographiques est proposé, (section 1.4)

## 1.1 Fonctionnement général d'un échographe

### 1.1.1 Principe de fonctionnement de la sonde échographique

La sonde échographique est composée de transducteurs qui transforment l'énergie électrique en ultrasons et vice versa. Ce transfert d'énergie utilise l'effet piézoélectrique dont le principe est le suivant : certains matériaux ont la propriété de se charger électriquement lorsqu'ils sont comprimés et, inversement, de se déformer (comprimer) lorsqu'ils sont chargés électriquement. Les transducteurs contenus dans les sondes échographiques sont généralement des céramiques de Plomb Zirconate de Titane (PZT). Dans les sondes échographiques, l'excitation du cristal piézoélectrique est réalisée par une impulsion électrique. Celui-ci entre alors en résonance à une fréquence qui dépend de l'épaisseur du cristal, ce qui conduit à l'émission d'une onde mécanique ultrasonore. La fréquence de l'onde ultrasonore produite est d'autant plus élevée que le cristal est mince.

Le cristal piézoélectrique est utilisé à la fois pour émettre des ultrasons à partir d'une impulsion électrique et pour transformer en courant électrique les ultrasons qui reviennent vers la sonde après avoir été réfléchis. Pour cela, la sonde fonctionne en mode alterné : elle émet des ultrasons à intervalles réguliers et entre deux émissions, elle reçoit les ultrasons réfléchis.

La durée d'émission des ultrasons est très courte, de l'ordre de quelques microsecondes. Elle dépend principalement de la fréquence des ultrasons donc de l'épaisseur du cristal piézoélectrique. Cette durée est un élément qui détermine en grande partie la résolution de l'image échographique. Plus elle est courte, meilleure est l'image. La durée de la période de réception est plus longue, de l'ordre de la milliseconde. La fréquence de répétition du cycle est donc de l'ordre du kHz, ce qui est suffisant pour donner l'impression d'une imagerie en temps réel.

Un seul transducteur fixe ne permet d'explorer la région souhaitée que dans une seule direction. Pour réaliser une exploration en deux dimensions (2D), il faut donc faire un balayage de l'environnement à observer. Ce balayage est à l'origine réalisé manuellement. Le transducteur est alors monté sur un bras mécanique qui le contraint à évoluer dans un plan. Le praticien déplace le transducteur dans ce plan pour acquérir différentes lignes de tir, figure 1.1. Le bras fournit la position du transducteur et l'orientation de la ligne de tir à chaque instant. Ce système, très lent, ne permet pas d'explorer des régions animées de mouvements rapides comme les valves cardiaques. Le balayage a ensuite été réalisé de façon mécanique. Le transducteur a une forme de coupelle et pivote autour d'un axe de façon à avoir un mouvement pendulaire. Le balayage mécanique permet d'avoir une trentaine d'images par seconde. Aujourd'hui, le balayage est réalisé de façon électronique. On utilise une barrette de transducteurs excités séquentiellement. On a alors entre 100 et 156 images par secondes en fonction de l'orientation des transducteurs les uns par rapport aux autres.

Pour les différents mode de balayage, on peut alors utiliser les informations reçues le long de chaque ligne de tir pour reconstruire une image 2D de la zone explorée.

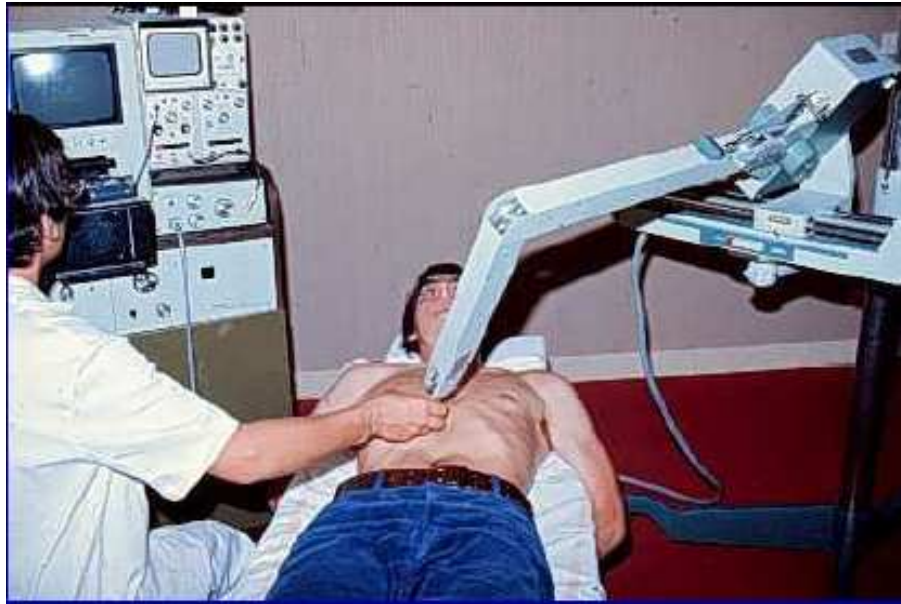


FIG. 1.1 – Echographe à balayage manuel

Afin de reconstruire cette image, il faut connaître un certain nombre de paramètres caractérisant l'onde ultrasonore et les milieux qu'elle traverse. De ce fait, le choix des sondes et donc des caractéristiques des ondes envoyées ne sera pas le même selon l'utilisation souhaitée des images (les milieux à observer, la résolution de l'image désirée, etc.)

### 1.1.2 Paramètres de l'onde ultrasonore

Pour caractériser l'onde ultrasonore il faut connaître à la fois des paramètres indépendants du milieu dans lequel évolue l'onde et des paramètres variant avec les milieux traversés.

- Fréquence ( $f$ ) : Les ultrasons ont une fréquence qui varie entre 20 kHz et 1 GHz. En cardiologie, les ondes utilisées ont en général une fréquence de quelques MHz.
- Impédance acoustique ( $Z$ ) : L'impédance acoustique traduit la propension d'un milieu à laisser pénétrer les ultrasons. Elle dépend de la masse volumique et de la compressibilité du milieu. Elle est d'autant plus élevée que la densité du milieu est importante et que sa compressibilité est faible. Elle est particulièrement faible dans l'air et, au contraire, très élevée dans l'os. Pour les tissus mous, l'impédance acoustique vaut environ  $1,6 \text{ kg/m}^2/\text{s}$ .
- Vitesse de propagation ( $c$ ) : La vitesse de propagation des ultrasons (ou célérité) ne dépend que du milieu traversé et plus précisément de son impédance acoustique. Plus l'impédance acoustique est grande, plus la vitesse de propagation des

ultrasons est élevée. Dans l'air cette vitesse est très faible, de l'ordre de (43 m/s). Dans les tissus mous, elle varie peu et sa valeur moyenne est de 1540 m/s.

- Longueur d'onde ( $\lambda$ ) : Dans un milieu donné, la longueur d'onde est reliée à la fréquence et à la célérité de l'onde par  $\lambda = \frac{c}{f}$ . Elle diminue lorsque la fréquence augmente.
- Intensité ( $I$ ) : C'est l'énergie qui traverse perpendiculairement une unité de surface pendant une unité de temps. Elle est calculée à partir de la vitesse de propagation de l'onde, de la masse volumique du milieu et de la pression acoustique (liée à la fréquence). En échographie médicale, sa valeur moyenne est de 94 mW/cm<sup>2</sup>.
- Coefficient d'atténuation  $\alpha(f)$  : L'atténuation des ultrasons est définie par l'équation  $\alpha(f) = -(\ln(I/I_0))/z$  où  $z$  est la profondeur d'exploration,  $I_0$  l'intensité initiale de l'onde et  $I$  l'intensité de l'onde à la profondeur  $z$ . Elle dépend en partie des caractéristiques de l'onde ultrasonore, et en particulier de la fréquence des ultrasons : plus la fréquence augmente, plus l'atténuation est importante. Elle dépend aussi des milieux traversés. Cette atténuation est due en partie aux interactions du type réflexion, dispersion et réfraction, qui diminuent l'intensité du faisceau lorsque celui-ci traverse des interfaces, figure 1.2. Dans les tissus mous, ce coefficient est proportionnel à la fréquence des ultrasons. L'intensité diminue donc au fur et à mesure que l'onde s'éloigne de la source mais aussi qu'elle traverse des interfaces.

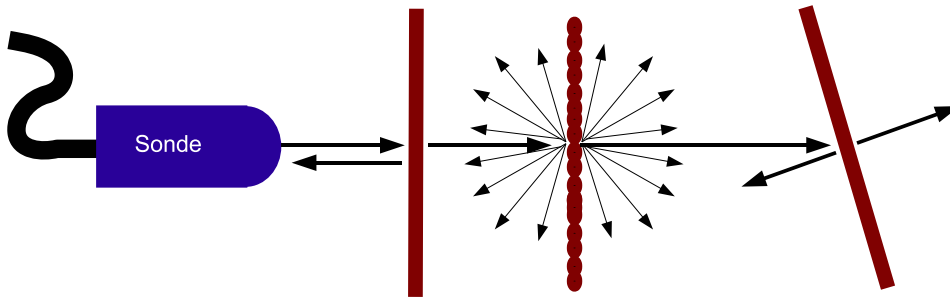


FIG. 1.2 – Propagation des ultrasons : réflexion, dispersion, réfraction (de gauche à droite)

### 1.1.3 Formation de l'image échographique

L'image fournie par un échographe est une image construite à partir de l'amplitude des ultrasons reçus par la sonde. On rappelle que l'amplitude de l'onde est égale à la racine carrée de l'intensité du signal ultrasonore.

Lorsque un faisceau d'ultrasons arrive sur une interface placée à angle droit par rapport à sa direction initiale, une partie est réfléchiée et repart dans le sens opposé, et l'autre partie traverse l'interface sans changer de direction. La proportion d'ultrasons réfléchis

ou coefficient de transmission est directement proportionnelle à la différence d'impédance acoustique entre les deux milieux.

### 1.1.3.1 Hypothèses utilisées pour la reconstruction de l'image

La reconstruction de l'image est réalisée en utilisant les trois hypothèses suivantes :

- la direction du faisceau est unique (le faisceau d'ultrasons est un plan sans épaisseur) ;
- une seule réflexion a lieu ;
- la distance  $d$  est reconstruite grâce au temps de vol  $t$ , c'est-à-dire  $d = c.t$ . Pour l'imagerie médicale, la vitesse du son utilisée est celle obtenue dans les tissus mous,  $c = 1540\text{m.s}^{-1}$ , considérée comme constante.

Ces hypothèses permettent de reconstruire simplement les images à partir des échos reçus. Cependant, dans la pratique, elles ne sont pas vérifiées, et les images obtenues sont bruitées et parfois même faussées. On sait par exemple que la célérité des ultrasons dépend des milieux traversés et qu'elle n'est donc pas constante le long d'une ligne de tir. Par ailleurs, la direction du faisceau n'est pas unique. Le faisceau a toujours une certaine épaisseur qui dépend de la profondeur d'exploration. Le faisceau s'amincit jusqu'à atteindre la distance focale et s'épaissit ensuite, figure 1.3.

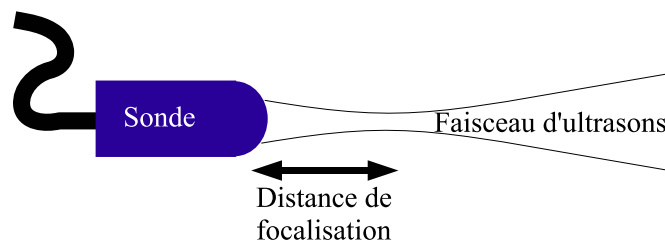


FIG. 1.3 – Epaisseur du faisceau d'ultrasons

Enfin, des phénomènes autres que la réflexion peuvent avoir lieu lorsque le faisceau rencontre une interface qui ne lui est pas perpendiculaire, (figure 1.2). Ces phénomènes sont à l'origine de nombreux artefacts (points dans l'image ne correspondant à aucun points matériels).

On a vu de plus que l'intensité du signal varie en fonction du nombre d'interfaces traversées et de la profondeur d'exploration. Cependant, avec un échographe, il est possible de corriger à l'affichage l'atténuation des ultrasons de façon à avoir une image la plus lisible possible. Pour cela, on règle les gains d'une courbe d'amplification de l'intensité des ultrasons en fonction de la profondeur d'exploration. Il est possible aussi d'accentuer

le contraste dans une image échographique. Pour cela, un gain général est appliqué uniformément à toute l'image. Il agit comme un amplificateur global de l'intensité du signal ultrasonore reçu.

Ces différents réglages permettent d'améliorer la qualité de l'image et de limiter les erreurs induites par les simplifications résultant des hypothèses de reconstruction de l'image.

### 1.1.3.2 Représentation de l'image

En utilisant les hypothèses énoncées ci-dessus, il y a différentes modalités pour représenter la réponse des ultrasons. Le praticien choisira la modalité qui lui permet d'avoir une information utile en fonction de ce qu'il veut observer.

Lorsque l'échographie apparaît, la réponse des ultrasons est représentée en mode A (amplitude). L'amplitude du signal est affichée en fonction de la profondeur d'exploration (figure 1.4.a.). Aujourd'hui, l'image est principalement représentée en mode B (brillance). Dans ce mode, on représente une image 2D où la brillance d'un point est proportionnelle à l'intensité de l'écho reçu (figure 1.4.b.). Une troisième modalité d'imagerie dite mode M (mouvement) ou TM (temps mouvement) correspond à la représentation des variations de la position et de l'intensité des échos en fonction du temps le long d'une ligne de tir (figure 1.4.c.).

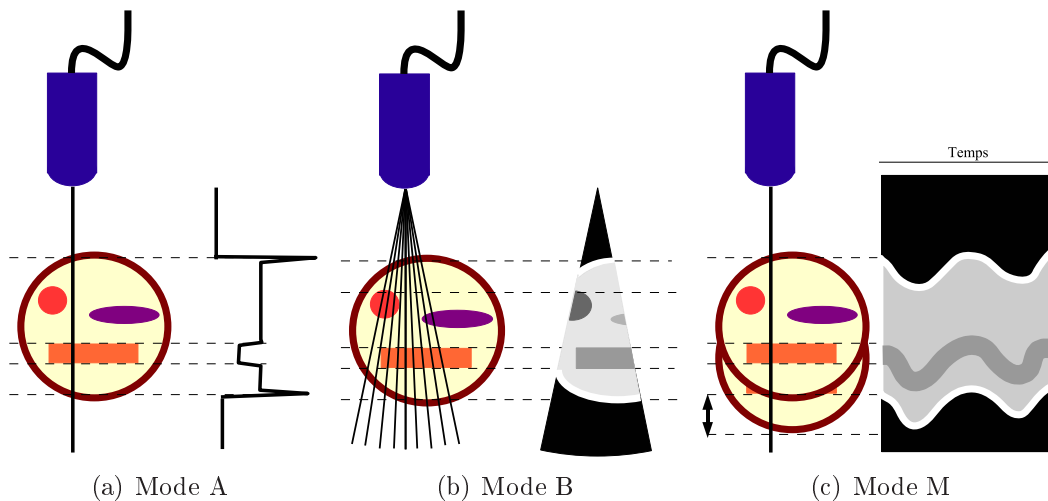


FIG. 1.4 – représentation de l'écho échographique

Les modes A et M ne fournissent des informations que le long d'une ligne de tir, on ne peut pas les utiliser pour guider un instrument de chirurgie dans le corps. On travaillera donc à partir des images représentées en mode B, c'est-à-dire produisant une coupe en deux dimensions du domaine exploré.

## 1.2 Visualisation de l'instrument avec une sonde échographique

Les instruments classiques (aiguille, scalpel, pince, ciseaux, agrafeuse, etc.) pour la chirurgie mini-invasive sont constitués d'un axe en général cylindrique de quelques millimètres de diamètre et d'un trentaine de centimètres de long, et éventuellement d'un ou de plusieurs mors de 2 ou 3 cm de long dont la géométrie est très variée, figure 1.5.

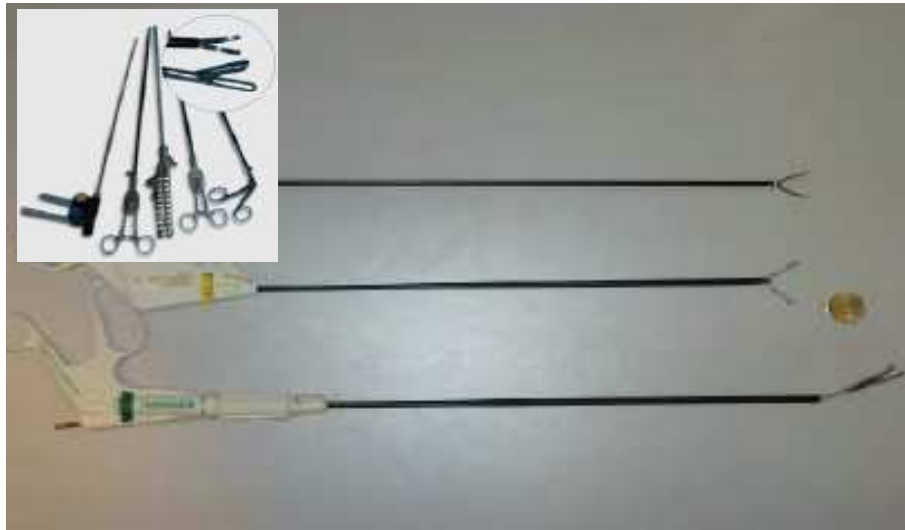


FIG. 1.5 – Instruments de chirurgie mini-invasive

Cependant tous les mors peuvent être en première approximation modélisés par des cylindres de quelques millimètres de diamètre. D'autant plus que l'image échographique est trop bruitée pour différencier des sections rectangulaires, elliptiques, cylindriques, etc. Dans la suite du document, les instruments observés par échographie seront modélisés par un ensemble de cylindres.

### 1.2.1 Choix d'un matériau échogène

Dans les applications médicales où l'on souhaite visualiser un instrument évoluant à l'intérieur d'un organe, il faut choisir un instrument réalisé dans un matériau visible à l'échographie. On a vu précédemment que l'image produite en mode B est construite à partir des ultrasons réfléchis par les différentes interfaces. Si une onde arrive perpendiculairement à une interface de deux milieux d'impédances acoustiques  $Z_1$  et  $Z_2$ , la proportion d'énergie réfléchie est donnée par :

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$



où  $I_0$  et  $I_r$  sont les intensités incidente et réfléchie. Plus la différence d'impédance à l'interface est importante plus la réflexion sera intense. La différence d'impédance acoustique entre les milieux (entre tissus et instrument par exemple) influence donc directement l'amplitude de l'écho et par conséquent la visibilité de l'instrument dans l'image.

Si la différence d'impédance est trop faible, on ne pourra pas distinguer les deux milieux. Au contraire, si la différence d'impédance est trop importante alors l'onde sera soit entièrement réfléchie soit entièrement absorbée et on ne pourra pas explorer le milieu placé après l'interface.

De telles interfaces se retrouvent lorsque les tissus mous organiques sont en contact avec de l'air (poumon, tube digestif) ou des structures minéralisées (os, calculs). On a alors, dans le premier cas, une interface trop absorbante (anéchoïque) et dans le second trop réfléchissante (hyperéchoïque).

Par ailleurs, un mauvais choix pour le matériau de l'instrument peut être à l'origine d'un certain nombre d'artefacts dans l'image. On verra par exemple apparaître des cônes d'ombre, des renforcements postérieurs ou encore des échos multiples. La figure 1.6 illustre ces différents phénomènes :

- Le cône d'ombre apparaît après un instrument hyperéchoïque. L'onde ultrasonore est alors entièrement réfléchie vers la sonde et aucun ultrason ne traverse l'instrument. Il n'y a plus aucune image après l'instrument.
- On voit un renforcement postérieur lorsque les ultrasons traversent un instrument anéchoïque ou très peu échoïque. Son coefficient d'atténuation est très faible comparé à celui des tissus. Les ultrasons ayant traversés l'instrument auront alors une amplitude plus élevée que ceux n'ayant traversé que des tissus et l'image après l'instrument sera faussée.
- Des échos multiples apparaissent lorsqu'il y a des réverbérations à l'intérieur d'un instrument à trop forte impédance acoustique. Dans l'image on a l'impression de voir plusieurs instruments légèrement décalés les uns par rapports aux autres. Ces artefacts apparaissent en général lorsque l'instrument est creux.

De façon à limiter les artefacts, une brève étude sur les matériaux pouvant constituer l'instrument a été réalisée. Pour cela, des instruments fabriqués avec différents matériaux sont plongés dans un bac d'eau et leurs traces sont observées dans une image échographique. L'eau a sensiblement la même impédance acoustique que le sang. L'image des ces instruments dans l'eau sera donc sensiblement la même que celle obtenue lorsque les instruments seront dans le coeur. Pour éviter autant que possible l'apparition d'échos multiples, les instruments seront constitués de cylindres pleins.

Les instruments métalliques ont été rapidement éliminés. Ils sont trop échoïques et génèrent énormément d'artefacts dans l'image, en particulier de larges cônes d'ombre réduisant de façon rédhibitoire le domaine restant visible à l'image.

On s'est alors orienté vers des instruments en plastique. Pour cela, des cylindres pleins de 3 mm de diamètre ont été réalisés en PVC, polyuréthane, plexiglas et nylon. Des images obtenues pour ces différents instruments sont montrées sur la figure 1.7.

L'instrument en PVC est presque invisible dans l'image. Ce matériau crée donc une inter-

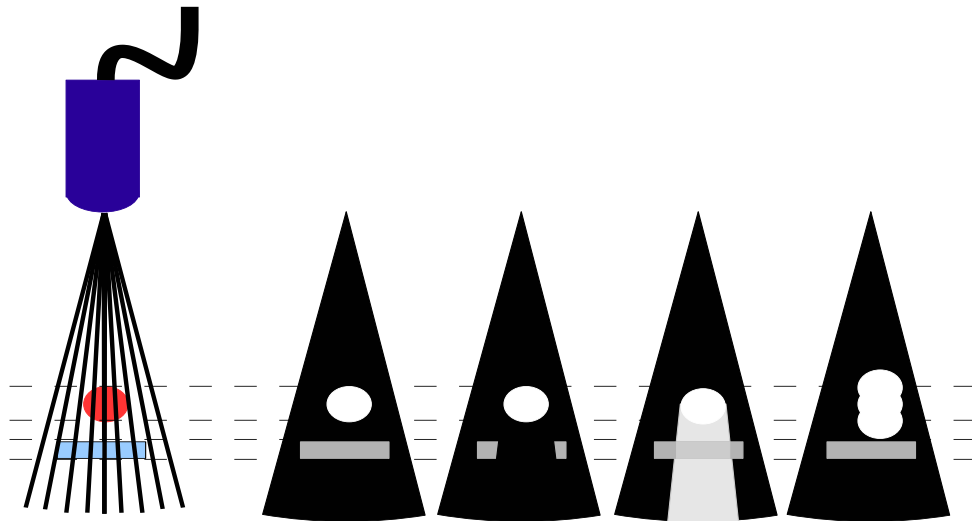


FIG. 1.6 – Types d'artefacts : image attendue, cône d'ombre, renforcement postérieur, échos multiples (de gauche à droite)

face trop peu échogène avec l'eau. Le nylon et le plexiglas quand à eux sont hyperéchogènes et produisent des artefacts qui gênent la détection de l'instrument. Le polyuréthane semble quant à lui être un bon compromis entre visibilité et artefacts.

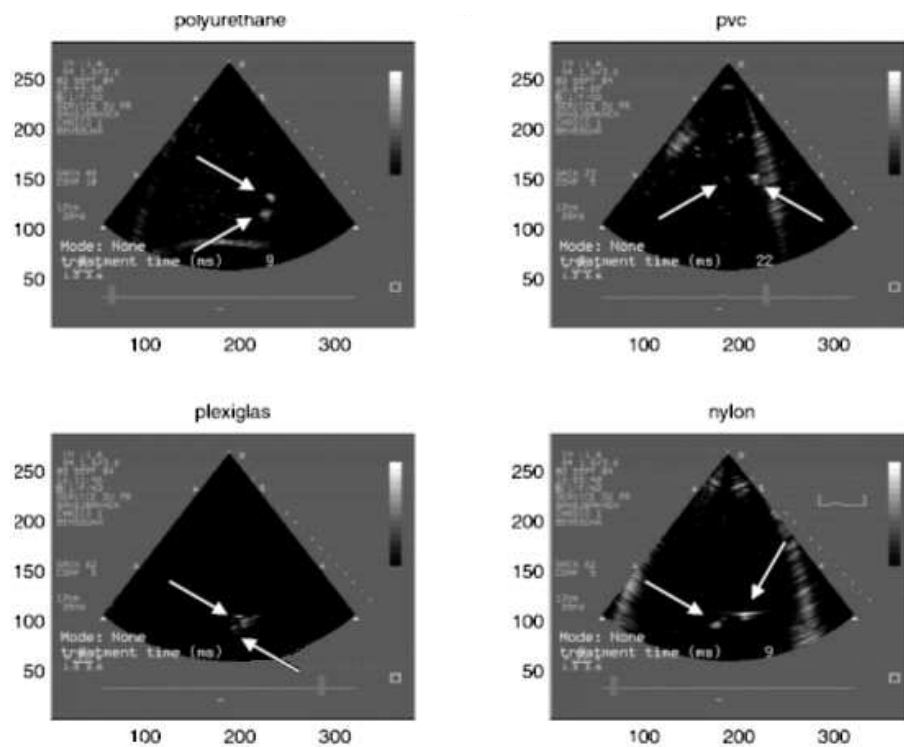


FIG. 1.7 – Images échographiques obtenues pour différents matériaux

Cependant, il s'avère que dans certaines configurations, le polyuréthane n'est pas suffisamment échogène pour permettre la détection de l'instrument dans l'image. Un instrument dont les mors sont en acier inoxydable enrobé de polyuréthane a donc été réalisé. Ce type de mors apparaît bien visible grâce à la présence du métal et n'entraîne que peu d'artefacts du fait de l'enrobage en polyuréthane.

En effet, la visibilité des différents milieux dans une image dépend à la fois du caractère échogène des milieux traversés et des différences d'impédances acoustiques entre les milieux successifs. En entourant le métal de polyuréthane, la succession d'interfaces créée permet d'augmenter l'impédance acoustique de l'instrument jusqu'à un matériau très échogène tout en ayant des différences d'impédances raisonnables à chacune des interfaces. Les artefacts dus à la trop grande différence d'impédance acoustique entre l'eau et le métal sont alors limités tout en conservant le caractère très échogène du métal. Ce montage assure ainsi une bonne visibilité de l'instrument lui-même mais aussi des milieux qui l'entourent.

### 1.2.2 Choix de l'angle d'observation de l'instrument

En chirurgie mini-invasive, l'instrument passe à travers un trocart, considéré comme fixe. Il reste donc quatre degrés de liberté à l'instrument à l'intérieur du corps (les trois rotations autour du point d'insertion et la translation le long de l'axe de l'instrument, figure 1.8).

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer une configuration instrument/sonde qui permette à la fois de localiser l'instrument dans l'image et de contrôler les déplacements de l'instrument nécessaires à l'intervention.

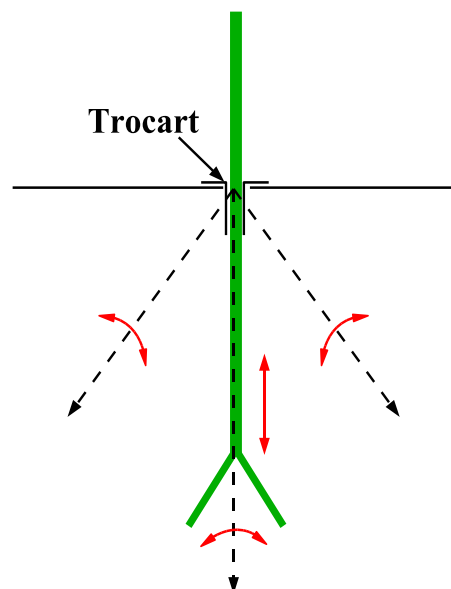


FIG. 1.8 – Degrés de liberté autour du trocart

Une première configuration consiste à positionner l'instrument de sorte que son axe soit contenu dans le plan échographique, figure 1.9. Dans ce cas, on peut localiser parfaitement l'instrument dans l'image. Mais seuls des déplacements de translation et d'orientation dans le plan échographique pourront être effectués, tout autre mouvement faisant sortir l'instrument de l'image. Par ailleurs, une telle disposition impose de placer le plan de la sonde afin qu'il contienne à la fois le point d'insertion de l'instrument et la cible à atteindre. Il n'est pas toujours possible de satisfaire à une telle contrainte.

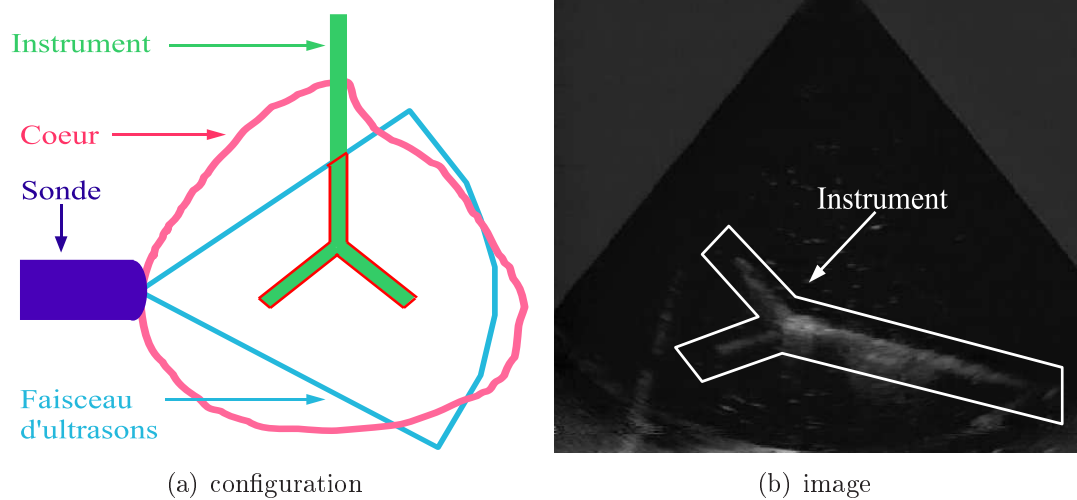


FIG. 1.9 – Echo d'une pince parallèle au plan échographique

Cette configuration n'est pas adaptée au problème traité ici puisque l'objectif est de pouvoir contrôler tous les mouvements d'un instrument à l'intérieur d'une cavité à partir d'images échographiques. Il faut donc que l'axe de l'instrument et le plan échographique soient sécants.

La figure 1.10(b) montre la trace obtenue dans l'image lorsqu'un corps cylindrique coupe le plan échographique, ici l'axe principal d'une pince. On observe dans l'image un blob (ie un groupe de pixels plus ou moins blancs).

Cette deuxième configuration ne permet pas de localiser totalement l'instrument. En effet, un mouvement de translation le long de l'axe de l'instrument ou une rotation autour de cet axe laisse la trace dans l'image inchangée. L'intérêt d'une telle configuration est que l'instrument reste visible dans l'image quels que soient ses mouvements.

On propose donc une troisième configuration : le plan échographique coupe l'instrument au niveau de ses mors et non plus au niveau de son axe. Des instruments avec  $n$  mors cou-

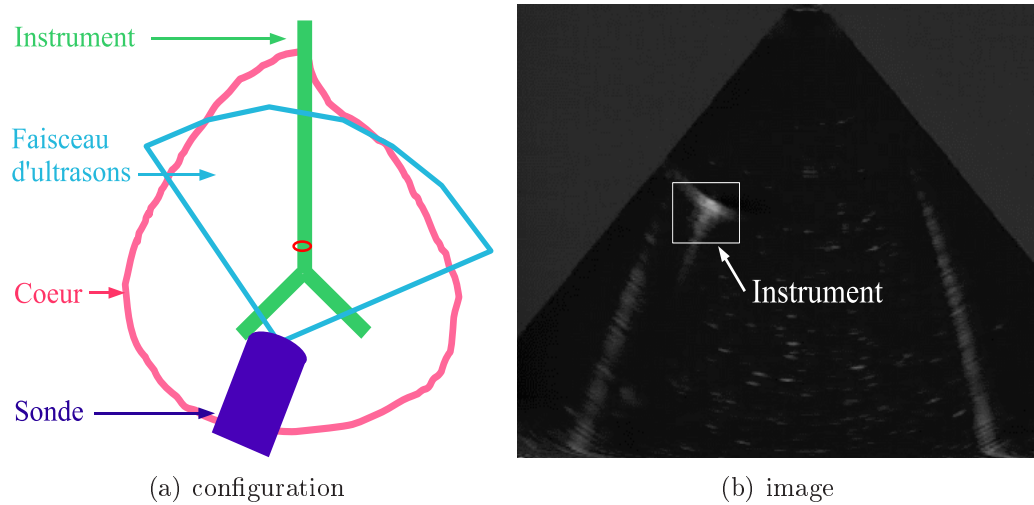


FIG. 1.10 – Écho d'un cylindre coupant le plan échographique

tant le faisceau d'ultrasons produiront alors  $n$  blobs dans l'image. La figure 1.11 montre les deux blobs résultant de l'intersection de deux mors avec le plan échographique. Du nombre de mors coupant le plan dépend le nombre de degrés de liberté commandables de l'instrument. On montrera à la section 1.4, qu'un instrument dont deux mors coupent le plan est localisable dans l'image et que ses quatre degrés de liberté sont commandables, si les mors vérifient certaines conditions géométriques.

Des instrument avec plus de deux mors (comme les pinces à sucre à trois mors) pourraient aussi être utilisés. Avec de tels instruments, il serait a priori possible de contrôler les six degrés de liberté d'un instrument ne passant pas par un trocart.

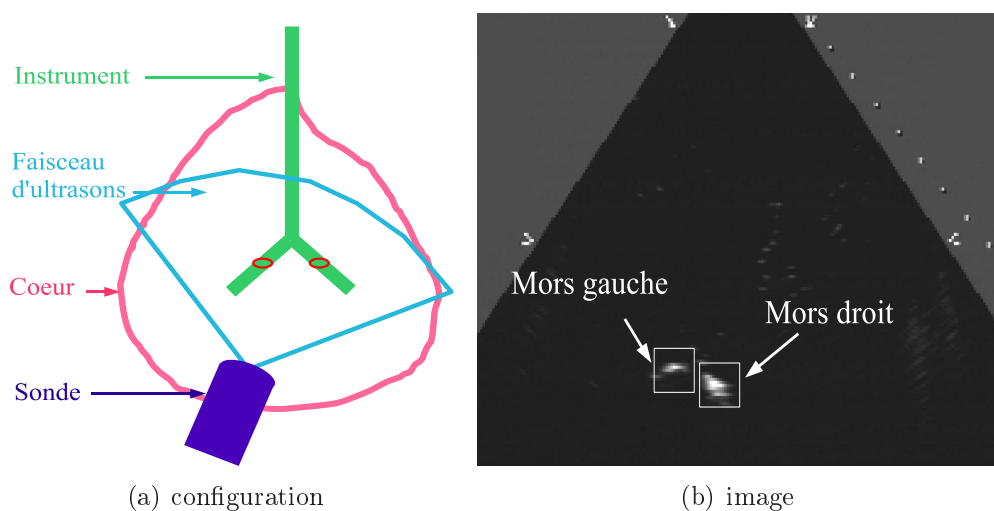


FIG. 1.11 – Écho d'une pince dont chaque mors coupe le plan échographique

L'angle d'observation choisi est donc tel qu'au moins deux mors de l'instrument coupent le faisceau d'ultrasons.

## 1.3 Modélisation géométrique

Pour guider l'instrument à partir de sa position dans l'image, il faut relier les déplacements de l'instrument aux déplacements de sa trace dans l'image. Pour cela, il faut dans un premier temps établir un modèle géométrique entre les positions de l'instrument dans l'espace et les positions des blobs dans l'image.

Compte tenu de la configuration choisie au paragraphe précédent (au moins deux mors de l'instrument coupent le faisceau d'ultrasons), le problème de la modélisation géométrique revient à étudier la relation qu'il y a entre la position et l'orientation d'un mors et les caractéristiques du blob produit dans l'image. Il est ensuite simple d'écrire la relation trouvée pour chaque mors de l'instrument.

### 1.3.1 Hypothèse de modélisation

On cherche, ici, à établir le modèle géométrique qui donne les coordonnées images de l'intersection entre un mors de l'instrument et le faisceau d'ultrasons en fonction de la configuration du système.

On considère qu'un mors est modélisable par un corps cylindrique plein et mince. De plus, le faisceau d'ultrasons peut être modélisé par un plan ce qui paraît justifié puisque les images échographiques sont construites en utilisant cette même modélisation.

L'intersection entre un corps cylindrique et un plan est une ellipse dont le centre est sur l'axe du cylindre. Il semble donc légitime de faire coïncider le centre de gravité d'un blob avec le point d'intersection de l'axe d'un cylindre et du plan échographique, figure 1.12.

On fait donc l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.** *Le centre de gravité d'un blob détecté dans l'image et correspondant à la trace d'un mors de l'instrument coïncide avec un point défini comme l'intersection d'une droite représentant ce mors et d'un plan modélisant le faisceau d'ultrasons.* ■

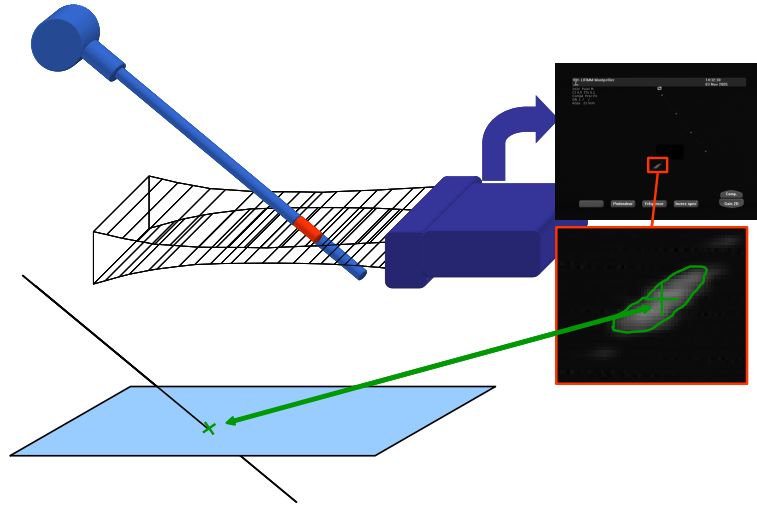


FIG. 1.12 – Hypothèse de modélisation

### 1.3.2 Mise en équation pour un mors

En utilisant cette hypothèse, on peut établir le modèle géométrique du système. Pour cela, on définit les repères suivants :

- $\mathcal{R}_S = \{S; \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$  qui est le repère lié à la sonde échographique. Le vecteur  $\vec{k}_S$  est perpendiculaire au plan échographique  $\Pi$  et le point  $S$  est l'origine du faisceau d'ultrasons ;
- $\mathcal{R}_I = \{I; \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I\}$  qui est le repère lié à l'instrument,  $I$  étant un point sur la droite  $\mathcal{D}$  dont les coordonnées dans le repère de la sonde sont connues.

Établir le modèle géométrique du système consiste alors à trouver les coordonnées du point  $M$  dans le repère attaché à la sonde, connaissant le vecteur directeur normé  $\vec{t}$  de la droite  $\mathcal{D}$  et la position du point  $I$  dans le repère lié à la sonde. On peut noter que localiser  $I$  et  $\vec{t}$  s'obtient à partir de la connaissance de la localisation du robot par rapport à la sonde, ainsi que de l'instrument par rapport au robot. Lors d'expériences en laboratoire, ces informations peuvent être facilement mesurées ou identifiées. Une procédure d'identification des paramètres est proposée au chapitre 3.

Le point  $M$  est donc défini comme appartenant à la fois au plan  $\Pi$  et à la droite  $\mathcal{D}$ .

On pose  $l = \overrightarrow{IM} \cdot \vec{t}$ , le point  $M$  est donc tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{SM} \cdot \vec{k}_S = 0 \\ \overrightarrow{IM} = l \vec{t} \end{cases} \quad (1.1)$$

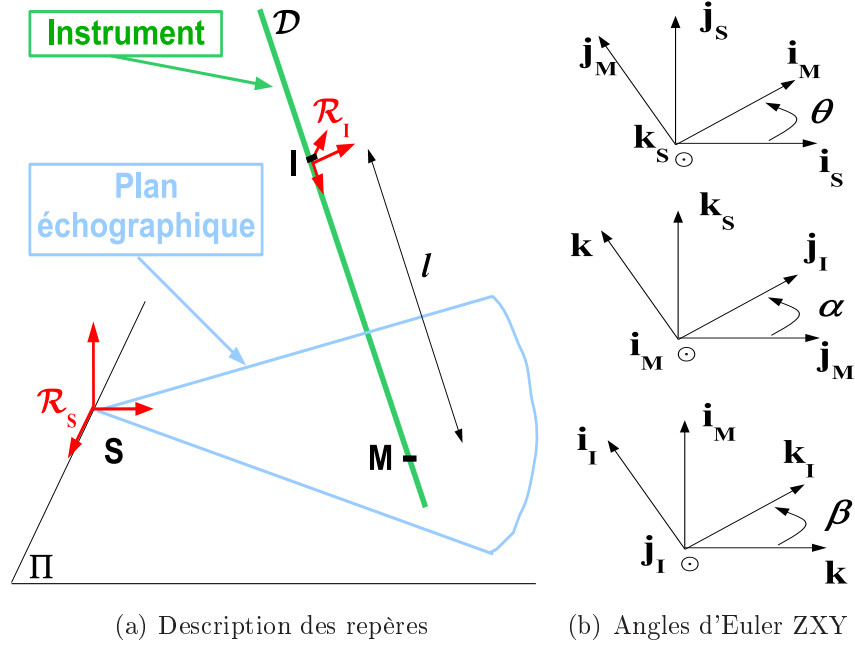


FIG. 1.13 – Définition des repères et des angles utilisés

En écrivant que  $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IM}$ , on trouve :

$$\begin{cases} l = -\frac{\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{k_S}}{\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{k_S}} & \text{si } \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{k_S} \neq 0 \\ \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SI} - \frac{\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{k_S}}{\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{k_S}} \overrightarrow{t} \end{cases} \quad (1.2)$$

On peut noter que la condition  $\overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{k_S} \neq 0$  signifie que la droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\Pi$  ne sont pas parallèles.

