# MODÉLISATION DE L'ECOULEMENT DES GLACIERS TEMPÉRÉS

Martina Schäfer

▶ **To cite this version:**

Martina Schäfer. MODÉLISATION DE L'ECOULEMENT DES GLACIERS TEMPÉRÉS. Sciences de la Terre. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT : . tel-00192512v1

**HAL Id: tel-00192512**

**https://theses.hal.science/tel-00192512v1**

Submitted on 28 Nov 2007 (v1), last revised 29 Nov 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement
UMR5183
Centre National de la Recherche Scientifique
Université Joseph Fourier
54, rue Molière - Domaine Universitaire
BP 96 - 38402 - Saint Martin d'Hères Cedex (France)

# Modélisation de l'écoulement des glaciers tempérés

**Martina Schäfer**

Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1)

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et 30 mars 1992)

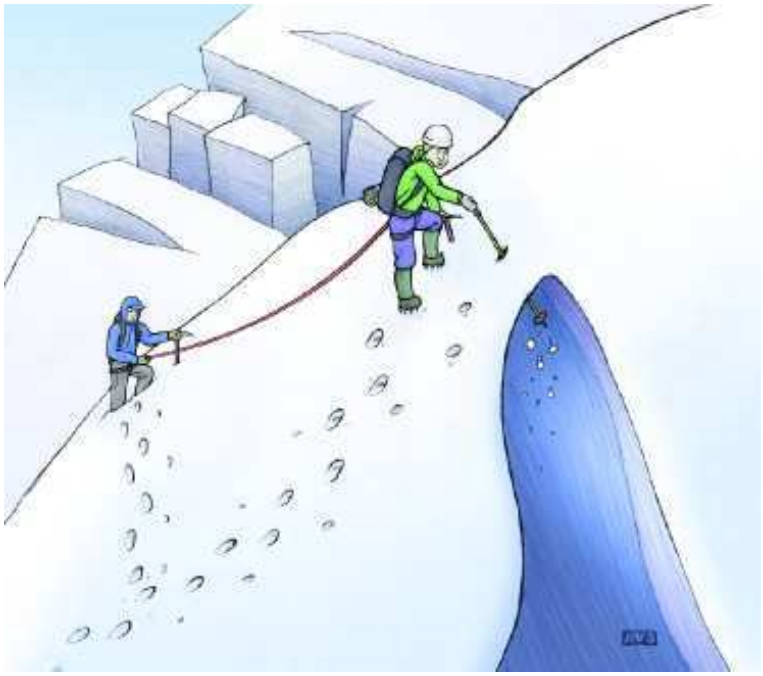
Spécialité : Sciences de la Terre et de l'Univers

Date de Soutenance : 9 novembre 2007

Composition du jury :

| | | |
|---|---|---|
| M. | Peter van der Beek | Président |
| M. | Martin Funk | Rapporteur |
| M. | Frank Pattyn | Rapporteur |
| Mme | Frédérique Rémy | Examinateur |
| Mme | Catherine Ritz | Directeur de Thèse |
| M. | Emmanuel Le Meur | Directeur de Thèse |

La Montagne n'est pas dangereuse : on ne peut qu'y perdre la vie, tandis qu'en ville on devient bête et méchant. (Voltaire)



# Merci

Tout d'abord, je tiens à remercier Manu et Catherine qui m'ont encadrée et accompagnée pendant mes premiers pas en glaciologie et ces trois années de thèse.
Quant à Manu, j'ai toujours apprécié la confiance en moi, l'autonomie qu'il m'a laissée et ses efforts pour mon après-thèse.
Catherine a toujours été ouverte pour des questions d'ordre technique et prête à me faire profiter de sa grande expérience.
Je remercie vivement Gag qui s'est joint en cours de route à eux et sans qui le chapitre sur l'inter-comparaison et le travail sur le glacier de Saint Sorlin n'aurait jamais vu le jour. J'ai beaucoup apprécié sa grande disponibilité ainsi que ses réponses et conseils quasi-instantanés.

Un grand merci aussi à Frank qui m'a donné l'occasion de travailler avec son modèle, et qui a investi beaucoup de temps à m'y intitier et à répondre à mes questions.

Je remercie aussi Christian pour le temps passé à me réexpliquer et, à me donner et redonner des données sur le glacier de Saint Sorlin, ainsi qu'à Délphine pour toutes les journées de missions de terrain que j'ai pu passer dehors sous le soleil ☼. J'ai beaucoup apprécié leur confiance pour me laisser partir assez rapidement en autonomie en mission.

Ni le travail sur le Cotopaxi en Equateur, ni mon séjour là-bas, n'auraient eu lieu sans Emmanuel David. Je le remercie pour son soutien dans les moments difficiles là-bas, il sait de quoi je parle,... ☺
Je remercie aussi Alvaro qui m'a aidée à m'en sortir avec les données topographiques de là-bas.

J'adresse aussi mes remerciements à Martine qui a partagé son bureau, et surtout son téléphone ☎ avec moi ☺.
Je souhaite enfin remercier le personnel administratif du LGGE (Véro, Michèle, Maud, Amélie et Elisabeth) ainsi que Michel, Marie et Ghislaine qui ont été mes interlocuteurs pour des soucis d'ordre informatique, et pour leur disponibilité.

Je remercie aussi Andy de Zürich pour nos discussions sur la modélisation et pour son oreille ouverte dans mes moments de frustrations sur mes formules dans le désordre et les modèles qui ne convergeaient pas ϟ.

Un grand merci aussi à Pascal et son équipe, qui nous ont permis d'économiser des heures indénombrables de portage pendant les missions de terrain à Chamonix. Ils nous

ont transportés en toute sécurité, toujours avec un grand sourire et une grande gentillesse, et avec une touche d'humour. .

Je tiens également à remercier mes rapporteurs pour le temps qu'ils ont accordé à la relecture de mon manuscript et également les autres membres de jury pour leur présence le jour de ma soutenance.

Je ne veux pas non plus oublier Julie et Vincent qui ont participé à la relecture de cette thèse, notamment pour améliorer la qualité du français...

Et finalement je remercie également Fabienne, ma directrice de stage pendant mon *Diplomarbeit* en Physiques des Particules, qui m'a encouragée et soutenue dans mon choix de me tourner vers les Sciences de la Terre.

# Résumé

Dans cette thèse, des aspects très variés de la modélisation de l'écoulement glaciaire sont abordés comme les aspects d'ordre théorique et technique (le développement, l'implémentation et l'amélioration de modèles), les applications à des cas réels et une inter-comparaison de différents modèles. Tous les modèles sont utilisés dans une version isotherme pour des glaciers tempérés.

Le modèle de Le Meur et Vincent (2003) développé auparavant au LGGE et disponible au début de cette thèse est utilisé à plusieurs reprises.
Il est amélioré numériquement par l'utilisation d'un schéma semi-implicite et over-implicite. La conservation de la masse est considérablement améliorée par cette technique. D'autres améliorations sont introduites : le traitement des épaisseurs négatives qui apparaissent aux bords du glacier ainsi que le traitement de la glace située sur les pentes élevées en amont de la rimaye.
Sur le glacier de Saint Sorlin (Alpes, France) une comparaison entre le champ de bilan issu des mesures de terrain et celui issu d'un modèle de bilan d'énergie en surface est effectuée. Le modèle de bilan de masse a pu être validé et ses avantages, notamment au niveau des zones difficiles d'accès, ont pu être mis en évidence. Le comportement du glacier sous un scénario climatique futur (IPCC, 2001) est également prédit.

Les limites de validité de ce même modèle sont montrées lors d'une inter-comparaison entre différents types de modèles, laquelle est effectuée avec pour objectif la détermination du type de modèle le plus approprié en fonction du type de glacier. Les modèles testés sont : le modèle SIA de Le Meur et Vincent (2003), le modèle SIA de Pattyn (2003), le modèle d'ordre supérieur de Pattyn (2003) et un modèle *Full Stokes* (Elmer). Plusieurs géométries synthétiques sont utilisées ainsi qu'un cas réel, celui du glacier de Saint Sorlin (Alpes, France). Les tests avec les glaciers synthétiques montrent les limites de l'applicabilité de l'approximation de la couche mince. Par contre, une comparaison rapide des temps de calcul montre le gain considérable en temps CPU avec un modèle utilisant cette approximation. D'un autre côté, l'augmentation du coût en terme de temps de calcul ne s'avère pas très importante lors du passage d'un modèle d'ordre supérieur à un modèle résolvant l'intégralité des équations de Stokes.
Les simulations effectuées sur le glacier de Saint Sorlin donnent un aperçu des limites de la validité de l'approximation de la couche mince sur ce glacier. Même si elle reproduit globalement l'évolution observée du glacier, elle ne reproduit pas correctement le champ

de vitesse ni certaines structures plus fines de la géométrie.
Les simulations sont comparées avec les observations (mesures de terrain) pour la position du front et les vitesses de surface. Ce chapitre ne donne qu'un aperçu de ce qu'il sera possible (et nécessaire) de faire pour reproduire au mieux l'évolution de ce glacier.

Un dernier chapitre est consacré au glacier Cotopaxi (Andes, Equateur) et propose entre autre, une synthèse des données existantes. Pour la première fois un modèle d'écoulement est appliqué sur ce glacier. Les deux principales conclusions sont que (i) un modèle de type "couche mince" s'avère déficient pour ce genre de géométrie (notamment le modèle de Le Meur et Vincent (2003) utilisé au LGGE) et (ii) les données disponibles actuellement sur ce glacier ne sont pas suffisantes pour mener à bien une modélisation correcte.

## Mots clés

glacier, glacier de montagne, glacier tempéré, glacier tropical, écoulement glaciaire, modélisation, inter-comparaison de modèles,
climat, bilan de masse,
équations de Stokes, approximation de la couche mince, modèles d'ordres supérieurs, modèles *Full Stokes*, rapport d'aspect
modélisation numérique, Éléments Finis, Différences Finies,
schéma semi-implicite, schéma over-implicite.

# Abstract

In this work, various aspects of glacier flow modelling are addressed, some are more theoretical or technical (model development, implementation or improvement of models) others are real case applications. A model inter-comparison of different models is also proposed. All models used in this thesis are isothermal and applied to temperate glaciers.

The model previously developed by Le Meur et Vincent (2003) at the LGGE, which was available at the beginning of this thesis, is used at different occasions. It is upgraded by switching to a semi-implicit and an over-implicit scheme. Mass conservation is considerably improved in this way. Other shortcomings are resolved : ice-thickness that may become negative over some grid points in the original version of the model and an unrealistic ice settlement in the region above the bergschrund.
A comparison between two different approaches for mass balance fields is performed on the Saint Sorlin glacier (Alps, France) : mass balance from field measurements and mass balance from a surface energy balance model. The surface energy balance model has been validated and some of its advantages (like making up for the lack of field data in zones of the glacier that are hardly accessible) are presented. The future behaviour of the glacier under a climatic scenario (IPCC, 2001) is also predicted.

The limits of this model are shown in an inter-comparison between models of different types. The goal of this inter-comparison is to determine the type of model that is the most appropriate for a given type of glacier geometry.
The models used are : the SIA model from Le Meur et Vincent (2003), the SIA model from Pattyn (2003), the higher-order model from Pattyn (2003) and a Full Stokes model (Elmer). Different synthetic geometries are used as well as a real case, the Saint Sorlin glacier (Alps, France). The tests with these synthetic glaciers show on the one hand the limits of the applicability of the shallow ice approximation. On the other hand, a rough comparison of CPU times shows the gain in CPU time with a model of this type. Conversely, the increase in CPU time turns out to be reduced when switching from a higher-order model to a Full Stokes model.
The simulations on the Saint Sorlin glacier give an insight into the validity of the shallow ice approximation on this glacier. Even if the large-scale evolution is correctly reproduced, neither the velocity field nor some small structures in the surface geometry can be properly reproduced.
Simulations are compared to observations (field data) for snout position and surface ve-

locities. This chapter is only a first insight into what will be possible and necessary in the future to correctly reproduce the evolution of this glacier.

A last chapter deals with the Cotopaxi glacier (Andes, Ecuador) and proposes among other things a review of all existing data. For the first time a glacier flow model is applied on this glacier. The two principal conclusions are that (i) a shallow ice approximation type model is not appropriate for this type of geometry (in particular the one used in the LGGE (Le Meur et Vincent, 2003)) and (ii) the available data so far is not sufficient for a correct modelling work.

## Keywords

glacier, mountain glacier, temperate glacier, tropical glacier, ice-flow, modelling, model inter-comparison,
climate, mass balance,
Stokes equations, shallow ice approximation, higher-order models, Full Stokes models, aspect ratio,
numerical modelling, Finite Elements, Finite Differences,
semi-implicit scheme, over-implicit scheme.

# Introduction générale

# 1. Contexte

Actuellement environ 10% de la surface du globe sont couverts de glace. Les glaciers sont présents de l'équateur jusqu'aux pôles (au nord comme au sud) sur quasiment tous les continents. Cette extension n'est plus que le tiers de celle atteinte pendant les périodes de grandes glaciations quaternaires.
Néanmoins la composante glace du système climatique de la terre reste essentielle. Les régions glaciaires semblent être très sensibles aux variations des autres composantes du système climatique comme l'atmosphère ou les océans. Une des caractéristiques majeures des glaciers est leur évolution au cours du temps, avec une réponse globale à l'échelle de la planète sur laquelle peuvent se superposer des tendances plus locales liées aux particularités propres de certains glaciers.

Les premières descriptions sur les glaciers se trouvent au $11^{\text{ième}}$ siècle dans la littérature islandaise. Ce n'est que 500 années plus tard qu'apparaîtra le fait que les glaciers ne sont pas immobiles. Depuis, le paradoxe de l'écoulement des énormes masses de glace apparemment immobiles n'a cessé d'être étudié. En 1751, Altmann identifiait la gravité comme étant à l'origine de cet écoulement, néanmoins il pensait que cet écoulement était uniquement dû au glissement sur le socle rocheux. L'hypothèse d'un fluide visqueux n'émergera que tard, au cours du $18^{\text{ième}}$ siècle : Weinberger reconnaît la glace comme fluide visqueux selon l'approche de Navier-Stokes. Finalement, au cours du $20^{\text{ième}}$ siècle, grâce aux idées modernes de la physique du solide et des métaux, les véritables mécanismes d'écoulement de la glace seront proprement compris.

Des mesures systématiques ont commencé dans les Alpes dès les années 1830. Ces premières mesures étaient consacrées au mouvement de la glace. Pour les Alpes françaises et le massif du Mont Blanc il faut notamment citer les mesures de Vallot, un botaniste, météorologue et astronome qui a construit à la fin du $19^{\text{ième}}$ siècle l'observatoire Vallot au Col du Dôme lequel est encore aujourd'hui en place. Finsterwalder a mis en place les premières méthodes photogrammétriques et a établi en 1892 des cartes à une échelle 1:5.000 pour le massif du Wetterstein, les Berchtesgardener Alpen et la Zugspitze (Allemagne et Autriche).
Dans les années 1910, Blümcke et Hess étaient les premiers à faire un forage de 200 m sur un glacier du Tirol permettant de répondre à la question du changement de la vitesse avec la profondeur.
Avec la première Guerre mondiale l'intérêt pour les glaciers baisse pour ne reprendre qu'à la fin de la deuxième avec les travaux sur la déformation et l'écoulement de Nye et Glen, les précurseurs de la glaciologie moderne.
Plus tard, le lien entre les changements climatiques et les avancées et retraits des glaciers

fut établi, mais ce lien est bien plus complexe qu'il n'était supposé initialement.
Cet intérêt après-guerre portait surtout sur les grandes calottes de l'Antartique et du Groenland qui étaient déjà reconnues comme archives de données climatiques. Les particularités de géométrie des calottes ont aussi favorisé leur modélisation par opposition aux glaciers de montagne.
Les glaciers alpins, ou plus généralement de montagne (Alpes, Andes, Himalaya,...) ont subi un regain d'intérêt récent grâce aux progrès au niveau de la puissance de calcul des ordinateurs mais aussi du fait de leur importance comme indicateurs climatiques.

Cette brève introduction et historique donne quelques étapes importantes de la recherche en glaciologie. Cette introduction montre aussi la multidisciplinarité de ce sujet qui attire des physiciens, des mathématiciens, des cristallographes, des géologues, des géographes, des météorologues, des climatologues et autres. En glaciologie, il y a la place pour les deux approches que sont l'approche expérimentale et l'approche théorique, lesquelles se complètent mutuellement. Cette thèse s'inscrit dans l'approche théorique - la modélisation - tout en utilisant les données de l'approche expérimentale.

# 2. Organisation de la thèse

Cette thèse consiste en plusieurs parties plus ou moins indépendantes :

La **première partie** est une partie introductive. Le *premier chapitre* traite de la définition, du fonctionnement et des composants d'un glacier de type Alpin. Les différentes formes glaciaires sont également présentées.
Le *deuxième chapitre* montre tout l'intérêt de la modélisation de l'écoulement d'un glacier (de montagne). Le *troisième chapitre* donne une idée générale des principes d'un modèle d'écoulement glaciaire. Le *quatrième chapitre* présente les données les plus importantes collectées aujourd'hui sur les glaciers des Alpes qui sont en grande partie utilisées en modélisation.

La **deuxième partie** concerne les données, en particulier celles du bilan de masse. Le *premier chapitre* décrit l'observatoire des glaciers alpins ainsi que les glaciers suivis et les mesures régulièrement effectuées. Le *deuxième chapitre* donne quelques notions de base sur le bilan de masse. Le *chapitre 3* détaille enfin les mesures du bilan de masse, en mettant l'accent sur les méthodes utilisées au Laboratoire de Glaciologie de Grenoble. Le *quatrième et dernier chapitre* de cette partie détaille les données effectivement exploitées dans cette thèse.

La **troisième partie** est une partie plus théorique. Les bases de la dynamique glaciaire sont expliquées dans le *premier chapitre*. Le *deuxième chapitre* détaille l'approximation la plus utilisée en modélisation glaciologique : l'approximation dite de "la couche mince". Le *troisième chapitre* quant à lui est en quelque sorte un inventaire des modèles d'écoulement classés par degré d'approximation des équation mécaniques.

La **quatrième partie** présente un travail réalisé à l'aide d'un modèle d'écoulement glaciaire développé auparavant au laboratoire. Quelques améliorations y sont apportées *(chapitres 1 à 3)*. Ensuite une application intéressante concernant la modélisation du bilan de masse et l'évolution future d'un glacier est proposée (*chapitre 4*).

La **cinquième partie** porte sur une inter-comparaison de différents modèles glaciologiques. Cette inter-comparaison est axée sur la question consistant à déterminer quel modèle (plus précisément quel degré d'approximation) est le plus adapté à un type de géométrie de glacier, qu'il s'agisse de la précision des résultats souhaitée, mais aussi du

coût en temps de calcul. Le *premier chapitre* présente l'intérêt et la motivation pour cette inter-comparaison, dans le *deuxième* les modèles utilisés sont ensuite présentés. Le *troisième chapitre* décrit les résultats des simulations avec des glaciers synthétiques et enfin le *quatrième* traite d'un cas réel, celui du glacier de Saint Sorlin dans les Alpes françaises.

La **sixième et dernière partie** porte sur le travail effectué sur un glacier volcanique en Équateur. Ce glacier est d'abord présenté avec son contexte un peu différent de celui des Alpes (*chapitres 1 et 2*). Ensuite, la campagne de mesures 2007 (*chapitre 3*) ainsi que toutes les données disponibles sont décrites (*chapitre 4*). Enfin le *chapitre 5* décrit le travail de modélisation sur ce glacier qui a suivi l'acquisition de données.

En **Annexe** les méthodes numériques utilisées généralement pour les modèles d'écoulement glaciaire (Eléments, Volumes et Différences Finis) sont présentées ainsi que les publications.

Première partie .

# Introduction

Cette partie est une partie introductive.

⇝ Dans le premier chapitre la définition, le fonctionnement et les différentes composantes d'un glacier sont traitées. Cette présentation assez générale est axée sur les glaciers alpins. Ensuite, les différentes formes glaciaires sur le globe sont présentées.
⇝ Le deuxième chapitre décrit l'intérêt de la modélisation de l'écoulement d'un glacier, ici encore l'accent est mis sur les glaciers alpins.
⇝ Les principes d'un modèle d'écoulement sont détaillés dans le troisième chapitre.
⇝ Le quatrième et dernière chapitre donne un aperçu des données collectées aujourd'hui et utilisées en grande partie dans la modélisation.

# 1. Qu'est-ce qu'un glacier ?

Un glacier c'est avant tout *"un stock d'eau solide permanent à l'échelle humaine, sous forme de neige, de névé ou de glace"* (Reynaud, 1985). Ce stock est formé et renouvelé continuellement par l'accumulation (chutes de neige fraîche ou neige apportée par le vent ou les avalanches) et l'ablation (la fonte). Du fait de la plasticité de la glace, sous l'effet de la gravité le glacier s'écoule en permanence des parties hautes où l'accumulation domine vers les parties basses où l'ablation domine. Accessoirement un glacier peut glisser dans sa totalité sur son socle rocheux (le plus souvent sur un film d'eau situé à l'interface glace-rocher). Mais ce glissement *"n'est important que si la température de fusion est atteinte à la base"* (Lliboutry, 1993).
Cette définition des glaciers ne prend pas la taille en compte puisqu'elle englobe aussi bien les minuscules glaciers de l'ordre de l'hectare que la calotte du Groenland (deux millions de kilomètres carrés) et de l'Antarctique (environ 15 millions de kilomètres carrés dont seulement environ 2 % libre de glace).
L'existence d'un glacier est directement liée à la présence du froid. On trouve des températures basses (i) dans les zones polaire à haute latitude et (ii) surtout à haute altitude, et ce d'autant plus que la latitude est faible. Dans les zones tropicales les glaciers se trouvent plutôt vers 5000 m. Quant au rôle de la précipitation sur les conditions d'existence d'un glacier, il semble moins important que la condition de froid, pour preuve, l'essentiel du plateau Antarctique par exemple voit tomber moins de précipitations que le désert du Sahara.

## 1.1. Le fonctionnement d'un glacier

### 1.1.1. Coupe schématique d'un glacier alpin

La Figure 1.1 montre une coupe schématique d'un glacier alpin depuis le haut du glacier (rimaye[1] et glace au-dessus) jusqu'au bas du glacier : le front.
La partie du glacier où les quantités de neige gagnées au cours de l'année dominent les pertes (lorsque la neige de l'hiver ne parvient pas à fondre complètement), dépendra entre autres de l'orientation et de l'altitude du glacier ainsi que de la topographie du site. C'est cette zone qui "nourrit" le glacier, c'est la zone ou le bassin dit d'accumulation. C'est là que la neige se transforme au cours du temps par tassement sous le poids des couches successives pour devenir de plus en plus dense et se transformer en glace. Dans les Alpes, cette zone, la zone des neiges éternelles, se situe en moyenne au-dessus de 2700 m à 2900 m suivant l'orientation.
A l'aval de cette partie du glacier les pertes en masse vont dominer, car la fonte fait

[1] La rimaye est une grande crevasse tout en haut du glacier qui sera décrite plus en détail ultérieurement.

disparaître non seulement toute la neige de l'hiver, mais aussi une partie de la glace sous-jacente. C'est la zone d'ablation.
La ligne d'équilibre (Figure 1.2) sépare les zones d'ablation et d'accumulation, c'est l'endroit où, en théorie, l'ablation compense exactement l'accumulation sur l'année hydrologique.

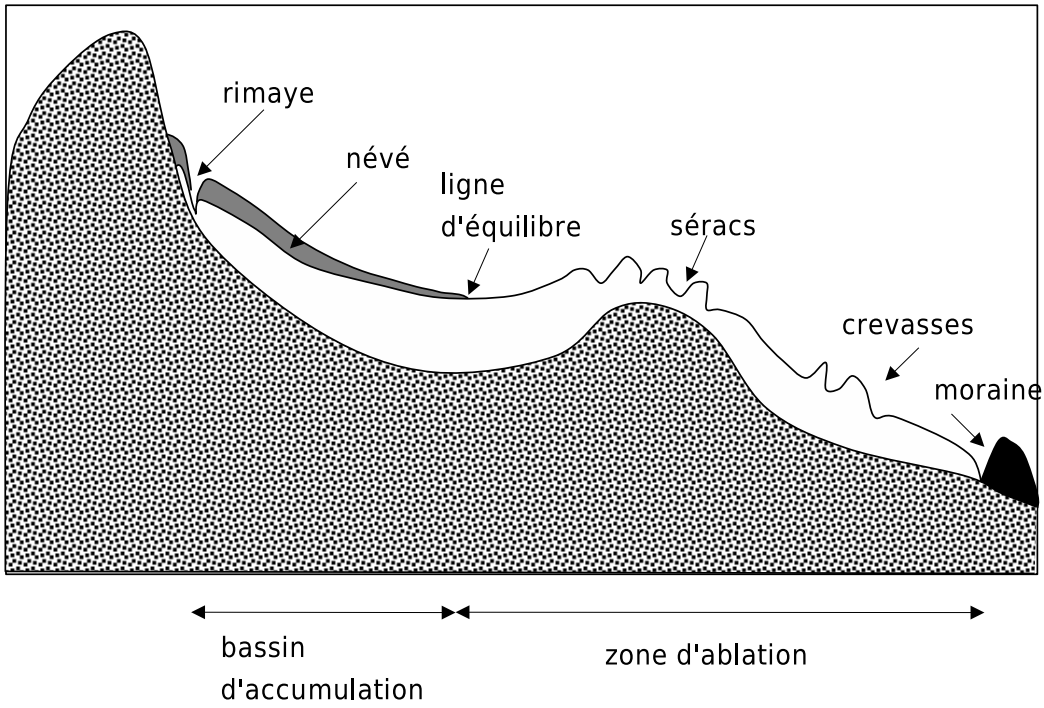



FIG. 1.1.: Coupe schématique d'un glacier depuis la rimaye jusqu'au front.
`Schematic cross section of a glacier, from the bergschrund down to the snout.`

### 1.1.2. Bilan de masse

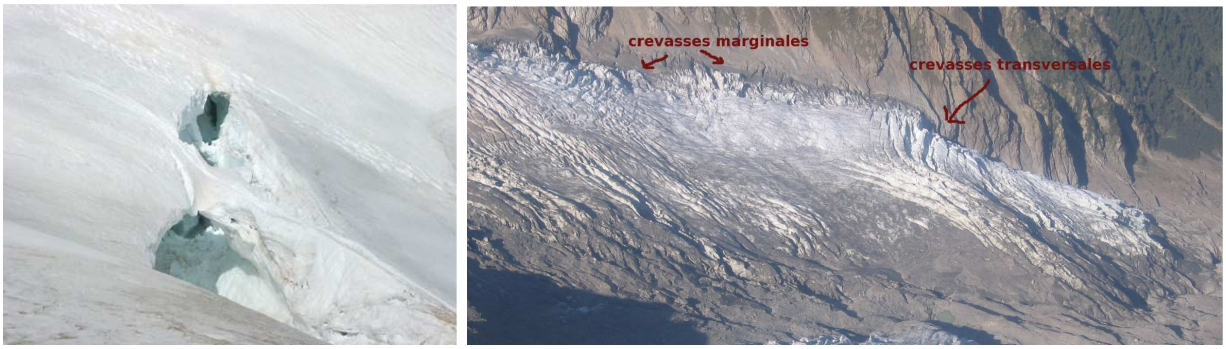
Le bilan de masse glaciaire traduit le gain ou la perte en glace et en neige d'un glacier, en quelque sorte son métabolisme. Il est mesuré habituellement en m w.e. (meter water equivalent), ce qui permet de traduire les pertes et les gains en glace ou en neige de densité variable sous la forme d'une colonne d'eau équivalente en poids.
Le bilan net annuel (cumul des pertes et gains sur l'année) rend compte directement, à l'échelle de l'année, de l'ensemble des influences climatiques subies par le glacier. Il résulte de la combinaison de deux phénomènes successifs : l'accumulation et l'ablation.
On définit à cet effet l'année hydrologique, qui n'a pas forcément 356 jours et qui varie légèrement d'une année à l'autre. A la fin de l'été l'épaisseur de glace et de neige atteint son minimum, ainsi l'année hydrologique s'étend de ce minimum à celui de l'été suivant.

FIG. 1.2.: La ligne d'équilibre sur le glacier d'Argentière (Chamonix), photo de septembre 2006. C'est la ligne qui sépare la zone d'accumulation (en neige en automne) de la zone d'ablation (en glace vive en automne).
`Equilibrium line on the glacier d'Argentière (Chamonix), picture from September 2006. It represents the line that seperates the accumulation zone (snow in autumn) from the ablation zone (ice in autumn).`

Le terme d'accumulation tient compte de tous les processus par lesquels de la masse est ajoutée au glacier au cours de l'année hydrologique. Il s'agit essentiellement des chutes de neige qui se transforment lentement en glace, mais il y a aussi d'autres processus comme les avalanches, la neige transportée par le vent, le givre, la pluie qui gèle,... . Ces processus ont lieu à la surface ou subsurface.
Le terme d'ablation tient compte de tous les processus par lesquels de la neige ou de la glace est perdue par le glacier. Le processus dominant est la fonte suivie du ruissellement de l'eau. La sublimation, l'évaporation ou le déplacement de la neige font également partie de l'ablation. Sauf pour des cas rares de fonte basale (ex. en Islande), ces processus ont essentiellement également lieu en surface.
Au dessus de la ligne d'équilibre l'ablation n'entame que partiellement le stock de neige de l'hiver, en zone d'ablation, toute la neige disparaît et la fonte attaque même la glace sous-jacente (cf. Figure 1.2).
Dans les Alpes les saisons rythment la vie d'un glacier : la période d'accumulation (la période des précipitations solides) qui s'étend d'octobre à mai est découplée de la période d'ablation (la saison chaude) qui s'étend de juin à septembre.

### 1.1.3. Structures caractéristiques à la surface des glaciers

C'est surtout dans la zone d'ablation, avec une surface sans neige, que des formes particulières de surface comme les bédières, moulins ou tables glaciaires (cf. Figure 1.5(d)) apparaissent. Quant aux crevasses et séracs, ils apparaissent sur toute la surface des glaciers.
Les crevasses (Figure 1.3(a)) entaillent la surface des glaciers, elles surviennent lorsque la tension responsable de la déformation dépasse le seuil résistance de la glace. C'est une bonne illustration du caractère fragile que peut adopter la glace sous fortes contraintes.
On distingue selon l'origine de leur formation plusieurs types de crevasses (cf. Photo 1.3(b)) :
Les crevasses marginales et transversales. Ce sont les contraintes de cisaillement fortes provoquées par les frottements du glacier sur les rives qui sont responsables des crevasses marginales. Les crevasses transversales se forment plutôt à des endroits avec des irrégularités du socle rocheux, notamment les ruptures de pente, là où la glace subit aussi de très fortes contraintes. Plus généralement, les crevasses peuvent s'ouvrir dès que l'intensité des contraintes perturbe beaucoup le flux de la glace, comme par exemple à la confluence de plusieurs glaciers.
Ainsi, les crevasses se forment toujours à peu près aux mêmes endroits et se déplacent avec la glace avant de se refermer.
La profondeur des crevasses dépasse rarement les 40 mètres, car à cette profondeur, la pression "glaciostatique" due au poids des couches supérieures est supérieure à la tension qui maintient la crevasse ouverte, ce qui provoque alors leur fermeture à la base.




(a) Crevasse (Voie normale du Piz Palü, Bernina, Suisse).
`Crevasse (Normal route to Piz Palü, Bernina, Switzerland.`

(b) Glacier des Bossons (Chamonix).
`Glacier des Bossons (Chamonix).`

FIG. 1.3.: Typologie des crevasses. `Different types of crevasses.`

Pour des pentes fortes et des vitesses rapides les contraintes deviennent encore plus importantes, le glacier se morcelle en un chaos de crevasses formant alors une chute de séracs (Figure 1.5(a)).
Dans la partie supérieure des glaciers, une grande crevasse particulière se développe aux

pieds des parois rocheuses, en général à la rupture de pente : c'est la rimaye (Figure 1.4). Elle marque la limite entre la glace collée au rocher et le glacier en mouvement. En raison de son processus de formation, elle peut en théorie atteindre des profondeurs bien plus importantes que les autres crevasses.

FIG. 1.4.: Rimaye sur le Glacier de la Girose (Ecrins). Il s'agit d'une grande crevasse au bord du glacier qui sépare le glacier en mouvement de la glace restée collée aux rochers en amont.
`Bergschrund on the Glacier de la Girose (Ecrins), featured by a large crevasse at the upper margin of the glacier which separates the moving glacier from cold ice stuck to the rocks above.`

Durant "l'été glaciaire" (juin à septembre), c'est la période de fonte des glaciers. La glace étant un matériau imperméable, l'eau liquide ainsi libérée dans la zone d'ablation commence par s'écouler en surface formant des ruisseaux qui méandrent et entaillent le glacier, ce sont les bédières (Figure 1.5(c)). Si sur son chemin cette eau rencontre une dépression sur le glacier, elle peut s'y installer temporairement et former alors un lac supra glaciaire (Figure 1.5(f)). Sinon elle peut aussi rencontrer des crevasses ou d'autre irrégularités de surface et alors plonger dans les entrailles du glacier et aménager les crevasses en de véritables puits appelés moulins (Figure 1.5(b)). Après un certain cheminement à l'intérieur du glacier, l'eau finit par atteindre le socle et s'écoule entre le glacier et le lit rocheux pour former le torrent sous glaciaire. Au niveau du front du glacier le torrent revient à l'air libre le plus souvent à la faveur d'un porche.
En zone d'accumulation l'eau de fonte s'infiltre dans le manteaux neigeux et regèle, ce qui a des conséquences importantes sur le régime thermique des glaciers des Alpes et ce qui sera discuté dans le paragraphe suivant (Paragraphe 1.1.4).

(a) Chute séracs (Séracs du Géant, Vallée Blanche, Chamonix).
Serac fall (Vallée Blanche, Chamonix).

(b) Moulin sur la Mer de Glace (Chamonix).
Moulin on the Mer de Glace (Chamonix).

(c) Bédières sur le glacier de Saint Sorlin (France).
Streams on the Saint Sorlin Glacier (France).

(d) Table glaciaire sur le glacier d'Argentière (Chamonix).
Glacier table on the glacier d'Argentière (Chamonix).

(e) Moraine (Confluence glacier des Améthystes et glacier d'Argentière, Chamonix).
Moraine (Confluence of glacier des Améthystes and glacier d'Argentière, Chamonix).

(f) Lac sur la Mer de Glace (Chamonix).
Lake on the Mer de Glace (Chamonix).



FIG. 1.5.: Structures caractéristiques à la surface des glaciers.
Caracteristic structures at the surface of glaciers.

### 1.1.4. Régime thermique des glaciers

La distribution de la température à l'intérieur des glaciers est intéressante en tant que telle d'une part et d'autre part parce qu'elle contrôle de nombreux processus (glissement basal, rhéologie de la glace,...). En effet, le glissement d'un glacier sur son socle rocheux n'est possible que si la glace basale est au point de fusion (permettant la mise en place d'un film d'eau à l'interface glace-roche).
De plus, de l'analyse des profils actuels de température dans les calottes polaires, il devient possible de remonter à des informations concernant l'historique des températures en surface.
La distribution de la température est contrôlée par différentes sources de chaleur (flux d'énergie en surface, flux géothermique à la base) et différents processus à l'intérieur du glacier (diffusion, conduction, transfert de l'énergie par le phénomène de fonte, percolation et regel en profondeur,...).
On entend par glacier tempéré un glacier pour lequel toute la glace est au point de fusion à l'exception d'une couche d'environ 15 m en surface qui est sensible aux changements de température saisonniers (Paterson, 1994). Tout glacier qui n'est pas tempéré est un glacier froid, catégorie pour laquelle Paterson (1994) distingue trois catégories : (1) toute la glace a une température inférieure au point de fusion, (2) le point de fusion est atteint uniquement à la base, (3) le point de fusion est atteint dans une couche limitée à la base. Cette dernière catégorie est aussi appelée polythermale. Cette troisième catégorie est souvent confondue avec les glaciers sub-arctiques qui sont froids dans toute la colonne de glace en dehors d'une couche en surface sensible aux saisons.

**Glaciers froids**
Ce sont des glaciers dont l'ensemble de la glace (à l'exception éventuelle de la base) est à moins de 0 °C, pendant toute l'année. Le réchauffement par le flux géothermique venant du socle ne compense pas le froid provenant de l'air ambiant à la surface de telle sorte que toute la glace reste froide. C'est le cas des calottes glaciaires et des glaciers de montagne en très haute altitude, par exemple au Mont Blanc ou Mont Rose dans les Alpes.

**Glaciers Polythermaux et glaciers Sub-arctiques**
C'est une catégorie intermédiaire, celle des glaciers qui atteignent le point de fusion uniquement dans une couche limitée à la base ou dans une couche de surface et qui sont plus froids ailleurs.
Dans le premier cas, la chaleur de déformation importante chauffe la couche basale jusqu'au point de fusion, le reste du glacier reste froid à cause d'une température ambiante froide. C'est par exemple le cas de quelques zones des grandes calottes glaciaires avec beaucoup de déformation (par exemple là où les pentes de surface sont élevées).
Dans le deuxième cas, la température ambiante et les effets de percolation (cf. glaciers tempérés) sont suffisamment élevés pour réchauffer une couche limitée en surface. C'est le cas de nombreux glaciers d'Alaska, de l'Arctique Canadien et du Spitzberg.

**Glaciers Tempérés**
Habituellement on qualifie un glacier comme tempéré si la glace est au point de fusion sur toute son épaisseur, c'est-à-dire à 0 °C en surface à la pression atmosphérique et en principe aux alentoures de -1 °C à environ 3 000 mètres de profondeur. Toujours est-il que le point de fusion de la glace n'est pas bien défini du fait de la présence d'eau et d'impuretés dans la glace.
Seuls la neige et le névé de surface sont à des températures négatives pendant l'hiver à cause de la température des précipitations hivernales. Cette partie froide de neige ou de névé a été étudiée par Suter et Hoelzle (2002) sur les glaciers très élevés comme dans le massif du Mont Blanc ou du Mont Rose.
Dès le printemps, l'eau de fonte percolant dans la neige réchauffe celle-ci et libère surtout de l'énergie lors de son regel, faisant ainsi disparaître la quantité de froid stocké au cours de l'hiver (réchauffement de la neige de l'hiver jusqu'à 0 °C). Le regel de seulement 1 g d'eau suffit pour augmenter la température de 160 g de neige ou de névé d'un degré Kelvin. Un glacier n'est tempéré que si la percolation est suffisante pour réchauffer toute la couche de neige hivernale.
C'est le cas de la majorité des glaciers des Alpes, des Pyrénéens, de la Nouvelle Zélande, et du Caucase. Les glaciers tropicaux sont un cas spécial de glaciers tempérés.
Les glaciers alpins, sur lesquels porte cette étude, sont en général isothermes en dehors des glaciers au-dessus d'une certaine altitude où la percolation n'est plus suffisante pour concerner toute l'épaisseur de glace, ce que l'on rencontre par exemple au Col du Dôme à 4250 m avec une température moyenne de la glace de l'ordre de -11 °C.

## 1.2. Les différentes formes glaciaires

Il y a plusieurs façons de classer les différentes types de glacier : selon leur taille, leur forme, leur régime thermique, leur situation géographique ou d'autres particularités encore. Ces différents classements se chevauchent inévitablement. En effet, si chaque glacier appartient à une classe de taille, de forme ou de régime thermique, tous les glaciers de la même taille n'appartiennent pas forcement à la même classe de forme, de régime thermique ou de situation géographique. Comme dans beaucoup de classifications un peu théoriques en Sciences de la Terre il y a évidemment beaucoup d'exemples qui ne sont pas classables ou qui appartiennent à plusieurs catégories en même temps.
On distingue tout d'abord deux grands groupes de glaciers : les **glaciers non-confinés**[2] et les **glaciers de montagne ou glaciers confinés**.
Les glaciers non-confinés se trouvent en zone polaire. Comme il y fait froid partout, la glace peut a priori se développer partout et de grandes surfaces englacées (aussi grandes que le permettent les surface) se forment, que ce soit à l'échelle d'un continent dans le cas de l'Antarctique ou Groenland ou à une échelle plus petite dans le cas d'une île (île de Baffin ou Islande). Dans ce cas il n'y a, a priori, pas ou peu de contrôle par le relief.

[2] Les glaciers non-confinés sont parfois aussi appelés glaciers continentaux, ce qui veut dire qu'ils recouvrent tout ou partie d'un continent. Mais ce terme n'est pas clair car il peut être interprété comme un glacier situé *sur un continent* (ce qui est toujours le cas).

Les glaciers confinés se trouvent généralement hors zone polaire. Ils peuvent se développer uniquement en altitude, le relief limite alors l'extension du glacier. La morphologie de ces glaciers est contrôlée par la nature de la surface au dessus de la ligne d'équilibre ainsi que du relief qui contingente l'écoulement sous la gravité.
Cette distinction va de pair avec un premier classement assez intuitif par la taille qui distingue les calottes glaciaires qui couvrent en général tout un continent (à l'exception des petites calottes) et les glaciers de montagne en général de taille très réduite.

La notion de *glacier* est souvent réservée aux glaciers de montagne, même si les calottes glaciaires présentent aussi toutes les caractéristiques d'un glacier d'après la définition donnée au début de ce chapitre.

### 1.2.1. Classement par rapport à la taille

**Ice-sheet - Calotte glaciaire**
Une calotte glaciaire est une nappe de glace, un glacier continental très étendu, connu aussi sous le nom plus commun de calotte polaire. Cette grande nappe de glace (plus de $50\,000\,km^2$) couvre en grande partie ou totalement un continent avec une épaisseur qui peut atteindre 4 000 m. Du fait de leur proportions, ces glaciers s'apparentent à une plaque de verglas.
Actuellement, il en existe deux : l'Antarctique au sud avec une épaisseur moyenne de 2 300 m pour une taille de l'ordre de 15 millions $km^2$, le Groenland au nord avec une épaisseur moyenne de 1 500 m pour une taille d'environ deux millions $km^2$.

FIG. 1.6.: Image satellite de l'Antarctique (photo tirée du site web Wikipédia [a]).
`Satellite photo of Antarctica (picture from the Wikipédia website).`

[a] http :\\www.wikipedia.org

Pendant les périodes glaciaires du quaternaire, des calottes similaires recouvraient également le Nord de l'Europe et une partie (seulement) du nord de la Sibérie (Calotte dite Fennoscandienne) ainsi que le nord du continent Américain (calotte dite des Laurentides).

FIG. 1.7.: La calotte glaciaire du Vatnajökull en Islande (photo tirée du site web de Wikipédia).
`The Vatnajökull Ice-cap in Iceland (picture from the Wikipédia website).`

**Petites calottes glaciaires**
Une petite calotte glaciaire est un glacier de grande dimension mais dont la superficie n'excède pas 50 000 $km^2$ et dont les caractéristiques le rapprochent des calottes. Leur morphologie est très semblable à celle des grandes calottes. Une des petites calotte glaciaire les plus connues est celle du Vatnajökull en Islande avec une surface de 8 100 $km^2$.

Dans la mesure du possible, nous éviterons d'utiliser le terme **In(d)landsis**. La définition qui en est donnée par Lliboutry (1965) est la suivante : [le mot] "**In(d)landsis** *désigne aujourd'hui de très vastes nappes de glace recouvrant portion ou totalité d'un continent. Notons qu'à l'origine le terme d'indlandsis (littéralement, en danois, glace de l'intérieur de terres) s'appliquait aussi aux champs de glace plus modestes d'Islande. Nous appellerons indlandsis un glacier suffisamment développé pour que la topographie initiale soit complètement ennoyée.*" Cette définition fait appel à un critère de taille, mais aussi à l'absence d'un contrôle topographique ce qui fait qu'elle n'est pas toujours interprétée de la même manière.

**Glacier de montagne (et glaciers alpins)**
Il s'agit de glaciers dont la morphologie est dépendante du relief. Ils se trouvent en général en régions de haute montagne et s'épanchent dans le fond des talwegs. Les plus grands se trouvent en Arctique Canadien, en Alaska, dans les Andes et en Himalaya.
Le terme glacier alpin est souvent confondu avec le terme glacier de montagne, même si les particularités de ce type de glacier sont liées à la présence d'un relief, des montagnes et non pas forcement à la position géographique des Alpes.

FIG. 1.8.: Le glacier d'Aletsch en Suisse dans le Berner Oberland, le plus long glacier des Alpes (photo tirée du site web de Wikipédia).
`The Aletsch glacier in the Berner Oberland in Switzerland, the longest glacier of the Alps (picture from the Wikipédia website).`

FIG. 1.9.: Le Cotopaxi en Équateur dans les Andes.
`The Cotopaxi glacier in Ecuador, Andes.`

Les **Glacier tropicaux** appartiennent également à la catégorie des glaciers de montagne. Ce sont des glaciers de très haute montagne en régions tropicales. Quant à la morphologie et l'importance du relief il s'agit du même type de glacier que les glaciers alpins. Seul leur situation face aux variations saisonnières est différente de celle des glaciers alpins. Alors que les glaciers alpins accumulent la neige pendant l'hiver, et fondent pendant l'été, pour les glaciers tropicaux, les deux processus peuvent alterner à l'échelle d'une journée et non pas à l'échelle saisonnière.

Il existe une notion qui caractérise la morphologie (notamment les proportions) des différents objets glaciaires, et qui revêtira une importance pour leur modélisation, à savoir le **rapport d'aspect**. Il s'agit du rapport entre l'épaisseur de glace typique et l'étendue géographique caractéristique du glacier.
Ce rapport est caractéristique selon les différentes variétés morphologiques décrites précédemment. Ainsi par exemple, les glaciers non-confinés hormis certaines formes particulières comme les glaciers émissaires (voir plus loin) ont généralement des rapports d'aspect très petit ($10^{-2}$ à $10^{-3}$). Inversement, les glaciers de montagne ont généralement un rapport d'aspect plus proche de 1, à l'exception des formes particulières comme par exemple les glaciers de cirque.

### 1.2.2. Classement des glaciers par rapport à des particularités de forme

On distingue surtout parmi les glaciers de montagne différents types de glaciers selon leur forme indépendemment de leur taille, même si beaucoup de formes sont caractéristiques d'une certaine taille.

**Dôme glaciaire**
C'est le cas de dômes de glace à écoulement plus ou moins radial (il s'agit donc de glaciers avec une certaine symétrie), souvent de taille plus réduite comparée à celle d'autres glaciers. Le plus souvent ces glaciers couvrent un sommet ou un dôme montagneux (ex. : dôme du Goûter dans le massif du Mont Blanc).

FIG. 1.10.: Dôme du Goûter dans le massif du Mont Blanc.
`Dôme du Goûter in the Mont Blanc massif.`

**Glaciers de vallée et de cirque**

Parmi les glaciers de montagne on distingue les glacier de vallée et les glaciers de type cirque, mais souvent un glacier de montagne est composé d'une zone de cirque et d'une zone de vallée et les différents glaciers se distinguent alors par les importances respectives des deux zones.

Les glaciers alpins sont la représentation classique que l'on se fait d'un glacier : un bassin d'alimentation en forme de cirque au pied de pics dépassant de la neige, une masse de glace allongée occupant toute la largeur d'une vallée et un front glaciaire donnant naissance à un torrent.

La partie vallée correspond la plupart du temps à la zone d'ablation. C'est la topographie qui oblige souvent le glacier à emprunter une vallée. Elle peut être alimentée par une seule zone d'accumulation ou par plusieurs. Elle peut également recevoir des masses de glaces qui proviennent de glaciers adjacents venant grossir le flot de glace.

La partie cirque (l'espace entre les plus hauts sommets et arêtes) du glacier correspond souvent à la zone d'accumulation.

(a) La partie vallée du glacier d'Argentière (photo tirée de http :\\glaciers.climat.free.fr).
The valley part of the Glacier d'Argentière (picture from http :\\glaciers.climat.free.fr).

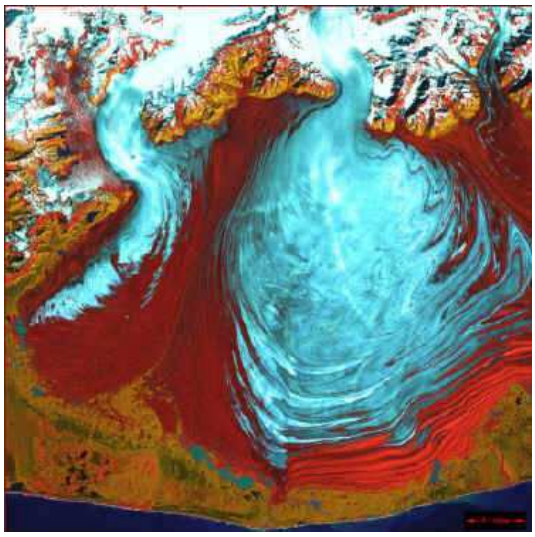
(b) Le cirque du glacier d'Argentière.
The "cirque" component of the Glacier d'Argentière.

FIG. 1.11.: Morphologie du glacier d'Argentière (Chamonix).
Morphology of the Glacier d'Argentière (Chamonix).

**Glacier suspendu**
Un glacier suspendu est généralement de petite taille, plus large que long et est accroché au flanc d'une montagne. Il se trouve suffisamment haut pour être un glacier froid sans glissement basal ce qui lui permet de tenir dans les pentes raides. Dans les Alpes beaucoup de ces glaciers se trouvent au-dessus de 3500 m, essentiellement dans les faces Nord.
A cause de cette position, un tel glacier n'est composé que d'une zone d'accumulation, seulement très rarement d'une zone d'ablation alors réduite.
La glace est évacuée par le front qui se matérialise par une falaise de glace en pleine paroi d'où se détachent régulièrement des séracs. Des séracs qui peuvent donner naissance à un glacier régénéré en contre-bas et qui sont souvent à l'origine d'avalanches de glace.

**Glacier de piémont**
Il s'agit d'un glacier de vallée qui atteint la plaine au pied de la chaîne de montagne. Il possède une zone d'accumulation et une zone d'ablation. Il s'étale dans une plaine ou dans une vallée très large soit en digitations, soit en un lobe glaciaire plus ou moins étendu. Le glacier de Malaspina en Alaska avec une surface de 5 000 $km^2$ est un des exemples les plus connus.

(a) Glacier suspendu, Piz Palü, Bernina (Suisse).
`Hanging glacier, Piz Palü, Bernina` (Switzerland).



(b) Un glacier de piémont : Le Malaspina en Alaska (photo tirée du site web de Wikipédia).
`Piemont glacier : Malaspina in Alaska (picture from the Wikipédia website).`

FIG. 1.12.: Glaciers avec des formes particulières.
`Glaciers with specific morphologies`.

### 1.2.3. Glaciers particuliers à proximité ou aux bords d'une calotte glaciaire

A proximité et aux bords des glaciers non-confinés on distingue plusieurs types de glaciers plus petits qui n'ont pas du tout les même caractéristiques au niveau de leur géométrie et de leur dynamique que les glaciers non-confinés eux-mêmes.
Leur existence et fonction sont très liées à la particularité d'une calotte glaciaire (comme celle de l'Antarctique) de souvent ne pas avoir de zone d'ablation. En effet, la neige tombe sur l'ensemble du continent, se transforme en glace et finit par arriver à la côte où elle est évacuée par l'intermédiaire de structures particulières, les fleuves de glace et glaciers émissaires qui eux-mêmes peuvent alimenter des plates-formes flottantes.

**Ice-stream (fleuve de glace)**
Comme pour l'écoulement de l'eau, la glace des calottes converge assez rapidement vers des structures à écoulement de plus en plus rapide formant en quelque sorte des véritables fleuves, des fleuves de glace (ou ice-streams) au milieu de glace avec un écoulement beaucoup plus lent. Contrairement aux grandes calottes, leur écoulement est contrôlé par la topographie (vallées ou fjords) et/ou les conditions basales (température basale, sédiments déformables,...). Sur la Figure 1.15 la partie côtière d'une calotte est représentée. L'alimentation se fait par les précipitations et l'évacuation par les ice-streams.

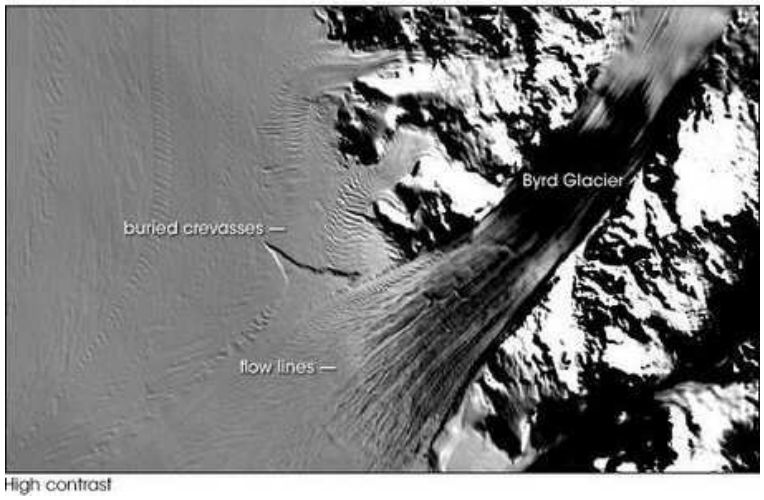



FIG. 1.13.: Byrd glacier (Antarctique) : un fleuve de glace qui se transforme en glacier émissaire quand il traverse les montagnes (photo tirée du site web de Wikipédia).
`Byrd glacier (Antarctica) : an ice-stream that becomes un outlet glacier when it crosses the moutains (picture from the Wikipédia website).`

**Glacier émissaire**
Un glacier émissaire a la même fonction qu'un fleuve de glace, ce qui l'en différencie c'est qu'il est bordé par du rocher et non pas par de la glace (voir aussi figure précédente). De ce point de vue il se rapproche beaucoup des glaciers de montagne.

FIG. 1.14.: Ice-shelf ou plate-forme flottante (photo tirée du site web de Wikipédia).
`Ice-shelf (picture from the Wikipédia website).`

**Ice-shelf (plate-forme flottante)**
Un ice-shelf ou une plate-forme de glace flottante peut être comparée à une énorme dalle de glace qui, toujours soudée au glacier producteur s'épanche sur l'océan. Il ne s'agit donc pas de glaces marines (dans le sens où elles ne proviennent pas du gel de la mer) mais de glaces terrestres qui viennent s'écouler sur la surface de l'océan. La différence de densité entre l'eau de la mer et la glace d'eau douce fait qu'il n'y environ que $\frac{1}{9}$ du volume au dessus de la surface océanique.

Ils sont alimentés par les glaciers émissaires et les fleuves de glace et doivent leur existence à l'effet de confinement des baies. S'il n'y a pas de concavité assez prononcée, la glace qui arrive à la mer se transforme directement en icebergs. L'ablation se fait donc par vêlage de grands icebergs tabulaires à partir de la falaise de glace du coté de l'océan au fur et à mesure de l'avancée de la plate-forme. Il peut aussi y avoir des pertes par fonte de la partie inférieure au contact de l'eau de mer. Ces différents processus sont également présentée sur la Figure 1.15.
Leur épaisseur peut varier de quelques centaines de mètres au front à plus de 1 000 m à la ligne d'échouage (grounding-line). C'est la ligne où la plate-forme passe d'un état posé sur le sol à un état de flotaison en se détachant du socle rocheux.
Ces plate-formes n'entourent qu'une partie réduite de l'Antarctique, car elles nécessitent une forte concavité. La plus vaste, celle de Ross, alimentée par plusieurs fleuves de glace et glaciers émissaires, est à peu près grande comme la France.

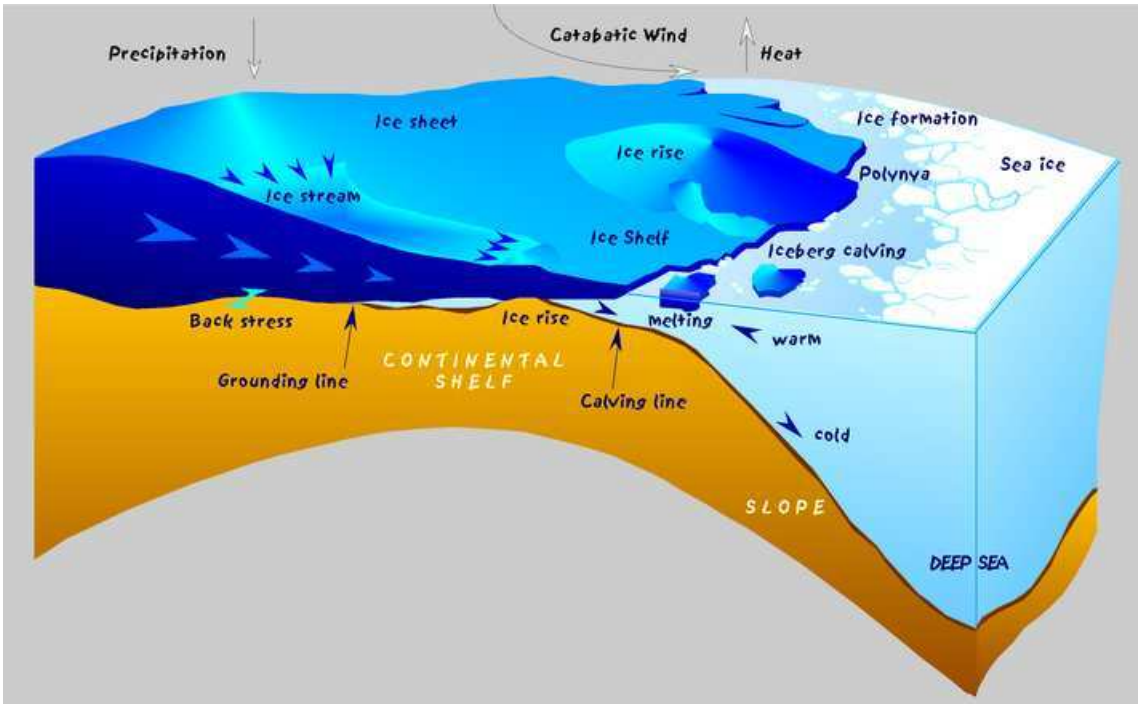



FIG. 1.15.: Particularités structurales et morphologiques du bord marin d'une calotte glaciaire, schéma de l'AWI (Alfred Wegner Institut).
`Specific structures at the border of a marine ice-sheet, sketch from AWI (Alfred Wegner Institut).`

### 1.2.4. Glaciers anecdotiques

Cette partie représente quelques types de glaciers très particulièrs.

**Glacier noir**
Il s'agit d'une langue glaciaire recouverte d'une couche morainique (c'est-à-dire de débris rocheux) suffisamment importante pour masquer la glace.
Exemples : Glacier Noir dans le Massif des Ecrins, ou glacier de la Brenva sur le versant italien du Mont Blanc.

FIG. 1.16.: Le glacier Noir dans le massif des Ecrins (photo de Louis Reynaud, 1983), (à gauche).
`Glacier Noir in the massif des Ecrins (picture from Louis Reynaud, 1983), (left).`

FIG. 1.17.: Glacier rocheux du Laurichard (photo de Louis de Reynaud, 1987), (à droite).
`Rocky glacier, glacier du Laurichard (picture from Louis Reynaud, 1987), (right).`

**Glacier rocheux**

Un glacier rocheux est un mélange de glace et de débris rocheux ayant la morphologie d'un glacier et se déplaçant à très faible vitesse de manière analogue à celle d'un glacier classique. Les détails de leur formation et de leur déplacement sont encore très mal connus.

Comme exemple on peut citer le glacier rocheux de Laurichard dans le massif des Écrins, composé d'un mélange de roche et de pergélisol avec une vitesse d'un mètre par an ou le glacier rocheux de Chanrouge dans le vallon des Allues (Massif de la Vanoise) qui mesure 900 mètres de long pour un dénivelé de 250 mètres.

**Glacier régénérés**

Il s'agit d'un glacier dont les apports en neige sont fournis par des chutes de séracs, par exemple provenant d'un glacier suspendu. Dans ce cas, outre le fait que localement il se crée une zone d'accumulation à la base de la chute, le reste du glacier régénéré est en quelque sorte la zone d'ablation du glacier suspendu.

Comme les apports en neige sont limités, les glaciers régénérés sont souvent petits. Un glacier régénéré se comporte de manière très analogue à ses voisins situés à même altitude.

La partie basse du glacier d'Argentière constitue un très bel exemple. Depuis quelques années, elle s'est détachée du reste du glacier sur la barre de séracs de telle sorte que le seul transfert de glace entre les deux parties se fait aujourd'hui par chute de séracs.

FIG. 1.18.: Un exemple de glacier régénéré : le bas du glacier d'Argentière (Chamonix).
`The bottom part of the glacier d'Argentière (Chamonix) as an example for a regenerated glacier.`

**Glacier côtier**
Un glacier dont l'une des langues rejoint la mer ou l'océan est généralement qualifié de côtier. Ces situations ne se rencontrent qu'en des latitudes élevées, un tel glacier requérant une température annuelle moyenne atmosphérique au niveau de la mer assez froide. Toutefois, si le flux de glace de la partie supérieure du glacier descendant des montagnes est assez important, même des températures moyennes annuelles douces à la côte n'empêchent pas l'existence d'un glacier côtier. On en rencontre en Norvège et en Alaska où ces glaciers se jettent dans des fjords ainsi qu'en Nouvelle Zélande.

FIG. 1.19.: La langue glaciaire Engabreen du glacier Svartisen en Norvège s'arrête à quelques vingt mètres de la ligne de rivage de l'Océan Atlantique (photo tirée du site web de Wikipédia).
`The Svartisen glacier (Engabreen part) in Norway whose snout stops some 20 m upstream of the shoreline of the Antlantic Ocean (picture from the Wikipédia website).`

*La suite concernera essentiellement les glaciers de montagne avec un focus sur ceux d'une région particulière : les Alpes. Ces glaciers représentent 2% de la surface des Alpes soit une surface totale de 3 000 km$^2$ (dont 300 km$^2$ pour la France) ou encore 2‰ de l'ensemble des surfaces englacées de la planète.*

# 2. Motivations pour la modélisation de l'écoulement des glaciers alpins

Actuellement la plus grande motivation pour modéliser les glaciers réside dans le fait qu'ils servent d'excellents indicateurs climatiques (Houghton, 2000). Cette motivation est valable pour tous les glaciers de la planète. Des intérêts plus spécifiques peuvent apparaître en fonction du type de glacier ou de la région considérée. Ce chapitre est axé sur les glaciers alpins, même si l'essentiel de ce qui y est dit s'applique aux autres glaciers du monde.
Les interactions glace-climat constituent l'un des domaines de recherche de la glaciologie moderne, la sensibilité des masses glaciaires aux conditions climatiques étant très marquée. Sous l'effet des changements qui caractérisent l'histoire du climat, les variations de volume des glaces sur la planète (notamment la présence ou non de certaines calottes) ont été l'un des phénomènes environnementaux les plus remarquables sur le globe.
Deux signaux sont essentiellement utilisés comme indicateurs climatiques au niveau des glaciers : le bilan de masse comme indicateur direct, et, de manière moins directe (donc plus délicate), l'évolution de la géométrie au cours du temps du glacier lui-même.
Lorsque l'on s'intéresse aux conditions climatiques pour des époques reculées (le Petit Âge de Glace par exemple) pour lesquelles les mesures de bilan ne sont pas disponibles, le recours à l'interprétation des fluctuations glaciaires reste la seule alternative.
Du fait de la complexité de l'écoulement glaciaire en partie contrôlé par les propriétés rhéologiques de la glace et par les interactions avec le socle rocheux, il n'existe aucune formulation simple reliant les variations glaciaires aux variations du bilan. Seule une approche physique par modélisation numérique permet, à partir des données de bilan de masse de surface, de reproduire la spécificité de la dynamique glaciaire et par conséquence les fluctuations glaciaires correspondantes. Ceci est valable pour l'interprétation du passé (ex. Petit Âge de Glace) ainsi que pour prédire l'évolution future d'un glacier.

Outre les simulations à caractère climatique, savoir prédire l'évolution (surtout future) d'un glacier est aussi intéressante à plusieurs points de vue. Pouvoir prédire l'évolution future des glaciers peut avoir de nombreuses implications dans la gestion de toutes les ressources afférentes aux glaciers (tourisme, gestion de l'eau, hydro-électricité) ainsi que dans la prévision du risque glaciaire.

## 2.1. Notion d'indicateur climatique glaciaire

### 2.1.1. Le bilan de masse comme indicateur climatique direct

Le bilan de masse annuel est, en un point donné du glacier, la somme de l'accumulation et de l'ablation se succédant au cours de l'année hydrologique. C'est ainsi un signal direct permettant l'accès aux précipitations (accumulation hivernale) et, par le biais de la fonte, mais de façon plus complexe, à la température[1]. Ces relations deviennent plus pertinentes si des mesures séparées de l'accumulation et de l'ablation sont disponibles. Comme dans les Alpes l'accumulation correspond assez bien au bilan hivernal et l'ablation au bilan estival, il devient facile de mesurer l'ablation et l'accumulation séparément.
Néanmoins, il y a peu de données de bilan de masse disponibles car peu de glaciers sont suivis, et ceux qui le sont, le sont depuis peu de temps et avec une couverture spatiale souvent incomplète.
La Figure 2.1 montre le bilan cumulé spécifique[2] annuel pour plusieurs glaciers assez éloignés les uns des autres, disséminés un peu partout dans les Alpes. Les signaux sont bien corrélés : les courbes suivent la même tendance, elles diminuent et augmentent de manière synchrone. De tels signaux aussi bien corrélés sur de telles distances avec autant de glaciers ne peuvent être le fruit du hasard et résultent donc d'un forçage commun. En effet, tout changement météorologique (changement dans les précipitations hivernales, été plus ou moins chaud,...) est directement intégré dans la valeur du bilan correspondante. C'est alors bien un signal climatique direct.

### 2.1.2. L'évolution de la géométrie d'un glacier au cours du temps comme indicateur climatique indirect

La géométrie d'un glacier permet également de lier les variations du climat et les fluctuations glaciaires. C'est un signal beaucoup plus difficile à interpréter, impossible sans s'appuyer sur un modèle physique. Par contre, il y a beaucoup plus de données disponibles dans le temps pour bien plus de glaciers. Le plus souvent on utilise la position du front du glacier, parce qu'il s'agit d'une des mesures des fluctuations glaciaires parmi les plus accessibles. On peut exploiter cette donnée à partir de photos, de témoignages et même de gravures ou lithographies de l'époque romantique. Par exemple pour la Mer

[1] La fonte est liée tout d'abord à l'apport d'énergie en surface. Cet apport en énergie ne dépend bien sûr pas seulement de la température estivale, mais aussi du vent, de l'insolation, de la nébulosité,... L'ablation, ou la fonte, donne alors accès à l'apport en énergie et peut donner, seulement après une étude plus complexe et l'apport d'autres informations, accès à la température via un modèle de bilan d'énergie en surface.

[2] Le bilan cumulé spécifique est défini comme le bilan cumulé sur toute la surface du glacier et normalisé par cette surface. A partir des mesures, il est calculé comme moyenne pondérée sur les surfaces $S_i$, où $S_i$ représente la surface à laquelle se rapporte la mesure du bilan $b_i$ :

$$b_{spec} = \sum_i b_i \frac{S_i}{\sum_i S_i}$$

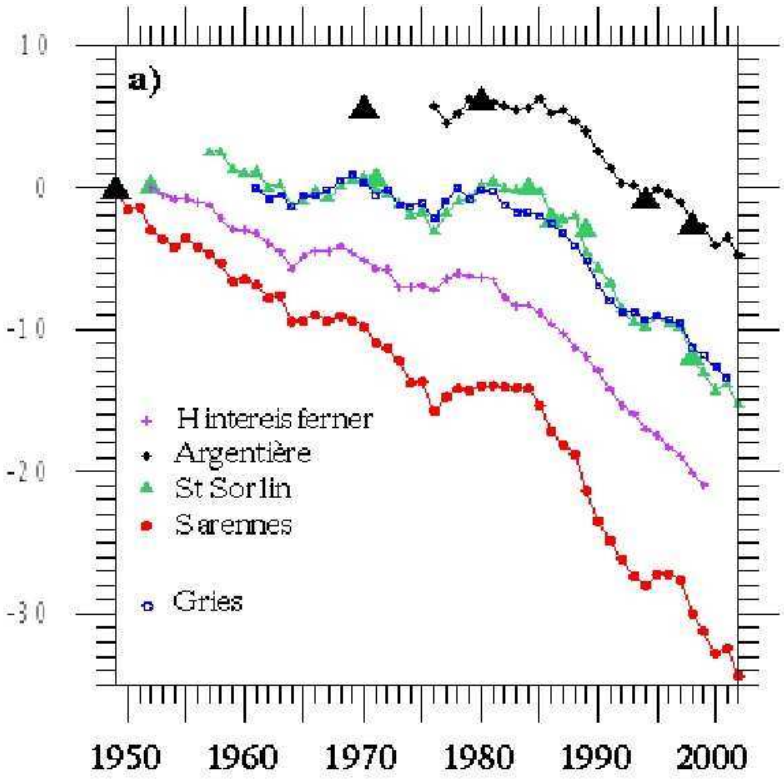



FIG. 2.1.: Bilan spécifique annuel cumulé pour plusieurs glaciers alpins, d'après Vincent et al. (2005).
`Specific cumulated mass balance for several alpine glaciers, from Vincent et al. (2005).`

de Glace à Chamonix, ces positions du front sont scientifiquement exploitables au moins depuis 1820 à partir de lithographies très réalistes (Figure 2.2).

Chaque glacier est soumis à un certain climat. Ce climat déterminera l'échange d'énergie et de masse du glacier avec l'atmosphère et/ou l'hydrosphère. Cet échange sera directement enregistré par le bilan du masse comme décrit précédemment. Chaque glacier progressera, régressera ou pourra, le cas échéant, rester stationnaire avec une réponse morphologique spécifique contrôlée par de nombreux paramètres comme son exposition, son altitude, sa pente, sa taille,... et ce en fonction de la distribution de bilan de masse donnée. Face à cette complexité et la multiplicité des différentes interactions entrant en jeu dans cette réponse, seul un modèle physique d'écoulement glaciaire permet de correctement quantifier la réponse spécifique de chaque glacier (cf. Schéma 3.1). Un tel modèle peut en théorie aussi s'envisager de manière inverse, c'est-à-dire reconstruire les changements climatiques responsables des changements observés dans la morphologie des glaciers. Cette dernière approche s'avère cependant encore beaucoup plus difficile à entreprendre que l'approche directe.

(a) 1820 (b) 1995

FIG. 2.2.: Position du front de la Mer de Glace (Chamonix) à plusieurs époques.
`Snout position of the Mer de Glace (Chamonix) at different periods.`

La Figure 2.3 montre l'évolution de la position du front de plusieurs glaciers dans le massif du Mont Blanc (en plus de celle du glacier de Grindelwald en Suisse), donc des glaciers assez proches les uns des autres. Sur le long terme les glaciers suivent les mêmes tendances, on aperçoit notamment trois maxima (vers 1900, vers 1925 et vers 1990) ainsi qu'un grand minimum vers 1970. Par contre, à une échelle de temps plus fine on observe une période pendant laquelle quelques glaciers sont encore en train de reculer, d'autres déjà en train d'avancer (par exemple entre 1950 et 1970 où le glacier des Bossons est déjà en train d'avancer pendant que les autres sont encore en train de reculer). Les glaciers ne réagissent alors pas tous de la même façon, il n'ont pas le même temps de réponse. Ce temps de réponse qui n'est pas accessible autrement qu'à l'aide un modèle d'écoulement, montre bien pourquoi il faut faire appel à un tel modèle pour mieux comprendre un changement climatique à partir de réponses glaciaires différentes.

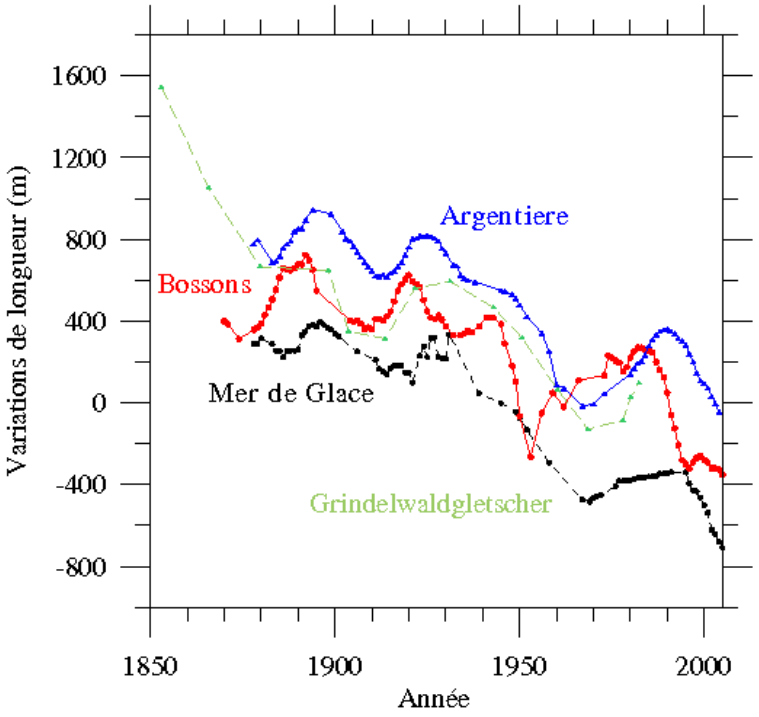



FIG. 2.3.: Positions du front de plusieurs glaciers du massif du Mont Blanc ainsi que celui de Grindelwald (Suisse), d'après Vincent et al. (2004).
`Snout positions of several glaciers in the massif in the Mont Blanc range, as well as that of the Grindelwaldgletscher (Switzerland), from Vincent et al. (2004).`

## 2.2. Risque glaciaire

Un aspect important de la glaciologie moderne concerne ainsi la prévision et la prévention de certaines catastrophes liées aux risques naturels glaciaires.
Par risques naturels on entend en général séismes, éruptions volcaniques, glissements de terrains, éboulements, crues ou encore, avalanches,.... Cependant, il en existe d'autres, non moins dangereux, mais liés à un autre milieu, celui des glaciers. Malgré le fait qu'ils fassent parfois parler d'eux dans les journaux, ils ont longtemps été ignorés, notamment en France. Pourtant, ils peuvent être à l'origine de conséquences désastreuses, comme le montrent certains exemples développés dans la suite. Au cours du dernier siècle, plusieurs dizaines de milliers de victimes des catastrophes glaciaires ont été recensées dans le monde, essentiellement dans les Andes. Dans les Alpes, l'ordre de grandeur est différent, il est au plus de l'ordre d'une centaine de victimes en cas d'aléa important non-anticipé. Il en est autrement dans un pays comme le Pérou par exemple, ou plusieurs catastrophes ont causé la mort de plusieurs milliers de victimes, probablement à cause d'une vulnérabilité plus forte, mais aussi une politique qui prend les risques naturels moins bien en charge.
La notion de risque gagne actuellement de plus en plus en importance, ce qui s'explique facilement. Le risque résulte de la combinaison de deux facteurs, l'aléa lui-même (et plus particulièrement son intensité) et la vulnérabilité de l'espace potentiellement concerné. Pour ce qui est de la vulnérabilité dans les Alpes, elle va croissante de par l'occupation grandissante de l'espace (notamment des zones jusqu'alors non occupées), que ce soit par le biais de l'habitat ou d'activités de loisirs. De plus, dans le contexte actuel d'un réchauffement climatique, l'augmentation de la quantité d'eau présente dans certains glaciers ainsi que le retrait de certains autres sont autant d'éléments favorisant et amplifiant ces aléas glaciaires. La hausse de température actuelle devrait alors amener à une augmentation de la fréquence des événements.

Les risques liés au glaciers résultent essentiellement de trois groupes de processus :

1. changement de longueur ou de géométrie,
2. crues ou inondations indépendemment des précipitations,
3. chutes de glace.

Ces processus sont très liés entre eux. Notamment, le premier est - en dehors d'un danger pour les bâtiments ou autres infrastructures proches du glacier - souvent à l'origine de chutes de glace ou de la formation d'un lac qui peut se vidanger et mener à une inondation. De plus, d'autres risques naturels peuvent déclencher des catastrophes liées aux glaciers, un tremblement de terre pouvant induire la vidange d'un lac glaciaire. Inversement, des chutes de glace peuvent déclencher des avalanches. Il faut donc tenir compte des différents risques combinés et de leurs interactions.

Concrètement, dans le contexte climatique actuel, plusieurs types d'aléas principaux se dégagent : des aléas conduisant à des crues ou inondations (la libération soudaine de

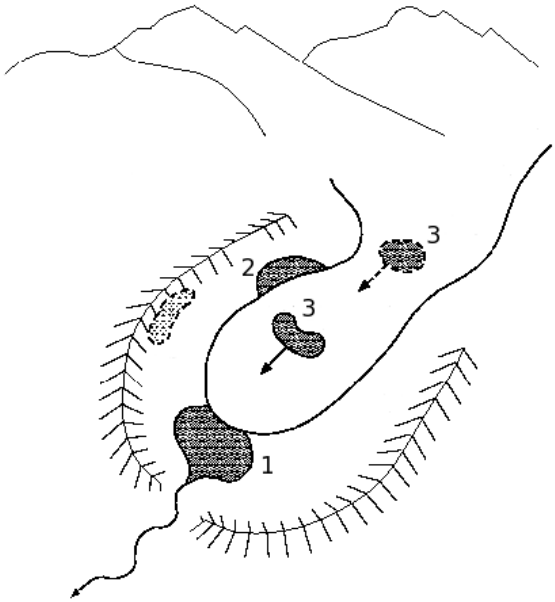
poches d'eau ou la vidange de lacs glaciaires), et ceux responsables des chutes de glace (chutes de séracs ou ruptures entières de langues glaciaires).
Ce chapitre s'inspire d'un atlas des glaciers à risques recensés en France (Buisson et al., 1999).

### 2.2.1. Les vidanges de lacs glaciaires

Sous l'effet des fluctuations glaciaires, des retenues peuvent se créer derrière lesquelles se développent des lacs. Dans certains cas, les glaciers peuvent créer en avançant un barrage de glace derrière lequel une retenue d'eau peut se former. De même, lors d'un retrait, ils peuvent libérer tout un espace entre le front et leurs anciennes moraines, qui elles, aussi peuvent servir de barrage ou de digue et retenir l'eau (exemple sur la Figure 2.4).

FIG. 2.4.: Lac pro-glaciaire (Mer de Glace, Chamonix).
`Pro-glacial lake (Mer de Glace, Chamonix).`

Plusieurs exemples de formations de ces lacs sont montrés sur la Figure 2.5.




1. Lac pro-glaciaire, retenu par une ancienne moraine frontale.
2. Lac de gouttière, retenu par le côté d'un glacier.
3. Lac supra-glaciaire. Contrairement aux précédents, sa cuvette est entièrement formée de glace vive.
4. Lac de confluence, retenu par la confluence de deux glaciers (non représenté sur la figure).
5. Lac périglaciaire, retenu par le corps d'un glacier (non représenté sur la figure).

FIG. 2.5.: Différents types de lacs glaciaires, graphique extrait de l'Inventaire des glaciers à risque (Suisse).
`Different types of glacier lakes, from Inventaire des glaciers à risque (Suisse).`

– **Lacs périglaciaires**
Ils prennent naissance suite à l'avancée des glaciers, des phénomènes essentiellement observés au cours du Petit Âge de Glace. Le glacier en crue vient barrer une vallée adjacente, provoquant la retenue des eaux qui s'accumulent en un lac pouvant atteindre des dimensions conséquentes. Ils se forment également lorsqu'une vallée se voit barrée par d'importantes chutes de séracs provenant d'un glacier la surplombant. On peut citer par exemple le glacier du Giétro en Suisse où un tel phénomène s'est produit en 1595 et 1818.
– **Lacs pro-glaciaires**
Ce sont les lacs les plus courants dans les Alpes. Ils se forment lorsque les glaciers sont en phase de recul. Ils sont retenus par la moraine frontale marquant la dernière avancée. En contact direct avec le front du glacier à leur naissance, ils en sont souvent séparés ensuite lorsque la phase de recul se prolonge. Leur cuvette est généralement constituée de matériaux morainiques, mais aussi parfois d'un mélange de roche, de moraine et de glace morte. Le barrage, quant à lui, est composé de moraine parfois englacée. Le glacier d'Arsine dans les Ecrins (France) constitue un exemple caractéristique de lac pro-glaciaire.

- **Lacs de gouttière**
  Ces lacs apparaissent en bordure des glaciers de vallée, à la hauteur d'un obstacle latéral qui fait barrage, comme un changement de direction de la vallée, ou la moraine d'un glacier adjacent. Leur apparition semble peu probable dans la phase actuelle de recul des glaciers alpins, néanmoins on peut citer le cas du glacier du Miage dans le massif du Mont Blanc en Italie.
- **Lacs supra-glaciaires**
  Ils se situent sur le glacier lui-même, et leur cuvette est donc formée de glace vive, de même que leurs bordures. Il en existe beaucoup de petite taille (quelques dizaines de mètres carrés), qui ne présentent généralement aucun danger. En revanche, les lacs de grande dimension sont assez rares, mais plus dangereux. Ce fut le cas du lac de Rochemelon (Fig. 2.6) dans les Alpes françaises à la frontière avec l'Italie, récemment suivi par le LGGE. Ce lac s'est développé au cours de ces dernières années à la surface du glacier à 3200 m d'altitude. Ce lac est fermé par une crête rocheuse au sud-ouest et par le glacier au nord-est. Un torrent émissaire passant au dessus d'un seuil rocheux permet d'évacuer l'eau du lac provenant de la fonte du glacier sur le versant italien et de maintenir ainsi la surface du lac à 3218 m d'altitude. Au nord, le lac est fermé par un franc-bord de glace qui décroît d'année en année. Face à l'évolution rapide du glacier et par conséquent du lac, le LGGE à mené plusieurs campagnes de mesures. En 2004 le volume du lac était supérieur à 600 000 $m^3$ et le barrage n'était plus seulement qu'à 1.5 m au dessus du niveau du lac. Pour éviter une vidange brutale menaçant la vallée le lac a été vidangé artificiellement (Vincent, Vallon et Le Meur, 2004).
- **Lacs de confluence**
  Situés à la confluence de deux glaciers, ces lacs sont retenus par des barrages composées soit de glace vive, soit de moraines. Dans le premier cas, la retenue se forme suite à une réduction importante de la capacité de drainage, sous l'effet de pressions exercées par l'un des glaciers sur l'autre. Dans le second cas, les moraines latérales jouent elles-mêmes le rôle de barrage. On peut citer les exemples du glacier du Tacul en France (vidanges en 1819 avec inondation de la vallée de Chamonix) ou du glacier du Gorner en Suisse.

Il arrive que ces barrages naturels, constitués de matériaux hétérogènes et non consolidés, cèdent et provoquent une inondation et même souvent une lave torrentielle dans les vallées en aval. Ce genre d'évènement est généralement imprévisible, des modèles (écoulement glaciaire, rupture de barrage,...) peuvent aider à mieux prévoir ce genre de phénomènes et alors permettre de prendre des mesures pour éviter des catastrophes.

On distingue plusieurs mécanismes de vidange :

- **La submersion du barrage**
  Différents phénomènes comme un vêlage important du front du glacier, un glissement des berges, une avalanche de neige ou une chute de blocs rocheux peuvent entraîner la formation d'une vague susceptible de conduire à la submersion du barrage.

FIG. 2.6.: Lac supra-glaciaire (Rochemelon, France) avant et après sa vidange artificielle (photos de M. Capelin).
`Glacier surface lake (Rochemelon, France) before and after its artificial draining (pictures from M. Capelin).`

– **Le phénomène de renard**
  Il existe une importante différence de pression entre l'amont (pression exercée par l'eau de la retenue) et l'aval du barrage (pression atmosphérique). Si ce dernier n'est pas totalement étanche, les infiltrations à travers ce matériau fortement hétérogène entraînent des écoulements qui peuvent s'amplifier et donner lieux à une érosion mécanique intense. Petit à petit, la mircofuite initiale évolue vers un tunnel appelé "renard" qui s'agrandit de plus en plus vite par effondrement, causant la ruine du barrage, et la vidange de la retenue.
– **La fonte de glace morte**
  La présence de glace morte à l'intérieur d'un barrage est un point faible supplémentaire. En effet, la glace occupant un volume supérieur à l'eau liquide, sa fonte génère des vides et des effondrements localisés qui entraînent bien souvent la création de chenaux

d'écoulement, fragilisant ainsi le barrage. D'autre part, même si la glace ne fond pas, l'eau sous pression en contact avec la glace morte peut utiliser les microfracturations de la glace et creuser à terme un chenal d'écoulement, comparable au phénomène de "renard".

- **La vidange du lac par le fond**
  Le réseau de drainage interne au glacier se modifie au fur et à mesure que la glace se déforme. En été, il est bien entretenu par le passage des eaux de fonte, et en hiver, il a tendance à se refermer. Il est généralement réactivé au printemps suivant. Si des tronçons ont été obturées par la glace de regel ou écrasés par la pression, alors l'écoulement est bloqué, ce qui peut entraîner la création d'un lac supra-glaciaire. En général, la vidange est contrôlée en débit par la taille du siphon qui peut se mettre en place.
- **La désorganisation d'un barrage de glace**
  Ce type de phénomène ne concerne que les lacs dont le barrage est uniquement formé de glace. Il faut une pression hydrostatique suffisante pour que l'eau puisse s'infiltrer dans les fissurations de la glace et la fracturer. Le barrage se désagrège localement par une succession de vêlage de blocs de glace, qui crée un chenal d'écoulement souvent en tunnels. Dès que l'eau commence à s'écouler dans le chenal, l'érosion provoque un emballement de l'écoulement, et la rupture survient brutalement.

Le lac de Rochemelon (discuté ci-dessus) et celui du glacier du Miage sont deux exemples parlants de ces processus dans les Alpes à l'heure actuelle. En ce qui concerne le lac du Miage, plusieurs vidanges ont été répertoriées au Moyen Âge. Malgré plusieurs débâcles, il n'y a jamais eu de véritable catastrophe. A l'heure actuelle, ce lac existe toujours, et il n'est pas exclu qu'un effondrement de matériaux (glace, roche,...) dans la retenue puisse créer une vague susceptible de submerger le barrage morainique et inonder la vallée.
Parmi les événements majeurs on peut citer La Laguna Paron au Pérou. En 1951 deux écroulements de l'ordre de 4 à 5 millions de mètres cubes de glace dans un petit lagon situé en amont ont provoqué une vague de plusieurs mètres, qui en entaillant le barrage morainique de ce lagon a entraîné sa vidange partielle dans La Laguna Paron située en aval et dont le niveau a subitement augmenté. Suite à cet évènement, des travaux ont été entrepris pour abaisser le niveau de La Laguna Paron de 17 m pour et ainsi éviter le risque de rupture de son barrage formé par le glacier Hatunraju.
Une des catastrophes glaciaires les plus importantes des Alpes à la fin du Petit Âge de Glace doit son origine à la vidange d'un lac périglaciaire temporaire d'une surface de 46 ha qui s'est formé en fond de vallée derrière d'importantes chutes de séracs tombées du glacier de Giétro (Val de Bagnes, Suisse). Des travaux furent entrepris pour vidanger de manière contrôlée les 27.5 millions de mètres cubes d'eau retenus par 1.7 millions de mètres cubes de glace. Malheureusement, la capacité érosive de l'eau s'écoulant dans la galerie creusée dans la glace, finit par faire céder le barrage à mi-vidange, occasionnant un pic de débit de 8000 $m^3/s$ en aval. L'inondation résultante fut responsable de nombreuses pertes agricoles, de la destruction de 360 constructions et de la mort de 50 personnes.

### 2.2.2. Poches intra-glaciaires

Un autre type de risque naturel d'origine glaciaire consiste en la rupture de poches d'eau pouvant se créer à l'intérieur même des glaciers. Ce risque est certainement le risque d'origine glaciaire le moins bien connu. Ces poches d'eau sont soit intra-glaciaires, lorsqu'elles sont situées à l'intérieur du glacier lui-même, soit sous-glaciaires, lorsqu'elles sont à la fois en contact avec le glacier et le socle rocheux. Cet aléa représente un véritable danger, car il est encore aujourd'hui impossible de déceler la présence éventuelle de ces poches et de surveiller leur évolution. Les processus de formation de ces poches d'eau sont, aujourd'hui, également encore très méconnus. Les ruptures de ces poches causent des catastrophes souvent meurtrières du fait de leur soudaineté, de leur imprévisibilité, et de l'importance des laves torrentielles qu'elles sont en mesure d'engendrer.

