



HAL
open science

Processus ponctuels marqués pour l'extraction automatique de caricatures de bâtiments à partir de modèles numériques d'élévation

Mathias Ortner

► **To cite this version:**

Mathias Ortner. Processus ponctuels marqués pour l'extraction automatique de caricatures de bâtiments à partir de modèles numériques d'élévation. Automatique / Robotique. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00189803

HAL Id: tel-00189803

<https://theses.hal.science/tel-00189803>

Submitted on 22 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
UFR Sciences

Ecole Doctorale : Sciences et Technologies de l'Information et de la
Communication

T H E S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Mention : Automatique, Traitement du signal et des images

présentée par

Mathias ORTNER

Processus Ponctuels Marqués pour
l'Extraction Automatique de Caricatures de Bâtiments
à partir de Modèles Numériques d'Elévation

Thèse dirigée par **Josiane ZERUBIA**,
préparée à l'INRIA Sophia au sein du projet ARIANA

et soutenue le 5 octobre 2004

devant le jury composé de :

A. Bijaoui	Astronome, O.C.A.	Président
M. Samuelides	Professeur, Supaéro	Rapporteur
M. N. M. Van Lieshout	Chercheur sénior, C.W.I.	Rapporteur
F. Pradeilles	I.C.A., D.G.A.	Examineur
J. Zerubia	Directrice de Recherche, INRIA	Directrice
X. Descombes	Chargé de Recherche, INRIA	Co-encadrant

Remerciements

Merci aux membres du jury : merci à Mr. Bijaoui d'avoir accepté d'en être le président. Merci à M.N.M. Van Lieshout et à Mr. Samuelides d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Merci à Mr. Pradeilles pour sa relecture précise et ses commentaires avisés.

Merci à M.N.M. Van Lieshout pour ses différents commentaires au cours de ces trois années.

Je tiens à remercier Josiane et Xavier pour leur encadrement motivant. La liberté qu'ils m'ont accordée fût appréciable.

Merci aux membres du projet Ariana.

Mille mercis à Miguel.

Cette thèse est dédiée à mes parents, à ma femme, à mes frères ainsi qu'à mon oncle Etienne.

Avant Propos

Cadre de la thèse

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés sous la direction de Josiane Zerubia, Directrice de Recherche à l'INRIA et de Xavier Descombes, Chargé de Recherche. Géographiquement, cette thèse a vu le jour au sein du projet ARIANA qui est un projet commun au CNRS, à l'INRIA et à l'Université de Nice-Sophia Antipolis. Ce projet de recherche est spécialisé dans l'analyse d'images issues de la télédétection et les problèmes inverses. Cette thèse s'inscrit dans un cadre de reconstruction d'une scène urbaine à partir d'images aériennes ou satellitaires.

Les données ont été fournies par l'IGN (Institut Géographique National); l'auteur a bénéficié d'une bourse DGA (Délégation Générale pour l'Armement) / CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) pendant toute la durée de sa thèse.

Mode d'emploi

Ce manuscrit a été écrit de sorte qu'il soit possible au lecteur d'omettre des chapitres ou des parties. Cela coûte quelques redondances, mais il est ainsi possible, par exemple, d'ignorer la seconde partie qui présente les bases mathématiques du travail. Le manuscrit est composé de trois parties :

L'introduction. Divisée en deux chapitres, elle présente le contexte et les objectifs de ce travail ainsi que la méthode employée expliquée simplement sur un exemple.

Les bases mathématiques. Les deux premiers chapitres sont des résumés de la théorie des processus ponctuels et des chaînes de Markov, tandis que le troisième présente des travaux plus originaux et en particulier l'algorithme d'échantillonnage utilisé, ainsi que sa preuve de convergence.

Les applications. Il y a quatre chapitres. Les trois premiers correspondent chacun à un modèle et une problématique appliquée différente. Le dernier présente quelques heuristiques développées pour améliorer les méthodes proposées.

En résumé, le lecteur désireux de ne comprendre que le contenu appliqué de ce travail peut donc se limiter à la lecture des parties I et III.

Le lecteur désireux de comprendre rapidement l'essentiel du contenu de cette thèse pourra se limiter à la lecture du chapitre 6. Quiconque ne voudra qu'effleurer le contenu de ce manuscrit pourra se limiter à la lecture du chapitre 2.

Notons pour finir, que dans un souci de clarté, nous avons pris le parti de mettre une partie des résultats obtenus en annexe de ce manuscrit.

Table des matières

Remerciements	3
Avant Propos	4
I Introduction	9
1 Contexte et état de l'art	13
1.1 Contexte et objectifs	13
1.2 Etat de l'art de la reconstruction urbaine	17
1.3 Démarche et méthode proposées	22
2 La méthode utilisée	29
2.1 Minimisation d'énergie	29
2.2 Le modèle	33
2.3 L'algorithme d'optimisation	36
2.4 Résultats obtenus	39
2.5 Analyse et commentaires	39
II Fondements Mathématiques	43
3 Processus Ponctuels	49
3.1 Premières définitions et notations	49
3.2 Processus ponctuels finis	52
3.3 Processus ponctuels de Markov	56
3.4 Exemples.	58
3.5 Quelques propriétés	59
4 Chaînes de Markov	63
4.1 Premières définitions	63
4.2 Ergodicité	67
4.3 Théorèmes limites.	71
5 Algorithme d'échantillonnage	73
5.1 Processus ponctuels et notations	74
5.2 MCMC et processus ponctuels	74
5.3 Analyse	79
5.4 Synthèse	91
5.5 Vérifications par l'expérience	100
5.6 Améliorer la naissance ou mort dans un voisinage	106
III Applications	113
6 Détection des discontinuités	119
6.1 Généralités sur le modèle	121

6.2	Terme d'attache aux données	123
6.3	Champ interne	128
6.4	Algorithme d'optimisation	133
6.5	Résultats	137
6.6	Conclusion	145
6.7	Quelques calculs	145
7	Modèles 3D	149
7.1	Un modèle plus complexe de bâtiment	149
7.2	Un premier modèle	149
7.3	Un modèle bayésien	155
7.4	Commentaires et conclusion	160
8	Approche duale et coopération	161
8.1	Les données	161
8.2	Rectangle et homogénéité	161
8.3	Segments et discontinuités	164
8.4	A priori sur les segments	165
8.5	A priori sur les rectangles	168
8.6	Coopération rectangles-segments	168
8.7	Algorithme	172
8.8	Résultats	172
8.9	Commentaires et conclusion	176
9	Optimisation	179
9.1	Schéma de décroissance	179
9.2	Ajout d'une mémoire	199
IV	Conclusion	209
	Bibliographie	217
	Annexes	227
A	Résultats supplémentaires	227
A.1	Modèle du chapitre 6	227
A.2	Modèle du chapitre 8	236
A.3	Modèle du chapitre 2	238
A.4	Modèle du chapitre 9	238
B	Détails du modèle du chapitre 6	241
B.1	Filtre bas niveau	241
B.2	Détails de l'énergie utilisée	248
C	Considérations informatiques	249
C.1	Codage des interactions	249
C.2	Metropolis Hastings	250

Première partie

Introduction

Partie I

1	Contexte et état de l'art	13
1.1	Contexte et objectifs	13
1.1.1	Reconstitution vectorielle	13
1.1.2	Intérêt	13
1.1.3	Données, limites et objectifs : le domaine actuel du raisonnable . .	14
1.2	Etat de l'art de la reconstruction urbaine	17
1.2.1	Orientation générale	17
1.2.2	Classification des méthodes	18
1.2.3	Différentes stratégies	20
1.3	Démarche et méthode proposées	22
1.3.1	Probabilités en analyse d'images	22
1.3.2	Application à la reconstruction urbaine	26
1.3.3	Décomposition de ce travail	27
2	La méthode utilisée	29
2.1	Minimisation d'énergie	29
2.1.1	Espace d'état	29
2.1.2	Energie	30
2.1.3	Optimisation	31
2.2	Le modèle	33
2.2.1	Attache aux données	33
2.2.2	Le terme de régularisation	36
2.3	L'algorithme d'optimisation	36
2.3.1	Perturbations	36
2.3.2	Probabilité d'acceptation	37
2.3.3	Schéma de décroissance	38
2.4	Résultats obtenus	39
2.4.1	Description	39
2.4.2	Les résultats	39
2.5	Analyse et commentaires	39
2.5.1	Précision du résultat	40
2.5.2	Le problème du soft-core	40
2.5.3	Le modèle a priori	41
2.5.4	L'optimisation	41
2.5.5	L'Estimation des paramètres	41

Chapitre 1

Contexte et état de l'art

1.1 Contexte et objectifs

1.1.1 Reconstitution vectorielle

Le sujet de cette thèse a été à l'origine proposé par l'IGN, Institut Géographique National. Il s'agissait de contribuer aux méthodes automatiques de reconstruction de scènes urbaines à partir de différents types de données en examinant si les méthodes d'analyse d'images par processus ponctuels marqués pouvaient donner des résultats exploitables.

La cartographie des villes est un enjeu d'importance. L'ambition partagée par de nombreuses communautés (publiques, industrielles, militaires) est de développer des méthodes et des logiciels permettant, pour une ville donnée, d'en obtenir un plan utilisable. Pour satisfaire les utilisateurs potentiels l'objectif est de construire une représentation d'une ville sous forme d'une collection d'objets (item cartographiques). Ces objets peuvent être les bâtiments, les parcs, les routes, les réseaux hydrographiques de surface ou souterrain, ou tout autre élément constitutif d'une zone urbaine. Cette notion de collection d'information sémantique est primordiale. Que ne soient collectées que des informations simples (plan cadastral) ou sophistiquées (représentation tridimensionnelle de chaque bâtiment avec les différents matériaux le composant), seules de telles représentations vectorielles sont vraiment exploitables pour des champs d'application vastes.

1.1.2 Intérêt

Une étude récente des Nations Unies estime qu'en 2007, plus de 50% de la population mondiale vivra dans des villes. L'homme se prépare donc à devenir plus urbain que rural. Le rapport des Nations Unies estime également qu'en 2015 le nombre de villes de plus de 10 millions d'habitants dépassera la vingtaine. Les zones urbaines denses sont en passe de devenir l'environnement naturel de l'être humain. La cartographie automatique de telles zones devient donc peu à peu un enjeu majeur. Plus particulièrement, les reconstructions vectorielles tridimensionnelles complexes vont devenir un outil fondamental pour différents secteurs.

De telles bases de données sont déjà nécessaires pour la gestion de l'environnement de l'être humain (suivi de l'évolution des villes, suivi du trafic automobile, gestion des risques tels que les inondations ou les séismes). Des enjeux commerciaux apparaissent également : des simulations de propagation des ondes électromagnétiques permettent par exemple d'optimiser le placement des relais de

téléphonie mobile, mais nécessitent des descriptions fines du sursol. D'autres domaines d'applications commerciales plus «high tech» sont également à l'honneur de nos jours : jeux vidéos, promenades virtuelles ou logiciels de guidage automobile, tous nécessitent l'acquisition d'un plan vectoriel des villes. Des applications militaires ou policières sont également imaginables, comme l'aide à la préparation d'opérations ou au guidage d'engins autonomes. Deux études des domaines d'applications possibles sont disponibles dans [Brenner, 1999, Fritsch, 1999].

1.1.3 Données, limites et objectifs : le domaine actuel du raisonnable

De nombreux travaux ont déjà été menés dans le domaine de la reconstruction automatique, semi-automatique ou manuelle des zones urbaines. La précision requise, le type et la quantité de données utilisées ou le degré d'automaticité sont autant de critères permettant de classer les méthodes.

Le but : des modèles 3D de bâtiments

Il va de soi que l'élément primordial de l'environnement urbain est le bâtiment. Plus précisément, nous nous intéressons au bâtiment en tant qu'unité fonctionnelle. Dans ce cadre, un îlot est constitué de plusieurs bâtiments. Nous nous focalisons sur la reconstruction de bâtiments dans les scènes urbaines.

Bâtiments et variabilité des scènes urbaines

La structure architecturale des villes est loin d'être uniforme et il existe une réelle variabilité des bâtiments. Ainsi, une zone industrielle se distingue nettement d'un centre ville ou d'un lotissement. On trouve par ailleurs souvent dans les scènes urbaines des ensembles complexes d'objets différents et surprenants : il est difficile d'en dresser un catalogue exhaustif. Cette variabilité est l'une des difficultés majeures rencontrées lorsque l'on s'intéresse à la reconstruction de zones urbaines.

La télédétection

Le terme télédétection qualifie l'ensemble des méthodes permettant d'extraire l'information contenue dans des données acquises par mesures aériennes et satellitaires. Cette catégorie de mesures est d'un intérêt certain pour la reconstruction de zones urbaines denses. C'est en effet l'unique moyen d'acquérir facilement des masses importantes de données à différentes échelles sur une ville. Il suffit, pour s'en rendre compte, de comparer le temps nécessaire au parcours par un géomètre de l'ensemble des rues d'une zone urbaine au temps nécessaire par l'achat d'une image satellite haute résolution géoréférencée et l'extraction par un opérateur des routes de cette image. Autant dire que les récentes avancées spectaculaires dans la qualité et le coût des images satellitaires à très haute résolution sont prometteuses pour le domaine.

On notera toutefois que l'acquisition par prise de vue aérienne est toujours d'actualité et que c'est même pour l'instant le moyen privilégié par l'IGN pour acquérir ses données. D'autres capteurs que les capteurs optiques sont également à l'étude, comme les capteurs RADAR avec leurs avantages (prise de vue de nuit ou malgré un couvert nuageux) et leurs inconvénients (physique du capteur difficile à prendre en compte, bruits de différents types importants, résolution

faible quoiqu'en nette voie d'amélioration, ou le LASER. Les capteurs de cette dernière classe sont présentés plus en détail plus loin.

Modèles Numériques d'Élévation

Le Modèle Numérique d'Élévation (MNE) est l'image du relief du sursol d'une zone urbaine. Dans un certains sens, les reconstructions que l'on vise à obtenir sont des MNE vectoriels, par opposition aux MNE "raster" qui décrivent l'altimétrie de la zone pixel par pixel. Désormais, nous n'appellerons MNE que les MNE "raster". La taille au sol du côté d'un pixel varie en général entre 5cm et 1m. Les MNE sont donc des données à haute résolution. D'autres noms existent, comme Modèle Numérique de Surface (MNS) ou Modèle Numérique de Terrain (MNT). Ce dernier terme s'applique en général plutôt aux modèles numériques en zones non-urbaines ou plus faiblement résolues. Les MNE sont d'une importance capitale pour les méthodes de reconstruction de zones urbaines denses. Ils constituent en effet souvent une étape nécessaire à l'analyse précise de la scène.

Monoscopie

Il est possible d'utiliser une unique prise de vue pour déduire le relief d'une zone. En utilisant un modèle d'éclairement on peut déduire le relief d'un objet de sa colorimétrie par résolution d'une équation différentielle sensible aux conditions de bord : ces techniques constituent le "shape from shading". D'autres approches utilisent les ombres portées. On parle alors de "shape from shadow". Il existe également quelques travaux en imagerie RADAR (radarclinométrie) mais en général c'est une technique peu exploitable du fait des hypothèses nécessaires très contraignantes (notamment sur la constance de l'albédo).

Stéréovision

Le mot stéréovision décrit l'ensemble des méthodes qui tentent de reconstruire le relief d'une scène à partir de différentes prises de vue. Le cerveau humain est naturellement capable d'un tel processus puisqu'il exploite les images perçues par les yeux droit et gauche pour appréhender le relief de la scène. Le mot stéréovision s'applique en général aux méthodes de triangulation et de calibration géométrique. Outre les problèmes liés à la connaissance de la physique des capteurs et des paramètres la décrivant, la stéréovision doit faire face à deux types de problèmes :

la mise en correspondance : il s'agit d'identifier des points homologues dans les différentes prises de vues, c'est à dire des pixels correspondant au même point du monde réel. Si cette opération est naturellement faite par le cerveau il est revanche plus difficile de construire une procédure automatique la réalisant. Il y a en effet un aspect sémantique dans cette tâche¹. Il y a également un fort aspect géométrique. En effet la maîtrise de la géométrie permet de faciliter la mise en correspondance. Ainsi, les générations récentes de satellites haute résolution voient apparaître des systèmes dédiés à la prise de vue stéréoscopique constitués de plusieurs capteurs dont la géométrie relative est connue (2 dans le cas de SPOT

¹Si l'on prend des prises de vues d'une chaise sous différent angles, il faut savoir distinguer les différent pieds de la chaise et avoir une notion a priori de ce qu'est une chaise pour pouvoir la reconstruire.

5, 3 dans le cas de ALOS). Un certain nombre de méthodes de reconstruction urbaine s'orientent donc naturellement vers l'acquisition par un opérateur d'un nombre restreint de points homologues. Le but est alors de déduire de ces points homologues d'autres points homologues, puis une hypothèse de bâtiment tridimensionnelle correcte. L'équipe de l'ETH Zurich ([Grün et Wang, 1998]) a ainsi construit un système très efficace, capable de faciliter l'acquisition de vastes zones urbaines denses.

la gestion des zones d'occlusions : pour pouvoir reconstruire les coordonnées tridimensionnelles d'un point, celui-ci doit être observable sur au moins deux prises de vue. Dans le cas de scènes complexes comme les zones urbaines, les points qui sont observables sur moins de deux mesures sont fréquents. Les ensembles de tels points forment ce que l'on appelle les zones d'occlusion.

Mesures LASER

Dans les années 90 la maîtrise de la physique et du coût des systèmes LASER a accéléré le développement d'un nouveau type de capteur qui est rapidement devenu porteur d'espoir dans le domaine de la reconstruction tri-dimensionnelle. A bord d'un aéronef une impulsion LASER est émise en direction du sol. La différence de temps entre l'émission de l'impulsion et la détection de l'écho permet au capteur de déduire la distance entre le sol et l'avion, dans la direction de l'émission. Un positionnement 6 dimensionnel précis de l'aéronef permet donc d'acquérir facilement un nuage de points 3d décrivant la surface de la ville.

Le premier avantage de ce type de capteur est que l'on obtient rapidement des données 3D. Un second avantage est donné par un phénomène physique tout à fait intéressant : une partie du signal émis est réfléchi par la végétation tandis que l'autre la traverse avant de se réfléchir à son tour sur le sol. Ce phénomène dit **de double écho** permet d'une part, de classer les zones de végétation et d'obtenir d'autre part à la fois les altitudes du couvert végétal et du sol sous-jacent. L'inconvénient majeur vient du coût d'une acquisition. Le capteur en lui même reste cher. En outre pour acquérir un nombre suffisant de points, ce type de capteur nécessite des vols plus longs et donc plus chers que les capteurs optiques.

Autres méthodes

Actuellement des travaux de recherche sont menés pour pouvoir utiliser des mesures radar dans un but de reconstruction de données urbaines. La physique du capteur radar en fait un outil intéressant : le capteur est capable d'acquérir des données même sous couvert nuageux. Cependant les résolutions sont encore faibles et la complexité des images obtenues ne fait pas encore du radar un outil de prédilection pour l'analyse des zones urbaines. On trouvera des exemples de traitement des images radar avec [Balz et Haala, 2003, Sörgel *et al.*, 2003]. On peut également citer le travail de D. Petit, [Petit, 2004] qui se fonde sur l'utilisation de techniques issues de la radargrammétrie et de l'interférométrie. Notons toutefois que la physique du capteur RADAR en fera sans doute l'outil de prédilection pour la reconstruction urbaine. En effet, si les capteurs optiques permettent de mesurer des distances angulaires, les capteurs radars mesurent la distance entre un point de la scène et le capteur. Ils fournissent donc une information géométrique, à laquelle peut s'ajouter une information sur la nature du matériau observé.

1.2 Etat de l'art de la reconstruction urbaine

1.2.1 Orientation générale

La reconstruction de zones urbaines rencontre à l'heure actuelle différents types de difficultés. Nous commençons par dresser un inventaire des barrières limitant les avancées dans le domaine.

Difficultés et problématiques actuelles

La variabilité des bâtiments. Qu'elle apparaisse au niveau microscopique (bâtiments) ou macroscopique (villes) cette variabilité pose des problèmes à tous les niveaux du processus de reconstruction, que ce soit celui de la détection, celui de la classification ou celui de la reconstruction d'une structure.

Les ambiguïtés. Étant donné la complexité des villes, des ambiguïtés subsistent au niveau des données. Par exemple, sur les données issues de la stéréovision, les zones d'occlusions laissent des ambivalences importantes. Les algorithmes de reconstruction doivent tenir compte de telles ambiguïtés, ce qui nécessite d'introduire des connaissances a priori sur les structures que l'on cherche à détecter et à reconstruire.

La densité. Les zones urbaines denses posent des problématiques particulières : d'abord la quantité d'ambiguïtés augmente très vite avec la densité. On ne peut par ailleurs pas traiter un bâtiment issu de telles zones comme s'il était isolé ; il faut tenir compte de son voisinage déjà détecté ainsi que de son voisinage encore ignoré.

La qualité du résultat. Il est évident que l'appréciation des résultats obtenus est étroitement liée au domaine d'application. Une méthode de reconstruction se doit donc de fixer certains objectifs, éventuellement au travers d'une métrique qui permette de quantifier les résultats obtenus.

Axes de prospective

Vers un séquencement des étapes. Les travaux actuels cherchent à construire des méthodes sous forme de chaînes. L'idée est d'utiliser beaucoup de traitements de bas niveau pour expliquer les données au mieux, et de procéder ensuite à l'analyse des primitives observées. Des exemples de traitement de bas niveau sont : la classification sol/sursol, la détection de segments ou de plans 3D, la détection de la végétation, etc... Ces approches se placent donc résolument dans un cadre hiérarchique (multiéchelle). Un exemple typique peut être trouvé dans [Fischer *et al.*, 1998].

Sources multiples de données. Dans la même optique, beaucoup de travaux optent pour un ajout de données externes qui sont souvent disponibles. Par exemple les travaux de H. Jibrini ([Jibrini, 2002]) utilisent un plan cadastral vectorisé. Cela permet de diviser le problème de la reconstruction en plusieurs sous-problèmes indépendants. Une autre optique consiste à utiliser l'information fournie par un opérateur humain. Ces dernières approches ne sont pas automatiques.

La complexité des modèles. Un dilemme se pose : vaut-il mieux utiliser des modèles simples ou des modèles de bâtiments complexes ? Si ces derniers permettent de rendre compte de structures réelles assez biscornues, ils sont en revanche bien plus difficiles à manipuler sur les données.

1.2.2 Classification des méthodes

Nous présentons ici quelques travaux importants du domaine classés en fonction de leur particularités d'entrée/sortie.

L'automatisme

Le premier critère majeur est l'automatisme de la méthode. Les méthodes semi-automatiques tirent partie de l'opérateur comme source d'information sémantique : le plus souvent l'opérateur donne des points clés d'un bâtiment, le logiciel se chargeant alors de déduire le bâtiment des données. Ce type d'approche permet des productions à des cadences tout à fait intéressantes. L'équipe d'ETH Zürich ([Grün et Wang, 1998]) a ainsi construit un logiciel, CC-Modeler qui permet d'extraire 500 bâtiments complexes par jour. L'approche est plus interactive que semi-automatique puisque l'opérateur doit fournir tous les points de la silhouette du bâtiment, le logiciel utilisant les données de stéréovision pour calculer la forme tridimensionnelle du bâtiment.

Dans [Nevatia *et al.*, 1999, Nevatia et Price, 2002] une approche plus automatique est présentée : le logiciel utilise les points fournis par l'utilisateur pour en construire d'autres, en utilisant par exemple l'information de gradient dans les images. D'autres exemples de travaux semi-automatiques typiques sont ceux de Gülch et Gruen ([Grün, 1998, Gülch *et al.*, 1999]) reposant sur l'utilisation de familles de modèles et la maximisation de critères (gradient sur les contours) afin de trouver le bâtiment correspondant aux points fournis par l'opérateur. Dans la suite nous nous focaliserons essentiellement sur les méthodes entièrement automatiques.

A court terme, seules les méthodes semi-automatiques sont utilisables pour la production à grande échelle. Les analyses automatiques donnent en effet encore trop d'erreurs importantes.

Type de données

Monoscopie. Dans [Heuel et Nevatia, 1995] Heuel et Nevatia proposent une approche automatique reposant sur le "shape from shadow". Il s'agit donc d'une approche monoscopique. Des hypothèses de bâtiment sont émises à partir de la détection de lignes dans l'image puis validées grâce aux ombres portées. Un autre exemple de méthode monoscopique peut être trouvé dans [McGlone et Shufelt, 1994]. De telles approches sont difficilement précises. Par ailleurs leur robustesse vis-à-vis de la densité de la zone urbaine considérée est faible.

Stéréovision à 2 vues. Les travaux de Baillard ([Baillard, 1997]) proposent de calculer un MNE segmenté en zones d'altitude homogène. Cela permet de classifier le MNE obtenu en régions de sol et régions de sur-sol. Le résultat respecte donc mieux les discontinuités et propose une pré-segmentation intéressante. Il existe d'autres travaux en stéréovision à deux vues, dont ceux de Dang ([Dang, 1994]) et ceux de Cord [Cord, 1998].

Stéréovision à n vues. La stéréovision utilisant beaucoup de vues permet de limiter les problèmes d'occlusions. Ces approches utilisent en général la multiplicité des vues pour détecter les façades. On peut se référer aux travaux de Fradkin ([Maître *et al.*, 1999]) ou ceux de Vestri ([Vestri, 2000]) par exemple.

Utilisation d'un MNS. De nombreux travaux ont été menés, surtout dans certaines universités allemandes, pour tenter d'exploiter au mieux l'information altimétrique. L'apparition des données LASER, plus denses et plus précises que les données issues de l'appariement optique a en effet été porteuse d'espoir. Weidner, par exemple, ([Weidner, 1995, Weidner et Förstner, 1995]) utilise la morphologie mathématique pour extraire les bâtiments des seules données altimétriques. D'autres travaux utilisent ces données altimétriques en plus d'autres données (les données cadastrales, par exemple) : c'est le cas des travaux de l'institut de photogrammétrie de Stuttgart ([Haala et Anders, 1997, Haala et Brenner, 1998, Haala et Brenner, 1999, Brenner, 2000]) ou de ceux de Vosselman aux Pays Bas ([Vosselman et Dijkman, 2001]). Un des articles essentiels dans le domaine de l'extraction de bâtiments à partir de données LASER est celui de Mass et Vosselman ([Maas et Vosselman, 1999]). Des travaux très récents dans le domaine montrent que la tendance à fusionner les données LASER avec d'autres types de données perdure : [Rottensteiner et Briese, 2003, Matikainen *et al.*, 2003, Sohn et Dowman, 2003].

Données cadastrales. Depuis quelques années, de nombreux travaux utilisent les données cadastrales vectorisées et donnent des résultats très prometteurs. Ces données ont l'avantage de permettre aux algorithmes de se focaliser sur une zone précise et d'utiliser la donnée cadastrale pour proposer un ensemble d'hypothèses a priori sur les primitives bas niveaux (limites de toit, par exemple). L'imprécision ou les erreurs du cadastre doivent être prises en compte par la méthode. Outre les approches de Haala, Brenner et Vosselman utilisant les données cadastrales en plus d'un MNS LASER, évoquées dans le précédent paragraphe, il faut citer le travail de Jibrini. Son approche parallélise le problème en considérant les bâtiments indépendamment les uns des autres. Cela est autorisé par la donnée cadastrale. Il utilise par ailleurs un couple stéréoscopique : à l'aide de l'hypothèse fournie par le plan cadastral, l'algorithme recherche d'abord un volume 3d englobant la position du toit, puis affine les primitives prédites par le cadastre et procède pour finir à la reconstruction de la surface polyédrique du toit proprement dite. Ses travaux sont décrits dans sa thèse ([Jibrini, 2002]) et donnent des résultats réellement intéressants, aussi bien d'un point de vue théorique que dans une optique de production.

Autres types de données. Certaines approches tentent de tirer partie d'autres types de données. Les travaux de Roux et d'Henricsson ([Girard *et al.*, 1998, Henricsson, 1996]) s'appuient sur des images couleurs, ceux de Frueh et Zakhor [Frueh et Zakhor, 2003]) intègrent des données prises depuis le sol, comme des photographies prises en parcourant les rues de la ville.

Les formes reconstruites

Le modèle polyédrique. C'est la forme la plus couramment utilisée, car elle est la plus générique des représentations raisonnables. Il est possible de représenter

une telle forme par un ensemble de facettes planes. Cela autorise beaucoup de libertés, aussi bien sur la forme planimétrique (trace ou silhouette au sol), que sur les formes possibles de toit.

Le modèle prismatique. Il correspond au modèle précédent avec la forme la plus simple de toit possible : plate. En général, de tels modèles sont favorisés quand les traces au sol recherchées sont complexes.

Les modèles quatres-pentes, bi-pentes et cubique. Ce sont les modèles issus de la simplification de l'emprise planimétriques ; le cas extrême consistant en la considération de traces au sol rectangulaires.

Les autres modèles. On peut les répartir essentiellement entre deux classes : les modèles paramétriques et les modèles génériques. Les premiers imposent une structure particulière, déformable, tandis que les seconds n'imposent qu'un ensemble de contraintes sur les primitives composant le bâtiment (orthogonalité des faces, parallélisme des arêtes).

Qualité de la reconstruction

Les méthodes de reconstruction de zones urbaines se placent dans un cadre d'exigence particulière. Les critères usuels sont :

L'exhaustivité : c'est le critère le plus évident. Il est lié aux autres critères, puisqu'il faut définir ce qu'est une reconstruction admissible d'un bâtiment. Un exemple de question que l'on peut se poser : est-ce qu'un bâtiment reconstruit sous forme de deux bâtiments adjacents constitue une reconstruction admissible ?

La généralisation : les méthodes de reconstruction simplifient en général les bâtiments. L'ordre de simplification désiré dépend du domaine d'application considéré. Pour certaines applications un modèle cubique peut être suffisant (emprise planimétrique rectangulaire et forme altimétrique plane). Pour être cohérent, il faut que le niveau de précision requis soit respecté. Cela signifie que les artefacts sur les bâtiments dont la taille est approximativement de l'ordre de grandeur de la précision requise doivent être pris en compte.

La précision : un tel critère quantifie l'exactitude de la reconstruction. Il dépend du modèle considéré et de la qualité des données utilisées.

1.2.3 Différentes stratégies

Nous présentons ici les outils généralement utilisés pour la reconstruction urbaine tridimensionnelle automatique.

Synopsis général

En général, les méthodes automatiques se décomposent suivant les trois étapes importantes que sont la focalisation sur un bâtiment, la détection des éléments constitutifs d'un bâtiment, et la reconstruction proprement dite pour finir.

Focalisation. Cette étape consiste en la sélection d'une zone dans l'image où la recherche d'un bâtiment peut être restreinte. L'intérêt d'utiliser un plan cadastral vectorisé apparaît immédiatement. Il est possible, en utilisant un tel plan, de parcourir un à un les bâtiments de la zone et de limiter le nombre de primitives à détecter. L'introduction de cartes routières intervient également dans cette phase. Les opérations de segmentation sol/sursol ou de détection des zones homogènes fournissent un moyen de focaliser la recherche sur une zone d'intérêt [Vestri et Devernay, 2001, Baillard, 1997, Paparoditis *et al.*, 1998].

Détection des primitives. Cette étape consiste en la détection d'un ensemble de structures de bas niveau qui constitueront le bâtiment. Il s'agit des arêtes, des plans, des coins etc... Les méthodes utilisées font en général appel aux outils classiques du traitement de l'image : transformée de Hough généralisée pour détecter les lignes ou les plans, détection des contours ou des coins, etc...

Reconstruction. C'est l'étape qui associe les primitives entre elles pour former les bâtiments.

Top down et Bottom up

Bottom-up. C'est un processus classique de traitement d'images. Dans cette étape interviennent des contraintes de regroupements, souvent représentées par des contraintes sur des graphes (voir [Fuchs, 2001] pour une documentation plus complète sur le sujet). Le résultat d'un tel processus consiste en général en une série d'hypothèses. Ces hypothèses peuvent être probabilisées, auquel cas la hiérarchie de l'agglomération peut être vue comme un réseau Bayésien ([Stassopoulou et Caelli, 2000]). Ce type de méthodes ignore a priori la nature de l'objet que l'on cherche à reconstruire. Aussi sont-elles souvent couplées à un processus "top-down".

Top down. Le processus "top-down" suit la démarche complémentaire en utilisant une série de modèles connus. L'objectif est de regarder si la présence d'un de ces modèles dans les données est vraisemblable ou non.

Fusion. La plupart des méthodes actuelles s'orientent vers un processus hybride : la partie bottom-up formule des hypothèses à partir des primitives bas niveau, tandis que la partie top-down confronte ces hypothèses de bâtiments aux modèles considérés. C'est lors de cette mise en correspondance que se joue la puissance de la méthode. D'une façon générale, la confrontation d'un ensemble de primitives hypothétiques avec un ensemble de modèles fait apparaître un problème combinatoire. Dans le cadre de la reconstruction urbaine, cela est d'autant plus vrai que les modèles considérés doivent faire apparaître la variabilité de forme observée sur les bâtiments et qu'en plus l'extraction des primitives ne peut être ni exhaustive, ni fiable totalement en raison de la complexité des données. Dans le cadre de la reconstruction urbaine, la mise en correspondance d'un ensemble de primitives avec un modèle doit donc être suffisamment souple pour permettre : de reconnaître dans un ensemble de primitives une ou plusieurs structures d'interaction entre ces primitives qui soient discriminantes, de reconnaître un modèle de bâtiment à partir de ces structures discriminantes et d'adapter le modèle sélectionné en fonction des parties manquantes. Parmi les techniques permettant

une telle souplesse, on notera que l'appariement de graphe semble être la plus adaptée au problème ([Fuchs, 2001]) bien que lourd du point de vue du temps de calcul.

Les voies d'amélioration

Multiplication des données. L'utilisation de données diverses permet d'agir en deux endroits du processus. Multiplier les données ou les types de données utilisés permet d'obtenir une collection de primitives qui ne soit pas construite de manière hiérarchique et donc qui ne propage pas les erreurs commises au niveaux les plus bas.

Simplification ou hiérarchisation des modèles. Les deux approches partent en fait du même principe : il est plus facile de trouver un appariement entre un ensemble restreint de primitives et une quantité limitée de modèles simples qu'entre un ensemble vaste de primitives et une quantité importante de modèles complexes. Simplifier directement les modèles semble donc être naturel. Cela passe par l'utilisation de modèles prismatiques, par exemple ([Nevatia et Price, 2002, Weidner, 1995, Vestri et Devernay, 2001]). L'approche hiérarchique permet de complexifier les modèles, puisqu'elle permet de remplacer un appariement complexe par une succession d'appariements simples. Les ensembles de modèles considérés ne sont donc plus seulement constitués de modèles de bâtiments, mais contiennent également des modèles de parties de bâtiments.

Le plan cadastral. Le plan cadastral vectorisé revêt un intérêt particulier dans le contexte de l'appariement. Il permet en effet de donner une première information vectorielle sur la position, la forme et la nature d'un bâtiment. Ces informations sont utiles pour trouver des primitives pertinentes et pour limiter la complexité de la mise en correspondance des primitives avec les modèles de bâtiments.

1.3 Démarche et méthode proposées

L'objectif de cette thèse était d'étudier la possibilité d'introduire dans les algorithmes de reconstruction de zones urbaines des contraintes géométrique en utilisant une modélisation par processus ponctuels marqués de Markov. L'approche utilisée permet d'introduire deux types de contraintes géométriques sur les primitives extraites : on peut introduire une information sur le type et la forme des objets recherchés et d'autre part cette approche permet d'introduire et d'utiliser une information statistique sur la répartition géométrique des objets dans la scène.

La géométrie stochastique étudie les propriétés des ensembles aléatoires parmi lesquels se trouve la classe des processus ponctuels.

Nous commençons par rappeler brièvement les raisons de l'introduction de ce type d'objet mathématique en traitement d'images.

1.3.1 Probabilités en analyse d'images : des champ de Markov aux processus ponctuels

L'approche par processus ponctuels est une étape naturelle de l'évolution des modèles stochastiques en traitement de l'image. Pour des analyses générales

de cette évolution on pourra consulter les HDR de Descombes et de Pérez [Pérez, 2003, Descombes, 2004].

Modèle aléatoire de l'image

Une image est un ensemble de pixels. Notons I , une image, c'est à dire une fonction associant à chaque site (pixel) d'un ensemble de sites $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$ une valeur de niveau de gris :

$$\begin{aligned} I : \Lambda &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow I(s) \end{aligned}$$

En considérant un espace probabilisé abstrait $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ introduire un modèle aléatoire d'une image consiste à considérer les niveaux de gris comme les réalisations d'une version aléatoire de la fonction I .

$$I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\Lambda$$

A cette variable aléatoire I est associée sa loi de probabilité \mathbf{P}_I , mesure image de \mathbf{P} par la variable aléatoire I .

$$\mathbf{P}_I(A) = \mathbf{P}(I^{-1}(A))$$

Le modèle le plus simple considère que les pixels sont indépendants les uns des autres, ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{P}(I \in A) = \prod_{s \in \Lambda} \mathbf{P}(I(s) \in A_s)$$

Cela permet de considérer l'histogramme normalisé d'une image comme une densité empirique.

Modélisation Bayésienne

Proposer un modèle Bayésien d'une image revient à hiérarchiser le modèle par l'utilisation d'une probabilité conditionnelle et d'un processus sous-jacent X :

$$\mathbf{P}(I \in A) = \sum_x \mathbf{P}(I \in A | X = x) \mathbf{P}(X = x) \quad (1.1)$$

Le modèle Bayésien est un modèle aléatoire de l'image qui peut traduire une réalité physique : une réalisation d'une image $I = y$ est considérée comme l'observation bruitée d'un phénomène aléatoire X . Dans l'expression 1.1 on reconnaît successivement : la loi marginale des observations $\mathbf{P}(I = y)$, la loi des observations $\mathbf{P}(I = y | X = x)$ et la loi a priori $\mathbf{P}(X = x)$ qui introduit une connaissance du comportement de X .

C'est aussi, grâce à la formule de Bayes, un modèle qui permet d'analyser le phénomène X à partir des observations y_1, \dots, y_n au travers de la loi a posteriori :

$$\mathbf{P}(X = x | I = y) \propto \mathbf{P}(I = y | X = x) \mathbf{P}(X = x) \quad (1.2)$$

Du point de vue des statistiques, le modèle de Bayes est intéressant parce qu'il fournit une classe d'estimateurs naturels : les estimateurs de Bayes. Un estimateur de X est une fonction \hat{X} des observations $\hat{X}(y_1, \dots, y_n)$ dont on veut qu'elle approche au mieux la ou les valeurs de X sous jacentes aux réalisations. Pour

cela il faut définir une fonction de coût $L(X, \hat{X})$ puis considérer le risque de Bayes :

$$R_B(\hat{X}) = \mathbb{E}_X \left[\mathbb{E}_{I/X} \left[L(\hat{X}, X) \right] \right]$$

Le risque de Bayes permet de comparer deux estimateurs quelconques de X . Il a d'autres propriétés : par exemple sous le coût $L(X, \hat{X}) = \mathbf{1}(X \neq \hat{X})$, l'estimateur optimal est le maximum a posteriori (MAP). Rappelons que si les réalisations y_1, \dots, y_n sont indépendantes, cet estimateur s'écrit :

$$\hat{X}_{\text{MAP}} = \underset{x}{\text{Argmax}} \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X = x | I_i = y_i) \quad (1.3)$$

Sous le coût quadratique, l'estimateur optimal est la moyenne a posteriori.

Lien avec les problèmes inverses

Les problèmes inverses sont fréquents en analyse d'images. Un problème inverse est un problème où l'on cherche à retrouver une grandeur x au travers d'observations y . Les modèles d'observations peuvent être complexes et les problèmes inverses *mal posés*. Cela veut dire ([Hadamard, 1923]) que la solution peut ne pas exister, ne pas être unique ou être instable (une petite incertitude sur les données y entraîne une forte incertitude sur la grandeur x à retrouver). Pour résoudre ces problèmes, on utilise en général deux notions : la notion d'attache aux données et la notion de régularité. Cela signifie que l'on cherche une solution x vraisemblable au vu des données y , et telle que x vérifie certaines contraintes de régularité. Ces deux notions peuvent s'écrire sous des formes très diverses. Notons toutefois qu'une partie importante des méthodes considère le problème comme un problème de minimisation :

$$\hat{x} = \underset{x}{\text{Argmin}} [\Phi_{\text{données}}(x, y) + \rho \Phi_{\text{régul}}(x)] \quad (1.4)$$

L'estimateur MAP du modèle Bayésien entre dans cette classe de formulation dès lors que l'on voit le modèle a priori comme un terme de régularisation :

$$\hat{X}_{\text{MAP}} = \underset{x}{\text{Argmin}} [-\log(\mathbf{P}(I = y | X = x)) - \log(\mathbf{P}(X = x))] \quad (1.5)$$

La première différence est que le paramètre ρ est intégré dans la loi a priori. La seconde différence est qu'une formulation bayésienne du problème fournit d'autres estimateurs que le MAP.

Champs de Markov

L'analyse d'image par champs de Markov a connu un élan de popularité à la fin des années 80 sur l'impulsion de quelques articles fondateurs ([Besag, 1986, Geman et Geman, 1984]). On trouvera une analyse illustrée des développements possibles dans [Descombes, 2004]. Dans le cadre Bayésien décrit précédemment, un modèle par champs de Markov considère que X , le processus sous-jacent, est lui même une variable aléatoire de type image

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^\Lambda$$

ayant la propriété Markovienne suivante :

$$\mathbf{P}(X(s) = x_s | X(s') = x_{s'}, s' \neq s) = \mathbf{P}(X(s) = x_s | X(s') = x_{s'}, s' \in N(s)) \quad (1.6)$$

où $N(s)$ est l'ensemble des sites voisins du site s et vérifiant une contrainte de positivité.

Les champs de Markov permettent d'intégrer l'information contextuelle liée à un objet sous forme de probabilités conditionnelles locales. Il est en effet possible de définir des champs de Markov en définissant le système de voisinage (les "cliques") et en spécifiant la loi conditionnelle de la valeur de niveau de gris d'un pixel en fonction des valeurs des pixels de son voisinage (c.f. expression 1.6). Un modèle d'observation est facilement obtenu en considérant que les pixels sont indépendants sous le conditionnement par rapport à X :

$$\mathbf{P}(I = y|X = x) = \prod_{s \in \Lambda} \mathbf{P}(I(s) = y_s|X = x)$$

Cette modélisation présente un intérêt évident lorsque l'on veut traiter un problème de segmentation, de restauration ou de classification. Les propriétés régularisantes que l'on peut alors introduire sont du type "si un pixel appartient à une classe, alors ses voisins appartiennent probablement à la même classe".

En télédétection, les limites de cette approche sont apparues avec la haute résolution. L'analyse d'images très résolues nécessite de plus en plus souvent d'introduire la notion de géométrie d'un objet. Cela est techniquement difficile en utilisant les champs de Markov. Suite à ce constat sont venus les champs de Markov sur graphes. Leur intérêt a par exemple été démontré dans le cadre de la détection de routes ([Tupin *et al.*, 1998, Rellier *et al.*, 2002]). Leur limite réside cependant dans le manque de souplesse quant au nombre d'objets considérés : il faut utiliser une prédétection pour obtenir un ensemble de sites plausibles, puis associer à chacun de ces sites une variable aléatoire représentant la perturbation de l'objet courant en ce site par rapport à l'objet initial issu de la prédétection.

Développement des processus ponctuels en analyse d'image

Nous verrons plus loin et plus en détail ce qu'est un processus ponctuel. Pour l'instant, notons que cet objet permet de modéliser des configurations aléatoires de figures géométriques comme des collections de cercles, de rectangles, ou de lignes brisées. Toujours dans le cadre Bayésien, considérons une réalisation \mathbf{x} d'un processus ponctuel $X : \mathbf{x} = \{u_1, \dots, u_{n(\mathbf{x})}\}$ où les u_i représentent chacun un objet géométrique disposé aléatoirement dans l'image.

Un modèle d'observation peut facilement être donné par le mélange suivant :

$$\mathbf{P}(I(s) = y_s|X = \mathbf{x}) = \mathbf{P}(I(s) = y_s|s \in \mathbf{x})\mathbf{1}(s \in \mathbf{x}) + \mathbf{P}(I(s) = y_s|s \notin \mathbf{x})\mathbf{1}(s \notin \mathbf{x})$$

Dans cette expression, la silhouette d'une configuration d'objets est l'ensemble des sites s de l'image tombant dans l'un des objets de la configuration : $silhouette(X) = \Lambda \cap X$. Usuellement, on considère que les pixels de la silhouette sont distribués suivant une loi gaussienne de moyenne élevée tandis que les pixels du fond suivant une loi gaussienne de moyenne basse (objets blancs sur fond noir). L'intérêt de ce type de modèle en traitement de l'image est apparu au début des années 90 avec des travaux limités à l'époque par le manque de moyens informatiques. A. Baddeley et M. C. V. Lieshout proposent explicitement d'utiliser un processus ponctuel pour détecter des cellules dans des images confocales par analyse bayésienne dans [Baddeley et Van Lieshout, 1993]. Le processus ponctuel modélise alors des collections aléatoires de disques.

Par la suite, l'idée a évolué grâce à des travaux divers, notamment [Van Lieshout, 1993, Pievatolo et Green, 1998] et surtout sous l'influence de H.

Rue [Rue et Hurn, 1999, Rue et Syverseen, 1998]. Ces travaux étudient essentiellement les techniques d'échantillonnage associées au modèle probabiliste, et tentent, en général, d'utiliser des formes géométriques de plus en plus complexes. Ces travaux couvrent une gamme de formes qui vont des cercles aux polygones à un nombre inconnu de cotés. Un autre axe de travail qui se développe concerne le type d'estimateurs utilisés. Les travaux de H. Rue en particulier tentent de s'écarter du MAP. Quant au modèle, jusque dans les années 2000, il reste très simple et les travaux se cantonnent à un modèle de mélange de gaussiennes.

En 2001, R. Stoica et X. Descombes proposent d'utiliser une possibilité jusque là non exploitée en utilisant des interactions fortement attractives entre les objets ([Stoica, 2001, Stoica *et al.*, 2004]). Dans ces travaux les objets considérés sont des segments et les interactions géométriques consistent en la connexion et le recouvrement : il s'agit de détecter des routes sur des images aériennes ou satellitaires. La volonté de traiter des images réelles, et donc complexes, nécessite de sortir du cadre Bayésien autorisé par les images plus académiques utilisées jusqu'alors. Le résultat est un algorithme d'extraction automatique de routes.

1.3.2 Application à la reconstruction urbaine

Nous nous proposons d'étudier la possibilité d'utiliser la modélisation par processus ponctuels dans un cadre de reconstruction urbaine. La reconstruction urbaine est un problème d'analyse d'image où la notion d'objet est essentielle. Nous nous proposons par ailleurs de limiter le type de données utilisées aux MNE. L'information de relief d'une zone urbaine est une donnée accessible de différentes manières et qui permet d'utiliser un terme d'attache aux données simple.

Lors de son stage de DEA effectué au sein du projet ARIANA, L. Garcin ([Garcin *et al.*, 2001]) a étudié la possibilité d'utiliser un processus ponctuel dans un cadre de stéréovision à deux vues. La limite majeure de l'approche s'est révélée être liée à l'attache aux données : la conclusion de son travail constate que pour étudier un couple d'images aériennes par un processus objet, il faudrait introduire un modèle d'éclairement ce qui nécessite des temps de calculs importants. Par ailleurs, dans un cadre de stéréovision, les objets du processus doivent être tridimensionnels. Là encore, des problèmes de temps de calcul sont apparus.

Objectif principal

L'objectif principal de ce travail est d'extraire automatiquement une caricature de plan cadastral sous forme vectorielle d'une zone urbaine dense à partir d'un MNE en utilisant une approche par processus ponctuels. Extraire automatiquement ce type d'information d'un MNE est d'un intérêt certain. D'une part, comme nous l'avons déjà mentionné, l'ajout d'un plan caricatural vectoriel dans les processus classiques de reconstruction urbaine tridimensionnel permet d'améliorer sensiblement les résultats obtenus. Ce type de données est en revanche souvent inaccessible directement. Si le cadastre de la plupart des villes françaises a été ou est sur le point d'être numérisé, il est en revanche indisponible pour bon nombre d'autres villes dans le monde, en particulier pour les villes sujettes à des évolutions rapides.

Les MNE sont en revanche une donnée accessible par de multiples méthodes. L'objectif est donc d'essayer d'utiliser au mieux l'information physique du relief d'une ville. Evidemment, en fonction du moyen d'acquisition de cette mesure physique, le modèle numérique obtenu est plus moins fin et bruité. Ce dernier

point justifie pleinement l'emploi des processus ponctuels puisque l'un des objectifs de ce travail est d'introduire des contraintes sur l'extraction reflétant la structure spatiale des villes. D'autre part, l'objectif d'extraction d'un plan cadastral permet de se limiter à l'extraction de formes simples par opposition aux formes tridimensionnelles recherchées dans le travail de L. Garcin.

Il faut noter que d'autres approches ont déjà été proposées. Nous avons déjà mentionné les travaux de Weidner [Weidner, 1995] et ceux de Vestri [Vestri et Devernay, 2001]. Parmi les méthodes ayant les objectifs les plus proches des travaux présentés ici, on trouve les travaux de Vinson et Cohen : [Vinson *et al.*, 2001, Vinson et Cohen, 2002]. Ils reposent sur l'utilisation d'une présegmentation sol/sursol et d'une orthoimage. On peut également mentionner les travaux de H. Oriot fondés sur l'utilisation de contours actifs favorisant certaines structures géométriques [Oriot, 2003].

Données utilisées

Nous avons eu la chance de recevoir par l'IGN différents types de données. Il y a tout d'abord le jeu de données d'Amiens, qui consiste en un MNE optique une série de photographies aériennes et une vérité terrain construite manuellement. Savoir comment utiliser une telle vérité terrain est un problème délicat. En effet, les données sont souvent nettement moins précises que la vérité terrain. A cette série s'ajoute un MNE LASER, ainsi qu'un MNE pléiades (obtenu à partir de simulations), très imprécis, et sur lequel le phénomène d'occlusion est particulièrement important.

1.3.3 Décomposition de ce travail

Le plan de ce travail est décomposé de la façon suivante :

Nous commençons par présenter de manière superficielle le premier modèle que nous avons implémenté et les résultats associés. Ce travail nous a en effet servi de base de réflexion pour la suite des travaux. Le chapitre 2 présente donc ce travail préliminaire, les résultats obtenus et les axes de développement qu'il a laissé entrevoir.

Les chapitres 3 et 4 se concentrent sur les processus ponctuels et les chaînes de Markov, en en présentant les définitions et propriétés fondamentales. Le chapitre 5 présente une version améliorée d'un algorithme d'échantillonnage de processus ponctuels et la preuve de sa convergence. Cette amélioration est l'une des contributions de cette thèse. Le lecteur peut toutefois omettre la lecture de ces trois chapitres sans perdre le fil du manuscrit.

Les trois chapitres suivants (6,7 et 8) montrent trois approches différentes au problème de détection de caricatures de bâtiments sur les MNE. Le chapitre 9 montre quelques améliorations proposées à la méthode. Nous présentons en particulier une technique de recuit simulé adaptatif. Le chapitre 10 conclut et propose quelques pistes de réflexion.

Chapitre 2

La méthode utilisée

Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter rapidement la méthode employée sur un exemple simple. Nous développerons plus en détail les fondements mathématiques de cette méthode dans la partie suivante.

Ce premier travail a été mené avec l'ambition de détecter sur un Modèle Numérique d'Élévation une configuration de rectangles approchant la trace au sol des bâtiments. L'objectif n'est donc pas d'obtenir une reconstruction tridimensionnelle à proprement parler, mais plutôt un plan cadastral vectoriel.

2.1 Minimisation d'énergie

La méthode utilisée est une méthode reposant sur la minimisation d'une énergie. Nous présentons brièvement ici l'espace d'état sur lequel est effectuée cette minimisation d'énergie, puis les contraintes à imposer sur l'énergie pour pouvoir la minimiser et enfin l'algorithme d'optimisation utilisé (recuit simulé).

2.1.1 Espace d'état

L'image en continu. Le formalisme adopté considère l'image comme un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Tout au long de ce travail, le support de l'image sera donc vu comme un pavé K . Plus précisément, $K = [0, X_{\max}] \times [0, Y_{\max}]$.

Espace objet. Un point de K , $p = (x, y)$ est un point de l'image. Si l'on veut maintenant considérer des rectangles dont les centres sont dans l'image on peut ajouter trois variables réelles (θ, L, l) représentant respectivement l'orientation, la longueur et la largeur d'un rectangle. Un rectangle u est alors un point de l'espace objet S suivant :

$$S = K \times M$$

où M est l'espace des marques associées aux points $(x, y) : M =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [L_{\min}, L_{\max}] \times [l_{\min}, l_{\max}]$. En modifiant cet espace des marques on peut paramétrer d'autres objets géométriques.

Ensemble des configurations. On s'intéresse maintenant aux configurations de rectangles. Pour cela, considérons d'abord \mathcal{C}_n , l'ensemble des configurations à n rectangles :

$$\mathcal{C}_n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \forall i \quad x_i \in S\}$$

\mathbf{x} (en gras) représentera toujours une **configuration** d'objets. Il faut noter que \mathbf{x} est un ensemble non ordonné. L'ensemble des configurations de rectangles \mathcal{C} est donné par l'union suivante :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

\mathcal{C} est l'espace d'état de la méthode par minimisation d'énergie que nous adoptons. Cet ensemble \mathcal{C} n'a, a priori, pas de structure particulière.

2.1.2 Energie

Nous devons définir une énergie pertinente sur cet ensemble des configurations. Une énergie est une fonction réelle U des configurations :

$$\begin{aligned} U : \mathcal{C} &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \mathbf{x} &\rightarrow U(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans notre cadre de détection de bâtiments sur des Modèles Numériques d'Élévation, l'objectif est de définir une énergie telle que la configuration minimisant U ,

$$\mathbf{x}^* = \text{Argmin } U(\mathbf{x})$$

donne une configuration de rectangles acceptable comme plan cadastral de la scène urbaine.

Comme nous l'avons présenté en introduction dans le cadre des problèmes inverses, une idée simple pour construire une énergie adéquate consiste à utiliser deux termes : l'un dit "d'attache aux données" permettant de qualifier la pertinence d'une configuration vis-à-vis du Modèle d'Élévation, l'autre dit "de régularisation" apportant une contrainte sur la structure de la solution recherchée.

Toutes les énergies ne sont évidemment pas satisfaisantes; il y a quelques contraintes qu'une énergie acceptable doit respecter. La première, la plus immédiate, doit être l'existence d'un minimum. Il faut, entre autre, s'assurer que l'énergie est bornée inférieurement :

$$\exists R_{\min} \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad U(\mathbf{x}) \geq R_{\min} \quad (2.2)$$

Notons qu'une configuration peut éventuellement avoir une énergie infinie : cela la rend totalement indésirable. Une contrainte nécessaire pour pouvoir minimiser l'énergie est **la condition d'hérédité** qui stipule qu'une configuration acceptable ne peut contenir une configuration indésirable :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad \text{t.q.} \quad U(\mathbf{x}) < \infty \quad \forall \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x} \quad U(\mathbf{y}) < \infty \quad (2.3)$$

Enfin pour finir, une dernière condition imposée par l'algorithme d'optimisation est **la condition de stabilité** (régularité de U) :

$$\exists R_s \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \mathbf{x}, u \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} \quad U(\mathbf{x} \cup u) \geq U(\mathbf{x}) - R_s \quad (2.4)$$

Cette condition impose que l'énergie d'une configuration \mathbf{x} ne puisse pas trop diminuer lorsqu'un objet u lui est ajouté.

Par ailleurs, il est possible de poser arbitrairement $U(\emptyset) = 0$ grâce à la condition d'hérédité. L'objectif de la modélisation est de construire une énergie respectant ces contraintes sous la forme :

$$U(\mathbf{x}) = U_{data}(\mathbf{x}) + \rho U_{reg}(\mathbf{x}) \quad \rho > 0 \quad (2.5)$$

où le terme $U_{data}(\mathbf{x})$ reflète l'adéquation de la configuration \mathbf{x} avec le MNE de données tandis que le terme $U_{reg}(\mathbf{x})$ influe sur la structure géométrique de la configuration des rectangles.

2.1.3 Optimisation

Avant de détailler plus précisément le modèle adopté, nous commençons par décrire très brièvement l'algorithme et le principe d'optimisation. Comme annoncé dans l'introduction, nous utilisons un recuit-simulé. Ce type d'algorithme a été largement utilisé en analyse d'image (voir [Winkler, 2003], par exemple). Le principe en est très connu et repose sur la probabilisation du problème. Cet algorithme peut être vu sous deux angles : l'un plus intuitif, l'autre plus mathématique.

Première approche du recuit simulé

Pour optimiser l'énergie $U(\cdot)$, le moyen le plus simple est d'utiliser un algorithme "glouton". Un tel algorithme part d'un état initial quelconque, X_0 . A chaque itération t , la configuration courante $X_t = \mathbf{x}$ est perturbée aléatoirement ce qui donne une configuration \mathbf{y} . Parmi les perturbations aléatoires possibles, on peut imaginer l'ajout ou la suppression d'un point, la translation ou la rotation d'un rectangle ou encore l'étirement (dilatation). Cette perturbation induit une variation d'énergie :

$$\Delta U = U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x})$$

On accepte de remplacer ensuite \mathbf{x} par \mathbf{y} si et seulement si $\Delta U \leq 0$, c'est à dire si et seulement si la perturbation aléatoire a amélioré la configuration courante. Cette double étape de perturbation-acceptation est ensuite itérée un nombre de fois déterminé par un critère (on peut imaginer, par exemple, que si trop de perturbations successives ont été refusées la simulation est arrêtée). L'inconvénient de cet algorithme est qu'il donne un minimum local de l'énergie. Ce minimum dépend de la configuration de départ, des transformations disponibles, et du parcours $(X_t)_{t \geq 0}$ effectué.

On peut donc améliorer cet algorithme en modifiant l'étape d'acceptation comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \Delta U \leq 0 & \text{alors } X_{t+1} = \mathbf{y} \\ \text{sinon} & \text{avec une probabilité } \alpha = \exp\left(-\frac{\Delta U}{T_t}\right) \quad \begin{array}{l} X_{t+1} = \mathbf{y} \\ 1 - \alpha \quad X_{t+1} = \mathbf{x} \end{array} \end{array}$$

L'idée est alors de faire décroître lentement la température T_t avec le temps. Un tel algorithme autorise les dégradations d'énergie ($\Delta U > 0$) avec une probabilité p . Le fait d'accepter des transformations dégradantes doit permettre de trouver un optimum moins local que par l'algorithme glouton car cela permet de sortir des bassins d'attraction des minima locaux. Par ailleurs, p diminue avec la température. Donc l'algorithme accepte de moins en moins les transformations dégradantes, au fur et à mesure que le système est refroidi. Cet algorithme

constitue presque un recuit simulé. Il manque cependant des conditions sur les transformations et des facteurs correctifs dans le calcul de p liés à la perturbation utilisée pour générer \mathbf{y} à partir de \mathbf{x} .

Le recuit simulé permet en fait d'obtenir théoriquement l'optimum global de l'énergie $U(\cdot)$. Pour obtenir ce résultat, il faut envisager l'algorithme sous un autre angle.

Deuxième approche du recuit simulé

L'idée est de considérer une variable aléatoire X à valeur dans \mathcal{C} dont la densité de probabilité f vérifie :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(-U(\mathbf{x})) \quad (2.6)$$

Une première étape du chapitre suivant sera la vérification de l'existence d'une telle variable aléatoire X . Nous verrons qu'elle existe et qu'un processus ponctuel marqué est une variable aléatoire à valeur dans \mathcal{C} . Par ailleurs il faudra préciser la notion de densité de probabilité. En particulier, une densité de probabilité est une dérivée de Radon-Nykodym d'une loi de probabilité par rapport à une mesure de référence. Toutes ces notions doivent donc être détaillées.

Le recuit simulé repose sur la simulation de variables aléatoires par chaîne de Markov. Le régime stationnaire d'une chaîne de Markov permet de simuler une loi π dont on ignore un moyen de simulation plus direct. π peut par exemple être la loi définie par U dans l'équation (2.6). Un des problèmes posés par de telles lois vient du fait que la constante de normalisation $1/Z$ est en général inconnue et son évaluation numérique inenvisageable au vu de la dimension de l'espace d'état. Le régime stationnaire d'une chaîne de Markov permet de simuler suivant $\pi(\cdot)$ un nouvel état $X_{t+1} = \mathbf{y}$ dès lors que l'état précédent est lui même distribué suivant $\pi(\cdot)$: cela veut dire que

$$\text{si } X_t \sim \pi(\cdot) \quad \text{alors} \quad X_{t+1} \sim \pi(\cdot)$$

Cette notion correspond à la notion de loi stationnaire de la chaîne de Markov. Lorsque l'on veut simuler une loi $\pi(\cdot)$ par une chaîne de Markov, l'enjeu est donc :

- d'une part d'assurer que $\pi(\cdot)$ est bien la loi invariante de la chaîne,
- et d'autre part que l'on atteint presque sûrement le régime stationnaire à partir de n'importe quel état initial X_0 .

Si les deux propriétés sont vérifiées, on est capable d'obtenir une suite de réalisations successives $(X_t)_{t \geq N}$ distribuées suivant $\pi(\cdot)$ pour N suffisamment grand (la détermination d'une valeur correcte de N est un autre problème). Dans le cadre de variables aléatoires réelles, on peut parler de densité plutôt que de loi. C'est aussi le cas dans le cadre des configurations d'objets.

Le recuit simulé repose sur une chaîne de Markov non homogène, ce qui veut dire que son noyau de transition dépend du temps. On considère une suite de densités dépendant du temps $(f_t(\cdot))_{t \geq 0}$ que l'on cherche à simuler par une chaîne de Markov. L'idée est que si deux densités successives ne sont pas trop différentes ($f_t(\cdot) \simeq f_{t+1}(\cdot)$) on peut construire une chaîne telle que si X_t est distribuée suivant $f_t(\cdot)$ X_{t+1} soit distribuée suivant $f_{t+1}(\cdot)$. Pour cela, il suffit d'assurer qu'à chaque instant t la loi $f_t(\cdot)$ est la loi stationnaire de la chaîne de Markov. Supposons que l'objectif soit la maximisation de la densité $f(\cdot)$. On pose alors :

$$f_t(\cdot) \propto f^{\frac{1}{T_t}}(\cdot) \quad (2.7)$$

où la suite T_t est une suite de “températures” décroissant vers 0. Si cette décroissance a lieu suffisamment lentement, (en suivant une loi logarithmique), et que la température initiale T_0 est suffisamment grande, les variables aléatoires successives (X_t) sont distribuées suivant $f_t(\cdot)$. Par ailleurs la suite $(f_t)_{t \geq 0}$ converge vers une densité nulle partout sauf aux endroits de l’espace d’état où $f(\cdot)$ est maximale. Le résultat associé à un tel algorithme (voir [Winkler, 2003] ou [Van Lieshout, 1993]) stipule donc qu’il permet de trouver le maximum global de la fonction f avec une probabilité 1.

En pratique nous utilisons un algorithme d’échantillonnage de type Metropolis-Hastings-Green. Cet algorithme permet de construire une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est définie à chaque instant t par la densité $f(\cdot)^{\frac{1}{T_t}}$ sans en connaître la constantes de normalisation.

2.2 Le modèle

Nous développons ici le modèle utilisé dans ce premier exemple pour extraire les silhouettes des bâtiment des MNE.

2.2.1 Attache aux données

Forme générale : $U_{data}(\mathbf{x})$

D’un point de vue du modèle, il serait très intéressant d’avoir un modèle Bayésien $U_{data}(x) = -\log(L(I|\mathbf{x}))$ où L serait la vraisemblance des observations sachant une réalisation. Dans notre cas, cela signifierait que l’on est capable de construire un modèle statistique de MNE pertinent étant donné une configuration de rectangles représentant les bâtiments. Cela est difficile pour deux raisons : d’une part il faudrait introduire des lois sur la répartition des hauteurs à l’intérieur d’un bâtiment, d’autre part il faudrait modéliser le comportement statistique des MNE en dehors des bâtiments (rue, voitures arbres) ce qui est délicat. C’est pour cela, que, quittant le cadre Bayésien exploité par Rue ([Rue et Hurn, 1999]) ou Van Lieshout ([Baddeley et Van Lieshout, 1993]), nous adoptons l’idée proposée par R. Stoïca et L. Garcin dans leurs travaux [Stoica, 2001], [Garcin *et al.*, 2001] et utilisons un terme “détecteur” :

$$U_{data}(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} U_d(u) \quad (2.8)$$

Il faut d’abord remarquer que ce modèle considère les objets x_i d’une configuration \mathbf{x} indépendamment les uns des autres, alors que dans un cadre Bayésien l’hypothèse d’indépendance est en général faite sur les pixels. D’autre part, si l’on ignore le terme de régularisation $U_{reg}(\mathbf{x})$, il est évident qu’un objet $u \in S$ est désirable dès lors que son énergie d’attache aux données $U_d(u)$ est négative et indésirable sinon. Ce type de terme d’attache aux données repose donc sur un effet binaire.

Une telle énergie d’attache aux données nécessite un terme répulsif dans l’énergie de régularisation. En effet, si $U_d(u) < 0$ on a :

$$U_{data}(\mathbf{x} \cup u \cup u) = U_{data}(\mathbf{x} \cup u) + U_d(u) < U(\mathbf{x} \cup u) \quad (2.9)$$

Le terme de régularisation doit donc éviter la superpositions de points intéressants. En réalité, il faut un peut étendre cette contrainte : le terme de régularisation doit aussi assurer la condition de minoration (2.2).

Construction du terme $U_d(\cdot)$

Pour construire $U_d(\cdot)$, on peut tenir compte des trois contraintes suivantes :

- les minima locaux négatifs de $U_d(\cdot)$ doivent correspondre à des bâtiments sur le MNE,
- $U_d(\cdot)$ doit être positive là où l’hypothèse de bâtiment est inacceptable,
- pour faciliter l’optimisation, $U_d(\cdot)$ devrait être aussi “ presque convexe localement ” que possible.

Pour cela nous construisons trois fonctions positives j_{seuil} , j_{pos} , et j_{neg} associant à tout rectangle $u \in S$ une valeur réelle positive et prenons :

$$U_d(\cdot) : u \in S \rightarrow \begin{cases} j_{pos}(u) & \text{si } j_{seuil}(u) \leq 1 \\ -j_{neg}(u) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

j_{seuil} sert à définir quelles hypothèses de rectangles sont considérées comme acceptables, j_{neg} sert à placer les minima locaux de $U_d(\cdot)$ aux bons endroits, et j_{pos} sert à conduire une mauvaise hypothèse de rectangle vers une bonne pour faciliter l’optimisation de l’énergie.

L’attache aux données en pratique

Dans ce premier exemple, une hypothèse rectangulaire de bâtiment est considérée comme correcte si les hauteurs données par le MNE à l’intérieur du rectangle sont significativement plus hautes que les hauteurs du MNE sur le pourtour du rectangle. Cela correspond à une contrainte **d’extrudation** des bâtiments. La qualité d’une hypothèse acceptable est donnée par une mesure d’**homogénéité** des hauteurs.

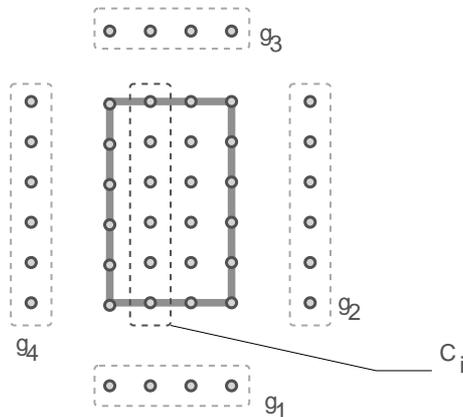


FIG. 2.1: *Echantillonnage utilisé pour calculer le terme d’attache aux données.*

Pour un rectangle donné u , on se donne un masque de points $Mask(u)$ tel que celui présenté par la figure 2.1. Un tel masque est obtenu par sous-échantillonnage du MNE et est composé de 5 ensembles de points de K différents :

- Les 4 lignes g_1, \dots, g_4 servent à calculer une estimée de la hauteur du sol $\widehat{h}_g(u)$ autour du rectangle u .
- L’ensemble des points centraux c se décompose en un nombre n de lignes suivant l’axe longitudinal du rectangle : c_1, \dots, c_n . Ces lignes sont en fait regroupées deux par deux : $C_1 = c_1 \cup c_n$, $C_2 = c_2 \cup c_{n-1}$ et ainsi de suite

jusqu'à $C_m = c_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Cela donne donc des paires de lignes symétriques par rapport à l'axe longitudinal du rectangle.

On note $h(p)$ la hauteur donnée par le MNE en un point $p \in K$. Pour un ensemble g de points de K , on note \bar{g} la moyenne des hauteurs dans cet ensemble : $\bar{g} = \sum_{p \in g} h(p) / \text{card } g$.

Estimation de la hauteur du sol. On a choisi pour cet estimateur le minimum des moyennes des ensembles de points g_i .

$$\widehat{h}_g = \min_{i=1, \dots, 4} \bar{g}_i$$

Taux de volume. On appelle taux de volume $\tilde{v}(u)$ la proportion de points à l'intérieur du rectangle u plus haut que l'estimée de la hauteur du sol $\widehat{h}_g(u)$ augmentée d'une hauteur minimale de bâtiment h_{\min} :

$$\tilde{v}(u) = \frac{\text{card}\{p \in c \text{ t.q. } h(p) - \widehat{h}_g(u) \geq h_{\min}\}}{\text{card } c}$$

Un taux d'homogénéité est également calculé. Il repose sur l'hypothèse que les bâtiments sont symétriques.

Taux d'homogénéité. On note \bar{C}_i les moyennes des hauteurs à l'intérieur des lignes symétriques C_i . Pour un paramètre σ donné en mètres, on calcule alors le taux d'homogénéité $\tilde{t}(u)$ suivant :

$$\tilde{t}(u) = \frac{\sum_i \text{card}\{p \in C_i\} \text{ t.q. } |h(p) - \bar{C}_i| \leq \sigma}{\sum_i \text{card}\{C_i\}}$$

Taux de surface. Ce taux mesure le rapport entre la surface d'un rectangle et la surface maximale possible :

$$\tilde{s}(u) = \frac{l(u) * L(u)}{L_{\max} * l_{\max}}$$

Ce taux sert à favoriser les grands rectangles et éviter le morcellement des bâtiments.

j_{seuil} , j_{pos} et j_{neg} . La fonction de seuil dans ce modèle mesure si le taux de volume est suffisant. Pour un paramètre v_{\min} donné :

$$j_{\text{seuil}}(u) = \frac{\tilde{v}(u)}{v_{\min}}$$

En pratique nous avons pris $v_{\min} = 0.8$ et $h_{\min} = 3m$ ce qui signifie que le pourcentage des points surélevés de 3m par rapport à l'estimée de la hauteur du sol doit être d'au moins 80 % dans un rectangle pour que l'hypothèse soit acceptable. Pour j_{neg} nous avons pris :

$$j_{\text{neg}} = 10 * \tilde{s} * \tilde{t}^2 * \tilde{v}^3$$

dont les minima locaux sont les bâtiments les plus grands possible avec un taux d'extrudation et un taux d'homogénéité les plus proche possible de 1. Le paramètre σ d'homogénéité a été mis à 1.5m. Pour finir, la fonction j_{pos} que nous avons choisie et qui sert à guider l'optimisation est :

$$j_{\text{pos}} = \frac{1 - \left(\frac{\tilde{v}}{v_{\min}}\right)^2}{20}$$

En minimisant j_{pos} , on maximise le taux de volume d'un rectangle considéré comme non acceptable. Ce terme guide l'optimisation puisqu'il ordonne les hypothèses non intéressantes. Par ailleurs, plus $j_{pos}(u)$ est faible, et plus u est proche d'une hypothèse intéressante.

2.2.2 Le terme de régularisation

Nous prenons pour ce modèle le terme de régularisation le plus simple possible. Il s'agit d'un terme connu sous le nom de modèle de Strauss ([Strauss, 1975]) par les statisticiens spatiaux. Soit \sim la relation symétrique sur $S \times S$ qui s'applique aux rectangles dont les surfaces s'intersectent. Soit $s(\mathbf{x})$ le nombre d'intersections de rectangles dans la configuration \mathbf{x} :

$$s(\mathbf{x}) = \text{card}\{\{u, v\} \in \mathbf{x}^2 \text{ t.q. } u \sim v\}$$

Le terme de régularisation choisi est un terme dit de soft-core :

$$U_{reg}(\mathbf{x}) = a_{inter} * s(\mathbf{x})$$

a_{inter} est un paramètre réel. Si a_{inter} est négatif, ce terme favorise les intersections, tandis que s'il est positif, il les pénalise. Pour éviter le phénomène d'accumulation des rectangles acceptables (décrit par l'équation 2.9) il faut que $a_{inter} > 2 * |\min U_d|$. Dans notre cas pratique il suffit que $a_{inter} > 20$.

Si la surface minimale d'un rectangle est strictement positive ($(l_{\min} * L_{\min}) > 0$), ce terme de soft-core permet d'obtenir la condition de minoration nécessaire à l'existence d'une configuration minimisante, puisque le nombre de rectangles dans S n'intersectant aucun autre est alors majoré par $|K|/(L_{\min} * l_{\min})$, aux effets de bords près.

2.3 L'algorithme d'optimisation

Nous présentons ici l'algorithme tel qu'il est implémenté. Cela correspond à un échantillonnage de Monte Carlo par Chaîne de Markov couplé avec un recuit simulé, mais nous n'exposons dans cette partie l'algorithme que sous son aspect le plus simple.

2.3.1 Perturbations

L'algorithme de recuit-simulé repose sur des perturbations aléatoires d'un état courant \mathbf{x} . Un noyau de perturbation $Q(\mathbf{x}, \cdot)$ est donc nécessaire. Pour ce premier travail, nous avons utilisé un mélange de 5 perturbations. Cela signifie qu'avec une probabilité fixée, l'une de ces perturbations est sélectionnée et appliquée à la configuration courante \mathbf{x} pour obtenir la configuration proposée \mathbf{y} .

Naissance ou mort

Le premier noyau de perturbation, Q_{BD} s'applique comme suit :

- on choisit avec une probabilité 1/2 d'effectuer une mort ou une naissance,
- **si la mort** a été choisie on obtient \mathbf{y} en retirant l'un de ses éléments u choisi uniformément parmi les éléments de \mathbf{x} , ce qui donne : $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$.
- **si la naissance** a été choisie, on obtient \mathbf{y} en générant un nouvel objet u dans S avec une loi uniforme et en l'ajoutant à \mathbf{x} : $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$.

Perturbations simples d'un objet

Pour chacune des perturbations qui suivent, un objet u est sélectionné aléatoirement dans \mathbf{x} puis est perturbé en suivant une loi en général uniforme ce qui donne un nouvel objet v . La configuration nouvelle \mathbf{y} est alors obtenue en remplaçant u par v dans $\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u \cup v$.

Translation. Deux valeurs réelles (d_x, d_y) de déplacement sont générées uniformément dans $[-\Delta x, +\Delta x] \times [-\Delta y, +\Delta y]$. $u = (x, y, \theta, L, l)$ est ensuite remplacé par $v = (x + d_x, y + d_y, \theta, L, l)$. Pour cette transformation, on considère que K est un tore : si v sort des limites de l'image il y revient par un modulo de façon à limiter le taux de rejet du noyau de la chaîne.

Rotation. Dans le même esprit, une perturbation de la direction d_θ est générée uniformément dans $[-\Delta\theta, +\Delta\theta]$ et si $u = (x, y, \theta, L, l)$ v est pris comme $v = (x, y, \theta + d_\theta, L, l)$.

Dilatations. On peut imaginer faire de même pour perturber la longueur ou la largeur d'un rectangle. Il est cependant apparu qu'une simple modification de la longueur ou de largeur n'était pas optimale. De telles transformations laissent en effet le centre inchangé et modifient donc la position de deux cotés simultanément. Pour améliorer l'optimisation, nous avons choisi un autre type de dilatation qui perturbe à la fois la longueur ou la largeur d'un rectangle et son centre, de manière à laisser inchangé l'un des deux cotés du rectangles. Le principe de cette transformation est illustré par la figure 2.2. Dans le cas de la dilatation suivant la longueur, deux variables aléatoires sont tirées : d_L , réelle, est tirée uniformément dans $[-\Delta L, +\Delta L]$ et k , entière, est tirée équiprobablement dans $\{0, 1\}$. Le nouvel objet v obtenu est donné par $(x + d_L \cos(\theta + k * \pi)/2, y + d_L \sin(\theta + k * \pi)/2, \theta, L + d_L, l)$. La variable aléatoire k correspond au choix du coté à laisser inchangé.