### 1.3.3 Vérification expérimentale

Le modèle géométrique proposé consiste à assimiler le mors à un segment de droite, et le faisceau d'ultrasons à un plan. Ce modèle n'est qu'une approximation et doit donc être validé expérimentalement. Des expériences en laboratoire avec un instrument cylindrique, ont été conduites dans cet objectif.

Le principe de validation est le suivant :

- l'instrument est placé dans différentes configurations à l'aide d'un robot ;
- la position de la trace de l'instrument dans l'image est mesurée (par détection automatique du blob et calcul du centre de gravité du blob, chapitre 3) et la position



du robot est enregistrée pour chacune des configurations ;

- les paramètres mal connus du système sont optimisés de façon à minimiser l'erreur entre les positions mesurées dans l'image et les positions reconstruites à partir du modèle proposé ;
- une fois les paramètres optimaux trouvés, le modèle est validé sur une série de mesures n'ayant pas servi à l'optimisation.

Le banc expérimental, figure 1.14, utilisé est constitué d'une sonde échographique placée dans un bac d'eau. Cette sonde produit des images d'un instrument manipulé par le robot série 6 axes Stäubli TX40. Les caractéristiques et les modèles de ce robot sont donnés dans le chapitre 3. L'instrument manipulé est une tige cylindrique de 3 mm de diamètre et de 3 cm de long, en acier enrobé de polyuréthane ce qui permet d'avoir un blob de forte intensité tout en limitant les artefacts.



FIG. 1.14 – Site expérimental

On place le robot de manière à ce que l'instrument coupe le faisceau d'ultrasons. Le blob correspondant à l'instrument est alors détecté par traitement d'image et les coordonnées de son centre de gravité sont enregistrées. On a donc d'après notre hypothèse, une mesure des coordonnées du point  $M$  dans le repère de la sonde. On répète cette démarche pour plusieurs positions de l'instrument dans l'image.

L'instrument est monté sur le corps terminal du robot de façon à ce que l'axe de l'instrument soit colinéaire au vecteur  $\vec{k}_6$  défini pour le corps terminal du robot d'après ses paramètres de Denavit-Hartenberg. Ce montage permet de considérer que les vecteurs  $\vec{t}$

et  $\vec{k}_6$  sont égaux. De plus l'origine  $O_6$  du repère attaché au corps terminal du robot est un point appartenant à la droite modélisant l'instrument et ses coordonnées sont connues dans le repère lié à la base du robot. On choisit donc  $I \equiv O_6$ . Le modèle géométrique équation 1.2 écrit dans le repère  $\mathcal{R}_S$  lié à la sonde devient donc :

$$\begin{cases} l = -\frac{{}^S\mathbf{k}_S^T ({}^S\mathbf{SO}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{O}_0\mathbf{O}_6)}{{}^S\mathbf{k}_S^T \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} \mathbf{R}_{0 \rightarrow 6} {}^6\mathbf{k}_6} \\ {}^S\mathbf{SM} = {}^S\mathbf{SO}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{O}_0\mathbf{O}_6 + l \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} \mathbf{R}_{0 \rightarrow 6} {}^6\mathbf{k}_6 \end{cases} \quad (1.3)$$

où  ${}^0\mathbf{O}_0\mathbf{O}_6$  est la position de l'origine du repère terminal du robot dans son repère de base,  $\mathbf{R}_{0 \rightarrow 6}$  la matrice de rotation entre les repères de base et terminal du robot,  ${}^S\mathbf{SO}_0$  la position de l'origine du repère de base du robot dans le repère de la sonde et  $\mathbf{R}_{S \rightarrow 0}$  la matrice de rotation entre les repères liés à la sonde et à la base du robot.

Le robot Stäubli TX40 est un robot industriel, on peut donc considérer que la position et l'orientation du repère terminal sont parfaitement connues dans le repère de base du robot ( ${}^0\mathbf{O}_0\mathbf{O}_6$  et  $\mathbf{R}_{0 \rightarrow 6}$ ). De plus,  ${}^S\mathbf{k}_S = {}^6\mathbf{k}_6 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Les paramètres pour lesquels il y a des incertitudes sont donc les paramètres décrivant la position et l'orientation du repère de base du robot dans le repère lié à la sonde ( ${}^S\mathbf{SO}_0$  et  $\mathbf{R}_{S \rightarrow 0}$ ).

On réalise alors une identification de ces paramètres de sorte que l'erreur entre les positions mesurées dans l'image et les positions reconstruites soit minimisée.

Par ailleurs, les mesures dans l'image sont obtenues en pixels, il faut les convertir en mètres pour utiliser le modèle géométrique. La relation entre la mesure  $\mathbf{s}_{\text{mes}}$  des coordonnées en pixels du centre de gravité d'un blob, et ses coordonnées en mètre dans le repère lié à la sonde s'écrit :

$$\mathbf{s}_{\text{mes}} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\mathbf{SM} \quad (1.4)$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont les gains de changement d'échelle à appliquer le long de  $\mathbf{i}_S$  et  $\mathbf{j}_S$  respectivement.

La documentation de l'échographe donne les gains  $k_x$  et  $k_y$  à utiliser lorsque les ultrasons traversent des tissus mous alors que ces expériences sont réalisées dans de l'eau. Si les ultrasons ont une vitesse de propagation à peu près égale dans l'eau et dans les tissus mous, le coefficient d'atténuation des ultrasons est sensiblement inférieur dans l'eau. La profondeur d'exploration est donc plus importante dans l'eau qu'à travers des tissus mous. Il faut alors déterminer les paramètres de changement d'échelle pour des ultrasons dans l'eau. On identifie donc aussi la valeur de  $k_x$  et  $k_y$ .

Le vecteur des paramètres inconnus s'écrit donc, finalement :

$$\mathbf{p} = [{}^Sx_{O_0} \quad {}^Sy_{O_0} \quad {}^Sz_{O_0} \quad r_x \quad r_y \quad r_z \quad k_x \quad k_y]^T \quad (1.5)$$

où :

- le vecteur  ${}^S\mathbf{SO}_0 = [{}^Sx_{O_0} \quad {}^Sy_{O_0} \quad {}^Sz_{O_0}]^T$  est la position de l'origine du repère lié à la base du robot dans le repère lié à la sonde ;
- les angles  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$  sont les angles d'Euler définis selon la convention XYZ décrivant l'orientation du repère de base du robot par rapport au repère lié à la sonde.

Le principe de l'optimisation est le suivant :

on place le robot dans  $n$  positions, on enregistre à chaque fois la position  $\mathbf{s}_{\text{mes},i}$  des points dans l'image. On détermine par dérivation du modèle géométrique ou par calcul cinématique, un jacobien du paramétrage  $\mathbf{J}_{\mathbf{p}i}$  c'est-à-dire la relation entre les vitesses dans l'image et les dérivées temporelles des paramètres à optimiser. Cette relation s'écrit pour la  $i^{\text{ème}}$  position de l'instrument :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\text{mes},i} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}i} \dot{\mathbf{p}} \quad (1.6)$$

Sous l'hypothèse de petites variations on peut écrire :

$$d\mathbf{s}_{\text{mes},i} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}i} d\mathbf{p} \quad (1.7)$$

Si on écrit cette relation pour  $n$  mesures, on obtient :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}} d\mathbf{p} \quad (1.8)$$

où  $d\mathbf{s} = [d\mathbf{s}_{\text{mes},1}^T \quad d\mathbf{s}_{\text{mes},2}^T \quad \dots \quad d\mathbf{s}_{\text{mes},n}^T]^T$  et  $\mathbf{J}_{\mathbf{p}} = [\mathbf{J}_{\mathbf{p}1}^T \quad \mathbf{J}_{\mathbf{p}2}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{\mathbf{p}n}^T]^T$ .  
On peut alors inverser cette relation :

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}}^+ d\mathbf{s} \quad (1.9)$$

On utilise alors l'algorithme suivant pour minimiser l'erreur quadratique entre les positions  $\mathbf{s}_{\text{rec}}$  reconstruites à partir du modèle et les positions  $\mathbf{s}_{\text{mes}}$  mesurées dans l'image :

$$\begin{aligned} & \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{init}} \\ & \text{faire} \\ & \quad \mathbf{s}_{\text{rec}} = f(\mathbf{p}) \\ & \quad d\mathbf{p} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}}^+ \|\mathbf{s}_{\text{rec}} - \mathbf{s}_{\text{mes}}\| \\ & \quad \mathbf{p} = \mathbf{p} + d\mathbf{p} \\ & \text{tant que } (\mathbf{s}_{\text{rec}} - \mathbf{s}_{\text{mes}} > \mathbf{e}_{\text{max}}) \text{ et que } (\|d\mathbf{p}\| > d\mathbf{p}_{\text{max}}) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{p}_{\text{init}}$  est une valeur estimée des paramètres à optimiser,  $f(\mathbf{p})$  est le modèle géométrique du système,  $\mathbf{e}_{\text{max}}$  l'erreur sur les positions dans l'image en dessous de laquelle on considère avoir trouvé les paramètres optimaux et  $d\mathbf{p}_{\text{max}}$  la variation des paramètres en dessous de laquelle on considère être dans un minimum local.

Dans un premier temps, l'expérience est réalisée avec un échographe réglé pour n'avoir aucun artefact dans l'image tout en ayant une trace nette de l'instrument. Ce réglage correspond à :

- une intensité des échos non corrigée ;
- une profondeur de champ de 21,5 cm.

La figure 1.15 montre l'image échographique obtenue avec un tel réglage.

On identifie les paramètres en utilisant vingt mesures. La figure 1.16 montre les résultats de cette optimisation. Les résultats sont évalués en comparant, dans l'image, les positions

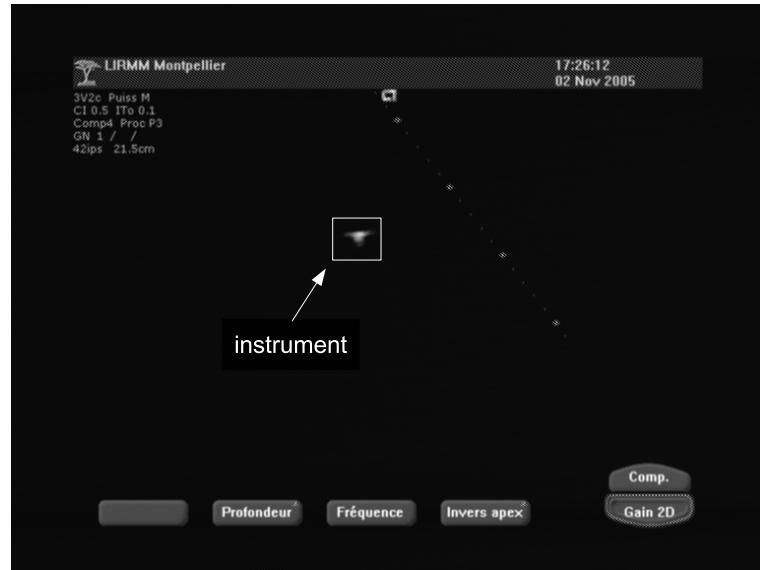


FIG. 1.15 – Image de l’instrument avec un échographe correctement réglé

mesurées lors des expériences ( $\mathbf{s}_{\text{mes},i}$  et les positions reconstruites grâce au modèle géométrique et aux paramètres estimés  $\hat{\mathbf{p}}$  :  $\mathbf{s}_{\text{rec}} = f(\hat{\mathbf{p}})$ . On trouve une erreur maximale de 1,48 mm en x (c’est-à-dire le long de  $\mathbf{i}_s$ ) et 1,88 mm en y (c’est-à-dire le long de  $\mathbf{j}_s$ ) et une erreur moyenne d’environ 0,6 mm en x et en y, entre les positions mesurées dans l’image et les positions reconstruites avec les paramètres optimaux. Les paramètres trouvés et le modèle proposé permettent donc une bonne reconstruction des positions dans l’image.

On vérifie alors que le modèle reste juste sur des positions dans l’image n’ayant pas servi à l’identification des paramètres. Après avoir placé le robot dans 5 positions différentes, on reconstruit les positions dans l’image à partir du modèle et des paramètres trouvés lors de l’optimisation et on les compare aux positions mesurées dans l’image. Les résultats sont montrés sur la figure 1.17.

On trouve une erreur maximale de 1,50 mm en x et 0,67 mm en y et une erreur moyenne de -0,23 mm en x et de -0,14 mm en y, entre les positions mesurées dans l’image et les position reconstruites avec les paramètres optimaux. L’optimisation des paramètres reste donc valable.

L’hypothèse proposée et le modèle géométrique qui en découle sont bien validés dans le cas d’un échographe correctement réglé.

Dans un second temps, on évalue l’influence du réglage de l’échographe sur le modèle proposé. Les paramètres réglables de l’échographe susceptibles d’influencer le modèle sont le gain d’intensité appliqué à l’image et la profondeur maximale d’exploration.

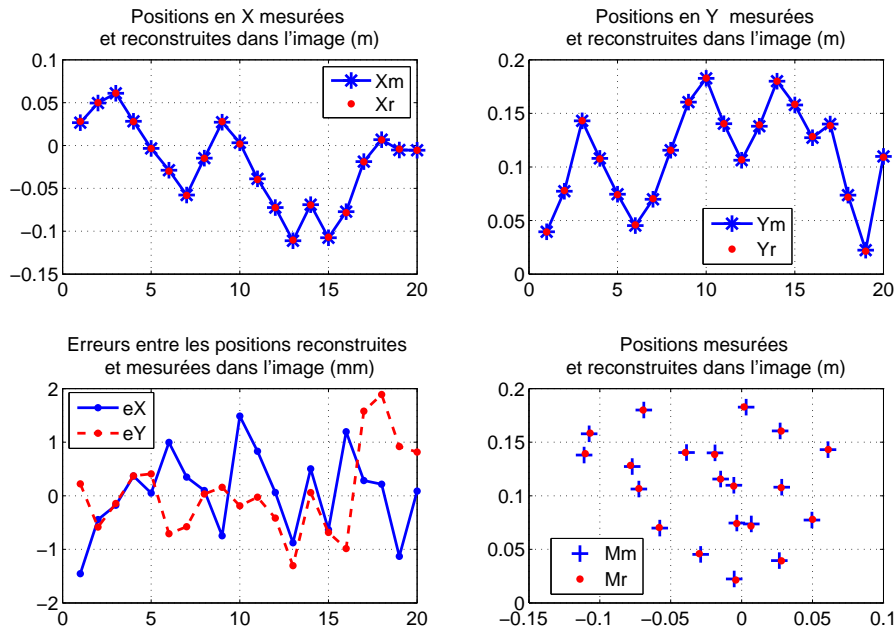


FIG. 1.16 – Résultats de l'identification des paramètres du modèle géométrique, cas de l'échographe correctement réglé

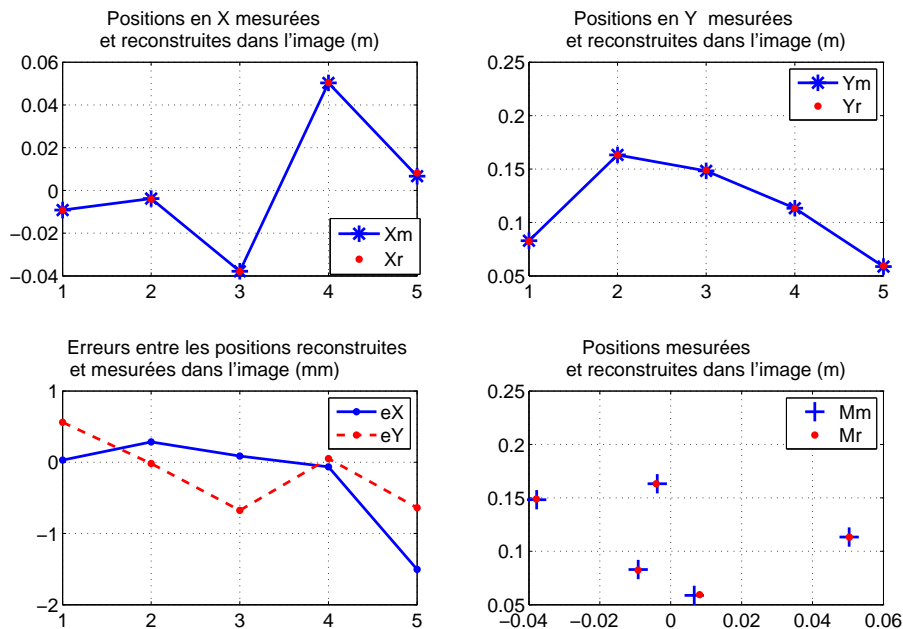


FIG. 1.17 – Validation expérimentale du modèle géométrique, cas de l'échographe correctement réglé

Le gain d'intensité modifie la forme, l'intensité et la taille des blobs détectés dans l'image. On recommence l'expérience précédente, sans modifier la position et l'orientation de la base du robot par rapport à la sonde mais en appliquant un gain de 20 dB à l'image. La figure 1.18 montre l'image échographique obtenue avec un tel réglage

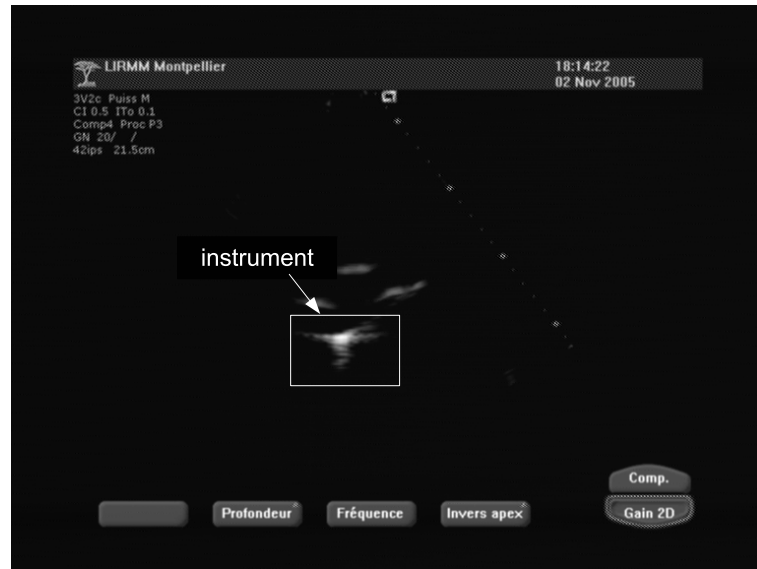


FIG. 1.18 – Image de l'instrument avec un gain de 20 dB

Il n'est pas nécessaire d'optimiser à nouveau les paramètres. On reconstruit les positions dans l'image en utilisant les paramètres trouvés pour un échographe idéalement réglé, figure 1.19. On obtient alors une erreur moyenne de 0,68 mm en x et 0,83 mm en y, pour une erreur maximale de 1,68 mm en x et 1,65 mm en y, entre les positions reconstruites et mesurées dans l'image. Ces erreurs sont comparables avec celles obtenues pour un échographe bien réglé. Le gain d'intensité ne modifie donc pas la validité du modèle géométrique proposé.

La dernière expérience réalisée vise à montrer que la profondeur d'exploration n'influence pas le modèle géométrique. Pour cela, on réalise une fois encore l'expérience décrite précédemment. La transformation entre la base du robot et la sonde reste inchangée. Par contre, on choisit une profondeur d'exploration fortement diminuée (10,8 cm au lieu de 21,5 cm). La figure 1.20 montre l'image échographique obtenue avec un tel réglage

Le domaine visible à l'image étant réduit par rapport aux expériences précédentes, on enregistre seulement neuf positions. La taille de l'image restant inchangée, les gains de conversion pixel/mètres seront modifiés. On doit donc refaire l'optimisation des paramètres du modèle, figure 1.21.

Après reconstruction, on trouve une erreur moyenne de 0,88 mm en x et 0,84 mm en y,

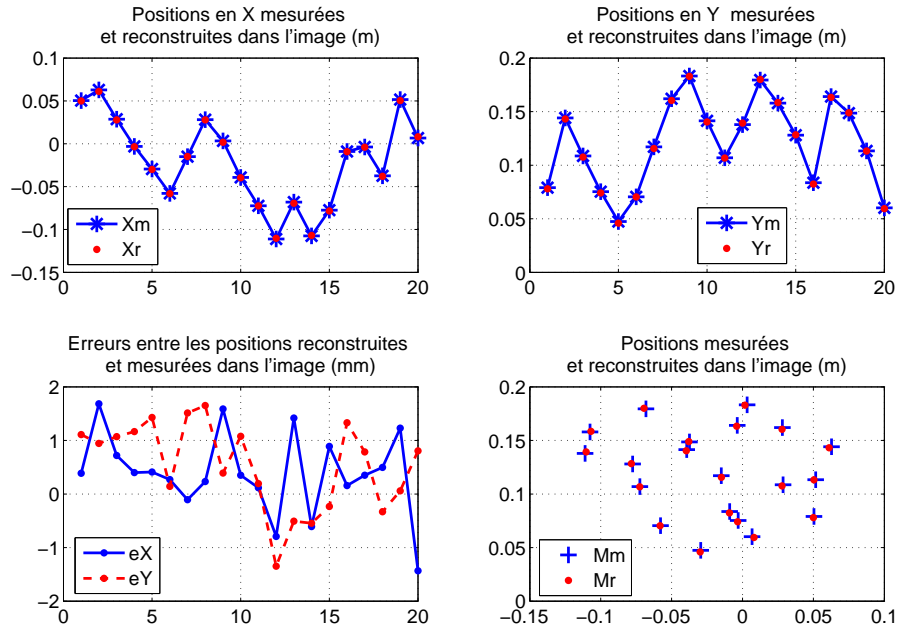


FIG. 1.19 – Résultat de la reconstruction avec un gain d'intensité de 20 dB

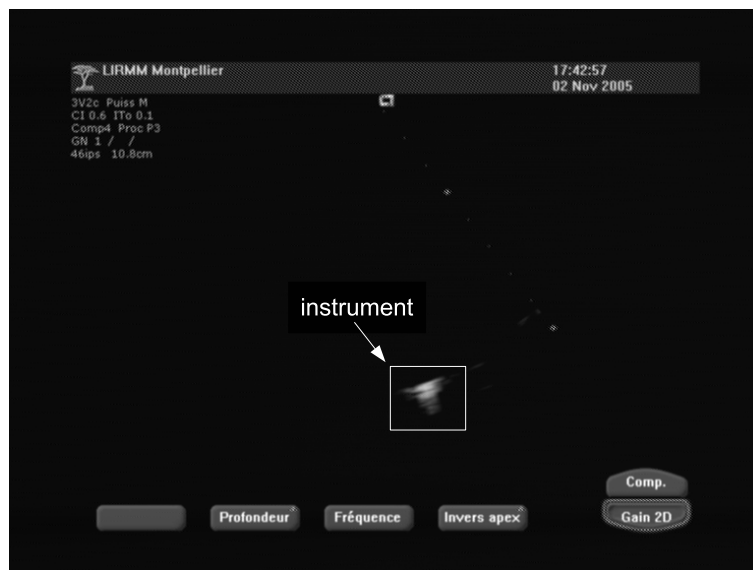


FIG. 1.20 – Image de l'instrument pour une profondeur d'exploration de 10,8 cm

pour une erreur maximale de 1,68 mm en x et 2,20 mm en y, entre les positions reconstruites et mesurées dans l'image. Ces erreurs sont comparables avec celles obtenues pour un échographe bien réglé. La profondeur d'exploration n'influence donc pas la validité du modèle géométrique proposé.

Par ailleurs, on peut noter quelques remarques sur l'identification des paramètres.

En effet, la configuration du système n'ayant pas été modifiée entre les deux expériences (en particulier la position et l'orientation de la sonde par rapport à la base du robot sont inchangées), les paramètres trouvés lors des deux identifications devraient être sensiblement égaux. Ce que l'on retrouve bien puisqu'en position la différence entre les nouveaux paramètres identifiés et les paramètres identifiés précédemment est de  $\begin{bmatrix} e_{x_0} & e_{y_0} & e_{z_0} \end{bmatrix} = [-6 \quad -10 \quad 1]$  millimètres, et que la différence en orientation est de  $\begin{bmatrix} e_{r_x} & e_{r_y} & e_{r_z} \end{bmatrix} = [-0,34 \quad 0,08 \quad -0,11]$  degrés.

Changer la profondeur d'exploration correspond à modifier l'affichage de l'image en effectuant un zoom sur la partie proche de l'origine du faisceau. Il est possible que ce zoom entraîne un déplacement du point d'origine dans l'image ce qui pourrait expliquer les erreurs trouvées en x et en y.

De plus, entre les gains  $k_x$  et  $k_y$  précédents et ceux identifiés lors de cette expérience multipliés par le rapport des profondeurs d'exploration on trouve une erreur de  $0,004 \text{ pixel} \cdot \text{mm}^{-1}$  sur  $k_x$  et de  $0,01 \text{ pixel} \cdot \text{mm}^{-1}$  sur  $k_y$  soit une erreur de  $0,0023\%$  pour  $k_x$  et de  $0,0057\%$  pour  $k_y$ . Le choix de la profondeur d'exploration influence donc linéairement les paramètres de conversion entre pixel et mètres.

A travers ces expériences, on a donc validé l'hypothèse qui consiste à faire correspondre le centre de gravité des blobs avec l'intersection de droites modélisant l'instrument et d'un plan représentant le faisceau d'ultrasons. On a de plus montré que cette hypothèse reste valable indépendamment du réglage de l'échographe.

## 1.4 Commandabilité d'un instrument endochirurgical

En chirurgie mini invasive, l'instrument passe à travers une petite incision. Ce point d'insertion est en général considéré comme fixe par rapport au patient, à la base du robot et à la sonde. L'instrument a donc quatre degrés de liberté : les trois rotations autour du point fixe et la translation le long de son axe. D'après la configuration choisie à la section 1.2.2, l'instrument coupe le plan échographique au moins en deux points. Si on considère que l'instrument est tel que deux mors coupent le faisceau d'ultrasons, on dispose alors de quatre mesures indépendantes dans l'image (les coordonnées en x et en y de chacun des deux blobs). On imagine donc pouvoir contrôler les quatre degrés de liberté de l'instrument. Cependant, la géométrie de l'instrument et sa position par rapport au plan échographique peuvent entraîner des singularités cinématiques limitant le nombre de degrés de liberté commandables. On étudie donc dans ce qui suit la cinématique du



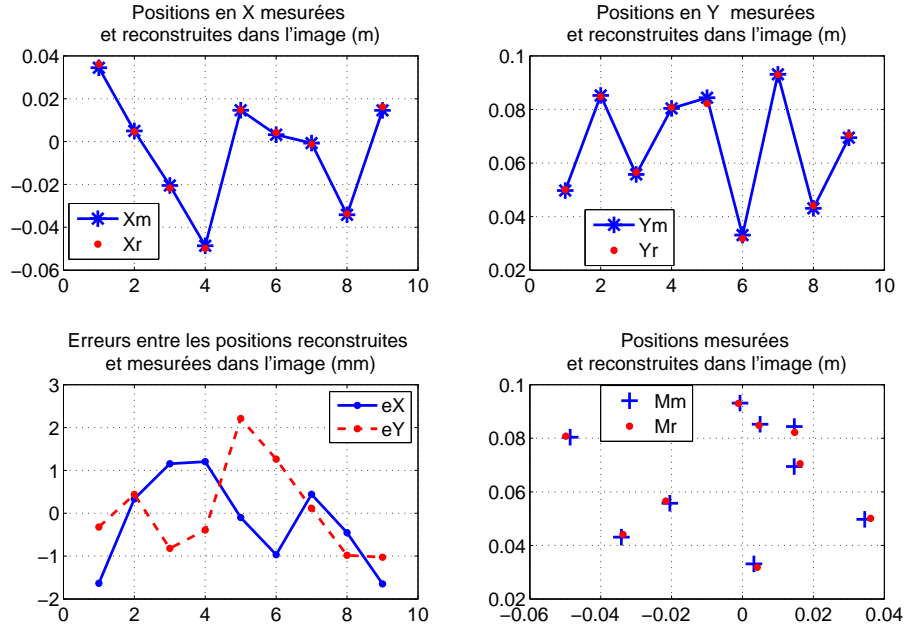


FIG. 1.21 – Résultat de l'optimisation des paramètres avec une courte profondeur d'exploration

système de façon à choisir une géométrie de l'instrument qui permette de contrôler ces quatre degrés de liberté.

### 1.4.1 Analyse générale des singularités cinématiques

Pour connaître la mobilité de l'instrument, il suffit de déterminer la dimension du sous-groupe de  $SE(3)$  des déplacements euclidiens. La dimension de ce sous-groupe est aussi celle des transformations infinitésimales associées. On s'appuiera donc sur l'analyse du rang du générateur des déplacements infinitésimaux.

On considère un solide  $\Sigma$  constitué de deux droites non confondues  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  qui intersectent le plan échographique en deux points  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. On pose

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \delta \vec{i}_M \quad (1.10)$$

avec  $\|\vec{i}_M\| = 1$ .

On cherche la forme du torseur cinématique de  $\Sigma$  par rapport à  $\Pi$  qui n'entraîne pas de

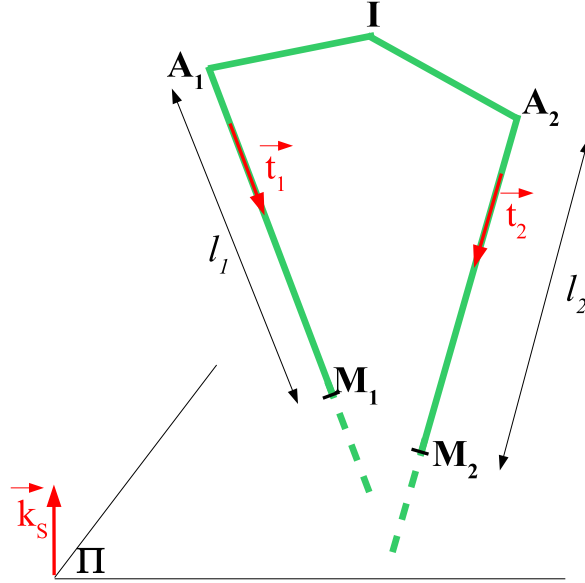


FIG. 1.22 – Solide composé de deux droites non confondues

vitesse de ces points dans l'image. La vitesse du point  $M_i$  dans le plan  $\Pi$  est donnée par :

$$\vec{V}(M_i/\Pi) = \vec{V}(M_i/\Sigma) + \vec{V}(M_i \in \Sigma/\Pi) \quad (1.11)$$

Le torseur cherché est tel que :

$$\vec{V}(M_i \in \Sigma/\Pi) = -\vec{V}(M_i/\Sigma) \quad (1.12)$$

La vitesse du point  $M_i$  doit donc être colinéaire au vecteur directeur  $\vec{t}_i$  de la droite  $\mathcal{D}_i$ , pour  $i = \{1; 2\}$ . On a donc :

$$\exists (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \vec{V}(M_1 \in \Sigma/\Pi) = V_1 \vec{t}_1 \\ \vec{V}(M_2 \in \Sigma/\Pi) = V_2 \vec{t}_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M_2 \in \Sigma/\Pi) &= \vec{V}(M_1 \in \Sigma/\Pi) + \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \\ &= \vec{V}(M_1 \in \Sigma/\Pi) + \delta \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) \wedge \vec{i}_M \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le torseur cinématique de  $\Sigma$  par rapport à  $\Pi$  ne produisant pas de vitesse dans l'image vérifie donc :

$$\mathcal{C}_{\text{inv}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) \text{ tel que } \delta \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) \wedge \vec{i}_M = V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1 \\ \vec{V}(M_1 \in \Sigma/\Pi) = V_1 \vec{t}_1 \end{array} \right\}_{M_1} \quad (1.15)$$

Deux cas sont à envisager :

- si  $\delta = 0$  c'est-à-dire si  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus ;
- si  $\delta \neq 0$ , c'est-à-dire si  $M_1$  et  $M_2$  sont distincts. Dans ce cas, nécessairement  $(V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1) \cdot \vec{i}_M = 0$ .

#### 1.4.1.1 $M_1$ et $M_2$ confondus

On considère d'abord le cas où les points  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus. Les vecteurs directeurs des droites sont tels que  $\vec{t}_1 \neq \vec{t}_2$ , sinon, les droites seraient confondues. On doit alors vérifier que  $V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1 = \vec{0}$ , ce qui n'est possible que si  $V_1 = 0$  et  $V_2 = 0$ .

Lorsque  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus, le torseur cinématique solution s'écrit :

$$\mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_1=M_2} \quad (1.16)$$

On a donc trois mouvements indépendants qui ne produisent pas de vitesse des points  $M_1$  et  $M_2$  dans l'image (les trois rotations autour de  $M_1 = M_2$ ). On pourra commander  $6 - 3 = 3$  mouvements indépendants.

#### 1.4.1.2 Cas : $M_1$ et $M_2$ non confondus

On se place dans le cas où  $\vec{i}_M \cdot (V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1) = 0$  et  $\delta \neq 0$ . D'après l'équation 1.15 le vecteur de rotation doit vérifier :

$$\exists (r, V_1, V_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r \vec{i}_M + \frac{V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1}{\delta} \wedge \vec{i}_M \quad (1.17)$$

où  $r$  est un nombre scalaire traduisant la rotation de l'instrument autour de l'axe  $\vec{i}_M$ . Le torseur cinématique s'écrit alors :

$$\exists (r, V_1, V_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r \vec{i}_M + \frac{V_2 \vec{t}_2 - V_1 \vec{t}_1}{\delta} \wedge \vec{i}_M \\ V_1 \vec{t}_1 \end{array} \right\}_{M_1} \\ V_2 \vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M - V_1 \vec{t}_1 \cdot \vec{i}_M = 0 \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

Pour vérifier la condition  $V_2 \vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M - V_1 \vec{t}_1 \cdot \vec{i}_M = 0$ , trois cas sont à envisager :

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M \neq 0$  alors il faut que  $V_2 = V_1 \frac{\vec{t}_1 \cdot \vec{i}_M}{\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M}$ , donc :

$$\forall (r, V_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r \vec{i}_M + \frac{V_1}{\delta} \left( \frac{\vec{t}_1 \cdot \vec{i}_M}{\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M} \vec{t}_2 - \vec{t}_1 \right) \wedge \vec{i}_M \\ V_1 \vec{t}_1 \end{array} \right\}_{M_1} \quad (1.19)$$

On a donc deux mouvements indépendants qui ne produisent pas de vitesse des points  $M_1$  et  $M_2$  dans l'image. On pourra commander quatre mouvements indépendants. Ce cas correspond à la configuration et à la géométrie de l'instrument la plus générale.

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M = 0$  et  $\vec{t}_1 \neq \vec{t}_2$  alors il faut que  $V_1 = 0$  et :

$$\forall (r, V_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r\vec{i}_M + \frac{V_2}{\delta} \vec{t}_2 \wedge \vec{i}_M \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_1} \quad (1.20)$$

On a donc deux mouvements indépendants qui ne produisent pas de vitesse des points  $M_1$  et  $M_2$  dans l'image. On pourra commander quatre mouvements indépendants. Ce cas correspond à une géométrie quelconque pour l'instrument mais dans une configuration particulière : un mors est perpendiculaire à  $\vec{i}_M$ .

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M = 0$  et  $\vec{t}_1 = \vec{t}_2$

Ce cas correspond à une configuration et une géométrie particulières : les mors sont parallèles et perpendiculaires à  $\vec{i}_M$ . Dans ce cas, les torseurs ne produisant pas de vitesses des points dans l'image sont :

$$\forall (r, V_1, V_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r\vec{i}_M + \frac{(V_2 - V_1)}{\delta} \vec{t}_1 \wedge \vec{i}_M \\ V_1 \vec{t}_1 \end{array} \right\}_{M_1} \quad (1.21)$$

On a donc trois mouvements indépendants qui ne produisent pas de vitesse des points  $M_1$  et  $M_2$  dans l'image. On pourra commander trois mouvements indépendants.

En conclusion on peut noter qu'il est possible de contrôler quatre degrés de liberté dans le cas général. Il y a cependant des configurations singulières pour lesquels le nombre de degrés de liberté commandables diminue :

- Si les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas coplanaires : il n'existe pas de configuration singulière.
- Si les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont sécantes et distinctes : il existe une singularité lorsque le point d'intersection des droites est dans le plan  $\Pi$ . On peut alors contrôler trois degrés de liberté seulement.
- Si les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont parallèles et distinctes : il existe une singularité lorsque la perpendiculaire commune aux droites est parallèle au plan. On peut alors contrôler trois degrés de liberté seulement.

Cette étude permet de montrer que dans le cas général quatre degrés de liberté de l'instrument sont commandables. Elle permet aussi de distinguer la commandabilité selon la géométrie relative des mors.

### 1.4.2 Géométrie relative des mors de l'instrument

Il a été établi dans la partie précédente que pour commander quatre degrés de liberté, il suffit de disposer d'un instrument à deux mors non confondus. Avec des mors parallèles il y a une singularité bien que les mors de l'instrument soient visibles dans l'image. Cette singularité figure au milieu de l'espace de travail. La solution des mors parallèle ne sera donc pas retenue. Pour éviter toute singularité cinématique, il faut un instrument dont les mors ne soient pas coplanaires. Cependant, avec un instrument dont les mors sont sécants, la seule singularité cinématique (qui apparaît si le point d'intersection des mors est dans le plan échographique) coïncide avec le problème de visibilité de l'instrument (ce qui correspond à la limite du domaine de travail). Du point de vue de la commandabilité du système, on peut donc utiliser au choix un instrument à mors sécants ou un instrument à mors non coplanaires. Dans les deux cas, la commandabilité est limitée par la condition de visibilité de l'instrument, problème classique de l'asservissement visuel.

On choisit donc un instrument dont l'axe et les mors sont coplanaires et sécants en un point  $I$  ce qui est plus simple du point de vue de la fabrication de la pince. Les mors sont de plus symétriques par rapport à l'axe de l'instrument.

On définit le repère  $\mathcal{R}_I$  lié à l'instrument par  $\mathcal{R}_I = \{I; \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I\}$  tel que le vecteur  $\vec{k}_I$  soit colinéaire à l'axe de l'instrument, et  $\vec{i}_I$  appartient au plan de l'instrument.

De plus, on notera  ${}^I\mathbf{t}_1 = [-\sin \varphi \ 0 \ \cos \varphi]^T$  et  ${}^I\mathbf{t}_2 = [\sin \varphi \ 0 \ \cos \varphi]^T$ , avec  $\varphi = (\vec{k}_I, \vec{t}_2) = (\vec{t}_1, \vec{k}_I)$  les vecteurs directeurs des droites modélisant les mors de l'instrument.

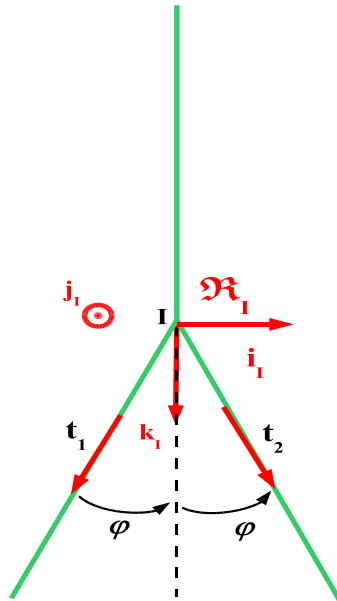


FIG. 1.23 – Géométrie de l'instrument

Pour déterminer finalement si l'instrument ainsi défini est commandable, il faut d'abord

préciser quels sont les degrés de liberté utilisés. Pour cela, on décrit dans ce qui suit le système proposé.

## 1.5 Système pour la chirurgie mini-invasive guidée par échographie

Le système proposé est un système robotique commandé par asservissement visuel 2D sur des images échographiques, figure 1.24.

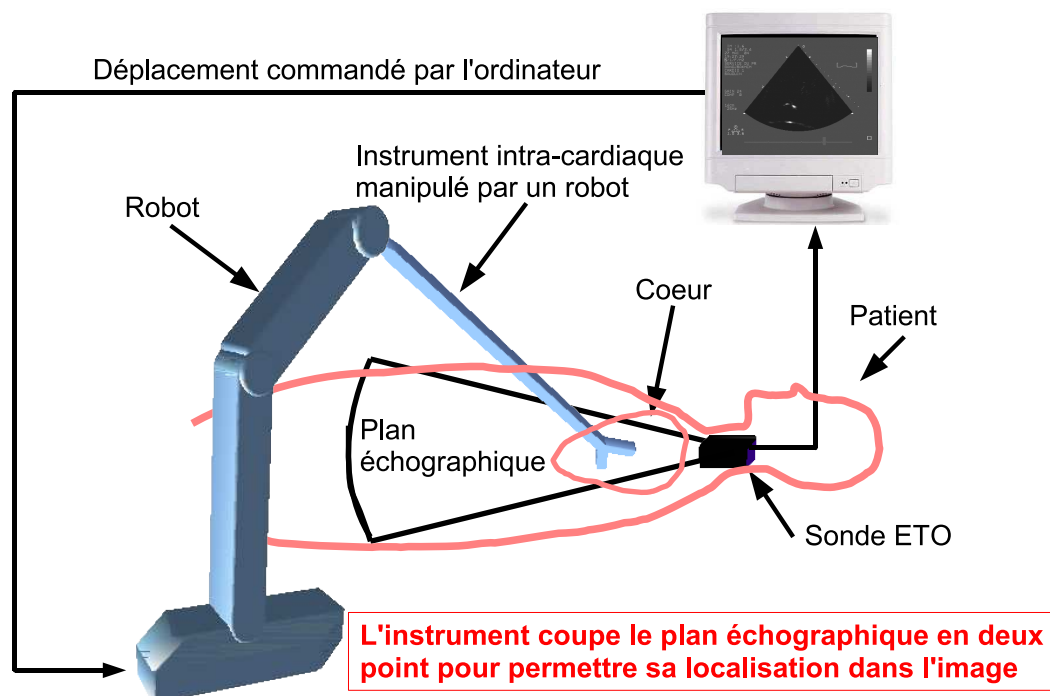


FIG. 1.24 – Description du système

Dans la suite, le système utilisé est constitué d'un instrument qui passe à travers un trocart et dont les mors, sécants, coupent le faisceau d'ultrasons. La trace de l'instrument dans l'image est donc composée de deux blocs. Avec un tel système, tant que l'instrument est visible dans l'image, il est localisable et commandable cinématiquement.

Le trocart est modélisé par un point fixe  $T$  qui laisse à l'instrument quatre degrés de liberté (les trois rotations et la translation le long de l'axe de l'instrument).

L'instrument  $\mathcal{I}$  est quant à lui modélisé par trois droites sécantes en un point  $I$  : l'axe de l'instrument et les deux mors.

