



HAL
open science

Affectation des vols aux appareils d'une compagnie arienne avec prise en compte des contraintes de maintenance

Hasan Murat Afsar

► **To cite this version:**

Hasan Murat Afsar. Affectation des vols aux appareils d'une compagnie arienne avec prise en compte des contraintes de maintenance. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT: . tel-00189184

HAL Id: tel-00189184

<https://theses.hal.science/tel-00189184>

Submitted on 10 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : "Génie Industriel"

préparée au laboratoire G-SCOP (Grenoble - Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la
Production)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale "**Organisation Industrielle et Systèmes de Production**"

présentée et soutenue publiquement

par

H. Murat AFSAR

version : 18 Septembre 2007

**Affectation des vols aux appareils d'une
compagnie aérienne avec prise en compte des contraintes de maintenance**

Directeurs de thèse : Mme Marie-Laure Espinouse et M. Bernard Penz

JURY

M. Alexandre Dolgui	Président
M. Christian Artigues	Rapporteur
M. Aziz Moukrim	Rapporteur
M. Olivier Briant	Examineur
M. Bernard Penz	Directeur de thèse
Mme Marie-Laure Espinouse	Co-directrice

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE 2 : INTRODUCTION À LA PLANIFICATION DES VOLS ET À LA ROTATION DES AVIONS	3
2.1 Industrie du transport aérien	3
2.2 Différentes étapes de planning	4
2.2.1 Planning des vols	4
2.2.2 Affectation des flottes	5
2.2.3 Rotations des avions	7
2.3 Importance et caractéristiques de la maintenance	9
2.3.1 Aspects économiques de la maintenance	9
2.3.2 Contraintes de maintenance	10
CHAPITRE 3 : PRÉSENTATION DU PROBLÈME, MODELISATION ET COMPLEXITÉ	13
3.1 Présentation du problème	13
3.1.1 Définition du problème de la rotation des avions	13
3.1.2 Différentes politiques dans le planning de la maintenance	17
3.2 Modélisation du problème	19
3.2.1 Structure du réseau	19
3.2.2 Notations utilisées	21
3.2.3 Graphe associé	23
3.2.4 Modèle du Problème	26
3.3 Analyse de complexité	29
3.3.1 Problème de faisabilité	32
3.3.2 Problème d'optimisation	37

CHAPITRE 4 : ALGORITHMES DE LISTE ET RECUIT SIMULÉ	41
4.1 Approches heuristiques	41
4.1.1 Heuristiques basées sur la méthode du plus long chemin	41
4.1.2 Heuristique basée sur le premier atterrissage	45
4.1.3 Couverture des vols	45
4.2 Approche méta-heuristique	47
4.2.1 Recuit simulé	49
4.2.2 Modélisation	51
 CHAPITRE 5 : APPROCHE PAR GÉNÉRATION DE COLONNES	 57
5.1 Introduction à la décomposition de Dantzig Wolfe	57
5.2 Modélisation du problème	61
5.3 Décomposition du problème	62
5.3.1 Problème maître	63
5.3.2 Problème maître restreint	65
5.3.3 Problème dual	66
5.3.4 Sous-problème	67
5.4 Génération de colonnes	69
5.4.1 Programmation dynamique	70
5.4.2 Symétrie de la solution	72
5.4.3 Approche heuristique	74
5.4.4 Borne inférieure lagrangienne	83
5.4.5 Calcul de la borne lagrangienne	84
5.4.6 Condition d'arrêt	85
 CHAPITRE 6 : RÉSULTATS NUMÉRIQUES	 89
6.1 Description des instances testées	89
6.1.1 Avions	89
6.1.2 Vols	90
6.1.3 Différentes politiques de maintenance	93
6.2 Résultats et comparaison des méthodes	95
6.2.1 Maximisation d'utilisation - Avions critiques	95

6.2.2	Équilibrage de charge - Avions non critiques	103
6.2.3	Étude de l'approche heuristique basée sur Dantzig-Wolfe	127
6.2.4	Comparaison des durées d'exécution des méthodes	131
CHAPITRE 7 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		135
7.1	Conclusions	135
7.2	Perspectives	136
BIBLIOGRAPHIE		137

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le fruit d'une recherche menée au sein du Laboratoire G-SCOP (Grenoble - Science pour la Conception l'Optimisation et la Production) de l'INPG (Institut National Polytechnique de Grenoble).

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mes directeurs de thèse Monsieur Bernard Penz, professeur à l'INPG et Madame Marie-Laure Espinouse, Maitre de Conférence à l'Université Joseph Fourier - IUT 1. Leur confiance, leurs conseils et leurs critiques m'ont guidé tout au long de ma thèse.

Je remercie sincèrement Monsieur Christian Artigues (LAAS-CNRS) et Monsieur Aziz Moukrim (Université de Technologie de Compiègne) pour leur travail de rapporteur. Par leurs questions et remarques constructives, ils m'ont été d'une aide précieuse.

Je souhaite également remercier à Monsieur Alexandre Dolgui, professeur à Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, qui a présidé mon jury.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Olivier Briant, Maitre de Conférence à l'INPG, qui était un collaborateur, un vrai chef et un vrai ami. Il m'a guidé dans les labyrinthes de la théorie chaque fois quand je suis perdu et il a également examiné ma thèse.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Monsieur Christophe Rapine, Madame Ayse Akbalik Rapine, Monsieur Jean-Philippe Gayon, Monsieur Julien Moncel, Monsieur Onur Hisarciklilar qui m'ont aidé à traquer les erreurs et préparer une meilleure soutenance.

Je tiens à remercier ici tous les membres du Laboratoire G-SCOP qui m'ont accepté comme un des leurs et ils m'ont toujours soutenu et supporté. Les discussions, autour d'un café ou, des fois, d'une bière irlandaise m'ont permis d'oublier les doutes et de remonter le moral.

Je voudrais aussi remercier mes futurs collègues, les étudiants de l'ENSGI avec qui j'ai eu le privilège de faire quelques séances de travaux dirigés. La confiance et la compréhension qu'ils m'ont accordé, m'ont contaminé par le virus du plaisir d'enseignement.

Enfin, je ne saurais oublier ma famille, la source de l'amour et d'un soutien absolu malgré la distance entre nous.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le milieu industriel la planification est définie comme l'allocation des ressources aux tâches afin de satisfaire les contraintes et atteindre les objectifs. De plus, assurer le bon fonctionnement des équipements est indispensable. Les interventions de maintenance font référence à la notion de prévention d'un éventuel mauvais fonctionnement des appareils.

Malgré l'importance de l'intégration des activités de maintenance dans le planning de production de services ou de biens, nous n'avons que très récemment commencé à voir des travaux qui prennent en compte des périodes d'indisponibilité dues à la maintenance des ressources.

La planification des vols des appareils dans une compagnie aérienne a beaucoup de similitude avec les problèmes d'ordonnancement dans un atelier de production. Les vols peuvent être considérés comme les tâches et les avions comme les machines nécessaires à exécuter ces tâches. Il est évident que la maintenance des avions est un enjeu crucial pour une compagnie aérienne.

Dans le cadre de cette thèse, nous allons étudier la planification des vols où les interventions de maintenance sont déjà planifiées.

Plan du lecture

Chapitre 1 fait une introduction générale à l'ordonnancement des tâches avec prise en compte de la maintenance

Chapitre 2 explique le context industriel du problème et donne une brève description des différents étapes de planning des activités dans une compagnie aérienne. L'étude bibliographique dans ce chapitre nous permet de comprendre les aspects économiques et légales des interventions de maintenance.

Chapitre 3 modélise le problème de la rotation des avions à l'aide d'un modèle de la programmation linéaire en nombres entiers et d'un modèle du graphe de connexions. Nous faisons également, une analyse de complexité du problème présenté dans ce chapitre.

Chapitre 4 propose deux approches heuristiques et une approche méta-heuristique basée sur le recuit simulé. Ces méthodes traitent les avions suivant un ordre.

Chapitre 5 présente un modèle mathématique avec une fonction objectif quadratique et propose un schéma de la génération de colonnes. Nous proposons aussi une méthode heuristique qui fonctionne parallèlement au problème esclave. Pour éviter le problème de symétrie et accélérer la résolution, nous présentons l'aggrégation des vols et des avions identiques.

Chapitre 6 contient les résultats numériques des méthodes proposées dans les chapitres précédents. Les méthodes heuristiques et méta-heuristiques sont testées sur un horizon de 40 périodes de planning et nous observons l'évolution de l'état des avions. Nous testons également la méthode basée sur la génération de colonnes et nous donnons aussi une borne inférieure calculée par la relaxation Lagrangienne.

Chapitre 7 fournit un bilan des travaux et précise les perspectives.

CHAPITRE 2

INTRODUCTION À LA PLANIFICATION DES VOLS ET À LA ROTATION DES AVIONS

2.1 Industrie du transport aérien

Les compagnies du transport aérien sont face à des conditions exigeantes pour survivre dans un marché où la concurrence est très forte. Ce fait amène les compagnies aériennes à l'obligation de diminuer les coûts et d'augmenter la qualité afin de répondre aux besoins des passagers.

Dans cette perspective, la diminution des coûts opérationnels devient de plus en plus importante. Selon Hayes [Hay01] les coûts opérationnels d'une compagnie aérienne se divisent en six catégories :

- les coûts liés aux personnel,
- le carburant,
- les frais de navigation et d'atterrissage,
- les coûts de possession,
- la dépréciation (la perte de valeur des avions) et l'amortissement (la consommation irréversibles des avantages économiques des avions),
- les coûts liés à la maintenance.

Les coûts de maintenance varie entre 10 et 15% de ces coûts. Même si cette proportion n'apparaît pas importante, il faut savoir que le budget annuel de maintenance d'une grande compagnie aérienne peut dépasser 1 milliard de dollars.

La diminution des coûts de maintenance peut être réalisée de deux façons :

- Amélioration de la conception de l'avion,
- Amélioration du planning de la maintenance par l'optimisation de l'utilisation des avions.

Nous pouvons constater que seulement l'amélioration du planning de la maintenance dépend de la compagnie aérienne tandis que la conception ne concerne que le constructeur. Il faut également noter que le planning de la maintenance a des

impacts importants sur le planning de vols des appareils. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons au planning des vols en tenant compte du planning de la maintenance, dans une compagnie aérienne.

2.2 Différentes étapes de planning

Les tâches dans l'industrie aérienne sont critiques, parce que chaque vol doit être réalisé quand il est planifié et aucune tâche ne doit retarder un vol. Cette industrie est donc constamment face à des problèmes d'ordonnancement sur différents horizons de temps.

Ces problèmes sont beaucoup plus compliqués que les problèmes d'ordonnancement traditionnels. Une compagnie aérienne doit résoudre un ensemble de problèmes très complexes. Chacun de ces problèmes a des impacts importants sur les autres.

Une compagnie aérienne doit affecter des milliers de vols à des avions qui diffèrent aussi bien en type qu'en capacité. Cette affectation est soumise à différentes contraintes comme la connexion ou la compatibilité des vols, tout en satisfaisant les besoins de maintenance des avions. Parallèlement l'équipe de vol doit être affectée avec des contraintes telles que la limite de vol ou la compétence nécessaire pour un avion précis.

En pratique, le problème d'ordonnancement est résolu par des décisions consécutives [Leu04]. Nous pouvons voir les différentes étapes de cette approche séquentielle dans le figure 2.1.

2.2.1 Planning des vols

Dans cette étape de planning, les paires origine-destination des vols proposés par la compagnie aérienne sont décidées. Cette décision est prise en fonction de la demande. La demande prévisionnelle est estimée à partir de l'information récoltée sur le marché. Cette étape de planning fait rarement l'objet de travaux de recherche opérationnelle mais elle est étudiée en revanche dans le domaine du management du revenu ([SEB05]).

Une fois la demande évaluée, la table d'horaires de vols est préparée [ENNS01].

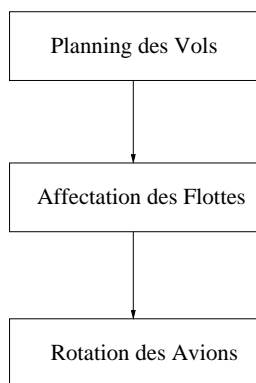


FIG. 2.1 – Les étapes de planning

Cet activité est équivalente à la conception du réseau des vols. La littérature qui étudie la conception de réseaux dans le secteur des télécommunications est riche par rapport au secteur du transport aérien.

La qualité du résultat de cette étape est très importante puisque les décisions des prochaines étapes sont basées sur cette table d'horaires de vols. Même si les compagnies charters ont la possibilité de changer plus librement la table d'une période à une autre, les compagnies qui opèrent régulièrement ont besoin d'une table beaucoup plus robuste et déposent traditionnellement leur plan de vol un an à l'avance. Bian *et al.* donnent une méthode pour mesurer la robustesse de la table d'horaires de la compagnie aérienne KLM [BBJ⁺05].

2.2.2 Affectation des flottes

Les avions au sein d'une compagnie aérienne ne sont pas identiques. Chaque type d'avion a différentes autonomies de vol, différentes capacités de passagers, différents besoins de maintenance. Donc, au lieu de traiter tous les avions en même temps, les compagnies préfèrent les diviser en grandes familles ou en *flottes*.

Après l'étape du planning des vols, la compagnie aérienne doit décider quel type d'appareil sera affecté à chaque vol [BBC⁺98]. Les entrées de cette étape sont le planning des vols, le type des flottes, le coût d'affectation d'une flotte à un vol et les contraintes d'aéroport spécifiques aux flottes. L'objectif est souvent soit la minimisation des coûts opérationnels ou la maximisation du gain. La solution du

problème d'affectation des flottes respecte le nombre d'avions dans chaque flotte. Par contre, la sortie de cette étape n'est pas forcément réalisable pour les étapes suivantes.

L'importance de cette étape est compréhensible puisqu'elle a des impacts directs sur les coûts et les revenus. Par exemple, l'utilisation d'un petit avion pour un vol fortement demandé peut minimiser les coûts du carburant mais représente un manque à gagner par rapport à la demande non satisfaite. Subramanian *et al.* estiment en 1994 économiser 300 millions de dollars en 3 ans grâce à une nouvelle technique d'affectation des flottes [SSQ⁺94].

Par rapport à l'étape précédente, nous trouvons plus de littérature sur le problème d'affectation des flottes. Gu *et al.* étudient certaines propriétés du problème. Ils donnent une expression analytique pour déterminer le nombre d'avions nécessaire dans le cas d'une seule flotte et ils montrent que le problème de faisabilité de l'affectation de flottes est NP-complet quand il y a plus de 3 flottes [GJNW94]. Abara explique le problème d'affectation des flottes et donne différentes contraintes comme la couverture des vols ou le nombre d'avions nécessaires [Aba89]. Hane *et al.* propose un modèle de multiflot. Ils utilisent différentes méthodes comme l'algorithme du point intérieur, la perturbation des coûts, l'agrégation des sommets et la priorité du branchement et trouvent des solutions proches de la solution optimale [HBJ⁺95]. Clarke *et al.* [CJNZ97] introduisent les contraintes de la maintenance et de l'équipage dans le modèle classique afin de fournir une entrée *plus réalisable* au problème de rotation des avions car les routes affectées dans l'étape de la rotation des avions doivent respecter ces contraintes. Barnhart *et al.* ajoutent la contrainte de connectivité pour l'utilisation équilibrée des avions [BBC⁺98] et ils utilisent un *Branch-and-Price* pour résoudre le problème. Les méthodes comme la programmation dynamique et les heuristiques sont employées notamment par El Moudani et Mora-Camino [MMC00]. Ioachim *et al.* résolvent le problème d'affectation des flottes avec fenêtres de temps sur l'horaire des vols. Ils introduisent la contrainte de synchronisation et utilisent la technique de décomposition Dantzig-Wolfe pour résoudre le problème [IDSB99]. La contrainte de synchronisation évite le retard et l'avance sur l'horaire. Ahuja *et al.* intègrent les coûts de main d'oeuvre et d'équipage à leur

modèle et utilisent les techniques de recherche de voisinage multi critères grande échelle [AGL⁺03].

2.2.3 Rotations des avions

Une fois que l'affectation des flottes aux vols est réalisée, la compagnie aérienne doit décider quelle route sera affectée à quel avion. Une route est une suite de vols consécutifs et compatibles. Deux vols consécutifs i et j sont compatibles si la destination du premier vol est la même que l'origine du deuxième et l'attente entre les deux vols est acceptable.

La solution du problème de rotation des avions doit assurer tous les vols en respectant la contrainte de maintenance des avions.

Pendant les étapes précédentes du planning, les avions de la même flotte sont considérés comme identiques. Bien qu'ayant la même distance autorisée et la même capacité de passagers, les avions d'une flotte ne sont plus identiques. Ils ont en effet, à un moment donné, des besoins différents en maintenance car le taux d'utilisation de chaque avion est différent. Pour cette raison, une route *maintenance-réalisable* pour un avion précis peut être non réalisable pour un autre.

Dans la littérature nous voyons une variété de modèles pour la rotation. Car, malgré la similitude des modèles pour l'affectation des flottes, les compagnies aériennes modélisent et résolvent différemment le problème de la rotation des avions. Certaines compagnies préfèrent un planning sur le long terme tandis que les autres favorisent le planning de dernière minute [Gro05]. Ces dernières doivent utiliser, en général, les techniques relativement simples comme PAPS (premier arrivé premier servi) ou DAPS (dernier arrivé premier servi). L'intérêt de ces méthodes est la rapidité, même si la solution obtenue n'est pas optimale pour certains critères comme l'utilisation des avions, l'équilibrage de charge, la minimisation des coûts ou encore la minimisation d'attente des passagers entre deux vols.

Certaines autres compagnies préfèrent construire des routes qui se répètent à chaque période du planning. Ce fait garantit l'utilisation équilibrée des avions, mais par contre les contraintes individuelles ne sont pas considérées. Par exemple ces routes ne prennent pas en compte les besoins en maintenance des avions. Donc des

ajustements sont nécessaires avant l'application.

Daskin et Panayotopoulos donnent l'une des premières formulations de la rotation des avions. Ils modélisent le problème en programmation linéaire en nombres entiers (PLNE). Leur modèle est basé sur la sélection des routes générées. Ils résolvent le problème en utilisant le principe de relaxation Lagrangienne [DP89]. Une autre relaxation Lagrangienne est proposée par Clarke *et al.* Leur modèle maximise le profit obtenu par les *bonnes connexions* pour les passagers. L'optimisation est faite par un algorithme de sous-gradient [CJNZ97]. Gopalan et Talluri proposent deux modèles : l'un à horizon infini (statique - le planning se répète) et l'autre à horizon fini (dynamique - le planning est refait). Leur algorithme est polynômial et donne une rotation semaine-type [GT98]. Desaulniers *et al.* [DDD⁺97] et Barnhart *et al.* [BBC⁺98] combinent les problèmes de l'affectation des flottes et de la rotation des avions. Récemment Sarac *et al.* donnent un algorithme de *Branch-and-Price*. Le critère à optimiser n'est plus de maximiser le profit obtenu par une bonne affectation d'un vol à un avion mais de maximiser l'utilisation des avions avant une intervention de maintenance [SBR06]. Sriram et Haghani introduisent les coûts de maintenance et minimisent ces coûts avec une heuristique de recherche *en profondeur d'abord et aléatoire* [SH03]. Ils choisissent un avion aléatoirement et trouvent une route complète pour cet avion. La méthode s'arrête quand tous les vols sont couverts.

Le transport aérien a une nature stochastique et les phénomènes inattendus causent souvent des changements dans le planning des vols. Un autre axe de recherche est la *reconstruction* de la rotation des avions après un tel changement de dernière minute. Après une fermeture d'un aéroport central avec 250 départs par jour, si une compagnie aérienne peut reprendre normalement les vols à la fin d'une demi journée, au lieu de perdre la journée complète, elle peut économiser jusqu'à 937 500 dollars [BYA01]. Bard *et al.* propose un modèle de flot pour minimiser les coûts [BYA01]. Teodorovic et Guberinic [TG84] et Teodorovic et Stojkovic [TS90] donnent respectivement un modèle de *Branch-and-Bound* et un modèle de programmation dynamique afin de minimiser l'attente des passagers entre les vols et le nombre de vols annulés. Rosenberger *et al.* développent un heuristique qui minimise

les coûts de re-rotation et d'annulation des vols. Avec des simulations, ils valident leur approche [RJN03].

2.3 Importance et caractéristiques de la maintenance

La définition de la maintenance selon l'Agence Européenne de la Sécurité Aérienne est "... l'une ou la combinaison des activités suivantes : révision, réparation, inspection, remplacement modification ou rectification des défauts d'un avion ou de ces composants..." [EC03].

La réglementation des administrations internationales de la régulation de l'aviation obligent les compagnies aériennes à prévoir les interventions de maintenance pour les avions. Donc la maintenance des composants ou de la totalité de l'avion ont lieu périodiquement, sauf pour les pannes. La fréquence dépend de la combinaison de la durée de vol, du nombre de décollages, de la durée totale écoulée depuis la dernière maintenance [SH03].

2.3.1 Aspects économiques de la maintenance

Le rôle de l'équipe de maintenance dans une compagnie aérienne est de fournir des avions complètement opérationnels quand ils sont nécessaires, avec un coût minimal [AkPN05]. En 1996 les coûts de maintenance représentent 10-15% des coûts opérationnels d'une compagnie aérienne [Ser95]. Selon *World Airline Financial Results* de 2005 [WAF06] la dépense opérationnelle totale d'Air France est de 24 775 737 000 dollars, celle de Lufthansa Groupe est de 20 713 663 000 \$. Flinte constate que le marché de la maintenance dans le secteur de transport aérien augmente avec un ratio annuel de 10,1% [Fli06].

La forte tendance sur le marché du transport aérien est de sous-traiter les activités de maintenance. Le processus de maintenance est compliqué et demande une expertise de haut niveau et donc un grand investissement. De ce fait, les relativement petites compagnies préfèrent sous-traiter ce service au lieu d'une intégration verticale [HC02]. L'intégration verticale correspond à la présence d'un département de maintenance des avions au sein de la même entreprise.

A l'inverse, pour certaines compagnies, leur présence dans le secteur de la maintenance peut amortir la variation de la demande et s'adapter plus facilement au marché dynamique [KV04]. L'avantage non négligeable de l'intégration totale des activités de maintenance est l'expérience acquise et l'installation déjà établie [AkPN05]. En plus il y a la possibilité d'offrir le service aux autres compagnies qui souhaitent sous-traiter la maintenance.

2.3.2 Contraintes de maintenance

Tous les avions doivent être régulièrement maintenus. Une intervention de maintenance peut être une inspection de petite échelle comme la vérification du niveau de l'huile du moteur ou une intervention de grande échelle pendant laquelle l'avion est complètement démonté, inspecté visuellement et remonté. En général les inspections de petite échelle peuvent être faites dans tous les aéroports mais les interventions de plus grande échelle nécessitent des bases de maintenance particulières, avec un personnel ayant la compétence requise. Ces bases peuvent être *flotte-dépendantes*, c'est-à-dire que la maintenance de certaines flottes peuvent avoir lieu dans ces bases. Il faut noter que le nombre et la capacité des bases de maintenance sont limités.

Pour chaque type de maintenance, la durée entre deux interventions de maintenance est proposée par le constructeur de l'avion et est basée sur le temps, le nombre de vols et la durée totale des vols. Cette proposition doit être validée par les associations comme (US) Federal Aviation Administration, l'Agence Européenne de la Sécurité Aérienne ou Transport Canada. Les compagnies aériennes sont obligées de respecter de façon ferme ces règles. Les compagnies aériennes appelle ces contrôles A,B,C et D. Les types A et B sont des contrôles légers, tandis que les types C et D sont des contrôles beaucoup plus importants qui mettent l'avion hors service pendant une durée considérable.

Par exemple, avant les dernières approbations de 2004 ; la durée entre deux contrôles de type A pour les avions A320 était de 500 heures de vol, pour les contrôles C, elle était de 15 mois et pour les *inspections lourdes*, elle était de 5 ans [AB004].

La préparation du planning de maintenance d'une flotte nécessite une grande expertise afin de changer et rechanger les plannings de *long-terme*, la ré-allocation

des ressources humaines et matérielles pour répondre aux changements de statu de la flotte, de la disponibilité du personnel ou du planning des vols. Les tâches de maintenance peuvent être regroupées en deux ensembles, la maintenance *planifiée* et la maintenance *non-planifiée*. Le premier ensemble contient les tâches de la maintenance préventive. Les actions correctives à la suite d'un évènement non attendu, sont dans l'ensemble de la maintenance non-planifiée [VDK⁺02].

Les techniques de la modélisation mathématique sont appliquées pour la construction du planning d'une base de maintenance. Ce planning de maintenance tient compte du type de la flotte, des besoins de maintenance de l'avion qui va visiter la base de maintenance concernée, de la durée pendant laquelle l'avion peut rester au sol et de la disponibilité des ressources. Dijkstra *et al.* proposent un système d'aide à la décision pour le planning du personnel dans une base de maintenance [DKJS91]. La simulation a également été utilisée pour développer des systèmes d'aide à la décision. Duffuaa et Andijani la considèrent comme une meilleure méthode pour évaluer les fonctions de maintenance que les modèles mathématiques, à cause de la complexité et de l'aspect stochastique du problème [DA99]. Nous pouvons voir une approche récente de Bazargan-Lari *et al.*, basée sur la simulation pour résoudre le problème de planning des ressources humaines des bases majeures de maintenance de Continental Airlines [LGY03].

Les compagnies qui sous-traitent la maintenance et celles qui l'assurent elles-même n'ont pas les mêmes contraintes. Les compagnies qui sous-traitent ce service, en général, n'ont pas besoin de faire le planning des opérations pour une base de maintenance puisque cette base ne leur appartient pas. En revanche, elles doivent payer pour ce service. Donc l'objectif de ces entreprises est de minimiser les coûts de maintenance. D'autre part, surtout les grandes compagnies aériennes, qui ne sous-traitent pas la maintenance mais proposent aussi leurs services, ont des contraintes très importantes sur la capacité de la base de maintenance. Ces compagnies ne peuvent pas se contenter de minimiser les coûts de maintenance sans tenir compte de la gestion de la capacité des bases. Ainsi Sarac *et al.* rajoutent les contraintes de la capacité de main d'oeuvre et des bases de maintenance au modèle de la rotation des avions [SBR06].

Une autre approche est de définir le planning de maintenance et de la rotation des avions séparément [CPZ00]. Puisque le planning de maintenance ne doit pas tenir compte seulement de besoins de maintenance des avions, mais aussi de la capacité de main-d'oeuvre dans les bases de maintenance, de la disponibilité des bases de maintenance, de la compatibilité de l'appareil avec la compétence du personnel présent aux bases de maintenance ; dans certaines grandes compagnies aériennes, le planning de maintenance est préparé par un autre département qui est responsable de la maintenance de tous les avions de la compagnie.

Pendant la préparation du planning de maintenance, les contraintes de capacité et le besoin de la flotte sont pris en compte et finalement le planning de la maintenance est transmis au département concerné. La rotation finale respecte le planning de maintenance et aussi le potentiel de vol des avions. Donc il faut compter le planning de maintenance comme une étape séparée, comme dans la figure 2.2.

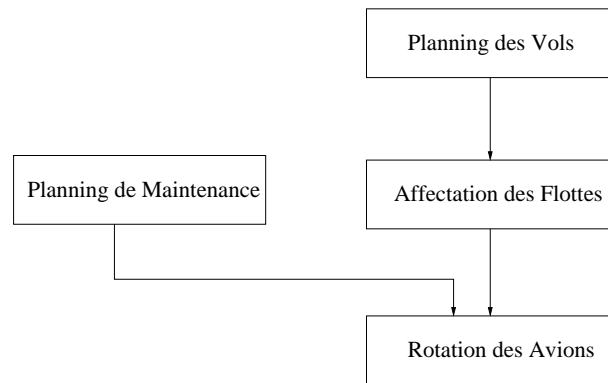


FIG. 2.2 – Les étapes de planning avec le planning de maintenance

Dans le cadre de ce travail, nous considérons les entreprises qui ne sous-traitent pas le service de maintenance et dont le planning de maintenance est préparé par un département différent. Pendant la construction de la rotation des avions, le planning de maintenance doit être respecté.

CHAPITRE 3

PRÉSENTATION DU PROBLÈME, MODELISATION ET COMPLEXITÉ

3.1 Présentation du problème

3.1.1 Définition du problème de la rotation des avions

Dans ce chapitre nous allons expliquer le problème de la rotation des avions, les critères que nous optimisons et les contraintes considérées. Nous définissons la rotation des avions comme la recherche des routes pour un ensemble d'avions. Par contre, même si les avions sont dans la même flotte, donc avec des propriétés identiques, ils sont traités séparément car chaque avion a un besoin différent de maintenance. Ce besoin est représenté par le potentiel de vol.

Potentiel de vol : La durée pendant laquelle un avion peut voler sans une intervention de maintenance. Soit L la limite maximale de durée entre deux interventions de maintenance et $\sum d_v$ la durée totale pendant laquelle l'avion a déjà volé après la dernière maintenance où d_v est la durée du vol v . Donc le potentiel de vol de l'avion a est $P_a = L - \sum d_v$.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il y a différents types de maintenance et pour chaque type il y a une limite différente. En revanche, les compagnies peuvent combiner les interventions et donc les limites de vol. Mais aucune compagnie aérienne ne peut faire voler un avion plus que la limite L à cause des pénalités sévères. Donc le suivi de la consommation du potentiel de vol des avions est crucial pour une compagnie aérienne.

Nous avons deux activités principales à considérer : les vols et les interventions de maintenance. Toutes les activités sont définies par l'origine, la destination, la date et l'heure de départ. La plus importante différence entre un vol et une maintenance est que cette dernière est une activité au *sol*. Donc, l'origine et la destination sont la base de maintenance.

La rotation des avions ne sera pas un planning générique mais un planning *daté*

parce que ce plan dépend du potentiel de vol et de la maintenance affectée aux avions. Le plan générique contient seulement le nom de la flotte et les vols affectés à cette flotte. Le planning daté désigne quel particulier avion fait quel particulier vol pendant l'étape de la rotation des avions.

L'affectation de la maintenance est préparée chaque semaine, par un autre département. En fonction du planning de maintenance, chaque semaine la rotation des avions est préparée. La période du planning daté est donc, une semaine.

La fonction objectif de la rotation des avions est souvent liée aux coûts ou à la qualité de la solution. Les objectifs financiers regroupent la minimisation des coûts opérationnels [SH03] et la maximisation des revenus [CJNZ97]. D'autre part, la qualité de la solution est liée à la robustesse ou à la consommation du potentiel de vol [SBR06]. L'objectif financier est difficile à estimer et diffère considérablement d'une compagnie à une autre. Nous préférons regarder du côté de la qualité de la solution finale en fonction de la consommation du potentiel de vol. Nous allons voir que cette approche a des impacts sur la minimisation des coûts opérationnels.

3.1.1.1 Maximisation de l'utilisation des avions

Selon Culioli et Partouche-Zembra, la première richesse d'une compagnie aérienne est constituée par sa flotte. C'est la machine de production. Cette machine de production est à la fois extrêmement coûteuse et particulièrement complexe. Il s'agit donc de l'utiliser au mieux [CPZ00].

Nous traduisons *l'utilisation au mieux* par la maximisation de l'utilisation de l'avion a sans dépasser la limite de vol. Donc la première fonction objectif est :

$$\min P_a = L - \sum d_v \quad (3.1)$$

où $\sum d_v$ est la durée totale pendant laquelle l'avion a a déjà volé depuis la dernière intervention de maintenance. Cette durée couvre aussi la consommation des périodes précédentes.

$$\min P_a = L - \left(\sum_{v \in c(t < T, a)} d_v + \sum_{v \in c(t = T, a)} d_v \right) \quad (3.2)$$

où $c(t = T, a)$ est le chemin (la suite des vols) affecté à l'avion a à la période T et $c(t < T, a)$ est la liste des chemins affectés à l'avion a avant la période T . Comme nous l'avons déjà dit, la période planning est une semaine. Le chemin c dans la liste $c(t < T, a)$ se connecte avec le chemin c' de la période suivante. Nous pouvons donc considérer $c(t < T, a)$ comme un seul chemin qui couvre $T - 1$ périodes.

Si nous définissons L_a comme le potentiel de vol au début de la période actuelle, nous avons :

$$L_a = L - \sum_{v \in c(t < T, a)} d_v \quad (3.3)$$

Alors le fonction objectif devient :

$$\min P_a = L_a - \sum_{v \in c(t = T, a)} d_v \quad (3.4)$$

Cette fonction objectif minimise la perte de potentiel d'un avion. Mais nous avons une flotte alors il faut considérer toute la flotte.

$$\min \sum_{a \in A} P_a = \sum_a (L_a - \sum_{v \in c(t = T, a)} d_v) \quad (3.5)$$

Avec cette fonction objectif nous minimisons la somme des pertes de potentiel des avions et minimisons le nombre de maintenance sur le long terme car les avions vont passer la maintenance plus tard, donc moins fréquemment, sans dépasser la limite de vol.

Nous allons définir le chemin affecté à l'avion a comme $c(a)$ puisque nous nous intéressons seulement à la période actuelle.

3.1.1.2 Equilibrage de charge

Un autre objectif pour les compagnies aériennes est d'équilibrer la charge de vol des avions. Cet objectif est crucial pour les compagnies pour plusieurs raisons :

- Long terme : Si la charge de vol des avions n'est pas équilibrée, un avion *jeune* peut vieillir plus vite que prévu. Dans ce cas, la compagnie peut arriver à une situation où un nombre important d'avions ne sont plus capables de voler.

Lorsque la charge est équilibrée, la flotte reste homogène et il est plus facile de prévoir l'évolution de son vieillissement,

- Court terme : Si la charge n'est pas équilibrée, les prévisions en besoin de maintenance peuvent être trompeuses puisque certains avions consomment leur potentiel plus ou moins vite que le reste de la flotte. Par exemple, à un moment donné, soient L_a et $L_{a'}$ le potentiel de vol des avions a et a' où L_a est inférieur à $L_{a'}$. Donc l'intervention de maintenance de l'avion a est planifiée avant celle de l'avion a' . Mais si l'avion a' vole toujours plus que l'avion a , nous pouvons nous trouver dans la situation où les deux avions ont épuisé leur potentiel en même temps. Alors l'avion a' est bloqué en attente de maintenance.

Pour cette raison, beaucoup de compagnies préfèrent les rotations cycliques. Dans une telle rotation, une série de routes est générée et un avion prend une route différente, à chaque période. Donc sur le long terme, tous les avions suivent la même grande route [GT98].

L'inconvénient de cette méthode est lié à la nature stochastique du transport aérien. Quand il n'est plus possible d'affecter une route pré-définie à un avion particulier, il faut changer tout le planning de long terme.

Pour cette raison, nous proposons un composant de la fonction objectif qui favorise l'équilibrage de la charge dans la période actuelle. Nous définissons une charge souhaitée M_a pour un avion a . L'écart de charge de l'avion a est formulé de la façon suivante :

$$\varepsilon_a = |M_a - \sum_{v \in c(a)} d_v| \quad (3.6)$$

où $c(a)$ est le chemin (*la route*) affecté à l'avion a . Ainsi la deuxième fonction objectif est traduite comme

$$\min \sum_a \varepsilon_a \quad (3.7)$$

Nous allons combiner les expressions 3.5 et 3.7 pour obtenir la fonction objectif principal.

$$\min \alpha \sum_a P_a + \beta \sum_a \varepsilon_a \quad (3.8)$$

où α et β sont des poids attribués aux composants de la fonction objectif finale. α et β sont choisis de telle façon que l'objectif principale reste la minimisation des pertes de potentiel.