2.3.2 Probabilité d'acceptation

Le recuit simulé repose sur l'acceptation d'une perturbation avec une certaine probabilité, dépendant de la variation d'énergie induite. Commençons par examiner le cas des transformations qui perturbent l'un des objets de la configuration.

Cas des transformations simples

Dans le cas des 4 transformations qui ne perturbent pas le nombre d'objets dans la configuration, la loi d'acceptation d'une perturbation aléatoire est la suivante. Pour \mathbf{y} issue de \mathbf{x} par perturbation, et $\Delta U = U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x})$, posons :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\Delta U}{T}\right) \quad \alpha = \min(1, R)$$

Le schéma de remplacement de Bernoulli appliqué est alors :

$$\text{avec une probabilité} \quad \begin{array}{l} \alpha \quad X_{t+1} = \mathbf{y} \\ 1 - \alpha \quad X_{t+1} = \mathbf{x} \end{array}$$

Ce qui correspond au schéma décrit dans le paragraphe 2.1.3 écrit sous une forme plus compacte.

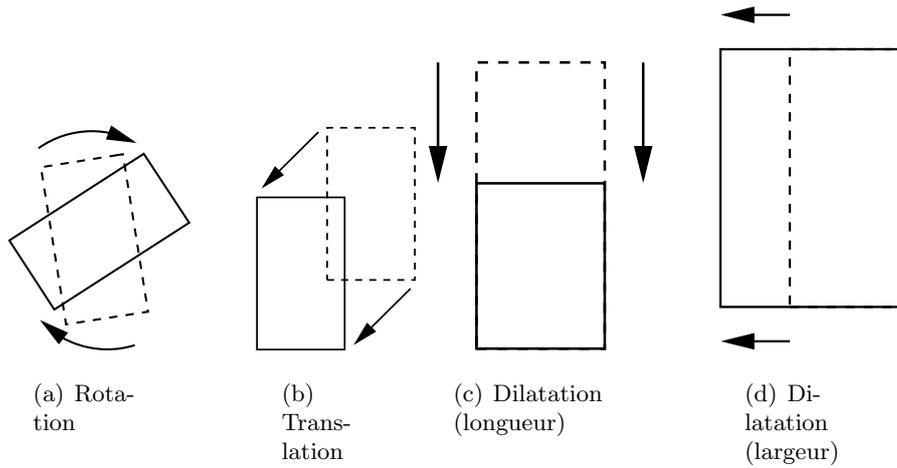


FIG. 2.2: Transformations simples

Cas de la naissance ou mort

Si le noyau de perturbation qui a été choisi est le noyau de naissance ou mort d'un objet, il faut considérer deux cas :

Cas de la mort $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$. La loi de remplacement repose alors sur le calcul du taux suivant :

$$R_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{n(\mathbf{x})}{|K|} \exp\left(-\frac{\Delta U}{T_t}\right)$$

où $|K|$ représente la mesure de Lebesgue de K ($|K| = X_{\max} * Y_{\max}$) et $n(\mathbf{x})$ est le cardinal de \mathbf{x} . α est pris comme le minimum entre 1 et R_D , et le schéma de remplacement est le même que précédemment. La seule différence vient donc des termes additionnels dans le calcul du taux R .

Cas de la naissance $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$. Le schéma de remplacement est identique que pour la mort, mais le taux calculé est le suivant :

$$R_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|K|}{n(\mathbf{x}) + 1} \exp\left(-\frac{\Delta U}{T_t}\right)$$

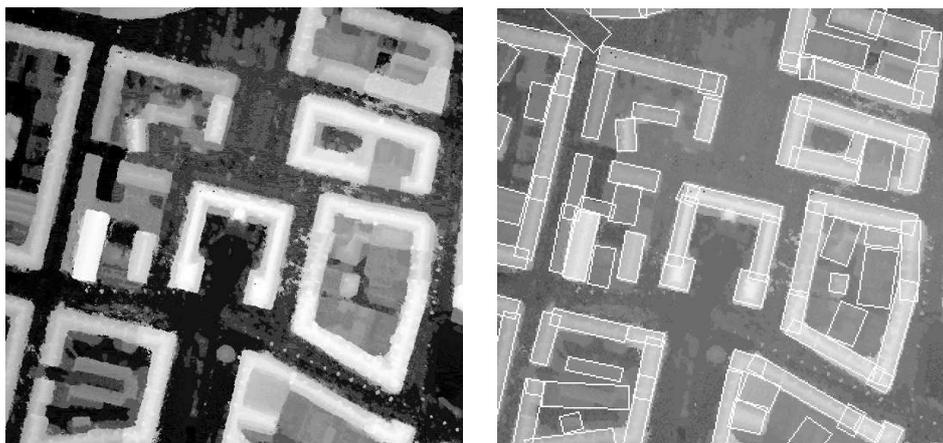
2.3.3 Schéma de décroissance

Le but de la mise en oeuvre d'un recuit simulé est l'obtention d'un minimum global de l'énergie. Pour obtenir celui ci (voir [Van Lieshout, 1993]) il faudrait mettre en oeuvre un schéma de décroissance de la température de type logarithmique, c'est à dire une loi d'évolution de la température ayant la forme :

$$T_t = \frac{C}{1 + \log(t)}$$

Un tel schéma de décroissance est très lent. En pratique on le remplace donc par un schéma géométrique comme :

$$T_t = T_0 \gamma^t \quad 0 < \gamma < 1$$



(a) MNE d'origine (IGN)

(b) Extraction obtenue

FIG. 2.3: *Résultat obtenu par le premier modèle vu en 2D*

ce qui correspond à la loi d'évolution suivante :

$$T_{t+1} = \gamma T_t \quad (2.11)$$

Ce schéma est en fait lui même souvent remplacé par un schéma géométrique constant par morceaux, c'est à dire un schéma où la température reste constante en général et suit la loi d'évolution géométrique de l'équation 2.11 en des instants périodiquement répartis.

2.4 Résultats obtenus

2.4.1 Description

Nous présentons ici les résultats obtenus sur une partie du MNE de la ville d'Amiens. Il faut noter que pour améliorer la visualisation 3D, l'intersection n'est pas testée sur les rectangles directement mais sur les rectangles issus d'une homothétie qui réduit les longueurs de 10 %. Cela permet d'autoriser de légères intersection pour améliorer la qualité du rendu visuel 3D.

2.4.2 Les résultats

Les figures 2.3 et 2.4 présentent le résultat obtenu.

Il faut remarquer quelques effets de bord, comme par exemple dans le coin supérieur gauche. Il faut noter par ailleurs que l'intérieur des cours est très mal décrit par le modèle : les structures fines sont mal détectées. Du point de vue informatique, le résultat se présente sous la forme d'un fichier texte décrivant les coordonnées des rectangle obtenus dans l'image. Ce résultat a été obtenu en 20 minutes sur une machine Unix 500 Mhz, 250 M ram.

2.5 Analyse et commentaires

Ce premier résultat a été obtenu durant la première année de thèse. Il n'est pas très précis, mais a permis de montrer la pertinence de l'approche utilisée.

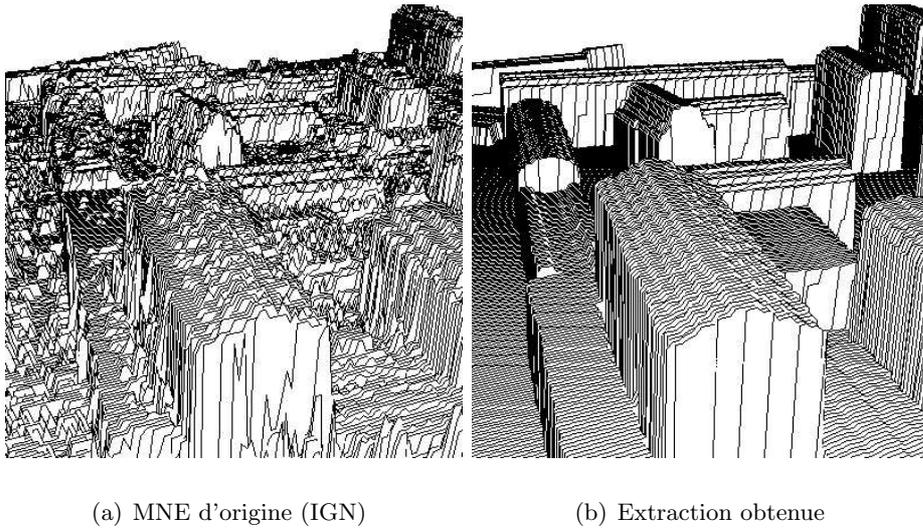


FIG. 2.4: Résultat obtenu par le premier modèle en 3D après une estimation simple des formes de toits.

Il a également permis de tracer les grandes lignes de réflexions pour la suite du travail.

2.5.1 Précision du résultat

Le résultat obtenu n'est pas très précis. Cela vient du fait que la fonction j_{seuil} qui décide ce qu'est un bâtiment acceptable, n'est pas très exigeante (la condition de seuil sur le taux de volume n'est pas une contrainte difficile). Si l'on veut augmenter la précision, il faudra être plus exigeant sur cette condition d'attractivité d'une hypothèse.

Cela pose un problème important : la qualité du minimum obtenu dépend fortement de la mélangeance de la chaîne de Markov. Il faut pouvoir explorer l'espace d'état de façon suffisamment souple. Or si le sous ensemble $S_0 \subseteq S$ des rectangles vérifiant l'hypothèse d'attractivité est trop petit, l'algorithme stochastique d'exploration tel qu'il est utilisé dans cette partie ne suffira pas pour explorer correctement les états pertinents. Un axe de travail qui s'est imposé a donc été : comment explorer correctement un ensemble S_0 très petit par rapport à S ?

2.5.2 Le problème du soft-core

La condition de minoration impose que le potentiel a_{inters} dans le terme de soft-core soit grand. Or le recuit simulé ordonne en quelque sorte les configurations. Dès le début de la décroissance, il est difficile d'accepter la création d'une intersection puisque la variation positive d'énergie induite est trop grande. Cela signifie donc que dès le début du recuit simulé, les configurations comportant des intersections sont très rares. Concrètement, cela entraîne que pour un endroit pertinent de l'image, une seule hypothèse de bâtiment est explorée à la fois. Il faut noter que cela est dû à l'aspect non bayésien de l'attache aux données.

Le problème du soft-core se traduit par deux axes d'exploration : peut-on imaginer un modèle bayésien ? Et comment peut-on favoriser l'exploration de plusieurs hypothèses pour un même bâtiment à la fois ?

2.5.3 Le modèle a priori

On s'intéresse ici au terme de régularisation U_{reg} , aussi appelé "modèle a priori" par analogie avec le cadre bayésien ou "champ interne" en référence aux champs de Markov. Dans l'exemple présenté dans ce chapitre, le modèle a priori est des plus simples : il n'est constitué que d'un terme limitant la superposition des rectangles.

Le but est d'introduire un terme régularisant utilisant des interactions attractives. Cela a été testé dans cet exemple, mais un des problèmes qui s'est posé vient de la complexité du paysage énergétique obtenu. Le terme régularisant donnait alors une énergie trop complexe pour pouvoir être optimisée simplement.

Par ailleurs, la construction d'un modèle d'interaction attractive n'est pas une chose aisée en soi. En effet, on attend d'un modèle en traitement d'image quelques propriétés d'invariance, dont l'invariance par rapport à la taille des images.

Les questions posées par cet axe sont donc : peut-on définir simplement des interactions attractives ? Et comment peut-on faire pour ne pas tomber systématiquement dans des minima locaux une fois une telle énergie ajoutée au reste.

2.5.4 L'optimisation

On voit que dans les différents axes de perspectives mentionnés précédemment, la question de la qualité de l'exploration de l'état par la Chaîne de Markov est essentielle.

Une autre question qu'a soulevée ce premier travail concerne la question de la mémoire : peut-on introduire une forme de mémoire dans l'algorithme, et est-ce utile ?

Le recuit simulé a fait apparaître un point important. Au cours des simulations, il est apparu un phénomène de températures critiques : il semble que l'essentiel de la décroissance pourrait être plus rapide, et qu'il suffirait d'effectuer une décroissance très lente en quelques valeurs critiques de la température. Nous discuterons de cette question plus en détail.

2.5.5 L'Estimation des paramètres

Les paramètres de l'énergie ont été estimés empiriquement dans ce premier travail. Une question naturelle qui se pose concerne l'estimation des paramètres des modèles. Est-il possible de mettre en place des méthodes et des modèles pour construire des techniques d'apprentissage de ces paramètres ? Malheureusement, c'est là une des questions que nous avons laissées en suspend.

Deuxième partie

Fondements Mathématiques

Introduction

Cette partie a pour but de présenter les fondements mathématiques sous tendant ce travail. Les deux premiers chapitres rappellent des éléments fondamentaux de la théorie des processus ponctuels et des chaînes de Markov. Ils ne contiennent aucune contribution particulière.

Le troisième chapitre détaille l'algorithme d'échantillonnage de processus ponctuels utilisé. Il contient quelques contributions personnelles et constitue le cœur théorique de la méthode employée.

Ce troisième chapitre a été écrit de façon à permettre au lecteur de le lire sans nécessiter la lecture des deux premiers chapitres, lesquels auraient pu figurer en annexe.

Partie II

3	Processus Ponctuels	49
3.1	Premières définitions et notations	49
3.1.1	Le contexte mathématique	49
3.1.2	Loi d'un processus ponctuel	50
3.1.3	Processus ponctuels marqués	50
3.1.4	Processus ponctuels simples	51
3.2	Processus ponctuels finis	52
3.2.1	Construction.	52
3.2.2	Processus ponctuel binomial	53
3.2.3	Processus ponctuel de Poisson	54
3.2.4	Processus ponctuels finis définis par une densité	55
3.3	Processus ponctuels de Markov	56
3.4	Exemples.	58
3.4.1	Paramètres d'intensité.	58
3.4.2	Processus de Strauss.	58
3.5	Quelques propriétés	59
3.5.1	Mesure et théorème de Campbell.	59
3.5.2	Lois conditionnelles.	60
4	Chaînes de Markov	63
4.1	Premières définitions	63
4.1.1	Notions fondamentales	63
4.1.2	Irréductibilité.	64
4.1.3	Atomes et ensembles petits.	65
4.1.4	Cycles et apériodicité.	66
4.2	Ergodicité	67
4.2.1	Transience et récurrence.	67
4.2.2	Récurrence au sens de Harris.	68
4.2.3	Mesures invariantes.	69
4.2.4	Ergodicité et convergence.	70
4.3	Théorèmes limites.	71
5	Algorithme d'échantillonnage	73
5.1	Processus ponctuels et notations	74
5.2	MCMC et processus ponctuels	74
5.2.1	Geyer et Møller	75
5.2.2	Objectifs	76
5.2.3	Metropolis Hastings Green	76
5.3	Analyse	79
5.3.1	Naissance ou mort	79
5.3.2	Naissance ou mort dans un voisinage	81
5.3.3	Transformations simples	86
5.4	Synthèse	91
5.4.1	Algorithme	92
5.4.2	Conditions	94
5.4.3	Propriétés :	95
5.4.4	Preuve de la $\pi(\cdot)$ réversibilité :	96

5.4.5	Preuve des propriétés de stabilité de la chaîne	96
5.5	Vérifications par l'expérience	100
5.5.1	Processus de Poisson	100
5.5.2	Loi cible et variation totale	101
5.5.3	Naissance ou mort	102
5.5.4	Naissance ou mort dans un voisinage	102
5.6	Améliorer la naissance ou mort dans un voisinage	106
5.6.1	Relations asymétriques	106
5.6.2	Naissance ou mort dans un voisinage avec une pré-exploration . . .	108

Chapitre 3

Processus Ponctuels

Ce chapitre a pour but de présenter quelques éléments de la théorie des processus ponctuels, ainsi que quelques exemples illustratifs. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Van Lieshout, 2000] ou à [Stoyan *et al.*, 1995] d'où est tiré l'essentiel des éléments présentés ici.

3.1 Premières définitions et notations

3.1.1 Le contexte mathématique

On s'intéresse à des ensembles non ordonnés de points d'un espace donné χ , par exemple \mathbb{R}^2 .

Définition 1

On appelle **configuration** un ensemble dénombrable, non ordonné de points de χ :

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

Pour pouvoir considérer des configurations aléatoires, il faut ajouter des contraintes sur χ . On choisit de considérer un espace χ muni d'une métrique d tel que (χ, d) soit complet et séparable. Cette métrique permet de définir une topologie et une σ -algèbre borélienne. En pratique, χ sera souvent un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^d muni de la distance euclidienne.

Définition 2

On dit d'une configuration $\mathbf{x} \subseteq \chi$ qu'elle est **localement finie** si dans tout borelien borné $A \subseteq \chi$ elle place un nombre $N_{\mathbf{x}}(A)$ fini de points.

La famille de toutes les configurations localement finies sera notée N^{lf} .

On définit alors la notion de processus ponctuel :

Définition 3

Un **processus ponctuel** sur χ est une application X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans N^{lf} , telle que pour tout borelien $A \subseteq \chi$, $N(A) = N_X(A)$ est une variable aléatoire (finie).

Ce qui induit une nouvelle définition :

Définition 4 | *Si l'espace χ est borné ou si $N_X(\chi)$ est fini presque sûrement, le processus ponctuel est dit **processus ponctuel fini**.*

Les réalisations d'un processus ponctuel X sont donc des configurations aléatoires de points tels que pour tout borélien $A \subseteq \chi$ le nombre de points dans A soit une variable aléatoire. Cela signifie qu'un processus ponctuel est une variable aléatoire à valeur dans l'espace mesurable $(N^{lf}, \mathcal{N}^{lf})$, où \mathcal{N}^{lf} est la plus petite σ -algèbre telle que pour tout borélien borné $A \subseteq \chi$ l'application $\mathbf{x} \rightarrow N_{\mathbf{x}}(A)$ soit mesurable.

La mesure de probabilité induite sur \mathcal{N}^{lf} est appelée la **loi** de X .

3.1.2 Loi d'un processus ponctuel

La loi d'un processus ponctuel X devrait être la mesure image par l'application X de \mathbb{P} sur \mathcal{N}^{lf} . Mais comme \mathcal{N}^{lf} est définie par la mesurabilité des applications $\mathbf{x} \rightarrow N_{\mathbf{x}}(A)$ pour des boréliens $A \subseteq \chi$, l'analogie de la loi de probabilité pour des variables aléatoires dans un contexte de processus ponctuels est l'ensemble des lois jointes des vecteurs $(N(A_1), \dots, N(A_m))$ où les A_i sont des boréliens bornés :

Définition 5 | *La famille des **lois en dimensions finie (fidis)** d'un processus ponctuel X sur un espace métrique (χ, d) complet et séparable est la collection des lois jointes de $(N(A_1), \dots, N(A_m))$ pour tout vecteur fini (A_1, \dots, A_m) de boréliens bornés $A_i \subseteq \chi$, $i = 1, \dots, m$ de longueur quelconque $m \in \mathbb{N}$.*

L'intérêt de cette définition est justifié par le théorème suivant (voir [Daley et Jones, 1988]) :

Théorème 1 | *La loi d'un processus ponctuel X sur un espace métrique complet et séparable (χ, d) est entièrement déterminée par ses fidis.*

Donc, deux processus ponctuels partageant les mêmes fidis ont même loi.

3.1.3 Processus ponctuels marqués

Ce type de processus ponctuels a été décrit par Daley dans [Daley et Jones, 1988]

Définition 6 | *Soit (χ, d) et (\mathcal{K}, d') deux espaces métriques, complets et séparables. Un **processus ponctuel marqué** dont les positions sont dans χ et les marques dans \mathcal{K} est un processus ponctuel sur $\chi \times \mathcal{K}$ tel que le processus des points non-marqués soit un processus ponctuel bien défini.*

Pour comprendre cette définition, il faut d'abord voir que l'espace $\chi \times \mathcal{K}$ est métrique, complet et séparable dès lors que l'on introduit la métrique :

$$\rho((x, k), (y, l)) = \max\{d(x, y), d'(k, l)\}$$

Dans les cas où l'espace des marques \mathcal{K} est fini, on peut prendre, par exemple :

$$\mathcal{K} = \{1, \dots, M\} \quad d'(k, l) = |k - l|$$

Alors, tout processus ponctuel Y sur l'espace produit $\chi \times \mathcal{K}$ fait apparaître un processus ponctuel de points non-marqués X bien défini. Pour le comprendre, il nous faut considérer un borélien $A \subseteq \chi$. Alors, le nombre de points non-marqués dans A peut être écrit :

$$N_X(A) = \sum_{i=1}^{i=M} N_Y(A \times \{i\})$$

Par définition, chaque $N_Y(A \times \{i\})$ est une variable aléatoire finie, si bien que $N_X(A)$ est aussi une variable aléatoire finie. Par contre, dans le cas où \mathcal{K} est continu, il faut faire plus attention. Par exemple, un processus de poisson sur \mathbb{R}^3 (voir 3.2.3) n'est pas un processus ponctuel marqué sur \mathbb{R}^2 avec ses marques dans \mathbb{R} , puisque

$$N_X(A) = N_Y(A \times \mathbb{R})$$

n'est pas nécessairement fini pour un borélien $A \subseteq \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exemple. Un processus ponctuel multi dimensionnel $Y = (X_1, \dots, X_M)$ peut être vu comme un processus ponctuel marqué dont les marques définissent le numéro de la composante. Comme l'espace des marques est fini, le processus $X = \bigcup_{i=1}^{i=M} X_i$ des points non-marqués est bien défini.

3.1.4 Processus ponctuels simples

On s'intéresse maintenant à la multiplicité éventuelle des points d'une configuration. En pratique, il est rare de travailler avec des processus ponctuels qui contiennent des points situés exactement au même endroit. Soit N_s^{lf} l'ensemble des configurations localement finies \mathbf{x} ne contenant que des points distincts, c'est à dire telles que $N_{\mathbf{x}}(\{x\}) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in \mathbf{x}$.

Pour vérifier que N_s^{lf} est \mathcal{N}^{lf} -mesurable, il suffit de noter que, comme χ est séparable, il peut être recouvert par une union dénombrable de boules ouvertes $B(x_i, (\frac{1}{2})^j)$ de rayon arbitrairement petit. Par conséquent,

$$N_s^{lf} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega : N(B(x_i, \frac{1}{2^j})) \in \{0, 1\} \right\} \in \mathcal{N}^{lf}$$

Définition 7 | *Un processus ponctuel X est dit **simple** s'il prend ses valeurs dans N_s^{lf} presque sûrement.*

Il est intéressant de travailler avec les processus ponctuels simples puisque, pour connaître la loi d'un tel processus ponctuel, il suffit de connaître les **probabilités vides** :

$$v(A) = \mathbf{P}(N(A) = 0)$$

pour une classe suffisamment grande d'ensembles $A \subseteq \chi$.

Théorème 2 | *La loi d'un processus ponctuel simple X sur un espace métrique complet et séparable (χ, d) est uniquement déterminée par les probabilités vides des boréliens bornés $A \subseteq \chi$.*

Il faut se référer à [Van Lieshout, 2000] pour une démonstration assez technique.

3.2 Processus ponctuels finis

La plupart des processus ponctuels utilisés en pratique sont observés dans une région bornée. Cette région peut être dictée par l'application tout comme elle peut résulter d'un choix volontaire pour limiter la taille de l'espace d'intérêt. Dans tous les cas, les réalisations du processus ponctuel contiennent presque sûrement un nombre fini de points.

Nous verrons plus loin qu'il y a une raison théorique importante qui nous fait considérer cette classe de processus ponctuels. La notion de densité est en effet difficile à mettre en place pour des processus qui ne sont pas finis.

3.2.1 Construction.

Pour construire un processus ponctuel fini, on peut utiliser :

1. Une distribution de probabilité discrète $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour le nombre de points
2. Une famille de densités de probabilité symétriques $j_n(x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ sur χ^n pour les positions des points.

Le deuxième point implique que l'on suppose que χ soit équipé d'une mesure borélienne $\nu(\cdot)$ de manière à pouvoir définir les densités j_n par rapport à la mesure produit $\nu(\cdot)^n$.

On peut alors construire un processus ponctuel X de la manière suivante : On considère $N(\chi)$ une variable aléatoire de loi $(p_n)_n$, et on conditionne ensuite par rapport aux événements $N(\chi) = n$: on prend $(X_1, \dots, X_n) \in \chi^n$ un vecteur aléatoire de loi $j_n(\cdot, \dots, \cdot)$. La condition de symétrie est nécessaire puisqu'une configuration est indifférente à l'ordre dans lequel ses points sont recensés. Il convient de vérifier toutefois si l'on peut passer légalement de vecteurs ordonnés à des vecteurs non ordonnés. Ce point est important pour nous puisqu'il nous servira dans des démonstrations ultérieures où l'on basculera des configurations aux n -uplets, et réciproquement.

Définissons d'abord N^f comme l'ensemble des configurations finies. Ensuite, appelons \mathcal{N}^f la plus petite σ -algèbre pour laquelle les applications $\mathbf{x} \rightarrow N_{\mathbf{x}}(A)$ (A borélien borné) sont mesurables. On définit ensuite les sous ensembles de N^f suivants :

$$N_n = \{\mathbf{x} \in N^f : N_{\mathbf{x}}(\chi) = n\}$$

et, à chacun de ces ensembles, on associe une σ -algèbre \mathcal{N}_n^f en prenant la trace de \mathcal{N}^f sur N_n .

Considérons maintenant les fonctions $f_n : \chi^n \rightarrow N_n$ qui à des vecteurs de taille n associent des configurations de n points. Les f_n sont mesurables par rapport à la σ -algèbre des boréliens, et grâce à leur invariance par permutation, mesurables par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{B}_s(\chi^n)$ des boréliens symétriques dans χ^n . Par hypothèse, pour tout n , $j_n(\cdot, \dots, \cdot)$ est une densité invariante par permutation et est donc $\mathcal{B}_s(\chi^n)$ -mesurable.

Considérons la fonction $i_n : N_n \rightarrow \mathbb{R}$ sur les configurations de n points :

$$i_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!} \sum_{\varphi} j_n(\varphi(x))$$

où l'on somme sur toutes les applications φ qui à une configuration associent l'un des n -uplets correspondant. (Ces n -uplets diffèrent par des permutations, il y a donc $n!$ φ différentes.) On a donc : $i_n \circ f_n = j_n$.

Montrons que i_n est mesurable.

Soit $A \subseteq \chi$ un borélien borné. On doit vérifier que $i_n^{-1}(A) \in \mathcal{N}_n^f$. Or f_n est surjective, donc :

$$i_n^{-1}(A) = f_n(f_n^{-1}(i_n^{-1}(A))) = f_n(j_n^{-1}(A))$$

Comme j_n est mesurable par rapport à la σ algèbre des boréliens symétriques, il suffit de montrer que $f_n(B) \in \mathcal{N}_n^f$ pour tout $B \in \mathcal{B}_s(\chi^n)$.

Définissons la σ -algèbre

$$\mathcal{A}_n = \{B \in \mathcal{B}_s(\chi^n) : f_n(B) \in \mathcal{N}_n^f\}.$$

Alors \mathcal{A}_n contient tous les rectangles A^n où A est un borélien borné et, puisque de tels rectangles génèrent $\mathcal{B}_s(\chi^n)$, il suit que $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_s(\chi^n)$.

Par conséquent $f_n(B) \in \mathcal{N}_n^f$ pour tout $B \in \mathcal{B}_s(\chi^n)$, et il y a une correspondance entre les fonctions sur l'espace des configurations N_n et les fonctions symétriques sur χ^n .

3.2.2 Processus ponctuel binomial

Soit χ un compact de \mathbb{R}^d de volume strictement positif $\mu(\chi)$. Un processus ponctuel binomial est défini comme l'union

$$X = \{X_1, \dots, X_n\}$$

d'un nombre n fixé de points indépendants et uniformément distribués X_1, \dots, X_n . Comme $\mathbf{P}(X_i = X_j) = 0$ pour tout $i \neq j$, X est simple. De plus, comme $\mathbf{P}(N(\chi) = n) = 1$, le processus binomial est fini avec :

$$p_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Les points X_i sont uniformément distribués, donc :

$$j_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\mu(\chi)} \right)^n$$

On le voit, les j_n sont invariantes par permutation.

Le processus binomial doit son nom au fait que pour tout borélien $A \subseteq \chi$,

$$N(A) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{1}_A(X_i)$$

suit une loi binomiale de paramètres n et $\mu(A)/\mu(\chi)$.

3.2.3 Processus ponctuel de Poisson

Les processus ponctuels de Poisson sont les processus les plus élémentaires puisque, physiquement, ils traduisent la notion d'uniformité.

Définition 8

Soit $\nu(\cdot)$ une mesure borélienne sur un espace métrique et séparable (χ, d) tel que $\nu(\chi) > 0$ et $\nu(A) < \infty$ pour tout borélien borné A . (Une telle mesure est dite localement finie.)

Un processus ponctuel X sur χ est appelé un **processus ponctuel de Poisson** de mesure d'intensité $\nu(\cdot)$ si :

P1. $N(A)$ suit une loi de Poisson d'espérance $\nu(A)$ pour tout borélien borné $A \subseteq \chi$.

P2. Pour k boréliens disjoints A_1, \dots, A_k , les variables aléatoires $N(A_1), \dots, N(A_k)$ sont indépendantes.

Si $\nu(\cdot)$ est non atomique, le processus de Poisson est simple. Il est fini si $\nu(\chi) < \infty$.

Lorsque $\chi = \mathbb{R}^d$, on parle de processus de Poisson **homogène** lorsque la mesure d'intensité est $\lambda\mu(\cdot)$ où μ est la mesure de Lebesgue et λ un paramètre strictement positif. On appelle alors ce paramètre l'intensité du processus.

La propriété **P2** peut être interprétée comme une propriété de non-corrélation spatiale totale, puisqu'elle affirme que ce qui se passe à l'intérieur d'une fenêtre quelconque est totalement indépendant de ce qui se passe à l'extérieur. Le théorème suivant précise cette idée, en affirmant que les points d'un processus ponctuel de Poisson se comportent aléatoirement et n'interagissent pas les uns avec les autres.

Théorème 3

Soit X un processus ponctuel de Poisson sur un espace métrique complet et séparable (χ, d) de mesure d'intensité $\nu(\cdot)$, et $A \subseteq \chi$ un borélien borné.

Alors, conditionnellement à $\{N(A) = n\}$, X restreint à A suit la loi d'un processus binomial de points indépendants, ν -uniformément distribués sur A .

La preuve repose sur le théorème 2 :

Soit un borélien $B \subseteq A$. La mesure de probabilité vide de B , sachant qu'il y a n points dans A est donnée par :

$$\nu_A(B) = \mathbf{P}(N(B) = 0 \mid N(A) = n) = \frac{\mathbf{P}(N(B) = 0 ; N(A \setminus B) = n)}{\mathbf{P}(N(A) = n)}$$

Grâce à **P2** on sait que $N(A)$ et $N(A \setminus B)$ sont indépendantes. De plus $N(A), N(B)$ et $N(A \setminus B)$ suivent une loi de Poisson d'après **P1**. Donc :

$$\nu_A(B) = \left(\frac{\nu(A \setminus B)}{\nu(A)} \right)^n$$

ce qui coïncide avec les probabilités vides de B pour n points indépendants et de loi ν -uniforme. Comme B est quelconque, l'application du théorème 2 termine la

preuve.

3.2.4 Processus ponctuels finis définis par une densité

L'objectif de cette partie est de construire des modèles de processus ponctuels par leur densité de probabilité (dérivée de Radon-Nikodym) par rapport à un processus de Poisson de référence.

Cas des processus ponctuels non finis

Le lemme suivant montre qu'il est difficile de définir des densités pour des processus ponctuels qui ne sont pas finis.

Lemme 4

Soient X_λ et X_μ deux processus de Poisson homogènes sur \mathbb{R}^d , définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de mesure d'intensité respective λ et μ .
Si $\lambda \neq \mu$, alors la loi de X_λ n'est pas absolument continue par rapport à la loi de X_μ .

Preuve : Considérons la familles $(B_n)_n$ des boules fermées centrées en l'origine, de rayon tel que le volume de B_n soit égal à n . Pour tout $\nu > 0$, posons :

$$E_\nu = \left\{ \omega \in \Omega : \frac{N_{X_\nu(\omega)}(B_n)}{n} \rightarrow \nu \right\}$$

Pour $i \in \{1, 2, \dots\}$, posons $L_i = B_i \setminus B_{i-1}$. Les L_i sont disjoints, et d'après la définition des processus de Poisson, sous la loi de X_λ , les variables aléatoires $N(L_i)$ sont indépendantes, et ont pour loi une loi de Poisson d'espérance λ . D'après la loi forte des grands nombres, on a donc :

$$\frac{1}{n} N(B_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N(L_i) \rightarrow \mathbb{E}_{X_\lambda}[N(L_1)] = \lambda \quad \text{p.s.}$$

On en conclut que $\mathbf{P}(X_\lambda \in X_\lambda(E_\lambda)) = 1$ et que $\mathbf{P}(X_\mu \in X_\mu(E_\mu)) = 1$. C'est une sorte de loi forte des grands nombres spatiale : lorsque les boules grandissent, les réalisations du processus ponctuel X_ν obéissent de mieux en mieux à la contrainte "le nombre moyen de points par unité de volume" est ν .

Comme $X_\lambda(E_\lambda)$ et $X_\mu(E_\mu)$ sont disjoints (car $\lambda \neq \mu$), on en déduit que la loi de X_λ n'est pas absolument continue par rapport à celle de X_μ .

On se souvient que la définition d'un processus ponctuel fini impose que le nombre total de points dans l'espace considéré soit fini presque sûrement. Donc, si l'on remplace les processus homogènes ci-dessus par des processus ponctuels finis, le nombre moyen de points par unité de volume ne tend plus vers l'intensité lorsque l'on augmente la taille du volume d'intérêt mais vers zéro. La preuve ci dessus ne s'applique donc plus.

Cas des processus ponctuels finis

Dans la suite de ce paragraphe, on considère (χ, d) un espace métrique complet et séparable, et $\pi(\cdot)$ la distribution d'un processus de Poisson sur χ de mesure

d'intensité **finie** et **non-atomique** $\nu(\cdot)$.

Soit $p : N^f \rightarrow [0, \infty[$ une fonction positive, mesurable, définie sur l'espace des configurations finies de points, telle que :

$$\int_{N^f} p(\mathbf{x}) d\pi(\mathbf{x}) = 1. \quad (3.1)$$

Alors $p(\cdot)$ est une densité de probabilité et définit un processus ponctuel X sur χ . Comme le processus de Poisson dominant est fini et simple, il en va de même pour X . Pour interpréter et justifier la formule 3.1, il faut écrire N^f comme une union parcourant les familles N_n des configurations de n points :

$$N^f = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$$

Le volume de N_n^f est $\nu(\chi)^n/n!$. Ce $n!$ est nécessaire puisque χ^n est ordonné tandis que N^f ne l'est pas. Et donc :

$$\nu(N^f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu(\chi)^n}{n!} = e^{\nu(\chi)}$$

De ces considérations et de la définition du processus de Poisson, on déduit que d'une part, la loi du nombre total de points d'un processus défini par sa densité $p(\cdot)$ est donné par la famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$p_n = \frac{e^{-\nu(\chi)}}{n!} \int_{\chi} \cdots \int_{\chi} p(\{x_1, \dots, x_n\}) d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) \quad (3.2)$$

et que d'autre part, conditionnellement aux événements $\{N(\chi) = n\}$, les n points aléatoires ont pour densité jointe par rapport à $\nu^n(\cdot)$:

$$j_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{p(\{x_1, \dots, x_n\})}{\int_{\chi} \cdots \int_{\chi} p(\{x_1, \dots, x_n\}) d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n)} \quad (3.3)$$

3.3 Processus ponctuels de Markov

La définition intuitive des processus ponctuels de Markov est assez simple : il s'agit de processus ponctuels finis définis par une densité et dont la connaissance locale ne dépend que d'un certain voisinage.

Les processus ponctuels de Markov sont très utilisés pour différentes applications. En traitement d'image leur avantage est de permettre une implantation informatique facile. Historiquement, ils ont également été très utilisés en physique statistique, entre autre sous le nom de processus ponctuels de Gibbs. La particularité de ces processus de Gibbs est de présenter des densités sous une forme énergétique en utilisant des potentiels d'interaction entre les points d'une réalisation du processus ponctuel. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Banorff-Nielsen *et al.*, 1999], [Stoyan *et al.*, 1995] ou encore à [Preston, 1976] et [Ruelle, 1970].

Nous présentons ici rapidement quelques définitions et propriétés des processus ponctuels de Markov.

On considère une relation symétrique et réflexive \sim sur χ . On dit que deux points u et v de χ sont voisins si $u \sim v$. Par exemple, on peut considérer la relation de proximité sur $\chi = \mathbb{R}^2$:

$$u \sim v \Leftrightarrow d(u, v) \leq R$$

pour un réel R quelconque.

Définition 9

Le **voisinage** $\partial(A)$ d'un ensemble $A \subseteq \chi$ est défini comme l'ensemble :

$$\partial(A) = \{x \in \chi : \exists a \in A \quad x \sim a\}$$

Ripley et Kelly donnent la définition suivante d'un processus ponctuel de Markov : (voir [Ripley et Kelly, 1977]).

Définition 10

Soit (χ, d) un espace métrique complet et séparable, $\nu(\cdot)$ une mesure borélienne finie non atomique, et $\pi_\nu(\cdot)$ la loi d'un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité $\nu(\cdot)$.

Soit X un processus ponctuel sur χ défini par sa densité $p(\cdot)$ par rapport à $\pi_\nu(\cdot)$.

Alors X est un **processus ponctuel de Markov** sous la relation symétrique et réflexive \sim sur χ si pour tout $\mathbf{x} \in N^f$ telle que $p(\mathbf{x}) > 0$,

- (a) $p(\mathbf{y}) > 0$ pour tout $\mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}$;
- (b) pour tout $u \in \chi$, $p(\mathbf{x} \cup \{u\})/p(\mathbf{x})$ ne dépend que de u et $\partial(\{u\}) \cap \mathbf{x} = \{x \in \mathbf{x} : u \sim x\}$.

Le théorème suivant permet d'exprimer la densité d'un processus de Markov sous une forme plus pratique. Pour cela, il faut d'abord poser une définition :

Définition 11

Soit \sim une relation de voisinage symétrique et réflexive sur χ . Une configuration $\mathbf{x} \in N^f$ est appelée **clique** si tous les éléments de \mathbf{x} sont voisins les uns des autres, c'est à dire si :

$$\forall u, v \in \mathbf{x} \quad u \sim v$$

Par convention la configuration vide est une clique également.

On peut ensuite démontrer le théorème suivant (voir [Ripley et Kelly, 1977]), qui est l'équivalent du théorème d'Hammersley-Clifford pour les processus ponctuels :

Théorème 5

Une densité de processus ponctuel $p : N^f \rightarrow [0, \infty[$ est markovienne sous une relation de voisinage \sim si et seulement si il existe une fonction mesurable $\phi : N^f \rightarrow [0, \infty[$ telle que :

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{\text{cliques } \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}} \phi(\mathbf{y}) \quad (3.4)$$

pour tout $\mathbf{x} \in N^f$.

Une autre formulation peut être donnée avec un produit sur tous les sous-ensembles de \mathbf{x} en imposant à ϕ de valoir 1 sur les sous ensembles n'étant pas des cliques.

3.4 Exemples.

On se place sur $\chi = \mathbb{R}^2$, et on considère un sous ensemble borné $K \subseteq \chi$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda(\cdot)$. On définit des densités par rapport à un processus ponctuel de Poisson sur K , d'intensité $\lambda(\cdot)$. Un tel processus est simple et fini, comme il se doit pour pouvoir définir des densités de processus.

3.4.1 Paramètres d'intensité.

On considère d'abord des processus ayant une densité $h(\cdot)$ de la forme :

$$h(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \beta^{n(\mathbf{x})}$$

où $\beta > 0$ et $n(\mathbf{x})$ représente le nombre de points d'une configuration \mathbf{x} . Une telle densité est intégrable et α est la constante de normalisation. La constante β est un paramètre qui permet de jouer sur l'intensité du processus. Celle-ci vaut alors $\beta\lambda(\cdot)$.

Il est intéressant de remarquer que ce β est un paramètre d'échelle : de manière équivalente on peut changer le borné K d'intérêt en posant K' tel que $\lambda(K') = \beta\lambda(K)$.

3.4.2 Processus de Strauss.

On considère une densité de la forme :

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \beta^{n(\mathbf{x})} \prod_{i < j} g(x_i, x_j) \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{n(\mathbf{x})}\} \quad (3.5)$$

Où la fonction g vérifie :

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } d(x_i, x_j) < r \\ 1, & \text{si } d(x_i, x_j) \geq r \end{cases}$$

Avec $0 \leq \gamma$ et $r > 0$. Un tel processus est appelé **processus de Strauss**. Il s'agit d'un processus de Markov sous la relation \sim de proximité : $u \sim v \Leftrightarrow d(u, v) < r$. On peut avoir une expression plus simple de cette densité sous la forme donnée par le théorème de Hammersley-Clifford étendu aux processus ponctuels :

$$p(\mathbf{x}) = \alpha \beta^{n(\mathbf{x})} \gamma^{s(\mathbf{x})} \quad (3.6)$$

où $s(\mathbf{x})$ représente le nombre de paires de points en relation dans la configuration \mathbf{x} . Reste à étudier l'influence de γ :

- Pour $\gamma = 1$ on retrouve un processus ponctuel de Poisson sur notre borélien borné K d'intensité $\beta\lambda(\cdot)$.
- Pour $\gamma \in]0, 1[$, le processus montre une répulsion entre les points proches au sens de la relation \sim .
- Avec $\gamma = 0$ on obtient ce que l'on appelle un **Hard core process**. La densité interdit d'avoir deux points de la configuration qui soient voisins.

Le cas $\gamma > 1$ est le cas qui intéressait Strauss ([Strauss, 1975]) puisqu'il devait permettre de manifester une attraction entre les points d'une réalisation. Malheureusement, dans ce cas là, la densité n'est pas intégrable, à moins de multiplier cette densité par un terme du type $\mathbf{1}\{n(\mathbf{x}) \leq n_0\}$ pour un entier n_0 fixé.

Il y a deux façons de voir que cette densité n'est pas intégrable :

- La première, proposée par Van Lieshout et Baddeley ([Baddeley et Van Lieshout, 1993]), repose sur une optique combinatoire : intuitivement, plus on ajoute de points sur un petit espace et plus la densité augmente vite.
- La deuxième interprétation, proposée par Geyer ([Geyer, 1999]), repose sur les familles exponentielles. Elle est très intéressante puisqu'elle propose un formalisme pour étudier les comportements limites du processus par les familles exponentielles.

Nous reviendrons plus loin sur cet exemple et les problèmes qu'il soulève.

3.5 Quelques propriétés générales des processus ponctuels

3.5.1 Mesure et théorème de Campbell.

Il s'agit ici de définir des outils qui expriment des grandeurs moyennes ou d'ordre supérieur sur les processus ponctuels. Pour cela, le meilleur moyen est d'utiliser le fait que pour tout borélien borné A , $N(A)$ est une variable aléatoire : les moments de $N(A)$ fournissent des statistiques très utiles.

Définition 12

Soit X un processus ponctuel sur un espace métrique complet et séparable (χ, d) . Pour tout borélien borné $A \subseteq \chi$ et tout $F \in \mathcal{N}^{lf}$, on définit les grandeurs :

$$M(A) = \mathbb{E}[N(A)]$$

et :

$$C(A \times F) = \mathbb{E}[N(A) \cdot \mathbf{1}\{X \in F\}]$$

Le lemme suivant donne les conditions sous lesquelles les fonctions ensemblistes $M(\cdot)$ et $C(\cdot \times \cdot)$ peuvent être prolongées en mesures sur la σ -algèbre borélienne $\mathcal{B}(\chi)$ de χ et la σ -algèbre produit $\mathcal{B}(\chi) \times \mathcal{N}^{lf}$.

Lemme 6

Si la fonction $M(\cdot)$ introduite dans la définition 11 est finie sur les boréliens bornés, alors $M(\cdot)$ peut être prolongée de manière unique en une mesure σ -finie sur les boréliens de χ .

On l'appelle alors **mesure du moment de premier ordre**.

La fonction $C(\cdot \times \cdot)$ peut être prolongée de manière unique en une mesure σ finie sur la σ algèbre produit obtenue à partir de $\mathcal{B}(\chi)$ et \mathcal{N}^{lf} .

On l'appelle alors **la mesure de Campbell de premier ordre**.

La mesure du moment de premier ordre peut être exprimée grâce à la mesure de Campbell de la manière suivante :

$$C(A \times N^{lf}) = \mathbb{E}[N(A)] = M(A)$$

pour tout borélien borné A . Par conséquent, $C(\cdot)$ est finie si et seulement si $M(\cdot)$ est finie, c'est à dire si et seulement si $\mathbb{E}[N(\chi)] < \infty$. Les mesures de Campbell d'ordres supérieurs sont définies suivant le même principe, par exemple :

$$C^{(2)}(A \times B \times F) = \mathbb{E}[N(A)N(B).\mathbf{1}\{X \in F\}]$$

Les mesures de Campbell sont importantes lorsque l'on travaille avec des processus ponctuels. Supposons que l'on regarde une grandeur $g(x, \mathbf{X})$ en chaque point x d'une réalisation \mathbf{x} de X . Par exemple $g(x, \mathbf{x})$ peut être la distance entre x et le point le plus proche de la réalisation \mathbf{x} . Le théorème suivant permet d'affirmer que l'espérance $\mathbb{E}[\sum_{x \in X} g(x, X)]$ est l'intégrale de $g(\cdot, \cdot)$ contre la mesure de Campbell.

Du point de vue pratique, cela nous est utile pour avoir des critères de convergence pour nos algorithmes. Une autre utilisation de cette mesure concerne la définition de l'intensité conditionnelle d'un processus ponctuel (voir [Van Lieshout, 2000]).

Théorème 7

Formule de Campbell-Mecke

Soit $g : \chi \times N^{lf} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si g est positive ou alors intégrable par rapport à la mesure de Campbell, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} g(x, X) \right] = \int_{\chi} \int_{N^{lf}} g(x, X) dC(x, X) \quad (3.7)$$

Si la fonction g ne dépend pas du processus ponctuel X , la formule de Campbell-Mecke se réduit à :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} g(x) \right] = \int_{\chi} g(x) dM(x) \quad (3.8)$$

pourvu que la mesure du moment de premier ordre $M(\cdot)$ existe et soit finie sur les boréliens.

En particulier, pour un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} g(x) \right] = \lambda \int_{\chi} g(x) dx$$

3.5.2 Lois conditionnelles.

Il existe deux façons naturelles de conditionner la loi d'un processus ponctuel :

- **Le conditionnement intérieur** : on cherche à exprimer la loi conditionnelle d'un processus ponctuel sachant qu'il y a un de ses points en $x \in \chi$. Ce type de conditionnement est formalisé par la **théorie de Palm**.
- **Le conditionnement extérieur** : on cherche à exprimer la loi conditionnelle d'un point $x \in \chi$ connaissant la configuration sur $\chi \setminus \{x\}$. Ce type de conditionnement est formalisé par la **densité conditionnelle de**

Papangelou.

Le conditionnement intérieur est très intéressant dès lors que l'on dispose de la propriété d'invariance de la loi du processus ponctuel par translation. En particulier il permet de définir et d'utiliser des statistiques spatiales (voir [Mecke et Stoyan, 2000] et [Stoyan *et al.*, 1995]). Dans nos applications, nous ne disposons pas de telles propriétés. Nous nous limitons donc au second type de conditionnement.

Le conditionnement extérieur. Commençons par une présentation intuitive de la **densité conditionnelle de Papangelou** $\lambda(\cdot; \cdot)$ associée à un processus ponctuel simple X . On peut l'interpréter comme

$$\lambda(x; \mathbf{x}) dx = \mathbf{P}(N(dx) = 1 | X \cap (dx)^c = \mathbf{x} \cap (dx)^c),$$

ce qui représente la probabilité infinitésimale de trouver un point dans une région dx autour de $x \in \chi$ connaissant la configuration \mathbf{x} du processus ponctuel partout ailleurs qu'en dx .

Pour définir cette densité conditionnelle plus proprement, il est nécessaire d'introduire la notion de **mesure de Campbell réduite**.

Définition 13

Soit X un processus ponctuel simple, sur un espace métrique complet et séparable (χ, d) . On définit :

$$C^!(A \times F) = \mathbb{E} \left[\sum_{x \in X \cap A} \mathbf{1}_{\{X \setminus \{x\} \in F\}} \right]$$

Pour tout borélien borné $A \subseteq \chi$ et $F \in \mathcal{N}^{lf}$.

De la même manière que dans le paragraphe précédent, on peut prolonger cette fonction en une mesure σ -finie unique sur la σ -algèbre produit $\mathcal{B}(\chi) \times \mathcal{N}^{lf}$. L'équivalent de la formule de Campbell-Mecke donne :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} g(x, X \setminus \{x\}) \right] = \int_{\chi} \int_{\mathcal{N}^{lf}} g(x, \mathbf{x}) dC^!(x, \mathbf{x}). \quad (3.9)$$

pout toute fonction mesurable $g(\cdot, \cdot)$ qui soit ou bien positive ou bien intégrable.

Supposons que pour un borélien borné fixé $A \in \mathcal{B}(\chi)$, $C^!(A \times \cdot)$ soit absolument continue par rapport à la loi $\mathbf{P}(\cdot)$ de X . Alors,

$$C^!(A \times F) = \int_F \Lambda(A; \mathbf{x}) d\mathbf{P}(\mathbf{x})$$

pour une fonction mesurable $\Lambda(A; \cdot)$ est définie de manière unique à un ensemble \mathbf{P} négligeable près. De plus, (voir [Daley et Jones, 1988]) on peut en trouver une version telle que pour \mathbf{x} fixé, $\Lambda(\cdot; \mathbf{x})$ soit une mesure borélienne localement finie, que l'on appelle **noyau de Papangelou** du premier ordre.

Si $\Lambda(\cdot; \mathbf{x})$ admet une densité $\lambda(\cdot; \mathbf{x})$ par rapport à une mesure de référence $\nu(\cdot)$ sur χ , 3.9 se factorise sous la forme :

$$\mathbb{E} \left[\int_{\chi} g(x, X) \lambda(x; X) d\nu(x) \right] \quad (3.10)$$

On appelle alors la fonction $\lambda(.,.)$ l'**intensité conditionnelle de Papangelou**.

Le cas où X est dominé par un processus ponctuel de Poisson est particulièrement important :

Théorème 8

Soit X un processus ponctuel fini défini par une densité $p(\mathbf{x})$ par rapport à un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité finie et non-atomique $\nu(\cdot)$. Alors X a une intensité conditionnelle de Papangelou :

$$\lambda(u; (x)) = \frac{p(\mathbf{x} \cup \{u\})}{p(\mathbf{x})} \quad (3.11)$$

pour $u \notin \mathbf{x}$ et $\mathbf{x} \in N^f$.

Preuve : On utilise la caractérisation intégrale donnée par les équations 3.9 et 3.10. Pour cela, considérons $g : \chi \times N^{lf} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive ou intégrable. En injectant 3.11 dans 3.10, et en utilisant le fait que la loi de X est donnée par une densité $p(\cdot)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\chi} g(u, X) \lambda(u; X) d\nu(u) \right] &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu(\chi)}}{n!} \int_{\chi^{n+1}} g(u, \{x_1, \dots, x_n\}) \frac{p(\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{u\})}{p(\{x_1, \dots, x_n\})} p(\{x_1, \dots, x_n\}) & \\ & \quad d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) d\nu(u) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu(\chi)}}{n!} \frac{1}{n+1} \int_{\chi^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i, \{x_1, \dots, x_{n+1}\} \setminus \{x_i\}) p(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}) & \\ & \quad d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_{n+1}) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu(\chi)}}{n!} \int_{\chi^n} \sum_{i=1}^{n+1} g(x_i, \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) p(\{x_1, \dots, x_n\}) & \\ & \quad d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) \end{aligned}$$

Comme cette dernière expression s'identifie à l'espérance dans le membre de gauche de l'équation 3.9, et que $g(.,.)$ est quelconque, on en conclut que $\lambda(.,.)$ satisfait la représentation intégrale et la preuve est complète. Il faut noter que les étapes de cette démonstration nous resserrons plus loin.

Chapitre 4

Chaînes de Markov

4.1 Premières définitions

4.1.1 Notions fondamentales

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi qu'un espace χ muni de sa tribu $\mathcal{B}(\chi)$ et des variables aléatoires à valeur dans $(\chi, \mathcal{B}(\chi))$

Commençons par quelques définitions :

Définition 14

Noyau de transition

C'est une fonction K définie sur $\chi \times \mathcal{B}(\chi)$ telle que :

1 $\forall x \in \chi, K(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité.

2 $\forall A \in \mathcal{B}(\chi), K(\cdot, A)$ est mesurable.

Cette définition nous permet d'en donner une autre :

Définition 15

Une chaîne de Markov est une suite de variable aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans χ telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{B}(\chi)$

$$\mathbf{P}(x_{k+1} \in A | x_0, \dots, x_k) = \mathbf{P}(X_{k+1} \in A | x_k) \quad (4.1a)$$

$$= \int_A K(x_k, dx) \quad (4.1b)$$

En général, on restreint l'étude des chaînes de Markov aux chaînes de Markov **homogènes**, c'est à dire aux chaînes de Markov telles que la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ sachant x_0 soit la même que la loi de $(X_{t_1-t_0}, \dots, X_{t_k-t_0})$ sachant x_0 pour tout k et tout $(k+1)$ -uplets $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$.

Quelques notations.

Quelques rappels sont faits ci-dessous pour comprendre l'utilisation du noyau K , ainsi que pour donner quelques notations usuelles :

$$\mathbf{P}_x(X_1 \in A_1) = K(x, A_1)$$

$$\mathbf{P}_x(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \int_{A_1} K(y, A_2) K(x, dy)$$

$$\mathbf{P}_x((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} K(y_{n-1}, A_n) K(y_{n-2}, dy_{n-1}) \dots K(x, dy)$$

Suivent d'autres notations liées aux transitions en n étapes :

$$K^1(x, A) = K(x, A)$$

$$K^n(x, A) = \int_{\mathcal{X}} K^{n-1}(y, A) K(x, dy)$$

Pour finir ce paragraphe de notations, il convient d'expliquer les notations suivantes :

- $\mathbf{P}_x(\cdot)$ note la loi de la chaîne $(X_n)_n$ avec $X_0 = x$
- $\mathbf{P}_\mu(\cdot)$ note la loi de la chaîne avec une distribution initiale : $X_0 \sim \mu$.
- $\mathbb{E}_\mu[\cdot]$ note l'espérance associée à la loi $\mathbf{P}_\mu(\cdot)$.

Propriétés premières des chaînes de Markov.

On retrouve ici des propriétés usuelles telles que les équations de Chapman-Kolmogorov, la propriété de Markov faible et la propriété de Markov forte. Nous ne nous étendons pas sur ces propriétés usuelles et intuitives. Pour plus de détails on peut se référer à [Robert et Casella, 1999]. Robert et Casella définissent à cet endroit de la théorie le noyau résolvant qui est un outil théorique important pour les démonstrations des propositions et théorèmes qui vont suivre.

Règles d'arrêt et grandeurs associées.

Définition 16 On appelle **règle d'arrêt** toute fonction $\zeta(x_1, \dots, x_n, \dots)$ à valeur dans \mathbf{N} telle que les événements $\{\zeta = n\}$ soient mesurables pour la tribu engendrée par (X_0, \dots, X_n) .

Un exemple important de règle d'arrêt est le suivant : pour un ensemble $A \subseteq \mathcal{X}$, on appelle **temps d'arrêt en A** le premier instant n où la chaîne passe par cet ensemble :

$$\tau_A = \inf\{n \geq 1; X_n \in A\} \quad (4.2)$$

par convention, $\tau_A = \infty$ si la chaîne ne passe jamais par A . Il est clair que l'évènement $\{\tau_A = n\}$ ne dépend que des variables aléatoires (X_0, \dots, X_n) . Dans le même esprit, on définit une autre grandeur aléatoire, le **nombre de passage en A** :

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(X_n) \quad (4.3)$$

On va voir que ces variables aléatoires sont d'une importance capitale dans l'étude des chaînes de Markov, et en particulier les deux grandeurs associées : $\mathbb{E}_x[\eta_A]$ et $\mathbf{P}_x(\tau_A < \infty)$ qui, intuitivement, représentent le nombre moyen de passages en A de la chaîne de Markov et la probabilité d'aller en un temps fini en A .

4.1.2 Irréductibilité.

Dans toute cette partie, φ représente une mesure sur \mathcal{X} .

Définition 17

On considère (X_n) une chaîne de Markov de noyau de transition K . Cette chaîne est dite φ -**irréductible** si pour tout $A \subseteq \chi$ tel que $\varphi(A) > 0$ les deux propriétés (équivalentes) suivantes sont vérifiées :

- pour tout $x \in \chi$, $\exists n$ tel que $K^n(x, A) > 0$
- pour tout $x \in \chi$, $\mathbf{P}_x(\tau_A < \infty) > 0$

Intuitivement, une chaîne est irréductible si tout ensemble non négligeable au sens de φ est atteignable en un temps fini avec une probabilité non nulle.

Proposition 9

La chaîne de markov (X_n) est φ -irréductible si et seulement si pour tout $x \in \chi$ et tout $A \subseteq \chi$ tel que $\varphi(A) > 0$, on a :

$$\mathbb{E}_x[\eta_A] > 0 \quad (4.4)$$

Une propriété intéressante des chaînes irréductibles sur laquelle nous ne nous étendons pas ici concerne l'existence d'une mesure pour laquelle la chaîne est irréductible dominant (au sens de l'absolue continuité) toute mesure pour laquelle la chaîne est irréductible et qui permet d'avoir une forme de réciproque de l'irréductibilité : un ensemble négligeable au sens de cette mesure n'est jamais atteint en un temps fini, sauf peut-être en partant d'un ensemble de points lui-même négligeable.

4.1.3 Atomes et ensembles petits.

Le propos de cette partie est de se donner des outils permettant de travailler sur les chaînes de Markov dite “continues” de façon similaire aux chaînes “discrètes”.

Définition 18

La chaîne de Markov (X_n) possède un atome $\alpha \in \mathcal{B}(\chi)$ s'il existe une mesure $\nu(\cdot) > 0$ telle que :

$$K(x, A) = \nu(A) \quad \forall x \in \alpha \quad \forall A \in \mathcal{B}(\chi) \quad (4.5)$$

Si (X_n) est φ -irréductible quand $\varphi(\alpha) > 0$, l'atome est dit **accessible**. Cette notion d'atome est intéressante : idéalement on voudrait travailler avec des noyaux “constants par morceaux”. Malheureusement cette constance justement n'est pas très pratique puisqu'on la rencontre rarement dans la nature. D'où la condition de minoration suivante qui est préférée, et qui par suite a donné la notion d'**ensemble petit** :

Définition 19

Un ensemble C est **petit** s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et une mesure ν_m telle que, pour tout $x \in C$ et tout $A \subseteq \chi$ on ait :

$$K^m(x, A) \geq \nu_m(A) > 0 \quad (4.6)$$

Les atomes sont donc un cas particulier d'ensembles petits. Notons qu'il existe deux notions différentes portant des noms similaires : les ensembles peuvent être *petits (small)* ou ... *petits (petites)*. Heureusement ces notions se confondent lors que la chaîne est apériodique. Ici nous appelons petits les ensembles *small* en anglais. Le théorème qui suit est démontré dans [Meyn et Tweedie, 1993] :

Théorème 10 | Soit (X_n) une chaîne de Markov φ -irréductible. Pour tout ensemble $A \subseteq \chi$ tel que $\varphi(A) > 0$, il existe un ensemble petit $C \subseteq A$.

| De plus, χ se décompose en une partition dénombrable d'ensembles petits.

Il apparaît toutefois que les atomes sont plus intéressants que les ensembles petits puisque le noyau y est constant. On peut, en utilisant la théorie des temps de renouvellement, montrer que si :

- d'une part la chaîne vérifie la condition (4.6) pour un ensemble C ,
- et que d'autre part on a : $\mathbf{P}_x(\tau_C < \infty)$ qui vaut 1 pour tout $x \in \chi$,

on peut construire une chaîne \check{X}_n compagne à (X_n) possédant un atome en utilisant la notion de temps de renouvellement :

Définition 20 | Un **temps de renouvellement** est une règle d'arrêt τ telle que $(X_\tau, X_{\tau+1}, \dots)$ soit indépendant de $(X_{\tau-1}, X_{\tau-2}, \dots)$

Pour construire cette chaîne compagne on considère un ensemble petit C vérifiant 4.6 tel que $\mathbf{P}_x(\tau_C < \infty) = 1$ pour tout x . On peut alors modifier la chaîne en créant artificiellement un temps de renouvellement : lorsque la chaîne arrive dans C on simule X_{n+1} en utilisant une mesure $\nu(\cdot)$ avec une probabilité ϵ et en utilisant $(K(X_n, \cdot) - \epsilon\nu(\cdot))/(1 - \epsilon)$ avec une probabilité $1 - \epsilon$. Cela est autorisé par le fait que C est petit (on peut trouver un couple $\nu(\cdot), \epsilon$) et permet de conserver la même loi marginale sachant x_n (il suffit d'écrire la loi de Bernoulli). On considère ensuite la suite de temps de renouvellement $\tau_j = \inf\{n > \tau_{j-1}; X_n \in C \text{ et } X_{n+1} \sim \nu\}$. La chaîne compagne est alors $\check{X}_n = (X_n, \check{\omega}_n)$ avec $\check{\omega}_n = 1$ quand $X_n \in C$ et X_{n+1} généré suivant $\nu(\cdot)$. L'ensemble $\check{\alpha} = C \times \{1\}$ est alors un atome de la chaîne \check{X}_n , dont la sous-chaîne (X_n) est toujours une chaîne de Markov de transition $K(x_n, \cdot)$.

4.1.4 Cycles et apériodicité.

Ces notions sont définies pour des chaînes (X_n) φ -irréductibles. Voici une première définition, plutôt intuitive :

Définition 21 | Les ensembles A_1, \dots, A_m de $\mathcal{B}(\chi)$ forment un m -cycle de la chaîne (X_n) si :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{P}(x, A_2) = 1 & \text{pour } x \in A_1 \\ \vdots & \\ \mathbf{P}(x, A_m) = 1 & \text{pour } x \in A_{m-1} \\ \mathbf{P}(x, A_1) = 1 & \text{pour } x \in A_m \end{array} \right. \text{ et } \varphi \left(\left[\bigcup_{i=1}^m A_i \right]^c \right) = 0;$$

On en déduit la notion d'apériodicité :

Définition 22 | Une chaîne φ -irréductible est **apériodique** si elle possède un cycle de longueur $m = 1$.

Voilà enfin une définition plus mathématique d'un cycle :

Définition 23 | Une chaîne (X_n) φ -irréductible possède un **cycle de longueur** d , s'il existe un ensemble petit C , un entier associé M et une mesure de probabilité ν_m (voir la définition d'un ensemble petit) tel que d soit le pgcd de :

$$\{m \geq 1; \exists \delta_m \text{ tel que } C \text{ petit pour } \nu_m \geq \delta_m \nu_M\}$$

Il faut remarquer, dans ces définitions, l'utilisation des ensembles petits qui est faite en substitut des états dans le cas où l'espace d'état est fini.

4.2 Ergodicité

4.2.1 Transience et récurrence.

Les définitions suivantes sont données pour des chaînes de markov (X_n) φ -irréductibles :

Définitions 24 | Un ensemble $A \subseteq \chi$ est dit **récurent** si pour tout $x \in \chi$, $\mathbb{E}_x[\eta_A] = \infty$

L'ensemble $A \subseteq \chi$ est dit **uniformément transient** s'il existe une constante M telle que $\mathbb{E}_x[\eta_A] < M$ pour tout $x \in \chi$.

L'ensemble A est dit **transient** si on peut le décomposer en une union dénombrable d'ensembles uniformément transients B_i :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Le théorème suivant est intéressant puisqu'il permet de comprendre l'intérêt de

l'existence d'un atome pour une chaîne irréductible. On comprend en effet que pour une chaîne irréductible la propriété d'un atome peut se généraliser à tout l'espace d'état :

Théorème 11 | Soit (X_n) une chaîne de Markov φ irréductible possédant un atome accessible α :

- (i) si α est récurrent, tout ensemble $A \subseteq \chi$ tel que $\varphi(A) > 0$ est récurrent.
- (ii) si α est transient, χ est transient.

D'où l'extension suivante des notions de transience et de récurrence aux chaînes de Markov :

Définitions 25 | Une chaîne de Markov (X_n) est **récurrente** si :

- (i) il existe une mesure φ telle que (X_n) soit φ -irréductible.
- (ii) pour tout $A \subseteq \chi$ tel que $\varphi(A) > 0$:

$$\forall x \in A \quad \mathbb{E}_x[\eta_A] = \infty$$

La chaîne est **transiente** si :

- (i) elle est φ -irréductible
- (ii) χ est transient.

Pour finir cette partie, nous donnons le théorème de classification des chaînes irréductibles :

Théorème 12 | Une chaîne de Markov φ -irréductible est soit transiente, soit récurrente.

Une dernière question se pose toutefois : comment distinguer une chaîne transiente d'une chaîne récurrente. La proposition suivante permet de répondre à cette question. Cette proposition est anecdotique, puisque comme on le verra dans la suite de ce chapitre, en pratique la simple récurrence n'est pas intéressante à proprement parler.

Proposition 13 | S'il existe un ensemble petit C avec $\varphi(C) > 0$ tel que :

$$\mathbf{P}_x(\tau_C < \infty) = 1 \quad \forall x \in C \quad (4.7)$$

la chaîne φ -irréductible est récurrente.

4.2.2 Récurrence au sens de Harris.

L'objectif de ces rappels est de donner des propriétés générales des chaînes de Markov. Il se trouve que pour assurer certaines propriétés des algorithmes que nous allons présenter plus loin, la récurrence simple ne suffit pas.

Définitions 26 | Une ensemble $A \subseteq \chi$ est **récurrent** au sens de Harris si :

$$\forall x \in A \quad \mathbf{P}_x(\eta_A = \infty) = 1 \quad (4.8)$$

Une chaîne de Markov (X_n) est **récurrente** au sens de Harris si :

- (i) il existe une mesure φ telle que (X_n) soit φ irréductible,
- (ii) pour tout ensemble A tel que $\varphi(A) > 0$, A est récurrent au sens de Harris.

La différence avec la récurrence classique tient dans le fait que pour obtenir $\mathbb{E}_x[\eta_A] = \infty$ il est suffisant d'avoir $\mathbf{P}_x(\eta_A = \infty) > 0$.

On peut même avoir $\mathbf{P}_x(\eta_A = \infty) = 0$ et $\mathbb{E}_x[\eta_A] = \infty$. Cela est dû au fait que la condition de récurrence repose sur une espérance. Evidemment, la récurrence au sens de Harris implique la récurrence classique mais la condition de récurrence au sens de Harris est bien plus forte, puisqu'elle impose de repasser une infinité de fois en A avec une probabilité 1.

Voilà tout de suite une proposition qui donne une autre caractérisation d'une chaîne récurrente au sens de Harris : Il suffit d'être sûr de repasser par A en un temps fini.

Proposition 14 | Si pour tout $A \subseteq \chi$, $\mathbf{P}_x(\tau_A < \infty) = 1$ pour tout $x \in A$, alors :
 $\mathbf{P}_x(\eta_A = \infty) = 1$ pour tout $x \in \chi$ et (X_n) est Harris-récurrente.

4.2.3 Mesures invariantes.

Les mesures invariantes appartiennent aux objets classiques associés aux chaînes de Markov. On les place ici dans un contexte lié aux notions de récurrence.

Définition 27 | Une mesure σ -finie π est dite **invariante** pour le noyau de transition $K(.,.)$ si :

$$\pi(B) = \int_{\chi} K(x, B) \pi(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\chi) \quad (4.9)$$

Si de plus, la mesure invariante est une mesure de probabilité, elle est dite **mesure stationnaire**.

Si la chaîne de Markov (X_n) est φ -irréductible, et si elle possède une mesure stationnaire, on dit que cette chaîne est **positive**.

Proposition 15 | Si la chaîne (X_n) est positive, elle est récurrente.

Le théorème suivant donne une sorte de réciproque. En fait, il assure surtout l'existence et l'unicité d'une mesure invariante pour les chaînes récurrentes. Il faut remarquer cependant qu'il n'assure pas l'intégrabilité de la mesure obtenue. Par conséquent, il n'assure pas que la chaîne soit positive.

Théorème 16 | Si (X_n) est une chaîne récurrente, alors il existe une mesure σ -finie invariante, unique à un facteur multiplicatif près.

Par extension, on parlera de chaîne **Harris positive** lorsque la chaîne sera Harris-récurrente, et sa mesure invariante intégrable. Il reste un dernier théorème à connaître et dans notre cadre d'application ce théorème est très important. Il est démontré dans [Meyn et Tweedie, 1993].

Théorème 17 | Si une chaîne de Markov (X_n) est φ irréductible pour une mesure $\varphi(\cdot)$ non nulle sur $\mathcal{B}(X)$, et si elle possède une loi stationnaire $\pi(\cdot)$, alors la chaîne est aussi $\pi(\cdot)$ irréductible.

4.2.4 Ergodicité et convergence.

On arrive aux notions qui nous intéressent plus particulièrement :

Définition 28 | Pour une chaîne Harris-positive, de loi de probabilité invariante $\pi(\cdot)$, on dit d'un atome α qu'il est **ergodique** si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |K^n(\alpha, \alpha) - \pi(\alpha)| = 0 \quad (4.10)$$

Cette notion d'ergodicité concerne donc la convergence d'une mesure vers une autre. En fait, cette partie a pour objectif d'étudier la convergence éventuelle de la loi d'une chaîne de Markov vers sa loi stationnaire. Pour cela, il convient donc d'abord de définir la norme d'intérêt sur l'espace des mesures. On considère **la norme en variation totale** :

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{VT}} = \sup_A |\mu_1(A) - \mu_2(A)| \quad (4.11)$$

Vient ensuite le théorème important :

Théorème 18 | Si la chaîne de Markov (X_n) est apériodique et positive au sens de Harris, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\mathcal{X}} K^n(x, \cdot) \nu(dx) - \pi(\cdot) \right\|_{\text{VT}} = 0 \quad (4.12)$$

pour toute loi initiale $\nu(\cdot)$

Ce théorème s'applique aussi pour des lois initiales qui sont des diracs. En particulier, on est sûr que quelque soit l'état initial de la chaîne, la convergence a bien lieu. C'est ce théorème qui donne à la récurrence au sens de Harris toute son importance pratique.

Cependant ces résultats de convergence sont donnés sur $K^n(\cdot, \cdot)$.

4.3 Théorèmes limites.

On considère les observations (X_1, \dots, X_n) d'une chaîne de Markov. On examine le comportement limite des sommes partielles :

$$S_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \quad (4.13)$$

Le théorème suivant est d'une importance capitale dans le domaine :

Théorème 19

Théorème ergodique.

Si (X_n) a une mesure $\pi(\cdot)$ σ -finie invariante, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

– (i) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\pi)$ avec $\int g(x)\pi(dx) \neq 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(f)}{S_n(g)} = \frac{\int f(x)d\pi(x)}{\int g(x)d\pi(x)} \quad (4.14)$$

– (ii) La chaîne de Markov (X_n) est récurrente au sens de Harris

Il faut remarquer qu'en général ce qui nous intéresse directement c'est le fait que (ii) implique (i).

On peut ensuite obtenir une version du théorème central limite. Il existe une version sous des conditions plus faibles, mais il se trouve qu'en pratique nous avons la condition de réversibilité présentée ici :

Définition 29

Une chaîne de Markov (X_n) est **réversible** si la loi de $X_{n+1}|X_{n+2} = x$ est la même que la loi de $X_{n+1}|X_n = x$.

Et :

Théorème 20

Si (X_n) est apériodique, irréductible et réversible de loi invariante $\pi(\cdot)$ le **théorème central limite** s'applique quand :

$$0 < \gamma_g^2 = \mathbb{E}_\pi[g^2(X_0)] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_\pi[g(X_0)g(X_k)] < \infty \quad (4.15)$$

On a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^N (g(X_n) - \mathbb{E}_\pi[g]) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_g^2) \quad (4.16)$$

Ce qui conclut ces quelques rappels sur les chaînes de Markov. L'objectif maintenant est de construire des algorithmes permettant de simuler les densités de processus ponctuels qui nous intéressent.

Chapitre 5

Algorithme d'échantillonnage

Introduction

Comme nous l'avons brièvement présenté dans le second chapitre, le modèle utilisé repose sur la représentation d'une image comme une réalisation d'un processus ponctuel. Un recuit simulé est ensuite appliqué. Depuis quelques années le projet ARIANA s'intéresse tout particulièrement à ce genre de méthodes : on pourra se référer à [Garcin *et al.*, 2001], [Imberty et Descombes, 2002], [Stoica, 2001] ou encore [Lacoste *et al.*, 2002] pour avoir plusieurs exemples. La qualité du résultat et la vitesse de l'algorithme dépendent directement de l'échantillonneur utilisé dans le recuit simulé. Si l'on regarde ce que la littérature sur l'échantillonnage des processus ponctuels peut nous fournir comme algorithme, on peut distinguer les familles suivantes :

- les algorithmes de naissance et mort,
- les algorithmes de simulation exactes,
- les méthodes à sauts réversibles (RJ MCMC) en temps discrets,
- et les échantillonneurs à temps "continu".

Le lecteur pourra se référer à [Van Lieshout, 1993] pour obtenir une présentation de la première famille, à [Kendall et Møller, 2000] ou [Van Lieshout et Stoica, 2003] pour des travaux récents sur la seconde famille où à [Cappé *et al.*, 2002] pour un exemple du dernier cas. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la troisième famille d'algorithmes. Il existe une littérature très large sur le RJMCMC et sur les améliorations qu'il est possible d'y apporter en terme de corrélation de la chaîne de Markov. On peut se référer à [Brooks *et al.*, A paraitre] pour un exemple de stratégie. Lorsque l'on utilise un recuit simulé, la problématique est un peu différente. Dans [Brooks *et al.*, 2003], par exemple, Brooks présente des idées générales pour améliorer le RJMCMC lorsque l'on veut faire de la sélection de modèles par recuit-simulé. Comme notre application est très spécifique (détection d'objets dans des images) nous avons besoin d'autres améliorations.

Nous présentons ici une des contributions de ce travail de thèse : il s'agit de l'extension d'un algorithme d'échantillonnage existant en vue d'améliorer la méthode utilisée dans le cadre de détection de bâtiments. Nous présentons ici la preuve de convergence de l'échantillonneur que nous utilisons. Cette preuve est une adaptation d'une preuve existante. L'algorithme utilisé est un échantillonneur de type Metropolis-Hastings. Nous avons divisé ce chapitre en 4 grandes parties :

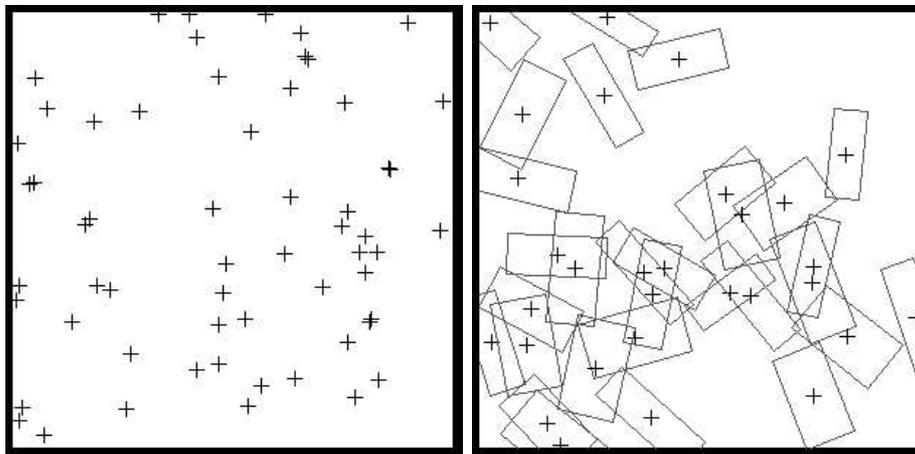
1. Présentation de l'algorithme proposé par Geyer et Møller en 1994 ([Geyer et Møller, 1994]).