Enfin le faisceau d'ultrasons est modélisé par un plan  $\Pi$ . Le centre de gravité d'un bloc

dans l'image coïncide avec le point d'intersection d'un mors avec le plan échographique. On définit les quatre repères orthonormés suivant :

- $\mathcal{R}_T = \{T; \vec{i}_T, \vec{j}_T, \vec{k}_T\}$  est le repère lié à la base du robot au point  $T$  ;
- $\mathcal{R}_S = \{S; \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$  est le repère lié à la sonde  $\mathcal{S}$  avec  $\vec{k}_S$  un vecteur perpendiculaire au plan échographique et  $S$  l'origine du faisceau d'ultrasons ;
- $\mathcal{R}_I = \{I; \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I\}$  est le repère lié à l'instrument  $\mathcal{I}$ . Le vecteur  $\vec{k}_I$  est pris colinéaire à l'axe de l'instrument, et le vecteur  $\vec{i}_I$  appartient au plan de l'instrument ;
- $\mathcal{R}_M = \{M; \vec{i}_M, \vec{j}_M, \vec{k}_M\}$ , où  $\vec{i}_M$  est défini par  $\vec{i}_M = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$ .

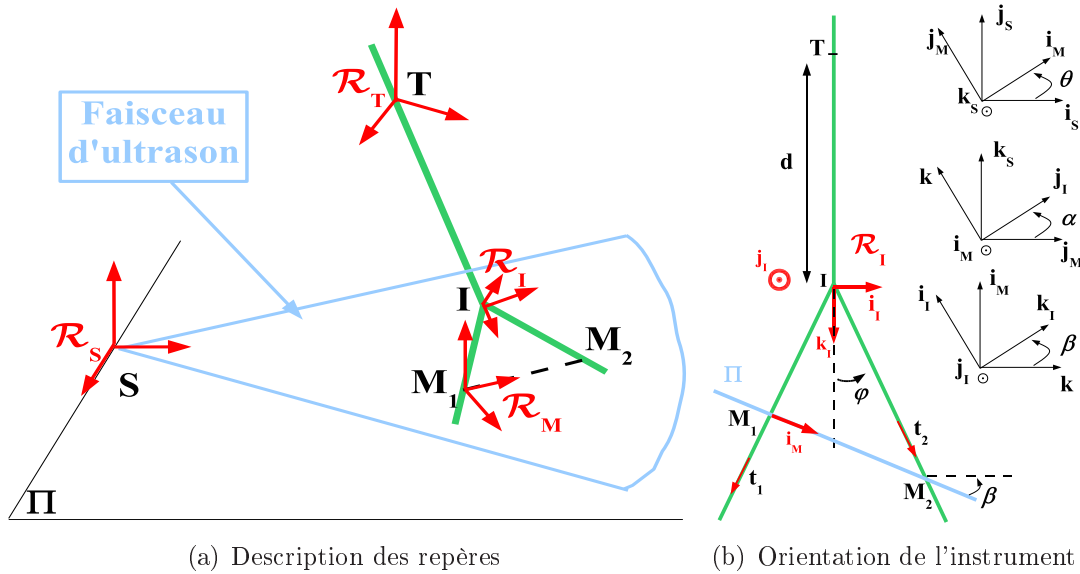


FIG. 1.25 – Modélisation du système

L'orientation du repère  $\mathcal{R}_I$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_S$  est décrite par les angles d'Euler notés  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  définis selon la convention ZXY.

Les mors de l'instrument doivent couper le plan en deux points, les angles sont donc tels que :  $\theta \in ]0, 2\pi[$ ,  $\alpha \in ]\pi/2, 3\pi/2[$  et  $\beta \in ]-\pi/2 + \varphi, \pi/2 - \varphi[$ , avec  $\varphi = (\vec{k}_I, \vec{t}_2) = (\vec{t}_1, \vec{k}_I)$ .

De plus, on utilisera les notations suivantes :

$$\overrightarrow{TI} = d\vec{k}_I \quad (1.22)$$

$$\overrightarrow{IM}_i = l_i \vec{t}_i, \text{ pour } i = \{1, 2\} \quad (1.23)$$

$${}^I\mathbf{t}_1 = [-\sin \varphi \ 0 \ \cos \varphi]^T \quad (1.24)$$

$${}^I\mathbf{t}_2 = [\sin \varphi \ 0 \ \cos \varphi]^T \quad (1.25)$$

Les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  valent donc :

$$l_1 = \frac{\delta \cos(\varphi + \beta)}{\sin(2\varphi)} \quad (1.26)$$

$$l_2 = \frac{\delta \cos(\varphi - \beta)}{\sin(2\varphi)} \quad (1.27)$$

Puisque l'instrument passe à travers un point fixe, ses seuls degrés de liberté sont les trois rotations autour du point d'insertion et la translation le long de l'axe de l'instrument, figure 1.26.

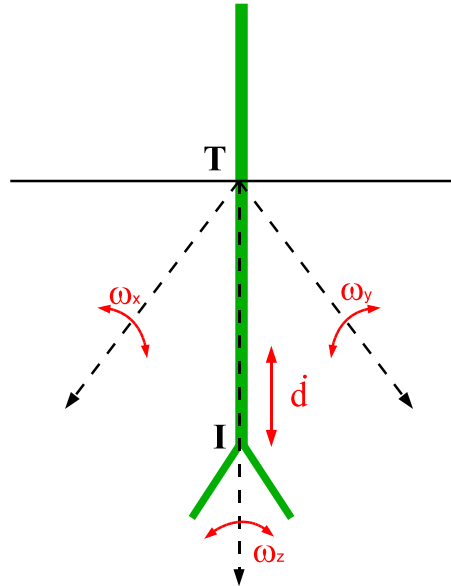


FIG. 1.26 – Degrés de liberté autour du point fixe

Le torseur cinématique exprimé au point fixe  $T$  s'écrit donc :

$$\mathcal{C}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = \omega_x \vec{i}_I + \omega_y \vec{j}_I + \omega_z \vec{k}_I \\ \vec{V}(T \in \Sigma/\Pi) = \dot{d} \vec{k}_I \end{array} \right\}_T \quad (1.28)$$

On montre en annexe B que ce torseur est un torseur non singulier, c'est-à-dire qu'il n'engendre de vitesse nulle dans l'image que si  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \dot{d} = 0$ . Le vecteur défini par

$$\mathbf{u}_I = [\omega_y \quad \dot{d} \quad \omega_x \quad \omega_z] \quad (1.29)$$

est donc un vecteur de commande permettant de contrôler la vitesse des points dans l'image échographique.

On montrera dans la suite l'intérêt d'ordonner ainsi les composantes du vecteur  $\mathbf{u}_I$ .



## Conclusion

De l'étude de l'interaction entre un instrument et un faisceau d'ultrasons a découlé un double choix : choix des matériaux constitutifs de l'instrument (acier inoxydable enrobé de polyuréthane) et choix de la configuration entre l'instrument et le faisceau d'ultrasons (chaque mors de l'instrument doit couper le plan échographique de façon à produire deux blobs dans l'image).

Après avoir déterminé cette configuration, une hypothèse de modélisation a été proposée et validée expérimentalement : le centre de gravité de la trace de l'instrument détectée dans l'image coïncide approximativement avec un point défini comme l'intersection d'une droite représentant l'instrument et d'un plan modélisant le faisceau d'ultrasons.

Enfin, une étude cinématique du système a permis de déterminer la géométrie relative des mors d'un instrument de sorte que les quatre degrés de liberté de l'instrument soient commandables.

Dans le chapitre suivant, on aborde le problème central de la commande par asservissement visuel.

# Chapitre 2

## Asservissement visuel

---

### Introduction

Ce chapitre est consacré à la commande d'un système de guidage par échographie.

Dans une première partie, le principe général de l'asservissement visuel sur lequel reposent ces travaux, est présenté et appliqué à un exemple simple : un pendule à deux degrés de liberté, (section 2.1).

Dans une seconde partie, on montre comment appliquer une telle commande au guidage par imagerie échographique en chirurgie mini-invasive. Plusieurs lois de commande sont alors évaluées. Au chapitre précédent, il a été montré que la trace de l'instrument dans l'image peut être modélisée par un ensemble de points. La première loi de commande proposée, section 2.2, consiste à contrôler directement les coordonnées de ces points dans l'image par inversion du modèle cinématique. Cette commande nécessite de pouvoir estimer l'orientation de l'instrument par rapport au plan échographique. Or, dans une salle de chirurgie, l'ajout de matériel permettant de faire cette localisation n'est pas souhaitable. Une loi de commande permettant de s'affranchir de toute connaissance de la transformation entre la sonde et l'instrument est donc proposée, section 2.3. Bien que réalisant un découplage satisfaisant, cette dernière commande, toujours basée sur le contrôle direct des coordonnées des points, atteint ses limites lorsqu'il est nécessaire de réorienter l'instrument dans l'image.

On propose alors de contrôler directement l'orientation de l'instrument grâce à la loi de commande présentée dans la section 2.4. L'apport fonctionnel de cette approche est indéniable. Cependant, il sera montré que celle-ci peut conduire à une perte de visibilité de l'instrument lorsque l'écartement  $\delta$  des mors dans l'image est trop important (l'instrument sort de l'image) ou trop petit (les points se fusionnent dans l'image).

La proposition finale, section 2.5, consiste alors à utiliser des gains variables de façon à maîtriser l'écartement des points en bornant l'erreur en  $\delta$  tout au long des trajectoires dans l'image.

## 2.1 Principe de l'asservissement visuel

### 2.1.1 Principe général

Une boucle d'asservissement visuel (voir figure 2.1) est un contrôleur conçu pour déplacer un ensemble de primitives  $\mathbf{s}$  extraites d'une image vers une valeur désirée  $\mathbf{s}_d$  qui ici est toujours choisie constante.

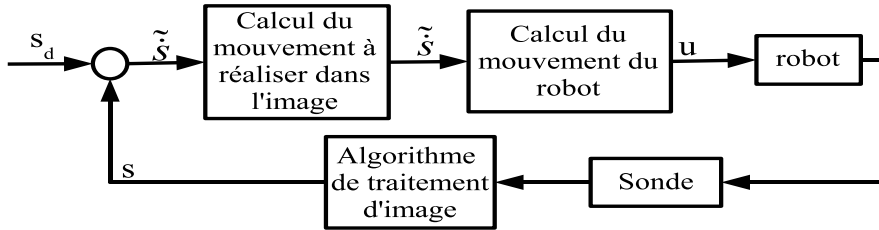


FIG. 2.1 – Principe de l'asservissement visuel

Un correcteur permet de calculer en fonction de l'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}_d - \mathbf{s}$ , la vitesse que l'on souhaite commander pour les primitives dans l'image :

$$\tilde{\dot{\mathbf{s}}} = \lambda(\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) \quad (2.1)$$

De façon tout à fait classique, la commande  $\mathbf{u}$  envoyée au robot, homogène à une vitesse est calculée grâce à la loi de commande suivante :

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} \tilde{\dot{\mathbf{s}}} = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} (\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

où  $\widehat{\mathbf{J}}_s$  est l'estimation de la matrice jacobienne image  $\mathbf{J}_s$  supposée inversible (c'est-à-dire, notamment, que  $\dim(\mathbf{s}) = \dim(\mathbf{u})$ ) et définie par :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_s \mathbf{u} \quad (2.3)$$

Si tous les paramètres du modèle utilisé sont parfaitement connus alors  $\widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} = \mathbf{J}_s^{-1}$ . Le comportement en boucle fermée du système devient alors ( $\mathbf{s}_d$  étant constant) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_s \mathbf{u} = -\lambda \mathbf{J}_s \mathbf{J}_s^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = -\lambda \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Cette équation est linéaire et les variables sont parfaitement découplées. L'erreur converge exponentiellement vers zéro. Le système est globalement asymptotiquement stable.

Dans la pratique, tous les paramètres du modèle cinématique ne sont pas connus de façon certaine. Le jacobien  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}}$  utilisé dans la boucle de commande n'est pas identique au jacobien théorique  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ . Le comportement en boucle fermée du système devient alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\lambda \underbrace{\mathbf{J}_{\mathbf{s}} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}}^{-1}}_{=\mathbf{A}(\mathbf{s})} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

Cette équation n'est en général plus linéaire. La convergence vers un point d'équilibre et la stabilité de ce point dépendent des propriétés de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  et donc des erreurs commises sur les paramètres du modèle. Il faut donc étudier la stabilité et la robustesse de la loi de commande vis à vis des incertitudes paramétriques.

La première propriété à vérifier est qu'un point d'équilibre existe et qu'il est unique. Cette propriété permet de garantir que si le système converge alors il converge bien vers la position désirée et non vers une autre position annulant la commande sans annuler l'erreur dans l'image.

Montrer l'existence d'un point d'équilibre est en général évident dans un problème où  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  est une matrice carrée. Il suffit en effet de vérifier que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  entraîne  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ . Pour montrer que ce point d'équilibre est unique, une condition nécessaire et suffisante est que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  soit non-singulière, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul.

L'existence et l'unicité d'un point d'équilibre ne permet pas de conclure quant à la convergence du système. Pour savoir si le système converge, il faut alors étudier la stabilité de ce point d'équilibre.

La méthode indirecte de Lyapunov permet d'étudier la stabilité locale d'un système. Cette méthode consiste à linéariser le système autour de sa position d'équilibre et à étudier la stabilité du système linéarisé.

Pour linéariser le système, on écrit le comportement en boucle fermée (équation 2.5), en fonction du vecteur de mesure et du vecteur désiré :

$$\dot{\mathbf{s}} = \lambda \mathbf{A}(\mathbf{s})(\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) \quad (2.6)$$

On considère alors le système linéarisé autour de la position d'équilibre  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_d$ , on a :

$$\dot{\mathbf{s}} \approx \lambda \mathbf{A}(\mathbf{s}_d)(\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) \quad (2.7)$$

Ce système linéaire est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s}_d)$  sont à partie réelle strictement positive.

Pour conclure sur la stabilité du système non linéarisé on utilise alors le théorème de Lyapunov suivant :

**Théorème 1. Méthode indirecte de Lyapunov**

*Si le système linéarisé est asymptotiquement stable alors le point d'équilibre du système non linéaire est localement asymptotiquement stable.*

*Si le système linéarisé est instable alors le point d'équilibre du système non linéaire est localement instable.*

*Si le système linéarisé est en limite de stabilité (ou marginalement stable) alors on ne peut rien conclure sur la stabilité du système non linéaire. ■*

Finalement, pour montrer la stabilité asymptotique locale d'un système, il suffit donc de vérifier la propriété suivante :

**Propriété 1.**

*Si les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s}_d)$  sont toutes à partie réelle strictement positive, alors le système non linéaire donné à l'équation 2.6 est localement asymptotiquement stable.* ■

La stabilité locale permet de montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\mathbf{s}_d$  tel que si la position initiale  $\mathbf{s}(0)$  est dans ce voisinage, alors le système va converger et l'erreur finale sera nulle. Par contre, elle ne permet pas de prévoir le comportement du système lorsque la position courante est loin de la position désirée.

Pour déterminer le comportement du système lorsque la position initiale n'est pas dans le voisinage  $V$  de la position désirée, il faut étudier la stabilité globale du système.

On a vu que son comportement en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\lambda \underbrace{\mathbf{J}_s \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1}}_{=\mathbf{A}(\mathbf{s})} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

En multipliant cette expression par  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ , on trouve :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = -\lambda \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}(\mathbf{s}) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.9)$$

Comme le gain proportionnel  $\lambda$  est positif, une condition suffisante pour garantir que l'erreur converge vers zéro est que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  soit définie positive.

Pour montrer la stabilité globale d'un système, il suffit donc que ce système vérifie la propriété suivante :

**Propriété 2.**

*Si les valeurs propres de la partie symétrique de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  sont toutes à partie réelle strictement positive alors le système non linéaire donné à l'équation 2.6 est globalement asymptotiquement stable.* ■

Il faut noter que cette condition est une condition suffisante mais pas nécessaire. Le système peut être globalement asymptotiquement stable bien que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  ne soit pas définie positive. Dans ce cas, la norme de l'erreur peut croître par moments mais converger finalement vers 0.

### 2.1.2 Exemple d'application : un pendule à deux degrés de liberté

Afin d'illustrer ces diverses propriétés, on étudie l'asservissement visuel à partir d'images échographiques d'un pendule à deux degrés de liberté.

On considère une tige modélisée par une droite  $\mathcal{D}$  qui coupe le plan échographique en un point  $M$ . Un point  $T$  de cette tige est supposé fixe par rapport au plan échographique. On bloque la rotation de la tige autour de son axe. Il reste donc deux degrés de liberté : la rotation autour du point fixe selon un axe quelconque du plan perpendiculaire à la tige.

On définit les repères suivants figure 2.2 :

- $\mathcal{R}_S = \{S; \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S\}$  est le repère lié à la sonde  $\mathcal{S}$  avec  $\vec{k}_S$  un vecteur perpendiculaire au plan échographique et  $S$  l'origine du faisceau d'ultrasons,
- $\mathcal{R}_I = \{T; \vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I\}$  est le repère lié à la tige  $\mathcal{D}$ . Le vecteur  $\vec{k}_I$  est colinéaire à l'axe de la tige.

L'orientation du repère  $\mathcal{R}_I$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_S$  est décrite par les angles d'Euler notés  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  définis selon la convention ZXY.

De plus, on utilisera la notation suivante :  $\overrightarrow{TM} = l\vec{k}_I$ ,  $l > 0$ .

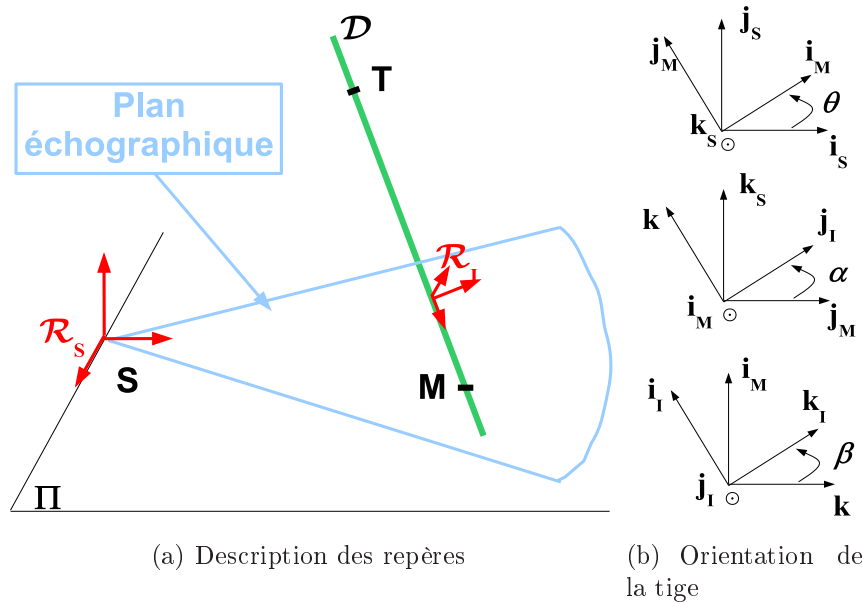


FIG. 2.2 – Modélisation du système à deux degrés de liberté

On choisit comme vecteur de commande  $\mathbf{u} = [\omega_x \ \omega_y]$  où  $\omega_x$  et  $\omega_y$  sont les vitesses de rotation de la tige perpendiculairement à son axe, c'est-à-dire telles que  ${}^I\Omega(\mathcal{D}/\Pi) =$

$[\omega_x \ \omega_y \ 0]^T$  dans le repère lié à la tige.

On choisit comme mesure, les coordonnées du point  $M$  dans le repère lié au plan échographique :  $\mathbf{s} = [s_{x_M} \ s_{y_M}]$ . Ces coordonnées sont supposées être disponibles en mètres grâce à une connaissance parfaite des gains  $k_x$  et  $k_y$ .

Le modèle cinématique reliant la vitesse d'un solide à la vitesse de l'intersection d'une droite qui lui est liée et d'un plan fixe est établi en annexe C. Dans le cas étudié ici, le modèle devient :

$$\vec{V}(M/\Pi) = \frac{l}{\vec{k}_S \cdot \vec{k}_I} \vec{k}_S \wedge (\vec{k}_I \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi)) \quad (2.10)$$

En utilisant les angles définis figure 1.25(b), on peut établir la relation matricielle entre le vecteur de mesure  $\mathbf{s}$  et le vecteur de commande  $\mathbf{u}$ . Le jacobien du système s'écrit donc :

$$\mathbf{J}_s = \frac{l}{\cos \alpha \cos \beta} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \theta \\ -\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le jacobien inverse s'écrit alors :

$$\mathbf{J}_s^{-1} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \theta & -\cos \alpha \cos \theta \\ \cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \alpha \sin \beta & \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Supposons que l'on connaisse parfaitement l'orientation du plan échographique par rapport à la tige (c'est-à-dire les angles  $\alpha$  et  $\beta$ ), mais que l'orientation dans le plan doive être estimée (c'est-à-dire l'angle  $\theta$ ). Dans ce cas,  $\mathbf{J}_s^{-1}$  n'est pas parfaitement connu.

La loi de commande s'écrit donc :

$$\mathbf{u} = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} (\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

avec :

$$\widehat{\mathbf{J}}_s^{-1} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \hat{\theta} & -\cos \alpha \cos \hat{\theta} \\ \cos \hat{\theta} \cos \beta - \sin \hat{\theta} \sin \alpha \sin \beta & \sin \hat{\theta} \cos \beta + \cos \hat{\theta} \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où  $\hat{\theta}$  est la valeur estimée de l'angle  $\theta$ . En utilisant cette loi de commande, le comportement en boucle fermée du système est :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_s \mathbf{u} = -\lambda \underbrace{\mathbf{J}_s \widehat{\mathbf{J}}_s^{-1}}_{=\mathbf{A}(\mathbf{s})} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.15)$$

avec :

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \hat{\theta}) & \sin(\theta - \hat{\theta}) \\ -\sin(\theta - \hat{\theta}) & \cos(\theta - \hat{\theta}) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  est ici simplement une rotation d'angle  $\theta - \hat{\theta}$  constant dans le plan échographique.

Si le paramètre  $\theta$  est parfaitement connu, c'est-à-dire si  $\hat{\theta} = \theta$  alors :

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (2.17)$$

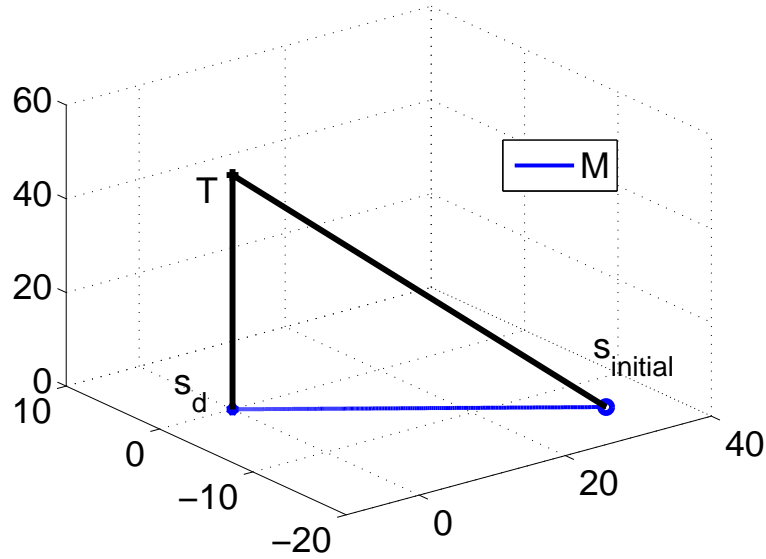


FIG. 2.3 – Résultat (en cm) dans un cas parfaitement connu :  $\hat{\theta} = \theta$

L'équation 2.15 est une équation linéaire. L'erreur converge vers zéros de façon exponentielle et la trajectoire dans l'image est un ligne droite. La figure 2.3 montre le résultat d'une simulation réalisée dans ce cas. Le système se comporte en accord avec l'équation 2.15 lorsque  $\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ .

Dans le cas où  $\hat{\theta} \neq \theta$ , on peut étudier la stabilité du système grâce aux propriétés 4 et 5.

#### Existence et unicité du point d'équilibre

L'existence d'un point d'équilibre est évidente puisque  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  entraîne  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ . Pour montrer que ce point d'équilibre est unique, il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  est non nul. Or :

$$\det \mathbf{A}(\mathbf{s}) = 1 \neq 0 \quad (2.18)$$

Le point d'équilibre  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  existe et est unique.

#### Stabilité locale

Une condition nécessaire et suffisante pour montrer la stabilité asymptotique locale de ce système est que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s} = \mathbf{s}_d)$  soient toutes à parties réelles strictement positives, (voir propriété 1).

Pour vérifier cette condition, on utilise la propriété suivante :

**Propriété 3.** Pour une matrice  $\mathbf{F}$  de dimensions  $(n, n)$ , les  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$   $i \in ]1; n[$ , vérifient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr} \mathbf{F} \\ \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det \mathbf{F} \end{cases} \quad (2.19)$$

■



La matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  est une matrice de dimensions  $(2, 2)$ , ses valeurs propres sont donc strictement positives si et seulement si :

$$\begin{cases} \operatorname{tr}\mathbf{A}(\mathbf{s}) > 0 \\ \det\mathbf{A}(\mathbf{s}) > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

On a déjà calculé  $\det\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \mathbf{1} > \mathbf{0}$ . Il reste à vérifier la condition sur la trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ .

Comme :

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \mathbf{2} \cos(\theta - \hat{\theta}) \quad (2.21)$$

la trace de  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  est strictement positive si et seulement si  $(\theta - \hat{\theta}) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Si cette condition est vérifiée alors système est localement asymptotiquement stable autour de sa position d'équilibre  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_d$ .

### Stabilité globale

Une condition suffisante pour montrer la stabilité globale du système, est que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  soit définie positive. Pour vérifier cette condition, il faut et il suffit que les valeurs propres de la partie symétrique de  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  soient toutes à partie réelle strictement positive.

La partie symétrique de  $\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} [\mathbf{A}(\mathbf{s}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{s})]$  s'écrit :

$$\mathbf{A}_{\text{Sym}}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \hat{\theta}) & 0 \\ 0 & \cos(\theta - \hat{\theta}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Le système est donc globalement asymptotiquement stable dès que  $(\theta - \hat{\theta}) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

On peut noter que dans cet exemple, la condition obtenue pour la stabilité globale est identique à la condition trouvée pour la stabilité locale. Comme, par ailleurs, la stabilité globale implique la stabilité locale, on peut pour cet exemple conclure que la condition trouvée est nécessaire et suffisante pour montrer la stabilité globale du système. En général, les conditions obtenues pour montrer les stabilités locale et globale sont différentes, et la condition de définition positive de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  n'est qu'une condition suffisante pour montrer la stabilité globale du système.

La figure 2.4 montre le résultat d'une simulation réalisée dans un cas où le paramètre  $\theta$  est mal estimé. Contrairement au résultat précédent, le déplacement dans l'image ne se fait plus en ligne droite. Cependant, la convergence vers la position désirée est obtenue.

Si l'estimation est particulièrement mauvaise, (figure 2.5) mais que les conditions de stabilité sont vérifiées, alors le système converge vers la position désirée en suivant une trajectoire très indirecte (ici, une spirale).

Par contre, lorsque la condition de stabilité n'est plus respectées, on observe bien la divergence attendue, figure 2.6.

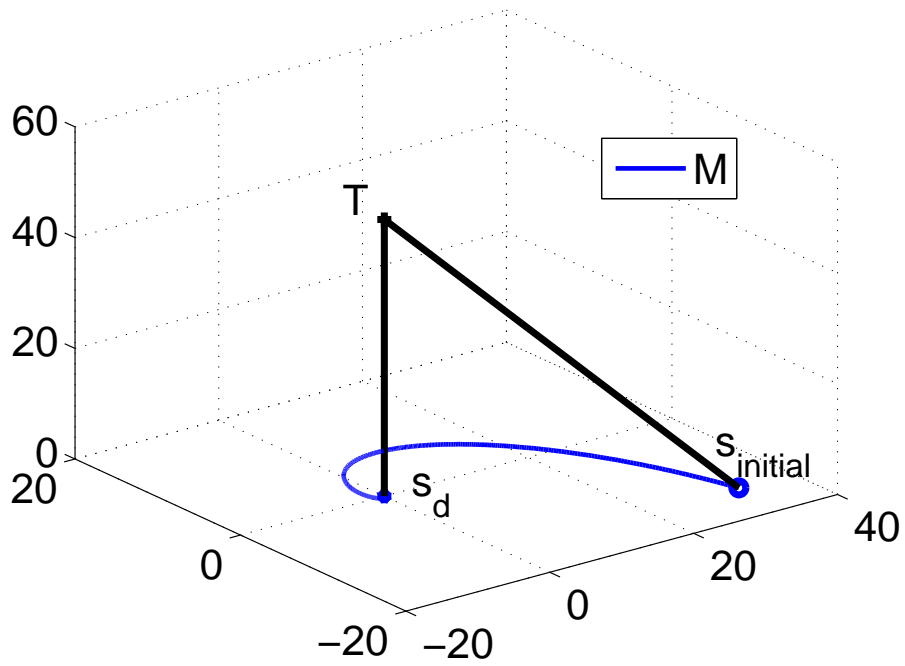


FIG. 2.4 – Résultat (en cm) dans un cas mal étalonné :  $\hat{\theta} = \theta + \pi/4$

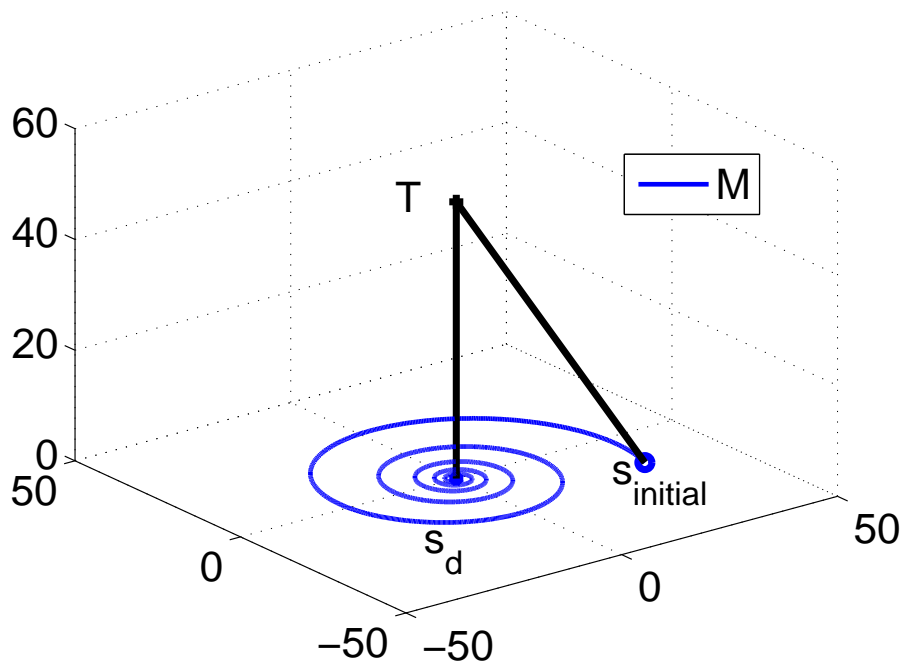


FIG. 2.5 – Résultat (en cm) dans un cas en limite de stabilité :  $\hat{\theta} = \theta + \pi/2 - 0,1$

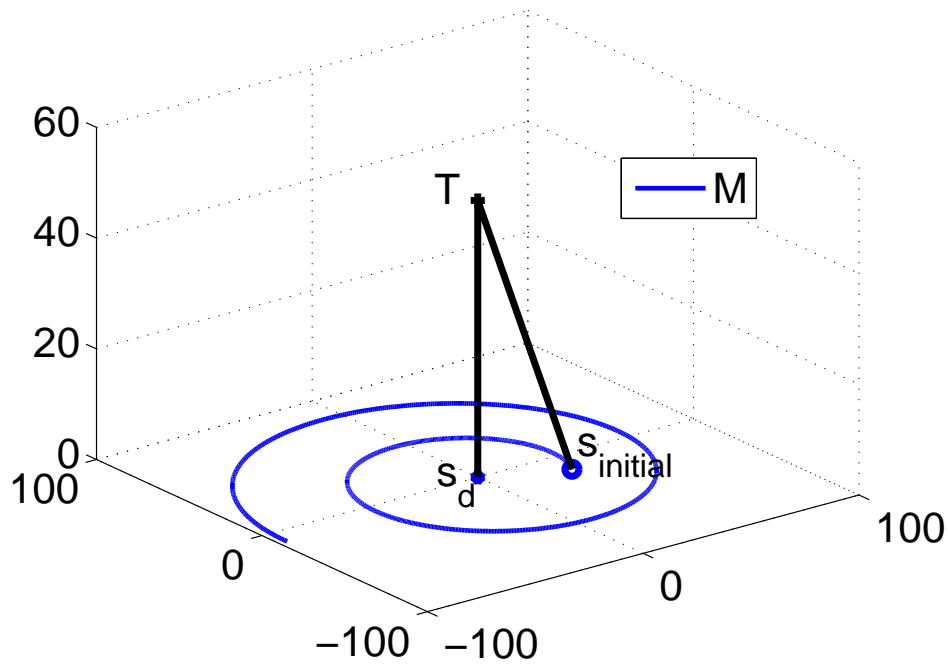


FIG. 2.6 – Résultat (en cm) dans un cas instable :  $\hat{\theta} = \theta + \pi/2 + 0,1$

### 2.1.3 Conclusion

Dans cette partie, ont été présentés les principes généraux de l'asservissement visuel ainsi que leur application à un exemple simple (un pendule à deux degrés de liberté).

Une partie fondamentale du travail réside dans le choix du vecteur de primitives  $\mathbf{s}$  représentant la position mesurée dans l'image. En effet, de ce choix découle un jacobien  $\mathbf{J}_s$  entre les vitesses dans l'image et les vitesses de l'instrument dont on a vu que les propriétés influencent directement la stabilité et la robustesse de la loi de commande. En outre, ce jacobien doit être estimé pour calculer la commande ce qu'il n'est pas toujours possible de faire précisément dans des conditions réalistes pour lesquelles certains paramètres (géométriques notamment) sont mal connus.

Dans la suite de ce chapitre, les méthodes précédentes sont utilisées pour synthétiser une loi de commande robuste permettant de réaliser le guidage d'un instrument de chirurgie mini-invasive.

## 2.2 Asservissement visuel par contrôle de points dans l'image

### 2.2.1 Loi de commande

On verra au chapitre 3, qu'il est possible de mesurer les coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$ , centres de gravité des blobs dans l'image. Ces points correspondent aux intersections entre les mors de l'instrument et le plan échographique.

On suppose que l'appariement entre points images et mors de l'instrument est correct, chapitre 3.

Pour positionner l'instrument par asservissement visuel, on peut choisir comme vecteur de primitives dans l'image, le vecteur composé des coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$  exprimées dans le repère attaché à la sonde  $\mathcal{R}_S$ .

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} {}^S x_{M_1} \\ {}^S x_{M_2} \\ {}^S y_{M_1} \\ {}^S y_{M_2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Ce vecteur s'obtient à partir du vecteur de mesures dans l'image  $\mathbf{s}_{\text{mes}}$  par changement d'échelle entre pixel et mètre.

Le vecteur d'erreur associé est défini comme la différence entre le vecteur désiré  $\mathbf{s}_{1d}$  et le vecteur mesuré  $\mathbf{s}_1$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}_1} = \mathbf{s}_{1d} - \mathbf{s}_1 \quad (2.24)$$

Établir le jacobien image  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}_1}$  revient à trouver la relation entre ce vecteur de commande et le vecteur des vitesses des primitives dans l'image. Il faut donc déterminer la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_1} \mathbf{u}_I \quad (2.25)$$

On a établi le modèle cinématique d'une droite  $\mathcal{D}$  coupant un plan  $\Pi$  en annexe C.

$$\vec{V}(M/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{t} \wedge \left( \vec{V}(I/\Pi) - l \vec{t} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \right) \right) \quad (2.26)$$

où  $\vec{t}$  est le vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ , le point  $I$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  et est tel que  $\vec{IM} = l \vec{t}$ ,  $\vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi)$  est le vecteur des vitesses de rotation de la droite par rapport au plan et  $\vec{V}(I/\Pi)$ , la vitesse du point  $I$  par rapport au plan  $\Pi$ .

En exprimant le torseur cinématique de l'instrument dans son mouvement par rapport au plan échographique au point  $T$  on trouve :

$$\vec{V}(M/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{t} \wedge \left( \vec{V}(T/\Pi) + \left( d\vec{k}_I - l \vec{t} \right) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \right) \right) \quad (2.27)$$

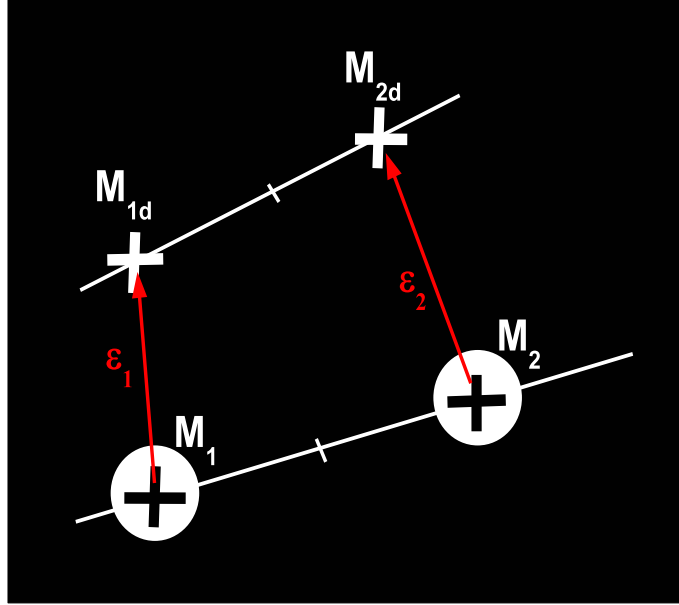


FIG. 2.7 – Vecteur d'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}_1} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T]^T$

En écrivant ce modèle pour chacune des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  et en projetant dans la base  $\mathcal{B}_S$  du repère lié à la sonde, le jacobien s'écrit (annexe C) :

$$\mathbf{J}_{s1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{J}_1 = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M_{1x}} \\ \mathbf{J}_{M_{2x}} \\ \mathbf{J}_{M_{1y}} \\ \mathbf{J}_{M_{2y}} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

avec

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

et

$$\mathbf{J}_{M_{ix}} = \begin{bmatrix} -\frac{l_i + d \cos \varphi}{D} & \frac{(-1)^i \sin \varphi}{D} & -\frac{(l_i \cos \varphi + d)N \tan \alpha}{D} & \frac{(-1)^i l_i \sin \varphi N \tan \alpha}{D} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{J}_{M_{iy}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{l_i \cos \varphi + d}{\cos \alpha} & \frac{(-1)^i l_i \sin \varphi}{\cos \alpha} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

où

$$D = -\cos(\varphi + (-1)^i \beta) \quad (2.32)$$

$$N = (-1)^i \sin(\varphi + (-1)^i \beta) \quad (2.33)$$

On peut noter que le jacobien  $\mathbf{J}_1$  obtenu est bloc triangulaire supérieur (ce qui justifie a posteriori l'ordre des composantes des vecteurs de primitives et de commande). Les zéros sont dûs au fait que les commandes  $\omega_y$  et  $\dot{d}$  ne produisent pas de déplacement des points  $M_1$  et  $M_2$  suivant  $\vec{j}_M$ , c'est-à-dire suivant la perpendiculaire au segment  $[M_1M_2]$ . De plus lorsque l'angle  $\alpha$  est égal à  $\pi$ , c'est-à-dire lorsque l'instrument est contenu dans un plan perpendiculaire au plan échographique, alors le jacobien  $\mathbf{J}_1$  devient bloc diagonal. Ces propriétés sont intéressantes du point de vue de la commande puisqu'elles permettent d'augmenter considérablement la robustesse de la boucle d'asservissement visuel, [Chaumette 2002].

La loi de commande utilisée s'écrit :

$$\mathbf{u}_I = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{s_1}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{I_1} \quad (2.34)$$

Il faut donc calculer l'inverse du jacobien image. On établit donc le modèle cinématique inverse du système dans l'annexe C. Le jacobien inverse s'écrit :

$$\mathbf{J}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\varphi-\beta)}{\Delta_2} & \frac{\cos(\varphi+\beta)}{\Delta_2} & \frac{-\sin \alpha \sin(\varphi-\beta)}{\Delta_2} & \frac{\sin \alpha \sin(\varphi+\beta)}{\Delta_2} \\ \frac{(d \cos \varphi + l_2) \cos(\varphi-\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_1) \cos(\varphi+\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_2) \sin \alpha \sin(\varphi-\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_1) \sin \alpha \sin(\varphi+\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} \\ 0 & 0 & \frac{l_2 \cos \alpha}{\Delta_1} & \frac{l_1 \cos \alpha}{\Delta_1} \\ 0 & 0 & \frac{(l_2 \cos \varphi + d) \cos \alpha}{\sin \varphi \Delta_1} & \frac{-(l_1 \cos \varphi + d) \cos \alpha}{\sin \varphi \Delta_1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = -d(l_1 + l_2) - 2l_1 l_2 \cos \varphi \\ \Delta_2 = 2d \cos \varphi + (l_1 + l_2) \end{cases} \quad (2.36)$$

Le modèle cinématique inverse du système est le suivant :

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{R}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{J}_{s_1}^{-1} \dot{\mathbf{s}}_1 \quad (2.37)$$

On considère que les erreurs de mesure dans l'image sont négligeables. L'angle  $\theta$  et la matrice  $\mathbf{R}_1$  sont donc connus. Les principales incertitudes sont liées à l'estimation de la position et de l'orientation de l'instrument par rapport à la sonde (c'est-à-dire  $\beta$  et  $\alpha$ ). On a donc besoin de n'estimer que la matrice  $\mathbf{J}_1^{-1}$ .

$$\widehat{\mathbf{J}}_{s_1}^{-1} = \widehat{\mathbf{J}}_1^{-1} \mathbf{R}_1^T = \mathbf{J}_1^{-1}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) \mathbf{R}_1^T(\theta) \quad (2.38)$$

## 2.2.2 Étude de stabilité

Le comportement en boucle fermée du système s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{I_1} = -\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{J}_{s_1} \mathbf{u}_I = -\lambda \underbrace{\mathbf{R}_1 \mathbf{J}_1 \widehat{\mathbf{J}}_1^{-1} \mathbf{R}_1^T}_{=\mathbf{A}_1(s_1)} \boldsymbol{\varepsilon}_{I_1} \quad (2.39)$$

### 2.2.2.1 Existence et unicité du point d'équilibre

L'existence d'un point d'équilibre est évidente puisque  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}_1} = \mathbf{0}_{4 \times 1}$  entraîne  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{I}_1} = \mathbf{0}_{4 \times 1}$ . Pour montrer que ce point d'équilibre est unique, il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1) = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_1} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_1}^{-1}$  est non nul quel que soit  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}_1}$ . Puisque les modèles cinématiques direct et inverse existent quelle que soit la configuration du système, les déterminants des matrices  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}_1}$  et  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_1}^{-1}$  sont non nuls. Le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1)$  est donc non nul.