3.1.2 Différentes politiques dans le planning de la maintenance

Dans cette section, nous allons étudier la contrainte de la maintenance et ses impacts sur le planning des vols. Nous considérons seulement les interventions de type A (les inspections légères de sécurité) et nous prenons une flotte du type A320 comme exemple. Nous avons déjà vu que la limite de vol entre deux interventions de maintenance de type A, pour un avion de type A320 est de 500 heures de vol. Les interventions de ce type de maintenance ont lieu pendant la nuit, où il n'y a pas de vol, afin de ne pas bloquer l'avion et ne pas perturber les vols.

Nous avons déjà vu dans la figure 2.2 que le planning de maintenance est une donnée du problème de la rotation des avions. Donc la maintenance m_a est une activité pré-définie pour l'avion a . Comme la capacité de la base de maintenance est limitée, le nombre de maintenances est un nombre fini. En d'autres termes, la sous-flotte qui peut passer une intervention de maintenance est limitée par la capacité de la base de maintenance. Pour faciliter la notation, nous allons appeler les avions pour lesquels une intervention de maintenance est planifiée dans la période de planning actuelle, les *avions critiques*. Naturellement, un avion critique devient *non-critique* après une intervention de maintenance.

Nous pouvons imaginer que les avions critiques et non-critiques ont des objectifs et des contraintes différents. Même si la contrainte de maintenance est valable pour tous les avions, elle est beaucoup plus importante pour les avions critiques. Car le potentiel de vol des avions critiques est inférieur aux avions non-critiques. En même temps, les avions critiques sont de très bons candidats pour maximiser leur utilisation puisque nous savons exactement quand et où ils vont passer la maintenance. Connaissant la date de leur maintenance, nous pouvons affecter les vols aux avions critiques afin de consommer leur potentiel de vol. D'autre part, nous pouvons équilibrer la charge des avions non-critiques car la contrainte de limite de vol est moins importante et nous ne connaissons pas la date exacte de leur maintenance.

Les avions critiques sont directement concernés par la politique de la maintenance. Comme nous l'avons déjà dit, le nombre de maintenances par semaine définit le nombre d'avions critiques. Avec la maximisation de l'utilisation, il serait possible de changer de politique de maintenance et de diminuer le nombre de maintenances par semaine, donc le nombre d'avions critiques.

3.1.2.1 Nombre constant de maintenances par jour

La politique la plus simple est de fixer le nombre de maintenances par jour et d'utiliser la règle premier arrivé, premier servi. Donc l'avion le plus *critique* au début de la semaine passe en premier la maintenance. L'avantage de cette politique est sa régularité et donc la facilité de la prévision.

3.1.2.2 Nombre variable de maintenances par jour

Une autre politique simple est de fixer le nombre de maintenances par jour, pour les jours de la semaine et d'enlever totalement ou une partie des maintenances en week-end. En effet le coût de main-d'oeuvre représente une part importante des coûts de maintenance et il coûte plus évidemment pendant le week-end. Ainsi une politique qui diminue le nombre de maintenances en week-end minimise les coûts de maintenance plus qu'une politique qui diminue le nombre de maintenances en semaine.

3.1.2.3 Nombre variable de maintenances par semaine

Une dernière politique de maintenance est de ne pas fixer le nombre des avions critiques. En revanche, puisque la capacité de la base de maintenance est limitée, le nombre maximal d'avions critiques sera toujours limité. La différence de cette politique est que, au début de chaque période de planning, les avions critiques sont décidés en fonction de leur utilisation. Si le potentiel de vol d'un avion est inférieur à un seuil, l'avion est considéré comme critique. Si le nombre des avions critiques est supérieur à la capacité hebdomadaire CH de la base de maintenance, les CH premiers avions passent la maintenance. La difficulté de cette politique est de définir

un seuil de potentiel de vol, à partir duquel un avion sera considéré comme critique. Un autre inconvénient est l'irrégularité éventuelle de la charge de travail dans les bases de maintenance, car chaque semaine le nombre d'avions critiques peut varier.

3.2 Modélisation du problème

Afin de modéliser le problème de rotation des avions, nous allons étudier la structure du réseau de *destinations* et le graphe associé à ce problème. Ensuite nous allons proposer un modèle de programmation linéaire mixte.

3.2.1 Structure du réseau

Les villes desservies par la compagnie aérienne constituent un réseau de chemins aériens proposés par la compagnie entre les villes. Ce réseau peut avoir une structure très complexe. En revanche, le réseau desservi par une flotte de la compagnie peut montrer des caractéristiques intéressantes. En général, nous pouvons observer une densité plus élevée autour de certaines villes.

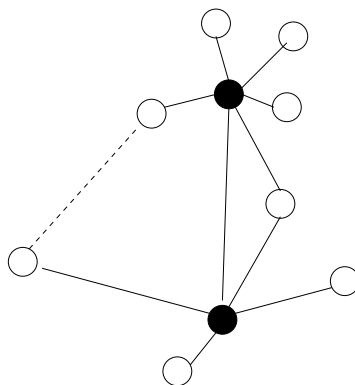


FIG. 3.1 – Centre-Satellite et routes directes

Dans la figure 3.1 nous voyons une densité de sommets blancs qui sont les satellites (ou *spokes*) autour des sommets noirs qui sont appelés les centres (ou *hubs*).

Nous pouvons voir une liaison directe entre deux satellites (en pointillés). Par contre dans un réseau de Centre-Satellites (ou *Hub-and-Spokes*), (la figure 3.2), pour aller d'un satellite à un autre, il faut passer par au moins un centre. Un des satellites

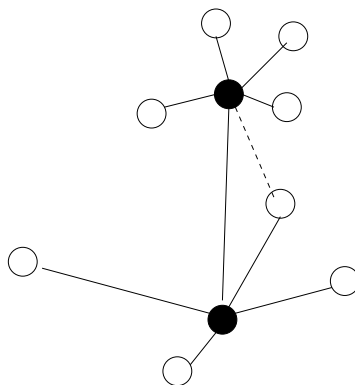


FIG. 3.2 – Centre-Satellites de multi-affectation

de la figure 3.2 est lié à deux centres. Dans ce cas, le réseau prend le nom de *Centre-Satellites de multi affectation*. Si chaque satellite est lié à un seul centre comme sur la figure 3.3 alors le réseau est *Centre-Satellites de mono affectation* [BO99].

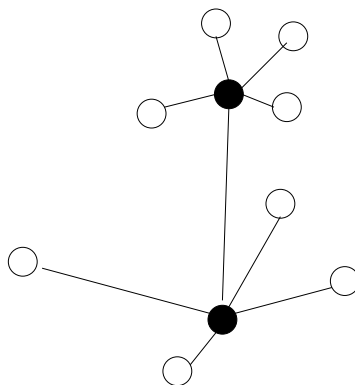


FIG. 3.3 – Centre-Satellites de mono affectation

La littérature concernant les problèmes de localisation de centres s'est intensifiée depuis que O'Kelly [O'K87] a proposé un modèle mathématique. Ce modèle minimise divers coûts du réseau. Le problème de localisation de centres s'intéresse à localiser les centres et à affecter les satellites aux *bons* centres.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons aux réseaux du type Centre-Satellites avec un seul centre. Le réseau mono Centre-Satellites est une restriction mais correspond à la réalité dans la plupart des cas. Notons qu'en enlevant les connexions entre les centres dans un réseau de Centre-Satellites de mono affectation,

nous obtenons plusieurs réseaux de mono Centre-Satellites. Cette liaison est enlevée seulement au niveau planning, il existe toujours un vol entre les centres. En revanche, pendant le planning, chaque centre ne considère que les vols dont l'origine et la destination sont ce centre. Ainsi, pour chaque centre il y a une structure de mono Centre-Satellites. Dans la figure 3.4 nous voyons que nous avons deux réseaux mono

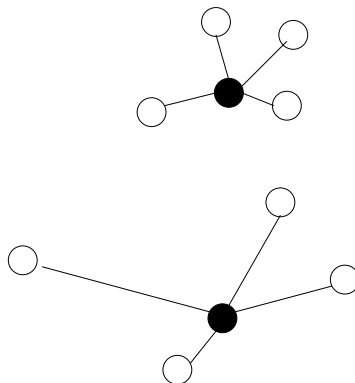


FIG. 3.4 – Mono Centre-Satellites

Centre-Satellite en enlevant l'arête entre deux centres de la figure 3.3. Il est logique de choisir le centre comme aussi la base de maintenance puisque tous les avions doivent passer par le centre.

L'avantage crucial de la structure *mono Centre-Satellites* est la possibilité d'agrégation des vols. Car, quand un avion vole de la ville x à la ville y sachant que la ville x est le centre, il doit revenir à la ville x . Donc les vols $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$ doivent être affecté au même avion. Dans ce cas là, nous pouvons agréger ces deux vols et diminuer la taille du problème.

3.2.2 Notations utilisées

Dans cette section nous donnons les notations que nous allons utiliser dans le tableau 3.1.

La charge de vol idéale par avion par semaine est calculée par l'équation suivante :

$$MH = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{|A|} \quad (3.9)$$

TAB. 3.1 – Paramètres utilisés

A	Ensemble des avions
AC	Ensemble des avions critiques
a, a_c	Avion, avion critique
L_a	Limite de vol de l'avion a
V	Ensemble des vols
v	Vol
d_v	Durée du vol v
$Maint$	Ensemble des interventions de maintenance
m_a	Intervention de maintenance planifiée pour l'avion a
P_a	Potentiel de vol de l'avion a
CH	Capacité hebdomadaire de la base de maintenance
MH	Charge de vol idéale par avion par semaine
M_k	Charge de vol idéale par avion pour k jours $k \in \{1, \dots, 7\}$
$prec(m_a)$	Toutes les activités qui précèdent la maintenance m_a
$succed(m_a)$	Toutes les activités qui succèdent à la maintenance m_a
$\delta^+(v)$	Ensemble des sommets voisins sortants du sommet v
$\delta^-(v)$	Ensemble des sommets voisins entrants au sommet v

où $|A|$ est la cardinalité de l'ensemble A donc représente la taille de la flotte.

Remarque : Puisque nous avons défini un avion critique comme étant l'un de ceux qui passent la maintenance dans la semaine du planning, le nombre d'avions critiques est inférieur à la capacité hebdomadaire de maintenance : $|AC| \leq CH$.

De plus, nous pouvons noter que la charge de vol idéale pour k jours est :

$$M_k = k \times \frac{MH}{7} \text{ où } k \in \{1, \dots, 7\} \quad (3.10)$$

Nous avons déjà donné la définition de M_a comme étant la charge souhaitée pour l'avion a . Une partie de la flotte est toujours non critique tandis que les avions critiques deviennent non critiques au fur et à mesure. Donc pour un avion non critique, la charge souhaitée est MH , la durée moyenne de vol par avion et par semaine. En revanche, pour un avion critique qui passe la maintenance dans la nuit du 5ème jour, la charge idéale est M_2 puisque pendant 2 jours cet avion est non critique. Comme nous savons pendant combien de jours l'avion a est non-critique, pour la généralisation, nous allons utiliser M_a pour la charge idéale correspondant

à l'avion a .

Dans le tableau 3.1 nous avons défini $prec(m_a)$ et $succed(m_a)$ comme la notation pour la liste des activités précédant et suivant respectivement la maintenance m_a . Mais nous pouvons imaginer le même type de liste pour les avions au début de la semaine ou pour les vols. Donc nous pouvons définir $prec(a)$, $succed(a)$, $prec(v)$ et $succed(v)$. Le paramètre a définit à la fois l'avion et l'état de l'avion a au début de la semaine. L'état de l'avion est sa position et sa disponibilité au début de la semaine. Donc les activités suivantes de l'avion a dépendent de son état. Evidemment les activités précédentes de l'avion n'appartiennent pas à la période actuelle de planning, donc $prec(a)$ est considéré vide.

Nous donnons les variables de décision associées au problème de rotation des avions dans le tableau 3.2.

TAB. 3.2 – Variables de décision utilisées

$x_{v,w,a}$	=1 si l'activité w succède à l'activité v sur l'avion a =0 sinon
T_a^{ut}	Somme des durées des vols affectés à l'avion a / Temps d'utilisation (Temps d'utilisation avant la maintenance pour les avions critiques)
T_a^{am}	Somme des durées des vols affectés à l'avion a après la maintenance jusqu'à la fin de la semaine
$\varepsilon_a^+, \varepsilon_a^-$	Variables permettant de mesurer l'écart absolu entre la charge de l'avion a et sa charge idéale, c'est-à-dire $ M_a - T_a^{ut} $

Il est évident que les variables $x_{v,w,a}$ sont les variables principales et les autres variables sont calculées avec l'aide de $x_{v,w,a}$.

3.2.3 Graphe associé

Traditionnellement, deux types de graphes sont utilisés pour modéliser le problème de rotation des avions : le graphe de ligne de temps et le graphe de connexions.

Dans le graphe de lignes de temps, l'ensemble des arcs représente l'ensemble

des vols et l'ensemble des variables attachées aux activités au sol. Les sommets correspondent aux départs ou aux arrivées des vols.

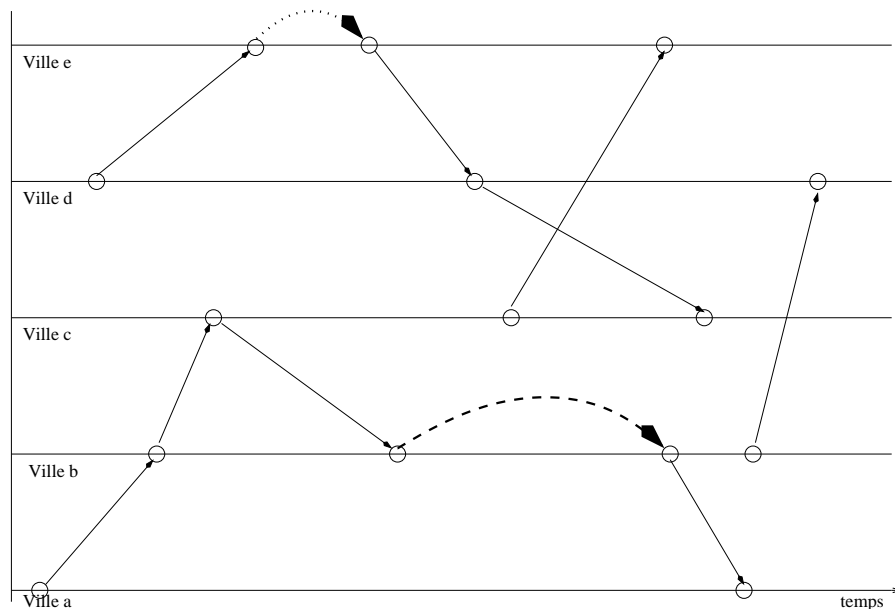


FIG. 3.5 – Graphe de ligne de temps

Dans la figure 3.5, les arcs continus et pointillés représentent respectivement les vols et les variables attachées aux activités au sol. Chaque ligne correspond à une ville, au cours du temps.

Le deuxième type de graphe inverse les rôles : les sommets représentent les activités et les arcs sont des possibilités de connexions entre les activités. Même si le graphe de connexions est plus dense que le graphe de lignes de temps, en montrant toutes les possibilités de connexions, la représentation explicite des connexions compense cet inconvénient. Pour cette raison nous préférons utiliser ce type de graphe. La définition formelle d'un graphe de connexions est un graphe $G = (N, E)$ où N est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arcs. Les activités de vols (V) et de maintenances (M) ainsi que les états initiaux des avions (A) font partie de N . Donc $N = A \cup V \cup M \cup \{s\} \cup \{t\}$ où s et t sont des sommets fictifs qui correspondent à la source et au puits (le début et la fin de la période de planning). Comme nous considérons un graphe du type mono Centre-Satellites, les sommets de V sont ainsi des vols agrégés. Les sommets de vols sont valués par la durée d_v qui est

la somme des durées des vols aller et retour. De même, le centre du réseau (qui est également la base de maintenance) est à la fois l'origine et la destination de ce vol . Ces aggregations diminuent considérablement la taille du graphe.

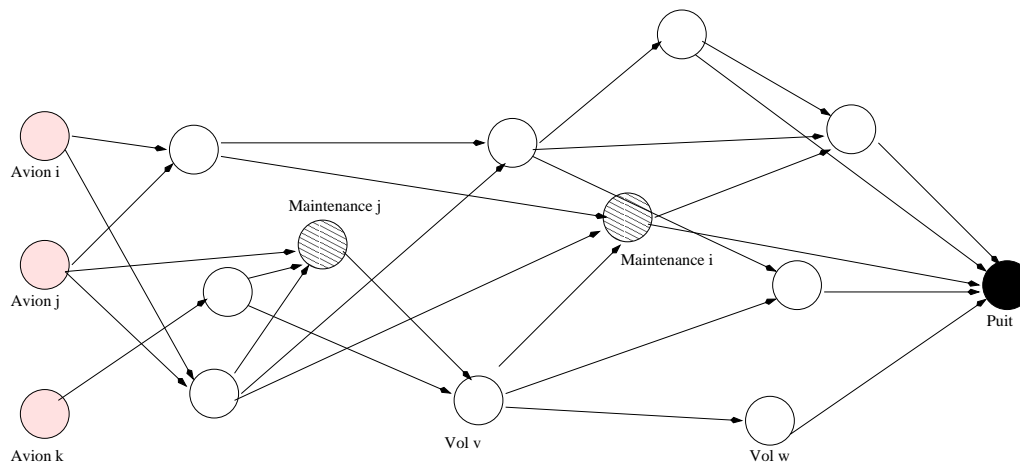


FIG. 3.6 – Graphe de connexions

La figure 3.6 donne un sous-graphe de notre modèle. Un arc entre deux sommets montre la possibilité de l'exécution successive de deux activités par le même avion. Nous pouvons facilement voir que la flotte contient 3 avions, et deux interventions de maintenance sont prévues. Nous devons assurer tous les vols par ces 3 avions, donc trouver un chemin par avion, qui l'amène au sommet du puit et ces chemins doivent couvrir tous les sommets du graphe. Nous ne montrons pas le sommet de source, puisque les sommets des avions peuvent être considérés comme la source.

Maintenant, nous pouvons redéfinir le problème grâce au graphe de connexions. Nous cherchons à trouver une route (ou *un chemin*) pour chaque avion, composée de vols. Sachant qu'un vol sera affecté à un seul avion, les routes doivent être sommets-disjoints. Une autre contrainte est d'assurer tous les vols, donc de partitionner le graphe par les chemins sommets-disjoints. En plus, comme il y a la contrainte de limite de vol, la longueur de ces chemins doit être inférieure à cette limite et le dernier sommet du chemin d'un avion critique a doit être l'intervention de maintenance m_a qui est planifiée pour l'avion a . Un avion critique a devient non-critique après l'intervention de maintenance et il continue son chemin, jusqu'à la fin de la

semaine. Sous ces contraintes nous allons maximiser l'utilisation des avions critiques et équilibrer la charge des avions non-critiques.

Dans le cadre de cette thèse, nous modélisons le problème comme le partitionnement d'un graphe par des chemins sommets disjoints, avec une limite de longueur.

3.2.4 Modèle du Problème

Dans cette section nous proposons un modèle mathématique de programmation linéaire en nombres entiers qui affecte à chaque avion un chemin qui lie la source (le début de la semaine) au puits (la fin de la semaine).

$$\min \quad \alpha \sum_{a \in AC} (L_a - T_a^{ut}) + \beta \sum_{a \in A} (\varepsilon_a^+ + \varepsilon_a^-) \quad (3.11)$$

sachant que

$$\sum_{w \in \delta^-(m_a)} x_{w,m_a,a} = 1 \quad \forall a \in AC \quad (3.12)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(m_a)} x_{m_a,w,a} = 1 \quad \forall a \in AC \quad (3.13)$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} = 1 \quad \forall v \in V \quad (3.14)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} - \sum_{w \in \delta^-(v)} x_{w,v,a} = 0 \quad \forall v \in V \quad \forall a \in A \quad (3.15)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(s)} x_{s,w,a} = 1 \quad \forall a \in A \quad (3.16)$$

$$\sum_{w \in \delta^-(t)} x_{w,t,a} = 1 \quad \forall a \in A \quad (3.17)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{ut} \quad \forall a \in A - AC \quad (3.18)$$

$$\sum_{w \in prec(m_a)} \sum_{v \in \delta^-(w)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{ut} \quad \forall a \in AC \quad (3.19)$$

$$\sum_{v \in succed(m_a)} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{am} \quad \forall a \in AC \quad (3.20)$$

$$T_a^{ut} \leq L_a \quad \forall a \in AC \quad (3.21)$$

$$M_a - T_a^{am} = \varepsilon_a^+ - \varepsilon_a^- \quad \forall a \in AC \quad (3.22)$$

$$M_a - T_a^{ut} = \varepsilon_a^+ - \varepsilon_a^- \quad \forall a \in A - AC \quad (3.23)$$

$$x_{v,w,a} \in \{0, 1\} \quad \forall v, w \in N, \forall a \in A \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_a^+, \varepsilon_a^- \geq 0 \quad \forall a \in A \quad (3.25)$$

Ce modèle est basé sur les connexions entre les activités qui ont été définies dans les sections précédentes : la variable de décision $x_{v,w,a}$ vaut 1 si et seulement si les activités v et w sont affectées successivement à l'avion a . Dans le modèle nous séparons les fonctions économiques de coûts des avions critiques et non critiques. Nous minimisons la somme des pertes de potentiel de vol des avions critiques et la

somme des écarts de charge de vol des avions non critiques.

La fonction objectif (3.11) est composée de deux parties : pour les avions critiques et les avions non critiques. La partie concernant les avions critiques, consiste à minimiser la somme des pertes de potentiel. La deuxième partie de la fonction objectif, minimise la somme des écarts des charges de vol des avions non critiques par rapport à la charge souhaitée. Par contre il ne faut pas oublier que l'avion critique devient non critique après la maintenance. Les composantes de la fonction objectif sont pondérés par les paramètres α et β . Grâce à ces paramètres, nous agrégeons deux critères (la minimisation de la perte de potentiel et l'équilibrage de la charge de vol) dans une seule fonction objectif.

Les contraintes (3.12) et (3.13) relient les vols aux sommets de maintenance prévue pour les avions critiques. La contrainte (3.14) garantit l'affectation d'un vol à un seul avion. Car chaque vol v doit être lié à un vol w sur un chemin qui est affecté à un avion.

Les contraintes (3.15), (3.16), et (3.17) sont des contraintes de flot et elles définissent un chemin comme une suite de connexions des vols. Notons que s et t signifient la source et le puits dans le graphe.

Les contraintes (3.18) et (3.19) définissent respectivement la consommation du potentiel de vol pour les avions non critiques et critiques avant la maintenance. La contrainte (3.20) est aussi une définition de la consommation du potentiel de vol mais pour les avions critiques après l'intervention de maintenance. Dépassez la limite de vol est interdit par la contrainte (3.21). Les contraintes (3.22) et (3.23) définissent les écarts par rapport à la charge idéale, pour les avions critiques et non critiques, respectivement. Pour cela, la consommation du potentiel de vol après la maintenance des avions critiques est prise en compte. Finalement la contrainte d'intégralité (3.24) montre que la variable $x_{v,w,a}$ ne peut être que 0 ou 1. Donc un vol v peut être lié à un seul vol w sur un seul avion a . Les écarts ε sont positifs grâce à la contrainte (3.25).

3.3 Analyse de complexité

Un problème est décrit par ses paramètres et les propriétés que la solution de ce problème doit satisfaire. Les algorithmes sont des procédures *pas-à-pas* pour résoudre ces problèmes. En général, nous nous intéressons aux algorithmes efficaces. La notion d'efficacité implique l'utilisation des différentes ressources informatiques afin d'exécuter un algorithme. Les ressources sont consommées en fonction de la durée d'exécution de l'algorithme. Donc le temps est la ressource la plus importante. Le besoin en cette ressource est exprimé en fonction de la "taille" de l'instance du problème.

Différents algorithmes ont une immense variété d'efficacité, suivant la taille et les paramètres du problème. Certains algorithmes sont efficaces tandis que les autres sont "inefficaces" (exponentiels ou pseudo-polynomiaux). La distinction entre ces deux types d'algorithmes est la base de la théorie de la complexité [GJ79].

Comme nous l'avons déjà dit, dans le cadre de cette thèse, nous modélisons le problème comme la couverture du graphe (orienté acyclique), par des chemins sommets disjoints. Ces chemins ont une contrainte de limite de longueur.

Dans le domaine de la recherche opérationnelle, les problèmes de chemins sommets disjoints (ou arêtes disjointes) attirent une certaine attention. Le problème classique est défini comme : "Trouver k chemins sommets disjoints qui relient k paires de sommets $(s_i, t_i), i \in \{1, \dots, k\}$ dans un graphe orienté (ou non orienté)" [Ngu07]. Shiloach montre que 2 chemins existent toujours dans un graphe non orienté 4-connexe et planaire, entre n'importe quelles 2 paires de sommets (s_1, t_1) et (s_2, t_2) [Sch80]. Itai *et al.* donnent une série de résultats de complexité [IPS82] : dans les graphes non orientés sans pondération, trouver k chemins sommets-disjoints (arêtes-disjointes) dont la longueur est limitée par B où $B \geq 5$ est NP-complet. La longueur d'un chemin dans un graphe sans pondération, est le nombre d'arêtes sur le chemin. Les résultats de complexité restent les mêmes quand il s'agit des graphes orientés pour le problème de chemins sommets-disjoints. Li *et al.* prouvent que le problème de minimisation du coût total des k -chemins sommets (ou arêtes) disjoints dans un graphe k -pondéré orienté (ou non orienté) est NP-complet, même pour $k = 2$ [LMSL92].

Une arête d'un graphe k -pondéré, a k coûts différents, un pour chaque chemin. Ils proposent un algorithme polynômial pour le graphe orienté acyclique. Une autre variante du problème est de trouver deux chemins sommets (ou arêtes) disjoints, tels que la longueur du plus long soit minimisés dans un graphe orienté ou non orienté. Li *et al.* montrent que ce problème est NP-complet au sens fort et propose un algorithme pseudo-polynômial pour un graphe orienté acyclique [LMSL90]. Natu et Fang proposent un algorithme basé sur la méthode de Dijkstra, de complexité $O(n^4)$ qui minimise la somme des distances de 2 chemins qui relient 2 paires de sommets dans un graphe orienté [NF95]. Par contre les chemins ne sont pas nécessairement disjoints. Van Der Holst et de Pina prouvent que le problème de trouver k chemins disjoints dont les longueurs sont limitées par des bornes supérieures b_i où $i \in \{1, \dots, k\}$ dans un graphe non orienté planaire est NP-complet au sens fort pour $k > 2$ et proposent une méthode de programmation dynamique pseudo-polynômiale pour le cas où $k = 2$ [Vd02].

Un autre problème d'optimisation est de trouver le plus grand nombre k de paires de sommets tel qu'il existe des chemins disjoints qui relient ces paires. Gruswami *et al.* montrent que le problème de chemins arcs-disjoints dans les graphes orientés ne peut pas être approximé à moins d'un facteur $\Omega(m^{1/2-\epsilon})$ où m est le nombre d'arcs [GKR⁺03]. En utilisant les techniques de couplage (*matching*) et de flot, pour résoudre le problème de chemins disjoints, Nguyen donne une approximation de garantie $O(\sqrt{n})$ où n est le nombre de sommets, pour les graphes non orientés, orientés acycliques et orientés avec une capacité d'arête de 2 [Ngu07].

La couverture (*partition*) d'un graphe est un ensemble de chemins sommets-disjoints qui passent par tous les sommets du graphe. Le problème d'optimisation est de trouver une couverture (*partition*) de graphe de cardinalité minimum. Ce problème est NP-complet puisqu'il contient le problème de chemin Hamiltonien qui est NP-complet [GJ79] pour les graphes arbitraires. Hung et Chang proposent un algorithme de garantie $O(n)$ pour le problème de couverture par chemins pour les graphes arc-circulaires, où n est le nombre d'arcs. La cardinalité de la couverture obtenue est au plus la cardinalité optimale plus un [HC06]. Ils réduisent ce problème au problème de cycle (ou chemin) Hamiltonien dans la même classe de graphes. Donc

la complexité est la même que le problème du cycle (ou chemin) Hamiltonien dans les graphes arc-circulaires. Ce problème peut être résolu en $O(n^2 \log n)$ [SCH92].

Une autre approche pour le problème de rotation des avions est basée sur le problème du voyageur de commerce (*PVC*). Le problème du voyageur de commerce est de trouver un circuit hamiltonien de coût minimum dans un graphe pondéré. Nous pouvons imaginer les sommets comme des villes et les arcs comme des routes reliant les villes. La pondération d'un arc est la distance entre les deux villes que cet arc relie. Le circuit hamiltonien de coût minimal est un circuit de distance minimale, qui passe par toutes les villes une seule fois. Selon le graphe ou des contraintes spéciales, le problème peut varier. Barhart *et al.* résolvent un problème de coupe de capacité minimale, afin d'éliminer les sous-tours d'un PVC asymétrique [BBC⁺98]. Boland *et al.* résolvent le PVC asymétrique avec des arcs de remplissage. Les arcs de remplissage sont parallèles aux arcs normaux avec un coût plus élevé. Les arcs de remplissage correspondent aux interventions de la maintenance tandis que les arcs *normaux* correspondent aux vols. La longueur du chemin entre deux arcs de remplissage ne peut pas dépasser une limite W . Ils donnent un modèle mathématique dérivé de la décomposition de Dantzig-Wolfé et des résultats polyédraux. Finalement ils résolvent le problème pour différentes familles d'instances [BCN00]. Mak et Boland calculent une borne inférieure au PVC asymétrique avec les arcs de remplissage par la relaxation lagrangienne et une borne supérieure trouvée à partir d'une solution réalisable construite par le recuit simulé. Ils proposent également une approche heuristique qui a une garantie de performance a posteriori de 3% [MB00]. Ils prouvent aussi que deux types de contraintes développées par les auteurs sont des facettes pour le problème de voyageurs de commerce avec les arcs de remplissage [MB06].

Nous pouvons compter le PVC avec des sommets noirs et blancs comme une autre approche intéressante du problème de la rotation des avions. Les sommets noirs sont les activités de maintenance et les sommets blancs sont des vols. La conception de réseaux de télécommunication peut être modélisée par ce problème. Bourgeois *et al.* proposent 3 approches heuristiques et les comparent sur des instances qui contiennent jusqu'à 200 sommets [BLS03].

Dans les sous-sections suivantes nous allons étudier la complexité du problème

de la rotation des avions.

3.3.1 Problème de faisabilité

La première question que nous nous posons, face à un problème de rotation des avions est de savoir si une solution réalisable existe. Une solution réalisable doit assurer tous les vols sans faire voler les avions critiques plus que la limite légale. Différents cas apparaissent suivant le nombre d'avions critiques.

3.3.1.1 Aucun avion critique

Imaginons qu'aucun avion n'ait de contrainte de limite de vol. Ce qui veut dire que dans la période du planning considérée aucun avion n'a besoin d'une intervention de maintenance. Les avions peuvent donc voler librement jusqu'à la fin de la semaine. Dans ce cas, le problème de faisabilité est de savoir si nous pouvons assurer tous les vols.

Le problème de faisabilité revient alors à décider si il est possible de couvrir tous les sommets du graphe de connexions G associé au problème de rotation des avions, par $|A|$ chemins sommets disjoints, où $|A|$ est la taille de la flotte. Nous pouvons modéliser ce problème à l'aide du graphe de connexions G' avec des modifications suivantes faites sur le graphe G que nous avons montré dans la figure 3.6 :

- Pour chaque vol v , nous séparons le sommet correspondant en deux : v^- et v^+ ;
- Entre chaque couple de sommets v^- et v^+ il y a un seul arc de coût -1 ;
- Tous les arcs entrants au sommet v dans le graphe G , entrent au sommet v^- dans le graphe G' avec un coût 0 ;
- Tous les arcs sortants du sommet v dans le graphe G , sortent du sommet v^+ dans le graphe G' avec un coût 0 ;
- Un sommet de source s est ajouté et il est lié à tous les sommets qui représentent l'état de l'avion au début de la semaine. Le coût de ces arcs est également 0.

Naturellement la capacité de tous les arcs est égale à 1. Donc le problème d'as-

assurer *tous* les vols avec $|A|$ avions se ramène au problème de trouver un flot entier de valeur $|A|$ et de coût de $-|V|$ dans le réseau G' . En d'autres termes, s'il existe un flot entier de $|A|$ avec un coût de $-|V|$ dans le graphe G' alors, tous les vols sont assurés. Sinon, il y a deux possibilités :

- Le coût total est supérieur à $-|V|$. Cela signifie qu'une partie des vols n'est pas assurée
- La valeur du flot est différente de $|A|$. Nous avons ajouté le sommet s lié aux sommets d'état-avion. Donc les arcs sortants de s forment une coupe de capacité de $|A|$. Donc la valeur maximale du flot est nécessairement inférieure à $|A|$. Il existe donc une coupe strictement inférieure à $|A|$ dans le réseau. Ceci signifie que, à un moment donné, certains avions ne peuvent pas trouver un vol et restent bloqués à l'aéroport. Sur l'exemple de la figure 3.7, supposons que l'avion 1 assure les vols 1 et 3, l'avion 2 assure le vol 2. Tous les vols sont assurés mais l'avion 2 ne peut pas arriver au puits, et reste bloqué à la destination du vol 2.

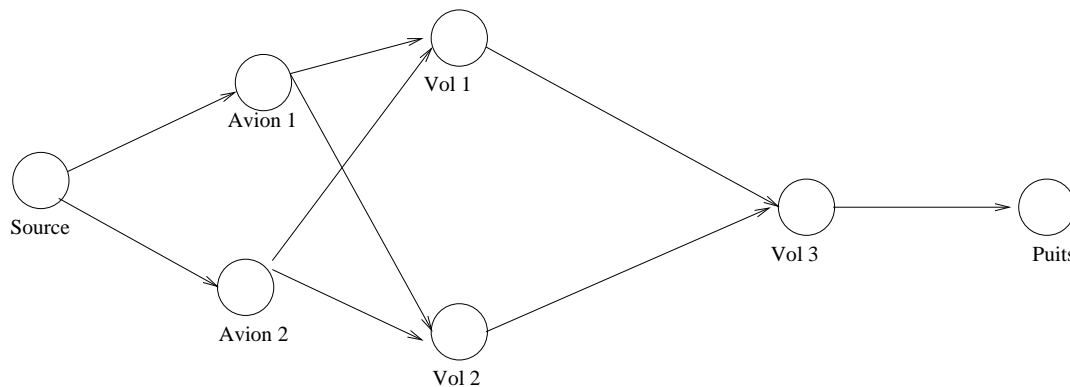


FIG. 3.7 – Valeur de flot maximale inférieure à $|A|$

Dans ce cas il n'existe pas de solution réalisable. Pour empêcher cela, nous pouvons lier tous les sommets au puits, sauf la source (voir la figure 3.8). Remarquons que la coupe minimum du réseau est alors $|A|$. Comme les sommets d'état-avion sont liés à la source et au puits, il existe alors des solutions où certains avions peuvent ne pas voler pendant la période du planning.