2. Présentation des noyaux de transformation utilisés, avec en particulier le calcul des taux d'acceptation qui permettent d'assurer la réversibilité de la chaîne de Markov, et donc l'invariance sous la loi désirée.
3. Présentation des conditions de stabilité de la chaîne, et preuve de convergence ergodique sous ces conditions,
4. Validation des résultats théoriques (calcul des taux) par l'expérience.

5.1 Processus ponctuels et notations

Nous rappelons brièvement quelques notations. Soit S un fermé borné de \mathbb{R}^d . Nous supposons que S peut s'écrire $S = K \times M$, où $K \subseteq \mathbb{R}^2$, fermé borné, représente l'image. u, v, w représentent des éléments de S , tandis que $\mathbf{x} = \{u_1, \dots, u_{n(\mathbf{x})}\}$ des configurations finies de points de S (de même que \mathbf{y}). L'ensemble des configurations finies de points de S est notée \mathcal{C} (ou N^{lf}). Nous sommes intéressés par la simulation d'un processus ponctuel dont la loi est $\pi(\cdot)$ sur \mathcal{C} . Cette distribution est définie au travers d'une densité $h(\cdot)$ et d'une mesure de référence $\mu(\cdot)$ qui est la loi d'un processus de Poisson de mesure d'intensité $\nu(\cdot)$ sur S . La figure 5.1 présente deux réalisations de deux processus de Poisson différents. Dans nos applications, $h(\cdot)$ est décrite sous sa forme énergétique, et n'est connue qu'à une constante de normalisation près.

$$h(\mathbf{x}) \propto \exp(-U(\mathbf{x}))$$



(a) de points, l'espérance du nombre de points vaut 50

(b) de rectangles, l'espérance du nombre d'objets vaut 20

FIG. 5.1: Deux réalisations de deux processus de Poisson.

5.2 Un échantillonneur MCMC pour les processus ponctuels

Cette partie s'appuie sur le travail de Geyer : [Geyer, 1999]. Dans son papier Geyer présente un algorithme pour échantillonner des distributions de processus ponctuels. En particulier, il montre comment utiliser le travail de Green

([Green, 1995]) pour améliorer l'algorithme qu'il avait proposé avec J. Møller en 1994 ([Geyer et Møller, 1994]). Dans ce chapitre nous étendons ses résultats dans le but d'améliorer la qualité des résultats obtenus dans le cadre de la détection d'objets. Nous commençons par rappeler quelques concepts et notations utiles et résumons l'algorithme de Geyer et Møller.

5.2.1 L'algorithme de Geyer et Møller : description et propriétés

L'algorithme proposé par les deux auteurs construit une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur \mathcal{C} , l'espace des configurations finies de points de S . Notons que l'on impose $h(X_0) > 0$ et que par la suite, l'algorithme explore le sous ensemble de \mathcal{C} suivant $\{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \text{ t.q. } h(\mathbf{x}) > 0\}$.

Algorithme A

Pour un état courant $X_t = \mathbf{x}$, avec une probabilité $\frac{1}{2}$ on propose d'ajouter un point à la configuration courante, et avec une probabilité $\frac{1}{2}$ d'en retirer un sauf si $X_t = \emptyset$ auquel cas $X_{t+1} = X_t$:

Naissance : Un nouveau point $u \in S$ est généré suivant $\frac{\nu(\cdot)}{\nu(S)}$.
On propose ensuite $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$, on calcule

$$R = \frac{h(\mathbf{y}) \nu(S)}{h(\mathbf{x}) n(\mathbf{y})}$$

et on accepte $X_{t+1} = \mathbf{y}$ avec une probabilité $\alpha = \min(1, R)$.

Mort : v est choisi uniformément dans \mathbf{x} . On propose $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus v$, on calcule

$$R = \frac{h(\mathbf{y}) n(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x}) \nu(S)}$$

et avec une probabilité $\alpha = \min(1, R)$ on accepte la proposition.

Cet algorithme a été défini par Geyer et Møller en utilisant $\nu(\cdot)$ proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur S .

Condition 1

Stabilité

Un processus ponctuel de densité non normalisée $h(\cdot)$ par rapport à $\mu(\cdot)$ est stable s'il existe un réel R_h tel que :

$$h(\mathbf{x} \cup u) \leq R_h h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \quad \forall u \in S$$

Cette condition donne le résultat suivant sur l'algorithme :

Proposition 1 | Si la densité non normalisée satisfait la condition 1, alors l'algorithme A :

- simule une chaîne de Markov $\varphi(\cdot)$ irréductible et tous les ensembles bornés sont petits,
- simule une chaîne de Markov qui est **Harris récurrente** et **d'ergodicité géométrique**.

Cette première proposition donne la convergence de la chaîne de Markov. La distribution stationnaire est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2 | L'algorithme A fabrique une chaîne de Markov qui est $\pi(\cdot)$ invariante, $\pi(\cdot)$ étant la loi définie sur \mathcal{C} par :

- le processus de Poisson de référence dont la loi est $\mu(\cdot)$,
- la densité non normalisée $h(\cdot)$.

Pour résumer, ces résultats affirment que partant de n'importe quel point de \mathcal{C} , la chaîne converge vers $\pi(\cdot)$ en variation totale avec un taux géométrique :

$$\exists r > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \|K^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}$$

K est le noyau de transition de la chaîne de Markov. La qualité d'un tel résultat peut être vu au travers des corollaires asymptotiques (voir [Geyer, 1999]). Pour une fonction g suffisamment régulière, (condition de Lyapounov) l'estimation empirique de $\mathbb{E}_{\pi}(g(X))$ suit un théorème central limite, même si tous les points de la chaîne sont pris en compte (X_0, X_1, \dots) .

5.2.2 Objectifs

Le but est d'ajouter d'autres schémas de perturbation à l'échantillonneur pour obtenir de bonnes propriétés de mélange de la chaîne, tout en gardant ses propriétés de convergence. Nous divisons ces propriétés en deux catégories :

- d'abord les **conditions de stabilité : l'irréductibilité**, la **récence au sens de Harris** et l'**ergodicité géométrique** ;
- ensuite, la **$\pi(\cdot)$ invariance** obtenue en imposant la $\pi(\cdot)$ réversibilité de $(X_n)_{n \geq 0}$.

5.2.3 Metropolis Hastings Green

Généralités

Si l'on veut échantillonner une loi $\pi(\cdot)$ connue à une constante de normalisation près sur un espace χ , une solution courante est de construire une chaîne de Markov dont la loi invariante est $\pi(\cdot)$. Pour construire une telle chaîne de Markov, Green propose dans [Green, 1995] un cadre général qui est en fait une extension des échantillonneurs de Metropolis-Hastings.

Green propose de construire une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ en utilisant la loi objectif $\pi(\cdot)$ définie sur χ et connue à une constante de normalisation près, un noyau de proposition $Q(\mathbf{x}, \cdot)$, et une mesure symétrique $\xi(\cdot)$ définie sur $\chi \times \chi$.

On suppose ensuite que $\xi(dx, dy)$ domine $\pi(dx)Q(x, dy)$ et l'on note $f(x, y)$ la dérivée de Radon-Nikodym associée. La procédure suivante construit alors une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ qui est $\pi(\cdot)$ invariante :

Si $X_t = x$

- [1] Générer $y \sim Q(x, \cdot)$,
- [2] Calculer le rapport de Green :

$$R = \frac{f(y, x)}{f(x, y)}$$

- [3] Calculer le taux d'acceptation $\alpha = \min(1, R)$ et
 - avec une probabilité α , accepter la proposition : $X_{t+1} = y$,
 - avec une probabilité $1 - \alpha$, rejeter la proposition : $X_{t+1} = x$.

La $\pi(\cdot)$ invariance de la Chaîne de Markov est facilement prouvée en vérifiant que le noyau de transition $P(\cdot, \cdot)$ de $(X_n)_{n \geq 0}$ est $\pi(\cdot)$ réversible (nous y reviendrons plus loin).

$$\forall A \subseteq \chi, B \subseteq \chi \quad \int_A \pi(dx) \int_B P(x, dy) = \int_B \pi(dx) \int_A P(x, dy) \quad (5.1)$$

Mélange dépendant de l'état

En fait, Green propose dans son travail d'utiliser un mélange sous-stochastique de noyaux de proposition :

$$Q(x, A) = \sum_m Q_m(x, A) \quad \text{avec} \quad Q(x, \chi) \leq 1$$

On suppose que la condition suivante est vérifiée :

Hypothèse 1

Pour tout m , il existe une mesure symétrique $\xi_m(dx, dy)$ définie sur $\chi \times \chi$ dominant $\pi(dx)Q_m(x, dy)$.

La dérivée de Radon-Nykodym associée est alors notée $f_m(\cdot, \cdot)$. Pour chaque m :

$$f_m(x, y) = \frac{\pi(dx)Q_m(x, dy)}{\xi(dx, dy)} \quad (5.2)$$

Si l'on note $p_m(x) = Q_m(x, \chi)$ la probabilité de choisir le noyau de proposition m dans l'état $X_t = x$, le schéma de mise à jour devient :

Si $X_t = x$,

- [1] Choisir un noyau de proposition Q_m suivant avec une probabilité $p_m(x)$, tandis qu'avec une probabilité $1 - \sum_m p_m(x)$, laisser l'état inchangé : $X_{t+1} = x$.
- [2] Simuler y suivant le noyau normalisé choisi :

$$y \sim \frac{Q_m(x, \cdot)}{Q_m(x, \chi)}$$

[3] Calculer le rapport de Green et le taux d'acceptation correspondant :

$$R_m(x, y) = \frac{f_m(y, x)}{f_m(x, y)} \quad \alpha_m(x, y) = \min(1, R_m(x, y))$$

[4] Accepter la perturbation avec une probabilité α_m et la rejeter sinon.

π -réversibilité

Notons $I(x, \cdot)$ le noyau identité défini par $I(x, A) = \mathbf{1}_A(x)$. On peut décomposer le noyau de transition de $(X_n)_{n \geq 0}$ en une somme :

$$P(x, A) = d(x)I(x, A) + \sum_m P_m(x, A) \quad \text{avec} \quad P(x, \chi) = 1$$

Le premier terme $\tilde{P}(x, A) = d(x)I(x, A)$ est réversible pour n'importe quelle loi $\tilde{\pi}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \int_A \int_B \tilde{\pi}(dx) \tilde{P}(x, dy) &= \int_A \tilde{\pi}(dx) d(x) \mathbf{1}_B(x) \\ &= \int \tilde{\pi}(dx) d(x) \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) \\ &= \int_B \int_A \tilde{\pi}(dx) \tilde{P}(x, dy) \end{aligned}$$

Il est donc suffisant de montrer que chaque $P_m(\cdot, \cdot)$ est $\pi(\cdot)$ -réversible. Dans notre contexte, la partie non constante du noyau de transition de la chaîne est donnée par :

$$P_m(x, A) = \int_A Q_m(x, dy) \alpha_m(x, y) \quad (5.3)$$

En utilisant l'hypothèse 1, on peut alors écrire :

$$\int_A \int_B \pi(dx) Q_m(x, dy) \alpha_m(x, y) = \int_A \int_B f_m(x, y) \alpha_m(x, y) \xi_m(dx, dy) \quad (5.4)$$

De plus par la définition de $\alpha_m(x, y)$ on a que :

$$f_m(x, y) \alpha_m(x, y) = f_m(y, x) \alpha_m(y, x)$$

Cette propriété et la symétrie de $\xi_m(\cdot, \cdot)$ réinjectées dans l'équation 5.4 donnent la $\pi(\cdot)$ réversibilité de chaque noyau P_m et par linéarité celle de $(X_n)_{n \geq 0}$.

Commentaires

La preuve précédente de $\pi(\cdot)$ réversibilité souligne le fait que les parties “constantes” du noyau de proposition ne sont pas importantes puisqu'elle n'agissent pas sur la mesure invariante de la chaîne de Markov. Cela est important du point de vue informatique, puisque cela permet de traiter les cas particuliers sous forme d'exceptions. Prenons un exemple. Dans le cas des processus ponctuels, la transformation importante est celle qui ajoute ou retire un point à la configuration courante. Pour cela, le noyau de naissance ou mort choisit d'abord l'une des deux possibilités (avec une probabilité 0.5, par exemple), l'applique ensuite à l'état courant, et accepte pour finir ou non le nouvel état obtenu.

Si l'on examine le cas où la configuration est vide et la mort est choisie, la démonstration ci dessus nous montre que l'on peut simplement ignorer cet événement lorsqu'il se produit et rester dans l'état courant. C'est un des points que souligne Geyer dans [Geyer, 1999].

Une autre possibilité est d'adapter la probabilité de proposer une naissance à la loi désirée. Ainsi Green suggère de proposer lorsque l'état courant est vide la naissance avec une probabilité 1. Il faut alors faire attention pour la transformation réciproque : si il n'y a qu'un seul point dans la configuration et que la mort est choisie, la probabilité de revenir vaut 1, et non 0.5.

Tenir compte de telles exceptions est lourd du point de vue informatique. Il est donc très intéressant de pouvoir attendre qu'un cas litigieux se produise pour l'ignorer.

5.3 Noyaux de proposition améliorés (Analyse)

Nous présentons ici quelques noyaux de propositions que nous avons mis en oeuvre pour augmenter la vitesse de convergence de la chaîne de Markov utilisée dans notre application.

Une autre question concerne les interactions. Comme nous l'avons déjà évoqué, les modèles que nous avons mis en place reposent sur la définition d'interactions géométriques. Pour explorer au mieux les densités définie par ces modèle, il paraît logique d'utiliser des noyaux de naissance-mort plus adaptés a ces modèles. Nous présentons donc ici un noyau de naissance ou mort d'un point en interaction avec un autre.

Dans cette partie, nous nous focalisons sur la $\pi(\cdot)$ réversibilité. Nous commençons par présenter une preuve de la $\pi(\cdot)$ réversibilité du noyau de transition associé a la transformation de naissance ou mort. Cette preuve suit le cadre de travail suggéré par L. Garcin dans [Garcin *et al.*, 2001].

5.3.1 Naissance ou mort

Nous avons vu comment assurer la $\pi(\cdot)$ réversibilité pour la chaîne de Markov. Pour décrire le noyau de naissance mort, Green et Geyer utilisent un mélange dénombrable de noyaux Q_m , chaque noyau n'agissant que sur les états à m points. Ils démontrent ensuite la réversibilité de chacun de ces noyaux.

Nous présentons ici une autre preuve de cette réversibilité qui n'utilise qu'un seul noyau qui agit sur n'importe quelle configuration de points.

Preuve de la $\pi(\cdot)$ réversibilité. Supposons que la naissance génère un point dans S suivant la loi $\frac{\nu(\cdot)}{\nu(S)}$ où $\nu(\cdot)$ est une mesure sur S et que la mort choisit uniformément un point de la configuration courante pour le supprimer. On peut écrire ce noyau comme :

$$Q(x, \cdot) = p_b(x)Q_b(x, \cdot) + p_d(x)Q_d(x, \cdot)$$

où les deux noyaux de naissance (B) et de mort (D) sont définis comme :

$$Q_b(\mathbf{x}, A) = \int_{u \in S} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \cup u) \frac{\nu(du)}{\nu(S)} \quad A \in \mathcal{N}_s^{lf}$$

et

$$Q_d(\mathbf{x}, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus u) \frac{1}{n(\mathbf{x})}$$

Rappelons que si $n(\mathbf{x}) = 0$ on pose $Q_d(x, \cdot) = I(x, \cdot)$. Considérons ensuite la mesure ξ suivante où A et B sont des sous ensembles mesurables de \mathcal{C} :

$$\xi(A \times B) = \int_{\mathcal{C}} \int_{u \in S} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \cup u) \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus u) \mu(d\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

Il faut prouver que cette mesure est symétrique. Cela vient du fait que $\nu(\cdot)$ est la mesure d'intensité du Processus de Poisson dont la loi est $\mu(\cdot)$. Prenons $A_n = A \cap N_n^f$ où N_n^f est le sous ensemble de N_S^{lf} correspondant aux configurations comportant exactement n points. Comme nous l'avons montré dans le chapitre 3, la définition d'un processus de Poisson donne :

$$\begin{aligned} \xi(A_n \times B_{n-1}) &= \frac{e^{-\nu(S)}}{n!} \int_{S^n} \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_{A_n}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{B_{n-1}}(\mathbf{x} \setminus u) \nu^n(d\mathbf{x}) \\ &= \frac{e^{-\nu(S)}}{n!} \int_{S^n} n \mathbf{1}_{A_n}(\{x_1, \dots, x_n\}) \mathbf{1}_{B_{n-1}}(\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) d\nu^n(\mathbf{x}) \\ &= \frac{e^{-\nu(S)}}{(n-1)!} \int_{S^{n-1}} \int_S \mathbf{1}_{B_{n-1}}(\mathbf{y}) \mathbf{1}_{A_n}(\mathbf{y} \cup u) \nu^{n-1}(d\mathbf{y}) \nu(du) \\ &= \xi(B_{n-1} \times A_n) \end{aligned}$$

Il est utile d'observer dans les équations précédentes que si A ne contient que des configurations qui ne peuvent être obtenues en enlevant ou ajoutant un point à une configuration de B , la mesure $\xi(A, B)$ est nulle. La symétrie de ξ est alors déduite de l'écriture de $\xi(A, B)$ comme une somme infinie $\sum (\xi(A_n, B_{n-1}) + \xi(A_n, B_{n+1}))$. Nous devons maintenant montrer que $\xi(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}')$ domine $\pi(d\mathbf{x})Q(\mathbf{x}, d\mathbf{x}')$ et calculer la dérivée de Radon-Nikodym associée. Commençons par remarquer que si un ensemble $A \times B$ a une $\pi(\cdot)Q(\cdot, \cdot)$ mesure strictement positive, sa ξ mesure est aussi strictement positive. Il y a donc deux cas à considérer :

1. si $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$, alors les expressions de π , Q et ξ donnent :

$$\pi(d\mathbf{x})Q(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = h(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x})p_b(\mathbf{x}) \frac{\nu(du)}{\nu(S)} \quad \xi(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mu(d\mathbf{x})\nu(du)$$

d'où l'on déduit la domination et la dérivée de Radon-Nykodym

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_b(\mathbf{x}) \frac{h(\mathbf{x})}{\nu(S)}$$

2. Pour l'autre cas : $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$

$$\pi(d\mathbf{x})Q(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = h(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x})p_d(\mathbf{x}) \frac{1}{n(\mathbf{x})} \quad \xi(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mu(d\mathbf{x})$$

et donc la dérivée :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_d(\mathbf{x}) \frac{h(\mathbf{x})}{n(\mathbf{x})}$$

Il reste à écrire les rapports de Green grâce aux résultats (1) et (2).

1. dans le cas d'une **naissance**, $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$, le rapport de Green vaut :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{p_d(\mathbf{y}) h(\mathbf{y}) \nu(S)}{p_b(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) n(\mathbf{y})} \quad (5.6)$$

où $n(\mathbf{y}) = n(\mathbf{x}) + 1$.

2. Dans le cas d'une **mort**, $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$, et le rapport de Green vaut :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{p_b(\mathbf{y}) h(\mathbf{y}) n(\mathbf{x})}{p_d(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \nu(S)} \quad (5.7)$$

5.3.2 Naissance ou mort dans un voisinage

Dans cette partie nous montrons comment utiliser un noyau qui fait apparaître ou disparaître un point dans le voisinage d'un autre point. Dans notre application d'extraction des bâtiments nous utilisons ce noyau pour faire apparaître des bâtiments dans l'alignement d'autres bâtiments. Il s'agit d'une des contributions de cette thèse.

Définitions. Soit \sim une relation symétrique et réflexive sur S . Par exemple :

$$u \sim v \iff d_K(u, v) \leq d_{\max}$$

où $d_K(., .)$ est la distance Euclidienne sur K . Pour une configuration donnée \mathbf{x} on appelle $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ l'ensemble des paires de points en interaction, $\partial(u) \subseteq S$ le voisinage d'un point et $\partial(\mathbf{x}) \subseteq S$ le voisinage d'une configuration :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{x}) &= \{\{u, v\}, u \in \mathbf{x}, v \in \mathbf{x} \text{ t.q. } u \sim v\} \\ \partial(u) &= \{v \in S \text{ t.q. } v \sim u\} \\ \partial(\mathbf{x}) &= \{u \in S \text{ t.q. } \exists v \in \mathbf{x} \ u \sim v\} \end{aligned}$$

Le noyau. On considère le noyau de naissance ou mort suivant :

Naissance :

- [1] Choisir u parmi $\mathbf{x} = \{u_1, \dots, u_n\}$ suivant une loi discrète $j_b^{\mathbf{x}}(\cdot)$,
- [2] générer v tel que $v \in \partial(u)$,
- [3] proposer $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup v$.

Mort :

- [1] Choisir un point $u \in \mathbf{x}$ tel que $\partial(u) \cap (\mathbf{x} \setminus u) \neq \emptyset$ suivant une loi $j_d^{\mathbf{x}}(\cdot)$,
- [2] proposer $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$.

Un tel noyau s'écrit :

$$Q(\mathbf{x}, \cdot) = p_b(\mathbf{x})Q_b(\mathbf{x}, \cdot) + p_d(\mathbf{x})Q_d(\mathbf{x}, \cdot)$$

avec

$$Q_b(\mathbf{x}, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) q_b^u(\mathbf{x}, A) \quad Q_d(\mathbf{x}, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}} j_d^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus u)$$

où $j_d^{\mathbf{x}}(u)$ doit être nul pour tout u n'appartenant à aucune paire de $\mathcal{R}(\mathbf{x})$, et $q_b^u(\mathbf{x}, \cdot)$ propose un point dans le voisinage de u .

La mesure ξ . Pour détailler les conditions qui s'imposent sur le noyau précédemment défini, nous avons besoin d'une mesure symétrique dominant $\pi(d\mathbf{x})Q(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})$. La mesure déjà utilisée pour la naissance ou mort usuelle convient :

$$\xi(A \times B) = \int_{\mathcal{C}} \int_{u \in S} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \cup u) \nu(du) \mu(d\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{1}_A(\mathbf{x}) \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus u) \mu(d\mathbf{x})$$

Comme la naissance ou mort dans un voisinage est un cas particulier de naissance ou mort, ξ domine $Q(\cdot, \cdot)\pi(\cdot)$. On peut maintenant calculer la dérivée associée en regardant deux cas disjoints :

Naissance et dérivée associée. Pour générer un objet en relation avec l'objet choisi, on utilise un vecteur aléatoire z sur un certain espace Σ en suivant la loi d'une variable aléatoire Z et on applique au résultat obtenu une injection $\eta_u(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow S \\ \eta_u : z &\rightarrow v \end{aligned}$$

Comme le couple (z, η_u) doit donner un objet v voisin de l'objet u , la première condition imposée à η est que l'espace image soit le voisinage de u :

$$\eta_u(\Sigma) = \partial(u)$$

Si l'on suppose que Z suit une loi \mathbf{P}_Z sur Σ , on peut détailler q_b :

$$\begin{aligned} q_b^u(\mathbf{x}, A) &= \mathbf{P}_Z(\mathbf{x} \cup \eta_u(Z) \in A) \\ &= \mathbf{P}_Z(\eta_u(Z) \in A_{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

où $A_{\mathbf{x}} \subseteq S$ correspond à l'ensemble suivant :

$$A_{\mathbf{x}} = \{v \in S \text{ t.q. } \mathbf{x} \cup v \in A\}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$q_b^u(\mathbf{x}, A) = \int_{\Sigma} \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(\eta_u(z)) d\mathbf{P}_Z(z)$$

Pour pouvoir effectuer un changement de variable, nous utilisons deux hypothèses :

- $\eta(\cdot)$ est un difféomorphisme, ce qui implique que Σ doit être de même dimension que $\partial(u)$ et que Σ et S sont eux même de même dimension (c'est la condition de **dimension matching** dans le travail de Green),
- la loi de Z est dominée par la mesure de Lebesgue. On note alors $f_Z(\cdot)$ sa dérivée de Radon Nikodym. Ce peut être par exemple la loi uniforme (λ_S note la mesure de Lebesgue sur S) :

$$f_Z(\cdot) = \frac{1}{\lambda_S(\Sigma)}$$

Ces hypothèses permettent le changement de variable suivant qui fait intervenir le Jacobien de $\eta_u(\cdot)$:

$$q_b^u(\mathbf{x}, A) = \int_{\Sigma} \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(\eta_u(z)) f_Z(z) \lambda(dz) \quad (5.8)$$

$$= \int_{\eta_u(\Sigma)} \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(v) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) d\lambda \bullet \eta_u(v) \quad (5.9)$$

$$= \int_{\eta_u(\Sigma)} \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(v) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) |J_{\eta_u^{-1}}(v)| \lambda(dv) \quad (5.10)$$

$$= \int_{\partial(u)} \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(v) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) |J_{\eta_u^{-1}}(v)| \lambda(dv) \quad (5.11)$$

On définit maintenant Λ_u comme l'extension suivante :

$$\Lambda_u(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \notin \partial(u) = \eta_u(\Sigma) \\ |J_{\eta_u^{-1}}(v)| & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire, à partir de l'équation (5.11) :

$$q_b^u(\mathbf{x}, A) = \int_S \mathbf{1}_{A_{\mathbf{x}}}(v) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v) \lambda(dv)$$

et

$$Q_b(\mathbf{x}, A) = \int_S \sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \cup v) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v) \lambda(dv)$$

Pour deux ensembles de \mathcal{C} , A et B , on définit $A_n = A \cap N_n^f$ et $B_{n+1} = B \cap N_{n+1}^f$ pour tout n :

$$\begin{aligned} \int_{A_n} \int_{B_{n+1}} \pi(d\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) &= \int_{A_n} \int_S h(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{B_{n+1}}(\mathbf{x} \cup v) p_b \dots \\ &\dots \sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v) \lambda(dv) \mu(d\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Pour pouvoir reconnaître la mesure ξ dans cette expression, on suppose que $\nu(\cdot)$, la mesure d'intensité du processus de Poisson de référence est dominée par la mesure de Lebesgue $\lambda_S(\cdot)$ sur S et on écrit f_ν sa densité :

$$\nu(A) = \int_A f_\nu(u) \lambda_S(du)$$

L'équation précédente devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{A_n} \int_{B_{n+1}} \pi(d\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) &= \int_{\mathcal{C}} \int_S \mathbf{1}_{A_n}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{B_{n+1}}(\mathbf{x} \cup v) h(\mathbf{x}) p_b \dots \\ &\dots \sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v) \nu(dv) \mu(d\mathbf{x}) \end{aligned}$$

La dernière équation permet de conclure quant à la dérivée de Radon Nikodym de la transformation dans le cas d'une naissance.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{p_b}{f_\nu(v)} h(\mathbf{x}) \left(\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v) \right)$$

Noyau de mort d'un voisin et dérivée associée. L'expression du noyau est très simple :

$$Q_d(\mathbf{x}, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}} j_d^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus u)$$

avec la contrainte implicite sur la loi discrète $(j_d^{\mathbf{x}})_{u \in \mathbf{x}}$:

$$\text{If } u \notin V(\mathbf{x}) \quad j_d^{\mathbf{x}}(u) = 0 \quad (5.12)$$

Si l'on calcule la dérivée de Radon Nikodym :

$$\int_{A_{n+1}} \int_{B_n} \pi(d\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{1}_{A_{n+1}}(\mathbf{x}) p_d h(\mathbf{x}) \sum_{u \in \mathbf{x}} j_d^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}_{B_n}(\mathbf{x} \setminus u) \mu(d\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

En identifiant la mesure ξ , il vient :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus u) = h(\mathbf{x}) p_d j_d^{\mathbf{x}}(u)$$

Rapports de Green Grâce à ces deux dérivées de Radon Nikodym, on peut écrire le rapport de Green :

– dans le cas d'une naissance :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v) p_d}{h(\mathbf{x}) p_b} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) f_\nu(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v)}$$

– dans le cas d'une mort :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus v) = \frac{h(\mathbf{x} \setminus v) p_b}{h(\mathbf{x}) p_d} \frac{\sum_{u \in \mathbf{x} \setminus v} j_b^{\mathbf{x} \setminus v}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v)}{j_d^{\mathbf{x}}(v) f_\nu(v)}$$

Commentaires. Les expressions obtenues sont intuitives puisque les rapports peuvent être vus comme le rapport de vraisemblance multiplié par la probabilité de proposer le mouvement “retour” divisée par la probabilité de proposer le mouvement “aller”. La somme des Jacobiens pondérés peut être vue comme l'espérance d'un Jacobien. D'un point de vue pratique, le calcul des rapports de Green se décompose de la manière suivante :

En pratique

Naissance dans un voisinage

- [1] Calculer la loi discrète $j_b^{\mathbf{x}}(\cdot)$ et choisir u d'après elle :
- [2] Générer z sur Σ , calculer $v = \eta_u(z)$ et $f_\nu(v)$,
- [3] Calculer les paires de $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ qui contiennent v , et pour chacune de ces paires $\{v, w\}$ calculer $j_b(w) \Lambda_w(v)$ et $f_Z(\eta_v^{-1}(w))$,
- [4] Calculer la probabilité $j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)$ de choisir v dans $\mathbf{x} \cup v$
- [5] Calculer $h(\mathbf{x} \cup v)/h(\mathbf{x})$,
- [6] Calculer R en utilisant son expression.

Dans le cas d'une mort, la procédure est presque identique :

En pratique

Mort dans un voisinage

- [1] Choisir un u à tuer,
- [2] Calculer les paires de $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ qui contiennent u , et pour chacune de ces paires $\{u, v\}$ calculer $j_b(v)\Lambda_u(v)$ et $f_Z(\eta_v^{-1}(u))$, et les Jacobiens impliquant u ainsi que la probabilité de choisir v pour générer u suivant $j_b^{\mathbf{x}\setminus u}(\cdot)$
- [3] Calculer $h(\mathbf{x} \setminus u)/h(\mathbf{x})$.

Lois utilisées Nous avons pris :

- une loi uniforme sur l'espace des marques M et sur le voisinage spatial :

$$\nu(\cdot) = \left(\lambda_K \times \frac{\lambda_M}{\lambda_M(M)} \right) \quad f_\nu = \frac{1}{\lambda_M(M)}$$

- une loi uniforme sur les objets pour la naissance :

$$j_b^{\mathbf{x}}(u) = \frac{1}{n(\mathbf{x})}$$

- et une loi discrète uniforme sur les paires d'objets en relation pour la mort :

$$j_d^{\mathbf{x}}(u) = \frac{\frac{1}{2} * \text{card} \{ \{v, w\} \in \mathcal{R}(\mathbf{x}) \mid u \in \{v, w\} \}}{\text{card} \mathcal{R}(\mathbf{x})}$$

Ce qui est le résultat de la procédure suivante :

- [1] choisir une paire $\{v, w\}$ de points en interaction dans $\mathcal{R}(\mathbf{x})$,
- [2] choisir v ou w avec une probabilité 0.5.

Nous verrons plus loin que ce choix n'est pas anodin.

Un exemple

Nous présentons ici un exemple pratique. Nous revenons au cas où nous considérons des rectangles :

$$S = K \times M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \quad u = (x, y, \theta, L, l)$$

On s'intéresse alors à la relation de voisinage suivante :

$$u \sim v \iff \|u - v\|_K \leq d_{\max} \quad \text{avec} \quad \|u\|_K = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pour générer la variable auxiliaire Z , on a alors besoin d'un disque.

Première paramétrisation. Une paramétrisation naturelle du disque est la paramétrisation polaire :

$$\Sigma = [0, d_{\max}] \times [0, 2\pi[\times M \quad z = (\rho, \varphi, \theta, L, l)$$

$$\eta_u(z) = (x_u + \rho \cos(\varphi), y_u + \rho \sin(\varphi), \theta, L, l)$$

Le problème d'une telle paramétrisation est que le Jacobien s'écrit

$$|J_{\eta_u}^{-1}(v)| = \frac{1}{\rho}$$

ce qui conduit alors au rapport de Green suivant, pour la naissance :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v)}{h(\mathbf{x})} \frac{p_d}{p_b} \frac{1}{2\pi * d_{\max}} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \frac{\mathbf{1}(\|u-v\|_2 \leq d_{\max})}{\|u-v\|_2}}$$

Nous devons donc faire face au problème classique de la différentiabilité de la paramétrisation polaire. Cela est problématique puisque comme nous le verrons plus loin, nous avons besoin de bornes sur le rapport de Green (cf. partie 5.4) pour assurer la récurrence au sens de Harris et l'ergodicité géométrique.

Seconde paramétrisation. On considère

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq d_{\max}\} \times M$$

$$z = (x, y, \theta, L, l) \quad \eta_u(z) = (x_u + x, y_u + y, \theta, L, l)$$

Le Jacobien vaut 1, et si l'on utilise un générateur uniforme sur Σ , le rapport peut être écrit :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v)}{h(\mathbf{x})} \frac{p_d}{p_b} \frac{1}{\pi * d_{\max}^2} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(\|u-v\|_2 \leq d_{\max})}$$

Le problème se déplace donc vers la génération uniforme dans un disque. Une solution classique est de générer des points dans le carré de largeur $2d_{\max}$ jusqu'à ce que l'un d'entre eux tombe dans le disque.

5.3.3 Transformations simples

Nous appelons ainsi les transformations qui laissent le nombre de points inchangés dans la configuration courante.

Cadre général

Les transformations que nous présentons dans cette partie changent les paramètres d'un point choisi au hasard dans la configuration. Les transformations comme la translation ou la rotation en sont des exemples. On peut voir ces transformations comme des schémas de mise à jour classique de Metropolis Hastings. Les démonstrations qui suivent servent juste à montrer que l'on peut choisir le point à perturber suivant une loi dépendant de la configuration, et que l'on peut facilement utiliser une approximation d'une mise à jour de Gibbs.

Notations. Nous considérons un ensemble Σ , et une mesure associée $\lambda_\Sigma(\cdot)$. D'habitude Σ est un sous ensemble de \mathbb{R}^k ou un de \mathbb{Z} et λ_Σ la mesure de Lebesgue associée ou la mesure comptable. Pour une configuration de points \mathbf{x} donnée et un point $u \in \mathbf{x}$ fixé, on considère une variable aléatoire $Z_{(\mathbf{x},u)}$ à valeur dans $\Sigma(\mathbf{x}, u) \subset \Sigma$. Soit $\mathbb{P}_Z^{(\mathbf{x},u)}(\cdot)$ la loi de $Z_{(\mathbf{x},u)}$ sur $\Sigma(\mathbf{x}, u)$, que l'on suppose dominée par $\lambda_\Sigma(\cdot)$. Soit $f_Z^{(\mathbf{x},u)}(\cdot)$ la densité associée. Un noyau de transformation simple va donc appliquer une **injection** $\zeta_{\mathbf{x}}$ à une réalisation z de la variable aléatoire pour obtenir un nouvel objet :

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{x}} : S \times \Sigma &\rightarrow S \\ (u, z) &\rightarrow v \end{aligned}$$

Noyau de proposition. Considérons ensuite le noyau de perturbation suivant. Si l'état courant est $\mathbf{x} = \{u_1, \dots, u_{n(\mathbf{x})}\}$, on choisit d'abord un objet u parmi les u_i suivant une loi discrète $j^{\mathbf{x}}(u_i)$, on génère z suivant la loi de $Z_{(\mathbf{x},u)}$, on calcule $v = \zeta_{\mathbf{x}}(u, Z)$, et on propose $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u \cup v$.

Ce noyau peut être écrit :

$$Q(\mathbf{x}, A) = \sum_{u \in \mathbf{x}} j^{\mathbf{x}}(u) \mathbb{P}_Z^{(\mathbf{x},u)}(\mathbf{1}_A(\mathbf{x} \setminus u \cup \zeta_{\mathbf{x}}(u, z)))$$

On considère alors la mesure ξ suivante :

$$\xi(A \times B) = \int_A \sum_{u \in \mathbf{x}} \int_{\Sigma(\mathbf{x},u)} \mathbf{1}_B(\mathbf{x} \setminus u \cup \zeta_x(u, z)) s(dz) \mu(d\mathbf{x})$$

Pour obtenir la symétrie de cette mesure, nous supposons la symétrie de la transformation :

$$v = \zeta_{\mathbf{x}}(u, z) \iff \exists \tilde{z} \in \Sigma(\mathbf{y}, v) \text{ t.q. } \mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u \cup v \quad u = \zeta_{\mathbf{y}}(v, \tilde{z}) \quad (5.14)$$

L'unicité de \tilde{z} vient de l'injectivité de $\zeta_x(u, \cdot)$. On obtient alors le rapport de Green suivant :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{h(\mathbf{y}) j^{\mathbf{y}}(v) f_Z^{(\mathbf{y},v)}(\tilde{z})}{h(\mathbf{x}) j^{\mathbf{x}}(u) f_Z^{(\mathbf{x},u)}(z)}$$

Ce qui rappelle le rapport classique de Metropolis Hastings. Notons que l'on peut avoir :

- $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^k$ et $\lambda_\Sigma(\cdot)$ est une mesure de Lebesgue,
- Σ est un espace comptable et $\lambda_\Sigma(\cdot)$ la mesure comptable associée,
- Σ est un produit de tels ensembles et $\lambda_\Sigma(\cdot)$ la mesure produit des mesures associées.

Perturbations simples

Nous présentons rapidement quelques transformations simples dans le cas des configurations de rectangles : $M \subset \mathbb{R}^3$ (angle, longueur et largeur).

Translation. Pour cette transformation : $\zeta_{(\mathbf{x},u)}$ ne dépend pas de \mathbf{x} et $\Sigma = [-\delta x, \delta x] \times [-\delta y, \delta y]$.

$$\zeta(\cdot; z) : u = (x, y, \theta, L, l) \rightarrow (v = x + z_x, y + z_y, \theta, L, l)$$

Comme Σ est symétrique, la condition (5.14) est obtenue en prenant $\tilde{z} = -z$. Si $(x + z_x, y + z_y) \notin K$, la proposition peut être rejetée sans aucune incidence sur la loi invariante comme souligné dans la partie 5.2. En pratique nous avons pris les lois uniformes :

$$j^{\mathbf{x}}(\cdot) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_u(\cdot) \quad f_Z^{\mathbf{x}}(\cdot) = \frac{\lambda_{\Sigma}(\cdot)}{\lambda_{\Sigma}} \quad R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x})}$$

Rotation. Pour cette transformation on utilise : $z \in \Sigma = [-\delta\theta; +\delta\theta] \subseteq \mathbb{R}$ et ζ :

$$\zeta(\cdot; z) : u = (x, y, \theta, L, l) \rightarrow (v = x, y, \theta + \delta\theta, L, l)$$

Dilatations. On utilise deux dilatations, l'une pour la longueur, l'autre pour la largeur. Nous ne décrivons ici que la première. On prend $\Sigma = \{0, 1\} \times [-\delta_L; +\delta_L]$. Avec $z = (z_k, z_L)$ on définit ζ ainsi :

$$\zeta(\cdot; z) : u = (x, y, \theta, L, l) \rightarrow v = (x + \frac{z_L}{2} \cos(\theta + z_k * \pi), y + \frac{z_L}{2} \sin(\theta + z_k * \pi), \theta, L + z_L, l)$$

Mises à jour avec une pré-exploration

Les perturbations simples, comme la rotation, reposent sur une génération aléatoire d'une nouvelle position d'un objet dans un espace Σ . Une question que l'on peut se poser est : peut-on générer une nouvelle position suivant une loi qui soit mieux adaptée au problème? Nous proposons d'utiliser un mélange discret de lois uniformes sur Σ , en prenant des poids du mélange qui soient pertinents. Ces poids sont donnés par une étape de pré-exploration.

Exemple de la rotation. La figure 5.2 présente la transformation de rotation sur un rectangle et montre visuellement l'idée de la pré-exploration : on associe à chaque bande d'angle un poids dont la valeur provient de la pré-exploration.

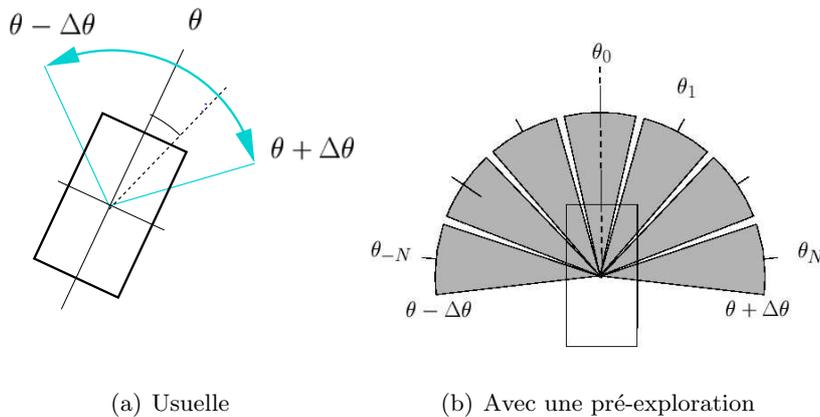


FIG. 5.2: La rotation sous deux formes

Soit N un entier, $\Delta\theta$ la variation maximale d'angle autorisée et $\theta(u)$ l'angle de l'objet u sélectionné. On partitionne l'intervalle des angles possibles $\theta - \Delta\theta, \theta + \Delta\theta$ en $N + 1$ intervalles centrés autour des valeurs θ_i^u :

$$\forall i \in -N, \dots, N \quad \theta_i^u = \theta(u) + i * 2 * \delta\theta \quad \Delta\theta = (N + 1) * \delta\theta$$

Ce qui permet de décrire $\Sigma(\mathbf{x}, u) = [\theta - \Delta\theta, \theta + \Delta\theta]$ sous la forme suivante :

$$\Sigma(\mathbf{x}, u) = [\theta(u) - \Delta\theta, \theta(u) + \Delta\theta] = \bigcup_{i=-N}^N [\theta_i^u - \delta\theta, \theta_i^u + \delta\theta] = \bigcup_{i=-N}^N B_i^u$$

Le seul changement par rapport à la transformation de rotation dans le cas simple provient de la loi utilisée pour choisir le nouvel angle. La loi de cette variable Z est un mélange de loi uniformes pondérées par des poids p_i :

$$f_Z^{(\mathbf{x}, u)}(\cdot) = \sum_{i=-N}^N p_i^{(\mathbf{x}, u)} \frac{\mathbf{1}_{B_i}(\cdot)}{2 * \delta\theta}$$

Nous nous intéressons maintenant à ces poids p_i . Nous allons utiliser la densité à simuler pour favoriser les intervalles intéressants. Commençons par introduire quelques notations : $h(\cdot)$ est la loi non normalisée que l'on veut simuler, $U(\cdot)$ l'énergie correspondante, $\bar{h}(\cdot)$ la version normalisée de $h(\cdot)$ et \tilde{T} un paramètre de température fictif.

$$\bar{h}(\cdot) = \frac{h(\cdot)}{\int h} \quad \bar{h}(\cdot) \propto \exp(-U(\cdot))$$

On considère les $2N + 1$ configurations obtenues en perturbant la configuration courante \mathbf{x} avec un des paramètres d'angle θ_i centre d'un des intervalles B_i , et regardons les valeurs de la densité normalisée en chacune de ces configurations :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x} \setminus u \cup \zeta(u, \theta_i) \quad h_i(\mathbf{x}) = \bar{h}(\mathbf{x}_i)$$

Les poids que nous proposons de prendre sont alors paramétrés par la température fictive \tilde{T} et s'écrivent :

$$p_i^{(\mathbf{x}, u)} \propto h_i^{\frac{1}{\tilde{T}}}(\mathbf{x}) \quad p_i^{(\mathbf{x}, u)} = \frac{h_i^{\frac{1}{\tilde{T}}}(\mathbf{x})}{\sum_j h_j^{\frac{1}{\tilde{T}}}(\mathbf{x})} \quad (5.15)$$

Dans le cadre formulé par Green, il nous faut pouvoir considérer les transformations inverses. Si v a été obtenu grâce à la transformation présentée ici, nous notons $\kappa(u, v)$ l'entier correspondant à la boule ayant permis d'obtenir v :

$$i = \kappa(u, v) \iff \theta(v) \in B_i^u$$

Le schéma de mise à jour est donc décrit par les itérations suivantes :

En pratique

Perturbation avec pré-exploration

- [1] Choisir $u \in \mathbf{x}$ d'après la loi discrète $j^{\mathbf{x}}(\cdot)$.
- [2] Calculer $(\theta_{-N}, \dots, \theta_N)$ en fonction de u .
- [3] Choisir l'un des B_i d'après la loi discrète $(p_i^{(\mathbf{x}, u)})$.
- [4] Générer $z \in B_i$ uniformément.
- [5] Calculer $v = \zeta(u, z)$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u \cup v$,
- [6] puis $(\theta'_{-N}, \dots, \theta'_N)$ qui dépendent de v .
- [7] Calculer $(p_i^{(\mathbf{y}, v)})$ et surtout $p_{\kappa(v, u)}$, c'est à dire le poids associé à la boule dont la sélection permet de revenir de v à u lors de la transformation réciproque.
- [8] Calculer le rapport de Green :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{h(\mathbf{y}) j^{\mathbf{y}}(v) p_{\kappa(v, u)}}{h(\mathbf{x}) j^{\mathbf{x}}(u) p_{\kappa(u, v)}}$$

- [9] Accepter la perturbation avec une probabilité $\min(1, R)$.

Calcul des p_i . Un premier problème vient du calcul des (p_i) . Leur expression donnée par l'équation 5.15 n'est pas utilisable en pratique. Un calcul rapide montre que :

$$\begin{aligned} p_i^{(\mathbf{x}, u)} &\propto \bar{h}^{\frac{1}{\tilde{T}}}(\mathbf{x}_i) \\ &\propto \left(\frac{\bar{h}(\mathbf{x}_i)}{\bar{h}(\mathbf{x})} \right)^{\frac{1}{\tilde{T}}} \\ &\propto \exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_i) - U(\mathbf{x})}{\tilde{T}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression p_i :

$$p_i^{(\mathbf{x}, u)} = \frac{\exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_i) - U(\mathbf{x})}{\tilde{T}}\right)}{\sum_{j=-N}^N \exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_j) - U(\mathbf{x})}{\tilde{T}}\right)}$$

Cette expression est utile puisqu'elle ne nécessite le calcul que de $2N+1$ différences d'énergie entre deux configurations x_i et \mathbf{x} qui ne diffèrent que d'un point.

Taux de Green. Le même argument appliqué à \mathbf{y} et \mathbf{y}_i rend le calcul du rapport de Green facile à mener :

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{p_{\kappa(v,u)}}{p_{\kappa(u,v)}} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{U(\mathbf{y}_{\kappa(v,u)})-U(\mathbf{y})}{\tilde{T}}\right) \sum_{j=-N}^N \exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_j)-U(\mathbf{x})}{\tilde{T}}\right)}{\exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_{\kappa(u,v)})-U(\mathbf{x})}{\tilde{T}}\right) \sum_{j=-N}^N \exp\left(-\frac{U(\mathbf{y}_j)-U(\mathbf{y})}{\tilde{T}}\right)} \\ &= \exp\left(-\frac{U(\mathbf{y}_{\kappa(v,u)})-U(\mathbf{x}_{\kappa(u,v)})}{\tilde{T}}\right) \frac{\sum_{j=-N}^N \exp\left(-\frac{U(\mathbf{x}_j)}{\tilde{T}}\right)}{\sum_{j=-N}^N \exp\left(-\frac{U(\mathbf{y}_j)}{\tilde{T}}\right)} \end{aligned}$$

Propriétés. Pour expliquer intuitivement le comportement de ce rapport, nous supposons maintenant que le rapport des sommes ci-dessus vaut 1. C'est le cas si, par exemple, $(\theta_{-N}^u, \dots, \theta_N^u) = (\theta_{-N}^v, \dots, \theta_N^v)$. Il est possible d'obtenir un tel résultat en imposant que

$$\Delta\theta = \pi \quad \Sigma(\mathbf{x}, u) = \Sigma(\mathbf{y}, v) = \cup_{i=-N}^N B(\hat{\theta}_i, \delta\theta)$$

en utilisant comme centre des intervalles B_i des $\hat{\theta}_i$ fixés par avance. Cela signifie que Σ est divisé en plusieurs bandes qui ne dépendent ni de u ni de v . Une autre simplification consiste à poser $\tilde{T} = 1$ et utiliser pour $j^{\mathbf{x}}(\cdot)$ et $j^{\mathbf{y}}(\cdot)$ des lois uniformes. Cela donne :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left[-(U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x}_{\kappa(u,v)})) + (U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}_{\kappa(v,u)}))\right]$$

Comme $\mathbf{x}_{\kappa(u,v)}$ correspond au centre de la boule qui donne \mathbf{y} par une perturbation uniforme de rayon $\delta\theta$, et que $\mathbf{y}_{\kappa(v,u)}$ correspond à \mathbf{x} , si nous faisons décroître $\delta\theta$ vers 0, R tend vers 1 :

$$\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} R = 1$$

Il est donc possible de limiter la corrélation de la chaîne de Markov en rendant $\delta\theta$ suffisamment petit.

On peut considérer la transformation précédente comme une approximation locale d'une loi conditionnelle si la condition (5.3.3) est vérifiée. On peut donc voir cette transformation comme une approximation d'un schéma de perturbation de Gibbs où la partie "acceptation" corrige l'erreur de discrétisation.

5.4 Echantillonneur amélioré (Synthèse)

Nous rappelons que nous voulons échantillonner la loi d'un processus ponctuel $\pi(\cdot)$ définie par la loi d'un processus de Poisson de référence $\mu(\cdot)$ d'intensité $\nu(\cdot)$ et par une densité $h(\cdot)$ connue à une constante de normalisation près.

Nous étendons ici l'algorithme de Geyer et Møller pour les processus ponctuels. Nous nous intéressons à un algorithme qui utilise un noyau de proposition qui est une combinaison linéaire des noyaux précédemment décrits. Nous rappelons que l'on écrit le noyau de proposition :

$$Q(\mathbf{x}, A) = \sum_m Q_m(\mathbf{x}, A) \quad \text{with } Q(\mathbf{x}, \mathcal{C}) \leq 1$$

et que l'on note :

$$p_m(\mathbf{x}) = Q_m(\mathbf{x}, \mathcal{C})$$

la probabilité de choisir le noyau Q_m dans état \mathbf{x} .

5.4.1 Algorithme

On distingue trois types de proposition.

Naissance ou mort

On note le noyau de naissance ou mort Q_{BD} . On rappelle que les deux taux de Green associés sont :

$$R_{BD}(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup u) = \frac{p_d(\mathbf{x} \cup u) h(\mathbf{x} \cup u) \nu(S)}{p_b(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}) + 1}$$

et

$$R_{BD}(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus u) = \frac{p_b(\mathbf{x} \setminus u) h(\mathbf{x} \setminus u) n(\mathbf{x})}{p_d(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \nu(S)}$$

Cette transformation n'ajoute aucune contrainte sur $\nu(\cdot)$

Transformations simples

On peut supposer sans être réducteur qu'il y a un seul noyau de transformation simple (qui n'ajoute ni n'enlève de point). On le note Q_{NJ} (Non Jumping). Le rapport associé est donné par :

$$y = \mathbf{x} \setminus u \cup v \quad R_{NJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{h(\mathbf{y}) j^{\mathbf{y}}(v) f_Z^{(\mathbf{y}, v)}(\tilde{z})}{h(\mathbf{x}) j^{\mathbf{x}}(u) f_Z^{(\mathbf{x}, u)}(z)}$$

où $j^{\mathbf{x}}(u)$ est la probabilité de choisir le point u dans \mathbf{x} , et $f(\cdot)$ est la densité de la variable aléatoire auxiliaire Z utilisée pour créer le nouvel objet v .

Naissance ou mort dans un voisinage

On note ce type de noyau Q_{BDN} . Nous avons vu que l'expression générale du rapport de Green s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup v \quad v = \eta_u(z) \quad v \in \partial(u)$$

$$R_{BDN}(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v) p_d}{h(\mathbf{x}) p_b} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) f_\nu(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v)}$$

$$R_{BDN}(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus v) = \frac{h(\mathbf{x} \setminus v) p_b}{h(\mathbf{x}) p_d} \frac{\sum_{u \in \mathbf{x} \setminus v} j_b^{\mathbf{x} \setminus v}(u) f_Z(\eta_u^{-1}(v)) \Lambda_u(v)}{j_d^{\mathbf{x}}(v) f_\nu(v)}$$

où :

- $v = \eta_u(z)$, η_u est le difféomorphisme qui permet d'utiliser une réalisation $z \in \Sigma$ d'une variable aléatoire Z pour créer un nouveau point dans le voisinage de u , $\partial(u)$,
- $f_Z(\cdot)$ est la densité de cette variable aléatoire par rapport à la mesure de Lebesgue sur Σ
- $\Lambda_u(\cdot)$ est la prolongation du Jacobien de η_u^{-1} sur Σ ,

- et $f_\nu(\cdot)$ est la densité de l'intensité $\nu(\cdot)$ du processus de Poisson de référence par rapport à la mesure de Lebesgue sur S .

Rappelons que l'analyse de la partie précédente a apporté l'hypothèse de **dimension matching** :

Hypothèse 1

Dimension Matching.

Pour tout objet u de S , $\partial(u)$, Σ et S sont de même dimension.

Nous rappelons également que nous avons choisi les loi discrètes suivantes.

Hypothèse 2

Naissance dans un voisinage

Le choix de l'objet dans le voisinage duquel un nouvel objet est proposé suit la loi suivante :

$$j_b^{\mathbf{x}}(u) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \quad (5.16)$$

Ce qui correspond à la procédure :

- [1] Choisir **uniformément** un objet u dans la configuration courante,
- [2] proposer d'ajouter un objet v dans $\partial(u)$

Mort dans un voisinage

Le choix de l'objet à tuer suit la loi discrète :

$$j_d^{\mathbf{x}}(u) = \frac{\frac{1}{2} * \text{card} \{ \{v, w\} \in \mathcal{R}(\mathbf{x}) \mid u \in \{v, w\} \}}{\text{card } \mathcal{R}(\mathbf{x})} \quad (5.17)$$

qui résulte de la procédure :

- [1] choisir une **paire** $\{v, w\}$ de $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ **uniformément**,
- [2] choisir v ou w avec une probabilité 0.5,
- [3] proposer de retirer cet objet.

Algorithme

L'algorithme utilisé est le suivant :

Algorithme B	<p>Pour un état courant $X_t = \mathbf{x}$</p> <ul style="list-style-type: none"> [1] choisir l'un des noyaux $Q_m(\cdot, \cdot)$ précédemment décrit avec une probabilité $p_m(\mathbf{x})$, [2] générer \mathbf{y} suivant ce noyau : $\mathbf{y} \sim Q_m(\mathbf{x}, \cdot)$, [3] calculer le rapport de Green $R_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et le taux d'acceptation $\alpha_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ [4] accepter la proposition $X_{t+1} = \mathbf{y}$ avec une probabilité α, et la rejeter sinon.
---------------------	--

5.4.2 Conditions

Nous rappelons d'abord la condition de stabilité classique :

Condition 1	<p>Stabilité usuelle</p> <p>Un processus ponctuel dont la densité de probabilité non normalisée est $h(\cdot)$ par rapport à $\mu(\cdot)$ est stable si il existe un réel R_h tel que :</p> $h(\mathbf{x} \cup u) \leq R_h h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \quad \forall u \in S$
--------------------	---

Nous ajoutons d'abord, la condition suivante qui sert à assurer l'apériodicité de la chaîne.

Condition 2	<p>Apériodicité</p> <p>la probabilité de ne proposer aucune perturbation est strictement positive :</p> $\forall \mathbf{x} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n) \geq p_I > 0$
--------------------	--

Nous ajoutons ensuite les conditions suivantes qui servent à simplifier la preuve. On peut les lever sans perdre les propriétés de convergence.

Condition 2b	<p>(Facultative) Condition sur le mélange</p> <ul style="list-style-type: none"> 1. la probabilité de choisir une transformation $p_m(\mathbf{x})$ ne dépend pas de \mathbf{x} (i.e.. est constante), 2. dans le cas des transformations de naissance ou mort simples ou dans un voisinage, les probabilités de choisir une naissance p_b et une mort p_d ne dépendent pas de \mathbf{x}
---------------------	--

Les conditions qui suivent sont faciles à assurer et donnent des bornes utiles aux rapports de Green de la naissance ou mort dans un voisinage.

Condition 3

On suppose que les inégalités suivantes sont vérifiées :

intensité

$$\exists R_\nu \in \mathbb{R} \quad t.q. \quad f_\nu(\cdot) < R_\nu$$

variable aléatoire auxiliaire

$$\exists (r_Z, R_Z) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q. \quad 0 < r_Z < f_Z(\cdot) < R_Z$$

Jacobien

$$\exists (r_J, R_J) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q. \quad 0 < r_J < |J_{\eta_u}^{-1}(\cdot)| < R_J$$

La première condition est facile à obtenir puisque l'on travaille sur un borné $S \subseteq \mathbb{R}^d$. La seconde condition est reliée à la variable aléatoire utilisée pour générer un nouvel objet dans le voisinage d'un autre. Utiliser une loi uniforme est utile en pratique et donne la condition en question. La dernière condition est liée à la différentiabilité de la transformation η_u . Nous avons déjà vu sur un exemple comment obtenir une telle condition (voir partie 5.3.2). Ces deux dernières conditions peuvent être remplacées par une unique condition de minoration du produit $f_Z(z)|J_{\eta_u}^{-1}(z)|$ (les bornes supérieures ne sont pas nécessaires).

On ajoute finalement une condition sur la relation \sim entre les objets :

Condition 4

Il est possible de partitionner S de façon que toute paire d'objets d'un élément de la partition soit en relation :

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad S = S_1 \cup \dots \cup S_k \quad S_i \cap S_j = \emptyset$$

où tous les S_i vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad si \{u, v\} \in S_i^2 \text{ alors } u \sim v$$

Comme S est borné on peut remarquer que la condition de "dimension matching" résultant de l'hypothèse 1 implique la condition 4. Par cette hypothèse, on a en effet que les voisinages des objets ne sont pas négligeables :

$$\exists r_\sim \quad t.q. \quad \forall u \in S \quad \lambda_S(\partial(u)) > r_\sim$$

Il suffit alors de remarquer que comme S est borné on peut itérativement construire une suite d'ensembles strictement décroissante en ajoutant des points un à un.

5.4.3 Propriétés :

La chaîne de Markov ainsi construite possède les propriétés requises :

Proposition $\left| \begin{array}{l} \text{Sous les hypothèses 1 et 2 et les conditions 1,2 et 3, L'al-} \\ \text{gorithme } B \text{ construit une chaîne de Markov qui est } \pi(\cdot) \\ \text{réversible, aperiodique, } \pi\text{-irréductible, Harris récurrente et} \\ \text{géométriquement ergodique.} \end{array} \right.$

5.4.4 Preuve de la $\pi(\cdot)$ réversibilité :

Proposition $\left| \begin{array}{l} \text{L'algorithme } B \text{ construit une chaîne de Markov qui est } \pi(\cdot) \\ \text{réversible} \end{array} \right.$

La preuve est immédiate puisque les noyaux de proposition et les taux d'acceptation associés ont été construits pour obtenir cette réversibilité.

5.4.5 Preuve des propriétés de stabilité de la chaîne

Nous présentons une adaptation de la preuve de Geyer (voir [Geyer, 1999]). Notre but est de montrer :

- que les noyaux ajoutés ne font pas perdre les propriétés de stabilité,
- qu'il est possible de générer suivant une mesure d'intensité inhomogène : $\nu(\cdot)$ n'est pas forcément une mesure de Lebesgue.

φ - Irréductibilité et ensembles petits

φ -Irréductibilité. Rappelons qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur χ est irréductible si pour tout $x \in \chi$ et tout $B \subset \chi$, il existe un entier n tel que la probabilité d'atteindre B en partant de x est strictement positive : $\mathbf{P}^n(x, B) > 0$, avec la condition que B soit de mesure φ non nulle ou φ est une mesure non nulle sur χ . Pour notre cas $\mathbf{P}^n(x, B) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in B | X_1 = x)$.

Ensemble petits. Un ensemble C est petit si il existe une mesure φ' non nulle et un entier n tel que :

$$\mathbf{P}^n(x, B) \geq \varphi'(B) \quad \forall x \in C \quad \text{et } B \in \mathcal{B} \quad (5.18)$$

Premier résultat. Nous étendons le résultat de Geyer :

Proposition $\left| \begin{array}{l} \text{Si la densité non normalisée satisfait les conditions 1 et 2 l'al-} \\ \text{gorithme simule une chaîne de Markov } \varphi \text{ irréductible et tout} \\ \text{ensemble borné est petit.} \end{array} \right.$

Définissons $\varphi^0(\cdot)$ comme la mesure non nulle suivante sur \mathcal{C}

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad \begin{cases} \varphi^0(\mathbf{x}) = 1 & \text{if } \mathbf{x} = \emptyset \\ \varphi^0(\mathbf{x}) = 0 & \text{else} \end{cases}$$

Il est possible de choisir R_h satisfaisant la **condition 1** et suffisamment grand pour que :

$$R_{BD}(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus v) \geq \frac{1}{R_h} \frac{p_b}{\nu(S) p_d}$$

et

$$1 \geq \frac{1}{R_h} \frac{p_b}{\nu(S) p_d}$$

Nous considérons maintenant une configuration \mathbf{x} , et un entier $m \geq n(\mathbf{x})$. Nous avons donc :

$$\mathbb{P}^m(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) \geq \mathbb{P}^{n(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) \mathbb{P}^{m-n(\mathbf{x})}(\emptyset, \{\emptyset\}) \quad (5.19a)$$

$$\geq p_{BD}^{n(\mathbf{x})} p_d^{n(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{R_h} \frac{p_b}{\nu(S) p_d} \right)^{n(\mathbf{x})} p_I^{m-n(\mathbf{x})} \quad (5.19b)$$

$$\geq p_{BD}^{n(\mathbf{x})} p_b^{n(\mathbf{x})} p_I^{m-n(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{R_h} \frac{1}{\nu(S)} \right)^{n(\mathbf{x})} \quad (5.19c)$$

ce qui donne finalement :

$$\mathbb{P}^m(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) \geq p_{BD}^m p_b^m p_I^m \left(\frac{1}{R_h} \frac{1}{\nu(S)} \right)^m$$

Cela montre que la chaîne est φ^0 -irréductible car $\mathbb{P}^m(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) > 0$ quand $m \geq n(\mathbf{x})$. Le même calcul montre que tout ensemble borné est petit. Pour un entier m donné, considérons :

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C} : n(\mathbf{x}) \leq m\}$$

On peut introduire :

$$c = p_{BD}^m p_b^m p_I^m \left(\frac{1}{R_h} \frac{1}{\nu(S)} \right)^m$$

et donc l'équation (5.18) est établie avec : $\varphi' = c\varphi^0$.

Récurrence de Harris et ergodicité géométrique

Récurrence au sens de Harris. Rappelons brièvement que la récurrence de Harris d'une chaîne de Markov dont la loi invariante est $\pi(\cdot)$ consiste en la propriété suivante : pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, et tout ensemble A π positif on a $P_x(\tau_A < \infty) = 1$ où τ_A est le temps d'arrêt $\tau_A = \inf\{n \text{ t.q. } X_n \in A\}$. Un moyen pratique pour montrer la récurrence de Harris est d'utiliser une condition de drift. Pour une fonction W donnée on définit l'opérateur :

$$\mathbf{P}W(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[W(X_{t+1}) | X_t = \mathbf{x}] = \int \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) W(\mathbf{y})$$

W est dite non-bornée hors des ensembles petits si pour tout $\gamma > 0$, l'ensemble de niveau $\{\mathbf{x} \in \mathcal{C} : W(\mathbf{x}) \leq \gamma\}$ est petit (voir [Robert, 1996]¹).

Une chaîne de Markov satisfait la **condition de drift pour la récurrence** si il existe une fonction $W : \mathcal{C} \rightarrow (0, \infty)$ et un ensemble petit C tel que

$$\mathbf{P}W(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \notin C$$

Si la chaîne satisfait la condition de drift pour la récurrence, alors elle est récurrente au sens de Harris (voir [Meyn et Tweedie, 1993, Robert, 1996, Robert et Casella, 1999]).

¹page 105

Ergodicité géométrique. Une chaîne de Markov est **géométriquement ergodique** si il existe une constante $r > 1$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \|\mathbb{P}^n(\mathbf{x}, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}$$

Cette propriété est impliquée (voir [Meyn et Tweedie, 1993, Robert, 1996]) par la **condition de drift géométrique**. La chaîne vérifie cette condition si il existe une fonction $W : \mathcal{C} \rightarrow [1, \infty)$, deux constantes $b < \infty, \varpi < 1$, et un ensemble petit C tels que :

$$PW(\mathbf{x}) \leq \varpi W(\mathbf{x}) + b \mathbf{1}_C(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad (5.20)$$

Si la chaîne est apériodique, toute W vérifiant cette condition de drift géométrique est non-bornée hors des ensembles petits. En d'autre termes, la condition de drift géométrique implique la condition pour la récurrence.

Proposition

Sous les conditions 1,2,3 et 4, l'algorithme B simule une chaîne de Markov qui est

- *récurrenente au sens de Harris*
- *et géométriquement ergodique.*

Preuve : on utilise la même fonction que Geyer : $W(\mathbf{x}) = A^{n(\mathbf{x})}$, avec une constante $A > 1$ arbitraire. Il y a deux transformations qui ajoutent un point à la configuration courante \mathbf{x} : celle de naissance ou mort et celle de naissance ou mort dans un voisinage. On note $\alpha_{BD}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la probabilité d'accepter une naissance proposée par la naissance ou mort classique. Grâce aux conditions 1 et 2, et grâce à l'expression du rapport de Green on obtient aisément que :

$$\alpha_{BD}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{p_d R_h \nu(S)}{p_b n(\mathbf{x}) + 1}$$

Donc pour un $\epsilon \in (0, 1)$ donné, il existe K_ϵ^{BD} dépendant de R_h, p_b, p_d et $\nu(S)$ tel que :

$$\alpha_{BD}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon \quad \text{quand} \quad n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon^{BD}$$

L'expression du rapport pour une mort donne que la probabilité d'accepter une mort vaut 1 quand $n(\mathbf{x})$ est suffisamment grand.

$$\alpha_{BD}^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \quad \text{quand} \quad n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon^{BD}$$

On note $\alpha_{BDN}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la probabilité d'accepter une naissance en utilisant la naissance ou mort dans un voisinage. De par les conditions 1,2 et 3 :

$$\alpha_{BDN}^+(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) \leq \frac{p_d R_h R_\nu}{p_b r z r_J} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))}$$

Le terme $\mathbf{1}(u \in \partial(v))$ vient de l'expression de $\Lambda_u(v)$. On s'intéresse maintenant au rapport $j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) / \sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))$ dans le but de montrer qu'il tend vers 0 quand $n(\mathbf{x})$ tend vers l'infini. Pour cela nous utilisons les expressions de j_d et j_b données par (5.17) et (5.16). On obtient :

$$\frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{\text{card} \{ \{u_i, u_j\} \in \mathcal{R}(\mathbf{x} \cup v) \text{ t.q. } v \in \{u_i, u_j\} \}}{\text{card} \mathcal{R}(\mathbf{x} \cup v)}}{\frac{\text{card} \{ \{u_i, u_j\} \in \mathcal{R}(\mathbf{x} \cup v) \text{ t.q. } v \in \{u_i, u_j\} \}}{n(\mathbf{x})}}$$

Si l'on note $s(\mathbf{x})$ le nombre de paires de points interagissant dans \mathbf{x} , c'est-à-dire $s(\mathbf{x}) = \text{card}\{\mathcal{R}(\mathbf{x})\}$, on obtient après calculs :

$$\frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))} = \frac{1}{2} \frac{n(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x}) + 1} \quad (5.21)$$

Ce résultat est important puisque, comme nous le montrons maintenant, sous la condition 4, $s(\mathbf{x})$ à un comportement quadratique avec le nombre de points ce qui fait que le rapport du premier sur le dernier tend vers 0 quand le nombre de points va vers l'infini.

Lemme

Sous la condition 4,

$$\sup \left\{ \frac{n(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})} : \mathbf{x} \text{ t.q. } n(\mathbf{x}) = n \right\} \quad (5.22)$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Preuve du lemme : Nous reprenons ici un argument classique que l'on retrouve entre autre dans le papier de Geyer [Geyer, 1999]. Grâce à la condition 4, on partitionne S en k sous-ensembles S_i tels que si deux points sont dans le même S_i , ils sont en relations. Une configuration \mathbf{x} donnée met n_i points dans chaque S_i :

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k n_i \quad s(\mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2} = s(n_1, \dots, n_k)$$

Si l'on considère les k -uplets (n_1, \dots, n_k) dans \mathbb{R}^k , il est connu que le minimum de $s(n_1, \dots, n_k)$ sous la contrainte $\sum n_i = n$ est obtenu quand $n_i = n/k$ pour tout i . On obtient alors :

$$s(n_1, \dots, n_k) \geq k * \frac{(n/k) * (n/k - 1)}{2}$$

ce qui mène à :

$$\text{si } n(\mathbf{x}) \geq k \quad s(\mathbf{x}) \geq \frac{n(\mathbf{x})(n(\mathbf{x}) - k)}{2k}$$

Grâce au comportement quadratique de s , le lemme est montré. Notons que ce comportement est essentiellement dû à la réflexivité de la relation.

On peut maintenant conclure sur le comportement de α_{BDN}^+ . Pour un $\epsilon \in (0, 1)$, donné, il existe K_ϵ^{BDN} dépendant de $R_h, k, R_\nu, r_Z, r_J, p_b, p_d$ et $\nu(S)$ tel que :

$$\alpha_{BDN}^+(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) < \epsilon \quad \text{quand } n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon^{BDN}$$

Par symétrie du rapport, si $n(\mathbf{x})$ est suffisamment grand, la probabilité d'accepter une mort dans un voisinage est égale à 1

$$\alpha_{BDN}^- = 1 \quad \text{quand } n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon^{BDN}$$

On note p_{st} la probabilité de faire un mouvement qui laisse le nombre de points inchangé. On retrouve dans cette probabilité, la probabilité de rejeter une naissance, de rejeter une mort et de proposer une transformation simple.

Donc si l'on définit $K_\epsilon = \max(K_\epsilon^{BD}, K_\epsilon^{BDN})$, on obtient que pour $n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{PW}(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}[W(X_{t+1}) | X_t = \mathbf{x}] \\ &\leq A^{n(\mathbf{x})+1} (p_{BD} p_b \alpha_{BD}^+ + p_{BDN} p_b \alpha_{BDN}^+) + \dots \\ &\quad \dots A^{n(\mathbf{x})} p_{st} + A^{n(\mathbf{x})-1} (p_{BD} p_d \alpha_{BD}^- + p_{BDN} p_d \alpha_{BDN}^-) \\ &\leq \left(A\epsilon (p_{BD} p_b + p_{BDN} p_b) + p_{st} + \frac{1}{A} (p_{BDN} p_d + p_{BD} p_d) \right) W(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

On fixe ensuite ϵ suffisamment petit pour obtenir un $\varpi < 1$ tel que

$$\mathbf{PW}(\mathbf{x}) \leq \varpi W(\mathbf{x}) \quad \text{pour } n(\mathbf{x}) \geq K_\epsilon$$

en prenant :

$$\varpi = A\epsilon (p_{BD} p_b + p_{BDN} p_b) + p_{st} + \frac{1}{A} (p_{BDN} p_d + p_{BD} p_d)$$

Considérons maintenant $C = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C} : n(\mathbf{x}) < K_\epsilon\}$ qui est petit. Il est évident que :

$$\mathbf{PW}(\mathbf{x}) \leq A^{K_\epsilon+1} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in C$$

et donc, en prenant $b = A^{K_\epsilon+1}$ la condition de drift géométrique (5.20) est vérifiée.

Conclusion

Il est donc possible d'utiliser des naissances morts dans un voisinage sans restriction dès lors que l'on utilise bien le bon schéma. En effet, la condition de drift vient du comportement quadratique du nombre d'interactions avec le nombre de points et de la procédure choisie pour retirer un point en interaction à la configuration. Rappelons que nous choisissons d'abord un paire de points et ensuite un point dans la paire. Une autre possibilité aurait été de choisir uniformément un point parmi ceux qui appartiennent à au moins une paire. Ce second schéma inverse le taux et la condition de drift est alors perdue, à moins de rajouter une conditions sur la densité à simuler.

5.5 Vérifications par l'expérience

Lorsque l'on utilise une méthode MCMC, il est essentiel de s'assurer que l'implantation informatique en a bien été faite. Cela est tout particulièrement important lorsque l'on veut estimer les paramètres d'un modèle puisque la procédure repose sur l' "importance sampling". Nous vérifions dans cette partie que les taux calculés sont exacts et que la transformation de naissance ou mort dans un voisinage améliore bien la convergence de la chaîne de Markov.

5.5.1 Processus de Poisson

Nous considérons des configurations de rectangles :

$$M = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [L_{\min}, L_{\max}] \times [l_{\min}, l_{\max}]$$

et prenons comme image le carré unité de \mathbb{R}^2 :

$$K = [0, 1] \times [0, 1]$$

La mesure de référence que nous utilisons est caractérisée par la mesure d'intensité suivante :

$$\nu(\cdot) = (\lambda_K \times \frac{\lambda_M}{\lambda_M(M)})(\cdot)$$

Dans les parties qui suivent, nous considérons un processus de Poisson X de densité $h(\cdot)$ par rapport au processus de Poisson d'intensité $\nu(\cdot)$ où :

$$h(\mathbf{x}) \propto \exp\left(\sum_{u \in \mathbf{x}} \beta(u)\right)$$

On peut vérifier que pour un borélien donné $A \subset S$, la variable aléatoire $N_A(X)$ qui compte le nombre de points de X tombant dans A suit une loi de Poisson discrète :

$N_A(X) \quad \text{suit une loi de Poisson de moyenne} \quad \mathbb{E}[N_A(X)] = \int_A \beta(u) d\nu(u)$

(5.23)

5.5.2 Loi cible et variation totale

Nous proposons ici un moyen de vérifier (partiellement) que l'algorithme converge vers la loi désirée. Nous proposons de choisir un ou plusieurs boréliens A et de vérifier la propriété ci-dessus sur un nombre N de trajectoires de la chaîne de Markov en comparant la loi empirique de $N(X_t)$ au temps t et la loi cible. Soit $(\hat{p}_{(n,A)}^t)_{n \geq 0}$ la loi empirique du nombre de points de X_t tombant dans A :

$$\hat{p}_n^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}(N_A(X_t^i) = n) \quad (5.24)$$

Si (p_n) est la loi de Poisson théorique de $N_A(X_t)$, on considère la distance suivante :

$$d_{m_{min}}^{m_{max}}(t, A) = \sum_{n=m_{min}}^{m_{max}} |p_n - \hat{p}_n^t| \quad (5.25)$$

où m_{min}, m_{max} sont deux paramètres définissant le support fini sur lequel les lois empiriques et théoriques sont comparées.

L'étude du comportement de cette distance permet d'obtenir une validation empirique de la convergence. Nous avons utilisé cette procédure parce qu'il est apparu que l'étude de la convergence des moments (premiers et second ordre) n'était pas suffisante : l'implantation des méthodes MCMC peut donner lieu à des erreurs très particulières qui faussent la distribution des variables aléatoires sans avoir d'impacts majeurs sur les moments.

L'un des avantages de cette procédure est qu'elle permet de visualiser la loi empirique obtenue et donc de donner des indications sur l'origine informatique d'une erreur.

5.5.3 Naissance ou mort

Nous avons testé d'abord la convergence de la chaîne de Markov en utilisant seulement le noyau de naissance ou mort. Pour la première expérience, nous utilisons $A = S$ et $\beta(u) = e$ de telle sorte que le nombre de points $n(X)$ suivent théoriquement une loi de Poisson de moyenne e puisque $\nu(S) = 1$. La figure 5.3 montre un résultat pour $e = 30$. Nous avons lancé $N = 10000$ simulations et pris $m_{min} = 15$ et $m_{max} = 45$. Le premier graphique montre d en fonction du temps t . Les deux autres graphiques comparent les fonctions de répartition théoriques et empiriques. La figure 5.4 montre trois résultats pour $e = 30$, $e = 15$ et $e = 5$, ce dernier cas étant intéressant puisqu'il montre que la frontière $n = 0$ n'a pas d'effet sur la simulation. Les supports de comparaisons considérés sont résumé par le tableau suivant :

e	m_{min}	m_{max}
5	0	30
15	0	30
30	15	45

Ces expériences montrent que la chaîne de Markov $N_S(X_t)$ converge vers la loi de Poisson désirée sur S . Il manque un point : nous devrions vérifier que les lois conditionnées par les événements "le nombre de point est connu" suivent bien une loi uniforme. Cela est en fait lié au générateur pseudo-aléatoire. Nous avons utilisé un générateur connu pour sa robustesse².