Les poches sous-glaciaires semblent généralement se former après un ressaut topographique, profitant de la cavitation (le glacier décolle de son socle à cet endroit).
L'apparition d'une poche d'eau intra-glaciaire sous-entend le fait que la partie du glacier où elle se développe est tempérée, c'est-à-dire que la glace est à son point de fusion. La limite entre la glace froide et la glace tempérée se situe, dans les Alpes, aux environs de 3500 m d'altitude (à plus ou moins quelques centaines de mètres selon l'exposition et aussi l'épaisseur du glacier : un glacier très épais pouvant être froid en surface et tempéré à sa base). L'apparition d'une telle poche dépend principalement des circulations d'eau à l'intérieur du glacier. En surface, l'eau de fonte s'évacue par un système de bédières, crevasses et moulins dans la zone d'ablation. Dans la glace, l'eau agrandit le réseau d'évacuation, formant des galeries, des puits et parfois des salles, comparables aux karsts dans les massifs calcaires. Pour que le réseau ainsi créé se comporte comme un réservoir, il faut que le système d'évacuation soit obturé. Cela peut se produire par exemple suite à un écrasement des galeries par la pression de la glace, principalement en hiver.
La poche s'agrandit et se remplit (à l'intérieur ou sous le glacier) par l'eau provenant de la fonte des neiges au printemps, de la fusion estivale de la glace ou bien des précipitations qui s'infiltrent dans le glacier. S'il existe un exutoire naturel latéral, l'eau s'évacue dès que le niveau du canal est atteint. La vidange se fait alors naturellement et ne peut aboutir à un phénomène de grande ampleur. Toutefois, dans le cas où il y a absence d'exutoire, la pression hydrostatique augmente. Elle peut réactiver le système naturel de drainage aval, provoquant une vidange plus ou moins contrôlée par le diamètre de la galerie siphonnante. Si cette pression devient trop importante, la paroi la plus fragile du glacier éclate. C'est toujours la zone mécaniquement la moins solide qui rompt en premier. Il y a alors expulsion d'un bouchon de glace et vidange brutale de la poche d'eau (Figure 2.7). Du fait du vide créé en dessous, la partie du glacier qui recouvre la poche d'eau en amont se trouve alors déstabilisée, et souvent il y a effondrement, comme par exemple en 1892 à Tête-Rousse. La libération soudaine de l'eau mélangée à de la glace ainsi produite, peut conduire à la formation d'une lave torrentielle ou d'une coulée de boue, s'il y a suffisamment de matériaux mobilisables par érosion sur les zones de passage.
Les volumes d'eau accumulés dans ces poches dans le glacier sont variables mais restent

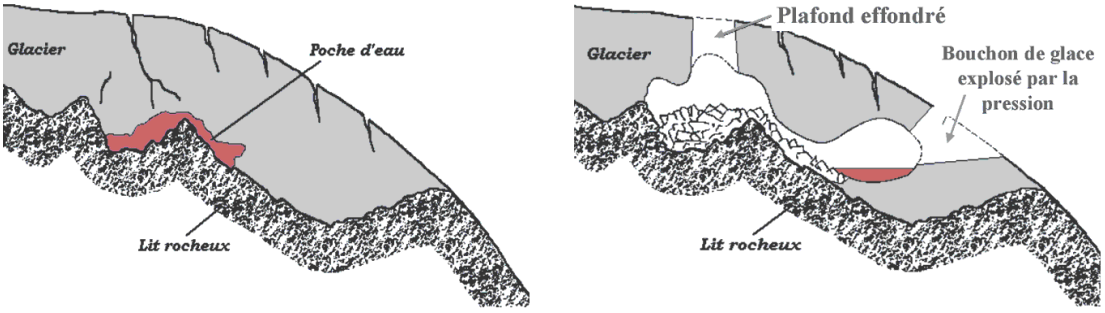



FIG. 2.7.: Vidange de poche d'eau intra-glaciaire. L'exemple ici montré correspond à ce qui s'est passé lors de la catastrophe de Tête-Rousse (Mont Blanc) en 1892 (figure du site web du Cemagref).
`Outburst of an intraglacial water pocket. The figure shows what happened during the catastrophic event that occured with the glacier de Tête-Rousse (Mont Blanc) in 1892 (figure from the webside of the Cemagref).`

généralement inférieurs à ceux accumulés dans les lacs glaciaires. Le volume des poches d'eau dépasse rarement le million de mètres cubes, sauf cas très particulier comme celui du Vatnajökull, glacier situé en Islande, sur le volcan Grimsvötn. En 1996, une éruption volcanique a provoqué la fonte d'une grande partie de la base du glacier ; une poche d'eau de plusieurs milliards de mètres cubes s'est formée et vidangée pendant plusieurs jours dans l'océan Atlantique. Les dégâts causés furent de faible amplitude au regard de l'énormité des volumes mis en jeu, étant donnée qu'aucune zone habitée n'a été touchée, et que seule une route s'est trouvée sur le passage, route qui fut d'ailleurs rapidement fermée au trafic évitant ainsi la perte de toute vie humaine.
Un autre exemple assez connu, mais d'une tout autre dimension, est celui du glacier du Trient avec la rupture chronique d'une poche d'eau baptisée *Tine*. Elle se vidange d'une façon périodique provoquant un afflux d'eau considérable au niveau du torrent émissaire, et parfois une inondation et des dégâts en aval.
Cependant, le plus grand événement de ce type enregistré en France est celui de la rupture d'une poche d'eau sur le glacier de Tête-Rousse (massif du Mont Blanc, Fig. 2.8). Dans la nuit du 11 au 12 juillet 1892, une poche d'eau située sous le glacier de Tête-Rousse, à une altitude de 3150 m, s'est vidangée, libérant environ 110 000 $m^3$ d'eau, et expulsant un bouchon de 90 000 $m^3$ de glace. Cette énorme masse d'eau et de glace a emprunté le couloir du Bossonney, dévastant tout sur son passage et se transformant en lave torrentielle, allant à une vitesse moyenne de 14 m/s. Après de nombreux phénomènes d'embâcles-débâcles, la coulée a atteint la plaine et s'est arrêtée à une altitude de 600 m, après avoir déposé plus de 600 000 $m^3$ de matériaux, le tout en quelques minutes seulement. En amont, sur le glacier, le toit de la cavité s'est effondré, suite au vide laissé par l'eau (partie gauche de la Figure 2.8). Dans la vallée, en contrebas du couloir emprunté par la lave torrentielle, 2 des 5 corps de logis de l'établissement thermal de St. Gervais ont été détruits. 175 personnes y

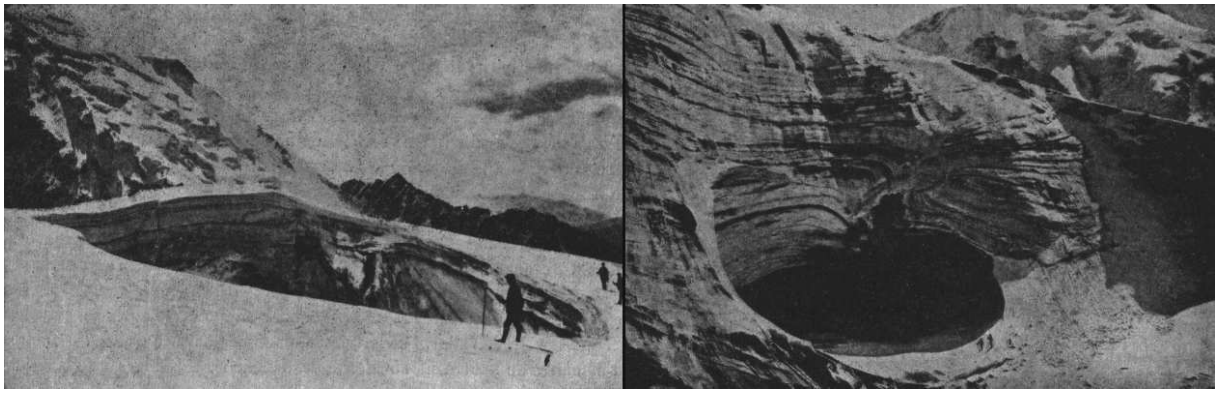


FIG. 2.8.: Le glacier de Tête-Rousse après la catastrophe, photos issues de Buisson et al. (1999). Sur la partie gauche, on peut voir la voûte effondrée au dessus de la poche d'eau après sa vidange. La partie droite quant à elle représente l'exutoire après l'expulsion du bouchon de glace sous l'effet de la pression de l'eau.
Tête-Rousse glacier after the disaster, pictures from Buisson et al. (1999). On the left, the collapse of the ice roof above the water pocket after the emptying is observable, whereas the right side shows the outlet after the ice plug has been expelled under the water pressure.

ont trouvé la mort (surprises dans leur sommeil), ainsi qu'une vingtaine d'autres, portées disparues. Les pertes matérielles ont été estimées à 1 354 000 F de l'époque.

### 2.2.3. Chutes de glace

Il existe également d'autres types de risques naturels liés aux glaciers, eux aussi rarement prévisibles comme par exemple les chutes de glace. La dénomination chute de glace concerne aussi bien les chutes de séracs, que les ruptures (totales ou partielles) de langues glaciaires, voir même les chutes de glaciers plus ou moins complets.
On sait que la glace présente un comportement variable en fonction de sa vitesse de déformation, à faible vitesse elle se déforme sans casser, a vitesse élevée elle devient fragile et se brise en morceaux. Une étude Suisse classe les chutes de glace en deux catégories, celles caractérisées par une rupture de pente (barre rocheuse ou falaise) et celles à pente constante. Deux modes de rupture y sont souvent associés (Schéma 2.9) : la rupture par glissement (pente constante) et la rupture par basculement (rupture de pente).

#### Les chutes de séracs

Dans les Alpes, les chutes de séracs sont fréquemment associées à un phénomène répétitif. Elles concernent essentiellement les glaciers suspendus, dont le front est surplombant. A

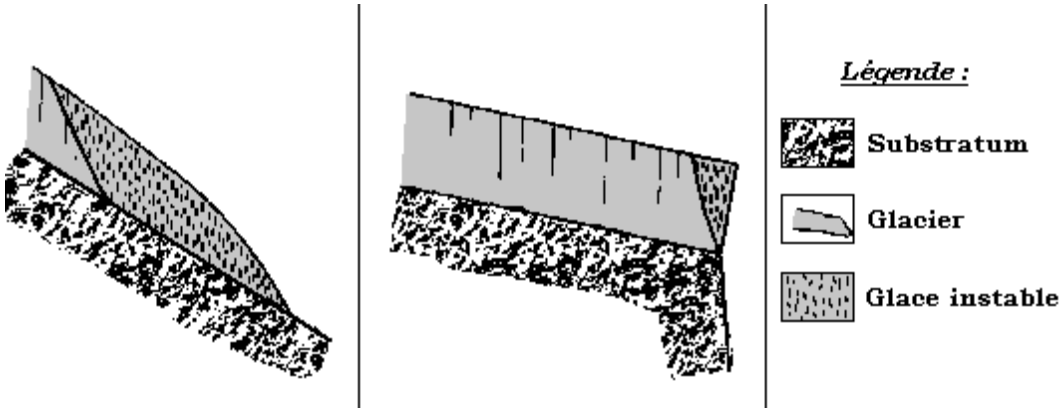



FIG. 2.9.: Les deux types de zones de départ (rupture par glissement ou basculement), figure extraite de Buisson et al. (1999).
Two types of ice falls (rupture by sliding or tipping), figure from Buisson et al. (1999).

ce type de chutes est généralement associée la rupture par basculement. Dans la chute, les blocs se fracturent en morceaux et dévastent tout sur leur passage et peuvent de plus entraîner la formation de coulées de boue ou déclencher des avalanches (ex. glacier de Taconnaz à Chamonix, Le Meur et Vincent (2006), Fig. 2.10).
Bien que les chutes de séracs se produisent moins souvent que les avalanches de neige, le risque n'est pas négligeable. En 1988 sous le glacier de Taconnaz une importante avalanche de neige et de glace, dont le volume a été estimé à 400 000 $m^3$ a franchi les paravalanches et s'est répandue dans le hameau de "Vers le Nant", où trois maison furent détruites et plusieurs lignes électriques coupées. En 1990 une avalanche d'un volume exceptionnel (1 million de mètres cubes) a dévalé le vallon de Taconnaz pour ne dépasser le dispositif de protection que de quelques dizaines de mètres et ne créer par miracle aucun dommage.

### Les ruptures de langues glaciaires et chutes de glaciers

Les ruptures de langues glaciaires, comme les chutes de glaciers sont dans les Alpes des phénomènes exceptionnels de grande ampleur. Parmi les exemples les plus marquants figure la chute de 0.5 à 2 millions de mètres cubes de glace en 1949 au glacier du Tour à Chamonix (6 morts) ou encore la chute de toute la langue terminale du glacier d'Allalin en Suisse (Figure 2.11). En moins de 30 secondes, au moins un demi million de mètres cubes de glace s'est abattu sur le chantier de construction du barrage de Mattmark qui se trouvait en contrebas. Le chantier du barrage fut complètement détruit et 88 personnes y ont trouvé la mort. Une vitesse d'avancée du glacier anormalement élevée (plusieurs mètres par jour comparée à une moyenne de 40 m par an) et des chutes de blocs isolées les quelques jours précédents auraient dû alerter.
Ce type de chute correspond généralement à une rupture par glissement, souvent dans une zone à pente moyenne pour les ruptures de langues et forte pour les chutes de glaciers.

FIG. 2.10.: Glacier de Taconnaz, Chamonix.
A gauche : Vue générale du glacier depuis la Vallée de Chamonix.
Au milieu : Chute de séracs du glacier de Taconnaz au niveau de laquelle se produisent régulièrement des chutes de glace.
A droite : Dégâts occasionnés par l'avalanche de 1988.
`Taconnaz glacier, Chamonix.`
`On the left : General overview of the glacier from the Chamonix Valley.`
`On the middle : Serac fall of the Taconnaz glacier where ice falls regularly occur.`
`On the right : Damages following the 1988 avalanche.`

Il semble que la lubrification à la base du glacier (eau de fonte) joue un rôle essentiel dans le cas d'une rupture partielle. Il se crée, dans la partie frontale du glacier une fissure transversale qui se transforme en une immense crevasse qui à terme détache la partie inférieure du glacier. Cette dernière, en l'absence d'obstacle, finit par glisser de plus en plus vite et peut ainsi provoquer une avalanche de glace (voir le Schéma 2.12).

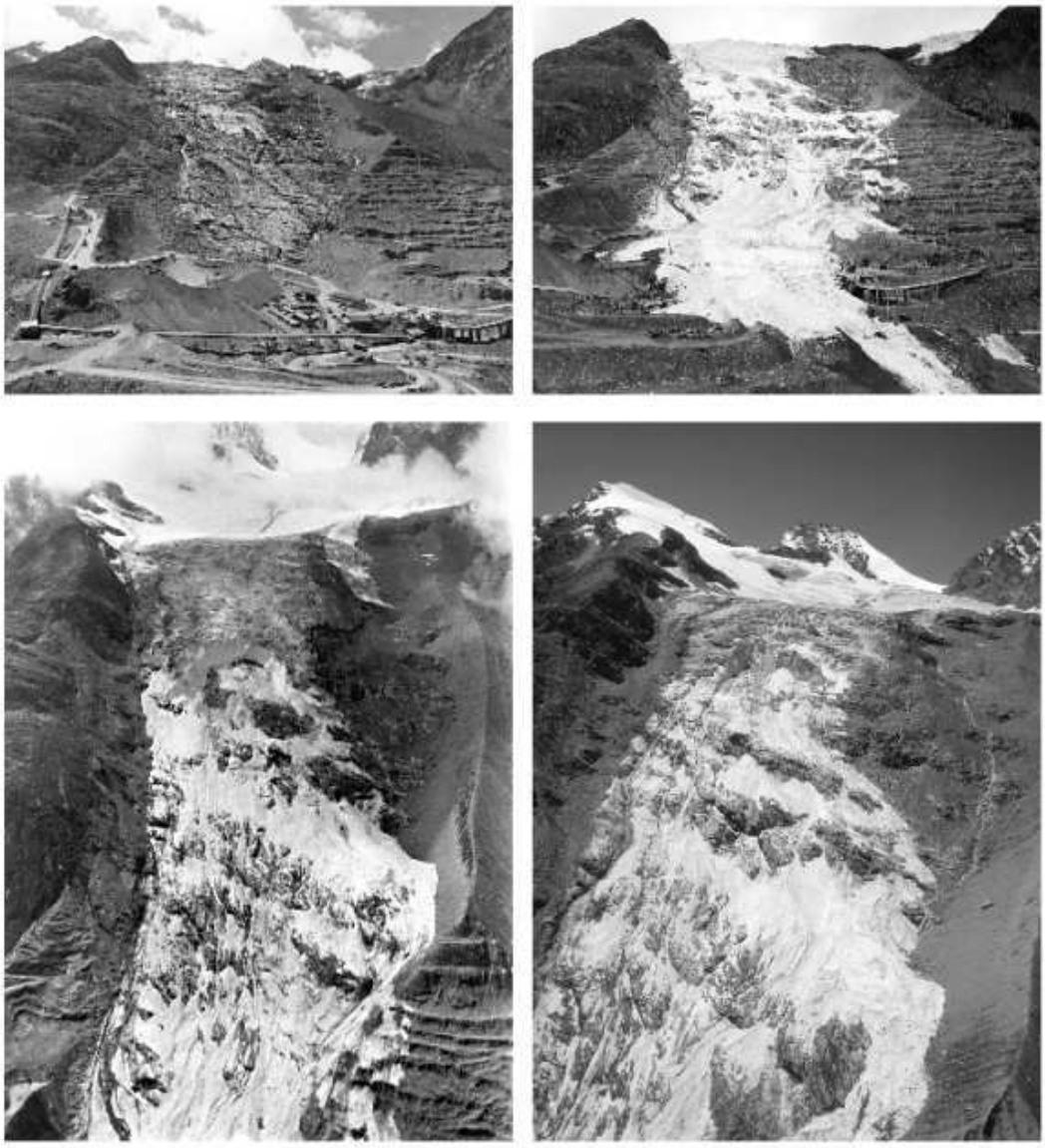


FIG. 2.11.: Chute de glace en août 1965 au glacier d'Allalin en Suisse. Le haut montre le front avant et après la catastrophe et le bas un focus sur le départ de la chute (Inventaire des glaciers à risque, Suisse).
Glacier tongue collapse in august 1965 at the Allalin glacier in Switzerland. The top shows the snout before and after the collapse, whereas the bottom is a zoom where the break off took place (Inventaire des glaciers à risque, Suisse).

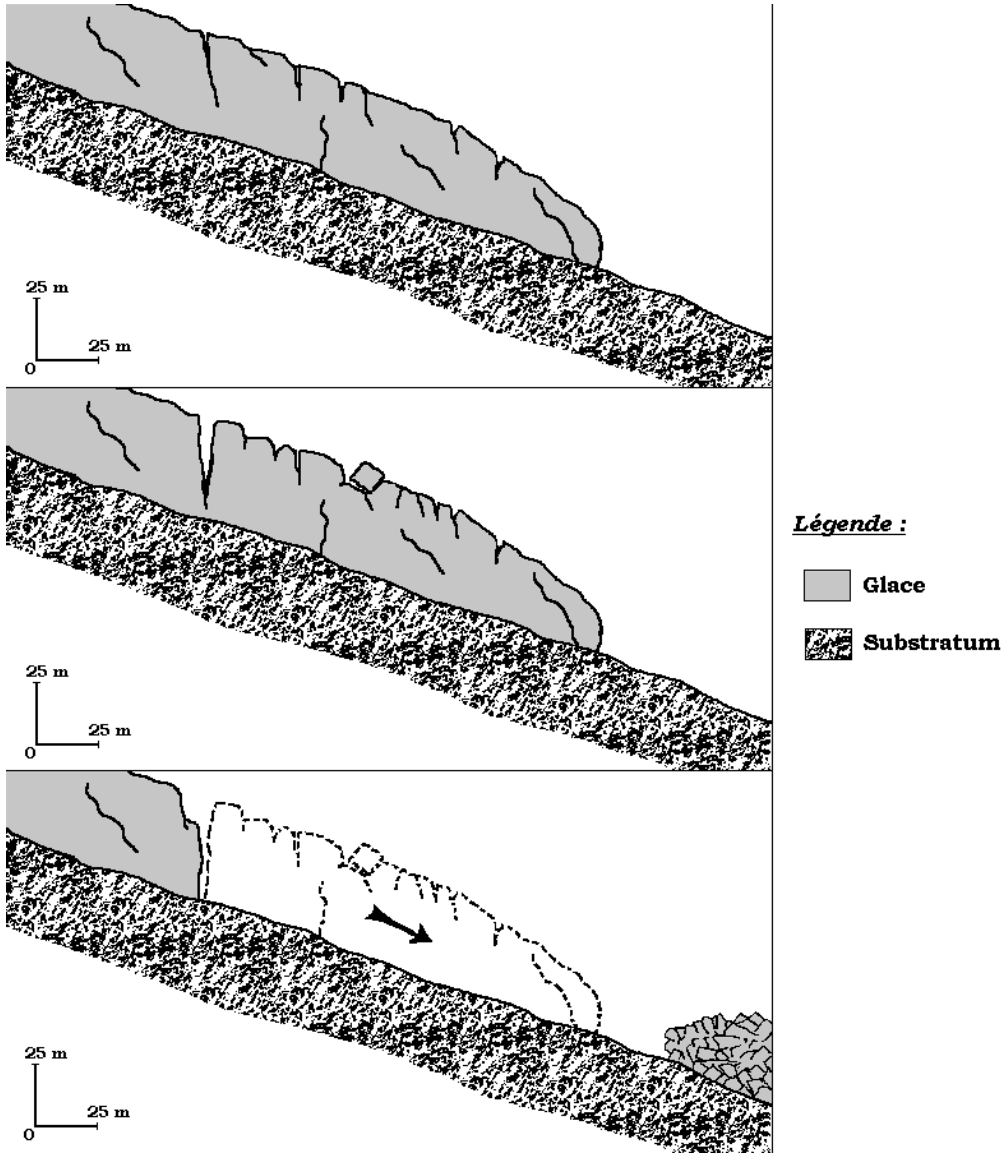



FIG. 2.12.: Schéma d'une rupture par glissement, figure de Buisson et al. (1999).
`Sketch of a breaking off by sliding, figure from Buisson et al. (1999).`

### 2.2.4. Changements de taille et foirages (surges)

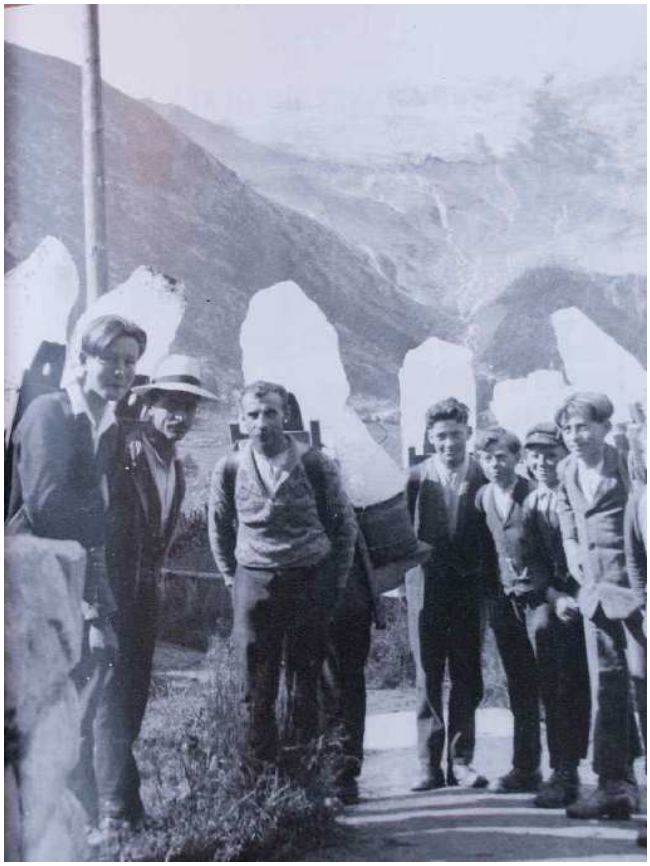
Un aléa moins important à l'heure actuelle dans les Alpes est celui lié aux changements de taille des glaciers.
Des avancées et plus indirectement aussi des retraits marqués de glaciers peuvent menacer bâtiments, villages ou routes qui sont proches du glacier. Ces changements de taille peuvent également provoquer des catastrophes liées aux risques déjà présentés : la vidange d'un lac ou d'une poche d'eau ou une chute de sérac. De plus, le retrait expose à l'érosion et aux éboulements des surfaces qui étaient auparavant protégées par la glace.
Enfin, il y a les foirages (surges) qui ne sont pas très fréquents dans les Alpes et qu'on trouve plutôt dans les régions polaires. Ils correspondent à l'avancée brutale et rapide d'un glacier avec des vitesses jusqu'à mille fois plus élevées que la normale. Ces phases généralement courtes alternent avec des périodes relativement statiques et plus longues parfois même avec des phases de retrait.
Un des rares événements de ce type dans les Alpes a eu lieu récemment en Italie, dans le massif du Mont Rose. Le glacier del Belvedere proche de Macugnaga (Valle Anzasca) a accéléré énormément ce qui a conduit à la formation de crevasses inhabituelles et à une avancée au delà des moraines du Petit Âge de Glace (détruisant partiellement un chemin d'accès à un refuge). Des infrastructures locales auraient pu être menacées si le phénomène avait perduré.

## 2.3. Aspects économiques et sociaux

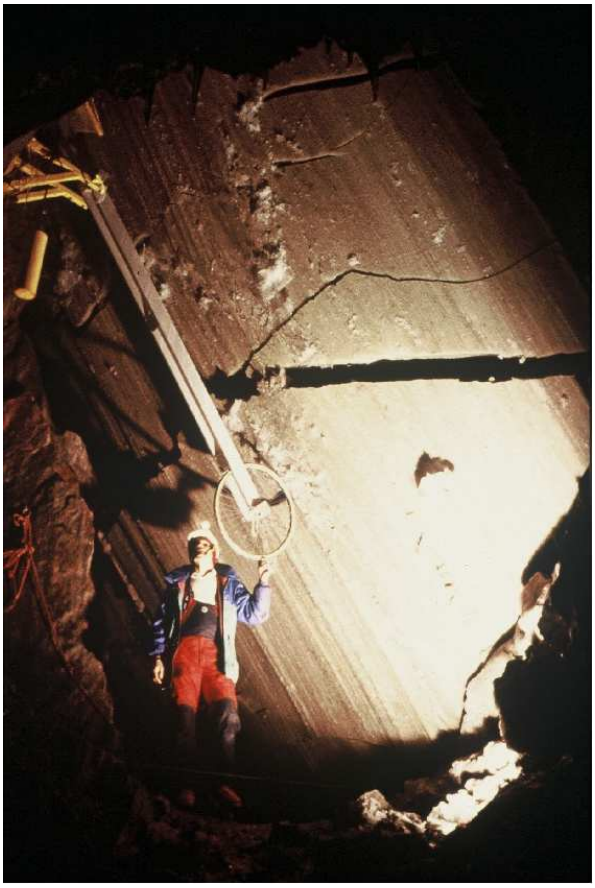
La glaciologie ne s'étend pas seulement aux développements théoriques en recherche fondamentale, elle s'est élargie également à des domaines plus appliqués. Les systèmes glaciaires représentent en effet une réalité économique et nombreux sont ceux qui ont essayé d'en tirer profit.

### 2.3.1. Ressources

Au dix-neuvième siècle un premier aspect pratique des glaciers est apparu avec la capacité des glaciers à fournir les vallées en glace pour la conservation des aliments (Fig. 2.13(a)).
Aujourd'hui, les glaciers jouent un rôle important dans l'activité hydroélectrique. Leur avantage comparé aux autres sources hydroélectrique vient de leur capacité à stocker l'eau naturellement en altitude (plus d'énergie potentielle) et de rendre cette eau disponible en été, à des périodes a priori plus sèches. L'eau des torrents sous-glaciaires est captée et en général stockée dans des barrages d'altitude, ce qui permet une meilleure gestion du turbinage. Les installations nécessaires à ces captages ont permis aux glaciologues l'accès aux conditions à la base des glaciers et particulièrement l'étude du glissement basal du glacier sur son lit rocheux (cf. l'exemple du glacier d'Argentière, Fig. 2.13(b)).
Enfin, les glaciers représentent un stock potentiellement important d'eau douce qu'il s'agisse d'eau potable ou d'irrigation, et ce tout particulièrement dans les Andes.



(a) Exploitation de la glace des glaciers à des fins de conservation alimentaire.
Exploitation of glacier ice for food preservation.



(b) Mesures de la vitesse du glissement basal dans une galerie EDF débouchant sous le glacier d'Argentière.
Sliding velocity measurements from an EDF (Eletricité De France) tunnel reaching the base of the glacier d'Argentière.

FIG. 2.13.: Aspects économiques et sociaux des glaciers.
Economic and social aspects of glaciers.

### 2.3.2. Tourisme

Enfin, l'enjeu économique des glaciers lié à un fort développement touristique a gagné beaucoup d'importance dans les Alpes. Le ski d'été s'est développé dans de nombreuses stations de ski (ex. Tignes, Les 2 Alpes ou Zermatt). De plus, beaucoup de remontées mécaniques, grottes de glace ou autres structures touristiques permettent de visiter les glaciers pendant toute l'année.
Le recul actuel des glaciers menace beaucoup cette branche touristique, d'où les efforts importants pour maintenir artificiellement les stations de ski avec des canons à neige ou des bâches blanches pour protéger la neige et/ou la glace de la fonte estivale (essentielle-

ment en Autriche et en Suisse). Les bâches ainsi utilisées sont à la fois perméables à l'air et à l'eau, présentent une forte réverbération en plus de leur bonne capacité d'isolation limitant ainsi considérablement le processus de fonte.

FIG. 2.14.: Protection de la glace par des bâches blanches, Zugspitze (Allemagne). `Shielding of the ice with white plastic sheets, Zugspitze (Germany).`

# 3. Les principes d'un modèle d'écoulement glaciaire

La dynamique des glaciers représente l'ensemble des mouvements de la glace au sein des glaciers, lequel peut se résumer en un écoulement de la zone d'accumulation vers la zone d'ablation, là où la glace finit par disparaître. Cette dynamique est bien illustrée par le champ de vitesse de la glace en surface. Les fluctuations glaciaires matérialisent les changements dans la géométrie du glacier (variations d'épaisseur ou de longueur) résultant des changements dans la distribution du bilan de masse. Cependant, le lien n'est pas si simple dans la mesure où une variation de bilan ne se traduira en variation glaciaire qu'au travers de l'écoulement de la glace avec un certain délai.
Il n'y a aucun moyen simple de relier les variations glaciaires aux variations du bilan. Ainsi, un modèle d'écoulement sert à simuler l'évolution de la géométrie d'un glacier, donc l'épaisseur de glace à chaque endroit, en fonction du temps en tenant compte de sa situation géographique et des conditions climatiques au cours du temps (qui interviennent par l'intermédiaire du bilan de masse).

La structure d'une telle modélisation est illustrée dans le Schéma 3.1. Il est clair que les bilans de masse constituent le principal forçage du modèle. Le modèle tel que représenté illustre la formulation directe qui consiste à reproduire la réponse glaciaire à un scénario climatique. Il faut cependant savoir que ce genre de modèle peut aussi s'employer sous forme inverse, c'est-à-dire permettre de remonter à partir des fluctuations glaciaires disponibles aux valeurs de bilans, lesquelles peuvent ensuite donner des informations sur le climat.

Il y a plusieurs facteurs qui interviennent dans un tel modèle :

1. les conditions initiales et aux limites
   - la topographie du socle rocheux,
   - la topographie de la surface de glace qui tient compte de l'orientation, de l'altitude,...
2. les lois et paramètres physiques
   - la déformation mécanique de la glace,
   - le glissement du glacier,
   - les profils de densité de la glace pour toute la surface,
   - des lois physiques décrivant la répartition de température
     (dans le cas des glaciers alpins on est souvent dans le cas d'un glacier isotherme),

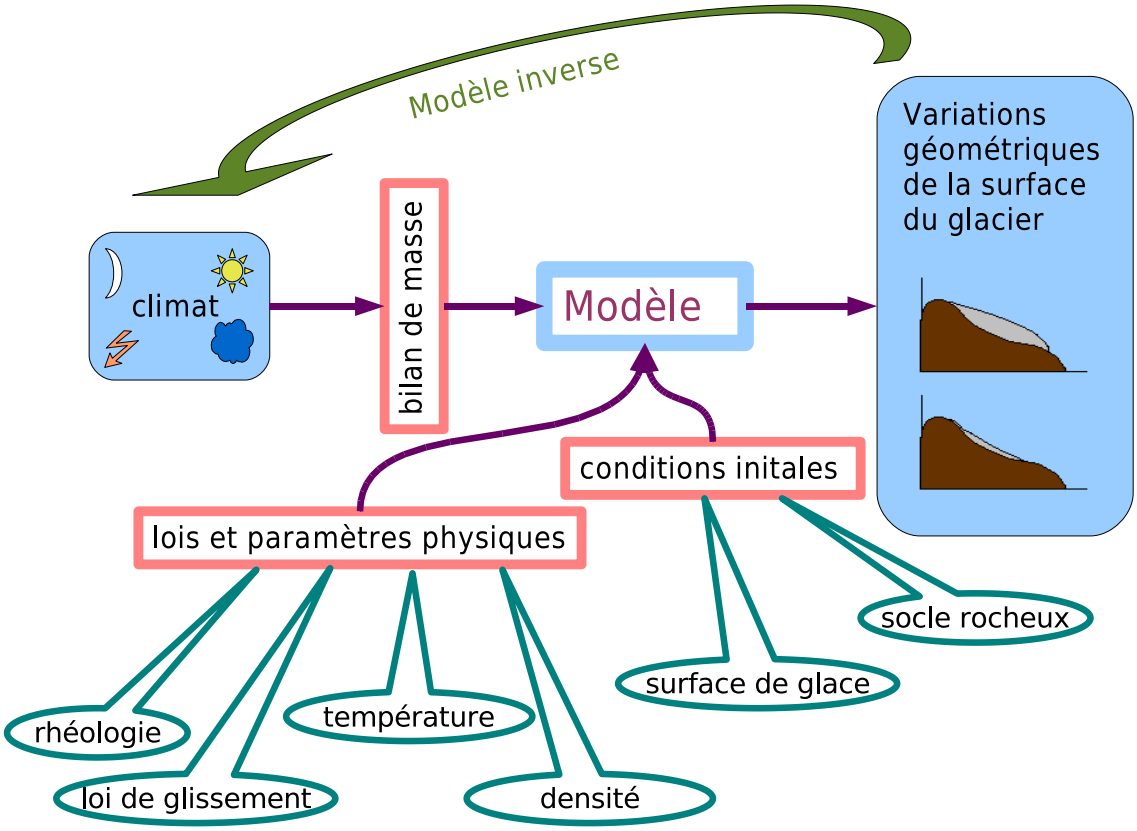



FIG. 3.1.: Schéma de la structure d'un modèle d'écoulement glaciaire.
`Sketch of the structure of an ice flow model.`

3. le forçage
   - la température, qui intervient comme paramètre, mais aussi comme forçage,
   - le champ du bilan de masse à tout instant qui tient compte des précipitations, de la fonte, du déplacement de la neige par le vent,. . ..

La disponibilité des mesures de bilan de masse s'avère souvent le facteur limitant pour faire fonctionner un modèle de glacier. En effet, peu de glaciers sont suivis régulièrement et sur la totalité de leur surface, parfois même les séries temporelles sont trop courtes. Les mesures de terrain ne permettent évidement pas d'appréhender le futur, cependant elles s'avèrent très utiles pour le passé, mais aussi pour contraindre des reconstructions de bilan à partir de données climatiques. Enfin il faut savoir qu'aujourd'hui, grâce aux modèles de bilan d'énergie en surface des glaciers, il est possible de simuler le bilan futur (Gerbaux et al., 2005) et par là même l'évolution future du glacier.

# 4. Méthodes d'acquisition des mesures de terrain

Comme indiqué dans le Paragraphe 3, les données de terrain, surtout les mesures de **bilan de masse**, sont indispensables pour l'utilisation d'un modèle d'écoulement. Elles peuvent être utilisées pour forcer le modèle mais aussi pour ajuster d'autre paramètres par méthodes inverses. Le bilan de masse sera décrit en détail dans le Chapitre II.2.
Ainsi dans le présent chapitre, on s'intéresse à toutes les mesures glaciologiques autres que celles du bilan de masse, à savoir les mesures de vitesses, les mesures topographiques, et les mesures de densité et de température.

## Vitesses en surface

Pour déterminer le vecteur des vitesses en surface, souvent les composantes parallèles et perpendiculaires à la surface sont déterminées. Dans la pratique, on mesure des vitesses verticales et horizontales.
Des mesures du changement de la positions de marqueurs (balises, roches,...) fournissent uniquement le vecteur de la vitesse horizontale. La mesure de la composante verticale nécessite des marqueurs fixés dans la neige ou la glace comme des bâtons en bois (balises). Leurs déplacements horizontaux ($\Delta x_m$) et verticaux ($\Delta y_m$) sont mesurés.
Pour la vitesse horizontale, le déplacement $\Delta x_m$ mesuré est directement le déplacement $\Delta x$ de la balise et la vitesse horizontale est ainsi donnée par $v_h = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Comme illustré sur la Figure 4.1, le déplacement vertical du pied de la balise (en bleu sur la figure), qui est ancré dans la neige et qui se déplace avec la glace, a deux contributions. D'une part son propre déplacement vertical $\Delta y$ relatif à la surface et d'autre part une contribution due au déplacement horizontal de la balise sur une surface en pente. On a $\Delta y_m = \Delta y + \Delta y_p$, $\Delta y_p$ étant du même signe que la pente et $\Delta y$ positive en zone de compression et négative en zone d'extension.
Le déplacement mesuré $\Delta y_m$ doit alors être corrigé de cet effet pour le calcul de la vitesse verticale $v_v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. On peut montrer que $\Delta y_p = -v_h(S)\Delta t\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}$.
La vitesse $V_v = \frac{\Delta y_m}{\Delta t}$ est souvent nommée vitesse d'émergence.
En réalité on mesure en effet la variation d'épaisseur $\Delta h$ à l'endroit de la balise. Ce changement d'épaisseur se compose du bilan (différence de l'émergence $\Delta l$ sur la figure) et du changement d'épaisseur dû à cette vitesse d'émergence $\Delta y_m$, $\Delta y_m$ est alors déduit de la différence de l'émergence et du changement d'épaisseur.

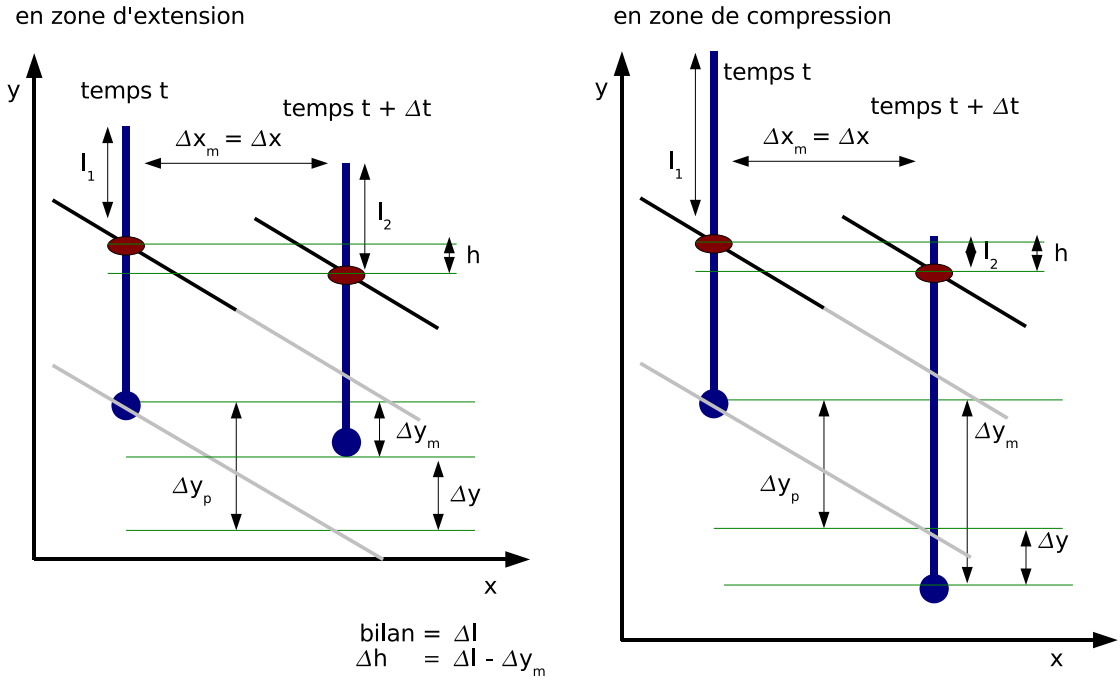



FIG. 4.1.: Mesures de la vitesse en surface à l'aide d'une balise.
`Surface velocity measurements from mass balance stakes.`

## Mesures de l'altitude de surface de la glace

L'altitude de la surface de glace est mesurée par des méthodes géodésiques, auparavant avec des théodolites, aujourd'hui par GPS.

Une autre méthode consiste à utiliser une méthode basée sur la photogrammétrie et l'orthophotographie comme il a été fait sur le glacier du Cotopaxi (Partie VI). La photogrammétrie est une technique de mesure par laquelle les coordonnées en trois dimensions des points d'un objet sont déterminées par des mesures faites sur plusieurs images (photo aérienne ou satellite) prises à partir de positions différentes. Des points communs sont identifiés sur chaque image. Une ligne de vue (ou rayon) peut être construite de la position de l'appareil photographique au point de l'objet. C'est l'intersection de ces rayons (triangulation) qui détermine la position tridimensionnelle du point relative à quelques points de références connus et identifiés sur les photos. Un modèle numérique de terrain (MNT) est ainsi établi. Ce modèle numérique de terrain permet ensuite de produire une orthophoto. On appelle orthophotographie ou plus communément orthophoto une image obtenue par traitement d'un cliché aérien (numérique ou argentique) dont la géométrie a été redressée à l'aide du MNT obtenu auparavant, de sorte que chaque point soit superposable au point sur une carte plane qui lui correspond. En d'autres termes, une orthophotographie semble être prise à la verticale de tous les points qui y figurent.

La Figure 4.2 montre la surface topographique du glacier de Gébroulaz telle que reconstruite à partir des mesures photogrammétriques.

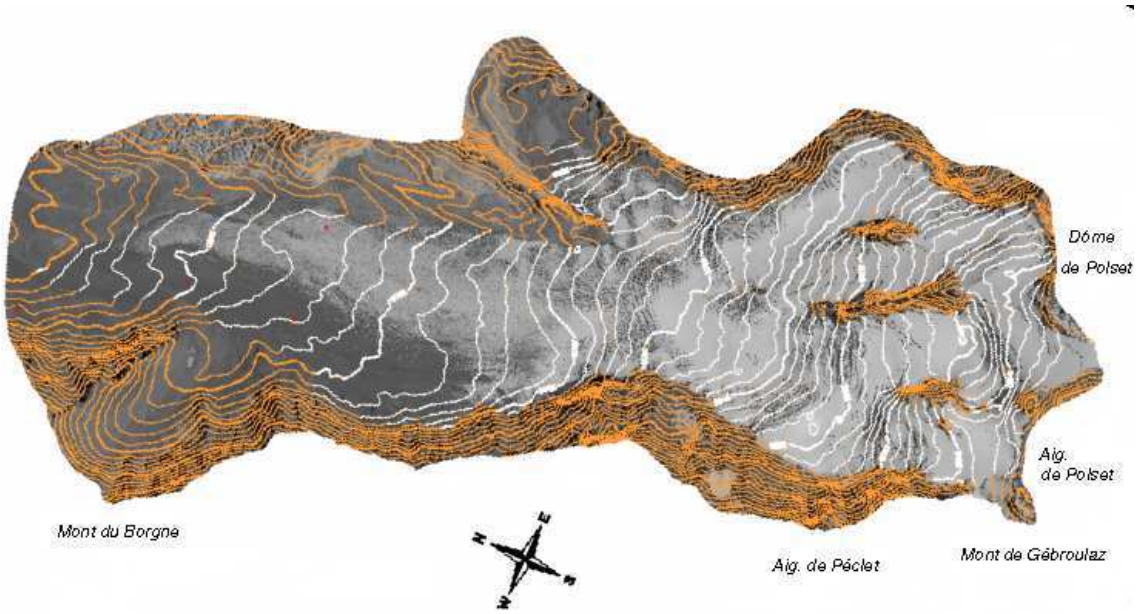



FIG. 4.2.: Représentation de la surface topographique du glacier de Gébroulaz (Massif de la Vanoise), d'après Vincent et Blanc (2006).
`Surface topography of the Gébroulaz Glacier (Massif de la Vanoise), from Vincent et Blanc (2006).`

## Mesures de la topographie sous-glaciaire et de l'épaisseur de glace

L'épaisseur de glace peut être mesurée par radar, forages, méthodes sismiques ou par gravimétrie. La topographie du socle rocheux est obtenue à partir des mesures d'épaisseur et de l'altitude de la surface de glace.
Lors des mesures radar, une partie de l'énergie radar pénètre dans la glace et est réfléchie par l'interface glace-roche. C'est le temps entre l'émission de l'onde et le retour de l'onde réfléchie qui donne accès à l'épaisseur de glace, à condition que la vitesse de propagation de l'onde dans la glace soit connue. Ces mesures peuvent être perturbées par des réflexions à la surface de la glace, aux interfaces entre différentes couches de glace ou de neige ou par des réflexions sur les bords latéraux du glacier ainsi que par la diffraction au niveau de tout type d'hétérogénéités (crevasses, débris, poches d'eau,...). La Figure 4.3 montre un exemple de telles mesures effectuées sur le Cotopaxi dans les Andes.
Les mesures sismiques reposent sur le même principe, les ondes sismiques sont réfléchies par l'interface glace-roche avec les mêmes types de perturbations que dans le cas des ondes radar.

FIG. 4.3.: Mesures de l'épaisseur de glace à l'aide d'un radar.
`Thickness measurements with the help of a ground penetrating radar.`

La méthode de la gravimétrie consiste à mesurer l'accélération gravitationelle relative par rapport à celle d'un point de référence. La différence en altitude par rapport à ce point de référence connu peut alors être déterminée en corrigeant de la densité des matériaux en surface ainsi que du relief autour.
Sur la Figure 4.4 il s'agit d'un forage à l'eau chaude sur le bas de la Mer de Glace à Chamonix pour le compte d'EDF.

FIG. 4.4.: Mesures de l'épaisseur de glace à l'aide de forages.
`Thickness measurements from ice drilling down to the bedrock.`

## Mesures de densité

La mesure du profil de densité de la neige ou du névé se fait à partir de carottage ou de puits. Une carotte de neige est extraite et la densité est déterminé à différentes profondeurs avec des méthodes différentes. La plus simple, et aussi la plus facile à mettre en place sur le terrain, consiste à couper la carotte en morceaux avec une géométrie simple pour calculer le volume (en cylindres en l'occurrence) et de peser ces morceaux (cf. aussi Chapitre II.3.2).
La Figure 4.5 montre un exemple de profil de densité en fonction de la profondeur sur lequel on observe des valeurs de l'ordre de 0.4 à 0.6 en surface pour la neige ou le névé et des valeurs de l'ordre de 0.8 à 0.9 en profondeur pour la glace.

## Mesures de température

Le profil de température peut être mesuré dans les trous de forage à l'aide de sondes de température. Par exemple, dans le forage au Dôme du Goûter (Fig. 4.5), des températures allant de -8.5° à -11° ont été mesurées.

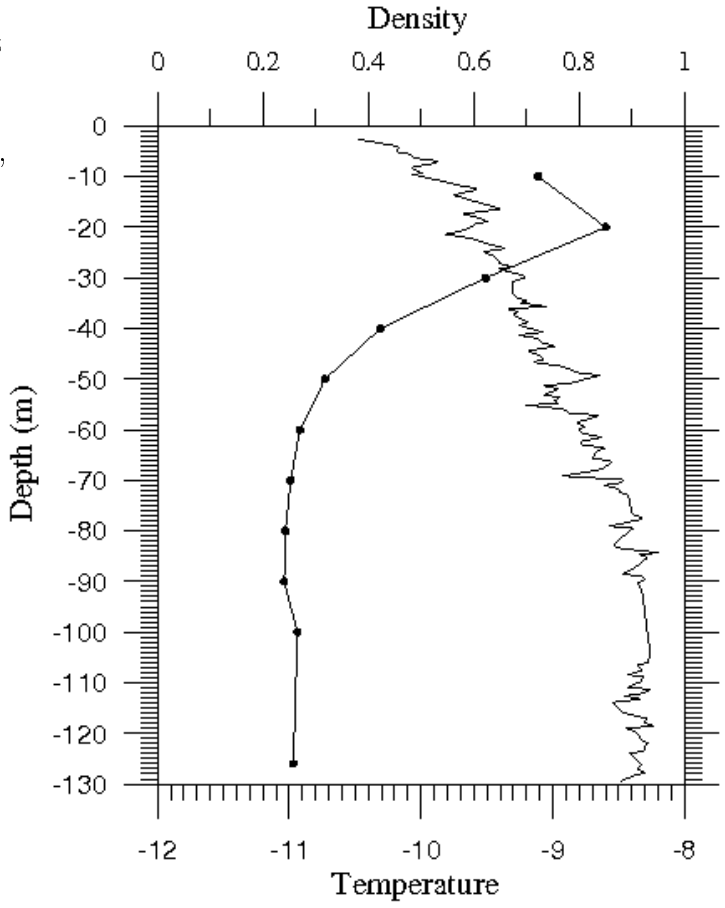



FIG. 4.5.: Profil de température et de densité le long d'un forage au Dôme du Goûter (Massif du Mont Blanc), d'après Vincent et al. (2007a).
`Temperature and density versus depth from drilling core data at Dôme du Goûter (Mont Blanc massif), from Vincent et al. (2007a).`

Deuxième partie .

# Données du Service d'Observation Glacioclim

Cette partie concerne les données, en particulier celles du bilan de masse.

⇝ Le premier chapitre décrit l'observatoire des glaciers alpins en France.

⇝ Le deuxième chapitre est un chapitre relativement court qui donne quelques notions de base sur le bilan de masse.

⇝ Ensuite, dans le troisième chapitre, les mesures du bilan de masse telles que celles effectuées au Laboratoire de Glaciologie de Grenoble seront détaillées.

⇝ Le quatrième et dernier chapitre donne un aperçu des données concrètement exploitées dans cette thèse.

# 1. Glacioclim

## 1.1. Glacioclim : ORE et Service d'observation

Les réseaux d'observations des bilans de masse et des fluctuations glaciaires sont des outils de première importance, qui ont récemment été labellisés comme Service d'Observation de l'INSU (Institut National des Sciences de l'Univers) et comme Observatoire de Recherche en Environnement (ORE). GLACIOCLIM, Les GLACIers, un Observatoire du CLIMat, est un observatoire de Recherche en Environnement de la thématique Océan-Atmosphère portant sur l'étude des glaciers et du climat avec trois composantes (géographiques) : les Alpes, les Andes et l'Antarctique. La composante Andes de GLACIOCLIM s'est développée dans le cadre de partenariats entre l'IRD et les institutions des pays concernés. Le LGGE est en charge des mesures effectuées dans les Alpes et en Antarctique. Le CEMAGREF assure les observations du glacier de Sarennes dans les Alpes.
Ces observatoires sont des structures pérennes qui permettent des observations régulières sur de longues périodes, exactement ce dont on a besoin pour affiner la relation climat - glacier.

### Objectifs généraux

GLACIOCLIM a comme objectif de constituer une base de données à long terme afin de :
- étudier les relations entre les variations climatiques et les bilans de masse glaciaires,
- étudier l'évolution des glaciers pour évaluer les ressources en eau, le niveau des mers et d'autres impacts liés à l'évolution des glaciers,
- étudier le lien entre la réponse dynamique des glaciers et le bilan de masse et de mieux comprendre les risques naturels d'origine glaciaire.

### Mesures effectuées sur les 3 composantes

Exception faite des mesures photogrammétriques, des mesures glaciologiques et météorologiques sont effectuées une à 12 fois par an (suivant le site) sur et aux abords des glaciers.
Mesures glaciologiques :
- bilans de masse estival, hivernal et annuel (forages, balises et carottages),
- bilans de masse volumétriques (photogrammétrie, seulement tous les 5 ans),
- vitesses d'écoulement de surface (GPS),
- variations d'épaisseur (GPS),
- cartographie du front (GPS).

Mesures météorologiques :
- directions et vitesses du vent, radiations solaires incidentes et réfléchies, radiations thermiques atmosphériques et émises par la surface, température et humidité de l'air ventilées, précipitations (stations météo automatiques généralement sur une moraine voisine),
- albédo journalier (photos terrestres),
- campagnes intensives de mesures météo et de bilan énergétique à la surface même des glaciers pendant des périodes de quelques semaines.

## 1.2. Service d'Observations des glaciers alpins

La composante Alpes de GLACIOCLIM (POG, Programme d'Observation des Glaciers alpins) poursuit et complète aujourd'hui dans les Alpes les longues séries d'observations qui ont débuté vers 1905 avec les positions de fronts, les épaisseurs et les vitesses en surface (mesurées par la famille Vallot puis reprises par les Eaux & Forêts) puis vers 1950 avec les mesures de bilans de masse annuels par le LGGE. Cette banque de données bien que non parfaitement continue en temps et bien que n'ayant qu'une couverture partielle de la surface des glaciers, reste néanmoins quasiment unique au monde. Depuis 1993, le réseau est s'étendu en surface et est passé à des mesures au moins bi-annuelles.

### 1.2.1. Sites de mesures

L'observatoire comporte cinq glaciers qui sont régulièrement suivis : La Mer de Glace et le glacier d'Argentière dans le massif du Mont-Blanc, le glacier de Gébroulaz dans le massif de la Vanoise, les glaciers de Saint-Sorlin et de Sarennes[1] dans le massif des Grandes Rousses (Fig. 1.1). Leurs caractéristiques sont présentées dans le Tableau 1.1. Ces cinq glaciers ont été choisis pour les raisons suivantes :
- Ils font déjà l'objet d'une longue série d'observations.
- Ils couvrent trois massifs différents des Alpes Françaises.
- Ils présentent une plage d'altitude importante.
- Leur dynamique (vitesse d'écoulement) est forte (sauf le glacier Sarennes et dans une moindre mesure le glacier de Saint Sorlin).
- Leur accès n'est pas trop difficile.

Sur la Figure 1.2 une carte avec les sites de mesures sur la Vallée Blanche (Mer de Glace) à Chamonix est présentée comme exemple.

[1] Le suivi du glacier de Sarennes est assuré par le CEMAGREF.

(a) La Mer de Glace.

(b) Le glacier d'Argentière.

(c) Le glacier de Saint Sorlin.

(d) Le glacier de Sarennes.

(e) Le glacier de Gébroulaz.

FIG. 1.1.: Les glaciers suivis par le Service d'Observations des glaciers alpins.
`Glaciers surveyed by the French glacier observatory.`

| | Saint-Sorlin | Sarennes | Gébroulaz | Mer de Glace | Argentière |
|---|---|---|---|---|---|
| Massif | Grandes Rousses | Grandes Rousses | Vanoise | Mont-Blanc | Mont-Blanc |
| Longitude | 06°10' | 06°07' | 06°40' | 06°57' | 06°57' |
| Latitude | 45°09' | 45°07' | 45°19' | 45°55' | 45°55' |
| Orientation (en incluant celle des glaciers tributaires) | N-NE | S | N | N à S | N à S |
| Longueur (km) | 2,5 | 1 | 4 | 12 | 10 |
| Surface ($km^2$) | 3 | 0,5 | 3 | 28 | 19 |
| Nombre de sites (environ) | 28 | 5 | 25 | 40 | 35 |
| Gamme d'altitude (m) | 2700-3400 | 2850-3150 | 2600-3500 | 1600-4000 | 1600-3600 |

TAB. 1.1.: Caractéristiques des glaciers suivis par le Service d'Observation (Glacioclim).
`Caracteristics of the glaciers surveyed in the framework of the Observation network (Glacioclim).`

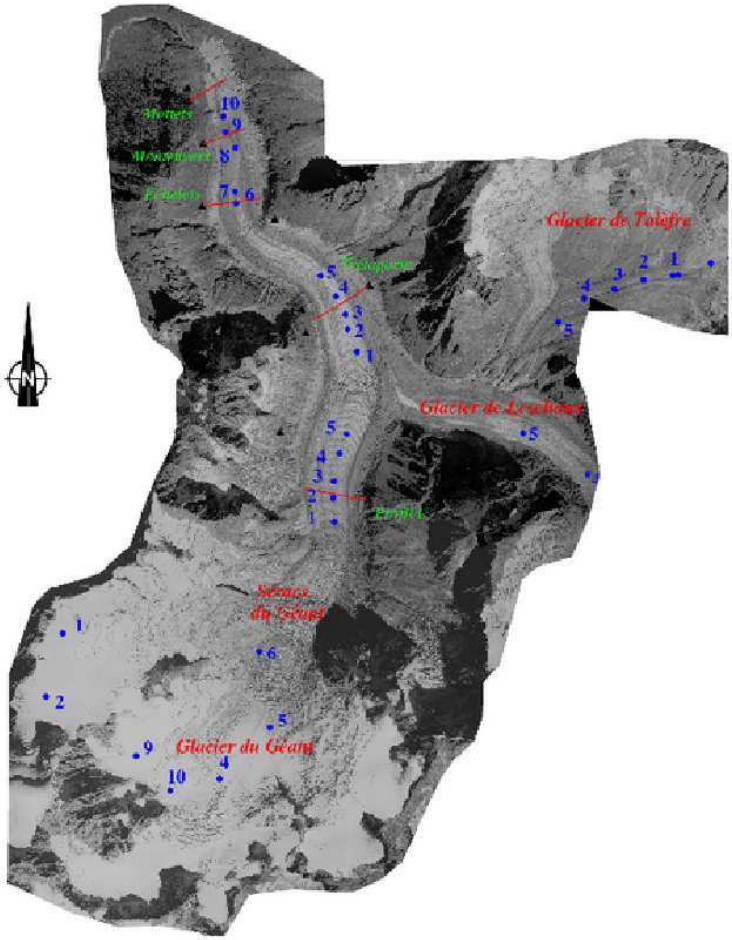



FIG. 1.2.: Sites de mesure pour les mesures de bilan de masse sur la Vallée Blanche (Mont Blanc).
`Mass balance measurement network on the Vallée Blanche (Mont Blanc).`

### 1.2.2. Données

#### Bilans de masse hivernaux et estivaux

Les bilans de masse hivernaux (octobre à mai) et estivaux (juin à septembre) sont mesurés sur en moyenne 30 à 50 sites par glacier[2] sur l'ensemble de la surface des cinq glaciers par carottages ou à partir de mesures de l'émergence de balises implantées dans la glace. On utilise la méthode glaciologique qui sera détaillée dans le Paragraphe 3.1.2.
Les mesures permettent de connaître la quantité de neige accumulée au cours de l'hiver sur le glacier, la quantité de neige fondue au cours de l'été en zone d'accumulation, la quantité de neige et de glace fondue au cours de l'été en zone d'ablation. Des mesures de la densité sont également faites ce qui permet d'exprimer les bilans en mètres équivalent eau (eq. eau). Les mesures ont une précision de l'ordre de 30 cm eq. eau en zone d'accumulation et de l'ordre de 10 cm en zone d'ablation.
Toutes les sites d'observations sont repérées chaque année à l'aide de moyens topographiques (ex. GPS, Photo 3.5(e)). Cela garantit que les mesures sont effectuées exactement aux même sites d'une année à l'autre.

#### Bilan de masse cumulé sur toute la surface et sur des périodes plus longues

Le bilan de masse cumulé sur toute la surface (bilan volumétrique) de chacun des glaciers est mesuré tous les cinq ans par photogrammétrie aérienne, afin de valider les bilans de masse annuels obtenus à partir des mesures directes et inter- et extrapolés sur toute la surface du glacier. Souvent, l'évolution dans le temps du bilan volumétrique obtenu par photogrammétrie est calé sur celui déduit des mesures annuelles sur le terrain (Fig. 1.3). Au LGGE on ne procède pas exactement de cette manière, on utilise une méthode combinée des bilans obtenus par photogrammétrie et de celles mesurées sur le terrain, pour plus de détails voir le Paragraphe 3.2.2.

#### Vitesses d'écoulement

Les vitesses d'écoulement en surface[3] sont mesurées une fois par an à partir de la position précise des balises implantées dans la zone d'ablation du glacier. Ces observations sont réalisées par topographie classique ou avec des récepteurs géodésiques GPS. Elles sont mesurées avec une précision de l'ordre de 5 cm. A titre d'exemple les vitesses le long de deux profils sur le glacier d'Argentière sont présentées sur la Figure 1.4.

#### Épaisseur

L'épaisseur n'est que rarement mesurée directement. Par contre les variations d'épaisseur peuvent être facilement déduites des mesures de la surface topographique, car les variations de la surface correspondent à celles des épaisseurs.

[2] à l'exception de cinq sites sur le glacier de Sarennes
[3] sauf sur le glacier de Sarennes

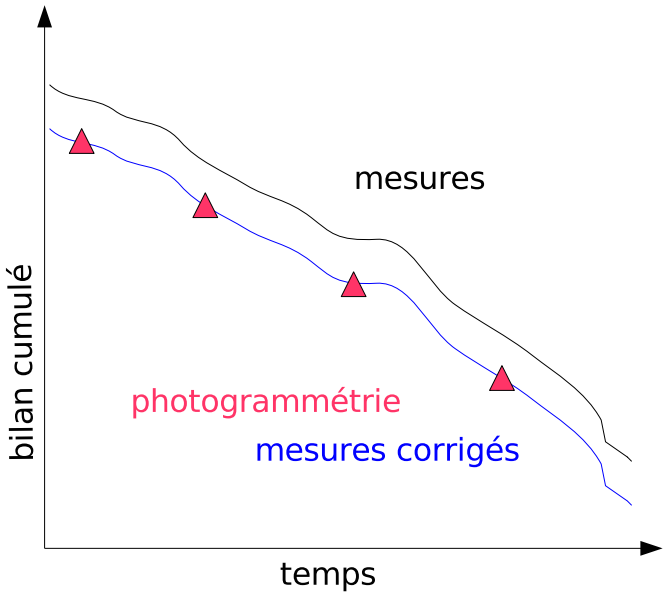



FIG. 1.3.: Bilans de masse volumétriques issus des mesures de terrain calés sur ceux issus de la photogrammétrie.
`Field mass balance measurements adjusted to mass balance from photogrammetry.`

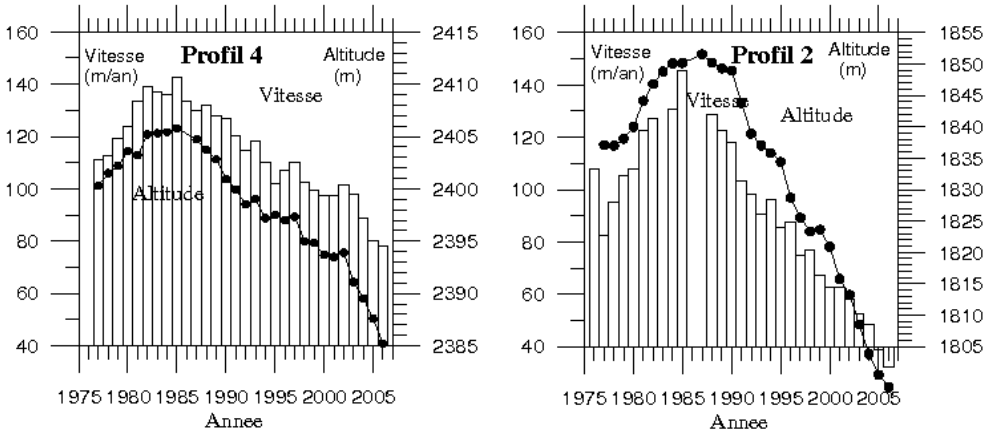



FIG. 1.4.: Mesures de vitesses d'écoulement le long de deux profils sur le glacier d'Argentière (Chamonix), d'après Vincent et al. (2007b).
`Ice flow velocity measurements along two profiles located on the glacier d'Argentière (Chamonix), from Vincent et al. (2007b).`

La surface topographique de chacun de ces glaciers[4] est mesurée une fois par an le long de profils transversaux à l'aide de moyennes topographiques avec une précision de 20 cm. La Figure 1.5 montre l'évolution de l'altitude de la surface le long d'un profil sur le glacier de la Mer de Glace.

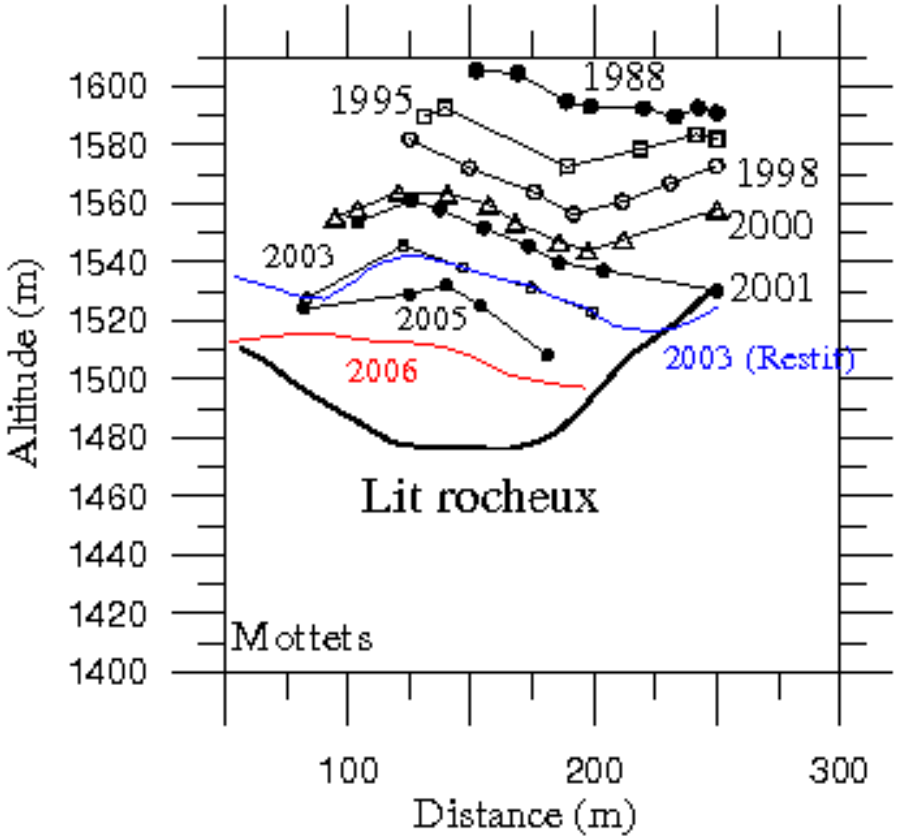



FIG. 1.5.: Variations d'épaisseurs le long d'un profil (Les Mottets) sur le glacier de la Mer de Glace (Chamonix) déduites des mesures de la surface topographique, d'après Vincent et al. (2006).
`Ice-thickness variations on a profile (Les Mottets) on the Mer de Glace (Chamonix) from ice surface topographic measurements, from Vincent et al. (2006).`

### Position du front

Les fluctuations de la position du front sont mesurées une fois par an par mesure de distance par rapport à un point fixe (si possible) ou sinon par des moyens topographiques. Sur la Figure 1.6 les fluctuations du front du glacier d'Argentière sont représentées à partir

[4]sauf celle du glacier de Sarennes

des mesures récentes du LGGE ainsi qu'à partir des mesures plus anciennes effectuées par d'autres organismes.

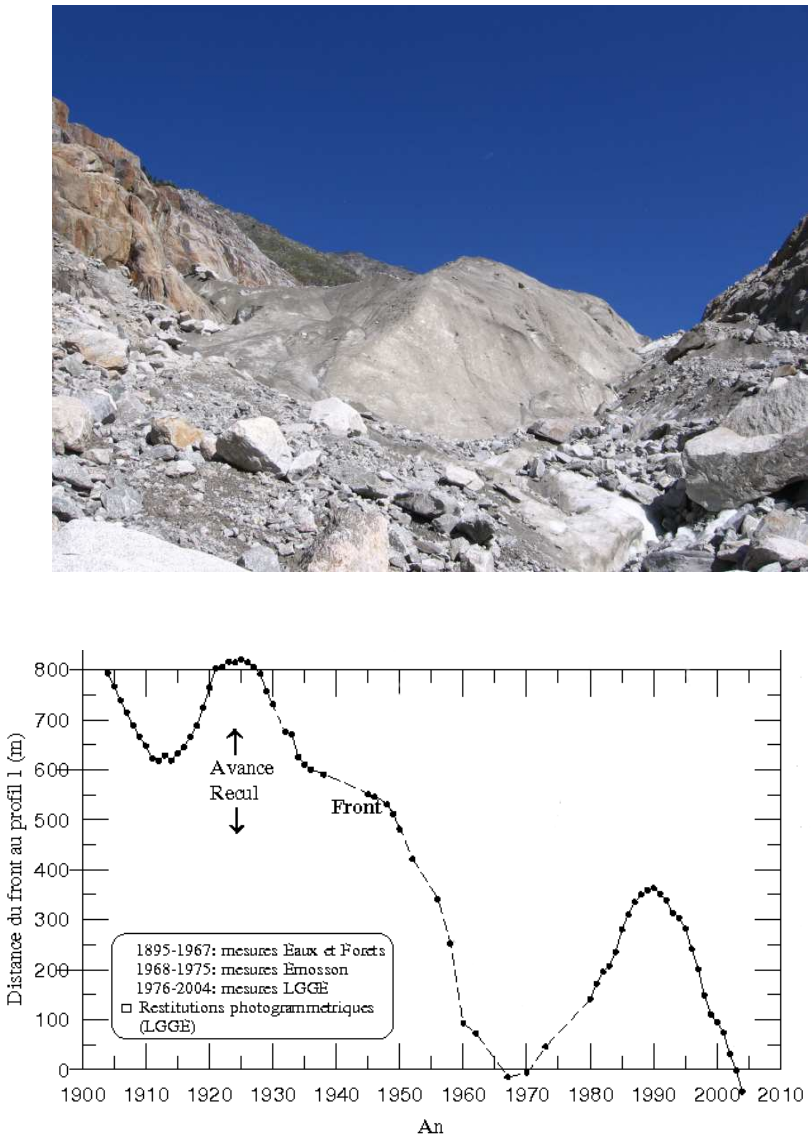



FIG. 1.6.: Front et variation de la position du front du glacier d'Argentière (Chamonix), d'après Vincent et al. (2007c).
`Snout and variation of the snout position of the glacier d'Argentière (Chamonix), from Vincent et al. (2007c).`

# 2. Bilan de Masse

Le bilan de masse traduit les gains et les pertes de masse (glace ou neige) d'un glacier et s'exprime en général en mètres équivalent eau (m w.e.). Les hauteurs de neige, de névé ou de glace mesurées sont converties en hauteur d'eau à l'aide des densités correspondantes aussi mesurées (de $300\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ pour la neige fraîche jusqu'à 880-920 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ pour la glace). Il faut distinguer le bilan $b_{i,t}$ à un endroit $i$ à un moment $t$ du bilan sommé sur toute la surface du glacier :

$$b_t = \sum_i b_{i,t}. \tag{2.1}$$

Un bilan de masse représente toujours un changement de masse, donc parler d'un bilan au moment $t$ sous-entend toujours le bilan entre un certain moment et l'instant $t$.
Par bilan annuel on entend le bilan cumulé sur toute l'année hydrologique.
On considère aussi souvent le bilan hivernal et le bilan estival, qui - par convention - est choisit négatif (perte de masse). Le plus souvent dans les Alpes, le bilan hivernal correspond à peu de choses près à l'accumulation et le bilan estival à l'ablation. Le bilan annuel $b_{\mathrm{ann}}$ sur tout le glacier s'écrit alors

$$b_{\mathrm{ann}} \quad = \quad b_{\mathrm{hivernal}} + b_{\mathrm{estival}} = \mathrm{accumulation} - \mathrm{ablation}. \tag{2.2}$$

(L'accumulation et l'ablation étant définies comme positives.)

Par bilan spécifique $b_{spec}$ on entend le bilan cumulé sur toute la surface du glacier et normalisé à celle-ci,

$$b_{spec} = \sum_i b_i \frac{S_i}{\sum_i S_i}. \tag{2.3}$$

Il faut distinguer ce bilan surfacique du bilan cumulé volumique sur tout le glacier $b = \sum b_i S_i$. Le bilan spécifique a l'avantage d'être plus facilement comparable entre différents glaciers. A titre d'exemple, l'évolution du bilan spécifique du glacier de Saint Sorlin est présentée sur la Figure 2.1.

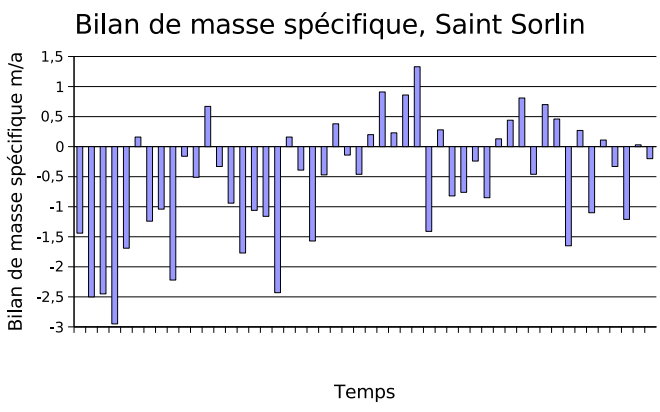



FIG. 2.1.: Bilan spécifique du glacier de Saint Sorlin (France) au cours des 50 dernières années. `Specific mass balance for the Saint Sorlin Glacier (France) over the last 50 years.`

# 3. Techniques de mesure du bilan de masse

Les différents observateurs n'emploient pas toujours exactement les mêmes techniques de mesure selon le pays ou même le laboratoire pour un même pays. Ici, essentiellement les techniques propres au Laboratoire de Glaciologie de Grenoble seront décrites. Les mesures des bilans annuels, hivernaux et estivaux tant en zone d'ablation qu'en zone d'accumulation seront détaillées. Comme bilan hivernal, estival et annuel sont liés entre eux, il suffit de n'en mesurer que deux, dont le choix pratique dépend de la zone considérée. Le troisième en est ensuite déduit algébriquement.

## 3.1. Description des méthodes de mesure

Il y a plusieurs méthodes pour évaluer le bilan de masse d'un glacier ou simplement ses variations au cours du temps : la méthode cartographique ou volumétrique, la méthode hydrologique, la méthode glaciologique,... La méthode cartographique, la plus intuitive et la méthode glaciologique seront détaillées ici car elles correspondent aux mesures faites au LGGE.

### 3.1.1. La méthode cartographique ou volumétrique

C'est la méthode la plus intuitive pour déterminer le bilan de masse d'un glacier, toutes les autres étant liées en quelque sorte à celle-ci. Elle consiste à directement évaluer par comparaison de deux modèles numériques de terrain à deux époques différentes la variation du volume du glacier, laquelle est ensuite traduite en variation de masse par application des masses volumiques correspondantes pour la glace, la neige ou le névé. Les modèles numériques sont déduits des photos aériennes ou des cartes topographiques. Dans le cas du LGGE il s'agit en général de restitutions photogrammétriques à partir des clichés IGN. Le bilan spécifique est obtenu par division par la surface totale du glacier, qui est également estimée à partir des cartes ou des photos.
Cette méthode présente plusieurs désavantages : elle est coûteuse, souvent difficile à réaliser et souvent peu précise. Même si la précision sur les modèles numériques de terrain s'est beaucoup améliorée récemment, l'erreur due à la traduction de la glace, la neige et le névé en mètres equ. eau reste importante. Dans le cas du glacier de Sarennes (France), il a été par exemple montré que l'erreur due à la masse volumique constitue un tiers de l'erreur totale sur le bilan de masse volumique des derniers 50 ans (Thibert et al., 2007). En général cette méthode est n'est utilisée que tous les 5 ou 10 ans pour valider d'autres méthodes.

Néanmoins cette méthode a gagné de l'importance avec l'utilisation des techniques satellitaires. Les images optiques haute résolution permettent sous certaines conditions de mesurer les variations d'épaisseur d'une manière facile et précise. Dans les Alpes cette méthode a par exemple été appliqué à la Mer de Glace à Chamonix (Berthier, 2005).

### 3.1.2. La méthode directe ou glaciologique

C'est la méthode habituellement utilisée pour déterminer le bilan de masse des glaciers. Elle consiste à évaluer le bilan en zone d'accumulation et en zone d'ablation.
Le bilan de masse $B$ global sur tout le glacier s'écrit :

$$B = \int_{\text{glacier}} b \cdot dS, \tag{3.1}$$

où $b$ est le bilan de la surface $dS$. Dans la pratique, on effectue des mesures en un certain nombre $n$ de points sur le glacier, l'expression pour le bilan devient alors :

$$B = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \Delta S_i, \tag{3.2}$$

où $b_i$ est le bilan considéré comme représentatif de l'élément de surface $\Delta S_i$, ramené - grâce à des mesures de densité - à une valeur équivalente en eau.
Ainsi, un ensemble de mesures de bilan $b_i$ est réalisé en plusieurs points sur le glacier. La répartition des points dépend de la taille et la géométrie du glacier, mais aussi de l'accessibilité des zones sur le glacier.
Pour évaluer le bilan annuel $B$ du glacier, une seule campagne de mesures annuelles à la fin de l'année hydrologique (c'est-à-dire à la fin de la saison d'ablation) suffirait en théorie. Mais pour accéder séparément aux bilans estival et hivernal (respectivement ablation et accumulation), il est indispensable de faire également des mesures à la fin de l'hiver, avant le début de la saison d'ablation.

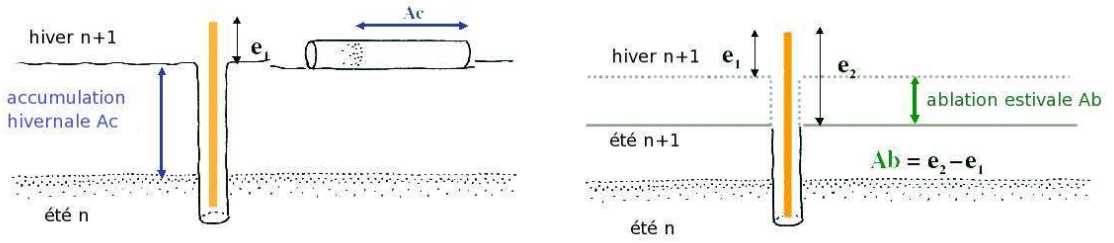
## 3.2. Description des mesures du LGGE

### 3.2.1. Bilan hivernal, estival et annuel

Les mesures sont réalisées à la fin de la saison d'accumulation, généralement en avril ou mai, et à la fin de la saison d'ablation généralement en septembre.

#### En zone d'accumulation

Dans cette partie du glacier on détermine le bilan hivernal à la fin de la saison d'accumulation en plusieurs points par mesure de la hauteur d'une carotte de neige (Fig. 3.5(c)) forée jusqu'à la couche de l'été précédent (Fig. 3.1(a)) puisque le glacier est recouvert par de la neige. La couche d'été se repère par la présence d'une couche un peu plus sombre matérialisée par des poussières concentrées au cours de l'été précédent mais aussi par




(a) bilan hivernal = accumulation hivernale = Ac (b) bilan estival = ablation estivale = Ab = $e_2 - e_1$

FIG. 3.1.: Mesure du bilan hivernal et estival en zone d'accumulation.
`Measurement of winter and summer mass balances in the accumulation zone.`

une augmentation de la taille des grains souvent associée à une augmentation de dureté. Pour convertir la hauteur de neige en équivalent eau, il est nécessaire de mesurer le profil de densité de la neige le long de la carotte. Ce profil est déterminé en coupant la carotte en cylindres qui sont ensuite pesés (Figure 3.5(a)).
Des balises en bois (de couleur orange sur la Figure 3.1, voir aussi les Photos 3.2) sont ensuite placées dans les trous des forages. On mesure une première émergence $e_1$ par rapport à la surface. Les balises restent ancrées dans la neige tout au long de la fonte de la partie supérieure du manteau neigeux durant l'été. La fonte estivale se déduit ensuite directement à l'aide de la différence d'émergence $e_1 - e_2$ ($e_2$ étant mesurée à la fin de la période d'ablation), Fig. 3.1(b).
Le bilan annuel n'est pas mesuré, mais calculé comme l'addition du bilan hivernal et du bilan estival (négatif en l'occurrence).

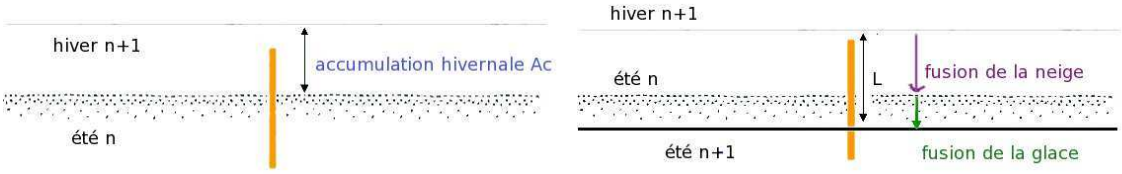
(a) Implantation d'une balise en bois.
`Set up of a wooden stake.`

(b) Relevé d'émergence.
`Emergence measurement.`

FIG. 3.2.: Mesures à l'aide des balises. `Measurements from wooden stakes.`

### En zone d'ablation

Pour les mesures du bilan hivernal on procède de la même manière que dans la zone d'accumulation par carottage car même en zone d'ablation le glacier est recouvert de neige à la fin de la saison d'accumulation (Figure 3.3(a), la carotte n'est pas présentée). La couche d'été se repère d'autant plus facilement que la transition se fait ici entre la glace vive sous-jacente et la neige (Figure 3.5(b)). Souvent un simple sondage est alors suffisant à la place d'un carottage.




(a) bilan hivernal Ac (b) bilan estival L

FIG. 3.3.: Mesure du bilan hivernal et estival en zone d'ablation.
`Measurement of winter and summer mass balances in the ablation zone.`

Des balises d'ablation sont ancrées dans la glace à la fin de la saison d'ablation à l'aide d'une sonde à vapeur (Fig. 3.5(d)) et ensuite remplacées tous les 1 à 4 ans en fonction de la valeur de l'ablation. Au LGGE ces balises sont constituées d'un train de cinq segments en bois de 2 m de long de différentes couleurs, reliés entre eux. Lorsque l'ablation approche la dizaine de mètre, la balise est sur le point de se déchausser et doit alors être remplacée. Le bilan annuel est obtenu simplement à l'aide de la différence entre l'émergence en automne de l'année en cours et celle de l'automne de l'année précédente. Le bilan estival (hauteur $L$ sur la Figure 3.3(b)) est calculé comme la différence entre le bilan annuel et le bilan hivernal. Il correspond à l'ensemble de la fonte de la couche de neige de l'hiver (partie *fusion de la neige* sur la Figure 3.3(b)) ajoutée à celle d'une certaine hauteur de glace pendant l'été (partie *fusion de la glace* sur la Figure 3.3(b)).

### Résumé

Toutes ces mesures sont illustrés sur la Figure 3.4 sur laquelle figurent les différentes méthodes de mesure (carottage ou lecture d'émergence) et les différentes périodes de mesures (soit en septembre après la saison d'été, soit en mai après la saison d'hiver).

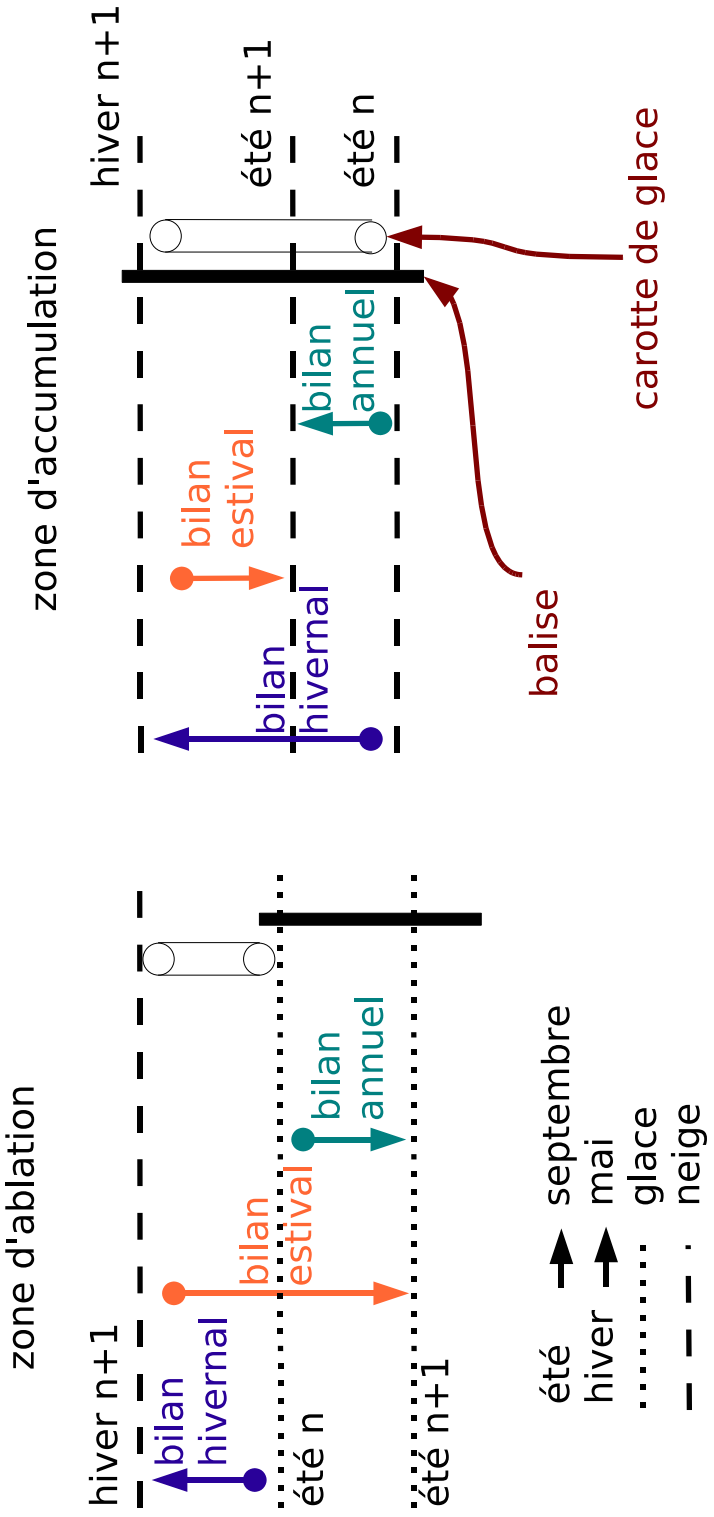



FIG. 3.4.: Synthèse des mesures de bilan.
`Summary of mass balance measurements.`

(a) Mesure de densité. Density measurement.

(b) Transition neige - glace dans une carotte soulignée par les poussières.
Snow - ice transition featured by dust concentration in a core.

(c) Carottage de surface au printemps en zone d'accumulation.
Shallow cores in spring in the accumulation zone.

(d) Implantation d'une balise en zone d'ablation avec une sonde à vapeur en automne.
Set up of a wooden stake with a steam probe in the ablation zone in autumn.

(e) Mesures topographiques à l'aide d'un GPS différentiel.
Topographic measurements with a differential GPS.

FIG. 3.5.: Photos des campagnes de mesure. Pictures of the field operations.

### 3.2.2. Calcul de la répartition spatiale du bilan de masse à partir d'un nombre limité de points de mesures

Les mesures de bilan sur un glacier sont forcément limitées à un certain nombre de points de mesures, lequel nombre est un compromis entre la finesse de la représentation spatiale désirée et les possibilités de mesure (moyens en temps, en personnel et restrictions d'accès sur certaines zones comme des zones très crevassées ou exposées aux chutes de séracs ou encore aux avalanches).
Cependant, le forçage d'un modèle requiert des données sur une grille régulière couvrant l'ensemble de la surface couverte par le glacier. Le calcul du bilan global du glacier nécessite aussi de connaître le bilan sur toute la surface du glacier. Cela suppose donc un travail d'échantillonnage des données disponibles aux sites de mesures.
Le choix d'un nombre limité de points de mesure, sensés chacun représenter une petite zone du glacier, pose le problème de la représentativité de ces points. Est-ce que le bilan mesuré à une certaine balise est vraiment représentatif de toute une région ? On sait en effet que, suivant l'orientation et la nature de la surface, la présence ou non d'une couverture de débris rocheux, la redistribution de la neige par le vent, la forte variabilité spatiale de la fonte, le bilan de masse peut varier de manière significative à l'intérieur même d'une de ces zones. La répartition des points de mesure essaie, dans la mesure du possible, de rendre compte au mieux de ces variations du bilan selon des plages d'altitude et d'orientation, sinon un réseau de balises plus dense est nécessaire.
Concrètement, pour les glaciers suivis par le LGGE, les sites de mesure sont essentiellement d'origine historique. Comme critère de choix on peut citer essentiellement l'accessibilité des sites de mesures. Plus tard, le réseau a été étendu avec l'idée d'obtenir un réseau de balises à peu près équidistantes.

Au LGGE les mesures de bilan issues de la méthode volumétrique sont utilisées additionnellement pour mieux caler les mesures de la méthode glaciologique.

#### Le modèle linéaire

On utilise au LGGE le *modèle linéaire de variation de bilan* (proposé par Lliboutry (1974)), basé sur un traitement statistique. Ce traitement permet de compléter une base de donnés incomplète lorsque, suivant les années, certaines mesures n'ont pu être effectuées en différents points du glacier (problèmes d'accès, balises recouvertes de neige ou déchaussées).
Différentes études montrent que le bilan varie à peu près de manière uniforme sur tout le glacier d'une année à l'autre. Les variations du bilan peuvent alors s'exprimer sous la forme de la superposition d'un terme uniquement dépendant de la position (résultant des effets de la géométrie du glacier) et d'une fluctuation en temps (uniforme sur l'ensemble du glacier). Autrement dit, le gradient spatial du bilan est indépendant du temps. Ceci est confirmé par la Figure 3.6, où le bilan annuel est représenté pour quelques années en fonction de la distance du point de mesure au col de Quirlies (Glacier de Saint Sorlin). Le gradient spatial est quasiment inchangé (courbes quasiment parallèles) dans la fourchette

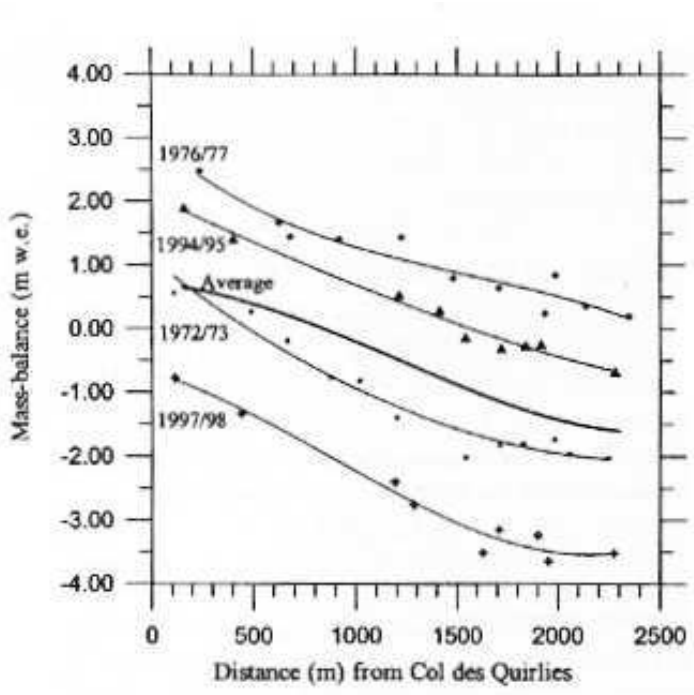



FIG. 3.6.: Bilan de masse annuel en fonction de la distance au Col des Quirlies (glacier de Saint Sorlin, France), d'après Vincent et al. (2000).
`Annual mass balance as a function of the distance to the Col des Quirlies (Saint Sorlin Glacier, France), from Vincent et al. (2000).`

des incertitudes de mesure.
L'étude de Lliboutry (1974) sur le glacier de Saint Sorlin montre que le bilan $b_{i,t}$ d'un site de mesure $i$ à l'instant $t$ s'exprime par :

$$b_{i,t} = \alpha_i + \beta_t + \epsilon_{i,t}, \tag{3.3}$$

où $\alpha_i$ est un paramètre spécifique au lieu $i$, indépendant de $t$, qui tient alors compte des caractéristiques géographiques telles que l'altitude ou l'exposition. $\beta_t$ quant à lui, est un paramètre purement temporel, indépendant de $i$, qui tient compte des facteurs météorologiques et enfin $\epsilon_{i,t}$ est un terme d'erreur.
Sur une période donnée, $\alpha_i$ correspond à la moyenne du bilan pour le site de mesure $i$ sur l'ensemble de cette période de mesure $T$

$$\alpha_i = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} b_{i,t}. \tag{3.4}$$

Le terme $\beta_t$ est l'écart entre le bilan de l'année $t$ et la moyenne du bilan sur la période considérée. On peut l'obtenir en calculant, sur l'ensemble des sites de mesures, la moyenne des différences entre la valeur mesurée et le terme $\alpha_i$

$$\beta_t = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} (b_{i,t} - \alpha_i). \tag{3.5}$$

Il est centré sur la période des mesures $T$, sa moyenne est alors nulle

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_t = 0. \tag{3.6}$$

Le modèle linéaire permet ainsi d'obtenir les variations temporelles du bilan ($\beta_t$) en faisant l'hypothèse que ces variations temporelles sont identiques sur l'ensemble du glacier. Le bilan global du glacier sur la période considérée est obtenu indépendemment par une méthode volumétrique (comparaison des modèles numériques de terrain) à l'aide de techniques photogrammétriques ou topographiques. Il suffit alors d'ajouter, à chaque valeur de $\beta_t$, la valeur du bilan annuel moyen, pour obtenir le bilan annuel du glacier de chacune des années.
Les résidus $\epsilon_{i,t}$ donnent l'écart entre le modèle et la réalité. Si $\epsilon_{i,t}$ est de l'ordre de précision de mesure, le modèle est acceptable.

### Échantillonnage des points de mesure

Dans le modèle linéaire, la surface du glacier est représentée par une grille avec des mailles de 200 m x 200 m.
A chaque campagne de mesure il y a trois cas possible pour chaque maille :
- Il y a exactement une mesure dans cette maille. Cela peut arriver dans différents cas, soit il n'y a qu'un seul point de mesure dans cette maille, soit plusieurs points de mesures existent dans la maille, mais un seul a pu être mesuré. La valeur de cette mesure est prise comme valeur pour cette maille.
- Il y a plusieurs mesures effectuées dans cette maille. La simple moyenne arithmétique de cette valeur est prise comme valeur pour cette maille.
- Il n'y a pas de mesure effectuée dans cette maille. S'il n'y a jamais eu de mesure dans cette maille qu'elle que soit la période, elle n'est pas exploitable. S'il y a eu des mesures à d'autres époques, la valeur pour cette maille peut être récupérée comme décrit ci-dessous à l'aide du modèle linéaire.