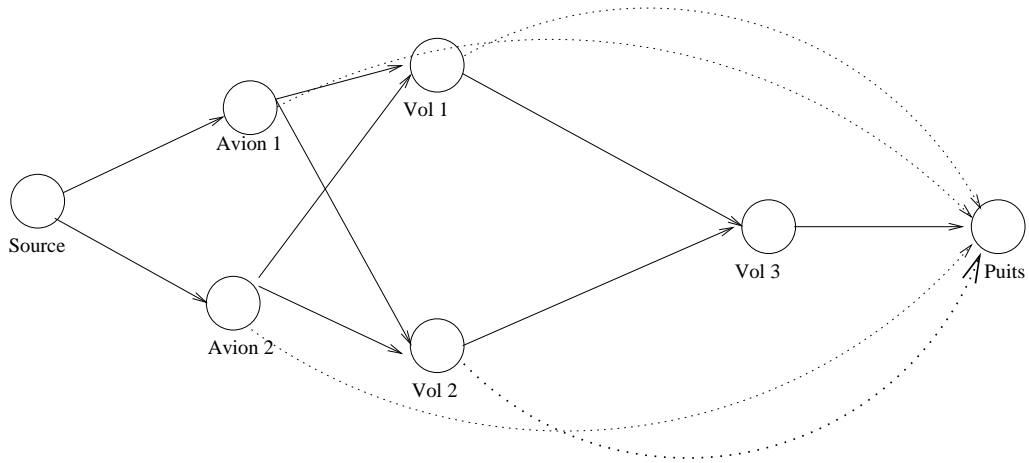


FIG. 3.8 – Valeur de flot maximale égale à $|A|$

Il existe des algorithmes polynômiaux pour résoudre le problème de flot maximum de coût minimum. Le problème de faisabilité de rotation des avions quand il n'y a pas d'avion critique est donc polynômial.

3.3.1.2 Aucun avion non-critique

Dans la section précédente nous avons étudié le cas où tous les avions sont non critiques. Un autre cas intéressant est le problème de faisabilité quand tous les avions de la flotte sont critiques. La difficulté principale est alors d'assurer les vols avec des avions qui ne peuvent fonctionner que jusqu'à une limite. Nous allons prouver que le problème de faisabilité de rotation des avions est NP-difficile au sens fort quand tous les avions sont critiques [AEP06a]. Pour ce faire, nous allons construire une réduction polynômiale depuis le problème de partition numérique à 3 dimensions qui est connu pour être un problème NP-difficile au sens fort [GJ79].

Theorème 3.3.1. *Le problème de la faisabilité de la rotation des avions quand tous les avions sont critiques est NP-complet au sens fort*

Preuve :

Problème de partition numérique à 3 dimensions

Instance : W , X et Y sont 3 ensembles disjoints et $L \in \mathbb{Z}^+$ est une limite. Chaque ensemble contient n éléments. A chaque élément $v \in W \cup X \cup Y$ un poids $d_v \in \mathbb{Z}^+$

est associé tel que $\sum_{v \in W \cup X \cup Y} d_v = nL$.

Question : Est-ce qu'il est possible de partitionner $W \cup X \cup Y$ en n sous-ensembles notés V_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que chaque V_i contient seulement un seul élément de chacun des ensembles W , X et Y et tel que $\sum_{v \in V_i} d_v = L$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$?

Étant donnée une instance du problème de partition numérique à 3 dimensions, nous allons définir une instance du problème de rotation des avions de la façon suivante : chaque élément $v \in W \cup X \cup Y$ est associé à un vol de durée d_v . Nous avons ainsi $3n$ vols à affecter à n avions. Le graphe de connexion est tel que les vols qui sont dans le même groupe sont incompatibles entre eux. C'est-à-dire que le même avion ne peut pas faire deux vols du même groupe. Il n'y a pas de connexions directes entre les vols du groupe W et du groupe Y . Par contre, il y a des connexions entre tous les vols du groupe W et ceux du groupe X , tous les vols du groupe X et ceux du groupe Y (voir la figure 3.9).

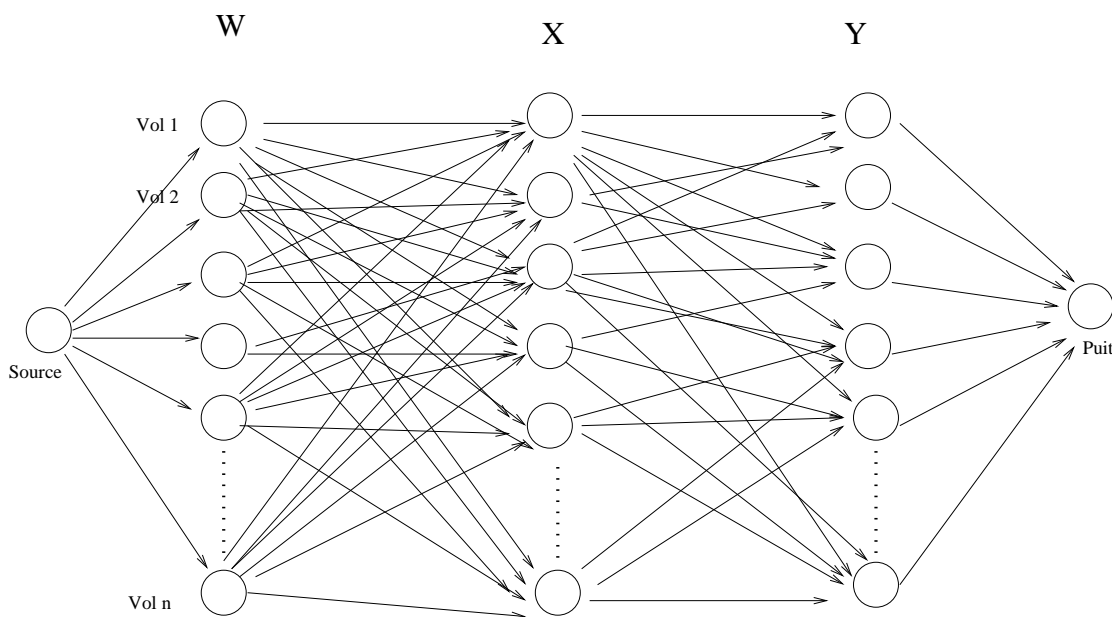


FIG. 3.9 – Instance construite par la réduction

La question que nous nous posons est de décider s'il existe un planning de vol réalisable. La faisabilité est définie comme la satisfaction des conditions suivantes :

- Chaque vol doit être affecté à un et un seul avion ;

- Aucun avion ne viole sa limite de vol : L

Nous allons maintenant établir qu'un tel planning existe si et seulement si une partition numérique à 3 dimensions existe pour l'instance du départ.

\implies Si une telle partition des éléments existe, alors il est évident que nous obtenons un planning réalisable en affectant les vols correspondants aux éléments d'un même sous-ensemble V_i à l'avion i . En effet :

- Tous les vols sont couverts : $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} V_i = W \cup X \cup Y$
- Les avions ne dépassent pas la limite de vol : $\sum_{v \in V_i} d_v = L$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$
- Connexions des vols : Comme chaque V_i a un élément de chacun des groupes W , X et Y , les vols correspondants sont compatibles

\impliedby Réciproquement, supposons que nous ayons un planning de vol réalisable.

Alors :

- Chaque vol est affecté à un avion ;
- Chaque avion vole exactement L unités de temps. En effet le nombre total d'heure de vol à assurer est nL . Chaque avion doit utiliser entièrement son potentiel de vol pour que tous les vols soient assurés. Supposons que l'avion a ne vole pas L unités de temps. Comme c'est un planning réalisable, il ne peut pas dépasser la limite de vol. Donc $\sum_{v \in V_a} d_v < L$. Alors il y a au moins un autre avion a' qui vole plus de L unités de temps parce que tous les vols sont affectés et $\sum_{v \in W \cup X \cup Y} d_v = nL$. Cette contradiction nous montre que, si le planning de vol est réalisable, tous les avions volent exactement L unités de temps : $\sum_{v \in V_i} d_v = L$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Chaque avion assure exactement un seul vol de chaque groupe W , X et Y :
 - Au plus un seul vol par groupe peut être affecté au même avion, puisque les vols au sein d'un même groupe ne sont pas compatibles.
 - Les $3n$ vols étant assurés, chaque avion effectue donc un vol de chaque ensemble.

Donc il est évident que le partage des vols par les avions satisfait les conditions du problème de partition numérique à 3 dimensions. Il est clair que la réduction est

réalisée en temps polynômial et la taille de l'instance construite est polynômiale. Les valeurs numériques apparaissant dans les deux instances étant les mêmes, la transformation est pseudo-polynômiale et donc conserve le sens fort. Ainsi le problème de faisabilité du problème de rotation des avions est au moins aussi difficile que le problème de partition numérique à 3 dimensions, et donc NP-complet au sens fort.

■

3.3.2 Problème d'optimisation

Précédemment nous avons étudié l'existence d'une solution réalisable du problème de la rotation des avions dans certains cas. En revanche ce problème a des critères d'optimisation : la maximisation de l'utilisation des avions critiques et l'équilibrage de charge de vol des avions non-critiques. Cette analyse de complexité nous guide pendant la conception des méthodes de résolution. Nous avons déjà vu que si la flotte ne contient que des avions non-critiques, trouver une solution est polynômial, sans tenir compte de l'équilibrage de charge. Dans cette partie, nous allons étudier la complexité du problème de rotation d'une flotte.

3.3.2.1 Un seul avion critique

Nous pouvons décomposer le problème de la rotation des avions en deux quand il y a un seul avion critique, afin d'étudier sa complexité. Si nous nous focalisons seulement sur l'avion critique, le problème devient la recherche du plus long chemin. L'objectif qui concerne l'avion critique est la maximisation de son utilisation. Le problème de décision associé est : "Est-ce qu'il existe un planning réalisable tel que l'avion critique a vole au moins L_a unités de temps?".

La recherche du plus long chemin sur un graphe quelconque et pondéré est NP-difficile [GJ79]. Par contre, le graphe associé au problème de la rotation est un graphe orienté acyclique. Dans ce cas, le problème devient facile à résoudre [Law76]. Malgré ce fait, la contrainte de la limite de vol sur l'avion critique rend encore le problème difficile. Nous pouvons réduire ce problème au problème de partition qui est connu pour être NP-difficile [GJ79].

Theorème 3.3.2. *Le problème d'optimisation de la rotation des avions avec un seul avion est critique est NP-complet*

Preuve

Problème de partition

Instance : Soit V l'ensemble des éléments v et d_v est la taille de $v \in V$

Question : Est-ce qu'il existe un sous-ensemble V' tel que

$$\sum_{v \in V'} d_v = \sum_{v \in V - V'} d_v \quad (3.26)$$

Étant donné la définition du problème de partition, nous allons donner une instance du problème de rotation des avions avec un seul avion critique de la façon suivante : Soit V l'ensemble des vols v dont la durée est d_v . Ces vols doivent être assurés par deux avions dont un est critique. La limite de vol de l'avion critique a est $L_a = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{2}$. Il y a des arcs de connexion entre chaque couple de vol $v - w$.

La question est la suivante : "Est-ce qu'il existe une rotation d'avions qui permet d'assurer tous les vols telle que la longueur du chemin de l'avion critique est exactement égale à L_a ?"

\implies Si un tel sous-ensemble V' existe, alors il est évident que nous obtenons un planning optimal en affectant les vols correspondants aux éléments d'un même sous-ensemble V' à l'avion critique a . Ce planning est optimal, parce que :

- Tous les vols sont couverts : $V = V' \cup V - V'$
- La longueur du chemin de l'avion critique a est égale à L_a puisque

$$L_a = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{2} = \sum_{v \in V'} d_v = \sum_{v \in V - V'} d_v$$

\impliedby Supposons que nous ayons un planning de vol optimal. Alors :

- Tous les vols sont affectés à un avion : une solution optimale est une solution réalisable, donc dans laquelle tous les vols sont assurés.
- La longueur du chemin affecté à l'avion critique a est égale à L_a ($L_a = \sum_{v \in V'} d_v$).

Comme

$$L_a = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{2} \quad (3.27)$$

et donc

$$\frac{\sum_{v \in V} d_v}{2} = \sum_{v \in V'} d_v \quad (3.28)$$

Finalement nous avons

$$\sum_{v \in V'} d_v = \sum_{v \in V - V'} d_v \quad (3.29)$$

Il est évident que le planning optimal des vols satisfait les conditions du problème de partition. Alors une instance du problème de rotation des avions avec un seul avion critique est aussi difficile que le problème de partition ■.

3.3.2.2 Plusieurs avions critiques

Le problème de rotation des avions avec un seul avion critique est un cas particulier du problème de rotation des avions avec plusieurs avions critiques. Nous venons de voir que ce premier est NP-difficile, ce qui implique que le problème de rotation des avions avec plusieurs avions critiques est aussi NP-difficile.

CHAPITRE 4

ALGORITHMES DE LISTE ET RECUIT SIMULÉ

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le problème de rotation des avions est un problème difficile dans la plupart de cas. Il est alors naturel de proposer des méthodes heuristiques pour obtenir rapidement des solutions, même si elles ne sont pas optimales.

4.1 Approches heuristiques

Nous allons présenter deux approches principales, l'une basée sur la méthode du plus long chemin et l'autre basée sur la méthode du premier atterrissage. L'objectif principal de ces deux approches est de maximiser l'utilisation des avions. Afin d'observer l'état des avions, nous allons regarder l'évolution des potentiels de vol des avions sur plusieurs semaines. Il est évident que le planning des vols dans une compagnie aérienne ne peut pas être fait plusieurs semaines en avance. Le but de l'observation à long terme est d'avoir une meilleure vision de l'évolution de l'état des avions en ne fixant que le planning pour la première semaine. Nous pouvons constater si la politique de maintenance est cohérente avec l'instance ou non.

4.1.1 Heuristiques basées sur la méthode du plus long chemin

Malgré la complexité du problème et la taille des instances, la structure du graphe associé nous fournit une chance très importante. Comme nous avons déjà vu, le graphe de connexions est un graphe orienté acyclique. La recherche du plus long chemin dans un tel graphe est facile : nous connaissons des méthodes polynômiales pour le résoudre. En revanche, un plus long chemin ne suffirait pas à donner une solution réalisable à cause de la limite de vol. Donc, une fois que le plus long chemin c_a^{PL} pour l'avion a est trouvé, il nous faut vérifier la faisabilité de la solution partielle. Si c_a^{PL} n'est pas réalisable, nous devons modifier le chemin pour obtenir un chemin $c_a^{PL'}$ qui ne sera pas *le plus long* mais qui vérifiera la limite de vol de l'avion a . Une

fois un chemin réalisable trouvé, par les techniques de recherche locale (2-OPT) nous essayons d'augmenter de nouveau la durée totale du chemin, sans dépasser la limite de vol. La méthode de (2-OPT) échange un vol v affecté à l'avion a avec un vol w si :

- le vol w peut remplacer le vol v ,
- $d_w \geq d_v$ où d_v et d_w sont les durées des vol v et w ,
- la durée totale du nouveau chemin $c_a^{PL'}$ est toujours réalisable après l'échange de vol v avec le vol w .

Le fait que le chemin $c_a^{PL'}$ soit plus court que la limite de vol L_a de l'avion a ne suffit pas à satisfaire toutes les conditions de la faisabilité. La solution complète doit couvrir tous les vols v par $|A|$ chemins disjoints.

Les avions sont traités un par un : une fois qu'un chemin est affecté, nous passons à l'avion suivant, dans une liste. Pour que les chemins soient disjoints, nous enlevons les sommets du graphe après l'affectation d'un chemin à un avion. Cette liste est composée de deux types d'avions : les critiques et les non-critiques. Les avions critiques sont rangés dans l'ordre croissant du potentiel de vol. Car, l'avion le plus critique est celui qui passe la maintenance le premier jour (*lundi*) et il dispose seulement des vols du premier jour pour consommer son potentiel de vol. Si nous le laissons en dernière position, il risque de ne pas être affecté aux *bons* vols. Par contre, l'avion qui passe la maintenance le dernier jour (*dimanche*) peut améliorer son chemin plus tard, même s'il est en dernière position. Les premiers résultats sont présentés lors d'un congrès de ROADEF ([AEP06b]) et en ([AEP06c]).

Il y a deux types d'avions non-critiques : Les avions qui deviennent non-critiques après la maintenance et les avions qui sont toujours non-critiques pendant la semaine du planning. Suivant le statut d'un avion (critique, non-critique, nouveau non-critique) les sommets de la source et du puits changent. Dans ce chapitre nous utilisons les termes "source" et "puits" comme le début et la fin d'un chemin c_a de l'avion a .

L'algorithme que nous venons de présenter trouve des chemins entre les sommets de la source et du puits pour chaque avion, suivant son statut.

Algorithme 4.1.1 Heuristique basée sur la méthode du plus long chemin

A : La liste des avions
 V : La liste des vols
 c_a : Le chemin de l'avion a
 D_a : La durée totale du chemin c_a
 L_a : La limite de vol de l'avion a
Pour $\forall a \in A$ faire
 Trouver le plus long chemin c_a allant de $Source(a)$ à $Puits(a)$
 Tant que $(D_a > L_a)$ faire
 Trouver le plus long vol v'
 Trouver les remplaçants possibles de v'
 Trier les remplaçants dans l'ordre décroissant de leur durée
 Si $(D_a - d_v + d_{v'} \leq L_a)$ Alors
 | Echanger v' avec le premier vol
 Sinon
 | Passer au vol remplaçant possible suivant
 Fin Si
 Si $(D_a > L_a)$ Alors
 | Remplacer v' avec le plus court remplaçant possible
 Fin Si
 Si (Aucun échange) Alors
 | Supprimer le plus court vol $v \in c_a$
 Fin Si
 Fait
 Pour $\forall v \in c_a$ faire
 Trouver les remplaçants possibles v' de v
 Si $(D'_a \leq L_a$ ET $D'_a > D_a)$ Alors
 | Echanger v avec v'
 Fin Si
 Fin Pour
 Enlever les sommets correspondants aux vols $v \in c_a$
Fin Pour

 TAB. 4.1 – Sommet des sources et des puits des avions de différents statuts

	Critique	Nouveau non-critique	Non-critique
Source	Avion	Maintenance	Avion
Puits	Maintenance	Fin de semaine	Fin de semaine

Le potentiel de vol des *nouveaux* non-critiques est infini puisqu'ils passent la maintenance dans la semaine actuelle. Leur but est de faire le plus de vols possibles, après la maintenance, jusqu'à la fin de la semaine. Ils sont traités dans le même ordre et l'algorithme leurs affecte le plus long chemin.

L'ordre des avions qui sont toujours non-critiques a un rôle crucial. Jusqu'à ce point, nous nous sommes occupés de la maximisation de l'utilisation des avions critiques. L'ordre dans lequel les avions non-critiques sont choisis définira la courbe d'utilisation des avions au cours des semaines. La méthode heuristique que nous venons de proposer sert à maximiser l'utilisation par la méthode du plus long chemin. Ainsi l'équilibrage de charge de vol ne peut pas être observée dans la semaine actuelle mais sur plusieurs semaines.

Ordre aléatoire : Pendant la construction de la liste des avions, nous n'imposons aucune règle. Quand nous regardons sur le long terme, un avion a peut se trouver à la tête d'une liste une semaine, au milieu une autre semaine et finalement à la fin une troisième semaine. Ainsi tous les avions ont la même probabilité d'être servi en premier et de maximiser leur durée de vol sur une semaine. En revanche il n'y a aucune relation entre la position d'un avion dans la liste et son potentiel de vol.

Ordre croissant du potentiel de vol : Nous pouvons également imposer une règle de priorité en fonction du potentiel de vol. Si nous gardons la même priorité que les avions critiques, alors nous ajoutons les avions à la liste dans l'ordre croissant de leur potentiel de vol. Donc un avion avec un potentiel de vol faible passe devant les autres et profite du graphe *plus complet* pour maximiser son utilisation, en faisant toujours attention à sa limite de vol. D'autre part, un avion avec un plus grand potentiel de vol aura un chemin qui n'est pas préféré par les autres avions, donc un chemin plus court. Notons que le nombre de sommets dans le graphe diminue et les avions ont de plus en plus de difficulté pour trouver un *bon chemin* qui maximise leur utilisation. Après la maintenance, la vitesse de la consommation du potentiel de vol d'un avion a va alors augmenter au cours de temps.

Ordre décroissant du potentiel de vol : Nous pouvons aussi trier les avions non-critiques dans l'ordre décroissant de leur potentiel de vol. En suivant le même principe, nous pouvons dire que l'avion *le moins critique* sera prioritaire pour choisir son chemin. Donc il va choisir le chemin le plus long qu'il peut faire et les sommets seront enlevés du graphe. Par conséquent la vitesse de la consommation du potentiel de vol d'un avion diminue au cours des semaines.

4.1.2 Heuristique basée sur le premier atterrissage

Une autre interprétation de la maximisation de l'utilisation peut être la minimisation des temps passés entre les vols. Donc un avion qui vole le plus souvent peut réduire sa perte de potentiel de vol.

Alors nous proposons une méthode basée sur le premier atterrissage. Après avoir réalisé le vol v , l'avion a choisit le vol v' dont l'arrivée est la plus tôt. La méthode ne choisit pas nécessairement le vol dont le départ est au plus tôt. Car les avions dans les premières positions dans la liste sont encouragés à faire souvent des courts vols, tandis que les derniers font des vols plus longs. Comme la liste des avions critiques est préparée dans l'ordre croissant du potentiel de vol, le potentiel de vol des premiers avions est plus faible. Par les vols plus courts et fréquents, ils peuvent construire plus facilement leur chemin. Une fois que le chemin c_a est trouvé pour l'avion a , nous utilisons les mêmes techniques de 2-OPT pour le rendre réalisable s'il ne l'est pas. Après avoir affecté le chemin réalisable à l'avion, nous passons au traitement de l'avion suivant dans la liste. Les avions non-critiques sont rangés dans l'ordre décroissant du potentiel du vol dans la liste.

4.1.3 Couverture des vols

La condition indispensable de la faisabilité du problème de la rotation des avions est la couverture des vols, c'est-à-dire l'affectation de chaque vol à un avion. A cause de l'aspect hiérarchique des méthodes que nous proposons, il n'y a pas forcément de garantie de couverture des vols, donc de faisabilité. Nous pouvons citer deux causes d'infaisabilité :

Algorithme 4.1.2 Heuristique basée sur le premier atterrissage

$\delta^+(v)$: **La liste des successeurs de vol v**
 $Source(a)$: **Le sommet source de l'avion a**
 $Puits(a)$: **Le sommet puits de l'avion a**
 c_a : **Le chemin de l'avion a**
 D_a : **La durée totale du chemin c_a**
 L_a : **La limite de vol de l'avion a**
 Vol $v = Source(a)$
Tant que $(v \neq Puits(a))$ **faire**
 | Ajouter v à c_a
 | Trouver $v' \in \delta^+(v)$ tel que $v'_{arrivée}$ est minimum
 | $v' = v$
Fait

- Le nombre de vols qui se chevauchent est supérieur à $|A|$: Dans la semaine à un moment donné, s'il y a plus de vols à assurer incompatibles entre eux (donc impossible d'affecter deux ou plusieurs vols au même avion) que le nombre d'avions, il est évident qu'il n'y a pas de solution réalisable. Cette anomalie provient de l'étape précédente du planning de vols : l'affectation des flottes. La vérification est facile, il suffit de regarder le flot maximum sur le graphe G' obtenu à partir du graphe G par les règles expliquées dans le chapitre précédent.
- Le nombre de vols qui se chevauchent est supérieur au nombre d'avions disponibles : même si le nombre de vols en chevauchement est inférieur au nombre total d'avions, une partie de la flotte peut être indisponible, à cause de leur faible potentiel de vol. Nous avons déjà vu que, les avions peuvent être obligés d'annuler l'affectation de certains vols, afin de ne pas dépasser la limite de vol. Donc un ou plusieurs avions peuvent être indisponibles pour une partie des vols.

Même si le premier cas est facile à vérifier, le deuxième cas ne l'est pas ; il faut attendre la fin des méthodes heuristiques. Bien entendu, suivant les différentes

méthodes et différentes règles de priorité, ce ne sont pas toujours les mêmes vols qui ne sont pas affectés.

Afin de trouver une solution réalisable qui couvre tous les vols, nous nous permettons de changer les horaires des vols. Pour cela, nous parcourons la liste des avions non-critiques pour trouver l'avion a qui peut *accepter* le vol non affecté w , c'est-à-dire l'avion qui vérifie $d_w \leq L_a - \sum_{v \in c} d_v$ où c est le chemin affecté à l'avion a et d_v est la durée du vol v . Les avions sont triés dans l'ordre décroissant du potentiel de vol dans la liste. Une fois que l'avion a est trouvé, nous cherchons le couple $v - v'$ de vols tel qu'une des connexions $v - w$ et $w - v'$ est possible. Puis nous décalons le vol w jusqu'à ce que les deux connexions deviennent possibles. Si un tel couple de vols n'existe pas, nous passons à un autre avion a'

4.2 Approche méta-heuristique

Pour résoudre les problèmes difficiles comme le problème de rotation des avions, nous pouvons avoir deux stratégies générales différentes : *diviser-et-conquérir* et *amélioration itérative*. La première approche divise le problème en sous problèmes et s'occupe de chacun des sous problèmes indépendamment. Ce type d'approche est efficace si les sous problèmes sont naturellement disjoints. Par exemple, les méthodes heuristiques que nous venons de proposer et qui traitent les avions un par un font partie de ce type d'approche. La résolution du problème de rotation d'un seul avion est beaucoup plus facile que la rotation de toute la flotte.

La deuxième méthode, l'amélioration itérative, démarre la résolution d'un problème à partir d'une solution initiale et à chaque itération la solution est *améliorée*. La méthode s'arrête au moment où aucune autre amélioration n'est possible. L'inconvénient de cette approche est le risque de tomber sur une solution optimale locale. Pour surmonter cet inconvénient, cette méthode peut être lancée plusieurs fois, à partir de différentes solutions.

Nous pouvons citer les approches métaheuristiques dans le cadre de la deuxième stratégie. Généralement toutes les approches métaheuristiques ont un caractère stochastique et elles sont inspirées par des analogies avec la physique, avec la biologie

Algorithme 4.1.3 Décalage des vols pour la faisabilité

ANC : La liste des avions non-critiques

V_{na} : La liste des vols non affectés

c_a : Le chemin de l'avion a

D_a : La durée totale du chemin c_a

L_a : La limite de vol de l'avion a

Affecté : Variable booléenne, vrai si le vol est affecté à un avion, faux sinon

Affecté=faux

B1 : **Pour** Tout vol v dans V_{na} **faire**

 B2 : **Tant que** (Affecté=faux) **faire**

 B3 : **Pour** Tout avion a dans *ANC* **faire**

Si ($D_a + d_v \leq L_a$) **Alors**

 Trouver le couple de vol w_1, w_2 tel que $w_1 \rightarrow v$ **OU**
 $v \rightarrow w_2$

ET

$w_2^{depart} - w_1^{arrive} \geq d_v$

 Décaler le vol v de façon à ce que les deux connexions soient possibles

 Ajouter le vol v à c_a

 Affecté=vrai

 Sortir de la boucle B3

Fin Si

Fin Pour

Fait

Fin Pour

ou encore avec l'éthnologie [DPST03].

4.2.1 Recuit simulé

En exploitant la connexion entre la physique statistique et l'optimisation combinatoire, Kirkpatrick *et al.* [KGV83] ont proposé une méthode métaheuristique : le recuit simulé. Le recuit est un processus de la métallurgie qui consiste à amener le matériau à un état d'énergie stable donc à l'énergie minimale. Pour modifier l'état de l'énergie, le physicien dispose d'un paramètre : la *température*. Pendant le refroidissement du matériau, l'énergie des atomes diminue et une structure de cristal est formée. En revanche, si le refroidissement est trop rapide, au lieu d'avoir une structure de monocristal, avec l'énergie optimale plusieurs structures de cristal sont observées. Donc l'état final ne constitue pas l'optimum global mais un optimum local. Pour éviter l'état optimal local, le matériau est refroidi lentement.

Inspiré par ce processus, la méthode d'optimisation du recuit simulé cherche à minimiser une fonction économique en utilisant la température comme un paramètre de contrôle. Ce paramètre guide le système vers un optimum, en définissant des états accessibles à chaque itération. Par analogie avec le recuit métallurgique, si la température est baissée brutalement, la solution obtenue est un optimum local. Par contre dans le cas inverse, le système est conduit vers la solution optimale si le paramètre du contrôle diminue lentement.

Le recuit simulé a un avantage comparé aux autres métaheuristicues : la convergence. Les mathématiciens comme Aarts et Van Laarhoven [AV85] ou Hajek et Sasaki [HS89] se sont intéressés à la question de la convergence. Le principal résultat de leurs travaux peut être décrit comme : Sous certaines conditions, le recuit simulé converge avec une certaine probabilité vers une solution optimale. Donc il est possible d'obtenir une solution arbitrairement proche de l'optimale avec une probabilité arbitrairement proche de 1 [DPST03].

D'après Kirkpatrick *et al.*, pour appliquer la méthode du recuit simulé nous avons besoin de 4 ingrédients [KGV83] :

- Définition de la configuration du système (une solution initiale)
- Un générateur de mouvements

- Une fonction économique quantitative
- Une règle de refroidissement

Le recuit simulé permet au système de se dégrader afin d'éviter les solutions optimales locales. Une méthode simple de descente s'arrête lorsqu'une solution $S1$ est trouvée après la solution $S0$. En revanche le recuit, avec une probabilité, peut passer à la solution $S2$ pour trouver finalement $S3$ qui est la solution optimale globale (voir la figure 4.1).

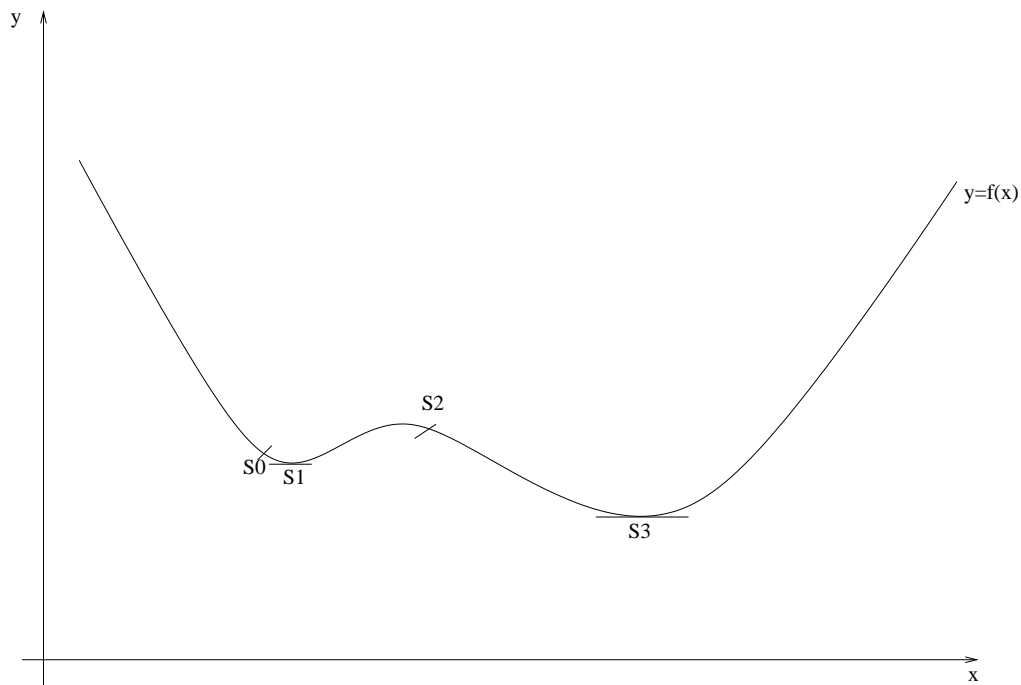


FIG. 4.1 – Illustration en deux dimensions des solutions d'une fonction économique

D'après les résultats de la physique statistique, la probabilité d'être au niveau d'énergie E sous la température T est proportionnelle au facteur de Boltzmann : $e^{\frac{-E}{k_b T}}$ où k_b est le facteur de Boltzmann. Donc l'évolution du système peut suivre le schéma de Metropolis [MRR⁺53] : à partir d'une solution initiale, un mouvement est effectué. Si la nouvelle solution est meilleure que l'ancienne, elle est acceptée. Sinon elle est acceptée avec une probabilité $e^{\frac{-\Delta E}{T}}$ où ΔE est l'augmentation de la fonction objectif. Autrement dit, un nombre réel x_r est choisi au hasard entre 0 et 1 et la nouvelle solution est acceptée si x_r est inférieure ou égale à $e^{\frac{-\Delta E}{T}}$.

Facteur Boltzmann est satisfait $\iff x_r \leq e^{\frac{-\Delta E}{T}}$ où x_r est une variable (4.1)
aléatoire qui suit la loi $U(0, 1)$

Comme chaque solution (ou *configuration*) ne dépend que de la configuration précédente, nous obtenons une chaîne de Markov et si nous continuons jusqu'à l'infini, nous trouverions l'équilibre thermodynamique pour la température donnée. D'autre part, il est évident que, à haute température, la probabilité de l'acceptation d'une solution est beaucoup plus élevée tandis que, à basse température le facteur de Boltzmann tend vers zero.

Donc aux températures relativement élevées, la méthode peut accepter des mouvements dégradant la solution actuelle afin d'éviter les solutions optimales locales. Une fois l'équilibre thermodynamique atteint, la température est diminuée légèrement (la figure 4.2) en multipliant la température par une constante p telle que $p \in [0, 1]$. La méthode continue jusqu'à ce que le système *gèle*.

4.2.2 Modélisation

Nous utilisons la méthode du recuit simulé afin de résoudre le problème de la rotation des avions. Comme nous avons déjà vu, ce problème a deux objectifs : La maximisation de l'utilisation des avions critiques et l'équilibrage de la charge de vol. Nous allons appliquer la méthode du recuit simulé seulement aux avions critiques pour deux raisons :

- L'objectif principal du problème est de minimiser la perte de potentiel de vol.
- La méthode de recuit simulé est coûteuse en terme de temps d'exécution par rapport aux méthodes heuristiques que nous avons proposées

Une fois que le recuit se termine, le reste de l'affectation sera fait par l'approche heuristique basée sur le plus long chemin. Dans la suite nous allons présenter les 4 ingrédients du recuit simulé définis par Kirkpatrick *et al.*([KGV83]).