5.5.4 Naissance ou mort dans un voisinage

Dans cette partie, l'objectif est de montrer que l'expression théorique obtenue est valide et que ce type de transformations a un intérêt. Pour cela, nous utilisons un processus de Poisson inhomogène, et nous vérifions expérimentalement que la convergence est plus rapide quand un tel mécanisme de mise à jour est utilisé. Notons que la non homogénéité n'introduit pas de corrélation spatiale entre les points.

Processus de Poisson non homogène

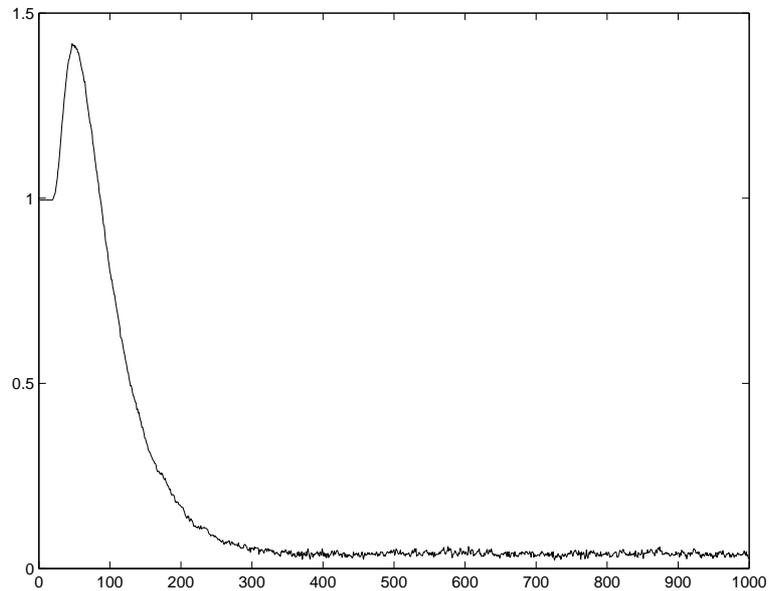
Soit un processus ponctuel de Poisson sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$ dont l'intensité n'est pas constante :

$$\beta(u) = \begin{cases} \rho * e & \text{si } u \in S_{\text{sub}} = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ e & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.26)$$

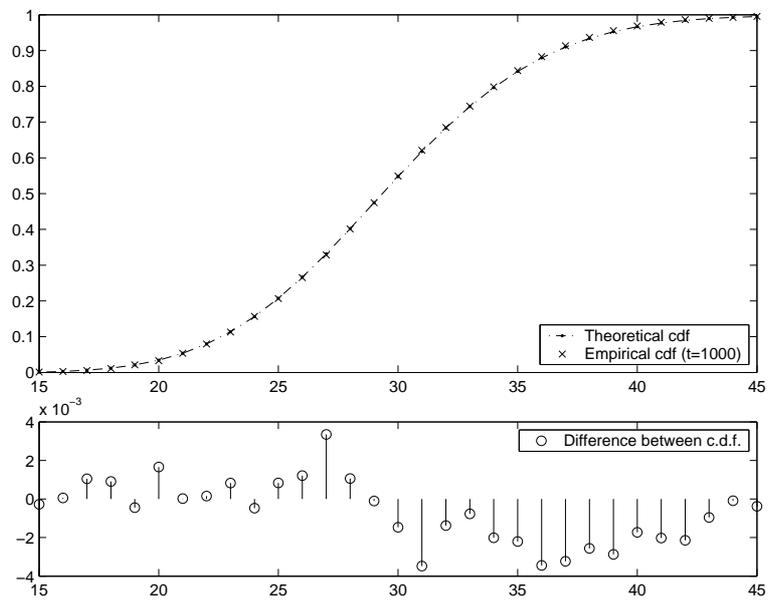
La partition correspondante de S est présentée par la figure 5.5(a).

Pour $\rho = 1$, le processus de Poisson est homogène, d'intensité constante e . Pour $\rho > 1$, la partie S_{sub} est favorisée. La loi de Poisson correspondante est en effet

²MersenneTwister



(a) $d(t, S)$ (ordonnées) en fonction du nombre d'itérations t (abscisses)



(b) Comparaison entre les fonctions de répartition (cdf) théoriques et empiriques de X_t quand $t = 1000$. L'axe des abscisses représente le support de la lois considéré.

FIG. 5.3: Résultat de la première expérience avec $e = 30$ pour $N = 10000$ trajectoires.

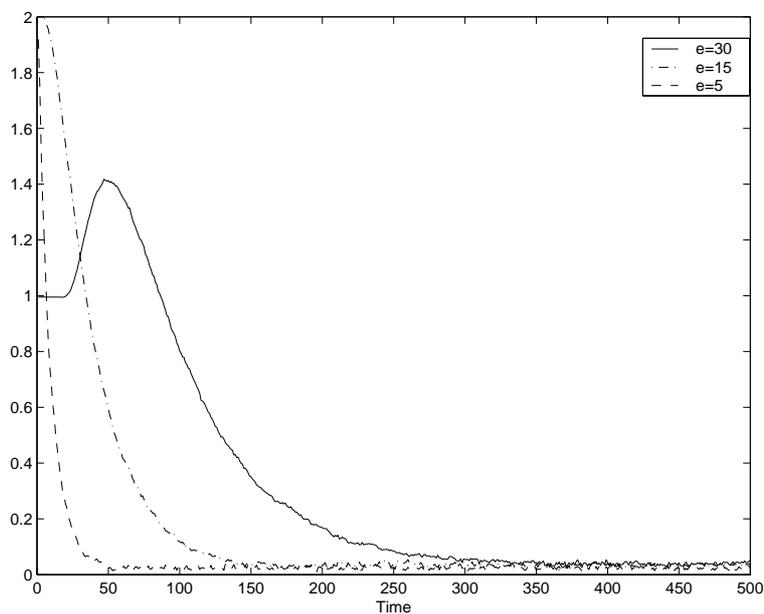
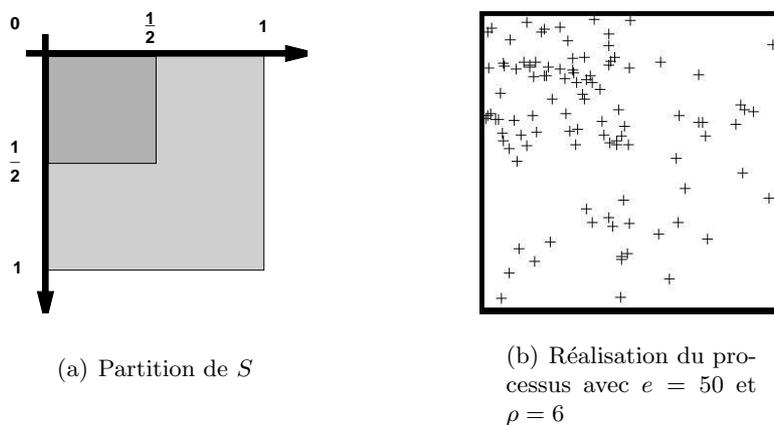


FIG. 5.4: Distance d (ordonnées) en fonction du temps pour $e = 5$, $e = 15$ et $e = 30$ en utilisant $A = S$ et $N = 10000$ trajectoires. L'état initial est toujours la configuration vide.



(a) Partition de S

(b) Réalisation du processus avec $e = 50$ et $\rho = 6$

FIG. 5.5: Processus de Poisson non homogène utilisé

donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{S_{\text{sub}}}(X)] &= \rho \frac{e}{4} \\ \mathbb{E}[N_{S \setminus S_{\text{sub}}}(X)] &= \frac{3e}{4} \\ \mathbb{E}[N_S(X)] &= \frac{(\rho + 3)e}{4}\end{aligned}\tag{5.27}$$

La figure 5.5(b) montre une réalisation d'un tel processus de Poisson avec $e = 50$ et $\rho = 6$.

Expériences

Nous avons pris $e = 20$, et regardé les différents cas $\rho = 1, \rho = 3, \rho = 6$. Pour chaque cas, deux séries de 10000 trajectoires sont simulées, l'une en utilisant seulement la naissance ou mort usuelle, l'autre en utilisant également la naissance ou mort dans un voisinage ($p_{BDN} = 0.5$).

Loi d'intérêt

Comme pour les expériences précédentes, nous utilisons deux fonctions de distance.

- $d_S = d(t, S_{\text{sub}})$, pour vérifier que $N_{S_{\text{sub}}}(X_t)$ converge vers une loi de Poisson de moyenne $\rho * 5$,
- et $d_{S^c} = d(t, S \setminus S_{\text{sub}})$ pour vérifier que la variable aléatoire correspondante suit bien une loi de Poisson de moyenne 15

Le voisinage

Nous utilisons un voisinage de proximité au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$u \sim v \iff \max(|x_u - x_v|, |y_u - y_v|) \leq d_{\max}\tag{5.28}$$

et un paramètre $d_{\max} = 0.1$. La figure 5.6 montre une réalisation d'un processus non homogène avec $e = 20$ et $\rho = 6$ où les points reliés sont voisins.

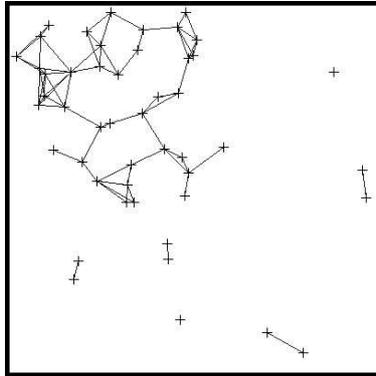


FIG. 5.6: Réalisation d'un processus de Poisson non homogène avec $e = 20$ et $\rho = 6$. Si la distance ($\|\cdot\|_\infty$) entre deux points vaut moins que 0.1 ceux ci sont reliés.

Résultats

Les figures 5.7, 5.8 et 5.9 montrent des résultats respectivement pour $\rho = 1$, $\rho = 3$ et $\rho = 6$.

Ces résultats montrent que la chaîne de Markov converge plus vite quand la naissance ou mort dans un voisinage est utilisée, si la non homogénéité est suffisamment importante. Il est important de remarquer que sur la figure 5.9, ce noyau de mise à jour rend la convergence plus rapide sur S_{sub} mais plus lente sur $S \setminus S_{sub}$. Une étude plus complète devrait étudier l'importance des paramètres p_{BD} , p_{BDN} , p_b et d_{max} .

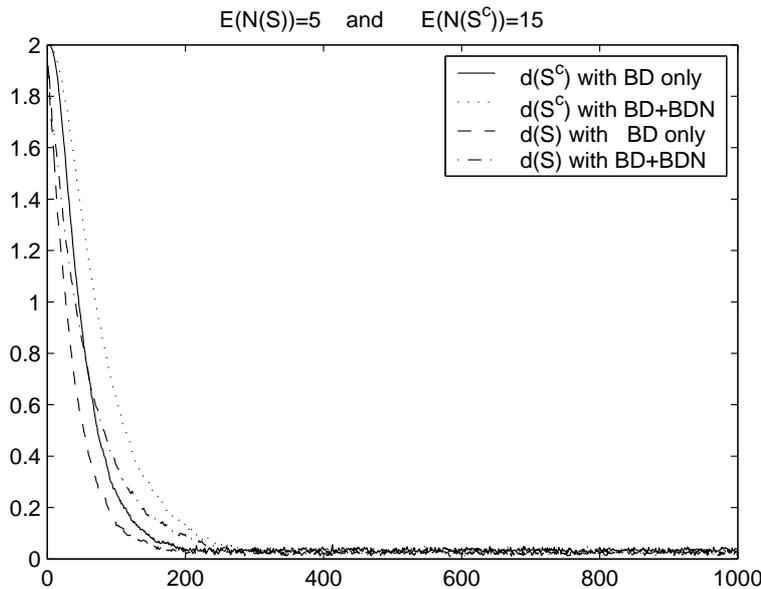


FIG. 5.7: Les distances d_S et d_{S^c} en fonction du temps avec $\rho = 1$ pour $N = 10000$ trajectoires : la première n'utilise que la naissance ou mort usuelle (BD), tandis que la seconde utilise également la naissance ou mort dans un voisinage (BDN.)

5.6 Améliorer la naissance ou mort dans un voisinage

5.6.1 Relations asymétriques

Nous présentons ici un type de naissance mort qui a fait ses preuves dans nos applications. Nous considérons un **potentiel d'intensité** $\gamma : S \rightarrow \mathbb{N}$. Ce potentiel quantifie l'état de l'objet $u \in S$. Par exemple, nous supposons que ce potentiel peut être égal à 0 ou 1. Dans notre cadre de détection de bâtiment, cet entier correspond à un niveau d'une fonction d'attache au donnée. Supposons que le niveau $\gamma(u) = 1$ corresponde à un objet pertinent par rapport aux données. En pratique, il est intéressant de ne pas perdre du temps dans l'exploration de voisinages d'un objet non pertinent. Nous proposons donc ici une naissance ou mort dans un voisinage qui n'agit que sur des objets pertinents. Ce noyau applique les procédures suivantes :

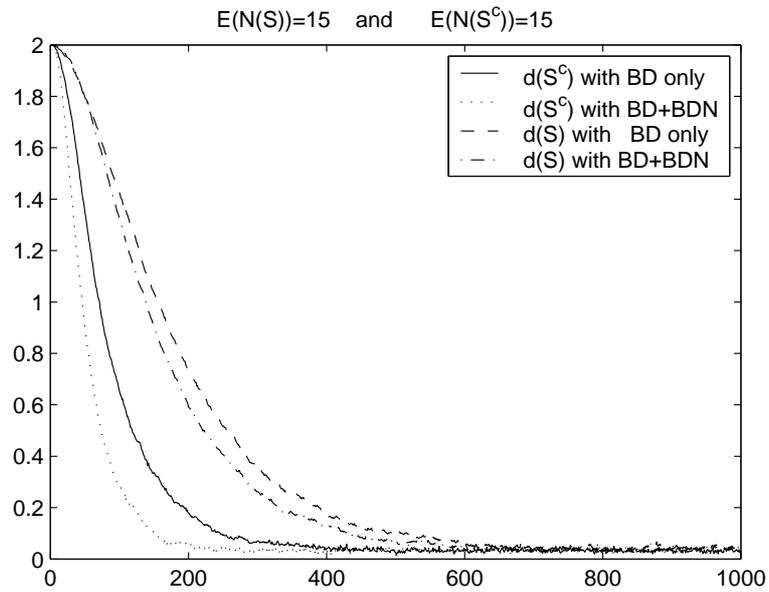


FIG. 5.8: Les distances d_S et d_{S^c} en fonction du temps avec $\rho = 3$ pour $N = 10000$ trajectoires : la première n'utilise que la naissance ou mort usuelle (BD), tandis que la seconde utilise également la naissance ou mort dans un voisinage (BDN.)

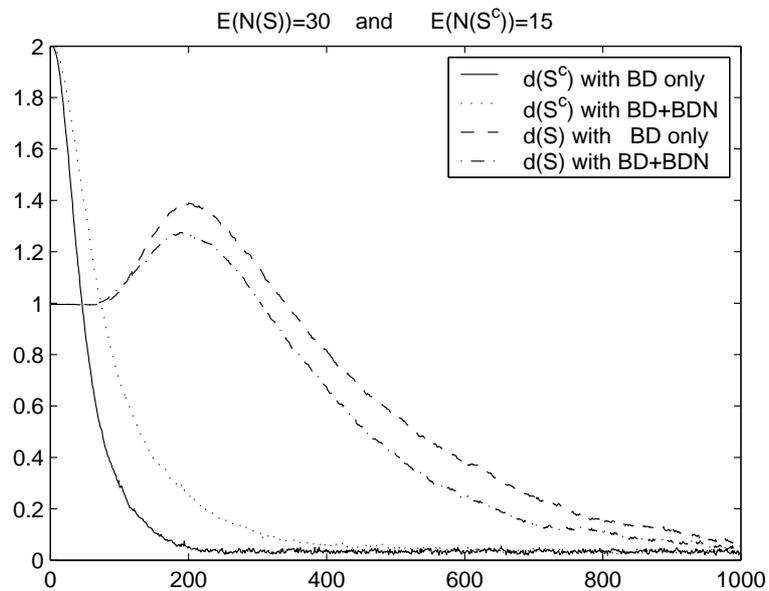


FIG. 5.9: Les distances d_S et d_{S^c} en fonction du temps avec $\rho = 6$ pour $N = 10000$ trajectoires : la première n'utilise que la naissance ou mort usuelle (BD), tandis que la seconde utilise également la naissance ou mort dans un voisinage (BDN.)

En pratique**Cas d'une naissance**

- [1] choisir un objet dans $\{u \in \mathbf{x} \text{ t.q. } \gamma(u) = 1\} = \gamma_1(\mathbf{x})$,
- [2] proposer v dans $\partial(u)$,
- [3] accepter v avec le taux correspondant.

Cas d'une mort

- [1] choisir une paire d'objet $\{u, v\}$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ telle que u ou v appartiennent à $\gamma_1(\mathbf{x})$,
- [2] si $u \in \gamma_1$ et $v \in \gamma_1$ avec une probabilité 0.5 proposer de retirer u ou v , sinon choisir l'élément unique de la paire appartenant à γ_1 .

Il faut d'abord remarquer qu'un tel noyau peut être décrit par une naissance ou une mort dans un voisinage comme décrit dans la partie 5.3, en utilisant :

$$j_b^{\mathbf{x}}(u) = \frac{\mathbf{1}_{\gamma_1}(u)}{\text{card } \gamma_1(\mathbf{x})} \quad (5.29)$$

et

$$j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) = \frac{1}{\text{card } \mathcal{R}(\mathbf{x})} \sum_{u: \{u,v\} \in \mathcal{R}(\mathbf{x})} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\gamma_1}(u) \mathbf{1}_{\gamma_1}(v) + \mathbf{1}_{\gamma_1}(u) (1 - \mathbf{1}_{\gamma_1}(v)) \quad (5.30)$$

Pour garder les propriétés de stabilité, il faut montrer que le membre de gauche de l'équation (5.21) tend toujours vers zéro.

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))} \leq \frac{\text{card } \gamma_1(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x} \cup v)} \frac{\sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_{\gamma_1}(u) [1 - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\gamma_1}(v)] \mathbf{1}(u \in \partial(v))}{\sum_{u \in \mathbf{x}} \mathbf{1}_{\gamma_1}(u) \mathbf{1}(u \in \partial(v))}$$

ce qui, en utilisant le fait que $\text{card } \gamma_1(\mathbf{x}) \leq n(\mathbf{x})$ montre que la condition de drift est toujours valide.

Pour étudier le comportement expérimental d'un tel noyau, en utilisant le cadre d'expériences décrit dans la partie précédente, nous proposons de définir γ comme étant : $\gamma(u) = \mathbf{1}(u \in S_{sub})$. Par conséquent, la naissance ou mort dans un voisinage n'est appliquée qu'à des points de S_{sub} . La figure 5.10 montre le résultat : ce type de transformation améliore la convergence sur S_{sub} mais pénalise celle sur $S \setminus S_{sub}$.

5.6.2 Naissance ou mort dans un voisinage avec une pré-exploration

Comme la naissance ou mort dans un voisinage permet de favoriser l'exploration d'une partie intéressante de l'espace d'état, il peut être utile de combiner la naissance ou mort dans un voisinage et le mécanisme de pré-exploration présenté dans la partie 5.3,

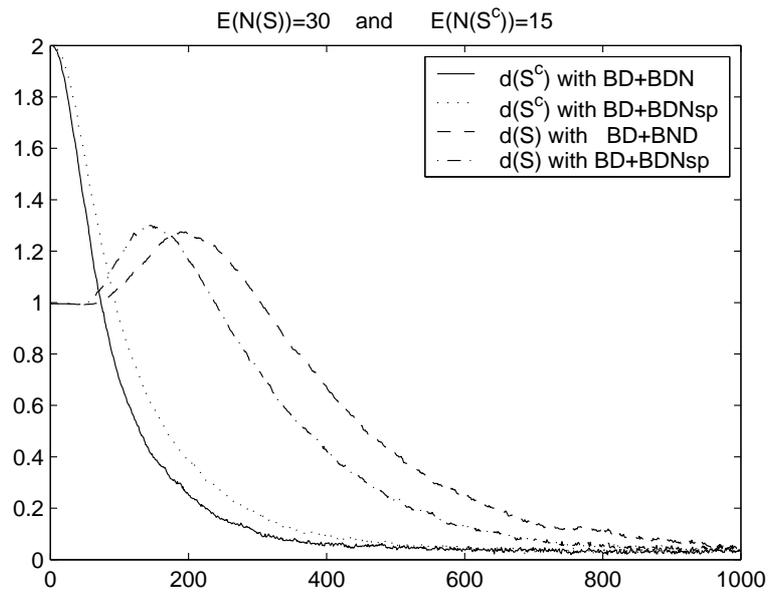


FIG. 5.10: Les distances d_S et d_{S^c} en fonction du temps avec $\rho = 6$ pour $N = 10000$ trajectoires : la première utilise la naissance ou mort usuelle (BD) et la naissance ou mort dans un voisinage (BDN), la seconde utilisant la naissance ou mort usuelle (BD) et la naissance ou mort dans un voisinage non symétrique (BDN_{sp}).

En suivant l'idée du mécanisme décrit, on obtient la procédure d'itération suivante pour la naissance :

En pratique**Ajouter un point**

- [1] partitionner Σ en plusieurs Σ_i définis par les centres z_i ,
- [2] calculer les variations d'énergie induites $U(\mathbf{x} \cup \eta_u(z_i))$,
- [3] choisir l'un des z_i en suivant la loi discrète (p_i) en fonction de ces variations d'énergie,
- [4] générer un z dans la boule sélectionnée $B(z_i)$,
- [5] proposer $v = \eta_u(z)$,
- [6] calculer toutes les paires de points impliquant v : $\{v, w\}$, et pour chacune de ces paires, calculer :
 - le jacobien associé $\Lambda_w(v)$,
 - la probabilité $p_I(w, v)$ de choisir la boule $B(z_i)$ telle que $\eta_w^{-1}(v) \in B(z_i)$,
- [7] mettre ensemble les grandeurs pour calculer le rapport suivant :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v) p_d}{h(\mathbf{x}) p_b} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) f_\nu(v)}{\sum_{u \in \mathbf{x}} j_b^{\mathbf{x}}(u) \frac{p_I(u, v)}{\lambda(B(z_i))} \Lambda_u(v)}$$

(5.31)

Tandis que pour retirer un point on applique la procédure suivante :

En pratique**Retirer un point**

- [1] choisir une paire au hasard $\{u, v\}$ de $\mathcal{R}(\mathbf{x})$, et choisir un des 2 objets avec une probabilité $\frac{1}{2}$,
- [2] une fois que u est choisi, calculer toutes les paires $\{u, v\}$ impliquant u , et pour chacune d'elles calculer
 - le jacobien associé $\Lambda_v(u)$,
 - la probabilité $p_I(v, u)$ de choisir une boule $B(z_i)$ telle que $\eta_v^{-1}(u) \in B(z_i)$,
- [3] mettre ensemble les différentes valeurs pour obtenir le rapport suivant :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus v) = \frac{h(\mathbf{x} \setminus v) p_b}{h(\mathbf{x}) p_d} \frac{\sum_{u \in \mathbf{x} \setminus v} j_b^{\mathbf{x} \setminus v}(u) \frac{p_I(u, v)}{\lambda(B(z_i))} \Lambda_u(v)}{j_d^{\mathbf{x}}(v) f_\nu(v)}$$

(5.32)

Les deux rapports ont été obtenus en remplaçant $f_Z(z)$ par un mélange de loi uniforme sur les lois $B(Z_i)$. Il faut noter que sous la condition 1 (stabilité usuelle) les bornes nécessitées par la condition 3 sont assurées.

Troisième partie

Applications

Introduction

Cette partie présente les modèles que nous avons proposés pour extraire les bâtiments des Modèles Numériques d'Elevation.

Cette partie ne nécessite pas de prérequis particulier.

Le premier chapitre est sans conteste le plus important : il présente un modèle générique de processus ponctuels pour la détection d'objets et une spécification de ce modèle pour extraire les formes rectangulaires dans les MNE fondée sur la détection de discontinuités.

Les deux chapitres suivant présentent deux possibilités d'extension qu'il paraissait important d'explorer. L'un présente un modèle tri dimensionnel de bâtiment, l'autre présente un modèle de processus ponctuel reposant sur des objets différents (rectangles et segments) en interaction.

Le dernier chapitre présente deux heuristiques que nous avons mises en place pour améliorer les performance des algorithmes utilisés.

Partie III

6	Détection des discontinuités	119
6.1	Généralités sur le modèle	121
6.1.1	Processus ponctuels	121
6.1.2	Un processus ponctuel pour modéliser les zones urbaines	123
6.2	Terme d'attache aux données	123
6.2.1	Procédure bas niveau	124
6.2.2	Terme d'attache aux données	126
6.3	Champ interne	128
6.3.1	Un modèle général pour les interactions	128
6.3.2	Interaction d'alignement	130
6.3.3	Interactions de complétion	132
6.3.4	Interactions de pavage	132
6.3.5	Interaction d'exclusion	132
6.3.6	Résultat visuels	133
6.4	Algorithme d'optimisation	133
6.4.1	Généralités (Rappel)	133
6.4.2	Mesure de référence	135
6.4.3	Convergence de l'algorithme	136
6.5	Résultats	137
6.5.1	Paramètres du modèle	137
6.5.2	Paramètres de l'échantillonneur	137
6.5.3	Paramètres de bas niveau	138
6.5.4	Validation de la méthode	138
6.5.5	Premier résultat : données LASER	139
6.5.6	Deuxième résultat : MNE optique	144
6.5.7	Seconde et troisième zones	144
6.6	Conclusion	145
6.7	Quelques calculs	145
6.7.1	Le modèle comme une famille exponentielle	145
6.7.2	Taux de Green	145
6.7.3	Conditions de stabilité et de minoration	147
7	Modèles 3D	149
7.1	Un modèle plus complexe de bâtiment	149
7.2	Un premier modèle	149
7.2.1	Attache aux données	150
7.2.2	Réduction de la taille de l'espace d'état	151
7.2.3	Algorithme	153
7.2.4	Résultats	154
7.3	Un modèle bayésien	155
7.3.1	Attache aux données	155
7.3.2	Estimation de la hauteur du sol	155
7.3.3	Modèle a priori	156
7.3.4	Graines préliminaires et réduction de l'espace d'état	157
7.3.5	Résultats	157
7.4	Commentaires et conclusion	160

8	Approche duale et coopération	161
8.1	Les données	161
8.2	Rectangle et homogénéité	161
8.2.1	Espace objet	161
8.2.2	Masque et grandeurs utilisées	163
8.2.3	Terme d'attache aux données	163
8.3	Segments et discontinuités	164
8.3.1	Espace objet	164
8.3.2	Terme d'attache aux données	164
8.3.3	Grandeurs mesurées	164
8.3.4	Objets attractifs	165
8.4	A priori sur les segments	165
8.4.1	Connexions	165
8.4.2	Terme d'exclusion	168
8.4.3	Exemple de résultat	168
8.5	A priori sur les rectangles	168
8.6	Coopération rectangles-segments	168
8.6.1	Espace objet	168
8.6.2	Interaction entre les deux types d'objets	171
8.7	Algorithme	172
8.7.1	Transformations usuelles	172
8.7.2	Perturbation d'une connexion	172
8.8	Résultats	172
8.8.1	Processus de rectangles	172
8.8.2	Processus de segments	173
8.8.3	Interaction segment-rectangle	173
8.9	Commentaires et conclusion	176
9	Optimisation	179
9.1	Schéma de décroissance	179
9.1.1	Recuit simulé et décroissance logarithmique	179
9.1.2	Décroissance géométrique	180
9.1.3	Décroissances adaptatives dans la littérature	180
9.1.4	Quelques comportements expérimentaux	181
9.1.5	Un nouveau schéma de décroissance adaptatif	185
9.1.6	Explications	189
9.1.7	Résultats et commentaires	189
9.1.8	Conclusion	197
9.2	Ajout d'une mémoire	199
9.2.1	Algorithmes génétiques	199
9.2.2	Intérêt d'une mémoire	199
9.2.3	Structure générale	200
9.2.4	Loi de mise à jour de la mémoire	200
9.2.5	Première mise en oeuvre : une seule transformation	201
9.2.6	Seconde mise en oeuvre : N transformations	201
9.2.7	Temps de calculs	201
9.2.8	Résultats et commentaires	202
9.2.9	Conclusion	204

Chapitre 6

Détection des discontinuités

Nous nous plaçons dans le cadre de détection des bâtiments présenté en introduction. Nos objectifs peuvent être décrits par les points suivants :

- Nous proposons de fusionner les deux premières étapes de focalisation et de détection de primitives. Le but est de construire une méthode automatique qui extrait des formes simples de bâtiment et fournit un résultat sous forme vectorielle.
- Nous proposons également de n'utiliser que les données fournies par un Modèle Numérique d'Élévation. La figure 6.2 présente un tel modèle. Rappelons que le niveau de gris de chaque pixel de l'image décrit l'altitude du point correspondant de la zone. Sur le modèle présenté dans la figure, chaque pixel représente une zone de 20cm par 20cm. La résolution altimétrique est de 10cm. Ce MNE a été fourni par l'IGN.
- Notre but est également d'utiliser des processus ponctuels pour introduire des termes de régularisation modélisant une connaissance a priori de l'agencement spatial des bâtiments dans une ville (interactions attractives).

Dans cette partie, nous n'aborderons pas la reconstruction tridimensionnelle proprement dite.

Ce travail peut être vu comme un extracteur de moyen niveau. Les résultats sont présentés sous forme de collections de primitives rectangulaires. Il faut noter que S. Vinson et L. D. Cohen ont proposé dans [Vinson et Cohen, 2002] et [Vinson *et al.*, 2001] une méthode intéressante pour extraire des rectangles dans les MNE à partir d'une orthoimage et d'une pré-segmentation. Notre travail se focalise sur des zones plus denses et n'utilise pas de carte de pré-segmentation sol-sursol.

Nous commençons par présenter le modèle d'un point de vue générique dans la partie 6.1. Les deux parties suivantes détaillent le modèle utilisé : si la partie 6.2 présente le terme d'attache aux données, la partie 6.3 se focalise sur le modèle d'interaction entre les bâtiments. L'algorithme d'optimisation est brièvement rappelé dans la partie 6.4, tandis que les résultats sont montrés dans la partie 6.5. Après la conclusion (partie 6.6), viennent quelques calculs complémentaires dans la partie 6.7.



FIG. 6.1: Image aérienne d'Amiens (25cm) ©IGN



FIG. 6.2: Modèle Numérique d'Élévation d'une partie d'Amiens©IGN

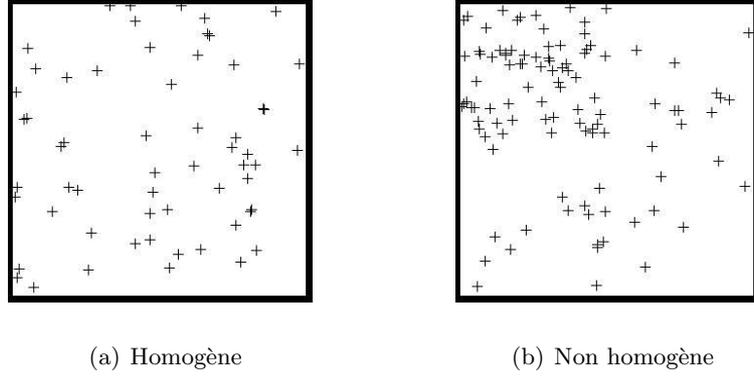


FIG. 6.3: Réalisations de deux Processus de Poisson

6.1 Généralités sur le modèle

6.1.1 Processus ponctuels

Définition

Nous considérons d'abord un processus ponctuel X vivant sur $K = [0, X_{max}] \times [0, Y_{max}]$. X est une application mesurable d'un espace probabilisé abstrait $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ vers l'espace des configurations de points de K :

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \quad x_i \in K$$

Comme K est borné, cette application définit bien un processus ponctuel. Rappelons qu'un tel processus est essentiellement une variable aléatoire dont les réalisations sont des configurations de points.

Processus ponctuel de Poisson

Le processus ponctuel le plus aléatoire (au sens de l'entropie) est le processus ponctuel de Poisson. Soit $\nu(\cdot)$ une mesure positive sur K telle que $\nu(K) < \infty$, et X processus ponctuel de Poisson d'intensité $\nu(\cdot)$. Une réalisation de X peut être obtenue par la procédure suivante :

- [1] Générer $N(K) = n$, le nombre de points en suivant la loi discrète de Poisson :

$$p_n = e^{-\nu(K)} \frac{\nu(K)^n}{n!}$$

- [2] générer $\{x_1, \dots, x_n\}$ par n simulations indépendantes de la loi de densité $(\frac{\nu}{\nu(K)})(\cdot)$ contre la mesure de Lebesgue sur K , que l'on note $|\cdot|$ ou $|\cdot|_K$ ou $\lambda_K(\cdot)$.

Pour un processus ponctuel sur K , la mesure d'intensité donne le nombre moyen de points qui tombent dans un borélien de K : si $N_A(X)$ est le nombre de points de X qui tombent dans $A \subset K$.

$$\mathbb{E}[N_A(X)] = \nu(A)$$

La figure 6.3 montre des réalisations de deux processus ponctuels de Poisson.

Processus ponctuels de Poisson

Un processus ponctuel marqué ajoute des marques (paramètres aléatoires) à chaque point. Soit $S = K \times M$ où $M \subseteq \mathbb{R}^3$ permet par exemple de décrire les rectangles :

$$M =] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [L_{min}, L_{max}] \times [l_{min}, l_{max}]$$

ce qui correspond à la paramétrisation suivante :

$$u = (x(u), y(u), \theta(u), L(u), l(u))$$

Finalement, soit \mathcal{C} l'ensemble de toutes les configurations finies de points de S :

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \forall i \quad x_i \in S \end{cases}$$

Densité d'un processus ponctuel

Si l'on considère la loi $\mu(\cdot)$ d'un processus de Poisson d'intensité non atomique $\nu(\cdot)$, il est possible de définir un nouveau processus ponctuel X en spécifiant sa loi de probabilité au travers d'une densité contre la mesure de référence $\mu(\cdot)$. Soit $h(\cdot)$, une fonction de l'espace des configurations de points \mathcal{C} vers $[0, \infty[$, et un paramètre réel Z tel que :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{Z} h(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 1$$

Par exemple, supposons que :

$$h(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n(\mathbf{x})} \beta(x_i)$$

où $\beta(\cdot)$ est une fonction d'**intensité** définie sur S . Un processus X spécifié par une telle densité est un processus de Poisson d'intensité

$$\nu'(A) = \int_A \beta(u) d\nu(u) \quad (6.1)$$

Cet exemple appartient à la classe plus générale des familles exponentielles. Si l'on suppose que $t(\cdot)$ est une application de \mathcal{C} vers \mathbb{R}^k , il est possible de décrire une famille de densités au travers d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}^k$ et du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$h(\mathbf{x}) = e^{-\langle \theta, t(\mathbf{x}) \rangle}$$

Dans la partie qui suit, nous introduisons une densité telle que les points ne soient pas indépendants mais dont les comportements sont corrélés au moyen d'interactions énergétiques.

Estimateur et MCMC.

Soit un processus X défini par une densité non normalisée $h(\cdot)$ et une mesure d'intensité $\nu(\cdot)$ définissant le processus de référence de loi $\mu(\cdot)$. Il est possible de construire une chaîne de Markov qui converge ergodiquement vers la loi de X .

Une fois qu'un tel échantillonneur est défini, toute valeur de Monte Carlo est calculable. Cela inclut les moments ou les statistiques plus complexes. Un autre moyen d'utiliser l'échantillonneur est de l'inclure dans un cadre de **recuit simulé**. Cet algorithme donne le maximum global de la densité $h(\cdot)$ en un temps infini ([Van Lieshout, 1993]). L'estimateur que l'on obtient est donc :

$$\hat{\mathbf{x}} = \text{Argmax } h(\cdot)$$

6.1.2 Un processus ponctuel pour modéliser les zones urbaines

Silhouettes et troisième dimension

Le premier choix à faire concerne le type d'objets que l'on veut détecter. Ce pourrait être des lignes ou des polygones, mais nous avons choisi les rectangles pour les raisons suivantes. D'abord, les rectangles ont peu de paramètres (5) ce qui permet de limiter la taille de S et donc celle de \mathcal{C} . Ensuite, les tests réalisés avec des lignes ont montrés qu'il était difficile de faire le lien entre les lignes extraites et les bâtiments. Enfin, les plans cadastraux sont présentés comme des collections de polygones dont les formes sont presque rectangulaires.

Il a donc semblé naturel de chercher à détecter les rectangles sur les MNE.

Configurations d'objets, image et énergie

Nous rappelons ici les considérations du chapitre 2 quant au choix du modèle $h(\cdot)$. Nous rappelons qu'un modèle Bayésien ne nous est pas accessible aisément et que nous définissons donc le modèle sous une forme énergétique :

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-U(\mathbf{x})} \quad U(\mathbf{x}) = U_{int}(\mathbf{x}) + \rho U_{ext}(\mathbf{x}) \quad (6.2)$$

où $U_{int}(\mathbf{x})$ représente l'énergie interne dépendant de la structure spatiale de la configuration \mathbf{x} , tandis que $U_{ext}(\mathbf{x})$ est le champ externe quantifiant la qualité d'une configuration par rapport aux données. Un moyen commode de définir une énergie d'attache aux données est de la développer sur les objets :

$$U_{ext}(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} U_d(u) \quad (6.3)$$

$U_d(\cdot)$ est une fonction de S dans \mathbb{R} quantifiant la pertinence d'un objet au vu du MNE. Si $U_d(u) \leq 0$, l'objet u est attractif, puisque l'estimateur choisi est la configuration maximisant la densité $h(\cdot)$. Aussi bien l'énergie d'attache aux données que le champ interne nécessitent un terme d'exclusion pour éviter les accumulations de points. Nous prenons donc un modèle dont la structure est la suivante :

$$U(\mathbf{x}) = \rho \sum_{u \in \mathbf{x}} U_d(u) + U_{int}(\mathbf{x}) + U_{excl}(\mathbf{x}) \quad (6.4)$$

où $U_{excl}(\mathbf{x})$ est telle que :

$$U(\mathbf{x} \cup u \cup u) > U(\mathbf{x} \cup u) \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in S \times \mathcal{C} \quad (6.5)$$

6.2 Terme d'attache aux données

Nous présentons ici le terme $U_d(\cdot)$. Nous définissons ce qu'est un objet attractif et introduisons un potentiel tel qu'une minimisation locale de $u \rightarrow U_d(u)$ donne l'objet attractif le plus proche.

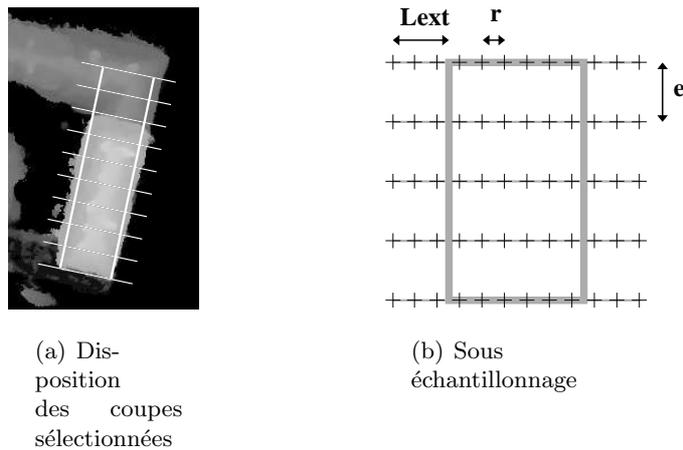


FIG. 6.4: Un MNE, un rectangle et la construction des coupes

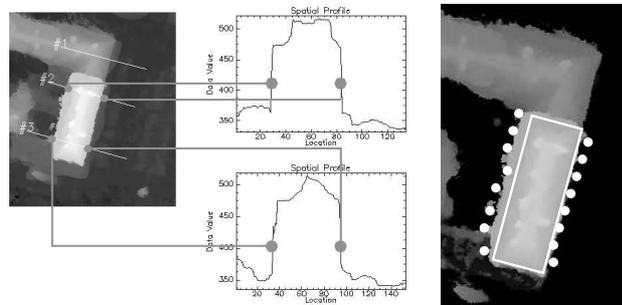


FIG. 6.5: Les coupes, les points d'intérêt et la forme rectangulaire

6.2.1 Procédure bas niveau

Utilisation des coupes

Le but est de détecter des éléments de bâtiments sur des MNE. Le filtre devrait donc utiliser un détecteur local. Dans l'exemple du chapitre 2 nous avons utilisé des hypothèses sur l'homogénéité à l'intérieur d'un rectangle. Les résultats étaient corrects mais peu précis et le modèle s'est montré inefficace sur les structures complexes. Nous proposons d'utiliser ici les coupes du MNE prises orthogonalement à l'axe principal d'un rectangle. La figure 6.4(a) montre une partie de MNE, un rectangle disposé dessus et des coupes régulièrement espacées. La figure 6.5 montre des exemples de profils mesurés, et les points d'intérêt utilisés pour trouver les bâtiments : ce sont les points de forte discontinuité du profil.

Nous proposons donc d'extraire les points d'intérêt de chaque profil et de comparer les points obtenus avec la forme rectangulaire proposée. Pour calculer $U_d(u)$, nous proposons un algorithme de bas niveau qui repose sur les idées suivantes. Pour un rectangle $u \in S$ donné, nous proposons d'extraire d'abord les coupes correspondantes, et de calculer ensuite les points d'intérêt. Cela permet de calculer :

- le test binaire décidant si l'objet est attractif ; il donne le support de la partie négative de $U_d(\cdot)$,
- une fonction de coût correspondant aux valeurs de $U_d(u)$ reflétant la distance entre u et l'objet attractif le plus proche si $U_d(u) > 0$ et entre u et "sa meilleure version" s'il est déjà attractif.

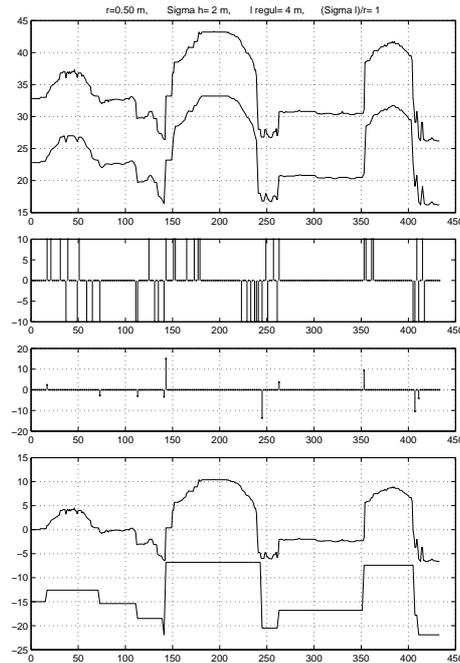


FIG. 6.6: Étapes de l'algorithme de simplification : du haut vers le bas : a) Vrai profil et profil sous échantillonné, b) pentes sélectionnées ($\geq \sigma_l$), c) gradients sélectionnés après accumulation des pentes et d) vrai profil et profil simplifié obtenu. L'exemple provient des données sur Amiens (IGN).

Simplification des profils et points d'intérêt

Nous utilisons trois paramètres qui permettent de définir un masque de points pour un rectangle u : un paramètre e correspondant à la distance entre deux profils successifs, un paramètre r pour la résolution d'échantillonnage le long d'un profil et un paramètre L_{ext} donnant la longueur à explorer dans le voisinage d'un rectangle. La figure 6.4(b) montre le masque de points ainsi obtenus pour extraire les profils du MNE. Pour obtenir les points d'intérêt d'un profil nous appliquons la procédure suivante. D'abord, les pentes supérieures en valeur absolue à un paramètre σ_l/r sont accumulées en utilisant un paramètre de régularisation l_{regul} . Ensuite une ouverture morphologique est appliquée en utilisant le même élément structurant (segment de longueur l_{regul}). Finalement les gradients plus grands qu'un seuil fixé σ_h sont sélectionnés ce qui donne pour chaque profil un ensemble de points d'intérêt. Cette procédure peut être implémentée relativement rapidement : en approximant l'ouverture, seulement deux parcours de chaque profil sont nécessaires. La figure 6.6 montre les différentes étapes de ce traitement de bas niveau. On trouvera en annexe le détail de ce filtre qui repose sur 4 paramètres : r , σ_l , σ_h et l_{regul} lesquels sont tous définis en mètres puisqu'ils ont un sens physique (en pratique, il est apparu qu'ils sont robustes et indépendant de la résolution des données). Par ailleurs, en utilisant une base de données il est possible de les apprendre automatiquement et donc de les réapprendre lorsque l'on change de type de données (par exemple lorsque l'on passe d'un MNE optique à un MNE LASER).

Sélection des points d'intérêt et calcul du potentiel

L'algorithme décrit précédemment donne pour chaque profil d'un rectangle u un ensemble de points d'intérêt détectés. La figure 6.7 présente une hypothèse de rectangle sur un MNE. La figure 6.7(a) montre les gradients détectés après l'étape de simplification. Cela étant fait, pour chaque profil, les deux discontinuités successives les plus proches des cotés du rectangle sont sélectionnées. Si une seule discontinuité a été trouvée (ou aucune) on considère qu'il y en a une fictive (ou deux) à la distance L_{ext} .

Longueur de discontinuité. Cette grandeur correspond au nombre de discontinuités trouvées qui sont suffisamment proches du côté du rectangle correspondant multiplié par le paramètre de résolution e . La figure 6.7(d) illustre cette notion sur un exemple. Les discontinuités sont sélectionnées lorsqu'elles sont situées à une distance inférieure à un paramètre de sensibilité δr de l'un des bords. La longueur de discontinuité $Lg(u)$ est obtenue en multipliant le nombre de discontinuités ainsi sélectionnées par e (distance entre deux profils). Comme il y a deux cotés, on calcule en fait deux valeurs que l'on ordonne : $L_{min} \leq Lg_1(u) \leq Lg_2(u) \leq L_{max}$.

Autres valeurs d'intérêt. Un **taux de volume** $\bar{v}(u)$ est également calculé. Ce taux correspond à la longueur totale des segments gris de la figure 6.7(b) divisé par le nombre de profils multiplié par la largeur du rectangle. En maximisant ce taux de volume, le rectangle évolue pour être bien positionné par rapport à la structure des discontinuités. Ce taux peut être vu comme l'opposé d'un potentiel de translation. Pour guider un rectangle par rotation nous avons également introduit le **taux de moment** $\bar{m}(u)$ qui est en fait la moyenne des carrés des longueurs des segments grisés de la figure 6.7(c).

6.2.2 Terme d'attache aux données

Objets attractifs

Rappelons que les deux fonctions $Lg_1(\cdot)$ et $Lg_2(\cdot)$ représentent les longueurs de discontinuité détectées le long des côtés du rectangle. On s'intéresse d'abord à ce que sont les objets attractifs. Soit $\gamma_0 \subseteq S$ l'ensemble des objets attractifs.

Définition

Objet attractif

Un objet est attractif si les longueurs des discontinuités détectées le long de ses cotés sont suffisamment grandes.

Soient $th_1 \leq th_2$ deux seuils, appartenant à $]0, 1[$, $L(u)$ et $l(u)$ la longueur et la largeur d'un rectangle u . L'ensemble γ_0 des objets attractifs est alors l'ensemble suivant :

$$\gamma_0 = \left\{ u \in S \quad t.q. \quad \begin{array}{l} Lg_1(u) \geq th_1 * L(u) \\ \text{et} \\ Lg_2(u) \geq th_2 * L(u) \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Fonction de coût

On associe à γ_0 l'énergie $J_0 : S \rightarrow [0, -1]$ suivante :

$$\begin{aligned} J_0 : \quad u \in \gamma_0 &\rightarrow -\left(\frac{1}{4} \frac{Lg_1(u)+Lg_2(u)}{L_{max}} + \frac{1}{2} \frac{l(u)}{l_{max}}\right) \\ u \notin \gamma_0 &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nous verrons plus loin que l'énergie d'attache que nous avons choisie s'écrit à peu près : $U_d(u) \approx J_0(u)$. Lorsque l'on minimise l'énergie, on maximise donc la longueur des gradients détectés et le périmètre du rectangle. Sur la configuration totale, on maximise donc la longueur totale de discontinuités détectées puisque : $U_d(\mathbf{x}) = \sum U_d(u)$.

Cependant, le rapport entre la taille de l'ensemble d'intérêt $|\gamma_0|$ et l'ensemble des objets possibles $|S|$ est très petit. Nous proposons donc d'ajouter d'autres niveaux d'énergie pour ordonner les objets qui ne sont pas attractifs et faciliter l'optimisation.

Partition de S

Introduisons les deux seuils arbitraires v_{min} et m_{max} , et considérons les trois ensembles suivant :

$$\gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} u \notin \gamma_0 \\ u \in S : \quad \bar{v}(u) \geq v_{min} \\ \quad \quad \bar{m}(u) \leq m_{max} \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

$$\gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} u \notin \gamma_1 \cup \gamma_0 \\ u \in S : \quad \bar{v}(u) \geq v_{min} \text{ ou } \bar{m}(u) \leq m_{max} \end{array} \right\} \quad (6.9)$$

$$\gamma_3 = \{u \in S : u \notin \gamma_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_0\} \quad (6.10)$$

Les quatre ensembles γ_i définissent une partition de S . Le tableau 6.1 présente les tailles relatives de ces différents ensembles dans un cas pratique. L'algorithme d'optimisation est fondé sur une exploration stochastique de l'espace d'état. En particulier, les nouveaux rectangles peuvent être générés par une loi uniforme sur S . La probabilité de toucher γ_0 , qui est l'ensemble des rectangles intéressants est donc très faible. Nous verrons plus loin que nous proposons de rééquilibrer les poids de ces différents ensembles pour améliorer le comportement de l'algorithme d'optimisation.

Terme d'attache final

A chacun de ces ensembles γ_i , nous associons une énergie $J_i(\cdot)$ telle que $J_i(u) \in]0, 1]$ si $u \in \gamma_i$ et $J_i(u) = 0$ sinon. On trouvera le détail de ces fonctions en annexe.

Le terme d'attache choisi s'écrit :

$$\begin{aligned} U_d(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} & J_0(u) + 0.001(\mathbf{1}_{\gamma_1}(u) + J_1(u)) \\ & + 0.01(\mathbf{1}_{\gamma_2}(u) + J_2(u)) + 0.1(\mathbf{1}_{\gamma_3}(u) + J_3(u)) \end{aligned}$$

Les points importants à souligner sont les suivants.

TAB. 6.1: Partition de S en 4 ensembles γ_i . Les tailles relatives ont été obtenue par une simulation MCMC.

i	$\frac{ \gamma_i }{S}$
0	0.015 %
1	0.177%
2	2.950%
3	96.858%

- Un objet est attractif ($U_d(u) \leq 0$) si et seulement si il appartient à γ_0 ,
- L'énergie d'attache décroît avec la qualité de l'objet : On a ainsi $U_d(u_3) \geq 0.1 > U_d(u_2) \geq 0.01 > U_d(u_1) \geq 0.001 \geq 0 > U_d(u_0) \geq -1$, si u_3, \dots, u_0 appartiennent respectivement à $\gamma_3, \dots, \gamma_0$.

Lorsque l'on applique le recuit simulé, les objets répulsifs (ceux appartenant à $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$) sont progressivement éliminés.

6.3 Champ interne

Le modèle à priori peut être vu comme un terme régularisant. Dans notre contexte, le modèle a priori est essentiellement composé d'interactions entre les objets. Cela se réduit à la définition de termes d'énergie du second ordre $U(u, v)$ où u et v sont des objets différents. Le but est de favoriser certaines interactions et d'en pénaliser d'autres.

6.3.1 Un modèle général pour les interactions

Définitions

Pour une relation \sim (non nécessairement symétrique) sur S , définissons $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ comme l'ensemble des paires de points interagissant dans \mathbf{x} :

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \{\{u, v\} : u \in \mathbf{x}, v \in \mathbf{x}, u \neq v, u \sim v\}$$

Soit $\mathcal{N}(\mathbf{x}, u)$ le voisinage d'un point u dans \mathbf{x} défini comme l'ensemble des points de \mathbf{x} en relation avec u :

$$u \in \mathbf{x} \quad \mathcal{N}(u, \mathbf{x}) = \{v \in \mathbf{x} : u \sim v, u \neq v\}$$

On définit la fonction V comme l'indicatrice suivante :

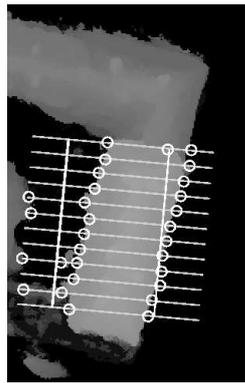
$$V(\mathbf{x}, u) = \mathbf{1}(\mathcal{N}(u, \mathbf{x}) \neq \emptyset)$$

$V(\mathbf{x}, u)$ est nulle si et seulement si u n'a aucun voisin dans \mathbf{x} . Cette fonction fait partie du modèle, avec pour but de favoriser ou de pénaliser la présence d'une interaction. Il peut être intéressant d'introduire un terme qualitatif dans le but de favoriser les "bonnes" interactions par rapport aux mauvaises.

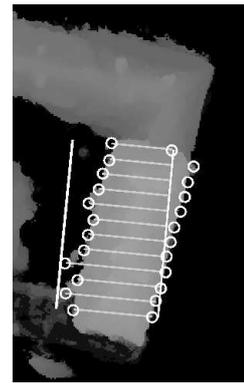
On se donne une fonction $\Psi(\cdot, \cdot)$, définie de $S \times S$ vers $[-1, 1]$ quantifiant la qualité d'une paire d'objets interagissant (un exemple est donné dans la partie 6.3.2) :

$$\Psi : S \times S \rightarrow [-1, 1]$$

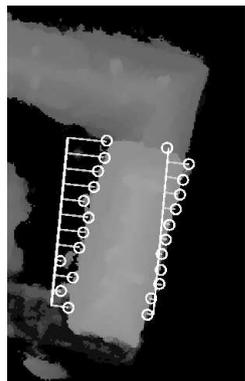
$$(u, v) \rightarrow \begin{cases} \Psi(u, v) & \text{si } u \sim v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.11)$$



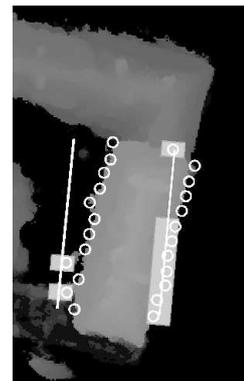
(a) **Détection** : Discontinuités sélectionnées par la procédure de simplification.



(b) **Taux de volume** : Les lignes grises représentent les segments utilisés pour calculer le taux de volume.



(c) **Taux de moment** : Les lignes grises représentent les segments utilisés pour calculer le taux de moment.



(d) **Localisation** : Une discontinuité est entourée si elle est suffisamment proche du rectangle correspondant.

FIG. 6.7: *Un MNE, une hypothèse de rectangle et les différentes valeurs utilisées pour mesurer sa pertinence.*

Un objet donné peut être impliqué dans plusieurs interactions. La première idée est donc de sommer Ψ sur toutes les interactions. Cependant cette solution pose un problème puisque le nombre d'interactions peut, au pire, avoir un comportement quadratique avec le nombre d'objets alors que le terme d'attache aux données est linéaire en fonction du nombre d'objets. Nous proposons donc de

prendre le maximum $W(\mathbf{x}, u)$ suivant :

$$W(\mathbf{x}, u) = \begin{cases} \max_{v \in \mathcal{N}(\mathbf{x}, v)} \Psi(u, v) & \text{si } \mathcal{N}(\mathbf{x}, u) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$W(u, \mathbf{x})$ est la qualité de la meilleure interaction parmi celles impliquant u . Il faut noter que dans le cas d'une interaction répulsive, il conviendrait de considérer la pire (celle qui minimise Ψ).

Énergies locales

Il est possible de définir une énergie qui soit la somme d'énergies locales décrivant l'état de chaque objet u par rapport aux différentes relations. Nous définissons l'énergie locale d'un objet $u \in \mathbf{x}$ relativement à une relation \sim ainsi :

$$u \in \mathbf{x} \quad U_{loc}^{\sim}(\mathbf{x}, u) = -(aV(\mathbf{x}, u) + bW(\mathbf{x}, u)) \quad (6.12)$$

où a et b sont deux paramètres réels. La partie de l'énergie d'une configuration provenant de la relation \sim est obtenue en sommant sur les objets :

$$U^{\sim}(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} U_{loc}^{\sim}(\mathbf{x}, u)$$

Notons que certains termes de la somme autres que $U_{loc}(\mathbf{x}, u)$ dépendent de u .

Généralisations

Lorsque l'on utilise plusieurs interactions \sim^1, \dots, \sim^k , le modèle décrit précédemment devient :

$$\begin{aligned} U_{int}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^k U^i(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{x}} \sum_{i=1}^k U_{loc}^i(\mathbf{x}, u) \\ &= - \sum_{u \in \mathbf{x}} \sum_{i=1}^k [a^i V^i(\mathbf{x}, u) + b^i W^i(\mathbf{x}, u)] \end{aligned}$$

Exprimée de cette manière, il est facile de vérifier que l'énergie globale de la configuration évolue linéairement avec le nombre d'objets dans la configuration. Les problèmes combinatoires disparaissent donc et il est possible de pondérer les différents termes. Le point le plus important est l'invariance par changement d'échelle : les poids a^i, b^i ne dépendent pas de la taille de la scène considérée si l'on considère que le nombre d'objets à détecter dépend linéairement de la surface de la zone.

6.3.2 Interaction d'alignement

Dans une ville, les bâtiments sont usuellement alignés. Nous introduisons donc un terme d'interaction qui favorise de tels alignements. Comme le terme d'attache aux données détecte des discontinuités qui peuvent être vues comme des murs,

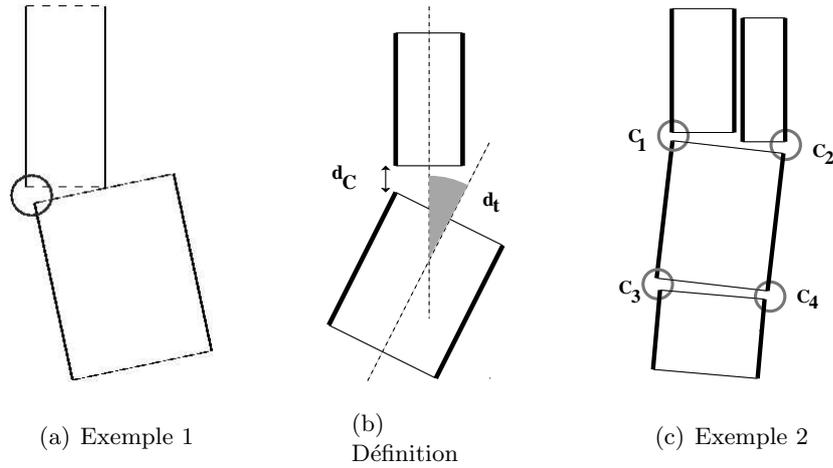


FIG. 6.8: *Interaction d'alignement.* a) *exemple d'un alignement simple,* b) *valeurs nécessaires à la définition de la notion d'alignement,* et c) *exemple d'un rectangle interagissant avec trois autres par les 4 relations d'alignement possibles.*

nous prenons en compte le type d'alignement présenté par la figure 6.8. La figure 6.8(a) montre un exemple d'alignement, tandis que la figure 6.8(b) explicite les grandeurs utilisées pour définir un alignement. Si l'on note $d_{C1}(u, v)$ la distance entre les coins appropriés de u et de v , $d_t(u, v)$ la différence d'angle entre les deux rectangles (modulo π), le premier type d'alignement est défini par les trois conditions suivantes :

$$u \sim^{al_1} v \iff \begin{cases} d_{C1}(u, v) \leq d_{Cmax} \\ d_t(u, v) \leq d_{tmax} \\ (u, v) \in \gamma_0^2 \end{cases} \quad (6.13)$$

Comme un rectangle possède 4 coins, nous définissons en fait 4 relations notées de \sim_{al}^1 à \sim_{al}^4 . Ces relations ne sont ni symétriques ni réflexives. Par contre si $u \sim_{al}^i v$ alors il existe j tel que $v \sim_{al}^j u$. Par ailleurs, un objet peut être aligné avec un autre par deux coins, auquel cas nous considérons que deux interactions différentes agissent sur ces deux rectangles. La figure 6.8(c) montre un exemple de rectangle qui est relié à trois autres par les 4 relations.

En réalité nous ne considérons que les interactions entre les rectangles qui sont tous deux dans γ_0 . Pour finir, il reste à définir la fonction de récompense Ψ . Pour cela, on utilise la fonction suivante ϖ :

$$\begin{aligned} \varpi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow [0, 1] \\ (x, x_{max}) &\rightarrow \frac{1}{x_{max}^2} \left(\frac{1 + x_{max}^2}{1 + x^2} - 1 \right), \quad |x| \leq x_{max} \end{aligned}$$

ϖ a été construite pour que $\varpi(0, x_{max}) = 1$ et $\varpi(x_{max}, x_{max}) = 0$. Nous prenons alors comme fonction de récompense :

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \varpi(d_t(u, v), d_{tmax}) + \frac{1}{2} \varpi(d_{C1}(u, v), d_{Cmax})$$

Cette fonction est importante, puisque le but n'est pas seulement de favoriser la présence d'alignements, mais également de favoriser ceux de bonne qualité.

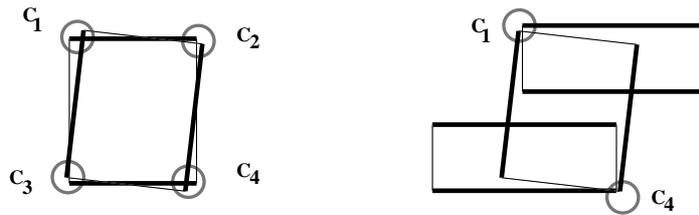


FIG. 6.9: *Illustrations des relations de complétion. À gauche, un rectangle interagit avec un autre par les quatre relations de complétion. À droite, un rectangle interagit avec deux autres par deux des relations de complétion.*

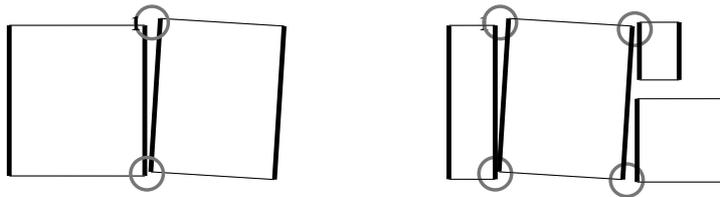


FIG. 6.10: *Illustration des relations de pavage*

6.3.3 Interactions de complétion

Les bâtiments rectangulaires sont composés de 4 murs. Comme le terme d'attache aux données détecte les discontinuités suivant deux des quatre murs, il est utile d'ajouter une interaction qui favorise la détection dans des directions orthogonales. Nous utilisons le même type de conditions que celles présentées par l'équation (6.13) : les deux objets doivent tous deux appartenir à γ_0 , la distance entre les deux coins d'intérêt doit être plus petite que $d_{C_{max}}$, et la différence entre les angles proche de $\pi/2$ (avec une tolérance $d_{t_{max}}$). Une fois encore, cela définit en fait quatre relations différentes de \sim_{comp}^5 à \sim_{comp}^8 , chacune d'entre elle correspondant à l'un des quatre coins. La figure 6.9 présente des exemples de rectangles en interaction.

6.3.4 Interactions de pavage

Le dernier type d'interactions agit sur des configurations parallèles de rectangles situés côte à côte comme illustré par la figure 6.10. Cette interaction est essentiellement introduite pour obtenir des configurations de bâtiments juxtaposés. La définition de ces relations est similaires aux précédentes. La fonction de récompense Ψ est également ressemblante aux précédentes. On définit ainsi les interactions de \sim_{pav}^9 à \sim_{pav}^{12} .

6.3.5 Interaction d'exclusion

Un terme d'exclusion est nécessaire pour éviter la présence d'objets redondants. D'une part on veut éviter les explications redondantes des données, d'autre part il faut assurer que les interactions attractives ne provoquent pas d'accumulation de rectangles. Il faut également assurer la condition de stabilité (voir le chapitre précédant : la variation d'énergie induite par l'ajout d'un point à une configuration doit être bornée).

Définition

La relation d'exclusion la plus simple que l'on peut utiliser est la relation d'intersection suivante qui agit uniquement sur des rectangles parallèles :

$$u \sim^{excl} v \text{ ssi } \begin{cases} d_t(u, v) \leq d_{tmax_{excl}} \\ Surf(u) \cap Surf(v) \neq \emptyset \end{cases} \quad (6.14)$$

Cette relation a la propriété suivante par rapport aux relations attractives définies précédemment :

Propriété**Relation d'exclusion**

Il existe un nombre fini N_{over} tel que si un objet u a N_{over} voisins (sous l'une des 12 interactions attractives \sim^i), il est impossible d'ajouter un nouveau voisin qui n'intersecte pas les premiers.

Cette propriété est vérifiée car le nombre de rectangles plus grand que $l_{min} * L_{min}$ est limité comme l'image est bornée.

Énergie associée

Nous utilisons un modèle simple, homogène à celui utilisé pour les interactions attractives présenté dans la partie 6.3.1 :

$$U_{excl}(\mathbf{x}) = -a^{excl} \sum_{u \in \mathbf{x}} V_{excl}(\mathbf{x}, u) \quad a^{excl} < 0$$

a^{excl} est pris suffisamment petit pour qu'il soit impossible d'avoir des objets redondants. Nous présentons plus loin comment choisir ce terme.

6.3.6 Résultat visuels

Nous présentons sur la figure 6.11 deux résultats. Le premier (6.11(a)) est la réalisation d'un processus ponctuel dont la densité est définie par $(U_{int}(\cdot) + U_{excl}(\cdot))/T$ à une température moyenne. Le second, (figure 6.11(b)) est une configuration minimisant $U_{int}(\cdot) + U_{excl}(\cdot)$ obtenue par recuit simulé. Ces résultats montrent de quelle manière le champ interne contraint le positionnement des objets.

6.4 Algorithme d'optimisation

Nous présentons ici l'algorithme utilisé pour optimiser l'énergie définie dans l'équation (6.4). Une présentation générale et les preuves de convergence ont été données dans le chapitre 5. On notera toutefois l'utilisation d'une mesure de référence non homogène.

6.4.1 Généralités (Rappel)

Nous avons défini un processus ponctuel X par son énergie $U(\cdot)$. Par la relation de Gibbs cette énergie définit une densité $h(\cdot)$ connue à une constante de normalisation près. Cette densité et la loi $\mu(\cdot)$ du processus de Poisson de référence

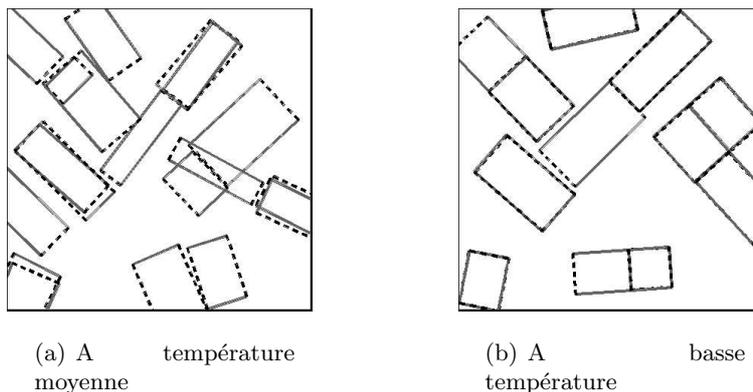


FIG. 6.11: Illustration de l'influence du champ interne. Les pointillés représentent les cotés pour lesquels la présence de discontinuités n'est pas testée.

définissent la loi $\pi(\cdot)$ de X . Pour échantillonner $\pi(\cdot)$, nous construisons une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ sur \mathcal{C} , l'espace des configurations finies de rectangles en utilisant une configuration initiale (par exemple, vide : $X_0 = \{\emptyset\}$) et un noyau de transition Markovien $K(\mathbf{x}, \cdot)$ décrivant la loi de $X_{t+1} | X_t = \mathbf{x}$. Bien entendu, ce noyau $K(\cdot, \cdot)$ est conçu de façon que la chaîne de Markov converge ergodiquement vers la loi désirée. Cette convergence ergodique signifie que les éléments finaux d'une trajectoire sont distribués d'après $\pi(\cdot)$.

$$\|K^n(\{\emptyset\}, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \rightarrow 0$$

La chaîne de Markov générée par l'algorithme utilisé vérifie cette propriété. Nous avons montré en fait des résultats plus précis puisque nous savons que nous pouvons partir de n'importe quelle configuration et que la variation totale tend vers 0 suivant une loi géométrique.

MCMC pour les processus ponctuels

L'échantillonneur que nous utilisons provient des travaux de Geyer et Møller ([Geyer et Møller, 1994]) ainsi que de ceux de Green ([Green, 1995]) sur les échantillonneurs de Metropolis Hastings sur des espaces d'états généraux. Cette technique utilise des noyaux de proposition $Q_m(\mathbf{x}, \cdot)$ qui génèrent une nouvelle configuration \mathbf{y} à partir d'une ancienne \mathbf{x} , ainsi qu'un taux d'acceptation $\alpha_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ qui donne la probabilité d'accepter que \mathbf{y} remplace \mathbf{x} . Si l'on note $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{n(\mathbf{x})}\}$ la configuration courante des points, les trois types de noyau de proposition considérés se résument ainsi.

Naissance ou mort. Avec une probabilité p_b la transformation ajoute un point u à \mathbf{x} et propose $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$ où le nouveau rectangle u est généré suivant la loi uniforme $|\cdot|/|S|$. Avec une probabilité $p_d = 1 - p_b$, c'est la mort qui est appliquée à \mathbf{x} , et $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u$, où u est choisi uniformément dans \mathbf{x} .

Transformations simples. De telles transformations perturbent aléatoirement un point u de la configuration pour en obtenir une nouvelle version v et proposent $\mathbf{y} = \mathbf{x} \setminus u \cup v$. Parmi ces transformations on trouve la rotation, la dilatation, la translation ainsi que les transformations avec pré-exploration (voir le chapitre précédent).

Naissance ou mort dans un voisinage. L'idée de cette transformation est de créer ou de supprimer une paire de points en interaction en ajoutant ou supprimant un point dans le voisinage d'un autre. Rappelons qu'à chacun des noyaux utilisés est associée une fonction $R_m(\cdot, \cdot)$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $(0, \infty)$. La valeur $R_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est appelée rapport de Green. L'algorithme se décompose alors ainsi : pour un état $X_t = \mathbf{x}$, on choisit un des noyaux $Q_m(\cdot, \cdot)$ avec une probabilité $p_m(\mathbf{x})$, on échantillonne $\mathbf{y} \sim Q_m(\mathbf{x}, \cdot)$, on calcule le rapport de Green $R_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et le taux d'acceptation $\alpha_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min(R_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}), 1)$, pour enfin accepter la proposition $X_{t+1} = \mathbf{y}$ avec une probabilité $\alpha_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Recuit simulé

Notre but est de trouver la configuration minimisant l'énergie $U(\cdot)$. Pour faire cela, on utilise un recuit simulé. Au lieu de simuler $h(\cdot)$, on simule suivant $h^{\frac{1}{T_t}}(\cdot)$. T_t est un paramètre de température qui tend vers zéro quand t va vers l'infini. Ces techniques ont été largement utilisées en traitement de l'image. On se référera à [Winkler, 2003] pour avoir une étude générale de ce domaine. Si $(T_t)_{t \geq 0}$ décroît suffisamment lentement, c'est à dire en suivant une loi logarithmique, alors $(X_t)_{t \geq 0}$ se concentre à l'infini sur l'ensemble des maxima globaux de $h(\cdot)$. Il est bien sûr impossible d'utiliser un schéma de décroissance suffisamment lent en pratique. Il est courant d'utiliser un schéma géométrique. Pour obtenir un résultat correct, il est donc nécessaire de construire une chaîne suffisamment mélangée, ce qui nécessite d'introduire des noyaux de perturbation pertinents.

6.4.2 Mesure de référence

Commentaires

Pour des raisons pratiques, l'intensité $\nu(\cdot)$ de la mesure de référence $\mu(\cdot)$ utilisée est en général uniforme. Si l'on prend

$$\nu(\cdot) = |\cdot|_K \times \frac{|\cdot|_M}{|M|} \quad (6.15)$$

on obtient un processus de Poisson homogène qui met en moyenne $|K|$ objets dans S . La configuration maximisant $h(\mathbf{x})$ ne dépend pas de la mesure de référence choisie. L'avantage d'utiliser une mesure de référence simple est que cela simplifie la génération d'un point. Par exemple, si l'on utilise (6.15) l'étape de naissance utilise une génération uniforme sur S .

Toutefois dans notre cadre de travail, les points d'intérêt sont ceux de γ_0 . Or cet ensemble est de taille très petite, comme mentionné dans le tableau 6.1. Il est toutefois possible de favoriser cet ensemble γ_0 et de garder la génération uniforme, en ajoutant un "terme de correction de mesure" dans l'énergie :

$$h(\cdot) \propto \exp \left(\sum_{u \in \mathbf{x}} \log(\beta(u)) - \frac{U_{int}(\mathbf{x}) + U_{excl}(\mathbf{x}) + \rho U_{ext}(\mathbf{x})}{T} \right) \quad (6.16)$$

Ajouter ce terme (somme des fonctions β) est équivalent à changer la mesure d'intensité excepté que cela permet de garder la génération uniforme. On note $\nu'(\cdot)$ la mesure d'intensité correspondant à l'équation (6.1).

Utilité de la partition

Comme détaillé dans la partie 6.2.2, nous avons défini une partition de S : $S = \gamma_0 \cup \dots \cup \gamma_3$, où les tailles de γ_i sur un exemple sont décrites par le tableau 6.1. Nous proposons d'utiliser la fonction β de correction donnée ci-dessous :

$$\beta(u) = \prod_{i=0}^{i=3} \beta_i^{1_{\gamma_i}(u)} \quad (6.17)$$

ce qui, pour un processus de Poisson, donne :

$$E_i = \mathbb{E}[N_{\gamma_i}(X)] = \nu'(\gamma_i) = \beta_i \nu(\gamma_i) = \beta_i |K| \frac{|\gamma_i|}{|S|} \quad (6.18)$$

On peut régler les poids de telle façon que les E_i soient du même ordre. Un autre avantage de cette paramétrisation est qu'elle est indépendante de l'aire observée $|K|$. En utilisant une estimation MCMC, nous proposons d'abord de calculer les valeurs $|\gamma_i|/|S|$ donnée par la table 6.1, et d'en déduire ensuite les valeurs des β_i telles que

$$E_i \approx |K|$$

où $|K|$ correspond à l'aire en mètres carrés de la zone urbaine considérée.

6.4.3 Convergence de l'algorithme

Nous vérifions ici que les conditions obtenues dans le chapitre 5 pour assurer la convergence de l'échantillonneur sont vérifiées.

Condition de stabilité

On a besoin d'une borne réelle R_g telle que :

$$\forall(\mathbf{x}, u) \in \mathcal{C} \times S \quad h(\mathbf{x} \cup u) \leq R_g h(\mathbf{x}) \quad (6.19)$$

Il faut donc que la variation d'énergie provoquée par l'ajout d'un point soit bornée. Cette condition est vérifiée quand la condition suivante sur le champ interne est elle-même vérifiée :

$$a_{excl} < - \sum_{i=1}^{i=12} (a^i + b^i) \quad (6.20)$$

En réalité, pour obtenir la condition assurant l'existence d'un minimum (c.f. 6.5), il faut une condition plus forte :

$$a_{excl} < - \sum_{i=1}^{i=12} (a^i + b^i) - \sqrt{2} \|\theta_{ext}\| \quad (6.21)$$

Conditions de stabilité sur l'échantillonneur

On a vu, dans le chapitre précédent que l'on obtient la convergence de l'algorithme d'échantillonnage en assurant, entre autres, les conditions suivantes :

a) pour chacun des noyaux de perturbation, la probabilité de le choisir $p_m(\mathbf{x})$ ne dépend pas de l'état courant $X_t = \mathbf{x}$ et la probabilité de ne rien faire est strictement positive,

b) les densités des lois utilisées par les naissances ou mort sont bornées,

c) et il ne manque alors plus que la condition assurant la convergence de l'échantillonneur lorsque l'on utilise la naissance morte dans un voisinage. Dans le cadre de travail présenté ici, les relations de voisinage (interactions) ne sont pas réflexives. Pour obtenir la condition de drift, il est alors facile d'assurer que le nombre d'objets est borné. Une autre solution consiste à utiliser une relation différente de celle du modèle qui soit symétrique et réflexive.