### Calcul des valeurs du bilan de masse en chaque site de mesure $i$, à l'année $t$

Dans un premier temps les coefficients $\alpha_i$ et $\beta_t$ sont calculés. Pour cela l'équation $b_{i,t} = \alpha_i + \beta_t$ est considérée en tous les points de mesures $i$ et à tous les temps $t$ où $b_{i,t}$ est connu. Cela amène à un système de $n$ équations (avec $n$ le nombre total de mesures disponibles) à $n_i + n_t$ inconnues ($n_i$ étant le nombre de sites et $n_t$ le nombre d'années). Ce système

est en général surdéterminé et peut être résolu avec différentes méthodes statistiques proposées par Lliboutry (1974), mais aussi par une simple méthode des moindre carrés. Dans un deuxième temps toutes les valeurs $b_{i,t}$ manquantes sont calculées selon $b_{i,t} = \alpha_i + \beta_t$ à partir des $\alpha_i$ et $\beta_t$ et les valeurs pour chacune des mailles correspondantes ainsi reconstituées.
En fonction des besoins des différentes applications (ex. du modèle glaciologique d'écoulement sur une maille de 50 m x 50 m), les valeurs à 200 m de résolution peuvent être ultérieurement interpolées.

La Figure 3.7 montre le bilan de masse moyenné sur les dernières 50 années (donc la distribution des $\alpha_i$), ainsi qu'à titre d'exemple les points de mesures de 2004 (uniquement les points en zone d'ablation).

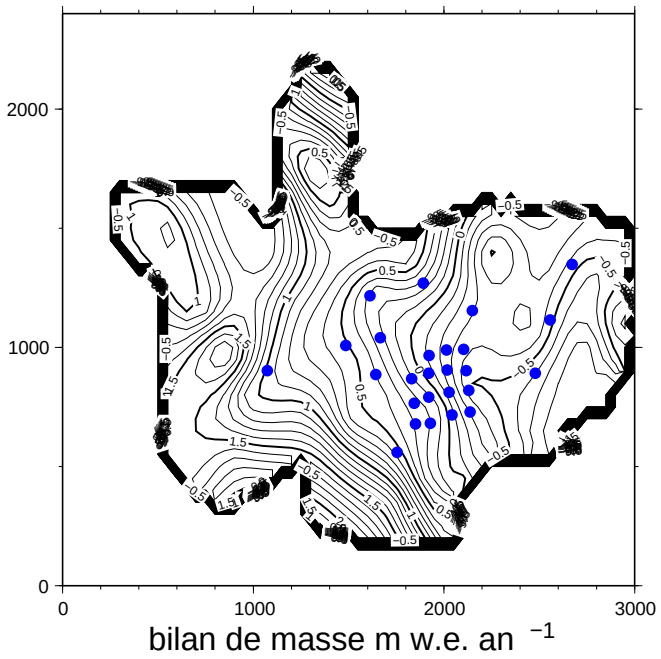



FIG. 3.7.: Bilan de masse moyen des 50 dernières années ainsi que les points de mesures en 2004 (uniquement ceux en zone d'ablation), glacier de Saint Sorlin (France).
`Average masse balance field over the last 50 years and the measurement points in 2004 (only the ones in the ablation zone), Saint Sorlin Glacier (France).`

# 4. Donnés exploitées

Dans ce travail les données suivantes du glacier de Saint Sorlin ont été utilisées :

- Données de la topographie du socle rocheux sur une grille de 50 m :
  Ces données sont issues de plusieurs méthodes comme les mesures sismiques, les forages et la gravimétrie, plus de détails peuvent être trouvés dans Le Meur et Vincent (2003). On estime l'erreur à $\pm 5$ m dans les zones qui sont bien couvertes et jusqu'à 20-30 m dans les zones éloignées des points de mesures. L'interpolation à 50 m présente certainement un lissage ; néanmoins cela n'est pas forcement un désavantage pour utiliser ces données comme entrée dans un modèle, par exemple pour une bonne utilisation de l'approximation de la couche mince (cf. Partie III).
- Données de la topographie de la surface glaciaire en 1905 et en 1998 :
  Les données de la surface de 1998 ont été obtenues par photogrammétrie. Celles de 1905 proviennent d'une ancienne carte à l'échelle 1:10.000 (Eaux & Forêts).
- Données de bilan de masse de 1905 à 2004 :
  Les données depuis 1957 sont issues de mesures avec des balises traditionnelles ; quant aux données antérieures, il s'agit d'une reconstruction à l'aide de données météorologiques.
- Positions du front :
  La position du front a été reconstruite depuis 1905 soit à l'aide de cartes (Eaux & Forêts en 1905, IGN en 1952), soit à partir des mesures effectuées par les Eaux & Forêts et plus récemment par le LGGE. La position du front du glacier de Saint Sorlin correspond à une position moyenne. Il s'agit de la surface englacée en aval d'une ligne virtuelle perpendiculaire à l'écoulement de la glace dans la partie basse du glacier divisée par la longueur de cette même ligne.
- Vitesses en surface.

Les données de la position du front et les vitesses en surface servent pour l'instant uniquement à comparer les résultats des modèles avec la réalité, mais elles pourraient être utilisées par la suite pour mieux contraindre les paramètres mécaniques (déformation ou glissement) par méthode inverse.

Troisième partie .

# Modélisation de l'écoulement des glaciers

Cette partie est une partie relativement théorique.

⇝ Dans le premier chapitre les bases de la dynamique glaciaire ainsi que les notations utilisées dans la suite sont introduites.
⇝ Le deuxième chapitre détaille l'approximation de la couche mince, d'abord le développement rigoureux, puis les résultats détaillés pour l'ordre zéro.
⇝ Le troisième et dernier chapitre est un inventaire des modèles utilisés à l'heure actuelle et leurs prédécesseurs.

# 1. Dynamique glaciaire

## 1.1. Référentiel et notations utilisés

Les équations sont exprimées dans un repère cartésien $x, y, z$ ($x$ et $y$ les coordonnées horizontales, $z$ la coordonnée verticale dirigée vers le haut avec l'origine au niveau de la mer). $u, v$ et $w$ désignent les trois composantes de la vitesse. Alternativement les notations $x_i$ et $u_i$ ou $\vec{x}$ et $\vec{v}$ seront utilisées quelque-fois avec $i = 1 \dots 3$.
Tous les modèles utilisés dans cette thèse utilisent une géométrie en deux ($x = r, z$) ou trois $(x, y, z)$ dimensions.
Tous les variables du modèle sont eulériennes, c'est-à-dire que la vitesse est celle d'une particule passant au point $(x, y, z)$ au temps $t$.
La Figure 1.1 récapitule les diverses notations $x, y, z, S, B$ et $H$. On remarque que la surface est donnée par $z = S$ et le socle par $z = B$. $S$ et $B$ sont des altitudes et peuvent dépendre du temps. $H = S - B$ est l'épaisseur de glace.

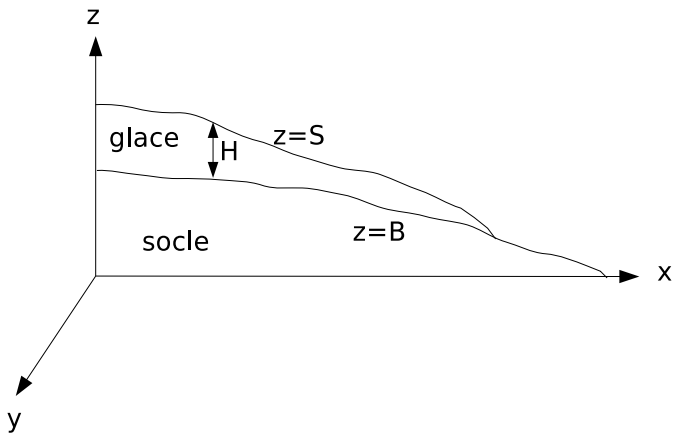



FIG. 1.1.: Référentiel et notations utilisés. `Coordinate system and notations.`

A la place de la coordonnée $z$, une coordonnée réduite est souvent utilisée : $\xi = \frac{S-z}{H}$, avec $\xi = 0$ en surface et $\xi = 1$ à la base du glacier. Elle est souvent plus commode pour discrétiser l'épaisseur de glace et permet de toujours faire coïncider les limites de la glace (surface et socle) avec un nœud de grille que ce soit spatialement ou lors des variations d'épaisseurs au cours du temps.

### Coordonnées réduites

En coordonnées réduites les formules suivantes sont valables pour les dérivées, $f$ étant une variable 3D quelconque (Haltiner et Wilians, 1980) :

$$
\begin{aligned}
z &= S - \xi H, && (1.1)\\
\frac{df}{d\xi} &= -H\frac{df}{dz}, && (1.2)\\
\frac{df}{dz} &= -\frac{1}{H}\frac{df}{d\xi}, && (1.3)\\
\frac{d^2f}{dz^2} &= -\frac{1}{H^2}\frac{d^2f}{d\xi^2}, && (1.4)\\
\frac{\partial f}{\partial x}|_z &= \frac{\partial f}{\partial x}|_\xi + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}|_\xi + \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \xi\frac{\partial H}{\partial x}\right), && (1.5)\\
\frac{\partial f}{\partial y}|_z &= \frac{\partial f}{\partial y}|_\xi + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\\
&= \frac{\partial f}{\partial y}|_\xi + \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \xi\frac{\partial H}{\partial y}\right). && (1.6)
\end{aligned}
$$

### La couche de névé en surface

On considère ici, en première approximation, que la glace a la même densité sur toute l'épaisseur de glace ; ceci est réaliste dans le cas de la glace pure, mais pas dans le cas du névé, qui a une densité très variable. On remplace donc la couche de névé - de densité inférieure à celle de la glace - par une couche de glace de poids équivalent. $H$ est alors une hauteur de glace qui comprend la hauteur réelle de glace et la hauteur de neige ou névé converti en hauteur de glace, on parle de "$m$ de glace" à la place de "$m$ réels". Cette approximation a pour beaucoup de glaciers très peu d'influence sur l'écoulement car d'une part celui ci est dû à la gravité qui dépend essentiellement du poids total de la colonne de glace au dessus du point concerné, d'autre part la déformation est concentrée au fond du glacier où la densité est constante.

## 1.2. Bilan de masse et fusion basale

Le bilan de masse en surface $a$ est donné en m w.e. par an et est converti en hauteur de glace à l'aide du rapport entre la densité de la glace et celle de l'eau.
*Valeurs utilisées : $\rho_i$ =880 kg m$^3$ pour la glace (Lliboutry, 1965) et $\rho_w$ =1000 kg m$^3$ pour l'eau.*
Dans le cas des glaciers de montagne isothermes, la fusion basale $f$ (sources de chaleur provenant du flux géothermique et du frottement) est souvent négligée devant le bilan de masse en surface. Globalement on considère que la contribution du frottement est

du même ordre que celle du flux géothermique et ce dernier (cf. application numérique ci-dessous) induit une fusion basale de l'ordre de quelques centimètres par an, donc tout à fait de l'ordre des incertitudes sur le bilan de masse.

Application numérique :

L'énergie apporté pendant un an par un flux géothermique typique de $\phi = 60\,\mathrm{mW\,m^{-2}}$ sur une surface $S$ suffit à faire fondre un petit volume de glace de masse $M$, de surface $S$, de hauteur $h$, de densité $\rho = 0.88\,\mathrm{kg\,l^{-1}}$ et dont la chaleur latente est de $L = 332.5\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot \phi \cdot S &= L \cdot M = L \cdot \rho S h, \\ h &= \frac{\Delta t \cdot \phi}{L \cdot \rho}, \\ h &= 1\,cm. \end{aligned}$$

D'une façon plus stricte, il faudrait remplacer $a$ par $a - f$ dans la plupart des équations qui suivent. $f$ sera négligée dans la suite de cette thèse.

## 1.3. Conservation de la masse

### 1.3.1. L'incompressibilité

Avec l'approximation d'une densité constante sur toute l'épaisseur de glace, la glace est alors considérée comme incompressible.
Appliqué à un volume de glace, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\vec{\nabla}\left(\rho \vec{v}\right), \\ \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{v} &= 0, \\ \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

### 1.3.2. L'équation de continuité

La conservation de la masse appliquée à une colonne de glace est obtenue en intégrant l'Equation (1.7) depuis la surface ($z = S$) jusqu'au socle. Il faut tenir compte du fait que les bornes de l'intégration $S$ et $B$ sont fonction de $x$ et $y$ et appliquer alors l'Equation (1.8) pour permuter somme et dérivée :

$$\int_a^b \frac{\partial f(p)}{\partial q} dp = \frac{\partial}{\partial q} \int_a^b f(p) dp - \frac{\partial b}{\partial q} f(b) - \frac{\partial a}{\partial q} f(a). \tag{1.8}$$

Les conditions aux limites pour la vitesse verticale $w$ sont données par les équations suivantes. Elles se composent des variations temporelles de la surface et du socle (en y incluant le bilan de masse et en principe la fusion basale) ainsi que des vitesses induites

par les déplacements horizontaux (Fig. 1.2) :

$$\text{à la surface } z = S: \quad w(S) = -a + \frac{\partial S}{\partial t} + u(S)\frac{\partial S}{\partial x} + v(S)\frac{\partial S}{\partial y}, \tag{1.9}$$

$$\text{au socle } z = B: \quad w(B) = \frac{\partial B}{\partial t} + u(B)\frac{\partial B}{\partial x} + v(B)\frac{\partial B}{\partial y}. \tag{1.10}$$

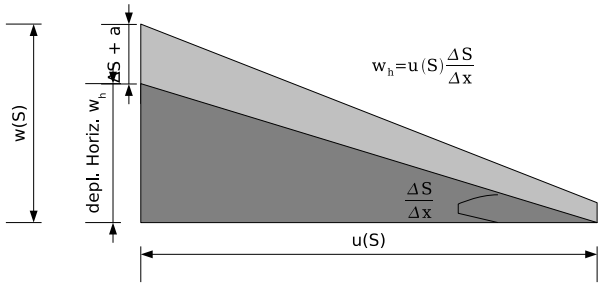



FIG. 1.2.: Conditions aux limites pour les vitesses.
`Boundary conditions for velocities.`

On obtient finalement l'équation d'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps pour une colonne donnée, souvent appelée équation de conservation de la masse ou de continuité. Tout ce qui arrive en terme de masse, par accumulation sur le glacier, doit être évacué par la fonte et l'écoulement de la glace ou se traduire par des variations d'épaisseur.

L'intégration sur l'épaisseur de l'incompressibilité (Equation (1.7)) donne donc :

$$\begin{aligned}
\int_S^B \vec{\nabla}\vec{v}\,dz &= 0,\\
\int_S^B \frac{\partial u(z)}{\partial x}dz + \int_S^B \frac{\partial v(z)}{\partial y}dz + \int_S^B \frac{\partial w(z)}{\partial z}dz &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}\int_S^B u(z)dz - \frac{\partial B}{\partial x}u(B) - \frac{\partial S}{\partial x}u(S) + & \\
\frac{\partial}{\partial y}\int_S^B v(z)dz - \frac{\partial B}{\partial y}v(B) - \frac{\partial S}{\partial y}v(S) + & \\
w(B) - w(S) &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}\int_S^B u(z)dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_S^B v(z)dz - a + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

L'enfoncement isostatique du socle $\frac{\partial B}{\partial t}$, dont l'échelle de temps est de l'ordre de quelques milliers d'années, est négligé dans le cas des glaciers de montagne traités ici.

Avec la définition du flux horizontal[1] $\vec{q} = \int_B^S \vec{v}_H dz$ on obtient alors l'équation de continuité sous la forme suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \vec{\nabla}\vec{q}. \tag{1.12}$$

## 1.4. Contraintes et déformation

L'Equation (1.12) tient compte du bilan de masse et de l'écoulement. Il faut donc être capable de calculer celui-ci, et pour cela prendre en compte plusieurs mécanismes :
- La loi de comportement reliant les contraintes aux vitesses de déformation.
- L'influence de la température de la glace sur la viscosité et donc sur l'écoulement : ceci ne sert pas dans le cas des glaciers de montagne considérés comme isothermes.
- Une loi de glissement.

### 1.4.1. Les contraintes

Le tenseur de contraintes $\bar{\tau}$ s'écrit $\tau_{ij}$ où $i$ est la direction de projection de la contrainte et $j$ la direction de la normale à la surface sur laquelle s'exerce la contrainte. Ce tenseur est symétrique $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Lorsque $i = j$ on remplace $\tau_{ii}$ par $\sigma_i$ (positif pour les tractions). Le déviateur des contraintes s'écrit :

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} + \delta_{ij} P, \tag{1.13}$$

où $P$ représente la pression moyenne ($P = -\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$) et $\delta$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ quand $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ sinon). Comme dans l'écriture des contraintes, $\tau'_{ii}$ sera remplacée par $\sigma'_i$.
On définit également un terme utilisé ultérieurement dans la loi de comportement, la cission efficace $\tau_0$ :

$$\tau_0^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\tau'_{ij})^2 = \frac{1}{2}(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z) + \tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{xz}. \tag{1.14}$$

### 1.4.2. La déformation

Le tenseur des taux de déformation $\bar{\dot{\epsilon}}$ s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.15}$$

Son deuxième invariant s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_\star = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\dot{\epsilon}_{ij}\right)^2. \tag{1.16}$$

[1] $\vec{v}_H$ désigne la vitesse horizontale.

### 1.4.3. Les équations d'équilibre quasi-statique

Les forces de surface appliquées à un cube élémentaire de glace sont schématisées sur la Figure 1.3 ; sur chaque face du cube à l'intérieur du glacier s'appliquent deux contraintes tangentielles de cisaillement et une contrainte normale d'étirement. Le poids exerce une force verticale $\rho g$ orientée vers le bas.

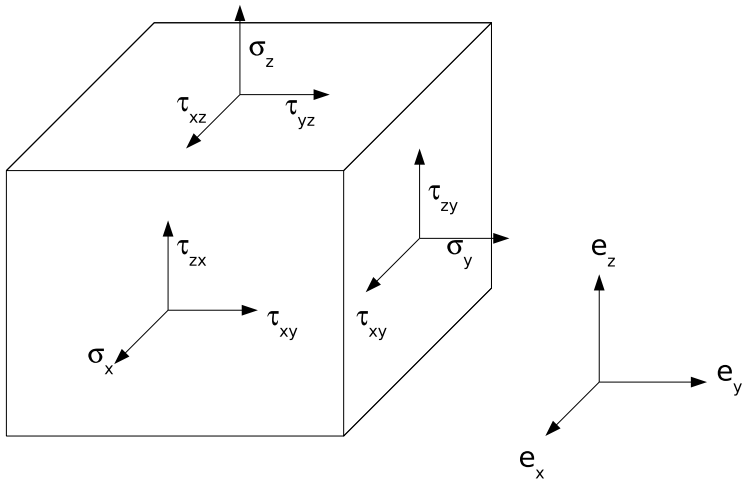



FIG. 1.3.: Composantes du tenseur des contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube élémentaire.
`Components of the stress tensor applied to the faces of an elementary cube.`

L'équilibre de toutes les forces appliquées au cube donne le système d'équations suivant (les équations de l'équilibre quasi-statique ou les équations de Stokes) :

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} & = & \rho g \end{array}\right), \tag{1.17}$$

ou exprimé avec les grandeurs déviatoriques :

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} & = & \rho g \end{array}\right). \tag{1.18}$$

Les accélérations sont négligées du fait de l'hypothèse de l'équilibre quasi-statique.
Les différents modèles d'écoulement de glace se distinguent fondamentalement par la résolution de ce système d'équations : Les modèles *Full Stokes* ou *Stokes complet* utilisent directement ce système d'équations, les autres utilisent différentes approximations, notamment l'approximation de la couche mince (voir Chapitre 2) ou des versions intermédiaires. Cela sera détaillé dans le Chapitre 3.

### 1.4.4. La loi de comportement

La déformation de la glace polycristalline est un processus complexe. Il est donc nécessaire de déterminer une loi de comportement reliant la déformation de la glace aux contraintes subies. Habituellement pour la glace une loi visqueuse non linéaire est utilisée :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A(T)\tau_0^{n-1}\tau'_{ij} = \frac{1}{2\eta(T)}\tau'_{ij}, \tag{1.19}$$

où $\eta$ est la viscosité qui dépend de la cission efficace $\tau_0$, et $A$ est le coefficient de Glen, l'inverse d'une viscosité.
En général on prend l'exposant $n = 3$ (ce qui pour les glaciologues caractérise la loi dite *de Glen* (Glen, 1955)). Plus rarement on utilisera le cas d'une loi linéaire (Loi de Newton, $n = 1$).
Dans le cas d'un glacier isotherme la dépendance de $\eta$ ou de $A$ avec la température n'intervient pas (valeur utilisé : $A = 1.3 \times 10^{-24}\,\mathrm{Pa}^{-3}\,\mathrm{a}^{-1}$).
La viscosité $\eta$ est aussi souvent exprimée en fonction du deuxième invariant du tenseur des taux des déformations $\dot{\epsilon}_\star$ à la place de celui des contraintes déviatoriques (la cission efficace $\tau_0$) :

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{2}A(T)^{-1}\tau_0^{-(n-1)}, && (1.20)\\
\tau_0 &= \frac{1}{2}\sum_{ij}(\tau'_{ij})^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(2\eta\dot{\epsilon}_{ij})^2 \\
&= 2\eta\dot{\epsilon}_\star, \\
&\rightarrow \quad \eta = \frac{1}{2}A(T)^{-1}(2\eta\dot{\epsilon}_\star)^{1-n}, \\
&\rightarrow \quad \eta = \frac{1}{2}A(T)^{-1/n}\dot{\epsilon}_\star^{\frac{1-n}{n}}. && (1.21)
\end{aligned}$$

## 1.5. Conditions aux limites pour les contraintes et les vitesses

### 1.5.1. Conditions en surface

La surface est une surface libre, supposée n'être soumise à aucune contrainte, la pression atmosphérique et le frottement du vent à la surface étant négligés. Ceci se traduit par

deux équations pour la contrainte tangentielle, qui est nulle, et pour la contrainte normale, qui est égale à la pression atmosphérique $p_{atm}$ (en général consiérée comme nulle).

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_s + p_{atm}\vec{n}_s \approx \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_s = 0 \text{ en surface,} \tag{1.22}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{t}_s = 0 \text{ en surface,} \tag{1.23}$$

avec $\vec{n}_s$ et $\vec{t}_s$ les vecteurs unité normal et tangentiel en un point de la surface.
Avec $\vec{n}_s = \frac{1}{||n_s||}(-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, 1)$ on obtient pour la condition normale

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} -\frac{\partial S}{\partial x}\sigma'_x & - & \frac{\partial S}{\partial y}\tau'_{xy} & + & \tau'_{xz} & + & \frac{\partial S}{\partial x}P & = & 0 \\ -\frac{\partial S}{\partial x}\tau'_{xy} & - & \frac{\partial S}{\partial y}\sigma'_y & + & \tau'_{yz} & + & \frac{\partial S}{\partial y}P & = & 0 \\ -\frac{\partial S}{\partial x}\tau'_{xz} & - & \frac{\partial S}{\partial y}\tau'_{yz} & + & \sigma'_z & - & P & = & 0 \end{array}\right\} \text{ en surface.} \tag{1.24}$$

### 1.5.2. Conditions au fond

La loi de glissement est la relation entre les contraintes à l'interface glace - socle ($\vec{\tau}_b$ la contrainte tangentielle, souvent approximée par la contrainte de cisaillement à la base) et la vitesse de glissement[2] ($\vec{v}_b$). Les caractéristiques du socle vont intervenir et particulièrement son relief. On considère en général que lorsque la base est en dessous du point de fusion, il ne peut pas y avoir de glissement car les irrégularités du socle sont ancrées dans la glace et empêchent le glacier de déraper. Lliboutry (1987a,b) étend ceci au cas où seule la base est tempérée. En effet, la température croit avec la profondeur, la base n'est souvent tempérée que dans les creux, les bosses elles, sont toujours ancrées dans la glace froide. Le glissement ne peut donc apparaître que si une couche de glace basale d'épaisseur comparable à la taille du relief est tempérée.
Dans ce travail qui porte sur des glaciers isothermes, donc avec glissement, une loi de type Weertmann (Weertman, 1964; Paterson, 1994) sera utilisée :

$$\vec{v}_b = A_s \frac{\vec{\tau}_b^{\,p}}{H^q}, \tag{1.25}$$

$(p, q) = (1, 0)$ et $(p, q) = (3, 1)$ seront utilisés dans le présent travail.
Comme autre processus ayant des conséquences sur les conditions au fond, on peut citer les déformations du socle si celui-ci consiste par exemple en des sédiments gorgés d'eau. Ce cas ne sera pas étudié ici.

### 1.5.3. Conditions sur le bord

Plusieurs cas peuvent exister. Dans notre cas la glace se termine sur la terre ferme. La condition dépend essentiellement de la topographie du socle : surface libre dans le cas d'une falaise, vitesse nulle si la glace est arrêtée par une montagne.

[2] La vitesse de glissement $\vec{v}_b$ n'a que les composantes $u_b$ et $v_b$.

## 1.6. Champs de vitesse

En introduisant la loi de déformation (1.15) dans les équations d'équilibre quasi-statique (1.18), on obtient un système d'équations reliant les vitesses dans les 3 directions et la pression. Ces équations, plus l'équation d'incompressibilité (1.7) forment un système de quatre équations à quatre inconnues. Nous verrons plus tard comment ces équations sont résolues dans les différents modèles.
Dans de nombreux modèles ce système est réduit à un système de trois équations à trois inconnues $(p, u, v)$ ; le champ de vitesses verticales est obtenu pour ces modèles d'une façon diagnostique par intégration à partir de l'équation de l'incompressibilité (1.7) :

$$w(z) = w_b - \int_B^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz, \tag{1.26}$$

ou $w_b$ est la vitesse verticale à la base du glacier donnée par l'Equation (1.10).

# 2. La Shallow Ice Approximation (SIA)

## 2.1. Introduction

La résolution du système complet des équations de Stokes est trop coûteuse pour des applications réalistes, en particulier l' évolution dans le temps des grandes calottes glaciaires sur de longues périodes. Il n'existe pas à ce jour de modèle résolvant les équations de Stokes complets pour les grandes calottes glaciaires.
La simplification la plus souvent utilisée est l'approximation de la couche mince (*Shallow Ice Approximation*, SIA) qui dérive du fait que les calottes glaciaires ont une épaisseur extrêmement faible par rapport à leurs dimensions horizontales. Elle présente aussi l'avantage de donner des formulations analytiques pour les vitesses (pour la glace isotherme). Initialement cette méthode a été largement utilisée dans les autres branches de la mécanique des fluides, entre autre dans le but de résoudre les équations *shallow water* dans la théorie des ondes de gravité de surface (Friedrichs, 1948; Keller, 1948) et dans la théorie des films liquides fins (Benney, 1996). Pour des couches de glace, cette méthode a été établie d'une manière rigoureuse par Hutter en 1983 (Hutter, 1983) et indépendamment par Morland en 1984 (Morland, 1984). Parallèlement, plusieurs approximations moins rigoureuses ou qui négligeaient à priori quelque termes ad-hoc dans les équations de Stokes arrivaient à peu près au même résultat. Ces approximations ad-hoc profitent elles aussi de la géométrie des calottes glaciaires : En raison d'une telle géométrie, pour une quantité quelconque, on peut négliger les dérivées horizontales par rapport à la dérivée verticale. C'est en particulier le cas pour les vitesses, ce qui permet ainsi de négliger quelques termes du tenseur du déviateur des contraintes.
Néanmoins l'approximation SIA n'est à priori pas valable pour un glacier de montagne avec une épaisseur du même ordre de grandeur que sa hauteur (à l'exception des glaciers de type cirque). A défaut de mieux elle est quand-même souvent utilisée, les limites de cette approche seront étudiées dans la Partie V.

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous introduisons le rapport d'aspect qui permet de simplifier le système des équations de Stokes. Ensuite un développement rigoureux de la SIA est présenté avant de terminer avec un calcul détaillé de l'ordre zéro.

## 2.2. Le rapport d'aspect

Lors de la simplification du système des équations de Stokes, certains termes sont négligés par rapport à d'autres. Pour faire cela rigoureusement, il est important d'estimer l'importance relative des différentes quantités physiques et leurs gradients. Pour cela, on

procède tout d'abord à une adimensionalisation et à un changement d'échelle de manière à ce que toutes les quantités varient entre 0 et 1. Pour les grandes calottes glaciaires, le rapport d'aspect se propose naturellement comme paramètre d'échelle ; il est petit car les calottes sont très minces. Ce rapport d'aspect est défini par le rapport entre une hauteur moyenne $[H]$ et une longueur représentative de l'étendue du glacier $[L]$,

$$\epsilon = \frac{[H]}{[L]}. \tag{2.1}$$

Ce changement de coordonnées est suivi par un développement en série de perturbation du rapport d'aspect. Le degré de développement de cette série de perturbation détermine la précision de l'approximation faite.
Néanmoins il faut insister sur le fait que ce développement - même poussé à un ordre élevé - ne peut pas être correct mathématiquement pour un $\epsilon$ dont l'ordre de grandeur est supérieur ou égal à l'unité.
Des valeurs caractéristiques de $\epsilon$ sont, pour l'Antarctique $10^{-3}$ et pour le Groenland $5 \times 10^{-3}$ (Paterson, 1994), le rapport d'aspect des glaciers de montagne peut par contre atteindre facilement des valeurs de l'ordre de $10^{-1}$ à 1, ce qui remet en question l'applicabilité de cette théorie dans un tel cas.

## 2.3. Développement rigoureux de la SIA

Le développement rigoureux de la SIA est publié dans Hutter (1983), Morland (1984), Greve (1997a) ou Baral, Hutter et Greve (2001).

Plusieurs étapes sont nécessaires pour le changement de coordonnées permettant le développement en série. Les différentes étapes sont résumés dans le Tableau 2.1 et détaillés dans les paragraphes suivants.

### 2.3.1. Équations sans unités

Le changement de coordonnées ne peut se faire que sur des équations sans dimension. Ceci se fait en divisant chacune des variables par une grandeur caractéristique. Différents choix sont possibles pour ces grandeurs caractéristiques. Par exemple les distances peuvent être adimensionalisées soit avec une distance horizontale soit avec une épaisseur typique, les contraintes avec la pression à la base, les vitesses et le bilan de masse avec des valeurs typiques de l'accumulation en surface,. . .. Ici, nous choisissons la hauteur de la calotte $[H]$, l'accumulation en surface $[V_H]$ et la pression normale à la base $[\tau] = \rho g[H]$. Les quantités sans dimension sont notées dans la suite avec un exposant $^\star$, les valeurs représentatives entre crochets $[.]$ : $A = [A]A^\star$.

| Variable | Grandeur caractéristique | Variable sans dimension | Ordre de grandeur des variables $A^\star$ | Variable réduite | Relation qui permet d'obtenir $\langle A\rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $[A]$ | $A^\star = \frac{1}{[A]}A$ | $\langle A\rangle = \frac{A^\star}{\breve{A}}$ | $\breve{A}$ | |
| $x$ | $[H]$ | $x^\star = \frac{1}{[H]}x$ | $\langle x\rangle = \frac{1}{\epsilon}$ | $\breve{x} = \frac{1}{[L]}x$ | définition de $\epsilon$ |
| $y$ | $[H]$ | $y^\star = \frac{1}{[H]}y$ | $\langle y\rangle = \frac{1}{\epsilon}$ | $\breve{y} = \frac{1}{[L]}y$ | définition de $\epsilon$ |
| $z$ | $[H]$ | $z^\star = \frac{1}{[H]}z$ | $\langle z\rangle = 1$ | $\breve{z} = \frac{1}{[H]}z$ | définition de $\epsilon$ |
| $u$ | $[V_H]$ | $u^\star = \frac{1}{[V_H]}u$ | $\langle u\rangle = \frac{1}{\epsilon}$ | $\breve{u} = \frac{[H]}{[L][V_H]}u$ | définition de $\epsilon$ |
| $v$ | $[V_H]$ | $v^\star = \frac{1}{[V_H]}v$ | $\langle v\rangle = \frac{1}{\epsilon}$ | $\breve{v} = \frac{[H]}{[L][V_H]}v$ | définition de $\epsilon$ |
| $w$ | $[V_H]$ | $w^\star = \frac{1}{[V_H]}z$ | $\langle w\rangle = 1$ | $\breve{w} = \frac{1}{[V_H]}w$ | définition de $\epsilon$ |
| $P$ | $[\tau]$=$\rho g[H]$ | $P^\star = \frac{1}{\rho g[H]}P$ | $\langle P\rangle = 1$ | $\breve{P} = \frac{1}{\rho g[H]}P$ | définition de $\epsilon$ |
| $\dot\epsilon_{ij}$ | $\frac{[V_H]}{[H]}$ | $\dot\epsilon^\star_{ij} = \frac{[H]}{[V_H]}\dot\epsilon_{ij}$ | $\langle\dot\epsilon_{ii}\rangle = 1$, $\langle\dot\epsilon_{xy}\rangle = 1$<br>$\langle\dot\epsilon_{xz}\rangle = \frac{1}{\epsilon}$, $\langle\dot\epsilon_{yz}\rangle = \frac{1}{\epsilon}$ | $\breve{\dot\epsilon}_{ii} = \frac{[H]}{[V_H]}\dot\epsilon_{ii}$, $\breve{\dot\epsilon}_{xy} = \frac{[H]}{[V_H]}\dot\epsilon_{xy}$<br>$\breve{\dot\epsilon}_{xz} = \frac{[H]\epsilon}{[V_H]}\dot\epsilon_{xz}$, $\breve{\dot\epsilon}_{yz} = \frac{[H]\epsilon}{[V_H]}\dot\epsilon_{yz}$ | définition de $\dot\epsilon_{ij}$, $\langle\vec{v}\rangle, \langle\vec{x}\rangle$ |
| $\eta$ | $\rho g\frac{[H]^2}{[V_H]}$ | $\eta^\star = \frac{[V_H]}{\rho g[H]^2}\eta$ | $\langle\eta\rangle = \epsilon^2$ | $\breve{\eta} = \frac{[V_H]}{\epsilon^2\rho g[H]^2}\eta$ | équation de Stokes, loi de comportement, $\langle\dot\epsilon_{ij}\rangle$ |
| $\tau'_{ij}$ | $[\tau] = \rho g[H]$ | $\tau'^\star_{ij} = \frac{1}{\rho g[H]}\tau'_{ij}$ | $\langle\sigma'_i\rangle = \epsilon^2$,$\langle\tau'_{xy}\rangle = \epsilon^2$<br>$\langle\tau'_{xz}\rangle = \epsilon$, $\langle\tau'_{yz}\rangle = \epsilon$ | $\breve{\sigma}'_i = \frac{1}{\epsilon^2\rho g[H]}\sigma'_i$, $\breve{\tau}'_{xy} = \frac{1}{\epsilon^2\rho g[H]}\tau'_{xy}$<br>$\breve{\tau}'_{xz} = \frac{1}{\epsilon\rho g[H]}\tau'_{xz}$, $\breve{\tau}'_{yz} = \frac{1}{\epsilon\rho g[H]}\tau'_{yz}$ | loi de comportement, $\langle\eta\rangle, \langle\dot\epsilon_{ij}\rangle$ |

TAB. 2.1.: Les différentes étapes du changement de coordonnées pour le développement de la SIA.
The different steps of the coordinate change in the SIA development.

Le rapport d'aspect est choisi comme $\epsilon = \frac{[H]}{[L]} = \frac{[V_H]}{[V_L]}$ et tient compte du fait que le mouvement des calottes glaciaires est dominé par un mouvement horizontal. $[V_L]$ (la vitesse horizontale typique) apparaîtra comme grandeur dépendante et est évaluée une fois que $[H], [L]$ et $[V_H]$ ont été choisis. Ce choix suppose que la géométrie impose un champ de vitesse ressemblant à la géométrie, c'est-à-dire les vitesses verticales sont supposées petites devant les vitesses horizontales. Ceci implique que la méthode développée ne pourra pas correctement faire face à un dôme ou à des régions avec de fortes pentes.
Transformation pour les grandeurs sans dimensions :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= [H](x^\star, y^\star, z^\star), && (2.2)\\
(u, v, w) &= [V_H](u^\star, v^\star, w^\star), && (2.3)\\
(\tau'_{ij}, P) &= [\tau](\tau'^\star_{ij}, p^\star) = \rho g[H](\tau'^\star_{ij}, p^\star). && (2.4)
\end{aligned}$$

Par construction on obtient (Equations (1.15) et (1.19))

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{[V_H]}{[H]}\dot{\epsilon}^\star_{ij}, \quad \eta = \rho g \frac{[H]^2}{[V_H]}\eta^\star. \tag{2.5}$$

### 2.3.2. Changement d'échelle

Le changement d'échelle se fait de manière à ce que toutes les variables soient comprises entre 0 et 1 (écriture pour les variables réduites : $\breve{A}$). Par construction $z^\star, w^\star$ et $P^\star$ sont déjà de l'ordre de 1.
On obtient facilement pour les autres termes :

$$\begin{aligned}
(\breve{x}, \breve{y}) &= \epsilon(x^\star, y^\star), \quad \text{car } \breve{x} = \frac{1}{[L]}x = \frac{\epsilon}{[H]}x = \epsilon x^\star, && (2.6)\\
\breve{z} &= z^\star, && (2.7)\\
(\breve{u}, \breve{v}) &= \epsilon(u^\star, v^\star), && (2.8)\\
\breve{w} &= w^\star, && (2.9)\\
\breve{P} &= P^\star. && (2.10)
\end{aligned}$$

Afin de faire ce même changement pour les contraintes déviatoriques et les autres variables une étude de leur ordre de grandeur est nécessaire.

#### Les ordres de grandeurs des autres variables

Dans tout ce paragraphe nous étudions les ordres de grandeurs des variables $A^\star$ sans dimension.
$P^\star$, $z^\star$ et $w^\star$ sont d'ordre 1 (écriture $\langle P \rangle = 1$), $x^\star$, $y^\star$, $u^\star$ et $v^\star$ sont d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ (écriture $\langle x \rangle = \frac{1}{\epsilon}$) ainsi que nous l'avons mentionné ci-dessus. Par ailleurs, $\sigma^\star_{x,y,z}$ sont d'ordre 1 comme $P^\star$.
Les ordres de grandeurs $\langle . \rangle$ des taux de déformation sont obtenus à l'aide de leur définition et des grandeurs caractéristiques des vitesses et des coordonnées. On utilise par ailleurs

le fait que les ordres de grandeurs $\langle . \rangle$ des dérivées spatiales s'expriment sous la forme : $\langle \frac{\partial A^\star}{\partial x^\star} \rangle = \frac{\langle A \rangle}{\langle x \rangle} = \epsilon \langle A \rangle$, $\langle \frac{\partial A^\star}{\partial y^\star} \rangle = \epsilon \langle A \rangle$ et $\langle \frac{\partial A^\star}{\partial z^\star} \rangle = \langle A \rangle$.

$$\dot{\epsilon}^\star_{xx} = \frac{\partial u^\star}{\partial x^\star} \quad \Rightarrow \langle \dot{\epsilon}_{xx} \rangle = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1, \tag{2.11}$$

$$\dot{\epsilon}^\star_{yy} = \frac{\partial v^\star}{\partial y^\star} \quad \Rightarrow \langle \dot{\epsilon}_{yy} \rangle = 1, \tag{2.12}$$

$$\dot{\epsilon}^\star_{zz} = \frac{\partial w^\star}{\partial z^\star} \quad \Rightarrow \langle \dot{\epsilon}_{zz} \rangle = 1, \tag{2.13}$$

$$\dot{\epsilon}^\star_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial y^\star} + \frac{\partial v^\star}{\partial x^\star}\right), \quad \langle \frac{\partial u}{\partial y} \rangle = \langle \frac{\partial v}{\partial x} \rangle = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \quad \Rightarrow \langle \dot{\epsilon}_{xy} \rangle = 1, \tag{2.14}$$

$$\dot{\epsilon}^\star_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial z^\star} + \frac{\partial w^\star}{\partial x^\star}\right), \quad \langle \frac{\partial u}{\partial z} \rangle = \frac{1}{\epsilon}, \quad \langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle = \epsilon \quad \Rightarrow \langle \dot{\epsilon}_{xz} \rangle = \frac{1}{\epsilon}, \tag{2.15}$$

$$\langle \dot{\epsilon}_{yz} \rangle = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{(même calcul).} \tag{2.16}$$

Pour l'ordre de grandeur de la viscosité qui servira pour déterminer celle des contraintes déviatoriques, il faut faire appel à la première équation de Stokes

$$\frac{\partial \sigma'^\star_x}{\partial x^\star} + \frac{\partial \tau'^\star_{xy}}{\partial y^\star} + \frac{\partial \tau'^\star_{xz}}{\partial z^\star} - \frac{\partial p^\star}{\partial x^\star} = 0 \tag{2.17}$$

et la loi de comportement

$$2\eta^\star \dot{\epsilon}^\star_{ij} = \tau'^\star_{ij}. \tag{2.18}$$

Les ordres de grandeur de la viscosité, des taux de déformation et des contraintes déviatoriques sont alors liées entre eux par :

$$\langle \tau'_{ij} \rangle = \langle \eta \rangle \cdot \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle, \tag{2.19}$$

ce qui pour l'Equation (2.17) donne :

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle \epsilon + \langle \eta \rangle \epsilon + \langle \eta \rangle \frac{1}{\epsilon} - \epsilon &= 0, \\ \langle \eta \rangle \left(2\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right) &= \epsilon, \\ \Rightarrow \langle \eta \rangle &= \epsilon^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Cela donne enfin pour les ordres de grandeurs des contraintes déviatoriques :

$$\langle \tau'_{yz} \rangle = \langle \tau'_{xz} \rangle = \langle \eta \rangle \langle \dot{\epsilon}_{xz} \rangle = \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon, \tag{2.21}$$

$$\langle \tau'_{xy} \rangle = \langle \eta \rangle \langle \dot{\epsilon}_{xy} \rangle = \epsilon^2, \tag{2.22}$$

$$\langle \tau'_{xx} \rangle = \langle \tau'_{yy} \rangle = \langle \eta \rangle \langle \dot{\epsilon}_{xx} \rangle = \epsilon^2, \tag{2.23}$$

$$\langle \tau'_{zz} \rangle = \langle \eta \rangle \langle \dot{\epsilon}_{zz} \rangle = \epsilon^2. \tag{2.24}$$

### Changements de coordonnées

On obtient alors pour le changement de coordonnées $A^\star \leftrightarrow \breve{A}$ les relations suivantes :

$$\breve{\dot{\epsilon}}_{ij} = \epsilon \dot{\epsilon}^\star_{ij} \quad \text{pour } (ij) = (xz), (yz), \tag{2.25}$$

$$\breve{\dot{\epsilon}}_{ij} = \dot{\epsilon}^\star_{ij} \quad \text{sinon}, \tag{2.26}$$

$$\breve{\eta} = \frac{1}{\epsilon^2} \eta^\star, \tag{2.27}$$

$$\breve{\tau}'_{ij} = \frac{1}{\epsilon} \tau'^\star_{ij} \quad \text{pour } (ij) = (xz), (yz), \tag{2.28}$$

$$\breve{\tau}'_{ij} = \frac{1}{\epsilon^2} \tau'^\star_{ij} \quad \text{sinon}. \tag{2.29}$$

### Equations de Stokes

Les équations de Stokes s'écrivent dans ce système de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \epsilon \left( \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_x}{\partial \breve{x}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\tau}'_{xy}}{\partial \breve{y}} \right) + \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{xz}}{\partial \breve{z}} & = & 0 \\ \epsilon \left( \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\tau}'_{xy}}{\partial \breve{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_y}{\partial \breve{y}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{y}} \right) + \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{yz}}{\partial \breve{z}} & = & 0 \\ \epsilon \left( \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{xz}}{\partial \breve{x}} + \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{yz}}{\partial \breve{y}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_z}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{z}} - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left( \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_x}{\partial \breve{x}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\tau}'_{xy}}{\partial \breve{y}} \right) + \frac{\partial \breve{\tau}'_{xz}}{\partial \breve{z}} & = & 0 \\ \left( \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\tau}'_{xy}}{\partial \breve{x}} + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_y}{\partial \breve{y}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{y}} \right) + \frac{\partial \breve{\tau}'_{yz}}{\partial \breve{z}} & = & 0 \\ \epsilon \left( \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{xz}}{\partial \breve{x}} + \epsilon \frac{\partial \breve{\tau}'_{yz}}{\partial \breve{y}} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial \breve{\sigma}'_z}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}}{\partial \breve{z}} - 1 & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.30}$$

### 2.3.3. Développement en série

Les champs sont ensuite développés en séries de perturbation en puissances de $\epsilon$ :

$$\breve{A} = \sum_{n=0} \epsilon^n \breve{A}^{(n)}. \tag{2.31}$$

Ce développement est ensuite introduit dans le système d'Equations (2.30).
Les équations obtenues sont de la forme :

$$\mathfrak{A} + \epsilon\mathfrak{B} + \epsilon^2\mathfrak{C} + \epsilon^3\mathfrak{D} + \cdots = 0. \tag{2.32}$$

Il faut que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \cdots = 0$.

#### L'équation d'incompressibilité

On peut aisément vérifier que l'équation d'incompressibilité $\vec{\nabla}\vec{v}$ est valable dans les trois systèmes $A$, $A^\star$ et $\breve{A}$ (Equations (2.11) à (2.13) et (2.25)) :

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \vec{\nabla}^\star\vec{v}^\star = \vec{\breve{\nabla}}\vec{\breve{v}}. \tag{2.33}$$

#### Equations de Stokes

En poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 les équations de Stokes donnent :

$$\begin{aligned}
&\epsilon^2\frac{\partial\breve{\sigma}'_x}{\partial\breve{x}}^{(0)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\sigma}'_x}{\partial\breve{x}}^{(1)} + \epsilon^4\frac{\partial\breve{\sigma}'_x}{\partial\breve{x}}^{(2)} - \frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{x}}^{(0)} - \epsilon\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{x}}^{(1)} - \epsilon^2\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{x}}^{(2)} \\
&+\epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{y}}^{(0)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{y}}^{(1)} + \epsilon^4\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{y}}^{(2)} + \frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{z}}^{(0)} + \epsilon\frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{z}}^{(1)} + \epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{z}}^{(2)} = 0, \qquad (2.34) \\
&\epsilon^2\frac{\partial\breve{\sigma}'_y}{\partial\breve{y}}^{(0)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\sigma}'_y}{\partial\breve{y}}^{(1)} + \epsilon^4\frac{\partial\breve{\sigma}'_y}{\partial\breve{y}}^{(2)} - \frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{y}}^{(0)} - \epsilon\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{y}}^{(1)} - \epsilon^2\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{y}}^{(2)} \\
&+\epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{x}}^{(0)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{x}}^{(1)} + \epsilon^4\frac{\partial\breve{\tau}'_{xy}}{\partial\breve{x}}^{(2)} + \frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{z}}^{(0)} + \epsilon\frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{z}}^{(1)} + \epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{z}}^{(2)} = 0, \qquad (2.35) \\
&\epsilon\left(\epsilon\frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{x}}^{(0)} + \epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{x}}^{(1)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\tau}'_{xz}}{\partial\breve{x}}^{(2)} + \epsilon\frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{y}}^{(0)} + \epsilon^2\frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{y}}^{(1)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\tau}'_{yz}}{\partial\breve{y}}^{(2)}\right) \\
&+\epsilon^2\frac{\partial\breve{\sigma}'_z}{\partial\breve{z}}^{(0)} + \epsilon^3\frac{\partial\breve{\sigma}'_z}{\partial\breve{z}}^{(1)} + \epsilon^4\frac{\partial\breve{\sigma}'_z}{\partial\breve{z}}^{(2)} - \frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{z}}^{(0)} - \epsilon\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{z}}^{(1)} - \epsilon^2\frac{\partial\breve{P}}{\partial\breve{z}}^{(2)} = 0. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

### Conditions en surface

L'Equation (1.24) devient dans le système $\breve{A}$ :

$$\left.\begin{array}{rcl} -\epsilon^3\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{x}}\breve{\sigma}'_x - \epsilon^3\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{y}}\breve{\tau}'_{xy} + \epsilon\breve{\tau}'_{xz} + \epsilon\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{x}}\breve{P} &=& 0 \\ -\epsilon^3\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{x}}\breve{\tau}'_{xy} - \epsilon^3\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{y}}\breve{\sigma}'_y + \epsilon\breve{\tau}'_{yz} + \epsilon\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{y}}\breve{P} &=& 0 \\ -\epsilon^2\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{x}}\breve{\tau}'_{xz} - \epsilon^2\frac{\partial\breve{S}}{\partial\breve{y}}\breve{\tau}'_{yz} + \epsilon^2\breve{\sigma}'_z - \breve{P} &=& 0 \end{array}\right\} \text{en surface.} \tag{2.37}$$

On développe la surface $S$ comme les autres variables ($S = S^{(0)} + \epsilon S^{(1)} + \epsilon^2 S^{(2)} + \dots$).
D'après Taylor :

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \delta x \frac{\partial f}{\partial x}_{|x_0}(x_0) + \frac{1}{2}\delta^2 x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{|x_0}(x_0)\dots, \tag{2.38}$$

on a alors pour une fonction $f$ évaluée à la surface $S = S^{(0)} + \delta S$,
où $\delta S = \epsilon S^{(1)} + \epsilon^2 S^{(2)} + \dots$,

$$\begin{array}{rcl} f(S) = f(S^{(0)}) &+& (\epsilon S^{(1)} + \epsilon^2 S^{(2)} + \dots)\frac{\partial f}{\partial S}(S^{(0)}) \\ &+& \frac{1}{2}(\epsilon S^{(1)} + \epsilon^2 S^{(2)} + \dots)^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S^{(0)}) + \dots \end{array} \tag{2.39}$$

Avec ces relations ainsi que les développements des contraintes déviatoriques et de la pression, les conditions aux limites peuvent être évaluées à l'ordre souhaité.

## 2.3.4. Le résultat à l'ordre zéro

A l'ordre 0 le terme $\mathfrak{A}$ doit être nul, donc les équations se réduisent à celles de l'ordre $\epsilon^0$.
On obtient les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial\breve{\tau}'^{(0)}_{xz}}{\partial\breve{z}} - \frac{\partial\breve{P}^{(0)}}{\partial\breve{x}} &=& 0, \\ \frac{\partial\breve{\tau}'^{(0)}_{yz}}{\partial\breve{z}} - \frac{\partial\breve{P}^{(0)}}{\partial\breve{y}} &=& 0, \\ \frac{\partial\breve{P}^{(0)}}{\partial\breve{z}} &=& -1, \end{array} \tag{2.40}$$

et

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \tau'_{xy} = 0 \text{ dans les systèmes } A, A^\star \text{ et } \breve{A}. \tag{2.41}$$

Conditions en surface :
A l'ordre le plus bas on a $\breve{P}(\breve{S}) = \breve{P}^{(0)}(\breve{S}^{(0)})$ et $\breve{\tau}_{ij}(\breve{S}) = \breve{\tau}_{ij}(\breve{S}^{(0)})$.

Les conditions en surface se réduisent alors aux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{rcl} \breve{\tau}_{xz}^{(0)} + \frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial \breve{x}} \breve{P}^{(0)} &=& 0 \\ \breve{\tau}_{yz}^{(0)} + \frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial \breve{y}} \breve{P}^{(0)} &=& 0 \\ \breve{P}^{(0)} &=& 0 \end{array}\right\} \text{ évalué en } \breve{S}^{(0)}, \tag{2.42}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\breve{P}^{(0)} = \breve{\tau}_{xz}^{(0)} = \breve{\tau}_{yz}^{(0)} = 0 \text{ à } \breve{S}^{(0)}. \tag{2.43}$$

L'intégration de l'Equation (2.40) avec les conditions en surface donne :

$$\breve{P}^{(0)} = \breve{S}^{(0)} - \breve{z}, \tag{2.44}$$

$$\breve{\tau}_{xz}^{\prime(0)} = \frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial \breve{x}} (\breve{S}^{(0)} - \breve{z}), \tag{2.45}$$

$$\breve{\tau}_{yz}^{\prime(0)} = \frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial \breve{y}} (\breve{S}^{(0)} - \breve{z}). \tag{2.46}$$

Repasser en coordonnées réelles implique :

$$\breve{z} = z^\star = \frac{1}{[H]} z, \tag{2.47}$$

$$\breve{S} = S^\star = \frac{1}{[H]} S, \tag{2.48}$$

$$\breve{x} = \epsilon x^\star = \frac{\epsilon}{[H]} x = \frac{1}{[L]} x, \tag{2.49}$$

$$\breve{y} = \cdots = \frac{1}{[L]} y, \tag{2.50}$$

$$\breve{P} = P^\star = \frac{1}{\rho g [H]} P, \tag{2.51}$$

$$\breve{\tau}_{xz} = \frac{1}{\epsilon} \tau_{xz}^\star = \frac{1}{\epsilon \rho g [H]} \tau_{xz}, \tag{2.52}$$

$$\breve{\tau}_{yz} = \cdots = \frac{1}{\epsilon \rho g [H]} \tau_{xz}. \tag{2.53}$$

On obtient ensuite (les indices (0) seront supprimés dans la suite) :

$$P = \rho g (S - z), \tag{2.54}$$

$$\tau_{xz} = \rho g \frac{\partial S}{\partial x} (S - z), \tag{2.55}$$

$$\tau_{yz} = \rho g \frac{\partial S}{\partial y} (S - z). \tag{2.56}$$

### 2.3.5. Ordres supérieurs

A l'ordre 1 on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \breve{\tau}_{xz}'^{(1)}}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}^{(1)}}{\partial \breve{x}} &= 0, \\ \frac{\partial \breve{\tau}_{yz}'^{(1)}}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}^{(1)}}{\partial \breve{y}} &= 0, \\ \frac{\partial \breve{P}^{(1)}}{\partial \breve{z}} &= 0, \end{aligned} \tag{2.57}$$

avec les conditions aux bords :

$$\breve{P}^{(1)}(\breve{S}^{(0)}) = -\breve{S}^{(1)},\ \breve{\tau}_{xz}^{(1)}(E^{(0)}) = -\breve{S}^{(1)}\frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial x},\ \breve{\tau}_{yz}^{(1)}(E^{(0)}) = -\breve{S}^{(1)}\frac{\partial \breve{S}^{(0)}}{\partial y}. \tag{2.58}$$

Les équations de Stokes donnent à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \breve{\tau}_{xz}'^{(2)}}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}^{(2)}}{\partial \breve{x}} + \frac{\partial \breve{\sigma}_{x}'^{(0)}}{\partial \breve{x}} + \frac{\partial \breve{\tau}_{xy}'^{(0)}}{\partial \breve{y}} &= 0, \\ \frac{\partial \breve{\tau}_{yz}'^{(1)}}{\partial \breve{z}} - \frac{\partial \breve{P}^{(1)}}{\partial \breve{y}} + \frac{\partial \breve{\sigma}_{y}'^{(0)}}{\partial \breve{y}} + \frac{\partial \breve{\tau}_{xy}'^{(0)}}{\partial \breve{x}} &= 0, \\ \frac{\breve{\tau}_{xz}'^{(0)}}{\partial \breve{x}} + \frac{\breve{\tau}_{yz}'^{(0)}}{\partial \breve{y}} + \frac{\breve{\sigma}_{z}'^{(0)}}{\partial \breve{z}} + -\frac{\partial \breve{P}^{(1)}}{\partial \breve{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Par rapport à la numérotation des termes $A^{(n)}$ il faut remarquer que plusieurs auteurs choisissent une numérotation dans laquelle les termes $A^{(n_0)}$ apparaissent dans l'approximation de la couche mince avec l'ordre $n_0$. Ici, la numérotation est strictement celle du développement de la variable $\breve{A}$. Le terme $\sigma_x'^{(0)}$ apparaît par exemple pour la première fois dans la SIA de l'ordre 2.
Dans les deux cas (l'ordre 1 et 2) la suite du calcul se fait en analogie de l'ordre zéro et est présentée en détail par Baral (1999).
A l'ordre 1 ceci mène à une solution avec des termes qui ont exactement la même structure que celle de l'ordre zéro. Dans le cas d'une glace isotrope, qui est traité ici, l'ordre 1 est identique à la solution à l'ordre 0. On peut noter cependant que lorsque l'anisotropie est prise en compte, l'ordre 1 diffère de l'ordre 0 (Philip et Meyssonnier, 1999).
A l'ordre 2, les déviateurs longitudinaux apparaissent enfin. C'est d'ailleurs une façon de les introduire d'une manière rigoureuse. Le calcul à l'ordre 2 se fait en analogie avec celui à l'ordre zéro qui sera détaillé dans le paragraphe suivant. Cependant, les vitesses (déformation et glissement) interviennent à l'ordre 2 dans le calcul des les contraintes longitudinales. Cela présente un grand problème dans le cas fréquent d'un écoulement avec du glissement car la vitesse de glissement n'est pas bien connue. Pousser le développement à l'ordre deux, avec une telle incertitude intervenant à un point fondamental du raisonnement, semble donc douteux.

## 2.4. L'ordre zéro en détail

Sans se plonger en détail dans le calcul, la SIA à l'ordre zéro présente quelques caractéristiques importantes :

- Les contraintes longitudinales sont égales à zéro.
- L'écoulement à toute profondeur se fait selon la ligne de la plus grande pente $\alpha$ en surface.
- $\tau_{xz} = \rho g z \alpha$.
- Une formule analytique pour les vitesses existe quand la glace est isotherme et que $A$ (le paramètre de la loi de Glen) est uniforme.

Dans cette partie, nous détaillons l'ordre 0 et en particulier l'obtention des vitesses d'écoulement.

Par analogie avec ce qui a été fait précédemment dans la discussion des ordres de grandeurs, on obtient à l'ordre zéro pour les taux de déformation les approximations suivantes :

$$\dot{\epsilon}_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2.60}$$

$$\dot{\epsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{2.61}$$

La cission efficace est simplifiée en :

$$\tau_0^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \tag{2.62}$$

et les déviateurs et la pression sont donnés par

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} = \rho g \vec{\nabla} S, \tag{2.63}$$

$$P = \rho g (S - z), \tag{2.64}$$

avec

$$\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}), \qquad \vec{\nabla} S = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right). \tag{2.65}$$

L'intégration verticale entre $z$ et $S$ avec les conditions aux limites $\vec{\tau}|_S = 0$ donne :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}|_S + \int_S^z \rho g \vec{\nabla} S dz = -\rho g (S - z) \vec{\nabla} S. \tag{2.66}$$

### 2.4.1. Les vitesses

Les vitesses horizontales $\vec{v}_H = (u, v)$ peuvent être calculée à l'aide des taux de déformation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_H}{\partial z} &= 2\vec{\dot{\epsilon}} \\ &= 2A\tau_0^2\vec{\tau}' \\ &= 2A(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\cdot\vec{\tau}' \\ &= -2A(\rho g)^3(S-z)^3|\nabla S|^2\vec{\nabla}S, \end{aligned} \tag{2.67}$$

avec

$$\vec{\tau}' = (\tau'_{xz}, \tau'_{yz}), \quad \vec{\dot{\epsilon}} = (\dot{\epsilon}_{xz}, \dot{\epsilon}_{yz}). \tag{2.68}$$

L'intégration verticale de $B$ à $z$, avec une vitesse $\vec{v}_b$ à la base ($\vec{v}_b$=0 si pas de glissement) donne pour les vitesses horizontales

$$\begin{aligned}\vec{v}_H &= \vec{v}_b + \int_B^z \frac{\partial \vec{v}_H}{\partial z} dz \\ &= \vec{v}_b + \frac{1}{2}A(\rho g)^3((S-z)^4 - H^4)|\nabla S|^2\vec{\nabla}S. \end{aligned} \tag{2.69}$$

La vitesse verticale se calcule à l'aide de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} w(z) &= w_b - \int_B^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz \\ &\overset{\text{sans glis.}}{=} -\frac{A(\rho g)^3}{2}\Bigg[ \\ &\quad (H^5 - (S-z)^5)\cdot\left(\frac{3}{5}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{4}{5}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{1}{5}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\right) \\ &\quad + \left(H^4 - (S-z)^4\right)\cdot\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^2}{\partial y}\right)\right)^2 \\ &\quad -(z-B)\cdot\left(4H^3\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right. \\ &\qquad + H^4\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\left(3\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\left(3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\right. \\ &\qquad\quad \left.\left. + 4\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Avec glissement il n'y a pas seulement la contribution de $w_b$ (qui est nulle pour la plupart des lois de glissement), mais aussi celles de $u_b$ et $v_b$ (contribution de l'équation d'incompressibilité, mais aussi des conditions aux limites, Eq. (1.10)). Dans le cas d'une loi de glissement de type Weertman (Eq. (1.25)) où les exposants sont $p = 1, q = 0$, on a :

$$\vec{v}_b = -A_s(\rho g)H\vec{\nabla}S, \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} w(z) &= w(z)_{\text{sans glis.}} + A_s\rho g\left(\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + H\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} + H\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)(z-B) \\ &\quad + A_s\rho g\left(\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}\right)H. \end{aligned} \tag{2.72}$$

### 2.4.2. L'équation de transport et de diffusion

Le flux horizontal lié à la déformation de la glace devient :

$$\begin{aligned} \vec{q}_{\text{def}} &= \int_B^S \vec{v}_H dz \\ &= -\frac{2}{5}A(\rho g)^3 H^5 |\nabla S|^2 \vec{\nabla} S. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Avec glissement le flux total s'écrit :

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{def}} + \vec{v}_b H, \tag{2.74}$$

où la vitesse basale est donnée par une loi de Weertman à l'aide de l'Equation (2.66) pour $\vec{\tau}_b$, ce qui donne finalement :

$$\vec{q}_b = -A_s(\rho g)^3 H^3 |\nabla S|^2 \vec{\nabla} S, \quad \text{si } p = 3,\ q = 1, \tag{2.75}$$

$$\vec{q}_b = -A_s(\rho g) H^2 \vec{\nabla} S, \quad \text{si } p = 1,\ q = 0. \tag{2.76}$$

L'équation du transport :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \vec{\nabla}\vec{q}, \quad \vec{q} = \int_B^S \vec{v}_H dz \tag{2.77}$$

devient alors l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = a + \frac{2(\rho g)^3}{5}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right], \tag{2.78}$$

avec un coefficient de diffusion $D = D_{def} + D_{glis}$ (déformation et glissement) telque :

$$D_{def} = AH^5|\nabla S|^2, \tag{2.79}$$

$$D_{glis} = \frac{5}{2}A_s H^3|\nabla S|^2, \quad \text{si } p = 3,\ q = 1, \tag{2.80}$$

$$D_{glis} = \frac{5}{2(\rho g)^2}A_s H^2, \quad \text{si } p = 1,\ q = 0. \tag{2.81}$$

## 2.5. Conclusion

Dans ce chapitre la SIA ainsi que son développement détaillé est décrit. A l'ordre zéro les vitesses peuvent être calculées analytiquement (au moins pour les glaciers isothermes). L'équation de diffusion (Eq. (2.78)) est l'équation de base des modèles utilisant cette approximation. Contrairement aux équations pour les vitesses, elle ne peut pas être résolue directement car elle est non-linéaire. Les différents modèles SIA se distinguent dans la fqçon de résoudre de cette équation.
Il nous a semblé important d'insister sur une présentation approfondie de cette approximation car elle est appliquée dans cette thèse à différents glaciers et surtout parce qu'elle est comparée dans la partie V à d'autres modèles, des modèles qui font moins d'approximations.

# 3. Inventaire de modèles

Dans ce chapitre, l'aspect régime thermique (isotherme ou non) n'est pas trop détaillé. La plupart des modèles existent sous une forme isotherme et sous une forme avec couplage thermo-mécanique dans laquelle les champs de température et de vitesse sont couplés. Cependant, l'analyse qui suit est pour l'essentiel valable, que les températures soient prises en compte ou non, c'est pourquoi nous considérons ici essentiellement le caractère purement mécanique du problème avec la résolution des équations de Stokes. D'autre part, nous nous limiterons également aux écoulements "glace posée", pour lesquels la vitesse basale n'est pas prédominante, c'est-à-dire que le traitement des ice-shelves et ice-streams n'est mentionné qu'accessoirement. Il faut noter qu'un développement SIA existe aussi pour les ice-shelves, mais l'ordre 1 des ice-shelves ne correspond pas à l'ordre 1 de la glace posée.

On distingue plusieurs grandes familles de modèles : Les modèles SIA avec un développement rigoureux jusqu'à l'ordre $n$, en général à l'ordre 0 ou 2 ; les autres modèles *higher order* qui rajoutent en quelque sorte quelques termes "à la main" à la SIA à l'ordre zéro sans pour autant rester dans le cadre d'un développement rigoureux ; et les modèles *Full Stokes* ou "Stokes complet" qui résolvent avec différentes techniques tous le système des équations de Stokes sans faire d'approximation.
Un autre aspect important est celui des modèles *flow line* qui ne prennent pas la géométrie en trois dimensions en compte, mais la réduisent le long d'une ligne d'écoulement en supposant que l'écoulement se fait selon la ligne de la plus grande pente de surface, ce qui est un résultat de la SIA 0. D'autre modèles encore travaillent avec une géométrie réduite à deux dimensions (par exemple dans le cas des géométries supposées axi-symétriques) pour limiter la complexité des équations et ainsi le temps de calcul.

Quant à la classification des modèles en "2D" ou "3D", ces termes ne sont pas toujours utilisés de la même manière. Dans certain cas le terme "2D" ou "3D" désigne la géométrie du glacier modélisé (l'espace (x,y,z) ou seulement une coupe (x,z)) ; dans d'autres cas, ce terme fait plus allusion au caractère du modèle : les modèles SIA(0) isothermes correspondent à des modèles "2D", car la plupart de grandeurs physiques interviennent sans dépendance à la coordonné verticale ou comme valeur intégrée sur toute la profondeur ; les modèles *Full Stokes* sont des modèles "3D" car toutes les variables dépendent de toutes les dimensions géométriques. Les modèles *flow line* sont par exemple des modèles dits "2.5D" car la troisième direction n'intervient qu'à travers de la définition des lignes d'écoulement.

## 3.1. Les débuts de la modélisation

Parmi les premiers modèles dynamiques complets, on peut citer celui de Mahaffy (1976), de Jenssen (1977) et aussi celui d'Oerlemans (1982). Pour tous ces modèles il s'agit déjà de modèles utilisant l'approximation de la couche mince (ordre zéro), même si elle n'est pas toujours développée de la même manière que Hutter ou Morland la présenteront plus tard en la baptisant "approximation de la couche mince". Le modèle de Mahaffy (1976), probablement le premier véritable modèle d'écoulement glaciaire, porte sur le Barnes Ice Cap en trois dimensions. Jenssen (1977) est le premier a introduire l'ébauche d'un couplage thermo-mécanique pour modéliser le Groenland. Le modèle d'Oerlemans (1982) est de nouveau un modèle isotherme qui modélise pour la première fois tout l'Antarctique. Les modèles sur les glaciers de montagne apparaîtront seulement plus tard, d'abord sous la forme *flow line*.

## 3.2. La Shallow Ice Approximation

Avec les travaux de Morland (1984) et Hutter (1983), la *Shallow Ice Approximation*, qui est présentée en détail dans le Chapitre 2 et qui découle du fait que les calottes glaciaires ont un rapport d'aspect très faible, systématise les différentes approximations qui étaient faites antérieurement en quelque sorte "à la main". Néanmoins des modèles SIA existaient avant... sans être qualifiés tels quels.
D'un point de vue mathématique ces modèles ne doivent pas être appliqués aux glaciers avec un rapport d'aspect proche de ou supérieur à 1, ce qui est en général le cas pour les glaciers de montagne, car le développement en série perd son sens - même en poussant le développent à des ordres supérieurs. Malgré tout, cela a été fait pour les premièrs modèles de glaciers alpins et est actuellement encore souvent fait pour bénéficier d'un temps de calcul court (un des objectifs majeurs de cette thèse est justement d'évaluer l'impact de cette approximation).

### 3.2.1. SIA, ordre zéro

Les modèles de type SIA ordre zéro peuvent être divisés en trois catégories :

1. Les modèles isothermes utilisant les équations présentées dans le chapitre précédent.
2. Les modèles avec couplage thermo-mécanique utilisant les mêmes équations que les modèles isothermes pour la mécanique. A cause de la dépendance du coefficient de la loi de Glen à la température, il n'est plus possible d'écrire une expression analytique pour les vitesses.
3. Les modèles basés sur la SIA 0 pour la glace posée, mais qui incluent des ice-shelves, ice-streams et une grounding-line.

### Modèles SIA 0 (isotherme)

Parmi les modèles à l'ordre zéro, isothermes on peut citer les suivants :
- Les premiers modèles glaciologiques comme Mahaffy (1976) et Oerlemans (1982) mentionnés ci-dessus.
- Les deux modèles SIA utilisés dans cette thèse qui seront présentés en détail dans la Partie IV (pour le modèle de Le Meur et Vincent (2003)) et dans la Partie V (pour le modèle de Pattyn (2003)).

### Modèles SIA 0 (avec couplage thermo-mécanique)

Parmi les modèles de l'ordre zéro avec couplage thermo-mécanique on peut citer les suivants :
- Un modèle très simplifié sous forme de tableau excel est présenté dans Grantism (2006). Un couplage thermo-mécanique ainsi que l'isostasie sont inclus. Malgré cette simplicité ce modèle permet déjà un bon aperçu de l'évolution de l'Antarctique et du Groenland.
- Le modèle de Jenssen (1977) est un des premiers à introduire une dépendance à la température. Cependant, le couplage entre la température et les vitesses est simplement fait à l'aide des tables de valeurs empiriques des gradients verticaux. C'est aussi le premier modèle à utiliser les coordonnées réduites en glaciologie.
- Le premier modèle avec un véritable couplage thermo-mécanique est un modèle 2D selon une ligne d'écoulement utilisé par Huybrechts pour mieux étudier le régime thermique et la réponse d'une calotte aux changements de climat. Ce modèle est appliqué sur l'Antarctique (Huybrechts et Oerlemans, 1988). Il a ensuite été étendu à 3D et appliqué au Groenland (Letréguilly, Huybrechts et Reeh, 1991).
- Le modèle Gremlins (Ritz, Fabre et Letreguilly, 1997) porte sur la calotte du Groenland et a permis d'étudier l'évolution de la calotte pendant le dernier cycle climatique.
- Le modèle Sicopolis (Simulation Code for Polythermal Ice Sheets for the Greenland Ice Sheet) est un modèle en 3D appliqué au Groenland qui est le seul à traiter de la glace polythermale. Par rapport aux autres modèles de cette famille, qui considèrent la glace froide sauf éventuellement à l'interface avec le socle, dans Sicopolis la calotte peut également avoir des zones de glace tempérée (généralement à la base). L'objectif principal est également l'étude de la réponse de la calotte au climat (Greve et al., 1998; Greve, 1997b).
- Pour le modèle de Payne (1999) il s'agit également d'un modèle SIA en 3D classique avec couplage thermo-mécanique. L'Antarctique de l'Ouest est étudié et notamment le comportement et la distribution des ice-streams. Par contre, dans ce modèle l'approximation de la couche mince pour la glace posée est utilisée partout, les ice-streams sont traités simplement avec une loi de glissement. Les expériences ont beaucoup porté sur le couplage thermo-mécanique.
- Le modèle de Budd et al. (1998), qui porte également sur les calottes polaires, est un modèle qui étudie l'évolution de l'Arctique et de l'Antarctique pendant un cycle glaciaire. Il inclut aussi des ice-streams d'une façon très simpliste.
- Le modèle de Marshall et al. (2000) utilise une approche originale en glaciologie, avec

dans chaque maille du modèle une mixture de la SIA 0 de la glace posée pour la glace lente et des équations de MacAyeal (cf. paragraphe suivant) en 1D pour les ice-streams. Il est appliqué en 3D avec couplage thermo-mécanique et une approche simplifiée pour les ice-shelves au Laurentide.

Beaucoup d'autres modèles existent aujourd'hui dans cette catégorie, comme par exemple les modèles de Tarasov et Peltier (2002), Bintanja et al. (2002),...

### Modèles SIA 0 (avec une extension pour les ice-shelves, ice-streams et la grounding-line)

La différence principale entre une calotte posée et un ice-shelf réside dans les conditions aux limites, en particulier à la base du glacier. Pour la glace posée, soit la glace est ancrée au sol, soit elle glisse avec frottements sur le socle rocheux (si la glace est au point de fusion). Dans le cas d'un ice-shelf, l'eau de mer à la base du glacier n'exerce pas de frottements ; la pression de l'eau de mer doit également compenser le poids de la colonne de la glace au-dessus. Cette particularité entraîne deux régimes dynamiques complètement opposés suivant la partie de la calotte que l'on étudie : la calotte posée est caractérisée par une régime de cisaillement vertical, alors que dans l'ice-shelf les contraintes normales et les cisaillements horizontaux sont prédominants. Une autre caractéristique intéressante provient de la condition à la limite sur le front de l'ice-shelf. Sur le front, la pression hydrostatique de la glace est en partie compensée par la pression hydrostatique de l'eau de mer. Il en résulte une force nette, qui a tendance à tirer l'ice-shelf vers la mer (Rommelaere, 1997).
Weertman (1957) fut le pionnier dans le domaine de la modélisation des ice-shelves. En 1957 il propose une solution analytique décrivant l'écoulement de la lange de glace flottante. Van der Veen (1986) utilise la même approche pour une solution analytique qui permet de calculer l'évolution dans le temps de l'épaisseur de glace.
Il est délicat de résoudre numériquement les équations d'équilibre quasistatique complètes avec une rhéologie non linéaire. En analogie avec ce qui est fait dans l'approximation de la couche mince pour la glace posée, les termes prépondérants sont alors identifiés par une adimensionalisation mais celle-ci est différente de celle de la glace posée. Une telle théorie est proposé par Morland (1987) ainsi que par MacAyeal (1989).
Les ice-streams et la grounding-line nécessitent également une adaptation des équations comparée à celles de la glace posée. Pour les ice-streams le point caractéristique réside dans le fait qu'ils présentent de très grandes vitesses basales. Il y a alors deux possibilités pour reproduire ces grandes vitesses. Soit les imposer directement en jouant sur le coefficient de la loi de glissement (Weerman ou autre), approche suivie par Huybrechts (1992), Payne (1999),... soit prescrire le frottement basal ou sa dépendance avec la vitesse. Les équations pour les ice-streams sont alors établies en analogie avec ce qui est fait pour les ice-shelves et finalement elle sont plus proches de celles des ice-shelves que de celles pour la glace posée. On peut dire que les ice-streams sont alors modélisés comme des ice-shelves qui frottent sur le socle. Les équations pour ce traitement des ice-streams ont également été proposée par MacAyeal (1989). Cette approche est celle suivi dans Hulbe

et MacAyeal (1999) et Ritz et al. (2001) dans le modèle GRISLI développé au LGGE. Les modèles qui incluent les ice-shelves, ice-streams et la grounding-line sont aujourd'hui souvent connus sous le nom "modèles de calotte marine" (utilisant les équations de MacAyeal).

Parmi ces modèles, on peut citer les suivants. Ils utilisent tous l'approche de MacAyeal (1989) au moins pour les ice-shelves :

- La version Antarctique du modèle de Huybrechts est un modèle en trois dimensions avec un couplage thermo-mécanique qui tient compte pour une première fois des différents mécanismes de l'écoulement pour la glace posée, dans les ice-shelves et à travers la grounding-line. L'isostasie et le glissement sont également pris en compte. Pour la glace posée à l'intérieur du continent une sorte de SIA 0 développée à la main est utilisée, les ice-shelves sont traités par une approche MacAyeal. Les ice-streams ne sont pas pris en compte ou seulement avec une loi de glissement. Ce modèle est conçu pour des expériences autour des changements climatiques et reproduit les caractéristiques principales de l'Antarctique, (Huybrechts, 1992, 1990a,b). Une version améliorée combinée avec un modèle de climat (Huybrechts et de Wolde, 1999) est destinée à l'étude de Groenland et de l'Antarctique.
- Le modèle de Ritz (GRISLI) a également été développé pour l'Antarctique. Il tient compte des différents mécanismes pour la glace posée (SIA 0), pour les ice-shelves (SIA 1) et les ice-streams (approche MacAyeal) ainsi que du mouvement de la grounding-line (Ritz et al., 2001).
  Avec encore d'autres améliorations, GRISLI a également été porté sur l'hémisphère nord. La première application a été l'étude de la calotte glaciaire Eurasienne pendant la dernière glaciation, notamment le rôle et l'importance des ice-shelves et des lacs retenus par la glace (Peyaud, Ritz et Krinner, 2007).
- On peut bien sûr citer dans cette catégorie le modèle développé par MacAyel (Hulbe et MacAyeal, 1999).
- Le modèle de Pollard et DeConto (2006) utilise un mélange des équations de MacAyeal et la SIA standard de la glace posée sur toute la surface englacée. Une des difficultés de l'approche utilisée dans GRISLI et par Hulbe et MacAyeal (1999) est la nécessité de diviser le domaine en deux zones différentes : l'une traitée par la SIA standard pour la glace posée et l'autre traitée par les équations de MacAyeal pour les ice-shelves et ice-streams. Pollard s'affranchit de cette difficulté en traitant tout le domaine avec un mélange ad-hoc des deux approches.

On peut observer que cette famille de modèles met l'accent sur la modélisation des grandes calottes et leur lien avec le climat. Tous ces modèles représentent bien les calottes de glace à grande échelle, mais ne fonctionnent plus près des dômes et crêtes, dans les zones étroites des ice-streams, près des bords ainsi que dans les zones de transition entre les calottes et les ice-shelves (Abe-Ouchi (1993), Blatter (1995), Baral, Hutter et Greve (2001)). De plus, ces modèles ne sont pas non plus adaptés aux glaciers de montagne.

### 3.2.2. SIA aux ordres supérieurs ou modèles "higher order"

Pour faire face à ces zones qui ne sont pas bien représentées par la SIA 0 ou pour modéliser des glaciers de montagne il faut faire appel à des modèles d'ordres supérieurs.
L'ordre 1 proprement dit, tel que nous l'avons défini au chapitre précédent, n'est utilisé que très rarement car il est en général identique à l'ordre zéro. Le modèle utilisé par Philip et Meyssonnier (1999) dans le cas de la glace anisotrope constitue un exemple.
Malgré tout, les modèles qui incluent les contraintes déviatoriques horizontales normales et les contraintes de cisaillement horizontales sont en général appelés "first-order approximation" (FOA) (Colinge et Blatter, 1998) - même s'il ne s'agit pas de la SIA d'ordre 1 proprement dit. Souvent ils sont aussi considérés comme une approximation incomplète du deuxième ordre (Baral, Hutter et Greve, 2001). Leur intitulé "ordre supérieur" ou *higher order* est un abus de langage qui s'est installé au cours du temps.
R. C. A. Hindmarsh introduit dans Hindmarsh (2004) un classement de tous les modèles qui sortent du cadre d'un développement SIA rigoureux et qui ne sont pas non plus des modèles *Full Stokes*. Ce classement n'est pas basé sur l'ordre de développement qui n'est pas très parlant, d'autant plus que la plupart des modèles ne correspondent pas à un développement rigoureux. C'est plus une approche pragmatique qui vise à savoir s'il s'agit d'un modèle uni- ou multicouche et qui prend en compte la façon dont les différentes contraintes longitudinales sont inclues pour la viscosité et/ou dans les équations de Stokes. Dans ce même article, tous les modèles sont comparés dans l'optique de mieux comprendre comment les contraintes longitudinales améliorent la SIA(0). Cette comparaison avec ses résultats ne sont pas repris ici. Mentionnons seulement qu'Hindmarsh distingue les modèles sans contraintes longitudinales dans les équations de Stokes (type (S) - la SIA 0, y compris des modèles qui améliorent le calcul du deuxième invariant du tenseur des contraintes) et les modèles avec contraintes longitudinales (types (L1S1), (L1S2), (L1L1), (L1L2), (LMLa), (LMLb) et (LTSML)). Un avantage de ce classement est que les catégories varient plus continûment entre la SIA standard pour la glace posée et les modèles plus sophistiqués pour les ice-shelves, à l'opposé de l'incompatibilité entre la SIA 0 pour la glace posée et les équations de MacAyeal pour les ice-shelves et ice-streams. Le type (L1L1) correspond à l'approche de MacAyeal. Le type (L1L2) correspond à peu près à ce qui est fait dans le modèle de Pollard et DeConto (2006) et le type (L1S2) est proche d'une SIA d'ordre 2, mais limitée à un modèle uni-couche.
On peut remarquer aussi que par ailleurs tous les modèles respectent l'équation de continuité (1.7).

Beaucoup de modèles d'ordre supérieurs correspondent au type (LMLa) de Hindmarsh[1]. Le modèle Pattyn (2003) fait part de ce groupe. Il est décrit en détail dans la Partie V. Pour cette raison les détails sur les approximations ne sont pas données explicitement ici.

[1] Surnommé (par R. Hindmarsh) modèles Blattyn puisque les deux modèles leaders de cette catégorie sont ceux de Blatter et de Pattyn.

Aux modèles de type Blattyn ou (LMLa) appartiennent les modèles suivants :

- Le modèle de Blatter (1995) est un modèle en 3D qui tient compte des gradients des contraintes déviatoriques normales. Dans le développement d'une SIA les termes de l'ordre 1 et de l'ordre $\epsilon$ sont gardés - par contre les facteurs de l'adimensionalisation ne sont pas les mêmes que dans la SIA standard. Son ordre 1 correspond alors à un ordre 2 incomplet de la SIA standard (l'approximation hydrostatique est appliquée). Il s'agit d'une extension du modèle de Muller (1991) qui était en 2D.
  Une application intéressante de ce modèle au glacier d'Arolla dans le Valais est présentée par Hubbard et al. (1998).
  Dans Colinge et Blatter (1998) ce même modèle est amélioré numériquement.
  Albrecht (2000) utilise également ce modèle en 3D avec des changements numériques. Il est appliqué sur le Griesgletscher dans le Valais et comme modèle imbriqué dans le modèle Sicopolis sur l'Antarctique.
  Le modèle développé par Saito (2002) et appliqué aux expériences EISMINT (Saito et al., 2003) est également basé sur le modèle de Blatter, mais un couplage thermomécanique est inclus.
- Le modèle de Pattyn (2003) est l'extension en 3D du modèle 2D présenté en Pattyn (2000) et sera présenté en détail dans la Partie V. Une approche différente amène aux mêmes équations que le modèle de Blatter. Dans ce modèle l'approximation hydrostatique est faite, les gradients de contraintes longitudinales et transversales sont pris en compte ; une approximation sur les gradients des vitesses est faite. En dehors d'une approche différente lors de l'établissement des équations, la différence entre Pattyn et Blatter se trouve dans la solution numérique. Pattyn traite le système comme un système d'équations elliptiques qui est résolu pour les vitesses horizontales. Blatter intègre pour trouver directement les contraintes.
  Le modèle de Pattyn est également appliqué en 2D sur un glacier alpin : sur une ligne d'écoulement du glacier du Haut Arolla, (Pattyn, 2002).

Enfin, d'autres modèles prennent en compte d'autres contraintes que la SIA 0 sans être aisément classifiables dans les catégories précédentes :

- Kamb et Echlemeyer (1986a,b); Kamb (1986) étudie l'influence des gradients de contraintes longitudinaux sur l'écoulement d'un glacier, dont le socle présente une variation longitudinale de pente.
- Jóhanesson utilise un modèle de ce type pour comparer l'expansion asymptotique des champs de contraintes à grande échelle avec l'approximation d'un écoulement laminaire (Jóhannesson, 1992).

Comparés à la SIA 0, en 3D, tous ces modèles introduisent les deux vitesses horizontales $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$, qui sont obtenues souvent par la résolution d'un système elliptique de deux équations. Les modèles *Full Stokes* doivent résoudre un système à quatre variables (vitesses et pression). Ceci explique que le coût (temps CPU et mémoire) des modèles dits d'ordre supérieurs est relativement élevé par rapport aux modèles SIA et un peu moindre que celui des modèles *Full Stokes*.

Les modèles utilisant rigoureusement la SIA à l'ordre deux ou plus sont rarement utilisés, car les améliorations qu'ils apportent sont en général contrebalancées par les approximations et erreurs qui sont faites ailleurs, notamment au niveau du glissement. De tel modèles d'ordre deux "stricts" ont été proposés par Hutter (Hutter, 1980, 1981) pour l'écoulement idéalisé d'une couche de glace plane. Mangeney et al. (1996) utilisent également l'ordre deux pour l'écoulement d'une couche de glace plane dans le cadre d'une étude de l'anisotropie à un dôme. Le modèle de D. Dahl-Jensen (Dahl-Jensen, 1989), un modèle en deux dimensions (*flow line*), avec couplage thermique et qui tient également compte de $\sigma'_x$ et $\tau_{xz}$, est aussi un modèle d'ordre 2.

## 3.3. Modèles "Stokes complet" ou "Full Stokes"

Ces modèles résolvent les équations de Stokes sans faire d'approximation avec différentes méthodes numériques[2]. Le grand désavantage de ces modèles est un temps de calcul et des besoins de mémoire élevés comparé aux modèles SIA, ce qui explique leur apparition plus tardive (à l'exception de quelques modèles avec une géométrie en 2D).

### 3.3.1. Éléments Finis

La plupart de ces modèles *Full Stokes* utilisent comme méthode numérique celle des Éléments Finis. Un tel modèle est utilisé et présenté en détail dans cette thèse dans la Partie V, il s'agit d'un modèle en Éléments Finis utilisant le code Elmer (Elmer).
Déjà en 1983, Raymond (1983) a développé un premier modèle en Éléments Finis appliqué au Dôme d'une calotte glaciaire. En 1996 un modèle en *Full Stokes* avec un code en Éléments Finis a été développé pour étudier la zone de transition entre la glace posée et les ice-shelves (Mayer, 1996). Ce modèle a également été utilisé pour étudier le lac sous glaciaire de Vostok (Mayer et Siegert, 2000).
Dans ce genre de modèle on trouve aussi un peu plus d'applications sur les glaciers alpins, notamment des modèles selon une ligne d'écoulement, proche d'un Dôme ou pour la datation de carottes. Ces modèles ont l'avantage de ne pas seulement tenir compte des équations de Stokes complètes, mais aussi de permettre de varier d'une manière relativement simple la densité en profondeur. Cela permet de tenir compte de la couche de névé importante en surface sur les glaciers en haute altitude en montagne. Des travaux importants ont été faits sur le Col du Gôuter dans le massif du Mont Blanc (Gagliardini et Meyssonnier, 1997) et le Col de Gnifetti dans le massif du Mont Rose (Lüthi et Funk, 2000), dans les deux cas l'objectif était la datation de carottes.
Une autre application intéressante porte sur l'écoulement dans un cratère au Kamchatka, où il s'agit plus d'un névé de densité variable que de glace (Zwinger et al., 2006).

[2] Ces différentes méthodes numériques sont brièvement décrites dans l'Annexe VIII.1.

### 3.3.2. Volumes Finis

D'autres modèles apparus plus récemment utilisent la méthode des Volumes Finis, par exemple celui de Deponti (Deponti, Pennati et De Biase, 2006; Deponti et al., 2006) ou celui de Price, Waddington et Conway (2007) dans un système de coordonnés curvilinéaires. Pour l'instant il n'y a pas encore eu d'étude comparative en terme de précision, ni de coût (mémoire et temps CPU) entre les deux méthodes (Éléments ou Volumes Finis).

### 3.3.3. Approche itérative

Plusieurs approches itératives ont été proposées pour résoudre le système *Full Stokes*. Souvent la méthode des Différences Finies est utilisée. En 1989, Van der Veen propose un algorithme *Full Stokes* en 2D, l'itération étant faite sur la variable $\dot{\epsilon}_{xz}$, (Van der Veen, 1989). Ce même algorithme est utilisé en 3D, mais dans ce cas, l'approximation hydrostatique est néanmoins nécessaire (et correspond alors à peu près à un modèle de type (LMLa), Van der Veen et Whillans (1989)).
Au début de cette thèse, nous avons tenté d'implémenter le schéma itératif décrit dans Baral et Hutter (1999), mais nous avons abandonné cette approche à cause de grands problèmes de convergence. La non-convergence a été ultérieurement confirmée par l'auteur (communication personnelle).
A l'EGU en 2007, un autre algorithme itératif partant de la SIA et s'approchant de la solution *Full Stokes* au cours des itérations a été proposé (Soucek et Martinec, 2007).

Ce type de modèle constitue une bonne alternative par rapports aux modèles *Full Stokes* direct en Élément Finis ou en Volumes Finis, car le coût en mémoire et en temps de calcul est diminué de beaucoup. De plus l'approche itérative permet de choisir d'une façon relativement libre le rapport entre coût et précision souhaitée entre la SIA et le *Full Stokes*.

Dans la suite, notamment dans la Partie V, des modèle de chacune de ces catégories seront utilisés : deux modèles SIA 0 (Le Meur et Vincent, 2003; Pattyn, 2003), un modèle d'ordre supérieur de type Blattyn (Pattyn, 2003) et un modèle *Full Stokes* (Elmer).

Quatrième partie .

# Modèle à deux dimensions, approximation de la couche mince (SIA)

Dans ce chapitre nous partons d'un modèle déjà existant au LGGE (Le Meur et Vincent, 2003) utilisant l'approximation de la couche mince. Ce modèle a été appliqué à l'étude d'un glacier synthétique et également au cas réel du glacier de Saint Sorlin dans le massif des Grandes Rousses en France.

Dans le premier chapitre les équations principales du modèle sont présentées, et un changement du schéma numérique est proposé afin d'améliorer la conservation de la masse. Les effets sur un glacier synthétique et sur le glacier de Saint Sorlin sont ensuite présentés.
Dans le deuxième et le troisième chapitre d'autres améliorations sont introduites, d'une part pour corriger des épaisseurs négatives que la résolution numérique fait localement apparaître et d'autre part pour corriger d'effets de colonisation parasite de la zone en amont de la rimaye.
Le travail de ces trois premiers chapitres a été publié dans Schäfer et Le Meur (2007) (cf. Annexe IX.1) et a fait l'objet d'un poster présenté à l'EGU à Vienne en 2006 (cf. Annexe IX.3.1).

Le quatrième chapitre compare deux approches différentes dans l'établissement du bilan de masse, la méthode traditionnelle à partir des mesures de terrain et celle utilisant un modèle de bilan de masse. Leurs effets respectifs dans des simulations évolutives sont comparés, et les intérêts du modèle de bilan de masse sont soulignés.
Les résultats de ce travail ont également été publiés (Le Meur et al. (2007), cf. Annexe IX.2).

# 1. Améliorations du modèle - conservation de la masse

Le modèle présenté par Le Meur et Vincent (2003) est un modèle qui utilise l'approximation de la couche mince. Contrairement à la plupart des glaciers alpins, le glacier de Saint Sorlin (France) possède un rapport d'aspect relativement faible qui permet l'utilisation d'un tel modèle, comme il a été montré par exemple dans Le Meur et Vincent (2003) par comparaison avec les données de terrain.
Des résultats plus récents, notamment avec des géométries plus simples, ont néanmoins soulevé que le modèle utilisé ne conservait pas correctement la masse.
Après une brève introduction de ce problème de conservation de la masse à l'aide d'un glacier synthétique, une présentation du modèle tel qu'il était utilisé auparavant est proposée ainsi que les changements qui ont été apportés dans ce travail. Ensuite les deux versions sont comparées en détail sur le glacier synthétique, ainsi que sur le glacier de Saint Sorlin. Enfin, la non-conservation de la masse par l'ancien schéma numérique est expliquée.

## 1.1. Conservation de masse comme incitation pour un nouveau schéma numérique

Afin de mieux comprendre les effets dynamiques nous avons utilisé un glacier synthétique avec une géométrie volontairement simple, en l'occurrence un glacier ayant la forme d'une demi-sphère aplatie sur un plan incliné (de pente 0.3, voir coupe à l'intérieur de la Figure 1.1). Cette demi-sphère aplatie possède un rayon de 700 m et une hauteur maximale de 140 m.

Une simulation sur 100 ans avec un bilan de masse uniformément nul incorporant le glissement basal et avec pour pas respectifs d'espace et de temps $\Delta$=50 m et $\Delta t$=0.05 an est ici proposée[1]. L'évolution du volume total, donc de la masse de glace, est représentée sur la Figure 1.1 (courbe ADI, pour la signification de ADI voir plus loin). Pendant les premiers 10 ans la masse augmente d'une façon inexplicable d'environ 5 %. Bien que cet effet soit moins important (les résultats seront montrés plus tard) pour le cas réel du glacier de Saint Sorlin, ce défaut du schéma numérique a motivé l'amélioration du modèle sous la forme de la proposition d'un autre schéma numérique.

[1] Le pas de temps optimal pour $\Delta$=50 m pour ce modèle a été déterminé par Bruder (2004).