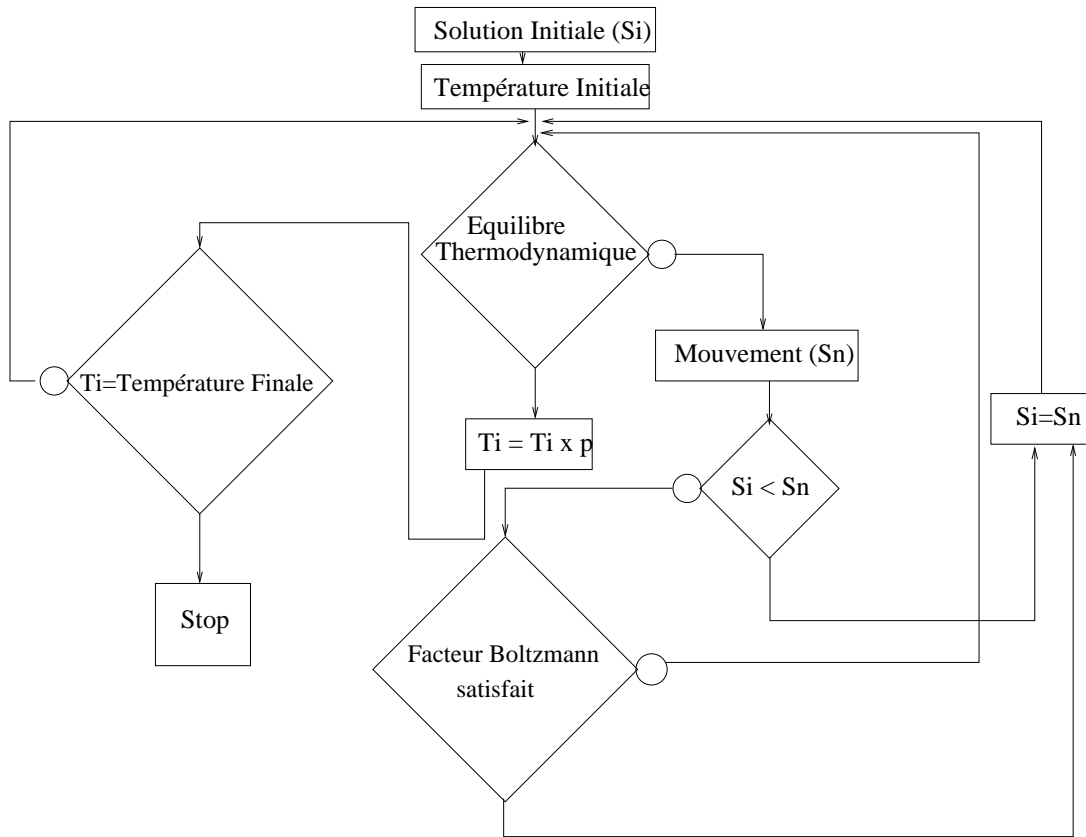


FIG. 4.2 – Algorithme général du recuit simulé

4.2.2.1 Représentation des solutions

La solution (*configuration*) initiale est, en fait, une solution partielle, puisque nous ne nous occupons que des avions critiques. Donc la solution initiale est composée de $|AC|$ suites de vols où AC est l'ensemble des avions critiques et $|AC|$ est la cardinalité de AC donc le nombre d'avions critiques.

Un exemple de solution partielle pour 9 avions critiques figure au tableau 4.2. Par définition, un avion est critique jusqu'à une intervention de maintenance. Donc pour chaque avion, nous avons une suite de vols et une intervention de maintenance. Il faut noter que pour chaque avion critique a , une tâche de maintenance m_a est pré-définie.

La solution initiale n'est pas trouvée aléatoirement mais par la méthode heuristique 4.1.1 que nous avons proposée. Rappelons que cette méthode traite séquen-

tiellement les avions afin de trouver un chemin sommet disjoint pour chacun.

TAB. 4.2 – Solution partielle initiale

Avion	Avion	Avion	Avion	Avion	Avion	Avion	Avion	Avion
2833	2834	2835	2836	2837	2838	2839	2840	2841
1772	1773	1988	2193	2206	2118	2744	2808	2562
1823	1827	1842	2407	2395	2391	2807	2659	2797
1363	1366	1505	1645	1723	1760	2060	2172	2313
1466	1523	1389	1689	1661	1662	2022	2166	2300
912	913	840	1991	1450	1558	2224	1649	1714
823	833	834	1512	1398	1527	1771	2007	1659
513	515	519	1390	866	890	1885	1785	1455
412	626	768	856	838	832	1559	1560	1517
100	57	114	837	777	769	1415	1472	894
364	20	389	700	736	756	891	893	815
169	369	274	674	3	90	835	817	802
2854	174	2856	60	129	142	701	638	670
	2855		371	368	367	758	553	68
			207	283	286	94	115	112
			2857	2858	2859	144	203	213
						204	214	289
						288	2861	2862
						2860		

4.2.2.2 Exploration des solutions voisines

A partir d'une solution initiale, les mouvements vont permettre de visiter les solutions voisines. Nous allons utiliser la mutation d'échange comme générateur de mouvement. Un vol w sur un avion a sera choisi aléatoirement et nous allons trouver l'ensemble R_w des vols w' qui peuvent remplacer w sur a . L'ensemble R_w contient les vols non-affectés. Donc dans cette approche, un échange avec un vol déjà affecté à un autre avion, est impossible. Encore une fois, un vol $w' \in R_w$ est choisi aléatoirement

et il est échangé avec w . C'est-à-dire w ne sera plus affecté et sera remplacé par w' sur l'avion a . Après cet échange, si l'avion a dépasse la limite de vol, la solution sera acceptée mais avec un coût de pénalité majoré. Une fois l'échange réalisé, la nouvelle solution est évaluée.

4.2.2.3 Fonction économique

Les approches heuristiques que nous avons déjà proposées traitent et évaluent les avions d'une manière séquentielle. En revanche, le recuit simulé tient compte de tous les avions critiques à chaque itération. Ce fait nous fournit une vue globale sur la solution. La fonction économique s'écrit :

$$F_{eco} = \min \sum_{a \in AC} (L_a - \sum_{v \in c_a} d_v) \quad (4.2)$$

où L_a est la limite de vol, c_a est le chemin affecté à l'avion a et d_v est la durée du vol v . Comme nous l'avons déjà dit, si la solution n'est pas réalisable, un coût de pénalité M est ajouté à la fonction économique. Donc la fonction économique devient :

$$F_{eco} = \min \sum_{a \in AC} (L_a - \sum_{v \in c_a} d_v + \gamma_a M) \quad (4.3)$$

où γ_a prend la valeur 1 si la longueur du chemin de l'avion a dépasse la limite de vol, 0 sinon.

4.2.2.4 Refroidissement et équilibre thermique

L'un des plus grands inconvénients des méthodes métaheuristiques est de trouver les *bonnes* valeurs pour les paramètres comme la température initiale T_0 . Souvent le choix des paramètres est un compromis entre le temps d'exécution et la qualité de la solution finale. Suite à de nombreux tests, nous avons défini la température initiale de telle sorte que la probabilité d'acceptation d'une solution qui dégrade la solution initiale de 60, ne dépasse pas 70%. Comme la fonction économique est la somme des pertes de potentiel des avions critiques, la dégradation de 60 est en fait, une perte de 60 minutes de perte de potentiel. Chaque fois que l'équilibre thermodynamique

est atteint, la température est diminuée en la multipliant par un facteur constant entre 0 et 1.

L'équilibre thermique est atteint à l'étape $k \implies T_{k+1} = T_k \times p$ où $p \in [0, 1]$ (4.4)

Il y a plusieurs manières pour définir l'équilibre thermique :

- Un nombre maximal d'itérations à la température T_k
- Un nombre maximal d'itérations sans amélioration à la température T_k
- Une durée maximale à la température T_k
- Une durée maximale sans amélioration à la température T_k

Nous avons adopté la stratégie de la durée maximale à une température T_k afin de borner la durée totale nécessaire pour l'exécution du recuit simulé. Cette méthode a été proposée au congrès de ROADEF ([AEP07b]) et les résultats de comparaison avec les méthodes de liste sont présentés en [AEP07a].

CHAPITRE 5

APPROCHE PAR GÉNÉRATION DE COLONNES

Dans ce chapitre nous allons présenter une approche basée sur la décomposition Dantzig-Wolfe. L'idée de raisonner en termes de colonnes de Dantzig et Wolfe [DW60] a été utilisée par Gilmore et Gomory [GG61] pour résoudre le problème de découpe de rouleaux (*cutting-stock*). Cette décomposition permet de résoudre les programmes linéaires en nombres entiers de grande taille. La méthode consiste à reformuler le problème en un programme linéaire qui possède un nombre exponentiel de variables. Nous avons déjà vu que le modèle linéaire du problème de rotation des avions a un nombre considérable de variables et qu'il est pratiquement impossible de résoudre ce modèle jusqu'à l'optimalité en un temps raisonnable. Pour cette raison, nous utilisons la technique de génération de colonnes. Grâce à cette technique, nous pouvons résoudre le problème dans un espace réduit de solutions et rajouter les colonnes au fur et mesure si elles ont un coût réduit négatif.

5.1 Introduction à la décomposition de Dantzig Wolfe

La décomposition de Dantzig-Wolfe est un moyen de séparer le problème en composants indépendants. Ayant des structures particulières, ces composants peuvent être faciles à résoudre. Nous pouvons imaginer une grande entreprise avec plusieurs départements. Chaque département a des contraintes différentes et des objectifs différents et il doit préparer un planning optimal pour son objectif. Un *maître* récupère les plannings proposés et essaie de les combiner. Le modèle maître donne des prix aux contraintes de liaison et ces prix sont transmis aux départements. Le processus se répète avec les nouveaux prix pour voir si un des départements peut améliorer son planning et s'arrête quand aucune amélioration n'est possible.

Le principe de la décomposition de Dantzig Wolfe (de la génération de colonnes) est basé sur la génération dynamique des ensembles de solutions [VS06]. Grâce à la décomposition, nous avons à résoudre plusieurs sous-problèmes de relativement

petite taille au lieu de résoudre le problème initial dont la taille et la complexité sont supérieures. Considerons le modèle de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) suivant :

$$Z_{PLNE} = \min \sum_{k=1}^K c^k x_k \quad (5.1)$$

sachant que

$$\sum_{k=1}^K A^k x_k = b \quad (5.2)$$

$$x_k \in X^k \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.3)$$

Où $X^k = \{x_k \in \mathbb{Z}_+^{n_k} : D^k x_k \leq d_k\}$ pour $k = 1, \dots, K$. Nous supposons que chaque ensemble X^k est un ensemble fini (mais potentiellement grand) de points $\{x_k^t\}_{t \in T_k}$. Donc tout $x_k \in X^k$ peut être écrit comme une combinaison convexe des points de X^k :

$$x_k = \sum_{t \in T_k} x_k^t \lambda_k^t \quad (5.4)$$

avec

$$\sum_{t \in T_k} \lambda_k^t = 1 \text{ et } \lambda_k^t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T_k \quad (5.5)$$

En remplaçant x_k dans le programme (PLNE), nous obtenons la formulation suivante du problème maître (MPLNE) :

$$Z_{MPLNE} = \min \sum_{k=1}^K \sum_{t \in T_k} c^k x_k^t \lambda_k^t \quad (5.6)$$

sachant que

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t \in T_k} A^k x_k^t \lambda_k^t = b \quad (5.7)$$

$$\sum_{t \in T_k} \lambda_k^t = 1 \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.8)$$

$$\lambda_k^t \in \{0, 1\} \quad k \in \{1, \dots, K\} \text{ et } t \in T_k \quad (5.9)$$

La relaxation linéaire du problème maître donne le (MPL)

$$Z_{MPL} = \min \sum_{k=1}^K \sum_{t \in T_k} c^k x_k^t \lambda_k^t \quad (5.10)$$

sachant que

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t \in T_k} A^k x_k^t \lambda_k^t = b \quad (5.11)$$

$$\sum_{t \in T_k} \lambda_k^t = 1 \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.12)$$

$$\lambda_k^t \geq 0 \quad k \in \{1, \dots, K\} \text{ et } t \in T_k \quad (5.13)$$

Pour chaque contrainte du problème maître, il y a une variable duale associée. Dans la suite nous allons utiliser π pour le premier groupe de contraintes 5.11 et μ_k pour le deuxième groupe de contraintes 5.12. Avec cette formulation nous pouvons voir que pour un k donné, il y a $|T_k|$ variables. Le nombre de variables peut être exponentiel par rapport au nombre des variables dans la formulation initiale. De ce fait, la restriction du problème maître (RMPL) est résolue sur un sous ensemble de variables (*colonnes*) T'_k où $T'_k \subseteq T_k$. L'ensemble T'_k doit avoir au moins une colonne pour chaque k et ces colonnes sont telles que le problème (RMPL) possède au moins une solution réalisable. Le modèle (RMPL) s'écrit de façon suivante :

$$Z = \min \sum_{k=1}^K \sum_{t \in T'_k} c^k x_k^t \lambda_k^t \quad (5.14)$$

sachant que

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t \in T'_k} A^k x_k^t \lambda_k^t = b \quad \longrightarrow \quad \pi \quad (5.15)$$

$$\sum_{t \in T'_k} \lambda_k^t = 1 \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad \longrightarrow \quad \mu_k \quad (5.16)$$

$$\lambda_k^t \in [0, 1] \quad k \in \{1, \dots, K\} \text{ et } t \in T'_k \quad (5.17)$$

Soit $\bar{\Lambda}$ une solution réalisable du modèle (RMPL). Il est évident que cette solution est une solution réalisable pour le modèle (MPL) et $Z_{RMPL}^* \geq Z_{MPL}^*$ car

$\bar{\Lambda} \in T'_k \subseteq T_k$ où T_k est l'ensemble des variables du problème maître (MPL). Une fois le problème maître restreint (RMPL) résolu, nous obtenons une solution optimale λ^* et la solution optimale duale associée (π^*, μ^*) . Il nous reste à vérifier que λ^* est la solution optimale du problème maître (MPL). Pour cela nous devons tester si (π^*, μ^*) est une solution réalisable du problème dual de (MPL). C'est-à-dire si le coût réduit de chaque $x_k^t \in X^k$ est positif ou nul. Ce coût réduit est :

$$\tilde{C}_k^t(\pi, \mu_k) = c_k x_k^t - \pi^* A^k x_k^t - \mu_k^* \quad (5.18)$$

Où encore :

$$\tilde{C}_k^t(\pi, \mu_k) = (c_k - \pi^* A^k) x_k^t - \mu_k^* \quad (5.19)$$

Au lieu de calculer le coût réduit de toutes les colonnes, en fait, nous résoudrons un autre problème d'optimisation que nous appelons *sous-problème* ou le *problème esclave* qui trouve le plus petit coût réduit.

$$Z_{esclave} = \min_k Z_{esclave}^k \quad (5.20)$$

où

$$Z_{esclave}^k = \min_{t \in T_k} (c_k - \pi^* A^k) x_k^t - \mu_k^* \quad (5.21)$$

où encore

$$Z_{esclave}^k = \min_{x_k \in X^k} (c_k - \pi^* A^k) x_k - \mu_k^* \quad (5.22)$$

Dans le cas où la solution optimale x_k^* du problème esclave a une valeur négative, il faut l'ajouter au (RMPL) et le résoudre encore une fois. Après avoir résolu (RMPL) de nouveau, les valeurs (π^*, μ_k^*) des variables duales (π, μ_k) auront changé. Ces étapes se succèdent jusqu'au moment où toutes les colonnes ont un coût réduit positif ou nul. Alors, aucune colonne ne peut améliorer la solution existante, elle est donc optimale (algorithme 5.1.1).

Algorithme 5.1.1 L'algorithme de génération de colonnes

Trouver une solution initiale

Répéter

 | Résoudre (RMPL)

 | Récupérer les valeurs des variables duales optimales

 | Résoudre le problème esclave

 | Ajouter la colonne à (RMPL)

jusqu'à ce que (Toutes les colonnes ont un coût réduit positif ou nul)

5.2 Modélisation du problème

Nous avons déjà proposé un modèle linéaire en nombres entiers pour le problème de rotation des avions. Dans cette section, nous allons changer légèrement ce modèle et proposer une fonction objectif quadratique. La fonction objectif (5.23) n'est pas pondérée par les coefficients α et β . Ce modèle, comme le précédent, va affecter un chemin à chaque avion. Ces chemins relient la source s au puits t . Le chemin de l'avion critique a doit passer par la maintenance m_a et ce chemin ne doit pas dépasser une certaine limite de vol L_a .

Dans le modèle proposé, ε a été remplacé par une composante quadratique qui minimise la somme des carrées de la différence entre la charge de vol idéale et la charge de vol réelle de l'avion a . Nous avons choisi de diviser le composant quadratique par M_h^2 afin d'avoir un ordre de grandeur de 1. Ainsi, quand un avion non-critique ne vole pas du tout pendant la période de planning, son coût ne dépasse pas 1. Les autres contraintes restent inchangées. Nous voyons que le nombre de variables en nombres entiers est de l'ordre de $|A||V|^2$ et le modèle n'est plus linéaire. Dans la suite, nous allons reformuler ce modèle et nous allons raisonner en termes de chemins, au lieu des connexions de $v-w$ et la décomposition nous fournira un modèle linéaire. Ainsi, le problème maître restreint ne contiendra pas tous les chemins possibles mais un sous-ensemble, qui va s'agrandir au fur et à mesure.

$$\min \sum_{a \in AC} (L_a - T_a^{ut}) + \sum_{a \in AC} \frac{(M_a - T_a^{am})^2}{M_h^2} + \sum_{a \in A-AC} \frac{(M_a - T_a^{ut})^2}{M_h^2} \quad (5.23)$$

sachant que

$$\sum_{w \in \delta^-(m_a)} x_{w,m_a,a} = 1 \quad \forall a \in AC \quad (5.24)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(m_a)} x_{m_a,w,a} = 1 \quad \forall a \in AC \quad (5.25)$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} = 1 \quad \forall v \in V \quad (5.26)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} - \sum_{w \in \delta^-(v)} x_{w,v,a} = 0 \quad \forall v \in V \quad \forall a \in A \quad (5.27)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(s)} x_{s,w,a} = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.28)$$

$$\sum_{w \in \delta^-(t)} x_{w,t,a} = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.29)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{ut} \quad \forall a \in A - AC \quad (5.30)$$

$$\sum_{w \in \text{prec}(m_a)} \sum_{v \in \delta^-(w)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{ut} \quad \forall a \in AC \quad (5.31)$$

$$\sum_{v \in \text{succed}(m_a)} \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} \cdot d_v = T_a^{am} \quad \forall a \in AC \quad (5.32)$$

$$T_a^{ut} \leq L_a \quad \forall a \in AC \quad (5.33)$$

$$x_{v,w,a} \in \{0, 1\} \quad \forall v, w \in N \quad \forall a \in A \quad (5.34)$$

5.3 Décomposition du problème

Comme nous l'avons déjà vu, la réalisabilité du problème de rotation est soumise à deux contraintes :

- La longueur du chemin d'un avion critique ne peut pas dépasser sa limite de vol
- Tout vol doit être affecté à un et un seul avion

Nous décomposons le problème de la rotation des avions de la façon suivante : le problème esclave génère des chemins pour les avions en respectant la première

condition de la réalisabilité qui est la limite de vol de l'avion ([ABEP07]). Le problème maître affecte les chemins aux avions et assure que tous les vols sont couverts. Après la reformulation des variables, la nouvelle variable de décision n'est plus l'affectation des vols aux avions mais l'affectation des chemins complets.

5.3.1 Problème maître

Pour reformuler le modèle mathématique, nous allons définir x_a comme un vecteur indicateur de chemin où les variables x_a^v prennent la valeur 1 si le vol v est sur le chemin de l'avion a . Soit X^a l'ensemble des vecteurs indicateurs de chemins réalisables pour l'avion a .

$x_a \in X^a \forall a \in A$ si et seulement si les contraintes suivantes sont vérifiées :

$$x_a^v = \sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} \quad \forall v \in V \quad (5.35)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} - \sum_{w \in \delta^-(v)} x_{w,v,a} = 1 \quad v = source(a) \quad (5.36)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} - \sum_{w \in \delta^-(v)} x_{w,v,a} = -1 \quad v = puits(a) \quad (5.37)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} x_{v,w,a} - \sum_{w \in \delta^-(v)} x_{w,v,a} = 0 \quad \forall v \in N - \{source(a), puits(a)\} \quad (5.38)$$

$$\sum_{v \in V} d_v x_a^v \leq L_a \quad (5.39)$$

Nous définissons une source et un puits pour chaque avion suivant l'état de l'avion. Nous avons déjà vu que les sommets qui représentent les avions ont été ajoutés au graphe de connexions. Ces sommets sont les sources des avions critiques et non-critiques. En revanche, les sommets de maintenance sont les sources (les points de départ) pour les avions critiques après leur maintenance, c'est-à-dire ce que nous appelons les "nouveaux non critiques". Les mêmes sommets de maintenance sont des puits des avions critiques. Un avion critique a donc, un chemin qui passe par le sommet de maintenance et la partie avant la maintenance doit satisfaire la contrainte de limite de vol. Le puits des avions non-critiques et des avions critiques après la maintenance est la fin de la semaine de planning.

Alors si x_a est un élément de X^a , il correspond à un chemin réalisable. Nous pouvons écrire x_a comme une combinaison convexe de tous les vecteurs indicateurs des chemins réalisables pour l'avion a

$$x_a \in X^a \iff x_a = \sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a x_a^c \quad (5.40)$$

où

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = 1 \quad (5.41)$$

et

$$\lambda_c^a \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C(a) \quad (5.42)$$

$C(a)$ est défini comme l'ensemble des chemins réalisables pour l'avion a . Maintenant nous pouvons donner la programmation linéaire du problème maître :

$$Z_{PM} = \min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a)} \text{cout}(c, a) \lambda_c^a \quad (5.43)$$

sachant que

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.44)$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a) | v \in c} \lambda_c^a = 1 \quad \forall v \in V \quad (5.45)$$

$$\lambda_c^a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A \text{ et } \forall c \in C(a) \quad (5.46)$$

Le problème maître doit assurer la couverture de tous les vols par les avions et minimiser la somme des $\text{cout}(c, a)$ (5.43) où $\text{cout}(c, a)$ est le coût d'affectation du chemin c à l'avion a .

Si nous essayons de résoudre le problème maître, le nombre de variables est :

$$\text{Num}_{Var} = \sum_{a \in A} |C(a)| \quad (5.47)$$

et le nombre de contraintes est :

$$\text{Num}_{Contrainte} = |A| + |V| \quad (5.48)$$

Notons qu'il y a un nombre exponentiel de chemins réalisables. Pour cette raison, la résolution du problème en une durée raisonnable est pratiquement impossible. Nous relâchons donc la contrainte d'intégralité (5.46) et les variables λ_c^a deviennent des variables réelles positives (5.52). Cependant, le nombre des variables (5.47) rend la résolution de cette relaxation linéaire irréalisable en pratique. Nous réduisons donc l'ensemble des variables à $\{\lambda_c^a \mid c \in C'(a)\}$ où $C'(a) \subseteq C(a)$

5.3.2 Problème maître restreint

Le problème restreint sera résolu sur un sous ensemble $C'(a) \subseteq C(a)$ qui est l'ensemble de chemins qui sont compatibles avec l'avion a .

$$Z_{PMR} = \min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C'(a)} \text{cout}(c, a) \lambda_c^a \quad (5.49)$$

sachant que

$$u_a \longrightarrow \sum_{c \in C'(a)} \lambda_c^a = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.50)$$

$$u_v \longrightarrow \sum_{a \in A} \sum_{c \in C'(a) \mid v \in c} \lambda_c^a = 1 \quad \forall v \in V \quad (5.51)$$

$$\lambda_c^a \geq 0 \quad \forall a \in A \text{ et } \forall c \in C'(a) \quad (5.52)$$

Le premier groupe de contraintes (5.50) affecte un chemin à un avion et le deuxième groupe (5.51) assure la couverture des vols. Pour chaque vol v , le chemin c qui le contient, doit être affecté à un avion. Les variables λ_c^a sont des variables binaires d'affectation pour tout $a \in A$ et $c \in C'(a)$.

Nous pouvons réduire le nombre de contraintes pour simplifier le problème maître en identifiant les avions identiques. En effet, les avions qui deviennent non-critiques le même jour sont identiques. Car ils n'ont plus de limite de vol (*potentiel de vol infini*) et ils ont le même ensemble de chemins réalisables. En pratique, ils ont une limite de vol mais cette limite est admise infinie, puisque le plus long chemin dans une semaine est négligeable par rapport à 500 heures.

En effet, un avion critique pour lequel une intervention de maintenance est fixée au jour j devient non-critique à partir du jour $j + 1$. Les avions qui n'ont pas leur

maintenance dans la semaine courante sont considérés comme non-critiques pendant toute la semaine avec un potentiel de vol infini. Donc ils sont identiques.

Ainsi nous définissons le paramètre nb_a comme étant le nombre d'avions qui sont identiques à l'avion a et la contrainte (5.50) devient :

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = nb_a \quad \forall a \in A \quad (5.53)$$

Finalement nous associons la variable duale u_a à la contrainte (5.50) et la variable duale u_v à la contrainte (5.51). Dans la suite, nous allons donner le problème dual associé au problème maître restreint.

5.3.3 Problème dual

Nous savons déjà que le problème maître restreint est résolu à l'optimal si et seulement si la solution (u_v^*, u_a^*) du problème dual est réalisable. De ce fait nous sommes amenés à étudier le problème dual. Le problème dual est écrit de la façon suivante :

$$\omega_{Dual} = \max \left(\sum_{a \in A} u_a + \sum_{v \in V} u_v \right) \quad (5.54)$$

sachant que

$$u_a + \sum_{v \in c} u_v \leq \text{cout}(c, a) \quad \forall a \in A \quad \forall c \in C(a) \quad (5.55)$$

$$u_v, u_a \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \text{ et } \forall v \in V \quad (5.56)$$

Pour que la solution (λ^*) du problème primal soit optimale, il faut que la solution duale (u_v^*, u_a^*) qui lui est associée soit réalisable. Donc dans une solution optimale tous les chemins doivent vérifier l'inégalité (5.57).

$$\bar{\text{cout}}(c, a) = \text{cout}(c, a) - \sum_{v \in c} u_v^* - u_a^* \geq 0 \quad \forall c \in C(a) \quad \forall a \in A \quad (5.57)$$

Nous appelons $\bar{\text{cout}}(c, a)$ le coût réduit de la colonne concernée. Il est préférable

de vérifier la positivité du coût réduit minimum, au lieu de les vérifier tous.

$$\begin{aligned} \min_{a \in A, c \in C(a)} \bar{c}out(c, a) \geq 0 &\iff (u_a^*, u_v^*) \text{ est réalisable pour le problème dual} \\ &\iff \lambda^* \text{ est optimale pour le problème maître} \quad (5.58) \end{aligned}$$

Autrement dit, si le coût réduit minimum est strictement négatif, alors le problème primal n'est pas encore résolu à l'optimal et il existe des colonnes candidates à entrer dans la base du problème primal que nous devons ajouter.

5.3.4 Sous-problème

Le sous-problème, ou problème esclave a pour but de fournir des colonnes candidates à entrer dans la base du problème maître ou de prouver qu'une telle colonne n'existe pas. Nous sommes libres de choisir le critère permettant de déterminer quelle colonne sera sélectionnée parmi les colonnes candidates. La règle classique de Dantzig est de choisir la colonne dont le coût réduit est le plus négatif. Cependant, n'importe quelle colonne dont le coût réduit est négatif peut être rajoutée au problème maître. Ainsi nous ne sommes pas obligés de résoudre le sous-problème à l'optimalité. Le sous-problème peut être résolu par une approche heuristique ou encore par une relaxation [DDS92].

Nous avons déjà noté que le coût réduit d'un chemin $c \in C(a)$ d'un avion a est calculé de la façon suivante :

$$\bar{c}out(c, a) = cout(c, a) - \sum_{v \in V} u_v x_v^c - u_a \quad (5.59)$$

$$= cout(c, a) - \sum_{v \in c} u_v - u_a \quad (5.60)$$

Par contre le coût d'affectation $cout(c, a)$ d'un chemin c à un avion a est calculé différemment suivant l'état de l'avion : critique ou non-critique. L'objectif concernant les avions critiques est de minimiser le temps de vol légal restant, donc le potentiel de vol non utilisé. Ce coût d'affectation du chemin $c \in C(a)$ à un avion critique a

est défini par :

$$cout(c, a) = L_a - \sum_{v \in V} x_v^c d_v \quad (5.61)$$

$$= L_a - \sum_{v \in c} d_v \quad (5.62)$$

où L_a est la limite de vol de l'avion a et d_v est la durée du vol v .

Le deuxième but du problème de rotation des avions est d'équilibrer la charge des avions non-critiques. Si l'avion a est non critique pendant k jours, alors le coût d'affecter le chemin $c \in C(a)$ à l'avion a est :

$$cout(c, a) = \frac{(M_k - \sum_{v \in V} x_v^c d_v)^2}{M_h^2} \quad (5.63)$$

$$= \frac{(M_k - \sum_{v \in c} d_v)^2}{M_h^2} \quad (5.64)$$

où M_h est la charge de vol souhaitée par semaine et M_k le charge de vol souhaitée pour k jours. Si l'avion a passe la maintenance le jour j_{7-k} , alors il est non-critique pendant k jours. Donc

$$M_h = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{|A|} \quad (5.65)$$

et

$$M_k = \frac{M_h}{7} \times k \quad (5.66)$$

D'après l'équation (5.63), nous pouvons voir que la fonction de coût des avions non critiques n'est pas linéaire mais quadratique en fonction de x_v^c . Par contre, grâce à la décomposition Dantzig-Wolfe, $cout(c, a)$ est le coût d'une colonne, donc il est le coefficient de la variable λ_c^a dans la fonction objectif.

Nous pouvons constater que le coût ne dépend que de la distance parcourue

d'une source donnée. Donc nous pouvons exprimer la fonction du coût comme :

$$\text{cout}(c, a) = g_a(D) \quad \text{avec} \quad D = \sum_{v \in c} d_v \quad (5.67)$$

où g_a est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et elle ne dépend que de la distance parcourue.

Pendant la résolution d'un problème difficile par la génération de colonnes, les phases de résolution du problème maître et du sous-problème se succèdent itérativement. La sortie d'une phase est l'entrée de l'autre : le problème maître choisit une combinaison réalisable parmi les colonnes existantes et donne les valeurs des variables duales. Le sous-problème, en exploitant les variables duales, fournit au problème maître les colonnes candidates, pour l'itération suivante (figure 5.1).

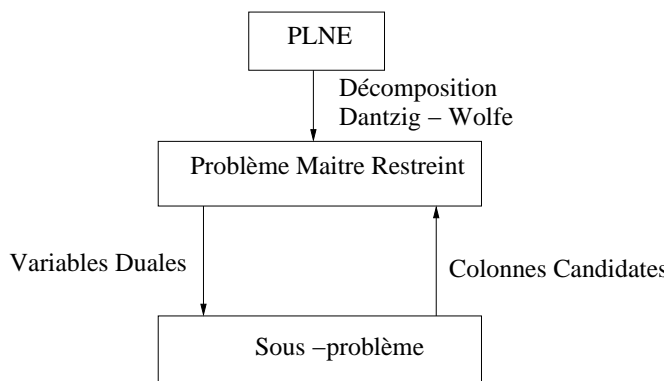


FIG. 5.1 – Flot de l'information pendant la génération de colonnes

5.4 Génération de colonnes

Dans la section précédente, nous avons vu la décomposition du problème entre le problème maître et le sous-problème (ou *le problème esclave*). Le sous-problème de la décomposition peut être résumé comme la recherche d'un chemin (*suite des vols*) pour un avion. La formule du coût réduit peut nous donner l'impression que la solution optimale du sous problème, donc le chemin avec un coût réduit le plus

négatif, est celui qui a $\sum_{v \in c} (d_v + u_v)$ maximal. Car

$$\bar{c}out(c, a) = L_a - \sum_{v \in c} d_v - \sum_{v \in c} u_v - u_a \quad \forall a \in AC \quad (5.68)$$

Nous en déduirions que résoudre le sous-problème pour les avions critiques consiste à trouver le coût réduit le plus négatif ($\min_{a \in A} \min_{c \in C(a)} \bar{c}out(c, a)$) qui pourrait être équivalent à :

$$\max_c \sum_{v \in c} (d_v + u_v) \quad (5.69)$$

C'est un problème du plus long chemin sur un graphe pondéré par $d_v + u_v$, orienté et acyclique, et il est connu pour être polynomial [GJ79]. Par contre, nous ne pouvons pas réduire aussi facilement le sous-problème à une recherche du plus long chemin sur un graphe orienté acyclique car la contrainte de la limite de vol L_a des avions critiques rend le problème *difficile*. Le sous-problème est un problème du plus long chemin sous la contrainte de ressource qui est NP-complet. Le raisonnement pour les avions non-critiques est similaire, puisque le chemin cherché n'est pas le plus long mais *le plus équilibré*.

Pour la résolution du sous-problème nous pouvons considérer plusieurs approches. Nous allons en proposer deux : la première approche est la programmation dynamique, qui résout le sous-problème par avion. La deuxième approche est une méthode heuristique qui considère la totalité de la flotte.

5.4.1 Programmation dynamique

Dans cette partie, nous allons proposer un modèle de programmation dynamique afin de résoudre le sous-problème à l'optimal. Pour faciliter la notation, nous prenons L_a comme la limite de vol pour tous les avions sachant que pour les avions non-critiques cette valeur est infinie.

Theorème 5.4.1. *Pour un avion a donné, le sous-problème (problème esclave) peut*

être résolu à l'optimal par l'algorithme de programmation dynamique suivant

$$\min_{D_a} (g_a(D) - u_a - f(\text{Puits}(a), D)) \quad (5.70)$$

avec $f(v, D)$ la longueur du plus long chemin entre $\text{Source}(a)$ et le sommet v en termes de variables duales u_v .

Preuve

Pour minimiser le coût réduit nous avons à résoudre :

$$\min_{c \in C(a)} \bar{\text{cout}}(c, a) = \min_{D \leq L_a; c \in C(a) | \sum_{v \in c} d_v = D} g_a(D) - \sum_{v \in c} u_v - u_a \quad (5.71)$$

$$= \min_{D \leq L_a} [g_a(D) - u_a - \max_{c \in C(a) | \sum_{v \in c} d_v = D} \sum_{v \in c} u_v] \quad (5.72)$$

Or

$$c \in C(a) \iff c \text{ est un chemin allant de } \text{Source}(a) \text{ à } \text{Puits}(a) \text{ et tel que } \sum_{v \in c} d_v = D$$

Remarque 1 : Pour calculer f nous nous ramenons à trouver le plus long chemin pour une distance D donnée, dans un graphe orienté acyclique, pondéré par les valeurs duales, au lieu des distances d_v .

$$f(\text{Source}(a), 0) = 0 \quad (5.74)$$

puisque le sommet de $\text{Source}(a)$ est fictif.

$$\forall v \in V - \text{Source}(a)$$

$$f(v, D) = u_v + \max_{v' \in \text{prec}(v)} f(v', D - d_v) \quad (5.75)$$

Remarque 2 :

– Pour les avions critiques :

$$\min_{c \in C(a)} \bar{\text{cout}}(c, a) = \min_{D \leq L_a} (L_a - D - u_a - f(\text{Puits}(a), D))$$

– Pour les avions non-critiques :

$$\min_{c \in C(a)} \bar{cout}(c, a) = \min_D \left(\frac{(M_a - D)^2}{M_h^2} - u_a - f(\text{Puits}(a), D) \right)$$

5.4.2 Symétrie de la solution

Les avions non-critiques sont identiques parce que nous supposons que le potentiel de vol des avions non-critiques est infini et aussi en début de semaine ils se trouvent au même endroit. Donc ils partagent le même point de départ. De ce fait, il nous semble naturel de grouper les contraintes concernant les avions non-critiques pour briser la symétrie de ces avions.