Propriétés de convergence

Comme les conditions suffisantes sont vérifiées, on obtient la convergence de l'échantillonneur à température fixée (ergodicité géométrique et récurrence au sens de Harris). Il reste alors à montrer la propriété de convergence du recuit simulé : faire décroître la température avec une vitesse logarithmique permet d'assurer que l'on obtient presque sûrement un des maximiseurs globaux de $h(\cdot)$. On trouvera dans [Van Lieshout, 1993] une preuve utilisant une condition de Dobrushin et un algorithme d'échantillonnage légèrement différent de celui utilisé dans ce travail.

6.5 Résultats

Nous présentons ici quelques résultats obtenus sur des données optiques et LASER. Nous insistons d'abord sur les différents paramètres utilisés, puis nous présentons une validation des résultats.

6.5.1 Paramètres du modèle

Les paramètres ont été réglés à la main. Il doit toutefois être possible, en utilisant l'expression du modèle sous forme de famille exponentielle donnée dans la partie 6.7.1 d'introduire une procédure d'estimation automatique. Comme nous l'avons déjà mentionné, les poids β_i associés à la mesure de référence sont estimés en utilisant une procédure MCMC. Le tableau 6.2 présente les paramètres utilisés qui ne dépendent ni du type de données utilisés, ni de la taille de l'image.

Définition du champ interne Les relations d'alignement, de pavage et de complétion requièrent deux paramètres physiques : la différence d'angle maximale et la distance maximale entre les deux coins des deux rectangles.

Définition des γ_i (attache aux données). Le terme d'attache repose sur des seuils. Les deux seuils les plus importants sont les seuils qui définissent γ_0 , c'est-à-dire th_1 et th_2 .

Paramètres du modèle : champ interne. Les paramètres du modèle a^i , b^i et a_{excl} ont été choisis de telle sorte que la condition (6.20) soit vérifiée. Le modèle a priori a montré sa robustesse en pratique. Seuls les poids relatifs entre les champs interne et externe nécessitent un réglage, dépendant de la force de la régularisation désirée. Nous avons pris ici $\rho = 1$ (référence).

6.5.2 Paramètres de l'échantillonneur

Il y a essentiellement deux types de paramètres : les paramètres de mélange (p_m) et la taille de l'espace utilisé pour générer de nouvelles composantes. Pour

TAB. 6.2: Paramètres robustes du modèle

Espace des marques	
l_{min}	4m
l_{max}	40m
L_{min}	6m
L_{max}	40m

Relations attractives	
d_{tmax}	20°
d_{Cmax}	4m

Intersection	
d_{tmax}	60°

Longueurs minimales de discontinuité détectées	
$th1$	80%
$th2$	40%

Définition de $\gamma_1, \dots, \gamma_3$	
v_{min}	90%
m_{max}	0.02

Alignements	
a^{al}	0.04
b^{al}	0.1

Relations de complétion	
a^{comp}	0.04
b^{comp}	0.1

Relations de pavage	
a^{pav}	0
b^{pav}	0.5

Relation d'exclusion	
a^{excl}	-3

les naissances ou mort, nous avons pris des probabilités égales : $p_d = p_b = 0.5$. Le tableau 6.3 présente les paramètres de mélange adoptés.

6.5.3 Paramètres de bas niveau

Cas des données LASER. Nous présentons d'abord un résultat obtenu sur des données LASER. Le principal problème rencontré est dû à l'imprécision des données. Elles ont en effet été obtenues par un vol au dessus d'Amiens. Cela donne un ensemble de points tridimensionnels qui ne sont pas équidistants. Pour obtenir l'image présentée ici, il y a donc eu une interpolation au moyen d'un noyau gaussien. Les paramètres bas niveau utilisés (tableau 6.4) ont été réglés de manière à se comporter correctement vis à vis des discontinuités peu franches.

Données optiques. Le MNE optique fourni par l'IGN est plus précis (discontinuités plus abrupte) mais aussi plus bruité que le MNE LASER. C'est pour cela que le seuil de pente à accumuler σ_l est plus haut et que le terme de régularisation l_{regul} est plus grand que dans le cas des données LASER, ainsi que le présente le tableau 6.4.

6.5.4 Validation de la méthode

Nous avons rencontrés des problèmes délicats pour valider la méthode. La vérité terrain est en effet très précise (obtenue par une méthode semi-automatique sur des images aériennes très résolues). Les MNE contiennent souvent des erreurs délicates à éliminer. Enfin, il est difficile de comparer deux données vectorielles.

TAB. 6.3: Paramètres de l'échantillonneur

Naissance ou mort		Naissance ou mort liées à \sim_{comp}	
p_{BD}	1/20	$p_{BDN_{comp}}$	1/20
Naissance ou mort liées à \sim^{al}		Transformations simples	
$p_{BDN_{at}}$	5/20	p_T	3/20
Naissance ou mort liées à \sim^{pav}		p_R	3/20
$p_{BDN_{pav}}$	1/20	p_{DL}	3/20
		p_{DI}	3/20

TAB. 6.4: Paramètres bas niveau utilisés pour les données LASER et optiques.

Grille de points		Filtre LASER		Filtre optique	
r	0.5m	l_{regul}	2m	l_{regul}	4m
e	1m	σ_l	0.7*r	σ_l	1*r
l_{ext}	10m	σ_h	1.5m	σ_h	2m
		δ_r	2m	δ_r	2.5m

La distance de Hausdorff. Pour un résultat donné (c'est à dire une configuration de rectangle \mathbf{x}), il est possible de calculer la surface moyennée de bâtiments manqués et la surface moyenne de bâtiment sur-détectés par rapport à la vérité terrain. Cela correspond aux deux parties de la distance de Hausdorff entre deux ensembles.

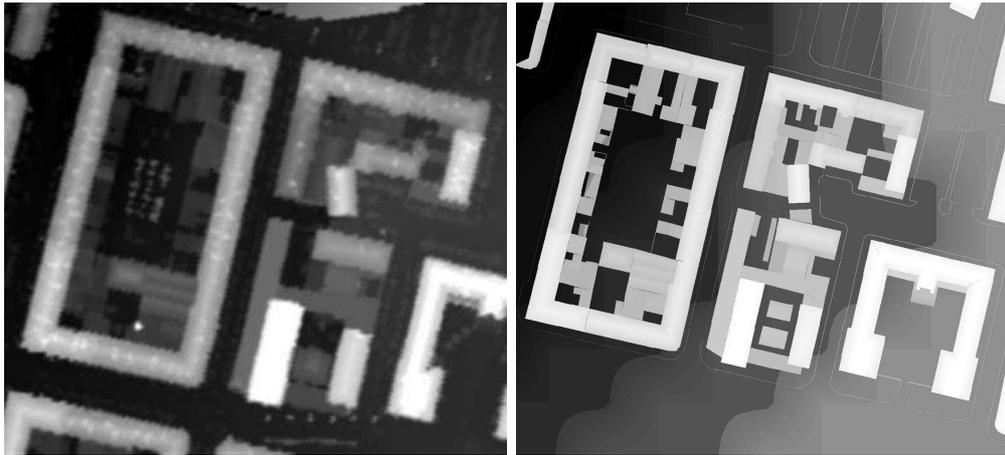
Nous comparons donc les projections des représentation vectorielles de l'extraction obtenue et de la vérité terrain. Cela donne trois classes de pixels : ceux qui ont été correctement identifiés comme une zone bâtie (en gris sur les images résultats), ceux qui ont été oubliés (en noir) et ceux qui ont été identifiés comme une zone bâtie alors que ce n'est pas le cas (sur-détection en blanc).

Sur les résultats présentés, une estimation simple de l'altitude du toit est calculée ce qui permet de comparer visuellement la vérité terrain au résultat.

6.5.5 Premier résultat : données LASER

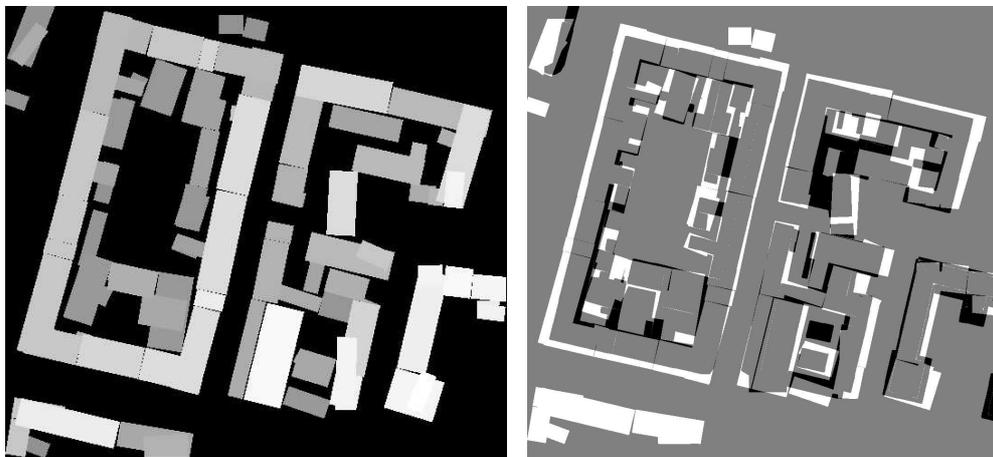
Les données LASER sont à une résolution de (0.5m x 0.5m) au sol et de 0.01m en hauteur. La zone d'intérêt est celle présentée dans la figure : 6.1.

Extraction obtenue La figure 6.12 présente les données, la vérité terrain, le plan obtenu, et les pixels mal classés. On constate que la taille des rectangles détectés est souvent plus grande qu'en réalité. Cela est dû à l'étape d'accumulation des pentes dans le filtre de bas niveau et de l'imprécision des données (localisation des discontinuités).



(a) MNE LASER (50cm)

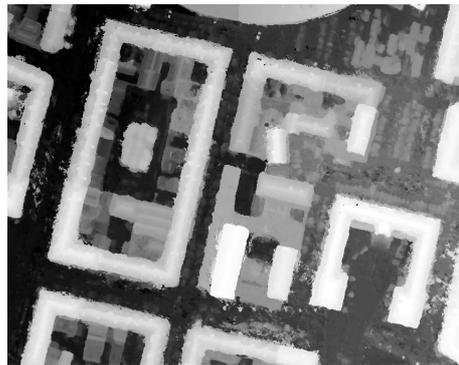
(b) Vérité terrain (20cm)



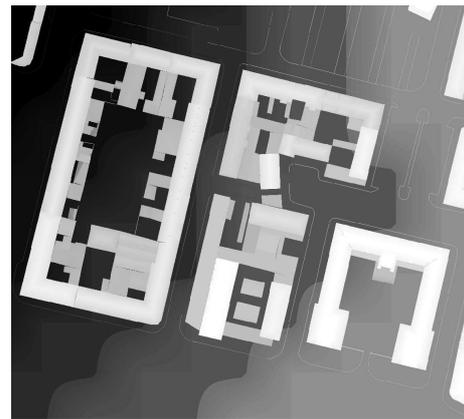
(c) Plan estimé (20cm)

(d) Erreurs de classification (noir : bâti oublié, blanc : sur-détection)

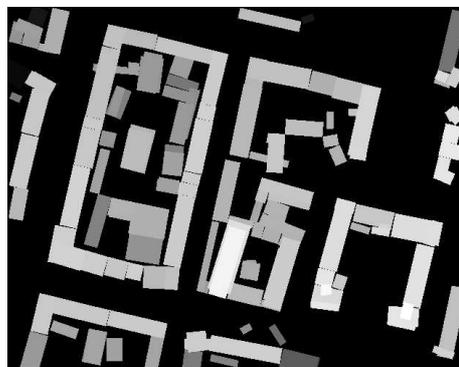
FIG. 6.12: Résultat sur la première zone d'intérêt avec le MNE LASER.



(a) MNE optique (20cm)



(b) Vérité terrain (20cm)

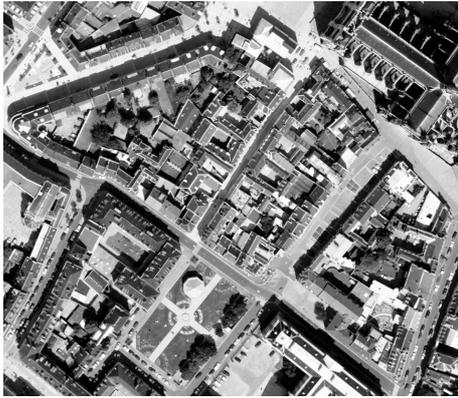


(c) Plan estimé (20cm)

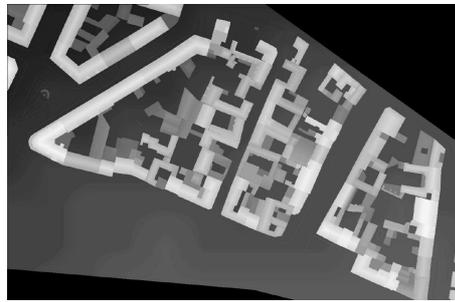


(d) Erreurs de classification (20cm)

FIG. 6.13: *Second résultat : MNE optique.*



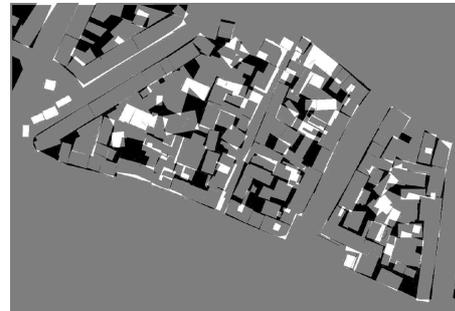
(a) Photographie aérienne (25cm)



(b) Vérité terrain (20cm)



(c) Plan estimé (20cm)

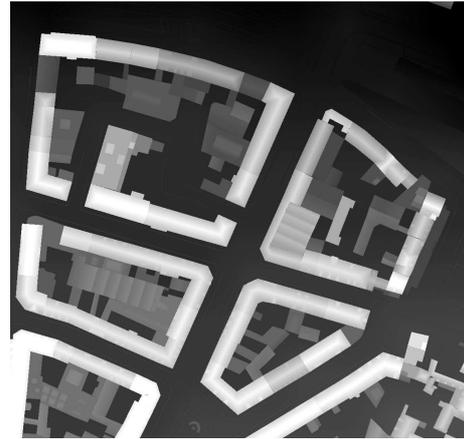


(d) Erreurs de classification (20cm)

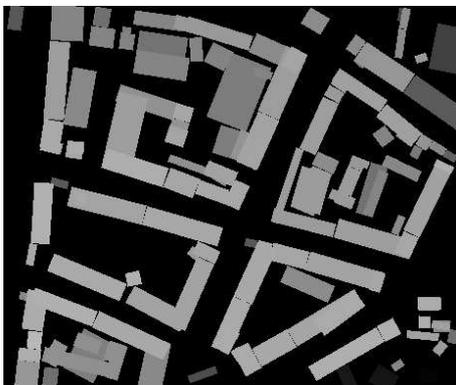
FIG. 6.14: Deuxième zone d'intérêt : vieille ville d'Amiens, MNE optique.



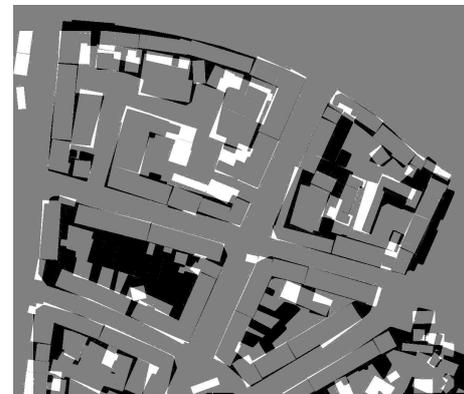
(a) Photographie aérienne (25cm)



(b) Vérité terrain (20cm)



(c) Plan estimé (20cm)



(d) Erreurs de classification (20cm)

FIG. 6.15: *Troisième zone d'intérêt dans Amiens, MNE optique.*

TAB. 6.5: Taux de classifications pour les résultats présentés.

Res. 1 : données LASER		Res. 2 : données optique	
Aire manquée (noir)	5%	Aire manquée (noir)	8.9%
Fausses alarmes (blanc)	11%	Fausses alarmes (blanc)	10.6%

Res. 3 : données optique		Res. 4 : données optique	
Aire manquée (noir)	8.01%	Aire manquée (noir)	11.4%
Fausses alarmes (blanc)	5.3%	Fausses alarmes (blanc)	5.9%

Taux d'erreurs et commentaires Le tableau 6.5 présente les erreurs de détection obtenue. L'image correspond à une aire qui est large approximativement de 200m sur 200m. Comme la résolution des données est de 0.5m, la taille de l'image est de 400×400 .

L'extraction automatique requiert 3 heures (10 millions d'itérations) ce qui est long puisque la machine utilisée travaille avec 1 Gb de mémoire vive à une cadence de 1 Ghz. Il est toutefois important de remarquer que les résultats suivants ont nécessité les mêmes temps de calculs bien que les images soient plus grandes (1000×1000 , résolution de 20cm). La taille de l'image semble être moins importante que la complexité de la scène observée ce qui est un atout de la méthode.

6.5.6 Deuxième résultat : MNE optique

Le second résultat a été obtenu sur le MNE construit avec des données optique par un algorithme de corrélation amélioré (c.f. [Baillard, 1997]). La résolution est de 0.2m par pixel, et de 0.1m par unité de hauteur. Le principal problème de ce MNE vient du bruit : il y a beaucoup de petits artefacts. Ceci dit, le MNE est de très bonne qualité.

Exceptés les paramètres du filtre de bas niveau, tous les paramètres sont identiques aux paramètres du premier résultat.

La figure 6.13 présente l'estimation obtenue. Comme les données optiques sont un peu plus bruitées que les données LASER, les résultats sont un peu moins bons. Il faut noter par ailleurs que des arbres ont été classés comme des bâtiments. Il est néanmoins possible d'appliquer un filtrage a posteriori pour améliorer le résultat.

6.5.7 Seconde et troisième zones

La seconde zone correspond à une partie de la vieille ville d'Amiens. Cette partie est complexe à traiter à cause du grand nombre d'arbres et de petits bâtiments. La comparaison est faite sur un sous-ensemble de l'image d'origine, puisque la vérité terrain n'est pas complète. Les résultats sont présentés sur la figure 6.14.

Le dernier résultat est présenté sur la figure 6.15. Le MNE optique est peu précis dans les arrières cours. Les discontinuités sont difficiles à détecter dans ces endroits. L'algorithme proposé se comporte correctement excepté pour traiter ces arrières cours et pour tenir compte des arbres, en particulier lorsqu'ils sont accolés aux bâtiments.

6.6 Conclusion

L'algorithme présenté semble donc être efficace pour traiter le délicat problème d'extraction automatique de bâtiments sur les données décrivant des zones urbaines denses.

L'algorithme permet d'extraire des formes rectangulaires simples de données altimétriques. L'algorithme ne requiert aucune interaction avec un opérateur, et aucune initialisation. Par ailleurs la paramétrisation semble être robuste puisque l'on a pu traiter des données différentes et de différentes tailles avec les mêmes réglages.

Les résultats obtenus semblent être utiles pour une reconstruction 3D plus précise, comme celle présentée par H. Jibrini ([Jibrini, 2002]).

Cependant l'algorithme n'a pas que des avantages : d'abord, il est lent, et ensuite il nécessite un certain nombre de réglages.

6.7 Quelques calculs

6.7.1 Le modèle comme une famille exponentielle

Nous avons défini 12 interactions attractives, $\sim_{al}^1, \dots, \sim_{al}^4, \sim_{comp}^5, \dots, \sim_{comp}^8, \sim_{pav}^9, \dots, \sim_{pav}^{12}$, une relation d'exclusion \sim_{excl} , et une partition de l'espace objet S définie par $\gamma_0, \dots, \gamma_3$. Nous définissons maintenant les paramètres et applications suivants :

$$\begin{aligned}
 t_{int}(\mathbf{x}) &= \sum_{u \in \mathbf{x}} (V^1(\mathbf{x}, u), W^1(\mathbf{x}, u), \dots, V^i(\mathbf{x}, u), \\
 &\quad W^i(\mathbf{x}, u), \dots, V^{12}(\mathbf{x}, u), W^{12}(\mathbf{x}, u))^T \\
 t_d(\mathbf{x}) &= \sum_{u \in \mathbf{x}} (\mathbf{1}_{\gamma_0}(u), J_0(u), \dots, \mathbf{1}_{\gamma_3}(u), J_3(u))^T \\
 t_{excl}(\mathbf{x}) &= \sum_{u \in \mathbf{x}} V_{excl}(\mathbf{x}, u) \\
 \theta_{int} &= -(a^1, b^1, \dots, a^i, b^i, \dots, a^{12}, b^{12})^T \\
 \theta_{ext} &= (0, 1, 0.001, 0.001, 0.01, 0.01, 0.1, 0.1)^T \\
 \theta_{mes} &= (\log(\beta_0), 0, \dots, \log(\beta_i), 0, \dots, \log(\beta_3), 0)^T \\
 \theta_{excl} &= a_{excl}
 \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que la densité $h_{T_t}(\cdot)$ peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{x}) \propto \exp - \left(\langle \theta_{mes}, t_d(\mathbf{x}) \rangle + \frac{\langle \theta_{ext}, t_d(\mathbf{x}) \rangle}{T_t} \right. \\
 \left. + \frac{\langle \theta_{int}, t_{int}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \theta_{excl}, t_{excl}(\mathbf{x}) \rangle}{T_t} \right)
 \end{aligned}$$

6.7.2 Taux de Green

Nous rappelons ici les expressions des rapports de Green obtenue dans le chapitre 5.

Naissance ou mort simple

Naissance. Un nouveau point $u \in S$ est généré suivant $\frac{\nu(\cdot)}{\nu(S)}$, et on pose $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$. Le taux vaut alors

$$R = \frac{h(\mathbf{y}) \nu(S)}{h(\mathbf{x}) n(\mathbf{y})} = \frac{h(\mathbf{y}) |K|}{h(\mathbf{x}) n(\mathbf{y})} \quad (6.22)$$

Mort Un point v est choisi uniformément dans \mathbf{x} , puis on pose $y = \mathbf{x} \setminus v$, ce qui donne :

$$R = \frac{h(\mathbf{y}) n(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x}) \nu(S)} = \frac{h(\mathbf{y}) n(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x}) |K|} \quad (6.23)$$

Naissance ou mort dans un voisinage

Nous présentons rapidement ici comment ces transformations ont été implémentées dans notre cas pratique. Pour deux rectangles u et v donnés, les interactions attractives sont décrites au moyen d'une contrainte sur la distance entre deux sommets appropriés $C(u)$ et $C(v)$, ainsi qu'une contrainte sur la différence d'angle entre les deux rectangles.

Naissance Si une naissance a été choisie (avec une probabilité p_b), la procédure est la suivante :

- [1] Choisir un objet au hasard u dans $\gamma_0 \cap \mathbf{x}$. Si l'ensemble est vide, ne rien faire.
- [2] Une fois que u a été choisi, générer v tel que $v \sim u$. Une solution est de simuler $Z \in \mathbb{R}^5$ tel que $z = (x, y, \delta\theta, L, l)$. (x, y) sont les coordonnées du coin d'intérêt $C(v)$ du nouvel objet créé. Ainsi, le point (x, y) doit se trouver dans un disque de centre $C(u)$ et de rayon d_{max} . Nous proposons de générer uniformément ce point dans le disque, et pour cela de générer des points dans le carré de coté $2 * d_{max}$ jusqu'à ce que l'un d'entre eux tombe dans le disque. Rappelons qu'une génération au moyen des coordonnées polaires doit être évitée (voir le chapitre 5).
 $\delta\theta$ est la différence d'angle entre u et v : elle devrait être générée dans $[-d_t, d_t]$. L, l sont respectivement la longueur et la largeur de v , générées dans $[L_{min}, L_{max}]$ et $[l_{min}, l_{max}]$.
- [3] Grâce à z , on peut construire le rectangle v .
- [4] On calcule ensuite $\mathcal{R}^+(\mathbf{x} \cup v)$, ensemble des points en relations de $\mathbf{x} \cup v$ tels que l'un des points soit dans γ_0 :

$$\mathcal{R}^+(\mathbf{x}) = \{\{w, w'\} \in \mathbf{x}^2 \mid w \sim w' \mid \{w, w'\} \cap \gamma_0 \neq \emptyset\}$$

puis $s(\mathbf{x} \cup v) = \text{card } \mathcal{R}^+(\mathbf{x})$ ainsi que j_d

$$j_d^{\mathbf{x} \cup v}(v) = \frac{\sum_{u \in \mathcal{N}(v, \mathbf{x} \cup v)} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\gamma_0}(u) \mathbf{1}_{\gamma_0}(v) + \mathbf{1}_{\gamma_0}(u) (1 - \mathbf{1}_{\gamma_0}(v))}{s(\mathbf{x} \cup v)}$$

et j_b :

$$\sum_{u \in \mathcal{N}(v, \mathbf{x})} j_b^{\mathbf{x}}(u) = \sum_{u \in \mathcal{N}(v, \mathbf{x})} \frac{\mathbf{1}_{\gamma_0}(u)}{\text{card } \gamma_0(\mathbf{x})}$$

[5] Pour finir, le taux de Green est donné par :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup v) = \frac{h(\mathbf{x} \cup v)}{h(\mathbf{x})} \frac{pd}{pb} \frac{j_d^{\mathbf{x} \cup v}}{\sum_{u \in \mathcal{N}(v, \mathbf{x})} j_b^{\mathbf{x}}(u)} \frac{2\pi d_{max}^2 dt}{\pi}$$

Mort dans le cas de la mort, on applique la procédure suivante :

- [1] Choisir aléatoirement une paire $\{w, w'\}$ d'objets reliés de $\mathcal{R}^+(\mathbf{x})$,
- [2] choisir un point v de la paire choisie :
 - si les deux objets w et w' sont dans $\gamma_0(\mathbf{x})$ choisir l'un des deux avec une probabilité 0.5,
 - sinon prendre v comme l'unique objet de la paire n'appartenant pas à γ_0 ,
- [3] Calculer le taux de Green :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus v) = \frac{h(\mathbf{x} \setminus v)}{h(\mathbf{x})} \frac{pb}{pd} \frac{\sum_{u \in \mathcal{N}(v, \mathbf{x})} j_b^{\mathbf{x} \setminus v}(u)}{j_d^{\mathbf{x}}(v)} \frac{\pi}{2\pi d_{max}^2 dt}$$

Suivre cette procédure est important. Par exemple, si la mort choisi uniformément un objet en relation parmi toute la configuration au lieu d'une paire, la convergence pourrait être perdue.

6.7.3 Conditions de stabilité et de minoration

Nous avons présenté dans le chapitre 5 des conditions suffisantes pour assurer la convergence de l'algorithme. Parmi celles-ci se trouve la condition de stabilité donnée par l'équation (6.19). L'intégrabilité de $h(\cdot)$ découle de cette condition puisque la densité non normalisée $h(\cdot)$ est alors bornée par $h(\{\emptyset\})R_g^{n(\mathbf{x})}$ qui est intégrable.

Terme impliquant t_d . Il est important de noter que :

$$t_d(\mathbf{x} \cup u) - t_d(\mathbf{x}) = t_d(u) \quad \text{avec} \quad \|t_d(u)\| \leq \sqrt{2}$$

Ce qui amène immédiatement :

$$\left| \langle \theta_{mes} + \frac{\theta_{ext}}{T}, t_d(\mathbf{x} \cup u) - t_d(\mathbf{x}) \rangle \right| \leq \sqrt{2} \left(\|\theta_{mes}\| + \frac{\|\theta_{ext}\|}{T} \right)$$

Modèle a priori La condition de stabilité est aussi vérifiée pour le modèle a priori, mais cette propriété repose sur le fait que l'exclusion pénalise la superposition des rectangles. Prenons le cas particulier d'une relation attractive \sim^i . Si on rappelle que $a_{excl} < 0$ et on suppose que :

$$a_{excl} < -(a^i + b^i) \tag{6.24}$$

La variation d'énergie induite par l'ajout d'un point est donnée par :

$$U^i(\mathbf{x} \cup u) - U^i(\mathbf{x}) = U_{loc}^i(\mathbf{x} \cup u, u) + \sum_{v \in \mathbf{x}} U_{loc}^i(\mathbf{x} \cup u, v) - U_{loc}^i(\mathbf{x}, v)$$

où U_{loc}^i correspond à :

$$U_{loc}^i(\mathbf{x}, v) = -[a^i V^i(\mathbf{x}, v) + b^i W^i(\mathbf{x}, v) + a_{excl} V_{excl}(\mathbf{x}, v)]$$

Par conséquent, la partie négative de la variation d'énergie se décompose en :

- une partie provenant de $U_{loc}^i(\mathbf{x} \cup u, u)$ qui est bornée par $|a^i| + |b^i|$,
- la variation induite par u pour chaque v dans \mathbf{x} . La condition (6.24) donne que la partie négative de l'énergie n'implique que les objets de \mathbf{x} qui sont en interaction attractive \sim^i mais pas en interaction exclusive \sim^{excl} avec u . On a vu que le nombre de ces objets est uniformément borné par N_{over} et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-U^i(\mathbf{x} \cup u)}}{e^{-U^i(\mathbf{x})}} &= \exp(-|U^i(\mathbf{x} \cup u) - U^i(\mathbf{x})|_+ \dots \\
&\quad + |U^i(\mathbf{x} \cup u) - U^i(\mathbf{x})|_-) \\
&\leq \exp(|U^i(\mathbf{x} \cup u) - U^i(\mathbf{x})|_-) \\
&\leq \exp(|a^i| + |b^i| + N_{over}(|a^i| + |b^i|)) \\
&\leq \exp((N_{over} + 1)(|a^i| + |b^i|))
\end{aligned}$$

Finalement, si l'on veut être capable de sommer ce résultat sur les k relations attractives, nous avons besoin de la condition suivante.

$$a_{excl} < -\left(\sum_{i=1}^k (a^i + b^i)\right) \quad (6.25)$$

La condition de stabilité est alors prouvée.

Condition de minoration Dans un cadre de minimisation, nous avons besoin d'une condition plus forte (6.5). Pour obtenir cette condition on peut mener le même type de raisonnement, ce qui permet de conclure que la condition suivante convient :

$$a_{excl} < -\sum_{i=1}^{i=12} (a^i + b^i) - \sqrt{2}\|\theta_{ext}\| \quad (6.26)$$

Chapitre 7

Modèles 3D

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la possibilité d'introduire des modèles de bâtiment 3D dans le cadre de travail proposé. L'intérêt de tels modèles est double : un modèle 3d permet d'une part d'expliquer la structure des bâtiments directement, et d'autre part d'introduire des modèles plus proches d'un modèle bayésien que les modèles considérés dans les chapitres 2 et 6.

7.1 Un modèle plus complexe de bâtiment

Pour pouvoir utiliser des caricatures de bâtiments plus complexes, il faut augmenter la dimension de M , espace des marques. Nous proposons ici un exemple de modèle de bâtiment composé d'un rectangle auquel on ajoute 6 paramètres. La figure 7.1 présente ces paramètres. Les deux premiers, e_1 et e_2 , correspondent respectivement à la hauteur de la gouttière et à la hauteur du sommet du toit par rapport au sol. Les quatre autres t_1, t_2, t_3, t_4 sont des paramètres descriptifs de la forme du toit. S s'écrit donc : $S = K \times M \times M'$ où M' correspond au pavé suivant :

$$M' = [e_{1min}, e_{1max}] \times [e_{2min}, e_{2max}] \times [0, \frac{1}{2}]^4$$

Un tel bâtiment étant décrit par 11 paramètres, l'espace d'état \mathcal{C} , espace des configurations de bâtiments, est donc de taille démesurée. Nous verrons plus loin que nous proposons de réduire la taille de \mathcal{C} en utilisant une initialisation.

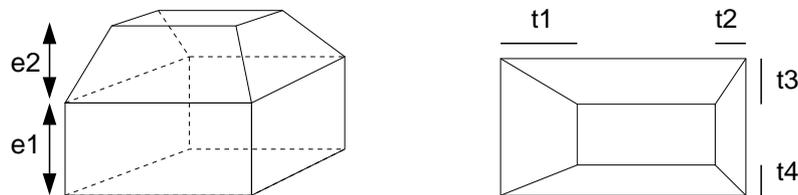


FIG. 7.1: A gauche : bâtiment en 3 dimensions, à droite : bâtiment vu de haut

7.2 Un premier modèle

Nous présentons ici un modèle dont la construction n'est pas bayésienne.

7.2.1 Attache aux données

Puisque l'on dispose d'un modèle plus précis décrivant les bâtiments, on peut utiliser un terme d'attache aux données mesurant la distance entre le MNE reconstruit $h(\mathbf{x}, \cdot)$, et le MNE de données $h_{ref}(\cdot)$. Idéalement on voudrait pouvoir comparer directement le MNE reconstruit (configuration de bâtiments 3d) et le MNE donné. Pour cela il suffirait de se donner une grille de points de référence de K , notée Λ ainsi qu'une distance d sur \mathbb{R} pour pouvoir prendre comme terme d'attache aux données :

$$U_{données} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{s \in \Lambda} d(h(\mathbf{x}, s), h_{ref}(s))$$

Dans cette expression, $h(\mathbf{x}, s)$ donne la hauteur associée au site $s \in \Lambda$ par la configuration \mathbf{x} de bâtiments tridimensionnels. Malheureusement, cette fonction n'est pas accessible directement.

Un premier problème vient du fait que dans le modèle de bâtiment présenté, deux valeurs sont relatives à la hauteur du sol : la hauteur de la gouttière e_1 (base du toit) et celle de la crête, e_2 . Pour connaître la hauteur reconstruite $h(\mathbf{x}, s)$ il faut donc une estimation de l'altitude du sol autour de chaque bâtiment. Pour connaître cette hauteur nous utilisons le même genre d'idée que pour les modèles des chapitres 2 et 6 ; nous utilisons 4 ensembles de 4 points répartis autour de la base rectangulaire. La disposition de ces quatre points est présentée sur la figure 7.2. Nous prenons ensuite comme estimée de la hauteur du sol le minimum des quatre moyennes fournies par les quatre ensembles. Il y a également un

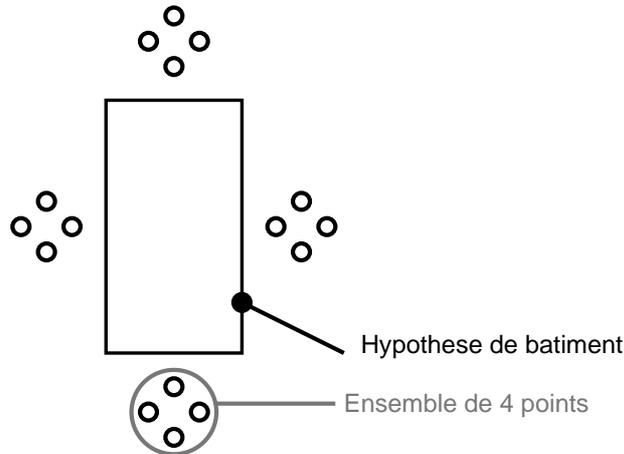


FIG. 7.2: Les quatre ensembles de 4 points utilisés pour estimer la hauteur du sol autour d'un bâtiment.

problème d'ambiguïté. Pour un pixel appartenant à la silhouette de la configuration de bâtiment, il peut y avoir plusieurs bâtiments correspondant. Pour de tels cas, nous avons pris le parti de considérer que la hauteur correspondante est donnée par le bâtiment impliqué le plus haut.

Enfin, le dernier problème tient dans le fait qu'une configuration \mathbf{x} ne fournit aucune information sur la hauteur du sol. Il est donc délicat de comparer deux hypothèses locales, l'une avec un bâtiment, l'autre sans. On peut toutefois se donner une hauteur de référence h_0 arbitraire pour les points de la grille Λ qui ne sont pas dans la silhouette de la configuration \mathbf{x} . Il est par exemple possible de prendre $h_0 = 0$. Malheureusement cela entraîne que l'ajout d'un

bâtiment améliore presque toujours l'estimation courante du relief. Cela se comprend aisément sur la figure 7.3.

Pour éviter ces comportements, nous avons pris le parti d'imposer au modèle de n'approcher le MNE que "par en dessous". Pour cela, nous prenons comme distance d dans le terme d'attache aux données :

$$d(h, h_{ref}) = \begin{cases} |h - h_{ref}| & \text{pour } h \leq h_{ref} + d_{max} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction de distance pénalise fortement les hypothèses de bâtiments qui sortent d'une bande large de d_{max} par rapport à la surface du MNE donné (voir la figure 7.4). Pour que cette idée fonctionne il faut donc prendre : $d_{max} \leq e_{1min}$ et $e_{2min} > 0$. Le meilleur parti est de prendre $d_{max} = e_{1min}$ puisque cela autorise plus de souplesse.

7.2.2 Réduction de la taille de l'espace d'état

Un bâtiment étant représenté par un élément de \mathbb{R}^{11} , il devient très coûteux en temps de calcul d'optimiser l'énergie sur l'ensemble des configurations de bâtiments. Pour passer outre ce problème, on peut utiliser une prédétection : on suppose que l'ensemble des traces au sol rectangulaires plausibles est connu. On peut imaginer différentes techniques permettant d'obtenir ces hypothèses préliminaires dont l'utilisation d'une transformée de Hough. Les résultats présentés ici ont été obtenus en utilisant l'énergie d'attache aux données présentée dans le chapitre précédent couplée avec un algorithme de gradient stochastique. La pertinence de cette approche dépend fortement du nombre de points de départ de l'algorithme stochastique considéré.

Ces hypothèses de traces au sol plausibles forment donc un ensemble de points de $K \times M$

$$\{v_1, \dots, v_N\} \quad \forall i \quad v_i \in K \times M$$

que l'on appelle graines d'initialisation. Pour définir un espace d'état restreint, on utilise un ensemble B (voisinage) de \mathbb{R}^5 et l'addition au sens de Minkovski entre les ensembles notée \oplus . L'espace réduit que nous considérons s'écrit alors :

$$S_{reduit} = \left(\bigcup_{i \leq N} \{v_i\} \oplus B \right) \times M'$$

On peut aussi écrire S_{reduit} comme l'union de ses composantes S_i :

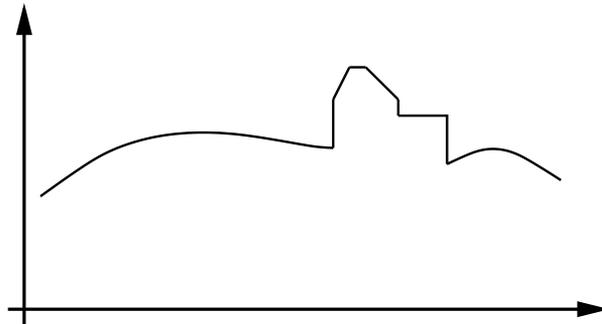
$$S = \bigcup_{i \leq N} S_i$$

avec

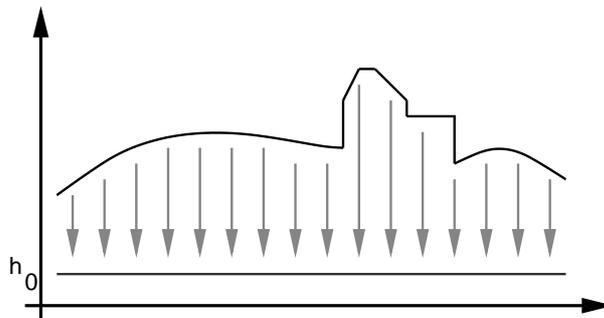
$$S_i = (\{v_i\} \oplus B) \times M'$$

Ceci a l'avantage de considérablement réduire la taille de l'espace d'état. L'ensemble B permet en quelque sorte d'autoriser les perturbations des prédétections et donc d'utiliser la partie a priori du modèle pour régulariser ces hypothèses préliminaires. L'ensemble B représente donc une notion de voisinage autour des graines d'initialisation.

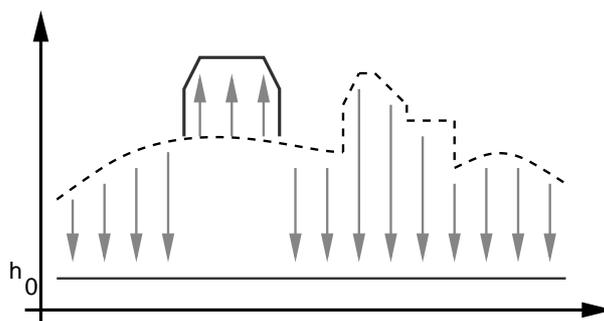
Il est en fait nécessaire d'avoir une sur-détection, ou alors si toutes les hypothèses préliminaires nécessaires n'ont pas été trouvées par l'étape de préparation, de construire une notion de voisinage plus complexe.



(a) Une coupe fictive d'un MNE de données.



(b) En gris : les longueurs utilisées pour calculer la distance entre le MNE de données et l'initialisation de la reconstruction.



(c) Rajouter une hypothèse de bâtiment améliore presque toujours la reconstruction

FIG. 7.3: Une hypothèse de bâtiment améliore toujours la reconstruction proposée si l'on a aucune connaissance pertinente de la hauteur du sol.

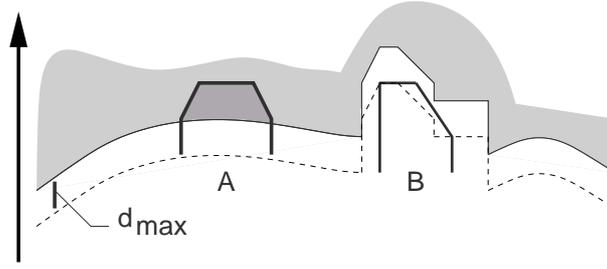


FIG. 7.4: La distance utilisée pénalise fortement l'hypothèse A : en pointillé le MNE de données, la partie grisée de l'espace est la partie qui pénalise fortement les hypothèses l'intersectant.

7.2.3 Algorithme

L'espace d'état étant plus complexe (les composantes S_i centrées sur les graines v_i ne sont pas forcément disjointes), il est plus difficile de s'assurer de la réversibilité des transformations utilisées par l'échantillonneur. Nous passons brièvement en revue les différentes transformations et proposons quelques adaptations possibles.

Naissance ou mort

La naissance peut être obtenue très facilement :

- [1] sélectionner l'une des graines v_i aléatoirement,
- [2] générer u , nouvel objet dans $(B \oplus v_i) \times M'$,
- [3] calculer le taux de Green

La mort peut suivre la procédure usuelle :

- [1] sélectionner un bâtiment au hasard (uniformément) dans la configuration,
- [2] calculer le taux de Green correspondant.

Pour le calcul du taux il y a une petite subtilité : les composantes centrées autour des v_i peuvent s'intersecter. Par conséquent, la probabilité de générer un nouvel objet u dépend du nombre de boules centrées sur les graines préliminaires v_i qui contiennent u . Il convient donc, dans le calcul du taux, de prendre en compte ce nombre. Par exemple, pour $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup u) = \frac{N|B \times M'|}{(n(\mathbf{x}) + 1)\text{card}\{v_i \text{ t.q. } u \in (v_i \oplus B) \times M'\}} \frac{h(\mathbf{y})}{h(\mathbf{x})}$$

où le rapport $h(\mathbf{y})/h(\mathbf{x})$ représente le rapport de densité non normalisée fournie par le modèle. Dans le cas de la mort, il faut tenir compte du même facteur de correction, en l'inversant.

Transformations simples

Il s'agit de s'assurer, lors d'une transformation telle que la translation, la rotation ou la déformation (modification de la longueur, de la largeur ou de la forme de toit) que l'on ne sort pas de l'espace d'état, c'est à dire que l'on reste bien dans l'une des composantes $S_i = (v_i \oplus B) \times M'$. On peut pour cela simplement rejeter le nouvel objet v s'il n'est pas dans l'espace d'état. Il peut être préférable cependant

d'adapter le nouvel objet v en utilisant une congruence, de façon à le ramener dans une composante S_i . On peut appliquer par exemple la séquence suivante :

- [1] choisir aléatoirement un objet u dans la configuration \mathbf{x} ,
- [2] choisir aléatoirement l'une des boules S_i contenant u ,
- [3] perturber u pour obtenir v' et appliquer ensuite un " modulo S_i " pour ramener v' dans S_i s'il en est sorti, ce qui donne v , le nouvel objet. On peut ensuite
- [4] calculer le rapport de Green, donné par :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \setminus u \cup v) = \frac{\text{card}\{S_i, u \in S_i\} h(\mathbf{y})}{\text{card}\{S_j, v \in S_j\} h(\mathbf{x})}$$

Le rapport est obtenu en écrivant que la probabilité de passer de u à v est donnée par :

$$\frac{1}{n(\mathbf{x})} \frac{\text{card}\{S_i \text{ t.q. } (u, v) \in S_i \times S_i\}}{\text{card}\{S_i \text{ t.q. } u \in S_i\}}$$

Naissance ou mort dans un voisinage

Pour ces transformations on peut considérer le changement d'espace d'état comme une modification de la mesure d'intensité du processus de référence. On se contente donc de rejeter les propositions de naissance qui ne tombent dans aucun S_i .

7.2.4 Résultats

La figure 7.5 présente les données utilisées : une partie du MNE sur la ville d'Amiens d'une part, et la sur-détection initiale correspondante d'autre part. La dimension de la zone considérée est à peu près de 100m sur 100m. L'algorithme a mis 3 heures (prédétection incluse) sur une station SUN Blade 100¹ pour fournir le résultat, dont un détail est montré figure 7.6. Le modèle utilisé pour obtenir ce résultat ne fait intervenir aucun modèle a priori autre que le terme d'exclusion. Ce résultat est à peu près correct, même si l'on observe en quelques endroits un phénomène de moyennisation.

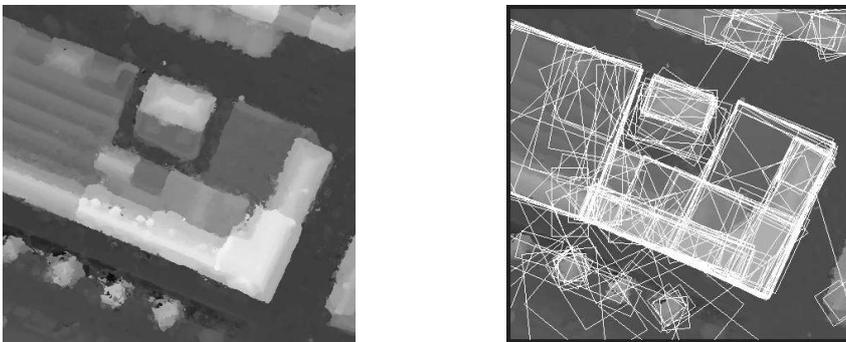


FIG. 7.5: *A gauche : détail d'un MNE de la ville d'Amiens (IGN), à droite initialisation utilisée.*

¹500 Mhz, 250 M Rom

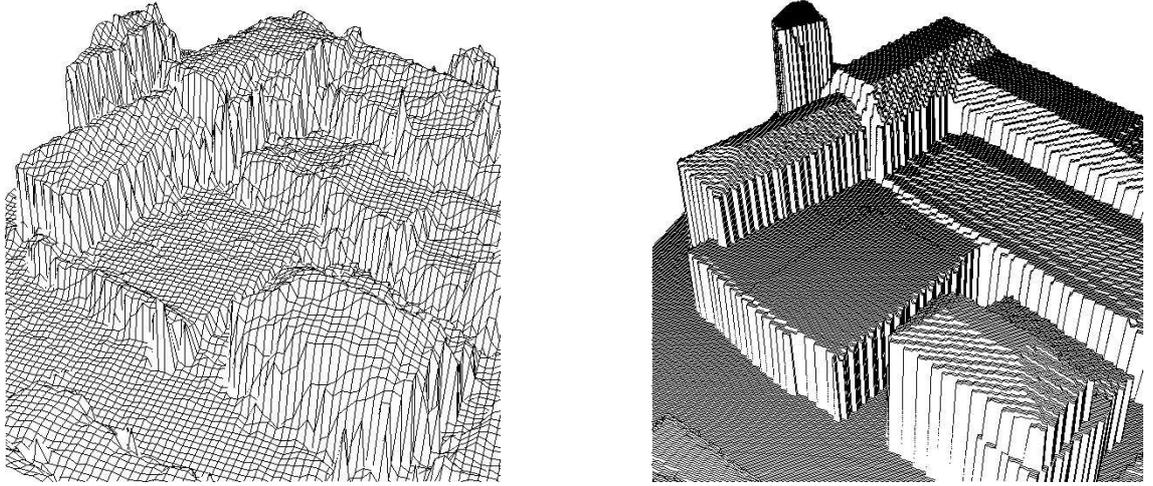


FIG. 7.6: *A gauche : détail du MNE initial en 3 dimensions, à droite : reconstruction obtenue.*

7.3 Un modèle bayésien

Nous présentons dans cette partie un modèle bayésien que nous avons pu introduire dans le cadre de ces modèles 3D. Ce modèle repose sur une estimation de la hauteur du sol $h_{sol}(s)$ en un pixel $s \in \Lambda$. Le modèle bayésien repose en effet sur un modèle aléatoire de l'observation en fonction de la valeur sous jacente. Dans le cadre des configurations de bâtiments, cela signifie que l'on veut construire un modèle aléatoire de MNE en fonction d'une configuration de bâtiments tridimensionnels. Pour cela, on utilise deux lois gaussiennes : l'une, pour les pixels du sol, centrée localement en la valeur $h_{sol}(s)$, l'autre centrée sur $h(\mathbf{x}, s)$, la hauteur donnée par la configuration de bâtiments.

7.3.1 Attache aux données

L'hypothèse principale du modèle est que les pixels du MNE sont indépendants et identiquement distribués sachant le relief de la zone. Si l'on note :

- $G(m, \sigma)$ la loi normale de moyenne m et de variance σ^2 ,
- $Silhouette(\mathbf{x})$ le projeté sur la grille de points Λ de la configuration de bâtiments \mathbf{x} (traces au sol),
- $h(\mathbf{x}, s)$ la hauteur en le pixel s donné par la configuration s ,
- $h_{sol}(s)$ la hauteur du sol en le pixel s ,

le modèle bayésien que nous considérons est le modèle suivant :

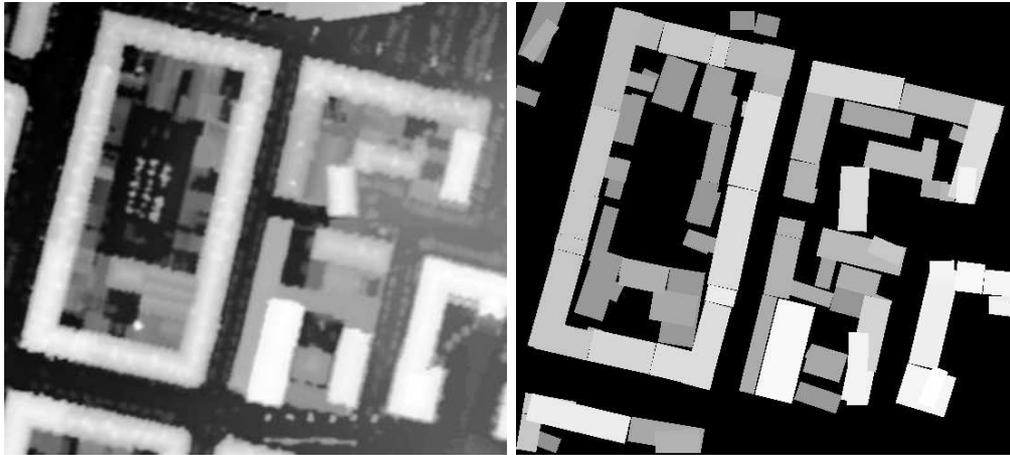
$$U_{données}(\mathbf{x}) = \sum_{s \in Silhouette(\mathbf{x})} \frac{(h(\mathbf{x}, s) - h_{ref}(s))^2}{\sigma_{bat}^2} + \sum_{s \notin Silhouette(\mathbf{x})} \frac{(h_{sol}(s) - h_{ref}(s))^2}{\sigma_{sol}^2}$$

La loi d'un pixel d'un bâtiment sachant la hauteur de la configuration en ce pixel est donc donnée par la loi normale $G(h(\mathbf{x}, s), \sigma_{bat})$, tandis que celle d'un pixel du sol par la loi $G(h_{sol}(s), \sigma_{sol})$ conditionnellement au type du pixel.

7.3.2 Estimation de la hauteur du sol

Pour obtenir une estimée de la hauteur du sol, nécessaire à la mise en place du modèle, nous utilisons l'un des premiers résultats. Par exemple, sur les données

LASER, le modèle présenté dans le dernier chapitre a fourni le résultat montré par la figure 7.7. De ce résultat on peut déduire une estimation de la hauteur du



(a) MNE LASER (50cm)

(b) Plan estimé (20cm)

FIG. 7.7: Résultat du chapitre précédent sur la première zone d'intérêt avec le MNE LASER.

sol, en appliquant les étapes successives suivantes.

- [1] Estimer pour chaque bâtiment la hauteur moyenne du sol l'entourant,
- [2] placer sur le MNE en chaque bâtiment la hauteur originelle par cette hauteur de sol estimée,
- [3] appliquer un noyau gaussien de taille 9x9 au résultat obtenu.

Dans le cas particulier du résultat de la figure 7.7, cette procédure donne le résultat d'estimation du sol montré par la figure 7.8.

Il va de soi que l'on peut remettre en question la méthodologie proposée : il ne semble pas être très performant de devoir utiliser deux fois de suite la même méthodologie. L'objectif était en fait d'étudier l'apport d'un modèle bayésien. Une segmentation du sol, peut par ailleurs être obtenue par des méthodes plus classiques, comme celles proposées dans [Vestri et Devernay, 2001, Maas et Vosselman, 1999].

7.3.3 Modèle a priori

Nous avons utilisé le même modèle qu'au chapitre précédent, avec trois différences notables. D'abord, l'interaction attractive de complétion n'est plus prise en compte puisqu'elle n'est plus pertinente. Par ailleurs, le potentiel du terme d'exclusion a_{excl} peut être pris plus bas. En effet, le modèle étant bayésien, l'ajout d'information redondante n'améliore pas l'énergie. Par contre il faut toujours assurer la condition de stabilité. Pour cela il suffit de prendre :

$$a_{excl} < -\left(\sum_{i=1}^k (a^i + b^i)\right) \quad (7.1)$$

où k parcourt les 4 relations d'alignement et les 4 relations de pavage. Enfin, la relation d'exclusion considérée pour ce modèle bayésien ne teste plus l'ortho-

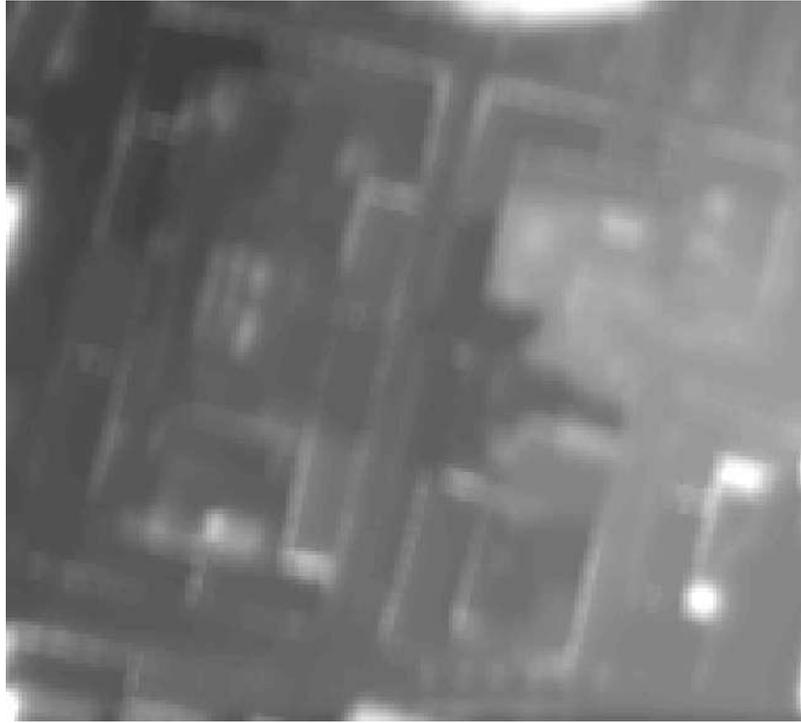


FIG. 7.8: *Modèle Numérique de Surface estimé à partir du résultat de la figure 7.7*

nalité des bâtiments. Il s'agit uniquement d'un test d'intersection entre les bases rectangulaires.

7.3.4 Graines préliminaires et réduction de l'espace d'état

Pour ce modèle 3d, de même que pour le modèle 3d précédent, nous proposons d'utiliser une réduction de l'espace d'état. Comme nous utilisons un résultat vectoriel pour calculer une estimée de la hauteur du sol en chaque point, nous nous servons du même résultat pour calculer des graines v_i . Cette fois, ces graines ne sont plus dans \mathbb{R}^5 , mais dans \mathbb{R}^6 puisqu'aux 5 coordonnées du rectangle fournies par le résultat de l'extraction préliminaire, nous ajoutons une estimation de la hauteur de gouttière \bar{e}_1 .

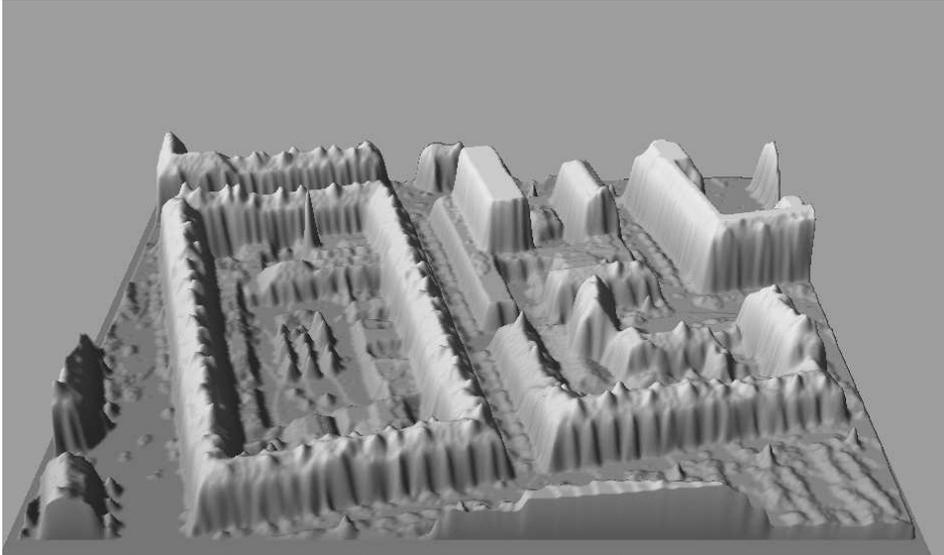
7.3.5 Résultats

Données LASER

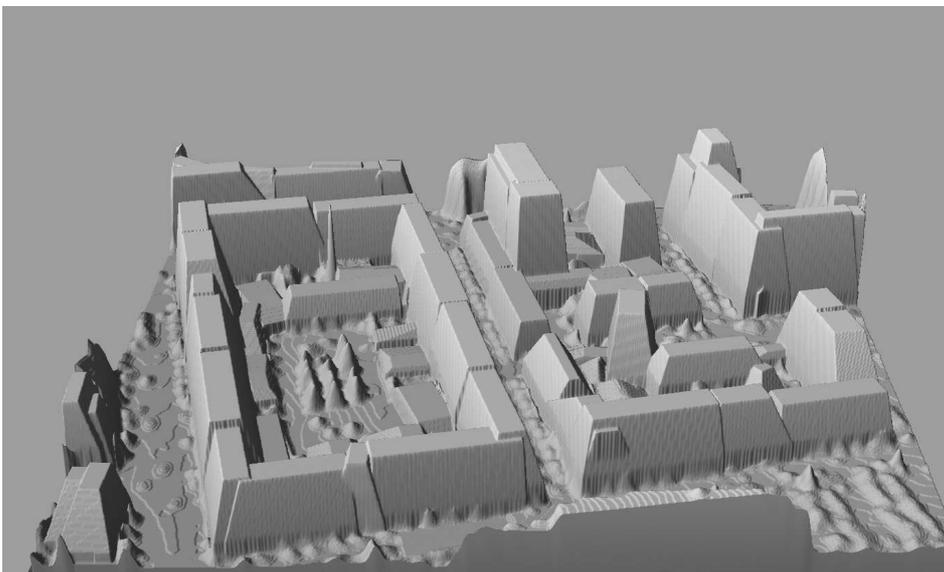
Nous commençons par présenter un résultat issu du travail sur les données LASER. Nous avons pris $\sigma_{sol} = \sigma_{bat}$. Pour ce résultat nous n'avons pas utilisé de modèle a priori autre que le terme d'exclusion, ce qui permet de prendre a_{excl} très petit. Le résultat est présenté par la figure 7.9.

Données optiques

Nous avons testé ce modèle sur une zone plus complexe. Il s'agit d'une zone de la vieille ville d'Amiens. Les graines préliminaires utilisées correspondent au résultat donné par la figure 6.14. Nous avons utilisé pour ce résultat un modèle a priori qui favorise les alignements et les interactions de pavage. Le résultat obtenu est présenté par la figure 7.10.

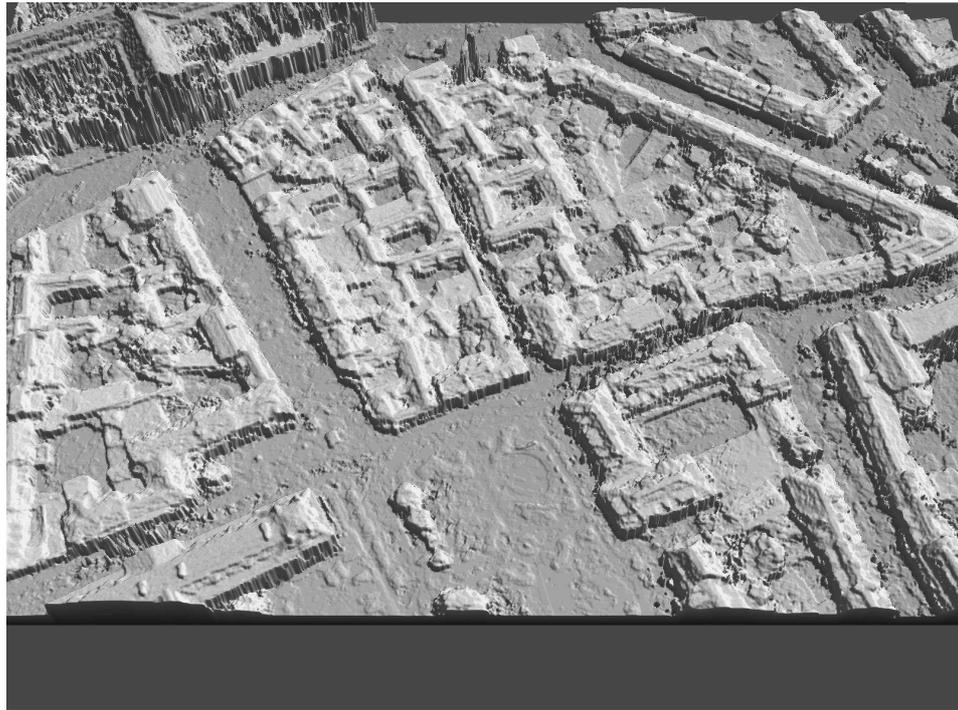


(a) Données LASER

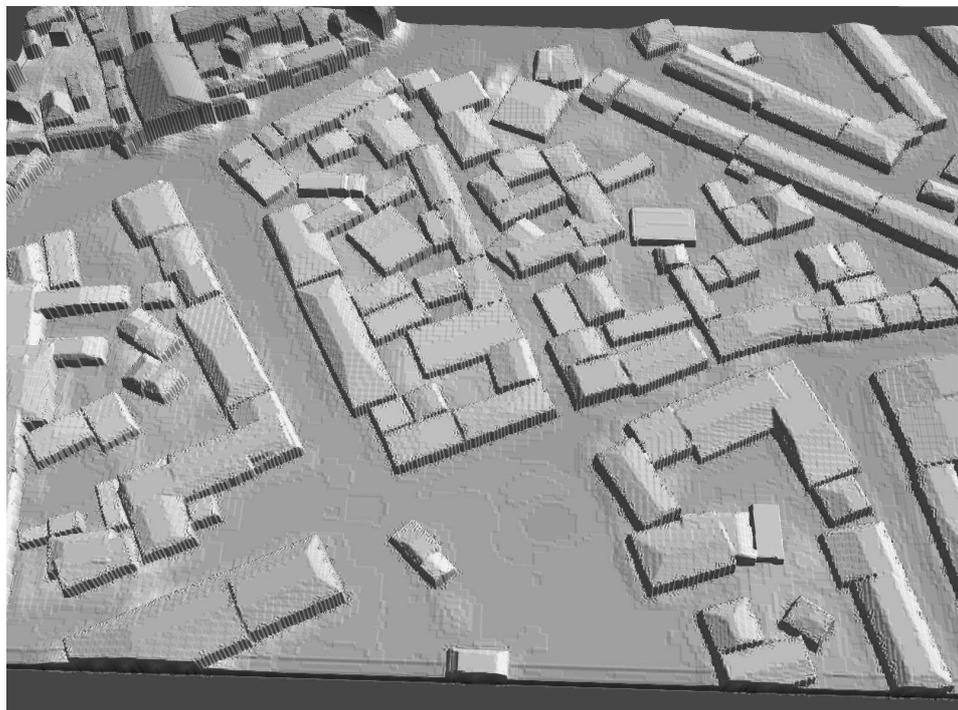


(b) Résultat d'estimation obtenu

FIG. 7.9: Résultat donné par le modèle bayésien sur les données LASER sans modèle a priori autre que la non intersection. Ce résultat est issu de la superposition l'extraction vectorielle avec le Modèle Numérique décrivant le sol estimé.



(a) Données optiques



(b) Résultat d'estimation obtenu

FIG. 7.10: Résultat donné par le modèle bayésien sur les données optique, en utilisant un *a priori*. Le résultat reste perfectible (surtout la zone représentant la cathédrale en haut à gauche de l'image).

On remarquera que ce résultat n'est pas vraiment satisfaisant. En effet, la cathédrale (objet peu conforme à l'hypothèse rectangulaire) n'est pas très bien rendue. Par ailleurs, les arbres peuvent être assimilés à des bâtiments.

7.4 Commentaires et conclusion

Si l'on considère le modèle bayésien utilisé du point de vue de la résolution des problèmes inverses par minimisation d'énergie, on s'aperçoit que le modèle gaussien utilisé revient à introduire une distance quadratique entre l'image reconstruite (configuration de bâtiment et estimation de la hauteur du sol) et l'image de données. Cela pose apparemment un problème : le résultat est trop lissé. En particulier, les discontinuités sont effacées. On retrouve donc les problématiques que l'on trouve classiquement en traitement de l'image avec le choix de distances optimales. Le but est en général de trouver des fonctions de distance qui permettent de préserver à la fois les zones homogènes et la netteté des contours. On remarquera que le premier modèle donne des résultats localement meilleurs. Il est difficile de savoir si cela provient de l'approche "par en dessous" ou de l'utilisation d'une distance plus appropriée.

Pour résoudre le problème d'effet moyennant, il semble que la meilleure solution soit de rajouter deux termes a priori : l'un favorisant les toits "pointus", l'autre favorisant le placement des bâtiments sur des zones de discontinuités.

Il semble que l'on peut considérer cette approche comme la limite de ce qu'il est possible de faire en continu. Il semble être plus prometteur d'intégrer une modélisation hiérarchique, plutôt que de complexifier les modèles à outrance. Il s'agirait de détecter des primitives bas niveau (segments 3d, plans) et de proposer des agglomérations aléatoires. Le processus ponctuel serait alors à valeur dans un ensemble dénombrable. L'exploration stochastique et le recuit simulé permettraient donc d'explorer les combinaisons possibles de primitives.

Chapitre 8

Approche duale et coopération

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats sur un type de données particulier. Il s'agit de données issues de simulations de prises de vues par la constellation de satellites Pléiades. Ces données, provenant du CNES, nous ont été fournies par l'IGN.

Le MNE proposé est de très mauvaise qualité. Cela provient du fait que le rapport b/H de ce MNE est très bas. En stéréovision, ce rapport correspond au rapport de la distance entre les deux caméra de prise de vues (b) sur la distance entre les caméra et la scène observée (H). Un calcul élémentaire de géométrie montre que ce rapport est également le rapport entre la résolution planimétrique et la résolution altimétrique du MNE. Donc plus le rapport b/H est faible, et moins le MNE est de bonne qualité. Par exemple, dans le cas du MNE Pléiades considéré, le rapport b/H vaut 0.2. Donc pour une résolution planimétrique de $1m$, la résolution altimétrique est de $5m$!

Pour pouvoir traiter le MNE Pléiades, nous avons testé une idée qui était restée en suspend : peut-il être pertinent d'utiliser un processus ponctuel à deux objets? En particulier, puisque le chapitre 2 présente une approche reposant sur la détection de rectangles homogènes et le chapitre 6 sur la détection de discontinuités, est-il possible de faire coopérer les deux approches au travers d'un modèle simple? Nous introduisons donc dans ce chapitre un processus de lignes chargé de détecter les discontinuités coopérant avec un processus de rectangle chargé de détecter les zones homogènes.

8.1 Les données

La figure 8.1 présente un MNE issu de simulations Pléiades. La résolution planimétrique de ce MNE est de $1m$. On constate, que d'une part il y a beaucoup d'occlusions (parties manquantes en noir) et que d'autre part la résolution altimétrique est effectivement mauvaise.

8.2 Rectangle et homogénéité

8.2.1 Espace objet

Nous définissons un premier processus ponctuel X dont les points sont des rectangles. L'espace objet est donc $S = K \times M$, où M correspond à l'espace des marques du rectangle

$$M =] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [L_{min}, L_{max}] \times [l_{min}, l_{max}]$$

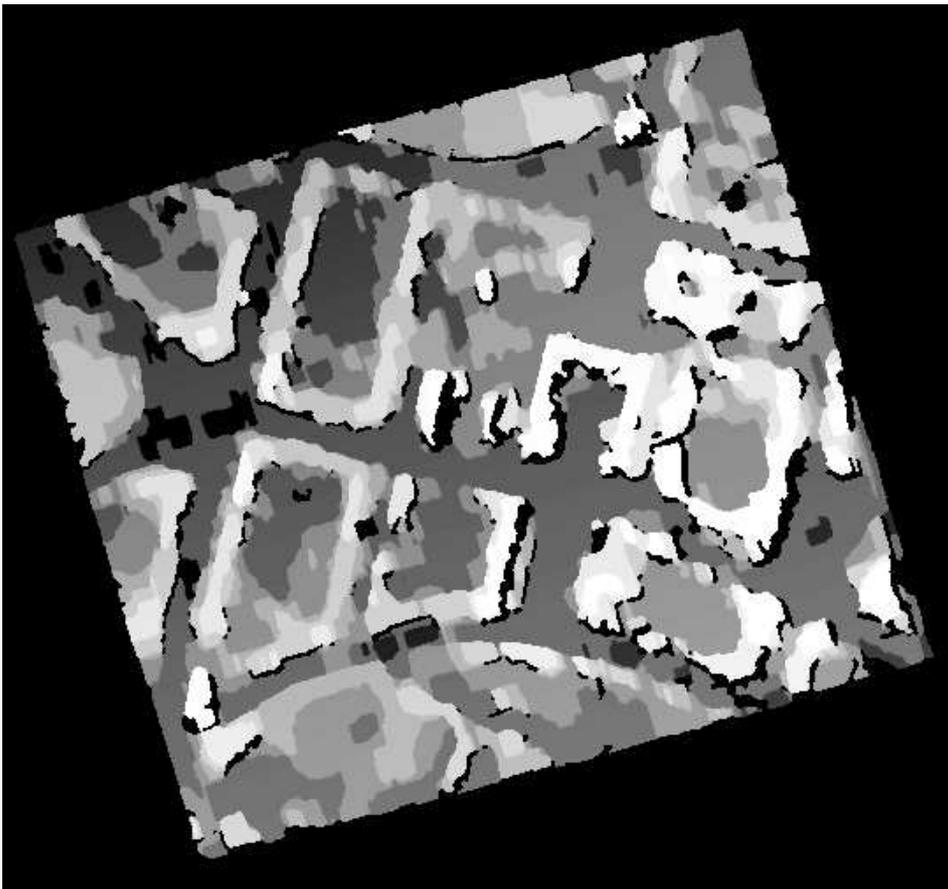


FIG. 8.1: *MNE* issu des simulations pléiades ($1m$, $b/H = 0.2$). Les parties en noir sont les zones pour lesquelles il n'y a pas de données

8.2.2 Masque et grandeurs utilisées

Nous voulons détecter les zones homogènes de forme rectangulaire. Pour cela nous utilisons le même type d'idée que dans la partie 2.2.1. A partir d'un masque de points, semblable à celui présenté dans la figure 2.1, nous calculons les grandeurs suivantes :

Estimée de la hauteur du sol. Pour calculer $\hat{h}_g(u)$ on utilise quatre bandes de points situées autour du rectangle. On ne prend pas en compte les points du MNE pour lesquels les données sont manquantes.

Taux de volume. Ce taux est calculé de la même façon que dans la partie 2.2.1. $\bar{v}(u)$ est donc le pourcentage de points à l'intérieur de la silhouette du rectangle u qui sont situés à une altitude supérieure à $\hat{h}_g(u) + h_{min}$. On ne prend en compte que les points pour lesquels le MNE fournit une donnée.

Taux de données accessibles. On appelle ainsi le pourcentage de points à l'intérieur du rectangle pour lesquels une donnée est accessible. On le note $\bar{q}(u)$.

Taux d'homogénéité. Nous avons pris pour ce travail une mesure d'homogénéité plus simple que celle considérée dans la partie 2.2.1, et qui ne repose pas sur l'hypothèse de symétrie utilisée alors. On commence par calculer la hauteur maximale ($max(u)$) à l'intérieur de la silhouette, puis on calcule le taux de points à l'intérieur de la silhouette qui sont à une altitude supérieure à $(max(u) - \sigma)$. Une fois encore on ne considère que les points pour lesquels une donnée est accessible. Pour un rectangle u , le taux d'homogénéité est noté $\bar{t}(u)$.

Taux de surface. Ce taux mesure le rapport entre la surface d'un rectangle et la surface maximale possible :

$$\tilde{s}(u) = \frac{l(u) * L(u)}{L_{max} * l_{max}}$$

8.2.3 Terme d'attache aux données

Objets attractifs

Nous utilisons le même type de modèle que celui utilisé dans les chapitres 2 et 6, c'est-à-dire un modèle qui se développe sur les objets de la configuration :

$$U_{data}(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathbf{x}} U_d(u)$$

Une fois de plus, il convient de définir ce qu'est un objet attractif (ensemble γ_0^r). Pour cela, nous avons choisi :

$$u \in \gamma_0^r \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v}(u) \geq v_{min} \\ \bar{q}(u) \geq q_{min} \\ \bar{t}(u) \geq t_{min} \end{cases}$$

avec, en pratique, $v_{min} = 90\%$, $h_{min} = 5m$, $q_{min} = 70\%$, $\sigma = 5m$, et $t_{min} = 70\%$. γ_1^r est le complémentaire de γ_0^r dans S .

Terme U_d

Considérons la fonction de coût j_{rect} suivante :

$$j_{rect}(u) = \bar{v}(u) * \bar{t}(u) * \bar{s}(u)$$

Cette fonction favorise donc les rectangles qui contiennent beaucoup de pixels extrudés par rapport au sol, qui sont homogènes et larges. Nous prenons ensuite comme énergie d'attache ($\rho_r > 0$) :

$$U_d(u) = \rho_r * \left(-j_{rect}(u) * \mathbf{1}_{\gamma_0^r}(u) + 0.1 * (2 - j_{rect}(u)) \mathbf{1}_{\gamma_1^r}(u) \right)$$

Cette fonction est négative (attractive) pour les éléments de γ_0^r et répulsive pour les autres (γ_1^r). La fonction j permet d'ordonner les éléments de chacun de ces ensembles. On pourrait toutefois éliminer le terme d'homogénéité. Nous l'avons ajouté pour essayer de traiter les MNE Pléiades avec une approche simple (en n'utilisant que le processus de rectangles). Cela n'a pas suffi, comme nous le montrons dans la partie 8.8.3 qui présente les résultats obtenus.