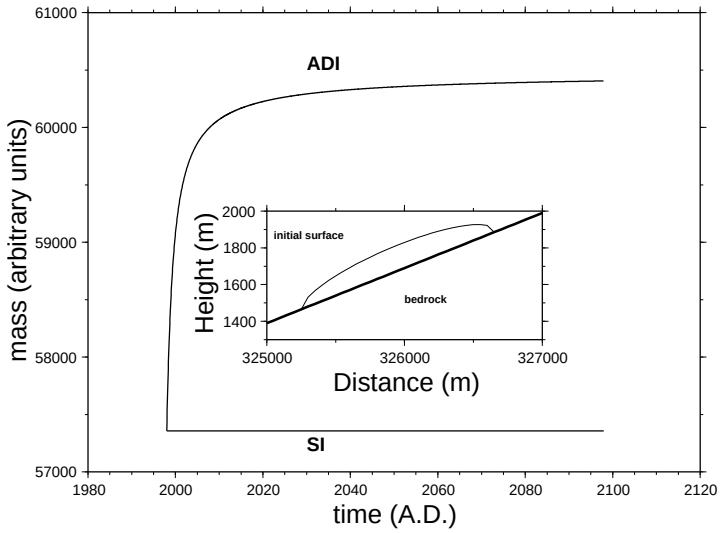



FIG. 1.1.: Illustration de la non-conservation de la masse avec le schéma ADI dans le cas d'un glacier synthétique. Évolution de la masse totale d'un glacier synthétique. Les résultats ci-représentés sont déjà corrigés des effets dus aux épaisseurs négatives comme expliqué dans le Chapitre 2, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Deficiency of the ADI method with regard to the mass conservation issue. Evolution of the total mass of a synthetic glacier. The total mass is already corrected for negative ice-thicknesses as explained in Chapter 2, from Schäfer et Le Meur (2007).`

## 1.2. Équations principales

Selon l'approximation de la couche mince décrite dans le Chapitre III.2, l'équation de transport suivante doit être résolue :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = a + \frac{2(\rho g)^3}{5}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right], \tag{1.1}$$

où $H$ est l'épaisseur de glace, $a$ le bilan de masse, $S$ la surface et $D$ un coefficient de diffusion :

$$D = H^3|\nabla S|^2\left(AH^2 + \frac{5A_s}{2}\right), \quad \text{avec} \quad |\nabla S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2. \tag{1.2}$$

On rappelle que $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}$, car $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, où $B$ représente l'altitude du socle rocheux (à priori invariable). On utilise une loi de glissement de Weertman avec $(p, q) = (3, 1)$ et

$A_s = 5.0 \times 10^{-14}\,\mathrm{m^8 N^{-3} a^{-1}}$ ainsi que $A = 1.3 \times 10^{-24}\,\mathrm{Pa^{-3} s^{-1}}$, $\rho = 8.8 \times 10^2\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$ (Lliboutry, 1965) et $g = 9.81\,\mathrm{m\ s^{-2}}$.
Cette équation est résolue avec la méthode des Différences Finies et intégrée de $t_0$ à $t_0 + \Delta t$. Le schéma choisi, déterminera la part respective des termes $S$ évalués implicitement ou explicitement dans l'Equation 1.1.

## 1.3. Discrétisation avec la méthode des Différences Finies

Pour la discrétisation, une double grille (Figure 1.2) est utilisée ; une grille principale pour les grandeurs géométriques (surface, socle rocheux, hauteur de glace,...), et une autre décalée d'un demi-pas de grille pour les vitesses et le coefficient de diffusion. Les indices entiers $i = 0, n_x + 1,\ j = 0, n_y + 1$ réfèrent à la grille principale.[2] Pour une meilleure lisibilité le coefficient de diffusion sera également numéroté avec les indices entiers $i, j$, sachant que $D_{i,j}$ réfère en fait à $D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$.

$$D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \leftrightarrow D_{i,j} \tag{1.3}$$

$D$ est alors calculé en fonction des épaisseurs et altitudes des 4 points voisins $(i, j)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ et $(i+1, j+1)$. La discrétisation spatiale est décrite en détail par Hindmarsh et Payne (1996) et celle que nous utilisons correspond à leur "method 1".
Les points de grille sont équidistants avec un pas de grille de $\Delta x = \Delta y = \Delta = 50\,m$.
Le coefficient de diffusion $D$ est composé d'une partie déformation ($D_{def}$) et d'une partie glissement ($D_{glis}$) (voir Partie III) :

$$D = H^3 |\nabla S|^2 \left( \underbrace{AH^2}_{D_{def}} + \underbrace{\frac{5A_s}{2}}_{D_{glis}} \right). \tag{1.4}$$

Pour la discrétisation de l'Equation (1.1) le calcul de plusieurs dérivés est nécessaire :

$$\frac{\partial H}{\partial t}_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{t_0+\Delta t} - H_{i,j}^{t}}{\Delta\, t_0}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{\Delta}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j}}{\Delta}. \tag{1.7}$$

Dans les équations suivantes les remarques au-dessus des symboles + et − traduisent un

[2] La zone effectivement utilisée pour la modélisation concerne les indices allant de 1 à $nx$ et de 1 à $ny$, l'extension (indices 0, $nx + 1$, $ny + 1$) permet un calcul plus facile aux bords de la grille.

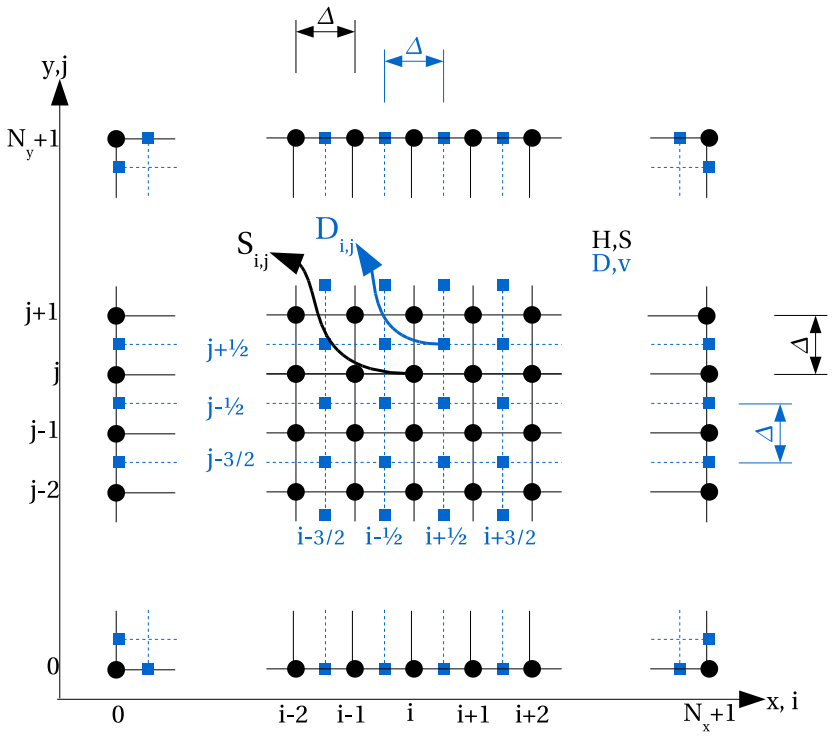



FIG. 1.2.: Double grille, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Staggered grid, from Schäfer et LeMeur (2007).`

processus de dérivation ($\partial y$ ou $\partial x$) ou de moyennage sur les points voisins (moyenne).

$$\hookrightarrow |\nabla S|^2_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left( \frac{\left(S_{i+1,j} \overset{\partial x}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial x}{-} S_{i,j+1}\right)}{2\Delta} \right)^2 + \left( \frac{\left(S_{i,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i+1,j}\right)}{2\Delta} \right)^2 \quad (1.8)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta}\left( \frac{D_{i,j} \overset{moyenne}{+} D_{i,j-1}}{2} \cdot \frac{S_{i+1,j} \overset{\partial x}{-} S_{i,j}}{\Delta} \right.$$
$$\left. \overset{\partial x}{-} \frac{D_{i-1,j} \overset{moyenne}{+} D_{i-1,j-1}}{2} \cdot \frac{S_{i,j} \overset{\partial x}{-} S_{i-1,j}}{\Delta} \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta}\left( \frac{D_{i,j} \overset{moyenne}{+} D_{i-1,j}}{2} \cdot \frac{S_{i,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i,j}}{\Delta} \right.$$
$$\left. \overset{\partial y}{-} \frac{D_{i,j-1} \overset{moyenne}{+} D_{i-1,j-1}}{2} \cdot \frac{S_{i,j} \overset{\partial y}{-} S_{i,j-1}}{\Delta} \right). \quad (1.10)$$

Le coefficient de diffusion s'écrit :

$$
\begin{aligned}
D_{i,j,def} &= A[\frac{1}{4}\left(H_{i,j} \overset{moyenne}{+} H_{i+1,j} \overset{moyenne}{+} H_{i,j+1} \overset{moyenne}{+} H_{i+1,j+1}\right)]^5 \\
&\cdot \left[\left(\frac{\left(S_{i+1,j} \overset{\partial x}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial x}{-} S_{i,j+1}\right)}{2\Delta}\right)^2\right. \\
&\left. + \left(\frac{\left(S_{i,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i+1,j}\right)}{2\Delta}\right)^2\right], \quad (1.11) \\
D_{i,j,glis} &= \frac{5}{2}A_s[\frac{1}{4}\left(H_{i,j} \overset{moyenne}{+} H_{i+1,j} \overset{moyenne}{+} H_{i,j+1} \overset{moyenne}{+} H_{i+1,j+1}\right)]^3 \\
&\cdot \left[\left(\frac{\left(S_{i+1,j} \overset{\partial x}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial x}{-} S_{i,j+1}\right)}{2\Delta}\right)^2\right. \\
&\left. + \left(\frac{\left(S_{i,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i,j}\right) \overset{moyenne}{+} \left(S_{i+1,j+1} \overset{\partial y}{-} S_{i+1,j}\right)}{2\Delta}\right)^2\right]. \quad (1.12)
\end{aligned}
$$

Finalement l'équation du transport discrétisée (Equation (1.1)) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
& S_{i,j}^{t_1} \cdot (1 + 2k\,(D_{i,j} + D_{i,j-1} + D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1})) \\
& -S_{i+1,j}^{t_2} k \cdot (D_{i,j} + D_{i,j-1}) \\
& -S_{i-1,j}^{t_2} k \cdot (D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1}) \\
& -S_{i,j+1}^{t_3} k \cdot (D_{i,j} + D_{i-1,j}) \\
& -S_{i,j-1}^{t_3} k \cdot (Di, j-1 + D_{i-1,j-1}) \\
& \qquad = S_{i,j}^{t_0} + a_{i,j}\Delta\, t, \qquad \forall i, j,
\end{aligned} \quad (1.13)
$$

avec $k = \frac{(\rho g)^3}{5}\frac{\Delta\, t}{\Delta^2}$.
Les indices $(i, j)$ de $S$ réfèrent au point grille et selon cette position $S$ sera évalué à $t_1, t_2$ ou $t_3$. Les valeurs de $t_n$ (détaillées plus tard) dépendent du schéma numérique utilisé et reflètent le degré d'implicité du schéma. Le bilan $a$ et le coefficient de diffusion $D$ ainsi que le $S_{i,j}$, du côté droit de l'équation, seront toujours évaluées à l'instant $t_0$ (de fait explicites).

Dans les paragraphes suivants le schéma numérique utilisé auparavant (appelé ADI) est décrit ainsi que le nouveau schéma (appelé SI) proposé. Une comparaison similaire a été proposée par Greve et Calov (2002) et par Hindmarsh (2001).

### 1.3.1. Méthode Alternating-Direction-Implicit (ADI)

Auparavant, la méthode utilisée était la méthode *Alternating-Direction-Implicit* (ADI) (Huybrechts, 1992). C'est une méthode en deux étapes, qui considère la résolution du système d'équation successivement selon des lignes parallèles aux axes $x$ et $y$. Son grand avantage réside dans la simplification du système d'équation se traduisant in fine en la résolution de matrices seulement tridiagonales (faciles et rapides à inverser).

Le calcul au temps $t_0$ s'effectue en deux temps. Au premier demi-pas de temps, le système est d'abord résolu suivant la ligne $i$ (direction $x$) ; les points voisins selon $y$ restant évalués explicitement, c'est-à-dire évalués à $t_0$ ($S^{t_0}_{i,j-1}$, $S^{t_0}_{i,j+1}$). Chaque équation (autant que $n_y$) contient alors trois inconnues : $S^{t_0+\frac{1}{2}\Delta t}_{i,j}$, $S^{t_0+\frac{1}{2}\Delta t}_{i+1,j}$ et $S^{t_0+\frac{1}{2}\Delta t}_{i-1,j}$, ce qui correspond à $t_1 = t_2 = t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ et $t_3 = t_0$ dans l'Equation (1.13). Ceci conduit à $n_x$ matrices tridiagonales à résoudre. L'inversion de ces matrices amène à une surface intermédiaire à l'instant $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$. Au second demi-pas on procède de la même manière selon la ligne de direction $y$ (indice $j$ variant) pour arriver à l'instant $t_0 + \Delta t$.

Les systèmes à résoudre se résument alors à des équations matricielles du type :

$$\mathcal{A}\vec{S}^{t_0+\frac{1}{2}\Delta t} = \mathcal{B}^t. \tag{1.14}$$

Ces équations sont résolues avec une méthode efficace présentée dans Huybrechts (1992). Un système d'équations du type

$$-\alpha_{i,j,t}H_{i-1,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} + \beta_{i,j,t}H_{i,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} - \gamma_{i,j,t}H_{i+1,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} = \delta_{i,j,t}, \quad i = 2, n_x - 1 \tag{1.15}$$

est résolu par substitution par l'arrière :

$$H_{n_x-1,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} = w_{n_x-1,j,t}H_{n_x,j} + g_{n_x-1,j,t}, \tag{1.16}$$

$$H_{i,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} = w_{i,j,t}H_{i+1,j,t+\frac{1}{2}\Delta t} + g_{i,j,t}, \tag{1.17}$$

avec

$$w_{2,j,t} = \frac{\gamma_{2,j,t}}{\beta_{2,j,t}}, \tag{1.18}$$

$$w_{i,j,t} = \frac{\gamma_{i,j,t}}{\beta_{i,j,t} - \alpha_{i,j,t} w_{i-1,j,t}}, \tag{1.19}$$

$$g_{2,j,t} = \frac{\delta_{2,j,t} + \alpha_{2,j,t} H_{1,j}}{\beta_{2,j,t}}, \tag{1.20}$$

$$g_{i,j,t} = \frac{\delta_{i,j,t} + \alpha_{i,j,t} g_{i-1,j,t}}{\beta_{i,j,t} - \alpha_{i,j,t} w_{i-1,j,t}}. \tag{1.21}$$

Cette procédure est appliquée durant le premier demi-pas de temps selon les lignes avec $j$ constant et ensuite au cours du deuxième demi-pas de temps selon la direction avec cette fois $i$ constant, pour compléter l'intégration en temps.

### 1.3.2. Méthode semi-implicite (SI)

L'amélioration du modèle consistant à passer à une méthode semi-implicite est motivée par l'inaptitude de la méthode ADI à proprement conserver la masse. L'équation de transport (1.1) discrétisée sur la double grille (Equation (1.13)) est re-écrite sous la forme :

$$S_{i,j}^{t_0+\Delta t} = S_{i,j}^{t_0} + c_1 a_{i,j}^{t_0} + c_2 S_{i,j}^{t_1} + c_3 S_{i-1,j}^{t_2} + c_4 S_{i+1,j}^{t_2} + c_5 S_{i,j-1}^{t_3} + c_6 S_{i,j+1}^{t_3}. \tag{1.22}$$

Cette fois-ci tous les termes en $S_{n,m}$ (excepté le premier terme à droite du signe égal) sont évalués à l'instant $t_0 + \Delta t$, c'est-à-dire $t_1 = t_2 = t_3 = t_0 + \Delta t$. Ceci amène à $n_x n_y$ équations, chacune à cinq inconnues, sous la forme d'un seul système d'équations linéaires du type :

$$\mathcal{A} \vec{S}_{i,j}^{t_0+\Delta t} = \mathcal{B}_{i,j}^{t_0}, \tag{1.23}$$

où $\mathcal{A}$ est maintenant une matrice à 5 diagonales de taille $n_x n_y$ et où $\mathcal{B}$ regroupe tous les termes qui restent explicites (ceux évalués au temps $t_0$) :

$$\mathcal{B}_{ind}^{t_0} = a_{ind} \Delta t + S_{ind}^{t_0}. \tag{1.24}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
* & * & 0 & \dots & \dots & 0 & * & 0 & \dots & \dots & 0 \\
* & * & * & \ddots & & & \ddots & * & \ddots & & \vdots \\
0 & * & * & * & \ddots & & & \ddots & * & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & * & * & * & \ddots & & & \ddots & * & 0 \\
\vdots & & \ddots & * & * & * & \ddots & & & \ddots & * \\
0 & & & \ddots & * & * & * & \ddots & & & 0 \\
* & \ddots & & & \ddots & * & * & * & \ddots & & \vdots \\
0 & * & \ddots & & & \ddots & * & * & * & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & * & \ddots & & & \ddots & * & * & * & 0 \\
\vdots & & \ddots & * & \ddots & & & \ddots & * & * & * \\
0 & \dots & \dots & 0 & * & 0 & \dots & \dots & 0 & * & *
\end{pmatrix} \tag{1.25}$$

avec

$$c_1 = 0.5 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta^2}, \tag{1.26}$$

$$A_{ind,ind-nx} = -c_1 \cdot (D^{t_0}_{i,j-1} + D^{t_0}_{i-1,j-1}), \tag{1.27}$$

$$A_{ind,ind-1} = -c_1 \cdot (D^{t_0}_{i-1,j} + D^{t_0}_{i-1,j-1}), \tag{1.28}$$

$$A_{ind,ind} = 1 + 2c_1 \cdot (D^{t_0}_{i,j} + D^{t_0}_{i-1,j-1} + D^{t_0}_{i-1,j} + D^{t_0}_{i,j-1}), \tag{1.29}$$

$$A_{ind,ind+1} = -c_1 \cdot (D^{t_0}_{i,j} + D^{t_0}_{i,j-1}), \tag{1.30}$$

$$A_{ind,ind+nx} = -c_1 \cdot (D^{t_0}_{i,j} + D^{t_0}_{i-1,j}), \tag{1.31}$$

avec l'indice $ind = (j-1) \cdot n_x + i$.
L'Equation (1.23) est résolue avec le code LaPack/Blas (LAPACK Users' Guide, 1999) et la surface du glacier est alors actualisée.

## 1.4. Comparaison des résultats des deux schémas numériques

### 1.4.1. Conservation de la masse dans un cas synthétique

Dans un premier temps le nouveau et l'ancien modèle sont comparés dans le cas du glacier synthétique (glacier "sphérique"). Cette application facilement interprétable permet de tester si le problème lié à la conservation de la masse cité dans le Paragraphe 1.1 est amélioré.

La Figure 1.1 représente l'évolution de la masse pour les deux méthodes numériques, au cours de la même expérience que décrite dans l'introduction de la problématique ; 100 ans de simulation avec un bilan uniformément nul, avec un glissement, et pour des

pas d'espace et de temps respectivement de $\Delta = 50\,\mathrm{m}$ et $\Delta\, t$=0.05 an. Le résultat est très satisfaisant, dans la mesure où le nouveau modèle conserve parfaitement la masse dès le début.

### 1.4.2. Simulation de l'évolution du glaicer de Saint Sorlin

#### Conservation de la masse

Dans un deuxième temps, nous avons testé l'impact de ce changement du nouveau schéma numérique sur un cas réel avec l'application au glacier de Saint Sorlin (France). Une simulation sur 100 ans à partir de la surface de 1998 avec un bilan de masse uniformément nul est à nouveau proposée. Un bilan uniformément nul permet un meilleur contrôle de la conservation de la masse du modèle. Comme le montre la Figure 1.3, le schéma SI conserve parfaitement la masse alors que le glacier en perd avec le schéma ADI. Par contre, la différence est beaucoup moins importante qu'avec le glacier synthétique dans la mesure où le glacier perd cette fois-ci moins de 0.2% de sa masse en 100 ans.

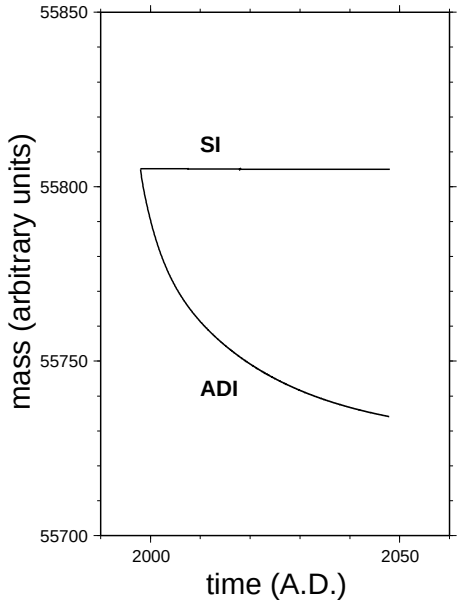



FIG. 1.3.: Évolution de la masse totale du glacier de Saint Sorlin avec les deux schémas numériques. La même correction concernant les épaisseurs négatives que sur la Figure 1.1 est appliquée, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Evolution of the total mass for the glacier of Saint Sorlin with both numerical schemes. The same correction for negative ice thicknesses as in Figure 1.1 is applied, from Schäfer et Le Meur (2007).`

### Comparaison en terme de topographie de surface glaciaire

#### Simulation stationnaire

Pour un glacier réel, il nous a semblé important de comparer les deux approches en terme de topographie de surface glaciaire. Un cas plus réaliste est ici choisi : une simulation stationnaire (300 ans) partant de la surface de 1998 avec le bilan moyen mesuré de la période 1957-1997 est comparé pour les deux modèles numériques. Ce champ de bilan est montré sur la Figure 3.2. Les surfaces finales sont alors comparées (Fig. 1.4). Quelques

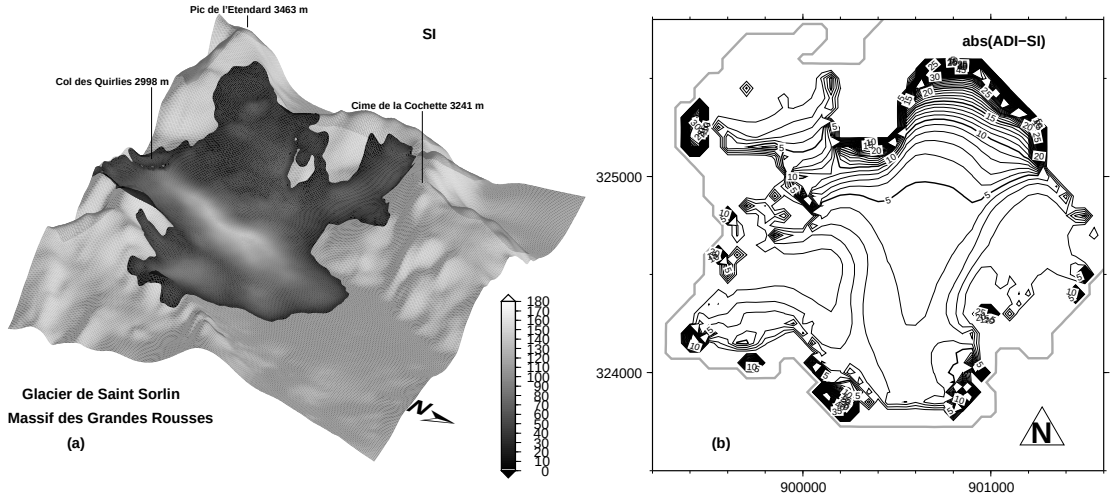



FIG. 1.4.: 300 ans de simulation stationnaire de Saint Sorlin forcés par le bilan moyen mesuré de la période 1957-1997 (Figure 3.2). En (a) l'épaisseur de glace avec le schéma SI est présentée ainsi que le socle, en (b) la différence absolue de l'altitude de la surface (en m) entre les deux schémas est montrée, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
300 years of steady state simulation of the glacier of Saint Sorlin driven by the 1957-97 averaged measured mass balance (Figure 3.2). In (a) the ice-thickness with the SI scheme as well as the bedrock are represented, in (b) the absolute value (in m) of the difference in elevation between the two schemes is shown, from Schäfer et Le Meur (2007).

petites différences sont observées, surtout aux bords, mais globalement on trouve la même surface.
Quant à la conservation de la masse, le schéma SI reste de nouveau plus performant (les résultats ne sont pas montrés).

**Évolution sur la période 1982-2004**

Enfin les deux méthodes sont comparées lors d'une simulation évolutive dans le temps. La période 1982-2004 est choisie puisque elle servira également dans le Chapitre 4 (notamment du fait d'une bonne connaissance des bilans mesurés sur cette période). Dans un premier temps on s'est contenté de prendre comme surface initiale la surface de 1998 étant donné que celle de 1982 n'est pas connue. Cette approximation semble justifiée surtout dans le cadre d'une comparaison des modèles et non pas d'une interprétation des surfaces elles-mêmes.

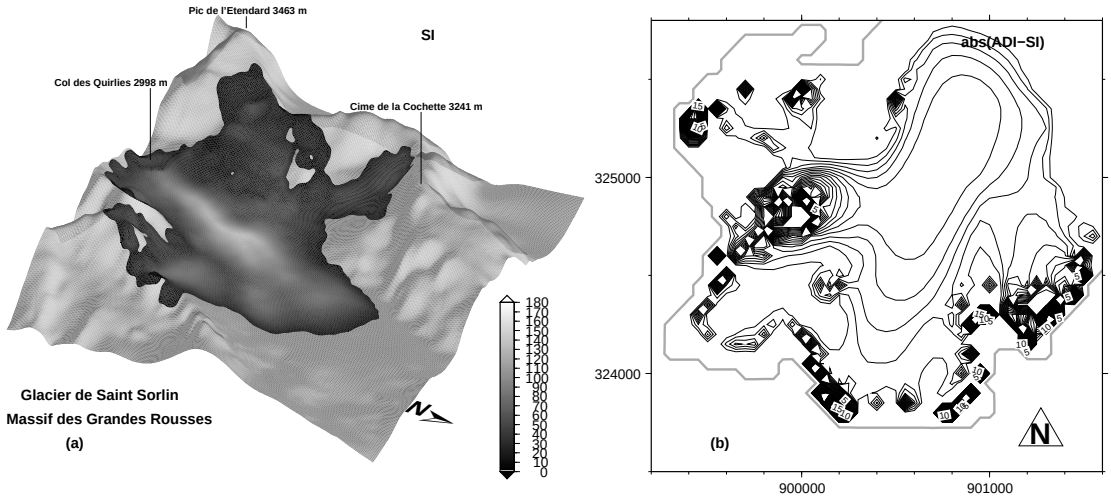



FIG. 1.5.: Simulation évolutive du glacier de Saint Sorlin sur la période 1982-2004 (même représentation que sur la Figure 1.4).
`Time-dependent simulation of the Saint Sorlin glacier over the 1982-2004 period (same output as on Figure 1.4).`

Quelques petites différences apparaissent aux bords (cf. Fig. 1.5), mais globalement la dynamique est assez peu affectée.

Puisque la sensibilité de la dynamique glacier de Saint Sorlin au schéma numérique est limitée, les résultats précédents, comme ceux de Le Meur et Vincent (2003), peuvent toujours être considérés comme valables. Néanmoins, comme quelques cas théoriques sont très sensibles à ce changement, on peut facilement imaginer que dans certaines configurations réelles, le changement vers le schéma SI pourrait offrir une réelle amélioration.

## 1.5. Efficacité et choix du pas de temps

Pour trouver un pas de temps adapté au schéma SI, une étude similaire à celle utilisée par Bruder (2004) avec la méthode ADI, est utilisée. Pour des comparaisons entre les deux méthodes un pas de temps de 0.05 ans, comme optimisé initialement pour le schéma ADI, est maintenu. Pour des nouvelles simulations avec le schéma SI le pas de temps a pu être augmenté à 0.1 ans. Ce pas de temps aurait même pu être agrandi jusqu'à 0.3 ans, mais on a préféré prendre un pas de temps plus petit pour être sûr de ne pas rencontrer les traditionnels effets dus à un pas de temps trop grand.

Pour comparer l'efficacité respective des deux schémas numériques, une simulation de 100 ans sous un bilan de masse uniformément nul avec le même glacier synthétique que précédemment est proposée. Un pas de temps de 0.05 an pour le schéma ADI et de 0.3 an pour le schéma SI ont été choisis. Le schéma ADI nécessite 19 s de temps CPU, le SI 74 s. Même si le nombre d'inversions de matrices est nettement diminué et même si un pas de temps plus grand devient possible, le schéma SI reste plus consommateur en temps CPU.

Néanmoins avec des tailles de grille comme utilisées ici, cette augmentation d'un facteur 3 ou 4 reste tout à fait acceptable comparée au gain en précision.

## 1.6. Explication de la non-conservation de la masse

On vient de constater que le schéma ADI ne conserve pas bien la masse. L'explication de ce phénomène est due à la formulation numérique du schéma. Avec un bilan de masse nul, l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \vec{\nabla}\vec{q} \tag{1.32}$$

devient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}. \tag{1.33}$$

Si la masse est globalement conservée, l'intégration spatiale de $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$ sur l'ensemble du domaine doit être égale à zéro.

En comparant l'Equation (1.33) avec l'Equation (1.1) on obtient :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2(\rho g)^3}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right), \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{2(\rho g)^3}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right). \tag{1.35}$$

Ces expressions sont discrétisées à l'aide des Equations (1.9) et (1.10).

Après le premier pas de temps avec le schéma ADI, les dérivés des flux suivant les

directions $x$ et $y$ se calculent comme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial x} &= \frac{c}{2\Delta^2}\Big(D_{i,j}(S_{i+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i-1,j}(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) \\
&+ D_{i,j-1}(S_{i+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i-1,j-1}(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big), \qquad (1.36)\\
\frac{\partial q_y}{\partial y} &= \frac{c}{2\Delta^2}\Big(D_{i,j}(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i,j-1}(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,j-1}^{t_0}) \\
&+ D_{i-1,j}(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i-1,j-1}(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,j-1}^{t_0})\Big), \qquad (1.37)
\end{aligned}$$

avec $c = \frac{2(\rho g)^3}{5}$.

L'intégration spatiale de $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ selon la direction $x$ donne pour chacun des $j$ :

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_x} \frac{\partial q_x}{\partial x} &= \frac{c}{2\Delta}\Big(\Big(D_{1,j}(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{0,j}(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big) \\
&\quad + \Big(D_{1,j-1}(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{0,j-1}(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big) \\
&\quad + \Big(D_{2,j}(S_{3,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{1,j}(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big) \\
&\quad + \Big(D_{2,j-1}(S_{3,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{1,j-1}(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \Big(D_{N_x,j}(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{N_x-1,j}(S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big) \\
&\quad + \Big(D_{N_x,j-1}(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{N_x-1,j}(S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\Big)\Big) \\
&= -D_{0,j}(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{0,j-1}(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) \\
&\quad +0 \\
&\quad + D_{N_x,j}(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) + D_{N_x,j-1}(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}). \qquad (1.38)
\end{aligned}$$

Comme le domaine est choisi de telle façon que les bords restent sans glace, les coefficients de diffusion aux points $(0,j)$, $(0,j-1)$, $(N_x,j)$ and $(N_x,j-1)$ s'annulent. Finalement l'intégration s'annule.

Durant le même demi-pas de temps, l'intégration de $\frac{\partial q_y}{\partial y}$ selon la direction $y$ donne :

$$\begin{aligned}\Delta \cdot \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad = \quad & \frac{c}{2\Delta}\Big(\Big(D_{i,1}(S_{i,2}^{t_0} - S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i,0}(S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,0}^{t_0})\Big) \\ & + \Big(D_{i-1,1}(S_{i,2}^{t_0} - S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i-1,0}(S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,0}^{t_0})\Big) \\ & + \Big(D_{i,2}(S_{i,3}^{t_0} - S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i,1}(S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,1}^{t_0})\Big) \\ & + \Big(D_{i-1,2}(S_{i,3}^{t_0} - S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) - D_{i-1,1}(S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,1}^{t_0})\Big) \\ & \ldots \quad \Big), \quad \text{pour tous les } i. \end{aligned} \tag{1.39}$$

A cause des termes restants sous la forme

$$D_{l,k}\left((S_{l,k+1}^{t_0} - S_{l,k+1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}) + (S_{l,k}^{t_0} - S_{l,k}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}})\right), \qquad l = i, i+1, k = 1..N_y - 1, \tag{1.40}$$

l'intégration spatiale de $\frac{\partial q_y}{\partial y}$ (et ainsi celle de $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$) durant le premier demi-pas de temps n'est pas nulle.

Un calcul analogue dans le deuxième pas de temps mène à un résultat similaire qui n'annule pas celui du premier demi-pas de temps. Notre implémentation du schéma ADI ne conserve alors intrinsèquement pas la masse.

Il est possible d'imaginer une autre implémentation du schéma ADI qui conserverait la masse, mais cette implémentation pose des problèmes au niveau de la stabilité numérique. Pour garantir $\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_x} \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0$ ainsi que $\Delta \cdot \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$ à chaque demi-pas de temps, une autre implémentation peut être proposée :
Jusqu'à présent, tous les termes $S_{i,j}$ dans la première ligne de l'Equation (1.13) étaient considérés comme implicites au cours des deux demi-pas de temps. Mais on peut aussi imaginer de considérer $S_{i,j}(1 + k\,(D_{i,j} + D_{i,j-1} + D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1}))$ de façon implicite et garder $S_{i,j}(k\,(D_{i,j} + D_{i,j-1} + D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1}))$ explicite. Au cours du premier demi-pas de temps ceci amène, pour $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ à la même expression qu'avant. Par contre l'expression pour, $\frac{\partial q_y}{\partial y}$ devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_y}{\partial y} \quad = \quad & \frac{c}{2\Delta^2}\Big(D_{i,j}(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0}) - D_{i,j-1}(S_{i,j}^{t_0} - S_{i,j-1}^{t_0}) \\ & + D_{i-1,j}(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0}) - D_{i-1,j-1}(S_{i,j}^{t_0} - S_{i,j-1}^{t_0})\Big). \end{aligned} \tag{1.41}$$

On peut maintenant facilement montrer que $\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_y} \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$. Et bien sûr un calcul analogue donne le même résultat avec le deuxième demi-pas de temps.

Même si ce schéma conserve intrinsèquement la masse, il a dû être abandonné car il devient numériquement instable sous certaines conditions géométriques, même pour des pas de temps anormalement petits. On a en effet observé, que, dans certains cas avec le glacier synthétique, suivant la pente du socle et l'épaisseur de glace, des pas de temps de l'ordre de 0.001 ans étaient parfois nécessaires ! Cela laisse supposer que dans le cas d'un glacier réel, des pas de temps excessivement petits devraient être choisis pour être certain d'éviter toute instabilité numérique. L'utilisation d'un schéma de type ADI assurant à la fois la bonne conservation de la masse et un minimum de stabilité numérique s'est donc avéré impossible.
Quant au schéma SI, on peut montrer facilement qu'il conserve la masse, car $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial q_y}{\partial y}$ ont tous les deux la même expression que le terme $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ calculé ci-dessus pour le schéma ADI classique (il faut remplacer $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ par $t_0 + \Delta t$ dans l'Equation (1.36)). Son intégration donne systématiquement zéro.

Un regard plus précis sur les termes restant dans le cas du schéma ADI (Expression (1.40)) montre que la non-conservation de la masse devrait être plus prononcée là où le glacier subit les plus fortes variations d'épaisseur. Ceci est confirmé par l'expérience consistant à simuler le glacier synthétique (glacier "sphérique") pendant 5 ans avec le schéma SI, puis de regarder la différence en terme d'épaisseur finale à l'issue d'un dernier pas de temps calculé à partir des deux schémas (voir cette différence représentée sur la Figure 1.6).
Comme le schéma SI conserve la masse, les points les plus probables à l'origine de la non-conservation de la masse sont ceux où s'observe une différence entre les deux schémas. Comme montré sur la Figure 1.6, ces régions correspondent parfaitement aux régions où le glacier a évolué le plus durant ce dernier pas de temps. Cela confirme le lien entre la non-conservation de la masse et le taux de changement d'épaisseur. Il n'est alors pas surprenant que la zone vers le front soit la plus concernée, là où le glacier initial est le plus éloigné de son état d'équilibre (une très fine couche de glace en théorie). Avec le temps, le glacier s'approchant de cet état, les changements d'épaisseurs deviennent plus faibles et la masse finit même par se stabiliser avec le schéma ADI.
Le fait que le glacier de Saint Sorlin soit beaucoup moins sensible au problème de la conservation de la masse devient maintenant clair : L'explication se trouve dans la faible dynamique du glacier. En effet, avec une surface de départ de 1998 et un bilan de masse uniformément nul, les changements en épaisseur sont réduits, car uniquement dus à l'écoulement de glace d'un glacier avec des pentes très faibles.

L'Expression (1.40) suggère aussi une possible dépendance de l'erreur dans la masse liée au pas de temps. En fait, on peut résumer cette expression à $D \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \Delta t$. Cela veut donc dire qu'en cas de coefficient de diffusion indépendant du temps, l'erreur cumulée sur la masse peut s'écrire comme $D(S_{\text{final}} - S_{\text{initial}})$ et devient indépendante de la valeur choisie pour $\Delta t$. Or, $D$ change d'un pas de temps a l'autre, l'erreur devient fonction du pas de temps (fonction croissante). Dans le cas particulier du glacier synthétique un comportement parfaitement linéaire a même été observé.

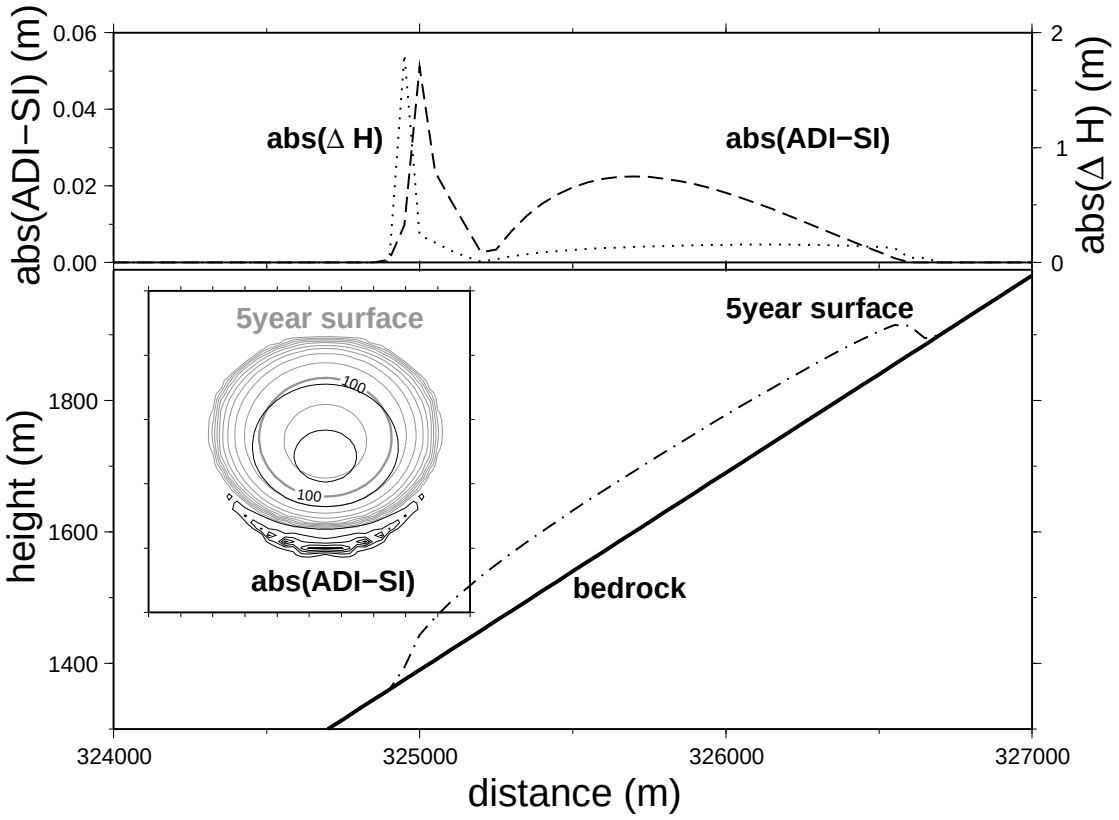



FIG. 1.6.: Localisation de l'erreur dans la non-conservation de la masse avec le schéma ADI. La figure du haut est un profil longitudinal qui montre la différence entre les deux schémas (abs(ADI-SI), tirets) et le changement en épaisseur avec le schéma SI (abs($\Delta H$), pointillés) au cours du dernier pas de temps comparatif. L'encadré de la figure du bas montre que l'erreur sur la masse (contours sombres) se concentre dans la région proche du front où l'épaisseur de glace change le plus, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Localisation of the error on mass conservation with the ADI scheme. The upper panel is a longitudinal profile showing both the difference between the two schemes (abs(ADI-SI), dashed curve) and the ice thickness change (abs($\Delta H$), dotted curve) with the SI method during the last comparative time-step. From the inset in the lower panel, it is clear that this mass error (dark contours) concentrates over the glacier area near the snout where the glacier undergoes the largest ice thickness changes, from Schäfer et Le Meur (2007).

# 2. Amélioration supplémentaire par le traitement des épaisseurs négatives

Une autre petite amélioration est proposée pour répondre au problème des épaisseurs négatives que peut produire le modèle (voir plus bas). Auparavant ces petites épaisseurs négatives étaient simplement remises à zéro pour éviter un crash du modèle. Cette mise à zéro n'est bien sûr pas satisfaisante car elle nuit à la bonne conservation de la masse. Pour le schéma SI elle entraîne par exemple une perte d'environ 20 % au bout de 100 ans de simulation du glacier de Saint Sorlin avec un bilan de masse uniformément nul.

Quand on considère l'équation de continuité (1.32) dans sa forme discrète :

$$H^{t_0+\Delta t} = H^{t_0} + \Delta t \cdot (a - \vec{\nabla}\vec{q}), \tag{2.1}$$

il apparaît qu'une épaisseur négative peut être la conséquence d'un bilan de masse négatif et/ou d'une advection qui dépasse la quantité de glace disponible.
Le problème de l'erreur dans la masse qui résulte purement du bilan de masse (surtout vers le bord inférieur du glacier) est traité en détail par Van den Berg et al. (2006). Dans le présent travail on s'est contentés dans ce cas précis de simplement remettre l'épaisseur de glace à zéro dans ce cas.
Dans les deux prochains paragraphes, les méthodes pour traiter les épaisseurs négatives dues à l'advection sont proposées. On rappelle à cette occasion que les résultats des Figures 1.1 et 1.3 étaient déjà corrigés par ces méthodes.

## 2.1. Points sans glace au bord du glacier

A cause de la double grille et de la façon de calculer le coefficient de diffusion, de la glace peut en principe s'écouler d'un point sans glace vers un point voisin comme montré dans la Figure 2.1(a). Dans ce cas, les coefficients dans la matrice sont corrigés de manière ad-hoc afin que les flux sortants d'un tel point ainsi que les flux correspondants rentrant chez ses voisins soient nuls.
Si un tel point subit un bilan de masse positif, le flux sortant reste nul comme décrit ci-dessus et l'épaisseur finale est mise à la valeur du bilan de masse ce qui amène une petite erreur.
Ce problème semble être responsable de la plus grande partie de l'erreur, car dans la simulation qui a été présentée précédemment (100 ans des simulation avec un bilan de masse uniformément nul sur Saint Sorlin) l'erreur est réduite de 20% à seulement 0.1% par application de la correction.

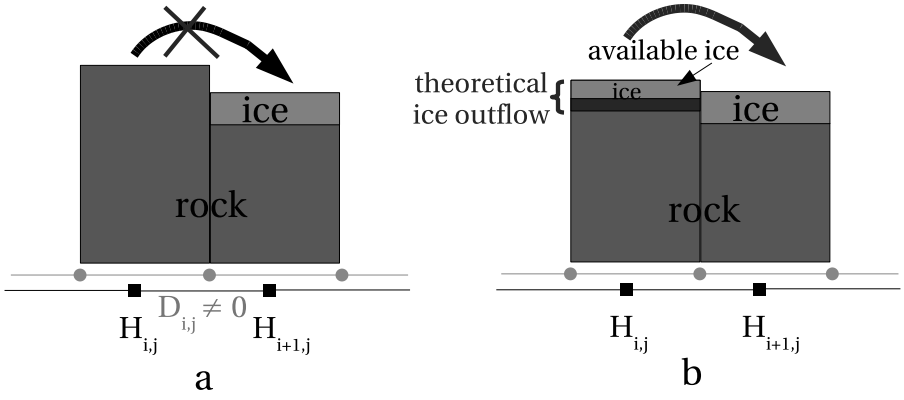



FIG. 2.1.: Deux conditions d'occurrence des épaisseurs négatives comme conséquence d'un calcul de flux de glace surestimé du modèle, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`The two conditions of occurrence of negative ice-thicknesses resulting from an overestimated ice flow computation by the model, from Schäfer et Le Meur (2007).`

## 2.2. Points avec peu de glace

Ce problème concerne surtout des points aux bords du glacier pour lesquels le flux de glace théorique dépasse la quantité de glace réellement disponible comme montré sur la Figure 2.1(b). Ceci est possible car le flux sortant est calculé à partir des quatre coefficients de diffusion voisins qui sont eux-mêmes calculés à partir des moyennes des épaisseurs et pentes voisins. En effet, les points concernés par ce problème sont quasiment toujours des points aux bords avec moins de 10 cm de glace et avec au moins un de leurs voisins avec plus d'1 m de glace, ce qui induit une surestimation du coefficient de diffusion. Ce problème est alors un problème géométrique, ce qui est confirmé par le fait que des variations du pas de temps n'ont aucun effet sur lui. On soupçonne, par contre, une grande sensibilité au pas de grille.
Pour ces points l'épaisseur est simplement remise à zéro comme il était fait initialement. Idéalement on devrait de même restreindre le flux sortant à la quantité de glace réellement disponible pour assurer la conservation de la masse, mais cela n'est pas possible d'une façon simple car le flux sortant est partagé entre les quatre points voisins. On rappelle cependant le faible impact de ce phénomène comparé à l'erreur précédente.

# 3. Étude de la zone en amont de la rimaye

Le glacier est limité en amont par la rimaye. Au dessus, la glace ne peut se former en quantité car la pente est trop élevée. La neige n'y tient pas assez longtemps pour se transformer en glace, elle est en effet rapidement transportée généralement plus bas sur le glacier (redistribution par le vent, avalanches) où elle apportera une contribution supplémentaire au bilan de masse.
Le champ de bilan tel que mesuré sur le glacier sous la rimaye incorpore implicitement cette contribution. Comme il n'existe pas de points de mesure en amont de la rimaye, le bilan de masse sur cette zone est obtenu par extrapolation du champ mesuré sur le glacier. Il est donc surestimé car implicitement il comptabilise deux fois la même neige.
Si par contre le champ de bilan est par exemple issu d'un modèle de bilan de masse (Le Meur et al., 2007), cette redistribution devrait en toute rigueur être explicitement prise en compte dans les processus modélisés.
Quelle que soit la provenance du bilan, l'amélioration proposée consiste à empêcher la glace de se développer aux points remplissant les trois conditions : (i) le point est au-dessus de la rimaye, (ii) le point était initialement sans glace (pour Saint Sorlin la surface de 1998 est prise comme surface de référence), (iii) la pente au niveau de ce point est supérieure à un certain seuil. Bien évidement, cette modification autorise toujours le glacer à progresser sur des régions plus plates si le bilan de masse le permet.
Des simulations de la surface stationnaire en partant de la surface de 1998 et en forçant le modèle avec le champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999, ont donné des indications importantes sur l'importance de cet effet. Dans le cadre de ces simulations, le schéma SI a été exclusivement utilisé.

## 3.1. Effets sur la dynamique du glacier

Une simulation stationnaire en partant de la surface de 1998 avec le champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999 est proposée. L'évolution de la masse au cours du temps et la surface finale sont montrés sur la Figure 3.1.
Le résultat est complètement irréaliste par rapport à ce que l'on sait sur le bilan sur cette période (Fig. 3.2). Malgré un bilan de masse spécifique négatif d'environ -0.25 m w. e. $a^{-1}$ (Le Meur et Vincent, 2003) le glacier gagne de la masse. Cette surface, après 300 ans de simulation, sera appelée dès maintenant "*fausse* surface stationnaire". En plus, l'état stationnaire n'est atteint qu'après 500 ans ce qui est beaucoup plus long que les 150-200 années observées par Le Meur et Vincent (2003), partie droite de la Figure 3.1.

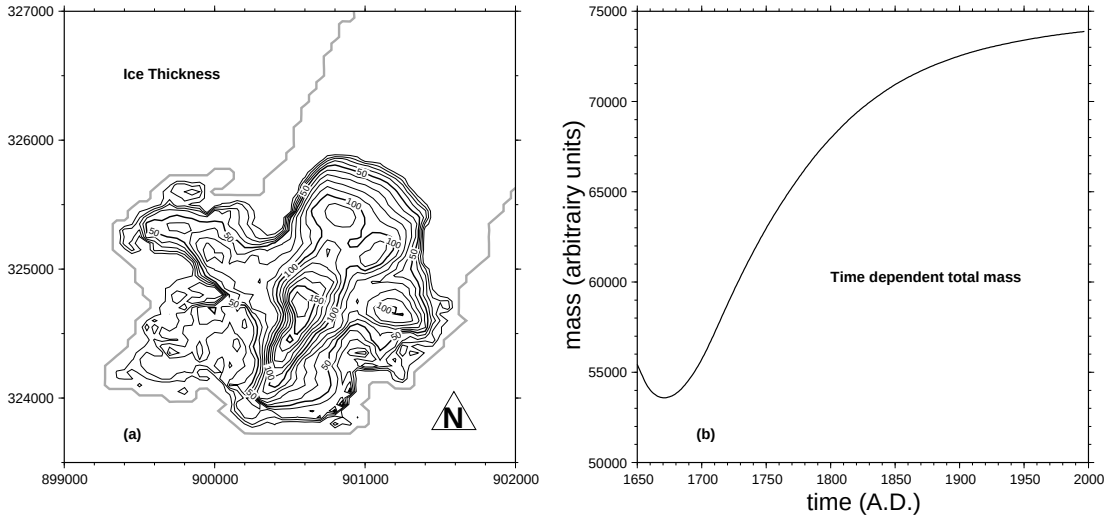



FIG. 3.1.: Simulation stationnaire en partant de la surface de 1998 avec le champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999, glacier de Saint Sorlin, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Steady state simulation starting from the 1998 surface with the 1957-1999 average mass balance field, Saint Sorlin glacier, from Schäfer et Le Meur (2007).`

Le glacier est beaucoup trop long et des points au dessus de la rimaye se chargent en glace sur des pentes trop fortes pour être bien englacées en réalité. Cela nous a donc amenés à définir une "*zone interdite*", c'est-à-dire la zone au dessus de la rimaye, initialement sans glace et dont la pente est supérieure à un certain seuil.
Un seuil de 0.7 (35°) a donné un résultat très satisfaisant (Fig. 3.3), le glacier perd de la masse en accord avec le bilan de masse mesuré.
Cette surface est atteinte après environ 200 ans (partie droite de la Figure 3.3) et sera appelée par la suite la "*vraie* surface stationnaire". Sur la Figure 3.4 la différence entre la "*fausse*" surface (sans seuil) et la "*vraie*" (avec seuil) est également présentée. On retrouve bien l'excès de glace au front du glacier, mais aussi la glace qui colonise les zones au-dessus de la rimaye. Une étude sur la trajectoire des particules de glace (voir ci-après) confirme la nécessité de la mise en place de cette "*zone interdite*" pour obtenir une dynamique glaciaire réaliste.

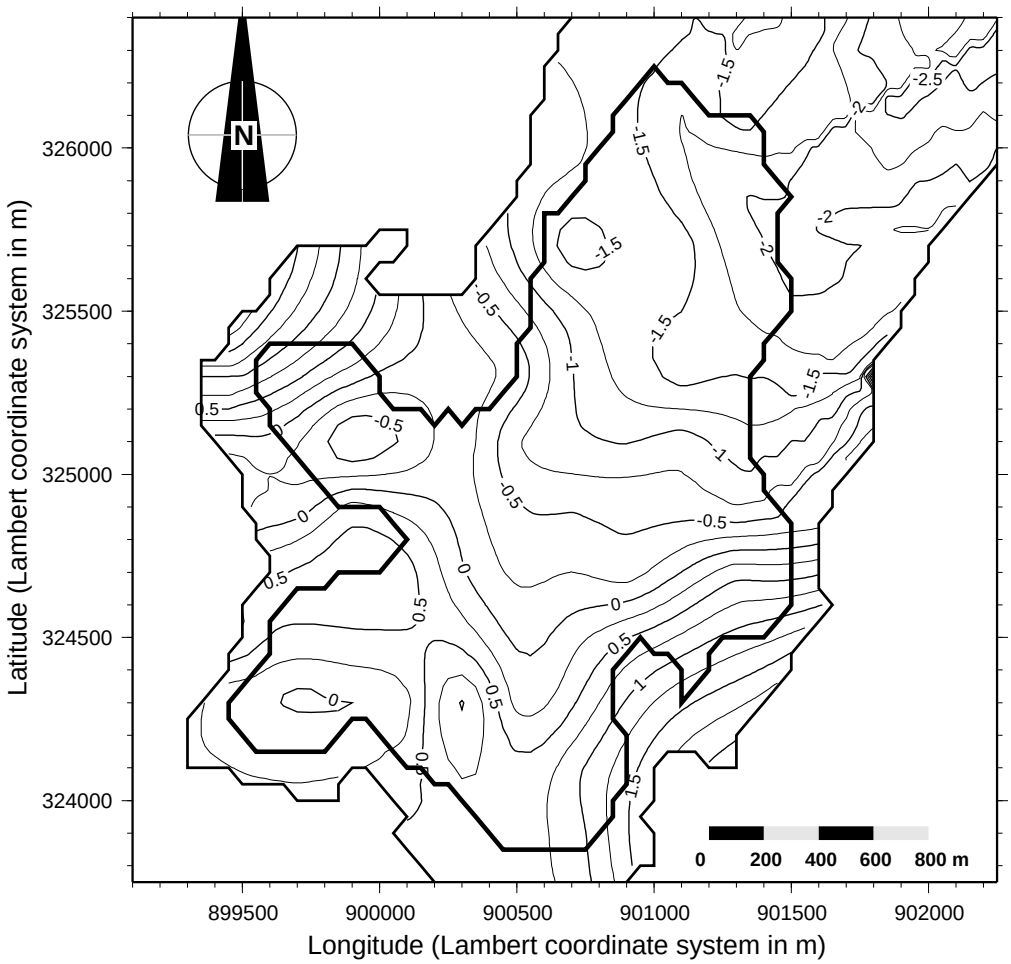



FIG. 3.2.: Champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999 du glacier Saint-Sorlin, adapté de Le Meur et Vincent (2003).
`1957-99 average mass balance field for the Saint Sorlin glacier, adapted from Le Meur et Vincent (2003).`

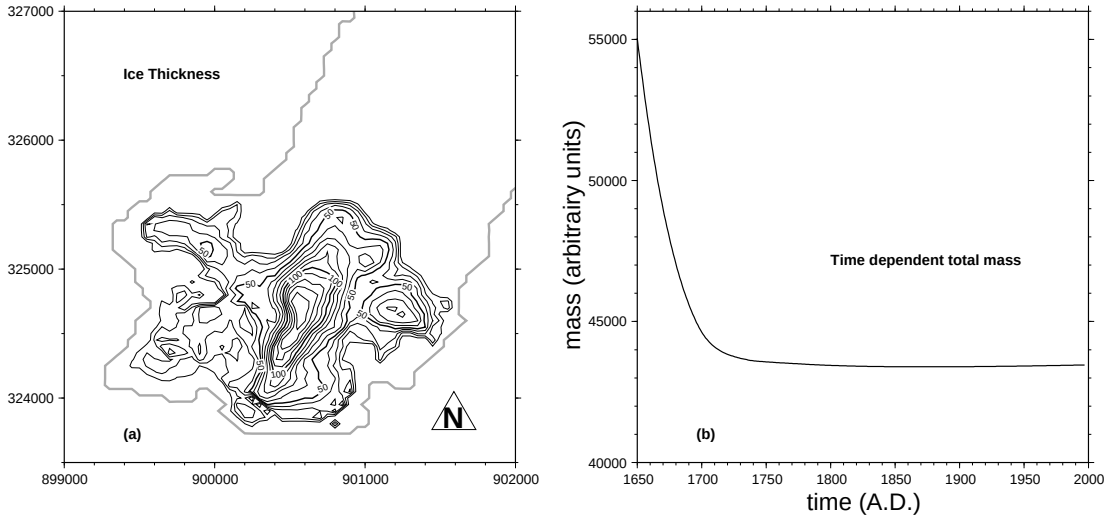



FIG. 3.3.: Simulation stationnaire améliorée (Saint Sorlin), après application du critère de non-colonisation dans la partie supérieure du glacier, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Improved steady state simulation (Saint Sorlin glacier), with application of the non-colonisation criterion in the upper part of the glacier, from Schäfer et Le Meur (2007).`

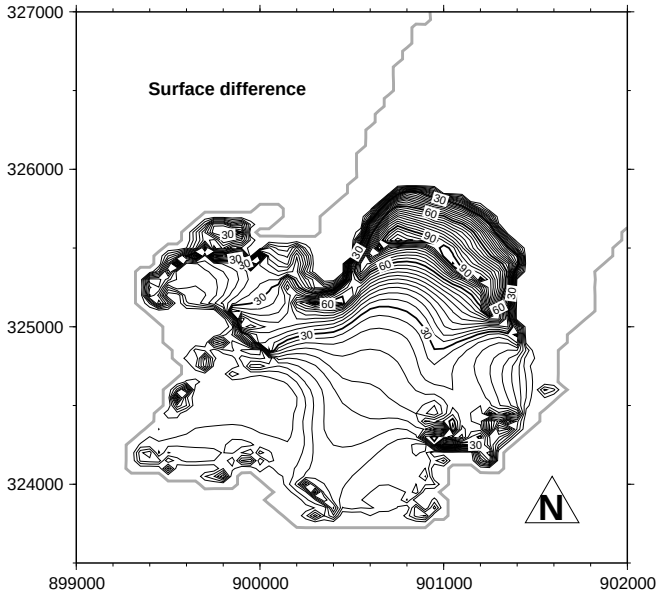



FIG. 3.4.: Différence entre la *fausse* et la *vraie* surface stationnaire, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Difference between the` *wrong* `and` *correct* `surface, from Schäfer et Le Meur (2007).`

## 3.2. Trajectoires des particules de glace

Les flocons de neige qui se déposent en zone d'accumulation sur le glacier, s'enfoncent et se transforment en glace pour réapparaître et fondre plus tard en surface dans la zone d'ablation. Ces trajectoires sont étudiées sur la *fausse* et la *vraie* surface stationnaire.

Le calcul des trajectoires se fait de la façon suivante par itération :
A l'itération $n$, à l'endroit $x_n, y_n, z_n$ le champ de vitesse $(u, v, w)$ est calculé. La position à l'itération $n+1$ $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ est alors donné par :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot u, \tag{3.1}$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot v, \tag{3.2}$$
$$z_{n+1} = z_n + \Delta t \cdot w. \tag{3.3}$$

Dans le cadre de la SIA les vitesses peuvent être calculées analytiquement et sont données dans le Chapitre III.2.
Le point de départ $x_0, y_0$ est choisi librement, $z_0$ est alors l'altitude de la surface à cet endroit. L'itération est arrêtée quand la particule arrive en surface. $\Delta t$ est choisi à 0.05 an[1].
A chaque itération, toutes les variables sont déterminées par une interpolation bilinéaire des quatre points de grille voisins.

A titre d'exemple, la trajectoire d'une particule de glace, déposée au dessus de 3000 m dans la zone d'accumulation est représentée sur la Figure 3.5 en plus de quelques particules qui se sont déposées le long de son chemin en surface. Ces trajectoires sont bien centrées autour de la ligne d'équilibre.
Sur la Figure 3.6 les trajectoires pour quelques particules sont comparés pour la *vraie* et la *fausse* surface. De légers changements de trajectoire sont observables.

Enfin, les trajectoires d'une quinzaine de particules déposées sur la zone *interdite* de la *fausse* surface sont étudiées (étoiles sur la Figure 3.7), lesquelles, dans le cas d'une simulation stationnaire avec le bilan moyen de la période 57-99, remplissent effectivement les critères de non-colonisation (ne sont pas autorisées à se déposer en cas d'application du critère). Le fait que la majorité de ces particules achèvent leur trajet au delà du front de la *vraie* surface stationnaire, confirme tout l'intérêt de l'application du critère de non colonisation au dessus de la rimaye.

[1] Les trajectoires n'étaient pas sensibles à des variations de $\Delta t$ entre 0.01 an et 0.1 an.

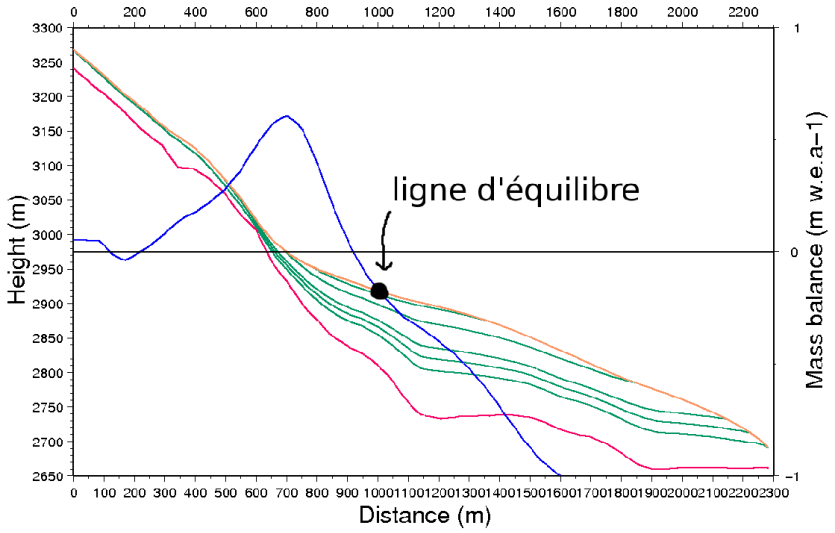



FIG. 3.5.: Trajectoires au sein du glacier d'une particule déposée dans la partie haute à plus de 3000 m d'altitude (vert). Ont aussi été rajoutées les trajectoires d'autres particules (vert) déposées plus bas le long du cheminement cette première particule. La surface du glacier est figurée en jaune, celle du socle en rouge et le bilan de masse en bleu.
`Flow path of an ice particle deposited above 3000 m on the upper part of the glacier (green). Also featured are the particles deposited at lower altitudes above the trajectory of this first particle (green). The glacier and bedrock surfaces are represented in yellow and red respectively, and the mass balance in blue.`

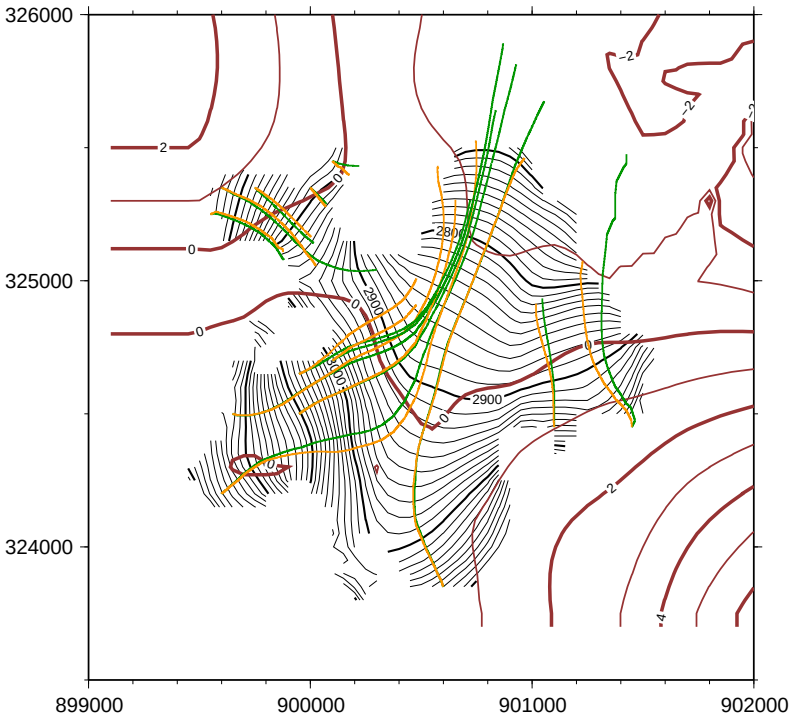



FIG. 3.6.: Comparaison des trajectoires sur les différentes surfaces stationnaires (en vert sur la *fausse*, en jaune sur la *vraie*)
`Comparison of particle trajectories on both the` *wrong* `(green) and the` *correct* `(yellow) steady-state surfaces.`

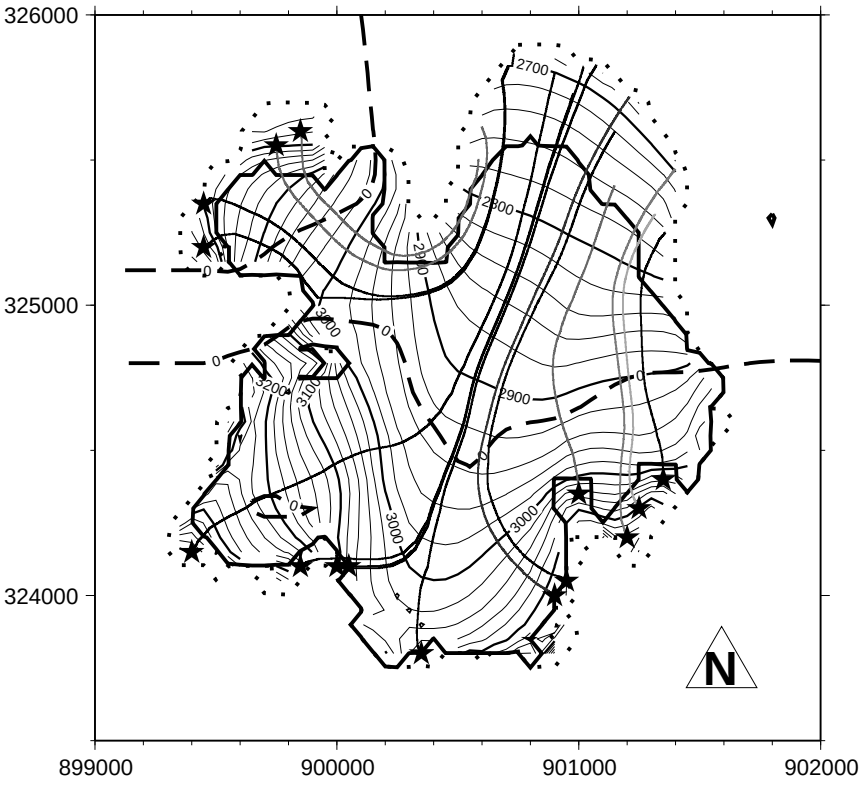



FIG. 3.7.: Trajectoire des particules issues la *zone interdite* (étoiles). Plus la couleur est foncée, plus la durée entre le dépôt et la re-émergence de la particule est grande. Les deux limites du glacier stationnaire sont aussi figurées ; en continu lorsque le critère non-colonisation est appliqué, en pointillé sinon. La ligne d'équilibre est aussi représentée en tirets, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
`Trajectories followed by ice particles deposited in the` *'forbidden zone'* `(stars), the darker the featured trajectories, the longer the corresponding times between deposition and re-emergence. The two glacier extents with (full line) and without (dotted line) ice settling restriction are also shown as well as the equilibrium line (dashed line indicating zero mass balance), from Schäfer et Le Meur (2007).`

## 3.3. Étude annexe sur l'âge de la glace

L'étude sur les trajectoires a aussi servi à une estimation de l'intervalle de temps sur tout le glacier entre le dépôt d'une particule dans la zone d'accumulation et la sa réapparition en surface en zone d'ablation. La Figure 3.8 représente cet intervalle de temps à l'aide d'un codage couleur. Comme le montre la figure, les trajectoires les plus longues s'observent avec les particules déposées dans les partie supérieures avec des durées de l'ordre de 200 ans.

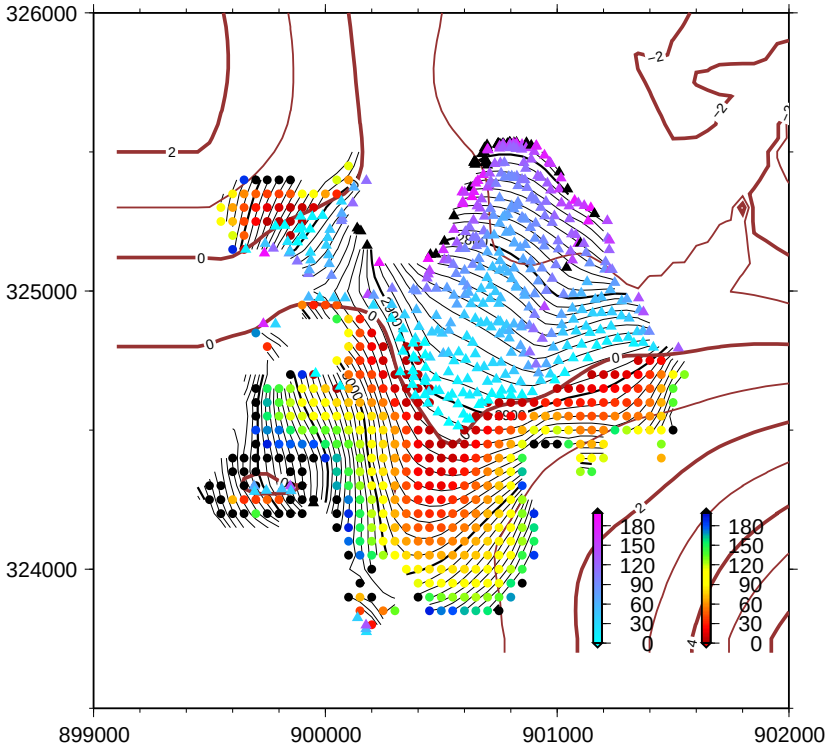



FIG. 3.8.: Durée de trajet des particules de glace au sein du glacier. En chaque point de grille de la zone d'accumulation une particule de glace se déposant (figurée par un rond) est suivie jusqu'à son lieu de re-émgence en zone d'ablation (figuré par un triangle). Qu'il s'agisse du lieu de dépôt ou de re-émergence, la couleur indique la durée du trajet, cependant pour la clarté de la figure, deux échelles distincts de couleurs ont dû être choisies pour la zone d'accumulation et la zone d'ablation.
`Duration of the ice particles flow path within the glacier. Each ice particle deposited on grid points in the accumulation zone (featured by a circle) is tracked until its re-emergence in the ablation zone (featured by a triangle). For both deposition and re-emergence, the color indicates the duration of the particle flow path, however for the sake of clarity, two different colour scales had to be used for ablation and accumulation zone.`

# 4. Utilisation des bilans modélisés, comparaison avec les données et application au futur du glacier

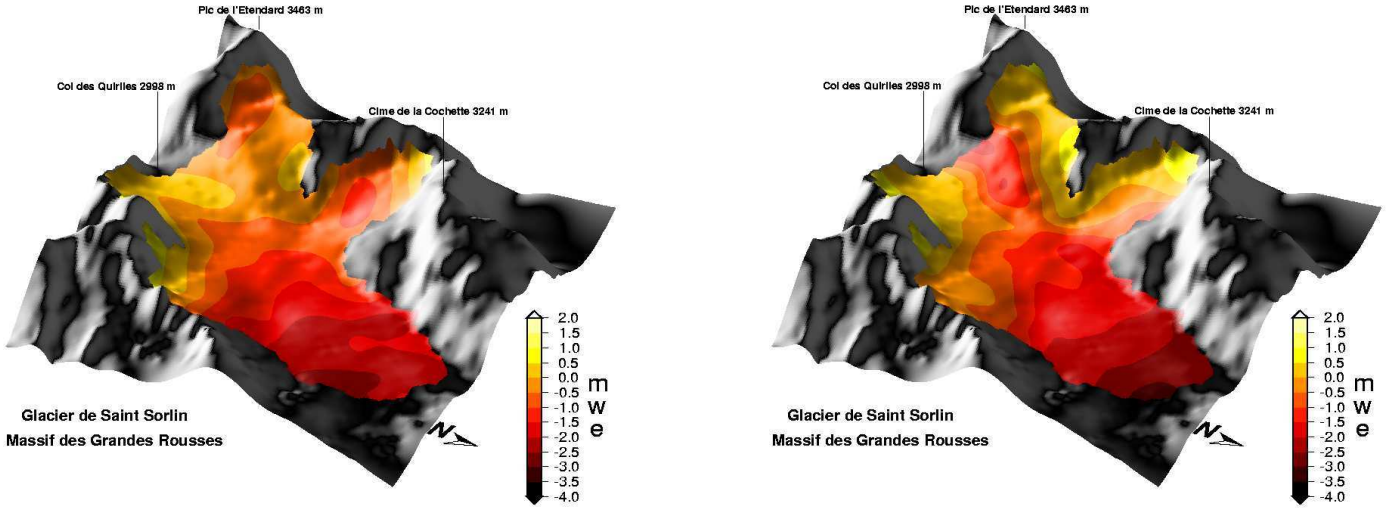
Il est indispensable de connaître les bilans de masse en surface sur tout le glacier pour effectuer une simulation de son évolution dans le temps. Traditionnellement les bilans de masse sont issus des mesures de terrain. Pour le glacier de Saint Sorlin ces bilans ont également été modélisés avec la chaîne SAFRAN / CROCUS. Ces modélisations peuvent dans certains cas améliorer les valeurs issues des mesures, surtout dans des régions avec peu de points de mesure. De plus, c'est l'unique moyen prédire l'avenir d'un glacier sous différents scénarios climatiques.
Les deux approches sont comparés pour la période de 1982 à 2004, puis l'exemple de l'utilisation d'un scénario climatique futur est proposé.
Ces travaux ont été publiés dans Le Meur et al. (2007), cf. Annexe IX.2.

## 4.1. Bilans mesurés

Les mesures et les données disponibles sont décrites en détail dans la Partie II. Il est important de rappeler que ce genre de données n'est disponible que pour quelques glaciers seulement, et ce avec une couverture souvent incomplète à la fois en temps et en espace. Le bilan annuel moyenné sur la période étudiée (1982-2004) est reproduit sur la Figure 4.1(a).

## 4.2. Bilans modélisés

La modélisation du bilan de masse (Gerbaux et al., 2005) repose sur le modèle de neige CROCUS (Brun et al., 1989, 1992). Le bilan de masse est calculé au pas horaire à partir des données de température, de vitesse du vent, de précipitations (et leur type, solide ou liquide), de rayonnement infrarouge, solaire diffus et solaire direct et de nébulosité. Il couvre toute la surface du glacier avec une résolution de 200 m. CROCUS tient compte de la glace en terme d'albédo et de rugosité. Les données météorologiques sont disponibles grâce au modèle SAFRAN (Durand et al., 1993) au pas horaire, pour toutes les expositions et par tranches de 300 m d'altitude. CROCUS tient compte à la fois du bilan d'énergie en surface et de l'évolution interne de la couverture neigeuse du glacier. La densification de la neige ainsi que son métamorphisme sont inclus à chaque pas de temps (soit 15 min). CROCUS résout le profil de température du manteau neigeux, calcule les échanges en énergie et en masse entre chaque couche, ainsi que le métamorphisme des grains de neige




(a) Mesures de terrain. `Field measurements.`

(b) Résultats de modélisation. `Modelling results.`

FIG. 4.1.: Bilan moyen sur la période de 1982 à 2004 issu des mesures et d'une modélisation (glacier de Saint Sorlin).
`Averaged mass balance over the 1982 to 2004 period from measurements and modelling (Saint Sorlin glacier).`

en conséquence, incorpore le transfert de l'eau sous forme liquide ou vapeur, calcule l'albédo de la couche de la surface,...
Le bilan modélisé surestime les précipitations de l'hiver, probablement parce que SAFRAN est incapable de tenir compte d'effets topographiques opérant à petite échelle ou des circulations locales qui modifient beaucoup les précipitations en montagne. Les bilans modélisés hivernaux sont alors implicitement ajustés aux bilans mesurés correspondants par calage des bilans annuels (Gerbaux, 2005). Le modèle est validé à l'aide du bilan annuel et estival (Gerbaux et al., 2005). Le bilan annuel moyenné sur la période étudiée (1982-2004) est représenté sur la Figure 4.1(b).

## 4.3. Comparaison du bilan mesuré et modélisé

La Figure 4.1 montre globalement un bon accord entre les deux méthodes, la distribution est surtout contrôlée par l'altitude avec des bilans un peu plus forts en haute altitude dans le cas du modèle. La plus grande différence reste la pente orientée Est entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard avec des bilans modélisés beaucoup plus faibles que ceux mesurés. Sans même comparer les simulations de la surface du glacier avec l'état actuel du glacier il est très probable que le modèle soit plus fiable à cet endroit comme il

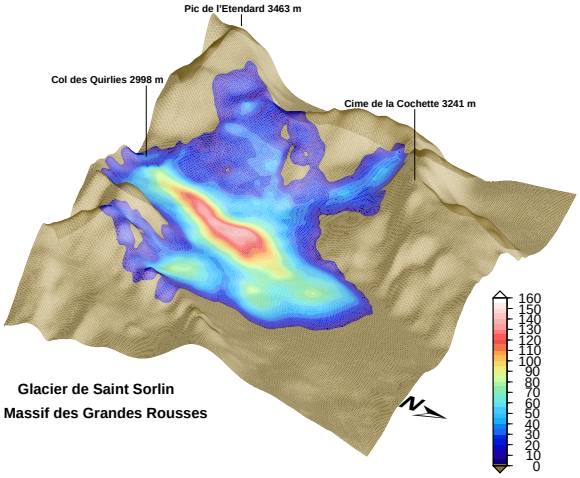
n'y a aucun point de mesure dans cette pente très crevassée. Le modèle peut tenir compte de la forte exposition Est, donc de l'exposition au soleil avec une ablation importante en été contrairement à l'interpolation entre des points de mesures situés hors de cette pente. L'avantage d'un modèle réside dans la possibilité "d'échantillonner" des régions difficilement accessibles autrement et de tenir compte des variations naturelles à courte échelle du bilan, comme par exemple celles liées à l'exposition.
Une *"zone interdite"* est également utilisée dans le cas du bilan modélisé.

## 4.4. Comparaison de l'évolution du glacier avec les deux approches différentes pour le bilan

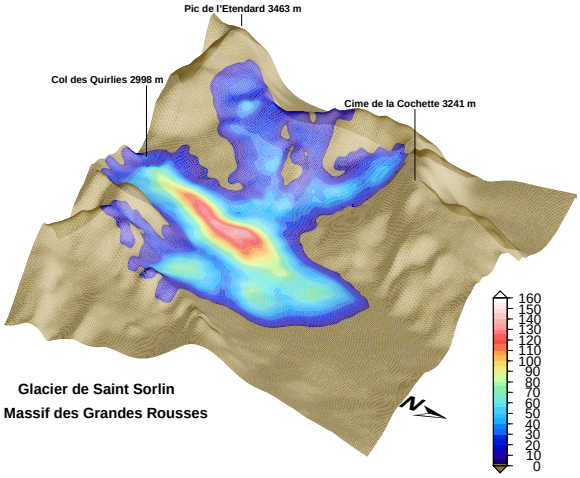
Pour comparer l'évolution du glacier, avec les deux approches différentes pour le bilan, l'expérience suivante est effectuée :
- La simulation est effectuée sur la période de 1982 à 2004.
- Il n'y a pas de mesures pour la surface initiale de 1982. Les seules mesures disponibles datent de 1905 et de 1998. Une simulation de 1905 à 1982 est alors utilisée : De 1905 à 1957 les bilans issus d'une reconstruction météorologique sont utilisés (Le Meur et Vincent, 2003), puis de 1957 à 1982 les bilans sont issus des mesures. La surface alors obtenue est ensuite utilisée comme surface initiale pour les simulations couvrant la période 1982 - 2004. Comme montré par Le Meur et Vincent (2003) cette surface reproduit bien la surface de 1982.
- Le glissement basal est imposé.
- Les résolutions sont de $\Delta x$=50 m et $\Delta t$=0.1 an, soit 36 jours.
- On utilise le modèle d'écoulement amélioré (schéma SI).
- A partir de 1982 le modèle d'écoulement est forcé soit avec les bilans annuels modélisés (simulation 1), soit avec ceux issus des mesures et du modèle linéaire (simulation 2).

Globalement aucun changement significatif n'est observé, sauf un décalage global et constant de quelques mètres de l'épaisseur de glace. Dans le cas du bilan modélisé (avec un plus fort gradient altitudinal de bilan de masse) le glacier est moins épais (Figure 4.2). Ce décalage est confirmé par l'évolution de la masse totale au cours du temps (cf. Fig. 4.3(a)). Les grandes différences au début et en fin de simulation sont la conséquence d'un désaccord entre le bilan spécifique à ces mêmes époques (cf. Fig 4.3(b)).
Même avec un bilan spécifique quasiment identique entre le bilan modélisé et le bilan mesuré, la dynamique d'écoulement ne mène pas tout à fait à la même évolution, car la distribution spatiale du bilan est importante. Ceci est confirmé avec une simulation stationnaire de 300 ans, partant de la surface de 1982, avec, d'une part la moyenne des bilans mesurés et d'autre par la moyenne des bilans modélisés (sur la période 1981-2004, cf. Fig. 4.4). Les surfaces sont différentes, notamment au niveau de la pente entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard, mais on constate également une épaisseur de glace globalement plus importante dans le cas des mesures.
Malgré ces petites différences, le modèle des bilan de masse est alors considéré comme validé (voir les autres critères de validation dans Le Meur et al. (2007)). Quant aux effets locaux, comme la pente entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard, il est intéressant

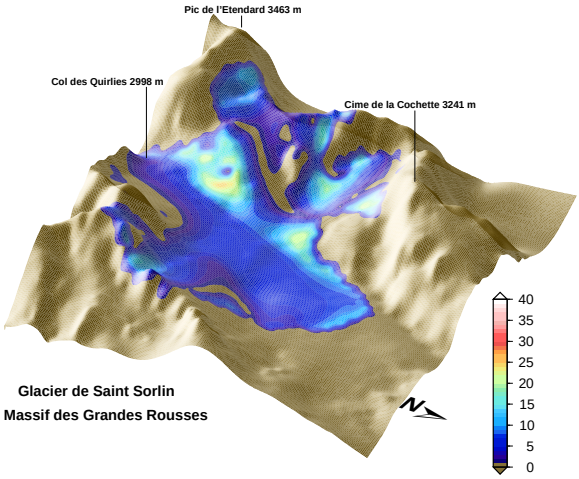
de regarder si le modèle d'écoulement, qui en plus du bilan tient compte de l'advection, reproduit mieux la réalité terrain lorsqu'il est forcé par le bilan mesuré. Les résultats montrent en effet la capacité du modèle (forcé par les bilans modélisés) à reproduire la petite zone déglacée observée dans la réalité (Photo 4.5).




(a) Forcé par les mesures de terrain.
`Forced by field measurements.`

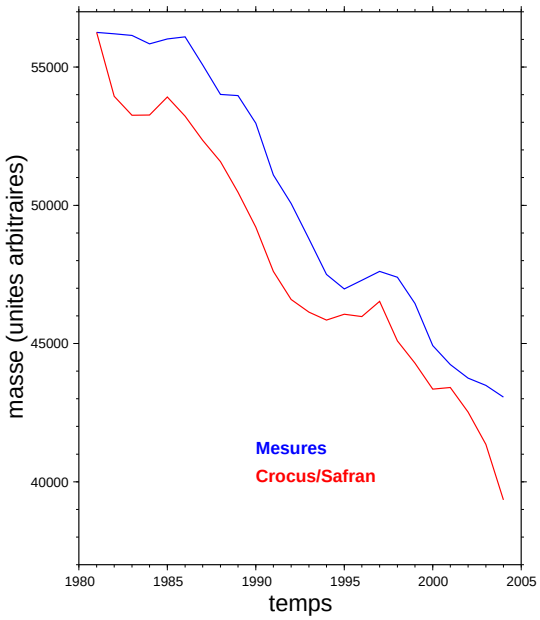



(b) Forcé par le bilan de masse modélisé.
`Forced by the modelled mass balance field.`

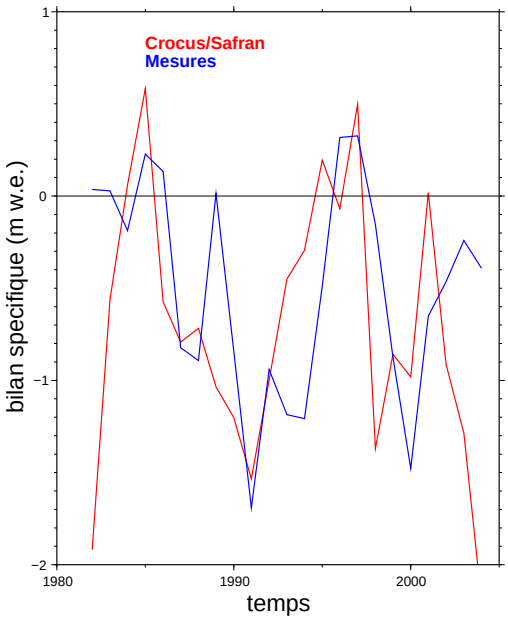



(c) Différence (a)-(b). `Difference (a)-(b).`

FIG. 4.2.: Etat final de la simulation de 1981 à 2003 avec deux approches différentes pour le bilan de masse.
`Final surface of the simulation from 1981 to 2003 with the two different approaches for mass balance.`

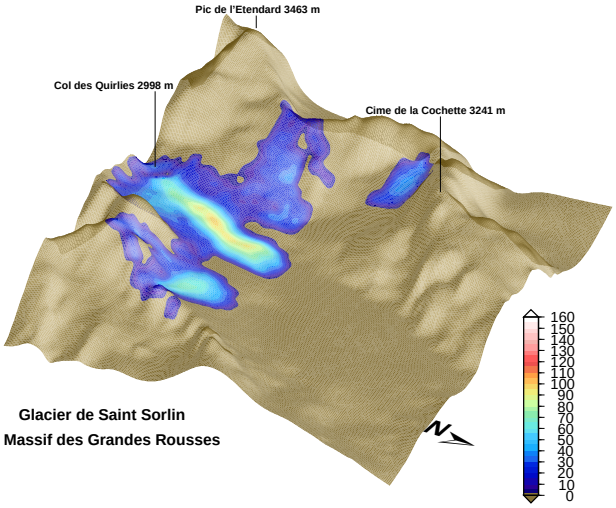



(a) Évolution de la masse. `Mass evolution.`

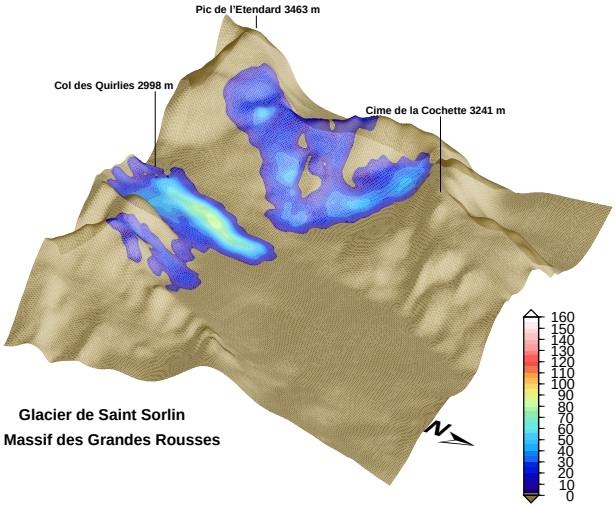



(b) Bilan spécifique. `Specific mass balance.`

FIG. 4.3.: Évolution de la masse et du bilan spécifique au cours du temps.
`Time-dependent mass and specific mass balance evolutions.`




(a) Bilans issus des mesures de terrain.
`Mass balance field measurements.`



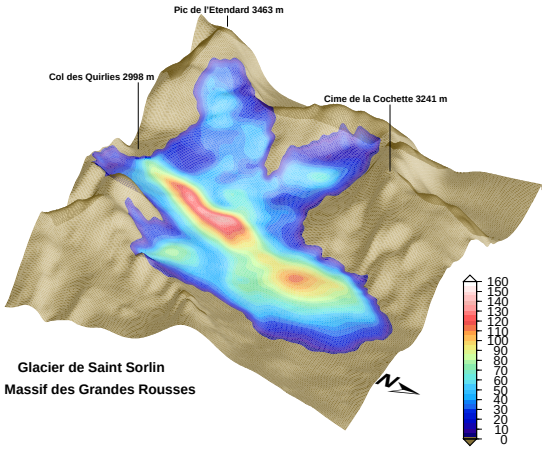

(b) Bilans issus de la modélisation.
`Modelled mass balance.`

FIG. 4.4.: Simulation stationnaire avec deux approches différentes pour le bilan de masse.
`Steady state simulation using the two different approches for mass balance.`

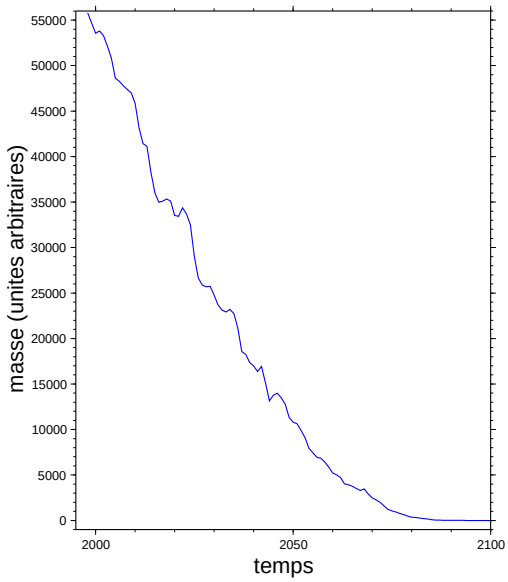
FIG. 4.5.: La petite zone déglacée entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard.
`The small deglaciated zone between the Col des Quirlies and the Pic de l'Etendard.`

## 4.5. Prédictions de l'évolution du glacier, scénario IPCC

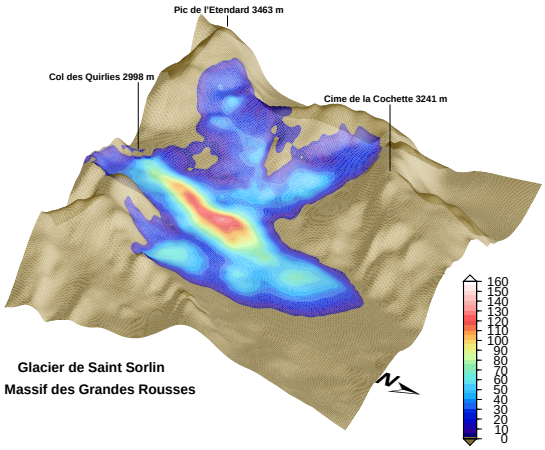
Les bilans modélisés sont alors considérés comme validés et l'évolution future du glacier peut alors être envisagée. A titre d'exemple le scénario B1 de l'IPCC (IPCC, 2001) a été choisi pour forcer le modèle du bilan (lequel force à son tour le modèle de l'écoulement). Ce scénario se base sur une réduction des émissions de $CO_2$ à l'horizon 2100 à un niveau inférieur à celles des années 90. Malgré la diminution à terme des émissions, l'augmentation du taux de $CO_2$ dans l'atmosphère à attendre sera responsable d'une augmentation de la température de 1.8 °C et d'un probable changement dans le régime des précipitations d'ici la fin du siècle. La simulation commence en 1998 et la Figure 4.6 représente l'épaisseur de glace tous les 20 ans. Le glacier perd rapidement sa zone d'accumulation, de la glace persiste uniquement dans la zone centrale du fait d'une grande épaisseur de glace initiale nécessitant du temps pour fondre complètement. Selon la simulation, le glacier disparaît en moins de 100 ans.