On a donc montré l'existence et l'unicité du point d'équilibre  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}} = \mathbf{0}_{4 \times 1}$ .

### 2.2.2.2 Stabilité locale

Une condition nécessaire et suffisante pour montrer la stabilité asymptotique locale de ce système est que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_{1d})$  soient toutes à partie réelle strictement positive.

Or,  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1)$  et  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{J}_1 \widehat{\mathbf{J}}_1^{-1}$  sont des matrices semblables, elles ont donc les mêmes valeurs propres. Il est donc nécessaire et suffisant d'étudier les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}_1$  qui est une matrice bloc triangulaire supérieure.

En posant  $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$ , on peut écrire :

$$\det(\mathbf{B}_1 - \lambda \mathbf{I}_{4 \times 4}) = \det(\mathbf{C}_1 - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) \det(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) \quad (2.40)$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}_1$  sont donc les valeurs propres des sous matrices  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{D}_1$ .

D'après la propriété 3, les valeurs propres de  $\mathbf{C}_1$  sont positives si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{tr} \mathbf{C}_1 > 0 \\ \det \mathbf{C}_1 > 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

De même, les valeurs propres de  $\mathbf{D}_1$  sont positives si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{tr} \mathbf{D}_1 > 0 \\ \det \mathbf{D}_1 > 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

On montre en annexe D la propriété suivante :

**Propriété 4.** *Propriétés de la matrice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1) = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_1} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_1}^{-1}$   
La matrice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1)$  est à valeurs propres strictement positives.* ■

Le système est donc localement asymptotiquement stable autour de sa position d'équilibre  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_{1d}$  quelle que soit l'estimation faite des paramètres d'orientation de la sonde par rapport à l'axe de l'instrument. Naturellement, la condition sur les angles estimés  $\widehat{\alpha}$  et  $\widehat{\beta}$  est qu'ils soient tels que l'instrument coupe le plan en deux points (c'est-à-dire tels que  $\widehat{\beta} \in ]-\pi/2 + \varphi, \pi/2 - \varphi[$ ).

### 2.2.2.3 Résultats

Les expressions analytiques du jacobien et de son inverse ne permettent pas une étude simple de la stabilité asymptotique globale de la boucle de commande. Cependant des simulations permettent d'évaluer le comportement en boucle fermée du système.

La figure 2.8 montre les déplacements dans l'image et l'erreur  $\varepsilon_{\mathbf{I}_1}$  entre la position désirée et la position mesurée de l'instrument lorsque les paramètres estimés sont égaux aux paramètres réels. Sur ces courbes, l'erreur converge exponentiellement vers zéro en un temps cohérent avec le choix de  $\lambda$  (ici,  $\lambda = 1$ ) et les déplacements dans l'image sont réalisés en lignes droites.

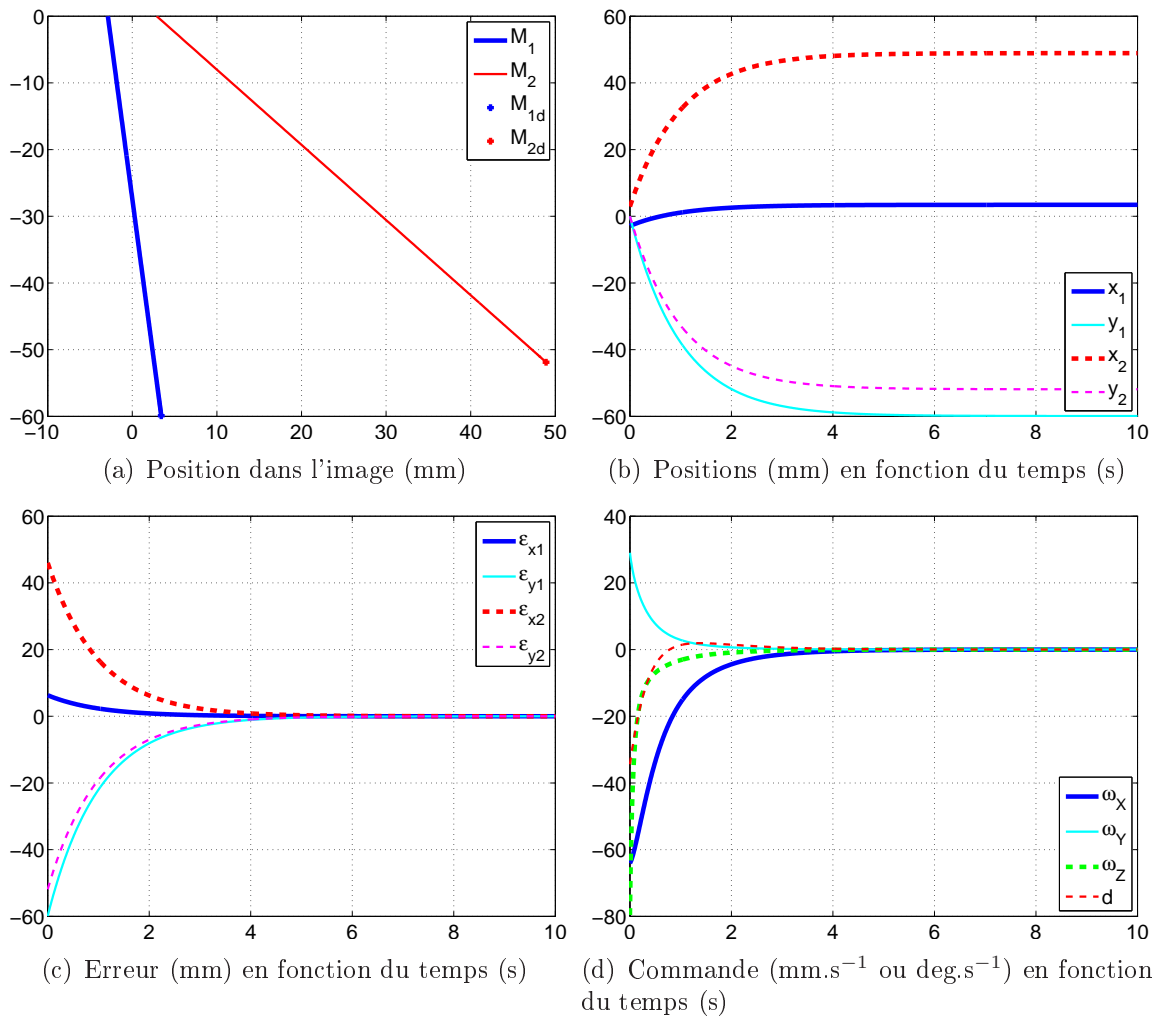


FIG. 2.8 – Résultats de simulations avec commande des points ( $\widehat{\mathbf{J}}_{s1}^{-1} = \mathbf{J}_{s1}^{-1}$ )



### 2.2.3 Conclusion

On observe sur les simulations que le découplage est parfaitement effectués lorsque les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus.

Cependant, cette approche suppose que les angles  $\alpha$  et  $\beta$  soient connus, c'est-à-dire qu'on doit être capable de déterminer la position et l'orientation de la sonde par rapport à la base du robot. En laboratoire, il est aisé de mesurer ces paramètres, on peut pour cela utiliser des localisateurs externes et ajouter des marqueurs sur le robot et sur la sonde. En salle d'intervention, il devient rapidement compliqué d'ajouter du matériel.

Une autre solution consiste à utiliser un algorithme d'identification des paramètres, par exemple celui proposé au chapitre 3. Cependant, l'évaluation in situ de ces paramètres n'est pas toujours possible dans les applications chirurgicales. Tout d'abord, l'identification peut prendre du temps ce qui augmente la durée de l'intervention. Ensuite, le praticien peut avoir à déplacer la sonde en cours d'intervention, il faudra alors refaire une identification. Enfin, les mouvements physiologiques peuvent produire des déplacements de la sonde qui doit rester en contact avec le coeur. La transformation entre la sonde et la base du robot n'est alors plus constante lors de l'identification ce qui fausse les résultats.

D'un point de vue général, l'intérêt de l'asservissement visuel est précisément de s'éviter, dans la mesure du possible, un recalage. Dans la suite, on va donc mettre en place une loi de commande qui permette de s'affranchir de la connaissance de la transformation entre la sonde et l'instrument, et en particulier de la connaissance des angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

## 2.3 Asservissement visuel sans connaissance de la configuration géométrique du système

On a montré que la loi de commande précédente est localement stable quelles que soient les erreurs d'estimations faites sur l'orientation de l'instrument par rapport au plan échographique. On peut donc estimer pour calculer la commande que l'instrument est perpendiculaire au plan échographique tout en conservant la stabilité asymptotique locale du système quelle que soit la position réelle de l'instrument. En d'autres termes, on pose que les angles estimés  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  sont constants et valent respectivement  $\pi$  et 0. Ainsi, il n'est plus nécessaire de connaître la transformation entre la sonde et la base du robot et la stabilité locale de la boucle de commande reste vérifiée.

La loi de commande utilise alors un jacobien inverse estimé qu'il est très simple de calculer

en ligne :

$$\widehat{\mathbf{J}}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \varphi}{2(l + d \cos \varphi)} & \frac{\cos \varphi}{2(l + d \cos \varphi)} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{2 \sin \varphi} & -\frac{\cos \varphi}{2 \sin \varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(l \cos \varphi + d)} & \frac{1}{2(l \cos \varphi + d)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2l \sin \varphi} & \frac{-1}{2l \sin \varphi} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec  $l = \frac{\delta}{2 \sin \varphi}$  d'après les équations 1.26 et 1.27.

La figure 2.9 illustre le comportement du système lorsque l'instrument reste proche de la configuration perpendiculaire ( $\alpha \approx 175^\circ$  et  $\beta \approx 4^\circ$ ). L'erreur de positionnement initiale est de l'ordre de 5 mm sur chaque point, ce qui représente un petit déplacement de l'instrument.

Le modèle est approximativement juste la commande est donc correctement découplée. En effet, les trajectoires sont réalisées en lignes à peu près droites et l'erreur converge avec une allure exponentielle.

Le comportement du système lorsqu'il est loin de la configuration perpendiculaire est montré sur la figure 2.10 ( $\alpha \approx 150^\circ$  et  $\beta \approx 20^\circ$ ). Le découplage n'est plus correctement réalisé. Les déplacements dans l'image ne se font plus en lignes droites et la convergence de l'erreur n'est plus exponentielle. Cependant, le système reste stable et l'erreur converge vers zéro. Pour ce petit déplacement (de l'ordre de 10 mm), le résultat de stabilité locale est confirmé.

La figure 2.11 représente les résultats obtenus lors d'un grand déplacement (de l'ordre de 60 mm). On observe que le système est stable et que l'erreur converge vers zéro, bien que la stabilité globale du système ne soit pas démontrée.

En fait, à travers de nombreuses simulations, nous avons pu observer que la convergence globale n'est pas obtenue en général, en particulier à cause de problème de visibilité. La figure 2.12 illustre ces limitations et montre qu'elles ne sont pas liées à un problème de robustesse d'estimation. On considère par exemple le cas où l'instrument est perpendiculaire au plan échographique. La position désirée est telle que l'instrument doit faire une rotation d'un angle  $\pi$  dans l'image. Puisque l'instrument est perpendiculaire au plan échographique, le découplage est bien réalisé et les points vont se déplacer en lignes droites dans l'image. Ce déplacement implique donc un enfoncement de l'instrument jusqu'à une configuration où les points dans l'image seront confondus. On est alors confronté à un problème de perte de visibilité de l'instrument. De plus, nous avons vu à la section 1.4 que cette configuration est singulière. En effet, il n'y a plus qu'un blob dans l'image, l'instrument ne peut plus être localisé. On retrouve ici le problème de visibilité bien connu en asservissement visuel 2D, lorsque la tâche à réaliser est un retournement autour de l'axe optique [Chaumette 2002].

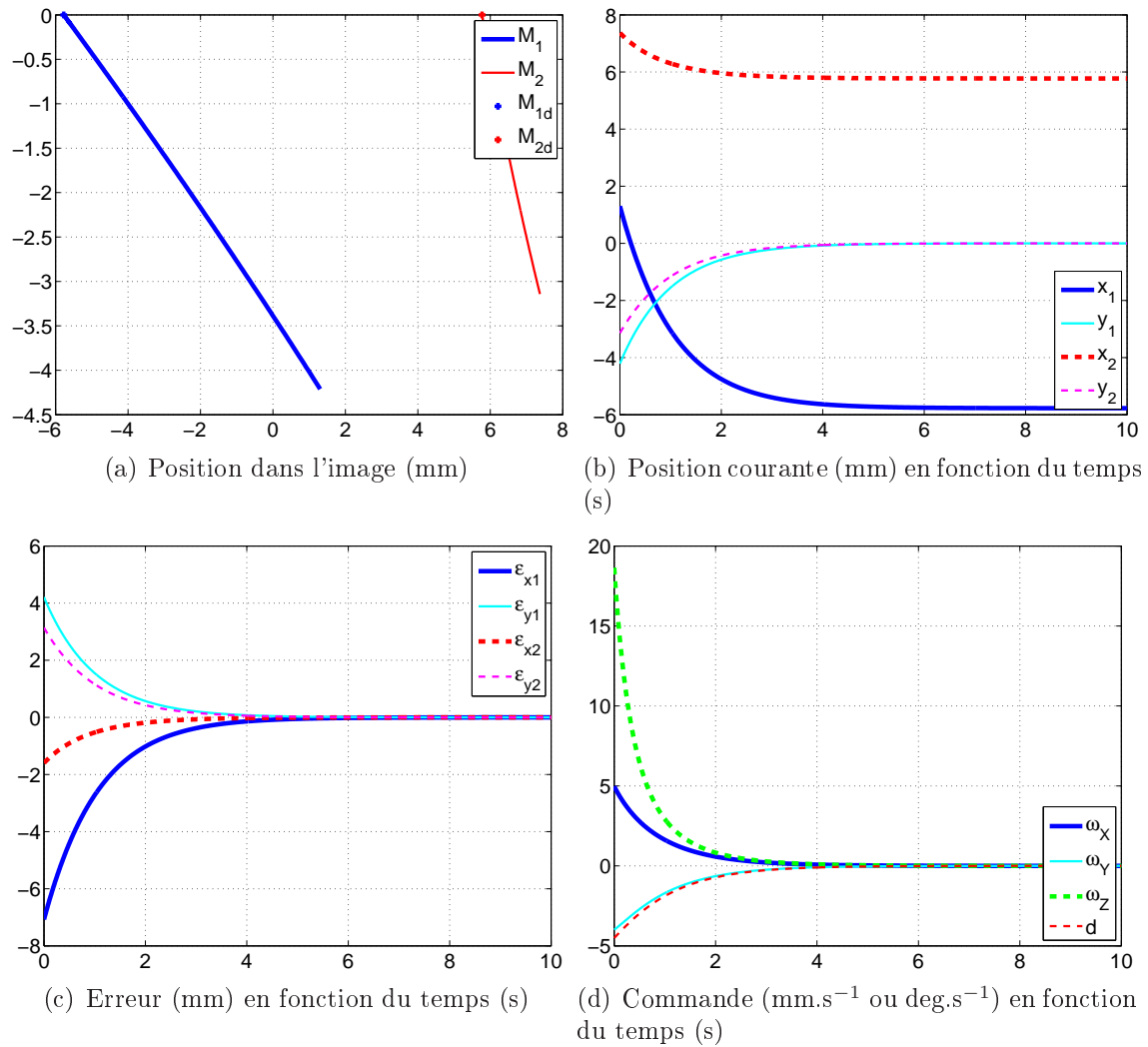


FIG. 2.9 – Résultats de simulations avec commande des points autour de la configuration perpendiculaire ( $\widehat{\mathbf{J}}_{s1}^{-1} \approx \mathbf{J}_{s1}^{-1}$ )

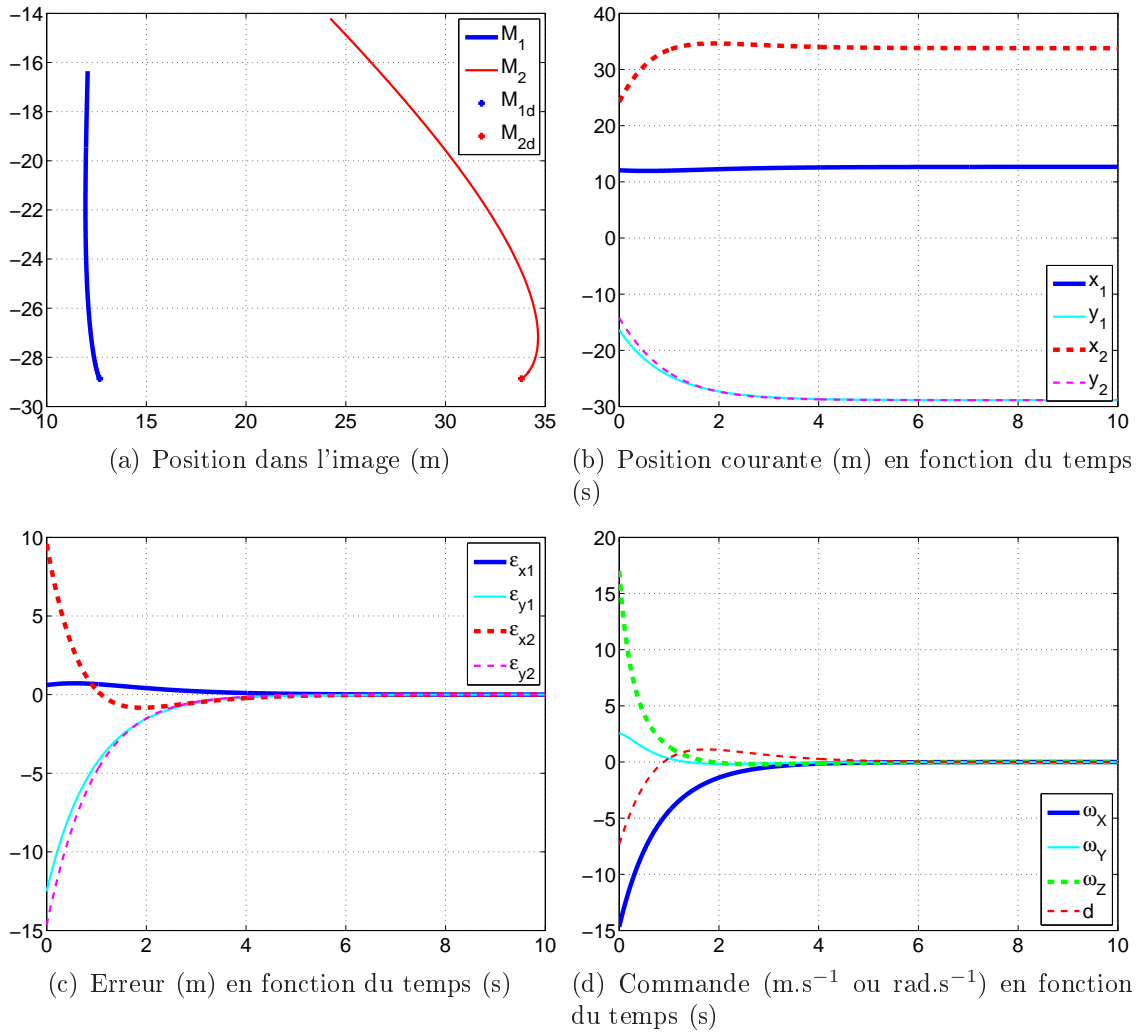


FIG. 2.10 – Résultats de simulations avec commande des points loin de la configuration perpendiculaire ( $\widehat{\mathbf{J}}_{s1}^{-1} \neq \mathbf{J}_{s1}^{-1}$ )

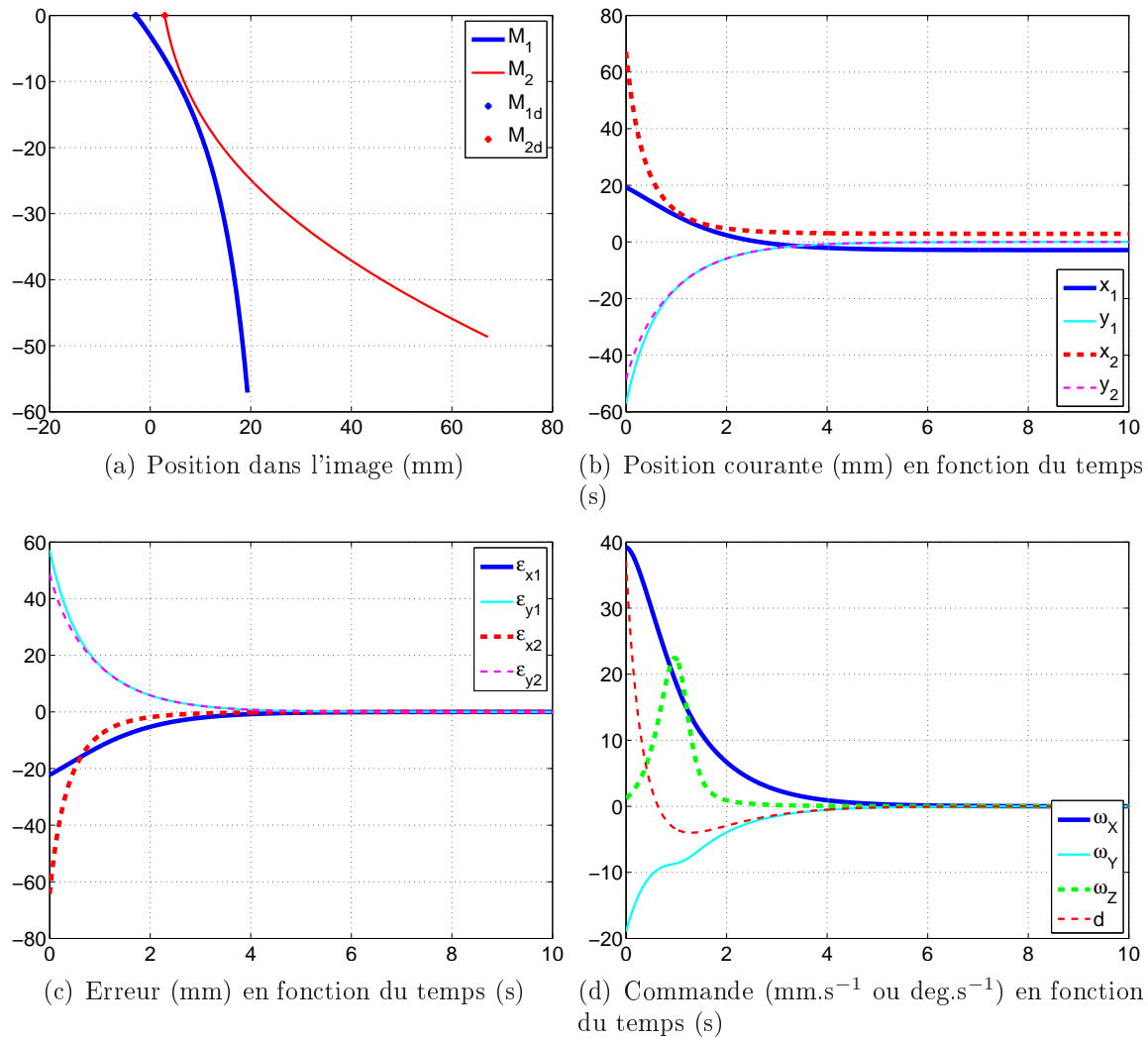


FIG. 2.11 – Résultats de simulations avec commande des points lors d'un grand déplacement

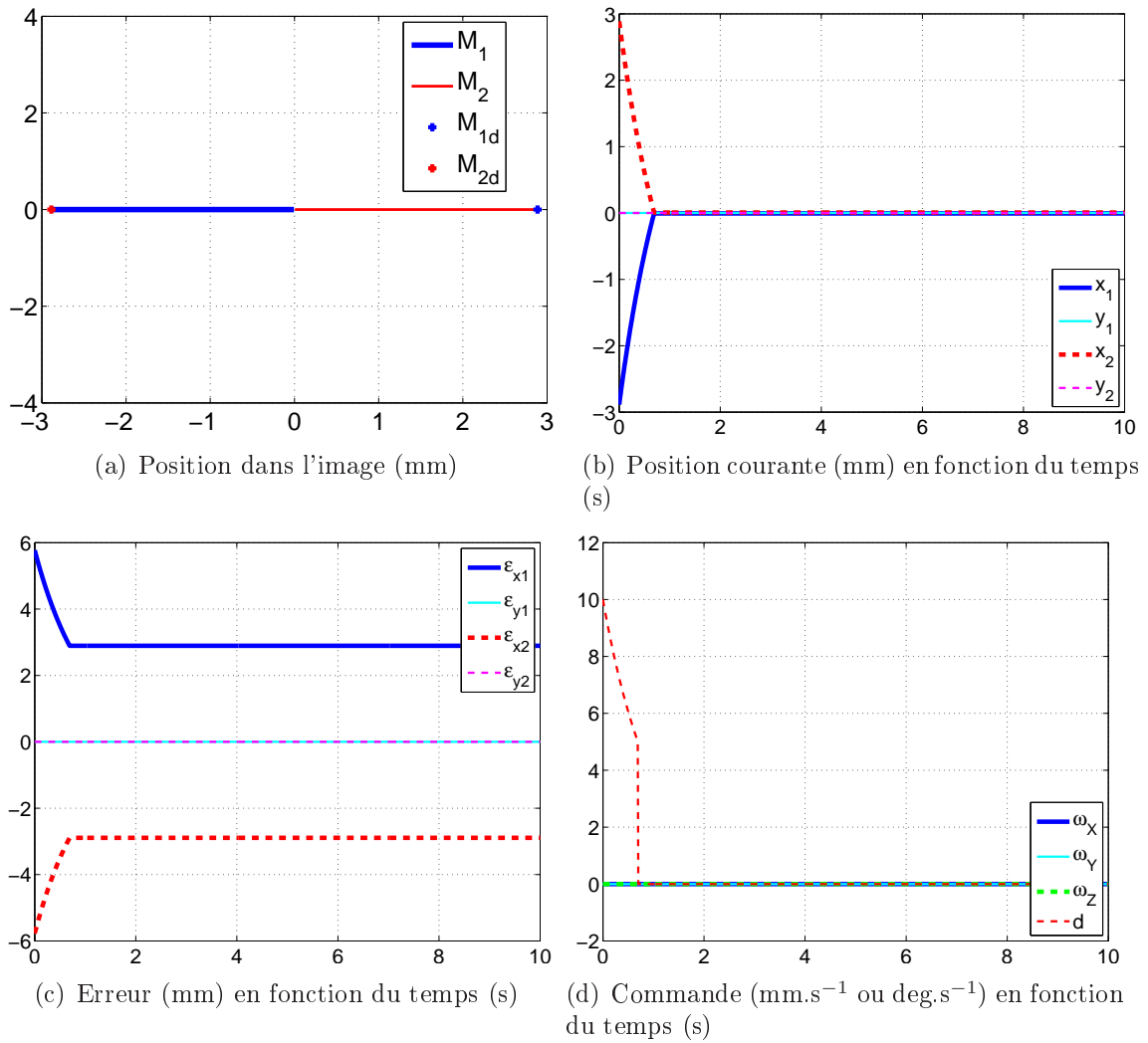


FIG. 2.12 – Résultats de simulations lors d'une réorientation de l'instrument dans l'image

Une solution possible consiste à prévoir les réorientations de l'instrument et à générer une trajectoire qui permette d'éviter que les points ne se confondent. Pour cela, il faut déterminer une trajectoire telle que l'écartement entre les points reste constant le long de la trajectoire.

La solution que nous avons préférée consiste à modifier le paramétrage de la position de l'instrument dans l'image de sorte que l'écartement entre les points ainsi que l'orientation de l'instrument puissent être commandé directement au niveau de l'asservissement. Ce paramétrage et la commande qui en découle font l'objet de la suite de ce chapitre.

## 2.4 Asservissement visuel avec contrôle de l'orientation de l'instrument

### 2.4.1 Loi de commande

Le vecteur de primitives  $\mathbf{s}_2$  est choisi comme suit ,figure 2.13 :

$$\mathbf{s}_2 = [{}^S x_P \quad \delta \quad {}^S y_P \quad \theta]^T \quad (2.44)$$

où :

- $[{}^S x_P, {}^S y_P]$  sont les coordonnées dans l'image du point  $P$  défini comme le milieu du segment  $[M_1 M_2]$ ,
- $\delta$  est la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ ,
- $\theta$  est l'angle entre l'axe horizontal de l'image et le vecteur  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ .

Pour calculer la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}_2}$  associée à ce vecteur de primitives on écrit :

$$\dot{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_2} \mathbf{u}_I = \mathbf{R}_2 \mathbf{J}_2 \mathbf{u}_I = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{P}_x} \\ \mathbf{J}_\delta \\ \mathbf{J}_{\mathbf{P}_y} \\ \mathbf{J}_\theta \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (2.45)$$

$$\text{où } \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{J}_{\mathbf{P}_x} \text{ tel que } {}^M \mathbf{V}(\mathbf{P}/\Pi)_x = \mathbf{J}_{\mathbf{P}_x} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{J}_\delta \text{ tel que } \dot{\delta} = \mathbf{J}_\delta \mathbf{u}_I \\ \mathbf{J}_{\mathbf{P}_y} \text{ tel que } {}^M \mathbf{V}(\mathbf{P}/\Pi)_y = \mathbf{J}_{\mathbf{P}_y} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{J}_\theta \text{ tel que } \dot{\theta} = \mathbf{J}_\theta \mathbf{u}_I \end{cases} .$$

Dans la suite, les lignes de  $\mathbf{J}_2$  sont calculées séparément.

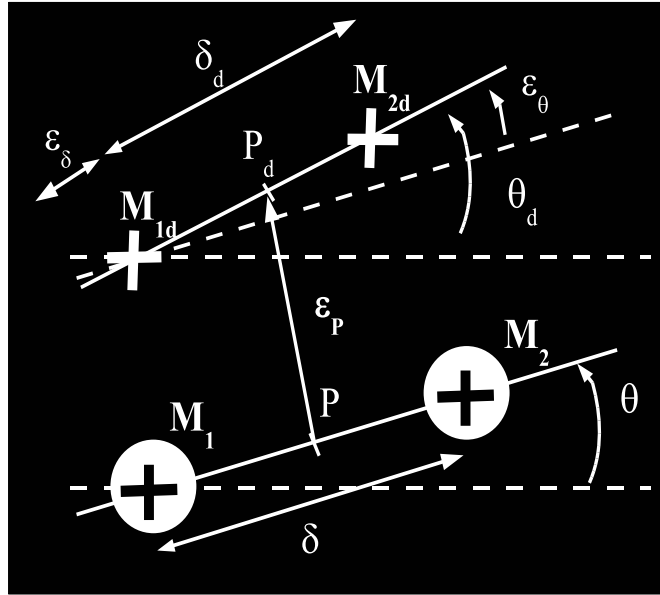


FIG. 2.13 – Vecteur d'erreur

#### 2.4.1.1 Vitesse du point $P$

Pour avoir la relation donnant la vitesse du point  $P$ , il suffit de calculer :

$$\begin{bmatrix} {}^M \mathbf{V}(\mathbf{P}/\Pi)_x \\ {}^M \mathbf{V}(\mathbf{P}/\Pi)_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_x} \\ \mathbf{J}_{P_y} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M_{1x}} + \mathbf{J}_{M_{2x}} \\ \mathbf{J}_{M_{1y}} + \mathbf{J}_{M_{2y}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (2.46)$$

On trouve alors :

$$\mathbf{J}_{P_x} = \begin{bmatrix} \frac{(l_1 + d \cos \varphi)c_+ + (l_2 + d \cos \varphi)c_-}{2c_+c_-} \\ \frac{\sin \varphi(c_+ - c_-)}{2c_+c_-} \\ \frac{\tan \alpha((l_2 \cos \varphi + d)c_-s_+ - (l_1 \cos \varphi + d)c_+s_-)}{2c_+c_-} \\ \frac{\tan \alpha \sin \varphi(l_1s_-c_+ + l_2s_+c_-)}{2c_+c_-} \end{bmatrix}^T \quad (2.47)$$



et :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}_y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(l_1 + l_2) \cos \varphi + 2d}{2 \cos \alpha} \\ \frac{\sin \varphi (l_2 - l_1)}{2 \cos \alpha} \end{bmatrix}^T \quad (2.48)$$

où :

$$\begin{aligned} c_+ &= \cos(\varphi + \beta) , c_- = \cos(\varphi - \beta) \\ s_+ &= \sin(\varphi + \beta) , s_- = \sin(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

### 2.4.1.2 Vitesse de l'angle $\theta$

La vitesse de rotation de l'instrument est donnée par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{I}/\Pi) = \vec{\Omega}(\mathcal{I}/\mathcal{M}) + \vec{\Omega}(\mathcal{M}/\Pi) \quad (2.49)$$

En utilisant les angles définis sur la figure 1.25(b), l'équation équation 2.49 devient :

$$\omega_x \vec{i}_I + \omega_y \vec{j}_I + \omega_z \vec{k}_I = \dot{\beta} \vec{j}_I + \dot{\alpha} \vec{i}_M + \dot{\theta} \vec{k}_S \quad (2.50)$$

En projetant dans la base  $\mathcal{B}_M$  du repère  $\mathcal{R}_M$ , et en identifiant terme à terme, on trouve :

$$\dot{\theta} = \mathbf{J}_\theta \mathbf{u}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} & \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (2.51)$$

### 2.4.1.3 Vitesse de la distance $\delta$

La distance entre  $M_1$  et  $M_2$  est :

$$\delta = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| = \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{i}_M \quad (2.52)$$

Sa vitesse est alors donnée par :

$$\dot{\delta} = \left( \vec{V}(M_2/\Pi) - \vec{V}(M_1/\Pi) \right) \cdot \vec{i}_M \quad (2.53)$$

De plus :

$$\dot{\delta} = \mathbf{J}_\delta \mathbf{u}_I = [\mathbf{J}_{M_2x} - \mathbf{J}_{M_1x}] \mathbf{u}_I \quad (2.54)$$

On a donc, en utilisant notamment les expressions de  $l_1$  et  $l_2$  données dans les équations 1.26 et 1.27 :

$$\mathbf{J}_\delta = \begin{bmatrix} \frac{d \cos \varphi (c_- - c_+)}{c_+ c_-} \\ -\frac{\sin \varphi (c_+ + c_-)}{c_+ c_-} \\ \frac{\tan \alpha ((l_2 \cos \varphi + d) s_+ c_- + (l_1 \cos \varphi + d) c_+ s_-)}{c_+ c_-} \\ \frac{\tan \alpha \sin \varphi (l_1 s_- c_+ - l_2 s_+ c_-)}{c_+ c_-} \end{bmatrix}^T \quad (2.55)$$

#### 2.4.1.4 Modèle cinématique

Finalement, le modèle cinématique du système s'écrit :

$$\dot{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{J}_{s_2} \mathbf{u}_I = \mathbf{R}_2 \mathbf{J}_2 \mathbf{u}_I = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P_x} \\ \mathbf{J}_\delta \\ \mathbf{J}_{P_y} \\ \mathbf{J}_\theta \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (2.56)$$

On peut noter que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_2$  est bloc triangulaire. Les commandes  $\omega_x$  et  $\dot{d}$  ne produiront ni vitesse du point  $P$  le long de  $\mathbf{j}_M$  ni rotation de l'instrument dans l'image.

#### 2.4.1.5 Estimé du jacobien image

Comme pour le paramétrage précédent, on cherche à avoir une commande permettant de s'affranchir de la connaissance des paramètres décrivant la configuration géométrique du système. Or, lorsque l'instrument est perpendiculaire au plan échographique, ( $\alpha = \pi$  et  $\beta = 0$ ), la matrice jacobienne devient diagonale et s'écrit ( en utilisant le fait que, grâce aux équations 1.26 et 1.27,  $l_1 = l_2 = \frac{\delta \cos \varphi}{\sin(2\varphi)} = \frac{\delta}{2 \sin \varphi}$  :

$$\mathbf{J}_{2(\pi,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(2\varphi)d + \delta}{\sin(2\varphi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \tan \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 \sin \varphi d + \cos \varphi \delta}{2 \sin \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Cette propriété est intéressante du point de vue de la commande puisqu'avec une telle matrice, près de la configuration perpendiculaire, la robustesse du système est améliorée. Les paramètres estimés sont donc pris constant et tels que  $\widehat{\alpha} = \pi$  et  $\widehat{\beta} = 0$ .

La loi de commande devient finalement :

$$\mathbf{u}_I = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_2}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{I_2} = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_2^{-1} \mathbf{R}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_{I_2} = \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2(\pi,0)}^{-1} \mathbf{R}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_{I_2} \quad (2.58)$$

Encore une fois, cette loi de commande ne nécessite aucune connaissance a priori de la transformation entre la sonde et l'instrument.

## 2.4.2 Étude de stabilité et résultats de simulation

Lorsque  $(\alpha, \beta) \neq (\pi, 0)$ , le comportement en boucle fermée devient :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{I_2} = -\lambda \mathbf{J}_{\mathbf{s}_2} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_2}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{I_2}. \quad (2.59)$$

La méthode utilisée pour étudier la stabilité locale de cette loi de commande est similaire à celle employée dans la section 2.2.

On montre en annexe D la propriété suivante :

**Propriété 5.** *Propriétés de la matrice  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2) = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_2} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_2}^{-1}$*

*Dans le cas de la commande avec contrôle explicite de l'écartement des mors et de l'orientation de l'instrument, la matrice  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)$  est telle que*

1. *son déterminant est non nul.*
2. *ses valeurs propres sont strictement positives.*

■

On montre alors l'existence et l'unicité du point d'équilibre ainsi que la stabilité locale de la boucle de commande quelle que soit l'orientation entre le plan échographique et l'axe de l'instrument.

Les figures 2.14 et 2.15 montrent comme au paragraphe précédent que le système est bien découplé lorsqu'il est en configuration perpendiculaire ( $\alpha \approx 170^\circ$  et  $\beta \approx 8^\circ$ ) et qu'il reste stable lorsqu'il s'éloigne de cette configuration ( $\alpha \approx 140^\circ$  et  $\beta \approx 30^\circ$ ).

De plus, la figure 2.16 montre les résultats obtenus pour une réorientation de l'instrument dans l'image. La même simulation que pour la figure 2.12 est refaite avec le nouveau paramétrage. L'écartement des points reste constant et l'instrument tourne autour du point  $P$ . Cette fois, la position désirée est atteinte. Le problème de visibilité observé avec le paramétrage  $\mathbf{s}_1$  est résolu grâce au contrôle explicite de  $\theta$ .