Similairement aux avions, il y a un certain nombre de vols qui ont la même heure de départ et la même durée totale. Comme la structure du réseau que nous étudions est *mono-hub*, le couple d'*origine-destination* perd son importance. Alors les vols qui ont le même couple de *départ-durée* sont identiques et ils peuvent être regroupés. Nous pouvons imaginer que les vols et les avions ne sont plus de capacité 1 mais de nb_v et nb_a , respectivement. Le problème maître restreint agrégé devient :

$$Z_{PMR-ag} = \min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a)} cout(c, a) \lambda_c^a \quad (5.76)$$

sachant que

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = nb_a \quad \forall type_a \in A \quad (5.77)$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a) | v \in c} \lambda_c^a = nb_v \quad \forall type_v \in V \quad (5.78)$$

$$\lambda_c^a \geq 0 \quad \forall a \in A \text{ et } \forall c \in C'(a) \quad (5.79)$$

Un autre problème de symétrie est rencontré pendant la résolution du problème esclave. Plusieurs chemins générés peuvent être identiques. Pour les avions non-critiques le risque est important, puisque le programme dynamique ne tient compte que du sommet de la source et de la distance totale au sommet de puits. Les avions non-critiques partagent les sommets de la source et du puits. Donc le programme dynamique n'a aucune raison de choisir des chemins différents pour les avions non-critiques. La contradiction de deux buts du sous-problème (choisir le meilleur chemin

et fournir une diversité au problème maître) nous oblige à un compromis. Une fois le programme dynamique lancé, les sommets v sont marqués par un ensemble $et(v)$ d'étiquettes temporaires permettant de mémoriser la plus grande somme des valeurs des variables duales des sommets antérieurs pour une somme de distance d donnée, depuis le sommet de la source (algorithme 5.4.1). Au sommet p correspondant au puits commun, le coût réduit est calculé pour chaque avion a et chaque distance d puis trié. Tant que le coût réduit est négatif, le chemin (donc la colonne) correspondant est donné au problème maître et nous passons au prochain couple. Si le coût réduit est positif ou nul, le nombre manquant des chemins est rempli par le dernier chemin dont le coût réduit est négatif. Même si les colonnes ne sont pas totalement différentes, elles ne sont plus identiques.

Algorithme 5.4.1 Etiquetage des sommets dans le sous problème

L_{nv} : La liste des sommets non visités

$Et(v)$: L'ensemble des étiquettes $(\sum_{prec(v)} d, \sum_{prec(v)} u)$ pour le sommet v

$\delta^+(v)$: L'ensemble des sommets successeurs du sommet v

Trier la liste L_{nv} dans l'ordre chronologique

Tant que $(L_{nv} \neq \emptyset)$ **faire**

 | Choisir le premier sommet v dans L_{nv}

 | Pour chaque $w \in \delta^+(v)$ et chaque $et \in Et(v)$

 | **Si** (Une étiquette $et' \in Et(w)$ existe tel que

 | $(\sum_{jusqu'à v} d + d_w = \sum_{jusqu'à w} d)$ **ET** $(\sum_{jusqu'à v} u + u_w < \sum_{jusqu'à w} u)$ **) Alors**

 | Passer à l'étiquette suivante

 | **Sinon**

 | Remplacer et' par et

 | **Fin Si**

 | **Si** (Tous les voisins et les étiquettes sont visités) **Alors**

 | Retirer le sommet v de L_{nv}

 | **Fin Si**

Fait

Nous voulons préciser que le graphe de connexions associé au problème est orienté acyclique. Nous pouvons parcourir donc les vols dans un ordre topologique.

5.4.3 Approche heuristique

A chaque itération le sous-problème (*problème esclave*) fournit une colonne (*un chemin*) par avion. Par contre, comme nous l'avons déjà vu, les colonnes fournies ne sont pas forcément des colonnes totalement différentes. Malgré le grand nombre de colonnes, ce n'est pas facile de les combiner pour avoir une solution réalisable avec un coût total inférieur au coût de la solution initiale. Pour cette raison, nous intégrons une méthode heuristique parallèle au sous-problème. Cette méthode heuristique trouve des chemins entièrement disjoints en tenant compte des valeurs des variables duales générées par le problème maître à la fin de chaque itération (voir le figure 5.2).

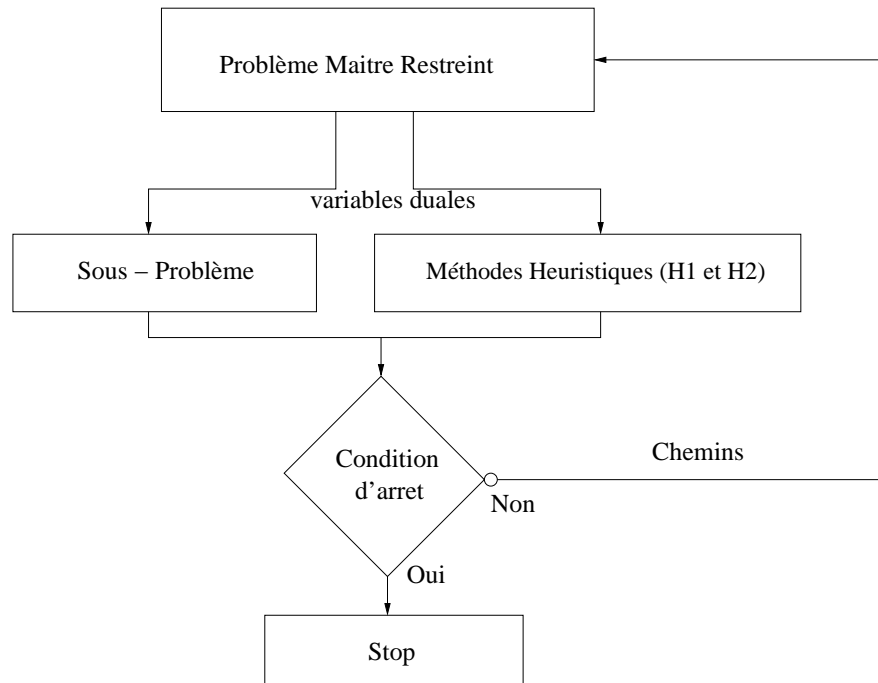


FIG. 5.2 – Organigramme de la génération de colonnes

La méthode heuristique proposée est décomposée en deux : une première partie qui trouve des chemins pour les avions critiques et une deuxième pour les avions non-critiques.

5.4.3.1 Heuristique 1 - Avions critiques

L'approche heuristique doit avoir deux propriétés cruciales :

- Les chemins trouvés doivent être disjoints,
- Il faut tenir compte de l'état actuel du cadre de la génération de colonnes.

Pour que les chemins soient disjoints, il suffit de parcourir les avions les uns après les autres, de construire le meilleur chemin qui lui est associé et d'enlever les sommets correspondant à ce chemin. De plus, l'état actuel de la génération de colonnes peut être interprété au travers des valeurs des variables duales associées aux avions et vols.

Les méthodes heuristiques que nous avons déjà présentées dans le chapitre précédent prennent les avions critiques dans l'ordre décroissant de la criticité donc dans l'ordre croissant du potentiel de vol. Pour tenir compte de l'évolution des avions au cours de la génération de colonnes l'heuristique 5.4.2 prend les avions dans l'ordre décroissant des valeurs des variables duales associées aux avions. Même si la base du problème maître restreint est dégénérée, nous pouvons considérer la valeur de la variable duale comme une estimation du coût marginal de l'avion. En effet u_a est le coût que nous aurions gagné (ou perdu, suivant $u_a > 0$ ou $u_a < 0$) si l'avion a n'existait pas.

Une fois que les avions sont triés dans l'ordre décroissant des u_a , ils sont pris un par un, afin de trouver *le meilleur* chemin. L'idée de $H1$ est similaire à celle du sous-problème : trouver le chemin dont le coût réduit est minimum. Donc il faut résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$D = \min L_a - \sum_{v \in V} d_v x_v - \sum_{v \in V} u_v x_v - u_a \quad (5.80)$$

sachant que

$$\sum_{v \in V} d_v x_v \leq L_a \quad (5.81)$$

$$x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \quad (5.82)$$

Où X^a est l'ensemble des vecteurs indicateurs $x = (x_v)_{v \in V}$ des chemins allant de $Source(a)$ à $Puits(a)$ dans le graphe associé G .

Comme L_a et u_a sont constants pour un avion a donné, le problème devient :

$$D = \max \sum_{v \in V} (d_v + u_v) x_v \quad (5.83)$$

sachant que

$$\sum_{v \in V} d_v x_v \leq L_a \quad (5.84)$$

$$x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \quad (5.85)$$

Ce problème est un problème classique de la recherche du plus long chemin sous la contrainte de ressource dans un graphe orienté acyclique et peut être résolu par le même programme dynamique que nous avons proposé pour la résolution du sous-problème. Puisque les avions sont pris un par un et que nous cherchons des chemins exclusivement disjoints, nous ne pouvons pas appliquer juste une seule fois la méthode d'étiquetage. Pour chaque avion nous devons résoudre le programme dynamique, encore une fois et enlever les sommets affectés à l'avion.

Algorithme 5.4.2 Heuristique H1

L_{nv} : La liste des sommets non visités

AC : L'ensemble des avions critiques

c : L'ensemble des vols v sur le chemin de l'avion a

Trier la liste L_{nv} dans l'ordre chronologique

Trier AC dans l'ordre décroissant de valeurs des variables duales u_a

Tant que ($AC \neq \emptyset$) **faire**

 Choisir le premier avion a dans AC

 Trouver le chemin qui maximise la fonction $\sum_{v \in c} (d_v + u_v)$ **ET** qui vérifie

$$\sum_{v \in c} d_v \leq L_a$$

 Enlever les sommets $v \in c$ de L_{nv}

 Enlever l'avion a de AC

Fait

Pour trouver le chemin $c \in C(a)$ qui maximise la fonction $\sum_{v \in c} (d_v + u_v)$ et qui vérifie $\sum_{v \in c} d_v \leq L_a$, nous appliquons l'algorithme 5.4.3. Cet algorithme d'étiquetage trouve la somme des valeurs des variables duales pour une distance donnée, sur un sommet.

Algorithme 5.4.3 Approche heuristique pour les avions critiques

L_{nv} : La liste des sommets non visités
 $Et(v)$: L'ensemble des étiquettes $(\sum_{\text{jusqu'à } v} d, \sum_{\text{jusqu'à } v} u)$ pour le sommet v
 $\delta^+(v)$: L'ensemble des sommets voisins w au sommet v
 Trier la liste L_{nv} dans l'ordre chronologique
Tant que $(L_{nv} \neq \emptyset)$ **faire**
 Choisir le premier sommet v dans L_{nv}
 Pour chaque $w \in \delta^+(v)$ et chaque étiquette $et \in Et(v)$
 calculer $(\sum_{\text{jusqu'à } v} d + d_w, \sum_{\text{jusqu'à } v} u + u_w)$
 Si $(\sum_{\text{jusqu'à } v} d + d_w \leq L_a)$ **Alors**
 Si (Une étiquette $et' \in Et(w)$ existe tel que
 $(\sum_{\text{jusqu'à } v} d + d_w = \sum_{\text{jusqu'à } w} d)$ **ET** $(\sum_{\text{jusqu'à } v} u + u_w < \sum_{\text{jusqu'à } w} u)$) **Alors**
 | Passer à la prochaine étiquette
 Sinon
 | Remplacer et' par et
 Fin Si
 Fin Si
 Si (Tous les voisins et les étiquettes sont visités) **Alors**
 | Retirer le sommet v de L_{nv}
 Fin Si
Fait

5.4.3.2 Heuristique 2 - Avions non-critiques

Une fois que l'affectation des vols aux avions critiques est faite et que les vols sont enlevés du graphe, il ne reste qu'à traiter les avions non-critiques. Dans cette étape nous devons tenir compte des enjeux suivants :

- Les avions n'ont pas de limite de vol : la consommation totale du potentiel dans une semaine est négligeable devant la limite de vol d'un avion non-critique
- Il faut couvrir tous les vols : les vols non affectés dans l'étape précédente doivent être couverts par le reste de la flotte, donc par les avions non critiques.

Il y a deux types d'avions non-critiques, ceux qui sont non-critiques depuis le début de la semaine et ceux qui passent leur maintenance dans la semaine. Les avions *nouveaux* non-critiques sont pris avant les avions *toujours* non critiques parce que les nouveaux non-critiques ont moins de jours non-critiques. De plus les avions toujours non-critiques sont considérés comme identiques donc l'ordre est aléatoire.

Même si l'objectif est d'équilibrer la charge de vol des avions non-critiques, il y a une contrainte très forte à satisfaire : couvrir tous les vols parce que nous voulons donner une solution réalisable au problème maître restreint. L'algorithme que nous proposons a donc pour but d'affecter le plus de vols possibles aux avions. Le but est de trouver un ensemble de chemins disjoints maximisant le nombre de vols affectés. Nous nous ramenons à nouveau à un problème de plus longs chemins disjoints où le poids d'un vol est 1. Nous utilisons un algorithme traditionnel de plus long chemin grâce au fait que le graphe est orienté et acyclique. C'est un algorithme de marquage qui parcourt le graphe dans l'ordre chronologique des vols (*topologique*).

Comme la méthode précédente, une fois que le chemin d'un avion est trouvé, les vols affectés à l'avion sont enlevés du graphe. Cette méthode a un inconvénient : comme à chaque fois les sommets sont enlevés, il peut arriver que le graphe ne soit plus connexe et qu'il n'existe plus de chemin allant de la source au puits bien qu'il reste des vols non affectés.

Pour éliminer ce problème, nous avons ajouté des arcs de connexions au graphe. S'il y a plus de 30 minutes entre l'atterrissage d'un vol v et le départ du vol w , nous ajoutons un arc $v \rightarrow w$ au graphe G et nous obtenons le graphe G' . Une solution faisable sur le graphe G' n'est pas forcément faisable sur le graphe G . Les arcs appartenant à G' mais pas à G , seront appelés les *sauts*. Pour pouvoir donner une solution réalisable au problème maître restreint, il faut éliminer ces sauts. Pour cela, nous proposons deux méthodes.

Elles sont basées sur des méthodes 2-OPT, où à chaque itération deux avions sont choisis. Première méthode (5.4.4) enlève un vol d'un avion pour l'insérer à un deuxième, si la nouvelle configuration est *meilleure* que l'ancienne. Une configuration est meilleure que l'autre si la somme des distances de sauts est inférieure. La distance d'un saut est la durée entre deux vols ayant un arc dans G' mais pas dans G .

Algorithme 5.4.4 Méthode d'insertion pour éliminer les sauts

ANC : La liste des avions toujours non critiques

V_a : La liste des vols affectés à l'avion a

$dist_a$: La distance totale des sauts de l'avion a

insertion : Variable booléenne, vrai si il y a un échange

insertion=vrai

Tant que (*insertion*=vrai) **faire**

insertion=faux

 B1 : **Pour** Tout $a \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_a$

 B2 : **Pour** Tout $a' \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_{a'}$

Pour Tout $v \in V_a$ **faire**

Si (v inserable à $V_{a'}$) **Alors**

 Calculer $dist'_a$

 Calculer $dist'_{a'}$

Si ($dist'_a + dist'_{a'} \leq dist_a + dist_{a'}$) **Alors**

 Insérer le vol v à $V_{a'}$

insertion=vrai

 Sortir de la boucle B1

Fin Si

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fait

La deuxième méthode (5.4.5) fonctionne de façon similaire à la première. En revanche, elle échange deux vols sur deux avions pour diminuer la taille des sauts.

Algorithme 5.4.5 Méthode d'échange pour éliminer les sauts

ANC : La liste des avions toujours non critiques

V_a : La liste des vols affectés à l'avion a

$dist_a$: La distance totale des sauts de l'avion a

change : Variable booléenne, vrai si il y a un échange

change=vrai

Tant que (*change*=vrai) **faire**

change=faux

 B1 : **Pour** Tout $a \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_a$

 B2 : **Pour** Tout $a' \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_{a'}$

Pour Tout $v \in V_a$ **faire**

Pour Tout $v' \in V_{a'}$ **faire**

Si (v et v' sont échangeables) **Alors**

 Calculer $dist'_a$

 Calculer $dist'_{a'}$

Si ($dist'_a + dist'_{a'} \leq dist_a + dist_{a'}$) **Alors**

 Echanger les vols v et v'

change=vrai

 Sortir de la boucle B1

Fin Si

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fait

Les méthodes heuristiques que nous venons de présenter pour les avion non-critiques ne considèrent pas l'équilibrage de charge de vol. La solution de ces heuristiques contient moins de sauts mais elle n'est pas forcément réalisable. De plus elle n'est pas équilibrée.

Pour fournir au problème maître restreint non seulement une solution réalisable mais aussi une *bonne* solution, un dernier algorithme 5.4.6 basé sur la méthode de 2-OPT sera donc employé. Après ces deux méthodes, il peut rester quelques sauts. La méthode 5.4.6 va essayer d'équilibrer la solution, qu'elle soit ou non réalisable.

Algorithme 5.4.6 Méthode d'échange pour équilibrer la charge de vol des avions

ANC : La liste des avions toujours non critiques

V_a : La liste des vols affectés à l'avion a

$dist_a$: La valeur absolue de l'écart entre la charge de vol de l'avion a et la charge moyenne

change : Variable booléenne, vrai si il y a un échange

change=vrai

Tant que (*change*=vrai) **faire**

change=faux

 B1 : **Pour** Tout $a \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_a$

 B2 : **Pour** Tout $a' \in ANC$ **faire**

 Calculer $dist_{a'}$

Pour Tout $v \in V_a$ **faire**

Pour Tout $v' \in V_{a'}$ **faire**

Si (v et v' sont échangeables) **Alors**

 Calculer $dist'_a$

 Calculer $dist'_{a'}$

Si ($dist'_a + dist'_{a'} \leq dist_a + dist_{a'}$) **Alors**

 Echanger les vols v et v'

change=vrai

 Sortir de la boucle B1

Fin Si

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fait

Cette méthode prend tous les couples d'avions et échange deux vols, si possible. Si la somme des nouveaux écarts de la charge idéale est inférieure à celle de l'ancienne configuration, les vols sont vraiment échangés, sinon l'ancienne affectation

est gardée. Même si elle n'élimine pas forcément les sauts, cette dernière méthode ne détériore pas la distance des sauts.

Les méthodes expliquées donnent finalement un chemin par avion. L'ensemble de ces chemins couvre tous les vols. Les colonnes correspondant aux chemins sont insérées au problème maître restreint pour élargir l'espace de solution. Par contre, les méthodes n'ont aucune garantie pour éliminer tous les sauts et donner une solution réalisable. Si un chemin contient un ou plusieurs sauts, la colonne correspondante sera quand même ajoutée mais avec un coût majoré. Ce coût est un coût fixe et il doit être suffisamment petit pour laisser la liberté au problème maître de choisir cette colonne mais aussi suffisamment grand pour pénaliser ce chemin. En revanche, comme nous élargissons l'espace de solution défini initialement, la relaxation linéaire du problème maître ne fournit plus une borne inférieure du problème initial. Cependant les solutions qui contiennent les colonnes avec un tel coût artificiel nous permettent de stabiliser les variables duales et d'augmenter la chance de trouver de bonnes solutions.

5.4.4 Borne inférieure lagrangienne

La relaxation lagrangienne est une technique qui consiste à enlever les contraintes dures et à les rajouter dans la fonction objectif avec un coût de pénalité. La relaxation de la contrainte (5.51) nous donne la formulation suivante :

$$Z_{Lag}(u) = \min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a)} \text{cout}(c, a) \lambda_c^a + \sum_{v \in V} u_v (1 - \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a) | v \in c} \lambda_c^a) \quad (5.86)$$

sachant que

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.87)$$

$$\lambda_c^a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A \text{ et } \forall c \in C(a) \quad (5.88)$$

Grâce à la relaxation de la contrainte (5.51), les avions sont dissociés. Car la seule contrainte reliant les avions a été enlevée. En reformulant la fonction objectif,

le modèle devient :

$$Z_{Lag}(u) = \min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a (\text{cout}(c, a) - \sum_{v \in c} u_v) + \sum_{v \in V} u_v \quad (5.89)$$

sachant que

$$\sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a = 1 \quad \forall a \in A \quad (5.90)$$

$$\lambda_c^a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A \text{ et } \forall c \in C(a) \quad (5.91)$$

Ce programme est une relaxation du problème maître [Wol98], donc elle donne une borne inférieure du problème maître pour toute valeur des u_v . La meilleure borne inférieure sera $\max_{u \in R^{|V|}} Z_{Lag}(u)$. Pour un problème similaire, Daskin et Panayiotopoulos [DP89] se sont servi de la méthode de sous-gradient proposée par Crowder [Cro76]. Une autre manière d'obtenir les multiplicateurs lagrangiens est d'utiliser la programmation linéaire. A chaque résolution du problème maître restreint, nous avons un ensemble de valeurs des variables duales. Donc à chaque itération, nous pouvons calculer la borne lagrangienne, et si elle est meilleure que la borne inférieure connue, nous pouvons la mettre à jour. Cette méthode est connue sous le nom de méthode de Kelley ([BLM⁺06]).

Puisque le sous-problème est une recherche du plus long chemin sous contrainte, c'est un problème difficile (NP-complet). Donc la relaxation Lagrangienne peut donner une meilleure borne inférieure que la relaxation linéaire du problème initial (5.23)-(5.34).

5.4.5 Calcul de la borne lagrangienne

Nous avons déjà vu que pour calculer la borne lagrangienne, il suffit de résoudre le problème lagrangien en utilisant les valeurs des variables duales comme les multiplicateurs lagrangiens. D'autre part, nous savons que le problème lagrangien a une propriété très intéressante : les avions sont indépendants. Donc, le problème lagrangien trouve un chemin par avion et la somme totale des "coûts" doit être minimisée. Nous pouvons en déduire que, si nous trouvons le "meilleur" chemin pour chaque

avion, la somme des coûts est minimale.

$$\min \sum_{a \in A} \sum_{c \in C(a)} \lambda_c^a (cout(c, a) - \sum_{v \in c} u_v) = \sum_{a \in A} \min_{c \in C(a)} (cout(c, a) - \sum_{v \in c} u_v) \quad (5.92)$$

Remarque : Le sous-problème de la génération de colonnes trouve un chemin par avion dont le coût réduit est le plus petit. Nous pouvons ainsi voir la relation entre le coût réduit et la fonction objectif du problème lagrangien :

$$\sum_{a \in A} \min_{c \in C(a)} (cout(c, a) - \sum_{v \in c} u_v) = \sum_{a \in A} \min_{c \in C(a)} \bar{cout}(c, a) + u_a \quad (5.93)$$

où

$$\bar{cout}(c, a) = (cout(c, a) - \sum_{v \in c} u_v) - u_a \quad (5.94)$$

Ainsi pour un ensemble de valeurs des variables duales (*obtenues par la méthode du simplexe*) nous pouvons calculer directement

$$Z_{Lag}(u) = \sum_{a \in A} \min_{c \in C(a)} (\bar{cout}(c, a) + u_a) + \sum_{v \in V} u_v \quad (5.95)$$

ou encore

$$Z_{Lag}(u) = \sum_{a \in A} \min_{c \in C(a)} \bar{cout}(c, a) + \sum_a u_a + \sum_{v \in V} u_v \quad (5.96)$$

D'après Wolsey ([Wol98]), la relaxation lagrangienne peut donner la solution optimale du problème maître, si la solution du problème lagrangien satisfait toutes les contraintes puisque les contraintes relâchées sont des équations. Satisfaction des contraintes se résume comme "trouver des chemins disjoints pour chacun des avions en couvrant tous les vols".

5.4.6 Condition d'arrêt

D'après le schéma traditionnel de la décomposition Dantzig-Wolfe (5.3), l'arrêt de la méthode dépend d'une ou de plusieurs conditions.

La condition d'arrêt que nous avons donnée, est composée de deux conditions :

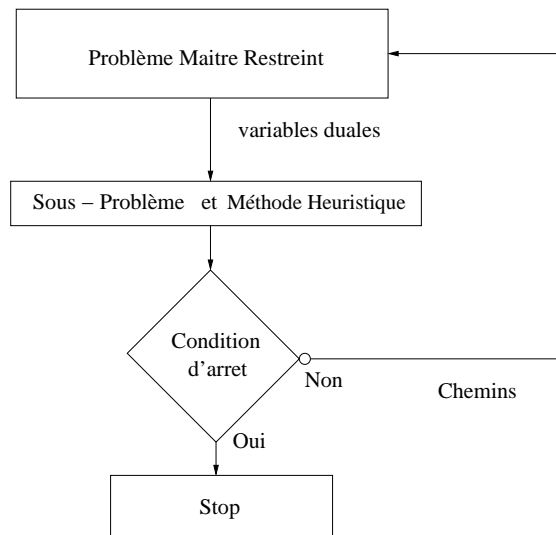


FIG. 5.3 – Schéma traditionnel de la décomposition Dantzig-Wolfe

- La condition traditionnelle : si le coût réduit minimal est positif ou nul, le problème maître est résolu à l'optimal.
- A cause de la lente convergence de la génération de colonnes, nous arrêtons l'algorithme à la fin de 50 itérations et nous trouvons la meilleure solution réalisable rendue par les heuristiques H1 et H2. Nous notons aussi l'écart entre cette solution et la meilleure borne inférieure lagrangienne.

Nous avons noté plusieurs fois que l'approche que nous avons proposée est itérative : elle commence avec un ensemble de solutions réduit et à chaque itération des variables (colonnes) candidates à entrer dans la base du problème maître sont ajoutées. Les colonnes candidates sont trouvées par le sous problème (ou le problème esclave) et par les heuristiques (H1 et H2). Le problème esclave obtient une solution optimale pour chaque avion mais les avions identiques ont des chemins identiques. Les heuristiques (H1 et H2) fournissent des colonnes complètement différentes, même si elles ne correspondent pas aux solutions optimales. Il est normal de s'arrêter quand aucune autre colonne candidate n'existe. Donc si le coût réduit minimum des colonnes est positif ou nul, la méthode ne continue plus. En revanche, pour maîtriser le temps d'exécution, nous pouvons arrêter la méthode en fin d'un certain nombre d'itérations. Dans ce cas, le problème maître n'est pas résolu à l'optimal par contre

l'approche reste une méthode heuristique.

CHAPITRE 6

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans les chapitres précédents nous avons proposé des approches heuristiques et métaheuristiques pour résoudre le problème de la rotation des avions. Chaque méthode a des avantages et des inconvénients qui sont regroupés autour de la qualité du résultat et du temps d'exécution. Le temps d'exécution d'une méthode est lié à l'architecture de la méthode, de son codage et de l'environnement informatique. Ce chapitre est dédié aux résultats numériques obtenus par les méthodes précédemment proposées. Nous allons comparer le temps d'exécution et la qualité des résultats de ces méthodes.

Nous avons réalisé les tests sur un ordinateur de Xeon bi-processeur 2 GO de RAM. Le langage informatique est JAVA et le solveur de simplex pour la méthode heuristique basée sur la génération de colonnes est CPLEX 9.0.

6.1 Description des instances testées

Les tests numériques sont faits sur une série d'instances. Une instance contient de l'information sur la distribution des vols, le potentiel de vol des avions et la politique de la maintenance.

6.1.1 Avions

Il y a 200 avions dans la flotte considérée. Le potentiel de vol d'un avion varie entre 0 et 500 heures. Un avion dont le potentiel de vol descend à 0 ne peut plus voler, sans une intervention de maintenance. La figure 6.1 illustre une exemple de la distribution du potentiel de vol au sein d'une flotte de 200 avions. Nous voyons que la distribution du potentiel de vol des avions suit la loi uniforme.

Un avion est caractérisé par son potentiel de vol. En fonction de la capacité de la maintenance, un groupe d'avions dont le potentiel de vol est le plus faible, constitue l'ensemble d'avions critiques (AC). L'avion le plus critique passe la maintenance en

premier.

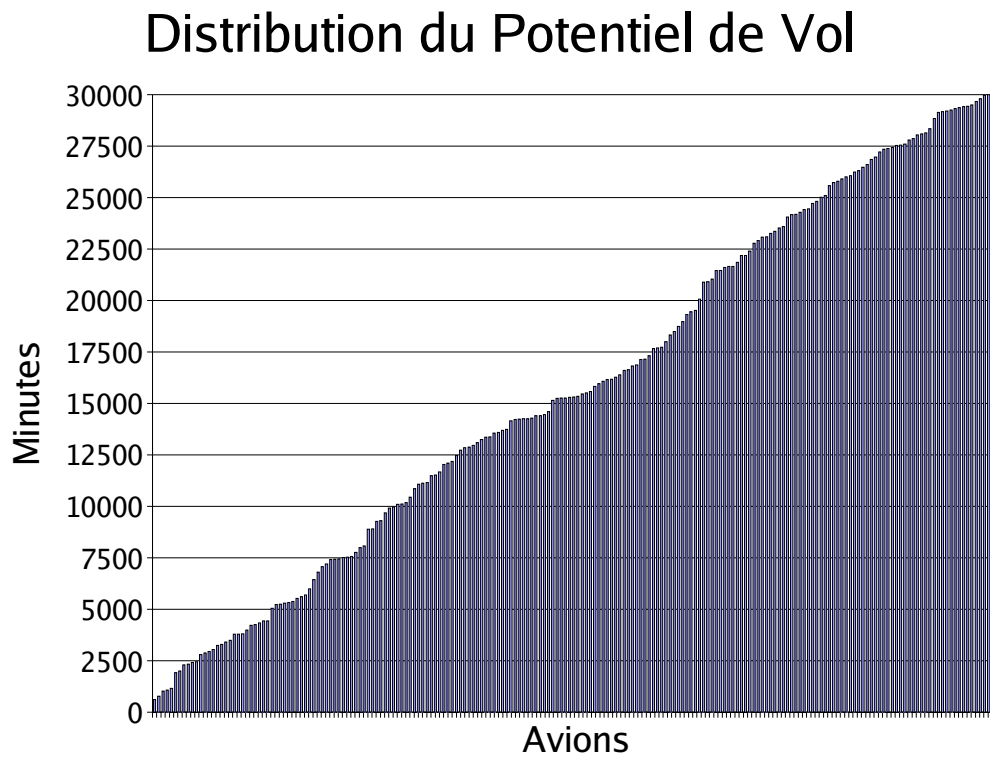


FIG. 6.1 – Distribution du potentiel de vol

6.1.2 Vols

Un vol est défini par les villes d'origine et de destination, l'heure de départ et la durée. L'heure d'arrivée est calculée à partir de l'heure de départ et de la durée du vol.

Nous avons utilisé trois familles d'instances en fonction du nombre de vols par semaine. Les instances sont générées aléatoirement mais la distance entre les villes et la fréquence moyenne d'un couple *origine-destination* par semaine sont déterminées de façon réaliste. Nous nous sommes basés sur les données publiques des grandes compagnies aériennes pour générer les instances.

Les connexions des sommets sont soumises à un certain nombre de règles. Une connexion entre deux sommets (de vol, de maintenance ou d'avion) doit satisfaire des contraintes. Une partie de ces contraintes sont dures et il est impossible de

les relâcher. La deuxième partie des contraintes interprète l'intérêt opérationnel ou économique. Une des conditions suivantes est suffisante pour mettre une connexion entre deux sommets v_1 et v_2 , sachant que les sommets présentent les vols, les avions en début de semaine et les interventions de maintenance :

- Si v_1 et v_2 sont des vols du même jour, la durée entre l'arrivée de v_1 et le départ de v_2 doit être entre 30 minutes et 5 heures. Nous considérons que 30 minutes est la durée minimale pour un avion afin qu'il soit préparé pour le vol suivant. Par contre la durée maximale de 5 heures n'est pas une contrainte dure mais une contrainte opérationnelle pour éviter les longues attentes.
- Si le vol v_1 est un jour avant le vol v_2 , il faut que le vol v_1 soit arrivé après 15 heures. Cette condition sert à équilibrer la charge de vol. Pour avoir un chemin réalisable, les avions doivent répartir la charge dans la journée.
- Si v_1 n'est pas un vol mais un sommet d'avion, alors il est lié à tous les sommets des vols et des maintenances. Normalement, le sommet d'avion est une source et il ne doit être lié qu'aux vols du premier jour de la semaine. Mais un avion peut rester au sol, sans voler pendant un ou plusieurs jours, pour diverses raisons. Donc pour pouvoir se servir plus tard des avions qui sont indisponibles en début de semaine, nous permettons toutes connexions aux vols.
- Si v_1 n'est pas un vol mais un sommet de la maintenance du jour j , le départ du vol v_2 doit être avant 10 heures du jour $j+1$. Cette condition est une condition pour faciliter la résolution du problème de la rotation parce qu'un avion qui passe la maintenance, devient non-critique avec un potentiel de vol renouvelé. Donc il peut être affecté au chemin le plus long. Nous pouvons supposer que le plus long chemin est celui qui commence le plus tôt. La probabilité de l'élimination du chemin optimal, par l'interdiction des connexions avec les vols dont le départ est après 10 heures, est très faible.
- Si v_1 est un vol et v_2 est un sommet de maintenance, alors l'arrivée de v_1 doit être avant 20 heures pour que l'avion soit préparé à l'intervention de la maintenance.

La construction du graphe de connexions dépend de ces conditions. Si deux som-

mets v_1 et v_2 ne satisfont aucune des conditions, il n'y a pas d'arc de connexion entre les sommets correspondants. Par contre pendant les tests, nous nous sommes rendu compte que, à cause de la nature hiérarchique des méthodes heuristiques, certains avions sont bloqués au milieu de la semaine parce qu'ils ne peuvent pas trouver de bonnes correspondances pendant un ou plusieurs jours. Suite à ce problème nous avons ajouté des arcs au graphe qui permettent à l'avion d'enchaîner les vols, quelquefois à intervalle de plusieurs jours. Cette autorisation augmente considérablement la densité du graphe. Par contre, la dernière méthode que nous avons proposée, la méthode heuristique basée sur la décomposition Dantzig-Wolfe traite tous les avions en même temps. Donc nous n'avons pas besoin d'ajouter cette dernière condition. Le tableau 6.1 montre le nombre de sommets de vols et de connexions dans chaque instance, avec les connexions de toutes les conditions.

TAB. 6.1 – Nombre de vols et de connexions dans les instances

Famille d'instance	Instances	Nombre de vols	Nombre de connexions	Durée de vol en moyenne par avion (en min)
F1	Instance 0	2821	3 888 240	3066.00
	Instance 1	2816	3 887 130	3072.05
	Instance 2	2775	3 781 537	3015.35
	Instance 3	2825	3 916 961	3060.65
	Instance 4	2844	3 965 551	3093.60
F2	Instance 5	2260	2 632 553	2447.15
	Instance 6	2256	2 605 184	2477.35
	Instance 7	2307	2 723 658	2510.55
	Instance 8	2230	2 563 364	2409.50
	Instance 9	2255	2 617 917	2481.75
F3	Instance 10	1722	1 629 069	1826.65
	Instance 11	1738	1 648 826	1836.45
	Instance 12	1727	1 628 749	1826.35
	Instance 13	1733	1 639 067	1827.55
	Instance 14	1743	1 661 120	1839.45

Les instances sont regroupées dans 3 familles (F1, F2, F3) en fonction du nombre de vols.