8.3 Segments et discontinuités**8.3.1 Espace objet**

Nous introduisons un second processus Y de segments. Pour cela nous considérons l'espace objet S'' donné par l'espace des marques M'' suivant :

$$M'' =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [L_{min}, L_{max}]$$

Un segment est donc représenté par son centre, son orientation et sa longueur.

$$\mathbf{y} = \{u_1, \dots, u_{n(\mathbf{y})}\} \quad u = (x, y, \theta, L)$$

L'objectif est de détecter les discontinuités du Modèle Numérique d'Elevation par un réseau linéique. Cela rejoint les travaux menés par [Lacoste *et al.*, 2002], [Stoica *et al.*, 2004] sur l'utilisation de processus de segments pour détecter les routes sur des images de télédétection..

8.3.2 Terme d'attache aux données**8.3.3 Grandeurs mesurées**

L'objectif est de détecter les discontinuités par les segments. Nous proposons donc d'utiliser le filtre bas niveau utilisé dans le chapitre 6. Nous considérons pour un segment donné les profils présentés par la figure 8.2. Ces profils sont obtenus à l'aide de trois paramètres : r le paramètre d'échantillonnage le long d'un profil, e la distance entre deux profils successifs et L_{ext} qui représente ici la moitié de la largeur d'un profil.

On applique ensuite le même filtre bas niveau que celui utilisé dans le chapitre 6. Cela permet de calculer, entre autre, la longueur de discontinuité détectée $Lg(u)$ pour un segment u en utilisant un paramètre de sensibilité δr . Par ailleurs un taux de moment est également calculé ($\hat{m}(u)$). Ce taux permet de mesurer la qualité du placement d'un segment par rapport aux discontinuités.

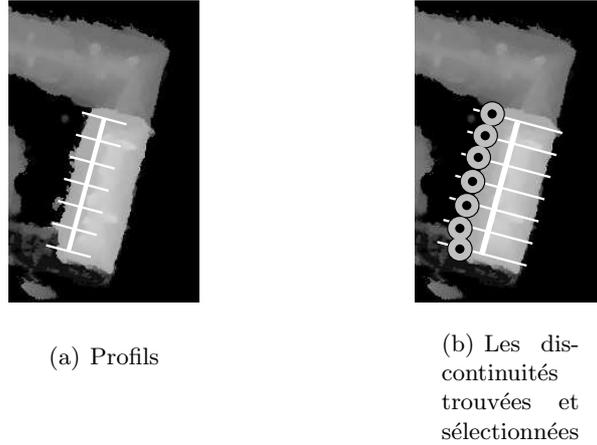


FIG. 8.2: *Un MNE, un segment et les profils utilisés pour détecter les discontinuités.*

8.3.4 Objets attractifs

On s'intéresse aux segments correspondant à des longueurs de discontinuités suffisantes. On se donne pour cela un seuil $th \in [0.1]$. L'ensemble γ_0^s des objets attractifs que l'on prend est alors l'ensemble suivant :

$$\gamma_0^s = \{u \in S'' \quad \text{t.q.} \quad Lg(u) \geq thL(u)\}$$

En pratique nous avons pris $th = 90\%$. On appelle γ_1^s le complémentaire de γ_0^s . On prend comme fonction j_{seg} la fonction suivante :

$$j_{seg}(u) = \frac{1}{2} \frac{Lg(u)}{L_{max}} + \frac{1}{2} (1 - \hat{n}(u))$$

Cette fonction favorise donc les segments qui détectent les discontinuités les plus longues. Nous prenons ensuite comme fonction d'attache ($\rho_s > 0$) la fonction qui suit :

$$U_d(u) = \rho_s * \left(-j_{seg}(u) * \mathbf{1}_{\gamma_0^s}(u) + 0.1 * (2 - j_{seg}(u)) \mathbf{1}_{\gamma_1^s}(u) \right)$$

Cette fonction permet de favoriser les segments de γ_0^s et de guider les éléments de γ_1^s vers γ_0^s de façon continue.

8.4 A priori sur les segments

Le but est de favoriser des réseaux linéiques continus. Pour cela nous introduisons une interaction de connexion entre les segments. Nous différencions le cas où la connexion se fait dans l'alignement de celui où la connexion se fait à angle droit, de façon à rendre compte de la structure régulière des discontinuités dans les zones urbaines.

8.4.1 Connexions

Principe

On introduit une relation \sim_{conn} qui représente l'interaction de connexion. Comme [Stoica, 2001] et [Lacoste *et al.*, 2002], nous utilisons la relation

représentée par la figure 8.4. Si l'on note $E_1(u)$ et $E_2(u)$, points de K , les extrémités du segment u , présentées par la figure 8.3, le test de connexité utilisé est le suivant :

$$u \sim_{conn} v \Leftrightarrow \min\{ d(E_i(u), E_j(v)) \quad : \quad i, j \in \{1, 2\}^2 \} \leq d_{E_{max}}$$

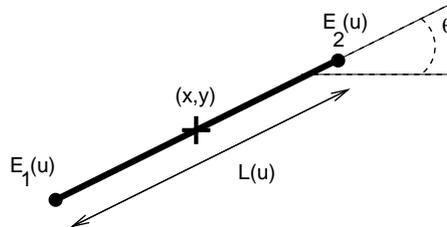


FIG. 8.3: Un segment u , les paramètres correspondant et les deux extrémités

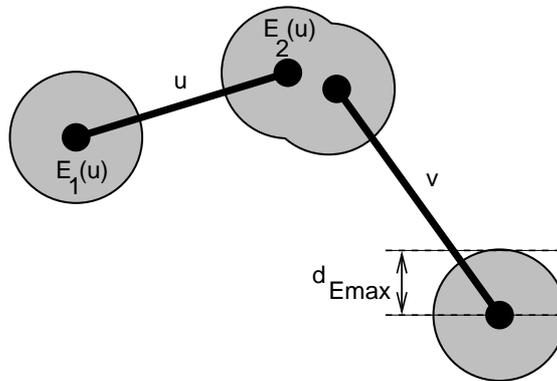


FIG. 8.4: Deux segments connectés

Restrictions

En fait, on considère deux types de connexions : celles qui se font dans l'alignement et celles qui se font à angle droit. Ces deux types de connexions différentes sont présentées par la figure 8.5. On rajoute donc deux conditions supplémentaires :

$$\text{Cond1} \quad \left| \theta(u) - \theta(v) \right| \stackrel{\text{modulo } \pi}{\leq} d_{t_{max}}$$

$$\text{Cond2} \quad \left| \theta(u) - \theta(v) + \frac{\pi}{2} \right| \stackrel{\text{modulo } \pi}{\leq} d_{t_{max}}$$

Ces deux conditions sur les angles définissent en réalité deux types de relations différentes. Pour chacune d'entre elles on distingue également des relations différentes en fonction de l'extrémité connectée. On considère donc en tout 4 relations (non symétriques) différentes. Une dernière condition ajoutée concerne

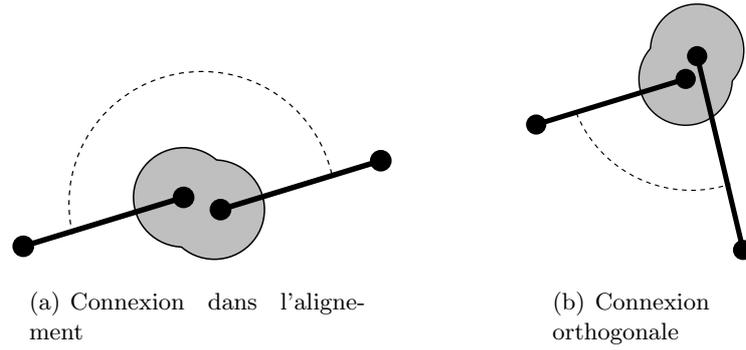


FIG. 8.5: Les deux types de connexions testées.

la qualité des objets considérés : on impose que les deux segments soient dans γ_0^s .

$$u \sim_{conn.al.}^1 v \Leftrightarrow \begin{cases} (u, v) \in \gamma_0^s \times \gamma_0^s \\ \min\{ d(E_1(u), E_j(v)) : j \in \{1, 2\} \} \leq d_{Emax} \\ |\theta(u) - \theta(v)| \leq d_{tmax} \quad (\text{modulo } \pi) \end{cases}$$

$$u \sim_{conn.al.}^2 v \Leftrightarrow \begin{cases} (u, v) \in \gamma_0^s \times \gamma_0^s \\ \min\{ d(E_2(u), E_j(v)) : j \in \{1, 2\} \} \leq d_{Emax} \\ |\theta(u) - \theta(v)| \leq d_{tmax} \quad (\text{modulo } \pi) \end{cases}$$

La fonction de qualité

Par exemple, dans le cas de la relation $\sim_{conn.al.}^1$, on considère la fonction Ψ suivante :

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \varpi(d_{E_i}(u, v), d_{Emax}) + \frac{1}{2} \varpi(|\theta(u) - \theta(v)|, d_{tmax})$$

On favorise donc les connexions les plus précises (distance entre les extrémités concernées proche de 0) et les plus respectueuses de la contrainte d'angle (différence d'orientation proche de 0 ou de $\pi/2$).

Le modèle d'énergie

Nous utilisons le modèle général que nous avons introduit dans la partie 6.3.1. Rappelons que l'on définit d'abord le voisinage d'un objet dans la configuration :

$$u \in \mathbf{x} \quad \mathcal{N}(u, \mathbf{x}) = \{v \in x : u \sim v\}$$

puis les fonctions V et W suivantes :

$$V(\mathbf{x}, u) = \mathbf{1}(\mathcal{N}(u, \mathbf{x}) \neq \emptyset)$$

$$W(\mathbf{x}, u) = \begin{cases} \max_{v \in \mathcal{N}(u, \mathbf{x})} \Psi(u, v) & \text{si } \mathcal{N}(u, \mathbf{x}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui permet d'introduire l'énergie locale d'un objet pour un type de relation :

$$u \in \mathbf{x} \quad U_{loc}^{\sim}(\mathbf{x}, u) = -(aV(\mathbf{x}, u) + bW(\mathbf{x}, u)) \quad (8.1)$$

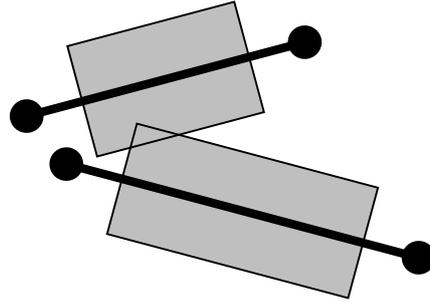


FIG. 8.6: Deux segments en relation d'exclusion (les rectangles associés s'intersectent).

8.4.2 Terme d'exclusion

Pour éviter des superpositions excessives de segments, nous avons introduit une interaction d'exclusion qui repose sur un test d'intersection de rectangles : on crée pour chaque segment un rectangle autour d'un segment comme présenté sur la figure 8.6 puis l'intersection entre les rectangles respectifs joue le rôle d'interaction d'exclusion pour les segments.

Pour définir les rectangles associés à chaque segment, on utilise deux paramètres : la longueur du rectangle en pourcentage de la longueur du segment (en pratique 60%) et sa largeur (en pratique nous avons pris 4 mètres).

8.4.3 Exemple de résultat

La figure 8.7 présente un résultat de simulation du modèle a priori des segments à basse température. On a pris $\gamma_0^s = S''$.

8.5 A priori sur les rectangles

Pour les rectangles, nous avons utilisé le même type de modèle que dans les chapitres 6 et 7. Nous utilisons donc les relations $\sim_{al}^1, \dots, \sim_{al}^4$ d'alignements, chacune d'entre elles correspondant à l'un des coins d'un rectangle, et les relations $\sim_{pav}^1, \dots, \sim_{pav}^4$ de pavage du plan. La relation d'exclusion est la relation symétrique d'intersection entre deux rectangles.

Le résultat obtenu est présenté par la figure 8.8. On notera que l'ensemble γ_0^r correspond aux rectangles dont le centre se situe à l'intérieur de la moitié gauche de l'image.

8.6 Coopération rectangles-segments

8.6.1 Espace objet

L'objectif de cette modélisation est d'introduire une coopération entre deux types d'objet. Le but est de détecter des zones d'homogénéité avec les rectangles et les lignes de discontinuités grâce aux segments.

Pour cela on considère un processus ponctuel Z , superposition de X et Y :

$$Z = X \cup Y$$

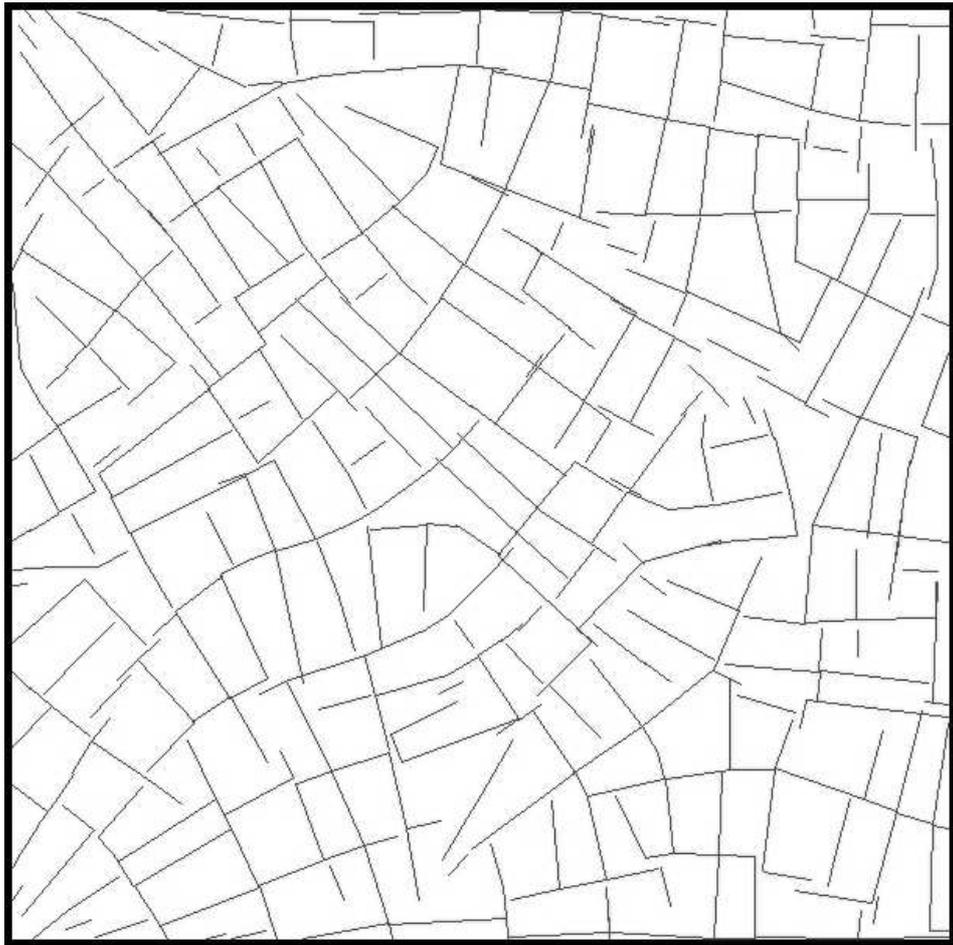


FIG. 8.7: *Résultat de simulation du modèle a priori de la répartition des segments à basse température*

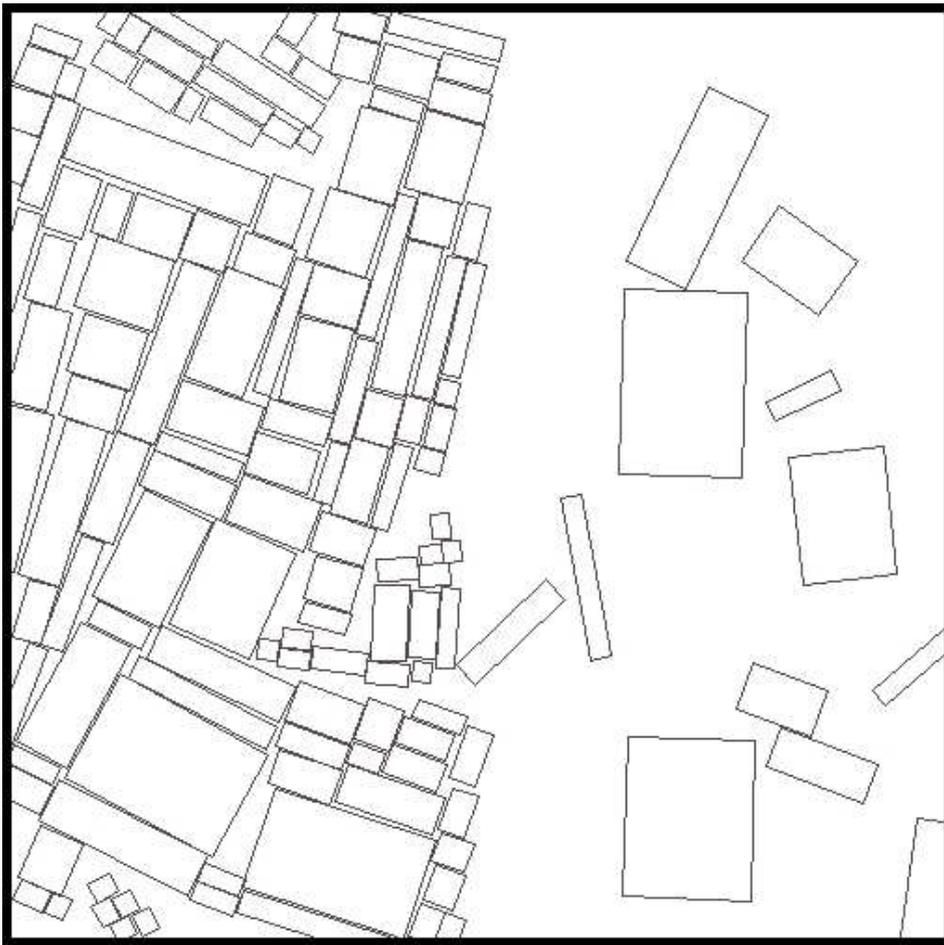


FIG. 8.8: *Résultat de simulation du modèle a priori de la repartition des rectangles à basse température*

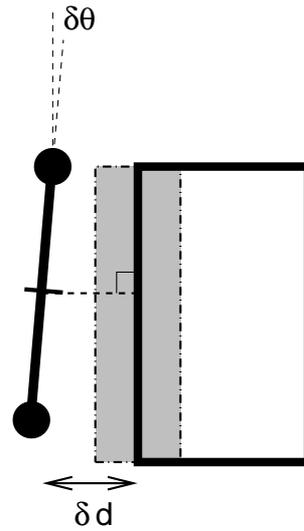


FIG. 8.9: Interaction entre un rectangle et un segment. Un segment et un rectangle interagissent si le centre du segment se situe dans la zone grisée et si la différence d'angle est petite.

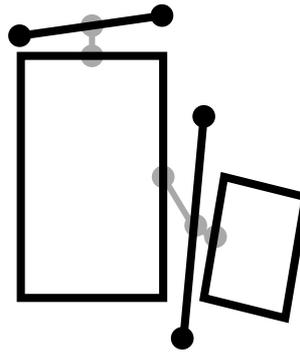


FIG. 8.10: Interactions entre rectangles et segments.

8.6.2 Interaction entre les deux types d'objets

On ajoute ensuite un terme d'interaction entre les rectangles et les segments. Le but est d'accentuer la cohérence entre le réseau linéique et le pavage de rectangles extrait.

La figure 8.9, présente les grandeurs calculées pour tester l'interaction entre un rectangle et un segment. On utilise un test sur la différence d'angle ainsi qu'un test de distance entre le centre du segment et un côté du rectangle.

De la même façon que pour les modèles précédents, on ne considère que les interactions entre objets attractifs et l'on décompose la relation en plusieurs termes. Un segment peut être en relation avec deux rectangles (deux côtés), tandis qu'un rectangle peut être en relation par ses quatre côtés, comme le montre la figure 8.10.

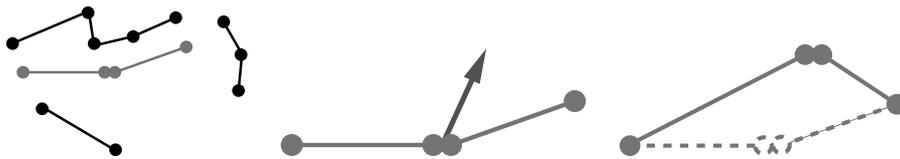


FIG. 8.11: Les étapes de la perturbation d'une connexion. De gauche à droite : sélection d'un couple, génération d'un vecteur de déplacement, calcul du nouveau couple et test de connexité.

8.7 Algorithme

8.7.1 Transformations usuelles

L'algorithme est sensiblement le même que celui utilisé dans le chapitre 6. On y retrouve entre autre : la naissance ou mort d'un rectangle, la naissance ou mort d'un segment, la translation, la rotation ou l'allongement d'un rectangle ou d'un segment, l'élargissement d'un rectangle ainsi qu'une nouvelle transformation : la perturbation d'une connexion.

8.7.2 Perturbation d'une connexion

Cette transformation est assez intuitive. La procédure est la suivante.

- [1] Choisir un couple de segments qui sont en interaction de connexion,
- [2] générer un vecteur de déplacement aléatoirement,
- [3] appliquer ce vecteur à chacune des deux extrémités connectées,
- [4] tester si les deux nouveaux vecteurs sont toujours connectés (il y a une contrainte d'angle), si oui continuer, sinon abandonner la transformation,
- [5] proposer y obtenue en remplaçant les deux anciens segments par les deux nouveaux.

Le taux de Green dépend du nombre de connexions du nouvel état y et de l'ancien état x . Cette transformation est illustrée par la figure 8.11.

8.8 Résultats

Nous présentons ici une succession de résultats. Nous présentons d'abord les résultats obtenus en utilisant uniquement un processus de segments puis uniquement un processus de rectangles, puis nous présentons les résultats obtenus lorsque les deux processus sont superposés et le terme d'interaction rectangle-segment pris en compte.

8.8.1 Processus de rectangles

Paramètres du modèle

Le tableau 8.1 présente les paramètres utilisés pour le processus de rectangles. Notons que l'espace d'état et les paramètres de définition des relations sont les mêmes que ceux donnés par le tableau 6.2.

TAB. 8.1: Paramètres utilisés pour le processus de rectangles.

Grille de points	
r	2m
d_{cote}	10m

Attache aux données	
h_{min}	5m
v_{min}	90%
σ	5m
t_{min}	70%
q_{max}	30%

Poids de l'attache	
ρ_r	1.2

Paramètres d'interaction	
Alignements	
a^{al}	0.3
b^{al}	0.4
Relations de pavage	
a^{pav}	0.3
b^{pav}	0.4
Relation d'exclusion	
a^{excl}	-10

Résultats

La figure 8.12 présente le résultat de détection en n'utilisant que des rectangles. On constate que le terme d'homogénéité joue son rôle. En effet, les bâtiments ont tendance à être segmentés correctement. On constate également que l'absence de critère fondé sur les discontinuités entraîne un pavage du bâti qui ne suit pas forcément les discontinuités pertinentes.

8.8.2 Processus de segments

Paramètres du processus de segments

Nous présentons les paramètres du processus de segments dans le tableau 8.2. Les notations liées au filtre bas niveau et au terme d'attache du segment sont les mêmes que celles utilisées dans le chapitre 6.

Résultat obtenu avec le processus de segments

La figure 8.13 présente le résultat d'extraction obtenu en n'utilisant que le processus de segment. On remarquera la tendance à créer des lignes courbes et le fait que le réseau obtenu ne décrit pas tous les murs.

8.8.3 Interaction segment-rectangle

Paramètre de l'interaction segment-rectangle

On considère désormais le processus Z issu de la superposition du processus de segment Y et du processus de rectangle X . Les paramètres du terme d'interaction décrit précédemment sont précisés dans le tableau 8.3. Nous avons pris les mêmes valeurs de a et b pour les segments et les rectangles : cela signifie que lorsque une interaction est créée entre un segment et un rectangle, les deux objets gagnent la même énergie. Nous aurions pu dissymétriser le modèle. Il s'est avéré en pratique que le modèle que nous présentons ici donne des résultats suffisants.

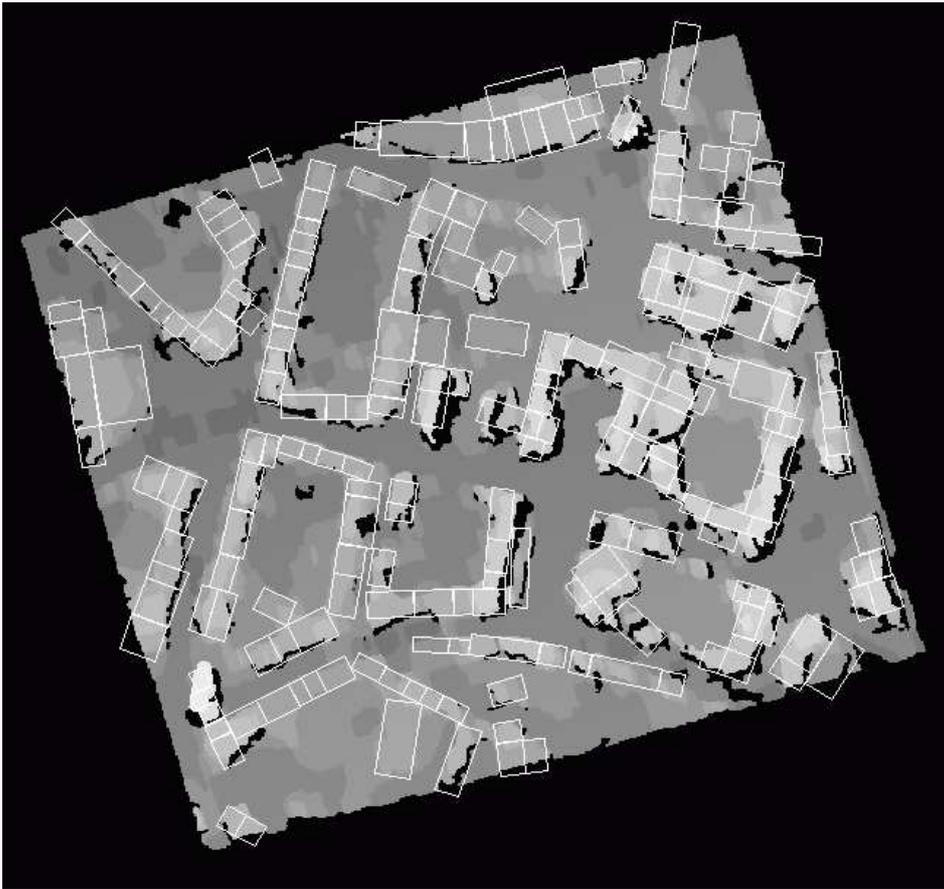


FIG. 8.12: Résultat de l'extraction en n'utilisant que le processus de rectangles

TAB. 8.2: Paramètres utilisés pour le processus de segments.

Grille de points	
r	1m
e	2m
L_{ext}	15m

Attache aux données	
σ_l	0.7
σ	5
δ_r	4m
l_{regul}	8m
th	90%

Poids de l'attache	
ρ_s	3

Paramètres d'interactions	
d_{tmax}	60°
d_{Emax}	5m

Connexion alignée	
$a_{conn.al.}$	1.5
$b_{conn.al.}$	1.5

Connexion orthogonale	
$a_{conn.orth.}$	0
$b_{conn.orth.}$	1.5

Relation d'exclusion	
$a_{excl.s}$	-15

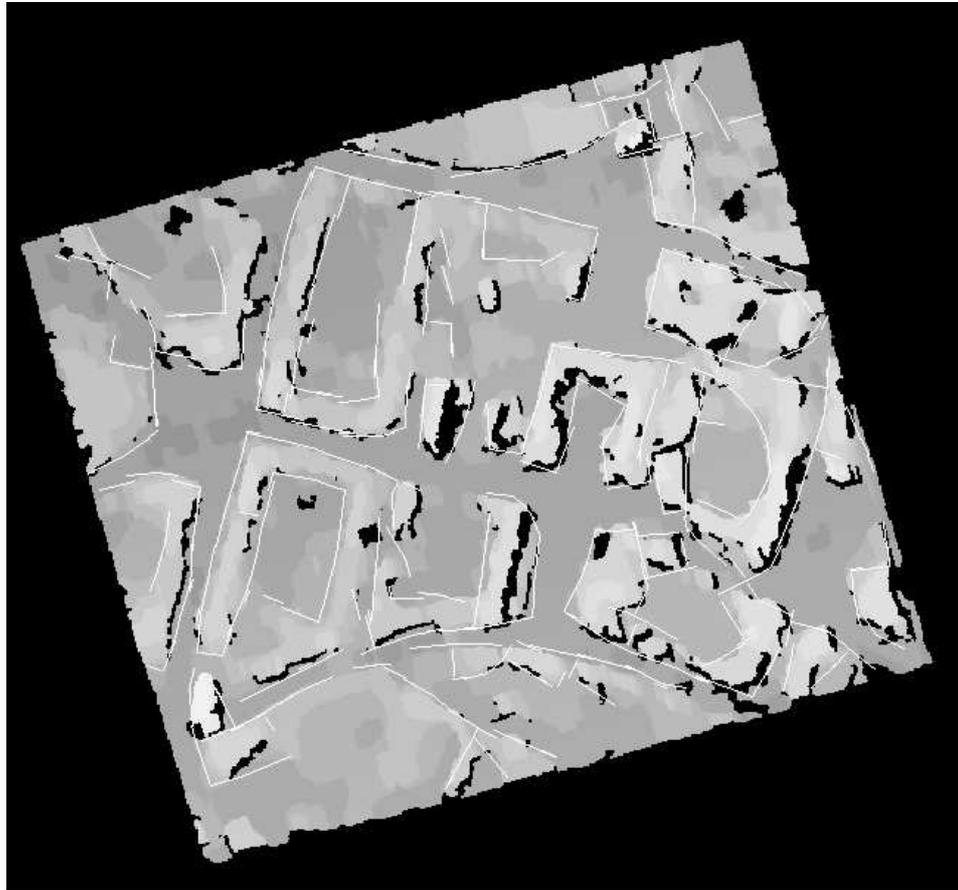


FIG. 8.13: Résultat de l'extraction en n'utilisant que le processus de segments.

TAB. 8.3: Paramètres utilisés pour l'interaction entre les deux processus.

Interaction segment-maison	
δ_{dmax}	6m
d_{tmax}	60°
$a_{seg-rect}$	0.1
$b_{seg-rect.}$	1

Résultat

Nous présentons le résultat d'extraction obtenu en deux temps. La figure 8.15 présente la configuration de segments obtenue, tandis que la figure 8.14 présente la configuration de rectangles. On constate que le fait d'effectuer l'optimisation en même temps a permis d'améliorer chacun des deux résultats.

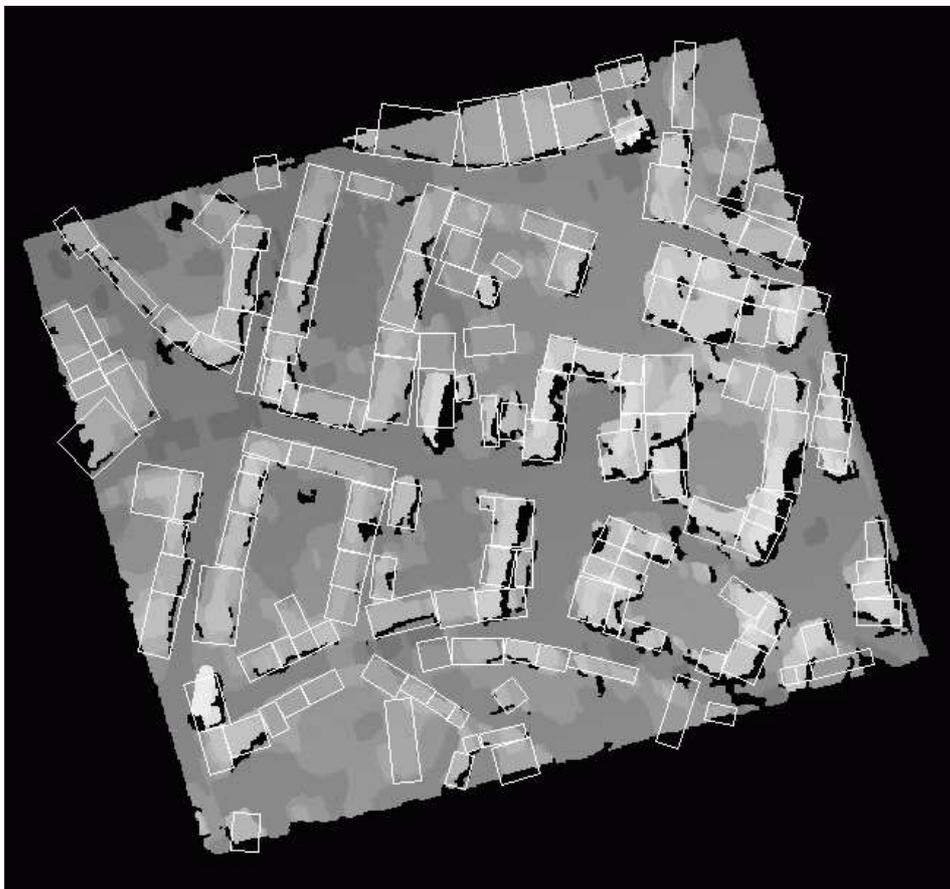


FIG. 8.14: *Résultat de l'extraction (rectangles) en utilisant les deux processus simultanément.*

8.9 Commentaires et conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré qu'il est possible de faire coopérer différents types d'objets. Du point de vue du traitement de l'image, ceci présente un intérêt certain. On peut en effet imaginer mettre en place différents processus rendant compte de la diversité des objets dans une scène. Ceci peut s'appliquer aussi bien au bas niveau, comme nous l'avons fait ici, où nous décomposons recherche de discontinuité et détection de zones homogènes qu'au haut niveau : on pourrait imaginer par exemple introduire dans le cas de scènes urbaines des processus différents représentant les bâtiments, les arbres et les routes.

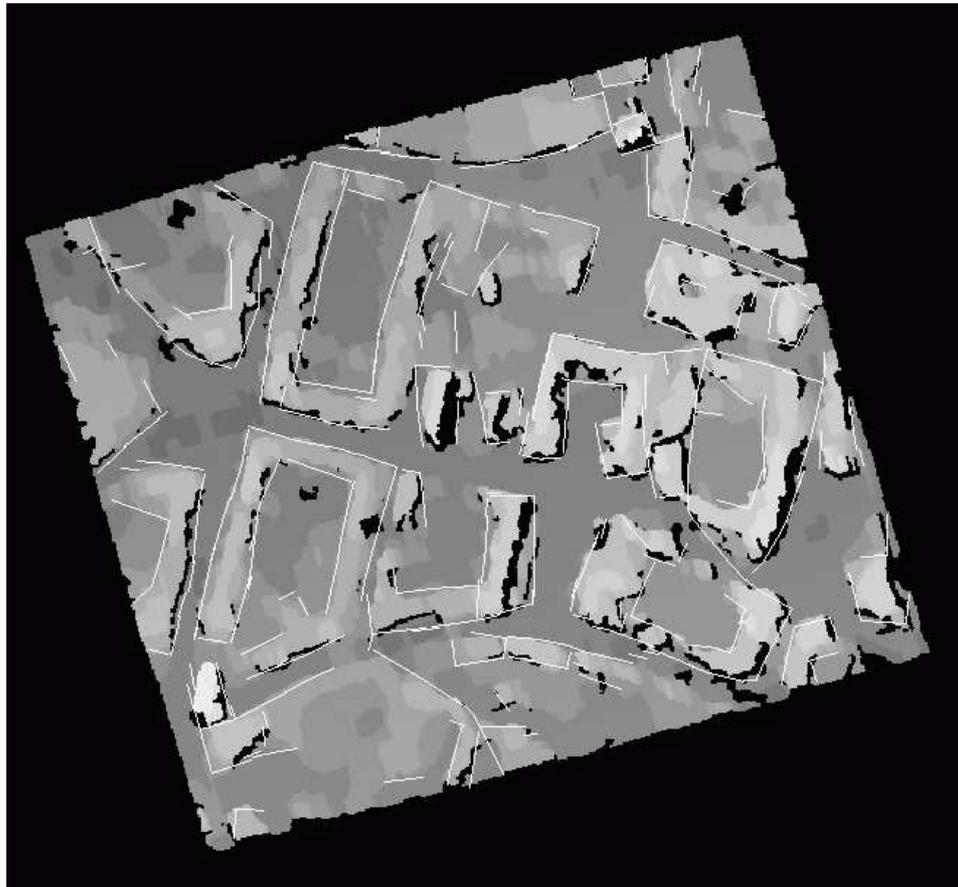


FIG. 8.15: *Résultat de l'extraction (segments) en utilisant les deux processus simultanément.*

Chapitre 9

Optimisation

Nous présentons dans ce chapitre les heuristiques que nous avons utilisées pour tenter d'améliorer les temps de calcul et la qualité des configurations "optimales" trouvées. Nous nous intéressons à deux axes : d'abord au schéma de décroissance de la température utilisé par l'algorithme de recuit simulé, et ensuite à la possibilité d'introduire une mémoire dans l'algorithme.

9.1 Schéma de décroissance

9.1.1 Recuit simulé et décroissance logarithmique

Le recuit simulé permet d'obtenir le maximum global d'une densité de probabilité $f(\cdot)$. Nous avons expliqué en introduction (chapitre 2) le principe de cet algorithme. Il s'agit de construire une suite de densités qui converge vers une somme de masses de Dirac concentrées sur les maxima globaux de la densité f considérée. La convergence de l'algorithme repose sur la proximité de deux éléments successifs de la suite construite.

Une façon de construire une telle chaîne est de considérer la suite de fonctions suivantes :

$$f_t(\mathbf{x}) \propto f^{\frac{1}{T_t}}(\mathbf{x})$$

Lorsque T_t tend vers 0, la suite de densités converge donc vers la densité limite requise. La proximité entre deux éléments successifs de la suite dépend du type et de la vitesse de décroissance de la suite de températures.

On appelle la loi régissant la décroissance de la température : **schéma de décroissance**. D'un point de vue théorique, on sait depuis [Hajek, 1988] que le schéma suivant

$$T_t = \frac{C}{\log(1+t)}$$

fait converger la chaîne vers l'optimum global dès lors que C est supérieur à la profondeur du minimum local le plus profond qui ne soit pas un minimum global de l'énergie. Il faut noter que dans le cas du recuit simulé appliqué à un modèle de processus ponctuels, il existe une démonstration utilisant un schéma de mise à jour de type "birth and death" ([Van Lieshout, 1993]) mais qu'une telle démonstration n'existe pas à notre connaissance dans le cas de mises à jour de type Metropolis-Hasting pour les processus ponctuels.

9.1.2 Décroissance géométrique

Le schéma de décroissance logarithmique souffre d'un inconvénient essentiel : le temps nécessaire pour atteindre une température donnée suit une loi exponentielle. Or, en pratique, on se limite à des temps finis. L'utilisation d'une décroissance géométrique est alors plus appropriée. La loi de température d'un tel schéma s'écrit :

$$T_t = T_0 A^t$$

où la constante $A < 1$ règle la vitesse de décroissance. Une autre possibilité est d'utiliser un schéma géométrique constant par morceaux. L'idée est de considérer une température constante sur des intervalles de temps et de la faire décroître à des instants particuliers. Cela peut paraître inutile, puisqu'il semble équivalent de modifier la constante A . En fait cette idée présente deux avantages : elle permet, d'une part, d'utiliser des constantes plus faibles que celles autorisées par la limite numérique de la machine, et d'autre part d'éventuellement réaliser des tests de convergence pendant les périodes où la température reste fixée.

Ainsi, Brooks propose dans [Brooks *et al.*, 2003] de tester la convergence de la chaîne à chaque étape. La température n'est diminuée que lorsque la chaîne a convergé vers la loi donnée par la densité précédente. Notons que cette idée suppose l'existence d'un critère fiable permettant d'assurer la convergence de la chaîne.

Une autre possibilité consiste à considérer la température comme une variable aléatoire qui peut prendre un nombre fini de valeurs. On effectue alors un recuit simulé sur le système total. Cela donne le "simulated tempering". Cet algorithme a l'avantage de permettre le refroidissement et le réchauffement du système. Il mélange donc l'analogie informatique de la "trempe" au recuit simulé. Le problème que pose cette approche est que le choix des valeurs possibles de la température aléatoire doit être fixé a priori, ce qui peut se révéler délicat.

Enfin, dans [Fachat, 2000], une étude comparative est menée sur les différents types de noyaux de propositions et sur les schémas de décroissance utilisables. On trouvera entre autre un formalisme issu de [Hoffmann et Salamon, 1990] considérant la recherche d'un schéma optimal comme un problème de contrôle : il s'agit de trouver le schéma qui permet d'obtenir la configuration minimale parmi une classe de schéma de refroidissement possibles. Il est possible, dans le cas de problèmes simples, de trouver des solutions analytiques à ce problème de contrôle.

Etant donné la complexité du système que nous cherchons à optimiser, nous nous sommes focalisés sur l'utilisation de schémas de décroissance adaptatifs.

9.1.3 Décroissances adaptatives dans la littérature

Première idée

Une des idées étudiées dans [Fachat, 2000] et qui provient de [Tafelmayer et Hoffmann, 1995] repose sur un schéma géométrique par paliers légèrement modifié. Sur chaque palier i correspondant à l'intervalle de temps $t \in [n_i, n_{i+1}[$, l'énergie moyenne est calculée :

$$\langle U \rangle_i = \frac{1}{n_{i+1} - n_i + 1} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}} U(\mathbf{x}_k) \quad (9.1)$$

Lorsque la fin du palier est atteinte, on compare l'énergie moyenne ainsi mesurée avec celle du palier précédent. La décroissance est acceptée seulement si la nouvelle

moyenne est supérieure à la précédente :

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i & \text{si } \langle U \rangle_{i+1} \leq \langle U \rangle_i \\ AT_i & \text{si } \langle U \rangle_{i+1} > \langle U \rangle_i \end{cases} \quad (9.2)$$

Le but est d'imposer par un moyen pratique que la décroissance soit à peu près réversible. Notons que cet algorithme converge parce que la mesure d'énergie moyenne est remise à jour à chaque période. Ce schéma exhibe deux inconvénients majeurs : d'une part la constante de décroissance nécessite d'être ajustée finement, d'autre part, en pratique, ce schéma s'est avéré être très lent. Nous en proposons une adaptation un peu plus loin.

Vitesse thermodynamique constante

Une alternative consiste en la construction d'un schéma tel que la vitesse thermodynamique soit constante ([Salamon *et al.*, 1988, Ruppeiner, 1988, Ruanaidh et Fitzgerald, 1996]). Cette idée repose sur la prise en compte de propriétés thermodynamiques. En plus de l'énergie moyenne (équation 9.1) on calcule la variance de l'énergie :

$$\langle (\Delta U)^2 \rangle = \frac{1}{n_{i+1} - n_i + 1} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}} (U(\mathbf{x}_k) - \langle U \rangle_i)^2 \quad (9.3)$$

Par cette variance, on peut calculer une capacité thermique :

$$C(T) = \frac{\langle (\Delta U)^2 \rangle}{T^2} \quad (9.4)$$

qui correspond, en thermodynamique, à la dérivée de l'entropie :

$$\frac{dS}{dT} = \frac{C}{T}$$

Pour réaliser une décroissance à variation d'entropie constante, on utilise donc un schéma du type :

$$T_{i+1} - T_i \propto \frac{T}{C} = \frac{T_i^3}{\langle U^2 \rangle_i - \langle U \rangle_i^2}$$

Il faut alors choisir une constante de proportionnalité correcte. Intuitivement, ce schéma tend à limiter la variation de température lorsque la variance d'énergie est trop grande. Malheureusement dans notre cas un tel schéma s'est montré peu intéressant : pour obtenir des temps de calculs raisonnables, le choix de la constante de proportionnalité s'est révélé essentiel et complexe.

9.1.4 Quelques comportements expérimentaux

Nous proposons plus loin un nouveau schéma adaptatif. Pour commencer, nous nous proposons d'étudier quelques comportements expérimentaux.

Décroissance géométrique

On considère un système complexe. Les expériences qui suivent ont été menées en utilisant le modèle à deux objets du chapitre qui précède. Ce système présente différents types d'interaction de différents ordres. La figure 9.1 présente plusieurs lois de décroissance géométrique de la température. Les temps de simulations nécessaires pour atteindre une température minimale ($T_{min} = 10^{-7}$) varient fortement en fonction de la constante. Plus importante, la figure 9.2 montre les courbes d'évolution de l'énergie en fonction de la température pour les différentes lois de décroissance de la figure 9.1. Nous avons tracé pour les diverses simulations de référence le graphique de l'énergie en fonction de la température (il s'agit d'une courbe paramétrée avec $x(t) = -\log(T(t))$ et $y(t) = U(t)$). On constate que pour une température donnée, les différentes simulations donnent des énergies moyennes différentes. Il apparaît que plus la décroissance est rapide plus l'énergie moyenne observée à une température donnée est élevée.

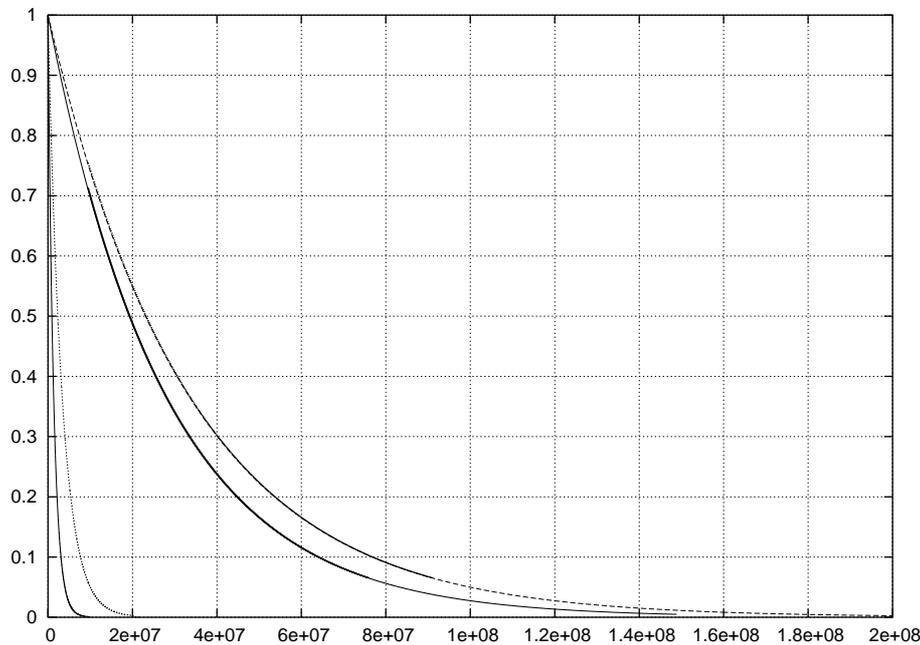


FIG. 9.1: *Différentes décroissances géométriques par morceaux. (Température en fonction du temps).*

Retard de la convergence

La figure 9.2 met en évidence un phénomène de retard de la simulation : pour une température donnée l'énergie moyenne observée dépend des itérations précédentes. Il semble que les “retards” s'accumulent. Nous appelons “retard” le fait que, à un moment donné (en fait un intervalle de temps) de la simulation, les configurations courantes sont d'énergie plus grande qu'attendue :

$$\langle U \rangle_{[t, t+\Delta t]} \geq \mathbb{E}_{T_t} [U(X_t)] \quad (9.5)$$

Point critique

Il est un phénomène particulier que nous avons observé expérimentalement. Supposons que l'on soit à une température T_t avec une énergie moyenne $\langle U \rangle_t$. Les

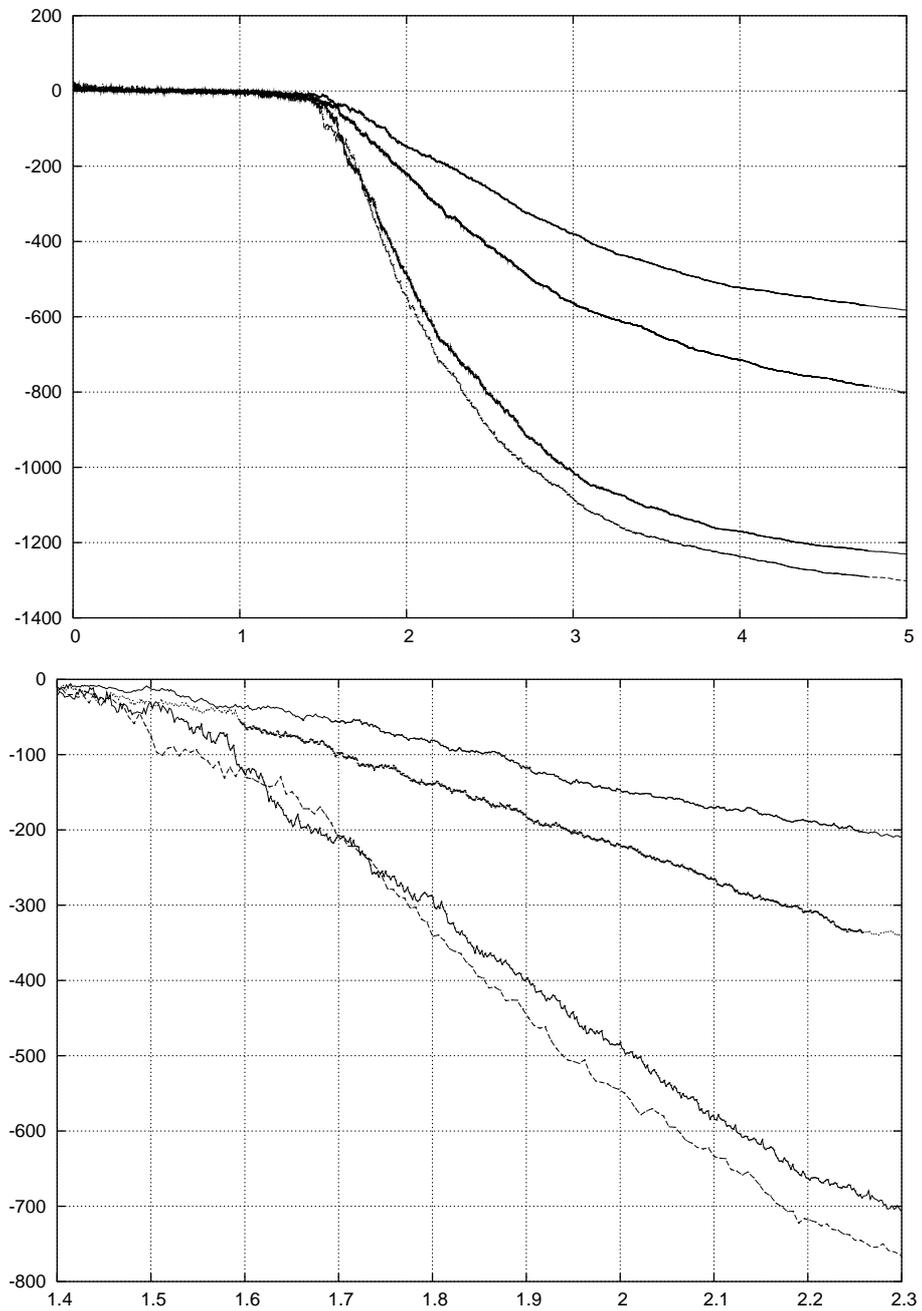


FIG. 9.2: Graphique de l'énergie en fonction de la température pour les diverses simulations de la figure 9.1. Plus la décroissance est rapide, plus les courbes sont hautes. On a tracé $U(t)$ en fonction de $-\log(T(t))$. Au dessus : vue d'ensemble, au dessous : vue rapprochée.

schémas adaptatifs que nous avons rencontrés proposent de tester l'équilibre : on propose une nouvelle température $T_{t+1} < T_t$, on analyse ensuite le comportement de la chaîne, et s'il est correct (équilibre) on accepte de remplacer l'ancienne valeur par la nouvelle. Dans le cas contraire, on revient à l'ancienne température T_t durant un certain temps avant de retenter une nouvelle décroissance.

Or, il peut apparaître un point critique : le fait d'être passé à une température plus basse donne au système un comportement instable, et lorsque l'on revient à la température précédente, l'énergie moyenne ne revient pas à la valeur correspondante. La figure 9.3 présente ce comportement. On peut intuitivement comparer ce phénomène avec le phénomène physique de surfusion¹.

Ce phénomène témoigne en réalité d'une inadéquation entre la vitesse de décroissance et le comportement du système à cette température. Il s'agit d'une température où le système se structure. Il convient de passer suffisamment lentement cette température. Le problème que posent en effet ces points critiques est qu'ils sont sources d'accumulation de retard. Ainsi, la figure 9.4 présente une simulation utilisant une décroissance adaptative ne tenant pas compte de la détection de point critique. On constate que la vitesse de décroissance diminue en regardant l'évolution des intervalles de temps entre les paliers de température. On observe un phénomène critique puisque les passages successifs à une même température donnent lieu à des énergies de plus en plus basses. Malgré cela, le système accepte de continuer la décroissance, surtout au début de la transition.

Du point de vue expérimental, ce comportement est particulièrement intéressant. Le schéma que nous présentons plus loin cherche à utiliser la détection de ce phénomène pour ralentir brutalement la décroissance de température afin de passer les températures critiques le plus lentement possible.

Notons qu'il semblerait par ailleurs logique de faire en sorte que la décroissance accélère entre deux températures critiques.

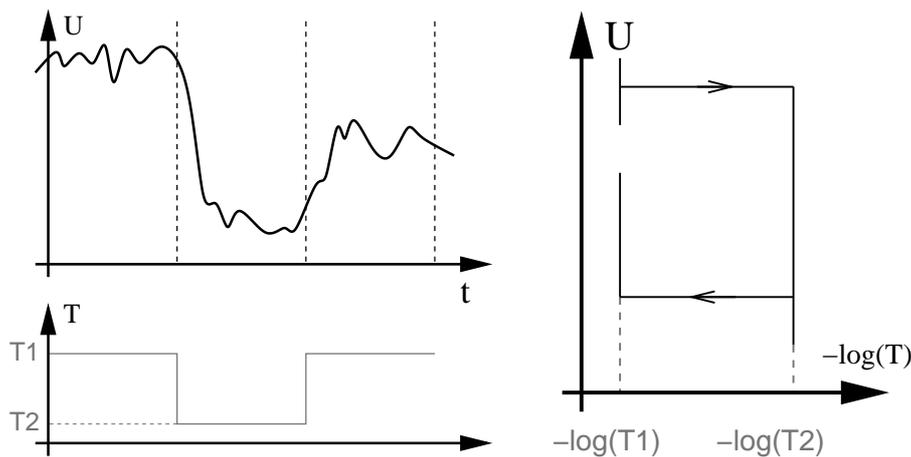


FIG. 9.3: Illustration du phénomène de température critique. Le fait de passer brièvement du temps sous une certaine température provoque une chute de l'énergie moyenne.

¹Il s'agit d'un retard au changement de phase. On peut observer par exemple de l'eau liquide à des températures négatives, sous certaines conditions.

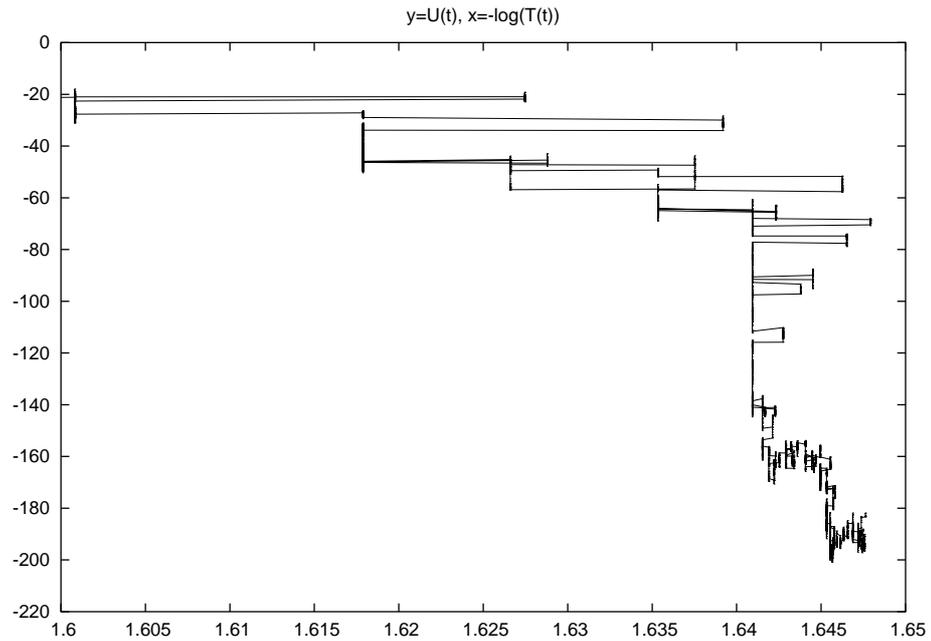


FIG. 9.4: *Illustration expérimentale du phénomène de température critique. $y = U(t)$, $x = -\log T(t)$. La progression temporelle se fait approximativement de la droite vers la gauche. On remarque que la vitesse de décroissance diminue, mais pas suffisamment rapidement, comme le montre la présence d'un point critique ($T_{cr} \simeq 0.194$, $-\log(T_{cr}) \simeq 1.64$).*

9.1.5 Un nouveau schéma de décroissance adaptatif

Nous proposons ici un schéma de décroissance qui s'est révélé être relativement efficace. Le premier point de l'heuristique considérée concerne le test d'équilibre. Nous proposons un test moins exigeant que le test 9.2. Un deuxième point concerne l'adaptation de la vitesse de décroissance. Nous proposons un mécanisme qui permet d'augmenter ou de diminuer la constante de décroissance géométrique. Ce mécanisme permet d'explorer plus longuement l'espace d'état quand il y a des ambiguïtés importantes. Le dernier point traite de la prise en compte des températures critiques.

Division en périodes et sous périodes

Nous considérons des périodes de temps Δ_t . Typiquement, dans nos applications ces périodes sont fixées à 10000, 20000 ou 30000 itérations. Nous divisons ensuite ces périodes en L sous périodes de longueurs δ_t . Nous avons pris en général $L = 10$. La température ne peut être diminuée qu'au début de chaque grande période. On note $\langle U \rangle_i$ la mesure d'énergie moyenne sur la i -ième grande période (de longueur Δ_t) et $\langle U \rangle_{(i,k)}$ la mesure d'énergie moyenne sur la k -ième sous période (de longueur δ_t) de la i -ième grande période.

Test d'équilibre

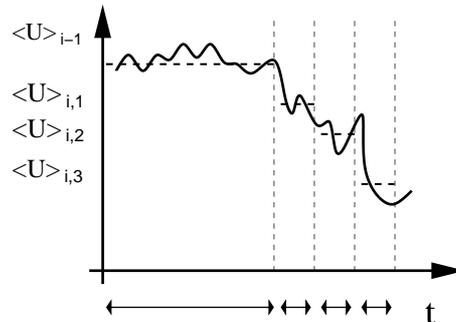
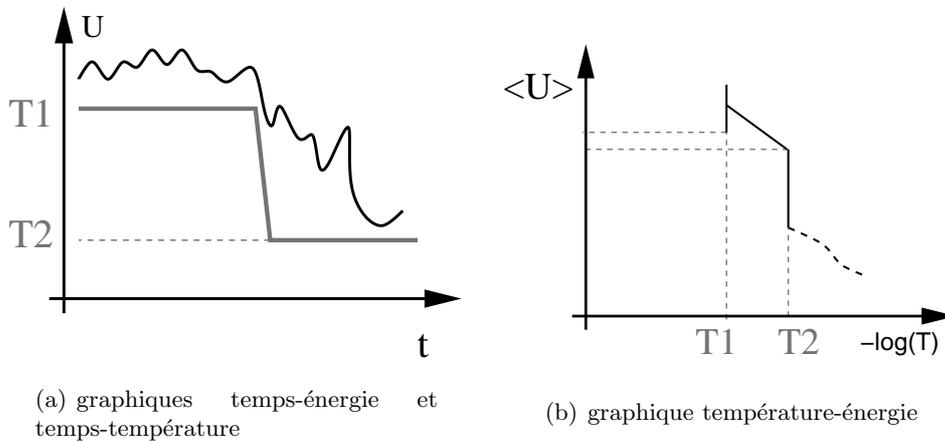
Dans le schéma 9.2 le test d'équilibre repose sur l'utilisation d'une grande période : la nouvelle énergie moyenne est comparée à la précédente. Dans le cas de systèmes complexes comme les modèles que l'on cherche à optimiser, ce

critère ne nous a pas paru approprié car trop exigeant. Il nous semble en effet suffisant d'assurer que l'on peut revenir en arrière durant un cours instant. Nous avons donc choisi de n'utiliser que des sous périodes. Le test que nous utilisons est illustré par la figure 9.5 et se décompose comme précisé ci-dessous.

Nous considérons qu'il y a perte de l'équilibre entre i et $i + 1$ si :

$$N_{plus} = \text{card}\{k \text{ t.q. } \langle U \rangle_{i+1,k} \geq U_{ref} - \epsilon\} < n_1 \quad \text{avec} \quad U_{ref} = \langle U \rangle_i \quad (9.6)$$

où ϵ est un paramètre de sensibilité (dans nos applications, $\epsilon = 0.01$). Si il y a au moins n_1 sous périodes telles que les énergies moyennes associées sont plus grandes que l'énergie moyenne de la période précédente, on considère qu'il y a équilibre. Le rapport n_1/L définit donc le pourcentage de temps d'excursion au dessus de la valeur moyenne précédente requis pour pouvoir considérer qu'il y a équilibre.



(c) mesures d'énergies moyennes permettant de diagnostiquer le mauvais comportement

FIG. 9.5: Exemple de mauvais comportement du recuit simulé : après une décroissance, on n'observe pas de retour au dessus du niveau moyen précédent.

En pratique nous avons pris une valeur $n_1 = 1$ ou $n_1 = 2$ pour $L = 10$. Nous proposons donc de tester la réversibilité en regardant s'il est possible de faire une excursion en arrière le temps d'une ou deux sous périodes (10% ou 20% de la grande période). Intuitivement, sur la figure 9.5 b), cela revient à tester si les plages d'énergies explorées à chacune des deux températures successives se recouvrent un minimum ou non.

Accélération-Décélération

Si une décroissance est refusée, il paraît illogique de retenter la même. En effet, si l'on a bien convergé vers la loi désirée pendant la période $i - 1$, mais que le saut de température suivant n'est pas accepté, il semble approprié de considérer que cela est dû à un trop grand écart entre les lois à température T_i et T_{i-1} . Nous proposons donc de ralentir la décroissance lorsque l'équilibre n'est pas assuré. Pour cela on applique le schéma suivant :

$$A_{i+1} = A_i^r \quad \text{avec } r < 1 \quad \text{si } N_{plus} < n_1$$

Cela augmente donc la constante A et ralentit la décroissance. Comme nous le détaillons plus loin (partie 9.1.5), on revient à la température T_i le temps de quelques périodes pour rattraper le retard, avant de proposer une nouvelle décroissance.

Réciproquement, lorsque $N_{plus} \geq n_2$ on considère que la transition de température n'a pas été suffisamment importante. On accélère alors la décroissance en utilisant le schéma inverse.

$$A_{i+1} = A_i^{\frac{1}{r}} \quad \text{avec } r < 1 \quad \text{si } N_{plus} \geq n_2$$

Il y a un réglage de paramètre à faire. Nous avons choisi $L = 10$, $n_1 = 1$, $n_2 = 5$ et $r = 0.85$. Ces valeurs se sont montrées robustes. Par ailleurs, pour éviter d'arriver numériquement sur des constantes $A_i = 1$, nous avons imposé la condition suivante :

$$A_i \leq 1 - e^{-16}$$

Température critique

Le schéma tel qu'il est présenté fonctionne relativement bien en pratique, mais il faut faire attention aux température critiques : la simulation de la figure 9.4 a été obtenue à l'aide du schéma précédent. On remarque que le schéma d'accélération-décélération n'est pas adapté aux modifications brutales de la vitesses de décroissance nécessitées par les points critiques. Nous avons vu, au travers de l'analyse de la figure 9.5 que la décélération proposée n'est pas suffisamment importante au niveau du point critique.

Cela provient du phénomène suivant : lors des premières tentatives de décroissance, l'énergie décroît brusquement. Les tentatives de décroissances sont alors rejetées. On passe alors une ou plusieurs périodes de rattrapage à la température précédent la tentative de décroissance. L'évaluation de la nouvelle énergie moyenne de référence U_{ref} se fait donc alors que le système est en train de "revenir" de niveaux d'énergie bas. Par conséquent la tentative de décroissance suivante risque d'être acceptée à tort puisque l'estimation de U_{ref} aura alors été biaisée.

Nous proposons, par conséquent, de stopper la décroissance et de revenir à la température précédente le temps de retrouver des énergies moyennes cohérentes avec cette température. Pour cela nous effectuons un test d'équilibre avec l'énergie moyenne correspondant à la période précédant la tentative de décroissance. A cause des points critiques, il peut malheureusement arriver que ce test d'équilibre ne soit jamais vérifié, parce que l'énergie moyenne du système est définitivement bloquée autour d'une valeur bien plus faible que celle observée lors du premier passage à cette température. Nous suggérons, lorsque l'on perd l'équilibre, d'attendre nb_{inhib} périodes avant de remettre U_{ref} à jour, à moins de repasser au dessus de la valeur moyenne précédant la tentative de décroissance.

L'algorithme

Voici l'algorithme utilisé, l'indentation servant à délimiter les blocs de commandes.

```

T = Tinit                                     Initialisations
Tref = Tinit
r = 0.85
temref = 0
Uref = 0

Tant que T > Tmin                             Debut grande periode
  nbdec = 0
  Umes = 0
  Umoy = 0
  Nplus = 0

  Si temref = 1
    Tref = T                                     Mise a jour temperature
    T = AT

  Pour k = {1, ..., N}                          debut petite periode
    Pour l = {1, ..., δt}
      Simule(systeme, T)
      Umes = Umes + energie(systeme)

      Umes = Umes / δt
      Umoy = Umoy + Umes

      Si Umes > Uref - ε
        Nplus = Ncroiss + 1

    Si Nplus ≥ n1 alors eq = 1 sinon eq = 0      equilibre

    Si Nplus ≥ n2 alors rem = 1 sinon rem = 0    on remonte beaucoup

    Si temref ≤ 0 alors retour = 1 sinon retour = 0 on revient d inhibition

    Si temref < 1
      Si eq = 1
        temref = 1
      Sinon
        temref = temref + 1

    Si temref = 1
      Si eq = 1 ou retour = 1                    Mise a jour de Uref
        Uref = Umoy / N

      Si eq = 0                                  on ralentit
        T = Tref
        A = Ar
        temref = -nbinhib + 1                  on bloque la valeur de Uref

    Si rem = 1 et retour = 0                    on accelere
      A = A1/r

```

9.1.6 Explications

Le scénario de l'algorithme expliqué ci-dessus peut paraître obscur. Nous nous proposons ici de récapituler les différents comportements qu'il adopte.

On se place dans le cas où la décroissance s'est passée correctement lors de l'étape précédente $i - 1$. On dispose donc de l'estimée $U_{ref} = \langle U \rangle_{i-1}$ de la moyenne de l'énergie sur la grande période précédente. Au début de la grande période i , on effectue la décroissance de température avec la constante courante A . Une fois la période terminée, l'algorithme étudie le comportement qu'a eu l'énergie sur cette période.

- Si l'équilibre est assuré ($N_{plus} \geq n_1$), deux cas sont possibles :
 - l'énergie moyenne a passé au moins n_2 sous périodes au dessus de l'énergie de référence U_{ref} ($N_{plus} \geq n_2$), auquel cas on diminue A (accélération de la décroissance)
 - $n_1 \leq N_{plus} < n_2$, auquel cas A reste inchangée.
 La période i se termine alors avec la mise à jour de l'énergie de référence : $U_{ref} = \langle U \rangle_i$, tandis que la période $i + 1$ commence avec la mise à jour de la température : $T_{i+1} = AT_i$
- Si l'équilibre n'est pas assuré, on revient à la température précédente : $T_{i+1} = T_{i-1}$ et on augmente la constante de décroissance : $A = A^r$ (décélération). U_{ref} reste inchangé, c'est à dire $U_{ref} = \langle U \rangle_{i-1}$. Par ailleurs tem_{ref} est mis à $tem_{ref} = -nb_{inhib} + 1$ ce qui signifie que l'on va passer nb_{inhib} périodes à la même température, sauf si entre temps, l'énergie est repassée au dessus de U_{ref} le temps de n_1 sous périodes au moins.
 - Si c'est le cas, on recommence la décroissance normalement, avec la nouvelle constante A issue de la décélération ;
 - sinon, cela signifie que l'on a passé nb_{inhib} périodes à la température T_{i-1} sans pour autant que l'énergie moyenne ne soit revenue suffisamment longtemps au dessus de $\langle U \rangle_{i-1}$. On met alors à jour l'énergie de référence : $U_{ref} = \langle U \rangle_{i+nb_{inhib}}$, on laisse la température inchangée $T_{i+nb_{inhib}+1} = T_{i-1}$, on augmente encore A (décélération à nouveau), et on relance un cycle d'inhibition : $tem_{ref} = -nb_{inhib} + 1$.

Les paramètres de ce schéma de décroissance sont : la constante r d'accélération et de décélération, les valeurs n_1 et n_2 de test d'équilibre, le nombre de périodes d'inhibition nb_{inhib} , les longueurs des périodes et des sous périodes, Δ_t et δ_t et ϵ le paramètre de sensibilité.

9.1.7 Résultats et commentaires

Nous présentons ici quelques résultats pour comparer le schéma proposé à différentes décroissances géométriques. Nous optimisons le modèle à deux éléments (rectangles et segments) du chapitre précédent. Les simulations de référence ont été obtenues en utilisant des schémas géométriques par morceaux. Nous précisons donc les constantes utilisées et la longueur des plateaux. Il faut noter que le problème est très complexe : il y a deux types d'objets, pour chaque type d'objets il y a deux interactions attractives et une interaction répulsive, et il y a une interaction entre des objets de types différents. Sur ce problème, les schémas 9.2 et la décroissance à vitesse thermodynamique constante se sont montrés très lents.

Comportement général

Le premier résultat a été obtenu avec $nb_{inhib} = 1$, $L = 20000$, $N = 10$, $n_1 = 1$, $n_2 = 5$. Nous comparons quatre simulations. Les énergies en fonctions de la température sont présentées sur la figure 9.6. Le tableau 9.1 présente les vitesses de décroissance correspondantes. La dernière colonne donne le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre $T_{min} = 10^{-7}$ en partant de $T_{init} = 1$. On constate sur la

Simulation	A	Période	Temps pour atteindre T_{min}	Energie finale
a	0.9985	2000	20 millions d'itérations	-610
b	0.9994	2000	35 millions	-825
c	0.99994	2000	200 millions	-1330
d	adaptative	20000	250 millions	-1490

TAB. 9.1: *Différentes simulations utilisées pour analyser le schéma adaptatif proposé.*

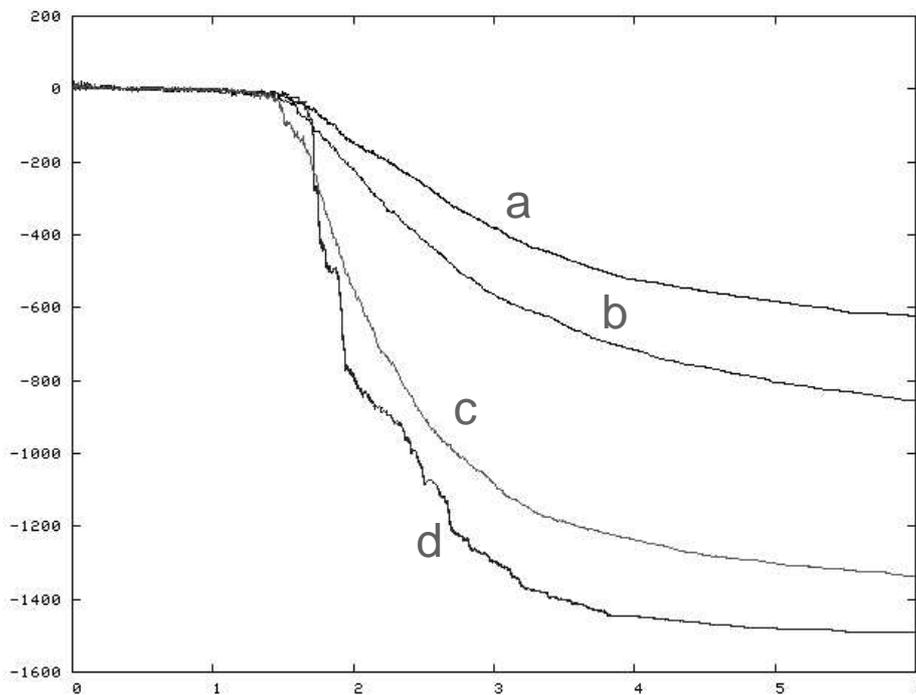


FIG. 9.6: *Courbes des évolutions de l'énergie en fonction de la température ($x = -\log(T)$, $y = U$) pour les différentes simulations. Les courbes a, b et c sont obtenues avec des décroissances géométriques, la courbe d avec la décroissance adaptative proposée.*

figure 9.7 (température en fonction du temps) que le schéma de décroissance proposé permet d'attendre plus longtemps aux températures intéressantes, et de passer plus vite les plages de températures inintéressantes. La figure 9.8 montre une vue rapprochée de l'évolution de la température au début de la simulation, alors

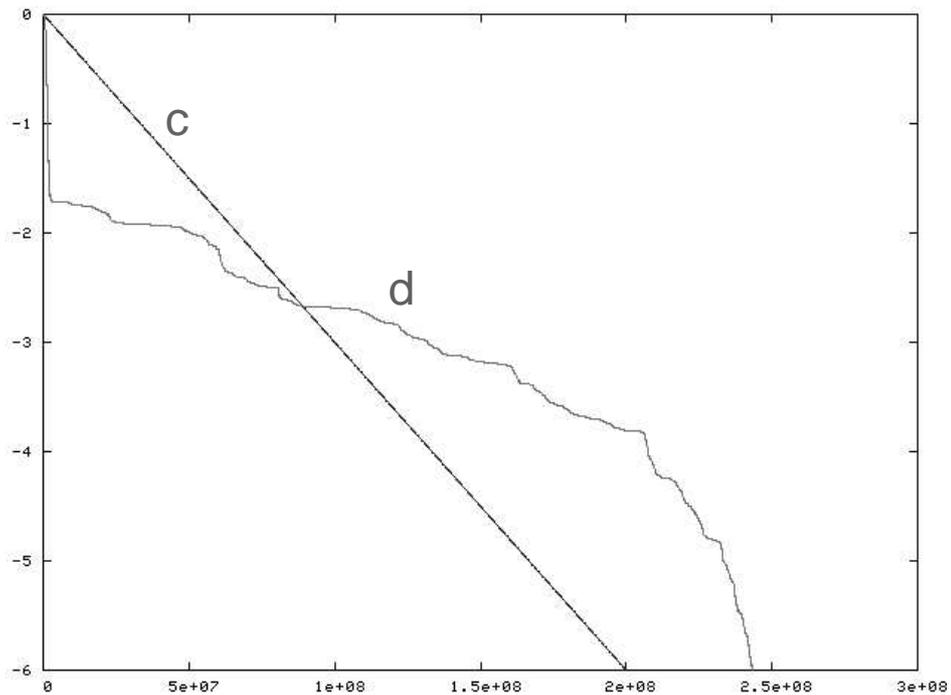


FIG. 9.7: Evolution de la température en fonction du temps ($x = t$, $y = \log(T)$) pour les simulations *c* et *d*.

que la température est trop haute. On constate que le mécanisme d'accélération joue son rôle.

Les figures 9.9 et 9.10 montrent les détails de la simulation autour de la zone critique. On constate que la décélération brutale a effectivement lieu mais un peu trop tard. Ce défaut est rattrapé par le temps passé aux températures intéressantes.

Pour finir, la figure 9.11 montre l'évolution globale de l'énergie en fonction du temps dans le cas de deux simulations : la décroissance géométrique lente et la décroissance adaptative proposée. Il faut constater que la décroissance adaptative permet de mieux utiliser le temps alloué.

Choisir un comportement sous-optimal

L'avantage apparent de la méthode est qu'elle ne nécessite pas de lancer plusieurs simulations pour trouver la constante de décroissance géométrique la plus adaptée au problème. L'inconvénient est évidemment que le temps nécessité pour optimiser est relativement long (dans le cas des simulations ci-dessus il a fallu quelques dizaines d'heures pour les deux simulations *c* et *d*). Si le but est d'obtenir le meilleur résultat possible, le schéma adaptatif semble convenir. L'avantage, par contre, des schéma géométriques, est qu'ils permettent de fixer un temps d'optimisation.