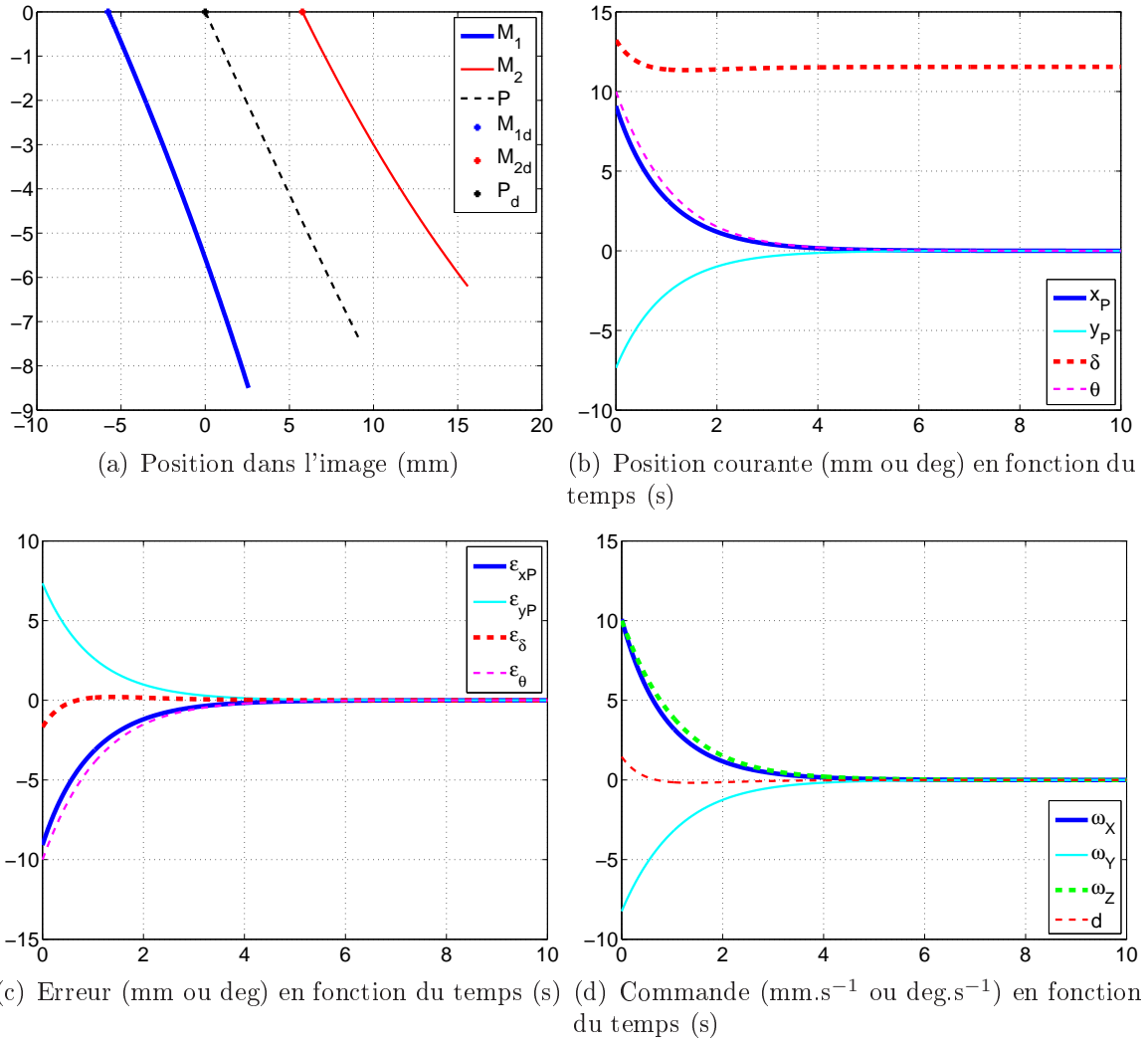


FIG. 2.14 – Résultats de simulations avec commande en  $\theta$  autour de la configuration perpendiculaire ( $\widehat{\mathbf{J}}_{s2}^{-1} \approx \mathbf{J}_{s2}^{-1}$ )

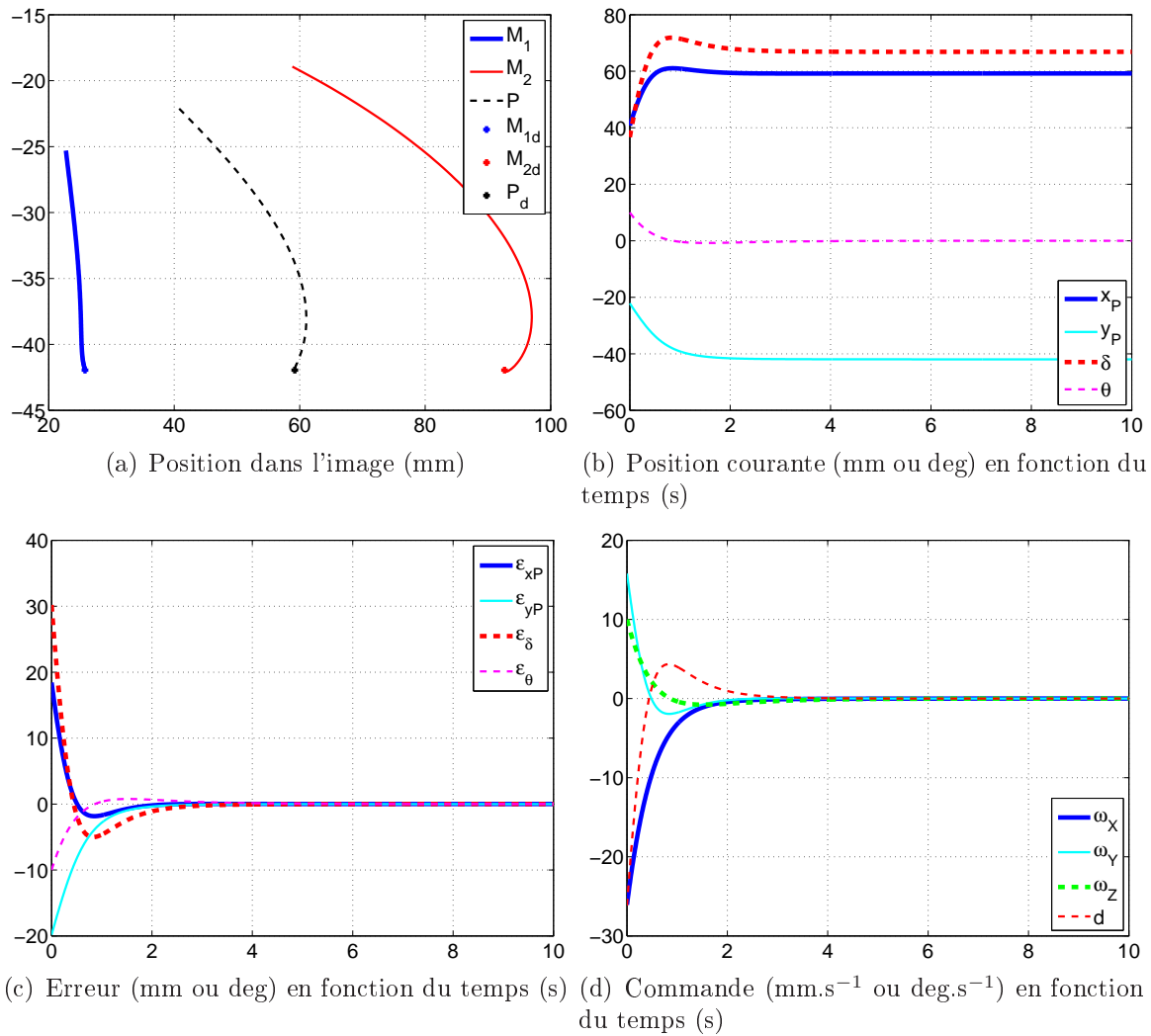


FIG. 2.15 – Résultats de simulations avec commande en  $\theta$  loin de la configuration perpendiculaire ( $\widehat{\mathbf{J}}_{s2}^{-1} \neq \mathbf{J}_{s2}^{-1}$ )

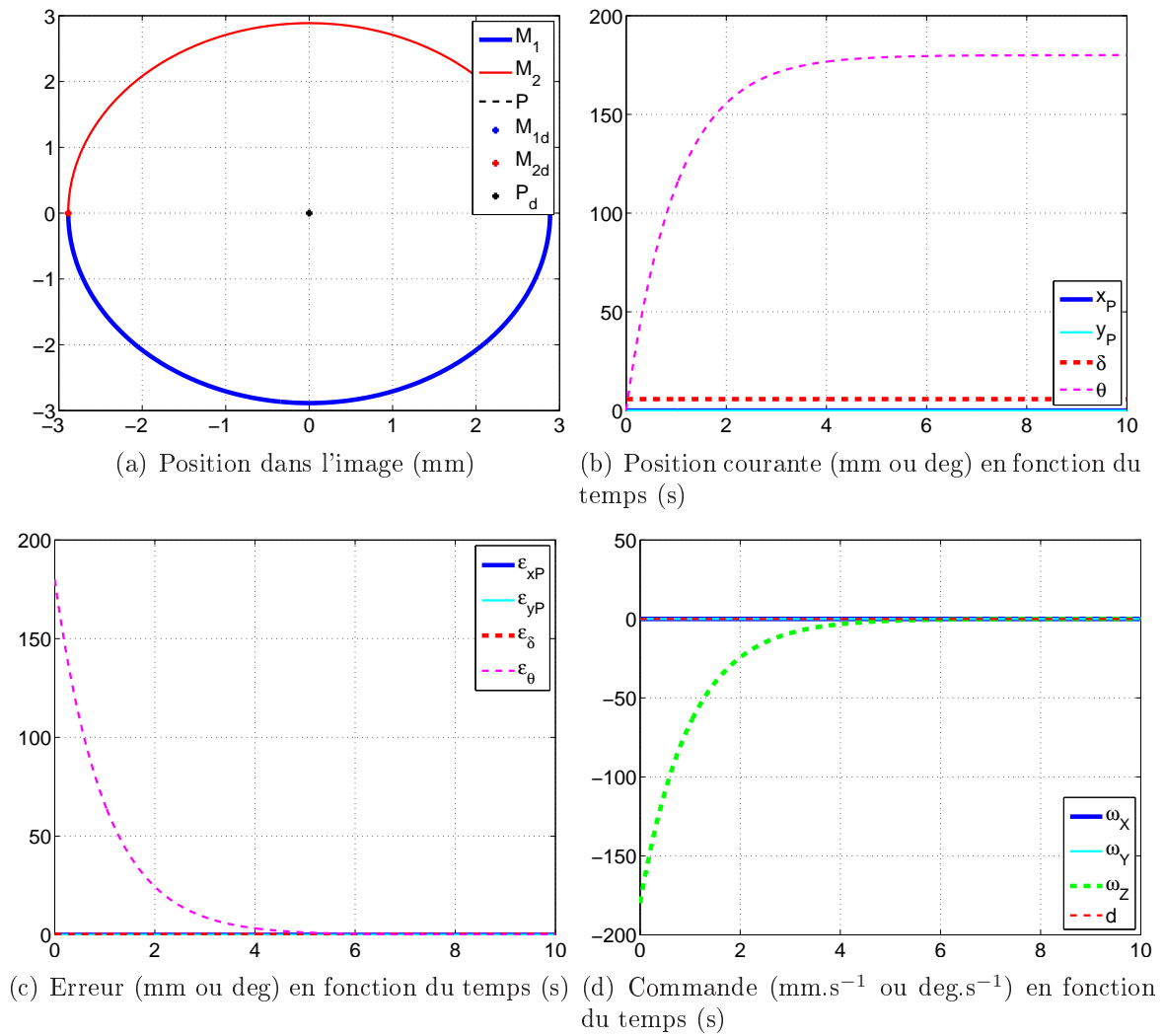


FIG. 2.16 – Résultats de simulations lors d'une réorientation de l'instrument dans l'image

La figure 2.17 illustre les limites de cette commande. L'utilisation d'un modèle approché (équation 2.58) induit un défaut de découplage. La convergence de  $\delta$ , notamment, n'est plus exponentielle et peut provoquer des dépassements. Ceci peut conduire à une perte de l'instrument dans l'image (perte d'un point si  $\delta$  est trop grand, fusion des deux points si  $\delta$  est trop petit).

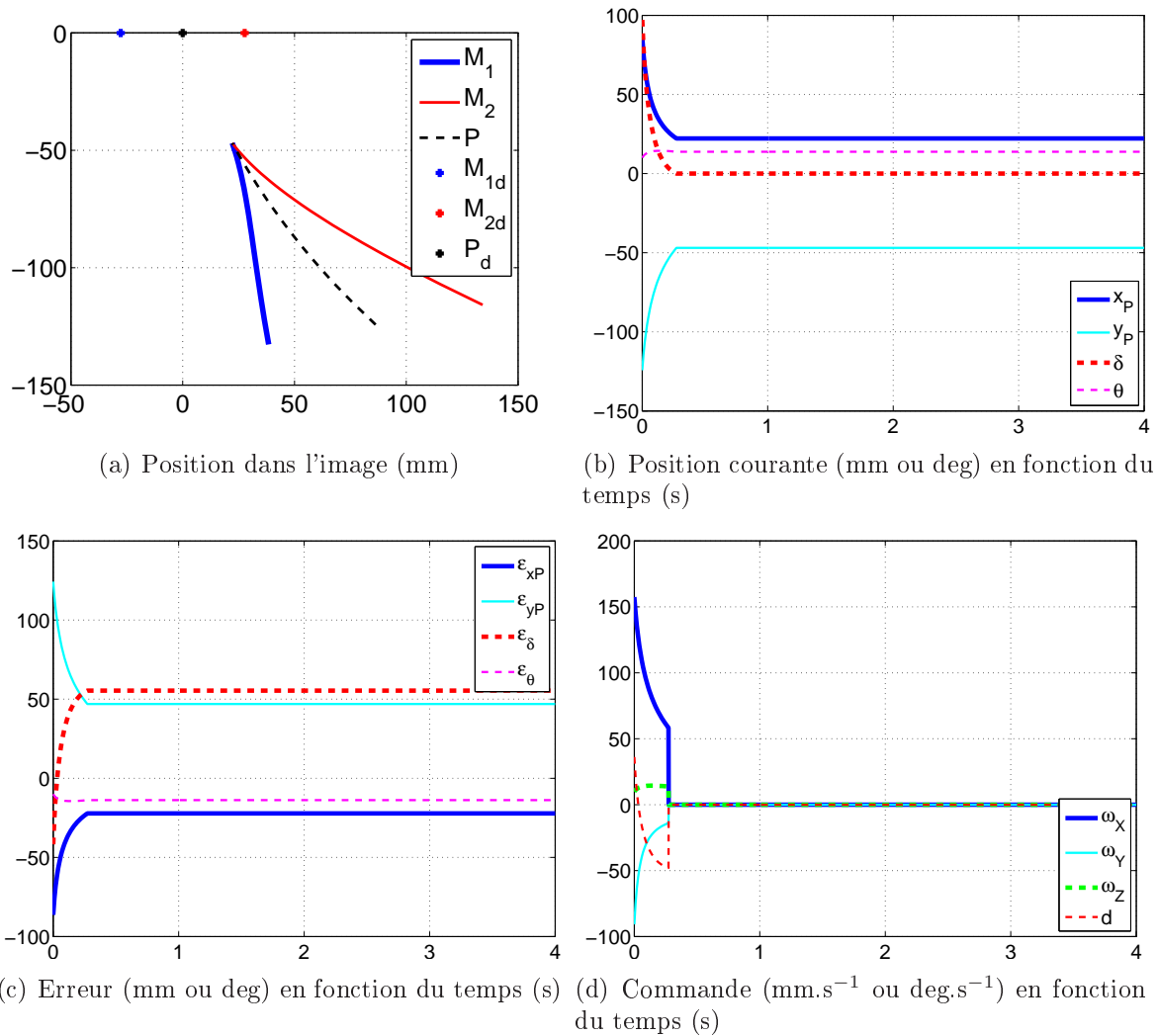


FIG. 2.17 – Résultats de simulations avec commande en  $\theta$  lors d'un grand déplacement

On propose dans la suite une modification de cette loi de commande qui permette de garantir que l'erreur en  $\delta$  reste bornée.

## 2.5 Asservissement visuel avec contrôle explicite de l'écartement des mors

Avec la loi de commande donnée à l'équation 2.58, le comportement en boucle fermée pour l'erreur en  $\delta$  s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_\delta = -\mathbf{J}_\delta \mathbf{u} = -\mathbf{J}_\delta \begin{bmatrix} \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2,11}^{-1} \varepsilon'_x \\ \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2,22}^{-1} \varepsilon_\delta \\ \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2,33}^{-1} \varepsilon'_y \\ \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2,44}^{-1} \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

où  $\varepsilon' = \mathbf{R}_2 \varepsilon_{\mathbf{I}_2}$ . On peut voir que des erreurs importantes en  $\varepsilon'_x$ ,  $\varepsilon'_y$  ou  $\varepsilon_\theta$  peuvent impliquer des vitesses importantes pour  $\dot{\varepsilon}_\delta$ .

Ceci est dû au fait que la loi de commande ne découple pas parfaitement le système. En conséquence, même lorsque  $\varepsilon_\delta$  est (par exemple) positif, les termes couplés peuvent impliquer une valeur positive pour  $\dot{\varepsilon}_\delta$ , ce qui entraîne de grandes erreurs. Une solution possible à ce problème consiste à synthétiser une commande permettant de borner  $\varepsilon_\delta$  :

$$-\varepsilon_{\delta max} < \varepsilon_\delta < \varepsilon_{\delta max} \quad (2.61)$$

En d'autres termes, on veut que :

- si  $\varepsilon_\delta \geq \varepsilon_{\delta max}$  alors  $\dot{\varepsilon}_\delta < 0$
- si  $\varepsilon_\delta \leq -\varepsilon_{\delta max}$  alors  $\dot{\varepsilon}_\delta > 0$

Une loi de commande simple qui vérifie cette propriété est :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{I}'} = \left[ 0, \lambda \widehat{\mathbf{J}}_{2,22}^{-1} \varepsilon_\delta, 0, 0 \right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_2}^{-1} \varepsilon_{\mathbf{I}} \quad (2.62)$$

Le comportement en boucle fermée pour  $\varepsilon_\delta$  devient alors :

$$\dot{\varepsilon}_\delta = -\lambda \mathbf{J}_{\delta,2} \widehat{\mathbf{J}}_{2,22}^{-1} \varepsilon_\delta \quad (2.63)$$

De plus,  $\mathbf{J}_{\delta,2}$  et  $\widehat{\mathbf{J}}_{2,22}^{-1}$  ont le même signe. Cependant, la loi de commande 2.62 ne permet évidemment pas de faire converger les trois autres coordonnées de  $\mathbf{s}_2$ . L'idée est alors de passer de la commande  $\mathbf{u}_{\mathbf{I}}$  de l'équation 2.58 à la commande  $\mathbf{u}_{\mathbf{I}'}$  de l'équation 2.62 lorsque l'erreur  $\varepsilon_\delta$  atteint ses bornes, et inversement. Pour éviter les commutations brusques induits par le passage d'un contrôleur à l'autre, la loi de commande finalement implémentée est continue et s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{I}} = \rho \mathbf{u}_{\mathbf{I}} + (1 - \rho) \mathbf{u}_{\mathbf{I}'} \quad (2.64)$$



où :

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } |\varepsilon_\delta| < \varepsilon_0 \\ \frac{\varepsilon_{\delta max} - \varepsilon}{\varepsilon_{\delta max} - \varepsilon_0} & \text{si } \varepsilon_0 \leq |\varepsilon_\delta| \leq \varepsilon_{\delta max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.65)$$

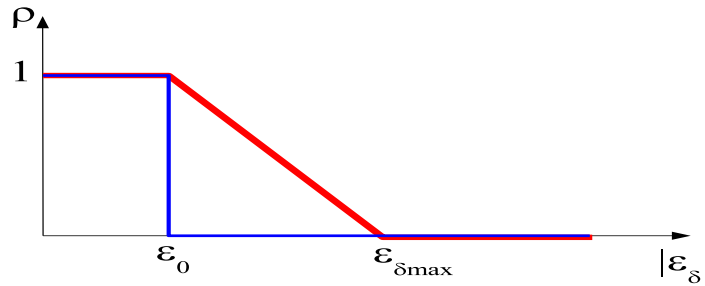


FIG. 2.18 – Gain versus error in  $\varepsilon_\delta$

Cette loi de commande correspond au contrôleur de l'équation 2.58 si  $|\varepsilon_\delta| < \varepsilon_0$ , au contrôleur de l'équation 2.62 si  $|\varepsilon_\delta| > \varepsilon_{\delta max}$ , et à une interpolation linéaire entre les deux contrôleurs lorsque  $\varepsilon_0 \leq |\varepsilon_\delta| \leq \varepsilon_{\delta max}$ .

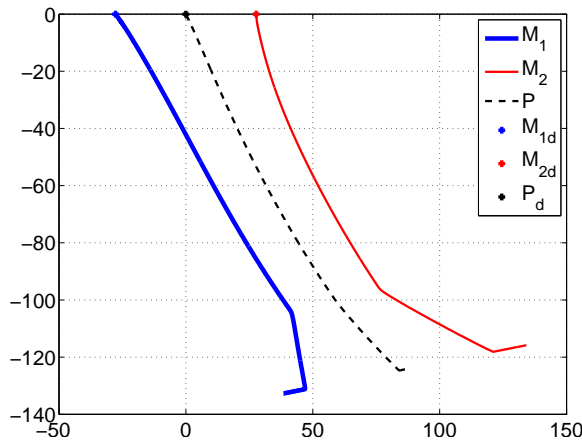
De plus, le comportement en boucle fermée de ce système s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_I = - \begin{bmatrix} \rho\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho\lambda \end{bmatrix} \mathbf{J}_{s2} \widehat{\mathbf{J}}_{s2}^{-1} \varepsilon_I \quad (2.66)$$

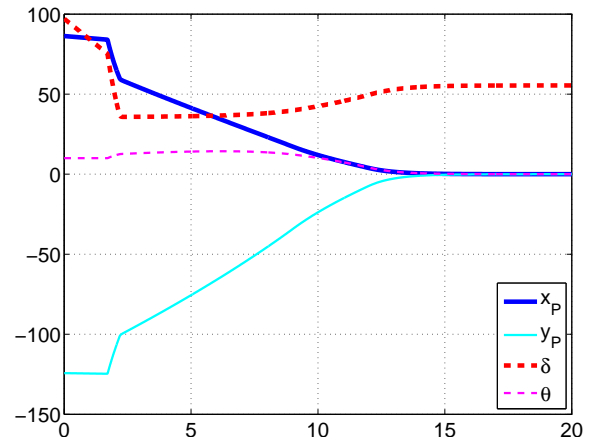
Au voisinage de la position d'équilibre les erreurs sont petites, donc le gain  $\rho \approx 1$ . Le système linéarisé est identique au système donné à l'équation 2.59. Les propriétés de stabilité locale du système restent donc inchangées par cette nouvelle loi de commande.

La simulation illustrée figure 2.17 est réitérée, cette fois avec un correcteur proportionnel à gains adaptatifs. Les résultats de cette nouvelle simulation sont donnés figure 2.19. L'erreur en  $\delta$  reste bien toujours inférieure à 5 mm. La visibilité de l'instrument est cette fois maintenue et la convergence est assurée. La courbe des commandes permet d'illustrer le passage entre les deux contrôleurs. Les commandes sur  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont annulées lorsque l'erreur sur l'écartement des points devient trop importante et sont calculées lorsque l'erreur en  $\delta$  diminue.

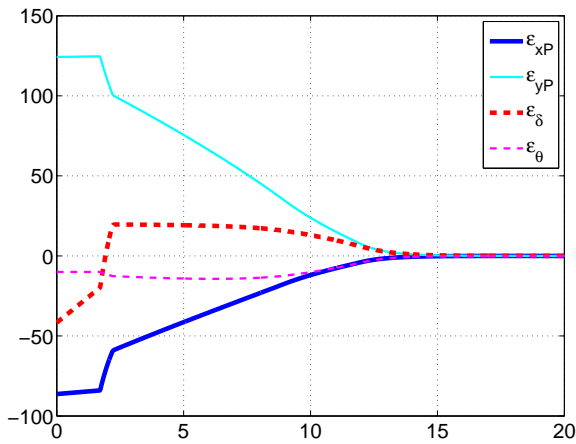
La variation des gains du correcteur proportionnel permet donc d'améliorer la robustesse de l'asservissement grâce à la maîtrise de l'écartement des mors dans l'image.



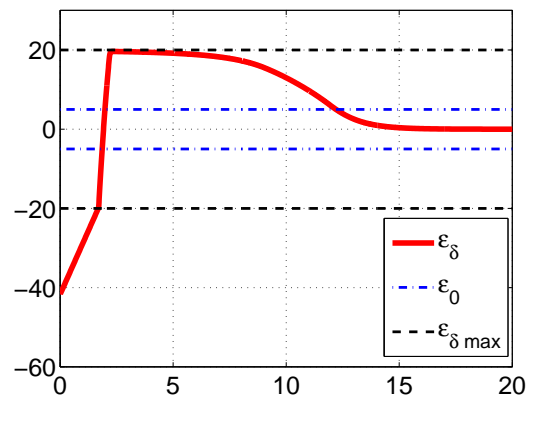
(a) Position dans l'image (m)



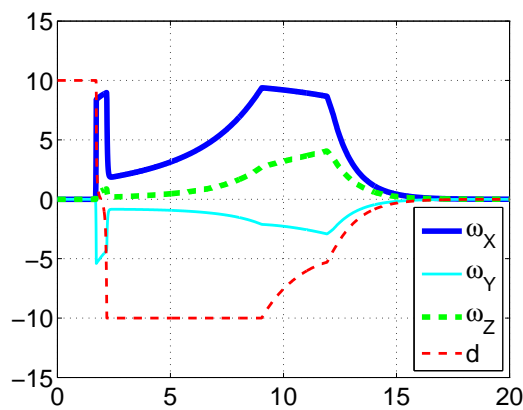
(b) Position courante (m ou rad) en fonction du temps (s)



(c) Erreur (m ou rad) en fonction du temps (s)



(d) Erreur en  $\delta$  (mm) en fonction du temps (s)



(e) Commande ( $m.s^{-1}$  ou  $rad.s^{-1}$ ) en fonction du temps (s)

FIG. 2.19 – Résultats de simulation avec contrôle de l'erreur en  $\delta$

## Conclusion

Dans ce chapitre, les principes de l'asservissement visuel ont été donnés et illustrés sur un exemple simple. Puis différentes lois de commande pour guider un instrument à partir d'images échographiques ont été établies. Pour chacune de ces lois, la stabilité locale quelles que soient les incertitudes paramétriques a été prouvée. Les propriétés de chaque commande ont été illustrées à travers des simulations.

La première loi de commande proposée consiste à contrôler directement les points dans l'image. On a montré qu'une limite de cette loi de commande était due à un problème de visibilité de l'instrument lors de sa réorientation dans l'image. On a alors proposé un autre paramétrage de la position dans l'image. Ce paramétrage permet de contrôler directement l'orientation de l'instrument. Il s'est avéré que cette commande fonctionne mieux dans des conditions nominale mais peut entraîner une perte de visibilité de l'instrument. La solution proposée consiste alors à utiliser des gains variables de façon à borner l'erreur sur l'écartement des mors de l'instrument tout au long des trajectoires.

Dans le chapitre suivant, ces résultats théoriques et numériques sont mis à l'épreuve sur un système expérimental réel.

# Chapitre 3

## Mise en œuvre expérimentale du système et application à la chirurgie de la valve mitrale

---

### Introduction

Ce chapitre présente la mise en œuvre du système expérimental.

Une première partie est consacrée à la description des développements nécessaires à la mise en œuvre expérimentale du système. Tout d'abord le système manipulateur est présenté, ainsi qu'une loi de commande permettant d'en commander les vitesses tout en respectant la contrainte du point fixe imposée par le passage à travers un trocart. Puis, le système imageur ainsi que les algorithmes de traitement d'images sont brièvement décrits. Ensuite, une procédure d'identification in situ des paramètres géométriques décrivant la configuration sonde-instrument est proposée.

La seconde partie est consacrée aux validations du système in vitro mettant en évidence la robustesse expérimentale.

Enfin, le système est testé lors d'expériences in vivo sur modèle porcin, à coeur battant.

## 3.1 Mise en œuvre expérimentale du système robotisé

### 3.1.1 Système de manipulation

#### 3.1.1.1 Le robot MC<sup>2</sup>E (Manipulateur Compact pour la Chirurgie Endoscopique)

Les premières expériences ont été réalisées avec le robot MC<sup>2</sup>E, figure 3.1. Ce manipulateur a été conçu et réalisé au Laboratoire de Robotique de Paris, [Zemiti 2004]. C'est un robot sphérique pour la chirurgie endoscopique à 4 axes concourants . Il se place direc-

tement sur le patient et s'attache à la table de chirurgie avec des sangles. L'avantage de ce système est que la contrainte de passage par un point fixe est réalisée mécaniquement grâce à la structure sphérique de MC<sup>2</sup>E.

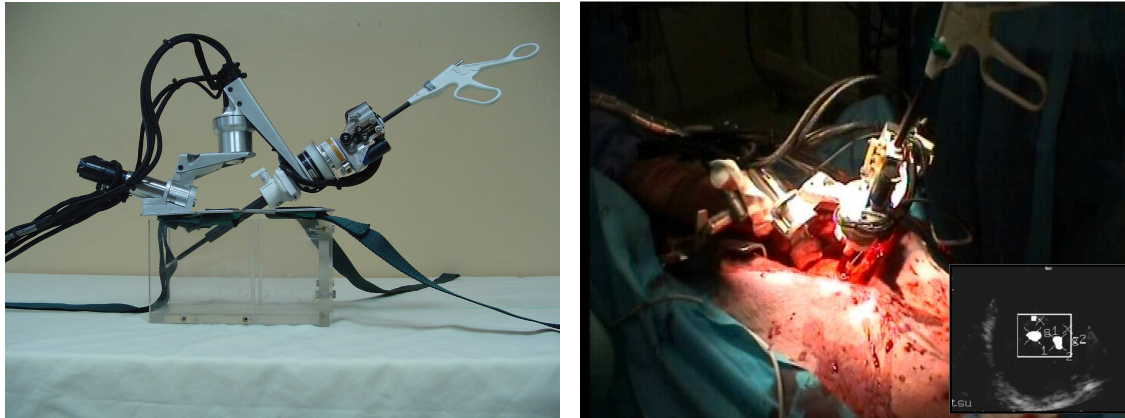


FIG. 3.1 – Le robot MC<sup>2</sup>E

Lors des premières expériences in vivo, MC<sup>2</sup>E s'est révélé inadapté à la chirurgie intracardiaque. En effet, l'espace de travail, déterminé pour la chirurgie abdominale, ne correspond pas à celui de la chirurgie intra-cardiaque. Le bras du robot doit être replié sur lui-même. Le robot évolue alors en permanence à la limite de ses butées. De même, compte-tenu de l'angle avec lequel l'instrument pénètre dans le cœur, les collisions entre le thorax et les corps du robot sont difficilement évitables.

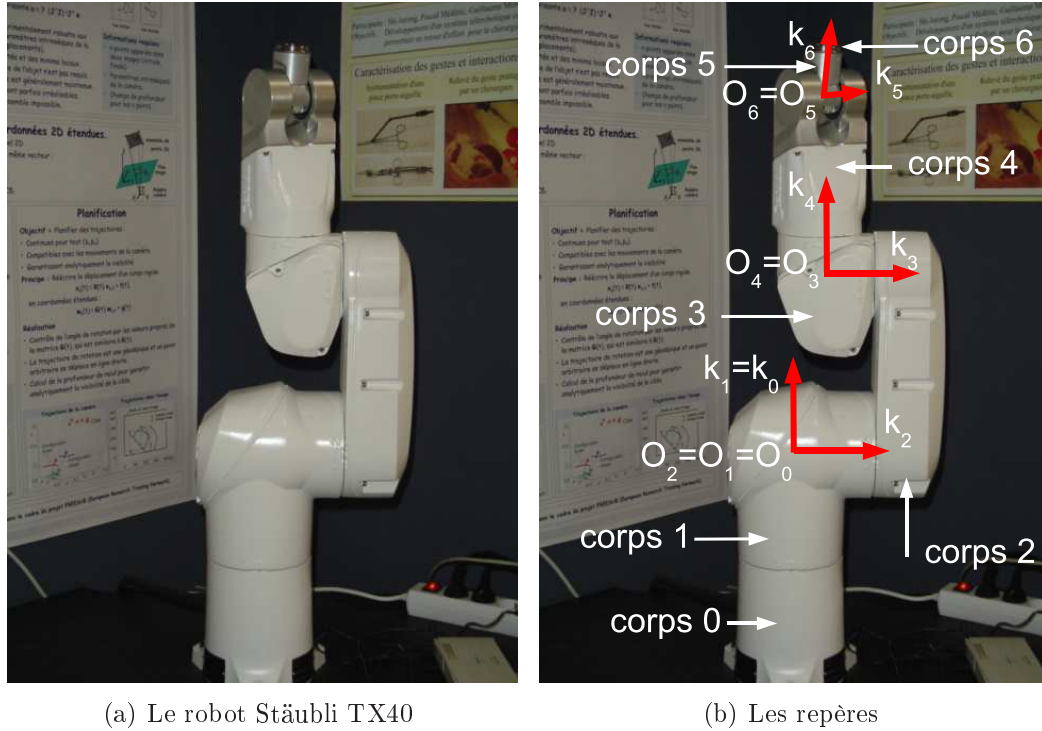
Par ailleurs, une autre difficulté vient du fait que les tests in vivo sont réalisés sur cochon. Le cœur d'un cochon ne se situe pas dans la cage thoracique à la même position que chez un humain. Il est impossible de visualiser le cœur avec une sonde transœsophagienne chez le cochon. Il faut alors utiliser une sonde en contact épicaudique pour visualiser le cœur et non une sonde transœsophagienne comme imaginé initialement. Or, la place occupée par le robot MC<sup>2</sup>E, après sternotomie, ne permet que difficilement d'ajouter une sonde placée directement au contact du cœur.

A la suite de ces expériences, un second site expérimental a été développé. Le manipulateur choisi est un robot Stäubli TX40 série, qui permet de déporter l'encombrement lié au robot et dont l'espace de travail est mieux adapté à la chirurgie intracardiaque.

### 3.1.1.2 Le robot : Stäubli TX40

Le robot Stäubli TX40 est un robot industriel, série à six axes rotoïdes, figure 3.2(a).

Son rayon de travail entre l'axe 1 et l'axe 5 est compris entre 150 mm et 450 cm. Il pèse 27 kg. Ce poids et cet encombrement sont tout à fait compatibles avec une utilisation en salle d'opération. La vitesse maximale exprimée au centre de gravité du robot est de  $8,2 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui est très au-delà des besoins mais pourrait suffire, dans le cadre de développements futurs, à expérimenter des méthodes de compensation des mouvements cardiaques.



(a) Le robot Stäubli TX40

(b) Les repères

FIG. 3.2 – Stäubli TX40

Le paramétrage opérationnel du Staübli TX40 est défini par le vecteur :

$$\mathbf{x} = [x_6 \quad y_6 \quad z_6 \quad r_x \quad r_y \quad r_z] \quad (3.1)$$

où  $[x_6 \quad y_6 \quad z_6] = {}^0\mathbf{O}_6\mathbf{O}_6$  décrit la position de l'origine du repère terminal dans le repère de base du robot et  $r_x, r_y, r_z$  sont les angles d'Euler définis selon la convention XYZ caractérisant l'orientation du repère terminal par rapport au repère de base du robot.

Pour définir un paramétrage articulaire, on utilise le paramétrage de la convention de Denavit-Hartenberg, [Craig 2004]. Le tableau 3.1 et la figure 3.2(b) montrent les paramètres trouvés et les repères associés. Dans ce tableau, les variables  $q_i$  sont les positions articulaires fournies par l'interface du robot.

On peut alors calculer facilement la transformation entre deux repères successifs. La ma-

liaison $i$	$\alpha_i$ (rad)	$a_i$ (m)	$\theta_{i+1}$ (rad)	$d_{i+1}$ (m)
0	0	0	$q_1$	0
1	$-\pi/2$	0	$q_2 - \pi/2$	0.035
2	0	0.225	$q_3 + \pi/2$	0
3	$\pi/2$	0	$q_4$	0.225
4	$-\pi/2$	0	$q_5$	0
5	$\pi/2$	0	$q_6$	0

TAB. 3.1 – Paramètres de Denavit-Hartenberg du Stäubli TX40

trice de transformation homogène entre le repère  $\mathcal{R}_i$  et le repère  $\mathcal{R}_{i+1}$  s'écrit :

$$\mathbf{T}_{i \rightarrow i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i \rightarrow i+1} & {}^i\mathbf{O}_i\mathbf{O}_{i+1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{R}_{i \rightarrow i+1}$  est la matrice de rotation entre les deux repères :

$$\mathbf{R}_{i \rightarrow i+1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i+1} & -\sin \theta_{i+1} & 0 \\ \sin \theta_{i+1} \cos \alpha_i & \cos \theta_{i+1} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \theta_{i+1} \sin \alpha_i & \cos \theta_{i+1} \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

et

$${}^i\mathbf{O}_i\mathbf{O}_{i+1} = \begin{bmatrix} a_i \\ -\sin \alpha_i d_{i+1} \\ \cos \alpha_i d_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

est le vecteur des coordonnées du point  $O_{i+1}$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$ . La matrice de transformation homogène globale entre la base et le corps terminal du robot est obtenue en multipliant les matrices de transformations homogènes entre deux corps successifs :

$$\mathbf{T}_{0 \rightarrow 6} = \mathbf{T}_{0 \rightarrow 1} \mathbf{T}_{1 \rightarrow 2} \mathbf{T}_{2 \rightarrow 3} \mathbf{T}_{3 \rightarrow 4} \mathbf{T}_{4 \rightarrow 5} \mathbf{T}_{5 \rightarrow 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0 \rightarrow 6} & {}^0\mathbf{O}_0\mathbf{O}_6 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Le modèle cinématique du Stäubli permet de relier les vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_i \dots \dot{q}_6]^T$  au vecteur  $\mathbf{v}_R$  regroupant les éléments de réduction du torseur cinématique du corps terminal dans son mouvement par rapport à la base du robot exprimé à l'origine du repère terminal et dans le repère de base :

$$\mathbf{v}_R = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\Omega}(\mathcal{R}_6/\mathcal{R}_0) \\ {}^0\mathbf{V}(\mathbf{O}_6 \in \mathcal{R}_6/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{q}} \quad (3.6)$$

avec

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{k}_1 & \dots & {}^0\mathbf{k}_i & \dots & {}^0\mathbf{k}_6 \\ {}^0\mathbf{k}_1 \times {}^0\mathbf{O}_1\mathbf{O}_6 & \dots & {}^0\mathbf{k}_i \times {}^0\mathbf{O}_i\mathbf{O}_6 & \dots & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.1.1.3 Commande du robot

Dans le système étudié, le robot sert à manipuler l'instrument de chirurgie. Il faut donc pouvoir calculer la commande du robot qui permet de produire la vitesse désirée de l'instrument. On rappelle que, dans les interventions de chirurgie mini-invasive, l'instrument passe à travers un trocart dont le centre noté  $T$  est considéré comme fixe. L'instrument n'a donc que quatre degrés de liberté, (figure 1.26). Or le robot Stäubli TX40 a six degrés de liberté. Il faut donc établir la commande du robot qui permet de produire la vitesse désirée de l'instrument tout en respectant la contrainte de point fixe liée au trocart. Une solution pour résoudre la contrainte du trocart a été proposé par [Michelin 2004]. Elle utilise un modèle géométrique inverse. Cette solution est très dépendante de la cinématique du robot. Dans [Krupa 2004], une autre solution fondée sur l'utilisation d'un capteur d'efforts est proposée. On propose ici une solution cinématique, n'exploitant que les mesures de positions articulaires du robot et indépendante du robot utilisé.

La vitesse de l'instrument au centre du trocart  $T$  peut être paramétrée :

$$\mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_T \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{u}_I = [\omega_y \ \dot{d} \ \omega_x \ \omega_z]^T$  et  $\mathbf{u}_T = [0 \ 0]^T$ .  
Par ailleurs, le robot Stäubli TX40 est contrôlé via une boucle d'asservissement en position, avec un correcteur proportionnel intégral, figure 3.3.

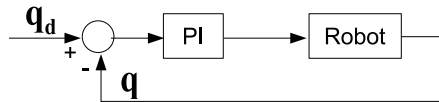


FIG. 3.3 – Schéma de commande en position du robot

Il faut donc déterminer la position désirée  $\mathbf{q}_d$  du robot en fonction de la vitesse désirée  $\mathbf{v}_{Id}$  de l'instrument. Pour cela, on calcule la vitesse désirée de l'effecteur du robot par rapport à sa base. Comme l'instrument est attaché à l'effecteur du robot, la vitesse opérationnelle  $\mathbf{v}_{Rd}$  que le robot doit réaliser s'obtient par simples changements de point et de base :

$$\mathbf{v}_{Rd} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ [{}^0\mathbf{O}_6\mathbf{T}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0 \rightarrow I} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{0 \rightarrow I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{Id} = \mathbf{F} \mathbf{v}_{Id} \quad (3.9)$$

La matrice  $\mathbf{F}$  ainsi définie est calculable simplement si  ${}^0O_0T$  est connu car  ${}^0O_0O_6$  est connu à partir des mesures articulaires et du modèle géométrique donné à l'équation 3.5.



Dans la pratique, au moment où l'instrument est inséré dans le trocart, la configuration du robot est enregistrée ce qui permet de connaître  ${}^0O_0T$  la position du trocart dans le repère de base du robot.

Cette consigne en vitesse est alors transformée en une consigne de position articulaire par inversion numérique du jacobien du robot et intégration de la vitesse articulaire obtenue, figure 3.4.

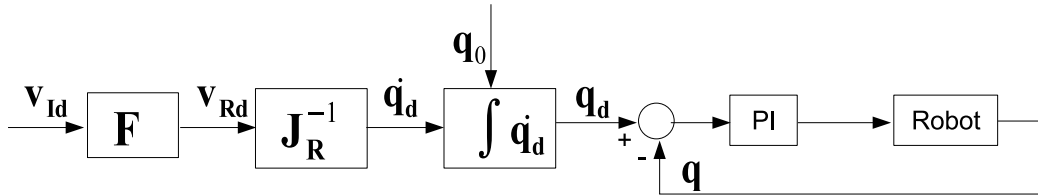


FIG. 3.4 – Schéma de commande en vitesse du robot

On admet que les quatre degrés de liberté de l'instrument sont contrôlés grâce à une boucle de commande fermée, par exemple une des boucles d'asservissement visuel présentées au chapitre précédent. Par contre, les deux autres degrés de liberté ne sont commandés qu'en boucle ouverte dans un système intégral ce qui va entraîner une dérive de l'instrument. Avec une telle commande, au bout d'un certain temps, l'instrument ne passe plus par le point fixe initialement défini.

Ce phénomène de dérive a été mis en évidence lors d'expériences en laboratoire. A l'instant initial, le centre du trocart  $T$  est défini de façon à ce qu'il soit sur l'axe de l'instrument, à une distance donnée de  $O_6$ . Ceci permet de connaître le vecteur  ${}^0O_0T$ . Les quatre degrés de liberté de l'instrument sont ensuite commandés en boucle ouverte en spécifiant directement la valeur des quatre composantes du vecteur  $\mathbf{u}_T$  et en laissant  $\mathbf{u}_T = [0 \ 0]^T$ . On calcule à chaque itération la distance entre le centre du trocart et l'axe de l'instrument. Les résultats sont donnés sur la figure 3.5.

Il apparaît de façon évidente que cette distance augmente sensiblement au cours du temps. Pour résoudre ce problème de dérive de l'instrument, l'idée proposée consiste à calculer, à partir de l'erreur de position de l'instrument par rapport au point fixe, une consigne en vitesse  $\mathbf{u}_T$  non nulle. Cette vitesse peut-être calculée à partir de la mesure de l'écart entre l'axe de l'instrument et le point  $T$ . On ferme ainsi la boucle de commande en vitesse du robot ce qui permet d'éviter la dérive de l'instrument.

Pour que l'instrument passe par le centre du trocart, il suffit que les points  $T$  et  $T_c$ , définis respectivement comme le centre du trocart et son projeté orthogonal sur l'axe de l'instrument (voir figure 3.6), soient confondus.