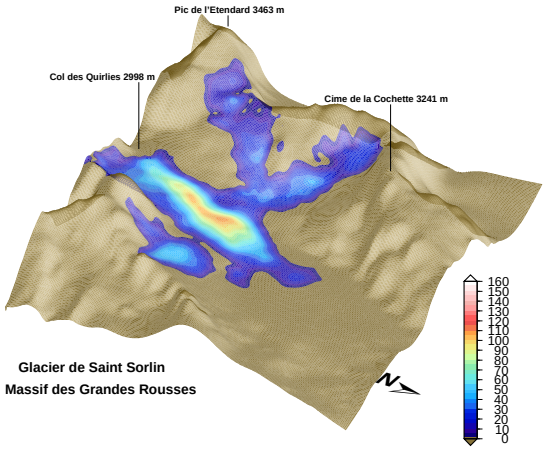

(a) 1998



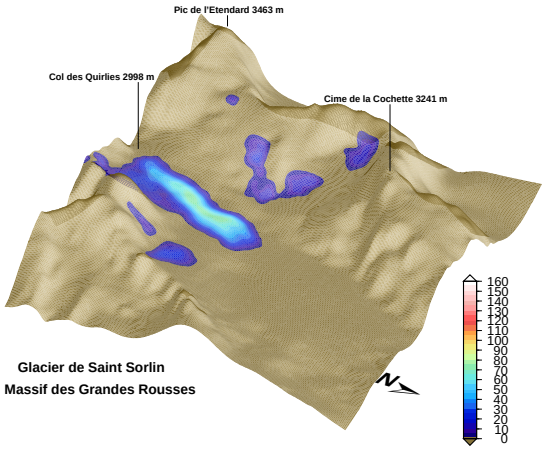

(b) Évolution de la masse au cours du temps.
`Time dependent mass evolution.`



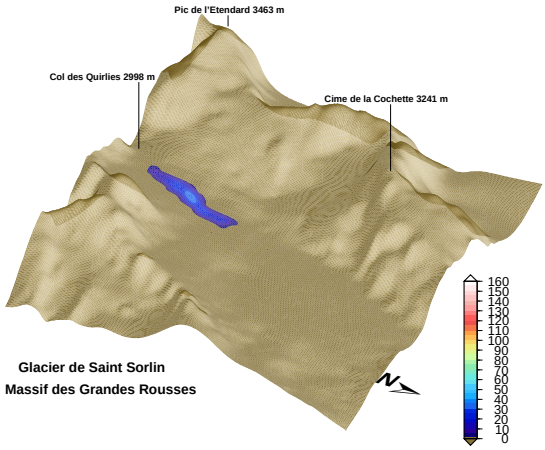

(c) 20 ans plus tard. `20 years later.`




(d) 40 ans plus tard. `40 years later.`




(e) 60 ans plus tard. `60 years later.`




(f) 80 ans plus tard. `80 years later.`

FIG. 4.6.: Simulation de l'évolution future du glacier de Saint Sorlin selon le scénario B1 de l'IPCC.
`Simulation of the future evolution of the Saint Sorlin glacier according to the IPCC B1 scenario.`

# 5. Conclusions

Le nouveau schéma numérique est un schéma semi-implicite qui remplace un schéma ADI et qui conserve nettement mieux la masse. Néanmoins dans le cas du glacier de Saint Sorlin l'impact sur la dynamique n'est pas très différent, ce qui est rassurant pour les travaux effectués auparavant avec le modèle ADI.
Une étude sur la surface stationnaire de 1998 a montré l'importance d'empêcher la glace de coloniser les régions en dehors du glacier, en particulier en amont de la rimaye. Dans la réalité, la glace ne peut y tenir car la pente est trop raide. La neige qui tombe est alors rapidement transportée ailleurs et participe alors à cet endroit au bilan de masse dont les mesures tiennent déjà compte.

L'évolution du glacier de Saint-Sorlin simulée avec des bilans modélisés est en bon accord avec celle avec des bilans issus des mesures de terrain, ce qui permet de valider le modèle de bilan de masse. Il présente en même temps quelques avantages par rapport aux mesures de terrain. En effet, les bilans pour des zones inaccessibles, comme ici entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard, peuvent être simulés. De plus, des prévisions de l'évolution du glacier dans l'avenir peuvent dorénavant être proposées avec différents scénarios climatiques.

Cinquième partie .

# Comparaison des modèles

Cette partie porte sur une inter-comparaison de quatre modèles différents.

⇝ Le premier chapitre détaille les motivations et objectifs ce cette étude.
⇝ Le deuxième chapitre présente des détails sur les quatre modèles utilisés ainsi que les machines qui ont été utilisées pour les différentes simulations.
⇝ Le troisième chapitre porte sur les simulations effectuées avec des glaciers synthétiques.
⇝ Le quatrième chapitre traite enfin un cas réel : le glacier de Saint Sorlin dans le massif des Grandes Rousses en France.

# 1. Motivation et Objectifs de cette étude

Cette inter-comparaison a été effectuée avec l'idée d'étudier de façon précise quels sont les modèles les plus appropriés pour les différentes types de glacier.
Les exemples tels que le glacier de Saint Sorlin (Alpes, France), le Cotopaxi (Andes, Equateur) ou le glacier d'Argentière (Alpes, France) (Figure 1.1) illustrent très bien la grande variété des géométries possibles.

FIG. 1.1.: Variété des géométries de glaciers étudiés.
`Variety of different glaciers geometries studied.`

Dans cette inter-comparaison, on essaie de répondre aux questions suivantes :
- Quelle type d'approximation des équations de Stokes est compatible avec un type de géométrie de glacier donné ?
- Quels sont les rôles respectives de la déformation visqueuse de la glace proprement, du bilan de masse et du glissement dans l'écoulement du glacier ?
- Quel est le coût de chaque modèle en terme de temps CPU et de mémoire, et par conséquent les limites numériques de chacun des modèles ?
- Quel est le compromis à trouver entre coût et précision des résultats pour une géométrie donnée ?

Volontairement, il a été fait le choix de ne pas inclure une comparaison avec un cas où une solution exacte des équations de Navier-Stokes existe, car l'objectif de cette inter-comparaison porte sur la capacité des modèles à reproduire les différents types d'objets glaciaires. Chaque modèle a été considéré comme ayant été validé sur son domaine d'applicabilité (validation de l'implémentation numérique).
Cette comparaison porte sur quatre modèles différents, de la SIA jusqu'à un modèle *Full Stokes*. Les modèles se distinguent alors soit dans l'approximation des équations de Stokes utilisées, soit dans leurs méthodes numériques. Ils seront détaillés dans les chapitres suivants.
Tous ces modèles utilisent la loi de Glen pour décrire la déformation de la glace et une loi de type Weertman pour le glissement.

Plusieurs séries de test, composées de tests synthétiques et d'une application réelle au glacier de Saint Sorlin (France) sont utilisées dans cette comparaison. Ils seront détaillées ultérieurement. Les tests synthétiques sont définis de façon à pouvoir faire varier des propriétés géométriques comme le rapport d'aspect ou la pente du socle.
Il faut tenir compte ici du fait que la SIA standard était développée pour des calottes de glace avec un rapport d'aspect très faible, mais aussi pour un glacier sur un socle plat. Comme montré par Morland (1984), lors du développement de la SIA les facteurs d'échelle pour écrire toutes les variables avec des valeurs entre 0 et 1 sont modifiés dans le cas d'une pente élevée. Par exemple, la viscosité n'est plus d'ordre $\epsilon^2$, mais d'ordre $\epsilon$. En fait, Morland effectue son développement en se plaçant dans un système de coordonnés cartésien dont le plan horizontal est parallèle à la pente moyenne du socle $\alpha$. Cette écriture introduit, par l'intermédiaire de la gravité, le terme $sin\alpha$ dans les équations de Stokes. Il distingue deux cas : $sin\alpha \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ qui correspond à la SIA standard ; et $sin\alpha \sim \mathcal{O}(1)$, le cas d'une pente forte. L'ordre relatif des différents termes des équations de Stokes est alors modifié et amène à un mélange des ordres de la SIA standard et surtout à une validité moins bonne de la SIA 0 étudiée ici.
Il est important de remarquer que, pour une même forme de glacier, le changement de la pente du socle modifie un peu le rapport d'aspect du glacier qui est calculé comme le rapport de la hauteur verticale sur la longueur horizontale ; mais l'effet du changement de la pente du socle sur l'écoulement va bien au-delà.
Les différents tests synthétiques varient soit le rapport d'aspect de la glace proprement dit, soit la pente du socle, soit les deux.

Comme observables de comparaison, la géométrie du glacier (la surface, en profil, la position du front) et les vitesses (vitesses de surface et profils à certains points) sont utilisées.
Des résultats intermédiaires ont été présentés à l'EGU en 2007 (cf. Annexe IX.3.3).

D'autres inter-comparaisons ont été effectuées avec d'autres objectifs :
Le projet ISMIP (Ice Sheet Model Intercomparison Project (ISMIP)) a l'objectif de comparer des modèles d'ordres supérieures ou *Full Stokes* sur des tests en 2D et 3D, pour

examiner les faiblesses des différents modèles. Ce projet succède à l'expérience EISMINT (European Ice Sheet Modeling INiTiative, (EISMINT)). Les expériences sont surtout de type diagnostique, c'est-à-dire que seul le champ des vitesses est calculé pour une géométrie donnée fixe.
Gundmundssons et Leysinger Vieli ont effectué une comparaison entre la SIA et un modèle *Full Stokes* sur un glacier rectangulaire et un glacier de type alpin (vallée) en deux dimensions. Le résultat principal est que la réaction d'un glacier alpin (avancé ou recul du front) à un changement climatique est aussi bien reproduit par un modèle SIA que par un modèle *Full Stokes* (Leysinger Vieli et Gudmundsson, 2004).
Greuell (1992) avait déjà montré que les contraintes longitudinales n'ont pas beaucoup d'influence sur la réponse du Hintereisferner (Autriche) à des échelles d'une centaine d'années.
Gudmundsson (2003) a étudié la variabilité basale qui à une courte échelle ne peut pas être prise en compte par la SIA.
Hindmarsh (2004) a comparé quasiment tous les types de modèles à l'aide d'une seule expérience (un plan infini) avec le but d'étudier à quel point la SIA est améliorée par la prise en compte des contraintes longitudinales.

Enfin, Le Meur et al. (2004) ont comparé un modèle SIA et un modèle *Full Stokes* sur différents cas synthétiques. Il s'agit des mêmes modèles qu'ici.
Le modèle *higher order* utilisé dans ce travail a été comparé avec des expériences sur des glaciers théoriques ainsi que sur une coupe du glacier de Haut-Arolla (Suisse) comme cas réel, (Pattyn, 2002).

# 2. Présentation des modèles

Dans ce chapitre, les quatre modèles utilisés seront détaillés, d'abord les modèles SIA et successivement les modèles *higer order* et *Full Stokes*.

## 2.1. Modèles SIA

Deux modèles SIA (ordre 0) sont utilisés, qui diffèrent uniquement dans leur implémentation numérique.

### 2.1.1. Le modèle de Grenoble (Le Meur et Vincent, 2003)

Ce modèle SIA est le modèle qui est déjà présenté en détail dans la Partie IV. Pour résumer brièvement, ce modèle utilise une méthode semi-implicite (SI) pour résoudre une équation de diffusion et trouver la surface au moment $t + \Delta t$ en partant de celle de $t$. Ceci est possible grâce aux formules explicites pour les vitesses et donc des flux.
Dans le cas du glacier synthétique de type vallée (cf. Paragraphe 3.3) ce schéma numérique a dû être amélioré encore une fois pour passer à un schéma over-implicite (OI) cette fois-ci. Le fait que le schéma SI ait été utilisé dans tous les autres cas n'est qu'un artefact "historique".
Le critère de pente décrit en IV.3 n'a pas été appliqué tel quel : dans les cas synthétiques il n'a pas été nécessaire car les champs de bilan synthétiques sont définis de sorte que ce problème n'apparaisse pas ; dans le cas du glacier réel de Saint Sorlin ce problème est abordé avec une autre méthode qui a pu être transférée sur les autres modèles.

#### Le schéma over-implicite (OI)

Le schéma over-implicite est présenté ici en 2D dans un souci de clarté. L'équation de diffusion à résoudre s'écrit de la façon suivante avec le schéma SI utilisé auparavant :

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = a_i^n + \frac{\partial D \frac{\partial H}{\partial x}}{\partial x}|_i^{n+1} + \frac{\partial D \frac{\partial B}{\partial x}}{\partial x}|_i^n. \tag{2.1}$$

Ici $i$ fait référence au point de grille $i$ et $n$ à l'instant $t = t_0 + n\Delta t$. $D$ est toujours évalué au pas de temps $n$. Contrairement au Chapitre IV.1, l'équation est donné ici pour $H$ et non pas pour $S$. Les termes en $S$ sont tous séparés en termes en $H$ et $B$.
Il y a plusieurs autres possibilités pour choisir l'instant $t$ où les différents termes en $H$ sont évalués. D'une façon très générale, on peut écrire l'équation de diffusion de la façon

suivante en faisant une combinaison linéaire des temps $n$ et $n+1$ :

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = a_i^n + \omega \frac{\partial D \frac{\partial H}{\partial x}}{\partial x}|_i^{n+1} + (1-\omega)\frac{\partial D \frac{\partial H}{\partial x}}{\partial x}|_i^n + \frac{\partial D \frac{\partial B}{\partial x}}{\partial x}|_i^n. \tag{2.2}$$

$\omega = 0$ correspond à un schéma explicite qui est notoirement instable,
$\omega = \frac{1}{2}$ correspond à un schéma Crank-Nicholson,
$\omega = 1$ correspond au schéma semi-implicite utilisé auparavant,
$\omega > 1$ correspond au schéma over-implicite OI.

Ces différents schémas sont décrits par Hindmarsh (2001). Une comparaison (publiée par Greve et Calov (2002)) montre même que le schéma OI est le plus stable numériquement pour l'écoulement glaciaire.
Le schéma OI avec $\omega = 2.5$ présente dans le cas de l'écoulement des glaciers l'avantage de permettre des pas de temps plus grands tout en restant stable. Pour le glacier de vallée notamment, le changement du schéma numérique a permis d'augmenter le pas de temps jusqu'à un facteur 100 sans perdre de précision pour autant !

#### Le glissement

Le glissement est pris en compte dans les formules analytiques pour les vitesses, comme détaillé dans le Chapitre III.2 pour le cas $p = 1, q = 0$.
Ce modèle sera par la suite identifié comme M SIA.

### 2.1.2. Le modèle de Frank Pattyn (Pattyn, 2003)

Ce modèle (Pattyn, 2003) résoud directement l'équation de diffusion pour la surface au moment $t + \Delta t$ en utilisant les valeurs numériques pour les vitesses. Cette résolution se fait par une méthode du gradient conjugé appliquée à un système creux, en général une bonne convergence est obtenue avec une tolérance de $\epsilon_S = 10^{-5}$. Ceci est motivé par le fait de pouvoir utiliser le même code numérique pour un modèle *higher order* et ce modèle SIA, seule la sous-routine de calcul de vitesses change d'un cas à l'autre.
Le glissement est inclus de la même manière que dans le modèle SIA en tenant compte des formules analytiques pour la vitesse basale (Chapitre III.2 pour le cas $p = 1, q = 0$).
Ce modèle sera par la suite identifié comme F SIA.

## 2.2. Modèle higer order (HO)

Le modèle *higher order* utilisé dans ce travail est celui développé par Pattyn (2003). Ce modèle fait essentiellement l'approximation hydrostatique et néglige les gradients horizontaux des vitesses verticales devant les gradients verticaux des vitesses horizontales. Ce modèle inclus aussi un couplage thermodynamique qui n'est pas utilisé ni décrit ici puisque nous étudierons uniquement des glaciers isothermes.
Ce modèle sera par la suite identifié comme F HO.

### 2.2.1. Équations de base

Le modèle tient compte de l'équation d'incompressibilité dans sa totalité. Dans les équations de Stokes l'équation selon la direction $z$ est simplifiée à l'aide de l'approximation hydrostatique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho g \\ &\text{devient} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho g. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les deux autres équations sont prises en compte dans leur totalité.
Comme dans la SIA, l'intégration de cette troisième équation donne :

$$\sigma_z(z) = -\rho g(S - z). \tag{2.4}$$

Les deux premières équations sont écrites avec les grandeurs déviatoriques. On rappelle le lien entre les contraintes de Cauchy et les contraintes déviatoriques :

$$\sigma_i' = \sigma_i - \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \quad i = x, y, z. \tag{2.5}$$

Cela donne pour $x$ :

$$3\sigma_x' = 2\sigma_x - \sigma_y + \rho g(S - z) \tag{2.6}$$

et une expression analogue pour $y$. Avec ces deux équations on arrive enfin à :

$$\sigma_x = 2\sigma_x' + \sigma_y' - \rho g(S - z) \tag{2.7}$$

et une relations similaire pour $y$.
Les deux premières équations de Stokes s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\sigma_x' + \sigma_y'\right) + \frac{\partial \tau_{x,y}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z} = \rho g \frac{\partial S}{\partial x}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2\sigma_y' + \sigma_x'\right) + \frac{\partial \tau_{x,y}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}'}{\partial z} = \rho g \frac{\partial S}{\partial y}. \tag{2.9}$$

La loi de déformation (la loi de Glen) est exprimé ici avec une viscosité $\eta$ et $\dot{\epsilon}_\star$, le deuxième invariant du tenseur des vitesses de déformation selon :

$$\tau_{ij}' = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij}, \text{ avec } \eta = \frac{1}{2}A^{\frac{-1}{n}}(\epsilon\epsilon_\star + \dot{\epsilon}_\otimes)^{\frac{1-n}{n}}, \tag{2.10}$$

où $\dot{\epsilon}_\otimes$ est une constante de petite valeur, pour assurer que la viscosité reste finie, même si $\dot{\epsilon}_\star$ tend vers zéro.
Le lien entre les taux de déformation $\dot{\epsilon}_{ij}$ et les vitesses s'écrit dans ce modèle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{xz} & \dot{\epsilon}_{yz} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

puisqu'on utilise l'approximation suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial x} << \frac{\partial u}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial w}{\partial y} << \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.12)$$

En utilisant la loi de Glen, les deux premières équations de Stokes (2.8) et (2.9) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\eta\dot{\epsilon}_{xx} + 2\eta\dot{\epsilon}_{yy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta\dot{\epsilon}_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\dot{\epsilon}_{xz}\right) = \rho g\frac{\partial S}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4\eta\dot{\epsilon}_{yy} + 2\eta\dot{\epsilon}_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta\dot{\epsilon}_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\dot{\epsilon}_{yz}\right) = \rho g\frac{\partial S}{\partial y}, \quad (2.14)$$

ou encore exprimé avec les vitesses

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\eta\frac{\partial u}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y} + \eta\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} = \rho g\frac{\partial S}{\partial x}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4\eta\frac{\partial v}{\partial y} + 2\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y} + \eta\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\eta\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z} = \rho g\frac{\partial S}{\partial y}. \quad (2.16)$$

L'expansion de ces équations donne :

$$4\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} + \eta\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho g\frac{\partial S}{\partial x} - 2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - 3\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \quad (2.17)$$

$$4\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + \eta\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho g\frac{\partial S}{\partial y} - 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - 3\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \quad (2.18)$$

où la viscosité $\eta$ est donnée par :

$$\eta = \frac{1}{2} A^{\frac{-1}{n}} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \dot{\epsilon}_{\circledast}^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} . \tag{2.19}$$

Dans cette écriture de $\eta$ on tient compte des approximations faites dans l'Expression (2.11) pour $\dot{\epsilon_{ij}}$ et leur effets sur $\dot{\epsilon}_\star$, mais aussi de la conservation de la masse ($\vec{\nabla}\vec{v} = 0$) pour exprimer $\dot{\epsilon}_z$ en fonction de $\dot{\epsilon}_x$ et $\dot{\epsilon}_y$.
Ces deux Equations (2.17) et (2.18) sont les équation de base qui serviront au calcul des vitesses horizontales après un changement de coordonnées vers le système ($(x, y, \xi)$ - coordonnées réduites). La vitesse verticale est simplement calculée comme suggéré dans le Chapitre III.1.6 par intégration de l'équation de continuité.

Le changement d'épaisseur est calculé à l'aide de l'équation de transport (cf. Equation (III.1.12)) en utilisant les conditions aux bords détaillés dans le paragraphe suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\vec{\nabla} \int_B^S \vec{v}_H dz + a - f. \tag{2.20}$$

Dans la pratique, cette équation de transport est transformée en équation de diffusion.

### 2.2.2. Conditions aux bords

Les conditions aux bords sont une épaisseur de glace nulle aux bords du domaine, une surface libre sur la partie supérieure et, à la base soit des vitesses nulles soit une loi de glissement.

### 2.2.3. Glissement

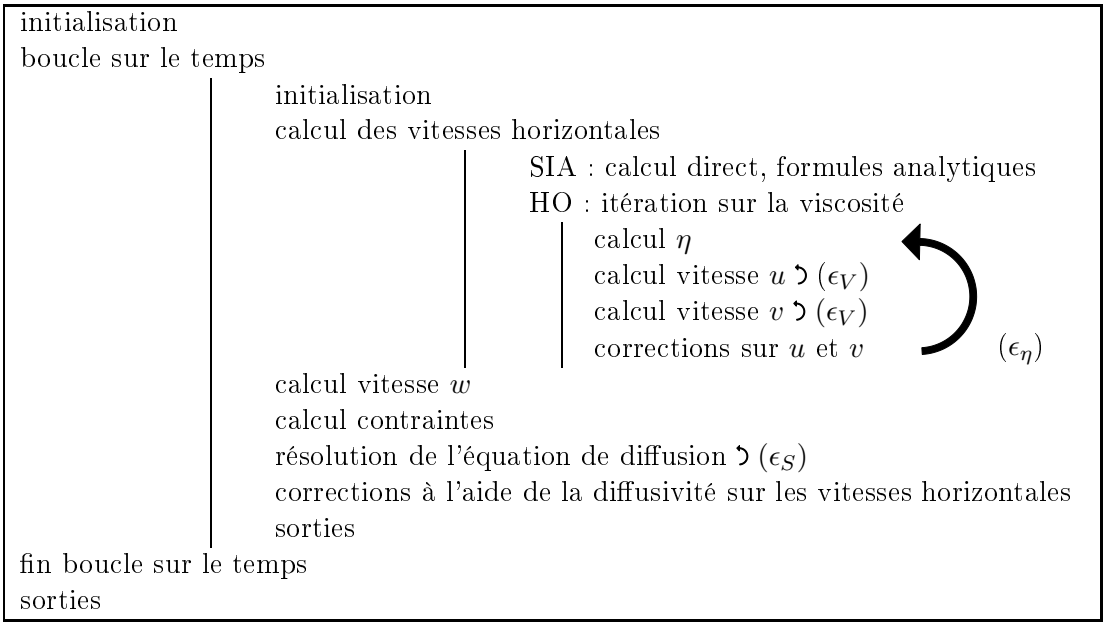
Pour le glissement, une vitesse horizontale basale est imposée selon une loi de Weertman ($p = 1, q = 0$, cf. Paragraphe III.1.5.2) où $\vec{\tau}_b$ est écrit comme

$$\tau_{b_x} = \tau'_{xz} - (2\sigma'_x + \sigma'_y)\frac{\partial B}{\partial x} - \tau'_{xy}\frac{\partial B}{\partial y}, \quad \text{(Van der Veen et Whillans, 1989)}, \tag{2.21}$$

avec une relation équivalente pour $\tau_{b_y}$. Dans la pratique $\vec{\tau}_b$ est évaluée à l'aide des contraintes au pas de temps précédent.

### 2.2.4. Schéma du modèle

Le modèle fonctionne en plusieurs étapes (cf. Schéma 2.1, toutes les parties itératives sont signalées avec un ↻) :
Le problème principal est le calcul du champ de vitesses horizontales. Une fois que les vitesses horizontales sont connues, la vitesse verticale $w$ est calculée d'après le Paragraphe III.1.6 par intégration de l'équation d'incompressiblité. Les contraintes peuvent




TAB. 2.1.: Schéma du modèle F HO. `Sketch of the F HO model structure.`

ensuite être calculées et une équation de diffusion est résolue pour la nouvelle surface. Cette résolution se fait par une méthode du gradient conjugué appliquée à un système creux. En général une bonne convergence est obtenue avec une tolérance de $\epsilon_S = 10^{-5}$. Même si le système d'Equation (2.17) et (2.18) est un système non-linéaire pour les vitesses horizontales, il peut être traité comme un système de deux équations linéaires couplés à deux inconnus en itérant sur $\eta$ qui est elle-même fonction de $u$ et $v$.
Deux solutions sont alors possibles :
(i) calculer $\eta$ à l'aide de $u, v$ à l'itération précédente, résoudre le système d'équations couplés pour $u$ et $v$ à $\eta$ donnée, ...
(ii) calculer $\eta$ à l'aide de $u, v$ à l'itération précédente, résoudre l'Equation (2.17) pour $u$ à $\eta$ et $v$ données, résoudre l'Equation (2.18) pour $v$ à $\eta$ et $u$ données,...
Il a été montré que la première variante n'apportait pas beaucoup en terme de précision ou stabilité, mais le temps de calcul était beaucoup plus élevé. La deuxième variante a alors été adoptée.
La résolution de l'Equation (2.17) pour $u$ (et (2.18) pour $v$) se fait par la méthode des Différences Finies et par un algorithme adapté aux matrices creuses. Une bonne convergence est en général obtenue avec une tolérance de $\epsilon_V = 10^{-4}$.
L'itération sur $\eta$ se fait à l'aide d'une formule de relaxation, pour les détails voir Pattyn (2003). La vitesse de l'itération $l$ est une combinaison linéaire de celle de l'itération $l-1$ et de la solution de la matrice creuse. Le critère de tolérance pour cette itération est pris en général à $\epsilon_\eta = 10^{-5}$.
Tout à la fin, après la résolution de la nouvelle surface, quelques corrections sont appliquées aux vitesses horizontales du fait de la diffusivité entre les points de la grille.

## 2.3. Code aux Éléments Finis : Elmer

### 2.3.1. Introduction

Elmer est un logiciel libre (*open source*) pour des simulations multi-physiques développé par le CSC (Center for Scientific Computing Ltd., Finland, (Elmer)). Ce projet a commencé en 1995 par le biais d'une collaboration entre des universités finlandaises, des instituts de recherche et l'industrie.
Elmer traite des modèles physiques dans des domaines très variés. Tous ces modèles sont décrits par des équations différentielles partielles qu'Elmer résoud avec la méthode des Éléments Finis.

On peut citer les exemples suivants parmi les applications possibles avec Elmer :
- transfert de chaleur,
- mécanique du solide,
- mécanique des fluides,
- électromagnétisme,
- acoustique,
- mécanique quantique,
- croissance des cristaux.

Dans la pratique, Elmer nécessite un maillage comme entrée. Plusieurs *solvers* peuvent alors être appliqués sur ce maillage, dans notre cas le *solver* pour l'équation de Navier-Stokes et dans la cas d'une simulation évolutive un *solver* pour recalculer la nouvelle surface (*Free-Surface Solver*) et enfin un dernier pour refaire ou adapter le maillage à cette nouvelle surface, le *Mesh-Update Solver*. Ces *solvers* seront détaillés dans la suite ainsi que la procédure pour construire un maillage. Ce modèle sera par la suite identifié comme Elmer.

### 2.3.2. Maillage

L'interface Elmergrid permet de créer des maillages simples à partir de leurs caractéristiques principales.
Dans ce travail, soit un système cartésien en 3D, soit un système cylindrique en 2D est utilisé. Le maillage couvre tout l'espace entre $x_{min}, x_{max}$, $y_{min}$, $y_{max}$, $z_{min}$ et $z_{max}$, avec respectivement $n_x, n_y$ et $n_z$ éléments dans chacune des trois directions. Dans tous les cas utilisés dans ce travail, un maillage provisoire qui couvre tout l'espace $(x, y)$ avec une hauteur égale à l'unité est réalisé sur l'ensemble du domaine. Un programme fortran externe permet ensuite d'étirer le maillage verticalement pour arriver à la bonne altitude $z(x, y)$ en chaque point $(x, y)$ du socle et de la surface.
Plusieurs types d'éléments sont possibles. Dans cette thèse, des éléments quadrilatères sont utilisés en 2D et des éléments de type prisme (type *wedge*) ou hexaédriques (type *brick*) en 3D (cf. Figure 2.1). Elmer choisit les fonctions de base en conséquence.
On définit les différentes conditions aux limites sur les frontières du domaine maillé, à savoir les mailles et nœuds appartenant à la surface supérieure, la surface inférieure en

contact avec le socle rocheux et les surfaces latérales.
Un problème se pose aux endroits sans glace : il n'est pas possible de créer $nz$ éléments en hauteur à un endroit ou le socle est confondu avec la surface supérieure. On met alors artificiellement un minimum de 1 m de glace partout.

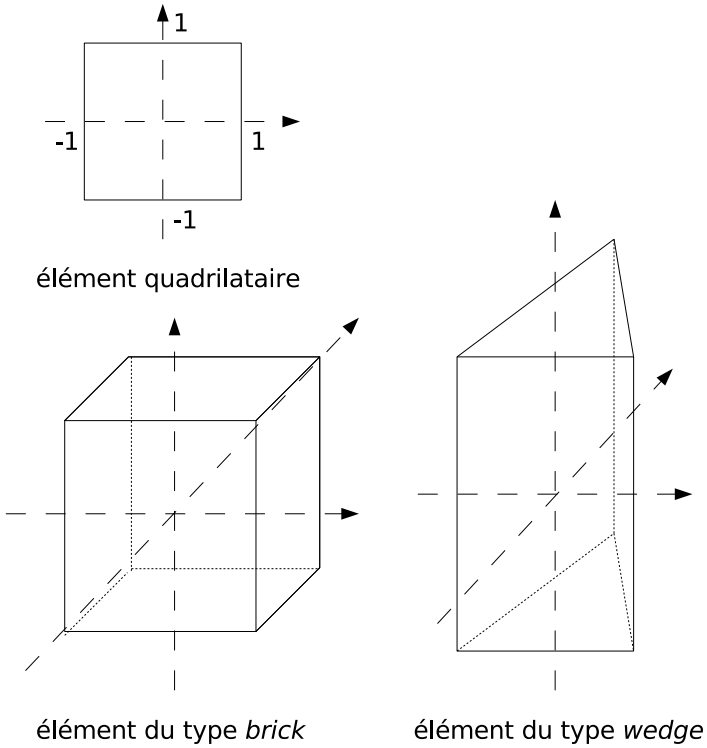



FIG. 2.1.: Éléments utilisés dans ELMER. `Elments used with` ELMER.

### 2.3.3. Le Solver de Navier-Stokes

La glace est un fluide extrêmement visqueux, indiquant que les termes inertiels des équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides sont négligeables devant les termes visqueux. Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors aux équations suivantes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{g}. \tag{2.22}$$

Comparé avec l'Equation (III.1.17), un terme d'accélération apparaît. Un calcul d'ordre de grandeur montre que le terme d'accélération est effectivement négligeable pour les applications courantes. Néanmoins, il n'est pas coûteux, voir même avantageux, de l'inclure dans la formulation numérique discrétisant l'évolution temporelle.
Dans beaucoup d'autres modèles ce terme est omis et le champ de vitesses est supposé s'adapter de façon instantané à tout changement des conditions de l'écoulement, on parle

alors aussi des équations de l'équilibre quasi-statique.
Dans les simulations stationnaires ce terme supplémentaire disparaît également.

La loi de Glen est utilisée avec une viscosité écrite comme dans le modèle précédent, en fonction du deuxième invariant du tenseur de taux de déformations $\dot{\epsilon}_\star$.
L'équation de continuité s'écrit sous sa forme variationelle comme :

$$\vec{v}_i \int_V \vec{\nabla}\psi_i \vec{\Phi} dV = 0, \tag{2.23}$$

où $\vec{v}$ est décomposée comme $\vec{v} = \vec{v}_i\psi_i$ où $\psi_i$ sont les fonctions d'interpolation, $\vec{v}_i$ les valeurs nodules et $\Phi$ est une fonction test.
L'équation de Navier-Stokes s'écrit comme :

$$-\int_V (p_i\psi_i - \vec{\tau}') \cdot \vec{\nabla}\vec{\Phi} dV = -\oint_{\partial V} (p_i\psi_i - \vec{\tau}') \cdot \vec{n} \cdot \vec{\Phi} dA = \rho \int_V \vec{g}\vec{\Phi} dV. \tag{2.24}$$

La partie gauche est intégrée par partie et reformulé par le théorème de Green.
Ceci amène en Éléments Finis à un système d'équations linéaires avec une non-linéarité due à la loi de Glen : $A(\eta(\vec{v}))\vec{v} = \vec{b}$.
Comme conditions aux bords, la surface supérieure est considérée comme une surface libre en contact avec l'atmosphère et qui reçoit ou perd une certaine quantité de glace, représentée par le bilan de masse qui peut dépendre des coordonnées d'espace et du temps. A la base, une loi de frottement peut être appliquée, autrement les vitesses sont nulles au contact avec le socle rocheux. Aux bords latéraux du maillage un flux nul est imposé. En effet, ici il s'agit dans tous les cas soit d'une condition de symétrie quand ce bord est un axe de symétrie pour l'écoulement, soit il s'agit d'un bord qui n'est pas traversé par le glacier.

Le système linéaire peut-être résolu avec une méthode directe ou itérative. La première est exacte, mais ne peut pas être utilisée au-delà d'une certaine taille de problème. Pour les méthodes itératives, plusieurs méthodes de préconditionnement sont possibles. Dans ce travail un préconditionnement de type Jacobi avec une factorisation LU incomplète est utilisé. La tolérance de convergence du système linéaire est $\epsilon_L$. Les paramètres pour la résolution de ce système linéaire sont donnés dans le Tableau 2.2 et seront utilisés dans la suite tels quels sauf précision contraire.
Une méthode de stabilisation est nécessaire car les vitesses nécessitent en principe des éléments d'un ordre plus élevé que la pression ou les contraintes. Il y a deux possibilités : (i) utiliser une méthode de stabilisation (Franca et al., 1992a,b) qui introduit des modifications dans le système à résoudre ou (ii) la méthode des bulles (Baiocchi, Brezzi et Franca, 1993). La première méthode a l'avantage d'être plus rapide et moins gourmande en mémoire. La deuxième introduit des nœuds médians virtuels supplémentaires au moment de l'assemblage pour augmenter le degré d'interpolation des vitesses par rapport à la pression. Elle est alors plus lente car la taille du système à résoudre est augmentée, mais en contre partie plus précise.

| Navier-Stokes, système linéaire | |
|---|---|
| type | itératif ou direct |
| méthode pour résolution directe | umfpack |
| méthode pour résolution itérative | BiCGStab |
| nb. d'itérations maximal | 1500 |
| préconditionnement | ILU0 |
| tolérance de convergence $\epsilon_L$ | $10^{-5}$ |
| méthode de stabilisation | stabilisé ou bulles |
| **Navier-Stokes, système non-linéaire** | |
| nb. d'itérations maximal | 100 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-4}$ |
| nb. d'itérations maximal de type Picard | 3 |
| tolérance de convergence Picard $\epsilon_{NLP}$ | $10^{-2}$ |
| facteur de relaxation | 1.0 |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 2.2.: Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.`

La solution du système non-linéaire se fait en deux étapes : après quelques itérations avec une méthode de Picard ; une méthode de Newton est utilisée. La première présente l'avantage de fonctionner aussi avec des conditions initiales loin de la solution, mais converge très lentement ; la deuxième nécessite des conditions initiales proches de la solution et converge plus rapidement. Après avoir atteint une tolérance de convergence de $\epsilon_{NLP}$ on passe aux itérations du type Newton, la tolérance de convergence totale est $\epsilon_{NL}$. Les valeurs adoptées pour ces paramètres sont également donnés dans le Tableau 2.2. Après la solution du système linéaire et non-linéaire le système couplé de tous les *solvers* qui interviennent (ici *Navier-Stokes, Free-Surface* et *Mesh-Update*) est itéré jusqu'à la tolérance de convergence $\epsilon_C$.

### Frottement

Une loi de frottement de la forme $\vec{\tau}_b = C_s \vec{v}_b$ est implémentée, où le coefficient de frottement $C_s$ est l'inverse du coefficient de glissement $A_s$ utilisé dans les autres modèles ($C_s = 0$ glissement parfait, $C_s = \infty$ adhérence parfaite). Ici, $\vec{v}_b$ désigne les vitesses tangentielles, contrairement à tous les autres modèles où les vitesses basales sont approximées par les composantes horizontales. La vitesse basale normale est égale à zéro. On parle ici plus d'un frottement qu'un glissement car le terme glissement est réservé aux cas où la vitesse basale est imposée comme valeur calculée par ailleurs. Ici, la relation entre les vitesses et la contrainte basale est introduite de fait dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

### 2.3.4. Le Free-Surface Solver

Dans le cas d'une simulation évolutive, l'équation suivante doit être résolue en surface :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}_h \vec{\nabla}_h S = a - w(S), \quad \text{cf. Equation (III.1.9).} \tag{2.25}$$

Elle s'écrit dans sa forme variationelle comme :

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} \int_V \phi_i \Psi dV + S_i \int_V \vec{v}_h \cdot \vec{\nabla}_h \phi_i \Psi dV = \int_V (a - w) \Psi dV, \tag{2.26}$$

où $S$ est développé comme $S(x, y, t) = \phi_i(x, y) S_i(t)$ et avec $\Psi$ une fonction test.
La résolution de cette équation avec la méthode des Éléments Finis mène à un système d'équations linéaires qui concerne uniquement les nœuds de surface.
Pour cette équation, comme il s'agit d'un problème de dimensions inférieures à celui du problème d'écoulement, le système linéaire peut être résolu avec une méthode directe, cf. Tableau 2.3. Tous les paramètres seront utilisés dans la suite tels quels sauf précision contraire.

| Free-Surface, système linéaire | |
|---|---|
| type | direct |
| méthode de résolution | umfpack |
| méthode de stabilisation | stabilisé |
| **Free-Surface, système non-linéaire** | |
| nb. itérations maximal | 1 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-6}$ |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 2.3.: Paramètres pour le *Free-Surface Solver*.
`Parameters for the Free-Surface Solver.`

Néanmoins une méthode de relaxation est introduite pour une meilleure convergence, ce qui amène à un système non-linéaire supplémentaire.
Comme ce *solver* fait partie des itérations couplées, on définit aussi ici une tolérance de convergence $\epsilon_C$.
La surface n'est pas autorisée à pénétrer le socle rocheux. Une profondeur minimale d'un mètre de glace est imposée partout par une méthode de pénalité.

### 2.3.5. Le Mesh-Update Solver

A chaque pas de temps, après le calcul de la nouvelle surface, une modification du maillage est nécessaire pour éviter une distorsion. On ne refait pas complètement un nouveau maillage, mais les nœuds du maillage existant sont migrés verticalement selon un problème élastique fictif.

Il s'agit ici encore une fois d'un système linéaire qui sera résolu à l'aide d'une méthode itérative avec un préconditioneur du type Jacobi (Tableau 2.4). Tous les paramètres seront utilisés dans la suite tels quels sauf précision contraire.
La condition en limite en surface, un déplacement imposé, est donnée directement par le *Free-Surface Solver*.

| Mesh-Update, système linéaire | |
|---|---|
| type | itératif |
| méthode itérative | BiCGSTAB |
| préconditioneur | ILU0 |
| tolérance de convergence $\epsilon_L$ | $10^{-6}$ |
| nb. itérations maximales | 200 |
| Système couplé | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ = | $10^{-4}$ |

TAB. 2.4.: Paramètres pour le *Mesh-Update Solver*.
`Parameters for the Mesh-Update Solver.`

### 2.3.6. Système couplé

Les *solvers* pour l'équation de Navier-Stokes et celui pour la *Free-Surface* ainsi que celui pour le *Mesh-Update*, tournent itérativement jusqu'à un critère de convergence de $\epsilon_C$ définit pour chacun des *solvers* (Figure 2.2). Pour une bonne convergence de l'ensemble du problème, on doit bien sûr vérifier que $\epsilon_L < \epsilon_{NL} < \epsilon_C$.
De plus, le nombre d'itérations maximales du système couplé peut-être défini. Dans ce travail il sera en général pris égal à 5 dans le cas d'un calcul évolutif.

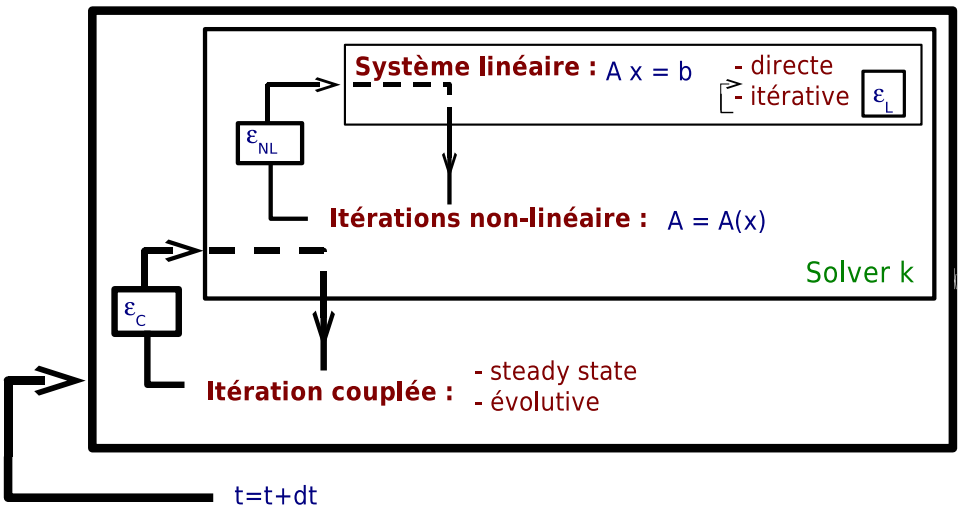



FIG. 2.2.: Schéma du modèle ELMER. `Sketch of the model ELMER.`

## 2.4. Valeurs numériques

Les valeurs numériques utilisées dans la suite sont données dans le tableau 2.5.

| | |
|---|---|
| $\rho$ | $880\,\mathrm{kg\,m^{-3}} = 8.84{\times}10^{-19}\,\mathrm{MPa\,a^2\,m^{-2}}$ |
| $g$ | $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.78{\times}10^{15}\,\mathrm{m\,a^{-2}}$ |
| $A_s$ | $0.00004\,\mathrm{m\,Pa^{-1}\,a^{-1}}$ (sphère), $0.00022\,\mathrm{m\,Pa^{-1}\,a^{-1}}$ (St. Sorlin) |
| $C_s$ | $0.004545\,\mathrm{m^{-1}\,MPa\,a}$ (sphère), $0.025\,\mathrm{m^{-1}\,MPa\,a}$ (St. Sorlin) |
| $A$ | $1.3{\times}10^{-24}\,\mathrm{Pa^{-3}\,a^{-1}}$ |
| $\eta$ | $0.2301\,\mathrm{MPa\,a^{1/3}}$ |

TAB. 2.5.: Valeurs numériques pour les paramètres utilisés.
`Numerical values for the parameters used.`

## 2.5. Machines utilisées

Les simulations ont été effectuées sur trois machines différentes dont les caractéristiques principales sont présentées dans le Tableau 2.6.

| nom | PC185 | I-CLUSTER2 | SEPELI |
|---|---|---|---|
| emplacement | LGGE,<br>ordinateur personnel | Montbonnot (France),<br>INRIA Rhône-Alpes<br>http :\\sed.inrialpes.fr | CSC<br>(Finnish IT center for Science)<br>Finlande<br>http :\\www.csc.fi |
| processeur | Intel(R) Pentium (R) 4 | Itanium-2 processeur | AMD Operton |
| nœuds | 2 processeurs | 104 nœuds<br>à deux processeurs | 256 nœuds<br>à deux processeurs |
| fréquence | 2994 MHz | 900 MHz | 2.2 GHz |
| mémoire | 2 × 512 MB | 3 Gigabytes | 4-8 Gigabytes |
| performance<br>(Linpack Benchmark) | | 561 GigaFlops | 1990 GigaFlops |

TAB. 2.6.: Machines utilisées. `Computers used.`

# 3. Comparaison : cas synthétiques

Avant de passer à un cas réel, plusieurs glaciers synthétiques avec des géométries données par des expressions mathématiques continues ont été étudiés. Cela a permis de mieux séparer l'influence des différents phénomènes physiques (déformation de la glace, bilan de masse, glissement) et de varier le rapport d'aspect et la pente du socle afin d'en comprendre l'influence.
De plus, ces tests plus simples et moins gourmands en mémoire et temps de calcul ont permis de mettre en place les différents modèles utilisés ainsi que des méthodes d'analyse pour la comparaison des résultats.
Dans les paragraphes suivants, les trois géométries synthétiques utilisées sont décrites avec leurs résultats respectifs : un glacier sphérique dans le Paragraphe 3.1, un glacier conique dans le Paragraphe 3.2 et un glacier de vallée dans le Paragraphe 3.3. Dans le Paragraphe 3.4 un résumé est fait et le Paragraphe 3.5 traite d'une comparaison du temps CPU effectuée à titre d'exemple sur le glacier sphérique.
Les trois paragraphes qui décrivent les expériences avec les géométries synthétiques sont tous structurés de la même manière : Après une description de l'expérience (géométrie, bilan de masse, conditions aux limites au socle) des détails sur les modèles utilisés sont donnés. Ensuite, les simulations effectuées sont résumées. Enfin les résultats des différents modèles sont comparés en terme de géométrie de la surface finale et de champs de vitesses.

## 3.1. Glacier sphérique

### 3.1.1. Description de l'expérience

#### Géométrie

Le même glacier que dans le Chapitre IV.1 est utilisé : une demi-sphère aplatie avec un rayon $R$ de 500 m centré à l'origine sur une rampe inclinée (Figure 3.1). La demi-sphère est aplatie avec un facteur 0.3 ; la pente de la rampe $p$ varie entre 0 et 0.3.

$$z_{\text{bed}} = 1000 + p \cdot y \tag{3.1}$$

$$z_{\text{surf}} = \text{bed} + 0.3 \cdot \sqrt{\max(0, R^2 - x^2 - y^2)} \tag{3.2}$$

La pente du socle est variable afin de mieux comprendre les effets respectifs du rapport d'aspect et de la pente du socle.
Il apparaît que la différence des résultats entre les modèles dépend très peu de cette pente. En fait, l'effet de la pente du socle est dominé par celui du rapport d'aspect du glacier

même (rapport entre épaisseur et longueur) qui est dans le cas de la sphère tellement fort que la pente du socle n'a plus beaucoup d'influence.

### Bilan de masse

La distribution du bilan de masse est également sphérique, avec une valeur de 5 m de glace (et non pas d'eau) par an au centre, centre qui est décalé un peu en aval par rapport au centre du glacier.

### Conditions limites au socle

Une loi de glissement linéaire (type Weertman, p=1, q=0) est adoptée ici, avec $A_s = 2.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{m\,Pa^{-1}\,a^{-1}}$ ($C_S = 0.04545\,\mathrm{m^{-1}\,MPa\,a}$ pour le coefficient du frottement dans Elmer).

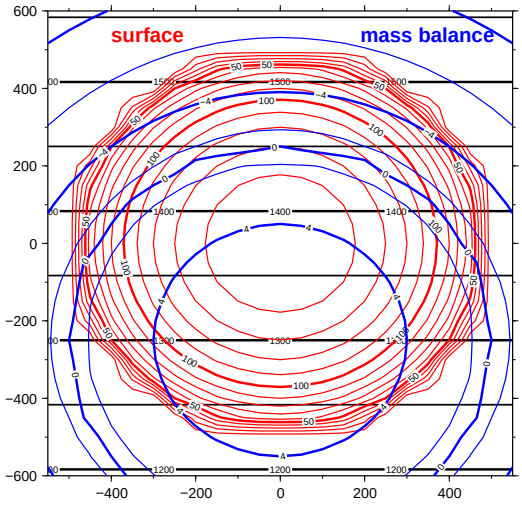



Fig. 3.1.: Géométrie du glacier sphérique. `Geometry of the spherical glacier.`

## 3.1.2. Modèles

### Modèle M SIA

Le schéma SI avec un pas de temps de 0.1 ans est utilisé. Une double grille avec un pas de grille de 50 m est utilisée. Toutes les simulations ont été effectuées sur le pc185.

### Modèle F SIA et F HO

Un pas de temps de 0.1 ans est utilisé. La grille est une grille simple en $x, y$ avec un pas de grille de 50 m. Il y a 41 couches verticales, les paramètres de convergence sont $\epsilon_S = 10^{-5}$ pour la solution de l'équation de transport ainsi que $\epsilon_V = 10^{-4}$ et $\epsilon_\eta = 10^{-5}$ pour le calcul du champ de vitesses d'ordre supérieur (respectivement pour les systèmes creux pour $u$ et $v$, ainsi que pour l'itération sur $u, v, \eta$). Dans ce cas, les conditions initiales à la première itération sont les vitesses SIA. Les simulations ont été effectuées sur le pc185 pour le modèle SIA ainsi que les simulations diagnostiques du modèle HO, les autres ont été réalisées sur I-Cluster2.

#### Modèle Elmer

Avec ELMER, il est possible de profiter de la symétrie du problème et de simuler uniquement la moitié droite ou gauche de la demi-sphère. Les simulations sont alors effectuées sur le demi-domaine.
Le maillage est un maillage avec des éléments hexaédriques. Il y a 41 couches verticales. Les conditions initiales sont les vitesses SIA, les seules conditions aux bords sont les vitesses sur le socle rocheux (nulle ou en accord avec la loi de frottement) et une vitesse nulle perpendiculaire au plan de symétrie.
Les paramètres de convergence pour la résolution de l'équation de Navier-Stokes sont donnés dans le Tableau 3.1.
Les simulations évolutives ont été effectuées sur SEPELI, les autres sur le PC185.

| Navier-Stokes, système linéaire | |
|---|---|
| type | itératif |
| méthode pour résolution itérative | BiCGStab |
| nb. d'itérations maximal | 1500 |
| préconditionnement | ILU1 |
| tolérance de convergence $\epsilon_L$ | $10^{-5}$ |
| méthode de stabilisation | bulles |
| **Navier-Stokes, système non-linéaire** | |
| nb. d'itérations maximal | 100 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-4}$ |
| nb. d'itérations maximal de type Picard | 3 |
| tolérance de convergence Picard $\epsilon_{NLP}$ | $10^{-2}$ |
| facteur de relaxation | 1.0 |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 3.1.: Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.`

### 3.1.3. Simulations effectuées

Dans le Tableau 3.2 les simulations effectuées pour ce glacier sont résumées. Dans la dernière colonne une abréviation pour le type de simulation qui sera utilisée dans la suite est introduite. Toutes les simulations ont pu être effectuées avec les quatre modèles sans glissement, tandis qu'avec le glissement toutes n'ont pas convergés (qualifié par un ϟ).
Les champs de vitesses diagnostiques pour une géométrie donnée ont été calculés sans et avec glissement. Pour les simulations évolutives les cas suivants ont été traités : sans/avec bilan, sans/avec glissement.
La simulation désignée par ϟ🔔 n'a pas abouti car le domaine maillé a été choisi trop petit.
La durée des simulations avec bilan de masse est choisie de sorte d'arriver à une surface

stationnaire. Dans le cas d'une simulation avec à la fois du bilan et du glissement, seuls deux modèles ont été utilisés : M SIA et ELMER. La durée de la simulation a été écourtée à cause des soucis de convergence pour une durée plus longue avec ELMER. Le modèle F HO, quant à lui, ne converge pas du tout dans une simulation évolutive.

| pente | bilan | glissement | Diag. ou Evol. | M SIA | F SIA | F HO | E | abréviation |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.1 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.2 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.3 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0 | | oui | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_AG |
| 0.1 | | oui | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_AG |
| 0.2 | | oui | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_AG |
| 0.3 | | oui | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_AG |
| 0 | non | non | E, 50ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SB_SG |
| 0.1 | non | non | E, 50ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SB_SG |
| 0.2 | non | non | E, 50ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SB_SG |
| 0.3 | non | non | E, 50ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SB_SG |
| 0 | oui | non | E, 100ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_AB_SG |
| 0.1 | oui | non | E, 100ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_AB_SG |
| 0.2 | oui | non | E, 100ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_AB_SG |
| 0.3 | oui | non | E, 100ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_AB_SG |
| 0 | non | oui | E, 50ans | ✓ | ✓ | ↯ | ✓ | E_SB_AG |
| 0.1 | non | oui | E, 50ans | ✓ | ✓ | ↯ | ✓ | E_SB_AG |
| 0.2 | non | oui | E, 50ans | ✓ | ✓ | ↯ | ✓ | E_SB_AG |
| 0.3 | non | oui | E, 50ans | ↯ | ✓ | ↯ | ↯ | E_SB_AG |
| 0.1 | oui | oui | E, 10ans | ✓ | | | ✓ | E_AB_AG |

TAB. 3.2.: Simulations effectuées pour le glacier sphérique.
`Simulations for the spherical glacier.`

### 3.1.4. Comparaison

Dans ce paragraphe les résultats des différentes simulations sont présentés et comparés entre les différents modèles. Dans un premier temps, la géométrie de la surface est étudiée et ensuite le champ de vitesses. Les différentes simulations sont toujours présentées dans l'ordre croissant de leur complexité, c'est-à-dire d'abord les simulations diagnostiques et ensuite les simulations évolutives dans le temps ; ainsi que d'abord les simulations sans bilan de masse ni glissement et successivement avec bilan de masse et/ou du glissement. Selon l'observable (épaisseur de glace ou vitesse) les sorties des modèles sont présentées sur toute la surface du glacier, en coupe ou en profil vertical. Toutes les figures présentent les différents résultats pour les différentes valeurs de la pente du socle choisies (*slope* ... sur les figures).

#### Géométrie de surface

La géométrie de surface est étudiée pour les différentes simulations évolutives, l'épaisseur de glace est présentée sur toute la surface du glacier et ensuite en coupe dans le plan de symétrie.

Sur la Figure 3.2, la géométrie de la surface finale est donnée pour les différents modèles et pentes du socle dans le cas d'une simulation évolutive sans bilan de masse et sans glissement (E_SB_SG).
On peut y observer une légère différence de forme entre les deux modèles SIA. Le modèle F HO donne un glacier plus épais, les modèles SIA un glacier plus fin qu'Elmer.

Pour les résultats présentés sur la Figure 3.3, un bilan de masse est appliqué (simulation de type E_AB_SG). La durée de la simulation est choisie afin d'aboutir à une surface stationnaire. Les différences entre les modèles ne sont pas très importantes non plus dans ce cas.

#### En coupe / La position du front

Sur la Figure 3.4 les même résultats sont présentés en coupe dans le plan de symétrie. Les simulations sans bilan de masse (E_SB_SG, lignes solides) et avec bilan de masse (E_AB_SG, pointillés) sont superposées.
On observe plus facilement dans cette présentation le fait que les modèles SIA surestiment la déformation de la surface tandis que le modèle F HO la sous estime. Avec bilan l'accord pour la position du front est meilleur, par contre on observe une différence plus marquée à l'intérieur du glacier entre les modèles.
On n'observe que peu de dépendance à la pente du socle, car - comme expliqué plus haut - le rapport d'aspect dû à la pente est dominée par celui de la sphère.

Dans le Tableau 3.3, les positions du front sont donnés (la coordonnée $y$ est la direction de l'écoulement). Le front est défini comme le premier point de grille à l'extérieur du glacier sur l'axe de symétrie.

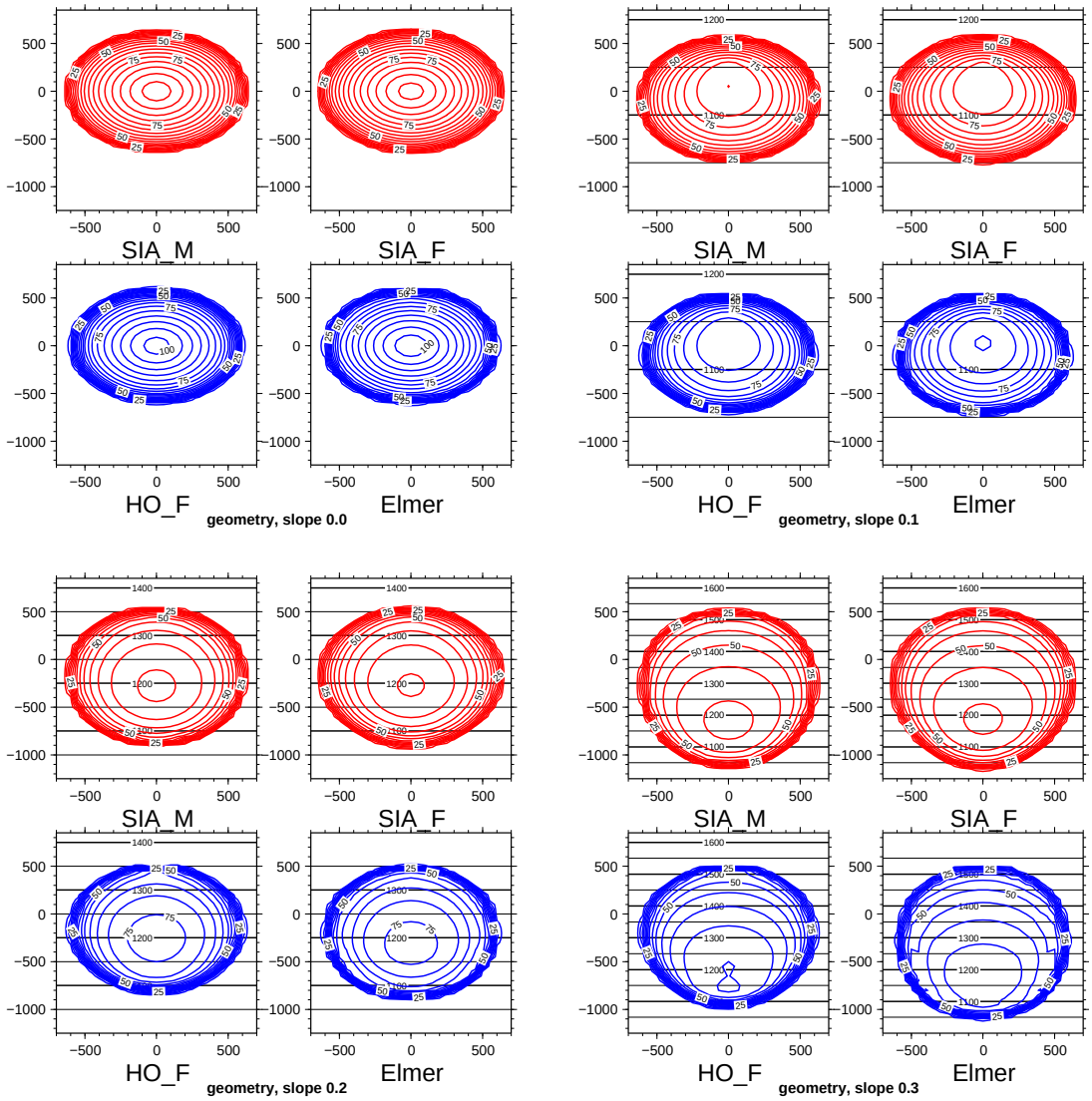



FIG. 3.2.: Glacier sphérique : simulation évolutive sans bilan et sans glissement (E_SB_SG). Les courbes de niveau de l'épaisseur de glace n'ont pas la même équidistance pour les deux types de modèles.
`Spherical glacier : time dependent simulation with zero mass balance and without sliding (E_SB_SG). The contour line intervals for ice thickness are different for the two types of models.`

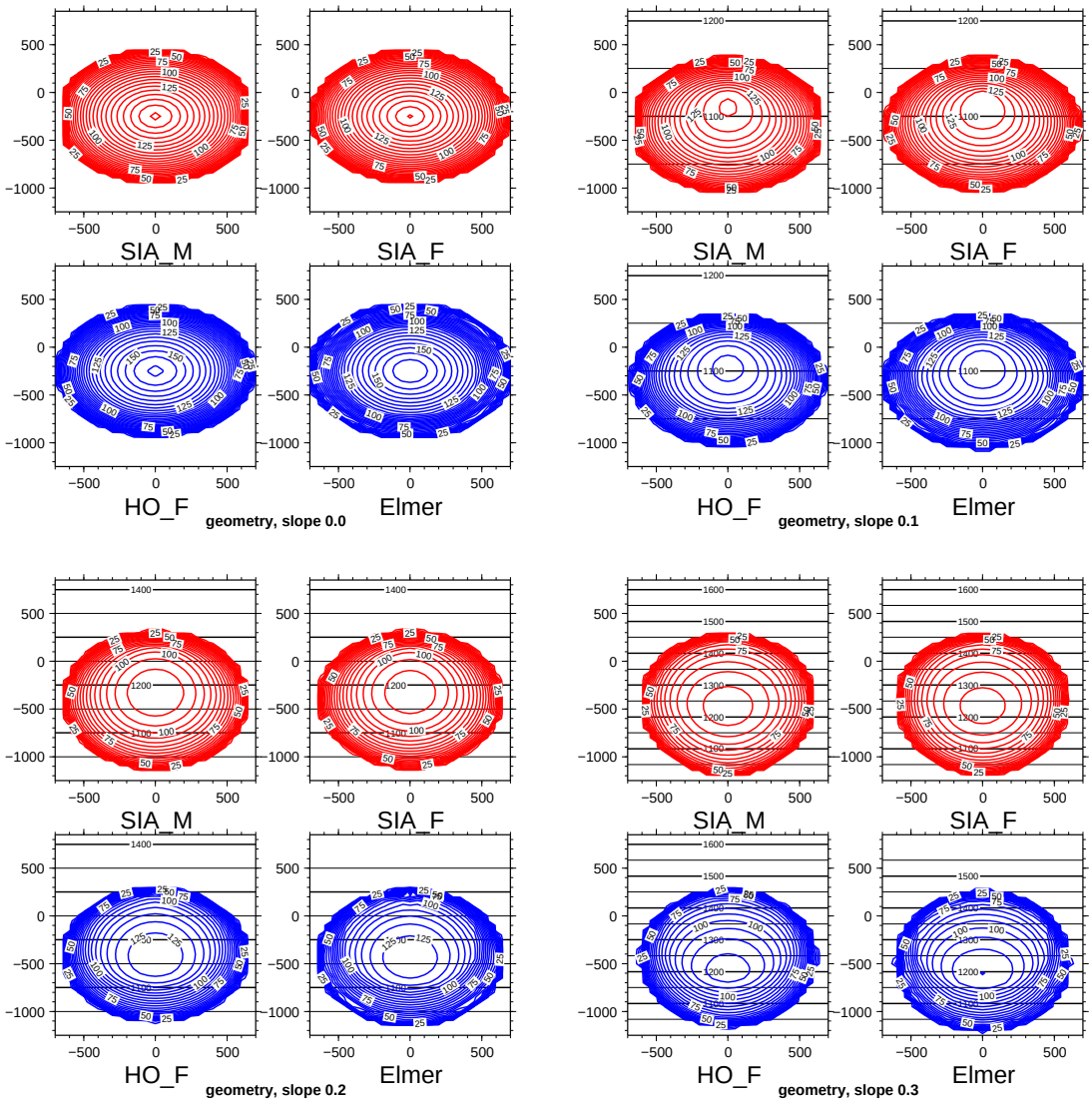



FIG. 3.3.: Glacier sphérique : simulation évolutive avec bilan et sans glissement (E_AB_SG).
`Spherical glacier : time dependent simulation with mass balance and without sliding (E_AB_SG).`

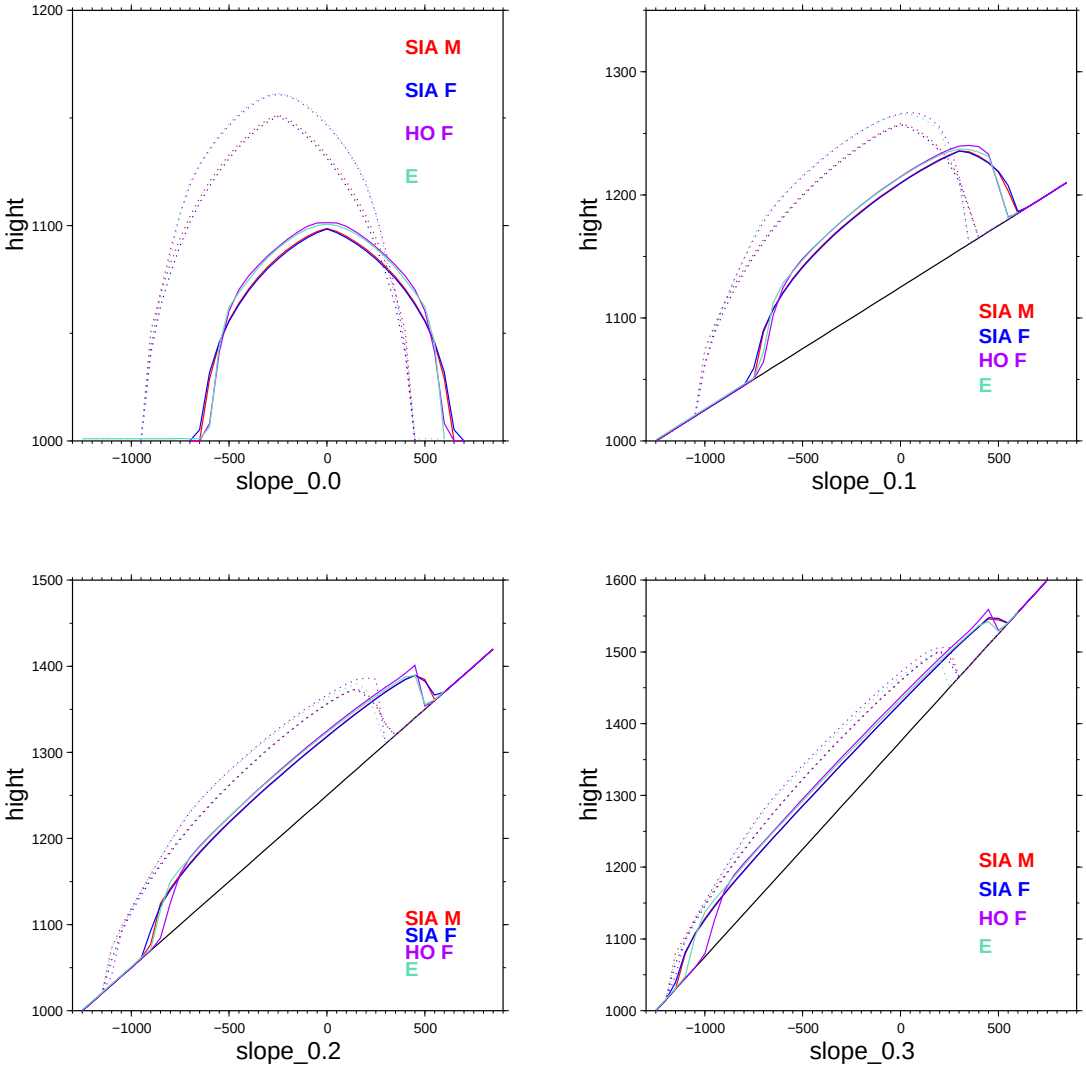



FIG. 3.4.: Glacier sphérique en coupe : simulation évolutive sans glissement avec/sans bilan de masse (E_AB_SG en pointillé, E_SB_SG comme ligne).
`Spherical glacier cross section : time dependent simulation without sliding and with/without mass balance (E_AB_SG with points, E_SB_SG as a line).`

| type de simulation | modèle | pente | position du front ($y$, en m) |
|---|---|---|---|
| position initiale | | | -450 |
| E_SB_SG | M SIA | 0 | -650 |
| E_SB_SG | F SIA | 0 | -700 |
| E_SB_SG | F HO | 0 | -650 |
| E_SB_SG | E | 0 | -650 |
| E_SB_SG | M SIA | 0.1 | -750 |
| E_SB_SG | F SIA | 0.1 | -800 |
| E_SB_SG | F HO | 0.1 | -750 |
| E_SB_SG | E | 0.1 | -750 |
| E_SB_SG | M SIA | 0.2 | -950 |
| E_SB_SG | F SIA | 0.2 | -950 |
| E_SB_SG | F HO | 0.2 | -850 |
| E_SB_SG | E | 0.2 | -900 |
| E_SB_SG | M SIA | 0.3 | -1150 |
| E_SB_SG | F SIA | 0.3 | -1200 |
| E_SB_SG | F HO | 0.3 | -1000 |
| E_SB_SG | E | 0.3 | -1100 |
| E_AB_SG | M SIA | 0 | -950 |
| E_AB_SG | F SIA | 0 | -950 |
| E_AB_SG | F HO | 0 | -950 |
| E_AB_SG | E | 0 | -950 |
| E_AB_SG | M SIA | 0.1 | -1050 |
| E_AB_SG | F SIA | 0.1 | -1050 |
| E_AB_SG | F HO | 0.1 | -1050 |
| E_AB_SG | E | 0.1 | -1050 |
| E_AB_SG | M SIA | 0.2 | -1150 |
| E_AB_SG | F SIA | 0.2 | -1150 |
| E_AB_SG | F HO | 0.2 | -1150 |
| E_AB_SG | E | 0.2 | -1150 |
| E_AB_SG | M SIA | 0.3 | -1200 |
| E_AB_SG | F SIA | 0.3 | -1200 |
| E_AB_SG | F HO | 0.3 | -1200 |
| E_AB_SG | E | 0.3 | -1200 |

TAB. 3.3.: Position du front (glacier sphérique).
`Snout position (spherical glacier).`

### Vitesses de surface

Dans ce paragraphe les vitesses de surface sont étudiées.
Uniquement les vitesses $u$, c'est-à-dire les vitesses perpendiculaire à la direction de l'écoulement sont présentées. Toutes les remarques qui suivent restent valables pour les vitesses $v$ et $w$. Pour une meilleure lisibilité, le champ de vitesse est présenté uniquement sur la moitié droite de la demi-sphère.

Sur la Figure 3.5, le champ de vitesse diagnostique est présenté (simulation D_SG). Différentes gammes de couleurs ont été choisies pour les modèles SIA et les modèles d'ordre supérieurs pour insister sur le fait qu'une échelle de couleur différente est nécessaire. Cette échelle varie aussi d'une pente à l'autre.
On observe globalement la même allure pour tous les modèles. Par contre, en ce qui concerne les valeurs, on confirme l'observation faite sur la géométrie : les modèles SIA surestiment la déformation d'un facteur 5 environ pour les vitesses (vitesses maximales), et ce presque indépendamment de la pente du socle.
On trouve cette fois-ci un bon accord entre F HO et Elmer.

Sur la Figure 3.6, la même vitesse est présentée pour la simulation évolutive (E_SB_SG). Les différences entre les modèles sont beaucoup moins marquées : les modèles SIA sont plus proches de la solution Elmer. Pour une pente donnée, la même échelle de couleur est utilisée pour tous les modèles.

Sur la Figure 3.7 les vitesses avec bilan de masse sont présentées (E_AB_SG). L'accord entre les modèles est aussi très bon.

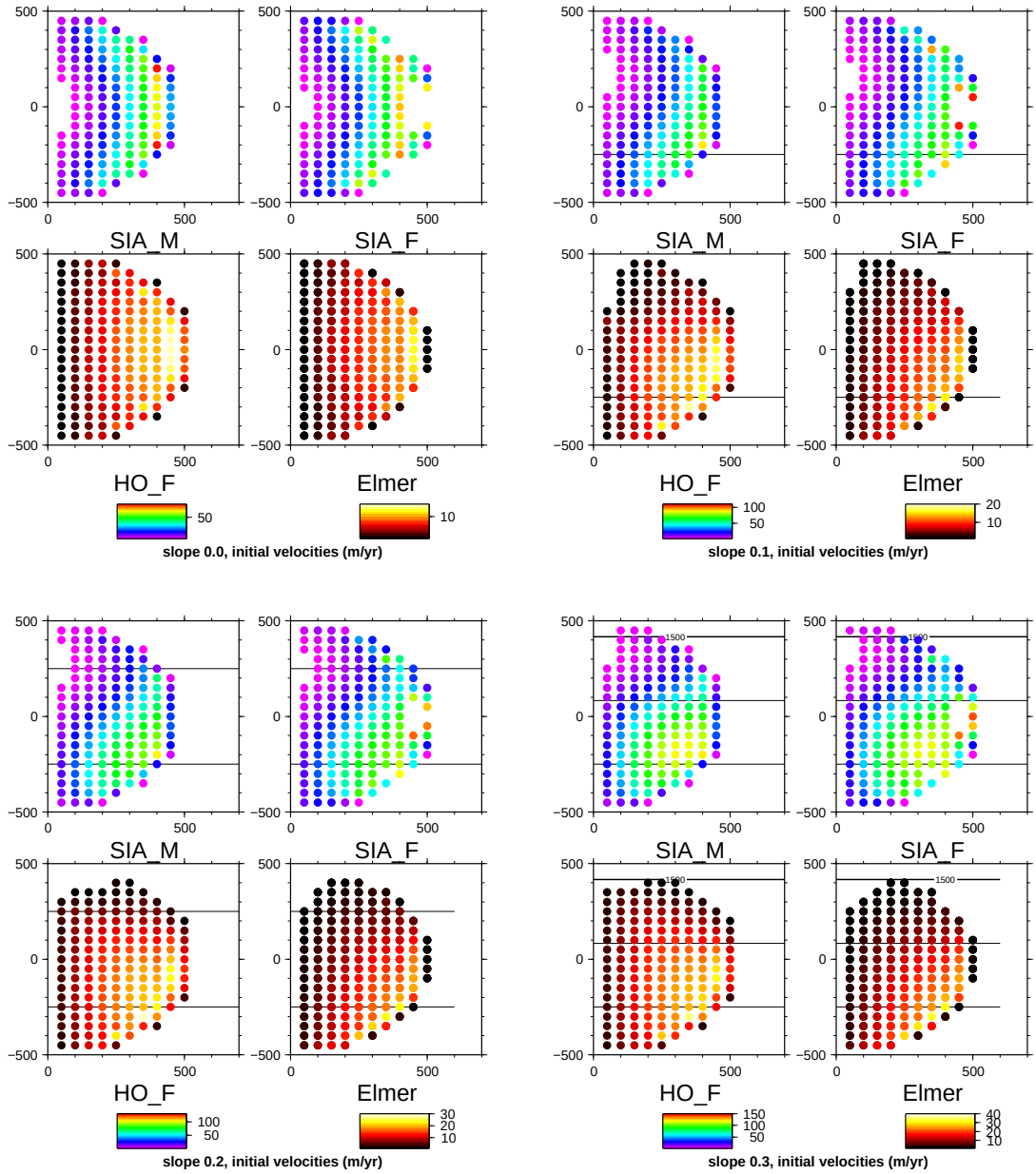



FIG. 3.5.: Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse diagnostique en surface, sans glissement (D_SG). L'échelle de couleur de gauche est utilisée pour les modèles SIA, celle de droite pour les deux autres modèles. Les points invisibles (blancs) correspondent aux vitesses trop ou trop peu élevées.
`Spherical glacier : u component of the diagnostic surface velocity, without sliding (D_SG). The color table on the left side is used for the SIA models, the one on the right side for the two other models. The invisible (white) points correspond to too big or too small velocities.`

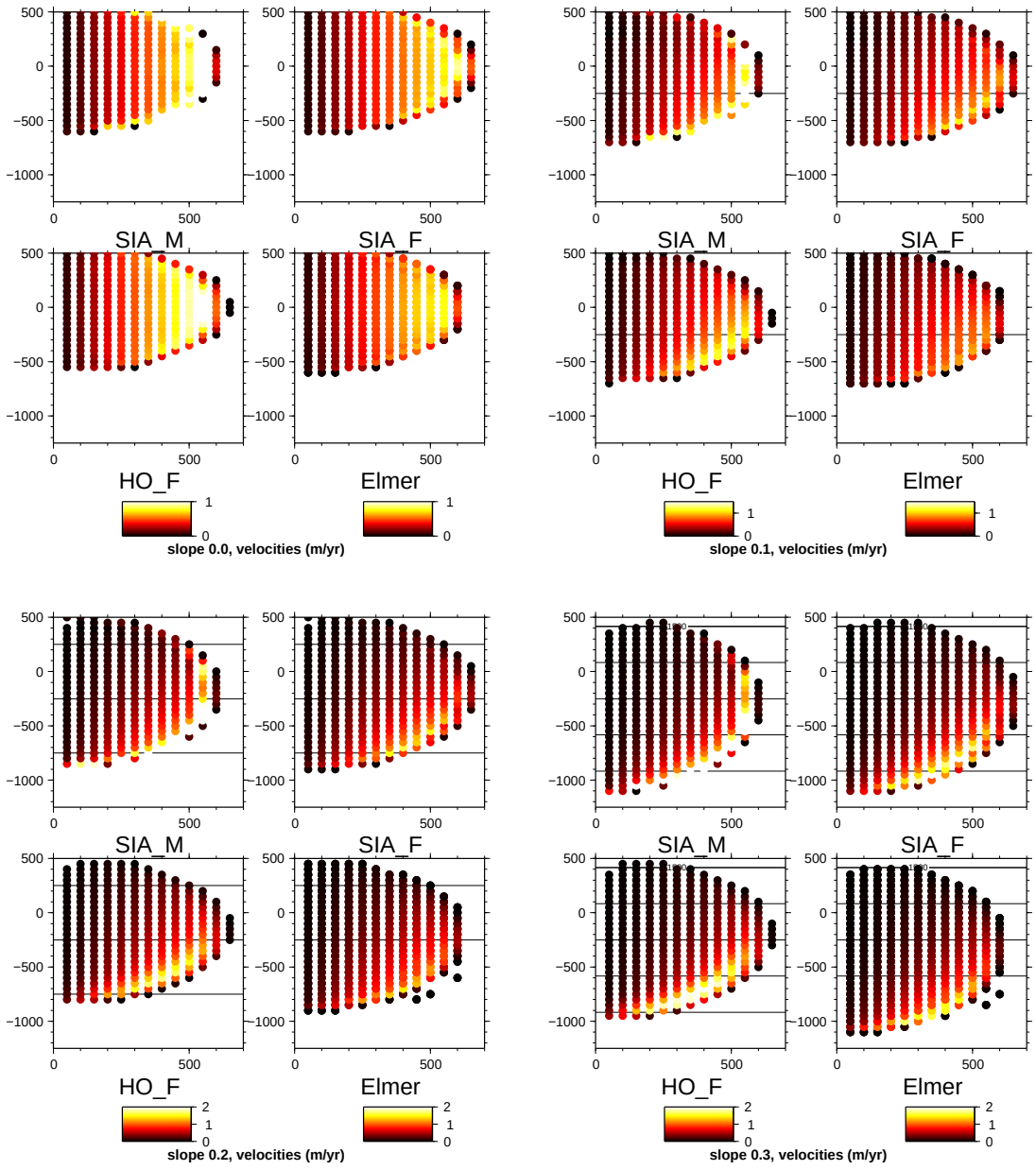



FIG. 3.6.: Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse en surface, sans bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_SB_SG).
`Spherical glacier : u component of the surface velocity, without mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG).`

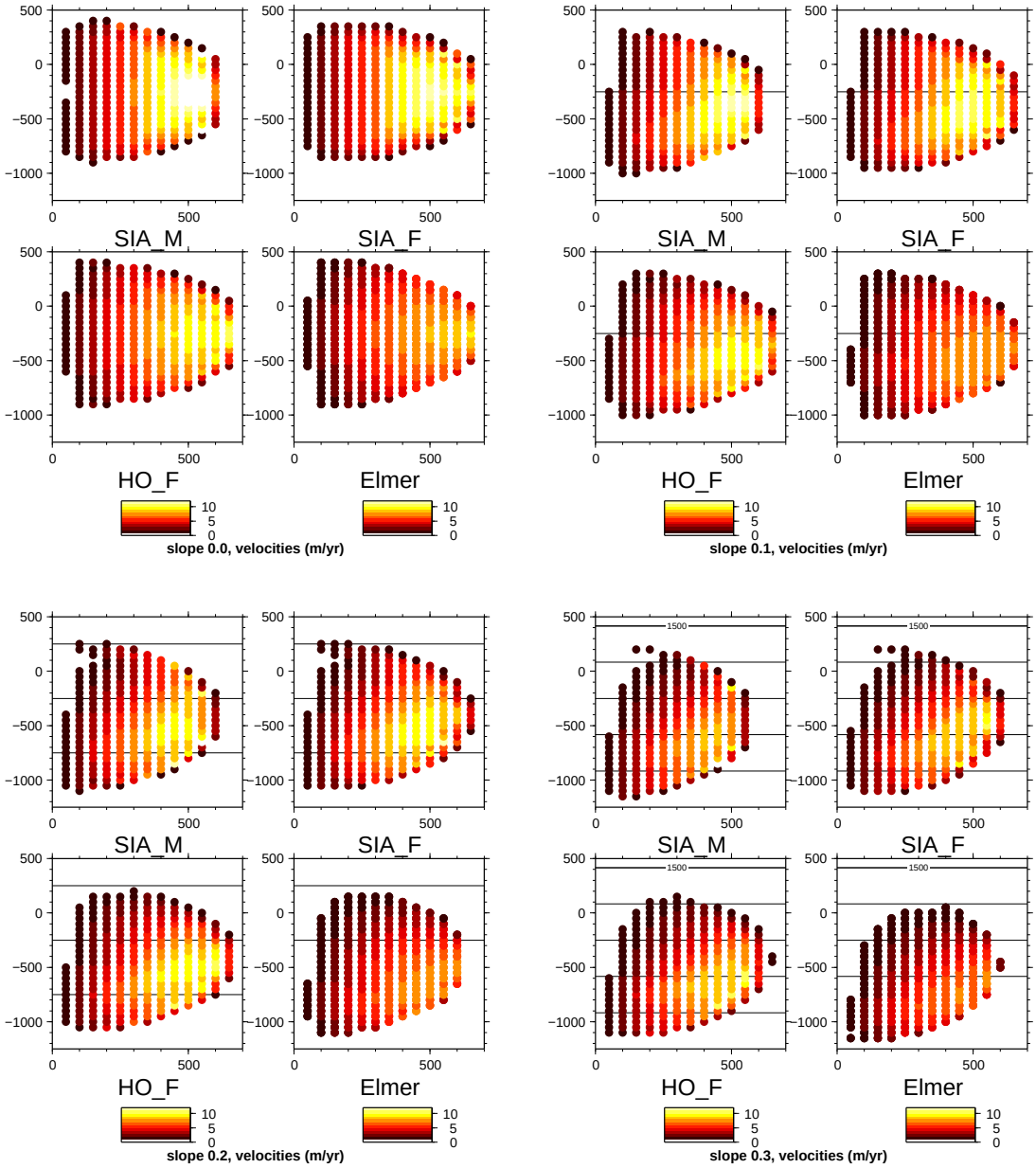



FIG. 3.7.: Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse en surface, avec bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_AB_SG).
`Spherical glacier : u component of the surface velocity, with mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG).`

### Profil de vitesse

La différence entre les modèles et notamment la dépendance à la pente du socle est mieux visible sur un profil vertical de vitesse à un point particulier (ici le point $(x, y) = (300, -250)$ qui se situe dans la partie inférieure de la partie droite du glacier). Les trois composantes de la vitesse en fonction de la profondeur sont présentées sur la Figure 3.8 (simulation D_SG) et normalisées (en gardant le signe) avec la vitesse en surface d'Elmer. La valeur absolue de cette composante des vitesses est indiquée également sur cette figure.
La dépendance au socle est surtout visible sur la vitesse verticale, étonnamment l'accord est meilleur pour les fortes pentes (un rapport d'environ 4 à la place de 10 à 15). Pour les autres composantes de la vitesse le rapport entre la SIA et les modèles d'ordre supérieurs reste proche de 5 pour toutes les pentes, néanmoins celui pour la vitesse dans la direction de l'écoulement (*horizontal velocity 2* sur la figure) diminue aussi légèrement de 5.5 à 3.8, également en contradiction avec la variation de la pente du socle.

Sur la Figure 3.9, les courbes correspondantes pour une simulation au cours du temps sont présentées (E_SB_SG). La différence entre les modèles et la petite dépendance du socle disparaissent. Cette analyse est éventuellement biaisée par le fait que la même durée de simulation pour toutes les pentes a été choisie (voir discussion plus loin pour les autres tests synthétiques). Ce biais disparaît dans le cas des simulations évolutives avec bilan de masse où une surface stationnaire est atteinte dans tous les cas.

Les courbes avec bilan de masse (Figure 3.10, simulation E_AB_SG) sont plus difficiles à interpréter à cause d'un problème technique avec Elmer : à chaque pas de temps le maillage doit être déformé, c'est-à-dire étiré verticalement, pour s'adapter à la nouvelle surface. En théorie, cela correspond à des déformations élastiques uni-dimensionnels indépendantes à chaque point de grille $(x, y)$. Néanmoins, Elmer traite ces déformations élastiques comme un problème couplé, et des déplacements horizontaux peuvent apparaître. A ce jour, il n'est pas possible de faire converger la simulation en imposant des conditions supplémentaires interdisant ces déplacements horizontaux. Le maillage qui a évolué dans le temps ne permet alors plus de connaître les vitesses exactes sur le profil, car les nœuds n'y sont plus. Une interpolation serait en principe nécessaire. Dans le cas d'une pente nulle, le maillage est tellement déformé que les résultats pour la vitesse $v$ deviennent irréalistes. Ceci explique que cette courbe manque, les autres doivent être interprétées avec une certaine vigilance. Globalement il y a un bon accord entre tous les modèles et pas de dépendance à la pente du socle.

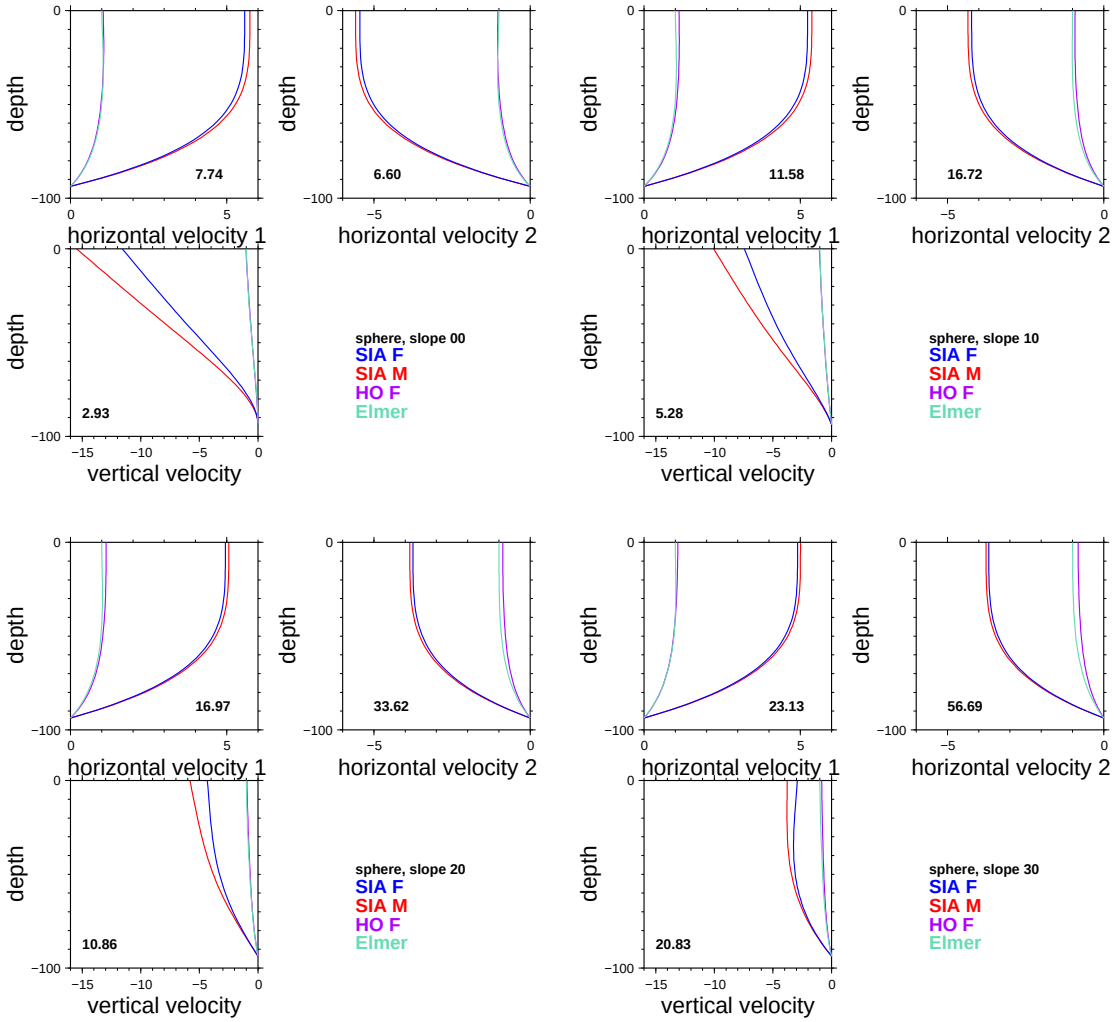



FIG. 3.8.: Glacier sphérique : profil vertical des vitesses diagnostiques au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), sans glissement (D_SG). "*horizontal velocity 1*" correspond à la vitesse perpendiculaire à l'écoulement et "*horizontal velocity 2*" à celle dans la direction de l'écoulement.