Dans le même esprit, il peut être intéressant d'imposer un comportement sous-optimal tout en gardant les avantages de la décroissance adaptative. Pour cela nous avons imposé une vitesse de décroissance minimale. Lors d'une décélération, (augmentation de A) nous imposons que $A < A_{max}$. Par exemple, nous avons choisi d'imposer $A < 1 - \exp(-10) = 0.99$ pour une période de $L = 20000$. Cela signifie que l'on espère aller de T_{init} à T_{min} en 35 millions d'itérations,

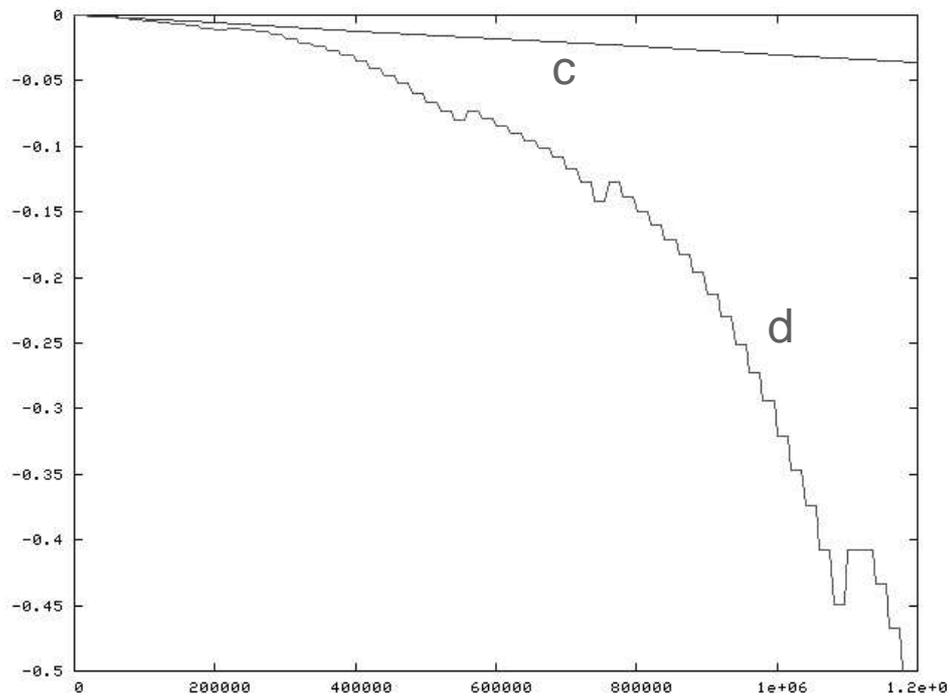


FIG. 9.8: Evolution de la température en fonction du temps ($x = t$, $y = \log(T)$), début de la simulation.

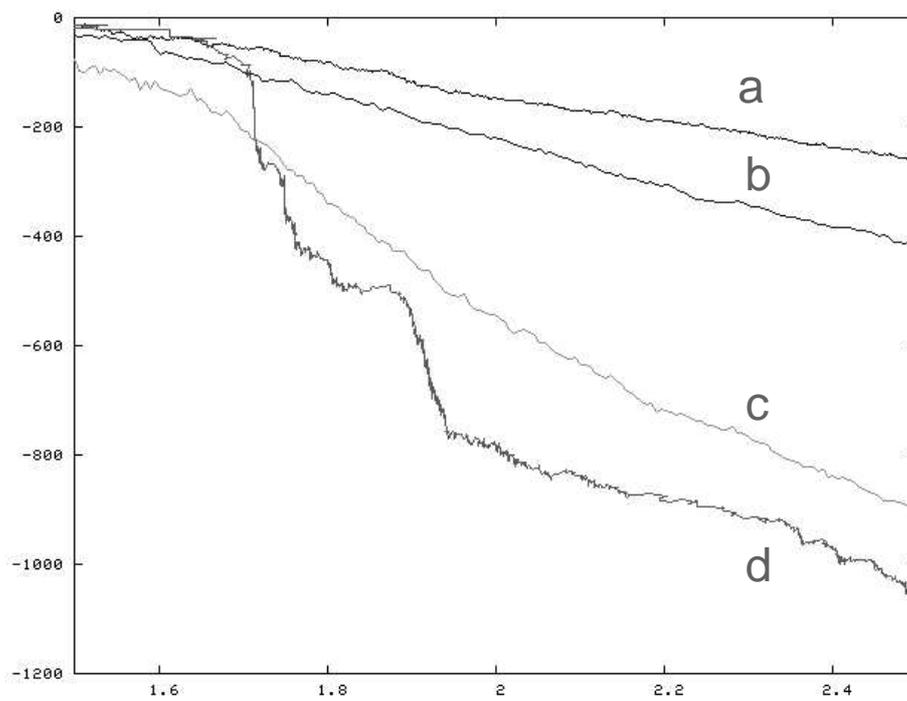


FIG. 9.9: Evolution de l'énergie en fonction de la température, vue rapprochée de la zone critique

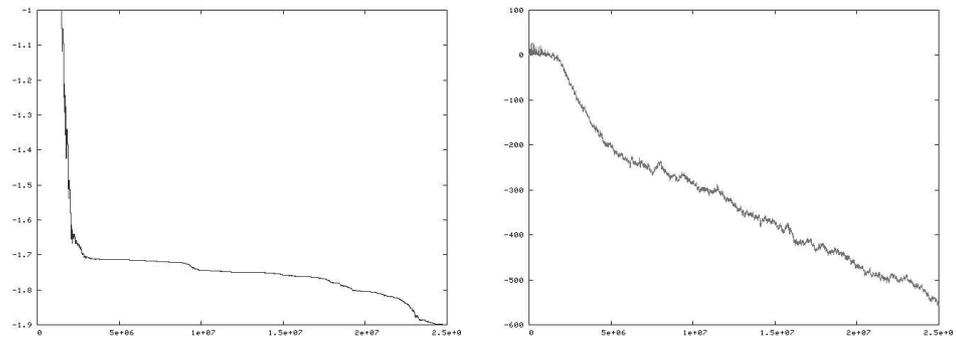
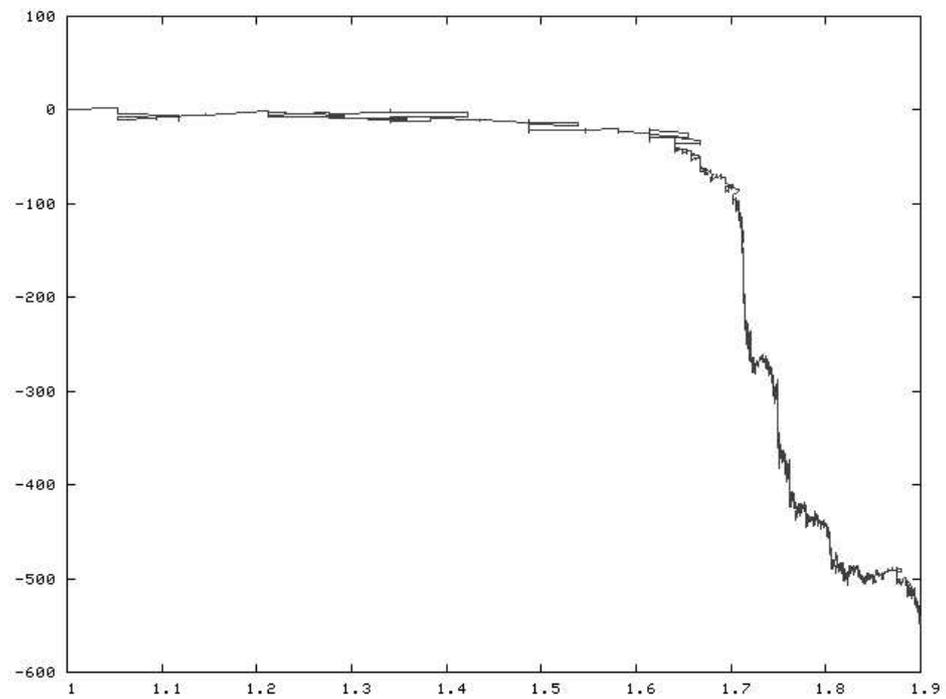
(a) $x = t, y = \log(T)$ (b) $x = t, y = U$ (c) $x = -\log(T), y = U$

FIG. 9.10: Détails du passage de la température critique (simulation d).

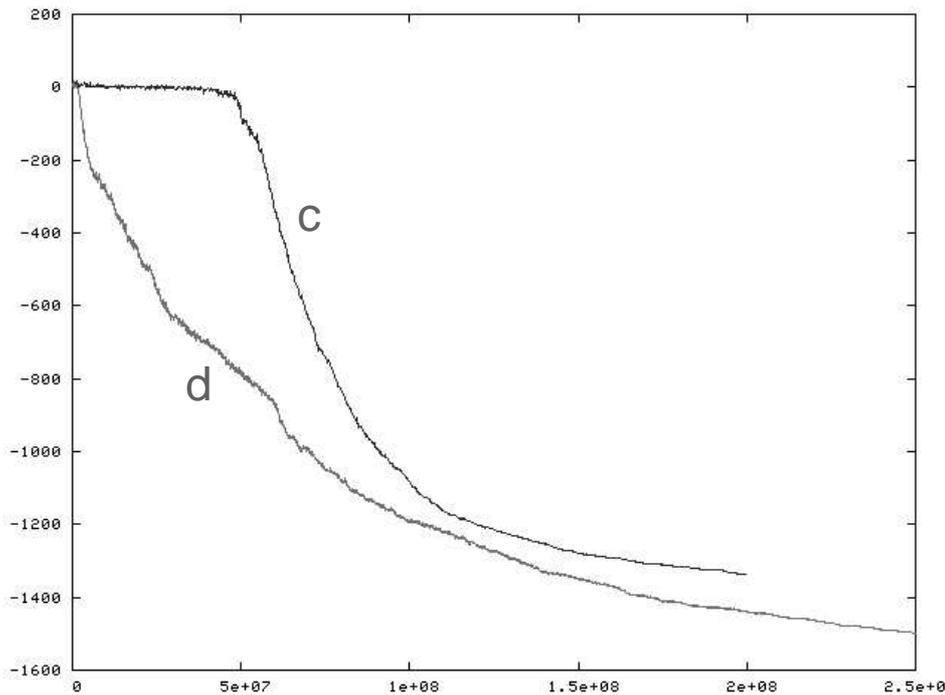


FIG. 9.11: *Energie en fonction du temps. On constate que la décroissance adaptative exploite mieux la plage de temps utilisée que la décroissance géométrique.*

dans le pire cas. Notons que d'une part le fait de rester à des températures constantes peut ralentir le processus, et que d'autre part, on attend de la méthode qu'elle accélère la décroissance au début de la simulation et que donc on ne peut déterminer à l'avance le temps exact nécessaire pour atteindre T_{min} . Nous avons comparé la simulation obtenue avec une simulation où $A = 0.9994$ et qui rejoint la température minimale en 37 millions d'itérations. La figure 9.12 présente le résultat. On constate, en particulier grâce au graphique temps-énergie, que la plage de temps allouée est utilisée au mieux par la décroissance adaptative.

Cas de problèmes plus simples

Nous considérons dans ce paragraphe un problème plus simple que celui des paragraphes précédents : nous avons supprimé les segments du problème. Le problème se résume à la recherche d'une configuration optimale de rectangles. Il n'y a donc plus qu'un type d'objets, deux types d'interactions attractives et un type d'interaction répulsive.

La première expérience compare la décroissance adaptative sous-optimale du paragraphe précédent ($A < 1 - \exp(-10) = 0.99$) avec la décroissance géométrique correspondante ($L = 2000$, $A = 0.9994$) dont on attend qu'elles nécessitent toutes les deux le même nombre d'itérations pour atteindre T_{min} . En pratique, il est apparu que la décroissance adaptative nécessite moins d'itérations et donne un meilleur résultat que la décroissance géométrique. La figure 9.13 montre le résultat obtenu. La courbe en gris foncé correspond à la décroissance géométrique, la courbe en gris clair à la décroissance adaptative à vitesse minorée. Pour terminer, nous avons voulu comparer ces deux résultats à une décroissance adaptative dont la vitesse n'est pas minorée. Nous avons donc à nouveau imposé une vitesse minimale $A < 1 - \exp(-16) = 0.99999989$ pour des raisons numériques. La

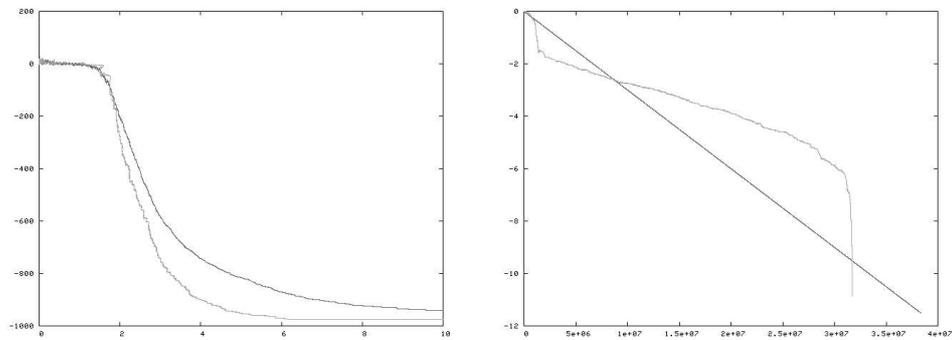
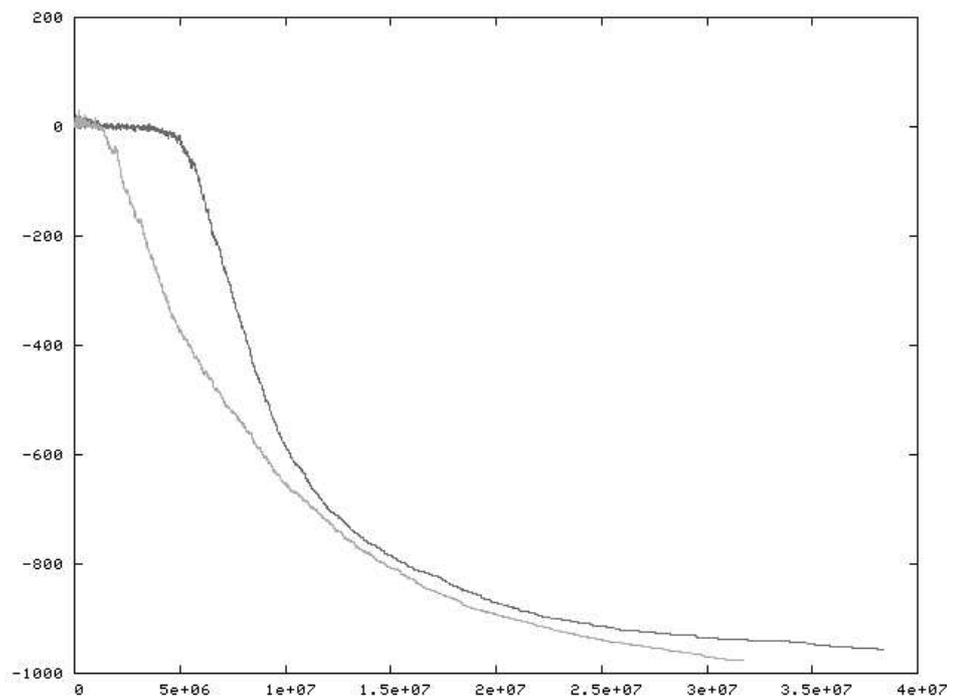
(a) $x = -\log(T), y = U$ (b) $x = t, y = T$ (c) $x = t, y = U$

FIG. 9.12: Comportement lorsque l'on impose une vitesse de décroissance minimale (en gris : décroissance adaptative, en noir : décroissance géométrique). Le résultat est meilleur lorsque l'on utilise une décroissance adaptative.

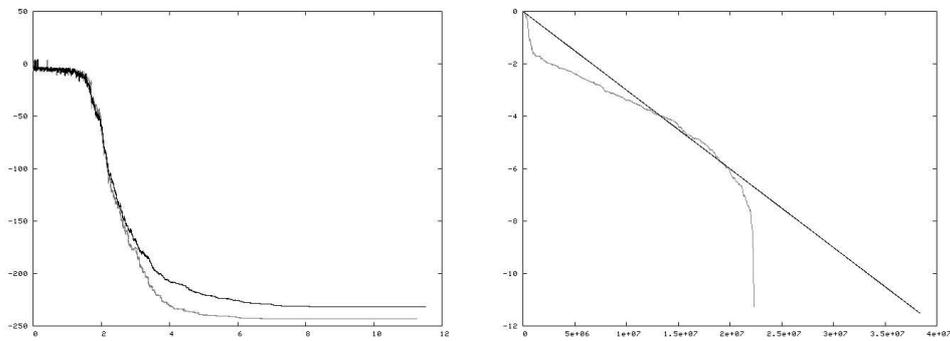
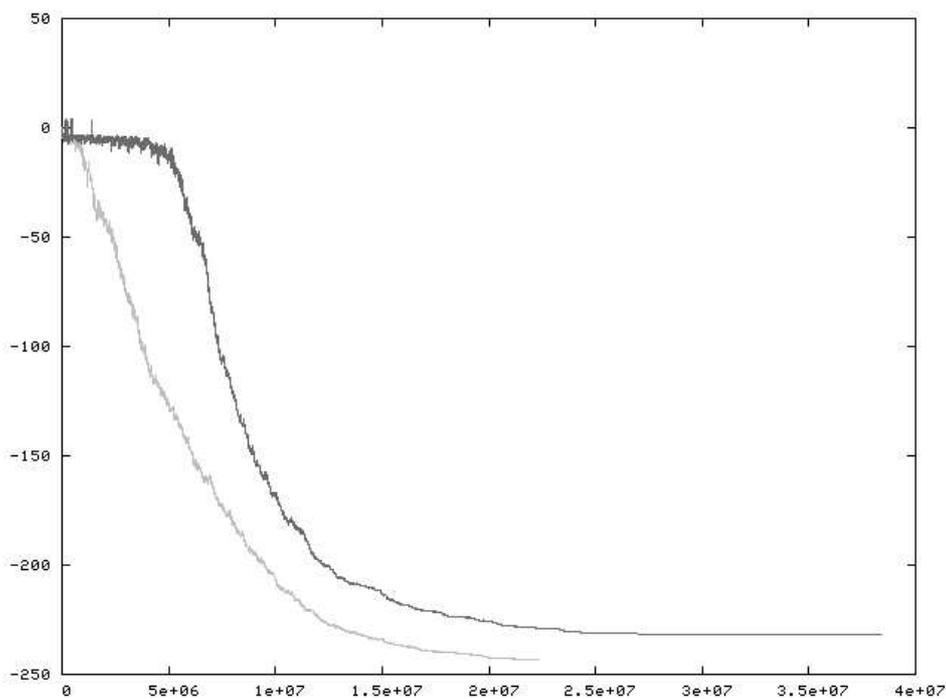
(a) $x = -\log(T), y = U$ (b) $x = t, y = \log(T)$ (c) $x = t, y = U$

FIG. 9.13: Cas d'un modèle plus simple qui ne tient compte que des rectangles. Comparaison entre une décroissance géométrique (courbes noires) et une décroissance adaptative avec vitesse minimale imposée (courbes grises). Le résultat est meilleur en moins de temps en utilisant la décroissance adaptative.

figure 9.14 montre le comportement obtenu. On notera que le résultat est bien meilleur que ceux obtenus par les deux méthodes précédentes et que le temps nécessaire (90 millions d'itérations) n'est à peu près que le double du temps utilisé par les précédentes simulations.

Simulation	A	Période	Temps pour atteindre T_{min}	Energie finale
Géométrique	0.9994	2000	35 millions d'itérations	-230
Adaptative	$\leq 1 - e^{-10}$	20000	23 millions	-240
Adaptative	$\leq 1 - e^{-16}$	20000	90 millions	-345

TAB. 9.2: Performance de différents schémas sur un problème plus simple.

Influence des paramètres

Le paramètre le plus important est la période L . Il faut choisir une valeur qui soit cohérente avec la corrélation de la chaîne de Markov. Les autres paramètres, n_1 , n_2 et r sont relativement robustes. Il faudrait faire une évaluation plus exhaustive de l'incidence des différents paramètres impliqués sur le comportement de la méthode.

9.1.8 Conclusion

Le schéma de décroissance adaptative a montré son efficacité en pratique, puisque nous l'avons utilisé presque systématiquement.

Parmi les avantages certains de l'approche, il faut d'abord noter que lorsque l'on change de taille d'image, il est intéressant de ne pas avoir à régler la nouvelle vitesse de décroissance. Ensuite, le schéma adaptatif permet de partir d'une température initiale haute, sans perdre trop de temps entre cette température initiale et la première température critique. Enfin, il y a un rapport entre l'optimisation et les modèles. En effet, le poids d'une interaction définit la température critique de cette interaction (c'est à dire, la température à partir de laquelle cette interaction a un poids non négligeable dans les variations d'énergies). L'utilisation d'une décroissance adaptative permet, au besoin, d'espacer les températures critiques sans perdre le temps d'optimisation lié à l'écart entre ces températures.

Il faut noter pour finir, qu'il reste beaucoup de points d'interrogation liés à cette décroissance adaptative. Il conviendrait sans aucun doute de tester le schéma sur une classe de problèmes connus (modèle d'Ising, problème du voyageur de commerce) afin d'évaluer correctement son efficacité et l'influence des différents paramètres.

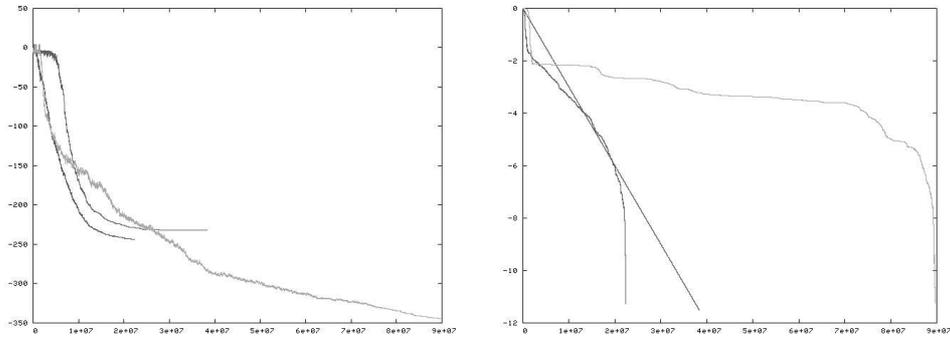
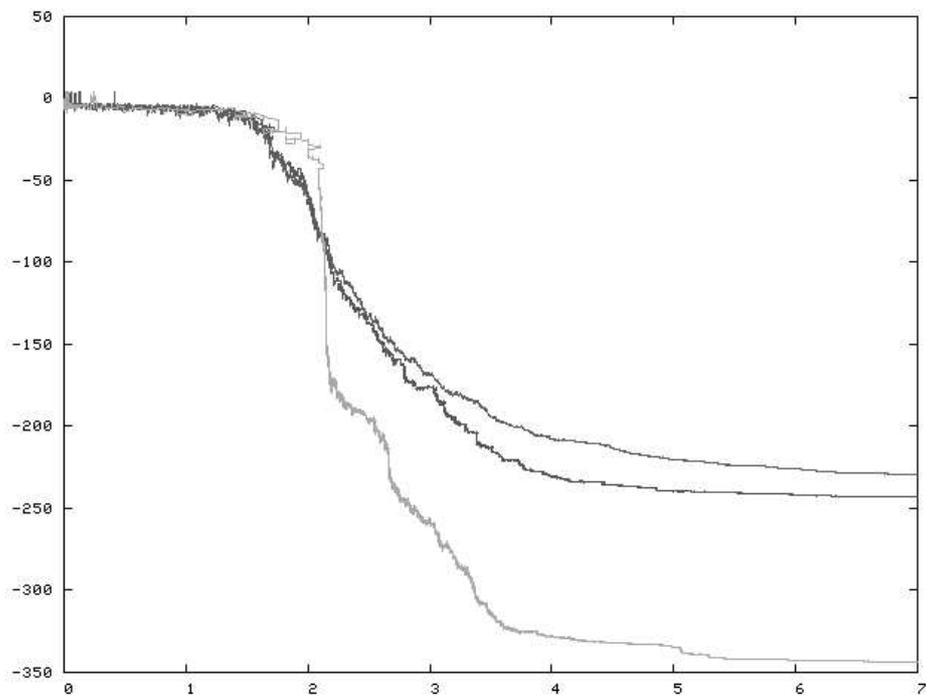
(a) $x = t, y = U$ (b) $x = t, y = \log(T)$ (c) $x = -\log(T), y = U$

FIG. 9.14: Cas d'un modèle plus simple qui ne tient compte que des rectangles. Comparaison entre une décroissance géométrique, une décroissance adaptative avec vitesse minimale imposée (courbes noires) et une décroissance adaptative sans vitesse minimale imposée (courbes grises).

9.2 Ajout d'une mémoire

9.2.1 Algorithmes génétiques

Les approches par algorithmes génétiques sont attractives parce qu'elles mélangent des notions qui intuitivement semblent être efficaces pour optimiser des problèmes complexes. Il s'agit de la mémoire, de la sélection et de la diversité. Avant de détailler brièvement ces différentes notions, rappelons que les algorithmes génétiques reposent sur la simulation de l'évolution d'une population.

Les notions sous-jacentes aux approches évolutionnistes sont les suivantes. Il y a d'abord la mémoire : on cherche à améliorer les hypothèses formulées dans le passé et ayant été vérifiées. Ensuite vient la sélection : le but est de sélectionner les individus répondant le mieux, et pour finir on trouve la notion de diversité : on cherche à donner à la population un comportement global favorisant l'apparition de nouvelles hypothèses et permettant d'éviter les cas où la population n'est composée que d'individus proches (phénomène de dégénérescence). Les paramètres des algorithmes génétiques servent à équilibrer ces différents comportements. Malheureusement, cela peut parfois s'avérer difficile.

Les approches évolutionnistes reposent sur l'idée d'une compétition entre l'entropie du système et une forme de sélection. Cette idée peut être formalisée plus mathématiquement. Ainsi, dans [Del Moral et Doucet, 2003, Del Moral et Miclo, 2003, Del Moral et Doucet, 2004], on trouve une nouvelle classe d'algorithmes, issus du formalisme de flots de Feynman Kac. Ces algorithmes peuvent être vu comme une hybridation entre le recuit simulé et les algorithmes génétiques. La démonstration de leur convergence repose sur l'écriture d'un principe de grande déviation, dont la fonctionnelle d'action fait intervenir deux termes : un terme d'entropie favorisant la dispersion de l'exploration de l'espace d'état (diversité) et un terme de sélection. L'avantage certain des algorithmes comme le recuit simulé, ceux de Del Moral ou de certains algorithmes génétiques (voir [Cerf, 1994] par exemple) est que leur convergence est démontrée. La compétition entre diversité et sélection est donc naturellement équilibrée.

Le recuit simulé repose sur l'absence de mémoire. Cela permet, sous des hypothèses d'exploration simples (réversibilité des perturbations stochastique) de calculer des taux de sélection assurant la convergence de l'algorithme. Paradoxalement, c'est l'absence de mémoire du recuit simulé qui lui assure son efficacité.

Il est toutefois possible d'ajouter une mémoire dans le recuit simulé. Nous nous proposons, dans cette partie, d'en étudier les effets.

9.2.2 Intérêt d'une mémoire

L'algorithme que nous utilisons repose entièrement sur une exploration stochastique équilibrée de l'espace d'état. On cherche des configurations d'objets dont le terme d'attache aux données répond bien. Ces objets sont particulièrement rares et difficiles d'accès. L'algorithme utilisé propose d'éliminer ou de créer des objets aléatoirement, et accepte ces propositions en fonction des variations d'énergie induites. Le fait que les objets d'intérêt soient rares pose deux problèmes : d'une part lorsque l'on en supprime un, on perd le bénéfice de l'exploration qui a mené jusqu'à sa découverte. D'autre part, comme ces objets sont difficiles à trouver, ils vivent longtemps. Avec le terme de soft core important, cela interdit la présence d'hypothèses d'objets contradictoires au même endroit. Il faut donc se reposer sur les transformations supplémentaires comme les translations ou les rotations

pour espérer pouvoir passer d'une hypothèse à l'autre. Cela peut toutefois être insuffisant.

Nous proposons ici une naissance-mort avec mémoire qui permet de réduire la durée de vie d'un objet.

9.2.3 Structure générale

Nous proposons de considérer la configuration \mathbf{x} d'objets courants à intervalles de temps régulier et d'en retenir les éléments bien attachés. Cela donne une collection d'objets $(v_i)_{i \leq N}$. On introduit alors une transformation de naissance ou mort qui permet, soit de faire ré-apparaître l'un de ces objets à une perturbation près, soit de supprimer l'un des objets de la configuration courante qui est proche de l'un d'entre eux. Pour cela, on utilise un ensemble $B \subseteq S$ (de la même manière qu'au chapitre 7). On considère alors l'ensemble S_{mem} :

$$S_{mem} = \bigcup_{i=1}^N v_i \oplus B$$

Cet ensemble est formé d'une union d'ensembles $S_i = v_i \oplus B$ que l'on appelle *graines*. On considère ensuite une naissance-mort qui propose d'ajouter ou de retirer un point dans S_{mem} . On peut imaginer deux façons intéressantes de mettre en oeuvre cette transformation.

9.2.4 Loi de mise à jour de la mémoire

Avant de détailler comment cette transformation fonctionne, nous présentons ici le mécanisme de mise à jour que nous avons utilisé. Le but est de garder en mémoire un ensemble d'objets intéressants (v_i) le plus diversifié possible. Nous proposons de considérer l'état courant \mathbf{x} périodiquement (toutes les L itérations) et de remplacer les graines de la mémoire par les objets de \mathbf{x} qui sont redondants et de meilleure qualité. Pour cela on se donne une application $Q(\cdot)$, négative pour les objets inintéressants et positive pour les autres. Plus grand est $Q(u)$, meilleur est l'objet (en pratique nous avons pris l'opposé du terme d'attache aux données $Q(u) = -U_d(u)$). Au début de la simulation, la mémoire est initialisée avec un ensemble d'objets vide.

Toutes les L iterations

Pour tout $u \in \mathbf{x} = X_t$

Si $Q(u) \geq 0$ objet interessant
 $test = 0$

Tant que $test = 0$, parcourir les v_i de la memoire

Si $u \in v_i \oplus B$ et $Q(u) > Q(v_i)$

Remplacer v_i par u

$test = 1$

Si $test = 0$

Si la memoire est saturee

Remplacer une graine au hasard par u

Sinon

Ajouter u a la sequence des v_i

9.2.5 Première mise en oeuvre : une seule transformation

On peut imaginer la procédure de naissance suivante :

- [1] Sélection d'un v_i ,
- [2] Génération du nouvel objet u dans la graine correspondante $v_i \oplus B$.

La mort peut simplement consister en la sélection d'un objet parmi ceux tombant dans un voisinage d'une graine. Il reste à choisir la loi discrète permettant de sélectionner un objet. Une loi discrète possible consiste à choisir un objet u dans la configuration avec une probabilité proportionnelle au nombre de graines le contenant. On trouve alors le taux suivant dans le cas d'une naissance ($\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup u$) :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup u) = \frac{f(\mathbf{y})}{f(\mathbf{x})} \frac{N\nu(B)}{\sum_{i=1}^N \text{card}\{v \in S_i, v \in \mathbf{x}\}}$$

et le taux inverse dans le cas de la mort.

Le schéma ci dessus est le schéma que nous avons utilisé en pratique. On notera la présence de la taille des graines $\nu(B)$ dans l'expression du taux, ce qui correspond à l'intuition : plus la taille des graines est petite et plus la probabilité d'accepter une mort est grande, puisque l'on a plus de chance de retrouver l'objet supprimé.

9.2.6 Seconde mise en oeuvre : N transformations

Un autre approche consiste à considérer que chaque graine définit une transformation différente. L'algorithme de mise à jour suit alors la procédure suivante :

- [1] choisir une graine S_i avec une loi discrète uniforme,
- [2] choisir entre la naissance et la mort avec une probabilité 1/2. Ensuite,
 - si la naissance a été choisie** : générer u dans S_i ,
 - si la mort a été choisie** : choisir l'un des u se trouvant dans S_i s'il en existe un, sinon ne rien faire

L'avantage de ce schéma sur le précédant provient de l'expression du taux assurant la réversibilité :

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cup u) = \frac{f(\mathbf{y})}{f(\mathbf{x})} \frac{\nu(B)}{\text{card}\{v \in S_i, v \in \mathbf{x} \cup u\}}$$

L'avantage de ce taux est qu'il nécessite moins de calculs, mais par contre requiert une programmation plus fine.

9.2.7 Temps de calculs

L'efficacité de cette méthode est directement liée au temps nécessaire pour calculer les taux d'acceptation des naissances ou des morts ajouté au temps nécessaire à la réactualisation de la mémoire. Nous n'avons pas pu mener autant d'expériences que nous le désirions. La version de la naissance mort à mémoire que nous avons codée repose en effet sur la première idée (une transformation pour toutes les graines) et nous n'avons pas utilisé une mise à jour permanente des taux de naissances mort pour chaque objet comme nous l'avons fait par ailleurs pour toutes les autres transformations.

Par conséquent nous n'avons pas pu comparer l'efficacité de l'idée en terme de temps de calculs. Par contre nous présentons ici quelques résultats sur la mélangeance du système obtenu.

9.2.8 Résultats et commentaires

La figure 9.15 présente un résultat. On y a tracé l'évolution du nombre de rectangles intéressants en fonction de la température. Notons que ce résultat est obtenu avec une fréquence de mise à jour de la mémoire de $L = 50000$, une constante de décroissance $A = 0.9985$ et $\Delta_t = 2000$ où Δ_t est la longueur d'un palier de la décroissance qui est donc géométrique par morceaux.

On constate que les simulations utilisant la mémoire ont permis de modifier le nombre d'objets intéressants à plus basse température. On peut faire une rapide analyse des raisons de ce comportement. Considérons une mise à jour de naissance ou de mort. Celle-ci peut être proposée par une transformation avec une graine ou par une transformation sans graine et donne lieu à une variation d'énergie positive $\Delta U > 0$. On peut écrire que la probabilité α d'accepter une transformation est donnée par :

$$\alpha = \tau \exp^{-\frac{\Delta U}{T}}$$

Donc à température constante, c'est la transformation de mort ayant le plus fort taux qui va le plus favoriser la suppression de certains objets. On imagine que les deux propositions sont faites à deux températures T_1 et T_2 . La différence majeure entre les deux transformations vient des taux donnés par les transformations. Notons τ_1 et τ_2 les deux facteurs correctifs apparaissant dans les taux de Green liés aux deux noyaux de proposition différents (avec et sans graines) d'acceptation α_1 et α_2 .

On trouve, pour une variation d'énergie identique dans les deux cas :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\log \alpha_2 - \log \tau_2}{\log \alpha_1 - \log \tau_1}$$

La première analyse repose sur l'hypothèse $T_1 = T_2$: à température constante, l'une des deux transformations formule des propositions qui ont plus de chance d'être acceptées. Notons que c'est le rapport τ_1/τ_2 qui intervient pour quantifier cette différence. Il est également possible, à l'inverse, de poser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, de façon à chercher à quelles températures les deux noyaux de proposition donnent lieu à des comportements équivalents.

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{\log \frac{\tau_2}{\tau_1}}{\log \alpha - \log \tau_1}$$

d'où, en réinjectant α , on trouve que :

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \frac{\log(\frac{\tau_2}{\tau_1})}{\Delta U} \quad (9.7)$$

On trouve donc que si le rapport $\tau_2/\tau_1 > 1$, $T_2 < T_1$, ce qui est conforme à l'intuition. Dans le cas de la proposition d'une mort, par le schéma de mise à jour sans mémoire (naissance ou mort uniforme), on a :

$$\tau_1 = \frac{n(\mathbf{x})}{\nu(S)}$$

tandis que dans le cas d'une mort par le schéma de mise à jour avec mémoire :

$$\tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \text{card}\{v \in S_i, v \in \mathbf{x}\}}{N\nu(B)}$$

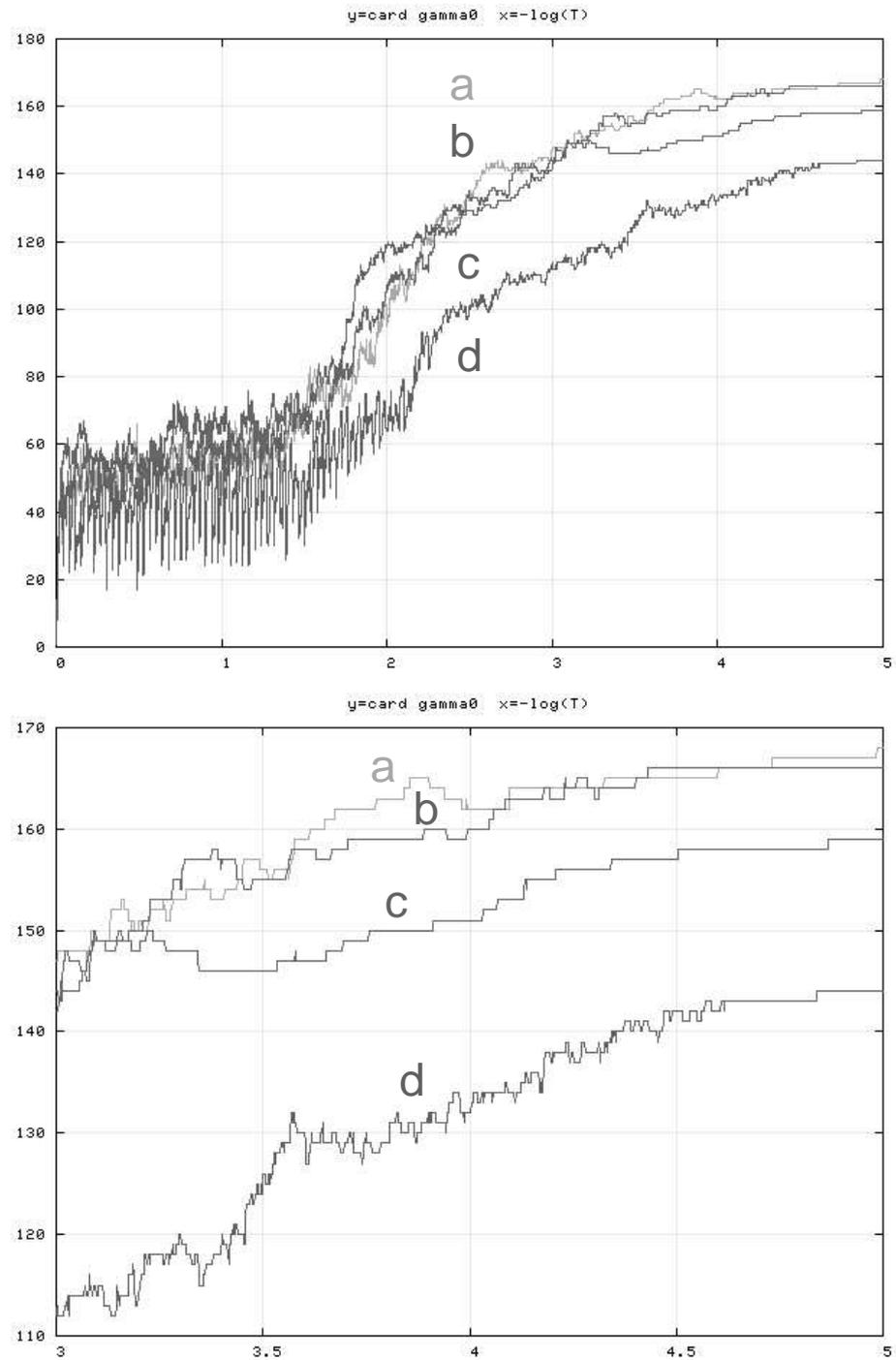


FIG. 9.15: Evolution du nombre de rectangles intéressants (dans γ_0) en fonction de la température ($x = -\log(T)$); a et b : simulations avec des graines de tailles moyennes, c : simulation de référence n'utilisant que la naissance ou mort uniforme et d : simulation avec de petites graines. On notera que les simulations utilisant la mémoire impliquent des variations (diminution) du nombre d'objets intéressants plus tard en température que la simulation sans mémoire.

Simulation	$\nu(B)$
a	17203
b	67200
c	0 (référence)
d	25.6

TAB. 9.3: Tailles des graines ($\nu(B)$) utilisées pour les différentes simulations de la figure 9.15

Ce qui donne le rapport suivant :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\nu(S) \sum_{i=1}^N \text{card}\{v \in S_i, v \in \mathbf{x}\}}{\nu(B) Nn(\mathbf{x})}$$

On peut considérer que le rapport entre le nombre moyen d'objets par graine et le nombre d'objets est à peu près constant. On constate alors, que plus les graines sont petites, plus la température limite est petite. Les résultats expérimentaux de la figure 9.15 confirment la tendance générale, mais ne permettent pas de retrouver la loi donnée par la relation 9.7. Le tableau 9.3 présente les tailles des graines utilisées : l'ordre de décroissance des tailles de graines est donc b,a,d. Or sur les résultats de la figure 9.15, on constate que l'ordre de décroissance des températures limites est a,b,d.

On remarquera par ailleurs que la simulation où le mélange se fait le mieux (simulation d avec des graines vraiment petites) est aussi celle où le nombre final de rectangles détectés est le plus faible. Ce résultat montre un effet pervers de l'ajout d'une mémoire dans le système : la mise à jour de la mémoire provoque une perte de la stationnarité de la chaîne. On constate en effet un phénomène tout à fait intéressant lié à l'algorithme d'échantillonnage. Ce phénomène est particulièrement visible sur la figure 9.16.

On constate que chaque mise à jour de la mémoire provoque une chute brutale du nombre d'objets intéressant dans la scène. La transformation de la simulation d utilise des graines de taille vraiment très faible. Par conséquent, le taux τ est particulièrement élevé dans le cas d'une mort. Après une mise à jour de la mémoire, l'état courant et cette mémoire sont en adéquation et donc un certain nombre d'objets de l'état courant sont supprimés, d'où les chutes régulières du nombre d'objets dans la scène. Le problème vient donc de la fréquence de mise à jour de la mémoire : pour de petites graines, il faut mettre à jour la mémoire moins fréquemment, comme le montre la simulation d' de la figure 9.17. Avec $L = 500000$ la stationnarité est conservée.

9.2.9 Conclusion

La naissance mort à mémoire permet donc facilement d'obtenir un meilleur mélange des configurations. En particulier, même à très basse température, ce type de transformation permet de proposer des morts d'objets. Cela doit permettre d'améliorer l'optimisation du système.

En pratique, nous n'avons pas cependant observé d'amélioration notable des

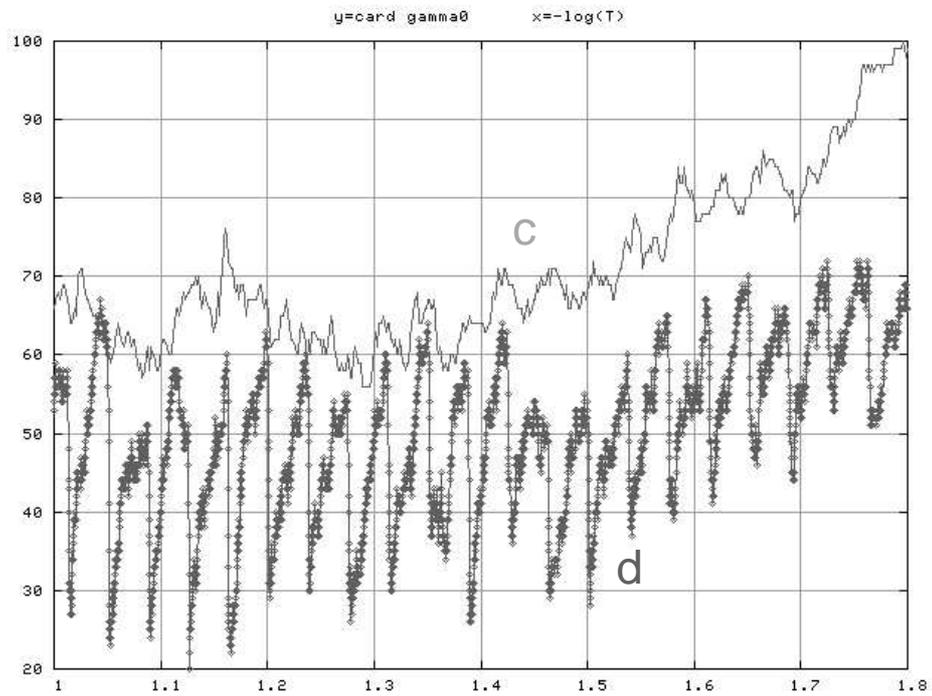
(a) $x = -\log T$, $y = \text{card } \gamma_0$

FIG. 9.16: Visualisation de la perte de stationnarité due à la présence d'une mémoire. Les instants où le nombre d'objets chute sont les instants où la mémoire est mise à jour.

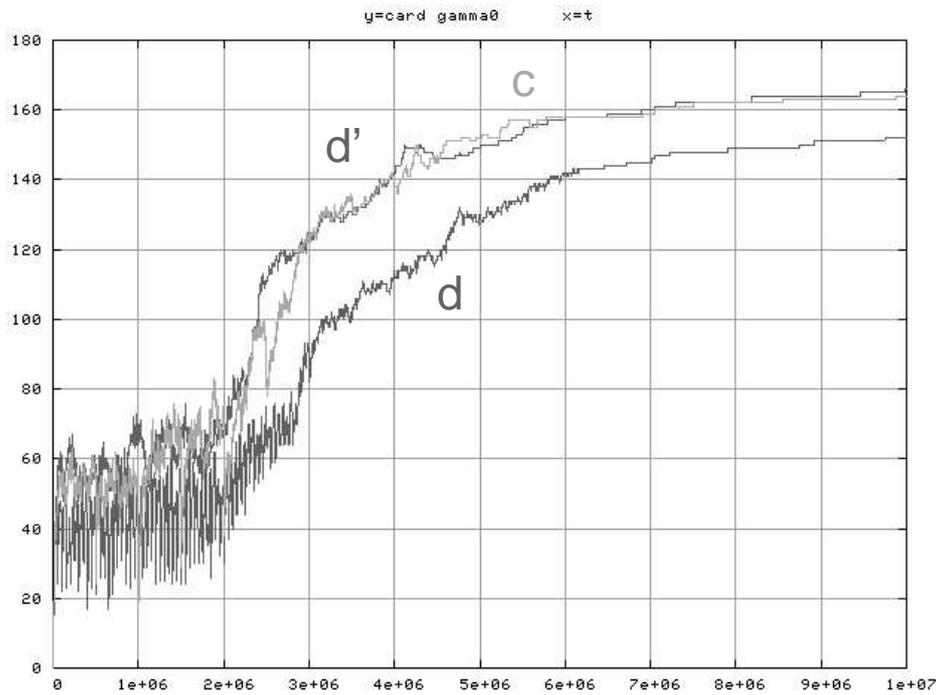
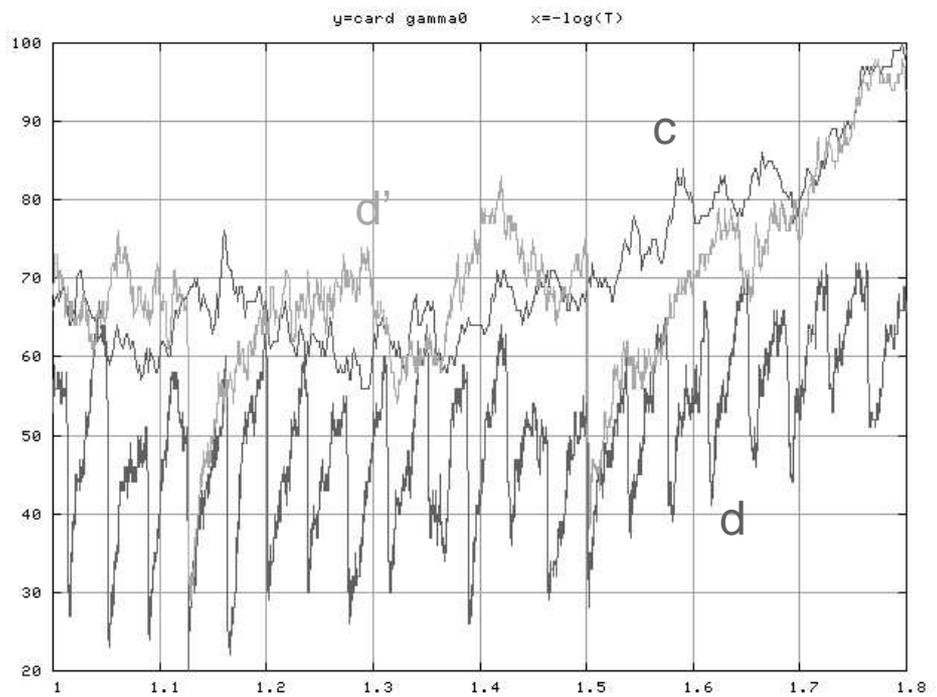
(a) $x = t$, $y = \text{card } \gamma_0$ (b) $x = -\log T$, $y = \text{card } \gamma_0$

FIG. 9.17: La simulation d' utilise une période de mise à jour beaucoup plus grande ($L = 500000$) que la simulation d, ce qui permet de retrouver la stationnarité entre chaque mise à jour.

résultats. Par contre, nous avons observé un effet pervers de l'ajout d'une mémoire avec la perte de la stationnarité du système.

Il faudrait, par conséquent, étudier plus finement l'influence de la taille des graines ainsi que celle de la méthode de mise à jour de la mémoire pour savoir si ce type de transformation peut avoir son utilité ou non.

Quatrième partie

Conclusion

Conclusion

Analyse de la contribution

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a permis l'évaluation de l'apport potentiel de la géométrie stochastique à l'analyse de scènes urbaines denses. Nous n'avons pas proposé de logiciel permettant de reconstruire de manière exhaustive et précise une zone urbaine quelconque. Par contre, nous avons proposé divers modèles permettant d'extraire une information de niveau intermédiaire à partir de Modèles Numériques d'Élévation.

Une première étape de ce travail a consisté en l'assimilation d'un certain nombre de concepts théoriques liés aux notions de processus ponctuels et d'échantillonneur MCMC.

Une seconde étape a consisté en l'exploration des diverses possibilités offertes par les modèles de processus ponctuels appliqués à l'analyse d'images. Après l'étude d'un certain nombre de travaux fondateurs ([Van Lieshout, 1993, Pievatolo et Green, 1998, Rue et Hurn, 1999, Stoica, 2001]) nous avons été amenés à formuler nos propres modèles.

Nous avons ainsi exploré quatre voies. La première, qui nous a servi d'exemple pour introduire la méthode dans ce manuscrit, a permis d'évaluer la pertinence de l'approche. Elle repose sur la détection de zones homogènes par des rectangles. Ce premier travail a permis de poser certaines questions auxquelles les modèles suivants ont tenté de répondre. Le second modèle repose sur l'utilisation d'un traitement bas niveau pour détecter les discontinuités sur les MNE. Ce modèle nous a permis d'introduire un modèle générique d'interactions attractives ne dépendant pas de la taille de l'image considérée. Il nous a également incité à considérer une mesure de référence inhomogène. C'est l'une des originalités de ce travail. Le troisième modèle nous a permis d'évaluer la valeur d'un critère Bayésien et d'examiner la possibilité d'utiliser des modèles complexes de bâtiments. Rechercher des configurations aussi denses d'objets complexes a nécessité l'introduction d'une méthode pour réduire l'espace de recherche. Nous avons proposé une méthode originale et efficace reposant sur l'utilisation d'une initialisation. Nous avons étendu cette idée en tentant par la suite d'introduire une mémoire dans l'algorithme. Le dernier modèle que nous avons présenté tire parti du modèle d'attraction que nous utilisons. Nous proposons de chercher des éléments simples modélisés par des segments et des rectangles en interaction. Tous ces modèles ont nécessité la prise en compte de leur structure spécifique dans la mise en oeuvre de l'échantillonneur. Nous avons ainsi été amenés à introduire des transformations originales, comme la naissance ou mort d'un objet dans un voisinage. Nous avons également proposé un nouveau schéma de décroissance de température dans un cadre de recuit-simulé.

Une dernière remarque d'importance concerne le codage pratique des modèles

proposés : il a fallu une somme de travail non négligeable pour coder les différents modèles.

Défauts des méthodes proposées

Nous nous attardons ici sur les critiques que l'on peut faire aux modèles proposés.

Tout d'abord, les temps de calcul restent un problème majeur. Dans le cas des modèles complexes, pour traiter une zone de taille consistante (830m par 300m, à 20cm de résolution) les algorithmes nécessitent une semaine de calculs. Il faut noter que les modèles sont toutefois relativement parallélisables. Il est également possible de travailler séquentiellement en partitionnant la zone d'intérêt avec un gain de temps dû aux structures informatiques permettant de décrire l'espace d'état.

Le second problème ouvert est évidemment le réglage des paramètres. Nous avons proposé une classe de modèles génériques dont les paramètres sont invariants par changement de taille de l'image proposée. Il faut toutefois régler ces paramètres par essai-erreur. Il eût été appréciable de proposer une méthode permettant d'apprendre les paramètres d'un modèle. Cela reste une question délicate et sur laquelle nous comptons continuer à travailler dans un futur proche, n'ayant pour l'instant réussi à n'obtenir aucun résultat probant sur des images réelles.

Le troisième problème provient de la nature du résultat. Si nous arrivons effectivement à extraire une information vectorielle, il est délicat d'estimer exactement son utilité. Dans un contexte de rendu urbain tridimensionnel, il est certain que les différents modèles ont leur utilité. Pour des cadres d'application plus industriels, il faut vérifier si les objets extraits peuvent servir pour aider d'autres algorithmes de reconstruction destinés à la production en fournissant des hypothèses vectorielles. Ce problème va faire l'objet d'une thèse qui débutera très prochainement dans le projet Ariana, en collaboration avec l'IGN et le CNES.

Intérêts des modèles proposés

Les modèles proposés permettent d'extraire une information intéressante. Il s'agit, en effet, d'information de moyen niveau : les primitives obtenues ne sont pas directement accessibles par les méthodes usuelles que propose l'analyse d'images comme les transformées de Hough par exemple. Par ailleurs, l'approche que nous proposons est originale et permet de se démarquer des méthodes "top-down" et "bottom-up" habituelles qui reposent sur l'agglomération de primitives simples.

Notre approche permet également de structurer l'extraction du bâti par le biais d'interaction entre les objets. Il s'agit réellement d'une originalité de la méthode, qui gagnerait à être développée au moyen d'interactions plus complexes.

Une fois les paramètres réglés, l'approche est entièrement automatique, ce qui est évidemment un avantage. Etant donnée la taille des zones à traiter, on peut imaginer une approche en deux étapes dont la première consisterait en un réglage semi-automatique des paramètres sur des zones de petites tailles, et la seconde en un lancé séquentiel de l'extraction sur l'ensemble de la zone éventuellement partitionnée en plusieurs zones de tailles plus réduites.

L'un des avantages des modèles proposés s'est avéré être la robustesse par rapport au type et à la qualité des données. Nous n'avons pas eu besoin de modifier les paramètres du modèle a priori lorsque nous avons changé de taille ou de type d'images.

Extensions possibles

Chercher un ensemble de primitives différentes de bas niveau en interaction est une extension qui serait réellement intéressante. Rares sont les méthodes qui permettent d'extraire des objets et de régulariser l'extraction en même temps. L'avenir se situe, sans aucun doute, dans la complexification des interactions plutôt que dans la complexification des objets. On devrait pouvoir tendre vers la notion de grammaire de graphes telle que présentée et exploitée dans [Fuchs, 2001].

L'estimation des paramètres est un problème ouvert. On trouvera dans [Stoica *et al.*, 2004] l'application de méthodes classiques pour estimer les paramètres du modèle a priori. En données incomplètes, l'estimation des paramètres reste un problème complexe même à haute température. A basse température, le mauvais comportement des échantillonneurs MCMC rend inefficaces toutes les techniques usuelles reposant sur l'"importance sampling". Il reste donc à introduire de nouvelles méthodes pour permettre d'apprendre les paramètres d'un modèle de processus ponctuels utilisable dans un cadre aussi appliqué que le notre.

L'algorithme d'optimisation pourrait être amélioré. De nouvelles avancées récentes dans les techniques MCMC, comme les techniques de DDMC (Data Driven MCMC, c.f. [Tu et Zhu, 2002]) ou l'utilisation de processus à temps continu comme [Srivastava *et al.*, 1999] mériteraient d'être examinées. Les idées de Del Moral sur les algorithmes génétiques et les processus de naissance mort (se référer, par exemple à [Del Moral et Doucet, 2003]) trouveraient sûrement des applications pour faciliter l'optimisation des modèles.

Une problématique que nous n'avons pas abordée dans ce travail est la fusion de données. Il serait, en effet, facile d'ajouter plusieurs termes du premier ordre dans l'énergie d'attache aux données, chacun de ces termes correspondant à un type de données différent.

Une extension qui semble également intéressante est l'ajout d'un paramètre temporel, de manière à permettre le suivi d'objets en mouvement dans des séquences d'images. Cette possibilité nous intéresse tout particulièrement, puisque les méthodes actuelles de suivi d'objets se comportent mal lorsque le nombre d'objets est trop grand. L'extension des modèles par processus ponctuels aux séquences d'images pourrait permettre de tirer parti d'une information a priori sur la structure spatiale d'interaction entre les objets.

Enseignements issus de ce travail

En ce qui concerne les modèles de processus ponctuels nous avons tirés plusieurs enseignements de l'expérience accumulée tout au long des trois années écoulées.

La qualité de l'échantillonnage est primordiale. C'est le point clef qui se cache derrière tous les modèles proposés. Il faut construire des transformations pertinentes pour pouvoir obtenir des résultats corrects avec des temps de calcul acceptables. Naissances ou morts dans un voisinage, translations, dilatations ou déplacement d'un point de connection, toutes ces idées proviennent de la même origine : il faut ajouter des transformations qui vont dans le sens des modèles. C'est en cela que le formalisme proposé par [Green, 1995] est particulièrement intéressant puisqu'il ouvre un éventail très vaste de transformations possibles.

L'utilisation de mesures de référence inhomogènes est également avantageuse. Cette idée a permis de sensiblement améliorer les résultats puisqu'elle a permis

d'introduire des termes d'attache aux données beaucoup plus exigeants, la mesure de référence servant alors à compenser la rareté des objets intéressants.

Il semble qu'aller vers des objets plus complexes n'est pas d'un intérêt direct. On peut évidemment arguer qu'il est toujours possible d'utiliser des bancs de prétraitements pour construire des naissances ou morts d'objets non uniformes favorisant les endroits où les objets répondront vraisemblablement correctement. Cependant, nous pensons qu'une telle approche fait perdre en partie l'intérêt de la méthode. En effet, si pour pouvoir optimiser les modèles il faut disposer d'une initialisation précise, on perd alors l'intérêt de la méthode qui permet de trouver les endroits intéressants de l'espace d'état en exploitant la structure "par objets" du problème à résoudre.

Si nous devons reconstruire un modèle pour analyser les zones urbaines denses, nous partirions directement sur l'idée de faire interagir plusieurs types de primitives. On trouverait : les coins, les segments les plans etc... . La structure d'interaction permettrait d'augmenter l'énergie des objets appartenant à une structure complexe ayant du sens. On se rapprocherait donc des algorithmes "bottom-up" avec la différence notable que l'agrégation se ferait en même temps que le test d'hypothèse. Cette approche permettrait, en outre, de tenir compte d'un ensemble de données diverses.

L'estimation des paramètres d'interaction est un problème certain. Une solution pour remédier à ce problème est de développer un modèle bayésien. En effet, ce type de modèles autorise une estimation non supervisée et automatique des paramètres. Cela dit, pour des applications aussi particulières que la notre, la modélisation bayésienne peut se révéler tout à fait arbitraire et donc inadaptée. La encore, en se cantonnant à des objets simples, il devrait être possible de construire des modèles d'interaction dont les paramètres soient estimables plus facilement, au moins de manière approchée.

La conclusion essentielle de ce travail est qu'il est possible d'utiliser des processus ponctuel marqués pour extraire des caricatures de bâtiments à partir de Modèles Numériques d'Elevation. Ensuite, d'un point de vue plus générique en analyse d'images, il semble que la géométrie stochastique soit particulièrement bien adaptée aux contextes où l'on peut favoriser la simplicité des objets du modèle, quitte à devoir introduire une multitude d'objets différents.

Conclusion

Ce travail nous a donc permis d'évaluer le potentiel des approches par processus ponctuels marqués dans un cadre appliqué. De ce point de vue, le travail mené a été très formateur. Nous avons du constamment travailler à la fois sur les outils théoriques et la réalité des problèmes que posent l'application.

Ce manuscrit ne présente qu'une partie du travail mené : nous avons eu l'occasion d'effleurer d'autres théories que celles utilisées ici. Beaucoup d'idées rencontrées en chemin sont restées en suspens : peut être verront-elles le jour dans l'avenir, mais c'est désormais une autre histoire...

Bibliographie

Publications de l'auteur

Rapports

- [1] M. Ortner. Extraction de caricatures de bâtiments sur des Modèles Numériques d'Elévation. Rapport de DEA. août 2001.
<http://www-sop.inria.fr/ariana/personnel/Mathias.Ortner/index-eng.html>.
- [2] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Building detection from Digital Elevation Models. *Rapport de Recherche INRIA 4517*, juillet 2002.
- [3] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Improved RJMCMC point process sampler for object detection by simulated annealing. *Rapport de Recherche INRIA 4900*, août 2003.
- [4] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Automatic 3D let register extraction from altimetric data in dense urban areas. *Rapport de Recherche INRIA 4919*, août 2003.

Conférences francophones avec actes

- [5] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Un nouveau modèle pour l'extraction de caricatures de bâtiments sur des Modèles Numériques d'Elévation. *TAIMA*, Hammamet (Tunisie), Octobre 2003.
- [6] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Extraction automatique de caricatures de bâtiments sur des Modèles Numériques d'Elévation. Colloque Pixels et Cités, ENSG, Marne-la-vallée, France, novembre 2003.

Conférences internationales avec actes

- [7] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Building Detection from Digital Elevation Models. *ICASSP*, volume III, Hong Kong, avril 2003.
- [8] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. A discontinuity detector for building extraction from Digital Elevation Models by stochastic geometry. *EUSIPCO'04*, Vienne, septembre 2004.

Journaux français

- [9] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Extraction automatique de caricatures de bâtiments sur des Modèles Numériques d'Elévation. "*Bulletin de la SFPT*", 2004. A paraître.

Journaux internationaux

- [10] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Building outline extraction from Digital Elevation Models using marked point processes. *International Journal of Computer Vision*. **Soumis en 2004.**

Communications orales diverses

- [11] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. Detecting precise features on Digital Elevation Models. *Spatial Point Process Modelling and its Applications*, Castellon (Espagne), avril 2004.
- [12] M. Ortner, X. Descombes, et J. Zerubia. A Reversible Jump MCMC sampler for building detection in image processing. *Monte Carlo methods and Quasi-Monte Carlo methods*, Session spéciale "MCMC en traitement du signal et des images", Juan les Pins, France, juin 2004.

Bibliographie

1. [Baddeley et Van Lieshout, 1993] A. Baddeley et M. N. M. Van Lieshout. Stochastic geometry models in high-level vision. *Statistics and Images*, 1 :233–258, 1993.
2. [Baillard, 1997] C. Baillard. *Analyse d'images aériennes stéréoscopiques pour la restitution 3D des milieux urbains. Détection et caractérisation du sursol*. Thèse de Doctorat, ENST, 1997.
3. [Balz et Haala, 2003] T. Balz et N. Haala. Sar-based 3D reconstruction of complex urban environments. Dans *3-D reconstruction from airborne laser-scanner and InSAR data*, volume XXXIV, Dresden, Allemagne, octobre 2003. ISPRS Commission III Working group 3.
4. [Banorff-Nielsen et al., 1999] O. E. Banorff-Nielsen, W.S Kendall et M.N.M. Van Lieshout (éditeurs). *Stochastic Geometry Likelihood and computation*. Chapman and Hall, 1999.
5. [Besag, 1986] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of Royal Statistic Society*, B(68) :259–302, 1986.
6. [Brenner, 1999] C. Brenner. Interactive tools for 3D building reconstruction. Edité par l'université de Stuttgart, *Proceedings of the Photogrammetric Week*, pages 23–24, 1999.
7. [Brenner, 2000] C. Brenner. Towards fully automatic generation of city models. Dans *IAPRS*, volume 33, pages 85–92, Amsterdam, 2000.
8. [Brooks et al., 2003] S.P. Brooks, N. Friel et R. King. Classical model selection via simulated annealing. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, pages 503–520, 2003.
9. [Brooks et al., A paraître] S.P. Brooks, P. Guidici et G.O. Roberts. Efficient construction of reversible jump MCMC proposal distributions (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, A paraître.
10. [Cappé et al., 2002] O. Cappé, C. P. Robert et T. Rydén. Reversible jump MCMC converging to birth-and-death MCMC and more general continuous time sampler. <http://www.statslab.cam.ac.uk/mcmc/>, 2002.
11. [Cerf, 1994] R. Cerf. *Une théorie asymptotique des algorithmes génétiques*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, mars 1994.
12. [Cord, 1998] M. Cord. *Analyse d'images aériennes haute résolution : détection et modélisation du bâti en zone urbaine*. Thèse de Doctorat, Université de Cergy Pontoise, 1998.
13. [Daley et Jones, 1988] D. Daley et V. Jones. *An introduction to the theory of point processes*. Springer, New York, 1988.
14. [Dang, 1994] T. Dang. *Interprétation et restitution automatique des bâtiments isolés à partir d'un couple stéréoscopique d'images aériennes*. Thèse de Doctorat, ENST, 1994.

15. [Del Moral et Doucet, 2003] P. Del Moral et A. Doucet. On a class of genealogical and interacting Metropolis Models. Edité par J. Azéma, M. Emery, M. Ledoux et M. Yor, *Séminaire de Probabilités XXXVII*, pages 415–446. Lecture Notes in Mathematics 1832, Springer-Verlag Berlin, 2003.
16. [Del Moral et Doucet, 2004] P. Del Moral et A. Doucet. Particle Motions in Absorbing Medium with Hard and Soft Obstacles. *Stochastic Analysis and Applications*, 22(5), 2004.
17. [Del Moral et Miclo, 2003] P. Del Moral et L. Miclo. Annealed Feynman-Kac Models. *Communications in Mathematical Physics*, 235(2) :191–214, 2003.
18. [Descombes, 2004] X. Descombes. *Méthodes stochastiques en analyse d'image : des champs de Markov aux processus ponctuels marqués*. Habilitation à diriger des Recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, février 2004.
19. [Fachat, 2000] A. Fachat. *A comparison of random walks with different types of acceptance probabilities*. Thèse de Doctorat, Technischen Universität Chemnitz, 2000.
20. [Fischer et al., 1998] A. Fischer, T. H. Kolbe, F. Lang, A. B. Cremers, W. Förstner, L. Plümer et V. Steinhage. Extracting buildings from aerial images using hierarchical aggregation in 2D and 3D. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(2) :185–203, 1998.
21. [Fritsch, 1999] D. Fritsch. Virtual cities and landscape models - what has photogrammetry to offer? Edité par l'université de Stuttgart, *Proceedings of the Photogrammetric Week*, pages 3–14, 1999.
22. [Frueh et Zakhor, 2003] C. Frueh et A. Zakhor. Constructing 3D city models by merging ground-based and airborne views. *IEEE Computer Graphics and Applications*, édition spéciale, décembre 2003.
23. [Fuchs, 2001] F. Fuchs. *Contribution à la reconstruction du bâti en milieu urbain, à l'aide d'images aériennes stéréoscopiques à grande échelle. Etude d'une approche structurelle*. Thèse de Doctorat, Université René Descartes, Paris V, France, 2001.
24. [Garcin et al., 2001] L. Garcin, X. Descombes, J. Zerubia et H. Le Men. Building detection by Markov object processes and a MCMC algorithm. *Rapport de Recherche INRIA 4206*, juin 2001.
25. [Geman et Geman, 1984] S. Geman et D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Trans. on PAMI*, 6(6) :721–741, novembre 1984.
26. [Geyer et Møller, 1994] C.J. Geyer et J. Møller. Simulation and likelihood inference for spatial point processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, Series B, 21 :359–373, 1994.
27. [Geyer, 1999] C. J. Geyer. Likelihood inference for spatial point processes. Edité par O.E. Banorff-Nielsen, W.S Kendall et M.N.M. Van Lieshout, *Stochastic Geometry Likelihood and computation*. Chapman and Hall, 1999.
28. [Girard et al., 1998] S. Girard, P. Guerin, H. Maître et M. Roux. Building detection from high resolution colour images. volume 3500, pages 278–289, Barcelone, septembre 1998.
29. [Green, 1995] P.J. Green. Reversible jump Markov chain Monte-Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 57 :97–109, 1995.

30. [Grün et Wang, 1998] A. Grün et X. Wang. Cc-modeler : a topology generator for 3D city models. Dans *ISPRS*, volume 53, pages 286–295, 1998.
31. [Grün, 1998] A. Grün. TOBAGO - a semi automated approach for the generation of 3D building models. Dans *ISPRS*, volume 53, pages 108–118, 1998.
32. [Gülch et al., 1999] E. Gülch, H. Müller et T. Läbe. Integration of automatic processes into semi-automatic building extraction. Dans *ISPRS*, pages 177–186, Munich, Allemagne, septembre 1999.
33. [Haala et Anders, 1997] N. Haala et K. H. Anders. Acquisition of 3D urban models by analysis of aerial images, digital surface models and 2D building information. Dans *SPIE Conference On Integrating Photogrammetric Techniques with Scene Analysis and Machine Vision III*, pages 212–222, Orlando, Floride, avril 1997.
34. [Haala et Brenner, 1998] N. Haala et C. Brenner. Interpretation of urban surface models using 2D building information. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(2) :204–214, 1998.
35. [Haala et Brenner, 1999] N. Haala et C. Brenner. Virtual city models from laser altimeter and 2d map data. Dans *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, volume 65, pages 787–795, juillet 1999.
36. [Hadamard, 1923] J. Hadamard. Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations. Dans *Yale University*. University Press, New Haven, 1923.
37. [Hajek, 1988] B. Hajek. Cooling Schedules for Optimal Annealing. *Mathematics of Operations Research*, 2 :311–329, 1988.
38. [Henricsson, 1996] O. Henricsson. *Analysis of Image Structures using Color Attributes and Similarity Relations*. Thèse de Doctorat, Swiss Federal Institute of Technology, ETH Zürich, 1996.
39. [Heuel et Nevatia, 1995] S. Heuel et R. Nevatia. Including interaction in an automated modeling system. Dans *Proceedings of the IEEE Symposium on Computer Vision*, pages 383–388, Coral Gables, Floride, 1995.
40. [Hoffmann et Salamon, 1990] K. H. Hoffmann et P. Salamon. The optimal simulated annealing schedule for a simple model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, page 3511 :3523, 1990.
41. [Imberty et Descombes, 2002] M. Imberty et X. Descombes. Simulation de processus objets : Etude de faisabilité pour une application à la segmentation d’images. *Rapport de Recherche INRIA 4516*, 2002.
42. [Jibrini, 2002] H. Jibrini. *Reconstruction automatique des bâtiments en modèles polyédriques 3D à partir de données cadastrales vectorisées 2D et d’un couple d’images aériennes à haute résolution*. Thèse de Doctorat, ENST, Paris, France, 2002.
43. [Kendall et Møller, 2000] W. S. Kendall et J. Møller. Perfect Metropolis-Hastings simulation of locally stable spatial point processes. *Advances in Applied Probability (SGSA)*, 2000.
44. [Lacoste et al., 2002] C. Lacoste, X. Descombes et J. Zerubia. A comparative study of point processes for line network extraction in remote sensing. *Rapport de Recherche INRIA 4516*, 2002.

62. [Robert, 1996] C. Robert. *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Statistique mathématique et probabilité. Economica, 1996.
63. [Rottensteiner et Briese, 2003] F. Rottensteiner et C. Briese. Automatic generation of building models from lidar data and the integration of aerial images. Dans *3-D reconstruction from airborne laserscanner and InSAR data*, volume XXXIV 3W13, Dresden, Allemagne, octobre 2003. ISPRS Commission III Working group 3.
64. [Ruanaidh et Fitzgerald, 1996] J. Ruanaidh et W. Fitzgerald. *Numerical Bayesian Methods Applied to Signal Processing*. Statistics and Computing, Springer, New York, 1996.
65. [Rue et Hurn, 1999] H. Rue et M. Hurn. Bayesian object identification. *Biometrika*, 3 :649–660, 1999.
66. [Rue et Syverseen, 1998] H. Rue et A. R. Syverseen. Bayesian object recognition with Baddeley’s delta loss. *Adv. Appl. Prob.*, 30 :64–84, 1998.
67. [Ruelle, 1970] D. Ruelle. *Superstable Interactions in Classical Statistical Mechanics*, chapter 18, pages 127–159. Commun. Math. Phys. , Springer-Verlag, 1970.
68. [Ruppeiner, 1988] G. Ruppeiner. Implementation of an adaptive, constant thermodynamic speed simulated annealing schedule. *Nuclear Physics B : Proceedings supplements*, pages 116–121, 1988.
69. [Salamon et al., 1988] P. Salamon, J.D. Nulton, J.R. Harland, J. Perderson, G. Ruppeiner et L. Liao. Simulated annealing with constant thermodynamic speed. *Computer Physics communications*, pages 423–428, 1988.
70. [Sohn et Dowman, 2003] G. Sohn et I. Dowman. Building extraction using LiDAR DEMs and IKONOS images. Dans *3-D reconstruction from airborne laserscanner and InSAR data*, volume XXXIV 3/W13, Dresden, Allemagne, octobre 2003. ISPRS Commission III Working Group 3.
71. [Sörgel et al., 2003] U. Sörgel, U. Thönnessen et U. Stilla. Iterative building reconstruction from multi-aspect InSAR data. Dans *3-D reconstruction from airborne laserscanner and InSAR data*, volume XXXIV, Dresden, Allemagne, octobre 2003. ISPRS Commission III Working group 3.
72. [Srivastava et al., 1999] A. Srivastava, U. Grenander, G. Jensen et M. Miller. Jump-diffusion Markov processes on orthogonal groups for object recognition. *Journal of Statistical Planning and Inference*, décembre 1999.
73. [Stassopoulou et Caelli, 2000] A. Stassopoulou et T. Caelli. Building detection using bayesian networks. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 14(6) :715–733, 2000.
74. [Stoica et al., 2004] R. Stoica, X. Descombes et J. Zerubia. A Gibbs Point Process for road extraction from remotely sensed images. *Int. Journal on Computer Vision*, 37(2) :121–136, 2004.
75. [Stoica, 2001] R. Stoica. *Processus Ponctuels pour l’extraction des réseaux linéiques dans les images satellitaires et aériennes*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, février 2001.
76. [Stoyan et al., 1995] D. Stoyan, W.S. Kendall et J. Mecke (éditeurs). *Stochastic geometry and its applications*. Wiley, Chistester, second edition, 1995.

77. [Strauss, 1975] D. J. Strauss. A model for clustering. *Biometrika*, 62 :467–475, 1975.
78. [Tafelmayer et Hoffmann, 1995] R. Tafelmayer et K. H. Hoffmann. Scaling features in complex optimization problems. *Computer Physics Communications*, pages 81–90, 1995.
79. [Tu et Zhu, 2002] Z.W. Tu et S.C. Zhu. Image segmentation by Data-Driven Markov Chain Monte Carlo. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(5) :657–673, mai 2002.
80. [Tupin et al., 1998] F. Tupin, H. Maitre, J-F. Mangin, J-M. Nicolas et E. Pechersky. Detection of linear features in SAR images : Application to road network extraction. *IEEE Trans. on GRS*, 36(2) :434–453, 1998.
81. [Van Lieshout et Stoica, 2003] M. N. M. Van Lieshout et R. S. Stoica. Perfect simulation for marked point processes. *Rapport de Recherche, PNA-R0306, CWI, Amsterdam*, mai 2003.
82. [Van Lieshout, 1993] M. N. M. Van Lieshout. Stochastic annealing for nearest-neighbour point processes with application to object recognition. *Rapport de Recherche, CWI, BS-R9306, ISSN 0924-0659*, 1993.
83. [Van Lieshout, 2000] M. N. M. Van Lieshout. *Markov Point Processes and their Applications*. Imperial College Press, London, 2000.
84. [Vestri et Devernay, 2001] C. Vestri et C. Devernay. Using robust methods for automatic extraction of buildings. Dans *CVPR*, 2001.
85. [Vestri, 2000] C. Vestri. *Outils pour la reconstruction automatique de bâtiments à partir d'images aériennes*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, 2000.
86. [Vinson et al., 2001] S. Vinson, L. D. Cohen et F. Perlant. Extraction of rectangular buildings using DEM and orthoimage. Dans *SCIA*, Bergen, Norvège, juin 2001.
87. [Vinson et Cohen, 2002] S. Vinson et L. D. Cohen. Multiple rectangle model for buildings segmentation and 3D scene reconstruction. Québec, Canada, août 2002.
88. [Vosselman et Dijkman, 2001] G. Vosselman et S. Dijkman. 3d building model reconstruction from point clouds and ground plans. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, XXXIV-3/W4 :37–43, 2001.
89. [Weidner et Förstner, 1995] U. Weidner et W. Förstner. Towards automatic building extraction from high-resolution Digital Elevation Models. Dans *ISPRS*, volume 50, pages 38–49, août 1995.
90. [Weidner, 1995] U. Weidner. Building Extraction from Digital Elevation Models. Rapport de recherche, Institut für Photogrammetrie, Bonn, 1995.
91. [Winkler, 2003] G. Winkler. *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods : a Mathematical Introduction*. seconde édition, Springer-Verlag, 2003.