La loi de commande proposée est donc la suivante :

$$\mathbf{u}_T = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (3.10)$$

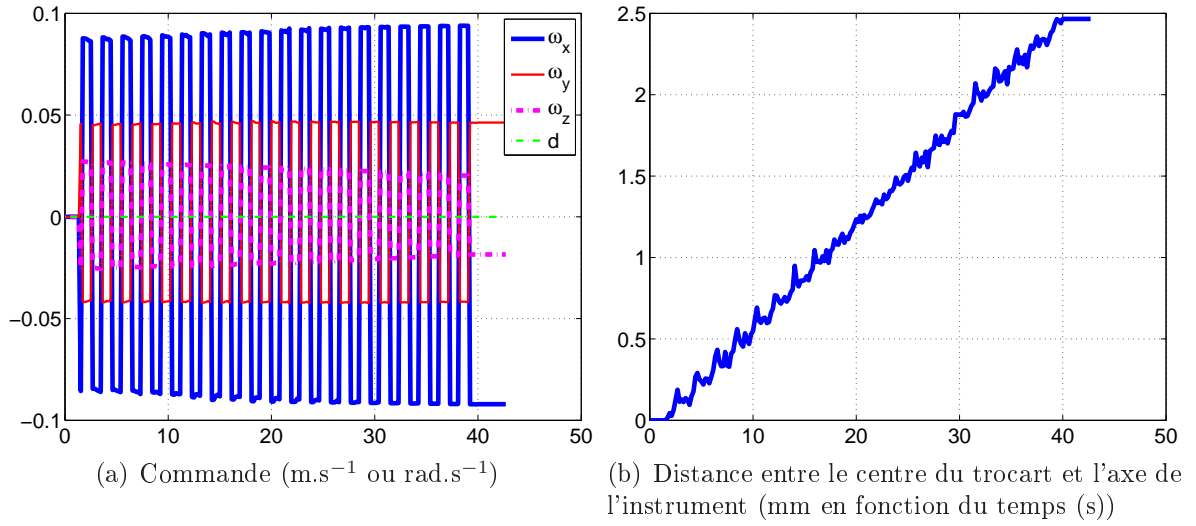


FIG. 3.5 – Mise en évidence du phénomène de dérive

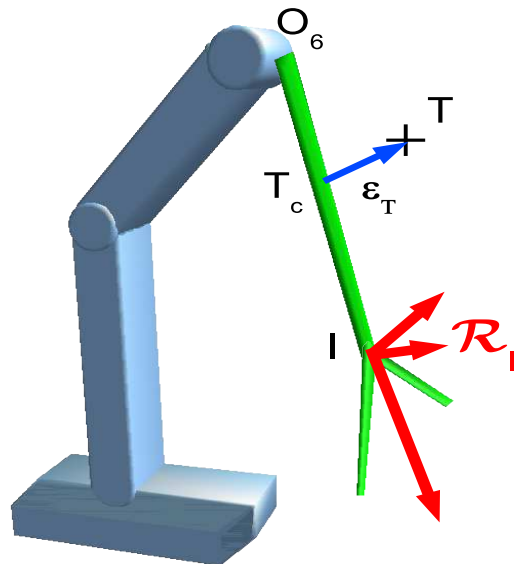


FIG. 3.6 – Dérive par rapport au trocart

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{T}} = {}^{\mathbf{I}}\mathbf{T}_c\mathbf{T}$  est l'erreur de position entre les points  $T$  et  $T_c$ .  
 En supposant que les quatre degrés de liberté sont commandés avec une loi de commande du type 2.34 ou 2.58. La loi de commande complète du système peut alors s'écrire :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{J}}_{s^{-1}i} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}i} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Le comportement en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{I}i} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{si}\widehat{\mathbf{J}}_{s^{-1}i} & \mathbf{J}_{\text{couplage}} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}i} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{J}_{\text{couplage}}$  est une matrice qui traduit le couplage du système que l'on n'explicitera pas. Il est évident, d'après la deuxième ligne de l'équation matricielle, que l'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{T}}$  est une fonction du temps indépendante de l'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}}$  qui converge exponentiellement vers zéro. Il est donc possible de démontrer la stabilité locale de la commande du robot. En effet, le jacobien complet de ce système est bloc triangulaire. La commande est donc localement stable si les valeurs propres de  $\widehat{\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1}}$  et  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  sont toutes à partie réelle positive. La stabilité locale de cette boucle de commande ne dépend donc que de la positivité des valeurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1}}$ . Cette loi de commande présente donc les mêmes propriétés de stabilité locale que la commande utilisée pour contrôler les vitesses de l'instrument.

Au chapitre précédent, la stabilité locale a été prouvée pour les différentes boucles de commande de l'instrument par asservissement visuel à partir d'images échographiques. La stabilité locale de la commande du robot est donc prouvée pour chacun des asservissements visuels proposés, ainsi que le respect de la position fixe du point  $T$ .

Pour évaluer la commande proposée, l'expérience précédente est réalisée à nouveau. Cette fois, le robot est commandé de façon à éviter la dérive du point fixe avec la loi de commande 3.11. La figure 3.7 montre les résultats de la commande proposée. L'erreur de position du point  $T$  reste inférieure à 0,25 mm et ne croit pas avec le temps. Avec cette loi de commande, l'instrument ne dérive plus.

## 3.1.2 Système imageur

### 3.1.2.1 L'échographe : Acuson Cypress Siemens

L'échographe utilisé est le système Acuson Cypress de Siemens avec la sonde transthoracique 3V2c. Ce système est un échocardiographe portable avec une sortie vidéo analogique PAL.

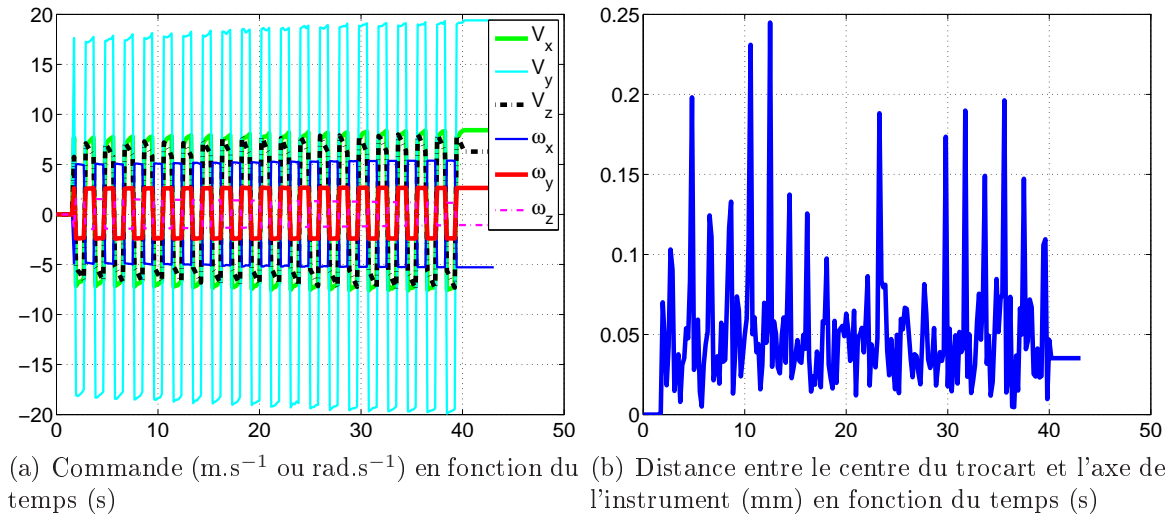


FIG. 3.7 – Correction de la dérive du trocart



FIG. 3.8 – L'échographe Acuson Cypress de Siemens

La sonde 3V2c est une sonde sectorielle dont la fréquence est de 2,7 MHz. Elle permet d'explorer une zone d'une profondeur maximale de 271 mm. Il est possible avec l'échographe de régler la profondeur visible à l'écran entre 56 mm et 271 mm.



FIG. 3.9 – La sonde 3V2c de Siemens

L'acquisition et le traitement des images se font grâce à la carte Meteor II/Multi-Channel et la librairie MIL de Matrox Imaging. Cette carte fonctionne à la cadence vidéo avec une résolution de 768 pixels par 576. La librairie contient des fonctions pour l'acquisition, l'affichage, la sauvegarde des images, mais aussi un certain nombre d'algorithmes de traitement d'images (filtres, opération morphologique, analyse de blobs, etc.).

### 3.1.2.2 Suivi automatique de l'instrument dans l'image

On présente ici les algorithmes de traitement d'image utilisés pour déterminer la position de l'instrument dans l'image. Ces algorithmes ont été développés par Tobias Ortmaier lors de son postdoc au laboratoire et par Hubert Mitterhofer pendant son stage de master, [Ortmaier 2005].

Le principe général est le suivant : dans la première image, l'utilisateur indique en cliquant sur l'écran, la position de chacun des deux blobs correspondant à l'instrument, ensuite, des imagettes de tailles réduites (des régions d'intérêt) sont définies autour de chacun des blobs. A l'image suivante, on admet que chaque mors de l'instrument est présent dans les imagettes correspondantes. Pour garantir cela, il suffit de déterminer la taille des imagettes en fonction de la vitesse de l'instrument. La détection des mors dans les imagettes se fait grâce à des algorithmes de traitement d'image.

Définir des imagettes autour des blobs permet de limiter la taille de l'image sur laquelle les algorithmes sont appliqués. Le temps de calcul est donc sensiblement diminué. Dans

un premier temps, un filtre médian est appliqué à l'imagette, ce qui permet d'atténuer le bruit dans l'image. La région d'intérêt est alors binarisée. Le seuil utilisé pour la binarisation est déterminé en tenant compte du seuil trouvé à l'image précédente, du nombre de blobs trouvés et de la taille des blobs. Cette méthode permet de rendre le traitement d'image indépendant des réglages de la sonde qui peuvent être modifiés par le chirurgien en cours d'opération (exemple : le gain de correction d'intensité avec la profondeur). Ensuite, une érosion et une dilatation sont appliquées. Ces opérations morphologiques permettent de séparer les blobs correspondant aux échos de l'instrument des artefacts et des structures anatomiques. De plus, les petites tâches avec une forte intensité qui pourraient être détectées par erreur sont alors supprimées.

Une fois les blobs détectés, les positions des mors de l'instrument dans l'image correspondent aux coordonnées du centre de gravité de chacun des blobs.

Enfin, les imagettes sont recentrées sur les blobs trouvés. Ce processus de détection est réitéré pour chaque image acquise de façon à permettre le suivi de l'instrument.

Il faut ensuite pouvoir relier les points trouvés dans l'image aux mors de l'instrument. C'est-à-dire déterminer quel blob correspond au point  $M_1$  et lequel correspond à  $M_2$ . Pour cela, un premier choix est fait arbitrairement. L'instrument est alors déplacé par asservissement visuel. Si les points sont correctement attribués la norme de l'erreur doit diminuer jusqu'à devenir nulle. Si la norme de l'erreur augmente alors le choix des points est inversé. En effet, inverser les points  $M_1$  et  $M_2$  est équivalent à changer le signe de la commande. Ensuite, comme le suivi de l'instrument est fait en définissant une région d'intérêt autour de chaque blob, un blob trouvé dans une région donnée correspond toujours à un même mors.

Les expériences in vitro ont montré que cette méthode de suivi est robuste par rapport aux perturbations (artefacts, bruit, etc.). La figure 3.10 illustre les résultats obtenus lorsqu'un instrument est maintenu à une position constante. Les variations de mesures sont inférieures à 0,3 pixels. Le bruit dans l'image échographique ne perturbe donc pas notablement les mesures obtenues grâce aux algorithmes présentés.

### 3.1.3 Procédure d'étalonnage du système

Il peut être intéressant de connaître un certain nombre de paramètres géométriques du système. En particulier, la transformation entre la sonde et la base du robot est nécessaire pour mettre en œuvre le premier asservissement visuel proposé qui consiste à contrôler directement les points dans l'image, section 2.2.

Bien sûr, il est envisageable de faire ceci grâce à l'utilisation (fréquente en robotique médicale) de localisateurs. Mais la mise en œuvre en salle d'opération se trouve alors plus compliquée. On propose donc une méthode d'étalonnage du système pour laquelle aucun dispositif supplémentaire n'est nécessaire.

Pour cela, on réalise quelques mouvements du robot en boucle ouverte ou en boucle fermée, par exemple sous asservissement visuel avec l'une des commandes fonctionnant

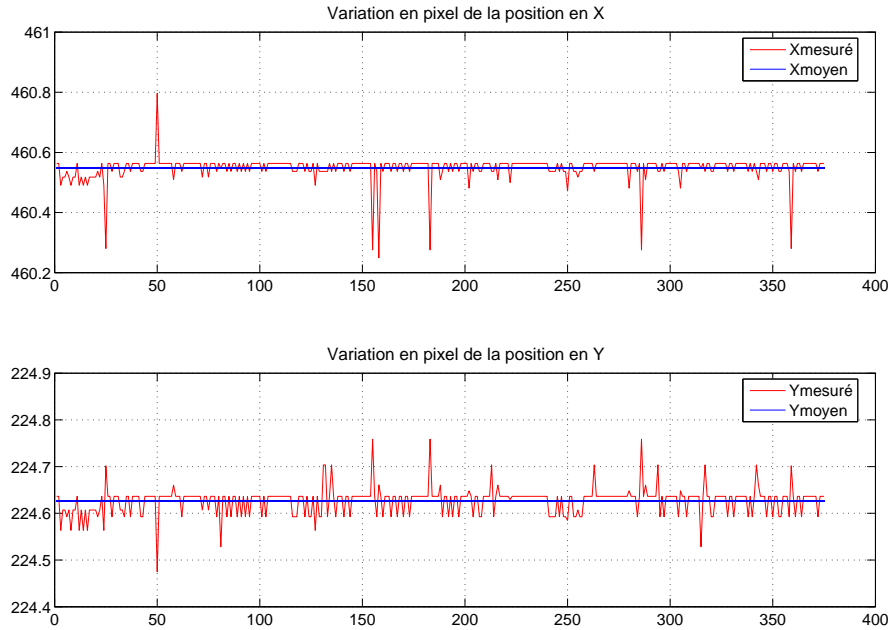


FIG. 3.10 – Bruit dans la mesure du centre de gravité d’un blob (expérience in vitro)

sans connaissance de la configuration du système, section 2.3, section 2.4, ou section 2.5. En parallèle, l’instrument est détecté dans l’image. La position et l’orientation du repère terminal du robot ainsi que les positions mesurées de l’instrument dans l’image sont enregistrées. On applique alors une fonction d’optimisation qui va permettre de trouver les paramètres de position et d’orientation de la base du robot par rapport à la sonde en effectuant une minimisation de l’erreur entre les positions mesurées de l’instrument dans l’image et ses positions reconstruites.

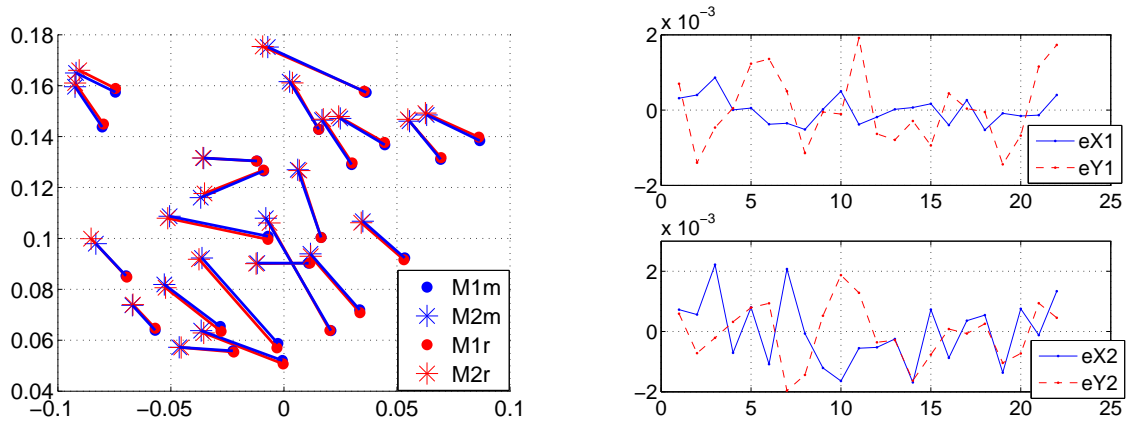
Le principe d’optimisation est le même que pour la validation du modèle géométrique du système présenté dans la section 1.3.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{init}} \\
 & \text{faire} \\
 & \quad \mathbf{s}_{\text{rec}} = f(\mathbf{p}) \\
 & \quad \mathbf{dp} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}}^+ \|\mathbf{s}_{\text{rec}} - \mathbf{s}_{\text{mes}}\| \\
 & \quad \mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{dp} \\
 & \text{tant que } (\mathbf{s}_{\text{rec}} - \mathbf{s}_{\text{mes}} > \mathbf{e}_{\text{max}}) \text{ et que } (\|\mathbf{dp}\| > \mathbf{dp}_{\text{max}})
 \end{aligned}$$

Le jacobien du paramétrage  $\mathbf{J}_{\mathbf{p}}$  est différent de celui utilisé au chapitre 1 puisqu’il tient compte du fait que l’instrument est constitué de deux mors, annexe A. C’est la seule

différence notable.

Cette procédure d'étalonnage est évaluée expérimentalement. La figure 3.11 montre les résultats obtenus lors d'une expérience in vitro. Pour cette expérience, le robot est placé, en boucle ouverte, dans 22 positions différentes. On trouve une erreur maximale de 2,2 mm en x (c'est-à-dire le long de  $\mathbf{i}_S$ ) et 1,9 mm en y (c'est-à-dire le long de  $\mathbf{j}_S$ ) et une erreur moyenne de 0,001 mm en x et de 0,005 mm en y, entre les positions mesurées dans l'image et les positions reconstruites avec les paramètres optimaux. Les paramètres trouvés permettent donc une bonne reconstruction des positions dans l'image.



(a) Positions mesurées et positions reconstruites dans l'image (m) (b) Erreur entre positions mesurées et positions reconstruites (m)

FIG. 3.11 – Résultats de l'identification des paramètres géométrique du système

## 3.2 Validation de l'asservissement visuel in vitro

Le banc expérimental est constitué d'une sonde échographique placée dans un bac d'eau. Le robot Stäubli TX40 manipule une pince dont chaque mors est en acier enrobé de polyuréthane. Les mors sont des cylindres de 3 mm de diamètre et de 3 cm de long.

On place le robot de manière à ce que chacun des mors de l'instrument coupe le faisceau d'ultrasons. La trace de l'instrument dans l'image échographique est donc constituées de deux blocs. Une procédure présentée en section 3.1 permet d'apparier correctement les blocs détectés et les mors de l'instrument.

Les expériences se déroulent comme suit :

- Pendant les expériences, la sonde est immobile. Lorsque c'est nécessaire, sa position et son orientation par rapport au robot sont identifiées grâce à l'algorithme présenté à la section 3.1.



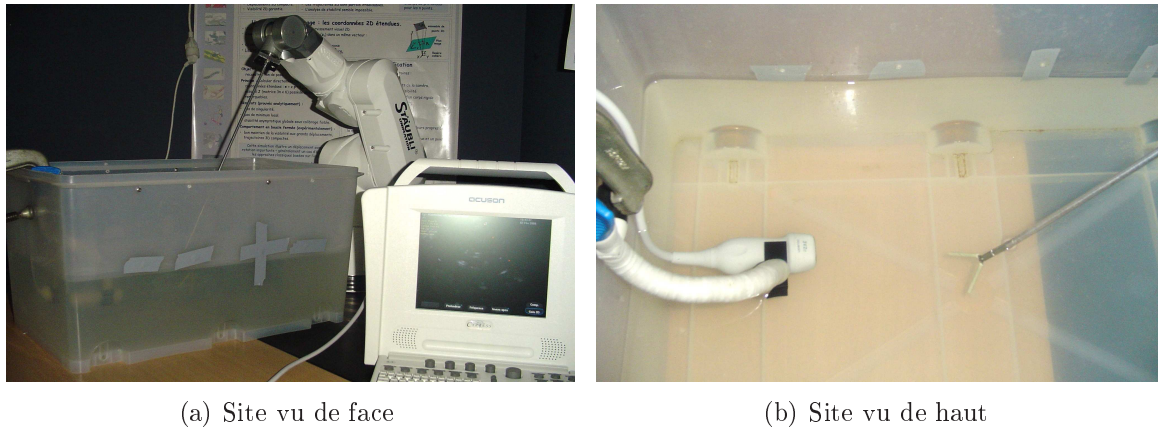


FIG. 3.12 – Site expérimental

- Les coordonnées courantes  $\mathbf{s}_1$  de l'instrument dans l'image (exprimées en mètre) sont automatiquement déterminées par traitement d'image.
- On sélectionne dans l'image une position désirée pour l'instrument (en cliquant dans l'image avec une souris). Ce dernier est alors déplacé vers la position désirée par asservissement visuel. La commande  $\mathbf{u}_1$  est calculée conformément à l'équation 2.2 puis envoyée au contrôleur du robot.

La figure 3.13 montre les déplacements dans l'image et l'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}_1}$  entre la position désirée et la position mesurée de l'instrument. Sur ces courbes, l'erreur converge au départ de façon linéaire. Ceci s'explique par le fait que, pour éviter des vitesses importantes entraînées par de grandes erreurs, la commande envoyée au robot est saturée. La commande est alors constante tant que l'erreur reste trop importante. Ce qui explique la convergence linéaire. Lorsque l'erreur est suffisamment petite pour que la commande ne soit plus saturée, la convergence devient exponentielle et les déplacements dans l'image se font approximativement en ligne droite, conformément à l'équation 2.39. Les variables sont donc bien découplées. Le découplage reste vrai tout le temps car la saturation est fait sans changer la direction de la vitesse. La trajectoire des points reste donc approximativement une ligne droite.

La figure 3.14 représente les résultats obtenus avec la commande utilisant  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_1}^{-1}$  sans connaissance de la transformation entre la sonde et l'instrument, lors d'un grand déplacement (de l'ordre de 75 mm). Les trajectoires dans l'image ne sont pas effectuées en lignes droites. Le système n'est pas correctement découplé. Cependant, le système reste stable et l'erreur converge vers zéro.

Par ailleurs, la figure 3.15 montre les résultats obtenus pour une réorientation de l'instrument dans l'image avec la commande exploitant le paramétrage  $\mathbf{s}_2$ , équation 2.58. L'écartement des points reste à peu près constant et l'instrument tourne autour du point  $P$  qui reste presque fixe. De plus, l'effet de la saturation de vitesse est visible sur la commande de la vitesse de rotation propre de l'instrument, qui est grande du fait de la grande erreur en  $\theta$  (figure 3.15(d)).

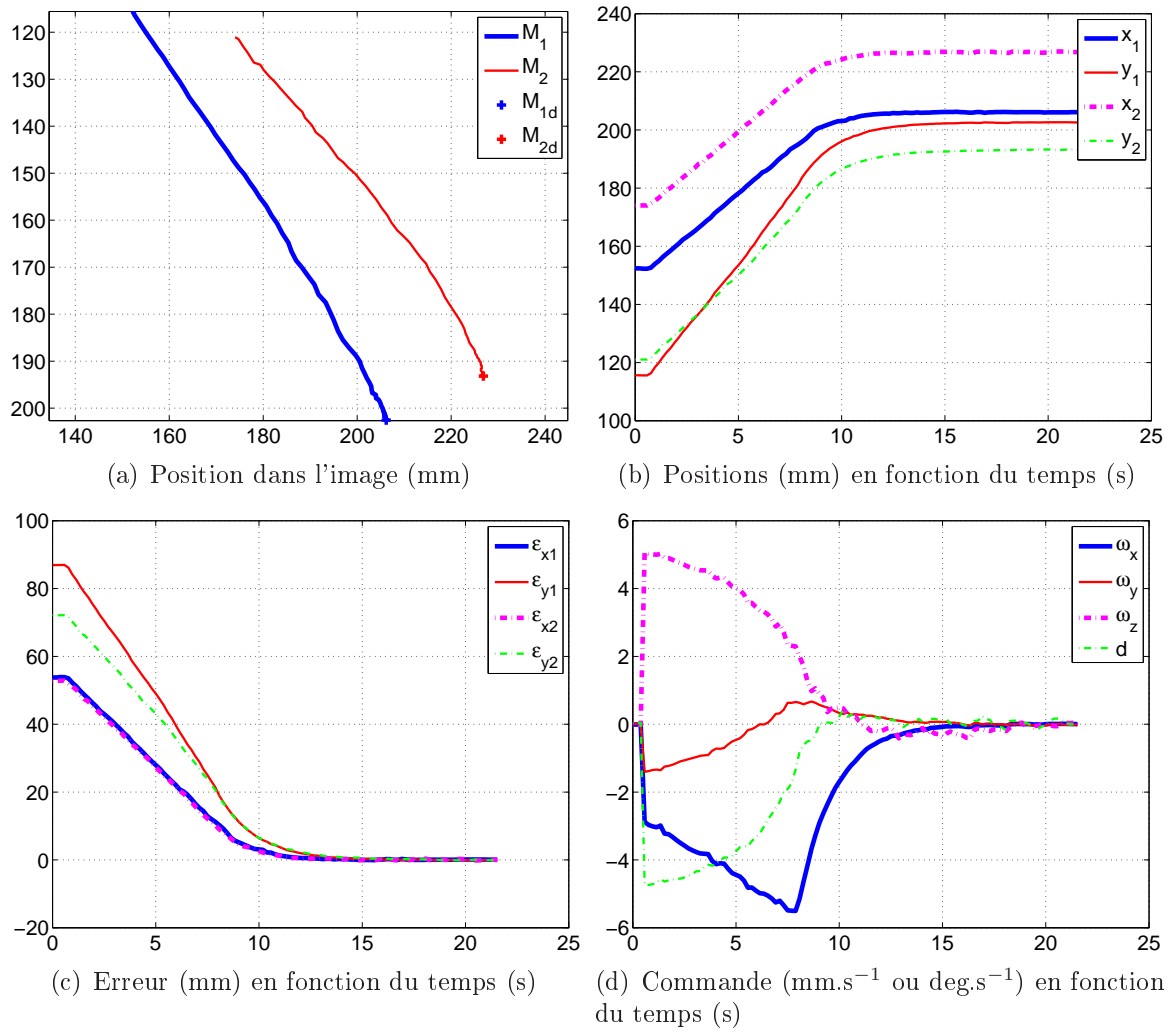


FIG. 3.13 – Résultats expérimentaux avec commande des points

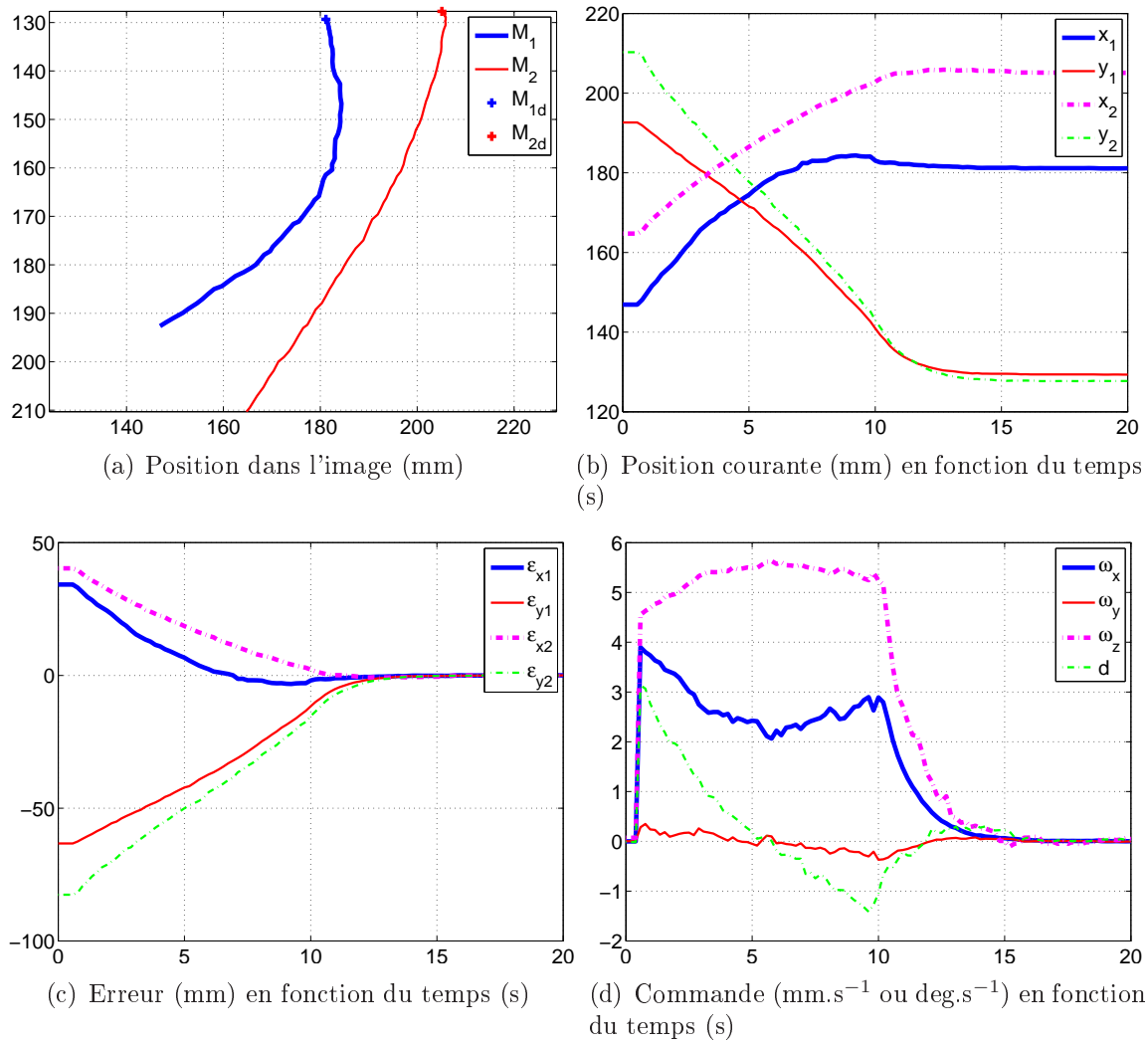


FIG. 3.14 – Résultats expérimentaux avec commande des points lors d'un grand déplacement

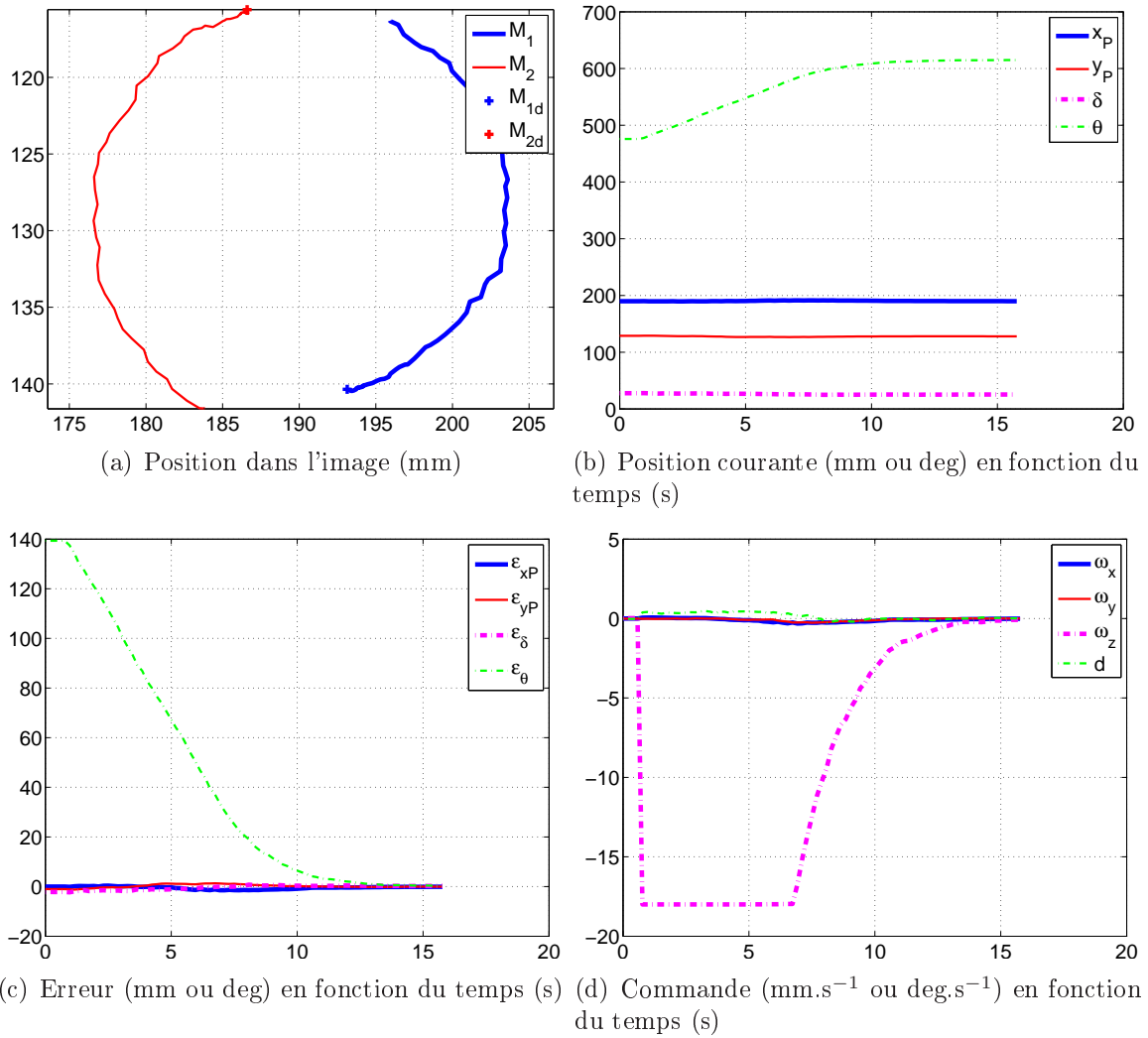


FIG. 3.15 – Résultats expérimentaux lors d'une réorientation de l'instrument dans l'image

Enfin, la figure 3.16 illustre la commande avec les gains adaptatifs. L'erreur en  $\delta$  reste toujours inférieure à 10 mm ce qui correspond à la valeur maximale choisie pour l'expérience. La visibilité de l'instrument est cette fois maintenue et la convergence est assurée. La courbe des commandes permet d'illustrer le passage entre les deux contrôleurs. Les commandes sur  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont annulées lorsque l'erreur sur l'écartement des points devient trop importante et sont calculées lorsque l'erreur en  $\delta$  diminue. L'ensemble de ces

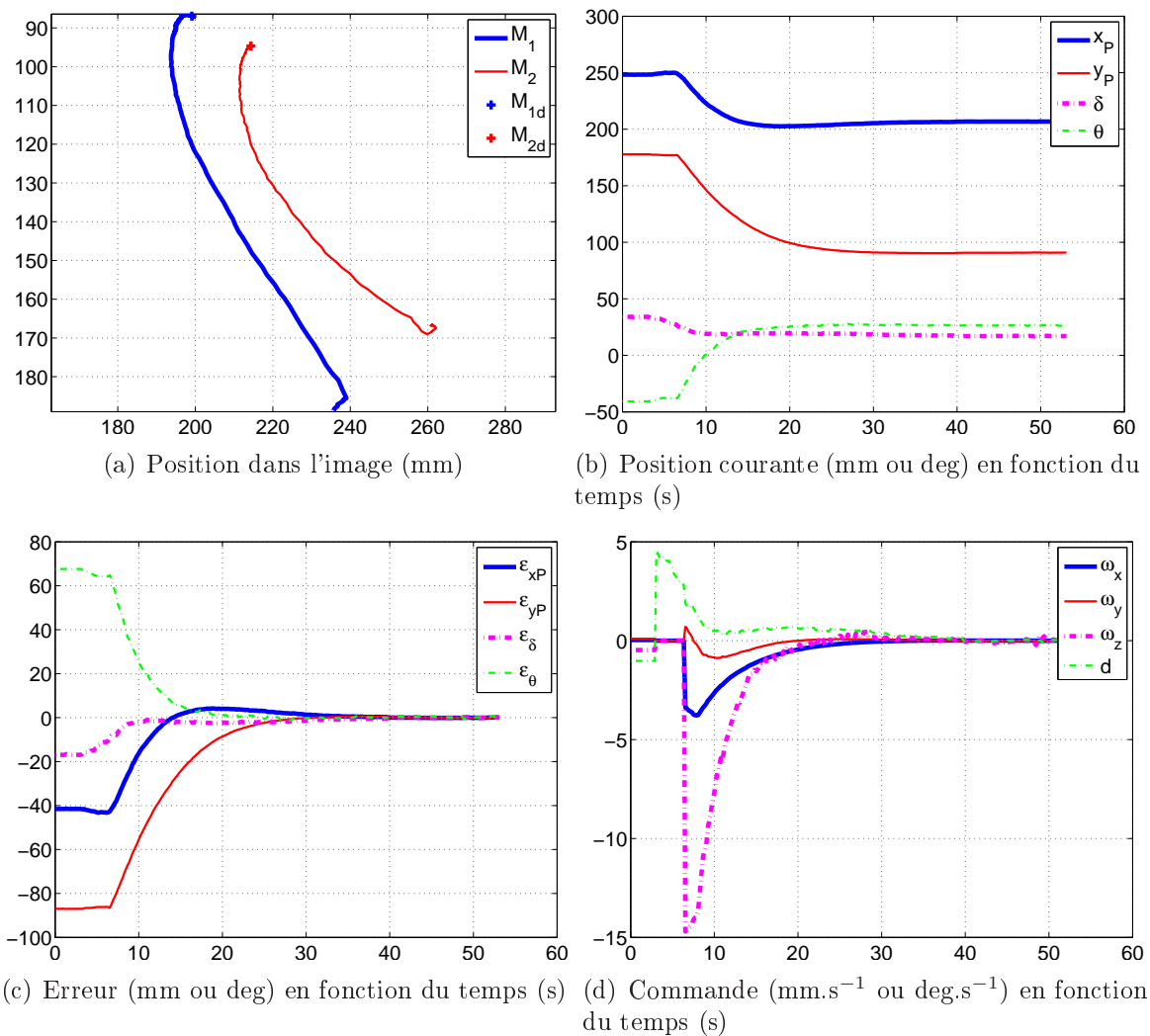


FIG. 3.16 – Résultats expérimentaux avec contrôle de l'erreur en  $\delta$

expériences en laboratoire permet de valider que les méthodes proposées offrent suffisamment de robustesse sous des conditions réelles. Une exploitation pour une application en chirurgie cardiaque, in vivo peut alors être envisagée.

## 3.3 Application à la chirurgie de la valve mitrale

### 3.3.1 Description de l'intervention considérée

#### 3.3.1.1 Notion d'anatomie

**Le cœur** (figure 3.17) est un organe formé essentiellement d'un muscle, le myocarde, lequel est entouré d'un "sac" séreux, le péricarde et est tapissé à l'intérieur par une fine membrane, l'endocarde. Le cœur comprend quatre cavités : deux cavités droites, formées par l'oreillette et le ventricule droits et deux cavités gauches, formées par l'oreillette et le ventricule gauches. Les cavités droite et gauche sont totalement séparées par une cloison (septum).

Le sang s'accumule dans les oreillettes, leur contraction évacue le sang dans les ventricules. La contraction des ventricules éjecte ensuite le sang dans les artères (systole). La décontraction (diastole) suit, laissant le temps au sang de s'accumuler dans les oreillettes et le cycle reprend.

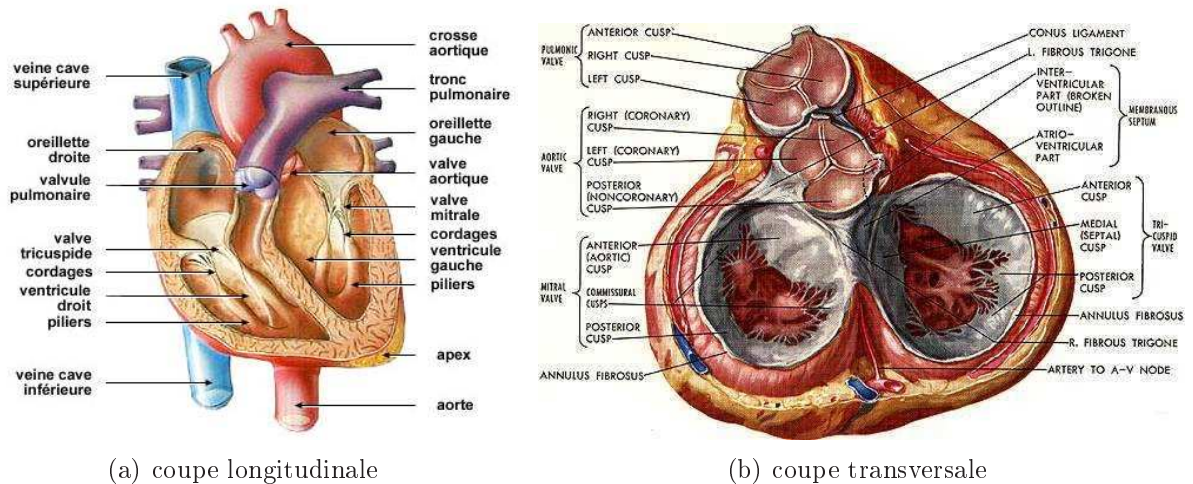


FIG. 3.17 – Coupes du cœur

**La valve mitrale** (figure 3.18) est la valve qui se trouve entre l'oreillette gauche et le ventricule gauche. Lorsqu'elle est ouverte elle permet le passage du sang depuis l'oreillette vers le ventricule ; lorsqu'elle se ferme elle permet d'éviter le ressac du sang dans l'oreillette lors de la contraction du ventricule.

Lorsque l'orifice mitral est fermé, il a la forme d'un croissant (figure 3.18(c)). Le diamètre

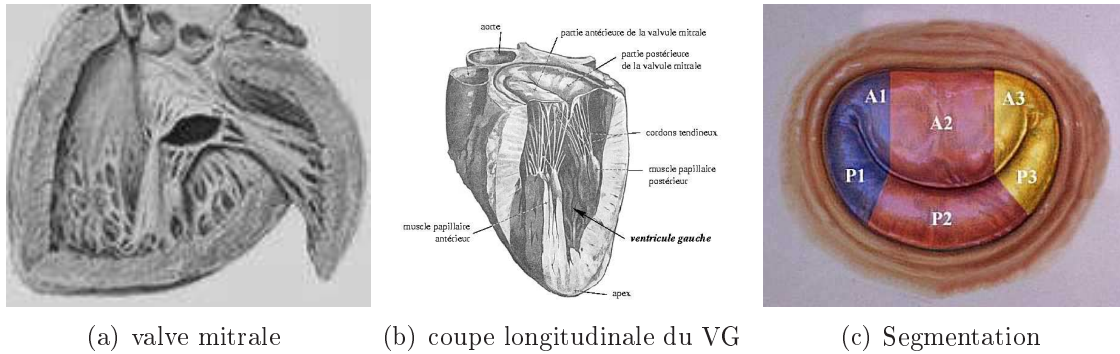
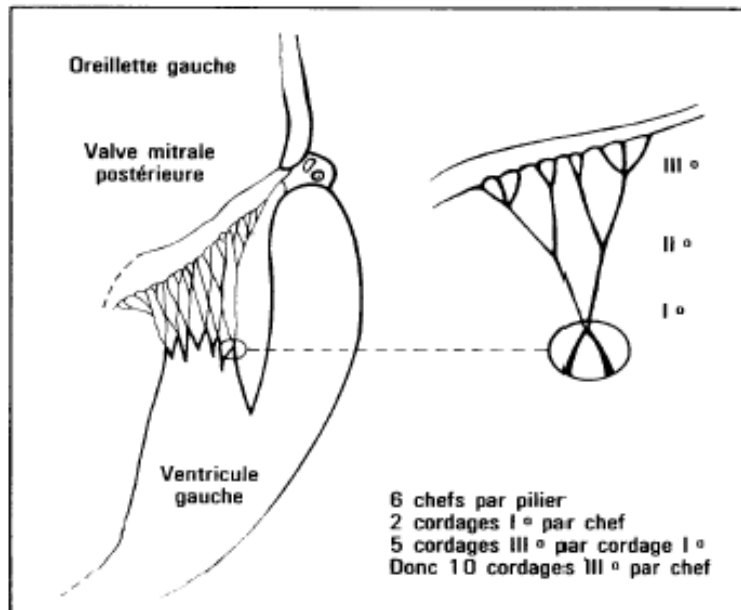


FIG. 3.18 – Valve mitral

de l'orifice mitral est de 90/110 mm. De part et d'autre de ce croissant, on distingue deux valvules : la grande valvule ou cuspide antérieure et la petite valvule ou cuspide postérieure. Elles sont toutes les deux de forme trapézoïdale. La grande valvule est très mobile alors que la petite sert principalement de butée pour assurer l'accolement des deux valvules lors de la systole.