`Spherical glacier : diagnostic vertical velocity profile at point` $(x, y) = (300, -250)$, `normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), without sliding (D_SG). "`*horizontal velocity 1*`" is the one perpendicular to the ice-flow direction, "`*horizontal velocity 2*`" is the velocity in the direction of the ice-flow.`

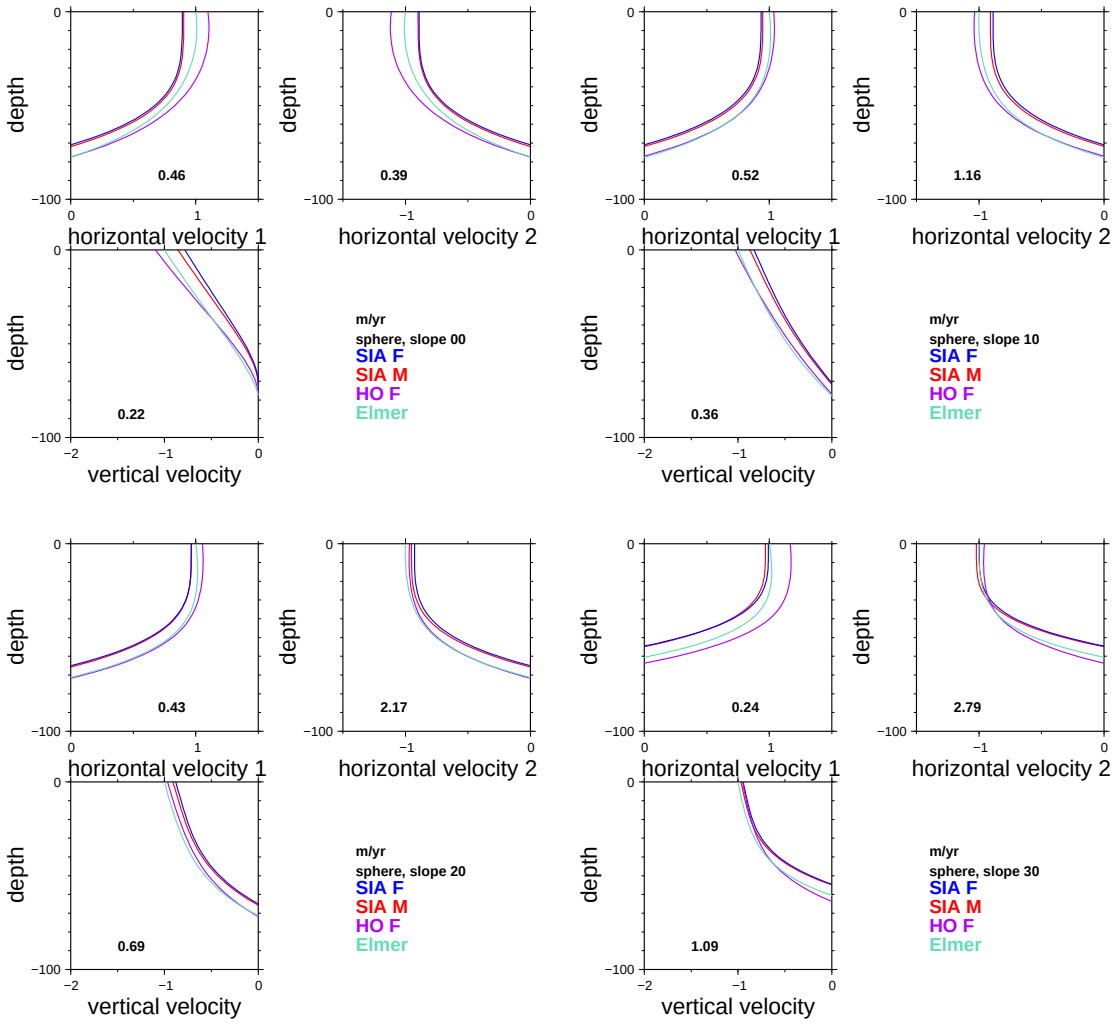



FIG. 3.9.: Glacier sphérique : profil vertical des vitesses au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), sans bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_SB_SG).
`Spherical glacier : vertical velocity profile at point` $(x, y) = (300, -250)$`, normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), with zero mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG).`

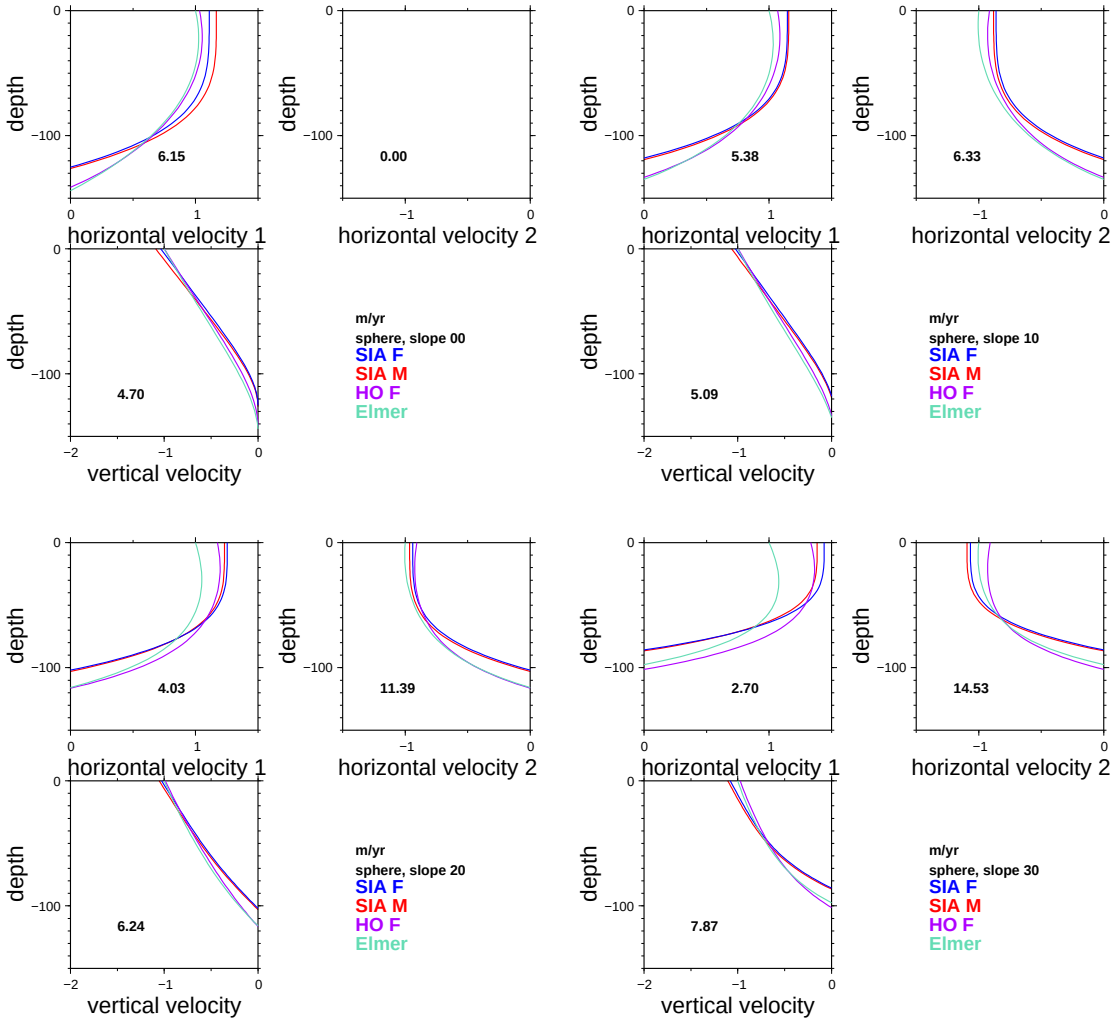



FIG. 3.10.: Glacier sphérique : profil vertical de vitesse au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), avec bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_AB_SG).
`Spherical glacier : vertical velocity profile at point` $(x, y) = (300, -250)$, `normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), with mass balance and sliding, time-dependent simulation (E_AB_SG).`

### Glissement

Dans cette partie l'influence du glissement est étudiée. Il faut noter que ces quelques simulations ne peuvent que donner un aperçu de toute la variété de lois de glissement et des paramètres numériques qui pourraient être étudiées.

Sur la Figure 3.11, les vitesses diagnostiques sont présentées (D_AG). L'échelle de couleur varie entre les deux types de modèles et d'une pente à l'autre. De nouveau, une faible dépendance de l'accord entre les modèles à la pente du socle peut être observée. Les valeurs avec glissement sont un peu plus élevées que celles sans glissement. Il y a de nouveau un facteur d'environ 5 (valeurs maximales) entre les deux types de modèles.

Il a été choisi ici de ne pas montrer les profils verticaux des vitesses au point $(x, y) = (300, -250)$, mais de comparer la valeur de surface (composante $u$) à ce point entre les différents modèles et pour les différentes simulations (Fig. 3.12).
Il n'y a pratiquement pas de dépendance à la pente du socle. L'accord entre les deux modèles SIA, mais aussi entre les deux modèles d'ordre supérieurs est très bon.
Dans toutes les simulations évolutives, tous les modèles donnent des résultats comparables en terme de vitesses de surface. Par rapport à une simulation sans glissement l'accord ou le désaccord entre les modèles ne change pas d'une manière significative.

L'impact du glissement sur la surface est montré sur la Figure 3.13 (simulations évolutives E_SG_SB et E_AG_SB) à l'aide d'une coupe de la surface finale des simulations évolutives. Le glacier s'étale plus avec glissement et après 50 ans on observe, comme précédemment, peu de différence entre les modèles SIA et *Full Stokes*. Sur les résultats d'Elmer, on observe des effets de bord sur la droite (c'est-à-dire la partie supérieure du glacier) car le domaine maillé est un peu trop petit de ce côté ; le glacier s'est étalé vers le haut plus que supposé. Néanmoins la partie basse du glacier devrait ne pas être trop influencée par ce problème.

Sur la Figure 3.14 la position du front pour les différentes simulations avec les différentes pentes et différents modèles est présentée. On observe, à part pour la pente la plus forte, un très bon accord entre les modèles SIA et aussi entre les modèles d'ordre supérieurs. Le meilleur accord entre les modèles est obtenu pour une simulation évolutive avec bilan de masse et sans glissement. La position du front est plus avancée avec bilan ou avec glissement que dans une simulation évolutive sans bilan ni glissement (l'influence du bilan est un peu biaisée dans cette représentation car la durée de simulation est plus longue).

A cause de nombreux soucis de convergence (F HO ne converge pas du tout avec bilan de masse et glissement, Elmer uniquement pendant quelques années), une seule simulation relativement courte à été faite pour étudier les effets combinés du bilan de masse et du glissement (E_AB_AG, Fig. 3.15) : Une simulation avec une pente de 0.2 a été réalisée seulement avec Elmer et M SIA pendant 10 ans.

Pour le modèle SIA M le glissement n'a pas d'effet du tout sur la surface pour une simulation aussi courte. Avec ELMER le glissement mène toujours à plus d'étalement de la surface, l'effet est beaucoup plus marqué avec bilan. A la fin d'une durée de simulation aussi courte on observe encore un écart assez grand entre les deux modèles. En tous cas, le glissement ne contribue pas véritablement à un accord entre les modèles, c'est surtout l'effet de la durée de la simulation, ou dans certains cas celui du bilan de masse. Avec une simulation aussi courte, une véritable conclusion n'est pas possible. Il semble quand-même que le glissement aurait un effet plus important sur la géométrie avec ELMER qu'avec un modèle SIA.

Remarque :
Il s'est avéré plus tard avec les simulations sur le glacier de Saint Sorlin que le coefficient de glissement choisi ici est probablement beaucoup sous-estimé par rapport à un glacier comme celui de Saint Sorlin. Les effets du glissement devraient alors être beaucoup plus marqués en réalité.

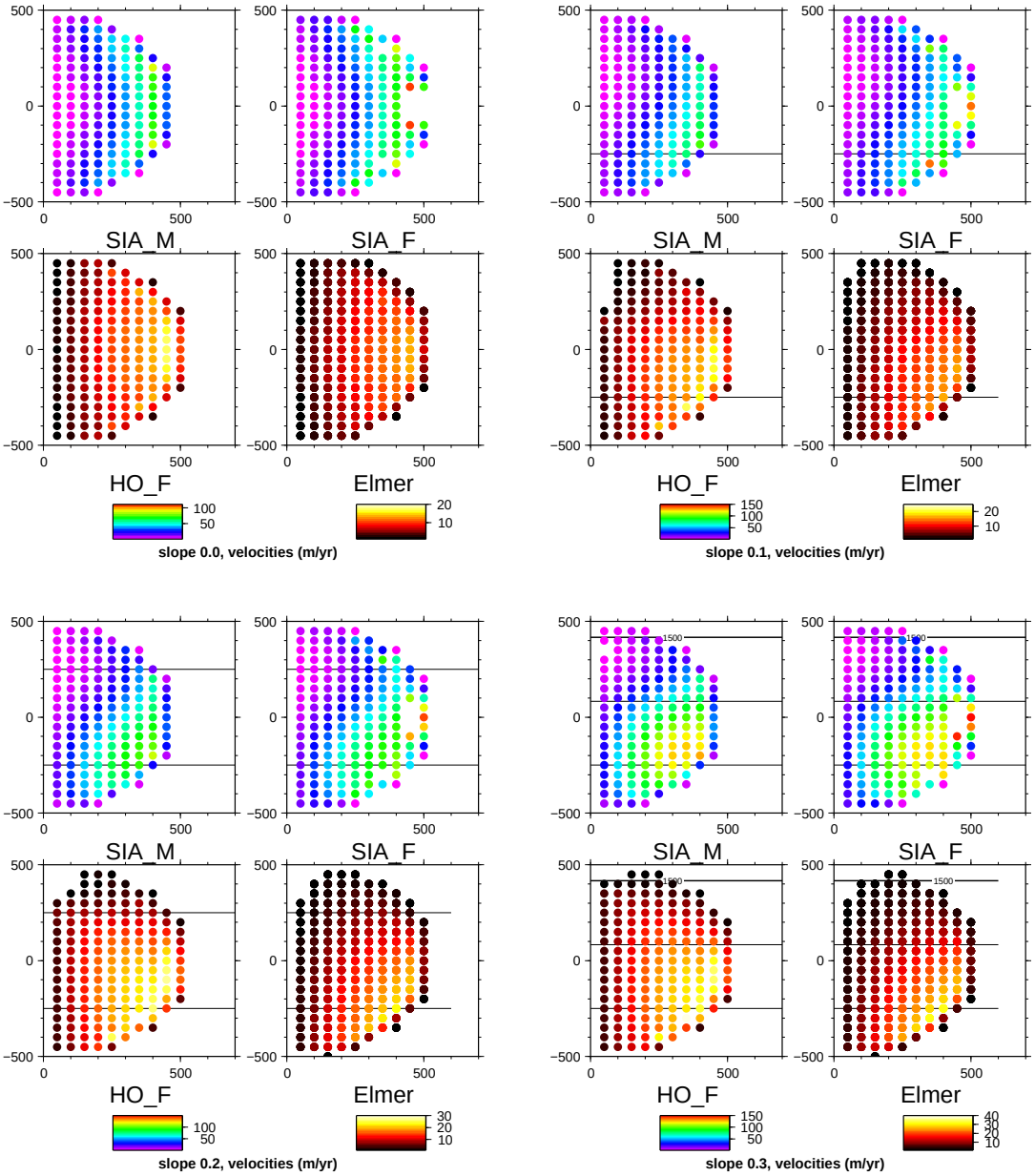



FIG. 3.11.: Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse diagnostique, avec glissement (D_AG).
`Spherical glacier : u component of the diagnostic velocity, with sliding (D_AG).`

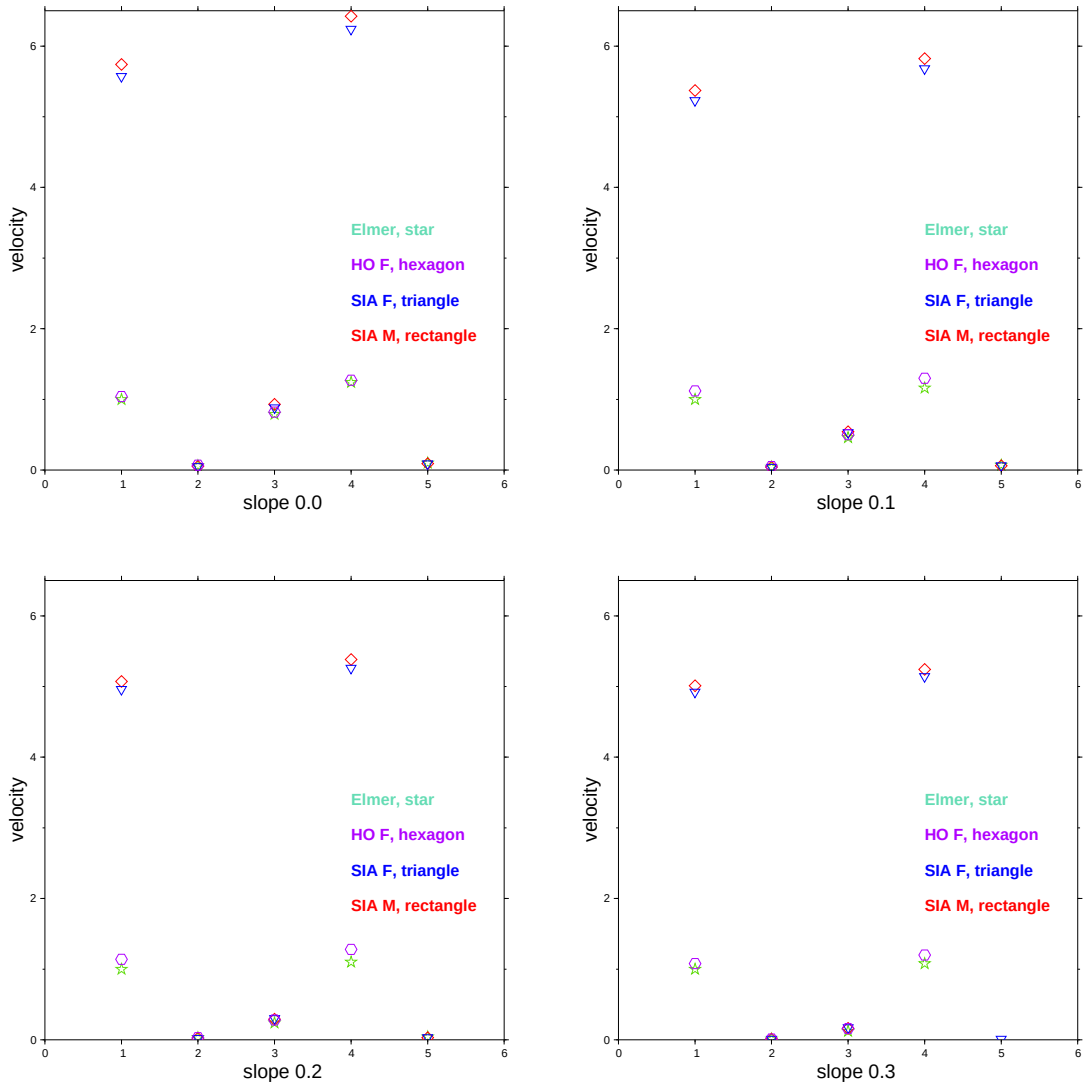



FIG. 3.12.: Terme $u$ de la vitesses de surface au point $(x, y) = (300, -250)$ relatif à celle d'ELMER sur la surface initiale pour les différentes simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 D_AG, 5 E_AG_SB.
$U$ component of Surface velocities at point (300/-250) normalized to that of ELMER on the initial surface for the different runs : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 D_AG, 5 E_AG_SB.

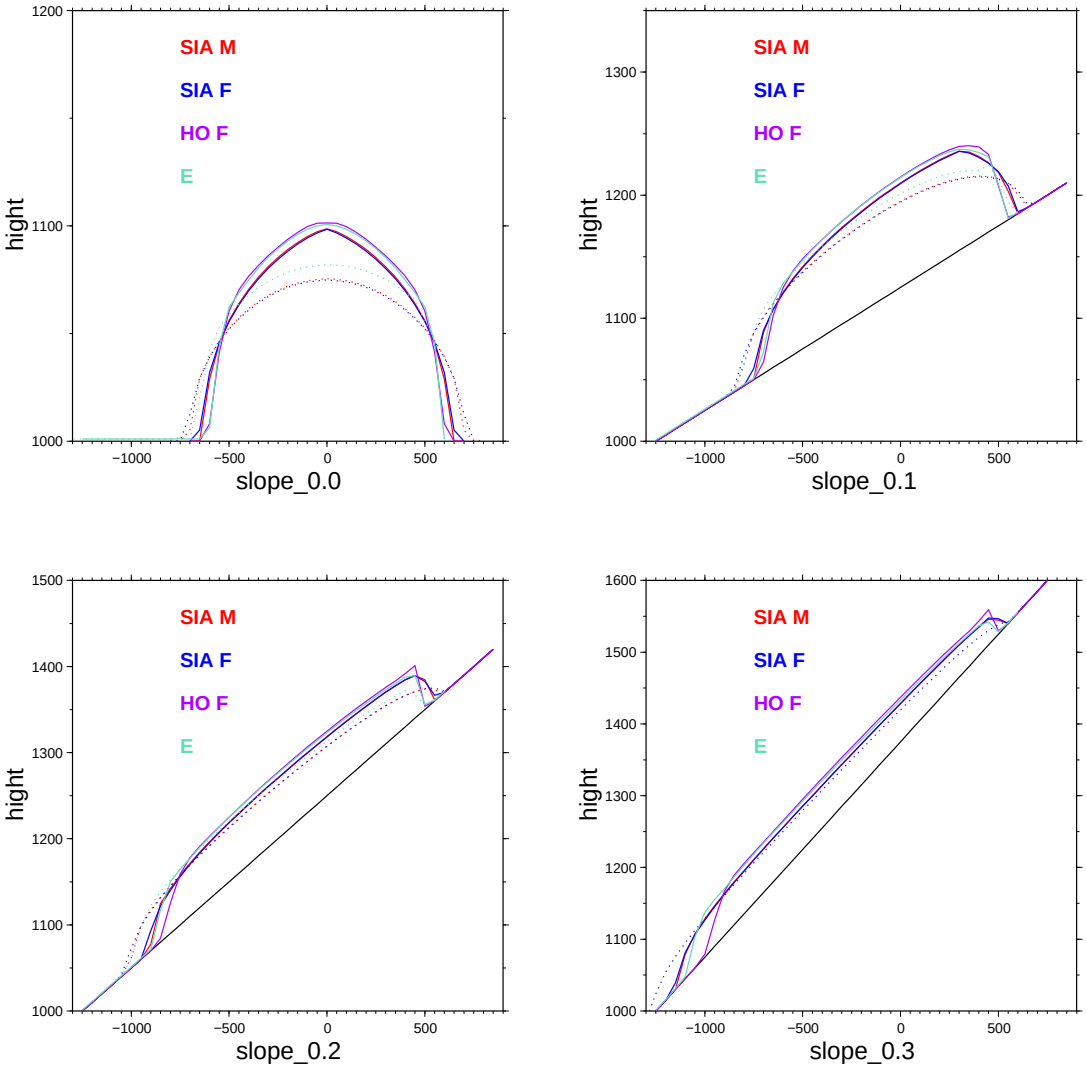



FIG. 3.13.: Glacier sphérique en coupe : simulation évolutive sans bilan de masse avec/sans glissement (E_AG_SB en pointillé, E_SG_SB comme ligne). `Spherical glacier cross section : time-dependent simulation without mass balance and with/without sliding (E_AG_SB as dotted line, E_SG_SB as a continous line).`

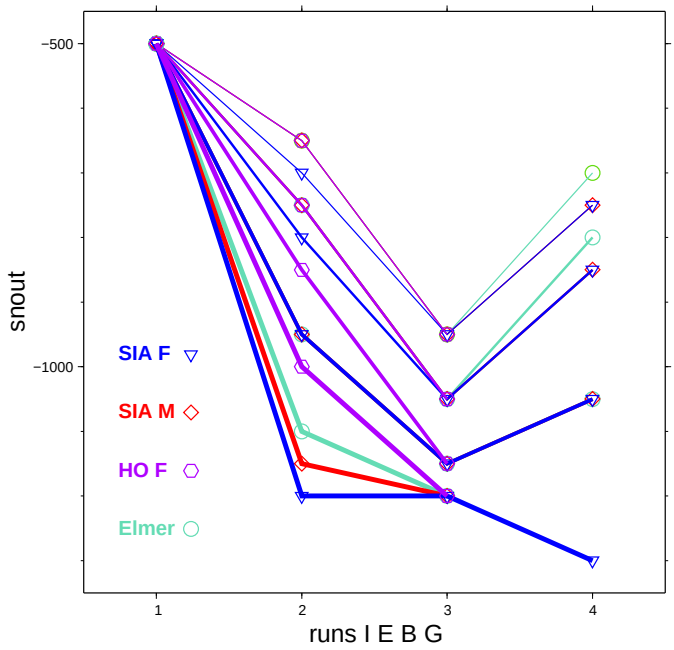



FIG. 3.14.: Position du front pour les différentes simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 E_AG_SB. L'épaisseur croissante des traits caractérise une pente du socle variant de 0 à 0.3.
`Snout positions for the different simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 E_AG_SB. Increasing line thicknesses represent bedrock slopes varying from 0 to 0.3.`

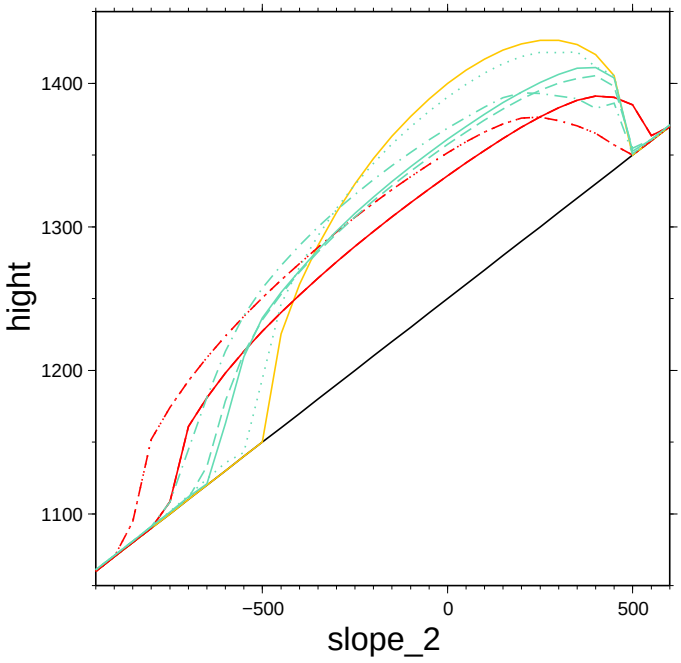



FIG. 3.15.: Coupe de la surface à l'issue d'une simulation évolutive de 10 ans avec bilan de masse et glissement ; en rouge M SIA, en vert ELMER, en jaune la surface initiale. Le trait continu correspond à E_SG_SB, le pointillé à E_SG_AB, le tireté à E_AG_SB et le trait mixte à E_AG_AB.
`Cross section of the surface after 10 years of a time-dependent simuation with mass balance and sliding ; red M SIA, green ELMER, yellow the inital surface. The continous line corresponds to E_SG_SB, the dotted one to E_SG_AB, the dashed line to E_AG_SB and the mixed one to E_AG_AB.`

## 3.2. Glacier conique (volcan)

### 3.2.1. Description de l'expérience

#### Géométrie

Ce glacier synthétique a été défini par analogie avec le glacier du Cotopaxi traité dans la Partie VI. Il s'agit d'un cône parfait aplati au milieu (Figure 3.16). Ce replat au milieu représente d'une manière très simplifiée le cratère avec un rayon $R$ de 400 m qui ne participe pas à l'écoulement et pour lequel le bilan de masse est nul. Les tests sont réalisés pour des pentes $\alpha$ du cône variant entre 0.3 et 0.8. Sur l'ensemble du glacier l'épaisseur de glace est constante et égale à 40 m. A l'extrémité supérieure elle décroît linéairement à partir de 5500 m d'altitude pour atteindre zéro au sommet (5800 m). Dans la partie basse, la même décroissance s'observe à partir de 4880 m pour arriver à zéro au front (4800 m).

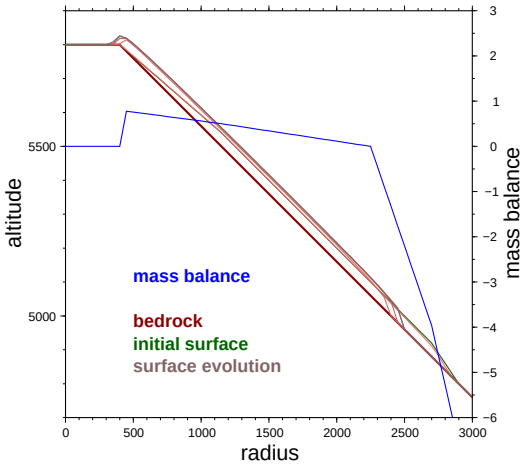



FIG. 3.16.: Géométrie du glacier conique. `Geometry of the conic glacier.`

$$z_{\text{bed}} = \begin{cases} 5800 & \text{si} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq R, \\ 5800 + \alpha\,(R - \sqrt{x^2+y^2}) & \text{sinon}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$z_{\text{surf}} = \begin{cases} z_{\text{bed}} + 40\,(5800 - \text{bed})\,/300 & \text{si} \quad 5500 \leq z \leq 5800, \\ z_{\text{bed}} + 40\,(\text{bed} - 4800)\,/80 & \text{si} \quad 4800 \leq z \leq 4880, \\ z_{\text{bed}} + 40 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.4}$$

#### Bilan de masse

La distribution du bilan de masse est une distribution linéaire avec l'altitude avec un changement du coefficient à la ligne d'équilibre, le bilan sur le replat sommital (le cratère) est égal à zéro. La ligne d'équilibre $LE$ est à 5100 m.

$$\text{bilan} = \begin{cases} 22 \times 10^{-3} \cdot (\text{surf}_{ini} - LE) & \text{si} \quad z_{\text{surf}_{ini}} \leq LE, \\ 1.14 \times 10^{-3} \cdot (\text{surf}_{ini} - LE) & \text{si} \quad z_{\text{surf}_{ini}} > LE, \\ 0 & \text{dans le cratère.} \end{cases} \tag{3.5}$$

#### Conditions aux limites au socle

On suppose une adhérence parfaite, le glissement n'a pas été étudié pour cet exercice.

### 3.2.2. Modèles

#### Modèle M SIA, F SIA et F HO

Les modèles ont été utilisés de façon similaire à ce qui a été présenté dans le paragraphe précédent pour le glacier sphérique.
Comme dans le cas précédent, les simulations ont été effectuées soit sur le PC185, soit sur I-CLUSTER2.

#### Modèle Elmer

Avec ELMER il est possible de profiter de la symétrie de rotation du problème et de le réduire à un problème 2D.
Le maillage consiste en éléments de type quadrilatère. Il y a 20 couches verticales. Le pas de temps est de 1 an. Les paramètres pour la résolution de l'équation de Navier-Stokes sont donnés dans le Tableau 3.4.

| Navier-Stokes, système linéaire | |
|---|---|
| type | direct |
| méthode pour résolution directe | umfpack |
| méthode de stabilisation | bulles |
| **Navier-Stokes, système non-linéaire** | |
| nb. d'itérations maximal | 100 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-4}$ |
| nb. d'itérations maximal de type Picard | 3 |
| tolérance de convergence Picard $\epsilon_{NLP}$ | $10^{-2}$ |
| facteur de relaxation | 1.0 |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 3.4.: Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.`

Comme conditions initiales, les vitesses et la pression sont imposées à zéro, comme conditions aux bords, une vitesse nulle est imposée sur le socle ; la vitesse dans la direction de l'écoulement est imposée à zéro sur l'axe de symétrie au centre du cratère.
Grâce à la réduction du problème à un problème $2D$, toutes les simulations ont pu être effectuées sur le PC185.

### 3.2.3. Simulations effectuées

Les simulation effectuées avec ce glacier sont résumées dans le Tableau 3.5. Quelques simulations n'ont pas pu être faites avec le modèle F HO en raison de soucis de convergence avec le champ de vitesses (notées avec un ϟ dans le tableau), dans certains cas, le problème apparaît même avec le champ diagnostique. D'autres simulations (celles avec bilan, marquées avec un ✠ dans le tableau) se sont avérées trop longues car toujours pas terminées au bout de 500 heures de calcul sur I-Cluster2. La durée des simulations évolutives avec bilan a été choisie de sorte à arriver à une surface stationnaire. Elle varie donc en fonction de la pente du socle.

| pente | bilan | glissement | Diag. ou Evol. | M SIA | F SIA | F HO | E | Abréviation |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.3 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.4 | | non | D | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | D_SG |
| 0.5 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.6 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.7 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 0.8 | | non | D | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | D_SG |
| 0.3 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.4 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.5 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.6 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.7 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.8 | non | non | E, 50 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_SB |
| 0.3 | oui | non | E, 300 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_AB |
| 0.4 | oui | non | E, 250 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_AB |
| 0.5 | oui | non | E, 200 ans | ✓ | ✓ | ✠ | ✓ | E_SG_AB |
| 0.6 | oui | non | E, 150 ans | ✓ | ✓ | ✠ | ✓ | E_SG_AB |
| 0.7 | oui | non | E, 150 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_AB |
| 0.8 | oui | non | E, 150 ans | ✓ | ✓ | ϟ | ✓ | E_SG_AB |

Tab. 3.5.: Simulations effectuées pour le glacier conique.
`Simulations for the conical glacier.`

### 3.2.4. Comparaison

La comparaison des résultats entre les modèles et pour les différentes pentes est structurée de la même manière que pour le glacier sphérique. La géométrie finale des simulations évolutives (d'abord sans, ensuite avec bilan de masse) est étudiée ainsi que les vitesses de surface et un profil vertical pour les simulations diagnostiques et évolutives.

### Géométrie de surface et position du front

Grâce à la symétrie de rotation, l'évolution de la surface peut être analysée uniquement le long d'une ligne d'écoulement (Fig. 3.17, simulations E_SG_SB et E_SG_AB). Les graphes dans la petite boîte dans les figures pour les différentes pentes du socle (*'slope'* sur la figure) représentent un zoom sur la zone du front.
On observe un écart entre les modèles SIA et les modèles d'ordre supérieurs essentiellement pour les simulations sans bilan. Cet écart dépend beaucoup de la pente du socle.
Dans les simulations avec bilan de masse les différences entre les modèles diminuent. Ceci est certainement dû au bilan de masse qui a pour conséquence de réduire l'importance de la déformation de la glace sur l'évolution de la surface du glacier. Mais il faut aussi tenir compte du fait qu'il s'agit d'une surface stationnaire dans la simulation avec bilan de masse contrairement à celle sans bilan de masse (la surface stationnaire n'existe pas dans ce cas). Pour les simulations sans surface stationnaire, il faudra peut-être, comme cela a été fait plus tard pour le glacier de vallée, adapter la durée de simulation à la pente du socle ; car pour une même durée de simulation le glacier se déforme d'autant plus que la pente est grande.
Le front est défini comme précédemment par le premier point à l'extérieur du glacier. La position du front est présentée sur la Figure 3.18 pour les différentes pentes sans et avec bilan de masse. Les observations se confirment : bon accord entre tous les modèles avec bilan de masse ; désaccord dépendant de la pente pour une simple simulation évolutive sans bilan.

Remarque par rapport au bord du cratère :
Pour les simulations avec bilan de masse de la glace s'accumule près du bord du cratère, malgré un bilan de masse nul dans le cratère. Cette glace provient du bilan de masse du bord du cratère. Ce phénomène n'a pas été étudié en détail. Néanmoins on peut remarquer qu'on observe en réalité sur le glacier du volcan Cotopaxi une accumulation de glace similaire.

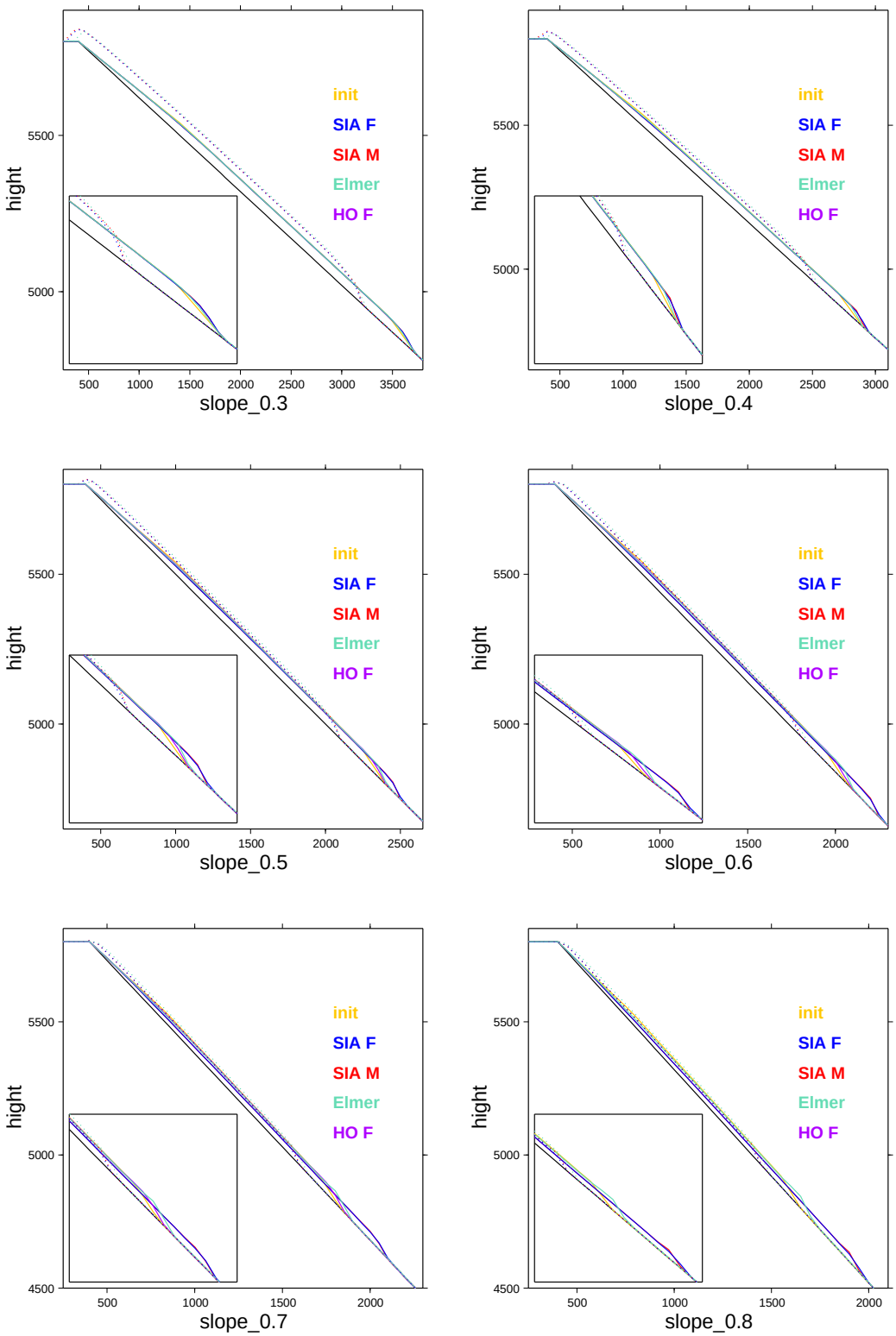



FIG. 3.17.: Glacier conique le long d'une ligne d'écoulement : simulation évolutive sans glissement avec/sans bilan de masse (E_SG_AB pointillé, E_SG_SB ligne continue).
`Flowline of the conical glacier : evolutive simulation without sliding with/without mass balance (E_SG_AB dotted lines, E_SG_SB as continous lines).`

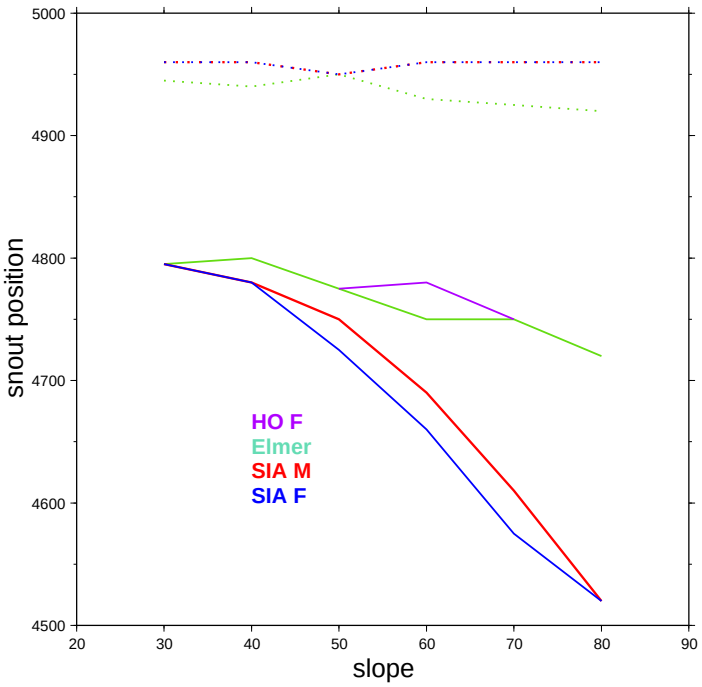
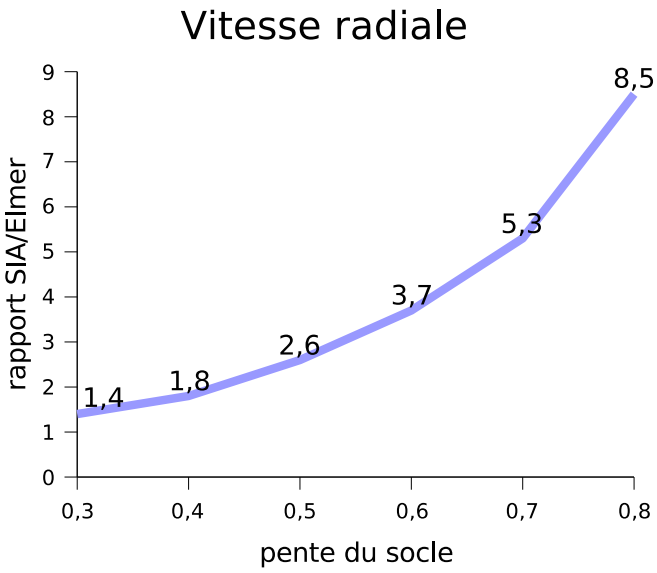



FIG. 3.18.: Glacier conique : position du front (altitude) en fonction de la pente du socle (ligne continue (E_SG_SB), pointillé (E_SG_AB)).
`Conic glacier : snout position (altitude) as a fonction of the bedrock slope (as continous lines for (E_SG_SB)and dotted lines for (E_SG_AB)).`

### Vitesses de surface

Du fait de la symétrie de la géométrie, l'écoulement est complètement déterminé par les vitesses radiales $v_r$ et les vitesses verticales $v_z$ le long d'une ligne d'écoulement.

Les vitesses diagnostiques en surface sont présentées sur la Figure 3.20 pour la vitesse radiale $v_r$ et sur la Figure 3.21 pour la vitesse verticale $v_z$.
On observe encore une fois un bon accord entre les deux modèles SIA. Les pics aux bords du glacier (zones avec une épaisseur qui diminue près du front et du cratère) s'expliquent de la façon suivante : dans la SIA les vitesses dépendent de $H$ à la puissance 4 et des dérivées de la pente de la surface à la puissance 3. Les deux varient fortement dans ces zones et les dérivées sont de plus calculées en Différences Finies sur une grille de 50 m. Il n'est alors pas surprenant d'observer ces instabilités.
On observe une vitesse strictement constante pour les modèles SIA dans les parties avec une épaisseur constante et de petites variations avec les modèles d'ordre supérieurs.
Les vitesses sont légèrement sous-estimées avec le modèle F HO et beaucoup surestimées avec les modèles SIA par rapport à Elmer.
On retrouve une forte dépendance à la pente du socle. Pour mieux quantifier cette dépendance à la pente du socle, le rapport entre la vitesse SIA et celle d'Elmer est présentée sur la Figure 3.19. Il s'agit de la vitesse radiale dans la partie où l'épaisseur du cône est constante. Ce rapport augmente d'un facteur 1.4 pour de faibles pentes à 8.5 pour les pentes les plus fortes.




Rapport entre la vitesse SIA et celle d'Elmer pour la simulation D_SG. Il s'agit de la vitesse radiale dans la partie où l'épaisseur du cône est constante.
Ratio between SIA and Elmer velocities for the simulation D_SG. The velocity is the radial velocity in the region of the glacier where the ice-thickness is constant.

Fig. 3.19.:

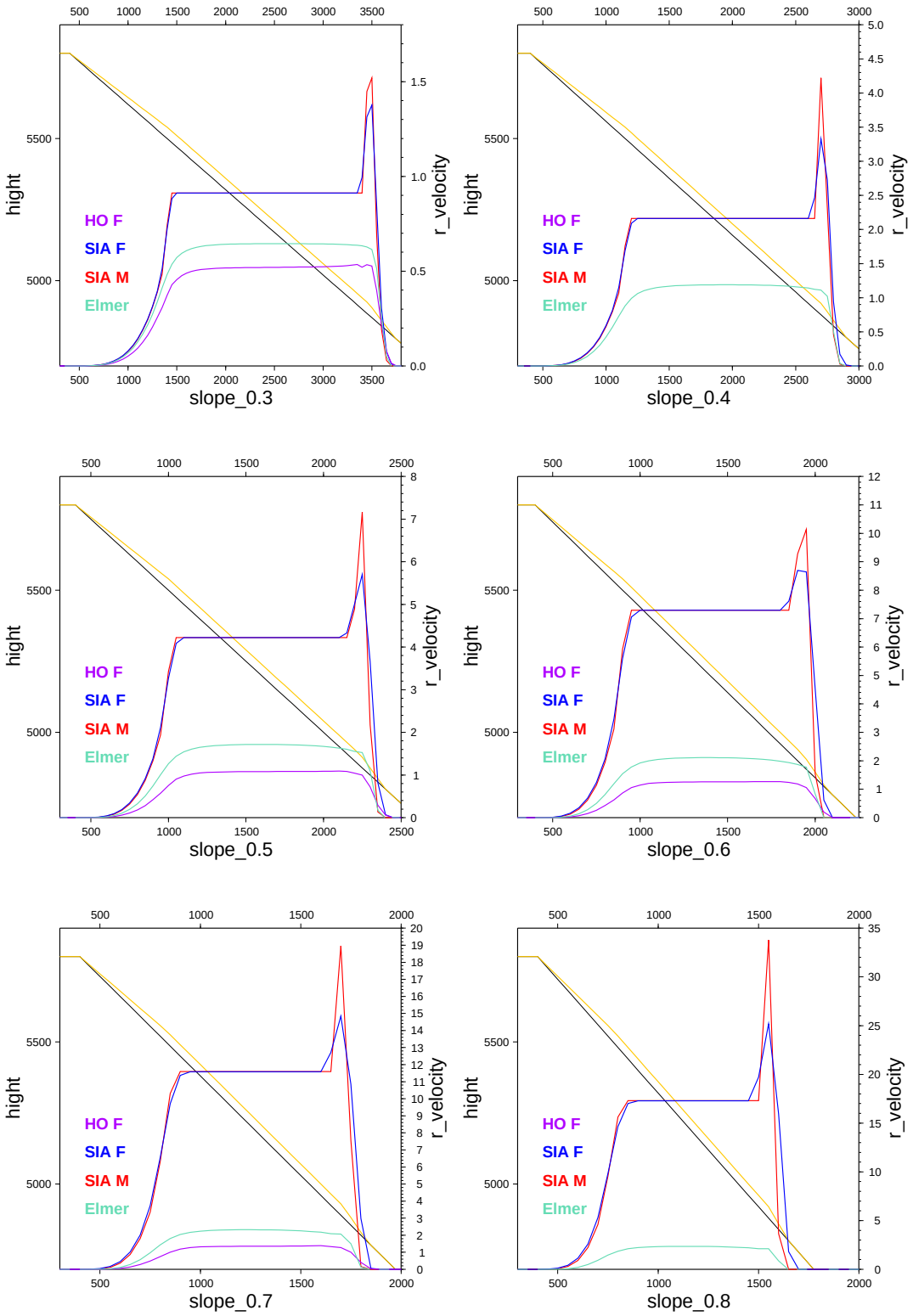



FIG. 3.20.: Glacier conique : vitesse diagnostique radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (D_SG). La surface initiale et le socle sont également représentés.

`Conic glacier : radial diagnostic surface velocity (m/yr) on a flow line (D_SG). The initial surface and the bed are presented as well.`

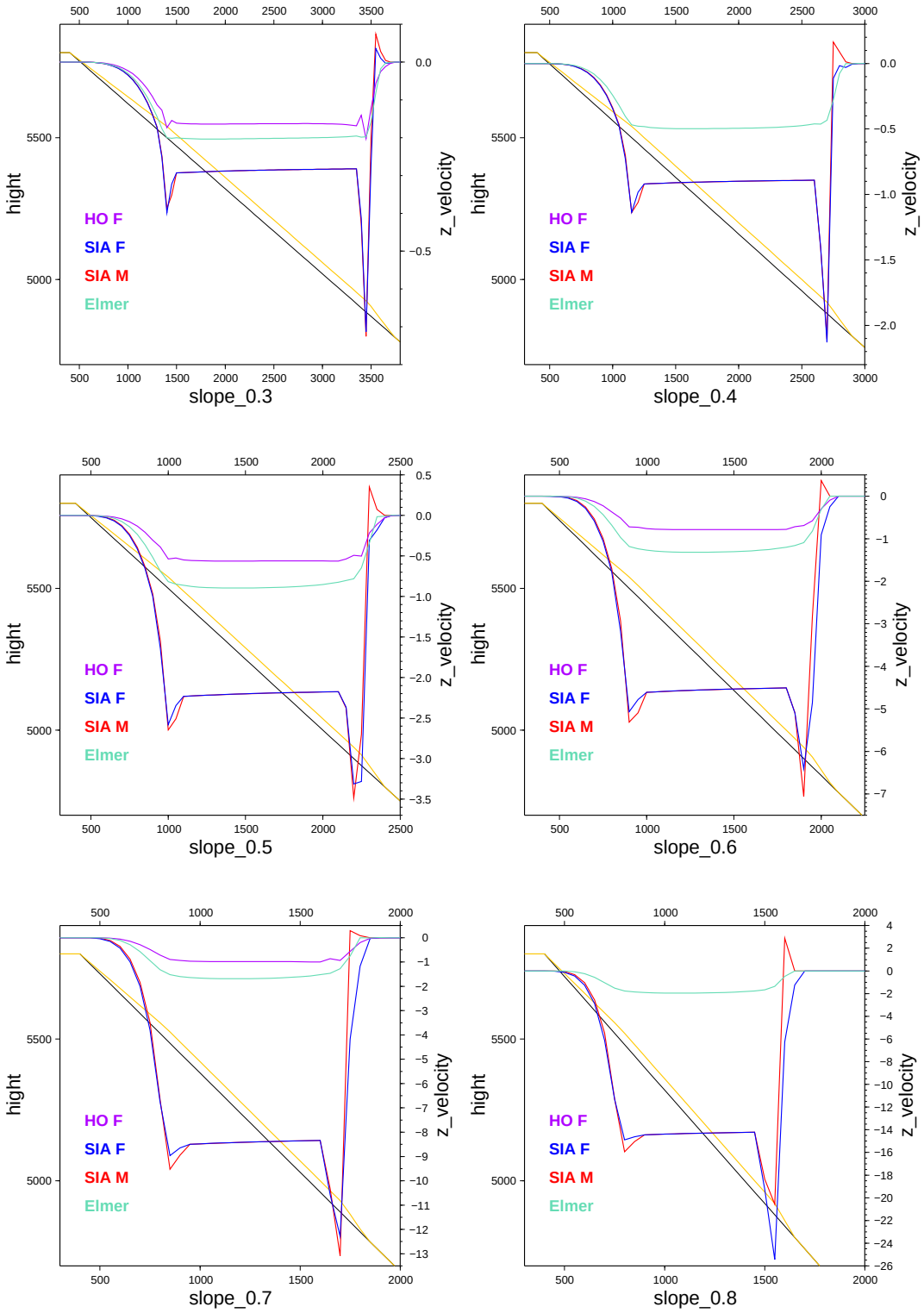



FIG. 3.21.: Glacier conique : vitesse diagnostique verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (D_SG). La surface initiale et le socle sont également représentés.
`Conic glacier : vertical diagnostic surface velocity (m/yr) on a flow line (D_SG). The initial surface and the bed are presented as well.`

Les Figures 3.22 et 3.23 montrent les vitesses pour une simulation évolutive sans bilan de masse (E_SG_SB). Seul le socle est représenté car les surfaces varient d'un modèle à l'autre.
Le souci des pics aux bords avec la SIA s'amplifie. Il s'agit apparemment d'une zone qui est difficilement représentable avec la SIA.
La plupart des observations faites auparavant se confirment, la SIA surestime les vitesses pendant que le modèle F HO les sous-estime comparé à Elmer. Néanmoins, il faut être vigilant avec des conclusions sur l'influence de la pente du socle car la durée des simulations est la même dans tous les cas. A cause des instabilités numériques aux bords avec la SIA, il est plus difficile de quantifier le désaccord entre les modèles. En faisant abstraction des grands pics, on obtient des rapports de l'ordre de 1.5 à 2 entre les modèles, comparables aux résultats avec de faibles pentes pour les simulations diagnostiques mais bien inférieurs à ceux avec les fortes pentes.

Avec bilan de masse (E_SG_AB), on obtient les résultats présentées sur les Figures 3.24 et 3.25. Contrairement à l'expérience avec la sphère, la forme du champ de vitesses est très différente de la simulation sans bilan de masse ce qui conduit à une comparaison pour des états déformés finaux très différents. L'accord entre les modèles est meilleur. La dépendance à la pente du socle est du même ordre que dans la simulation sans bilan : le rapport entre les vitesses de la SIA et d'Elmer augmente de 1.1 pour une pente de 0.3 à 1.6 pour une pente de 0.8 (cette fois-ci le rapport est calculé avec la vitesse maximale radiale sans tenir compte des pics aux bords avec la SIA). On rappelle, que la durée des simulations est adaptée à chaque pente afin d'atteindre l'état stationnaire.

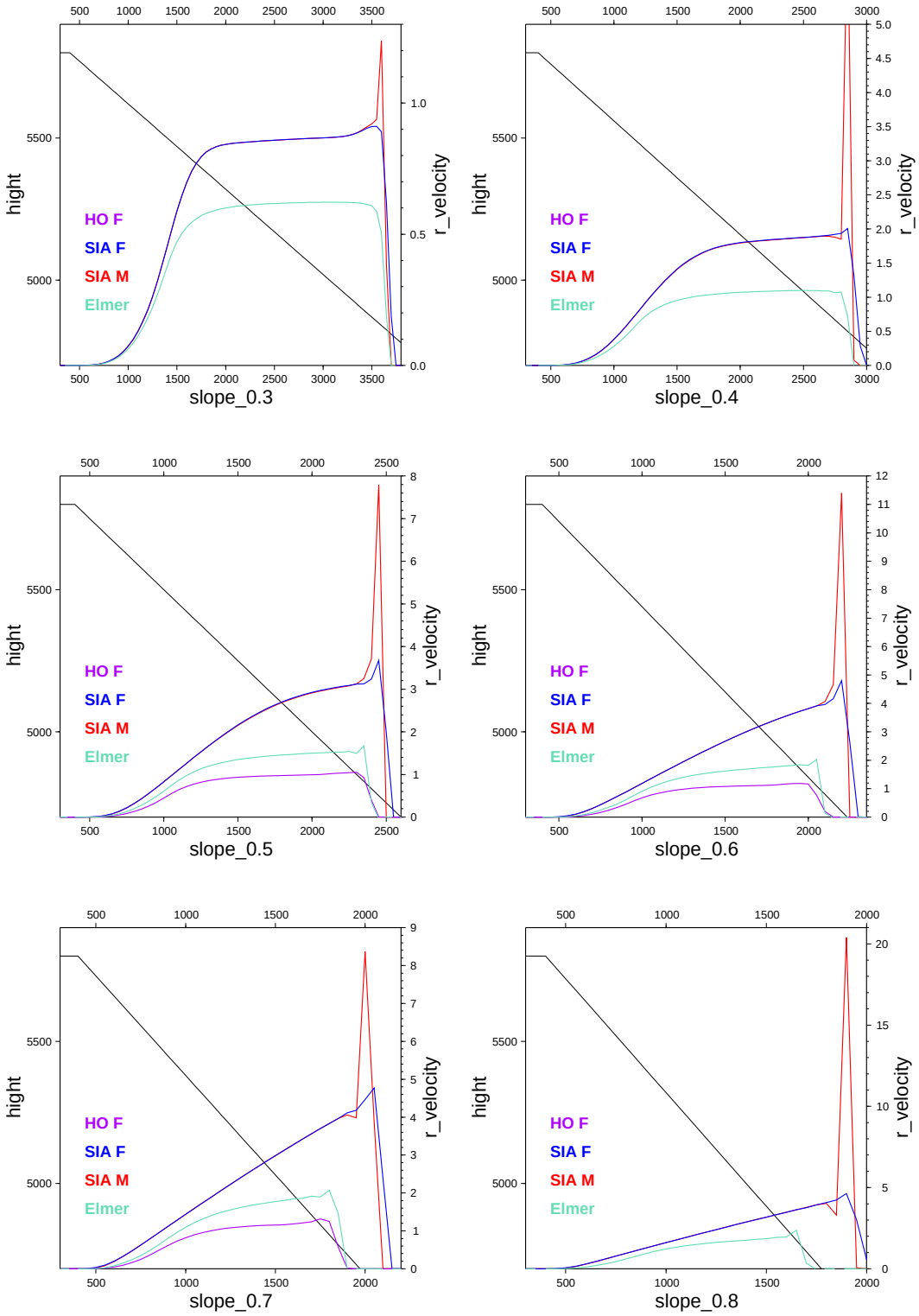



FIG. 3.22.: Glacier conique : vitesse évolutive radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (E_SG_SB). Le socle est représenté également.
`Conic glacier : radial evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line (E_SG_SB). The bedrock is presented as well.`

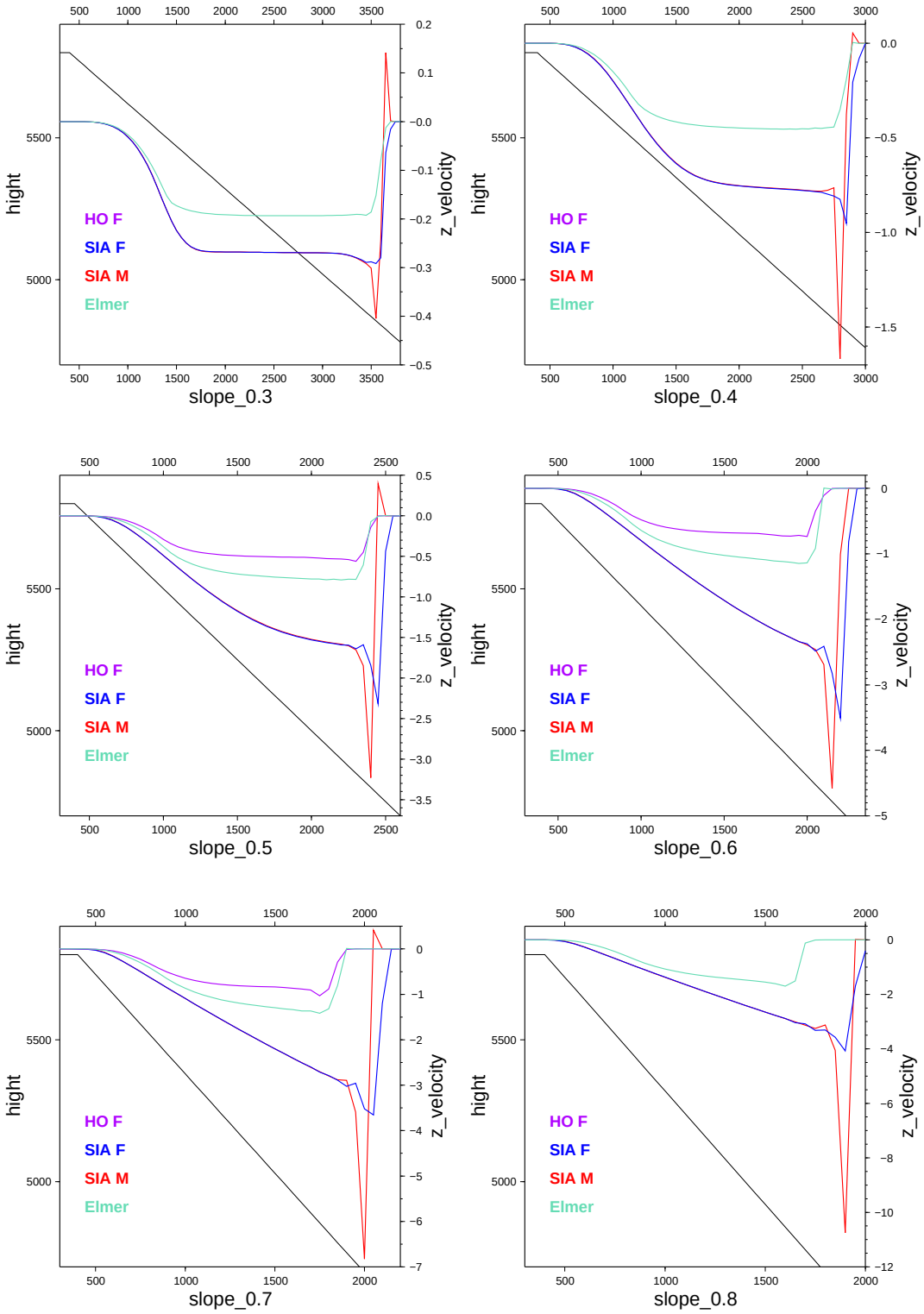



FIG. 3.23.: Glacier conique : vitesse évolutive verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (E_SG_SB). Le socle est représenté également.
`Conic glacier : vertical evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line (E_SG_SB). The bedrock is presented as well.`

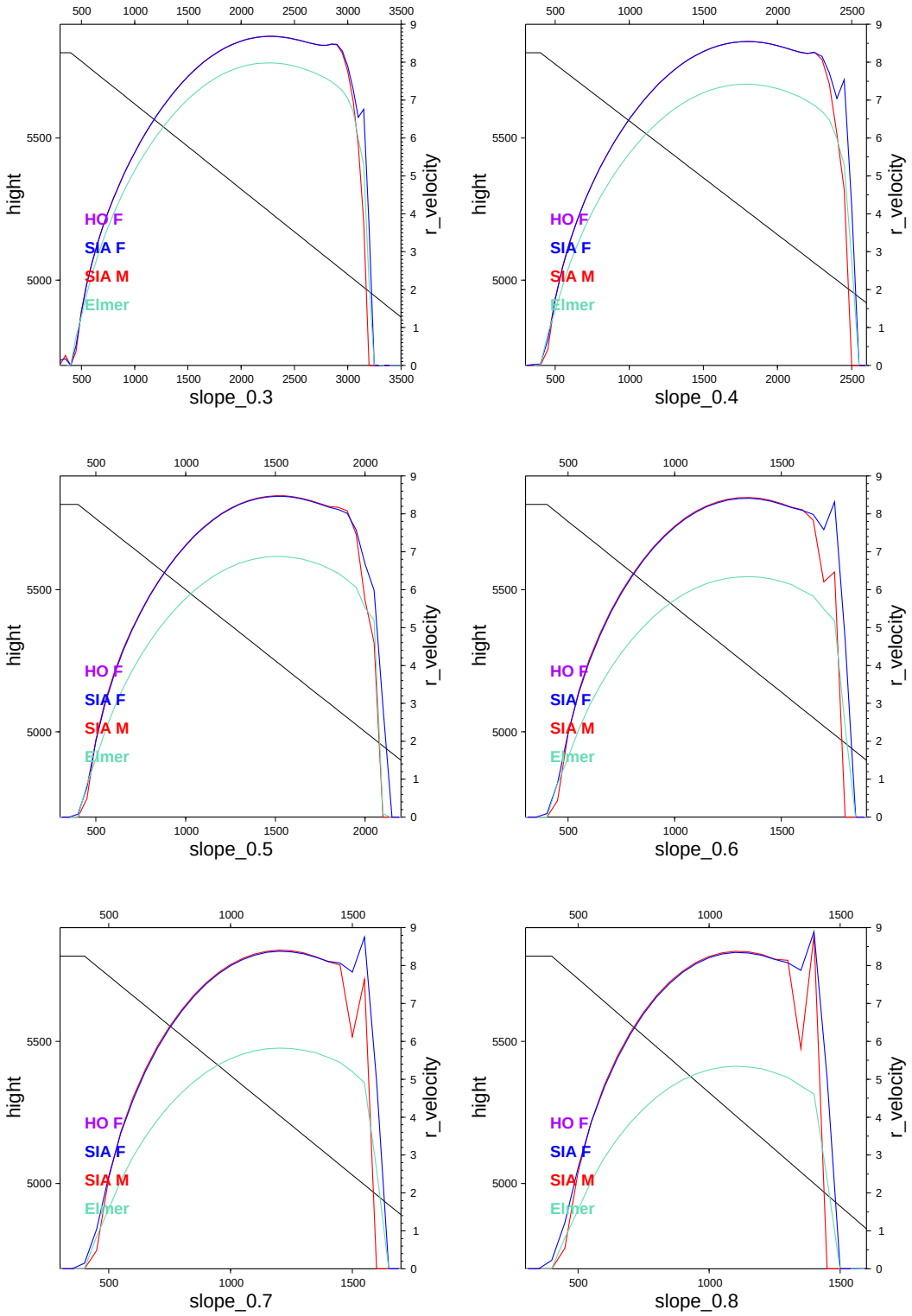



FIG. 3.24.: Glacier conique : vitesse évolutive radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement, simulation avec bilan de masse (E_SG_AB). Le socle est représenté également.

`Conic glacier : radial evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line, simulations with mass balance (E_SG_AB). The bedrock is presented as well.`

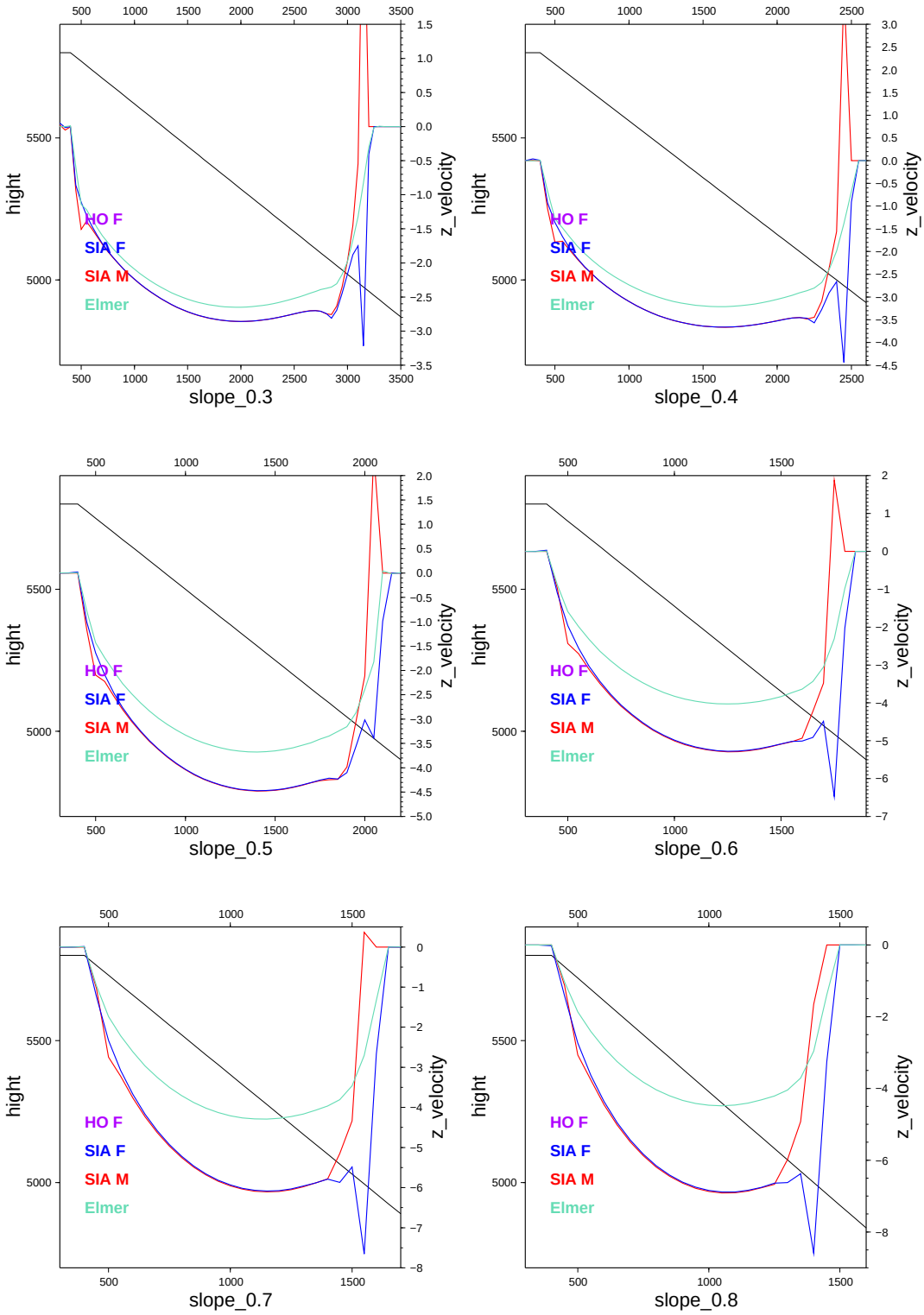



FIG. 3.25.: Glacier conique : vitesse évolutive verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement, simulation avec bilan de masse (E_SG_AB). Le socle est représenté également.

`Conic glacier : vertical evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line, simulation with mass balance (E_SG_AB). The bedrock is presented as well.`

### Profil vertical de vitesse

Le profil en profondeur de la vitesse est étudié à une distance de 1100 m du centre du cône. Pour les simulations avec les modèles qui travaillent en 3D (SIA M, SIA F, HO F) le point $(x, y) = (0, 1100)$ a été choisi après qu'il ait été vérifié que les distributions des vitesses et de l'épaisseur de glace restent bien axisymétriques au cours du temps. Pour les pentes de 0.3 et 0.4 l'épaisseur initiale à ce point est inférieure à 40 m, pour toutes les autres on se trouve dans la partie du glacier avec une épaisseur initiale constante de 40 m.

Les résultats sont reproduits respectivement sur les Figures 3.26, 3.27 et 3.28 pour les vitesses diagnostiques (D_SG), la simulation évolutive sans bilan (E_SG_SB) et la simulation évolutive avec bilan (E_SG_AB). Toutes les vitesses sont normalisées à celle d'Elmer en surface pour le même test (en gardant le signe).

Comme observé auparavant, le modèle d'ordre supérieur sous-estime les vitesses par rapport au *Full Stokes*, tandis que les modèles SIA les surestiment.

Pour le champ de vitesse diagnostique on observe une grande dépendance à la pente du socle. Le rapport entre les modèles passe d'un très bon accord (rapport d'environ 1 pour une pente de 0.3) à un rapport de presque 8 pour les pentes plus fortes.
Cette dépendance est moins marquée pour les simulations évolutives sans bilan (les rapports varient entre 1.2 et 1.4). Ceci s'explique surtout par le fait que les vitesses SIA diminuent au fur à mesure que la surface devient plus lisse et que le glacier s'amincit.
Pour la surface stationnaire (simulation avec bilan de masse) on observe de nouveau une dépendance un peu plus marquée à la pente du socle, les rapports augmentent jusqu'à environ 1.5.

Comme exposée dans le paragraphe sur la géométrie de surface, la question de la durée de la simulation et d'une meilleure compréhension de l'amélioration des résultats avec la SIA au cours du temps se pose. Qualitativement, l'amélioration de la SIA s'explique par une rétro-action négative : le glacier se déforme trop, devient alors moins épais et la surface plus lisse, les vitesses diminuent, il se déforme un peu moins, les vitesses diminuent un peu, etc. ...
Seul une étude de la dynamique (l'évolution de la surface et du champ de vitesse au cours du temps) permettra de quantifier ce phénomène et de choisir une durée de simulation adaptée à chaque pente de socle. Ici, on se contente de simulations diagnostiques et des états finaux des simulations évolutives. Néanmoins, un petit aperçu d'une telle étude est donné. Sur la Figure 3.29, l'évolution de l'écart de la vitesse verticale en surface et de l'épaisseur de glace entre la SIA et Elmer est présentée en un point dans la partie avec une épaisseur de glace initialement constante et ce pour trois pentes du socle différentes (à 2000 m du centre pour une pente de 0.3, à 1500 m pour une pente de 0.5 et à 1000 m pour une pente de 0.8). L'écart pour la vitesse diminue d'une valeur initialement d'autant plus élevée que la pente est forte pour tendre une valeur constante relativement petite. L'écart pour la surface augmente de zéro à une valeur asymptotique d'autant plus élevée

que la pente est forte. Le phénomène de la rétro-action négative de la SIA expliqué plus haut est bien illustré. Il devient aussi clair que cette rétro-action n'a pas le même effet pendant les 50 ans suivant les différentes pentes du socle choisies. Pour une pente forte l'écart entre les épaisseurs de glace devient constant après 30 ans ("l'état asymptotique" est atteint), tandis que cet écart augmente encore à 50 ans pour une pente plus faible.

Les simulations effectuées ne permettent donc pas de dire si la dépendance de la pente du socle devient moins marquée pour une simulation évolutive (avec ou sans bilan) car la question d'un temps adapté à une certaine pente (illustrée ci-dessus) reste ouverte. La comparaison faite ici avec la même durée de simulation pour toutes les pentes ne donne pas accès à cette information. Il semble que la durée choisie a été trop courte pour les faibles pentes, car "l'état asymptotique" n'est pas encore atteint.

De plus, pour la simulation E_SG_AB, il s'agit d'une simulation évolutive avec un bilan de masse qui abouti à une surface stationnaire. Il est très probable que les conclusions sur la dépendance de la qualité de la SIA en fonction de la pente du socle sont simplement caractéristiques d'une surface stationnaire. Le bilan de masse aide seulement à aboutir à cette surface stationnaire. On peut en effet imaginer des interactions entre ce champ de bilan et la rétroaction de la SIA due à la déformation surtout avec des champs de bilan évolutifs dans le temps (réalistes ou périodiques). Une étude dynamique comme illustrée ci-dessus pourra apporter des réponses.

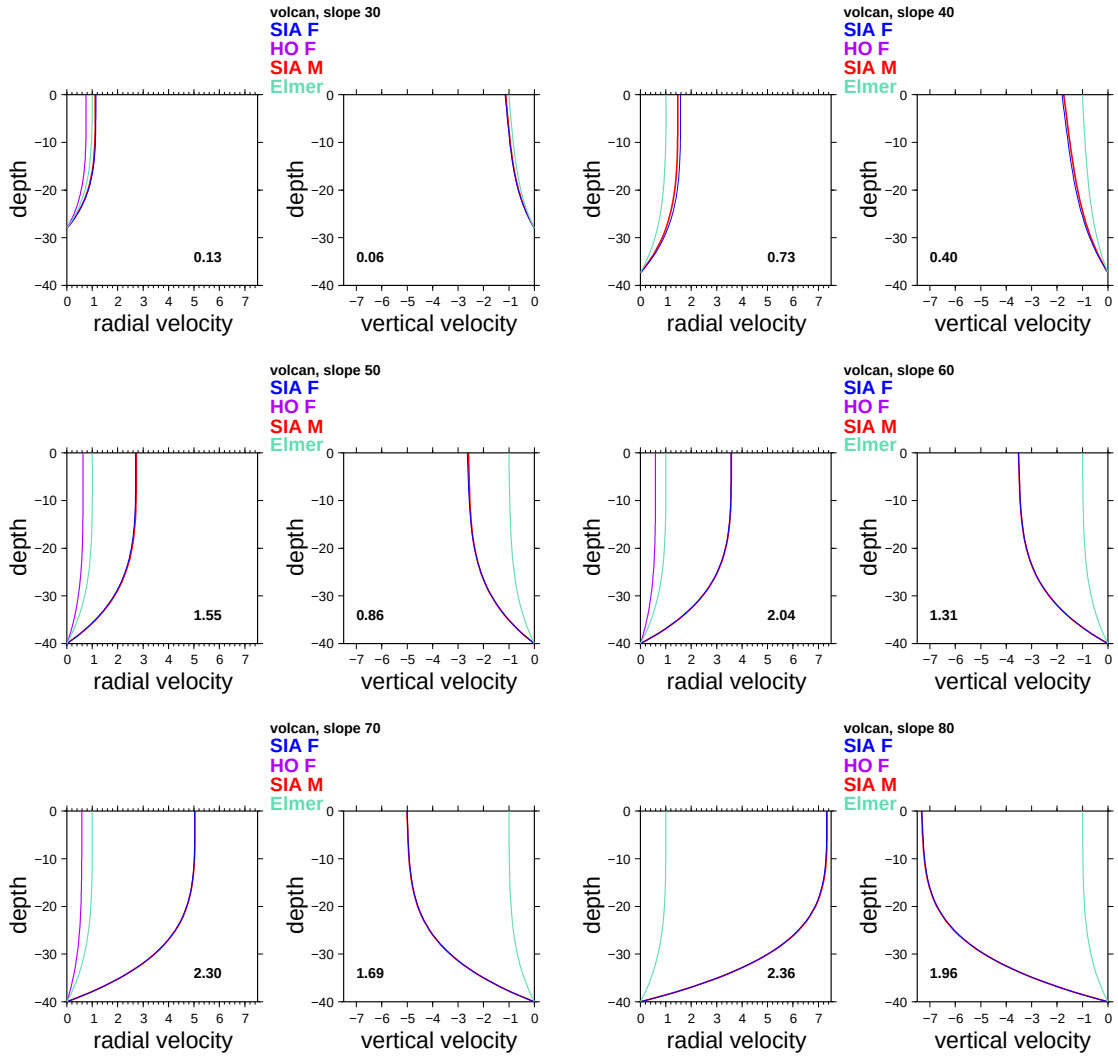



FIG. 3.26.: Glacier conique : profil vertical de vitesse diagnostique (D_SG) à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), sans glissement.
`Conic glacier : diagnostic vertical velocity profil (D_SG) at 1100 m of the center, normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), no sliding.`

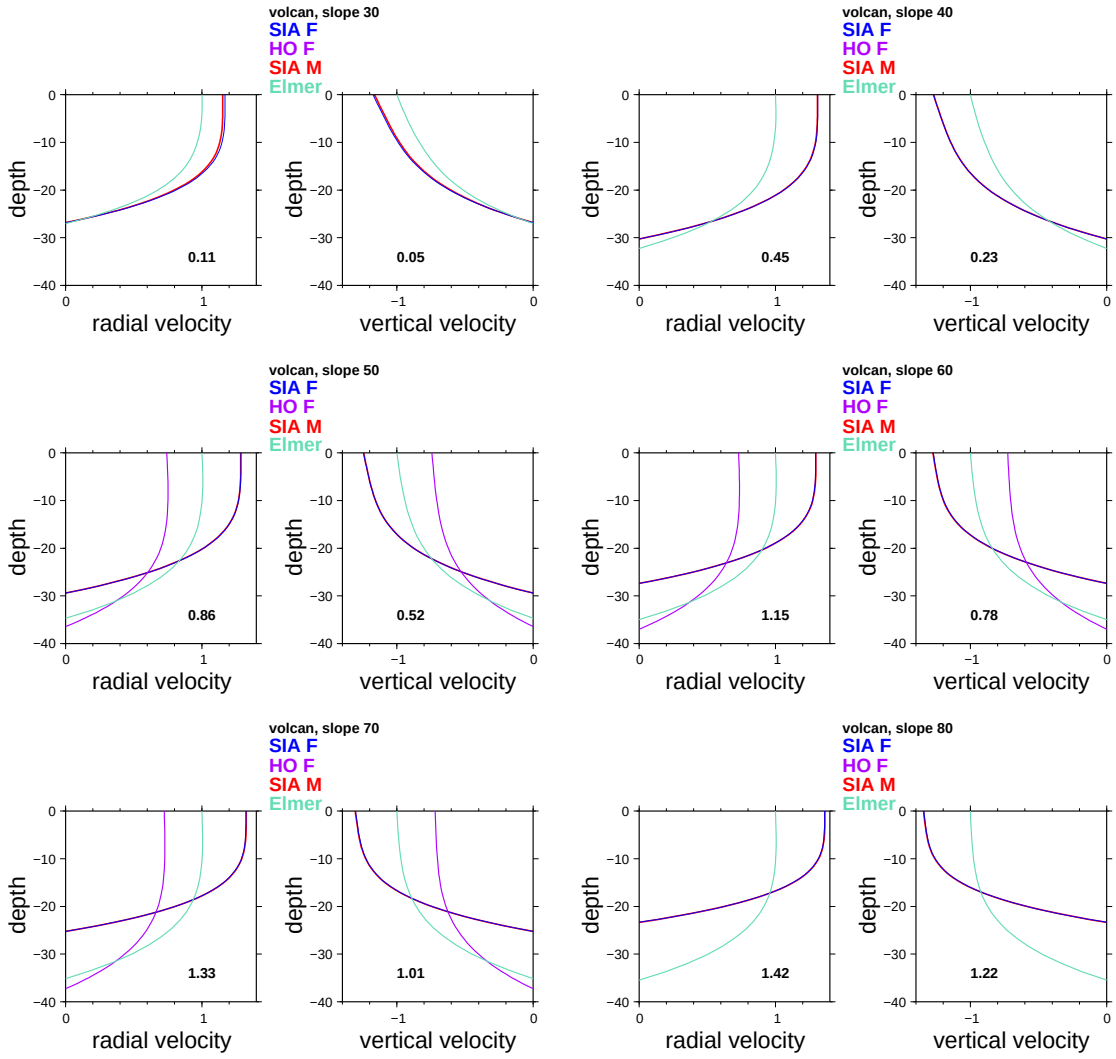



FIG. 3.27.: Glacier conique : profil vertical de vitesse à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), simulation évolutive E_SG_SB.

`Conic glacier : vertical velocity profil at 1100 m of the center, normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), time dependent simulation E_SG_SB.`

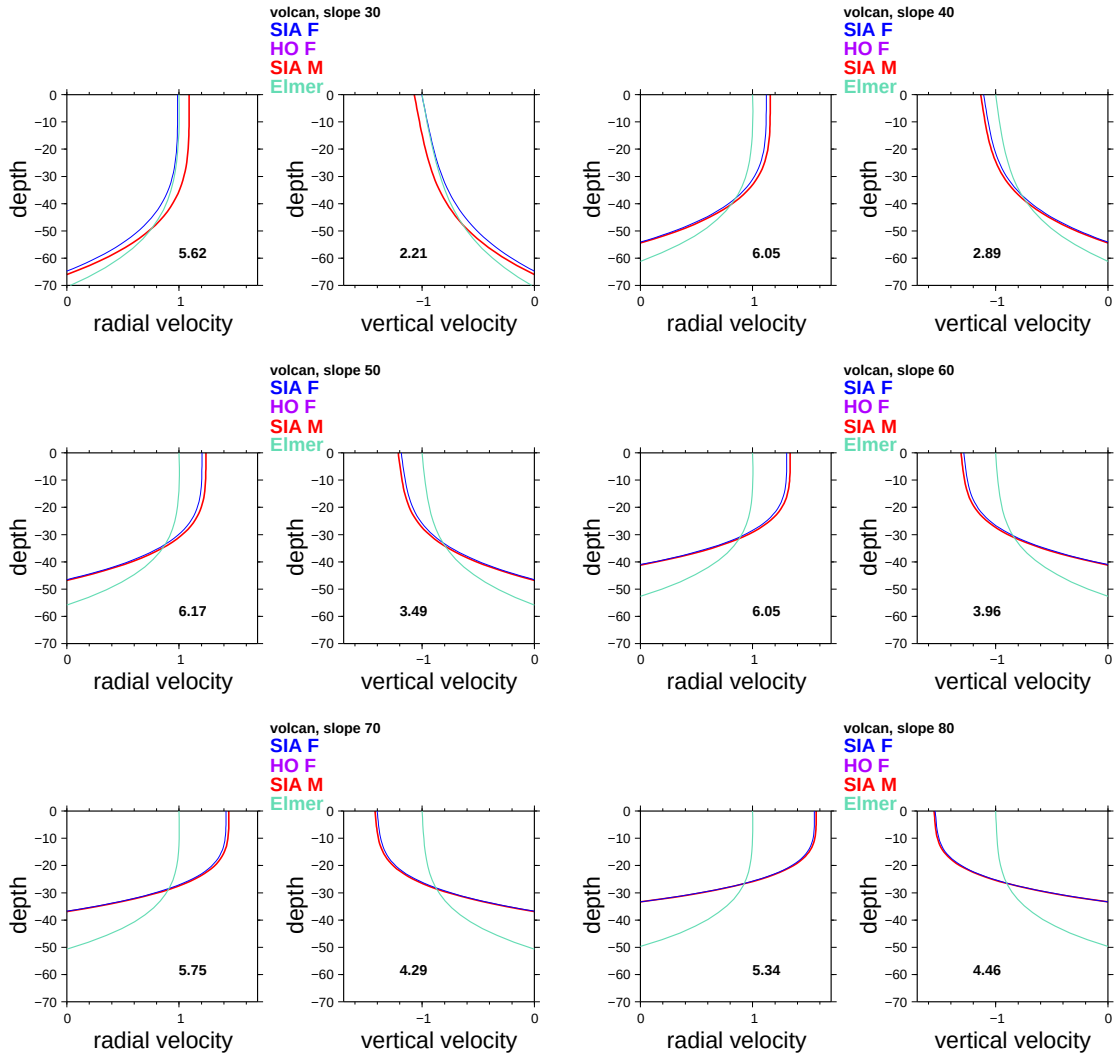



FIG. 3.28.: Glacier conique : profil vertical de vitesse à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an), simulation évolutive E_SG_AB.

`Conic glacier : vertical velocity profil at 1100 m from the center, normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr), time dependent simulation E_SG_AB.`

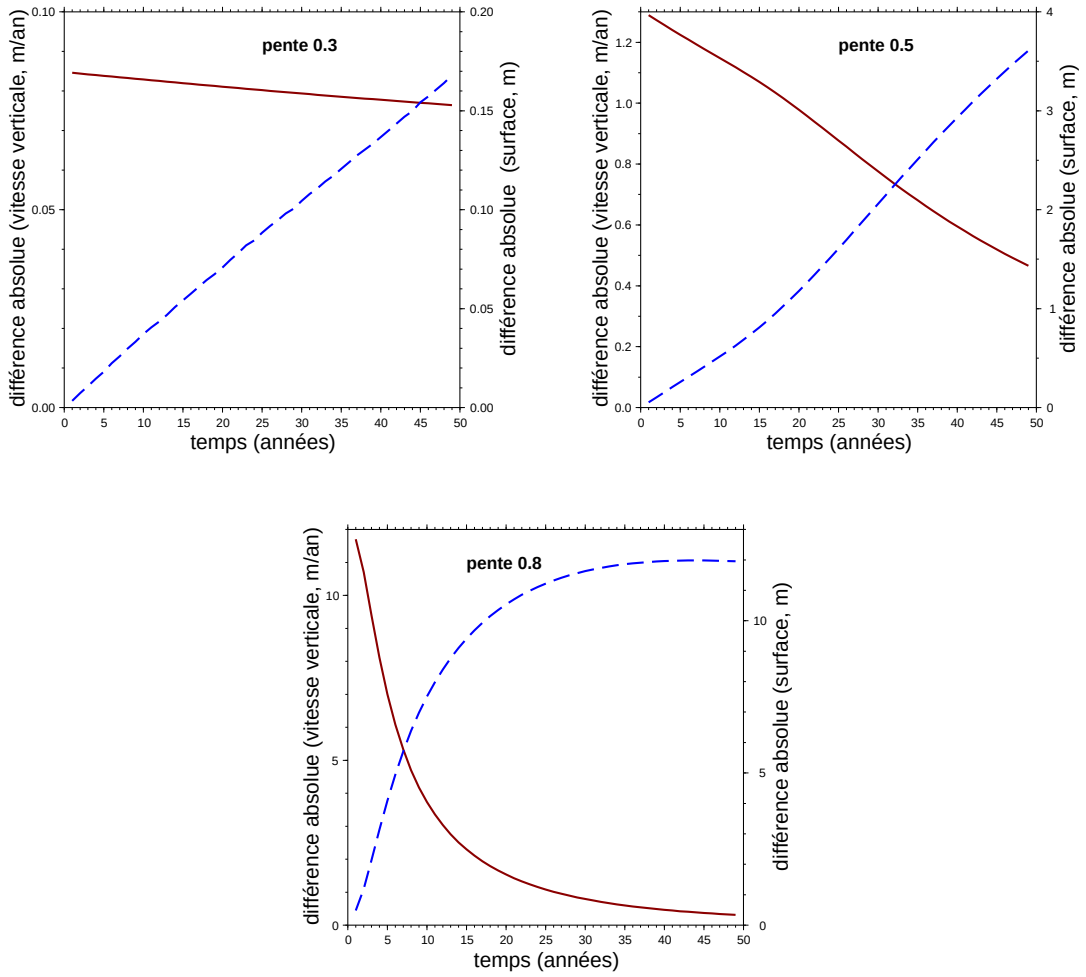



FIG. 3.29.: Evolution de l'écart de la vitesse verticale en surface (trait continu) et de celui de l'épaisseur de glace (trait pointillé) entre la SIA et ELMER pour la simulation E_SG_SB, à gauche pour une pente de 0.3 à 2000 m du centre, à droite pour une pente de 0.5 à 1500 m du centre et en bas pour une pente de 0.8 à 1000 m du centre.
`Evolution of the difference of the vertical surface velocity (line) and that of the ice-thickness (dotted line) between the SIA and ELMER for the simulation E_SG_SB, on the left side for a slope of 0.3 at 2000 m from the center, on the right side for a slope of 0.5 at 1500 m and at the bottom for a slope of 0.8 at 1000 m from the center.`

## 3.3. Glacier de vallée

### 3.3.1. Description de l'expérience

#### Géométrie

La géométrie de ce glacier a été motivée par le souhait de prendre une géométrie proche d'un cas réel et surtout proche d'un glacier typique pour les glaciers des Alpes avec un cirque dans la partie haute et une vallée dans la partie basse. Nous nous sommes inspirés de la géométrie du glacier d'Argentière à Chamonix (à droite sur la Photo 1.1) pour la forme, mais aussi en terme de dimensions et pentes.
Les premières tentatives pour modéliser la partie basse du glacier avec le front du glacier ont donné des résultats intéressants sur le lien entre la forme du front et l'état du glacier : certaines formes sont typiques pour un glacier de vallée en train d'avancer, d'autres pour un glacier en train de reculer.
Dans la première tentative pour définir une géométrie de glacier de vallée, une épaisseur diminuant linéairement à zéro au front a été choisie. Cette géométrie correspond notamment à un glacier qui vient de reculer.

Une nouvelle avance s'observe ensuite par un écoulement du haut du glacier vers la langue d'ablation (cf. Figure 3.30) avec une surface de glace qui reste immobile vers le front.

L'étude de ces phénomènes n'est pas ce qui est recherché ici. Au contraire, une géométrie avec un front mobile, en train d'avancer ou de reculer, est avant tout recherchée.

Finalement, la géométrie retenue est donc la suivante :
Le glacier se compose d'une langue d'ablation (toute cette partie du glacier est désignée dans la suite souvent seulement par le mot 'front'), d'un cirque et d'une partie intermédiaire. $y$ est la direction de l'écoulement avec une origine en aval du glacier, $x$ est la direction orthogonale à celle-ci avec $x = 0$ au centre du glacier. La partie intermédiaire (vers $y = 5000\,\mathrm{m}$) est caractérisée par une épaisseur constante de $E_0$ au centre du glacier. Le glacier est présenté sur la Figure 3.31 à droite par une coupe le long de l'écoulement (direction $y$, $x = 0$) et sur la même figure à gauche par une autre orthogonale à celui-ci au centre du glacier (direction $x$, $y = 2500$).