La durée de vol en moyenne par avion est trouvée par la division de la somme des durées des vols par le nombre d'avions. Donc elle est la charge hebdomadaire de

vol idéal pour un avion (M_h).

$$\text{Durée de vol en moyenne par avion } M_h = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{|A|} \quad (6.1)$$

où d_v est la durée du vol v , V est l'ensemble de tous les vols et $|A|$ est la cardinalité de l'ensemble des avions, donc le nombre d'avions.

Nous avons fait les tests pour une période de 40 semaines. C'est-à-dire, une fois le planning de la semaine s terminé, nous passons à la semaine $s + 1$ en gardant la même instance, mais en mettant à jour la consommation de potentiel de vol des avions. Donc si le potentiel de vol de l'avion a est L_a^s et c_a^s est le chemin affecté à cet avion, à la semaine s , son potentiel de vol à la semaine $s + 1$ est

$$L_a^{s+1} = L_a^s - \sum_{v \in c_a^s} d_v \quad (6.2)$$

Si l'avion a est critique et passe la maintenance à la semaine s , L_a^s est remplacé par 30.000 minutes (500 heures) et c_a^s est le chemin affecté à l'avion a après la maintenance.

6.1.3 Différentes politiques de maintenance

Une autre variable du problème de rotation des avions est la politique de maintenance. La politique de maintenance est définie par le nombre et par la distribution de la maintenance dans la semaine. Les interventions de maintenance sont réalisées pendant la nuit, pour ne pas bloquer l'avion dans la journée. Normalement, une intervention de maintenance n'empêche pas l'avion de prendre des vols, sauf ceux qui arrivent trop tard à la base de maintenance.

Comme nous l'avons déjà précisé, le planning de maintenance est une donnée du problème. Suivant les différents plannings, la solution du problème de rotation des avions peut changer. Ainsi nous avons étudié les politiques suivantes.

- 21 Maintenances par semaine : c'est la politique principale que nous avons étudiée. Il s'agit de 3 maintenances par jour. Grâce à sa régularité dans la semaine et au bon ratio elle nous semble la politique la plus probable. Car

avec 21 interventions, un peu plus de 10% de 200 avions passe la maintenance dans une semaine. Donc dans le cas sans *perturbation*, un avion passe la maintenance toutes les 10 semaines. Alors un avion peut voler pendant 50 heures par semaine, en moyenne et environ 7 heures par jour. Ce fait concorde avec la réalité industrielle.

- 19 Maintenances par semaine : c’est une dérivée de la politique précédente. Nous gardons 3 maintenances par jour dans la semaine. Par contre, comme le week-end la main d’oeuvre est plus chère, nous avons diminué le nombre de maintenances à 2 par jour, pour le week-end.
- 14 Maintenances par semaine : cette politique a l’avantage de la régularité parce qu’il s’agit de 2 maintenances par jour, pendant toute la semaine. Le nombre faible de maintenances peut être avantageux pour les instances avec un faible nombre de vols par semaine.

Nous pouvons calculer le besoin de maintenance d’une façon analytique en faisant l’hypothèse que tous les avions volent exactement la même distance. Dans ce cas, ils volent pendant la durée de vol en moyenne par avion que nous avons donné dans le tableau (6.1). Alors la consommation de 500 heures (30 000 minutes) de vol prend $n_h = \frac{30000}{M_h}$ semaines où M_h est la charge idéale d’un avion. Il faut passer $\lceil \frac{200}{n_h} \rceil$ avions par semaine en maintenance, pour continuer à voler avec un charge équilibrée.

TAB. 6.2 – Besoin de maintenance dans le cas idéal

Famille d’instance	Nombre moyen de vol	Durée de vol en moyenne par avion (en min)	Besoin de maintenance
F 1	2814	3061.53	21
F 2	2261	2465.26	17
F 3	1732	1831.29	13

Les besoins de maintenance donnés dans le tableau (6.2) montrent les besoins théoriques dans ce chapitre nous allons étudier l’évolution de l’état de la charge de vol des avions en fonction de différentes méthodes. Les méthodes proposées sont testées sur les différentes instances avec les politiques de maintenance suggérées.

Au cours de ce travail, nous acceptons une capacité hebdomadaire égale à 21..

6.2 Résultats et comparaison des méthodes

Dans la suite, nous allons montrer les résultats des approches heuristiques afin de comprendre quelle méthode donne la meilleure solution. Nous allons faire les tests sur 40 semaines consécutives pour observer l'évolution de l'état du potentiel de vol des avions. Même si nous avons 40 plannings à la fin des tests, nous sommes conscients que nous ne pouvons pas considérer ces plannings pour les semaines suivantes comme définitifs à cause des phénomènes stochastiques rencontrés souvent dans le secteur du transport aérien. L'intérêt de cette observation est de voir si la méthode reste toujours convenable pour ce type d'instance sur le long terme et ne provoque pas de solutions dégradées.

Nous allons étudier les résultats sur deux aspects : l'utilisation des avions critiques et l'équilibrage de charge des avions non-critiques.

6.2.1 Maximisation d'utilisation - Avions critiques

Nous avons déjà défini la maximisation d'utilisation des avions critiques comme la minimisation de perte de potentiel de vol. Donc cette perte est

$$P(a) = L_a - \sum_{v \in c(a)} d_v \quad (6.3)$$

où L_a est la limite de vol de l'avion a en début de semaine du planning, $c(a)$ est le chemin affecté à l'avion a et d_v est la durée du vol v .

Nous allons comparer la somme des pertes de potentiel de vol des avions critiques en fonction des méthodes heuristiques et une méthode métaheuristique, selon 3 familles d'instances. Chaque famille d'instances contient 5 instances qui sont regroupées en fonction de la taille (*du nombre de vols par semaine*).

Pour faciliter de lecture et pour éviter les répétitions, nous allons utiliser les abréviations suivantes (tableau 6.3).

TAB. 6.3 – Abréviations des méthodes

Abréviation	Méthode
PLC - décroissant	Heuristique basée sur le Plus Long Chemin ordre décroissant du potentiel de vol
PLC - croissant	Heuristique basée sur le Plus Long Chemin ordre croissant du potentiel de vol
PLC - aléatoire	Heuristique basée sur le Plus Long Chemin ordre aléatoire
PA	Heuristique basée sur la règle du Premier Atterrissage
RS	Métaheuristique - Recuit Simulé

6.2.1.1 Famille d'instance 1

TAB. 6.4 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 21 maintenances

Méthode	I 0	I 1	I 2	I 3	I 4
PLC	1458	325	2549*	216	341
PA	2078	235	4749	346	431
RS	1448*	105*	3149	186*	161*

La somme des pertes de potentiel des avions critiques en minutes pour chaque méthode, sur 5 instances et avec 21 maintenances, est donnée dans le tableau 6.4. Comme la différence entre les approches heuristiques PLC-décroissant, PLC-croissant et PLC-aléatoire est la règle de construction de la liste des avions non-critiques, leurs résultats sont identiques.

TAB. 6.5 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 19 maintenances

Méthode	I 0	I 1	I 2	I 3	I 4
PLC	1429	316	2536*	211	337
PA	2059	226	4736	341	427
RS	1249*	86*	3156	131*	247*

TAB. 6.6 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 14 maintenances

Méthode	I 0	I 1	I 2	I 3	I 4
PLC	269*	237	1247	148	128
PA	469	197	4707	318	398
RS	269*	87*	997*	88*	78*

Lors de la comparaison des tableaux 6.4, 6.5 et 6.6, nous voyons que la perte de potentiel a tendance à diminuer quand le nombre de maintenances décroît. Nous pouvons citer deux raisons :

- Moins de maintenances pour autant de vol : il est plus facile de consommer le potentiel de vol
- Moins d'avions à compter : comme les chiffres présentés aux tableaux sont la somme des pertes, si le nombre de maintenances est inférieur, alors il y a moins d'avions critiques à considérer.

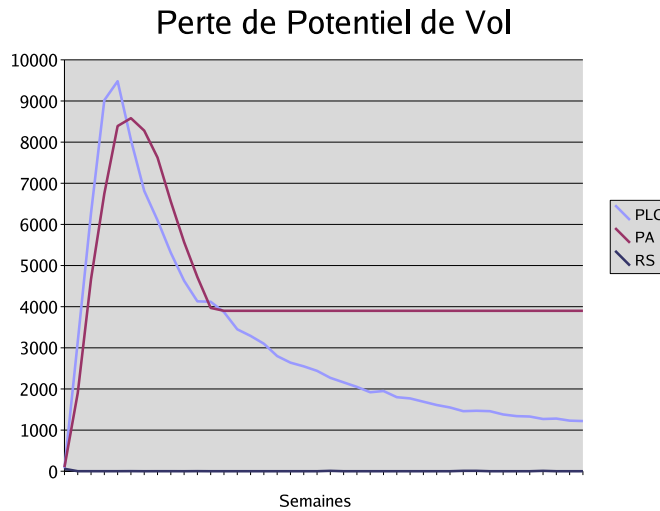


FIG. 6.2 – Perte de potentiel au cours des semaines sur l'instance 0 avec 21 maintenances par semaine

Sur la figure 6.2, nous observons la perte de potentiel des avions qui passent la maintenance la première nuit de la semaine, en fonction des méthodes proposées, sur l'instance 0 avec 21 maintenances, au cours de 40 semaines. Le comportement des méthodes sur les autres instances sont similaires. Nous voyons que la perte de potentiel augmente les premières semaines et diminue plus en plus vers la fin. Nous pouvons considérer les premières semaines comme la normalisation du potentiel de vol des avions. Une fois que tous les avions passent par la maintenance, environ au bout de 10 semaines, les algorithmes de liste normalisent la répartition du potentiel de vol.

Le meilleur résultat est obtenu par RS dont la solution initiale est la sortie de PLC.

6.2.1.2 Famille d'instance 2

La famille d'instance 2 contient en moyenne 2261 vols de type aller-retour par semaine. Les tableaux suivants présentent la somme des pertes de potentiel de vol des avions critiques sous différentes politiques de maintenance.

TAB. 6.7 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 21 maintenances

Méthode	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9
PLC	348	1393*	4382*	1048	181
PA	438	2803	7992	1648	501
RS	288*	1823	5582	868*	111*

TAB. 6.8 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 19 maintenances

Méthode	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9
PLC	332	1325*	4360*	1110	175*
PA	432	2795	7970	1640	495
RS	222*	1675	5560	770*	235

TAB. 6.9 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 14 maintenances

Méthode	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9
PLC	117	170*	2069*	292	93
PA	87	2770	7949	1532	473
RS	67*	240	2389	112*	73*

Nous observons le même effet de la diminution de la perte de potentiel lorsqu'il y a moins de maintenance. Par contre les tableaux 6.7 et 6.8 ont des chiffres beaucoup plus proches que le tableau 6.9

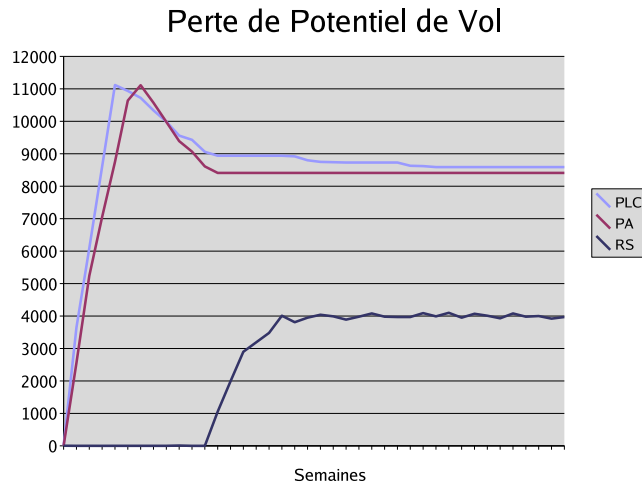


FIG. 6.3 – Perte de potentiel au cours des semaines sur l’instance 5 avec 21 maintenances par semaine

Même si la perte de potentiel de vol est plus importante sur la figure 6.3 (I 5), les comportements de PLC et PA sont similaires aux courbes de la figure 6.2. En revanche, RS réussit à consommer la quasi-totalité du potentiel de vol jusqu’à la semaine 7 et après la somme des pertes monte à 4000 minutes. D’autre part, quand nous regardons les tableaux, nous nous rendons compte que la méthode PA donne presque toujours la pire solution. Ceci est dû au fait que la méthode est basée sur une recherche locale.

6.2.1.3 Famille d’instance 3

La famille d’instance 3 contient en moyenne 1733 vols du type aller-retour par semaine. Les tableaux suivants présentent la somme des pertes de potentiel de vol des avions critiques sous différentes politiques de maintenance.

TAB. 6.10 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 21 maintenances

Méthode	I 10	I 11	I 12	I 13	I 14
PLC	807	2583*	3144*	249	3990*
PA	727	4013	4754	239	6930
RS	537*	3063	3834	109*	4950

Pour les instances I 2, I 6, I 7, I 11, I 12 et I 14 le résultat de la méthode métaheuristique est moins bon que celui de PLC. Ainsi, le recuit simulé a accepté des solutions moins bonnes à une certaine itération, afin d'éviter la solution optimale locale et il n'a pas réussi à l'améliorer. Ce que nous avons affiché au tableau 6.10 est la dernière valeur du recuit mais nous avons utilisé la meilleure solution. En revanche, si le recuit simulé n'améliore pas la solution initiale, nous gardons la solution initiale.

TAB. 6.11 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 19 maintenances

Méthode	I 10	I 11	I 12	I 13	I 14
PLC	798	2571*	3092	236	3986*
PA	718	4091	4742	226	6926
RS	528*	2861	3052*	126*	4966

TAB. 6.12 – Perte de potentiel en minutes en première semaine avec 14 maintenances

Méthode	I 10	I 11	I 12	I 13	I 14
PLC	146	912*	1467	148	1427*
PA	226	4062	4717	198	6897
RS	106*	1132	997*	78*	1427*

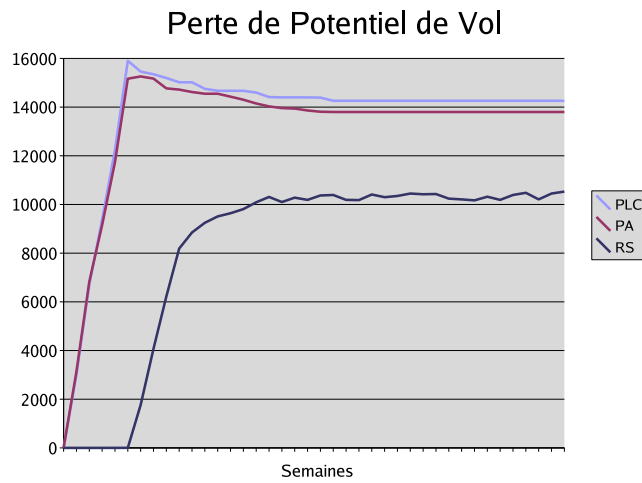


FIG. 6.4 – Perte de potentiel au cours des semaines sur l'instance 10 avec 21 maintenances par semaine

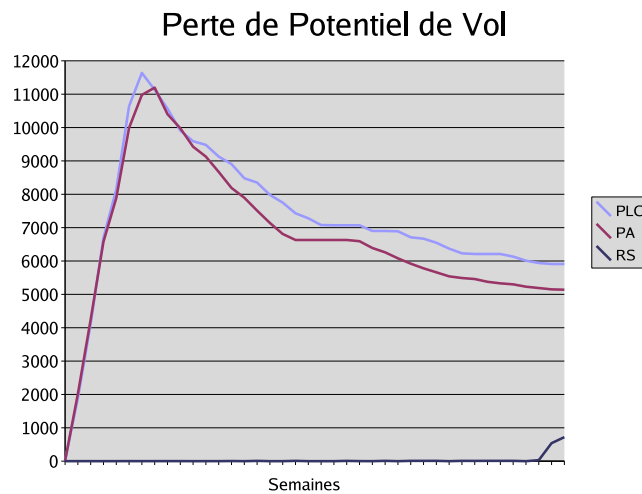


FIG. 6.5 – Perte de potentiel au cours des semaines sur l'instance 10 avec 14 maintenances par semaine

Sur la figure 6.4 nous voyons l'évolution de la perte de potentiel des avions qui passent la maintenance la première nuit de la semaine de planification. La politique

de maintenance contient 21 interventions et puisque le nombre de vols par semaine est inférieur à celui de la famille d'instances 1, les méthodes n'arrivent pas à épuiser le potentiel de vol des avions.

En revanche, quand nous regardons l'évolution de la perte de potentiel sur la figure 6.5 (I 10), le recuit simulé arrive à consommer la quasi-totalité du potentiel de vol et la perte des autres méthodes est inférieure. Parce que la politique de maintenance employée a 14 interventions par semaine, donc il y a moins de maintenance sur l'instance qui contient moins de vols.

6.2.2 Équilibrage de charge - Avions non critiques

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution du potentiel de vol des avions pendant 40 semaines. Pour la lisibilité des figures suivantes, nous avons choisi aléatoirement 10 avions parmi les 200 avions. Les figures illustrent donc le potentiel de vol de 10 avions au début de chaque semaine. Nous allons montrer les instances I0, I5 et I 10 qui contiennent 2821, 2260 et 1722 vols de type aller retour, respectivement, en fonction des politiques de maintenance.

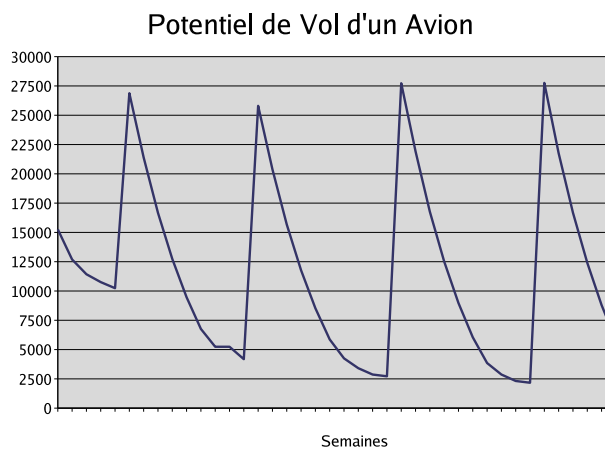


FIG. 6.6 – Perte de potentiel d'un avion au cours des semaines

Dans la figure 6.6 nous voyons le potentiel de vol en minutes d'un avion a en début de chaque semaine. Ce potentiel est consommé, donc il diminue jusqu'à une intervention de maintenance. La semaine où l'avion a passe la maintenance, son potentiel augmente. En revanche son potentiel de vol ne peut pas dépasser 30.000 minutes (500 heures) puisque la limite de vol entre deux interventions de maintenance est 500 heures. L'avion dans la figure 6.6 n'atteint jamais 30.000 minutes car après la maintenance, il continue à voler. De même, il vole avant le jour de maintenance, en revanche nous ne voyons que son potentiel de vol en début de la semaine. Juste avant la maintenance, son potentiel est donc encore plus bas.

Nous avons déjà dit que après la maintenance, l'avion a devient *nouveau* non-critique. Notons que, si l'avion a passe la maintenance le dernier jour de la semaine, dans ce cas, il aura exactement 500 heures puisque la semaine d'après commence le jour suivant l'intervention de maintenance.

Nous pouvons constater que l'équilibrage de charge sur le long terme, implique une certaine régularité des courbes de consommation du potentiel de vol au cours des semaines.

6.2.2.1 Instance 0 - 2821 Vols

L'instance 0 est une des instances qui contient le plus de vol par semaine. Les figures suivantes vont montrer la régularité (*ou l'irrégularité*) selon la méthode employée.

21 Maintenances Nous allons étudier aussi les effets de la politique de maintenance sur cette régularité de la consommation du potentiel de vol.

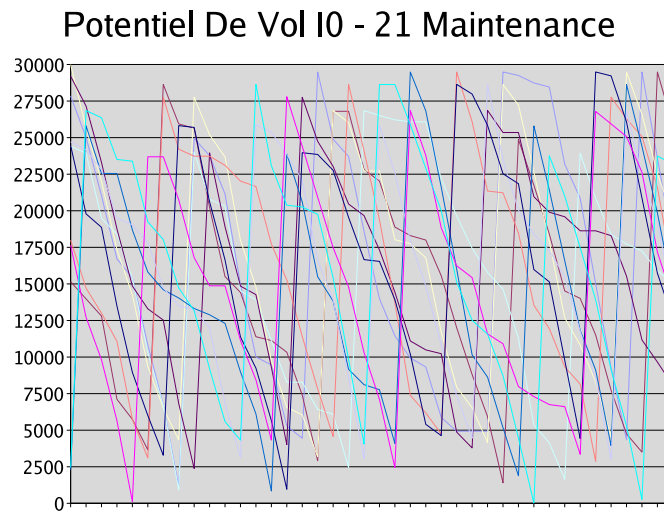
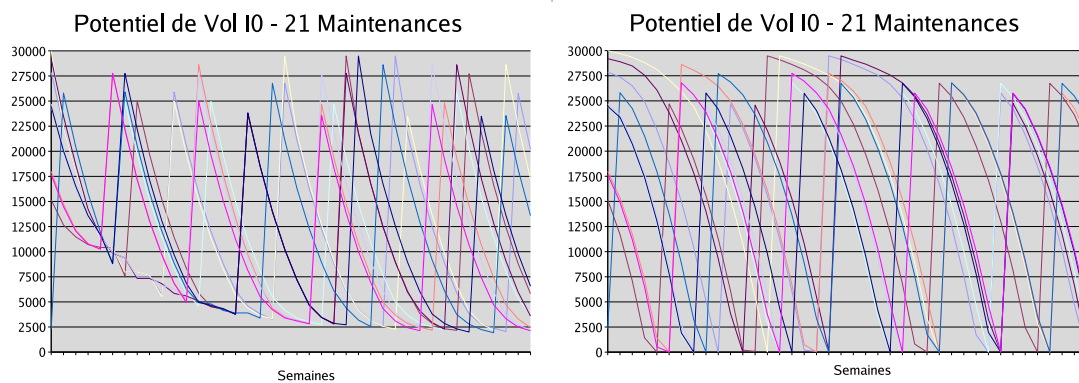


FIG. 6.7 – Heuristique basée sur le plus long chemin - ordre aléatoire

La figure 6.7 a une forme intéressante. Nous voyons que la courbe de potentiel de vol n'est pas régulière. En revanche, un tel résultat est évident, puisque les avions non-critiques sont traités dans un ordre aléatoire.



(a) Ordre décroissant du potentiel de vol

(b) Ordre croissant du potentiel de vol

FIG. 6.8 – Méthode basée sur le plus long chemin

Les figures 6.8(a) et 6.8(b) donnent le résultat de la méthode heuristique basée sur le plus long chemin avec l'ordre croissant et décroissant (respectivement) de potentiel de vol des avions non-critiques.

Quand nous étudions ces deux figures, nous observons que l'évolution des courbes est différente : sur la figure 6.8(a) la consommation est rapide juste après une intervention de maintenance et elle ralentit au cours des semaines suivantes, car les avions avec le potentiel maximum de vol sont prioritaires. Donc, juste après la maintenance, ils trouvent les meilleurs chemins pour consommer le potentiel de vol le plus vite. En revanche, sur la deuxième figure (figure 6.8(b)) les courbes sont presque parallèles après la maintenance et elles deviennent de plus en plus verticales au cours de temps. Ce fait signifie que, la semaine suivant la maintenance, l'avion n'est pas prioritaire et son affectation aux vols est faite à la fin. Donc son chemin est relativement court. Une fois que son potentiel de vol a diminué suffisamment, il est de nouveau prioritaire et il peut choisir les chemins plus longs. Alors la vitesse de consommation de son potentiel de vol augmente. Nous voyons que quand les avions avec moins de potentiel de vol sont prioritaires, dès la première semaine ils arrivent à consommer ce potentiel. En revanche, sur la figure (6.8(a)) nous voyons que, quand l'ordre de priorité est inverse, durant les premières semaines la perte de potentiel de vol des avions est plus importante.

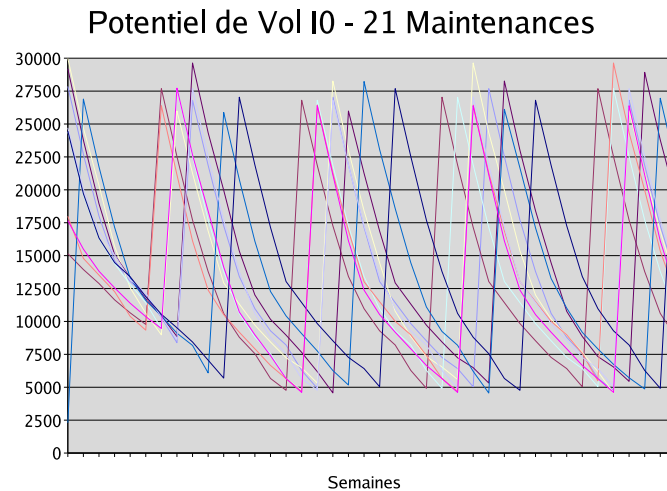


FIG. 6.9 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

Nous constatons que les courbes de la figure 6.9 ont une allure similaire sur la

figure 6.8(a) parce que, même si la méthode de recherche d'un chemin c pour l'avion a est différente, la règle de priorité des avions non-critiques est identique. Ils sont traités dans l'ordre décroissant du potentiel de vol.

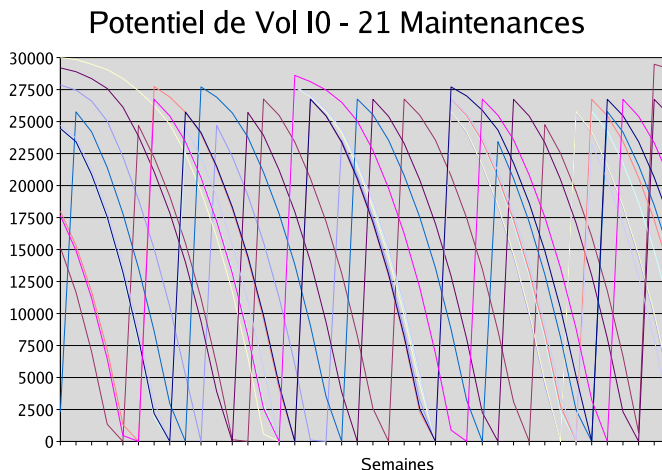


FIG. 6.10 – Recuit simulé

Le résultat de la méthode recuit simulé est très régulier. En plus, nous voyons que le potentiel de vol des avions, juste avant la maintenance, tombe jusqu'à zéro. Car, le recuit réussit à consommer presque totalement le potentiel de vol des avions critiques.

TAB. 6.13 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I0 avec 21 maintenances

I0 - 21 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	1916,15	3350,51	2867,26	264
PLC - croissant	2143,85	4173,33	3102,49	418,93
PLC - aléatoire	2222,5	3466,92	2865,5	278,84
PA	2261,28	2979,74	2622,77	134,07
RS	2006,15	4174,36	3102,62	421,55

Le tableau 6.13 illustre les chiffres génériques après les tests des méthodes sur l'instance 0 et avec 21 maintenances. Pour chaque avion, l'utilisation moyenne en

minutes sur 40 semaines est calculée. Puis, les avions qui ont été utilisés au minimum et au maximum sont trouvés. Nous avons aussi noté la moyenne globale. Finalement nous en avons déduit l'écart-type pour chaque méthode. Nous voyons que l'écart-type le plus faible est obtenu par la méthode basée sur le premier atterrissage et le plus fort par le recuit simulé. Un écart-type plus faible correspond à une distribution de charge de vol plus équilibrée. C'est-à-dire la différence de charge de vol entre l'avion le plus utilisé et l'avion le moins utilisé est plus petite.

19 Maintenances Si nous diminuons le nombre de maintenances, pour la même instance, la conséquence immédiate sera l'augmentation de l'utilisation des avions. Les figures 6.11(a), 6.11(b), 6.12 et 6.13 montrent le comportement des avions qui sont traités par les méthodes PLC - décroissant, PLC-croissant, PA et RS, respectivement.

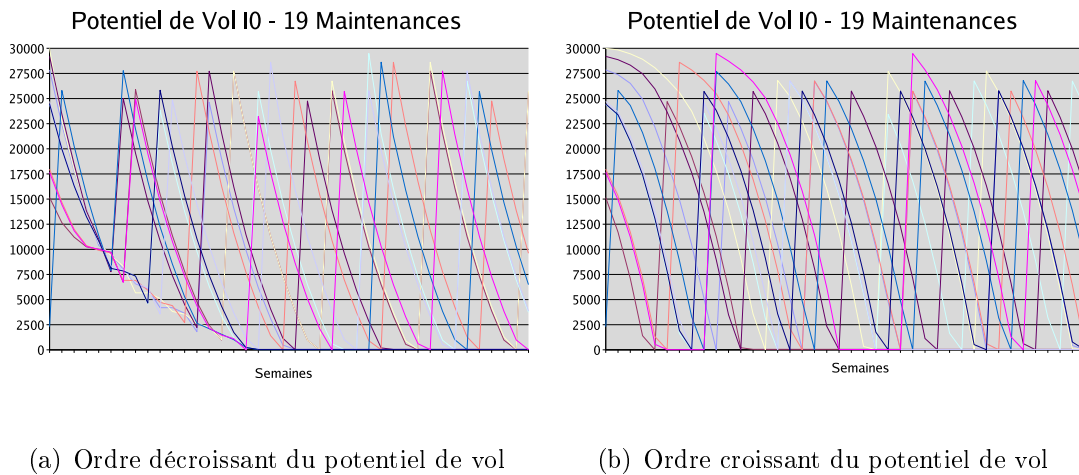


FIG. 6.11 – Méthode basée sur le plus long chemin

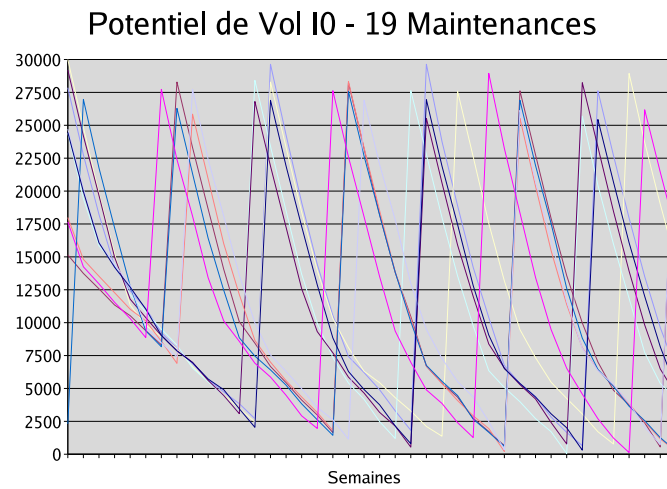


FIG. 6.12 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

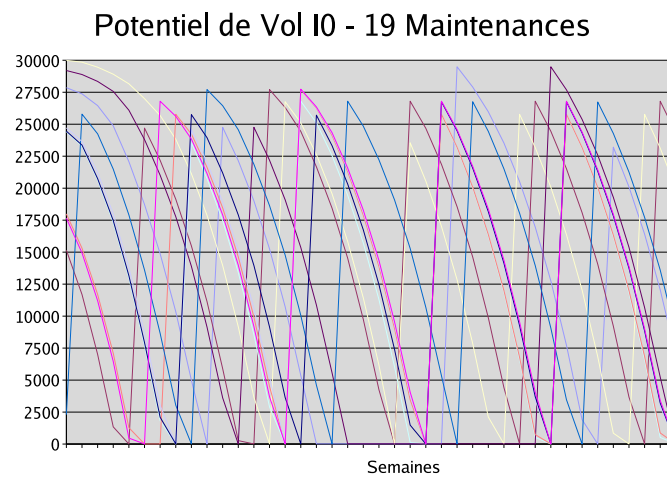


FIG. 6.13 – Recuit simulé

Nous observons que la courbe qui représente le potentiel de vol des avions reste constante pendant plusieurs semaines, sur la figure 6.13. Nous pouvons voir un des cas extrême dans la figure 6.14.

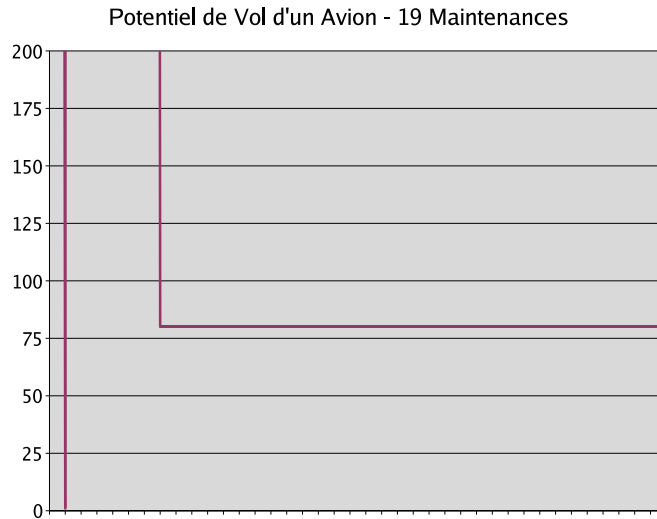


FIG. 6.14 – Potentiel de vol constant d'un avion

Ici l'avion a consommé son potentiel de vol plus vite que prévu et il n' y a pas d'assez de maintenance planifiée. Donc cet avion attend à l'aéroport, jusqu'à la maintenance, sans voler. Les vols sont couverts par le reste de la flotte.

TAB. 6.14 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I0 avec 19 maintenances

I0 - 19 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	395,9	3963,08	2876,32	783,65
PLC - croissant	259,49	4218,21	2972,4	1073,49
PLC - aléatoire	767,69	4452,82	2979,69	785,63
PA	2452,56	3018,97	2753,22	116,51
RS	258,21	4300,26	2972,18	1033,61

Avec la nouvelle politique de maintenance, la méthode du premier atterrissage a toujours l'écart type le plus faible. Par contre le tableau 6.14 nous montre que l'écart type le plus fort est obtenu par la méthode PLC-croissant.

14 Maintenances Les figures 6.15(a), 6.15(b), 6.16 et 6.17 nous aident à comprendre que, quand le nombre de maintenances n'est pas suffisant, alors les avions manquent de potentiel de vol et ils restent bloqués dans les aéroports.