Schématisation du pilier de la mitrale et de ses cordages (d'après Perloff J.K et Roberts W.C)

Figure 1

FIG. 3.19 – schéma des piliers mitraux

Dans le ventricule gauche, chacune des deux valvules est rattachée à un pilier musculaire

grâce à des cordages, figure 3.18(b). Les cordages primaires s'insèrent sur le bord libre des valves et les cordages secondaires sur la face inférieure des valvules (figure 3.19).

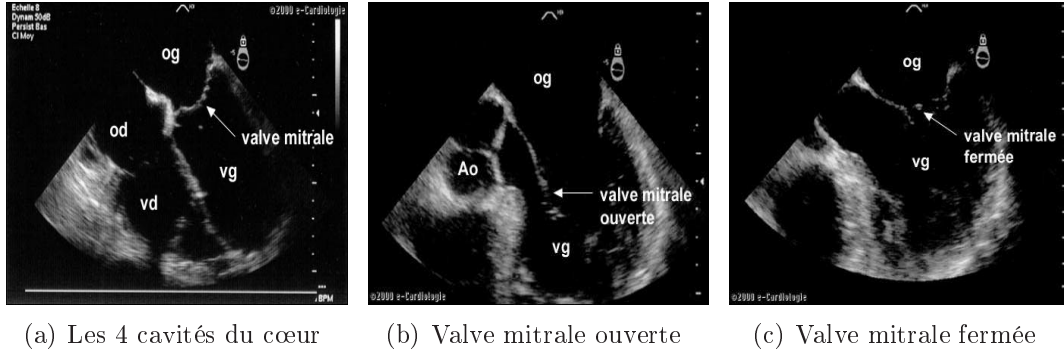


FIG. 3.20 – Le cœur vu par échographie ETO

### 3.3.1.2 Description de la pathologie

**L'insuffisance mitrale** (IM) est un défaut de fermeture de la valve. Elle entraîne un reflux de sang du ventricule dans l'oreillette pendant la systole.

L'insuffisance mitrale est à l'origine d'un travail accru de la partie gauche du cœur. En effet, le cœur gauche doit travailler plus intensément pour éjecter le sang qui a reflué vers l'oreillette. Progressivement se constitue une insuffisance cardiaque gauche associée à une accumulation de sang en amont (avant l'oreillette gauche) ce qui, dans certains cas, provoque un œdème pulmonaire (accumulation de liquide dans les poumons).

Cette pathologie s'observe en général :

- en présence de lésions des piliers, de distension des cordages ou encore de rupture de cordages. Apparaît alors un prolapsus de la valve mitrale, (déplacement anormal dans l'oreillette d'une des valvules au moins), figure 3.21(c) ;
- en cas de dilatation de l'anneau de la valve due à une augmentation de volume du ventricule gauche, figure 3.21(b). Cette affection survient au cours d'une augmentation du volume global des parois constituant le cœur ;
- en cas de réfraction de l'anneau mitral à cause une insuffisance rhumatismale. La petite valve est rétractée, ses cordages sont raccourcis, épaissis ou encore fusionnés, figure 3.21(d) ;

On s'intéresse, dans le cadre du projet national PIR/CNRS GABIE (Guidage Actif Basé sur l'Imagerie Echographique) auquel est lié cette thèse, à l'insuffisance mitrale due à une rupture de cordage. Cette insuffisance mitrale est dite de type II (figure 3.21(c)) d'après la classification de Carpentier. Lors de la systole, l'une des deux valves dépasse le plan de l'anneau mitral et pénètre dans l'oreillette.



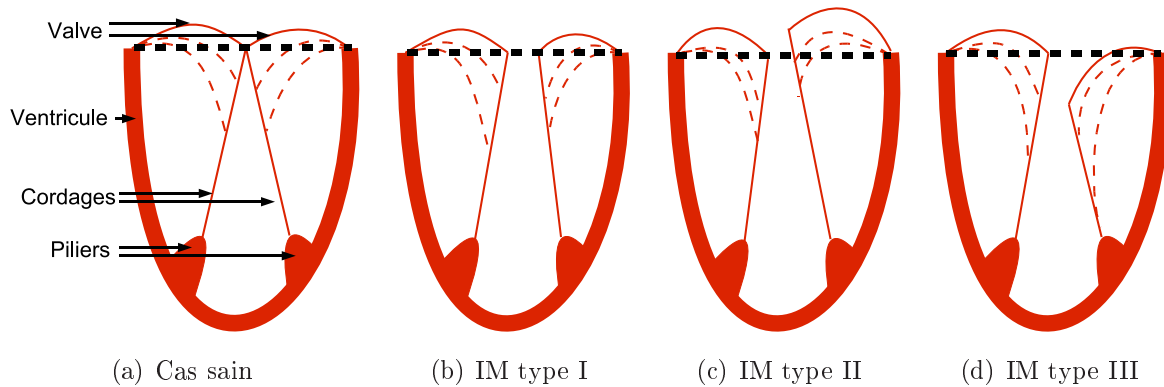


FIG. 3.21 – Types d’insuffisances mitrales

**La chirurgie valvulaire classique** est divisée en deux techniques : le remplacement et la réparation valvulaires. On ne s’intéresse ici qu’aux méthodes de réparation. Dans le cas de la rupture d’un cordage valvulaire, plusieurs interventions sont possibles :

- la fixation du cordage rompu sur un cordage resté intact (technique dite de transposition de cordage),
- la résection avec plicature du feuillet valvulaire en regard du cordage rompu : la partie de la valve à laquelle est attaché le cordage rompu est supprimée, et les deux bords laissés libres par cette résection sont cousus pour refermer le feuillet valvulaire,
- la confection de néo-cordages avec du fil en Gore-Tex : le néo-cordage est alors agrafé sur la paroi interne du ventricule, puis fixé à la partie restante du cordage rompu.

Toutes ces opérations sont aujourd’hui réalisées après ouverture du thorax par sternotomie, installation d’une circulation extra-corporelle, arrêt cardiaque et ouverture de l’oreillette gauche permettant d’accéder à la valve mitrale. Elles sont donc très fortement invasives.

### 3.3.1.3 Intervention échoguidée proposée

Pour réduire le caractère invasif de la réparation valvulaire, on propose une intervention écho-guidée. Celle-ci permettra d’éviter l’installation d’une circulation extra-corporelle ainsi que l’ouverture de l’oreillette gauche. De plus, l’utilisation d’une sonde transœsophagienne permettra de rendre cette intervention très peu invasive en évitant la sternotomie. En effet, ces sondes sont placées dans l’œsophage du patient et permettent de visualiser le

cœur depuis les oreillettes jusqu'à l'apex. Une incision transthoracique permettant d'accéder à la pointe du cœur suffit alors à insérer un instrument dans le ventricule, instrument visible dans l'image échographique. Cet instrument, manipulé par un robot commandé par asservissement visuel, est déplacé vers la partie abîmée de la valve. Lorsque l'instrument a saisi la valve, l'extrémité d'un néo-cordage est fixée sur le bord de la valve. L'instrument est ensuite retiré du ventricule. L'autre extrémité du néo-cordage est enfin fixée à la paroi externe du ventricule par le chirurgien.

Cette intervention nécessite de réaliser plusieurs fonctions élémentaires :

1. segmentation de la valve mitrale : la segmentation, automatique ou semi-automatique, de la valve mitrale ou plus précisément du segment concerné par le geste permet de déterminer la zone cible ;
2. approche de l'instrument : l'instrument est déplacé par asservissement visuel jusqu'à une position, à proximité de la valve, spécifiée par le chirurgien ou déterminée par traitement d'image après la tâche de segmentation de la valve mitrale ;
3. saisie de la valve : le lieu d'implantation du néo-cordage est saisi à l'aide de l'instrument par une commande balistique.

Ces tâches sont étudiées par les différents partenaires du projet GABIE. Notre travail ne traite que de la tâche d'approche de l'instrument.

### 3.3.2 Expériences in vivo

Des expériences in vivo ont été menées à l'École de Chirurgie de Paris. Dans ces expériences, l'objectif est de valider les lois de commande par asservissement visuel présentées au chapitre précédent.

#### 3.3.2.1 Déroulement des expériences

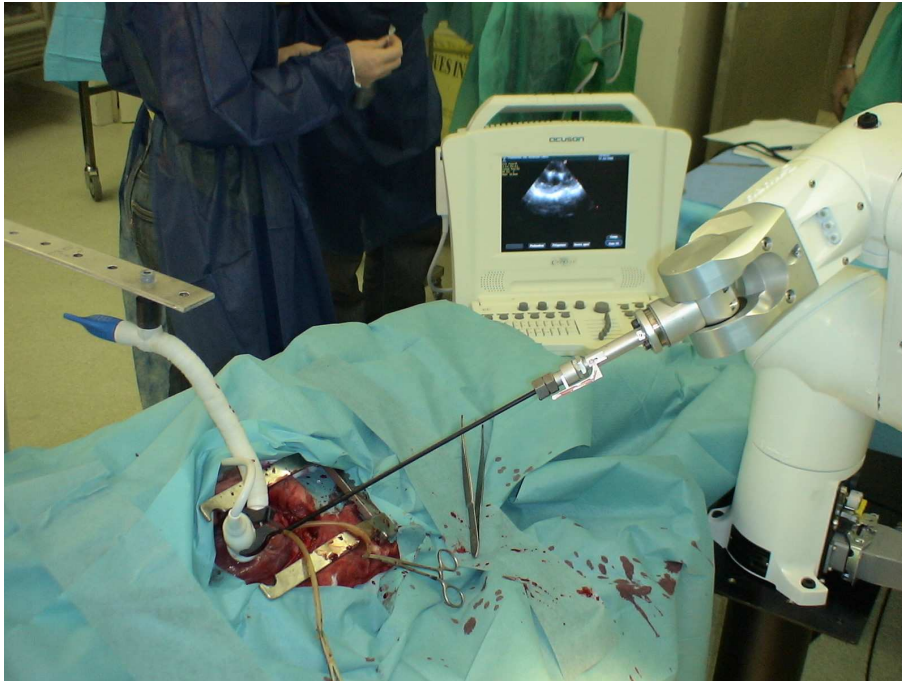
Pour mettre en place le système expérimental, le robot et la sonde sont fixés à la table de chirurgie pour rigidifier le système et assurer des transformations constantes entre robot, sonde et «patient ». Le chirurgien ouvre le thorax du cochon par sternotomie. Puis il découpe le péricarde de sorte que le cœur soit d'accès libre.

Lors de ces expériences l'utilisation de l'imagerie transœsophagienne ne permet pas de visualiser le cœur du cochon. C'est donc une sonde transthoracique en contact direct avec le cœur qui est utilisée de façon à produire une image de l'intérieur du ventricule. Une fois positionnée correctement, elle est fixée à la table d'opération. Le chirurgien place alors un stabilisateur pour empêcher les mouvements de la pointe du cœur sans empêcher les battements du cœur. Il peut ainsi inciser l'apex et placer le trocart. Les axes du robot sont déplacés manuellement après avoir desserré les freins pour faire coïncider l'extrémité de l'instrument avec le trocart. Cette procédure permet de déterminer la position du trocart

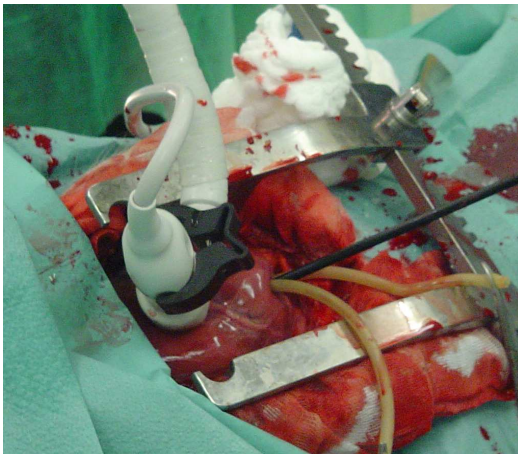
114 Chapitre 3. Mise en œuvre expérimentale du système et application à la chirurgie de la valve mitrale

par rapport à la base du robot. L'instrument est enfin introduit dans le ventricule grâce à un mouvement du robot suivant l'axe de l'instrument.

Une fois que le système est mis en place, l'instrument est automatiquement détecté dans l'image échographique fournie grâce à la sonde épicaudique. L'instrument est alors déplacé dans le ventricule par asservissement visuel sur des images échographiques.



(a) Vue générale



(b) Vue du cœur



(c) Fixation de la sonde

FIG. 3.22 – Expériences in vivo

### 3.3.2.2 Résultats

Ce système n'a été évalué in vivo qu'une seule fois, le 12 juillet 2006, à l'École de Chirurgie de Paris, avec l'aide du chirurgien Nicolas Bonnet.

Lors de cette journée, un certain nombre de problèmes dans la mise en œuvre in vivo du système sont apparus.

La principale difficulté a été d'obtenir des transformations constantes entre les différentes parties du système. Si le système de fixation du robot à la table de chirurgie a bien permis d'éviter les mouvements relatifs, le système de fixation de la sonde s'est révélé inefficace. Le montant représenté sur la figure 3.22(c) sur lequel elle est fixée est trop souple et la sonde suit les battements du cœur. On observe alors des mouvements de l'instrument dans l'image ne correspondant pas à des mouvements de l'instrument dans l'espace mais à un mouvement de l'imageur. Il a alors fallu maintenir manuellement la sonde en contact avec le cœur et dans une position aussi constante que possible.

Par ailleurs, la position du point fixe a été mal saisie. L'instrument tournait donc autour d'un point placé trop haut sur son axe. Du point de vue anatomique, cette erreur a été rattrapée par les différentes flexibilités présentes dans le système (dans l'axe de l'instrument par exemple) et du fait que la pointe du cœur n'était pas stabilisée (la pointe du cœur ne représentait donc pas un point véritablement fixe). Du point de vue de la commande, déplacer le point fixe le long de l'axe de l'instrument est à peu près équivalent à modifier le gain proportionnel dans le calcul de la vitesse de rotation de l'instrument. Cette erreur n'a donc pas nui au bon déroulement des expériences.

Comme la transformation entre la sonde et la base du robot n'est pas constante et que la position du point fixe a été mal définie, la procédure d'étalonnage du système n'a pas fonctionné lors de ces expériences in vivo. De ce fait, seules les boucles d'asservissement visuel ne nécessitant pas une connaissance a priori de la transformation entre la sonde et la base du robot ont été testées in vivo. Il est clair que de toutes façons ces méthodes sont à préférer.

Dans chacune des expériences suivantes, l'instrument est déplacé de sa position courante vers une position désirée indiquée en cliquant dans l'image.

Les déplacements possibles sont très limités du fait de la taille d'un ventricule (environ 5 cm sur 3 cm de large et 2 cm d'épaisseur en diastole). L'instrument est alors déplacé sur des distances du centimètre.

De plus, les mouvements de la sonde entraînent des sauts de position de l'instrument dans l'image d'où des mesures bruitées. La figure 3.23 montre des images successives de l'instrument à l'intérieur du cœur. Sur les courbes représentant la position de l'instrument dans l'image, les points indiquent les positions mesurées et les lignes les positions filtrées. Sur les autres courbes, seules les valeurs filtrées sont tracées.

La figure 3.24 montre les courbes résultant d'un asservissement visuel sur les points dans l'image en supposant dans la commande que le plan échographique est perpendiculaire à l'axe de l'instrument, section 2.3.

La figure 3.25 illustre le comportement du système commandé avec le second vecteur de mesure. On contrôle alors explicitement l'orientation de l'instrument dans l'image,

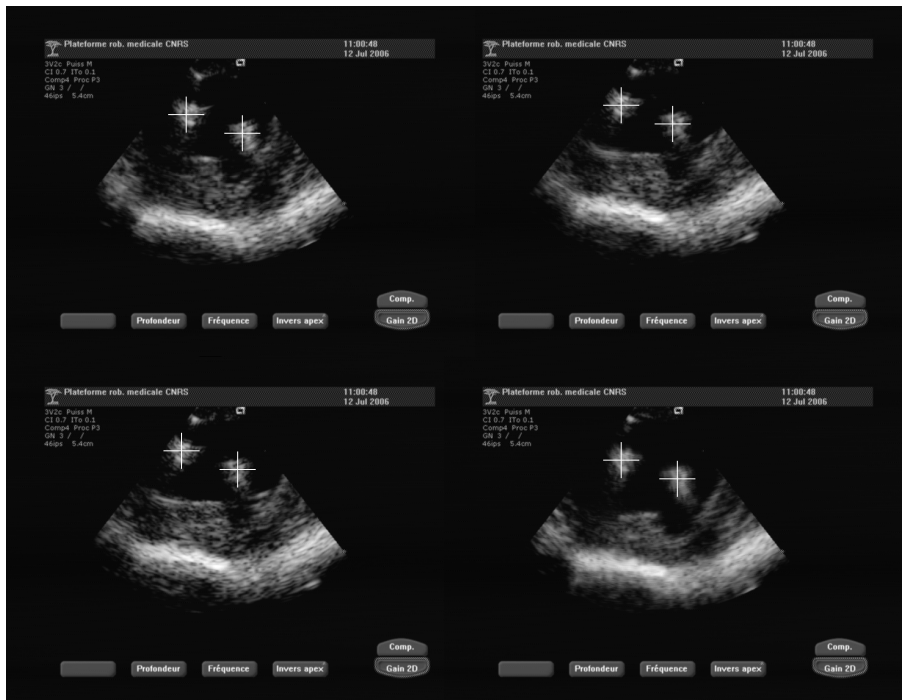


FIG. 3.23 – Images de l’instrument dans le cœur

section 2.4.

On voit que dans les deux cas, malgré la présence de bruit, malgré les incertitudes, la convergence est assurée.

Pour améliorer les résultats obtenus, le système pourra être modifié en tenant compte des problèmes rencontrés. Il faudra par exemple concevoir un nouveau système de fixation de la sonde. Un travail doit aussi être effectué sur les algorithmes de traitement d’images pour en améliorer la robustesse.

Malgré les difficultés rencontrées, l’asservissement visuel par imagerie échographique a pu être validé in vivo.

## Conclusion

Dans ce chapitre, les différents développements nécessaires à la mise en œuvre expérimentale du système ont été décrits :

- une commande qui permet de réaliser la contrainte du point fixe sans modifier la stabilité de la boucle d’asservissement visuel.
- les principes des algorithmes de traitement d’image pour la détection et le suivi automatique de l’instrument ont été donnés.
- une procédure per-opératoire d’identification de la transformation sonde-base du

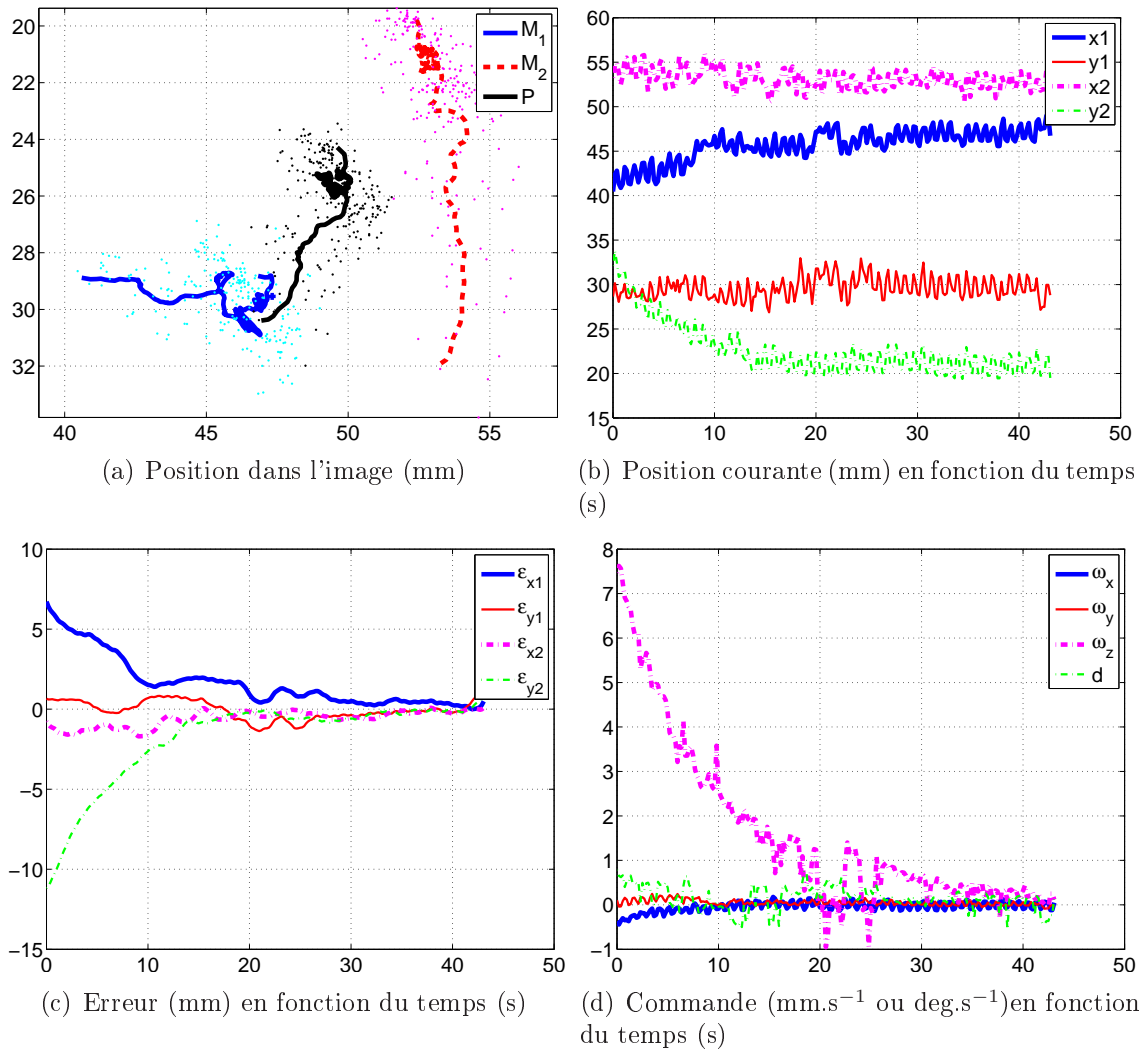


FIG. 3.24 – Résultats expérimentaux avec contrôle des points dans l'image

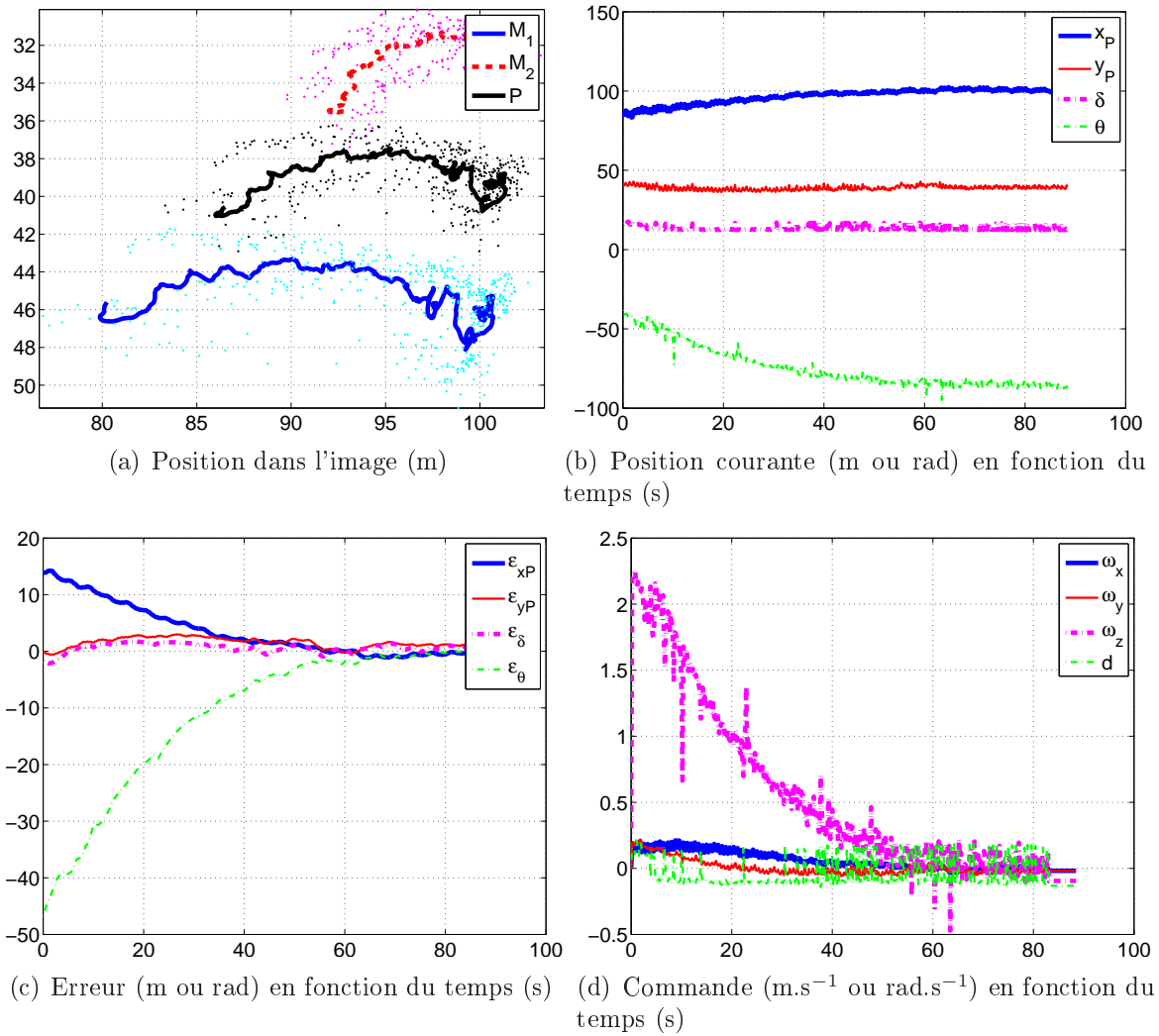


FIG. 3.25 – Résultats expérimentaux avec contrôle de l'orientation dans l'image

robot.

Enfin, le système a été validé lors d'expériences *in vitro* et *in vivo*. Malgré les difficultés rencontrées lors des expériences *in vivo*, on a montré expérimentalement que les images échographiques peuvent être utilisées dans une boucle d'asservissement visuel pour guider un instrument à l'intérieur d'un cœur battant.





# Conclusion générale

## Conclusions

De nombreuses interventions de chirurgie mini-invasive consistent à insérer au travers d'une petite incision un instrument jusqu'à l'intérieur d'un organe, pour y effectuer une opération simple, comme une ponction. Souvent, l'utilisation de la vision directe n'est pas possible ; on utilise alors des dispositifs imageurs externes comme une sonde échographique. Celle-ci est difficile à manipuler par coordination des deux mains du chirurgien. Dans le cadre de cette thèse, des méthodes permettant d'automatiser le déplacement d'un instrument sous échographie par des moyens robotiques ont été proposées.

L'objectif de cette thèse était donc de concevoir un système intégrant une imagerie échographique couplée à un instrument de chirurgie mini-invasive et un système de guidage actif temps réel associé puis d'appliquer ce système à la chirurgie de la valve mitrale à cœur battant.

Une première partie de ce travail a consisté à établir un modèle de l'interaction entre un instrument et le faisceau d'ultrasons. L'hypothèse proposée consiste à considérer que le centre de gravité de la trace de l'instrument détectée dans l'image coïncide avec un point défini comme l'intersection d'une droite représentant l'instrument et d'un plan modélisant le faisceau d'ultrasons. Des expériences probantes ont permis de valider cette hypothèse.

Considérant ce modèle, réaliser la tâche de guidage revient à étudier le positionnement d'un solide dans l'espace à partir de la mesure des coordonnées des points d'intersection de droites de ce solide avec un plan. Cette abstraction nous a permis, dans un premier temps, de produire une analyse des singularités cinématiques pour déterminer une configuration de travail permettant le contrôle des quatre degrés de liberté d'un instrument de chirurgie mini-invasive. Dans un second temps, sur la base du même modèle, plusieurs lois de commande à découplage par cinématique inverse ont été synthétisées. Ces lois utilisent :

- différents paramétrages du vecteur de mesure : la mesure directe des coordonnées

des points dans l'image, ou un vecteur décrivant l'orientation de l'instrument ainsi que l'écartement des points dans l'image ;

- différentes méthodes pour le calcul de la matrice de commande, à partir de l'estimation du jacobien inverse : soit grâce à une procédure d'identification paramétrique par optimisation au sens des moindres carrés soit en faisant l'hypothèse que l'instrument est perpendiculaire au plan échographique (ce qui permet de s'affranchir de la connaissance de la géométrie relative des différents appareils du système robotique).

Les asservissements visuels proposés ont été analysés à travers des démonstrations de stabilité locale par la méthode indirecte de Lyapunov. De plus, ils ont été évalués à travers des simulations. Une adaptation en ligne des gains du contrôleur a été proposée pour augmenter la robustesse de l'asservissement en garantissant le maintien de l'instrument dans le champ de vision de la sonde échographique, sans affecter sa stabilité.

Enfin, le système robotique a été mis en œuvre et testé lors d'expériences *in vitro* et *in vivo*. Cette mise en œuvre a requis, entre autre, la synthèse d'une loi de commande pour un robot à six degrés de liberté devant respecter la contrainte plane imposée par le trocart, tout en laissant libres pour l'asservissement visuel les quatre degrés de liberté intracorporels. La loi de commande cinématique proposée, originale, permet de respecter la contrainte de fixité du point d'incision tout en garantissant que le système complet, à six degrés de libertés, conserve les propriétés de stabilité de l'asservissement visuel des quatre degrés de liberté internes au patient.

Les expériences *in vitro* et *in vivo* se sont, du point de vue de l'asservissement visuel, déroulées avec succès. Ce travail démontre donc la possibilité d'automatiser la coordination « main/œil » lors de gestes échoguidés au delà des gestes simples à un ou deux degrés de liberté qu'il est possible de réaliser manuellement.

## Perspectives

A l'origine de ce travail, le problème posé par les chirurgiens était celui de la réparation échoguidée de la valve mitrale. En cherchant comment la robotique pouvait permettre de réaliser une telle intervention, on a été amené à s'intéresser à une tâche particulière : le guidage d'un instrument à partir des images échographiques.

De très nombreux problèmes doivent encore être résolus avant de pouvoir envisager une réparation de valve mitrale avec un système robotique entièrement autonome (problèmes de traitement d'image, de saisie de valve...). Cependant la fonction de guidage d'un

instrument sous échographie est désormais disponible. Il apparaît donc opportun de déterminer, avec les chirurgiens, des interventions moins complexes telles que la tâche du système robotique se verrait réduite au seul guidage de l'instrument vers une position désirée. On pense naturellement aux gestes qui sont déjà pratiqués manuellement sous guidage échographique, sur organes « immobiles », en chirurgie obstétrique ou abdominale par exemple. Dans ce cadre, le guidage robotique pourrait permettre une précision accrue, donc une intervention sur des cibles plus petites que ce qu'il est possible de pratiquer aujourd'hui.

Une autre voie prometteuse pour l'exploitation des résultats de ce travail est celle de la comanipulation. Ce nouveau type de systèmes exploite la manipulation simultanée de l'outil par un opérateur humain et par un robot facilitant le geste de l'opérateur. On a rappelé que la motivation de ce travail est de faciliter la synchronisation main-oeil lors d'interventions écho-guidées. On peut donc envisager que le robot n'ait en charge que le contrôle de la visibilité de l'instrument, par exemple par l'écartement des mors comme proposé dans ce manuscrit, tandis que le chirurgien serait libre de déplacer l'instrument, donc de le « faire glisser » sur le plan échographique.

Du point de vue de la robotique, ce travail peut être étendu au guidage d'un instrument ayant six degrés de libertés sans que cela ne présente de difficultés majeures. Pour cela, on pourrait par exemple modifier la géométrie de l'instrument de façon à avoir au moins trois points dans l'image (donc six mesures indépendantes). Le même type d'étude que celles présentées dans ce document permettrait de définir une géométrie permettant de commander les six degrés de liberté. La matrice d'interaction entre un mors et le plan échographique resterait identique. Il ne resterait alors qu'à choisir un paramétrage judicieux pour synthétiser une commande robuste. En effet, commander directement les points dans l'image poserait à nouveau le problème de visibilité de l'instrument lors d'une réorientation dans l'image de ce dernier.

Par ailleurs, il existe des sondes miniaturisées qui permettent d'explorer les veines et les artères de l'intérieur. Il semble intéressant d'utiliser ces sondes pour étudier une autre technique d'asservissement visuel : l'asservissement dit « eye-in-hand », (oeil dans la main). Contrairement à l'asservissement étudié ici (dit « hand-in-eye », mains dans l'oeil), où la sonde est fixe et regarde à la fois la cible et l'instrument, pour l'asservissement « eye-in-hand » la sonde est fixée à l'instrument. La scène est alors visualisée depuis l'instrument. Les matrices d'interaction entre la sonde et l'environnement sont différentes bien que le principe reste le même : utiliser des primitives mesurées dans l'image et trouver les vitesses de l'instrument permettant à ces primitives d'atteindre les valeurs désirées. Les perspectives d'application sont nombreuses, car ces techniques pourraient intégrer à terme des cathéters actifs et faciliter leur guidage.

Au final, si ce travail a vu la première réalisation expérimentale du guidage automatique d'un instrument à l'intérieur d'un cœur battant, il a surtout permis de montrer le potentiel que renferme le couplage imagerie échographique – robotique, dont on peut espérer qu'il aboutira, dans les prochaines années, à de réelles avancées pour la pratique de divers gestes chirurgicaux.

# Publications

Ce travail a donné lieu à plusieurs publications dans des conférences internationales avec comité de lecture :

- Vitrani (M-A), Ortmaier (T) et Morel (G) - *A robotic system guided by ultrasound images*. Surgetica 2005 conference, Chambéry, France, octobre 2004.
- Ortmaier (T), Vitrani (M-A), Morel (G), et Pinault (S) - *Robust Real-Time Instrument Tracking in Ultrasound Images*. SPIE Medical Imaging Conference San Diego, Californie, Etats-Unis , février, 2005.
- Ortmaier (T), Vitrani (M-A) et Morel (G) - *Robust Real-Time Instrument Tracking in Ultrasound Images for Visual Servoing*. ICRA'05, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol.3, pp : 2179-2184, Barcelone, Espagne, avril 2005.
- Vitrani (M-A), Morel (G) et Ortmaier (T) - *Automatic Guidance of a Surgical Instrument with Ultrasound Based Visual Servoing*. ICRA'05, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol.1, pp : 519-515, Barcelone, Espagne, avril 2005.
- Vitrani (M-A), Morel (G), Bonnet (N) et Karouia (M) - *A robust ultrasound-based visual servoing approach for automatic guidance of a surgical instrument with in vivo experiments*. BIOROB'06, IEEE Int. Conf. on Biomedical Robotics and Biomechatronics, Pise, Italie, février 2006.

Par ailleurs, ce travail a aussi été décrit dans le cadre du projet GABIE :

- Dombre (E), Pierrot (F), Poignet (P), Renaud (P), Sauvée (M), Triboulet (J), Bidaud (P), Morel (G), Ortmaier (T), Pinault(S), Vitrani (M-A), Gravez (P), Bonnet (N), Karouia (M), Chavanon (O), Daanen (V) et Troccaz (J) - *Projet GABIE : Guidage Actif Basé sur l'Imagerie Echographique*. Journées bilan des projets ROBEA, Montpellier, France, mars 2005.
- Dombre (E), Poignet (P), Renaud (P), Sauvée (M), Triboulet (J), Bidaud (P), Morel (G), Ortmaier (T), Vitrani (M-A), Rotinat-Libersa (C), Jardin (A), Bonnet (N), Karouia (M), Chavanon (O), Daanen (V) et Troccaz (J) - *Projet GABIE : Guidage Actif Basé sur l'Imagerie Echographique*. Journées bilan des projets ROBEA, Paris, France, avril 2006.

Enfin, des travaux indépendants de cette thèse ont été publiés dans une revue et dans des conférences internationales avec comité de lecture :

- 
- Vitrani (M.A.), Nikitckuk (J.), Morel (G.) et Mavroidis (C.) - Torque Control of Electro-Rheological Fluidic Resistive Actuators for Haptic Vehicular Instruments Controls, à paraître dans ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control.
  - Vitrani (M.-A.), Nikitzuk (J.), Morel (G.) et Mavroidis (C.), Torque Control of Electrorheological Fluidic Actuators for Haptic Vehicular Instrument Controls. Actes de ICRA'04 : IEEE International Conference on Robotics and Automation, La Nouvelle-Orléans, Etats-Unis, Mai 2004.
  - Vitrani (M.-A.), Nikitzuk (J.), Morel (G.) et Mavroidis (C.), Torque Control of Electro-Rheological Fluidic Actuators, Proceedings of the 2004 American Control Conference, Acte sur CD ROM, Boston Massachusetts, Etats-Unis, Juin-Juillet, 2004.
  - Zemiti (N.), Ortmaier (T.), Vitrani (M.-A.) et Morel (G.) - A Force Controlled Laparoscopic Surgical Robot without Distal Force Sensing, ISER 2004 ; 9th International Symposium on Experimental Robotics, Singapour, Juin 2004.

# Bibliographie

- [Angelini 1999] L. Angelini et M. Caratozzolo. *Intraoperative echography : the state of the art*. Ann. Ital. Chir, vol. 70, no. 2, pages 223–230, 1999.
- [Berkelman 2003] P. Berkelman, P. Cinquin, E. Boidard, J. Troccaz, C. Letoublon et J.M. Ayoubi. *Design, Control, and Testing of a Novel Compact Laparoscopic Endoscope Manipulator*. In Journal of Systems and Control Engineering, volume 217, pages 329–341, 2003.
- [Boctor 2004] E.M. Boctor, G. Fischer, M.A. Choti, G. Fichtinger et R.H. Taylor. *A dual-armed Robotic System for Intraoperative Ultrasound Guided Hepatic Ablative Therapy : A prospective Study*. In IEEE ICRA International Conference on Robotique and Automation, pages 2517–2522, New Orleans, LA, 2004.
- [Casals 1996] A. Casals, J. Amat et E. Laporte. *Automatic Guidance of an Assistant Robot in Laparoscopic Surgery*. In IEEE ICRA'96 International Conference on Robotics and Automation, pages 895–900, 1996.
- [Chaumette 2002] F. Chaumette. *Asservissement visuel*. In W. Khalil, editeur, La commande des robots manipulateurs, Traité IC2, chapitre 3, pages 105–150. Hermès, 2002.
- [Cleary 2005] K. Cleary. *Medical robotics and the operating room of the futur*. In IEEE Engineering in Medicine and Biology, pages 7250–7253, 2005.
- [Craig 2004] J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. In Pearson Education, 3<sup>ième</sup> édition, 2004.
- [de Cunha 1998] D. de Cunha, P. Gravez, C. Leroy, E. Maillard, J. Jouan, P. Varley, M. Jones, M. Halliwell, D. Hawkes, P.N.T. Wells et L. Angelini. *The MIDSTEP System for Ultrasound guided Remote Telesurgery*. In IEEE Engineering in MEDicine and Biology Society, volume 20, pages 1266–1269, 1998.
- [Delgorge 2005] C. Delgorge, F. Courrèges, L. Al Bassit, C. Novales, C. Rosenberger, N. Smith-Guerin, C. Brù, R. Gilabert, M. Vannoni, G. Poisson et P. Vieyres. *A tele-operated mobile ultrasound scanner using a light-weight robot*. In IEEE Trans. on information technology in biomedicine, pages 50–58, 2005.



- [Fornage 2004] B. Fornage. *Echographie interventionnelle du sein : état de l'art et nouvelles techniques*. In XVIIIème Journées Pyrénéennes de Gynécologie, 2004.
- [Ghodoussi 2002] M. Ghodoussi, S.E. Butner et Y. Wang. *Robotic -surgery - the transatlantic case*. In IEEE ICRA'02, International Conference on Robotics and Automation, pages 1882–1888, May 2002.
- [Ginhoux 2005] R. Ginhoux, J. Gangloff, M. de Mathelin, L. Soler, M.M. Arenas Sanchez et J. Marescaux. *Active Filtering of Physiological Motion in Robotized Surgery Using Predictive Control*. In IEEE Transaction on Robotics, pages 67–79, 2005.
- [Guthart 2000] G.S. Guthart et J.K. Salisbury. *The intuitive telesurgery system : overview and application*. In IEEE ICRA'00, International Conference on Robotics and Automation, pages 618–621, 2000.
- [Hager 1994] G. Hager, S. Hutchinson et P. Corke. *Tutorial TT3 : A Tutorial on Visual Servo Control*. ICRA 1994 International Conference on Robotics and Automation, 1994.
- [Hong 2004] J. Hong, T. Dohi, M. Hashizume, K. Konishi et N. Hata. *An Ultrasound-driven needle insertion robot for percutaneous cholecystostomy*. Physics in Medicine and Biology, vol. 49, no. 3, pages 441–455, 2004.
- [Jakopec 2003] M. Jakopec, F. Rodriguez y Baena, S.J. Harris, P. Gomes, J. Cobb et B.L. Davies. *The hand-in orthopaedic robot ACROBOT : early clinical trials of total knee replacement surgery*. In IEEE transaction on robotics and automation, volume 19, pages 902–911, 2003.
- [Kazanzides 1995] P. Kazanzides, B.D. Mittlestadt, B.L. Musits, W.L. Bargar et J.F. Zuhars et al. *An integrated system for cementless hip replacement*. In IEEE Eng. Med. Biol. Mag., volume 14, pages 307–313, May 1995.
- [Krupa 2003] A. Krupa, J. Gangloff, C. Doignon, M. de Mathelin, G. Morel, J. Leroy and L. Soler et J. Marescaux. *Autonomous 3D positionning of surgical instrument in robotized laparoscopic surgery using visual servoing*. In IEEE Transaction on Robotics and Automation, volume 19, pages 842–853, 2003.
- [Krupa 2004] A. Krupa, G. Morel et M. de Mathelin. *Achieving High Precision Laparoscopic Manipulation Through Adaptive Force Control*. *Advanced Robotics*. In Advanced Robotics, volume 18, pages 905–926, 2004.
- [Krupa 2006] A. Krupa. *Automatic Calibration of a Robotized 3D Ultrasound Imaging System by Visual Servoing*. In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'2006, pages 4136–4141, Orlando, Florida, May 2006.