En dehors du cirque, le socle est la superposition d'une fonction linéaire (pente 0.1) dans la direction de l'écoulement ($y$) et d'une fonction parabolique dans la direction orthogonale ($x$) avec un replat au milieu.
Le paramètre $E_0$ (l'épaisseur de glace au centre du glacier dans la partie intermédiaire) sert dans la définition du socle uniquement à assurer que le socle passe par convention par le point $(x, y) = (0, 0)$ pour toutes les configurations (toutes les valeurs de $E_0$).

$$z_{\mathrm{bed}_V}(x,y) = E_0 + 0.1y + E_x(x), \text{ avec} \tag{3.6}$$

$$E_x(x) = \begin{cases} E_0 \cdot (\frac{1}{500}^2 \cdot (|x| - 150)^2 - 1), & \text{si } |x| > 150\,m, \\ - E_0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.7}$$

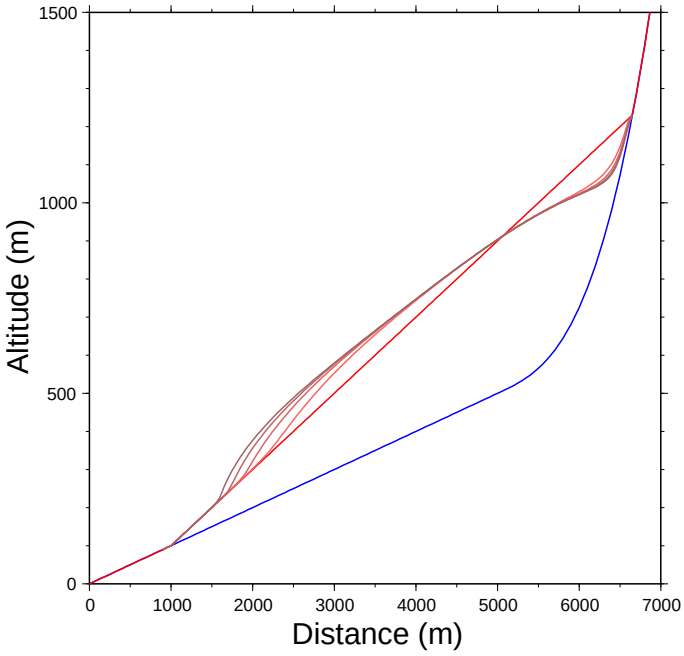



FIG. 3.30.: Glacier de vallée en coupe : avec une épaisseur initiale qui diminue linéairement vers le front (en rouge sur la figure, socle en bleu) l'écoulement ultérieur du glacier se caractérisera par le creusement d'une dépression sommitale et la mise en place en conséquence d'un bombement dans la partie inférieure lequel migre vers le front qui reste fixe (orange à gris sur la figure).
`Valley glacier (cross section) : With an initial ice-thickness that reduces linearly towards the snout (in red in the figure, bedrock in blue) the glacier flow is caracterized by an upper growing depression and a resulting bulging in the lower part of the glacier, bulging which migrates towards the snout, this latter remaining fixed (orange to grey in the figure).`

Dans la partie cirque (à partir de $y = 5\,\mathrm{km}$), le socle est finalement modélisé par une fonction polynôminale du troisième dégré, une fonction parabolique s'étant avérée insuffisante pour satisfaire toutes les conditions aux limites imposées à la transition entre le cirque et le reste du glacier :

$$z_{\mathrm{bed}_C} = E_0 + E_x(x) + c \cdot y^3 + d \cdot y^2 + e \cdot y + f. \tag{3.8}$$

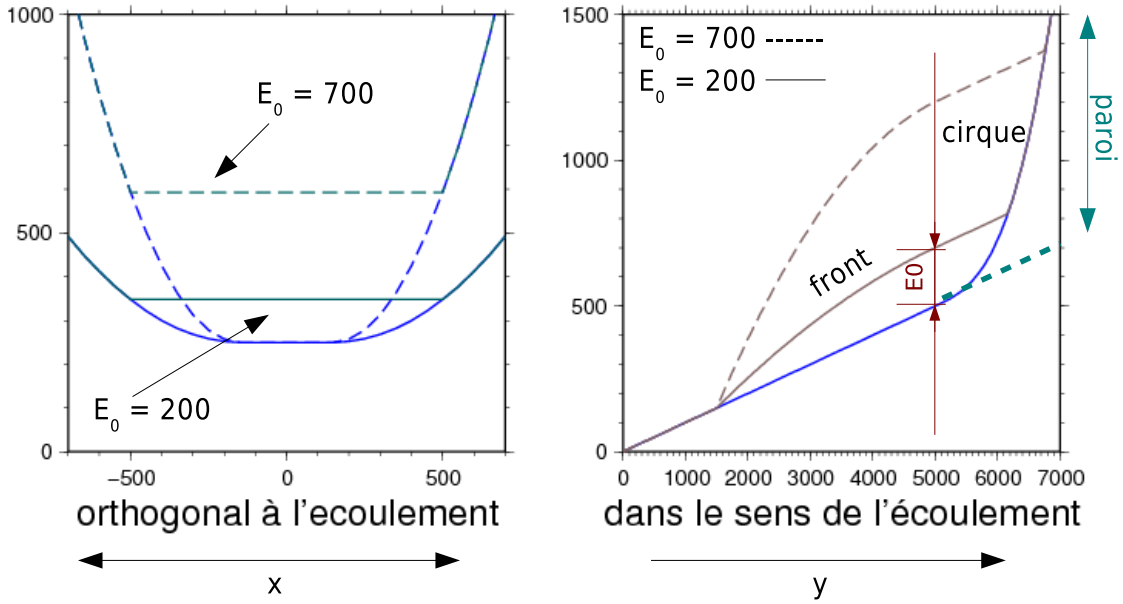



FIG. 3.31.: Glacier de vallée en coupe orthogonale à l'écoulement ($y$=2500 m) et dans le sens de l'écoulement au centre du glacier ($x = 0$ m).
`Valley glacier cross section perpendicular to the ice flow at` $y$=2500 m `and in the direction of the ice flow along the centerline of the glacier (`$x$=0 m`).`

Les paramètres $c, d, e$ et $f$ sont choisi de sorte à avoir :

$$z_{\mathrm{bed}_V}(x, 5000) = z_{\mathrm{bed}_C}(x, 5000), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial z_{\mathrm{bed}_V}(x,y)}{\partial y}|_{(0,5000)} = \frac{\partial z_{\mathrm{bed}_C}(x,y)}{\partial y}|_{(0,5000)}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 z_{\mathrm{bed}_V}(x,y)}{\partial y^2}|_{(0,5000)} = \frac{\partial^2 z_{\mathrm{bed}_C}(x,y)}{\partial y^2}|_{(0,5000)}, \tag{3.11}$$

$$z_{\mathrm{bed}_C}(0, 7000) = 1700. \tag{3.12}$$

La dernière condition impose une paroi de l'ordre de 1000 m de hauteur par rapport au socle linéaire au bout du cirque.

Quant à la surface initiale, une épaisseur de glace constante égale à $E_0$ est supposée dans la partie entre le front et le cirque du glacier. Cette épaisseur constante sera perturbée en haut par le cirque et en bas par le front.

Dans la partie haute du glacier, loin du front, la surface initiale s'écrit alors comme

$$z_{\text{surf}} = E_0 + 0.1y, \tag{3.13}$$

l'épaisseur est alors constante et diminue en haut dans le cirque à cause du socle qui se relève.
Finalement, pour limiter le temps de calcul, la partie intermédiaire avec une épaisseur constante est complètement omise. A $y = 5000\,\text{m}$ il y a directement la transition entre le cirque et le front.

En aval, pour modéliser le front, une diminution quadratique de l'épaisseur de glace vers le front est imposée.

$$z_{\text{surf}_F} = max(\text{bed}, (ay^2 + by + c)). \tag{3.14}$$

Les paramètres $a, b$ et $c$ sont choisis pour avoir une fonction une fois différentiable en $y$ =5000 m et une épaisseur de glace nulle en $y$ =1500 m.
Le paramètre $E_0$ permet de changer l'épaisseur de glace et avec cela le rapport d'aspect tout en gardant la même largeur du glacier en surface. La pente dans la direction transversale ($x$), perpendiculairement aux bords de la vallée change alors. Il aurait été aussi possible de garder la même pente et de varier la largeur du glacier en surface. *La pente dans la direction longitudinale (y) ne sera pas changée quant à elle.*
La première option a été choisie afin de garder une même taille de grille, et surtout une taille de grille raisonnable même pour de grandes épaisseurs. Néanmoins, l'autre variante aurait eu l'avantage de ne pas mélanger les effets d'une variation de la pente et du rapport d'aspect du glacier. Une partie des problèmes de stabilité numérique rencontrés est sûrement aussi due aux pentes élevées pour de fortes épaisseurs de glace.

A l'aide du paramètre $E_0$ le rapport d'aspect dans le sens de la largeur du glacier est autorisé à varier. Ceci va permettre de mettre en évidence l'effet des contraintes longitudinales de cisaillement. Le rapport d'aspect dans le sens de la longueur n'est pas changé et n'est pas du tout du même ordre de grandeur (de l'ordre de 0.02).
Les épaisseurs 100 m, 200 m, 300 m, 400 m, 500 m et 700 m pour une largeur d'un kilomètre ont été choisies et correspondent à des rapports d'aspect variant de 0.1 à 0.7, tout en sachant que les valeurs élevées ne correspondent plus à des cas très réalistes.

### Bilan de masse

Pour le bilan de masse, un modèle très simpliste a été choisi ; un bilan de masse linéaire avec l'altitude. La première idée consistant à prendre le gradient du bilan de masse ($0.004\,\text{m}^{-1}$) du glacier d'Argentière et de mettre la ligne d'équilibre à la limite supérieure du front pour trouver des surfaces stationnaires a échoué. La durée nécessaire des simulations aurait été beaucoup trop longue. Le problème du glacier commençant à s'étendre vers le haut, et à coloniser les pentes raides autour du cirque (ce qui n'est pas réaliste), s'est aussi posé.
Le scénario choisi finalement a consisté à prendre le gradient du bilan de masse du glacier

d'Argentière, de mettre la ligne d'équilibre suffisamment haute pour éviter la colonisation des pentes trop raides et de ne pas chercher à trouver des états stationnaires.
Pour simplifier, le bilan a été choisi indépendant du temps, il est alors proportionnel au gradient de surface de la surface initiale.

$$\text{bilan}(x, y) = 0.004\ (z_{\text{surf}_{ini}} - LE), \tag{3.15}$$

où l'altitude de la ligne d'équilibre correspond à 1307 m pour une valeur de $E_0 = 700$ m et 1345 m pour les autres valeurs du paramètre $E_0$.

#### Conditions aux limites au socle

On suppose une adhérence parfaite, le glissement n'a pas été étudié sur ce glacier.

### 3.3.2. Modèles

#### Modèle M SIA

Avec ce modèle des instabilités numériques ont été rencontrées, notamment pour les fortes épaisseurs. Des pas de temps anormalement petits étaient nécessaires à la stabilité du modèle, d'autant plus petits que la pente était forte (on rappelle que la pente en direction $x$ change avec le paramètre $E_0$ tandis que celle en direction $y$ reste toujours la même).
Le remède à ce problème a consisté à adopter un schéma *over-implicite*. Avec un pas de temps de 0.01 an une bonne stabilité a alors été obtenue pour toutes les configurations.
Néanmoins avec ce schéma un autre problème a été rencontré ; ce schéma n'est pas capable de gérer un bilan de masse positif pour des point de grille initialement sans glace et qui s'englacent à un pas de temps donné. La solution a consisté à résoudre pour ces points l'équation du transport sans tenir compte du bilan de masse et d'augmenter l'altitude de la surface ultérieurement avec le bilan de masse correspondant, même si cette procédure induit une petite erreur. Mais cette situation ne se pose pas souvent car le champ de bilan choisi est un bilan négatif quasiment partout.
Une grille de 50 m a été utilisée. Toutes les simulations ont été effectuées sur le PC185.

#### Modèle F SIA et F HO

Pour ces modèles le même problème à été rencontré, mais avec une ampleur moindre ; des pas de temps très petits ont été nécessaires pour les fortes pentes/épaisseurs. Cela signifiait des durées de calcul très élevés surtout pour le modèle F HO. Les pas de temps et les temps de calcul dans le cas du F HO sont donnés dans le Tableau 3.6. Il y a 41 couches verticales.
Les simulations ont été effectuées sur le PC185 dans le cas du modèle SIA et pour le modèle *higher order* dans la plus part des cas sur I-CLUSTER2.
A cause du coût très élevé en temps de calcul, aucune simulation avec bilan n'a été conduite avec ce modèle.

| | F SIA | F HO | |
|---|---|---|---|
| épaisseur $E_0$ (m) | $\Delta t$ (an) | $\Delta t$ (an) | temps CPU |
| 100 | 0.1 | 0.05 | 1128 min |
| 200 | 0.1 | 0.05 | (>500 h) |
| 300 | 0.05 | 0.05 | 26285 min |
| 400 | 0.01 | 0.05 | 10312 min |
| 500 | 0.005 | 0.05 | (>500 h) |
| 700 | 0.001 | 0.001 (encore trop grand) | 7408 min |

TAB. 3.6.: Pas de temps et temps CPU pour le glacier de vallée (simulation évolutive sans bilan, E_SG_SB).
`Time step and CPU time for the valley glacier (time dependent simulation with zero mass balance, E_SG_SB).`

#### Modèle Elmer

Pour ce modèle, la même instabilité numérique a été rencontrée mais uniquement pour de fortes pentes et dans une moindre mesure. Pour 400 m, 500 m et 700 m il a fallu diminuer le pas de temps à 0.1 an, pour les autres une bonne convergence a été obtenue pour un pas de temps de 1 an.
Le maillage est constitué d'éléments hexaédriques. Comme dans l'exemple de la sphère, uniquement la moitié droite du domaine est maillée car on peut profiter de la symétrie du problème suivant la direction $x$. Il y a 30 couches verticales.
Pour le *Solver* de Navier-Stokes le paramétrage est donné dans le Tableau 3.7.
Toutes les simulations ont été effectués sur I-CLUSTER2.

Un problème qui sera détaillé un peu plus dans le Chapitre 4 sur Saint Sorlin apparaît aussi ici : l'équation de transport pour calculer la nouvelle surface ne peut pas être résolue correctement dans de grandes zones sans glace avec un bilan de masse nul. Pour des raisons d'instabilité numérique, de la glace apparaît dans cette zone. Pour l'instant aucun remède n'a pu être trouvé. Dans la plupart des cas le glacier est heureusement assez loin de ces bosses de glace pour ne pas en être affecté. Néanmoins, pour certaines simulations cela n'était pas tout à fait vrai, mais elles n'ont pas été refaites à cause du coût en temps de calcul élevé (cf. Tableau 3.8).
La comparaison du temps de calcul entre le modèle F HO et ELMER ne correspond pas toujours à ce qui est attendu. Dans certains cas, ELMER est moins coûteux que le modèle F HO ! Ceci est lié aux pas de temps différents, au fait qu'ELMER simule uniquement la moitié du domaine, mais aussi à des comportements de convergence des deux modèles pas toujours évidents à comprendre.

### 3.3.3. Simulations effectuées

L'ensemble des simulations diagnostiques calculant les champs de vitesses pour une surface donnée a pu être effectué avec tous les modèles.

| Navier-Stokes, système linéaire | |
|---|---|
| type | itérative |
| méthode pour résolution itérative | BiCGStab |
| nb. d'itérations maximal | 1500 |
| préconditionnement | ILU0 |
| tolérance de convergence $\epsilon_L$ | $10^{-5}$ |
| méthode de stabilisation | bulles |
| **Navier-Stokes, système non-linéaire** | |
| nb. d'itérations maximal | 100 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-4}$ |
| nb. d'itérations maximal de type Picard | 3 |
| tolérance de convergence Picard $\epsilon_{NLP}$ | $10^{-2}$ |
| facteur de relaxation | 1.0 |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 3.7.: Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.`

| | ELMER | |
|---|---|---|
| épaisseur $E_0$ (m) | $\Delta t$ (ans) | temps CPU |
| 100 | 1 | 6214 min |
| 200 | 1 | 17599 min |
| 300 | 1 | 8568 min |
| 400 | 0.1 | 16800 min |
| 500 | 0.1 | 10531 min |
| 700 | 0.1 | 10767 min |

TAB. 3.8.: Pas de temps et temps CPU pour le glacier de vallée (demi-domaine, simulation E_SG_SB).
`Time step and CPU time for the valley glacier (half of the glacier, simulation E_SG_SB).`

Pour les simulations évolutives, suite aux réflexions motivées plus haut dans le paragraphe sur le glacier conique il a été choisi de ne pas utiliser le même temps de simulation pour toutes les valeurs du paramètre $E_0$, mais de tenir compte d'échelles de temps différentes d'une valeur de $E_0$ à l'autre.
Il y a deux critères relativement évidents pour trouver des temps de simulations comparables, c'est d'une part l'avancée / le recul du glacier (donc la position du front) et d'autre part son épaississement ou amincissement (donc l'épaisseur de glace à un point donné). Il semblait plus judicieux de prendre le critère lié à l'épaisseur de glace et non pas à la longueur car ici l'épaisseur et non pas la longueur du glacier est autorisée à

varier. Le critère choisi est une épaisseur égale à 65% de l'épaisseur initiale au point $(x, y) = (0\,\mathrm{m}, 5000\,\mathrm{m})$, donc au centre du glacier à la transition entre la partie front et la partie cirque. La durée de simulation pour $E_0 = 100\,\mathrm{m}$ (un glacier relativement mince) était beaucoup trop longue, la déformation étant tellement faible qu'il n'était pas possible de comparer ce glacier avec les autres. Une durée de simulation ad-hoc de 100 ans a été choisie. Pour les autres valeurs du paramètre $E_0$ (glaciers plus épais) les durées de simulations correspondant à ce critère de 65% sont données dans le Tableau[1] 3.9. Quelques unes des simulations évolutives n'ont pas abouti à cause d'un temps de calcul trop important (🔔).
Pour les simulations avec bilan la même durée a été choisie. Cette durée possède, a priori la propriété d'imposer la "même" déformation à la glace pour toutes les valeurs de $E_0$ et cela ne change pas quand un champ de bilan de masse est appliqué. On s'est limité à deux modèles à cause d'un temps de simulation très élevé.

| profondeur | bilan | glissement | Diag. ou Evol. | M SIA | F SIA | F HO | E | Abréviation |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 200 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 300 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 400 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 500 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 700 | | non | D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | D_SG |
| 100 | non | non | E, 100ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 200 | non | non | E, 170ans | ✓ | ✓ | 🔔 | ✓ | E_SG_SB |
| 300 | non | non | E, 40ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 400 | non | non | E, 13ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 500 | non | non | E, 5.5ans | ✓ | ✓ | 🔔 | ✓ | E_SG_SB |
| 700 | non | non | E, 1.4ans | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | E_SG_SB |
| 100 | oui | non | E, 100ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |
| 200 | oui | non | E, 170ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |
| 300 | oui | non | E, 40ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |
| 400 | oui | non | E, 13ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |
| 500 | oui | non | E, 5.5ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |
| 700 | oui | non | E, 1.4ans | ✓ | | | ✓ | E_SG_AB |

TAB. 3.9.: Simulations effectuées pour le glacier de vallée.
`Simulations for the valley glacier.`

[1] Par facilité les durées ont été determinées avec la SIA.

### 3.3.4. Comparaison

Comme pour les deux autres glaciers synthétiques, les résultats sont d'abord présentés en terme de géométrie de la surface et ensuite en terme de vitesses. Quant à la géométrie, une présentation en coupes dans la direction et perpendiculairement à l'écoulement a été choisie. Dans toutes les figures les résultats des différents modèles mais aussi pour les différentes valeurs de $E_0$ (*prof* sur les figures) sont présentés.

#### Géométrie de la surface en coupes et position du front

Pour les simulations évolutives, des coupes dans la direction de l'écoulement (au centre du glacier) et orthogonale à celle-ci (en $y = 2500\,\mathrm{m}$) sont présentées sur les Figures 3.32 et 3.33 pour les simulations du type E_SG_SB.

Sur les figures avec la coupe dans la direction de l'écoulement, on constate un écart dans la position du front entre les modèles d'ordre supérieurs et la SIA qui augmente avec l'épaisseur du glacier (son rapport d'aspect). Cet écart augmente d'environ 300 m à presque 2 km avec l'épaisseur croissante ! On rappelle que les durées de simulation[2] ont été choisies de sorte à avoir à peu près la même déformation finale pour toutes les valeurs du paramètre $E_0$. Les modèles SIA surestiment la déformation, d'autant plus que l'épaisseur de glace est importante.
Pour une valeur de $E_0$ de 700 m, le pas de temps avec le modèle F HO n'étant pas assez petit, une petite instabilité vers le front apparaît.

Dans les coupes orthogonales à l'écoulement, on observe aussi quelques instabilités numériques au bord du glacier dans la forme de la surface avec Elmer, certainement dues à un maillage trop grossier.
Ces coupes sont alors plus difficiles à interpréter à cause de ces instabilités en surface. Néanmoins, à la différence des autres modèles, le changement d'une forme concave à une forme convexe avec la SIA en partant des faibles valeurs de $E_0$ pour aller aux plus élevées semble intéressant.
On observe avec Elmer, au moins pour les faibles épaisseurs, une accumulation de glace aux bords de la grille qui est due à une mauvaise résolution de l'équation de transport pour la surface dans les zones sans glace.

[2] sauf celle de $E_0 = 100\,\mathrm{m}$

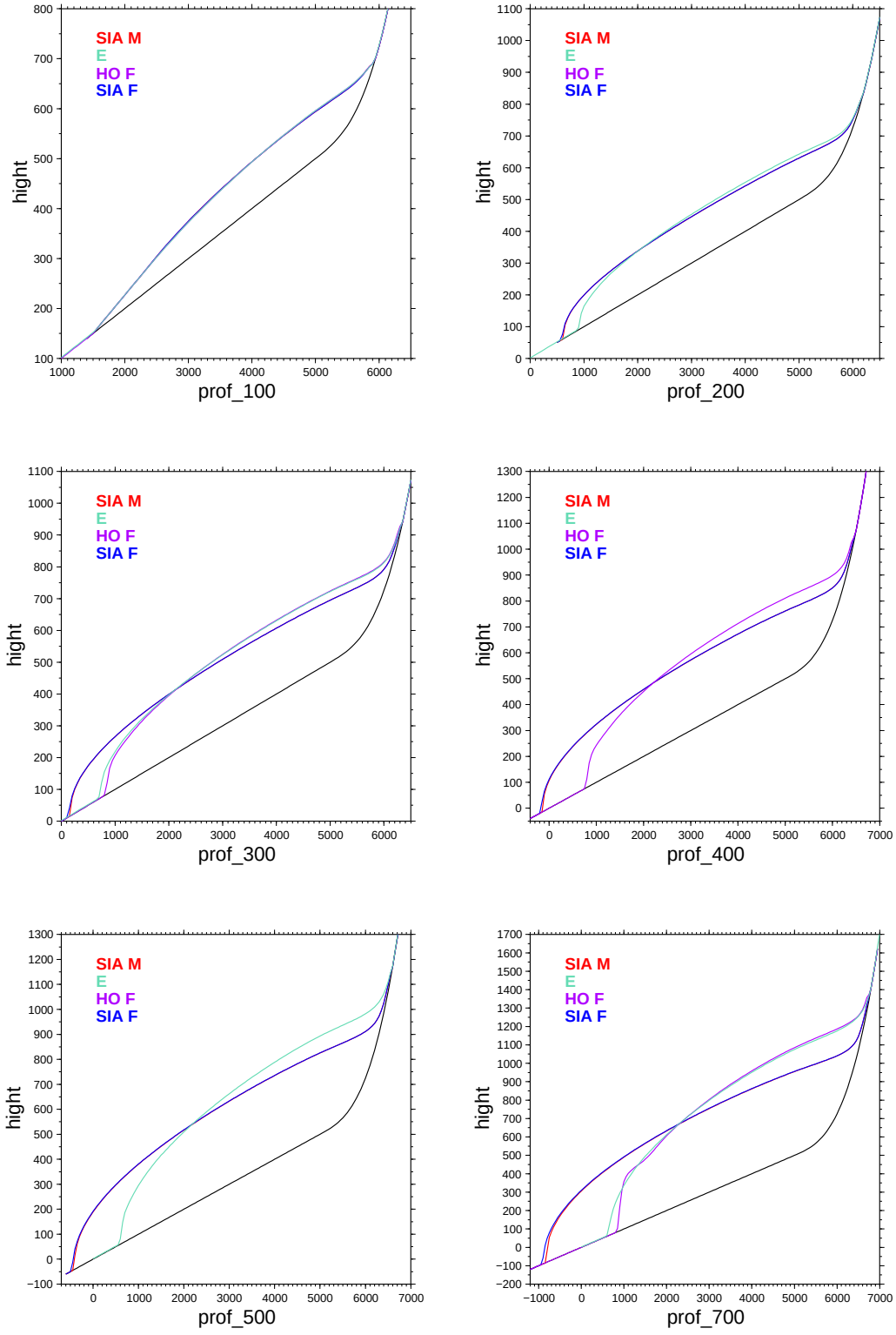



FIG. 3.32.: Coupe en direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et sans bilan de masse (E_SG_SB).
`Cross section in the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and without mass balance (E_SG_SB).`

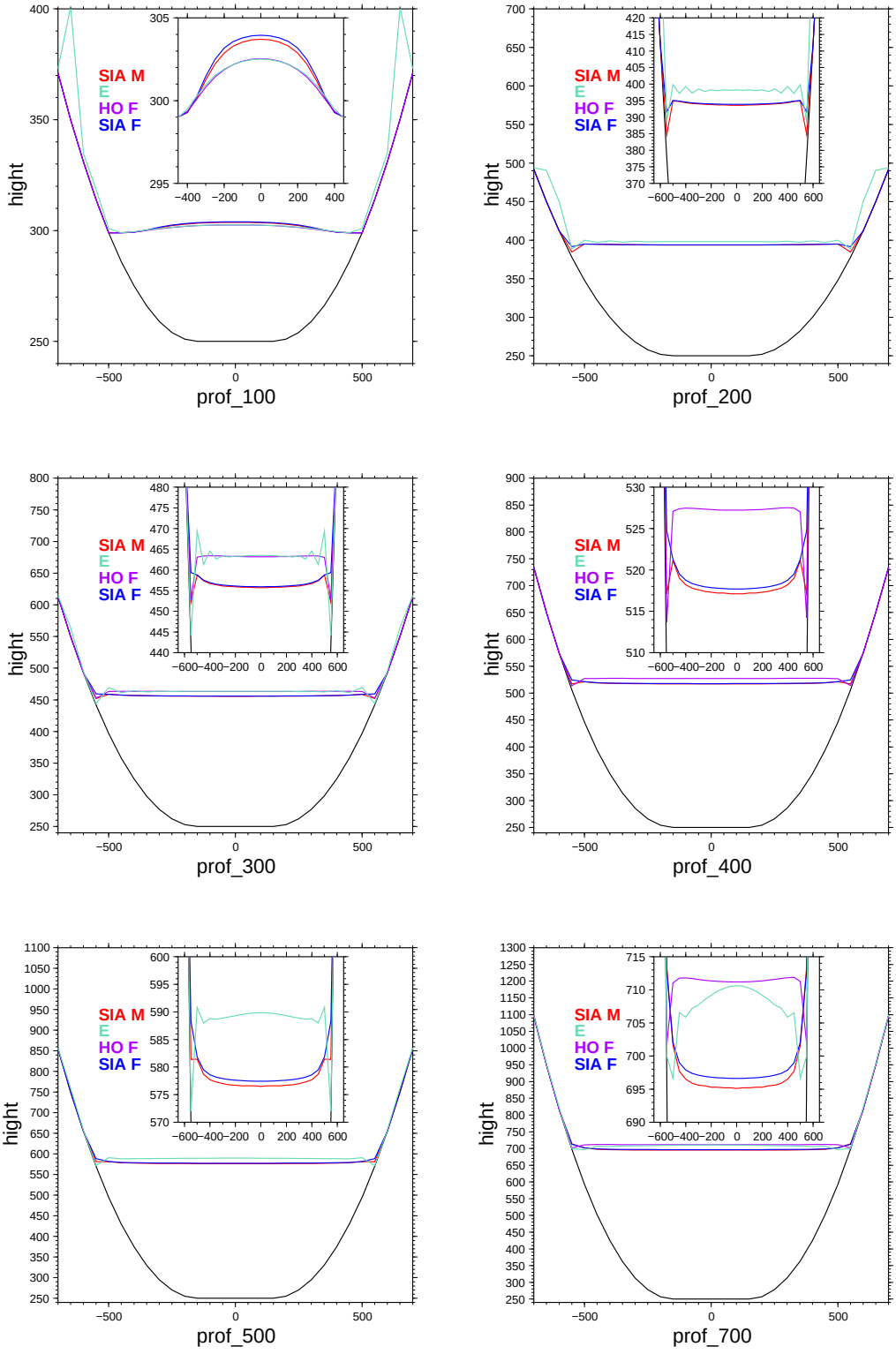



FIG. 3.33.: Coupe orthogonale à la direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et sans bilan de masse (E_SG_SB). `Cross section perpendicular to the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and without mass balance (E_SG_SB).`

Avec bilan de masse, seuls deux modèles ont été utilisés, pour des durées de simulation identiques à celles sans bilan de masse.
Sur la Figure 3.34 les mêmes coupes orthogonales à l'écoulement sont présentées (simulations E_SG_AB). Pour une épaisseur de $E_0 = 100\,\mathrm{m}$ toute la glace a disparu à la fin de la simulation. Pour $E_0 = 200\,\mathrm{m}$, elle a aussi complètement disparu avec la SIA, tandis qu'avec Elmer il reste encore une fine couche de glace. Pour les autres valeurs de $E_0$ les surfaces sont plus stables et on observe la même inversion de la courbure transversale de la surface qu'auparavant avec le modèle SIA.

Sur la Figure 3.35, la coupe dans la direction de l'écoulement est proposée. En plus de la surface initiale (en jaune) l'évolution dans le temps est montrée à l'aide de quelques coupes intermédiaires. Pour une épaisseur de $E_0 = 100\,\mathrm{m}$ le glacier disparaît rapidement pour les deux modèles. Pour $E_0 = 200\,\mathrm{m}$ le glacier disparaît aussi, par contre un peu plus rapidement avec la SIA par rapport à Elmer. Comme il s'étale plus rapidement, il est donc plus fin et descend aussi plus bas et fond alors plus rapidement sous l'influence d'un champ de bilan négatif - d'autant plus négatif que l'altitude est faible - avant de disparaître complètement. Pour $E_0 = 300\,\mathrm{m}$ le glacier ne se comporte pas pareillement avec les deux modèles : avec la SIA, le glacier avance d'abord, pour reculer plus tard sous l'effet du bilan de masse. Avec Elmer le glacier recule tout de suite. De 400 m à 700 m, avec les deux modèles, la déformation domine le bilan de masse négatif, le glacier continue à avancer, davantage avec la SIA et d'autant plus que $E_0$ est grand. A la fin l'accord (ou le désaccord) en terme de position de front et géométrie entre les modèles est du même ordre, voire un peu plus élevé que dans les simulations sans bilan de masse.

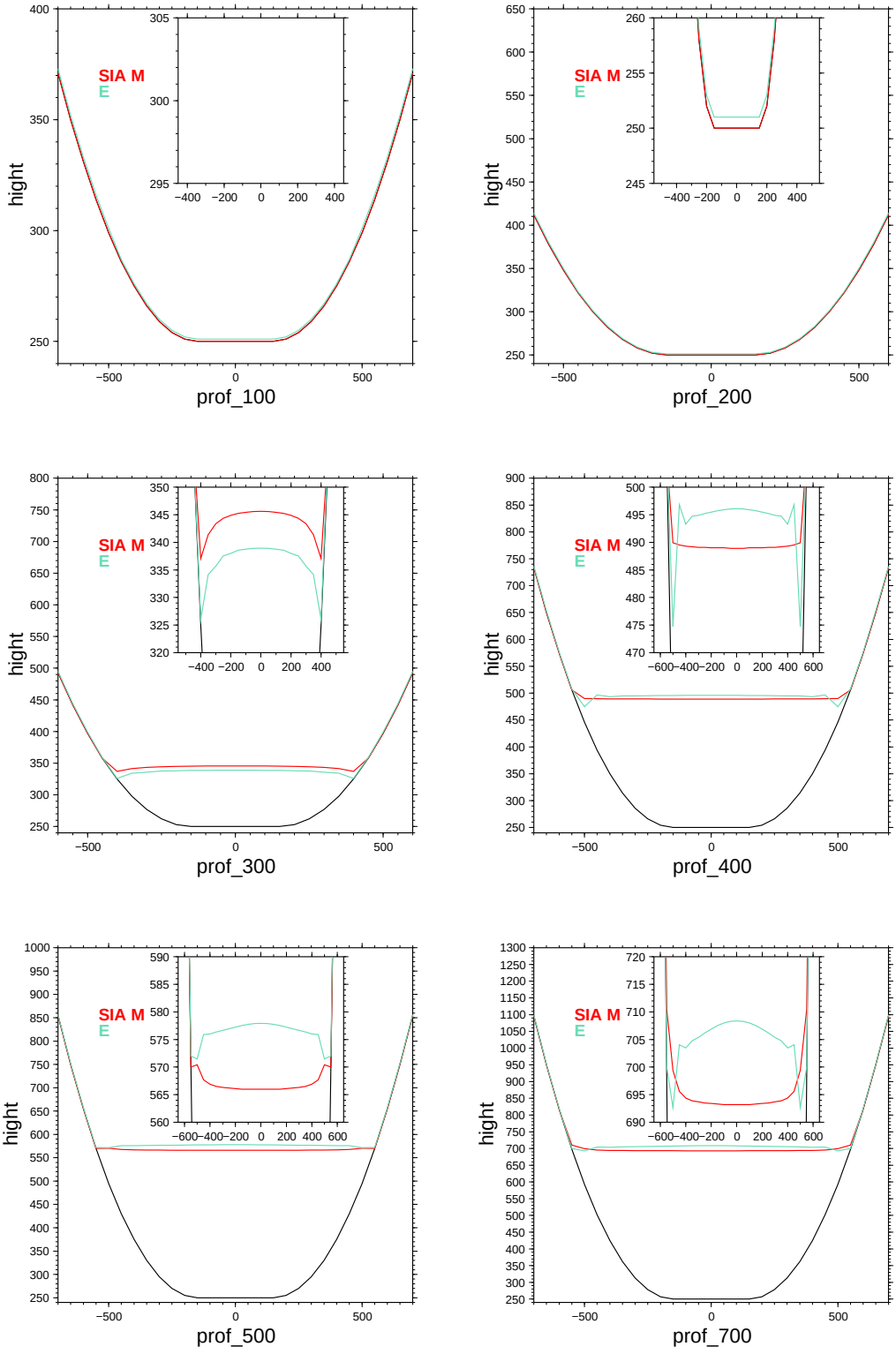



FIG. 3.34.: Coupe orthogonale à la direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et avec bilan de masse (E_SG_AB).
`Cross section perpendicular to the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and with mass balance (E_SG_AB).`

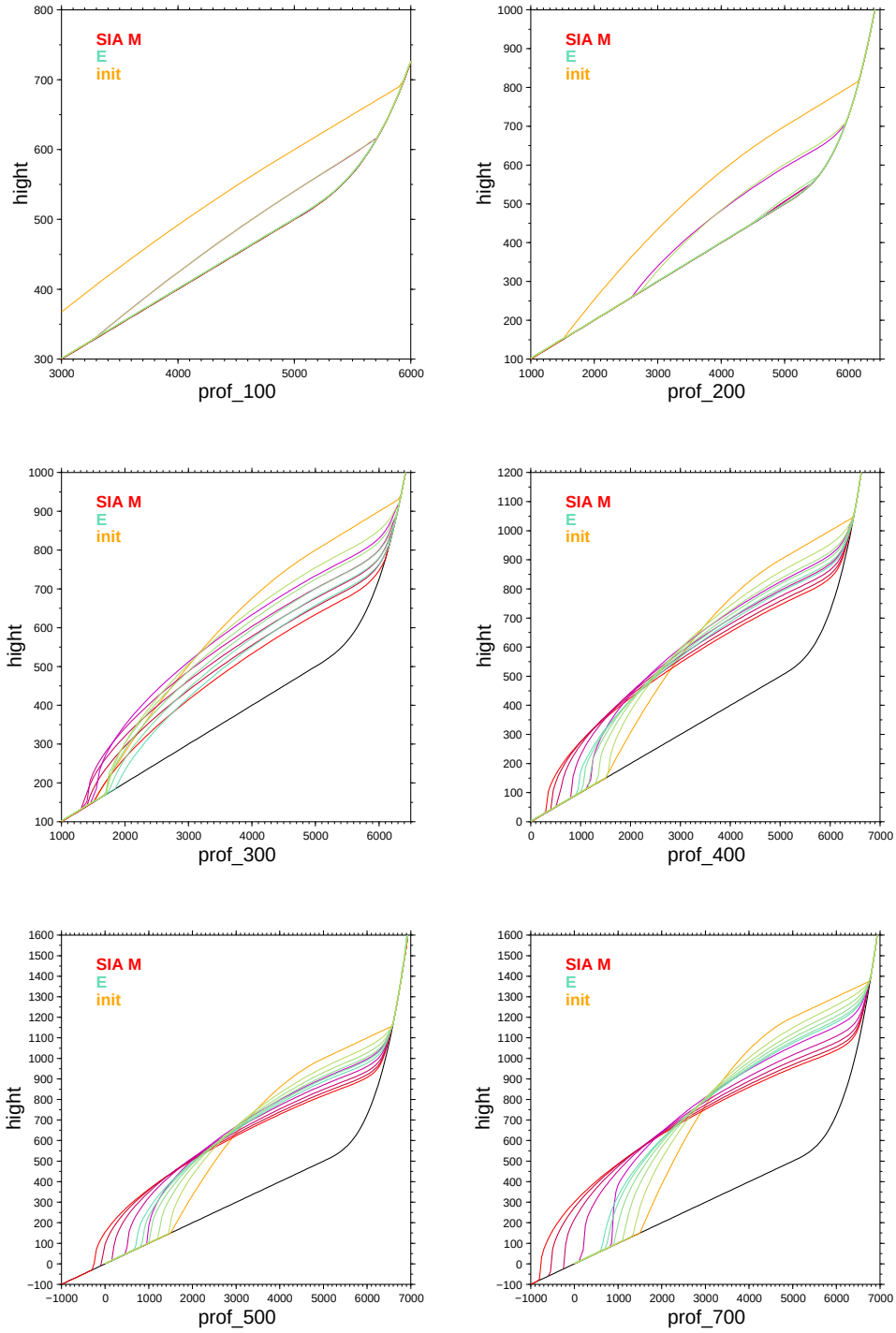



FIG. 3.35.: Coupe en direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et avec bilan de masse (E_SG_AB). L'évolution dans le temps est figurée à l'aide de quelques coupes intermédiaires, ainsi que la surface initiale.

`Cross section along the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and with mass balance (E_SG_AB). The time evolution is shown with the help of some intermediate curves, as well as the initial surface.`

### Vitesses de surface

Sur la Figure 3.36 les valeurs absolues des vitesses diagnostiques (D_SG) en surface sont présentées pour les différentes épaisseurs $E_0$. L'échelle de couleur est différente pour les deux types de modèles, mais aussi pour les différentes épaisseurs. Pour les grandes épaisseurs on trouve des vitesses énormes ce qui reflète des épaisseurs et des pentes de socle pas vraiment réalistes.
L'accord est bon pour les modèles du même type et l'écart entre les deux types de modèles augmente avec l'épaisseur $E_0$, mais la même structure est conservée. Très grossièrement, à la seule vue des échelles de couleur, on observe une variation de 2 à plus de 10 pour le rapport entre les vitesses des modèles d'ordre supérieurs et les vitesses SIA. Une analyse quantitative plus précise sera présentée plus loin à l'aide du profil de vitesse.
Pour les simulations évolutives (E_SG_SB) l'écart diminue ainsi que la dépendance au paramètre $E_0$, grossièrement à l'aide des échelles de couleur on trouve des rapports autour de 1.3 à 1.5 entre les différentes modèles. C'est surtout la SIA qui donne des valeurs inférieures (Fig 3.37) à cause de l'ajustement de la surface.
Avec ELMER on observe de nouveau une accumulation de glace aux bords de la grille liée à des problèmes numériques dans l'équation du transport.
Avec bilan de masse (Fig. 3.38, simulation E_SG_AB), l'accord entre les deux types de modèles est meilleur et la même échelle de couleur peut être utilisée pour une même profondeur.

### Profil de vitesse

Le profil de vitesse est étudié au point $(x, y) = (350, 5400)$ sur les Figures 3.39 (vitesses diagnostiques D_SG) et 3.40 (simulation évolutive E_SG_SB). Ce point se situe dans la moitié droite et supérieure du glacier. Le profil n'est pas montré dans le cas d'une simulation avec bilan de masse car les surfaces diffèrent tellement qu'une comparaison sur un point fixe ne semble pas possible.
Il manque les courbes pour le modèle F HO pour certaines épaisseurs $E_0$ car les valeurs n'ont pas été sorties au bon endroit.
Pour les vitesses diagnostiques, on observe un bon accord entre ELMER et le modèle F HO pour les vitesses $v$ et $w$, c'est-à-dire les vitesses dans la direction de l'écoulement (*horizontal velocity 2* sur la figure) et les vitesses verticales. La SIA surestime la déformation et ce d'autant plus que l'épaisseur $E_0$ de glace est importante (le rapport entre les vitesses des modèles d'ordre supérieur et la SIA atteint des valeurs de l'ordre 5 à 10 pour les fortes épaisseurs).
Pour les vitesses perpendiculaires à la direction de l'écoulement, ELMER est le seul modèle à trouver des vitesses non-nulles. Les vitesses SIA sont nulles, car la pente de surface dans cette direction est nulle et même le modèle F HO ne semble pas capter l'effet qui est à l'origine de cette vitesse.
Dans une simulation évolutive, l'accord entre la SIA et les autres modèles devient meilleur, au moins pour de faibles épaisseurs. Pour les fortes épaisseurs $E_0$, la distribution de l'épaisseur sur la surface finale est tellement différente que les courbes d'un forage à un point fixe deviennent difficiles à interpréter.

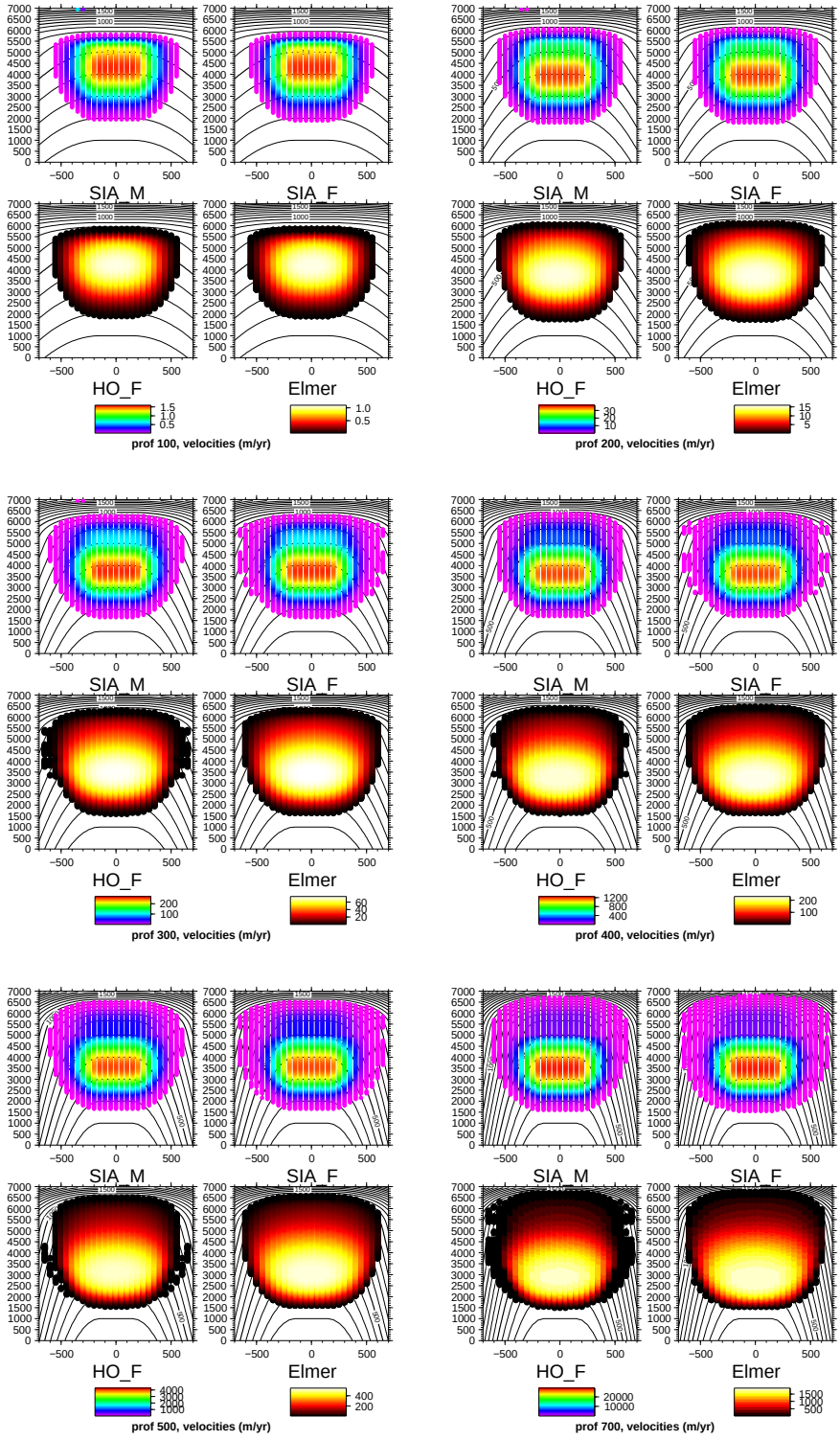



FIG. 3.36.: Valeurs absolues des vitesses diagnostiques en surface pour le glacier de vallée, D_SG.
`Absolut values of the diagnostic surface velocities for the valley glacier D_SG.`

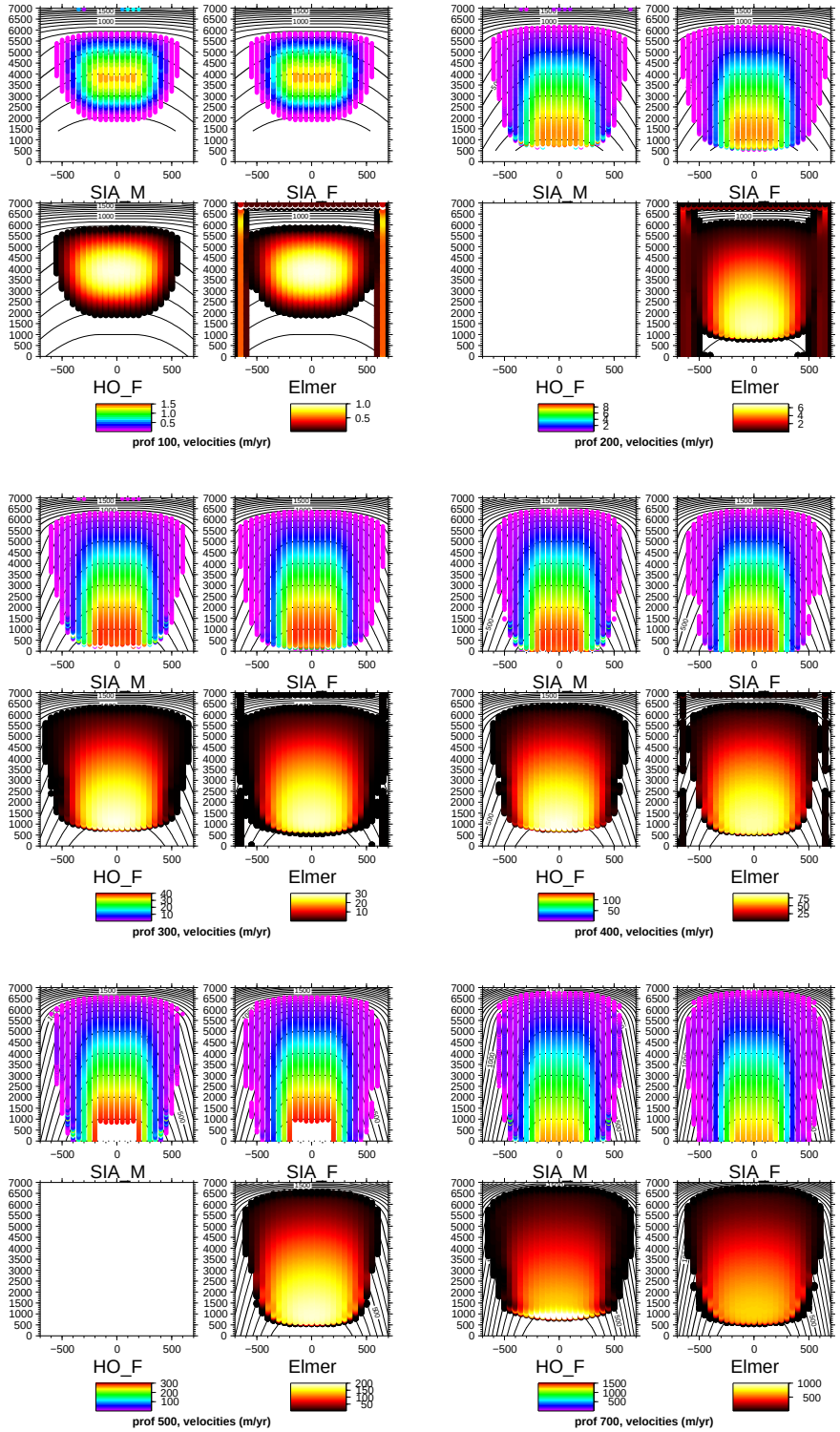



FIG. 3.37.: Valeurs absolues des vitesses en surface pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans bilan de masse est sans glissement (E_SG_SB).
`Absolut values of the surface velocities for the valley glacier, time-dependent simulation with zero mass balance and without sliding (E_SG_SB).`

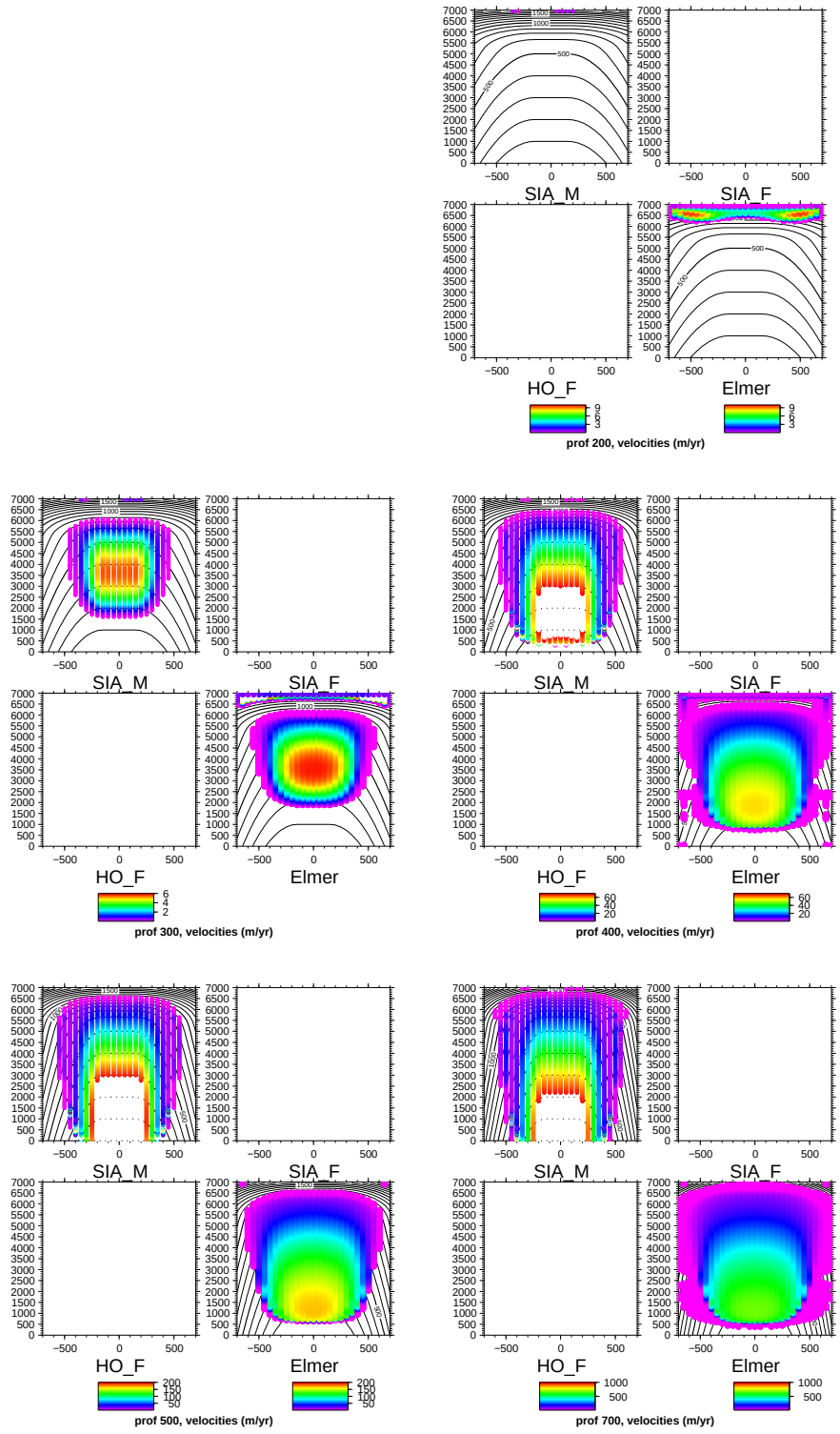



FIG. 3.38.: Valeurs absolues des vitesses en surface pour le glacier de vallée, simulation évolutive avec bilan de masse est sans glissement (E_SG_AB).
`Absolut values of the surface velocities for the valley glacier, time dependent simulation with mass balance and without sliding (E_SG_AB).`

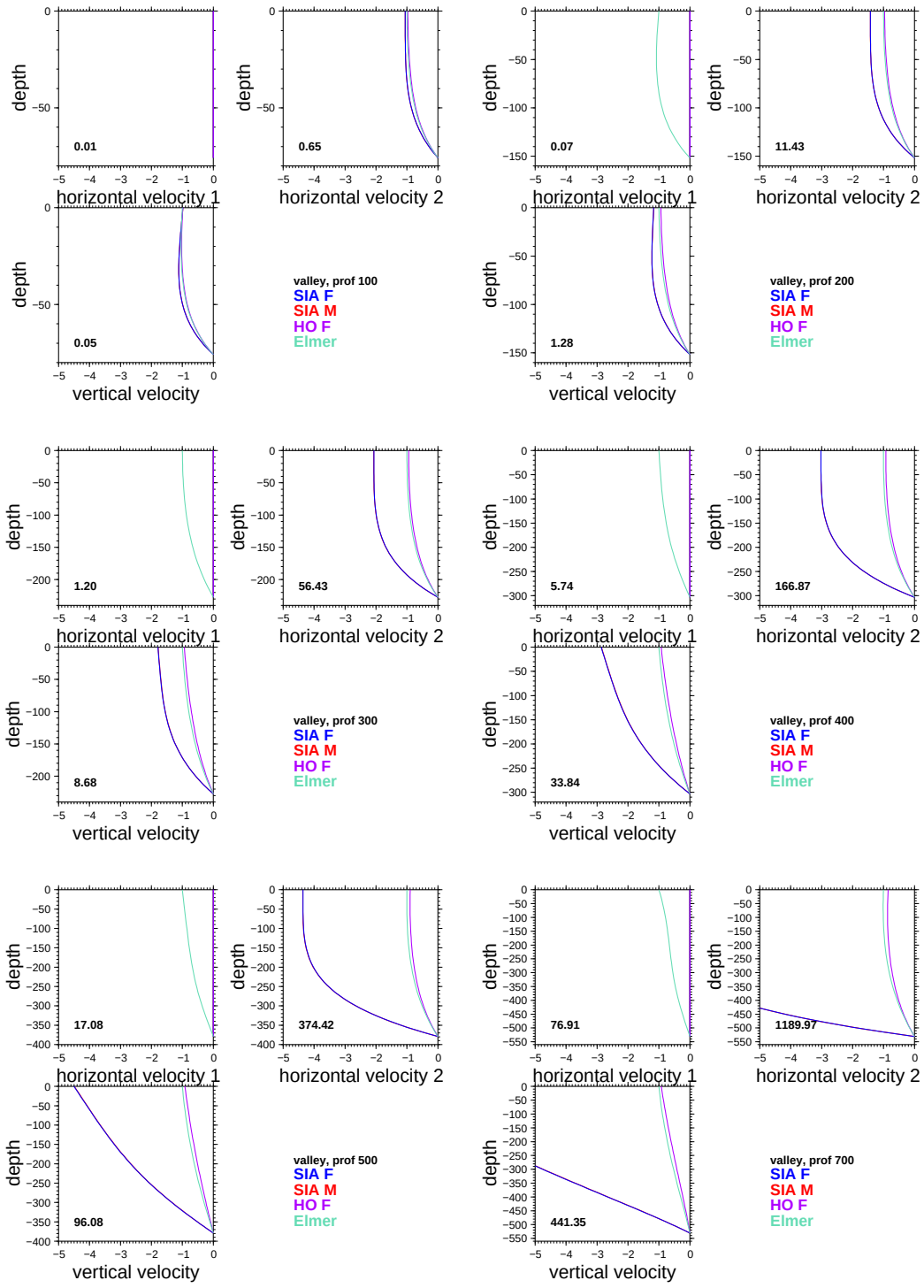



FIG. 3.39.: Profil vertical des vitesses diagnostiques au point $(x, y) = (350, 5400)$ pour le glacier de vallée (simulation D_SG), normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an). "*horizontal velocity 1*" est la vitesse perpendiculaire à l'écoulement, "*horizontal verlocity 2*" celle dans la direction de l'écoulement. `Vertical diagnostic velocity profile at point` $(x, y) = (350, 5400)$ `for the valley glacier (D_SG simulation), normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr). The first horizontal velocity is the velocity perpendicular to the ice-flow, the second one that in the direction of the ice-flow.`

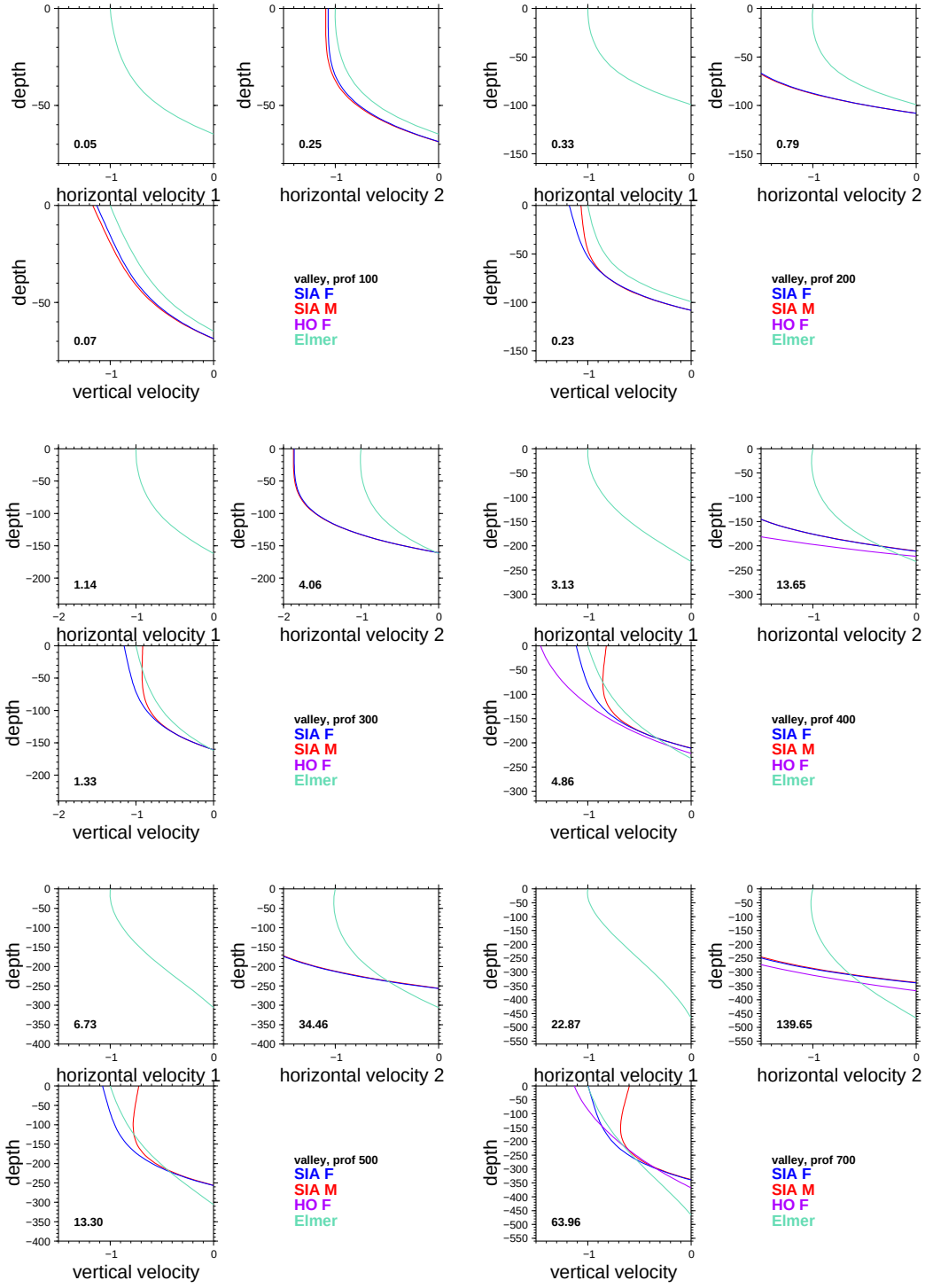



FIG. 3.40.: Profil vertical des vitesses au point $(x, y) = (350, 5400)$ pour le glacier de vallée, surface évolutive sans glissement sans bilan de masse (E_SG_SB), normalisé à la vitesse d'ELMER en surface (donnée en m/an).
`Vertical velocity profile at point` $(x, y) = (350, 5400)$ `for the valley glacier, time-dependent simulation without sliding and mass balance (E_SG_SB), normalized to the surface velocity of` ELMER `(given in m/yr).`

## 3.4. Conclusion sur l'influence respective de la déformation de la glace, du bilan de masse et du glissement

Cette comparaison porte sur quatre modèles différents, deux modèles SIA, un modèle d'ordre supérieur et un modèle qui résout les équations de Stokes sans approximation. Elle est effectuée avec l'idée que ce dernier modèle, Elmer, reproduit la réalité au mieux. En dehors des deux modèles SIA résolvant les mêmes équations, on compare alors des modèles avec des approximations de la physique de l'écoulement différentes. Il est donc tout à fait normal de reproduire la réalité plus ou moins bien. Il ne s'agit pas seulement d'effets numériques.

La déformation de la glace est nettement surestimée par les modèles SIA. Ceci peut être observé sur les champs de vitesses, mais aussi sur la géométrie. On trouve un accord excellent entre les deux modèles SIA. Par rapport à la géométrie, le modèle F HO sous estime un peu la déformation de la surface. Par contre, il y a un très bon accord pour les vitesses avec Elmer, le modèle qui devrait être le plus proche de la réalité. L'écart dans la surface, malgré un bon accord pour les vitesses, s'explique probablement par le cumul de petites différences.

### Simulations diagnostiques

Pour les simulations diagnostiques on observe en terme de vitesses un très grand écart entre les modèles SIA et les modèles d'ordre supérieurs. Ce désaccord s'amplifie avec le rapport d'aspect (expérience du glacier de vallée) ainsi que la pente du socle (expérience glacier conique). Pour l'expérience avec la sphère on trouve étrangement un accord un peu meilleur pour de fortes pentes du socle. La seule explication possible à cet instant est l'hypothèse que la variation de la pente du socle soit trop faible pour vraiment avoir un effet sur l'accord (ou le désaccord) entre les modèles et que l'amélioration de la SIA observée n'est qu'un artefact numérique. Il semble que l'effet de la pente du socle soit négligeable devant celui du rapport d'aspect du glacier.
Avec glissement, on peut faire à peu près les mêmes observations. L'écart un peu plus important entre F HO et Elmer est certainement dû aux approximations faites dans F HO sur la loi de glissement. En observe pour tous les modèles à peu près la même augmentation relative des vitesses (un peu moindre pour la SIA avec un champ de vitesses déjà très élevé sans glissement).

### Simulations évolutives (sans bilan)

Pour les simulations évolutives, on trouve un bon accord sur les vitesses entre tous les modèles, pour les trois expériences la SIA surestime les vitesses seulement d'un facteur de l'ordre de 1.5 à 2 (à comparer à 5 à 10 dans le cas diagnostique) car les vitesses de la SIA diminuent.
Quant à la dépendance à la pente du socle et au rapport d'aspect, les mêmes remarques restent valables.

La surestimation des vitesses amène à un glacier avec une surface un peu trop déformée (trop étalée, des structures de surface très lissées) pour les modèles SIA et à l'inverse à un glacier avec une surface trop peu déformée pour le modèle F HO.
L'accord relativement bon entre les modèles en terme de géométrie, mais aussi de vitesses s'explique par une rétro-action négative pour la SIA : La SIA surestime les vitesses par rapport à ELMER, qui est sensé reproduire la réalité au mieux. Le glacier se déforme plus et devient moins épais qu'il ne devrait être, la surface devient plus lisse. Les vitesses, qui sont proportionnelles à l'épaisseur de glace et à la pente de surface, diminuent alors. Le glacier "freine". Ce phénomène se reproduit jusqu'à ce qu'on trouve un champ de vitesses qui est en "équilibre" avec la surface. Ce phénomène a aussi été observé par Le Meur et al. (2004).
Le glissement ne semble pas avoir une influence importante sur l'accord ou le désaccord entre les modèles. Néanmoins on peut constater qu'il a une influence un peu moins importante pour les modèles SIA comme les vitesses sont déjà très élevées.

### Simulations évolutives (avec bilan)

Avec un champ de bilan, les remarques par rapport aux vitesses restent les mêmes, l'accord entre les modèles devient un peu meilleur ou un peu moins bon selon le cas.
Quant à la surface, en général l'accord au niveau de la position du front devient un peu meilleur (dépendant de la pente du socle et du rapport d'aspect). Par contre, on trouve selon la géométrie, des écarts dans la forme du glacier. Pour le glacier de vallée, on rencontre un comportement différent du glacier selon le modèle (une avancée suivit d'un recul ou directement un recul).
Le bilan n'influence pas l'évolution du glacier par le biais de la déformation, c'est un changement d'épaisseur indépendant appliqué au glacier. Selon les différences de déformation des surfaces, ce bilan peut bien sûr conduire à des différences conséquentes pour le glacier. Cela est bien illustré par le glacier de vallée, qui avance d'abord avec la SIA grâce à la forte déformation et recule seulement plus tard sous l'effet du champ de bilan négatif ; avec ELMER il recule tout de suite car la déformation est dominée dès le départ par le bilan de masse négatif.
Les simulations avec bilan et glissement ont été trop courtes pour en tirer de véritables conclusions, le glissement appliqué était peut-être aussi trop faible.

### D'autre observations

Pour certaines géométries (cf. vitesse perpendiculaire à l'écoulement pour le glacier de vallée, Fig. 3.39) certaines composantes de la vitesses sont reproduites uniquement par un modèle *Full Stokes*.
De forts changements de pentes de surface combinés avec un changement d'épaisseur ne sont pas bien reproduits par la SIA (cf. glacier conique).
L'influence du rapport d'aspect et de la pente du socle sur l'accord entre les modèles est difficile à évaluer. Deux approches différentes pour le choix du temps de simulation ont été utilisées, sans pouvoir conclure laquelle était la plus justifiée. De même, il n'est

évident de savoir si les simulations évolutives avec bilan de masse fournissent des indices sur l'influence du rapport d'aspect qui sont spécifiques au bilan de masse ou à une surface stationnaire.

Plusieurs effets atténuent alors la différence entre les modèles SIA et ceux d'ordres supérieurs :
- Pour des surfaces évolutives, les résultats sont meilleurs car la surface est plus en équilibre avec le champ de vitesses et cette rétro-action négative diminue l'écart entre les modèles.
- Pour les rapports d'aspects faibles (le rapport d'aspect proprement dit ainsi que celui dû à la pente) les résultats sont en général meilleurs.
- Le bilan de masse ne joue qu'un rôle annexe sur cette question, il peut néanmoins y avoir des effets surprenants comme l'interaction entre le bilan de masse et la déformation de la glace ; comme par exemple avec le glacier de vallée qui avance et recule ensuite avec un modèle, mais qui recule directement avec un autre.

Pour conclure, on peut dire que dans la plupart des cas, un modèle SIA devrait donner des résultats satisfaisants à condition de traiter des géométries avec des rapports d'aspect et des pentes du socle faibles et lorsque l'intérêt principal porte sur la géométrie du glacier et non pas sur les vitesses.

### Perspectives

Il serait intéressant de comparer l'accord entre les modèles dans le temps, c'est-à-dire de ne pas comparer seulement les vitesses diagnostiques et les vitesses et surfaces finales, mais de les comparer à des temps intermédiaires pour avoir une comparaison sur la dynamique. Cela donnerait aussi des indications sur les critères à mettre en place pour sélectionner les durées de simulations ayant pour objet la comparaison de l'état final.
Pour le glacier sphérique, il serait intéressant de varier davantage la pente ou le rapport d'aspect du glacier lui-même pour essayer de comprendre pourquoi la SIA donne apparemment des résultats meilleurs pour les fortes pentes testées ici.
Quant au glacier de vallée, le paramètre $E_0$ induit un changement de pente qu'on pourrait éviter avec une autre paramétrisation de la géométrie. Il serait intéressant aussi d'effectuer de telles simulations.

## 3.5. Comparaison des temps de calcul

Le travail présenté dans ce paragraphe ne prétend pas être une étude exhaustive sur le temps de calcul des différents modèles. Pour cela, il aura fallu investir beaucoup de temps et de travail dans l'optimisation de tous les modèles en ce qui concerne les paramètres de convergence, les conditions initiales, le pas de temps, les pas de grille,... mais aussi le code en soi ! A la place de ce travail, en théorie nécessaire pour chaque glacier étudié en fonction de la précision souhaitée, la plupart des paramètres des différents modèles ont été changés pour avoir une idée de la variabilité du temps de calcul pour un modèle donné. Dans certains cas, ce petit test a permis de montrer que les paramètres utilisés pendant toutes les simulations, comme les paramètres par défaut, s'avéraient ne pas être optimaux. Le but ici est donc plutôt d'avoir d'une manière relativement rapide une idée globale de la différence de coût entre les quatre modèles. Le besoin en mémoire n'est pas du tout étudié ici, mais c'est aussi une question non-négligeable pour des simulations appliquées à un cas réel.
Le glacier synthétique sphérique avec la pente du socle à 0.2 a été choisi comme test pour étudier le temps de calcul. Il n'était pas possible d'utiliser le glacier conique car Elmer utilise la symétrie de rotation contrairement aux autres modèles. Le glacier de vallée est, quant à lui, beaucoup trop coûteux pour ce genres de tests.
La comparaison a été conduite pour deux cas bien différents : le calcul du champ de vitesses diagnostiques et une simulation évolutive (10 ans dans ce cas). Ni bilan, ni glissement ont été pris en compte, mais ils ne devraient pas avoir beaucoup d'influence sur le temps de calcul (pour un bon comportement de convergence supposé !).

### 3.5.1. Champs de vitesses diagnostiques

Le Tableau 3.10 présente les temps de calcul pour les quatre modèles pour différents jeux de paramètres qui sont spécifiés dans le Tableau 3.11.
Observations et remarques (les différents jeux de paramètres sont toujours comparés au jeu No.1) :

- **Elmer**
  L'augmentation/diminution du temps de calcul dans les cas 2, 3 et 4 est assez naturelle et correspond à ce qui est attendu. Il est probable que les critères de convergence pour le cas 1 sont un peu trop stricts. Les cas 2 et 3 montrent bien que l'augmentation du temps de calcul pour une meilleure précision n'est pas linéaire : on trouve un facteur 2.5 sur le temps de calcul pour passer du cas 1 au cas 2, mais pour passer du cas 3 au cas 1 un facteur de seulement 1.4 est nécessaire. Le cas 5 montre bien la dépendance du temps à la taille du maillage (peu importe si c'est en direction $z$ comme ici ou dans les autres directions). On trouve une dépendance presque linéaire (un facteur 1.71 dans le temps de calcul pour un facteur 1.68 dans le nombre de nœuds) en accord avec ce qui a été obtenu par Gagliardini pour les tests ISMIP (Gagliardini, 2007). La méthode stabilisée (cas 6 et 7) est connue pour être moins précise, mais plus rapide que celle des bulles. Malheureusement le comportement de convergence

| temps CPU (s) | ELMER | F HO | F SIA | M SIA |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 886.58 | 17.12 | 0.05 | 0.06 |
| 2 | 2184.89 | 17.53 | 0.05 | |
| 3 | 625.26 | 57.89 | 0.07 | |
| 4 | 1070.30 | 28.24 | | |
| 5 | 1493.72 | 10.36 | | |
| 6 | ne converge pas | 25.00 | | |
| 7 | 533.00 | | | |
| 8 | 213.00 | | | |
| moyenne | 1001.00 | 26.00 | 0.06 | 0.06 |

TAB. 3.10.: Temps de calcul en secondes pour différents jeux de paramètres, calcul du champ de vitesse diagnostique pour le glacier sphérique avec une pente de 0.2. Il est à remarquer que les simulations d'ELMER portent sur le demi-domaine.
`CPU time in seconds for different parameters, calculation of the diagnostic velocity field for the spherical glacier in the case of a slope of 0.2. It should be noticed that the simulations with` ELMER `are only performed on half of the domaine.`

| Elmer | |
|---|---|
| 1 | ILU0, bulles (éléments hexaédriques), $nz$ =24, $\epsilon_L$= $10^{-5}$, $\epsilon_{NL}$= $10^{-4}$, $\epsilon_{NLP}$= $10^{-2}$, $\epsilon_S$= $10^{-4}$, cond. initiales : SIA |
| 2 | ILU1 |
| 3 | $\epsilon_L$= $10^{-4}$, $\epsilon_{NL}$= $10^{-3}$, $\epsilon_{NLP}$= $10^{-1}$, $\epsilon_S$=$10^{-3}$ |
| 4 | $\epsilon_L$= $10^{-6}$, $\epsilon_{NL}$= $10^{-5}$, $\epsilon_{NLP}$= $10^{-3}$, $\epsilon_S$=$10^{-5}$ |
| 5 | nz=41 |
| 6 | stabilisé (éléments hexaédriques) |
| 7 | stabilisé (éléments du type prisme) |
| 8 | cond. initiales : nulles |
| F HO | |
| 1 | $\Delta t$=0.1, $nz$=24, $\epsilon_v = 10^{-5}$, $\epsilon_\eta = 10^{-4}$, cond. initiales : SIA |
| 2 | $\Delta t$=0.01 |
| 3 | $nz$=41 |
| 4 | $\epsilon_v$= $10^{-6}$, $\epsilon_\eta$= $10^{-5}$ |
| 5 | $\epsilon_v$= $10^{-4}$, $\epsilon_\eta$= $10^{-3}$ |
| 6 | cond. initiales : nulles |
| F SIA | |
| 1 | $\Delta t$=0.1, $nz$=24, cond. initiales : SIA |
| 2 | $\Delta t$=0.01 |
| 3 | $nz$=41 |
| M SIA | |
| 1 | pas de paramètre |

TAB. 3.11.: Les différents jeux de paramètres pour la comparaison du temps de calcul. Dans le tableau seul le paramètre qui change par rapport au jeu No.1 est indiqué. Pour le détail de ces paramètres se référer aux Paragraphes 2.1 à 2.3.
`Different parameters for the CPU time comparison. In the table only the parameters that are changed compared to configuraion 1 are given. For details on these parameters see Paragraphs 2.1 to 2.3.`

des différentes combinaisons pour le maillage (méthodes stabilisée ou bulles, mailles sous forme d'élément hexaédrique ou de type prisme) varie beaucoup avec les versions d'Elmer utilisées et les simulations ont été réalisées à un moment correspondant à de nombreuses évolutions du code Elmer. Le cas 6 ne converge alors pas du tout, mais le cas 7 montre bien la diminution du temps de calcul. Le résultat du cas 8 est assez surprenant, le temps de calcul est très sensible aux conditions initiales pour les vitesses et la pression et, au moins pour cet exemple, il est plus avantageux de partir de vitesses nulles que de la solution SIA.

- **F HO**
  Le cas 2 est quasiment identique au cas 1 car le pas de temps intervient dans le calcul des vitesses uniquement pour la vitesse $w$ (calcul direct, sans itération). Les résultats des cas 3, 4 et 5 correspondent à ce qui est attendu. Quant à la dépendance du temps de calcul au nombre de nœuds on trouve un comportement complètement différent comparé à Elmer : le temps de calcul augmente d'un facteur 3.4 pour un facteur 1.71 dans le nombre de nœuds. Les remarques pour une meilleure précision (cas 4 et 5) restent les mêmes que ci-dessus. Les conditions initiales pour les vitesses (cas 6) semblent être moins importantes ici et il est notamment ici plus avantageux de partir de la SIA que de zéro.
- **Modèles SIA**
  Les deux modèles SIA nécessitent le même temps de calcul malgré leur implémentation et langage de programmation différents (Fortran77 ou C). Comme attendu, on ne trouve quasiment pas de dépendance à $nz$ ni au pas de temps qui n'interviennent que dans le calcul de la vitesse $w$ pour le modèle F SIA.

### Variabilité interne à un modèle

A première vue, on trouve une variabilité interne d'un facteur 10 avec Elmer et d'un facteur 5.5 avec F HO. On constate donc une très grande variabilité interne. Néanmoins il faut garder à l'esprit que le choix des jeux de paramètres n'est pas complet du tout et reste relativement arbitraire.

### Comparaison

Pour tenir compte du fait qu'Elmer simule uniquement le demi-domaine le temps de calcul d'Elmer doit être multiplié par un facteur qui vaut au minimum 2 et qui sera choisi ici par simplicité comme égal à 2. Une étude approfondie sur les tests ISMIP (Gagliardini, 2007) a montré qu'avec Elmer le temps calcul augmente comme $n^{1.11}$ où $n$ est le nombre de degrés de liberté (le nombre de nœuds en l'occurrence). Si on compare simplement la moyenne, on trouve les rapports suivants :
Elmer/F HO = 77, Elmer/SIA = 33 400, F HO/SIA =430. En tenant compte des temps de calcul minimaux et maximaux trouvés, on peut donner une fourchette d'environ 40 à 80 pour le rapport Elmer/F HO, de 7 000 à 70 000 pour Elmer/SIA et de 200 à 1 000 pour F HO/SIA.
Au vue de la grande variabilité interne et des fourchettes données ci-dessus, on peut

uniquement conclure à ce stade d'étude que le rapport du temps de calcul entre ELMER et F HO est entre $\mathcal{O}(10)$ et $\mathcal{O}(100)$, celui entre ELMER et SIA est '$\mathcal{O}(10\,000)$ et celui entre F HO et SIA est $\mathcal{O}(100)$.

Il aurait été intéressant d'essayer de savoir, si ce résultat est lié au fait qu'on cherche à calculer le champ de vitesse diagnostique d'une géométrie arbitraire qui n'est pas à l'équilibre du tout. Il faudrait effectuer les mêmes tests en partant d'une surface issue d'une simulation de quelques années et comparer. Ensuite il serait possible de conclure si la grande variabilité et notamment la grande différence entre ELMER et le modèle F HO sont dues à la géométrie arbitraire ou si c'est seulement une question de conditions initiales comme le suggère le jeu de paramètres 8 pour ELMER.

Par ailleurs le temps de calcul dépend aussi de la pente. Une augmentation de la pente à 0.4 induit un facteur d'environ 1.5 pour tous les modèles et toutes les configurations.

Au moins pour la sphère, un calcul parallèle avec ELMER est une excellente méthode pour diminuer le temps de calcul : le temps de calcul par processeur est à peu près de l'ordre du quart du temps de calcul normal (pour 4 processeurs). Avec le jeu de paramètres 1 environ 255 s ont été nécessaires par processeur à comparer aux 886 s sur un seul processeur ($\frac{886\,s}{4} = 222\,s = 0.87 \times 255\,s$).

### 3.5.2. Simulation évolutive

Le Tableau 3.12 présente de nouveau les temps de calcul des quatre modèles pour différents jeux de paramètres qui sont spécifiés maintenant dans le Tableau 3.13.

Observations et remarques (les différents jeux de paramètres sont toujours comparés au jeu No.1) :

- **Elmer**
  Tous les résultats paraissent logiques. On peut faire les mêmes remarques que pour la simulation diagnostique. Le temps de calcul ne dépend pas linéairement du pas de temps : la diminution du pas de temps d'un facteur 2 (cas 3) augmente le temps de calcul uniquement d'un facteur 1.3. D'autres jeux de paramètres comme la méthode des bulles ou le préconditionnement ILU1 n'apparaissent pas dans ce tableau car la convergence n'a pas été obtenue avec ces jeux de paramètres.
- **F HO**
  Tous les résultats paraissent logiques. Ici la diminution du pas de temps d'un facteur 2 (cas 3) introduit un facteur 2.3 dans le temps de calcul.
- **Modèles SIA**
  Une différence significative entre les deux modèles apparaît. Elle provient du calcul itératif de la surface dans le modèle F SIA à comparer à l'inversion de la matrice dans le modèle M SIA.

| temps CPU (s) | ELMER | F HO | F SIA | M SIA |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8863 | 2293 | 4.8 | 0.22 |
| 2 | 14289 | 1722 | 3.8 | 0.39 |
| 3 | 11585 | 5401 | 9.6 | |
| 4 | 14061 | 5670 | 7.7 | |
| 5 | 9339 | 6462 | 3.9 | |
| 6 | | 1819 | | |
| moyenne | 11627 | 3894 | 6.0 | 0.3 |

TAB. 3.12.: Temps de calcul en secondes pour différents jeux de paramètres, simulation évolutive (10 ans) pour le glacier sphérique avec une pente de 0.2. Il est a remarquer que les simulations d'ELMER portent sur le demi-domaine.
`CPU time in seconds for different parameters with 10 years of simulation for the spherical glacier in the case of a slope of 0.2. It should be noticed that the simulations with` ELMER `are only performed on half of the domaine.`

| | |
|---|---|
| Elmer | |
| 1 | ILU0, stabilisé (éléments du type prisme), $nz$ =30, $\Delta t$=1, cond. initiales : nulles<br>Navier-Stokes : $\epsilon_L$= $10^{-5}$, $\epsilon_{NL}$= $10^{-4}$, $\epsilon_{NLP}$ =$10^{-2}$, $\epsilon_C$= $10^{-4}$,<br>Free-Surface : $\epsilon_{NL}$= $10^{-6}$, $\epsilon_C$= $10^{-4}$ ; Mesh-Update : $\epsilon_L$= $10^{-6}$, $\epsilon_C$= $10^{-4}$ |
| 2 | $nz$=50 |
| 3 | $\Delta t = 0.5$ |
| 4 | Navier-Stokes : $\epsilon_L$= $10^{-6}$,$\epsilon_{NL}$= $10^{-5}$, $\epsilon_{NLP}$= $10^{-3}$, $\epsilon_C$= $10^{-5}$ |
| 5 | Free-Surface : $\epsilon_{NL}$= $10^{-7}$, $\epsilon_C$= $10^{-5}$ ; Mesh-Update : $\epsilon_L$= $10^{-7}$, $\epsilon_C$= $10^{-5}$ |
| F HO | |
| 1 | $\Delta t$=0.1, $nz$=30, $\epsilon_v$= $10^{-5}$, $\epsilon_\eta$ $10^{-4}$, $\epsilon_S$= $10^{-5}$, cond. initiales : SIA |
| 2 | $nz = 24$ |
| 3 | $\Delta t$=0.05 |
| 4 | $nz$=50 |
| 5 | $\epsilon_v$= $10^{-6}$, $\epsilon_\eta$= $10^{-5}$ |
| 6 | $\epsilon_S$=$10^{-6}$ |
| F SIA | |
| 1 | $\Delta t$=0.1, $nz$=30, $\epsilon_\eta$=$10^{-5}$, cond. initiales : SIA |
| 2 | $nz = 24$ |
| 3 | $\Delta t$=0.05 |
| 4 | $nz$=50 |
| 5 | $\epsilon_S$= $10^{-6}$ |
| M SIA | |
| 1 | $\Delta t = 0.1$ |
| 2 | $\Delta t = 0.05$ |

TAB. 3.13.: Les différents jeux de paramètres pour la comparaison du temps de calcul. Dans le tableau seul le paramètre qui change par rapport au jeu No. 1 est indiqué. Pour le détail de ces paramètres se référer aux Paragraphes 2.1 à 2.3.
`Different parameters for the CPU time comparison. In the table only the parameters that are changed compared to configuraion 1 are given. For details on these parameters see Paragraphs 2.1 to 2.3.`

### Variabilité interne à un modèle

Quant à la variabilité interne, on trouve à première vue un facteur de 1.6 pour Elmer, 3.8 pour F HO, 2.5 pour F SIA et 1.8 pour M SIA.

La variabilité interne est beaucoup moins importante que pour la comparaison diagnostique, mais il faut prendre en compte le fait que quelques configurations de paramètres ne sont plus utilisées grâce à l'expérience avec la simulation diagnostique (ex. conditions initiales pour Elmer).

### Comparaison

Les chiffres pour Elmer sont de nouveau multipliés par un facteur 2. Avec la moyenne on trouve les rapports suivants :
Elmer/F HO = 6, Elmer/F SIA = 3 875, Elmer/M SIA = 78 000, F HO/F SIA = 650 et F HO/M SIA =13 000. Si on tient compte des temps de calcul minimaux et maximaux observés, on peut donner une fourchette de l'ordre de 5 à 10 pour Elmer/F HO, de 3 000 à 4 600 pour Elmer/F SIA, de 60 000 à 100 000 pour Elmer/M SIA, de 300 à 1 000 pour F HO/F SIA et de 6 000 à 22 000 pour F HO/M SIA.

### Conclusion

Pour une simulation évolutive, c'est-à-dire une fois que les simulations ont bien démarré et que la surface commence à être en équilibre avec le champ de vitesse, la variabilité interne est beaucoup plus faible qu'initialement. Ceci est très probablement simplement lié au choix des configurations qui a été influencé par l'expérience diagnostique. Le rapport du temps de calcul entre Elmer et F HO est inférieur à 10, celui entre Elmer et la SIA est entre $\mathcal{O}(1\,000)$ et $\mathcal{O}(10\,000)$ selon le modèle choisi et celui entre F HO et la SIA est entre $\mathcal{O}(100)$ et $\mathcal{O}(10\,000)$ pour des simulations évolutives. L'avantage en terme de temps de calcul d'une inversion de matrice pour le calcul de la nouvelle surface du modèle M SIA comparé à la résolution de l'équation de transport itératif (modèle F SIA) devient important. Pour les simulations diagnostiques, Elmer est plus coûteux par rapport aux autres modèles, mais il est important de garder à l'esprit que doubler la durée de la simulation ne signifie pas forcement doubler le temps de calcul. Avec Elmer, il faut tenir compte d'un temps de calcul élevé au premier pas de temps car Elmer est très sensible aux conditions initiales, fait confirmé par le test avec le jeu de paramètres 8 des simulations diagnostiques (plus d'itérations pour résoudre le problème non-linéaire du *solver* de Navier-Stokes, mais aussi une meilleure convergence de la résolution du système linéaire lorsqu'on est proche de la solution). Le modèle F HO est un peu moins sensible à cet effet (confirmé par le jeux de paramètres 6 dans les simulations diagnostiques). Cela explique la diminution du rapport du temps de calcul entre Elmer et le modèle F HO à une valeur inférieur à 10.
Le gain en temps de calcul est important si on compare les modèles d'ordre supérieurs avec la SIA. Par contre le changement d'un modèle d'ordre supérieur à un modèle Stokes complet n'est plus si important pour des simulations évolutives.

# 4. Un cas réel, le glacier de St. Sorlin

Dans ce chapitre le cas réel du glacier de Saint Sorlin est étudié. L'accent est mis ici sur la comparaison des modèles, il ne s'agit pas d'essayer de reproduire les observations disponibles sur ce glacier, même si les résultats obtenus sont comparés aux mesures en fin de chapitre. En conséquence, il n'a pas été recherché à optimiser les différents paramètres (loi de Glen, loi de glissement,...) entrant dans la simulation. Le jeu de paramètres a été choisi par quelques tests préliminaires à l'aide du modèle M SIA.

## 4.1. Travaux préliminaires

### 4.1.1. Des données topographiques vers une grille et un maillage

Les données topographiques (surfaces de 1905 et 1998 ainsi que le socle rocheux) sont disponibles en coordonnées Lambert sur une zone qui couvre le glacier (rouge sur la Figure 4.1 à gauche) avec un pas de grille de 50 m. Pour la partie supérieure du glacier la zone topographique a été élargie par des données complémentaires du massif des Grandes Rousses d'après Gerbaux (2005) (en noir sur la figure).
L'objectif était de s'affranchir des coordonnées Lambert et de travailler avec des coordonnées relatives au glacier. Deuxièmement, on a cherché un système de coordonnées pivoté pour avoir une grille rectangulaire à mailles orthogonales mieux adaptée au problème.

#### Rotation du système de coordonnées

Dans un premier temps le système de coordonnées initiales a été décalé de
$(x, y) = (-899\,000, -323\,700)$ pour à avoir l'origine dans le coin en bas à gauche. Ensuite, une grille régulière (en bleu sur la Figure 4.1 à droite) avec un pas de grille de 50 m bien plus large que la grille initiale a été pivoté de -57 degrés (-1 rad).
Finalement, seule la zone d'intérêt (en rouge sur la Figure 4.1) a été retenue. Le nombre de points de grille a ainsi pu être réduit considérablement (15 % des points, soit 1000 points en (x,y) à multiplier par le nombre de couches verticales).
Pour retrouver les altitudes aux nouveaux points, les données initiales ont été d'abord interpolées à l'aide de l'algorithme GRDSAMPLE (script de l'application *Generic Mapping Tool*, (GMT)) à un pas de grille de $\Delta' = 5$ m. L'altitude des nouveaux points a été calculée par interpolation sur cette grille fine. Pour cela il y a plusieurs possibilités :
Comme illustré sur la Figure 4.2 à gauche ; plusieurs ou aucun des points voisins de la grille fine peuvent avoir des altitudes connues (point rouge : le point dont on cherche l'altitude ; carré bleu ou blanc : voisins de la grille fine, bleu : on connaît l'altitude, blanc : on ne la connaît pas).

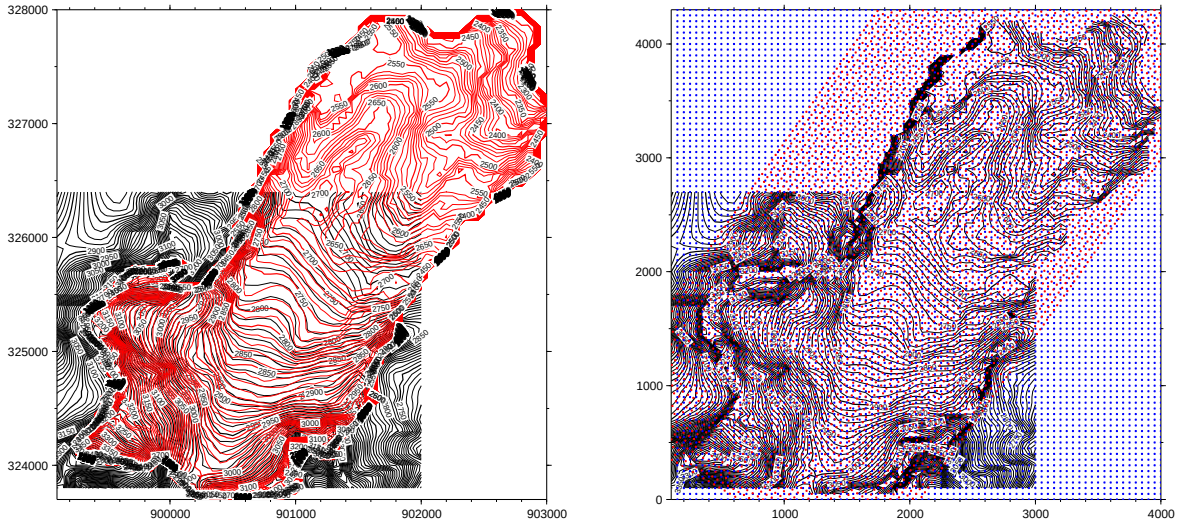



FIG. 4.1.: Données topographiques (coord. Lambert). A gauche les données disponibles sont montrées. A droite la rotation du système de coordonnées est illustrée : la grille rouge est la grille finale.
`Topographic data (in the Lambert coordinate system). On the left side the avaible data. On the right side the rotation of the coordinates is shown. The red grid is the final grid.`

Dans les cas numéro 1 et 3 de la figure une interpolation bi-linéaire ou linéaire, respectivement, est faite.

bi-linéaire (cas numéro 1) : (4.1)

$$z_{\text{new}} = \frac{(y-y_b)(x_d-x)}{\Delta' 2} z_1 + \frac{(y-y_b)(x-x_g)}{\Delta' 2} z_2 + \frac{(y_h-y)(x_d-x)}{\Delta' 2} z_3 + \frac{(y_h-y)(x-x_g)}{\Delta' 2} z_4$$

linéaire (cas numéro 3) : (4.2)

$$z_{\text{new}} = \frac{d_2}{d_1+d_2} z_1 + \frac{d_1}{d_1+d_2} z_2$$

Dans le cas numéro 2, la simple moyenne des trois valeurs est utilisée. Dans les cas numéro 4 et 5 l'altitude est à priori irrécupérable. Il s'agit uniquement des points à l'extérieur du glacier. A priori cela n'est problématique que pour ELMER, pour tous les autres modèles on peut empêcher un calcul sur cette zone à l'aide d'un masque. La solution appliquée ici a consisté à prolonger (dans la direction orthogonale à l'écoulement principal) le socle pour cette zone avec le dernier point connu (Figure 4.2 à droite). Comme il n'y a pas de glace, la surface est égal au socle.
Quelques points ont dû être modifiés à la main pour obtenir une surface assez lisse, pour

éviter des trous et pour gérer les concavités. La région autour du Col des Quirlies a aussi été modifiée légèrement pour pouvoir se limiter à la simulation du glacier de Saint Sorlin sans tenir compte du glacier des Quirlies de l'autre côté du Col.