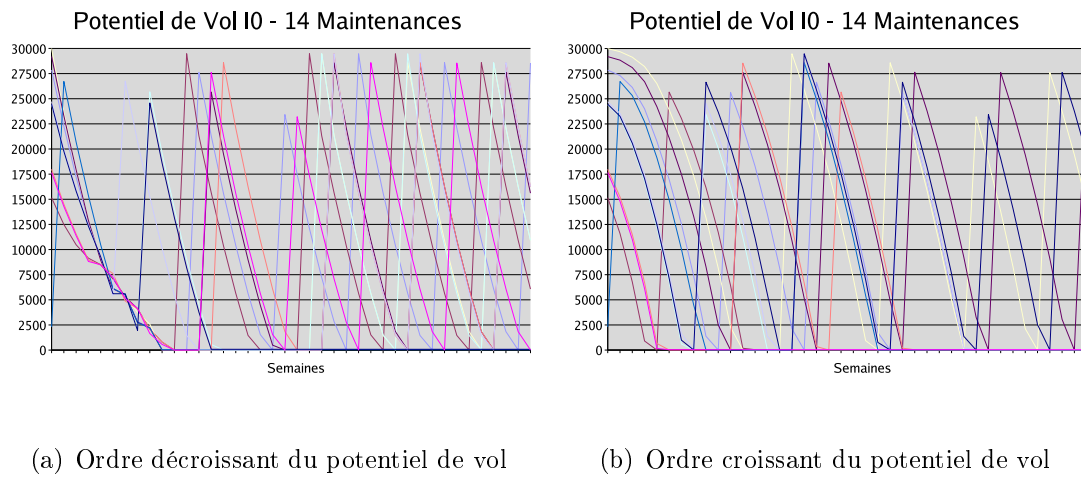


FIG. 6.15 – Méthode basée sur le plus long chemin

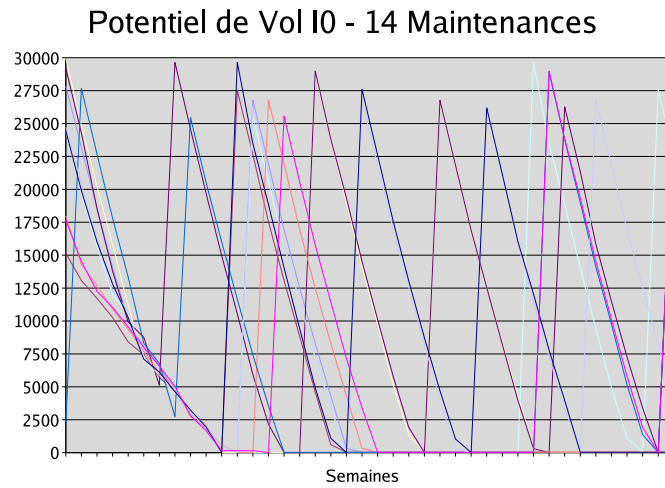


FIG. 6.16 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

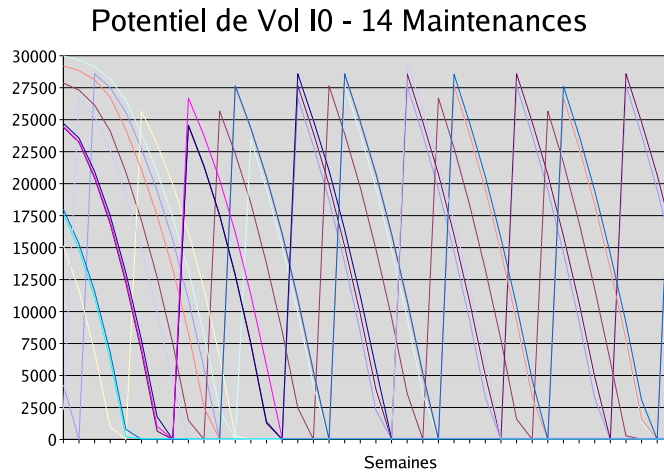


FIG. 6.17 – Recuit simulé

Les figures 6.15(a), 6.15(b), 6.16 et 6.17 justifient l'intérêt de faire une observation sur 40 semaines. Nous ne pouvons pas détecter le problème du blocage des avions si nous regardons seulement les premières semaines. En revanche à la fin de 5 à 10 semaines, nous voyons des avions avec un potentiel de vol qui ne leur permet plus de voler et une intervention de maintenance n'est pas possible avant plusieurs semaines.

TAB. 6.15 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I0 avec 14 maintenances

I0 - 14 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	283,08	4429,74	2298,45	1248,22
PLC - croissant	96,92	4552,31	2338,52	1385,27
PLC - aléatoire	190,77	4660	2349,9	1319,43
PA	362,82	4157,44	2271,11	914,3
RS	96,92	4745,38	2338,45	1388,76

D'après le tableau 6.15, même si la méthode PA a l'écart type le plus faible parmi les autres méthodes, l'écart type maximal obtenu avec la politique de maintenance initiale est largement inférieur à l'écart type de PA, dans le cas actuel. La différence entre l'utilisation maximale et l'utilisation minimale, et l'écart type nous

donne une idée sur l'équilibrage de charge. Quand le nombre de vols par semaine est important par rapport au nombre de maintenance, l'écart entre l'utilisation des avions augmente considérablement.

6.2.2.2 Instance 5 - 2260 Vols

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution du potentiel de vol des avions, avec l'instance 5, qui a moins de vols que l'instance 0.

21 Maintenances Les figures 6.18(a), 6.18(b), 6.19 et 6.20 nous montrent que, lorsque nous diminuons le nombre de vols par semaine, en gardant le même nombre de maintenances, les avions sont *trop* souvent maintenus et ils n'arrivent pas à consommer le potentiel de vol.

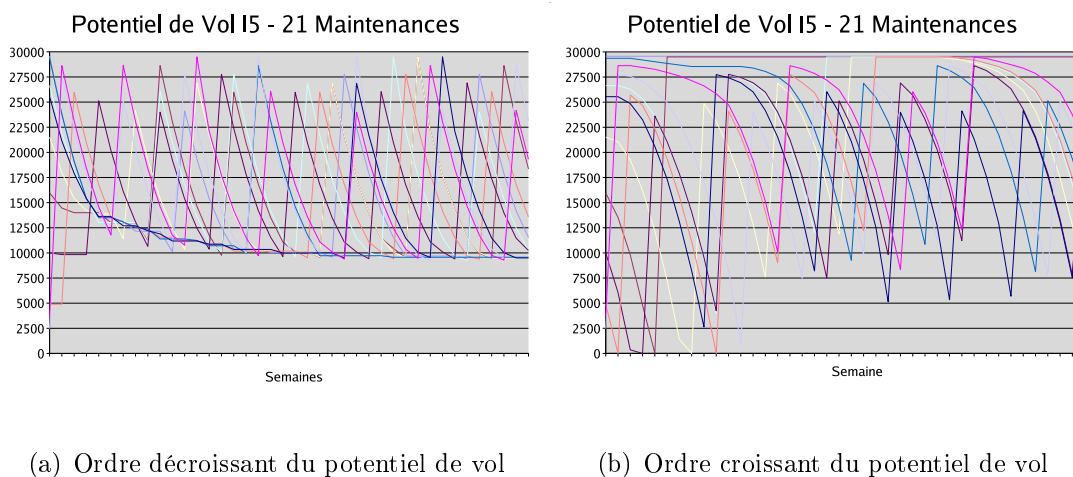


FIG. 6.18 – Méthode basée sur le plus long chemin

Sur la figure 6.18(a) nous voyons encore une fois, les droites horizontales, donc les avions qui ne volent pas. Par contre, le potentiel de vol est positif donc les avions ont la possibilité de voler. Ce qui empêche un avion de voler n'est plus le manque de potentiel de vol mais le manque de vols disponibles. Comme l'avion avec le plus de potentiel de vol est prioritaire avec la méthode PLC-décroissant, un avion qui a le moins de potentiel de vol ne trouve pas un ensemble de vols.

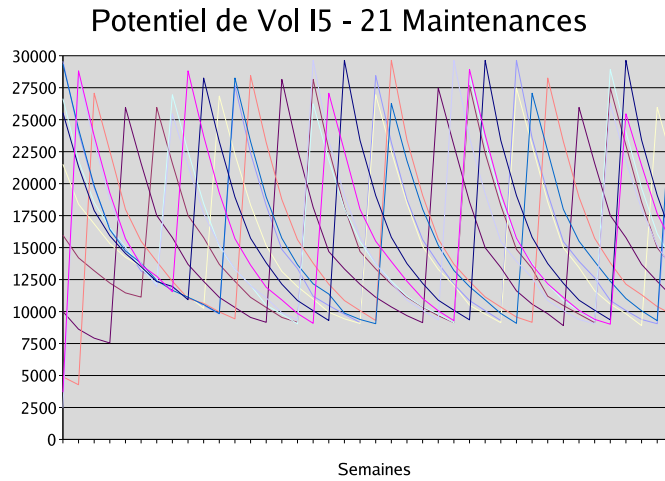


FIG. 6.19 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

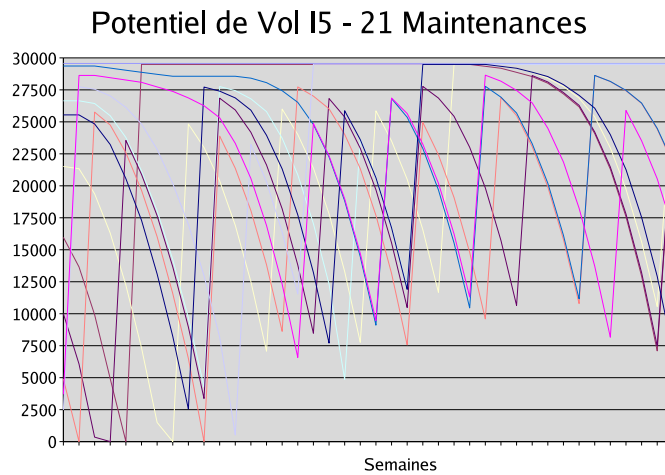


FIG. 6.20 – Recuit simulé

La comparaison des figures 6.18(a), 6.19 et 6.18(b), 6.20 nous montre que, lorsque le nombre de maintenances par semaine est élevé par rapport au nombre de vols, l'ordre décroissant du potentiel de vol des avions non-critiques rend les courbes de potentiel de vol plus régulières. Quand les avions avec un potentiel de vol moins important sont prioritaires, certains avions avec un potentiel de vol plus important

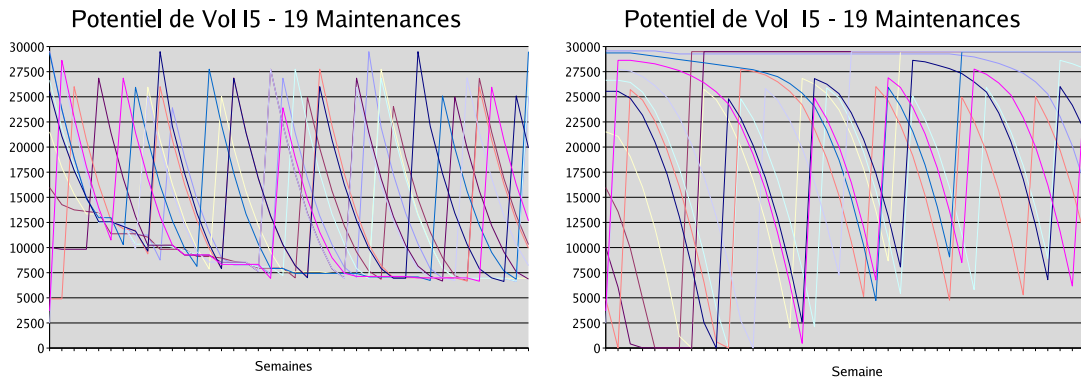
peuvent passer plusieurs semaines sans voler. Dans ce cas, même si les courbes sont moins régulières quand les avions sont triés dans l'ordre croissant du potentiel de vol, les avions critiques consomment mieux leur potentiel de vol

TAB. 6.16 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I5 avec 21 maintenances

I5 - 21 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	655,9	3491,28	2169,89	628,62
PLC - croissant	0	4469,49	2234,13	1041,55
PLC - aléatoire	1263,85	3358,72	2172	355,85
PA	1842,05	2515,38	2190,81	126,81
RS	0	4231,54	2257,04	998,05

Quand nous comparons le tableau 6.16 au tableau 6.13, nous voyons que la moyenne diminue mais l'écart type augmente. La diminution de la moyenne est normale puisque la durée de vol moyenne de l'instance 5 est inférieure à celle de l'instance 0, donc les avions volent moins. Donc la variance entre l'avion qui est utilisé le moins et l'avion qui est utilisé le plus augmente car les avions avec une faible priorité trouvent leur chemin dernièrement et il y a encore moins de vols par rapports à l'instance 0. Par contre la méthode PA (*basée sur le premier atterrissage*) est une exception car son écart type diminue. Étant une méthode de recherche locale, elle trouve des chemins *moins bons* que les autre méthodes pour les avions. Un chemin *moins bon* est un chemin plus court, donc les derniers avions dans la liste ont plus de choix.

19 Maintenances Les figures 6.21(a), 6.21(b), 6.22 et 6.23 illustrent le comportement des avions au cours des semaines, avec une politique de maintenance de 19 interventions par semaine.



(a) Ordre décroissant du potentiel de vol

(b) Ordre croissant du potentiel de vol

FIG. 6.21 – Méthode basée sur le plus long chemin

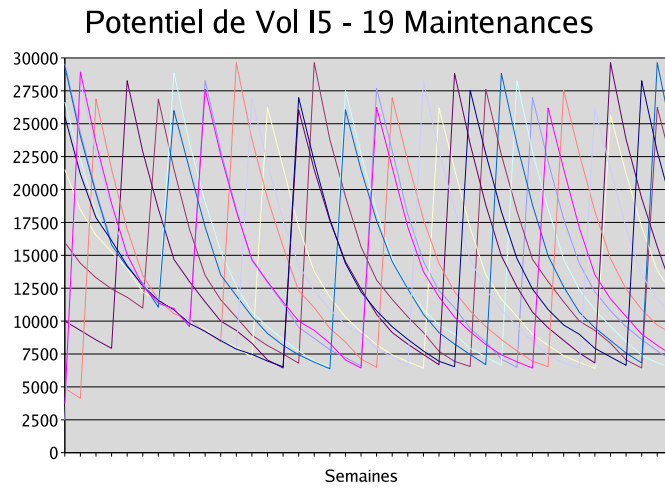


FIG. 6.22 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

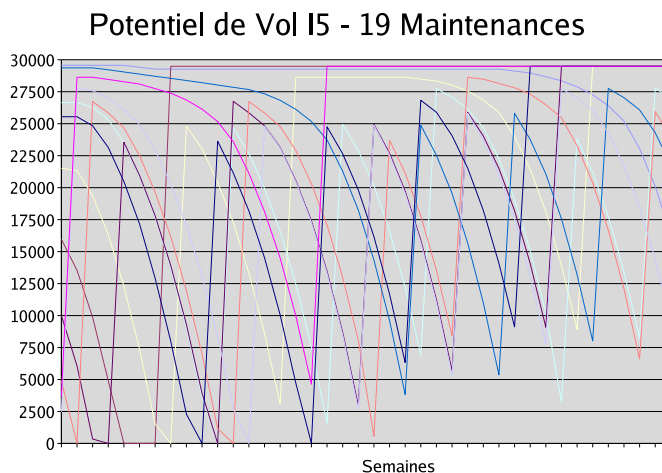


FIG. 6.23 – Recuit simulé

D'après les figures 6.21(a) et 6.22 nous voyons que, quand les avions sont traités dans l'ordre décroissant du potentiel de vol, la consommation de ce potentiel est régulière, malgré une certaine perte. Les avions passent la maintenance lorsqu'ils ont encore environ 7500 minutes de potentiel de vol. Car nous voyons que les courbes sont entre 6000 et 30.000. C'est-à-dire que les avions passent la maintenance malgré la possibilité de voler 100 heures de plus.

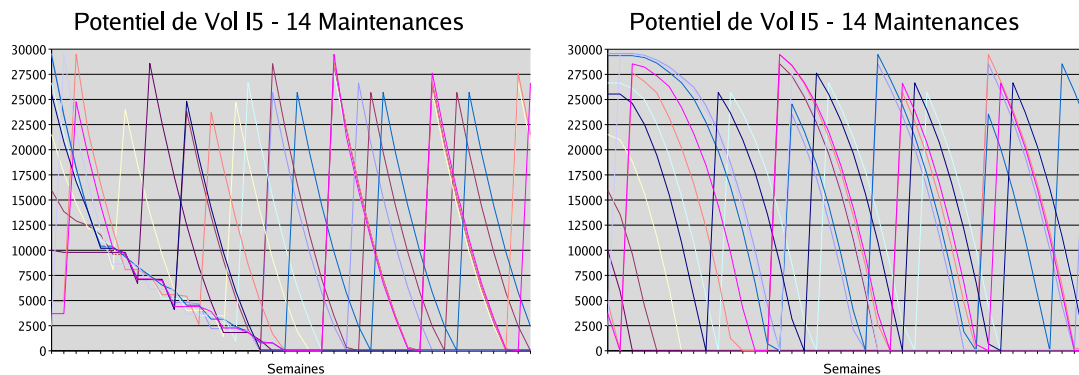
D'autre part, le recuit simulé et PLC-décroissant réussissent à consommer le potentiel de vol des avions les premières semaines mais les courbes ne sont pas régulières (voir les figures 6.21(b) et 6.23).

TAB. 6.17 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I5 avec 19 maintenances

I5 - 19 Maintenance	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	815,9	3424,1	2217,08	559,74
PLC - croissant	0	3713,85	2325,75	968,56
PLC - aléatoire	1245,38	3037,95	2221,8	366,15
PA	1934,87	2639,23	2226,99	126,83
RS	0	3937,18	2339,73	1027,34

Le tableau 6.17 nous confirme encore une fois que la charge de vol est mieux équilibrée quand la règle de priorité des avions est dans l'ordre décroissant du potentiel de vol. Quand les méthodes PLC-croissant et RS, qui traitent les avions non critiques dans l'ordre croissant du potentiel de vol, sont employées pour le planning, l'utilisation minimale des avions sur 40 semaines est zéro. Alors il y a un ou plusieurs avions qui n'ont jamais servi. A première vue, ces avions dégradent l'équilibre de la charge. Mais une autre explication est le nombre excessif d'avions ou de maintenances. Quand les avions non-critiques sont traités dans l'ordre croissant du potentiel de vol, avant les derniers avions (avec le plus de potentiel de vol), tous les vols sont déjà affectés. Ainsi ils ne volent pas et gardent leur potentiel de vol la semaine d'après et ils ne sont toujours pas prioritaires. Pour cette raison, certains avions ne volent jamais pendant 40 semaines et l'utilisation minimale des avions est 0.

14 Maintenances Comme nous l'avons déjà vu, si le nombre de vols est relativement faible par rapport au nombre d'avions, dans ce cas, nous pouvons diminuer le nombre d'interventions par semaine. Nous allons observer la politique de maintenance avec 14 interventions pendant 40 semaines.



(a) Ordre décroissant du potentiel de vol

(b) Ordre croissant du potentiel de vol

FIG. 6.24 – Méthode basée sur le plus long chemin

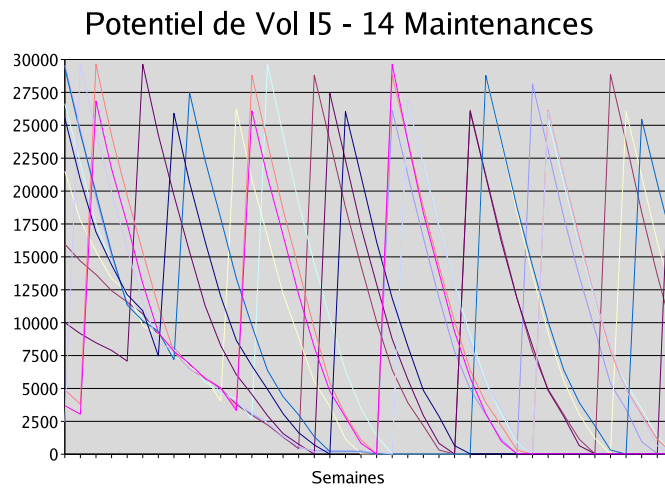


FIG. 6.25 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

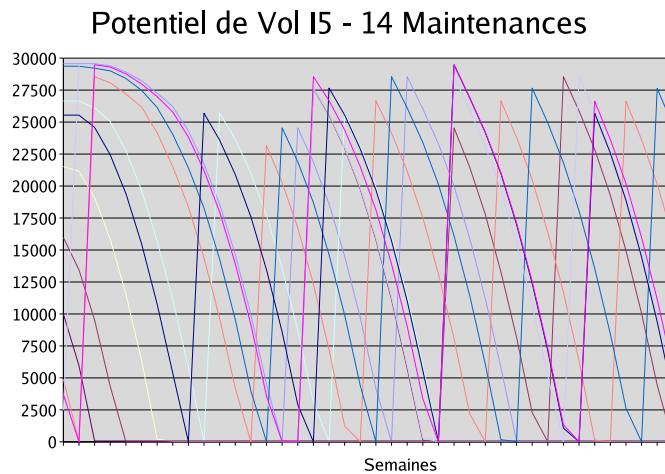


FIG. 6.26 – Recuit simulé

Nous pouvons constater dans les figures 6.24(a), 6.24(b), 6.25 et que certaines courbes qui correspondent au potentiel de vol des avions reste constante à zéro. C'est-à-dire, les avions attendent la maintenance sans pouvoir voler puisque leur potentiel de vol est zéro.

TAB. 6.18 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I5 avec 14 maintenances

I5 - 14 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	296,92	4124,62	2207,58	922,07
PLC - croissant	127,95	4216,67	2297,01	1263,31
PLC - aléatoire	111,54	4058,97	2317,71	1108,95
PA	421,54	3346,15	2187,61	765,35
RS	128,46	4234,62	2297,15	1180,48

Malgré le fait que la méthode PA ne réussit pas à éviter les blocages des avions, elle a l'écart type minimal, d'après le tableau 6.18. D'autre part, nous avons l'impression que le recuit simulé donne les courbes les plus régulières mais il a l'écart type le plus important, après PLC-croissant. Lorsque le nombre de maintenance décroît, le rôle du recuit simulé diminue, parce que le recuit simulé ne traite que les avions critiques. Le planning du reste de la flotte est fait par PLC-croissant. Avoir un écart-type similaire est donc normal.

6.2.2.3 Instance 10 - 1722 Vols

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats du dernier groupe de tests . Ces tests sont faits sur l'instance 10, qui contient 1722 vols de type aller-retour.

21 Maintenances Nous allons encore observer le comportement des avions sous les différentes politiques de maintenance. Les figures 6.27(a), 6.27(b), 6.28 et 6.29 montrent les résultats des tests de la politique de maintenance de 21 interventions.

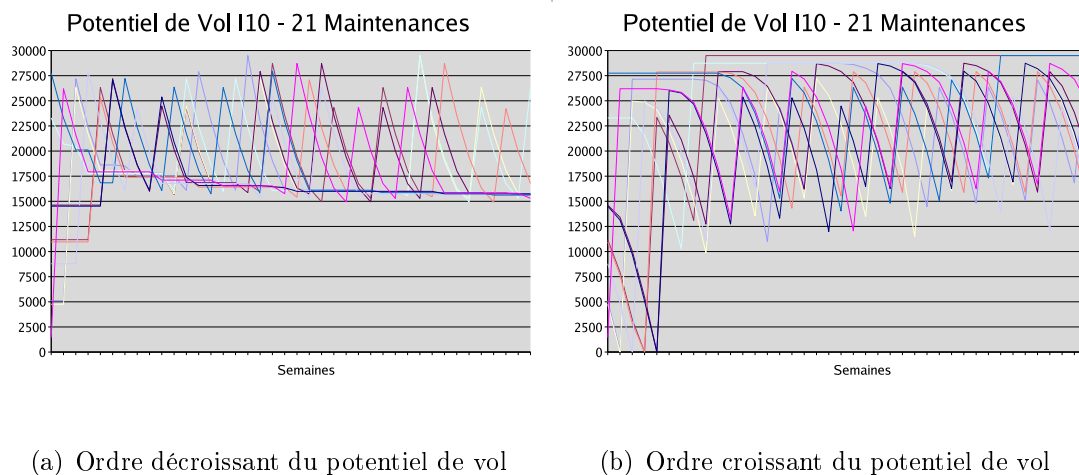


FIG. 6.27 – Méthode basée sur le plus long chemin

Sur les figures 6.27(a) et 6.27(b) nous observons qu'il y a une perte considérable du potentiel de vol des avions parce que les courbes sont comprises entre 15.000 et 30.000. Alors un avion peut encore voler plus de 250 heures quand il passe à la maintenance, ce qui est normal puisque le nombre de maintenances est beaucoup trop important par rapport à la charge moyenne des avions par semaine. Ils ne réussissent pas à consommer le potentiel de vol.

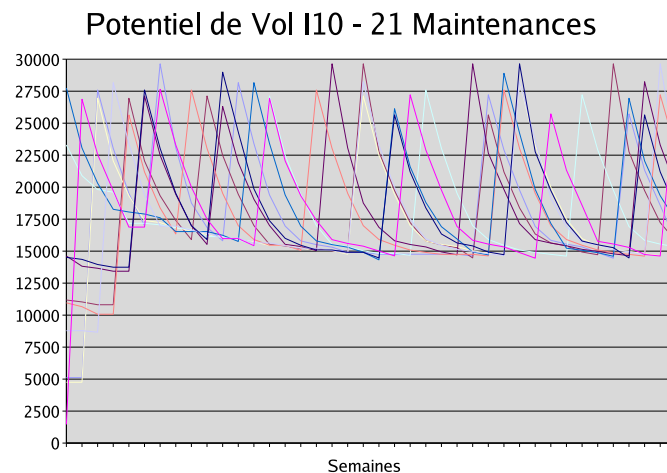


FIG. 6.28 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

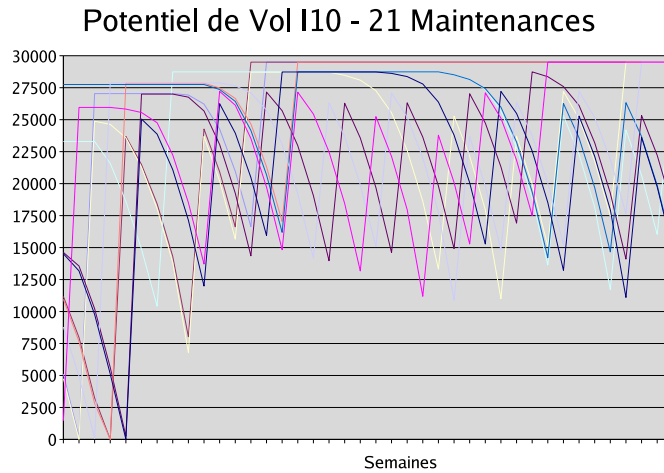


FIG. 6.29 – Recuit simulé

TAB. 6.19 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I10 avec 21 maintenances

I10 - 21 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	37,95	3254,87	1559,33	665,87
PLC - croissant	0	3941,79	1590,29	1024,73
PLC - aléatoire	877,69	2590,51	1559,69	329,96
PA	736,92	2241,54	1617,93	294,59
RS	0	4023,59	1609,17	1012,68

La méthode PA a toujours l'écart type minimum sur le tableau 6.19. En revanche, comparé aux résultats de l'instance 5 avec 21 maintenances, seule cette méthode augmente considérablement son écart type.

19 Maintenances Pour diminuer la perte de potentiel de vol, nous allons essayer de planifier les vols avec une politique de maintenance qui contient 19 interventions. Les figures 6.30(a), 6.30(b), 6.31 et 6.32 vont nous montrer les résultats obtenus par les méthodes PLC (*ordre croissant et décroissant*), PA et RS.

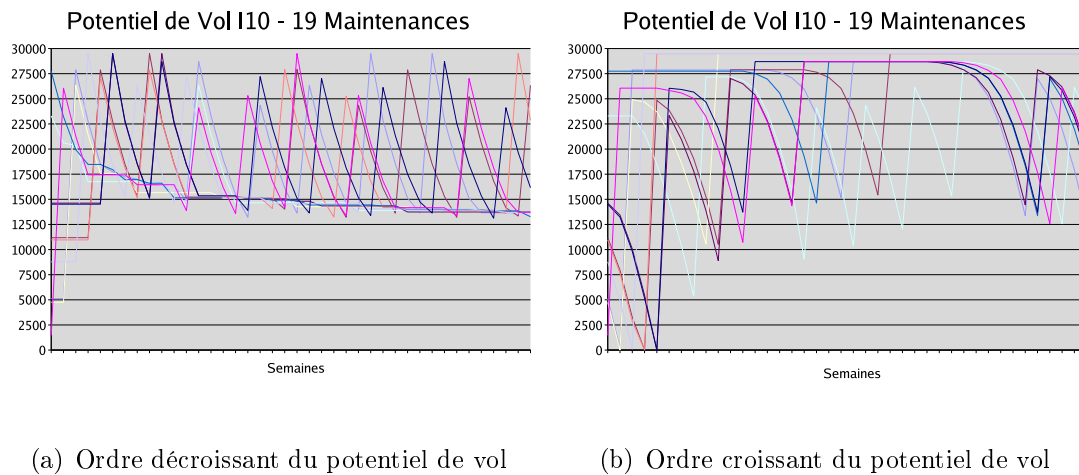


FIG. 6.30 – Méthode basée sur le plus long chemin

Même si la perte est tombée de 15.000 minutes à 12.500 avant la maintenance, l'annulation de 2 maintenances par semaine ne suffit pas pour maximiser l'utilisation des avions. Ce résultat n'est pas inattendu puisque c'était déjà le cas pour l'instance précédente.

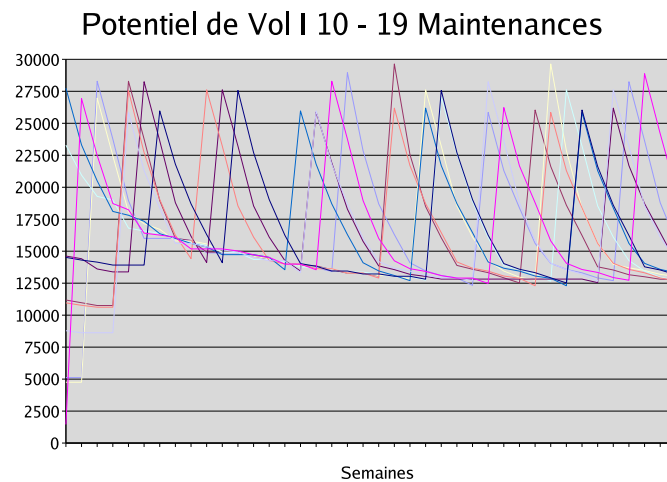


FIG. 6.31 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

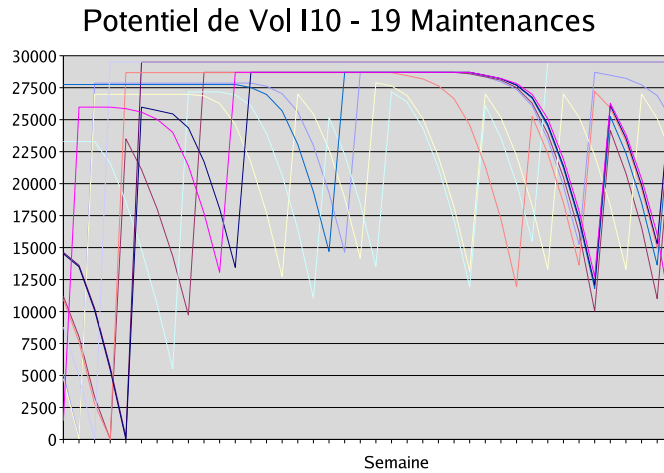


FIG. 6.32 – Recuit simulé

TAB. 6.20 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I10 avec 19 maintenances

I10 - 19 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	130	3454,36	1604,13	782,19
PLC - croissant	0	4065,64	1641,05	1070,15
PLC - aléatoire	792,82	2619,23	1605,17	356,92
PA	374,87	2309,74	1655,71	367,29
RS	0	4652,82	1656,71	1077,27

Le tableau 6.20 reste similaire au tableau 6.19 à part une légère augmentation. Par contre pour la première fois PLC-aléatoire a un écart type plus faible que PA, même si la différence est négligeable.

14 Maintenances La dernière série de tests que nous allons présenter est faite sur l'instance 10 et avec la politique qui contient le moins d'interventions. Les figures 6.33(a), 6.33(b), 6.34 et 6.35 illustrent l'évolution du potentiel de vol des avions.

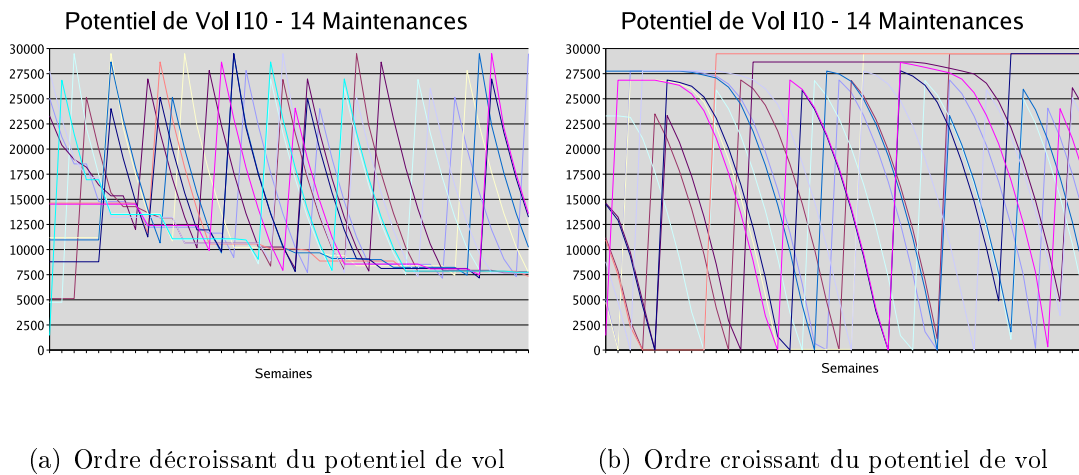


FIG. 6.33 – Méthode basée sur le plus long chemin

C'est la première fois nous voyons une telle différence entre PLC-croissant et PLC-décroissant. La première méthode a une allure plus régulière qui trouve l'équilibre vers les dernières semaines, avec une perte d'environ 7500 minutes. En revanche, les courbes de PLC-croissant sont moins régulières mais la perte de potentiel de vol est beaucoup plus limitée.

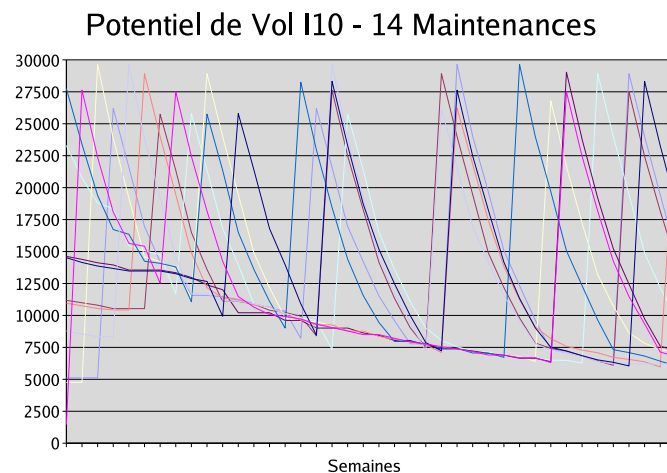


FIG. 6.34 – Heuristique basée sur la règle du premier atterrissage

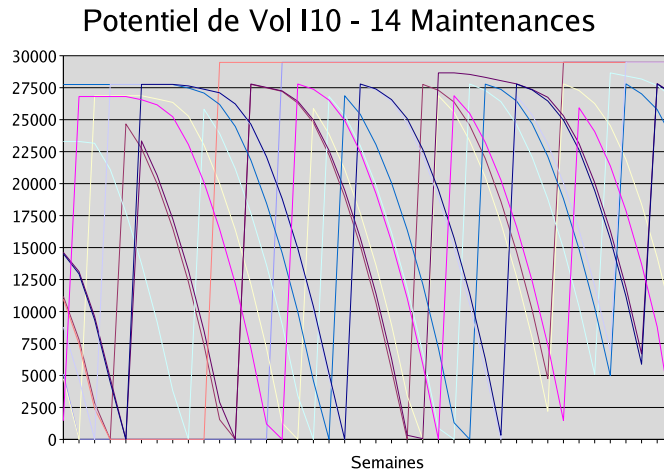


FIG. 6.35 – Recuit simulé

Quand nous regardons les figures 6.34 et 6.35, PA a environ 7500 minutes de perte de potentiel avec une allure plus régulière, tandis que le recuit simulé consomme la quasi totalité du potentiel mais avec un écart type beaucoup plus important que PA.