- [Lavallée 1992] S. Lavallée, J. Troccaz, L. Gaborit, P. Cinquin, A. Benabid et D. Hoffmann. *Image-guided operating robot : a clinical application in stereotactic neurosurgery*. In IEEE ICRA'92 International Conference on Robotics and Automation, volume 1, pages 618–624, 1992.
- [Low 2004] S.C. Low et L. Phee. *A review of Master-Slave Robotic Systems for Surgery*. In MICCAI-Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, volume 2, pages 145–152. Springer, 2004.
- [Maurin 2005] B. Maurin, C. Doignon, J. Gangloff, B. Bayle, M. de Mathelin, O. Piccin et A. Gangi. *CT-Bot : A stereotactic-Guided Robotic Assistant for Percutaneous Procedures of the Abdomen*. In SPIE Medical Imaging, San Diego, February 2005.
- [Mazal 1997] A. Mazal, J.C. Rosenwald, R. Ferrand, S. Delacroix, C. Nauraye, C. Aligne, P. Schlienger et J.L. Habrand. *Robots In High Precision Patient Positioning For Conformal Radiotherapy*. In Proceedings of World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering, Medical, Biological Engineering and Computing, page 824, 1997.
- [Megali 2001] G. Megali, O. Tonet, C. Stefanini, M. Boccadoro, V. Papaspyropoulos, L. Angelini et P. Dario. *A Computer-Assisted Robotic Ultrasound-Guided Biopsy System for Video-Assisted Surgery*. In Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2001 : 4th International Conference, Proceedings, pages 343–350, Utrecht, The Netherlands, 2001.
- [Michelin 2004] M. Michelin, E. Dombre et P. Poignet. *Geometrical control approaches for minimally invasive surgery*. In Medical Robotics, Navigation and Visualization (MRNV'04), pages 152–159, Remagen, Allemagne, 2004.
- [Morel 2005] G. Morel et J. Gangloff. *Commande référencée capteurs en robotique médicale et chirurgicale*. In JNRR'05 Journées Nationale de la Recherche en Robotique, 2005.
- [Nakamura 2001] Y. Nakamura, K. Kishi et H. Kawakami. *Heartbeat Synchronization for Robotic Cardiac Surgery*. In IEEE ICRA'01 International Conference on Robotics and Automation, pages 2014–2019, 2001.
- [Navab 2000] N. Navab, B. Bascle, M. Loser, B. Geiger et R. Taylor. *Visual servoing for automatic and uncalibrated needle placement for percutaneous procedures*. In Proceedings. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,, volume 2, pages 327 – 334, 2000.
- [Ortmaier 2005] T. Ortmaier, M.-A. Vitrani, G. Morel et S. Pinault. *Robust Real-Time Instrument Tracking in Ultrasound Images*. In Proc. of SPIE Medical Imaging Conference, San Diego, California, USA, February 2005.
- [Peters 2000] T.M. Peters. *Image-guided surgery : From X-Ray to virtual reality*. In Computer methods in biomechanics and biomedical engineering, pages

- 27–57, 2000.
- [Phee 2005] L. Phee, D. Xiao, J. Yuen, C. Fatt Chan, H. Ho, C. Hua Thng, C. Cheng et W. Sing Ng. *Ultrasound Guided Robotic System for Transperineal Biopsy of the prostate*. In Proc. of the ICRA 2005, pages 1315–1320, 2005.
- [Pierrot 1999] F. Pierrot, E. Dombre, E. Dégoulange, L. Urbain, P. Caron, S. Boudet, J. Gariépy et J.L. Mégnién. *Hippocrate : a safe robot arm for medical applications with force feedback*. Medical Image Analysis, vol. 3, no. 3, pages 285–300, 1999.
- [Salcudean 2000] S.E. Salcudean, W.H. Zhu, P. Abolmaesumi, S. Bachmann et P.D. Lawrence. *A Robot System for Medical Ultrasound*. Robotics Research, May 2000.
- [Schneider 2001] O. Schneider et J. Troccaz. *A Six Degree of Freedom Passive Arm with Dynamic Constraints (PADyC) for Cardiac Surgery Application : Preliminary Experiments*. In Computer-Aided Surgery, special issue on medical robotics, volume 6, pages 340–351, 2001.
- [Schweikard 1998] A. Schweikard, M. Bodduluri et J.R. Adler. *Planning for Camera-Guided Radiosurgery*. In IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998.
- [Siebert 2001] W. Siebert et S. Mai. *One year clinical experience using the robot system CASPAR for TKR*. In CAOS USA 2001, pages 141–142, 2001.
- [Stoll 2001] J. Stoll, P. Dupont et R. Howe. *Ultrasound-based Servoing of Manipulators for Telesurgery*. In Telemanipulator and Telepresence Technologies VIII Conference, volume 4570 of *Proceedings of SPIE*, 2001.
- [Taillant 2004] E. Taillant, J. Avila-Vilchis, C. Allegrini, I. Bricault et P. Cinquin. *CT and MR compatible Light Puncture Robot : Architectural Design and First Experiments*. In IEEE Mechatronics and Robotics, pages 1430–1435, 2004.
- [Taylor 2003] R.H. Taylor et D. Stoianovici. *Medical robotics in computer integrated surgery*. In IEEE Transaction on Robotics and Automation, volume 19, pages 765–781, 2003.
- [Uecker 1994] D.R. Uecker, C. Lee, Y.F. Wang et Y. Wang. *A speech directed multi modal man machine interface for robotically enhanced surgery*. In 1<sup>st</sup> Int. Symp. Medical Robotics and Computer Assisted Surgery, pages 176–183, 1994.
- [Uecker 1995] D.R. Uecker, L. Cheaolwhan, Y.F. Wang et Y. Wang. *Automated instrument tracking in robotically assisted laparoscopic surgery*. In Journal of Image Guided Surgery, volume 1, pages 308–325, 1995.

- 
- [Vilchis 2002] A. Vilchis, J. Troccaz, P. Cinquin, A. Guerraz, F. Pellisier, P. Thorel, B. Tondu, F. Courrèges, G. Poisson, M. Althuser et J. Ayoubi. *Experiments with the TER Tele-echography Robot*. In Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2002 : 5th International Conference, Proceedings, Part I, pages 138 – 146, Tokyo, Japan, 2002.
- [Wei 1997] G.Q. Wei, K. Arbter et G. Hirtzinger. *Real-time Visual Servoing for laparoscopic surgery*. In IEEE Engineering in Medicine and Biology, pages 40–45, 1997.
- [Zemiti 2004] N. Zemiti, T. Ortmaier, M.A. Vitrani et G. Morel. *A Force Controlled Laparoscopic Surgical Robot without Distal Force Sensing*. In Proc. of the ISER 2004 ; 9th International Symposium on Experimental Robotics, Singapore, 2004.



# Annexe A

## Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique

---

### A.1 Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique pour un instrument à un mors

On cherche le jacobien du paramétrage  $\mathbf{J}_{\mathbf{p}i}$  qui traduit la relation entre les dérivées temporelles de la mesure  $\mathbf{s}_{\text{mes},i}$  et du vecteur de paramètres  $\mathbf{p}$ .

$$d\mathbf{s}_{\text{mes},i} = \mathbf{J}_{\mathbf{p}i} d\mathbf{p} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{s}_{\text{mes},i} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\mathbf{S}\mathbf{M} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{p} = [{}^Sx_{O_0} \quad {}^Sy_{O_0} \quad {}^Sz_{O_0} \quad r_x \quad r_y \quad r_z \quad k_x \quad k_y]^T \quad (\text{A.3})$$

où

- $k_x$  et  $k_y$  sont les gains de changement d'échelle ;
- le vecteur  ${}^S\mathbf{S}\mathbf{O}_0 = [{}^Sx_{O_0} \quad {}^Sy_{O_0} \quad {}^Sz_{O_0}]^T$  est la position de l'origine du repère lié à la base du robot dans le repère lié à la sonde ;
- les angles  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$  sont les angles d'Euler définis selon la convention XYZ décrivant l'orientation du repère de base du robot par rapport au repère lié à la sonde.

On a alors :

$$d\mathbf{s}_{\text{mes},i} = \begin{bmatrix} \dot{k}_x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{k}_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\mathbf{S}\mathbf{M} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\dot{\mathbf{S}}\mathbf{M} \quad (\text{A.4})$$

On note :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_k d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \dot{k}_x & 0 & 0 \\ 0 & \dot{k}_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\mathbf{S}\mathbf{M} \\ \mathbf{J}_m d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \end{bmatrix} {}^S\dot{\mathbf{S}}\mathbf{M} = \mathbf{K} {}^S\dot{\mathbf{S}}\mathbf{M} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Donc :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}i} = \mathbf{J}_k + \mathbf{J}_m \quad (\text{A.6})$$

Le calcul de  $\mathbf{J}_k$  est trivial :

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^S x_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^S y_M \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Pour calculer  $\mathbf{J}_m$ , on doit calculer  ${}^S \dot{\mathbf{S}}\mathbf{M}$  en fonction de  $d\mathbf{p}$ . Le modèle géométrique s'écrit :

$$\begin{cases} l = -\frac{{}^S \mathbf{k}_S^T ({}^S \mathbf{S}\mathbf{O}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0 \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6)}{{}^S \mathbf{k}_S^T \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0 \mathbf{k}_6} \\ {}^S \mathbf{S}\mathbf{M} = {}^S \mathbf{S}\mathbf{O}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0 \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6 + l \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0 \mathbf{k}_6 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Seules les variables du vecteur  $\mathbf{p}$  sont à dérivées non nulles. La dérivée temporelle de ce modèle devient alors :

$$\begin{cases} \dot{l} = -\frac{(\mathbf{k}_S^T \mathbf{k}_6) \mathbf{k}_S^T (\mathbf{S}\dot{\mathbf{O}}_0 - [\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6]_{\times} \Omega) + (\mathbf{k}_S^T \mathbf{S}\mathbf{O}_6) \mathbf{k}_S^T [\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6]_{\times} \Omega}{(\mathbf{k}_S^T \mathbf{k}_6)^2} \\ \dot{\mathbf{S}}\mathbf{M} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{O}}_0 - [\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6]_{\times} \Omega + \dot{l} \mathbf{k}_6 - l [\mathbf{k}_6]_{\times} \Omega \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où  $\Omega = {}^S \Omega(0/S) = [\dot{r}_x \ \dot{r}_y \ \dot{r}_z]^T$  et où tous les vecteurs sont exprimés dans le repère  $\mathcal{R}_s$ .

On trouve donc :

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\mathbf{k}_6 \mathbf{k}_S^T}{\mathbf{k}_S^T \mathbf{k}_6} & \vdots & -l [\mathbf{k}_6]_{\times} - [\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6]_{\times} + \left(1 - \frac{\mathbf{k}_S^T \mathbf{S}\mathbf{O}_6}{\mathbf{k}_S^T \mathbf{k}_6}\right) \mathbf{k}_6 \mathbf{k}_S^T [\mathbf{O}_0 \mathbf{O}_6]_{\times} & \vdots & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Jacobien pour l'identification des paramètres du modèle géométrique pour un instrument à deux mors

Pour deux mors, on doit écrire :

$$\mathbf{J}_{pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_k + \mathbf{J}_{m_1} \\ \mathbf{J}_k + \mathbf{J}_{m_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Les matrices  $\mathbf{J}_k$  et  $\mathbf{K}$  restent inchangées puisqu'elles traduisent simplement la conversion entre pixel et mètre. Par contre, la matrice  $\mathbf{J}_m$  est donc à calculer pour chaque mors.

Le jacobien précédent est écrit pour un mors porté par le vecteur  $\mathbf{k}_6$ . Pour l'instrument à deux mors, les mors ne sont plus colinéaires à ce vecteur.

Le modèle géométrique pour le mors  $i$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} l_i = -\frac{{}^S\mathbf{k}_S^T ({}^S\mathbf{S}\mathbf{O}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{O}_0\mathbf{I})}{{}^S\mathbf{k}_S^T \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{t}_i} \\ {}^S\mathbf{S}\mathbf{M}_i = {}^S\mathbf{S}\mathbf{O}_0 + \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{O}_0\mathbf{I} + l_i \mathbf{R}_{S \rightarrow 0} {}^0\mathbf{t}_i \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Le jacobien  $\mathbf{J}_{\text{mi}}$  devient donc :

$$\mathbf{J}_{\text{mi}} = \mathbf{K} \left[ \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\mathbf{t}_i \mathbf{k}_S^T}{\mathbf{k}_S^T \mathbf{t}_i} \quad \vdots \quad -l [\mathbf{t}_i]_{\times} - [\mathbf{O}_0\mathbf{I}]_{\times} + \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_S^T \mathbf{S}\mathbf{I}}{\mathbf{k}_S^T \mathbf{t}_i} \right) \mathbf{t}_i \mathbf{k}_S^T [\mathbf{O}_0\mathbf{I}]_{\times} \quad \vdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \right] \quad (\text{A.13})$$





# Annexe B

## Commandabilité du vecteur $\mathbf{u}$

---

Puisque l'instrument passe à travers un point fixe, ses seuls degrés de liberté sont les trois rotations autour du point d'insertion et la translation le long de l'axe de l'instrument, figure B.1.

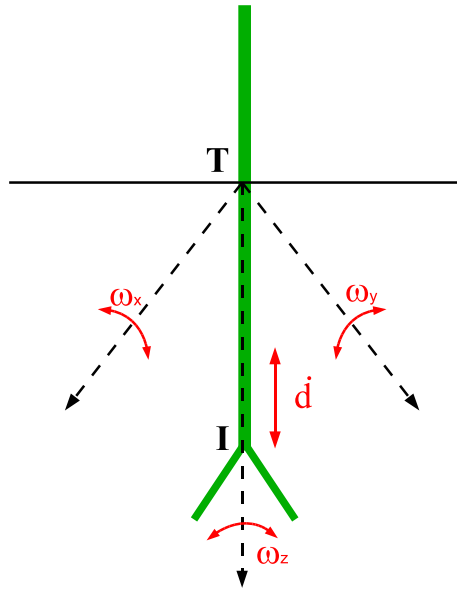


FIG. B.1 – Degrés de liberté autour du point fixe

Le torseur cinématique au point fixe  $T$  s'écrit donc :

$$\mathcal{C}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = \omega_x \vec{i}_I + \omega_y \vec{j}_I + \omega_z \vec{k}_I \\ \vec{V}(T \in \Sigma/\Pi) = d \vec{k}_I \end{array} \right\}_T \quad (\text{B.1})$$

Pour vérifier que ce torseur est un torseur commandable, il suffit de vérifier qu'il ne peut être égal à un torseur invisible que s'il est égal au torseur nul.

On considère que le système n'est pas dans une configuration de perte de visibilité. Le point d'intersection des droites n'est donc pas contenu dans le plan échographique, la

trace de l'instrument est constituée de deux points non confondus. Dans ce cas, on a vu que le torseur cinématique invisible s'écrit :

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M \neq 0$  :

$$\forall (r, V_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r\vec{i}_M + \frac{V_1}{d} \left( \frac{\vec{t}_1 \cdot \vec{i}_M}{\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M} \vec{t}_2 - \vec{t}_1 \right) \wedge \vec{i}_M \\ V_1 \vec{t}_1 \end{array} \right\}_{M_1} \quad (\text{B.2})$$

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M = 0$  :

$$\forall (r, V_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{C}_{inv}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = r\vec{i}_M + \frac{V_2}{d} \vec{t}_2 \wedge \vec{i}_M \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_1} \quad (\text{B.3})$$

On cherche à montrer que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{inv}$  implique  $\mathcal{C} = 0$ . On écrit donc le torseur  $\mathcal{C}_{inv}$  au point  $T$  et on l'exprime dans la base  $\mathcal{B}_I$  du repère lié à l'instrument.

On doit donc vérifier l'égalité suivante :

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M \neq 0$  :

$$\forall (r, V_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = r \cos \beta \\ \omega_y = -V_1 \frac{\cos(\varphi + \beta) \sin(\varphi - \beta) + \cos(\varphi - \beta) \sin(\varphi + \beta)}{\delta \sin(\varphi + \beta)} \\ \omega_z = r \sin \beta \\ 0 = V_1 \frac{\sin(2\varphi)(l_1 \cos \varphi + d) - \delta \sin \varphi}{\delta} \\ 0 = r(l_1 \cos(\varphi - \beta) + d \cos \beta) \\ \dot{d} = V_1 \frac{\sin(2\varphi) \sin \varphi l_1 + \delta \cos \varphi}{\delta} \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

- si  $\vec{t}_2 \cdot \vec{i}_M = 0$  :

$$\forall (r, V_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = r \cos \beta \\ \omega_y = \frac{V_2}{\delta} \\ \omega_z = r \sin \beta \\ 0 = -V_2 \frac{l_1 \cos \varphi + d}{\delta} \\ 0 = r(l_1 \cos(2\varphi) + d \cos \varphi) \\ \dot{d} = -V_2 \frac{l_1 \sin \varphi}{\delta} \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Les torseurs  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_{inv}$  ne sont égaux que si  $(r, V_1) = (0, 0)$  ou  $(r, V_2) = (0, 0)$ , c'est-à-dire si  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{inv} = \{0\}$ .

Le torseur  $\mathcal{C}$  ne produira pas de vitesses de l'instrument dans l'image que s'il est égal au torseur nul.

Le torseur cinématique satisfaisant la contrainte de point fixe et qui s'écrit :

$$\mathcal{C}(\Sigma/\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma/\Pi) = \omega_x \vec{i}_I + \omega_y \vec{j}_I + \omega_z \vec{k}_I \\ \vec{V}(T \in \Sigma/\Pi) = d \vec{k}_I \end{array} \right\}_T \quad (\text{B.6})$$

est donc un torseur observable.



# Annexe C

## Modélisation cinématique

---

### C.1 Modèle cinématique pour un mors

Soit un point  $M$  défini comme l'intersection entre une droite  $\mathcal{D}$ , de vecteur directeur normé  $\vec{t}$  et un plan  $\Pi$ .

Soit  $I$  un point de la droite  $\mathcal{D}$  dont la vitesse par rapport au repère lié au plan est connue.

On pose  $\overrightarrow{IM} = l \vec{t}$ .

On cherche à déterminer la relation donnant la vitesse du point  $M$  dans le plan  $\Pi$  en fonction de la vitesse de l'instrument par rapport au plan  $\Pi$  connue au point  $I$ .

On définit le torseur cinématique de la droite  $\mathcal{D}$  dans son mouvement par rapport au plan  $\Pi$  par :

$$\mathcal{T}_c(\mathcal{D}/\Pi) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \\ \vec{V}(I/\Pi) \end{array} \right\}_I \quad (\text{C.1})$$

où  $\vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi)$  est le vecteur des vitesses de rotation de la droite par rapport au plan et  $\vec{V}(I/\Pi)$ , la vitesse du point  $I$  par rapport au plan  $\Pi$ .

Le modèle cinématique est alors la relation donnant la vitesse  $\vec{V}(M/\Pi)$  du point  $M$  par rapport au plan échographique en fonction des variables cinématiques  $\vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi)$  et  $\vec{V}(I/\Pi)$ .

La vitesse du point  $M$  dans le plan  $\Pi$  est donnée par :

$$\underbrace{\vec{V}(M/\Pi)}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{D})}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi)}_{\text{vitesse d'entraînement}} \quad (\text{C.2})$$

Comme  $\overrightarrow{IM} = l \vec{t}$  on a :

$$\vec{V}(M/\mathcal{D}) = \left. \frac{d \overrightarrow{IM}}{dt} \right|_{\mathcal{D}} = l \vec{t} \quad (\text{C.3})$$

On peut donc ré-écrire l'équation C.2 :

$$\vec{V}(M/\Pi) = l \vec{t} + \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) \quad (\text{C.4})$$

On détermine  $\dot{l}$  en projetant l'équation C.4 sur la normale  $\vec{k}_S$  au plan  $\Pi$ . En effet, comme le point  $M$  appartient au plan  $\Pi$ , on a :

$$\vec{k}_S \cdot \vec{V}(M/\Pi) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Soit :

$$\dot{l} \vec{k}_S \cdot \vec{t} + \vec{k}_S \cdot \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Donc :

$$\dot{l} = -\frac{\vec{k}_S \cdot \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi)}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \quad (\text{C.7})$$

En remplaçant  $\dot{l}$  dans l'équation C.4 on trouve alors :

$$\vec{V}(M/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \left[ \left( \vec{k}_S \cdot \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) \right) \vec{t} - \left( \vec{k}_S \cdot \vec{t} \right) \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) \right] \quad (\text{C.8})$$

Or, le double produit vectoriel vérifie la propriété suivante :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (\text{C.9})$$

Donc, l'équation C.8 devient :

$$\vec{V}(M/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{t} \wedge \vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) \right) \quad (\text{C.10})$$

On sait calculer la vitesse du point  $M$  appartenant à l'instrument par rapport au plan échographique. On l'exprime pour cela en fonction de la vitesse en  $I$  :

$$\vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) = \vec{V}(I/\Pi) + \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \wedge \vec{IM} \quad (\text{C.11})$$

Or  $\vec{IM} = l \vec{t}$ , l'équation C.11 devient donc :

$$\vec{V}(M \in \mathcal{D}/\Pi) = \vec{V}(I/\Pi) - l \vec{t} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \quad (\text{C.12})$$

En utilisant ce résultat dans l'équation C.10

$$\vec{V}(M/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{t} \wedge \left( \vec{V}(I/\Pi) - l \vec{t} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{D}/\Pi) \right) \right) \quad (\text{C.13})$$

Le vecteur  $\vec{k}_S$  est parfaitement connu, le vecteur  $\vec{t}$  et le scalaire  $l$  dépendent de la géométrie du système et peuvent être mesurés ou identifiés précisément. On a donc obtenu la relation entre la vitesse d'un point dans l'image et les vitesses de l'instrument.

On peut noter que comme pour le modèle géométrique, ce modèle cinématique est valable si la condition d'existence du point dans l'image est vérifiée ( $\vec{k}_S \cdot \vec{t} \neq 0$ ).

## C.2 Calcul du jacobien

L'équation C.13 écrite pour un point  $M_i$ ,  $i = 1, 2$  en fonction de la vitesse au centre du trocart  $T$  devient :

$$\vec{V}(M_i/\Pi) = -\frac{1}{\vec{k}_S \cdot \vec{t}_i} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{t}_i \wedge \left( \vec{V}(T \in \mathcal{I}/\Pi) + \left( d\vec{k}_I - l_i \vec{t}_i \right) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{I}/\Pi) \right) \right) \quad (\text{C.14})$$

Dans le repère  $\mathcal{R}_M$ , cette équation s'écrit :

$${}^M\mathbf{V}(M_i/\Pi) = -\frac{1}{\mathbf{k}_S^T \cdot \mathbf{t}_i} [{}^M\mathbf{k}_M]_{\times} \mathbf{R}_{M \rightarrow I} [{}^I\mathbf{t}_i]_{\times} [(d^I\mathbf{k}_I - l_i {}^I\mathbf{t}_i)]_{\times} [{}^I\mathbf{t}_i]_{\times} \begin{bmatrix} {}^I\Omega(\mathcal{I}/\Pi) \\ {}^I\mathbf{V}(T \in \mathcal{I}/\Pi) \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Or,  $\vec{V}(T \in \mathcal{I}/\Pi) = -\vec{V}(T/\mathcal{I}) = d\vec{k}_I$  donc :

$$\begin{bmatrix} {}^I\Omega(\mathcal{I}/\Pi) \\ {}^I\mathbf{V}(T/\Pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ 0 \\ -\dot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (\text{C.16})$$

On trouve alors :

$${}^M\mathbf{V}(M_i/\Pi) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M_{ix}} \\ \mathbf{J}_{M_{iy}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (\text{C.17})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M_{ix}} \\ \mathbf{J}_{M_{iy}} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\mathbf{k}_S^T \cdot \mathbf{t}_i} [{}^M\mathbf{k}_M]_{\times} \mathbf{R}_{M \rightarrow I} [{}^I\mathbf{t}_i]_{\times} [(d^I\mathbf{k}_I - l_i {}^I\mathbf{t}_i)]_{\times} [{}^I\mathbf{t}_i]_{\times} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} {}^S\mathbf{V}(M_1/\Pi)_x \\ {}^S\mathbf{V}(M_2/\Pi)_x \\ {}^S\mathbf{V}(M_1/\Pi)_y \\ {}^S\mathbf{V}(M_2/\Pi)_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{S \rightarrow M} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{S \rightarrow M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^M\mathbf{V}(M_1/\Pi) \\ {}^M\mathbf{V}(M_2/\Pi) \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

Donc :

$$\mathbf{s}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{S \rightarrow M} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{S \rightarrow M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{s1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M_{1x}} \\ \mathbf{J}_{M_{1y}} \\ \mathbf{J}_{M_{2x}} \\ \mathbf{J}_{M_{2y}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_I \quad (\text{C.20})$$



Sachant que :

$${}^I \mathbf{t}_i = [-\sin \varphi \quad 0 \quad \cos \varphi]^T \quad (\text{C.21})$$

$${}^M \mathbf{k}_M = {}^I \mathbf{k}_I = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{R}_{S \rightarrow M} = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{k}_M) \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{R}_{M \rightarrow I} = \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{i}_M) \mathbf{R}(\beta, \mathbf{j}_I) \quad (\text{C.24})$$

En développant les matrices, on trouve :

$$\mathbf{J}_{s1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{J}_1 = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{M1x} \\ \mathbf{J}_{M2x} \\ \mathbf{J}_{M1y} \\ \mathbf{J}_{M2y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

avec

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

et

$$\mathbf{J}_{M_{ix}} = \begin{bmatrix} -\frac{l_i + d \cos \varphi}{D} & \frac{(-1)^i \sin \varphi}{D} & -\frac{(l_i \cos \varphi + d) N \tan \alpha}{D} & \frac{(-1)^i l_i \sin \varphi N \tan \alpha}{D} \end{bmatrix} \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{J}_{M_{iy}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{l_i \cos \varphi + d}{\cos \alpha} & \frac{(-1)^i l_i \sin \varphi}{\cos \alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

où

$$N = -\cos(\varphi + (-1)^i \beta) \quad (\text{C.29})$$

$$D = (-1)^i \sin(\varphi + (-1)^i \beta) \quad (\text{C.30})$$

### C.3 Modèle cinématique inverse

L'équation C.10 peut s'écrire :

$$\vec{k}_S \wedge \left( \vec{t}_i \wedge \vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) \right) = - \left( \vec{k}_S \cdot \vec{t}_i \right) \vec{V}(M_i/\Pi) \quad (\text{C.31})$$

Or :

$$\left( \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \right) \iff \left( \vec{x} = r \vec{a} - \frac{1}{a^2} \vec{a} \wedge \vec{b} \text{ si et seulement si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \right) \quad (\text{C.32})$$

où  $r$  est un nombre arbitraire.

Les points  $M_i$  appartiennent au plan échographique  $\Pi$ , donc :

$$\vec{k}_S \cdot \vec{V}(M_i/\Pi) = 0 \quad (\text{C.33})$$

On peut alors appliquer la propriété précédente à l'équation C.31 en prenant :

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{k}_S \\ \vec{x} = \vec{t}_i \wedge \vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) \\ \vec{b} = -(\vec{k}_S \cdot \vec{t}_i) \vec{V}(M_i/\Pi) \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

On trouve donc :

$$\forall r_i : \quad \vec{t}_i \wedge \left( \vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) \right) = r_i \vec{k}_S + (\vec{k}_S \cdot \vec{t}_i) \left[ \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right] \quad (\text{C.35})$$

Comme  $(\forall x, (\vec{a} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = 0)$ ,  $r_i$  doit vérifier :

$$\vec{t}_i \cdot \left[ r_i \vec{k}_S + (\vec{k}_S \cdot \vec{t}_i) \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \right] = 0 \quad (\text{C.36})$$

On peut alors calculer la valeur de  $r_i$  :

$$r_i = -\vec{t}_i \cdot \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \quad (\text{C.37})$$

Par conséquent, on peut inverser une nouvelle fois le produit vectoriel. On trouve :

$$\vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) = r'_i \vec{t}_i - \vec{t}_i \wedge \left[ -\left( \vec{t}_i \cdot \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \right) \cdot \vec{k}_S + (\vec{k}_S \cdot \vec{t}_i) \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \right] \quad (\text{C.38})$$

On reconnaît un double produit vectoriel avec :

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{t}_i \\ \vec{b} = \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \\ \vec{c} = \vec{k}_S \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

Donc :

$$\vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) = r'_i \vec{t}_i + \vec{t}_i \wedge \left[ \vec{t}_i \wedge \left( \vec{k}_S \wedge \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \right) \right] \quad (\text{C.40})$$

On développe le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{k}_S \wedge \left( \vec{k}_S \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) &= \left( \vec{k}_S \cdot \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \vec{k}_S - \left( \vec{k}_S \cdot \vec{k}_S \right) \vec{V}(M_i/\Pi) \\ &= 0 - \vec{V}(M_i/\Pi) = -\vec{V}(M_i/\Pi) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall r'_i : \quad \vec{V}(M_i \in \mathcal{I}/\Pi) = r'_i \vec{t}_i - \vec{t}_i \wedge \left( \vec{t}_i \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \quad (\text{C.41})$$

On remplace dans cette équation, la vitesse du point  $M_i$  appartenant à l'instrument par rapport au plan écographique :

$$\forall r'_i : \quad \left( -d \vec{k}_I - l_i \vec{t}_i \right) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{I}/\Pi) + d \dot{\vec{k}}_I = r'_i \dot{\vec{t}}_i - \vec{t}_i \wedge \left( \vec{t}_i \wedge \vec{V}(M_i/\Pi) \right) \quad (\text{C.42})$$

On veut résoudre l'équation C.42 pour connaître  $\mathbf{u} = \left[ {}^I \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{I}/\Pi}} \quad \dot{d} \right]^T$  en fonction des vitesses des points dans l'image. Pour cela, on la projette sur trois vecteurs indépendants. Ainsi on obtient un système de 6 équations scalaires à 6 inconnues. La résolution de ce système nous donne le modèle cinématique inverse du système complet.

On choisit comme vecteurs de projection  $\vec{t}_i$ ,  $\vec{k}_I$  et  $\vec{j}_I$ .

1. Projection sur  $\vec{t}_i$  On obtient :

$$\dot{d} \cos \varphi + \omega_y d ({}^I \vec{t}_i)_x - r'_i = 0 \quad (\text{C.43})$$

On écrit cette équation pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Donc :

$$\begin{cases} r'_1 = \dot{d} \cos \varphi - t_x d \omega_y \\ r'_2 = \dot{d} \cos \varphi + t_x d \omega_y \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

2. Projection sur  $\vec{k}_I$  On obtient :

$$\dot{d} - l_i \omega_y ({}^I \vec{t}_i)_x - r'_i \cos \varphi = (-{}^I \vec{t}_i)_x \cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_i/\Pi))_x + ({}^I \vec{t}_i)_x^2 ({}^I \vec{V}(M_i/\Pi))_z \quad (\text{C.45})$$

On écrit cette équation pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Donc :

$$\begin{cases} \dot{d} + l_1 \sin \varphi \omega_y - r'_1 \cos \varphi = \sin \varphi \cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_x + \sin^2 \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_z \\ \dot{d} - l_2 \sin \varphi \omega_y - r'_2 \cos \varphi = -\sin \varphi \cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_x + \sin^2 \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_z \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

3. Projection sur  $\vec{j}_I$  On obtient :

$$(-d - l_i \cos \varphi) \omega_x + l_i \omega_z ({}^I \vec{t}_i)_x = ({}^I \vec{V}(M_i/\Pi))_y \quad (\text{C.47})$$

On écrit cette équation pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Donc :

$$\begin{cases} (-d - l_1 \cos \varphi) \omega_x - l_1 \sin \varphi \omega_z = ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_y \\ (-d - l_2 \cos \varphi) \omega_x + l_2 \sin \varphi \omega_z = ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_y \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

En résolvant le système composé des 3 sous systèmes équation C.44, équation C.46 et

équation C.48, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \frac{l_2 ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_y + l_1 ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_y}{-(l_1+l_2)d - 2l_1 l_2 \cos \varphi} \\ \omega_y = \frac{\cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_x + \sin \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_z + \cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_x - \sin \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_z}{2d \cos \varphi + (l_1 + l_2)} \\ \omega_z = \frac{(d + l_2 \cos \varphi) ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_y - (d + l_1 \cos \varphi) ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_y}{\sin \varphi (-l_1 + l_2)d - 2l_1 l_2 \cos \varphi} \\ \dot{d} = \frac{(d \cos \varphi + l_2) (-\cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_x - \sin \varphi ({}^I \vec{V}(M_1/\Pi))_z) - (-d \cos \varphi + l_1) (\cos \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_x + \sin \varphi ({}^I \vec{V}(M_2/\Pi))_z)}{\sin \varphi (2d \cos \varphi + (l_1 + l_2))} \end{array} \right. \quad (C.49)$$

Le jacobien inverse s'écrit :

$$\mathbf{J}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\varphi-\beta)}{\Delta_2} & \frac{\cos(\varphi+\beta)}{\Delta_2} & \frac{-\sin \alpha \sin(\varphi-\beta)}{\Delta_2} & \frac{\sin \alpha \sin(\varphi+\beta)}{\Delta_2} \\ \frac{(d \cos \varphi + l_2) \cos(\varphi-\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_1) \cos(\varphi+\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_2) \sin \alpha \sin(\varphi-\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} & \frac{-(d \cos \varphi + l_1) \sin \alpha \sin(\varphi+\beta)}{\sin \varphi \Delta_2} \\ 0 & 0 & \frac{l_2 \cos \alpha}{\Delta_1} & \frac{l_1 \cos \alpha}{\Delta_1} \\ 0 & 0 & \frac{(l_2 \cos \varphi + d) \cos \alpha}{\sin \varphi \Delta_1} & \frac{-(l_1 \cos \varphi + d) \cos \alpha}{\sin \varphi \Delta_1} \end{bmatrix} \quad (C.50)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = -d(l_1 + l_2) - 2l_1 l_2 \cos \varphi \\ \Delta_2 = 2d \cos \varphi + (l_1 + l_2) \end{cases} \quad (C.51)$$

Le modèle cinématique inverse du système est le suivant :

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{R}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{J}_{s1}^{-1} \dot{\mathbf{s}}_1 \quad (C.52)$$



# Annexe D

## Preuves de Stabilité

---

### D.1 Preuve de la propriété 4

La matrice  $\mathbf{C}_1$  s'écrit :

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\widehat{\Delta}_2} \begin{bmatrix} \frac{\cos(\varphi - \widehat{\beta})}{\cos(\varphi - \beta)} (2d \cos \varphi + l_1 + \widehat{l}_2) & \frac{\cos(\varphi + \widehat{\beta})}{\cos(\varphi - \beta)} (l_1 - \widehat{l}_1) \\ \frac{\cos(\varphi - \widehat{\beta})}{\cos(\varphi + \beta)} (l_2 - \widehat{l}_2) & \frac{\cos(\varphi + \widehat{\beta})}{\cos(\varphi + \beta)} (2d \cos \varphi + l_2 + \widehat{l}_1) \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où  $\widehat{\Delta}_2 = 2d \cos \varphi + \widehat{l}_1 + \widehat{l}_2$ .

La trace de cette matrice s'écrit donc :

$$\text{tr} \mathbf{C}_1 = \frac{1}{\widehat{\Delta}_2} \left( \frac{\cos(\varphi - \widehat{\beta})}{\cos(\varphi - \beta)} (2d \cos \varphi + l_1 + \widehat{l}_2) + \frac{\cos(\varphi + \widehat{\beta})}{\cos(\varphi + \beta)} (2d \cos \varphi + l_2 + \widehat{l}_1) \right) \quad (\text{D.2})$$

Pour qu'il y ait une intersection de chacun des mors avec le plan, l'angle  $\beta$  doit appartenir à l'intervalle  $]-\pi/2 + \varphi, \pi/2 - \varphi[$ . On considère donc qu'il en est de même pour  $\widehat{\beta}$ . On a alors  $\cos(\varphi - \widehat{\beta}) > 0$  et  $\cos(\varphi + \widehat{\beta}) > 0$ .

La trace de la matrice  $\mathbf{C}_1$  est donc strictement positive.

Le déterminant de cette matrice s'écrit :

$$\det \mathbf{C}_1 = \frac{\cos(\varphi - \widehat{\beta}) \cos(\varphi + \widehat{\beta}) \left( (2d \cos \varphi)^2 + 2d \cos \varphi (l_1 + l_2 + \widehat{l}_1 + \widehat{l}_2) + (l_1 + l_2)(\widehat{l}_1 + \widehat{l}_2) \right)}{\cos(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \beta) \widehat{\Delta}_2^2} \quad (\text{D.3})$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{C}_1$  est donc strictement positif.

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}_1$  sont donc toutes les deux strictement positives.

La matrice  $\mathbf{D}_1$  s'écrit :

$$\mathbf{D}_1 = \frac{-\cos \widehat{\alpha}}{\cos \alpha \widehat{\Delta}_1} \begin{bmatrix} -d(l_1 + \widehat{l}_2 - 2l_1 \widehat{l}_2 \cos \varphi) & d(l_1 - \widehat{l}_1) \\ d(l_2 - \widehat{l}_2) & -d(l_2 + \widehat{l}_1 - 2l_2 \widehat{l}_1 \cos \varphi) \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

où  $\widehat{\Delta}_1 = 2\widehat{l}_1\widehat{l}_2 \cos \varphi + d(\widehat{l}_1 + \widehat{l}_2)$ .

La trace de cette matrice est donc strictement positive :

$$\text{tr} \mathbf{D}_1 = \frac{\cos \widehat{\alpha}}{\cos \alpha \widehat{\Delta}_1} \left( d(l_1 + \widehat{l}_1 + l_2 + \widehat{l}_2) + 2 \cos \varphi (l_1 \widehat{l}_2 + l_2 \widehat{l}_1) \right) \quad (\text{D.5})$$

Son déterminant s'écrit :

$$\det \mathbf{D}_1 = \frac{\cos^2 \widehat{\alpha}}{\cos^2 \alpha \widehat{\Delta}_1^2} \left( d^2(l_1 + l_2)(\widehat{l}_1 + \widehat{l}_2) + 2 \cos \varphi d \left( l_1 \widehat{l}_2 (\widehat{l}_1 + l_2) + l_2 \widehat{l}_1 (\widehat{l}_2 + l_1) \right) + 4 \cos^2 \varphi l_1 l_2 \widehat{l}_1 \widehat{l}_2 \right) \quad (\text{D.6})$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{D}_1$  est donc strictement positif.

Ses valeurs propres sont donc strictement positives.

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}_1$  donc de  $\mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1)$  sont strictement positives.

## D.2 Preuve de la propriété 5

On pose  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{J}_2 \widehat{\mathbf{J}}_2^{-1}$ .

Puisque  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2) = \mathbf{J}_{\mathbf{s}_2} \widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}_2}^{-1} = \mathbf{R}_2 \mathbf{J}_2 \widehat{\mathbf{J}}_2^{-1} \mathbf{R}_2^T$ , les matrices  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)$  et  $\mathbf{B}_2$  sont semblables. Elles ont donc même déterminant et mêmes valeurs propres.

De plus, la matrice  $\mathbf{B}_2$  est bloc triangulaire. On peut donc l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}.$$

On a alors :

$$\det(\mathbf{B}_2 - \lambda \mathbf{I}_{4 \times 4}) = \det(\mathbf{C}_2 - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) \det(\mathbf{D}_2 - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) \quad (\text{D.7})$$

Les valeurs propres de la matrices  $\mathbf{B}_2$  sont donc positives si et seulement si celles des sous matrices  $\mathbf{C}_2$  et  $\mathbf{D}_2$  le sont.

Les valeurs propres de  $\mathbf{C}_2$  vérifient :

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i = \text{tr} \mathbf{C}_2 \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^2 \lambda_i = \det \mathbf{C}_2 \quad (\text{D.8})$$

Comme  $\mathbf{C}_2$  est une matrice (2, 2), ses valeurs propres sont donc positives si :

$$\begin{cases} \text{tr} \mathbf{C}_2 > 0 \\ \det \mathbf{C}_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

La matrice  $\mathbf{C}_2$  s'écrit :

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\cos \varphi}{c_+ c_-} \begin{bmatrix} \frac{(l_1 + d \cos \varphi) c_+ + (l_2 + d \cos \varphi) c_-}{2(d \cos \varphi + l)} & \frac{\sin \beta \sin \varphi}{2} \\ -\frac{2d \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \beta}{d \cos \varphi + l} & \frac{c_+ + c_-}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

Il est donc évident que les conditions équation D.9 sont satisfaites. Les valeurs propres de  $\mathbf{C}_2$  sont positives.

Le même raisonnement s'applique à la matrice  $\mathbf{D}_2$  :

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} -\frac{(l_1 + l_2) \cos \varphi + 2d}{2(d + l \cos \varphi)} & -\frac{\sin \varphi(l_2 - l_1)}{2} \\ -\frac{\sin \beta}{d + l \cos \varphi} & -\cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Comme,  $l_2 - l_1 = -\frac{\delta \sin \beta}{\cos \varphi}$ , les valeurs propres de  $\mathbf{D}_2$  sont elles aussi positives.

On a donc montré que les valeurs propres de  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)$  sont strictement positives.

On a aussi montré que la matrice  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)$  est à déterminant strictement positif. En effet il s'écrit :

$$\det \mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2) = \det \mathbf{R}_2 \det \mathbf{B}_2 \det \mathbf{R}_2^T \quad (\text{D.12})$$

On a vu que  $\det \mathbf{R}_2 = \det \mathbf{R}_2^T = 1$ . Donc  $\det \mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2) = \det(\mathbf{B}_2)$ . Or le déterminant de  $\mathbf{B}_2$  est tel que  $\det(\mathbf{B}_2) = \det(\mathbf{C}_2) \det(\mathbf{D}_2)$ . Comme il a été montré que  $\det(\mathbf{C}_2) > 0$  et  $\det(\mathbf{D}_2) > 0$  on a bien  $\det(\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)) = \det(\mathbf{B}_2) \neq 0$ .

La matrice  $\mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2)$  a donc un déterminant non nul.