Annexes

Annexe A

Résultats supplémentaires

Nous présentons dans cette annexe des résultats complémentaires à ceux présentés dans le corps du manuscrit. Nous avons ordonné ces résultats de façon à commencer par ceux que nous croyons être les plus importants. Nous commençons donc par présenter des résultats obtenus avec le modèle du chapitre 6, fondé sur la détection de discontinuités. Viennent ensuite des résultats liés au modèle à deux éléments du chapitre 8, puis d'autres résultats de moindre importance.

A.1 Modèle du chapitre 6

A.1.1 Résultat sur un MNE de moins bonne qualité

Nous présentons ici un résultat d'extraction obtenu en utilisant le modèle du chapitre 6 sur un MNE de Rennes. Ce MNE nous a été fourni par l'IGN. Il est de nettement moins bonne qualité que le MNE d'Amiens. La résolution planimétrique (x, y) du MNE est de $0.4m$ tandis que la résolution verticale (z) est de $0.1m$. L'inconvénient majeur du MNE est qu'il n'y a pas de vérité terrain associée. Par contre, sa mauvaise qualité permet de montrer l'utilité des résultats obtenus puisque l'on obtient un raffinement intéressant des données. Notons que les paramètres utilisés sont les mêmes que pour les résultats sur Amiens présentés dans le chapitre 6 excepté pour le filtre bas niveau (voir tableau A.1).

TAB. A.1: Paramètres bas niveau utilisés pour le MNE de Rennes

Filtre bas niveau (Rennes)	
l_{regul}	4m
σ_l	1*r
σ_h	2m
δ_r	1m

La figure A.1 montre les rectangles détectés sur une première zone, la figure A.2 montre des vues 3D correspondant à une sous-zone des données. Le relief du sol a été estimé en utilisant la procédure décrite dans le chapitre 7 :

- [1] une fois les bâtiments détectés, pour chaque bâtiment on estime deux grandeurs : la hauteur moyenne du bâtiment et la hauteur du sol autour du bâtiment,
- [2] en substituant à chaque bâtiment la hauteur du sol mesurée on obtient un Modèle Numérique du Terrain sous jacent à la zone urbaine considérée,

- [3] on filtre le MNT obtenu au moyen d'une ouverture par un disque (100 pixels de rayon) et d'un filtre gaussien,
- [4] on obtient le MNE raffiné en remplaçant les pixels à l'intérieur des bâtiment par la hauteur moyenne estimée.

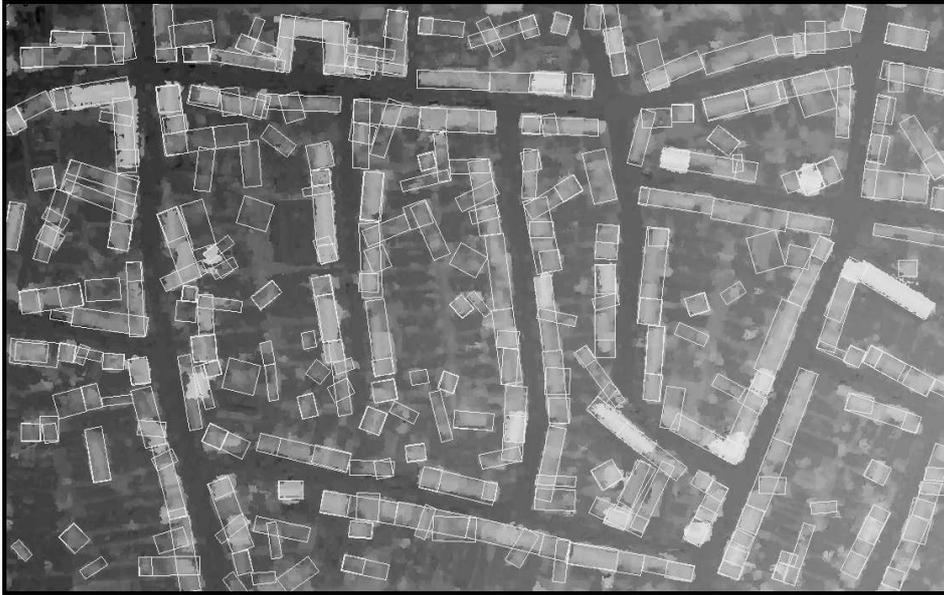


FIG. A.1: *Résultat d'extraction sur un MNE de Rennes en utilisant le modèle du chapitre 6*

A.1.2 Résultat sur Amiens

En utilisant le modèle du chapitre 6 sur une autre zone d'Amiens, on obtient la reconstruction présentée sur la figure A.3. Ce résultat est intéressant parcequ'il montre le comportement du modèle dans le cas d'une zone très dense.

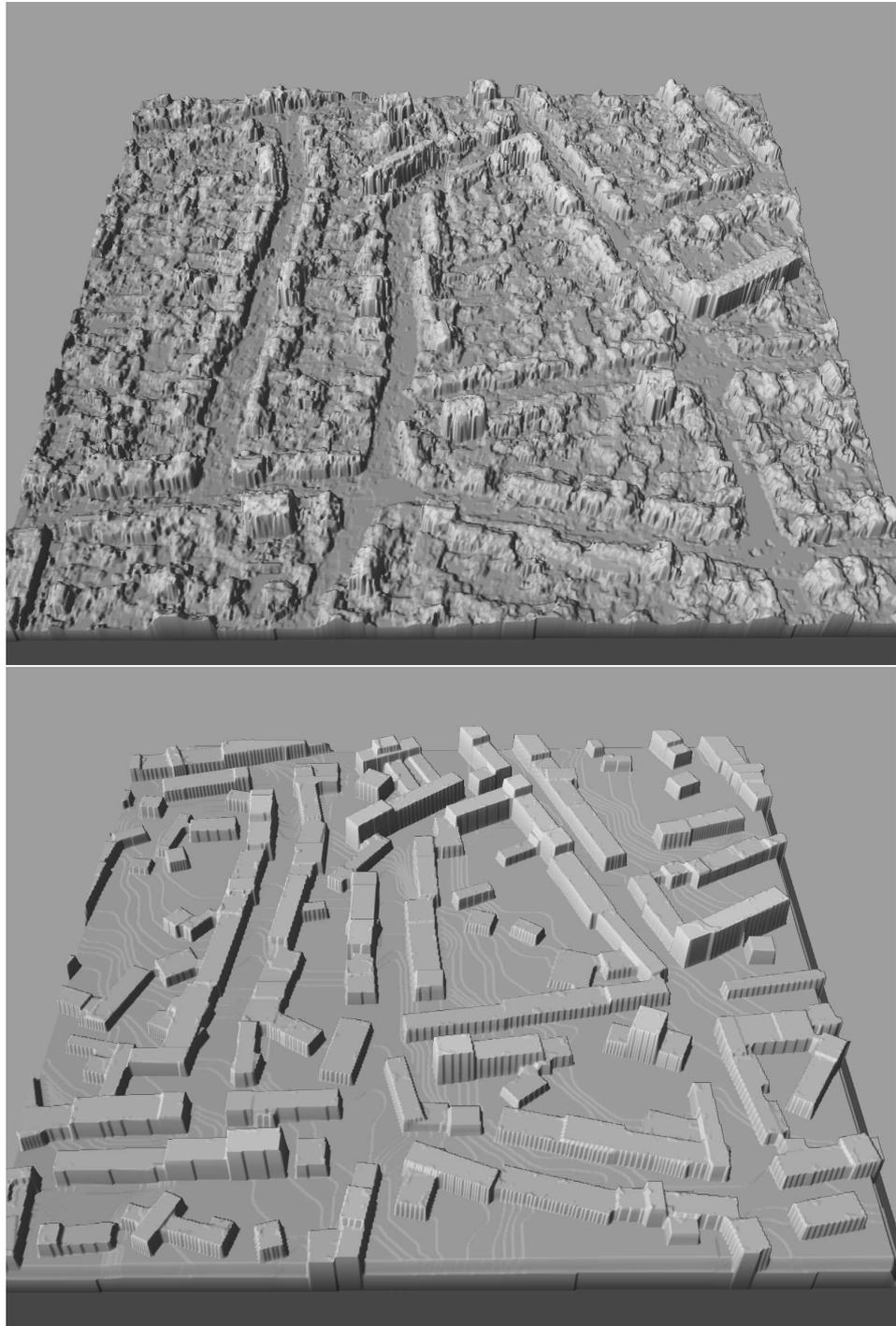


FIG. A.2: *Visualisation en 3 dimensions du résultat de la figure A.1. Au dessus : MNE d'origine, on constatera la piètre qualité du MNE. En dessous : extraction vectorielle obtenue. La hauteur associée à chaque rectangle est donnée par une estimation simple de la hauteur intérieure.*

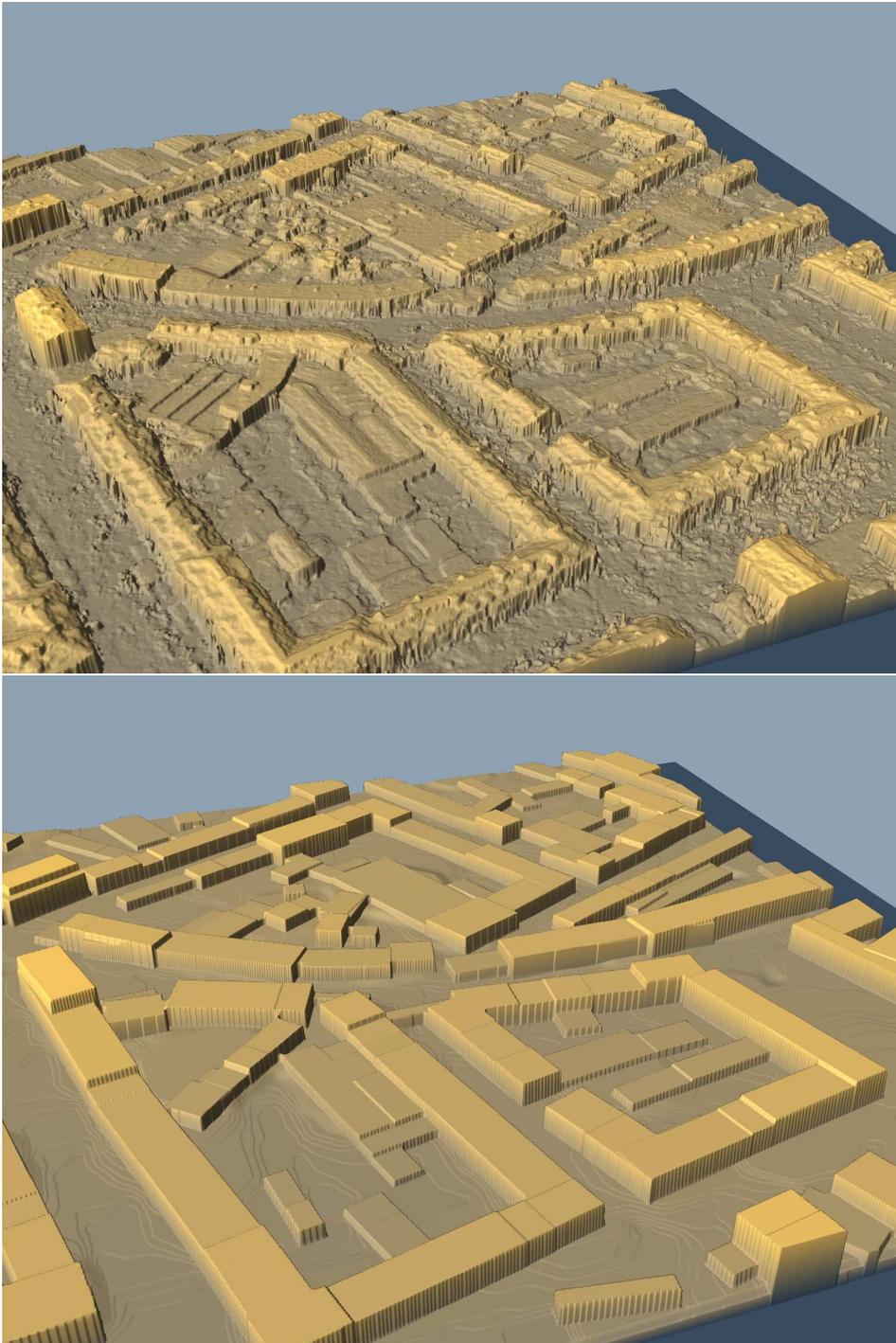


FIG. A.3: *Visualisation en 3 dimensions d'un autre résultat d'estimation sur un MNE de la ville d'Amiens. Au dessus : MNE d'origine. En dessous : extraction vectorielle obtenue. La hauteur associée à chaque rectangle est donnée par une estimation simple de la hauteur intérieure.*

A.1.3 Résultat sur une zone plus vaste

Nous présentons ici un résultat sur une zone vaste. Il s'agit d'une zone tirée du MNE de Rennes dont la particularité est d'être très pentue. La taille de la zone est de 900m par 400m environ. Les bâtiments sont moins denses que sur les zones précédemment considérées. La figure A.4 présente l'extraction obtenue. Les figures A.5 et A.6 présentent deux parties du résultat vues en trois dimensions, tandis que la figure A.7 montre une vue en trois dimensions d'ensemble du résultat obtenu.

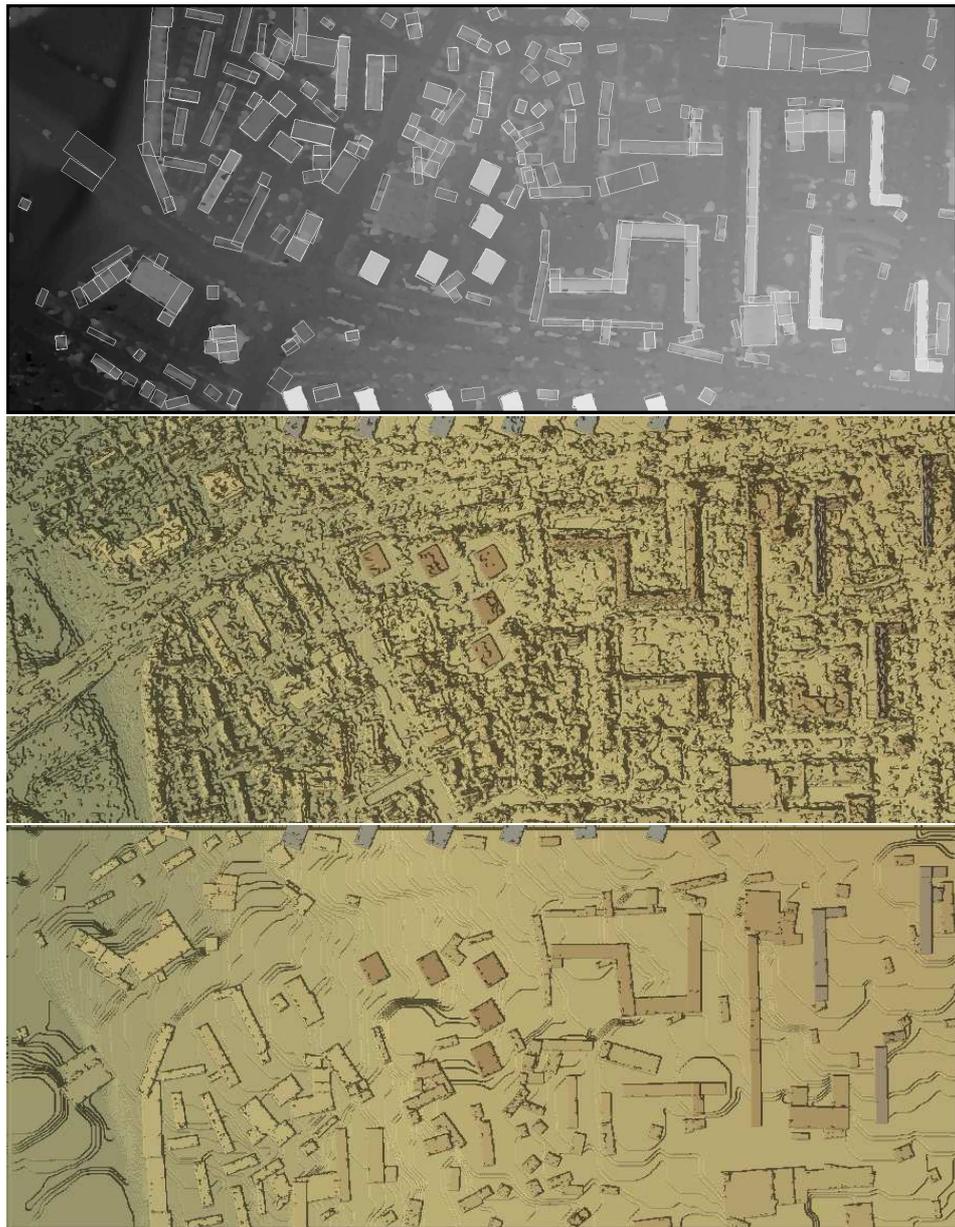


FIG. A.4: *Extraction des bâtiments sur une zone vaste de Rennes. De haut en bas : MNE et rectangles extraits, MNE d'origine en relief vu de haut et MNE raffiné obtenu par notre méthode en relief vu de haut.*

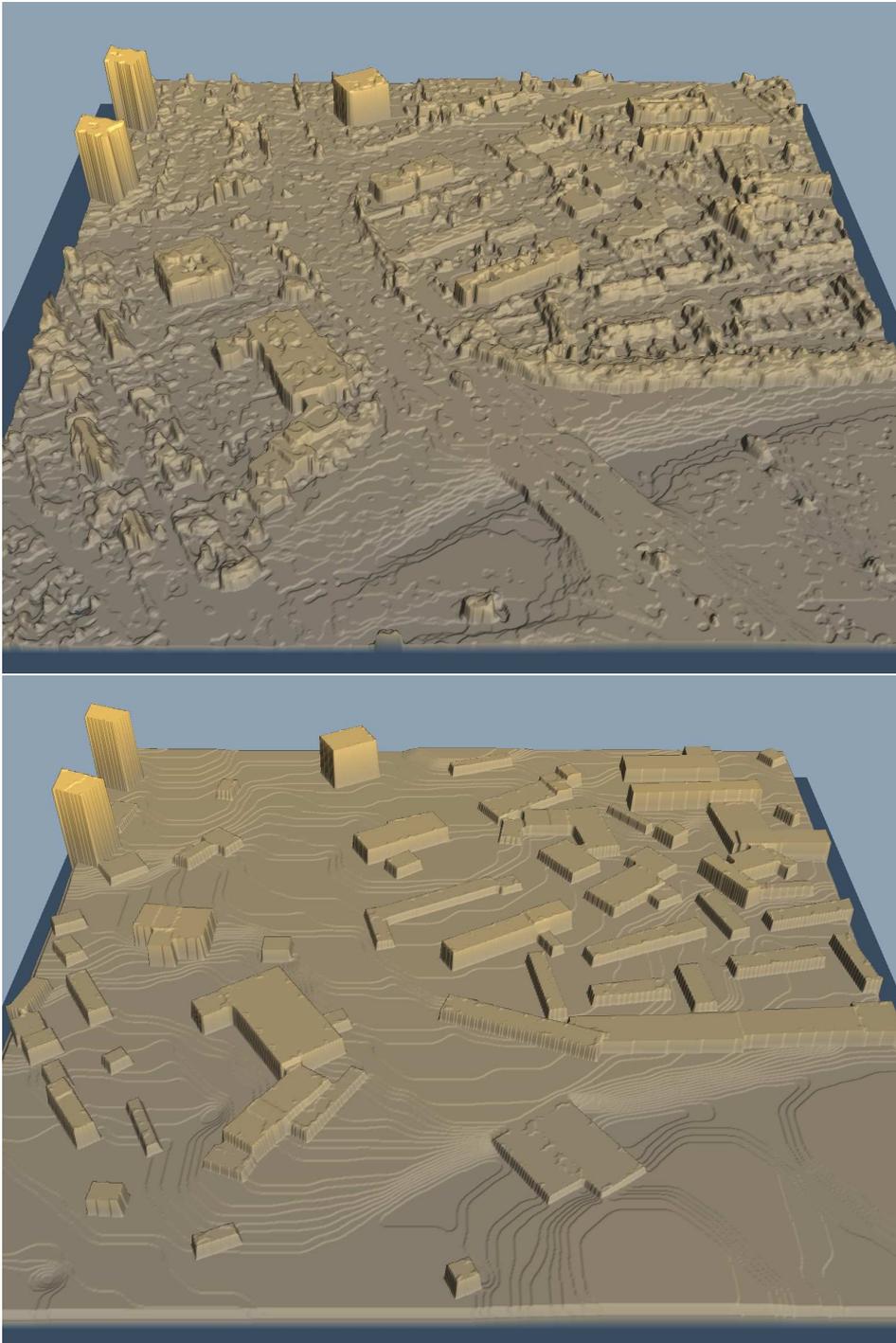


FIG. A.5: *Visualisation en 3 dimensions d'une partie du résultat de la figure A.4. Au dessus : MNE d'origine. En dessous : extraction vectorielle obtenue. La hauteur associée à chaque rectangle est donnée par une estimation simple de la hauteur intérieure.*

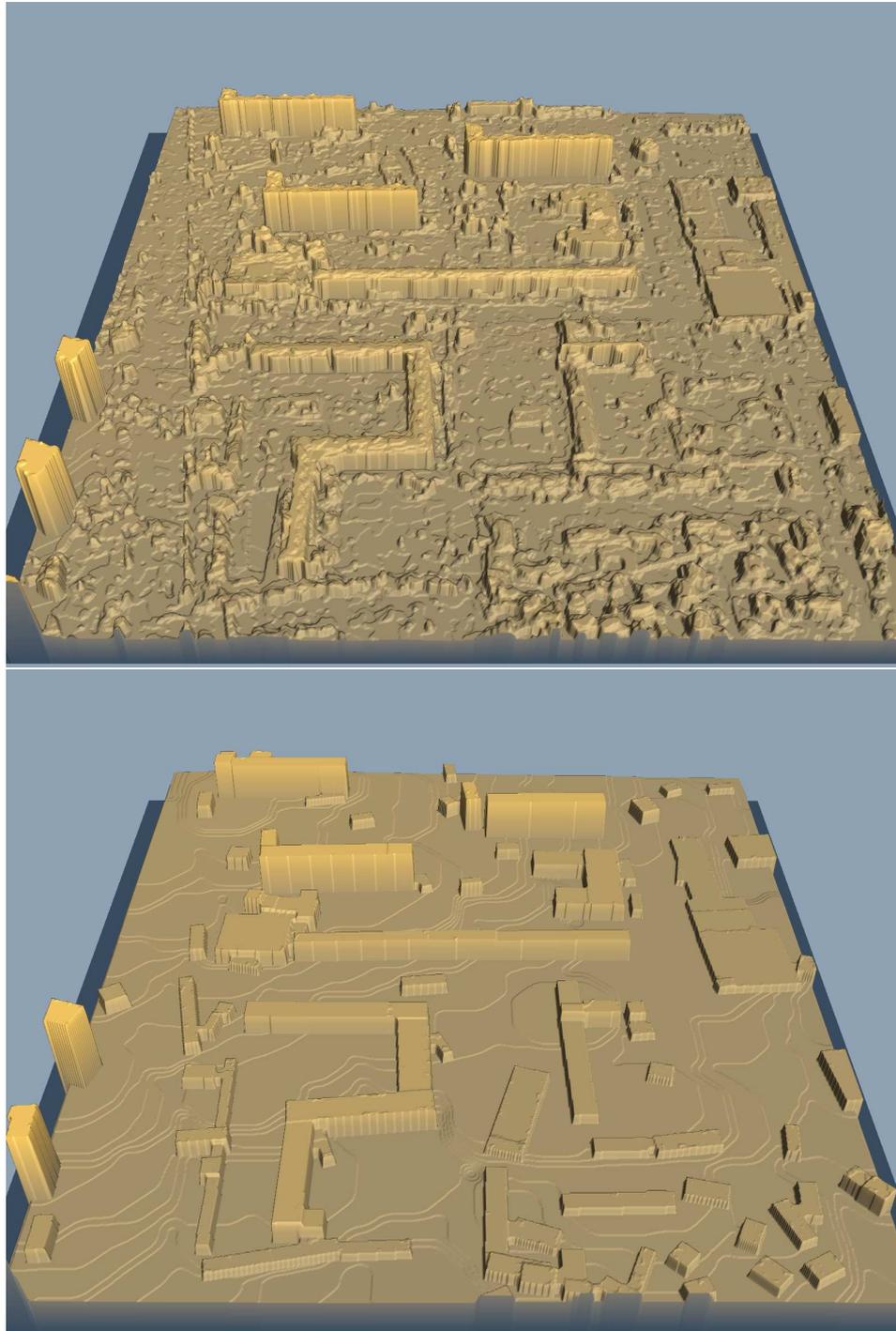


FIG. A.6: *Visualisation en 3 dimensions d'une partie du résultat de la figure A.4. Au dessus : MNE d'origine. En dessous : extraction vectorielle obtenue. La hauteur associée à chaque rectangle est donnée par une estimation simple de la hauteur intérieure.*

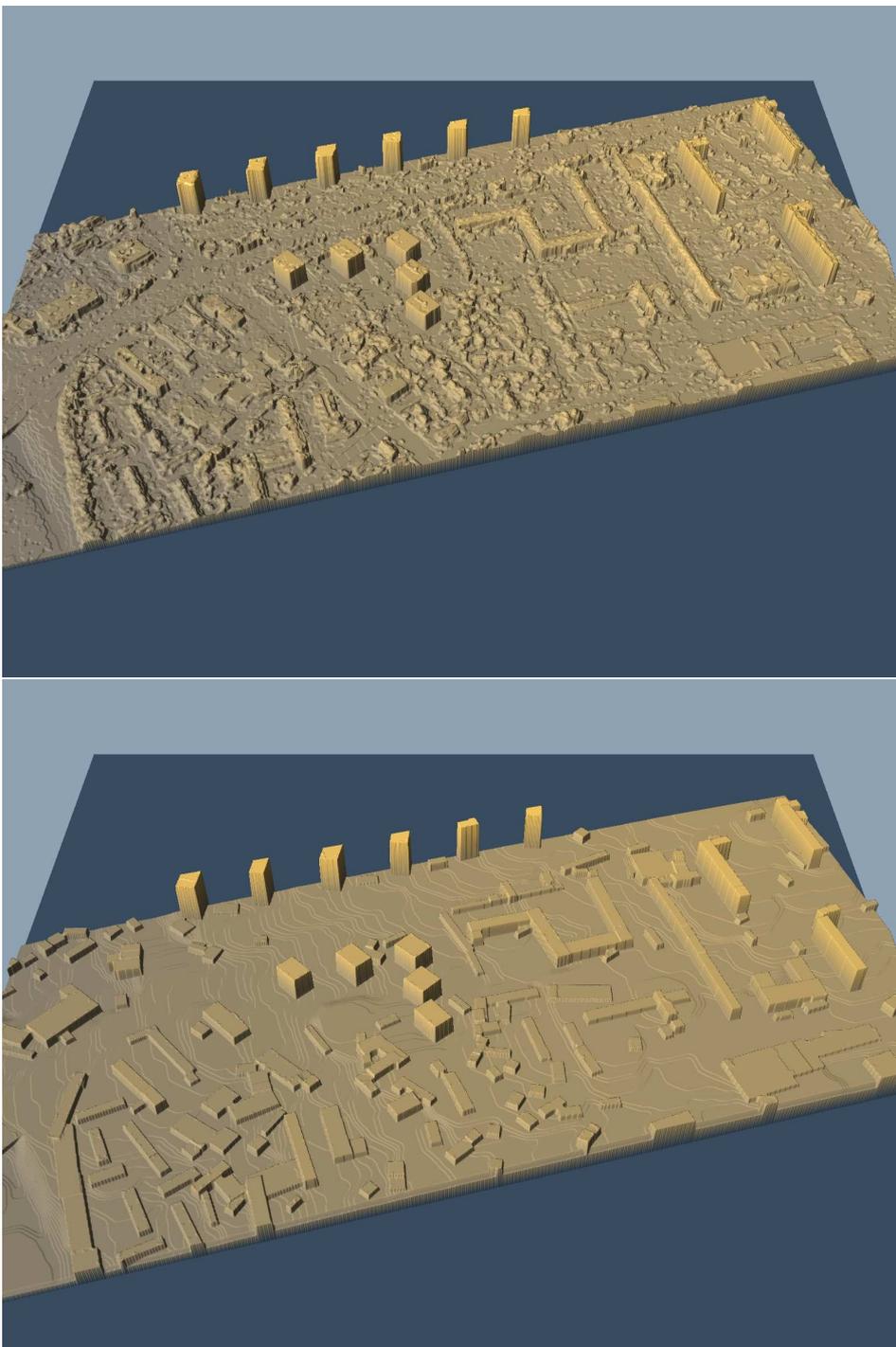


FIG. A.7: *Visualisation en 3 dimensions du résultat de la figure A.4. Au dessus : MNE d'origine. En dessous : extraction vectorielle obtenue. La hauteur associée à chaque rectangle est donnée par une estimation simple de la hauteur intérieure.*

A.1.4 Résultat sur la vérité terrain

Nous présentons sur la figure A.8 un résultat d'extraction sur la vérité terrain (TRAPU) fournie par l'IGN.

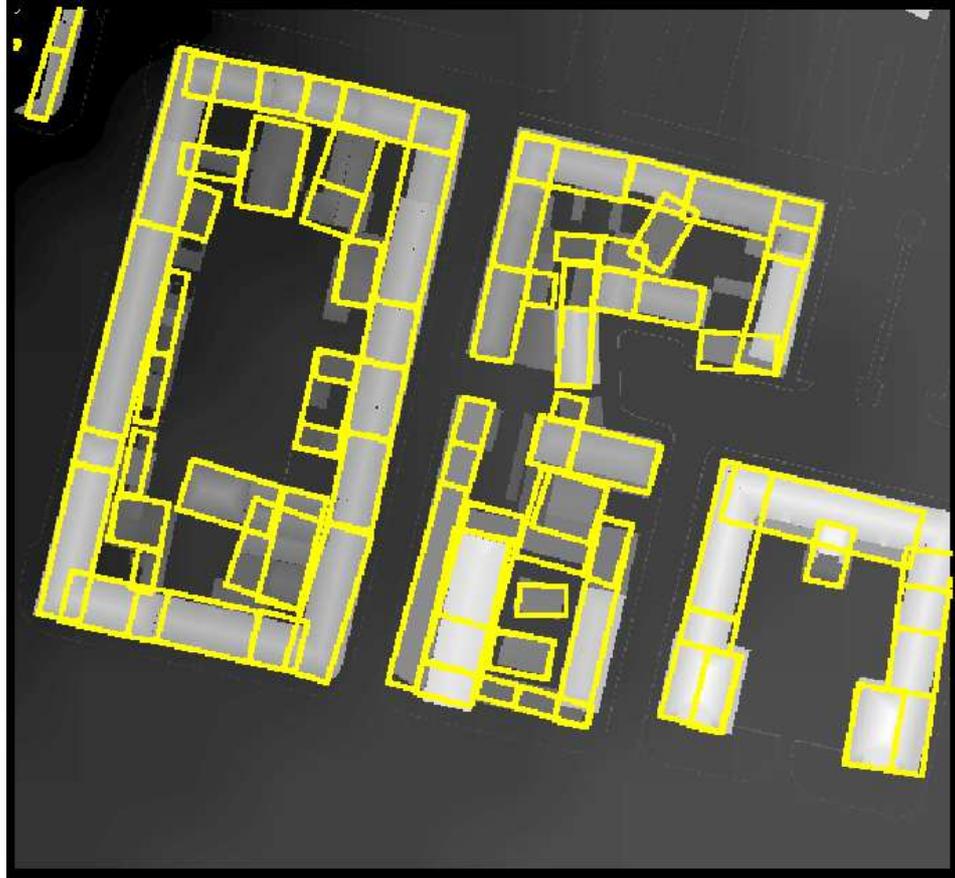


FIG. A.8: *Résultat d'extraction en utilisant le modèle du chapitre 6 sur la vérité terrain*

A.2 Modèle du chapitre 8

A.2.1 Deuxième version du MNE Pléiades

Nous présentons ici un résultat sur un autre MNE issu des simulations pléiades (fourni par le CNES via l'IGN). La différence avec le MNE présenté dans le chapitre 8 tient dans la résolution spatiale : la résolution du MNE des figures A.9 et A.10 est à 80cm. Les deux figures présentent respectivement les rectangles et les segments extraits. On notera que ce MNE est meilleur que le premier. En particulier les bâtiments distincts sont mieux séparés les uns des autres.

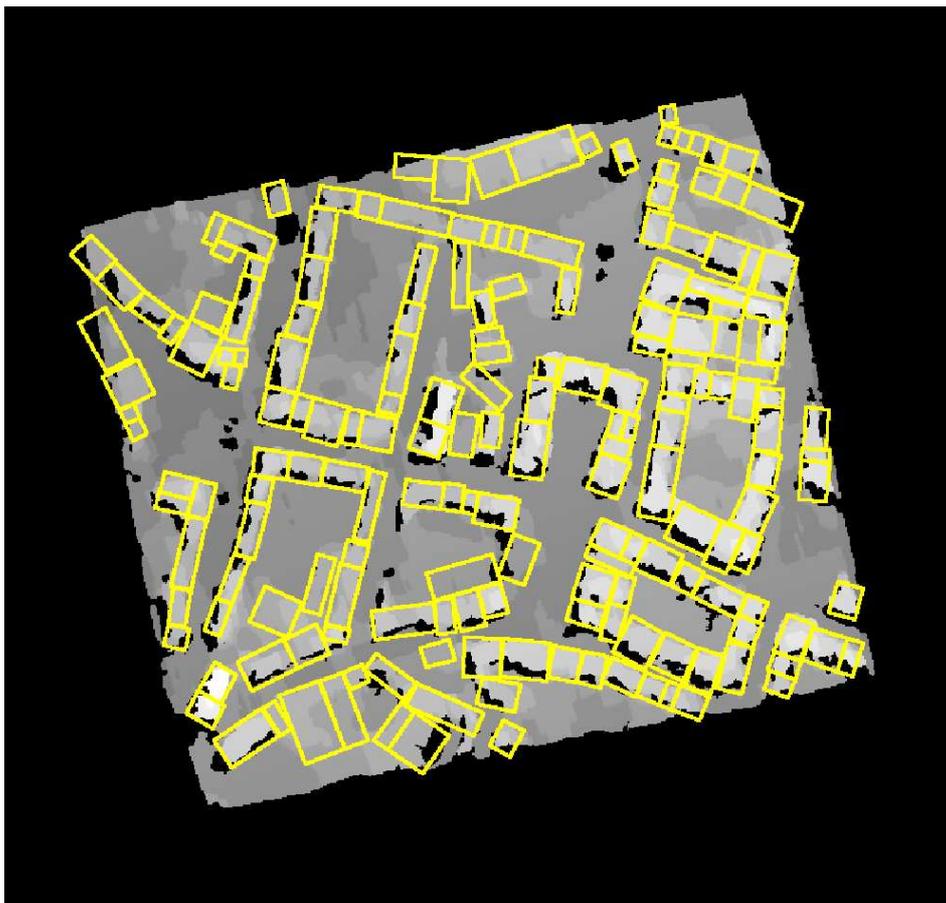


FIG. A.9: Deuxième MNE Pléiades (80cm), rectangles extraits par le modèle à deux éléments

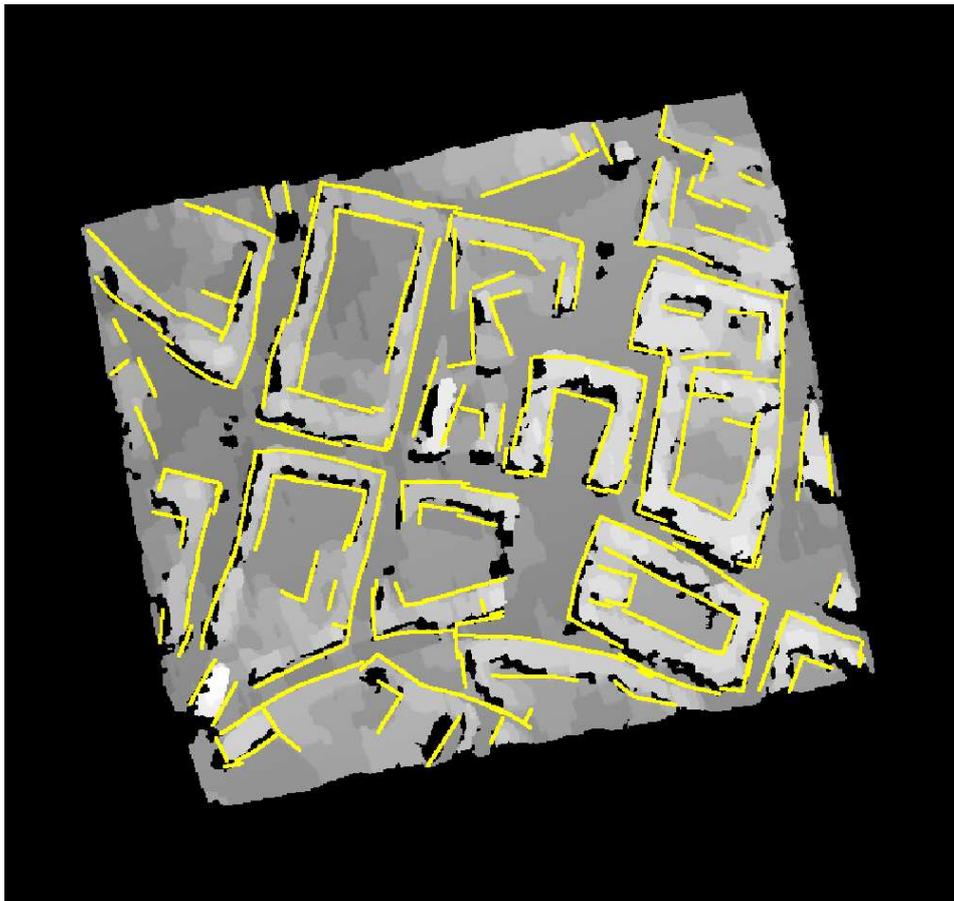


FIG. A.10: Deuxième MNE Pléiades (80cm), segments extraits par le modèle à deux éléments

A.3 Modèle du chapitre 2

La figure A.11 montre l'estimation de la qualité du résultat exposé dans le chapitre 2. Les taux de classifications sont montrés dans le tableau A.2.

Résultat : données optiques	
Aire manquée (noir)	8%
Fausses alarmes (blanc)	3%

TAB. A.2: Taux de classification du résultat présenté dans le chapitre 2.

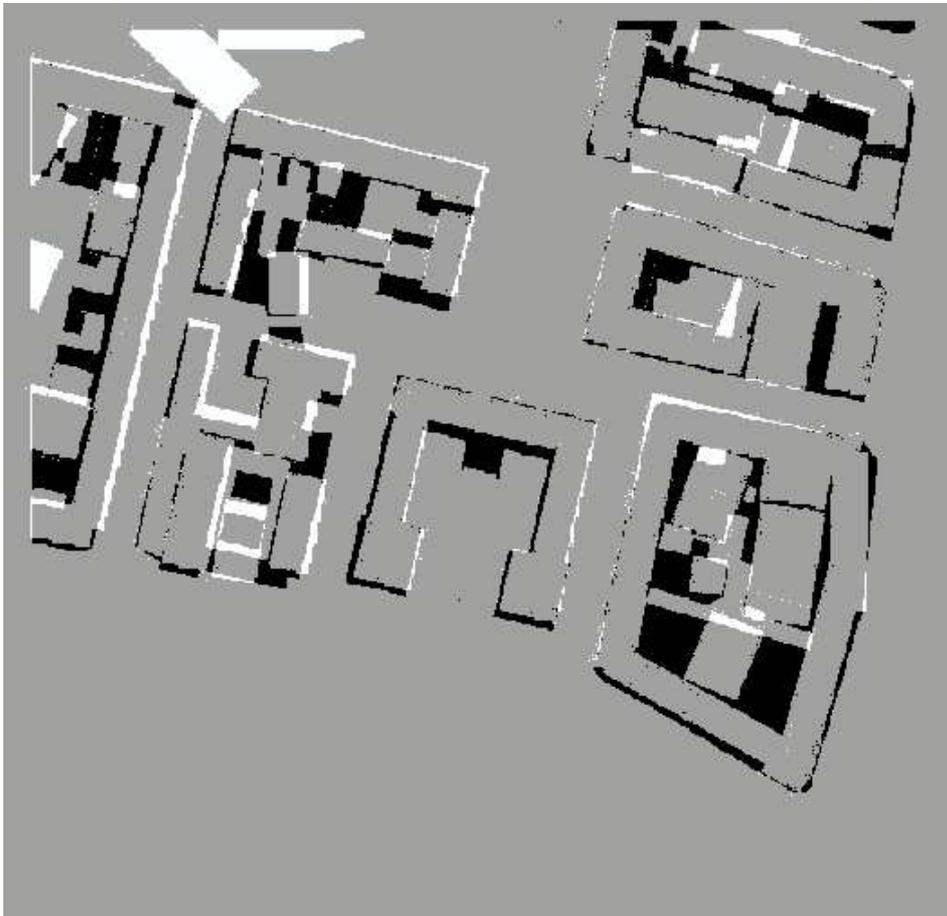


FIG. A.11: Comparaison entre le résultat d'extraction du chapitre 2 et la vérité terrain fournie par l'IGN.

A.4 Modèle du chapitre 9

Les figures A.12 et A.13 présentent le résultat obtenu par décroissance adaptative. Il s'agit du résultat correspondant à la simulation d de la partie 9.1.7.

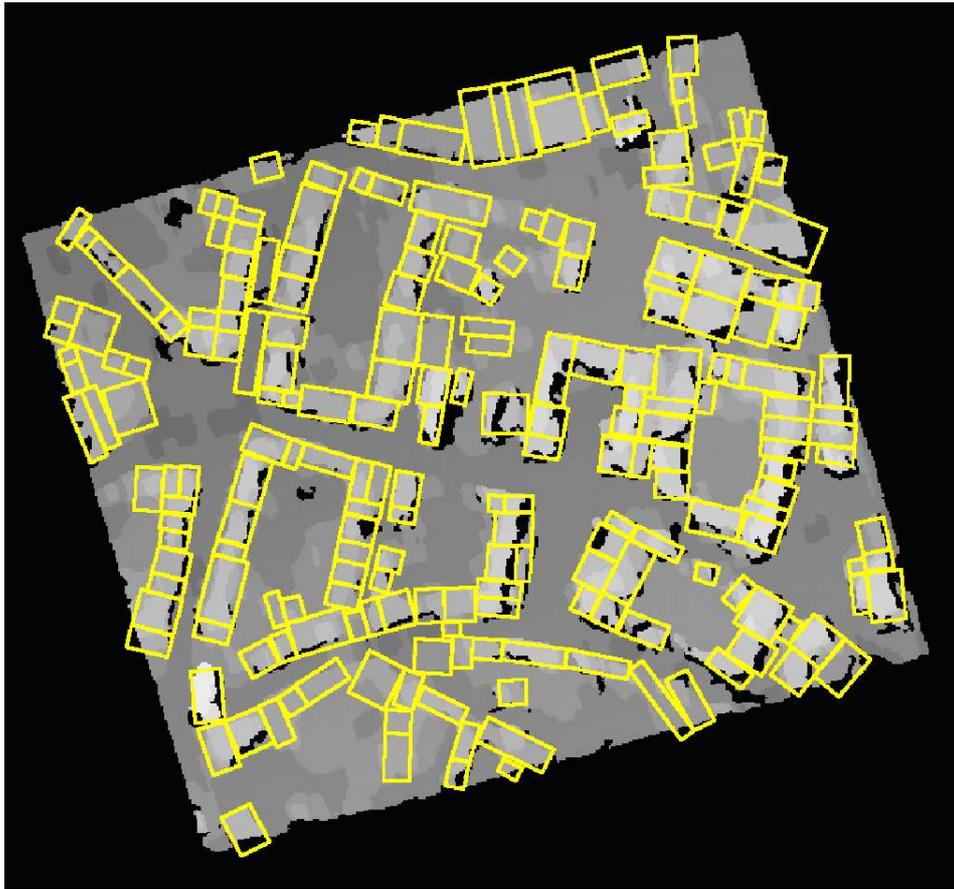


FIG. A.12: Premier MNE Pléiades (1m), rectangles extraits par le modèle à deux éléments et la décroissance de température adaptative (simulation d de la partie 9.1.7).

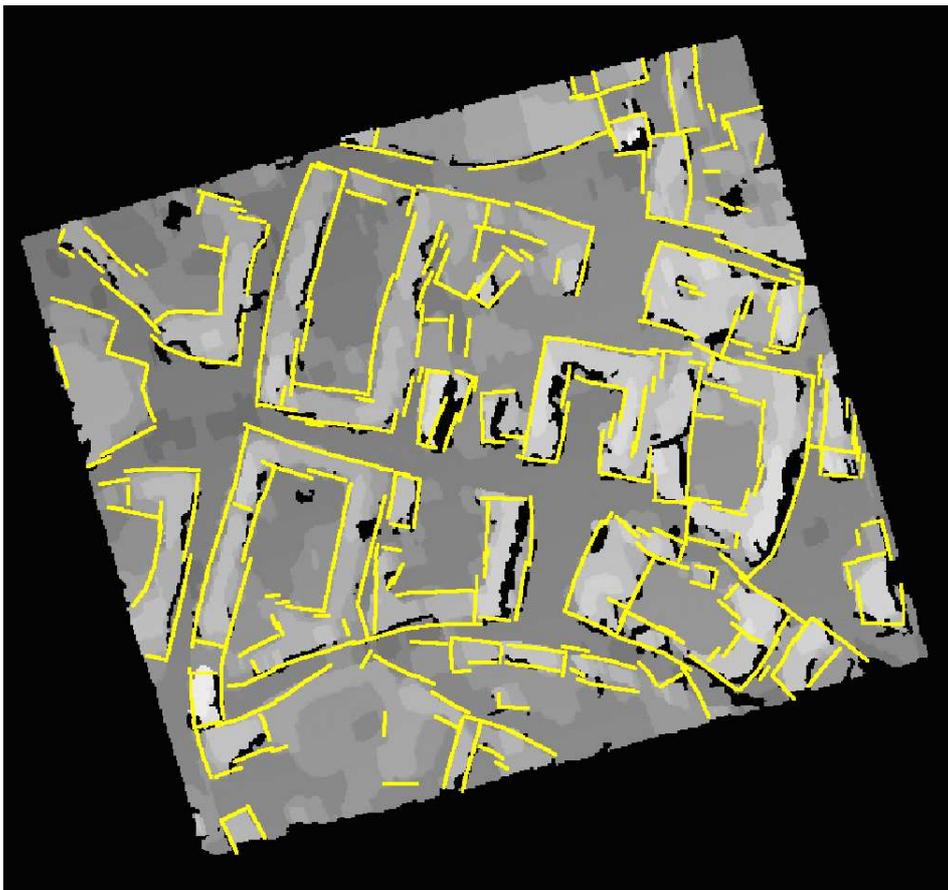


FIG. A.13: Premier MNE Pléiades (1m), segments extraits par le modèle à deux éléments et la décroissance de température adaptative (simulation d de la partie 9.1.7).

Annexe B

Détails du modèle du chapitre 6

B.1 Filtre bas niveau

Nous détaillons ici le filtre bas niveau utilisé pour détecter les discontinuités d'intérêt. Pour un profil composé de N points notés $p(1), \dots, p(N)$:

1. Calculer le vecteur gradient g :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\} \quad g(i) = p(i+1) - p(i)$$

2. Sélectionner les gradients plus grand que σ_l :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\} \quad sel(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i) \geq \sigma_l \\ -1 & \text{si } g(i) \leq -\sigma_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Accumuler les gradients positifs :

```
tem=0
last_pos=0
last_acc=0

Pour i = 1 a i = N - 1
  Si sel(i) = 1

    Si tem = 1 et d(last_pos, i) ≤ lregul

      sel(i)=0
      last_pos=i
      g(last_acc)=g(last_acc)+g(i)
    Sinon
      last_pos=i
      last_acc=i
      tem=1

  Si sel(i)=-1
    tem=0
```

4. Accumuler les gradients négatifs :

```

tem=0
last_neg=0

Pour i = 1 a N - 1

  Si sel(i)=-1
    Si tem=1 et  $d(\text{last\_neg}, i) \leq l_{\text{regul}}$ 

      sel(last_neg)=0
       $g(i) = g(\text{last\_neg}) + g(i)$ 
      last_neg=i

    Sinon
      last_neg=i
      tem=1

  Si sel(i)=1
    tem=0

```

5. Etape d'ouverture

```

last_pos=0

Pour i = 1 a N - 1

  Si sel(i)=1
    last_pos=i

  Si sel(i)=-1 et  $d(\text{last\_pos}, i) \leq l_{\text{regul}}$ 
     $g = g(i) + g(\text{last\_pos})$ 

  Si  $g \geq 0$ 
    sel(i)=0
     $g(\text{last\_pos}) = g$ 
  sinon
    sel(last_pos)=0
     $g(i) = g$ 

```

6. Selection des gradients plus grand que σ_h :

```

Pour i=1 to i=N-1
  Si sel(i)=-1 ou sel(i)=1
    Si  $g(i) \leq \sigma_h$  et  $g(i) \geq -\sigma_h$ 
      sel(i)=0

```

Nous présentons ici des résultats obtenus avec le filtre bas niveau. Ces résultats permettent de comprendre l'influence des différents paramètres du filtre. Nous présentons 5 résultats sur un profil. Les 5 expériences sont résumées par le tableau B.1.

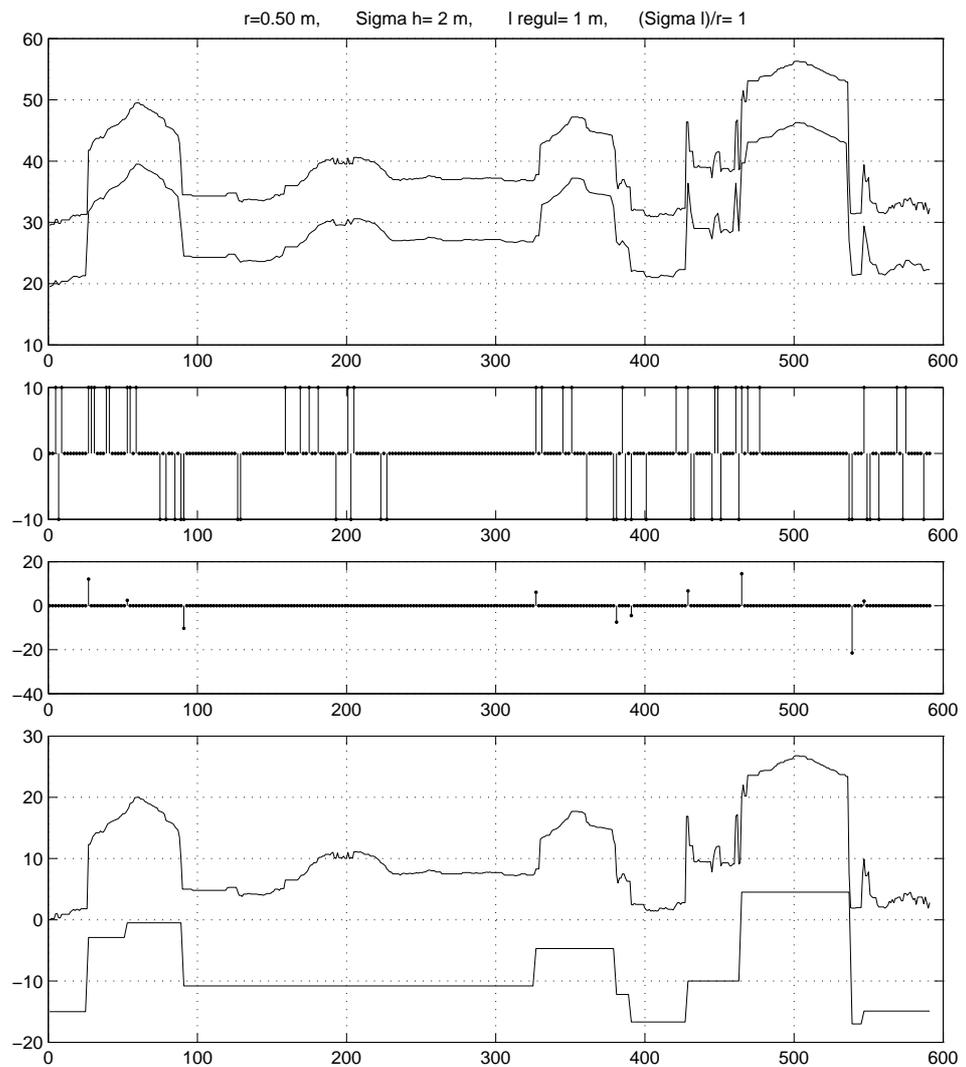


FIG. B.1: *Simplification des profils : expérience 1. Du haut en bas : vrai profil, profil sous échantillonné (en fonction de r), gradients détectés ($\geq \sigma_l$), discontinuités sélectionnées après accumulation, ouverture et seuillage par σ_h et finalement : vrai profil et profil simplifié.*

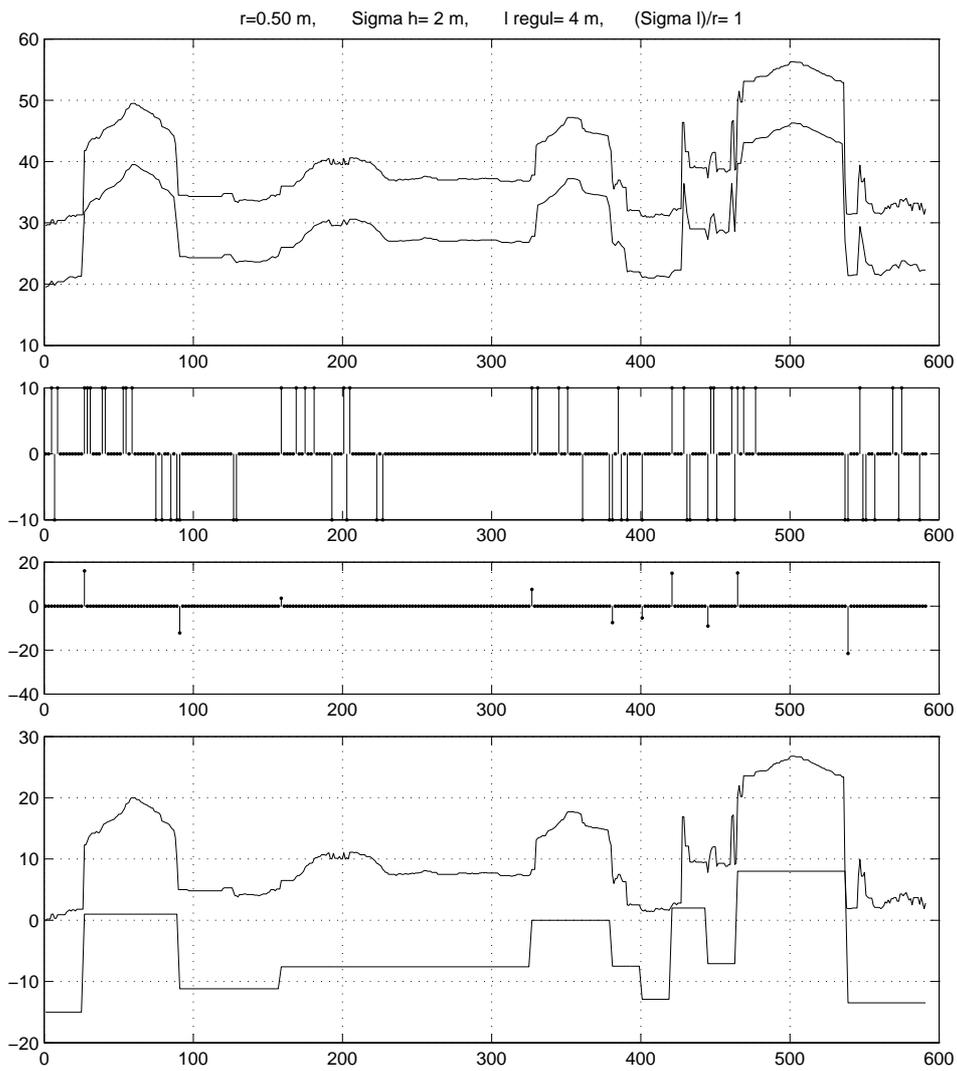


FIG. B.2: *Simplification des profils : expérience 2. Le paramètre de régularisation est mis à : $l_{regul} = 4m$.*

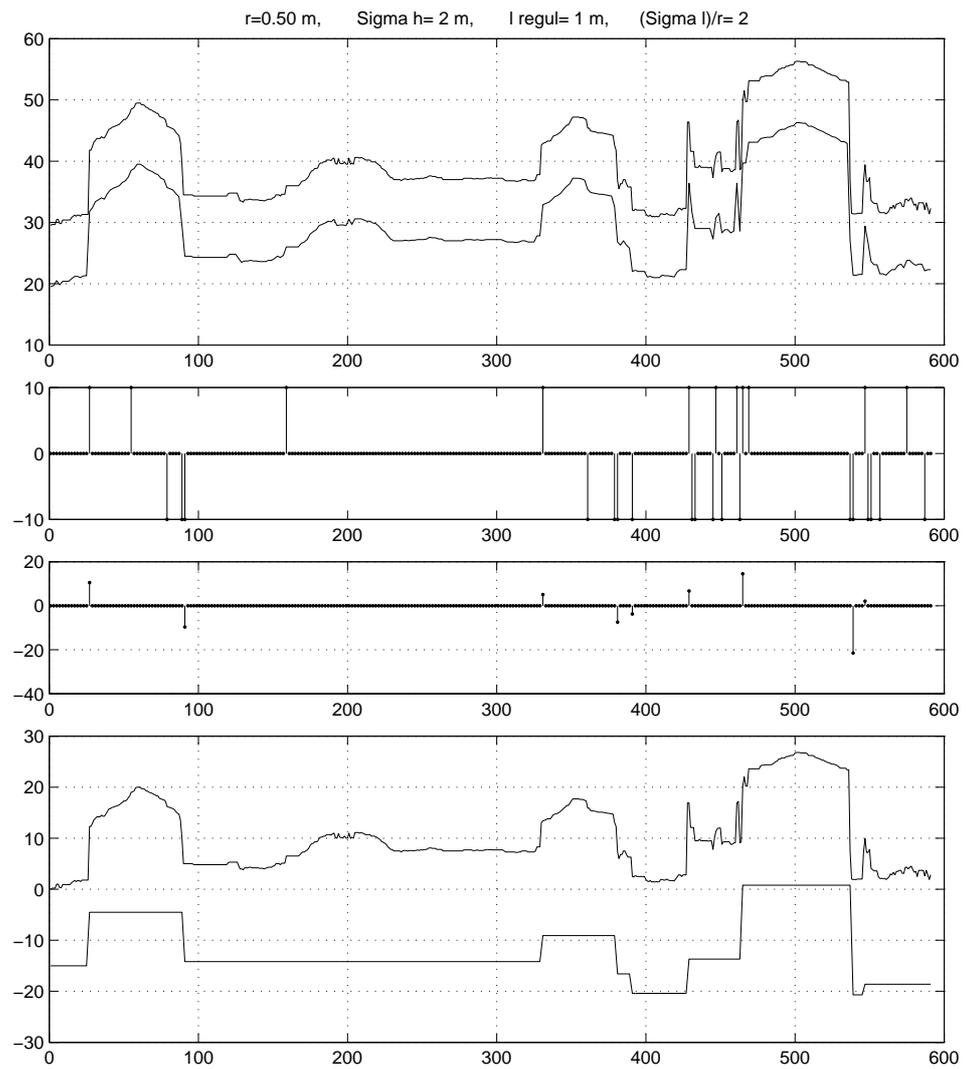


FIG. B.3: *Simplification des profils : expérience 3. Le premier seuil est deux fois plus grand que pour l'expérience 1.*

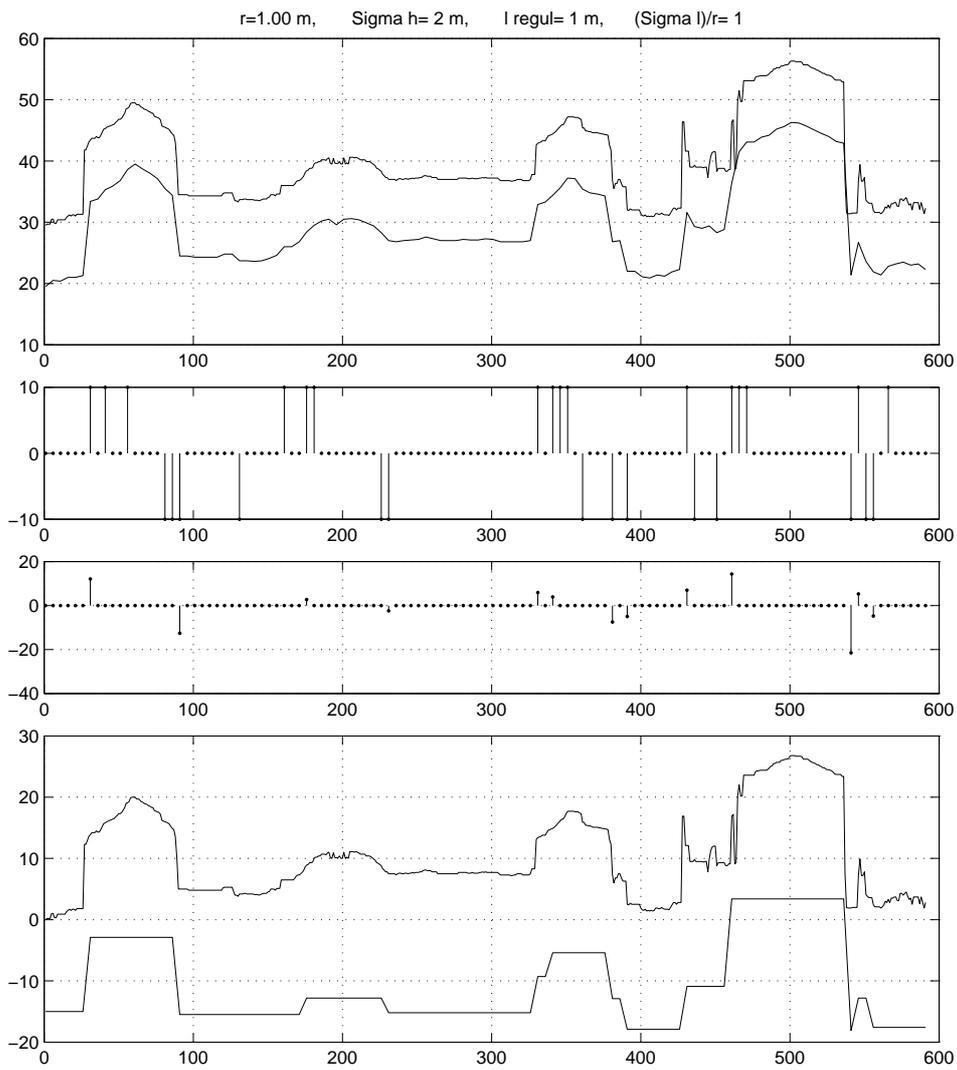


FIG. B.4: *Simplification des profils : expérience 4. Le paramètre de résolution vaut 1m.*

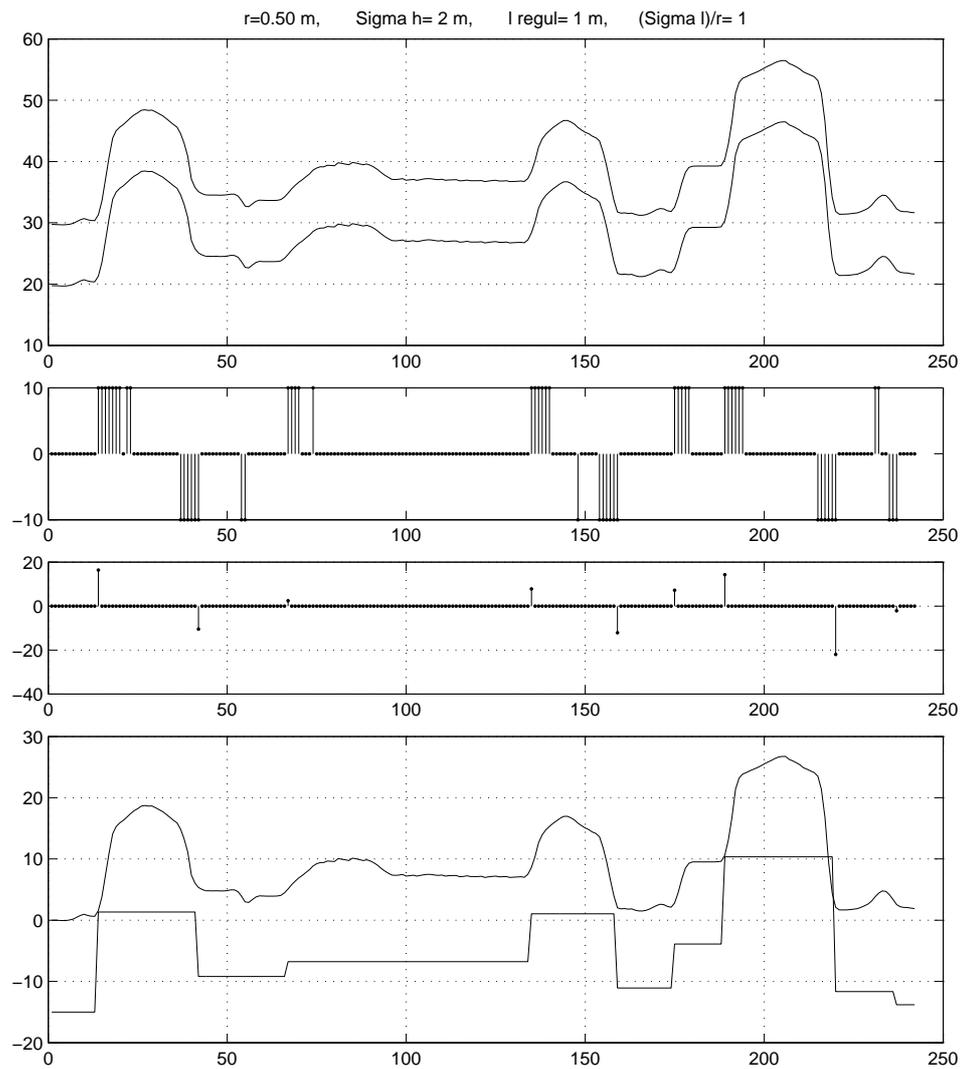


FIG. B.5: *Simplification des profils : expérience 5. Résultat sur un profil LASER.*

	Type de données	Paramètres			
		r	σ_h	l_{regul}	σ_l
Exp 1 (figure B.1)	Optique	0.5 m	2 m	1 m	1*r
Exp 2 (figure B.2)	Optique	0.5 m	2 m	4 m	1*r
Exp 3 (figure B.3)	Optique	0.5 m	2 m	1 m	2*r
Exp 4 (figure B.4)	Optique	1 m	2 m	1 m	1*r
Exp 5 (figure B.5)	Laser	0.5 m	2 m	1 m	1*r

TAB. B.1: Paramètres utilisés pour les différentes expériences

B.2 Détails de l'énergie utilisée

Nous détaillons ici les énergies associées aux objets des ensembles γ_1, γ_2 et γ_3 . Ces énergies servent essentiellement à comparer les objets d'un même ensemble, de manière à guider leur évolution vers le niveau supérieur.

Niveau 1 :

$$u \in \gamma_1 \text{ ssi } \begin{cases} u \notin \gamma_0 \\ \tilde{v}(u) \geq v_{min} \\ \tilde{m}(u) \leq m_{max} \\ \max(Lg_1(u), Lg_2(u)) \geq th_1 \end{cases} \quad J_1(u) = \frac{1}{10}Lg(u) + \frac{9}{10}\left(1 - \frac{\tilde{m}(u)}{m_{max}}\right)$$

Niveau 2 :

$$u \in \gamma_2 \text{ ssi } \begin{cases} u \notin \gamma_1 \\ \tilde{v}(u) \geq v_{min} \text{ ou } \tilde{m}(u) \leq m_{max} \end{cases} \quad J_2(u) = \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}(u)) + \frac{1}{2}\tilde{v}(u)$$

Niveau 3 :

$$u \in \gamma_3 \text{ ssi } u \notin \gamma_2 \quad J_3(u) = \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}(u)) + \frac{1}{2}\tilde{v}(u)$$

Annexe C

Considérations informatiques

Les algorithmes ont été codés en C++. Nous présentons ici quelques méthodes qui permettent un codage efficace et donc des temps de calculs limités.

C.1 Codage des interactions

C.1.1 Codage de l'état

L'état courant est une configuration \mathbf{x} d'objets u_i que l'on code par un tableau dynamique d'objets.

C.1.2 Codage des interactions

Dans ce travail, nous n'avons utilisé que des interactions entre deux objets. Il est toutefois possible d'introduire des relations entre plus de deux objets. C'était d'ailleurs l'un des aspects du sujet de DEA traité par l'auteur (voir [1]). Le problème de la rapidité de mise à jour des interactions entre les objets est une question essentielle.

Nous avons adopté le principe suivant : à chaque objet $u \in \mathbf{x}$ est associé une liste de liens $L(u)$ vers les ensembles d'interaction auxquels il appartient. Chaque interaction est accessible dans la liste, ou bien par parcours classique, ou bien au moyen d'une clef e . Ainsi, $L(u)(e)$ renvoie une cellule de la liste contenant un pointeur vers le descriptif d'une l'interaction impliquant u . Dans ce descriptif, on trouve un pointeur vers chacun des objets de l'interaction, ainsi que la clef correspondante. Une interaction r entre deux objets u et v peut donc être décrite de la façon suivante, si l'on note \bar{u} un lien vers un objet u (informatiquement, il s'agit d'un pointeur).

$$r = ((\bar{u}, e(u)), (\bar{v}, e(v))) \quad \text{Avec} \quad \begin{array}{l} L(u)(e(u)) = \bar{r} \\ L(v)(e(v)) = \bar{r} \end{array} \quad (\text{C.1})$$

Le système de codage présenté ci-dessus permet de retirer un objet très rapidement : en effet, si l'on supprime un objet u il faut mettre à jour la liste des interactions de tous les objets v interagissant avec u . Pour ce faire :

- on parcourt la liste $L(u)$ des interactions impliquant u , et pour chaque interaction $r = ((\bar{u}, e(u)), (\bar{v}, e(v)))$ telle que $\bar{r} \in L(u)$,
- on parcourt tous les objets v dans l'interaction,
- pour chacun de ces objets, on supprime dans $L(v)$ l'élément indexé par $e(v)$ pointant sur r .

La suppression d'un objet se fait donc en temps linéaire par rapport aux nombres d'interactions auxquelles il appartient. L'ajout d'un objet est simple, il suffit de s'assurer que la relation C.1 soit vérifiée. Le temps d'ajout est donc linéaire par rapport au nombre de voisins.

C.1.3 Arborescence des relations

Pour diminuer les temps de calculs nécessaires, nous avons introduit une hiérarchie des interactions. Cela permet de limiter le nombre de tests nécessaires à la détection des interactions. Par exemple, la relation fondamentale est une relation de proximité entre les objets. C'est la seule relation dont le test repose sur l'exploration de tous les couples d'objets possibles. Les autres relations ne sont testées qu'entre objets en interaction de proximité.

C.2 Metropolis Hastings

Il faut remarquer que la suppression d'un objet coûte beaucoup moins cher que l'ajout d'un objet, puisque dans ce dernier cas il est nécessaire de tester toutes les interactions possibles. Or, toute transformation peut-être décomposée en une étape de mort suivie d'une de naissance. Pour les transformations de naissance ou mort, une seule de ces deux étapes à lieu. Lors de la proposition de perturbation formulée par l'algorithme, on calcule donc la variation d'énergie associée à une mort, puis à une naissance. Vient ensuite le schéma de Bernoulli statuant sur l'acceptation de la proposition et dont le paramètre dépend de la variation d'énergie calculée. Si la proposition est acceptée, tout se passe facilement. Par contre, si la proposition est rejetée, il faut éviter de refaire des calculs que l'on a déjà fait. Pour ce faire nous avons introduit une étape de mort fictive : lorsque la proposition est générée, celle-ci se décompose en une mort fictive et une naissance. Si la proposition est validée la mort est entérinée, sinon on ressuscite l'objet tué et on tue le nouvel objet proposé, ce qui permet de ne calculer qu'une seule fois les interactions impliquant l'objet.

RÉSUMÉ

Cette thèse se place dans un cadre de reconstruction urbaine et propose un corpus algorithmique pour extraire des formes simples sur les Modèles Numériques d'Élévation. Ce type de données décrit le relief d'une zone urbaine par une grille régulière de points à chacun desquels est associée une information de hauteur. Les modèles utilisés reposent sur l'utilisation de processus ponctuels marqués. Il s'agit de variables aléatoires dont les réalisations sont des configurations d'objets géométriques. Ces modèles permettent d'introduire des contraintes sur la forme des objets recherchés dans une image ainsi qu'un terme de régularisation modélisé par des interactions entre les objets. Une énergie peut être associée aux configurations d'objets et la configuration minimisant cette énergie trouvée au moyen d'un recuit-simulé couplé à un échantillonneur de type Monte Carlo par Chaîne de Markov à sauts réversibles (RJMCMC).

Nous proposons quatre modèles pour extraire des caricatures de bâtiments à partir de descriptions altimétriques de zones urbaines denses. Chaque modèle est constitué par une forme d'objet, une énergie d'attache aux données et une énergie de régularisation. Les deux premiers modèles permettent d'extraire des formes simples (rectangles) en utilisant une contrainte d'homogénéité pour l'un et une détection des discontinuités pour l'autre. Le troisième modèle modélise les bâtiments par une forme polyédrique. Le dernier modèle s'intéresse à l'apport d'une coopération entre des objets simples. Les algorithmes obtenus, automatiques, sont évalués sur des données réelles fournies par l'IGN (MNE Laser et optiques de différentes qualités).

Mots clefs : *urbain dense, processus ponctuels, recuit-simulé, MCMC, extraction de bâtiment, Modèle Numérique d'Élévation*

ABSTRACT

The context of this thesis is the reconstruction of urban areas from images. It proposes a set of algorithms for extracting simple shapes from Digital Elevation Models (DEM). DEMs describe the altimetry of an urban area by a grid of points, each of which has a height associated to it.

The proposed models are based on marked point processes. These mathematical objects are random variables whose realizations are configurations of geometrical shapes. Using these processes, we can introduce constraints on the shape of the objects to be detected in an image, and a regularizing term incorporating geometrical interactions between objects. An energy can be associated to each object configuration, and the global minima of this energy can then be found by applying simulated annealing to a Reversible Jump Monte Carlo Markov Chain sampler (RJMCMC).

We propose four different models for extracting the outlines of buildings from altimetric descriptions of dense urban areas. Each of these models is constructed from an object shape, a data energy, and a regularizing energy.

The first two models extract simple shapes (rectangles) using, respectively, a homogeneity constraint and discontinuity detection. The third model looks for three-dimensional polyhedral buildings. The last model uses cooperation between two types of objects, rectangles and segments.

The resulting algorithms are evaluated on real data provided by the French National Geographic Institute (a laser DEM and optical DEMs of differing quality).

Keywords : *dense urban area, point processes, simulated-annealing, MCMC, building extraction, Digital Elevation Model*