TAB. 6.21 – Utilisation des avions en minutes pour l'instance I10 avec 14 maintenances

I10 - 14 Maintenances	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>
PLC - décroissant	349,74	3398,97	1642,78	649,65
PLC - croissant	0	4032,05	1827,17	1264,93
PLC - aléatoire	771,79	2712,56	1652,41	356,12
PA	520,51	2791,03	1687,09	460,05
RS	0	4042,05	1828,93	1254,08

Nous pouvons noter sur le tableau 6.21 que la moyenne d'utilisation des méthodes PLC-croissant et RS sont plus élevées que celles des autres méthodes. La même différence existe aussi au niveau de l'écart type. L'écart type de ces deux méthodes est considérablement plus important que celui des autres méthodes.

6.2.3 Étude de l'approche heuristique basée sur Dantzig-Wolfe

Dans cette partie, nous allons exploiter les variables duales obtenues par la résolution du problème maître restreint afin de trouver une solution heuristique. En même temps, nous cherchons une borne inférieure. Une borne inférieure d'un problème nous aide à juger la qualité de la solution obtenue. Dans notre approche, le modèle linéaire (le problème maître restreint) ne contient pas toutes les colonnes, alors nous ne pouvons pas nous servir de la relaxation linéaire. Dans ce cas, nous pouvons toujours calculer une borne inférieure grâce à la relaxation lagrangienne. Nous utiliserons la valeur des variables duales trouvée par la méthode du simplexe, comme le multiplicateur de Lagrange.

Sur la figure 6.36, nous observons l'évolution de la borne lagrangienne au cours des itérations, pour les différentes instances.

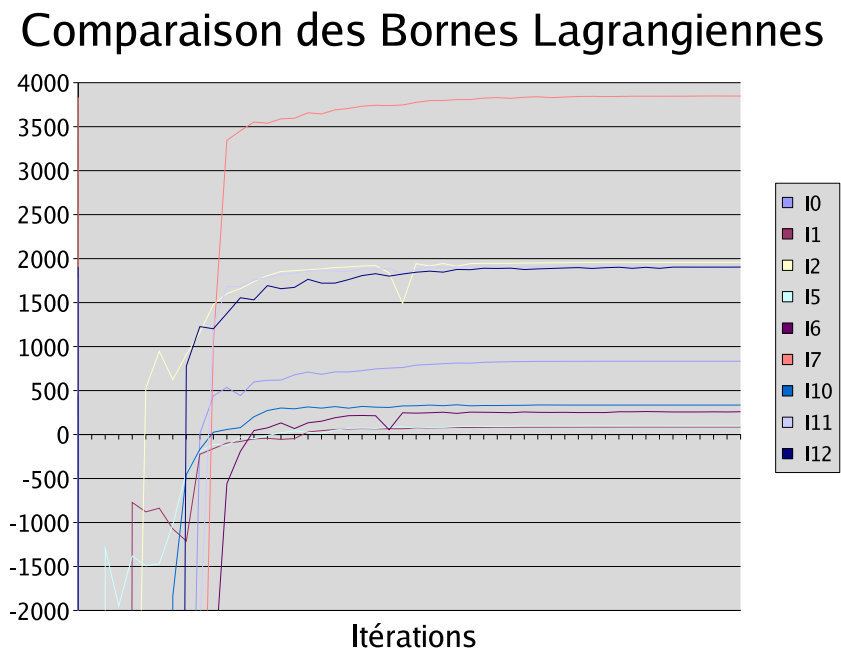


FIG. 6.36 – Evolution des bornes lagrangiennes sur 50 itérations

Sur 9 instances nous voyons que, dès la deuxième itération la borne lagrangienne devient négative pour remonter plus tard. Selon les instances, la borne lagrangienne

devient positive entre les itérations 6 et 17. Par contre quand nous regardons l'instance 1 sans utiliser les colonnes fournies par les heuristiques H1 et H2, la borne lagrangienne ne devient jamais positive. La figure 6.37 illustre plus de 300 itérations mais la borne lagrangienne reste toujours négative. Donc nous pouvons constater que l'utilisation des heuristiques H1 et H2 aide à stabiliser les variables duales en donnant des chemins différents aux avions, et la borne lagrangienne converge plus vite.

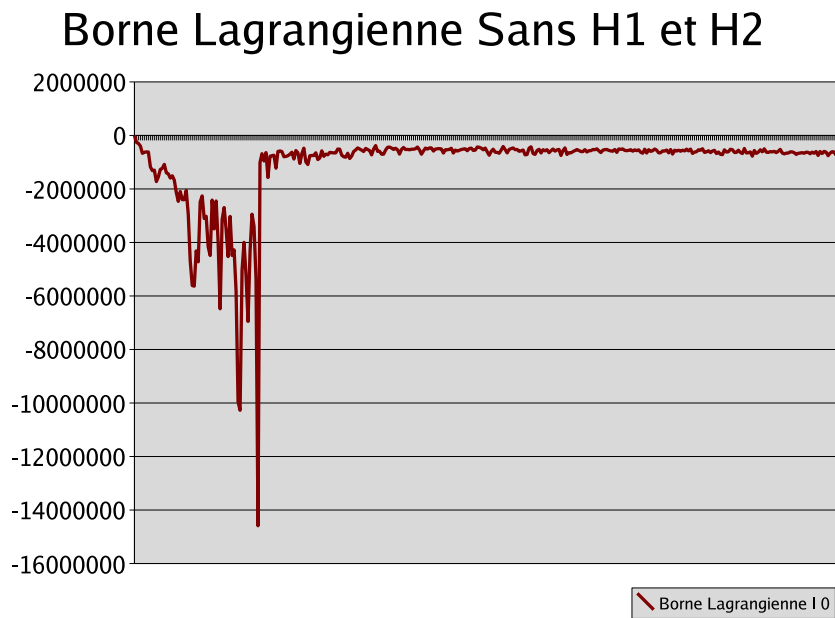


FIG. 6.37 – Borne lagrangienne sans les heuristiques

Le phénomène d'*accélérer* la borne lagrangienne est très intéressant. Le fait d'ajouter une solution complète, même avec des violations d'arcs et notamment avec des coûts de pénalité, stabilise les variables duales. Cette stabilisation implique une remontée rapide de la borne inférieure obtenue par la relaxation lagrangienne. Rappelons que la violation d'arcs est l'utilisation des arcs ajoutés (arcs artificiels) qui n'existaient pas dans le graphe associé au problème. En revanche ces arcs existent dans le graphe associé au problème que nous avons résolu avec les algorithmes de liste et la méthode métaheuristique. Nous avons fait référence à ces arcs artificiels

par le terme *saut* dans le chapitre précédent.

A chaque itération, nous notons la borne lagrangienne et nous la comparons à la solution obtenue par la relaxation linéaire et au résultat de l'heuristique. Sur la figure 6.38 nous donnons le dernier résultat réalisable de l'heuristique, sur l'instance 0, à chaque itération. Il faut noter que la solution obtenue par la résolution de la relaxation linéaire du modèle n'est pas une borne inférieure du problème puisque toutes les colonnes ne sont pas ajoutées.

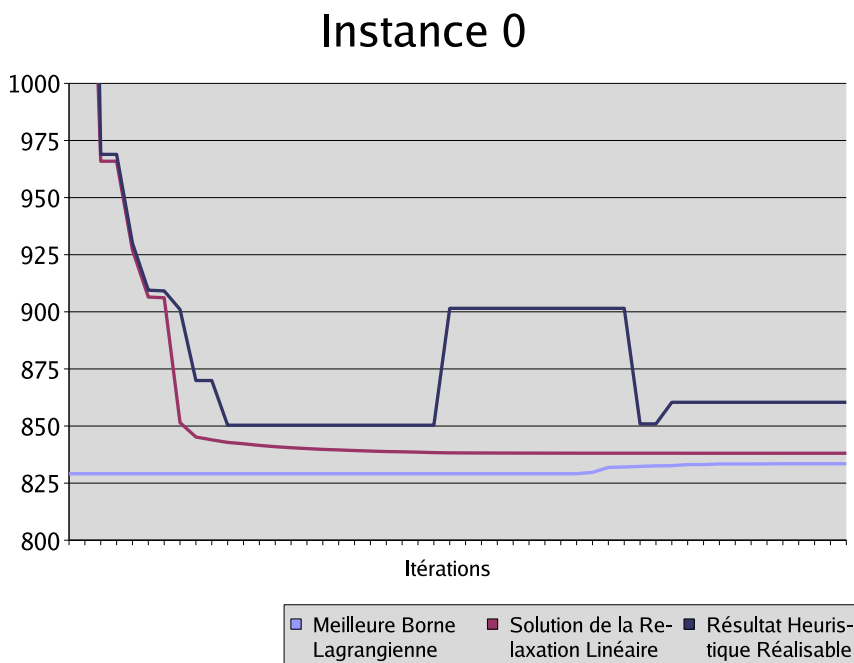


FIG. 6.38 – Borne lagrangienne, solution de la relaxation linéaire et résultat heuristique

La durée d'exécution de la méthode étant considérable, nous avons limité le nombre d'itération à 50. A la fin des 50 itérations la méthode n'est pas capable de donner une solution sans violation d'arcs pour certaines instances. Ces violations d'arcs correspondent à l'utilisation des arcs ajoutés avant de trouver des chemins disjoints par les heuristiques H1 et H2. Ces arcs ajoutés représentent une attente longue dans l'aéroport. Les conditions de la durée minimale entre deux vols sont toujours respectées.

Même si cette solution n'est pas réalisable sur le graphe associé au problème, il faut savoir que les arcs ajoutés existent sur le graphe associé que nous avons utilisé pour les méthodes PLC, PA et RS.

TAB. 6.22 – Résultats génériques de la méthode heuristique basée sur la décomposition Dantzig-Wolfe

Instances	Meilleure borne lagrangienne	Meilleur résultat heuristique	Nombre min de violations	Ecart %
I 0	833,49	850,36	0	2,02
I 1	86,12	91,84	0	6,65
I 2	1958,71	1979,32	0	1,05
I 5	209,03	229,94	0	10,00
I 6	443,67	503,61	5	13,51
I 7	3848,81	4671,3	3	21,37
I 10	457,67	524,25	1	14,55
I 11	1910,44	3791,86	6	98,48
I 12	1903,71	2238,62	1	17,59

Le tableau 6.22 nous montre la meilleure borne inférieure, le meilleur résultat heuristique et le nombre minimum de violations. Si, à la fin des 50 itérations, nous ne trouvons pas une solution réalisable avec l'heuristique, nous notons la meilleure solution avec le nombre minimum de violations. Le coût de pénalité des violations n'est pas inclu dans le résultat de l'heuristique. Finalement nous calculons l'écart entre la meilleure solution et la meilleure borne lagrangienne.

Nous voyons que quand le nombre de vols dans la semaine diminue, l'écart entre la meilleure solution et la borne inférieure augmente. Cette conséquence peut être expliquée par la nécessité de faire plus d'itérations pour les instances avec moins de vols parce que le problème primal a moins de colonnes et le problème dual a donc moins de contraintes. Ainsi la solution du problème dual est plus extrême. Puisque les heuristiques H1 et H2 utilisent l'information obtenue à partir de valeurs des variables duales, les variables non stabilisées ne donnent pas d'information amélioratrice.

6.2.4 Comparaison des durées d'exécution des méthodes

Malgré les aspects théoriques, la planification des vols d'une compagnie aérienne reste un problème industriel. En plus, les compagnies font face à ce problème chaque jour. Même si la planification est faite pour la semaine, la surveillance est cruciale à cause des aléas dans le transport aérien. Dans ce milieu, les décisions doivent être prises rapidement. Pour cela, la durée d'exécution des méthodes proposées a sans doute beaucoup d'importance. Nous allons donc étudier la vitesse des méthodes.

TAB. 6.23 – Durées d'exécution en minutes

Méthode	F 1	F 2	F 3
PLC-aléatoire	3,9	4,2	1,7
PLC-décroissant	6,8	4,2	1,58
PLC-croissant	11,3	4,5	1,75
PA	5,3	3,9	2,23
RS	13,6	6,4	4,3

Nous pouvons voir la vitesse moyenne des méthodes proposées au tableau 6.23 en minutes, par famille d'instances. La première famille d'instance (F 1) contient les instances (I 0, I 1, I 2, I 3, I 4), F 2 contient (I 5, I 6, I 7, I 8, I 9) et la dernière famille F 3 contient les instances (I 10, I 11, I 12, I 13, I 14). La vitesse des méthodes est calculée sur 5 instances, 40 semaines et 3 politiques de maintenance. Nous constatons que le planning de vol pour une semaine, par la méthode PLC-croissant ou RS dure le plus longtemps, sauf F 3 où la méthode PA est plus lente que PLC-croissant. Pourtant, le temps d'exécution de toutes les méthodes heuristiques reste très faible.

Pour faire 50 itérations de la génération de colonnes, le temps nécessaire par instance est donné au tableau 6.24. Nous constatons que si le nombre de vols (*sommets*) et des connexions (*arcs*) diminuent, la durée d'exécution baisse aussi.

L'approche basée sur la génération de colonnes est composée de plusieurs étapes. Nous allons observer la part des composants : problème maître, problème esclave et les heuristiques H1 et H2, sur les instances I 0, I 5 et I 10.

TAB. 6.24 – Durée d'exécution en minutes

Instance	Durées d'exécution
I 0	2462,05
I 1	1894,35
I 2	2237,26
I 5	1587,00
I 6	1401,39
I 7	1249,34
I 10	811,13
I 11	840,05
I 12	802,6

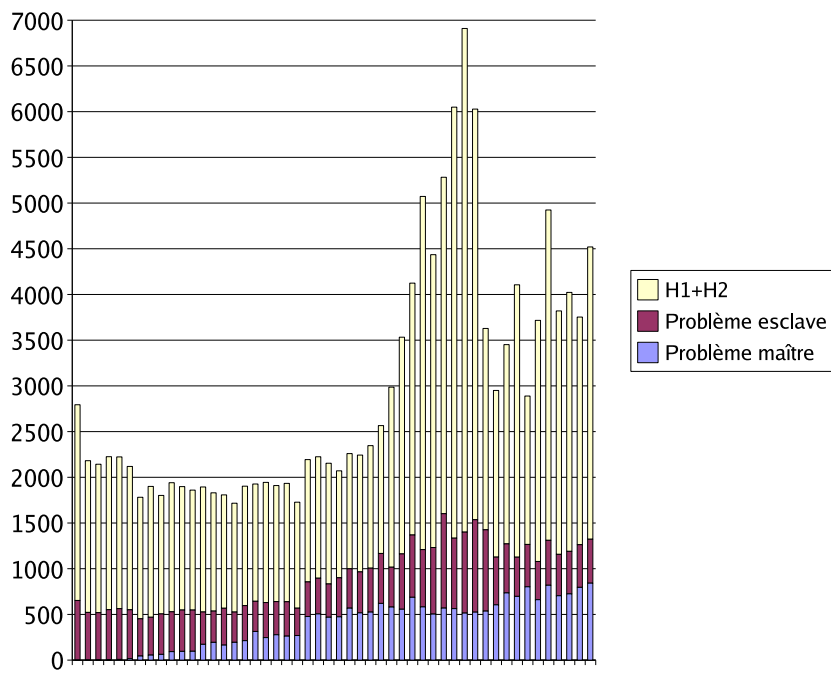


FIG. 6.39 – Répartition des temps entre les différentes parts : I O

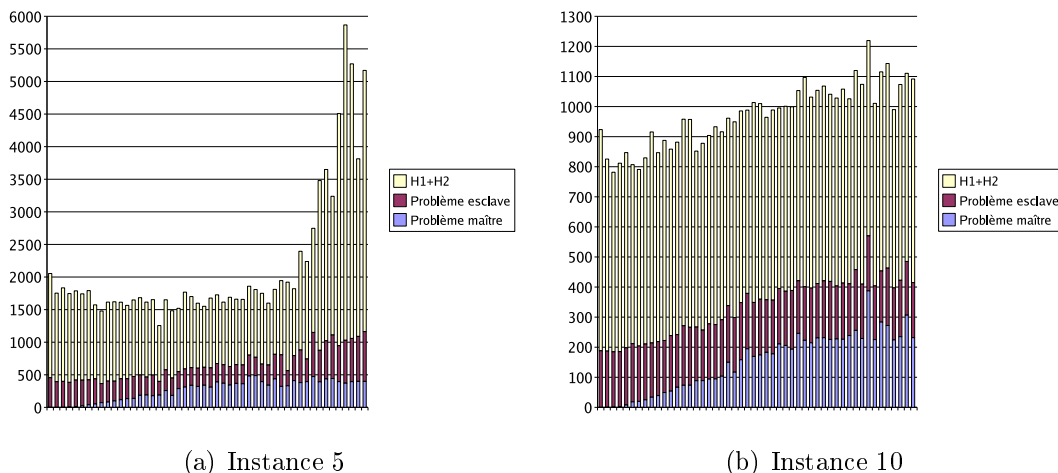


FIG. 6.40 – Méthode basée sur la décomposition Dantzig-Wolfe

Sur les figures 6.39, 6.40(a) et 6.40(b) nous voyons que la majeure partie de la consommation du temps est la part des heuristiques H1 et H2. Même si pendant certaines itérations la durée d'exécution de H1 et H2 varie, dans la plupart des cas, la variance est faible. Car, l'entrée des heuristiques est toujours le même graphe et elle ne change pas en fonction des itérations. Par contre la part du problème maître augmente au cours des itérations. Ce fait est expliqué par le nombre croissant des colonnes et donc, des variables.

Au cours des tests, nous nous sommes rendu compte que les techniques de *presolving* de CPLEX accélèrent considérablement la résolution du problème. Si nous nous contentons de définir le modèle une seule fois et nous ajoutons des colonnes toujours au programme linéaire, ces techniques sont employées une fois. Les itérations suivantes deviennent beaucoup plus lentes. Pour éviter ce cas, nous redéfinissons le programme linéaire à chaque itération afin d'utiliser les techniques de *presolving* et d'accélérer la résolution.

Dans ce chapitre nous avons comparé les algorithmes de liste et l'approche métaheuristique basée sur le recuit simulé par rapport à la perte de potentiel de vol et l'équilibrage de charge des avions. Nous avons fait les tests sur 40 semaines consécutives pour observer l'évolution de l'état des avions sur le long terme. Une compagnie aérienne qui veut faire son planning doit choisir le cas où ces avions ne sont pas blo-

qués (pas de courbe constante horizontale) et le potentiel de vol des avions doivent approcher de la valeur zéro juste avant la maintenance. Cette décision sera prise en fonction de nombre de vols par semaine, la capacité de la base de maintenance et la taille de la flotte.

Nous avons aussi présenté les résultats de la méthode heuristique basée sur la décomposition Dantzig-Wolfe (la génération de colonnes). Nous avons analysé les résultats de la borne inférieure, obtenue par la relaxation lagrangienne et la relaxation linéaire du problème maître restreint. Le modèle mathématique que nous avons reformulé a une composante quadratique dans la fonction objectif. La reformulation et la décomposition nous ont permis d'utiliser les techniques de la résolution linéaire. Finalement nous avons regardé le temps de résolution et étudié la consommation de temps de différentes parties de la méthode (le problème maître restreint, le sous-problème, les heuristiques H1 et H2).

CHAPITRE 7

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

7.1 Conclusions

Le sujet de cette thèse consistait à résoudre un problème de planification des vols dans une compagnie aérienne. Il est aussi connu sous le nom de la rotation des avions. Malgré une riche littérature sur ce problème, chaque compagnie a ses objectifs et ses contraintes particulières. Nous avons donc étudié un cas où le planning de maintenance des avions était déjà figé. L'objectif de ce problème était l'optimisation de l'utilisation des avions. Cette amélioration est définie par deux critères : la maximisation de l'utilisation des avions critiques avant une intervention de maintenance et l'équilibrage de charge de vol.

Dans un premier temps nous avons fait une étude théorique sur la complexité du problème et nous avons montré que même le problème de faisabilité (couvrir tous les vols sans dépasser la limite légale de vol) est NP-difficile.

Nous avons proposé un graphe de connexions pour modéliser le problème que nous avons traduit par "Couverture d'un graphe orienté acyclique, sommet-pondéré, par des chemins disjoints sous contrainte de longueur".

Ensuite nous avons proposé des approches heuristiques basées sur la méthode du plus long chemin, du premier atterrissage et une approche métaheuristique qui traitent les avions dans un ordre donné. Ces approches avaient pour objectif, la maximisation de l'utilisation des avions critiques dans la semaine de planning et l'équilibrage de charge sur le long terme. Nous avons également étudié les conséquences des différentes règles de priorité de l'ordre des avions. Nous avons testé les méthodes sur différentes instances avec différentes politiques de maintenance, pendant 40 semaines. Nous avons montré l'évolution du potentiel de vol des avions au cours des semaines.

Finalement nous avons présenté une approche basée sur la génération de colonnes qui a une fonction objectif à deux critères : la maximisation de l'utilisation d'un

sous-ensemble des avions et l'équilibrage de la charge de vol du reste. Une méthode heuristique qui exploite les variables duales à chaque itération de la génération de colonne réussit à trouver des solutions de très bonne qualité avec le moins de violation de connexion possible. Une violation est l'utilisation d'un arc ajouté et qui n'existait pas dans le graphe associé. En revanche, ces arcs respectent la contrainte de durée minimum entre deux vols. La contrainte violée est la durée maximale entre deux vols. Ainsi, en utilisant un arc ajouté, un avion peut enchaîner deux vols entre lesquels il y a une attente non souhaitée par la compagnie aérienne. Nous avons également calculé une borne inférieure du problème maître grâce à la relaxation lagrangienne.

7.2 Perspectives

Dans la suite de cette thèse nous voulons intégrer une politique de maintenance plus dynamique dans notre problème. Nous souhaitons avoir un planning de maintenance plus souple, dans lequel le nombre et la date des interventions ne sont pas fixés, mais générées en fonction de l'évolution du potentiel de vol des avions.

La méthode de génération de colonnes nous présente beaucoup de piste à approfondir. Le coût de pénalité que nous avons mis pour les avions qui ont un chemin avec une violation d'arc est un coût fixe. Ce coût de pénalité peut être dynamique et dépendre de la meilleure borne inférieure et de la meilleure solution réalisable. Ce coût évolutif aidera à éliminer les solutions avec des violations d'arcs.

Nous avons vu que l'utilisation des heuristiques H1 et H2 accélère considérablement la convergence de la borne inférieure lagrangienne en stabilisant plus vite les variables duales. Donc une étude approfondie du polyèdre associé peut expliquer le rôle des heuristiques H1 et H2 dans la stabilisation des variables duales. Cette explication peut nous être utile afin de trouver des coupes performantes pour le problème dual.

BIBLIOGRAPHIE

- [AB004] Airbus a320 family to benefit from lower maintenance costs. *Airbus Press Center*, Novembre, 2004.
- [Aba89] J. Abara. Applying integer linear programming to the fleet assignment problem. *Interfaces*, (19) :20–28, 1989.
- [ABEP07] H. M. Afsar, O. Briant, M.-L. Espinouse, and B. Penz. 1.an heuristic solution method of a quadratical model of aircraft rotation problem based on dantzig-wolfe decomposition. In *The 20th Anniversary Conference of the European Chapter of Combinatorial Optimization (ECCO)*, 2007.
- [AEP06a] H. M. Afsar, M.-L. Espinouse, and B. Penz. Flight and maintenance planning in the airline companies. In *14th International Working Seminar on Production Economics*, 2006.
- [AEP06b] H. M. Afsar, M.-L. Espinouse, and B. Penz. Planification des vols des appareils d’une compagnie aérienne avec prise en compte de la maintenance. In *7ème Congrès ROADEF*, 2006.
- [AEP06c] H. M. Afsar, M.-L. Espinouse, and B. Penz. A two-step heuristic to build flight and maintenance planning in a rolling horizon. In *3rd IEEE Service Systems and Service Management - IEEE/SSSM*, 2006.
- [AEP07a] H. M. Afsar, M.-L. Espinouse, and B. Penz. A simulated annealing algorithm and heuristic approaches to build flight and maintenance planning for an airline company. In *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*, 2007.
- [AEP07b] H. M. Afsar, M.-L. Espinouse, and B. Penz. Un algorithme de recuit simulé pour la planification des vols des appareils d’une compagnie aérienne. In *Conférence Conjointe FRANCORO V/ ROADEF 2007*, 2007.
- [AGL⁺03] R. K. Ahuja, J. Goodstein, J. Liu, A. Mukherjee, J. B. Orlin, and D. Sharma. *Operations Research in Space and Air*. Kluwer Academic Publishers, 2003.

- [AkPN05] H. Al-kaabi, A. Potter, and M. Naim. Review of the configuration of airlines' aftermarket logistics. In *Proceedings of the 10th Logistics Research Network Conference*, 2005.
- [AV85] E. H. L. Aarts and P. J. M. VanLaarhoven. Statistical cooling : a general approach to combinatorial optimisation problems. *Philips Journal of Research*, 40 :193–226, 1985.
- [BBC⁺98] C. Barnhart, N. L. Boland, L. W. Clarke, E. L. Johnson, G. Nemhauser, and R. G. Shenoi. Flight string models for aircraft fleetting and routing. *Transportation Science*, 32 :208–220, 1998.
- [BBJ⁺05] F. Bian, E. K. Burke, S. Jain, G. Kendall, G. M. Koole, J. D. Landa Silva, J. Mulder, M. C. E. Paelinck, C. Reeves, I. Rusdi, and M. O. Suleman. Measuring the robustness of airline fleet schedules. *Multidisciplinary Scheduling : Theory and Applications*, 10 :381–392, 2005.
- [BCN00] N. L. Boland, L. W. Clarke, and G. L. Nemhauser. The asymmetric traveling salesman problem with replenishment arcs. *European Journal of Operational Research*, 123 :408–427, 2000.
- [BLM⁺06] O. Briant, C. Lemaréchal, Ph. Meurdesoif, S. Michel, N. Perrot, and F. Vanderbeck. Comparison of bundle and classical column generation. *Mathematical Programming*, Publication en ligne, 2006.
- [BLS03] M. Bourgeois, G. Laporte, and F. Semet. Heuristics for the black and white traveling salesman problem with replenishment arcs. *Computers & Operations Research*, 30 :75–85, 2003.
- [BO99] D. L. Bryan and M. E. O'Kelly. Hub-and-spoke networks in air transportation : An analytical review. *Journal of Regional Science*, 39 :275–295, 1999.
- [BYA01] J. F. Bard, G. Yu, and M. F. Arguello. Optimizing aircraft routings in response to ground delays. *IIE Transactions*, 33 :931–947, 2001.
- [CJNZ97] L. Clarke, E. Johnson, G. Nemhauser, and Z. Zhu. The aircraft rotation problem. *Annals of Operations Research*, 69 :33–46, 1997.

- [CPZ00] J.-C. Culioli and A. Partouche-Zembra. La recherche opérationnelle dans une compagnie aérienne. *ROADEF : Le bulletin*, 4 :1–3, 2000.
- [Cro76] H. Crowder. Computational improvements for subgradient optimization. *Symposia Mathematica*, 19 :357–372, 1976.
- [DA99] S. O. Duffuaa and A. A. Andijani. An integrated simulation model for effective planning of maintenance operations for saudi arabian airlines (saudia). *Production Planning and Control*, 10 :579–584, 1999.
- [DDD⁺97] G. Desaulniers, J. Desrosiers, Y. Dumas, M. M. Solomon, and F. Soumis. Daily aircraft routing and scheduling. *Management Science*, 43 :841–855, 1997.
- [DDS92] M. Desrochers, J. Desrosiers, and M. M. Solomon. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Operations Research*, 40 :342–354, 1992.
- [DKJS91] M. C. Dijkstra, L. G. Kroon, J. A. E. E. VanNunen, and M. Salomon. A DSS for capacity planning of aircraft maintenance personnel. *International Journal of Production Economics*, 23 :69–78, 1991.
- [DP89] M. S. Daskin and N. Panayotopoulos. A lagrangian relaxation approach to assigning aircraft to routes in hub and spoke networks. *Transportation Science*, 23 :91–99, 1989.
- [DPST03] J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, and E. Taillard. *Métaheuristiques pour l'optimisation difficile*. Eyrolles, 2003.
- [DW60] G. B. Dantzig and P. Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, 8 :101–111, 1960.
- [EC03] Comission Regulation EC. Continuing airworthiness. *Official Journal of European Union*, 2003.
- [ENNS01] A. Erdmann, A. Nolte, A. Noltemeier, and R. Schrader. Modeling and solving an airline schedule generation. *Annals of Operations Research*, 107 :117–142, 2001.
- [Fli06] P. Flint. A busy year MRO. *Air Transport World*, Novembre :34, 2006.

- [GG61] P. C. Gilmore and R. E. Gomory. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9 :849–859, 1961.
- [GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory NP-Completeness*. Freeman, 1979.
- [GJNW94] Z. Gu, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser, and Y. Wang. Some properties of the fleet assignment problem. *Operations research letters*, 15 :59–71, 1994.
- [GKR⁺03] V. Guruswami, S. Khanna, R. Rajamaran, F. B. Sheperd, and M. Yannakakis. Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 67 :473–496, 2003.
- [Gro05] M. Gronkvist. *The Tail Assignment Problem*. PhD thesis, Goteborg University, Sweden, 2005.
- [GT98] R. Gopalan and K. T. Talluri. The aircraft maintenance routing problem. *Operations Research*, 46 :260–271, 1998.
- [Hay01] S. Hayes. 737-600/-700/-800/-900 maintenance costs. *Aero*, 2001.
- [HBJ⁺95] C. A. Hane, C. Barnhart, E. L. Johnson, R. E. Marsten, G. L. Nemhauser, and G. Sigismondi. The fleet assignment problem : Solving a large-scale integer program. *Mathematical Programming*, 70 :211–232, 1995.
- [HC02] J. Heikkila and C. Cordon. Outsourcing : A core or non-core strategic management decision? *Strategic Change*, 11 :183–193, 2002.
- [HC06] R.-W. Hung and M.-S. Chang. Solving the path cover problem on circular-arc graphs by using an approximation algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 154 :76–105, 2006.
- [HS89] B. Hajek and G. Sasaki. Simulated annealing - to cool or not. *System and Control Letters*, 12 :443–447, 1989.
- [IDSB99] I. Ioachim, J. Desrosiers, F. Soumis, and N. Bélanger. Fleet assignment and routing with schedule synchronization constraints. *European Journal of Operational Research*, 119 :75–90, 1999.

- [IPS82] A. Itai, Y. Perl, and Y. Schiloach. The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints. *Networks*, 12 :277–286, 1982.
- [KGV83] S. Kirkpatrick, C. G. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 :671–680, 1983.
- [KV04] J. Kilpi and A. P. J. Vepsalainen. Pooling of spares components between airlines. *Journal of Air Transport Management*, 10 :137–146, 2004.
- [Law76] E. L. Lawler. *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Rinehart and Winston, 1976.
- [Leu04] J. Y-T. Leung. *Handbook of Scheduling : Algorithms, Models and Performance Analysis*. CRC Press, 2004.
- [LGY03] M. B. Lari, P. Gupta, and S. Young. A simulation approach to manpower planning. In *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*, 2003.
- [LMSL90] C-L. Li, S. T. McCorick, and D. Simchi-Levi. The complexity of finding two disjoint paths with min-max objective function. *Discrete Applied Mathematics*, 26 :105–115, 1990.
- [LMSL92] C-L. Li, S. T. McCorick, and D. Simchi-Levi. Finding disjoint paths with different path-costs : Complexity and algorithms. *Networks*, 22 :653–667, 1992.
- [MB00] V. Mak and N. Boland. Heuristic approaches to the asymmetric travelling salesman problem with replenishment arcs. *International Transactions in Operational Research*, 7 :431–447, 2000.
- [MB06] V. Mak and N. Boland. Facets of the polytope of the asymmetric travelling salesman problem with replenishment arcs. *Discrete Optimization*, 3 :33–49, 2006.
- [MMC00] W. El Moudani and F. Mora-Camino. A dynamic approach for aircraft assignment and maintenance scheduling by airlines. *Journal of Airtransport Management*, 6 :233–237, 2000.

- [MRR⁺53] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21 :1087–1092, 1953.
- [NF95] M. Natsu and S.-C. Fang. On the point-to-point problem. *Information Processing Letters*, 53 :333–336, 1995.
- [Ngu07] T. Nguyen. On the disjoint paths problem. *Operations Research Letters*, 35 :10–16, 2007.
- [O’K87] M.E. O’Kelly. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32 :393–404, 1987.
- [RJN03] J.M. Rosenberger, E.L. Johnson, and G. L. Nemhauser. Rerouting aircraft for airline recovery. *Transportation Science*, 37 :408–421, 2003.
- [SBR06] A. Sarac, R. Batta, and C.M. Rump. A branch-and-price approach for operational aircraft maintenance routing. *European Journal of Operational Research*, 175 :1850–1869, 2006.
- [Sch80] Y. Schiloach. A polynomial solution to the undirected two paths problem. *Journal of Association for Computing Machinery*, 27 :445–456, 1980.
- [SCH92] W.K. Shih, T.C. Chern, and W.L. Hsu. An $o(n^2 \log n)$ time algorithm for the hamiltonian cycle problem on circular-arc graphs. *SIAM Journal on Computing*, 21 :1026–1046, 1992.
- [SEB05] H.D. Sherali and X. Zhu E.K. Bish. Airline fleet assignment concepts, models, and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 172 :1–30, 2005.
- [Ser95] S.H. Seristo. *Airline Performance and Cost : An Analysis of Performance Measurement and Cost Reduction in Major Airlines*. PhD thesis, Helsinki School of Economics Press, Finlande, 1995.
- [SH03] C. Sriram and A. Haghani. An optimization model for aircraft maintenance scheduling and re-assignment. *Transportation Research Part A*, 37 :29–48, 2003.

- [SSQ⁺94] R. Subramanian, R.P. Scheff, J.D. Quillinan, D.S. Wiper, and R.E. Marsten. Coldstart : Fleet assignment at delta air lines. *Interfaces*, 24 :104–120, 1994.
- [TG84] D. Teodorovic and S. Guberinic. Optimal dispatching strategy on an airline network after a schedule perturbation. *European Journal of Operational Research*, 15 :178–182, 1984.
- [TS90] D. Teodorovic and G. Stojkovic. Model for operational daily airline scheduling. *Transportation Planning and Technology*, 14 :273–285, 1990.
- [Vd02] H. VanDerHolst and J.C. dePina. Length-bounded disjoint paths in planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 120 :251–261, 2002.
- [VDK⁺02] C. VanBuskirk, B. Dawant, G. Karsai, J. Sprinkle, G. Szokoli, K. Suwanmongkol, and R. Currer. Computer-aided aircraft maintenance scheduling. Technical report, Vanderbilt University, USA, 2002.
- [VS06] F. Vanderbeck and M.W.P. Savelsbergh. A generic view of Dantzig-Wolfe decomposition in mixed integer programming. *Operations Research Letters*, 34 :296–306, 2006.
- [WAF06] World airline financial results 2005. *Air Transport World*, 2006.
- [Wol98] L. A. Wolsey. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998.