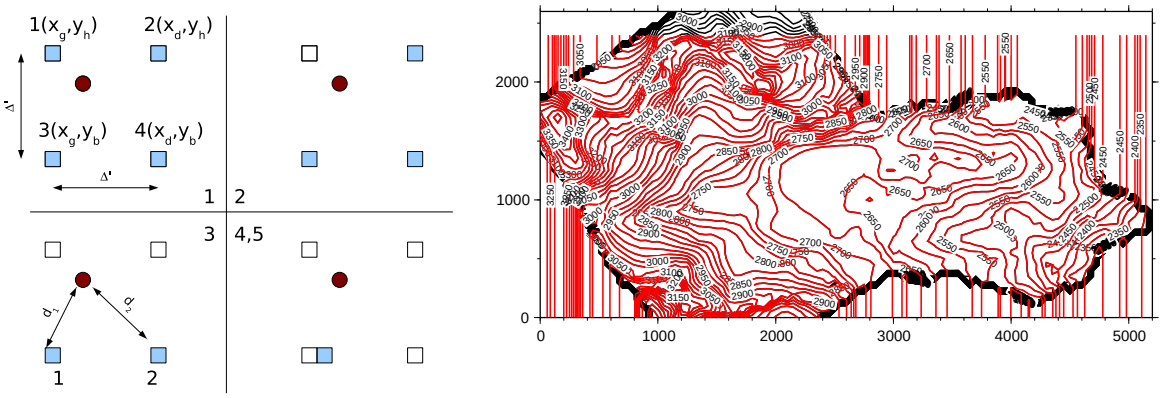



FIG. 4.2.: Sur la figure à gauche, l'interpolation (bi)linéaire nécessaire lors de la rotation est illustrée. A droite la prolongation des données en dehors de la zone connue est montrée (système de coordonnés de travail).
`On the left side the (bi)linear interpolation necessary for the rotation is illustrated. On the right side the extension of the data over the area where no data is known is shown (new coordinate system).`

Pour obtenir les coordonnés d'un point précis donné en coordonnées Lambert $(xx, yy)$ dans le nouveau système $(xout, yout)$ (appelé dans la suite "système des coordonnés de travail"), les opérations suivantes sont nécessaire :

$$\begin{aligned} xx &= xx - 899000, \\ yy &= yy - 323700, \\ xout &= xx \cdot cos(-\alpha) + yy \cdot sin(-\alpha), \\ yout &= yy \cdot cos(-\alpha) - xx \cdot sin(-\alpha), \\ xout &= xout - 300, \\ yout &= yout + 1800, \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.4)

où $\alpha = -1$ rad pour la rotation effectuée ici.

### Grille et Maillage

Pour les modèles F HO, F SIA, M SIA cette grille peut-être directement utilisée.

Pour Elmer deux approches différentes ont été testées : La première variante consiste à prendre toute cette zone rectangulaire et de la mailler avec des éléments hexaédriques et de les étirer ensuite à la bonne hauteur. Avec ces éléments la convergence n'était pas bonne, des éléments du type prisme ont alors été utilisés (Fig. 4.3 à gauche).
La deuxième variante consiste à mailler uniquement le glacier avec une petite marge sur les côtés et surtout de la place autour du front pour lui permettre d'avancer (Fig. 4.3 à droite). Ce maillage a été fait à l'aide du logiciel `Gmsh`, les éléments sont aussi du type prisme. Ce maillage a permis de réduire le nombre de nœuds d'environ 8000 (c'est-à-dire environ 10%). (Remarque : Le chiffre 8000 tient déjà compte des 30 couches verticales dans les deux cas.) Néanmoins il s'est avéré que ce deuxième maillage à priori plus petit avait des propriétés moins bonne de convergence au départ ce qui amenait au total à un temps de calcul plus long pour des simulations de courte durée. De plus, le maillage rectangulaire est plus simple à traiter en post-traitement surtout dans l'optique des comparaisons avec les autres modèles. Toutes les simulations n'ont donc pas été réalisées avec ce deuxième maillage.

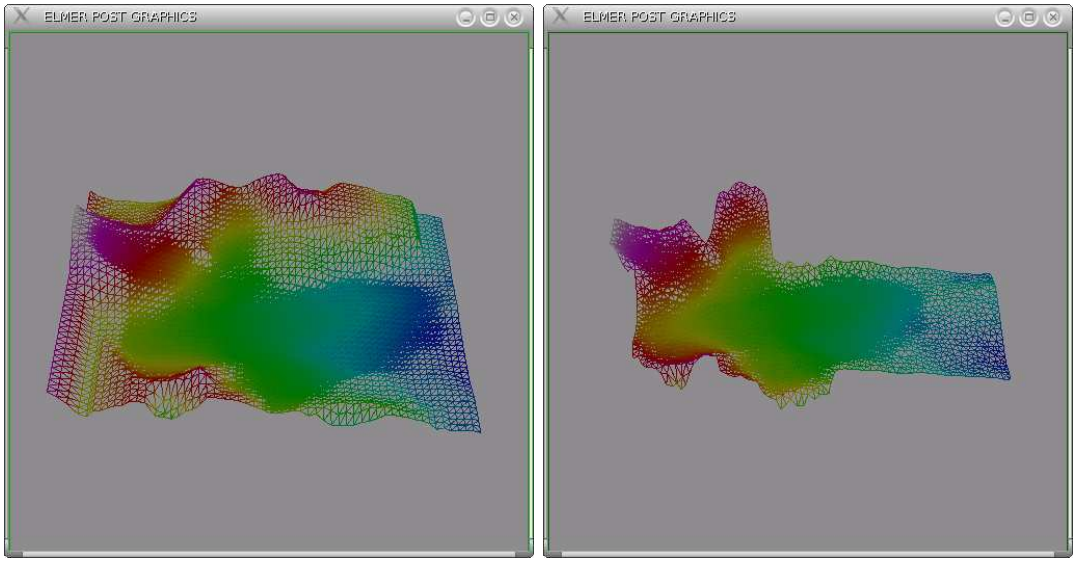



Fig. 4.3.: Deux types de maillages différents pour le glacier de Saint Sorlin, maillage rectangulaire et maillage de contour.
`Two types of grids for the Saint Sorlin glacier.`

### 4.1.2. Bilan de masse

Dans un premier temps, le champ de bilan a été tourné de façon similaire aux données topographiques. Le fichier initial représente le bilan de masse issu des mesures extrapolés sur une zone bien plus large que le glacier. Le problème des points sans valeurs ne se présente alors pas. Par contre, les valeurs à l'extérieur du glacier ne présentent aucun intérêt physique car elles sont interpolées sans tenir compte du relief et de l'altitude ou encore des précipitations.
Il a fallu alors trouver la région de la grille où le bilan a un intérêt physique. Au passage la définition de cette région physique remplace le critère de pente introduit dans la Partie IV.3 qui lui aussi sert au traitement d'un bilan non-physique.
Pour cela, une orthophoto du glacier et la grille ont été superposées. Sur l'orthophoto la zone du glacier limitée par la rimaye a été dessinée et rapportée sur la grille. Cette zone a été par endroit corrigée pour inclure l'ensemble des points ayant une grande épaisseur (la surface de 1998 est prise comme référence). Globalement la zone où l'on souhaite appliquer le bilan a été définie comme la zone à l'intérieur de la rimaye et des points proches à l'extérieur avec une épaisseur de glace importante. Dans les zones très inférieures du glacier, on s'est contenté dans un premier temps de prendre le contour du glacier de 1905 comme limite maximale.
Pour tous les points à l'intérieur de cette zone le bilan est conservé, pour les autres il est mis à -10 m d'eau par an. En principe 0 m d'eau par an auraient du suffire, mais cela a produit quelques instabilités numériques. Le champ de bilan final est présenté sur la Figure 4.4.

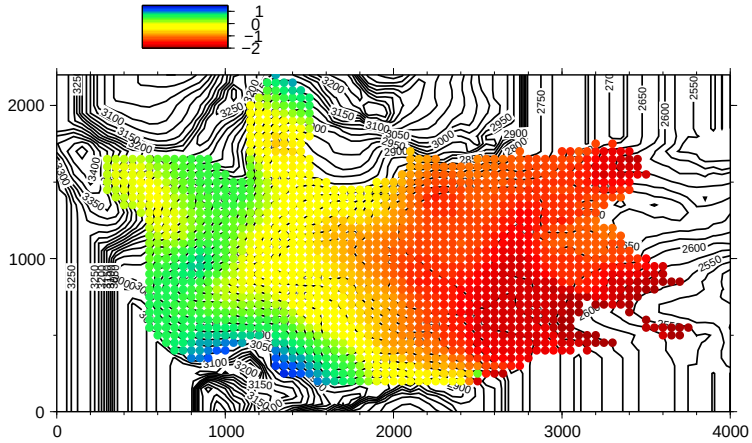



FIG. 4.4.: Champ de bilan pour le glacier de Saint Sorlin (en m w.e. par an). Le bilan est mis à -10 m w.e. par an hors de la zone colorée (points invisibles sur la figure), système de coordonnés de travail.
`The Saint Sorlin mass balance field (m w.e. per year). The mass balance is set to -10 m w.e per year out of the coloured area (invisible points on the figure), new coordinate system.`

### 4.1.3. Mise en place d'une méthode d'un calcul de la position du front

Plusieurs problèmes ont été rencontrés lors de l'étude de la position du front.
Le premier est plutôt d'ordre technique, c'est-à-dire que la position du front n'est pas définie comme le point le plus bas, mais comme la position moyenne des points du front. En pratique, on définit le front comme le rapport entre la surface en aval d'une ligne transversale fictive (dite "ligne de base") et la longueur de cette ligne (Fig. 4.5).

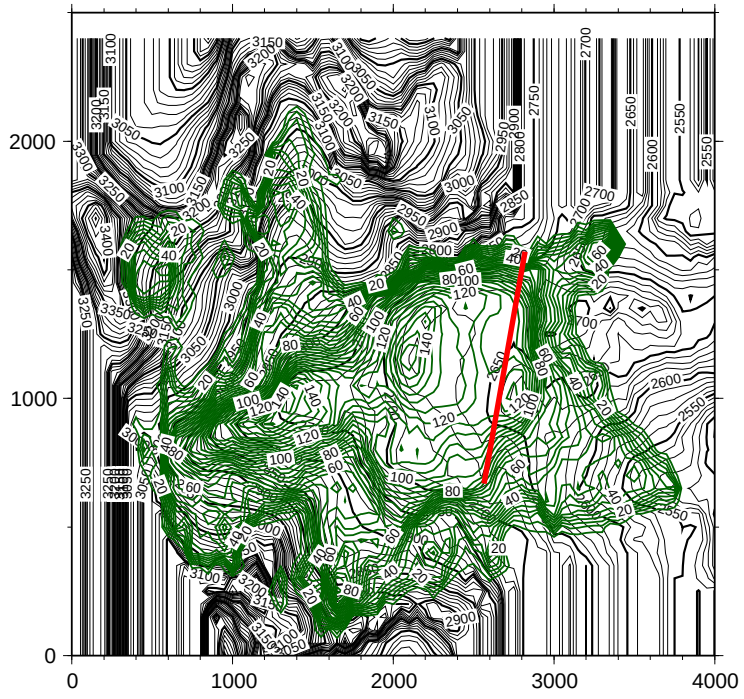



FIG. 4.5.: La ligne rouge représente la coupe transversale pour le calcul du front (dite "ligne de base") superposée à l'épaisseur de glace de 1905 en vert (système de coordonnés de travail).
`The red line is the transversal profile for the calculation of the snout position, the ice-thickness from 1905 is also presented in green (new coordinate system).`

Depuis les années 90, le glacier a tellement reculé que la ligne de base servant au calcul du front ne semble plus très adaptée. Le front devient négatif, car le glacier recule trop et dépasse la ligne de base. Numériquement, il devient difficile de calculer cette petite surface, voire même des surfaces négatives.
Dans un premier temps la position du front a été déterminée relativement grossièrement.

Les surfaces négatives ont été négligées. La position du front reste alors par définition supérieure ou égale à zéro. La surface a été calculée sur la grille de 50 m sans essayer de raffiner le calcul de surface ce qui semble pourtant nécessaire, surtout pour des surfaces aussi petites. Ceci explique l'écart entre les données et les sorties de modèle en 1905.
De plus, la position du front est très sensible aux paramètres comme le critère sur la zone où on applique le bilan de masse, le paramètre de Glen mais aussi le glissement (frottement). La dépendance au glissement est illustré sur la Figure 4.6 pour le modèle M SIA avec cette estimation grossière de la position du front. Avec plus de glissement, on trouve naturellement un glacier plus avancé. Les valeurs nulles à partir des années 80 s'expliquent par le fait que les surfaces négatives ne sont pas prises en compte ici.

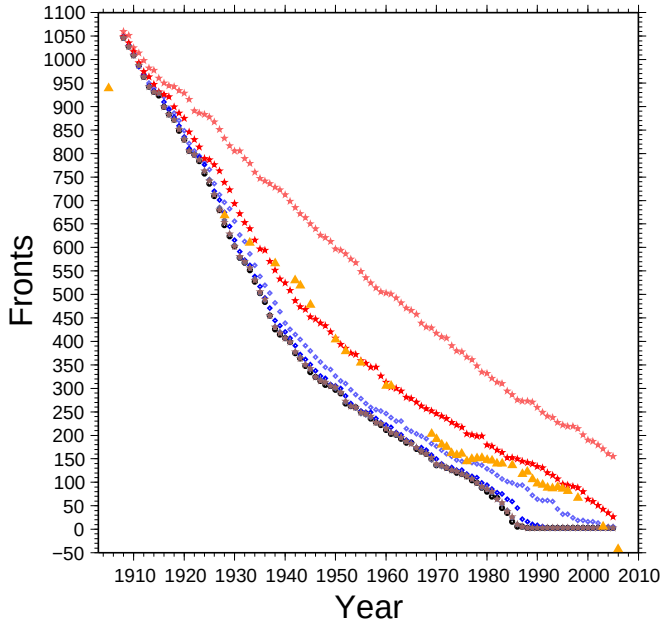



FIG. 4.6.: Dépendance de la position du front de Saint Sorlin au paramètrage du glissement basal. En jaune les mesures. En rouge différents coefficients de glissement pour une loi linéaire, en bleu pour une loi non-linéaire, en noir sans glissement du tout. Il s'agit d'un calcul un peu grossier dans l'analyse des sorties des modèles ce qui explique l'écart en 1905 entre les données et les sorties de modèle ainsi que les valeurs zéro pour le front dans les années 80.
`Dependence of the snout position of Saint Sorlin on the basal sliding parametrization. In Yellow the measurements. In red different sliding coefficients for a linear law, in blue for a non-linear law. The interpretation of the model output is very rough, that is the reason for the discrepancy in the beginning (1905) and the zero values from 1980 onward.`

Un autre problème a été rencontré :
Il n'a pas été possible de faire cette inter-comparaison en partant de la surface de 1905 à cause d'erreurs dans les données de la surface de 1905 ou dans celles du socle rocheux (ou les deux) au niveau de la grande pente sous l'Etendard. En fait, avec les données de la surface de 1905 et celles du socle, on observe des trous dans le glacier et la pente sous l'Etendard n'est pas englacée. La pente était sûrement en glace à cette époque (voir Figure 4.5 et plus loin les simulations avec la surface de 1905). Il est très probable que le manque de glace sur cette pente a une influence sur l'évolution du glacier dans le temps et introduit des erreurs importantes.
Les données de la surface topographique de 1971 ne sont pas pour l'instant prêtes pour être utilisées dans un modèle.
Avec la surface de 1998, un troisième problème a été rencontré (problème déjà observé pour le calcul du front de 1998). En effet, sans même faire appel à un modèle, le calcul de la position du front à partir de la carte des épaisseurs de 1998 donne 150 m au lieu de 70 m obtenus directement des mesures sur le terrain. L'épaisseur de glace calculée déduite des données discrétisées de la surface topographique et de celles du socle rocheux ne coïncide pas avec le contour mesuré du glacier (Figure 4.7).

L'explication a été trouvée dans la manière dont les données du socle rocheux ont été compilées et discrétisés :
En aval de la zone englacée, le socle rocheux est mesuré par photogrammétrie (données de 2003). Sous la glace, le socle rocheux est connu à l'aide d'une carte digitalisée qui est elle-même une compilation de plusieurs méthodes de mesures (les lignes d'iso-altitude sont présentées en jaune sur la Figure 4.8). Sur la même figure, la compilation de ces deux types de données (les données photogrammétriques ne sont pas présentées) avec un raccord au milieu est présentée (en noir). On observe un désaccord pour la zone du front de l'année 1998 (le contour du glacier est repris en rose) certainement dû à ce raccord, mais aussi à la différence de précision entre le socle obtenu par photogrammétrie et les mesures ponctuelles en quelques points avec les différentes méthodes pour la partie couverte par le glacier.

Pour l'instant, il n'est pas possible d'améliorer ou de résoudre ce problème. D'autres mesures seraient nécessaires pour préciser le socle dans cette zone.

La stratégie qui a été adoptée pour l'instant est la suivante :
La méconnaissance de l'épaisseur dans cette zone va affecter non seulement la valeur de 1998 mais aussi celles des années suivantes car la détermination du front est très sensible à l'épaisseur de glace. On a fait l'hypothèse que le biais introduit est le même pour toutes les années. La position du front de 1998 est ramenée à zéro pour les données, mais aussi pour l'analyse des sorties de modèles et seul le changement par rapport à 1998 est étudié. De plus, la ligne de base a été décalée de 300 m vers l'amont (dans le système de coordonnées de travail) pour éviter de travailler avec des surfaces trop petites ou négatives. Pour les sorties de modèles, un seuil d'un minimum de 2.5 m est introduit pour identifier les points en glace ou sans glace.
L'évolution de la position du front peut alors être comparée entre les différents modèles.

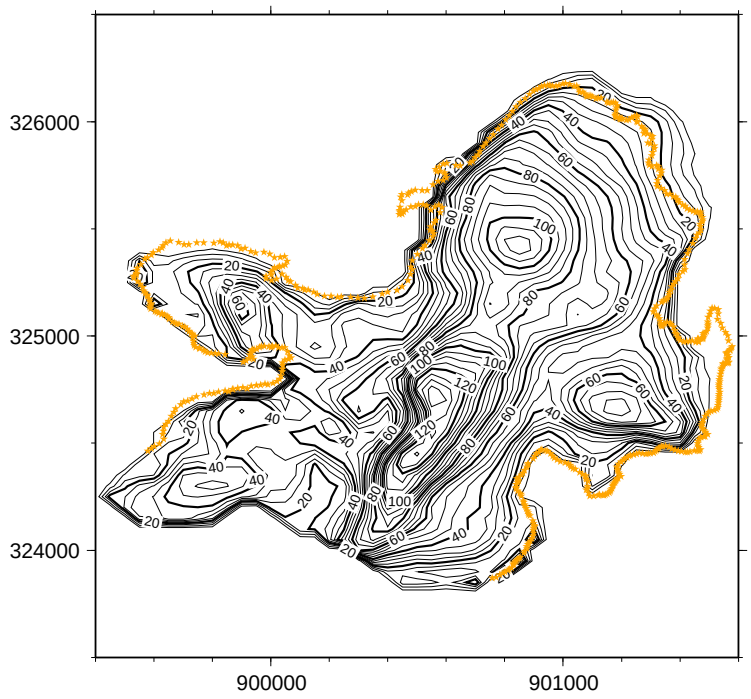



FIG. 4.7.: Epaisseur de glace de 1998 issue des données discrétisées (noir) et contour du glacier en 1998 (mesures, jaune), coordonnés Lambert.
`Ice-thickness in 1998 from the descretized data (black) and the glacier outline (measurements, yellow), Lambert coordinate system.`

La comparaison avec la réalité doit cependant être faite avec certaines précautions.

### 4.1.4. Paramètres rhéologiques et de glissement

Comme l'objectif principal de ce travail n'a pas été de reproduire la réalité mais de comparer les modèles entre eux, il n'y a pas eu beaucoup d'effort pour ajuster au mieux ces paramètres.
Pour le paramètre de la loi de Glen, une valeur de référence (Vincent et al., 2000) a été adoptée : $A = 1.3 \times 10^{-24}\,\mathrm{Pa}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$.
Pour le paramètre de glissement, une petite étude a néanmoins été nécessaire car une loi de glissement linéaire n'avait jamais été utilisée sur ce glacier auparavant. Par simplicité, cela a été fait avec le modèle M SIA, de façon similaire à la démarche adoptée par Le Meur et Vincent (2003). L'idée d'essayer de reproduire les épaisseurs en quelques points

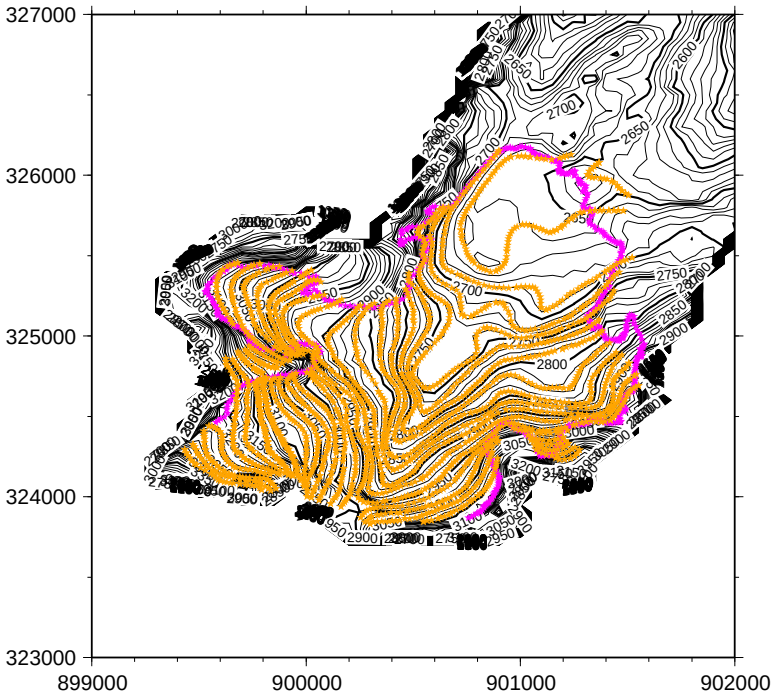



FIG. 4.8.: Données pour le socle rocheux de Saint Sorlin. En jaune les lignes d'iso-altitude d'une carte digitalisée, en noir la compilation et discrétisation de toutes les données. En rose le contour du glacier en 1998 (coordonnées Lambert).
`Data for the Saint Sorlin bedrock. In yellow the iso-altitude lines from a digitalised map, in black the compilation and discretization of all data. In pink the glacier outline in 1998 (Lambert coordinate system).`

au cours de la période 1905 - 2005 a été abandonnée. Il est apparu que l'épaisseur en certains points était tellement sensible à d'autres paramètres, comme le critère de la pente (Partie IV), qu'il n'était pas possible d'utiliser cela pour la discrimination d'un paramètre.
Il a alors été choisi de s'appuyer sur la position du front (évolution pendant la période de 1905 à 2005). La première approche avec un calcul un peu grossier décrit ci-dessus a été utilisée. Un résultat satisfaisant (Figure 4.9) est obtenu pour $A_s = 4 \times 10^{-5}\,\mathrm{m\,Pa^{-1}\,a^{-1}}$.
Une meilleure méthode, mais plus coûteuse consisterait à contraindre les deux paramètres (paramètre de la loi de Glen et de la loi de glissement) à l'aide des vitesses de surface et de la position du front avec le modèle ELMER et aussi d'utiliser l'algorithme de calcul amélioré présenté ci-dessus avec une ligne de base décalée.

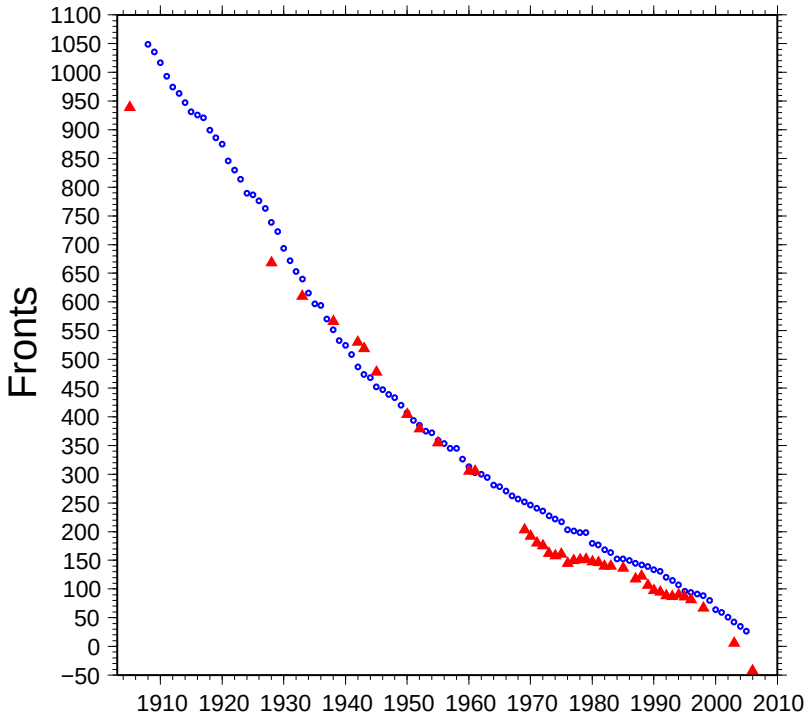



FIG. 4.9.: Positions du front du glacier de Saint Sorlin : les triangles rouges représentent les mesures, les points bleus la simulation avec le modèle M SIA.
`Snout position of Saint Sorlin Glacier : the red triangles represent measurements, the blue points the simulation with the` M SIA `model.`

## 4.2. Comparaison des modèles

Plusieurs simulations ont été choisies pour comparer et pour étudier les influences relatives de l'effet de la déformation de la glace, du bilan de masse et du glissement :
- le champ de vitesse diagnostique sans et avec glissement pour la surface de 1998,
- le champ de vitesse diagnostique sans glissement pour la surface de 1905,
- 15 années de simulations en partant de la surface de 1998 sans bilan de masse, avec et sans glissement,
- 20 années de simulations en partant de la surface de 1998 avec le bilan moyen des 50 dernières années avec et sans glissement,
- 7 ans de simulation "réaliste" en partant de la surface de 1998 (avec et sans glissement).

Malheureusement le modèle F HO n'a pas convergé sur ce glacier. Même le calcul du champ de vitesse diagnostique n'a pas été possible. La comparaison s'est alors limitée aux trois autres modèles. Ce problème est probablement lié à la grande partie de la grille sans glace. Cette non-convergence n'est vraisemblablement pas liée au fait de travailler avec une grille simple car le modèle ne converge pas dès le premier calcul des vitesses.
Par simplicité, quelques simulations ont été faites uniquement avec l'un des deux modèles SIA car un très bon accord a été trouvé entre les deux.

### 4.2.1. Détails sur les modèles

#### Modèles SIA

Un pas de grille de 50 m et un pas de temps de 0.1 an ont été utilisés. Toutes les simulations ont été effectuées sur le PC-185.

#### Modèle Elmer

Les différents maillages utilisés ont été décrits ci-dessus. Un pas de temps d'un an est utilisé. Quelques tentatives de calcul parallèle ont été réalisées, mais sur cette application cela consommait quasiment le même temps par processeur que pour un calcul non-parallèle. Ceci est probablement dû à un mauvais choix des nœuds partagés entre les processeurs et nécessitera un travail approfondi sur la répartition du maillage entre les processeurs.
Il a été assez délicat de trouver les paramètres de convergence adéquats pour le système linéaire du *Solver* de Navier-Stokes. Finalement, un maillage avec des éléments de type prisme (30 couches verticales) et les paramètres donnés dans le Tableau 4.1 pour le *Solver* de Navier-Stokes ont permis de résoudre ce problème.
Les conditions initiales pour la vitesse et la pression ont été choisies à zéro car en partant des vitesses et de la pression SIA la convergence n'a jamais été atteinte. Quant aux conditions aux bords inférieurs, sur le socle rocheux, soit une vitesse nulle soit une loi de frottement a été imposée. Pour la surface supérieure, considérée comme une surface libre, et sur les bords latéraux du maillage une vitesse normale à la surface nulle a été prescrite.

| Navier-Stokes, système linéaire | |
|---|---|
| type | itérative |
| nb. d'itérations maximal | 1500 |
| méthode pour résolution itérative | BiCGStab |
| préconditionnement | ILU0 |
| tolérance de convergence $\epsilon_L$ | $10^{-5}$ |
| méthode de stabilisation | stabilisé |
| **Navier-Stokes, système non-linéaire** | |
| nb. d'itérations maximal | 100 |
| tolérance de convergence $\epsilon_{NL}$ | $10^{-4}$ |
| nb. d'itérations maximal de type Picard | 3 |
| tolérance de convergence Picard $\epsilon_{NLP}$ | $10^{-2}$ |
| facteur de relaxation | 1.0 |
| **Système couplé** | |
| tolérance de convergence $\epsilon_C$ | $10^{-4}$ |

TAB. 4.1.: Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.`

Le même problème qu'avec le glacier de vallée est apparu ; des instabilités lors la résolution de l'équation de transport dans les grandes zones sans glace, avec vitesses nulles ainsi qu'avec un bilan de masse nul apparaissent et amènent à des accumulations de glace dans ces zones. Plusieurs tentatives ont été entreprises, en vain (décrites ci-dessous). Le problème n'apparaît pas dans les simulations avec bilan. Dans les simulations sans bilan, le maillage a été choisi suffisamment grand pour que ces accumulations irréalistes ne touchent pas le glacier.

**Tentatives de résolution des instabilités :**
Dans un premier temps une condition Dirichlet explicite a été introduite dans le *Mesh-Update Solver*. Dans les zones avec bilan nul, avec quasiment pas de glace et de très faibles vitesses (donc dans les grandes zones sans glace) la nouvelle surface était imposée comme égale à la surface initiale. Cette condition n'était apparemment pas correctement prise en compte.
La deuxième idée a consisté à imposer un bilan virtuel négatif dans toute cette zone. Aucun critère pour définir cette zone n'a pu être établi. En effet, soit les accumulations irréalistes grandissent quand même, soit le glacier ne peut progresser librement.
Aucune de ces deux idées n'a donné un résultat satisfaisant.

### 4.2.2. Simulations comparatives

#### Simulation diagnostique de la surface de 1998

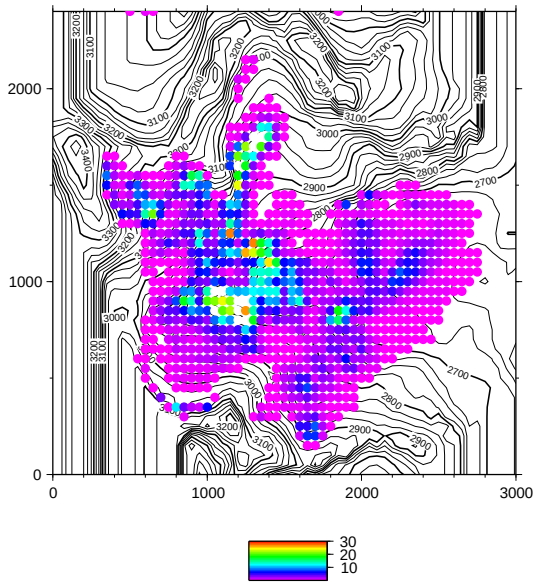
Sur la Figure 4.10, le champ de vitesse diagnostique (valeur absolue) pour les différents modèles est proposé, à savoir les deux modèles SIA et ELMER avec les deux maillages différents.
Le temps de calcul est d'environ 0.3 s pour les modèles SIA sur le PC185, et respectivement de 3 942 s (environ une heure) et 17 622 s (presque 5 heures) pour le maillage rectangulaire et le maillage de contour avec ELMER sur SEPELI. L'augmentation du temps de calcul avec le maillage de contour est assez surprenant, mais s'explique par une moins bonne convergence du système linéaire pour résoudre l'équation de Navier-Stokes.
Un bon accord est obtenu entre les deux modèles SIA ainsi que pour les deux maillages avec ELMER. On observe à peu près la même structure entre les deux groupes de modèles, mais on observe à première vue un facteur 10 pour les valeurs (valeurs maximales). La distribution n'est pas très lisse pour les modèles SIA, ceci est certainement dû à la structure de la pente en surface qui possède un peu les même irrégularités (Figure 4.11).
Le profil en profondeur (normalisé à la vitesse d'ELMER en surface) est présenté sur la Figure 4.28 (page 273) au point $(x, y) = (1000, 1000)$. A ce point précis, un facteur 2.2 est obtenu entre les deux types de modèles.

Avec glissement, la convergence avec ELMER est plus difficile à obtenir. Le temps de calcul pour la SIA ne change pas, celui pour ELMER augmente à environ 5 heures (17 159 s, maillage rectangulaire). Une fois de plus, la zone hors glace à côté du glacier pose problème. La seule solution trouvée pour le moment est d'imposer un frottement beaucoup plus élevé que sous le glacier. Le champ de vitesse obtenu est présenté sur la Figure 4.12 ainsi que le profil sur la Figure 4.28 (page 273).
Avec ELMER les vitesses sont un peu plus de deux fois plus élevées que sans glissement. La structure reste la même. Avec la SIA, il est plus difficile de quantifier l'effet du glissement sur les vitesses de surface, car les distributions de vitesses en surface sont chaotiques et le glissement joue un rôle moins important (vitesses de déformation plus élevées). Sur le profil (Figure 4.28, page 273) le rapport entre les deux modèles diminue à 1.7. Ainsi, l'accord entre la SIA et ELMER devient meilleur.

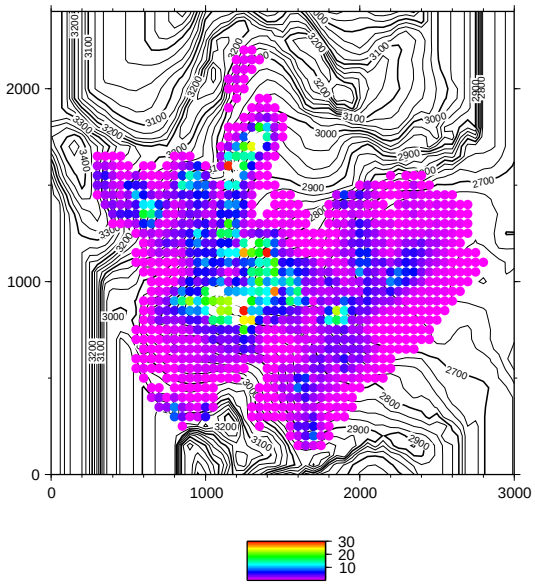
#### Simulation diagnostique de la surface de 1905

Les même courbes sont présentées sur les Figures 4.13 et 4.28 (page 273) pour la surface de 1905. A cause du bon accord pour la surface de 1998 et le temps du calcul beaucoup plus élevé, le deuxième maillage pour ELMER n'a pas été utilisé.
La différence entre les modèles SIA et le modèle ELMER est du même ordre de grandeur que pour la surface de 1998, elle diminue même un peu (on observe un facteur 1.6 sur le profil).

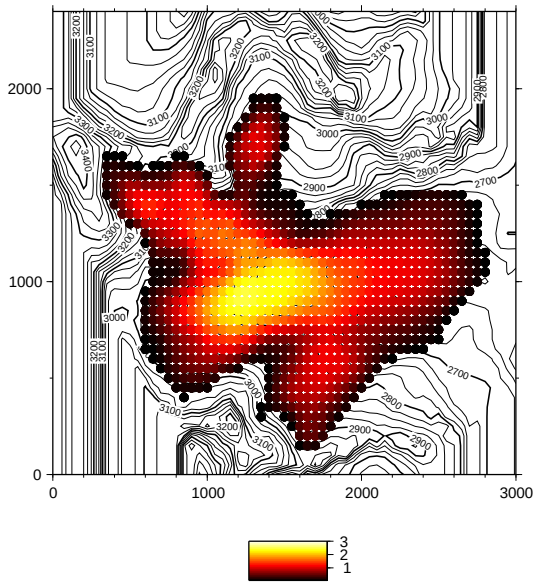
Les "trous" sous l'Etendard s'expliquent par des erreurs probables sur les données topographiques. On rencontre en effet une très faible épaisseur à cet endroit avec les données



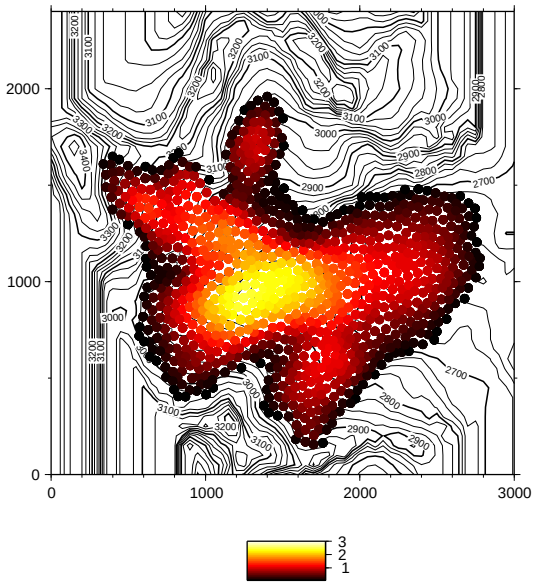

(a) M SIA




(b) F SIA




(c) Elmer, maillage rectangulaire




(d) Elmer, maillage de contour

Fig. 4.10.: Vitesses absolues diagnostiques de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (m/an).
`Diagnostic absolut velocities of the 1998 surface of the glacier of Saint Sorlin (m/yr).`

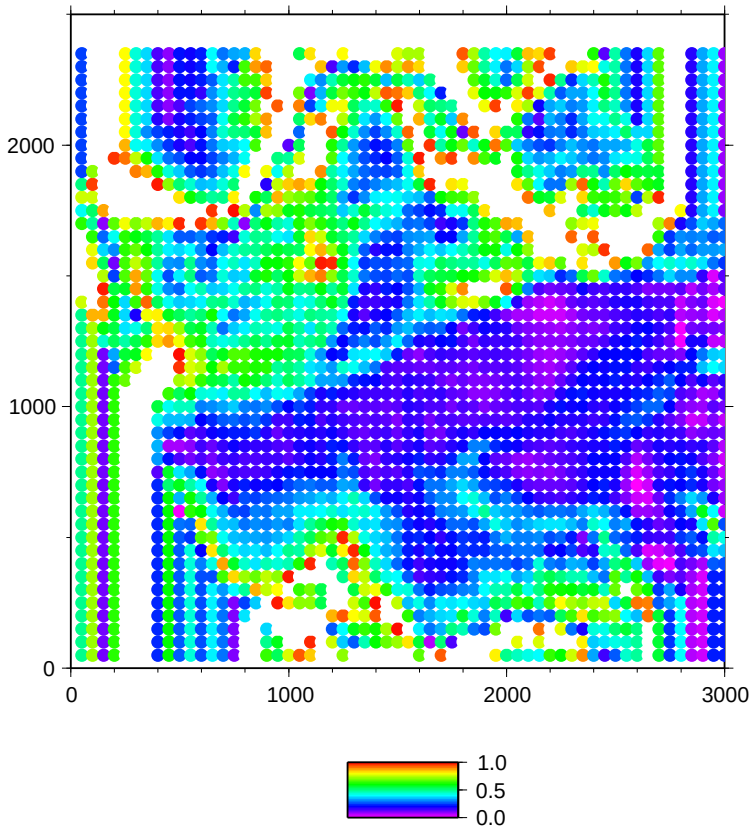
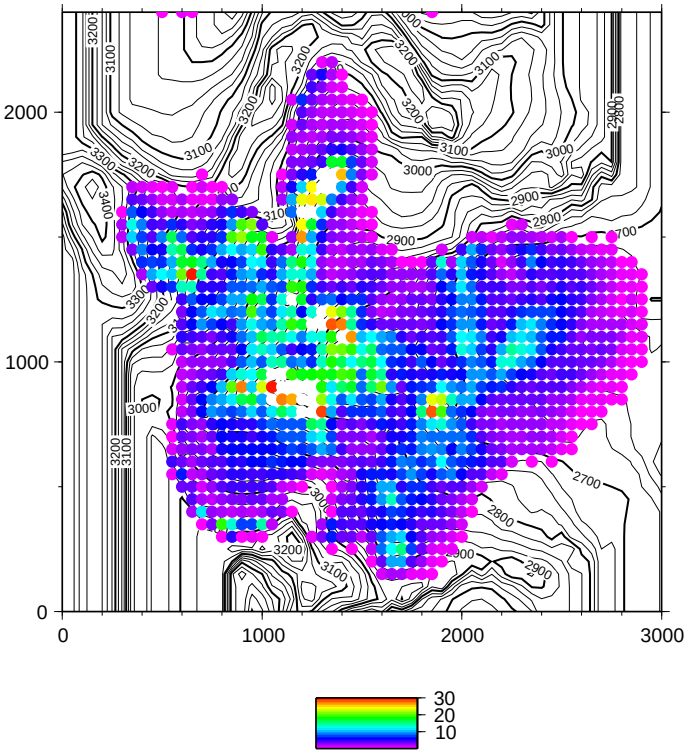
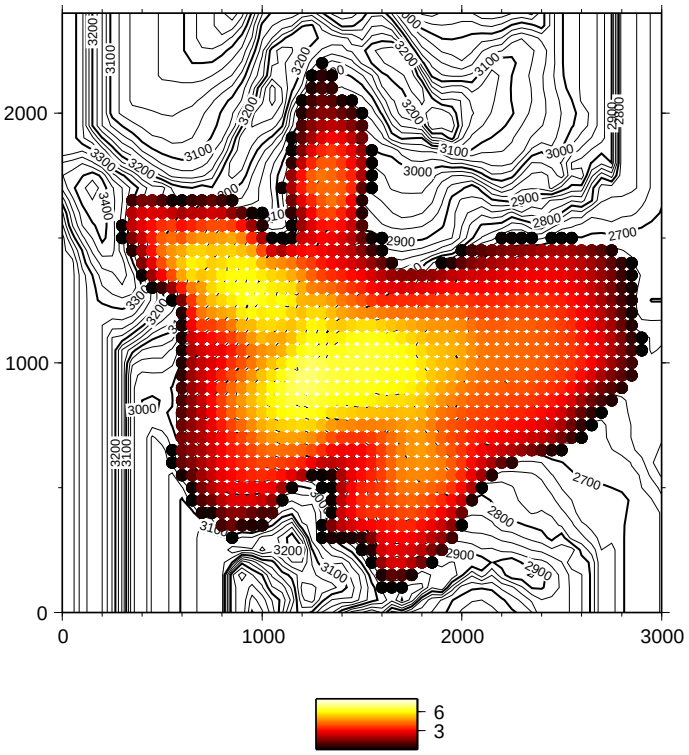



FIG. 4.11.: Pente de surface de la surface de 1998.
`Surface slope of the 1998 surface.`

de surface et du socle. Il est probable qu'au moins une des deux topographies est fausse à cet endroit car la zone était très certainement englacée à cette période.
Aucune autre simulation n'a été faite sur la surface de 1905 pour cette raison. Un travail approfondi sur la topographie serait d'abord nécessaire.
Le temps de calcul est de l'ordre de 0.2 s pour les modèles SIA, donc du même ordre que pour la surface de 1998, et pour ELMER avec le maillage rectangulaire le temps de calcul est plus élevé avec 17 159 s (environ 5 h) avec un maillage un peu plus grand mais surtout une moins bonne convergence, certainement causée par les "trous" sous l'Etendard (chaque simulation a été réalisée sur la même machine que précédemment).

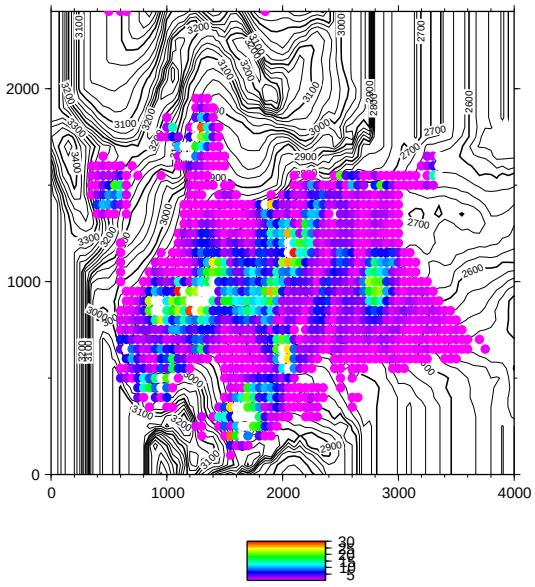



(a) M SIA

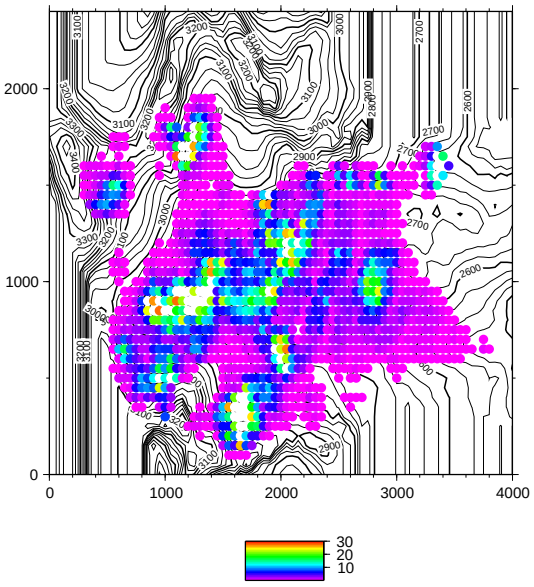



(b) Elmer, maillage rectangulaire

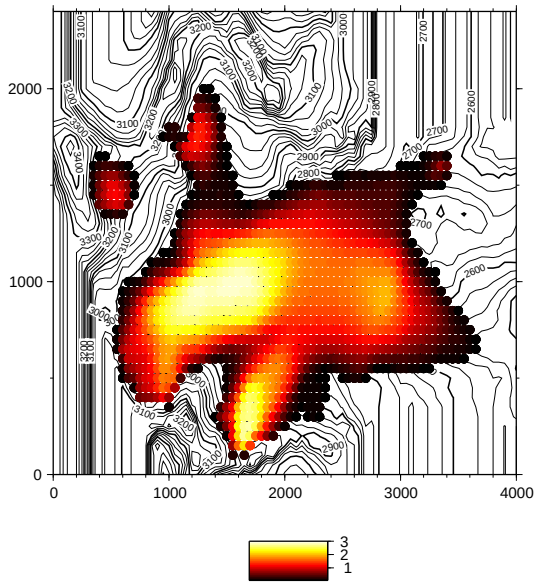
Fig. 4.12.: Valeur absolues des vitesses diagnostiques de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement (m/an).
`Absolut values of diagnostic velocities of the 1998 surface of the glacier of Saint Sorlin with sliding (m/yr).`




(a) M SIA




(b) F SIA

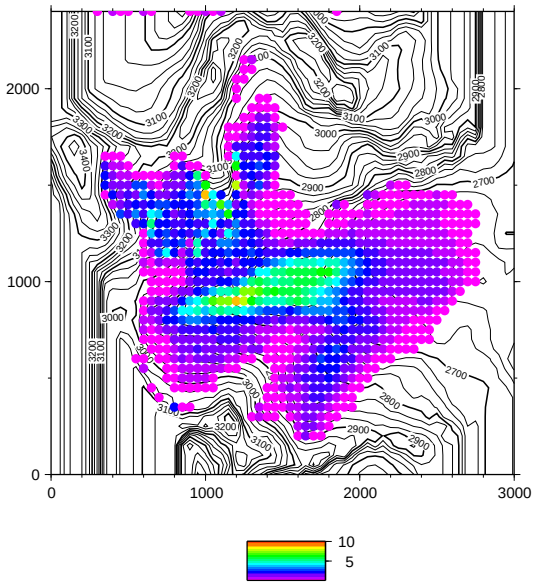



(c) Elmer, maillage rectangulaire

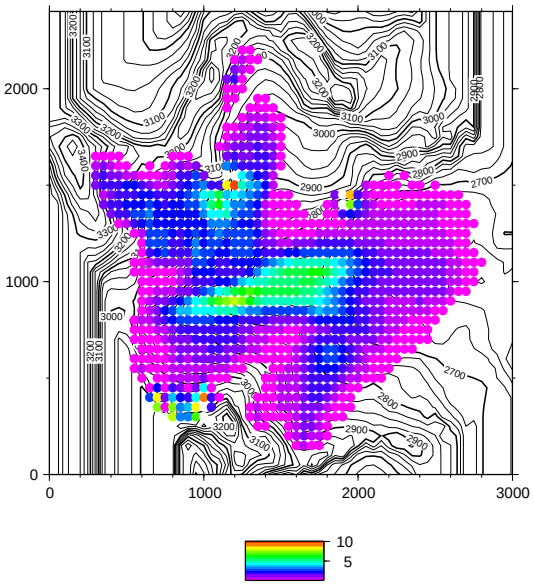
Fig. 4.13.: Valeur absolue de vitesses absolues diagnostiques de la surface de 1905 du glacier de Saint Sorlin (m/an).
`Absolut values of diagnostic velocities on the 1905 surface of the glacier of Saint Sorlin (m/yr).`

### Simulation évolutive de la surface de 1998 pendant 15 ans

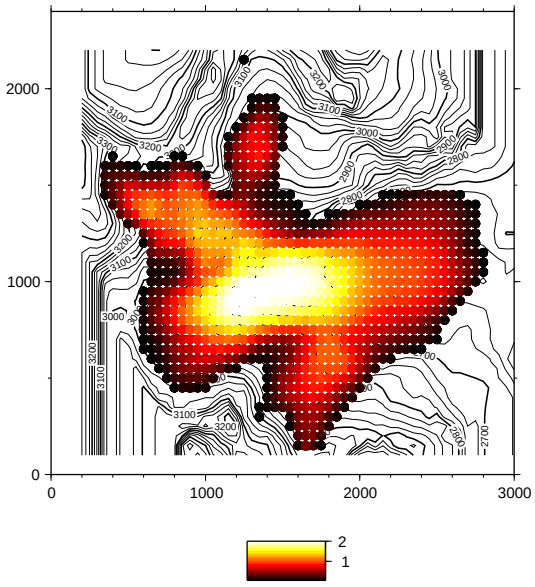
Dans un premier temps une simulation sans bilan de masse et sans glissement est effectuée. Le temps de calcul est de l'ordre de 18 s pour le modèle M SIA et le double avec F SIA sur le PC185. Pour ELMER 27 994 s (environ 7.5 heures) ont été nécessaires avec le maillage rectangulaire et environ 10 heures avec le maillage de contour sur SEPELI. Les temps de calcul relativement proches ici ne sont toujours pas classés dans un ordre logique. Néanmoins il est important de constater que le temps de calcul augmente moins avec le maillage de contour qu'avec le maillage rectangulaire par rapport à la simulation diagnostique. Une fois que les vitesses et la pression diagnostiques sont connues, le maillage plus petit conduit à une convergence plus rapide lors des itérations suivantes et le temps de calcul devient comparable ou même inférieur à celui avec le maillage rectangulaire.
Les valeurs absolues des vitesses en surface sont présentées de la même manière que dans les cas précédents sur la Figure 4.14 et en profil sur la Figure 4.28 (page 273). L'accord entre la SIA et ELMER est un peu meilleur (on observe seulement un facteur 1.5 sur le profil), globalement les vitesses diminuent, surtout pour la SIA. Pour la SIA on observe également une meilleure stabilisation du champ de vitesses.
Les Figures 4.15 et 4.16 décrivent la surface finale de cette simulation. Sur la première figure, l'épaisseur finale en couleur est présentée, sur la deuxième une coupe longitudinale et une coupe transversale (dont les emplacements sont représentés sur la Figure 4.15 par deux segments bleus (vertical et horizontal) respectivement d'abscisse 1300 m et 1200 m). Le problème de la résolution de l'équation de transport dans le cas d'ELMER dans les zones sans glace est bien visible. Les coupes ne sont pas montrés pour le maillage en contour car il n'est pas possible, de manière simple, de sortir les valeurs le long de la coupe qui ne coïncident pas avec les nœuds du maillage.
On observe une fois de plus un accord excellent entre les modèles SIA. En dehors de quelques zones (première coupe vers l'abscisse 1500 m ; deuxième coupe vers l'abscisse 1500 m) l'accord entre tous les modèles est assez bon. Pour une géométrie comme celle du glacier de Saint Sorlin et au moins pour une échelle de temps relativement courte, les modèles SIA semblent être valables. Les plus grands désaccords sont obtenus pour des zones avec une surface un peu changeante. Dans ces cas, la SIA déforme trop et conduit à une surface plus plate.
Avec glissement, le temps de calcul reste à peu près constant avec la SIA, avec ELMER il augmente à 39 150 s (environ 11 heures) à cause d'une convergence moins bonne.
Pour les vitesses (Fig. 4.17) on peut faire les mêmes observations que pour le calcul diagnostique : les vitesses augmentent, mais beaucoup moins avec la SIA qui est alors plus proche d'ELMER. Le profil vertical n'est pas présenté pour cette simulation. Quant aux coupes longitudinale et transversale (Fig. 4.18), la surface finale obtenue par la SIA est quasiment la même que sans glissement. Avec ELMER la surface finale de la simulation évolutive sans glissement est quasiment identique à la surface initiale, avec glissement on observe de légères déformations surtout dans les régions où la SIA s'écarte beaucoup de la surface initiale (ex. vers l'abscisse 1500 m sur la première coupe et vers l'abscisse 1500 m sur la deuxième). Une fois de plus, l'accord entre les deux modèles devient meilleur.



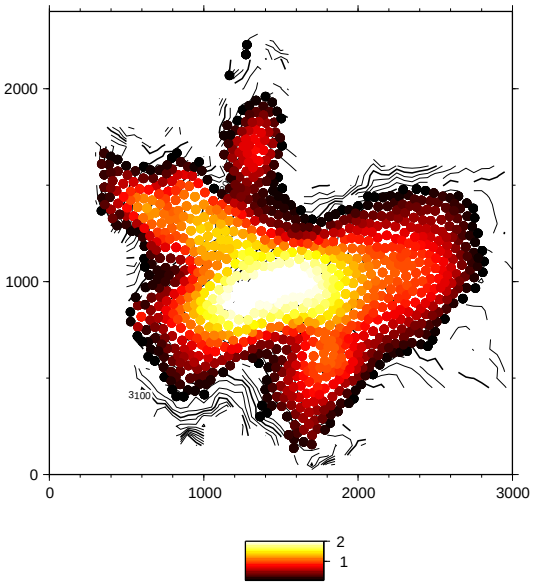

(a) M SIA




(b) F SIA

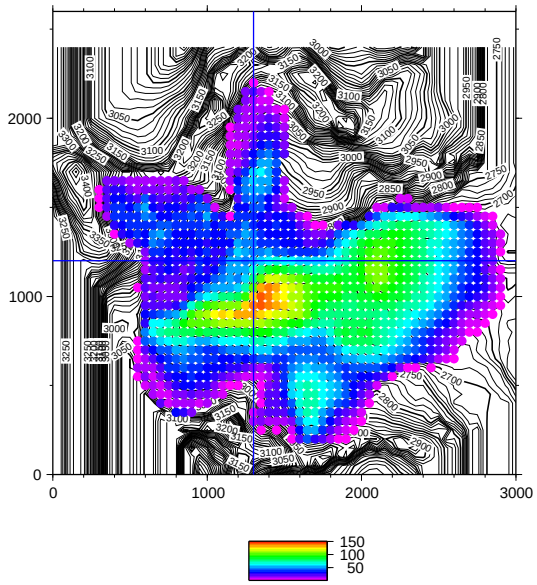



(c) Elmer, maillage rectangulaire

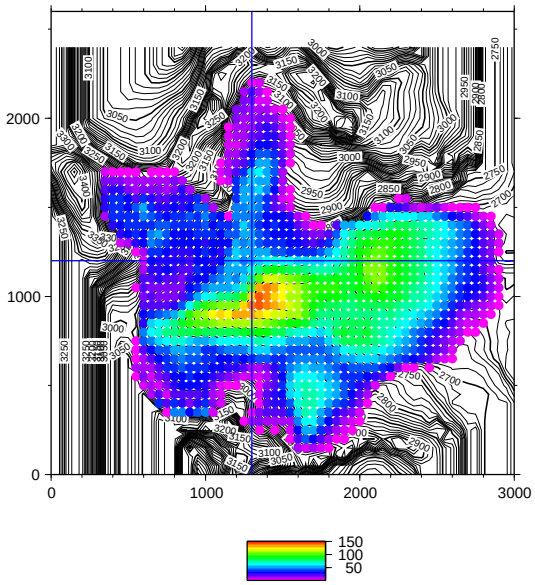



(d) Elmer, maillage de contour

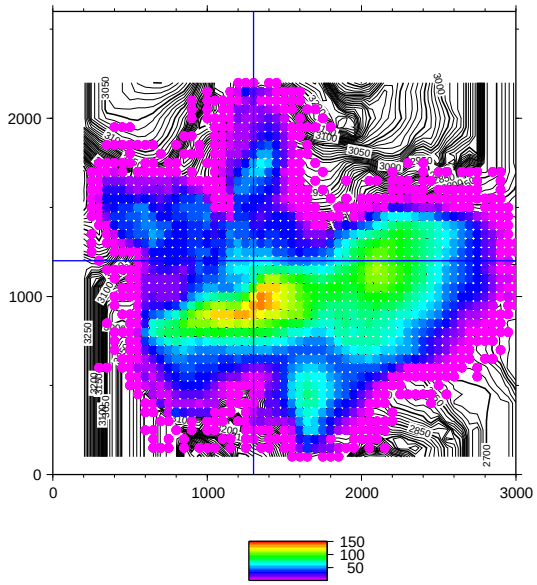
Fig. 4.14.: Valeur absolue des vitesses (m/an) au cours d'une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan ni glissement).
`Absolut values of velocities (m/yr) for a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and no sliding).`



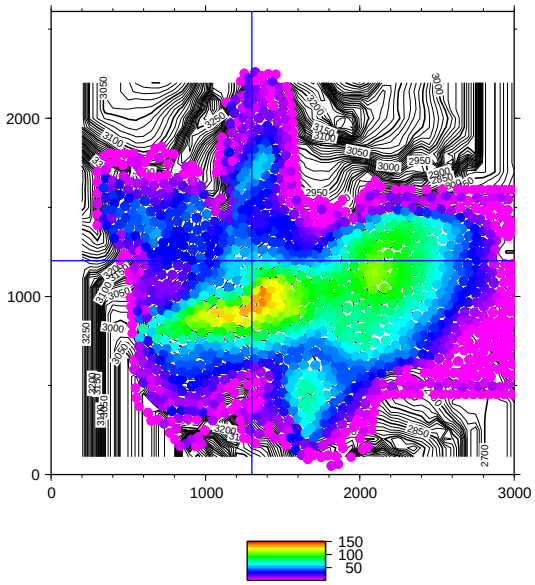

(a) M SIA




(b) F SIA




(c) Elmer, maillage rectangulaire




(d) Elmer, maillage de contour

Fig. 4.15.: Épaisseur de glace finale (m) après une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan ni glissement).
`Final ice-thickness (m) after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and no sliding).`

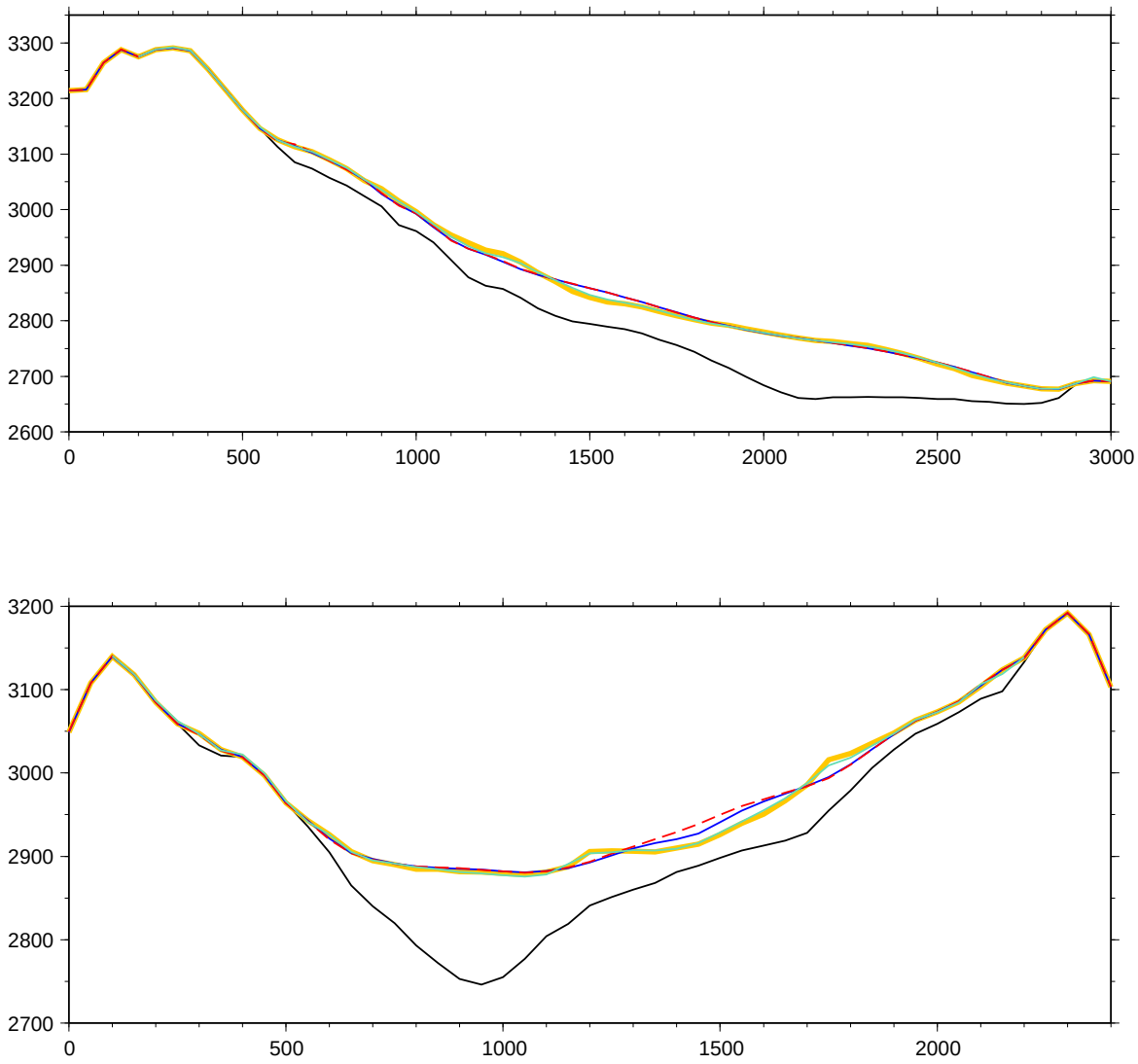
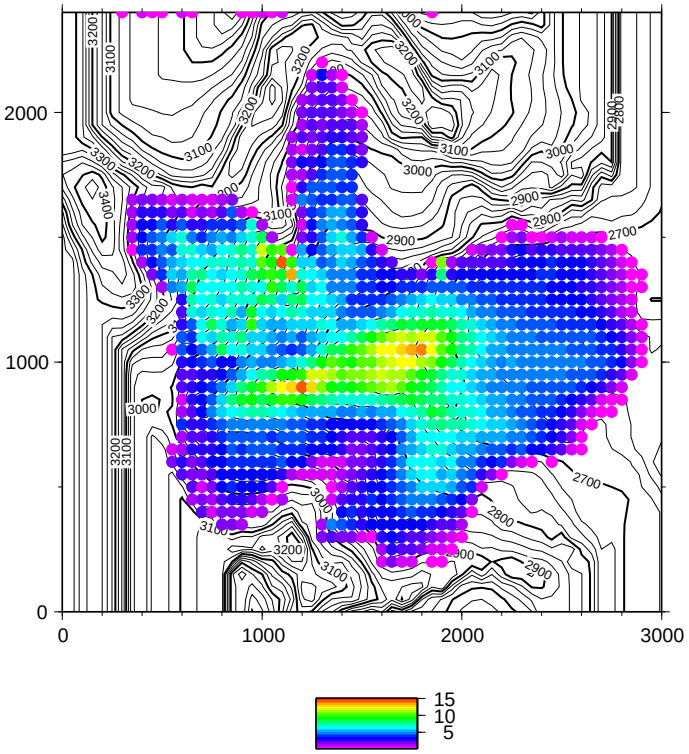
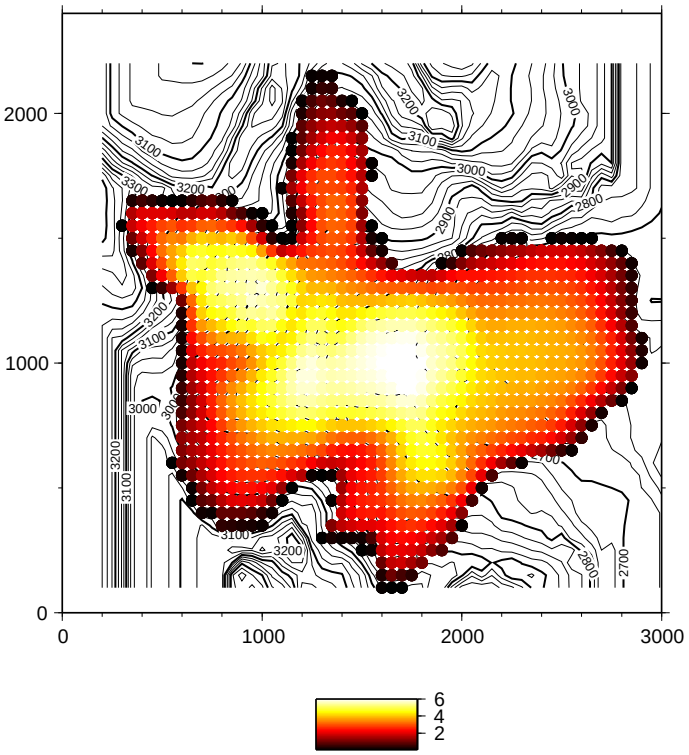



FIG. 4.16.: Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan de masse ni glissement). Jaune : surface initiale, rouge et bleu : modèles SIA, vert : ELMER.

`Longitudinal and transveral cross sections after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier (with zero mass balance and no sliding). Yellow : initial surface, red and blue :` SIA, `green :` ELMER.




(a) M SIA




(b) Elmer, maillage rectangulaire

Fig. 4.17.: Valeur absolue des vitesses (m/an) au cours d'une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement (bilan de masse nul).

`Absolut values of velocities (m/yr) for a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and with sliding.`

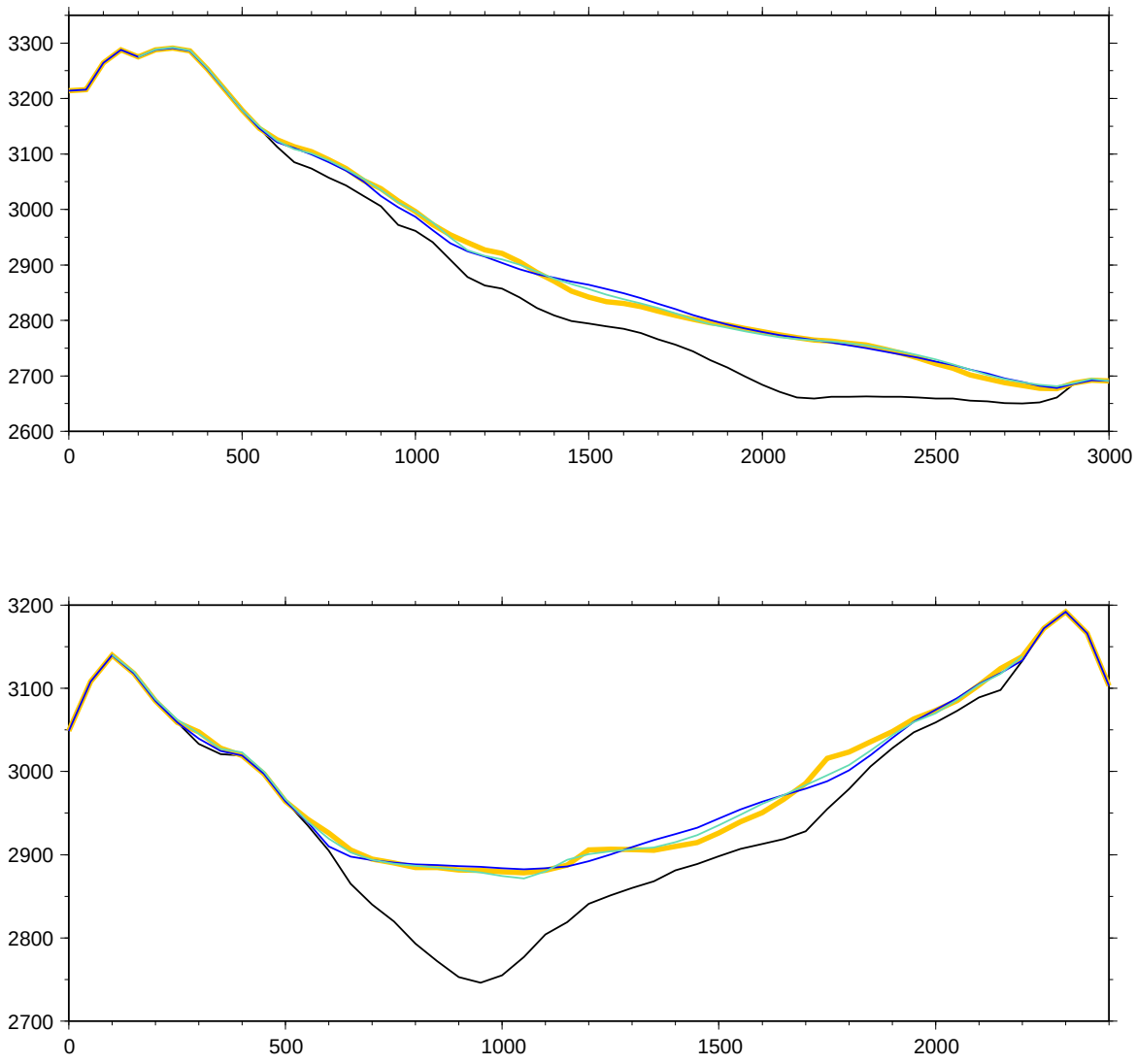


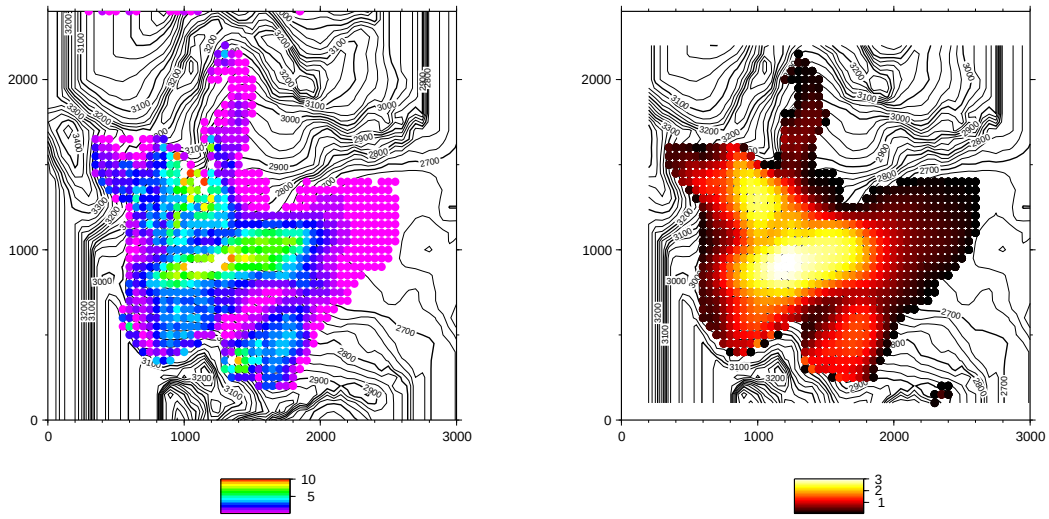

FIG. 4.18.: Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement. Jaune : surface initiale, bleu : modèle SIA, vert : ELMER.
`Longitudinal and transversal cross section after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with sliding. Yellow : the initial surface, blue :` SIA, `green :` ELMER.

### Simulation en partant de la surface de 1998 pendant 20 ans avec le bilan moyen des 50 dernières années

Pour cette simulation 18 s ont été nécessaires avec la SIA sur le PC185 et 111 708 s (31 h) pour ELMER sur SEPELI. Les même courbes que pour la simulation évolutive de 15 ans sont présentées sur les Figures 4.19, 4.28 (page 273), 4.20 et 4.21.

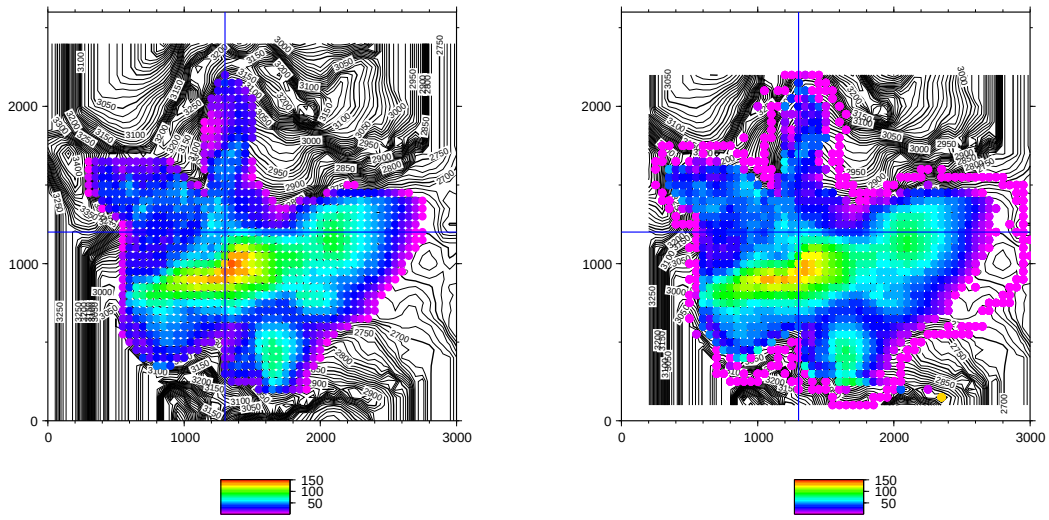
Le champ de vitesses SIA devient moins chaotique que le champ initial, comme pour la simulation sans bilan de masse. Les vitesses diminuent pour les deux modèles, davantage pour la SIA, d'où un accord relativement bon (sur le profil on observe un facteur 1.5 entre les deux modèles). Ce facteur est comparable à celui de la simulation sans bilan de masse, par contre lorsqu'on rajoute le bilan de masse, la distribution des vitesses de surface change, les vitesses sous l'Etendard sont notamment plus fortes. De plus, l'épaisseur finale de glace varie surtout dans la zone proche du front. Avec ce bilan de masse le glacier perd de la masse et recule davantage que lorsque seul son écoulement est pris en considération. De nouveau la distribution de l'épaisseur est relativement bien représentée avec la SIA, mais le glacier ne perd pas assez de glace dans sa partie inférieure (trop d'écoulement de la partie haute qui compense les pertes dues au bilan). Sur les coupes, on peut également faire les mêmes observations que pour la simulation sans bilan. A part quelques zones bien définies avec plus de relief il y a un bon accord, même si la surface finale avec ELMER s'est éloignée cette fois-ci significativement de la surface initiale ! D'ailleurs on n'observe pas partout les même tendances. Par exemple, vers l'abscisse300 m sur la deuxième coupe, l'épaisseur augmente avec la SIA et diminue avec ELMER. Le bilan amplifie alors par endroit l'écart entre le SIA et ELMER. On observe sur ces coupes également quelques instabilités avec ELMER, certainement dues à une taille de maille trop grande.

Avec glissement, le temps de calcul diminue cette fois-ci (95 980 s ou 26 h à la place de 31 h sans glissement). Toutes les remarques faites pour la simulation sans glissement restent valables (Figures 4.22, 4.23). Comme pour les autres simulations le glissement a tendance à atténuer l'écart entre la SIA et ELMER, car l'augmentation relative des vitesses est moins importante pour la SIA qui surestime de beaucoup les vitesses sans glissement.




(a) M SIA (b) Elmer, maillage rectangulaire

Fig. 4.19.: Valeurs absolues des Vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (sans glissement).
`Absolut values of velocities (m/yr) after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance of the last 50 years (without sliding).`




(a) M SIA (b) Elmer, maillage rectangulaire

Fig. 4.20.: Épaisseur de glace (m) finale après une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des derniers 50 années (sans glissement).
`Final ice-thickness (m) after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (without sliding).`

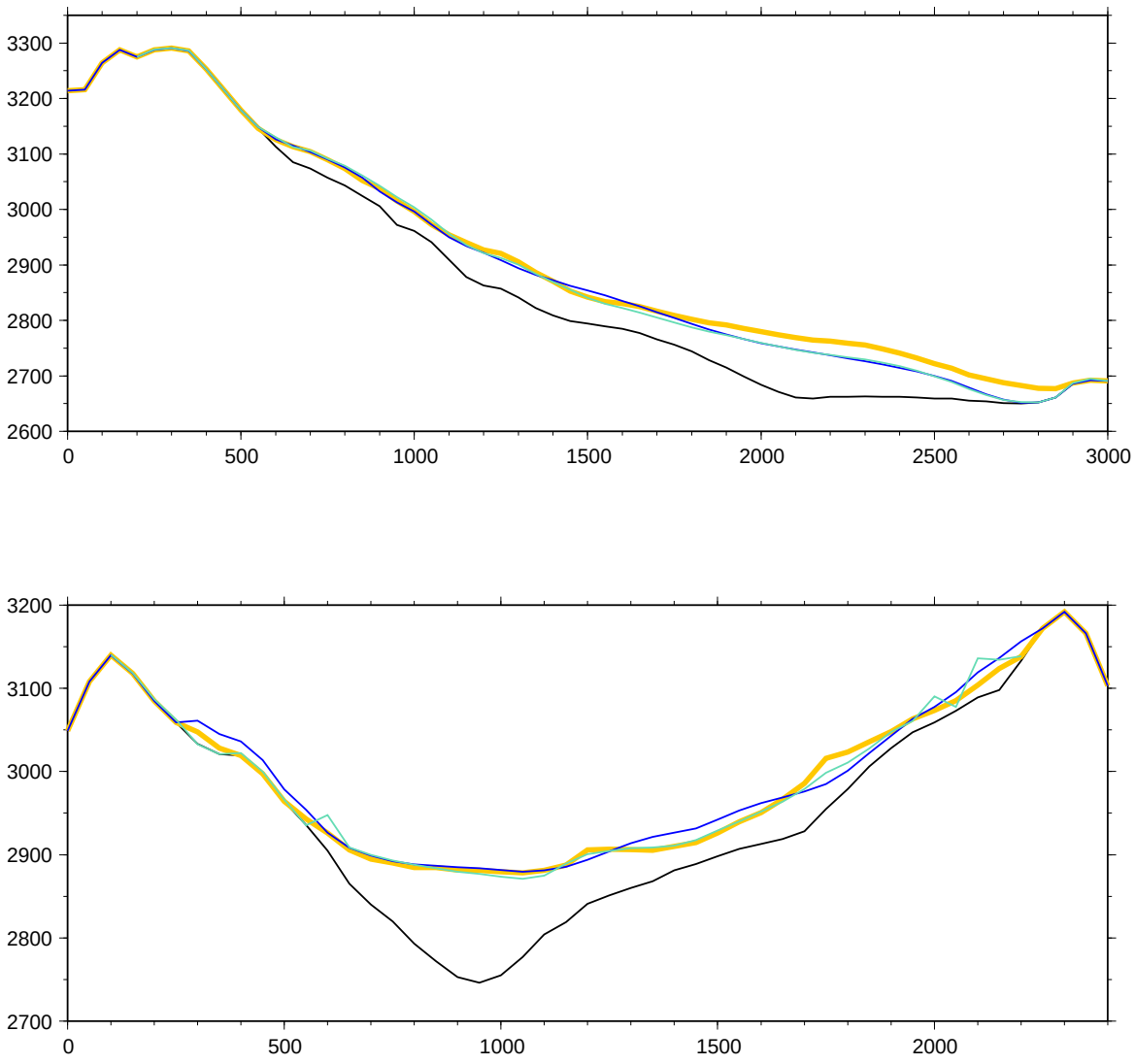
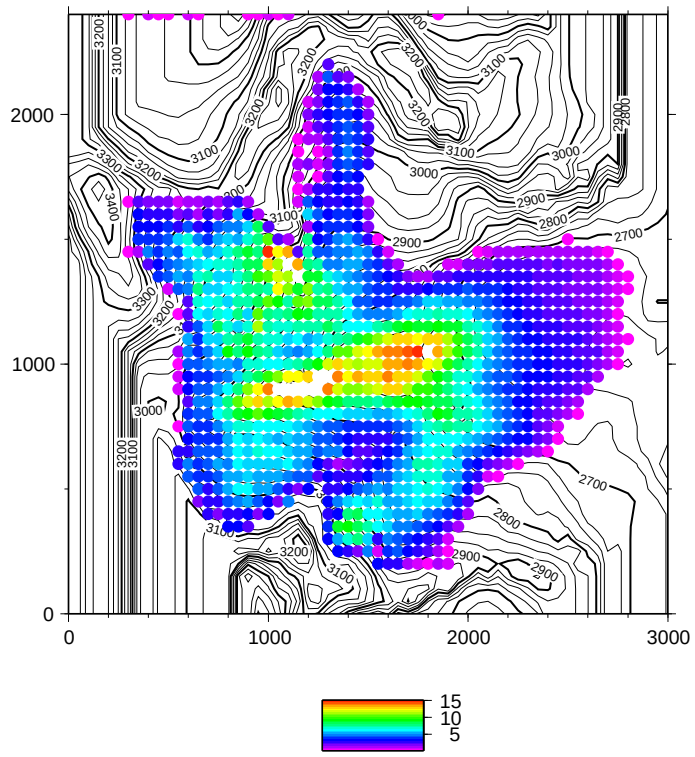
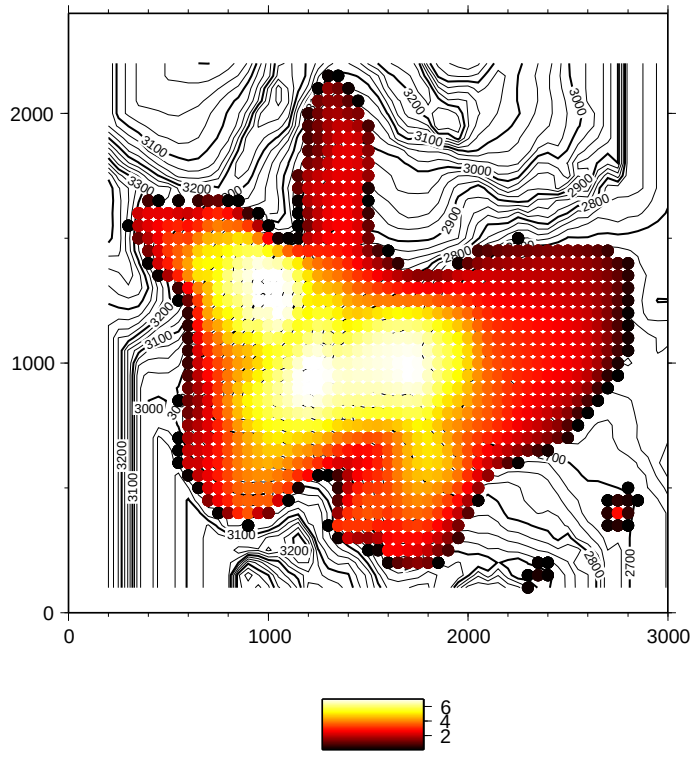



FIG. 4.21.: Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (sans glissement).
`Longitudinal and transversal cross sections after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (without sliding).`




(a) M SIA




(b) Elmer, maillage rectangulaire

Fig. 4.22.: Valeur absolue des vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (avec glissement).
`Absolut values of velocities (m/yr) for a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance of the last 50 years (with sliding).`

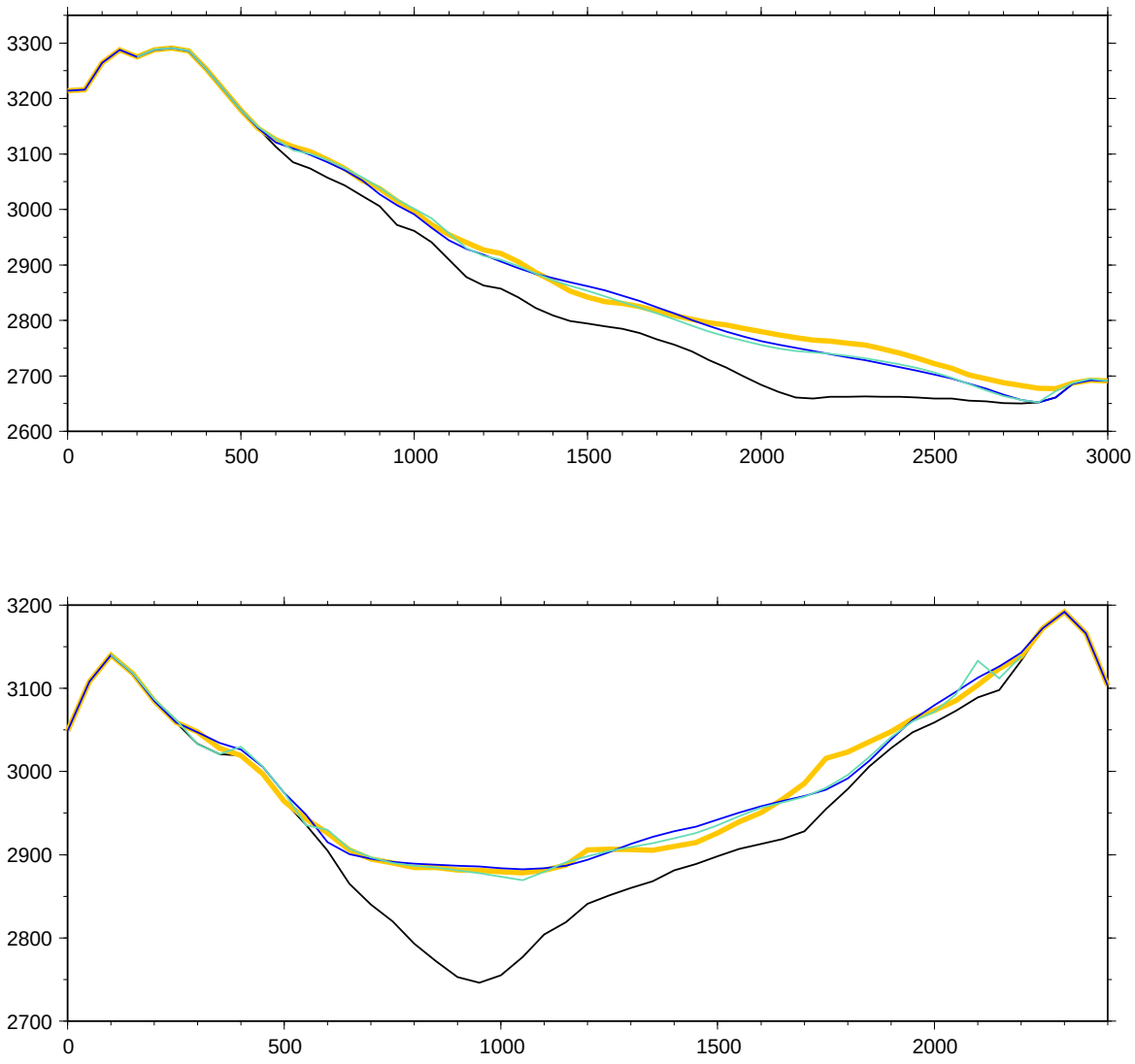
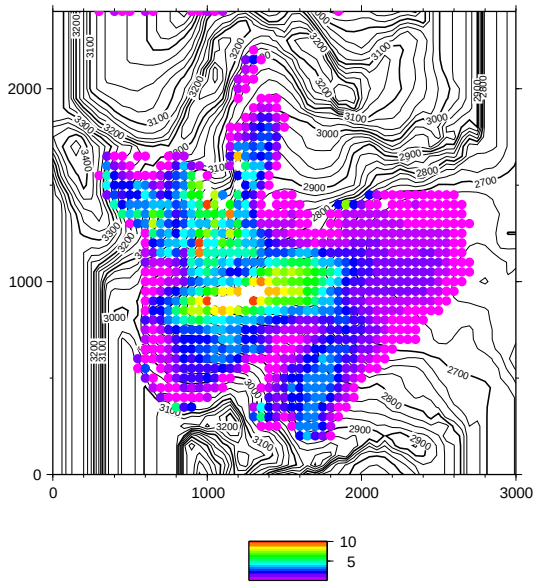



FIG. 4.23.: Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (avec glissement).
`Longitudinal and transversal cross sections after a 20 year time-dependent simulation departing from the the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (with sliding).`

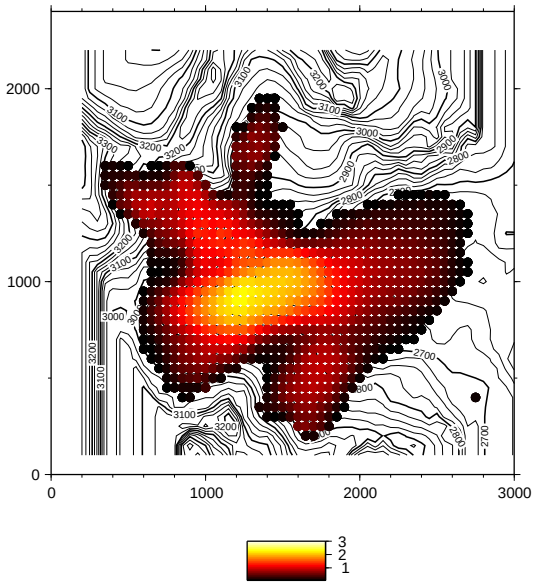
### Simulation réaliste en partant de la surface de 1998

Une simulation "réaliste", c'est-à-dire avec le champ de bilan réel à été effectuée en partant de la surface de 1998 pendant 7 ans (la période pendant laquelle les données sont disponibles).
Pour la SIA, 6.8 s ont été nécessaire sur le PC185, pour ELMER 40 635 s (11 h) sur SEPELI avec le maillage rectangulaire. On constate une augmentation importante par rapport à la simulation sans bilan, mais un temps comparable à la simulation avec un bilan temporellement constant (en tenant compte des différentes durées de simulations bien sûr). Avec le maillage de contour, environ 20 heures sont nécessaires. Les performances de ce maillage plus petit sont de nouveau perturbées par l'application d'un champ de bilan.
Avec glissement (maillage rectangulaire), le temps de calcul augmente de nouveau à 60 647 s (17 h).

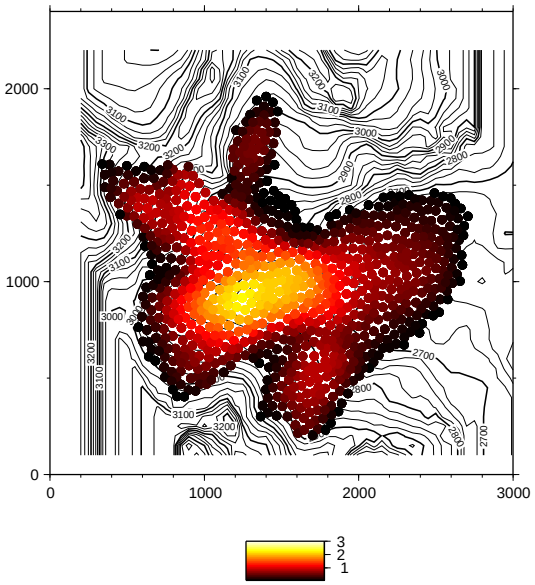
Les même courbes que pour les simulations précédentes sont présentées sur les Figures 4.24, 4.28 (page 269), 4.25 et 4.26.
Avec glissement, seules les coupes sont présentées (Fig. 4.27).
On peut faire les mêmes remarques pour la simulation avec le champ de bilan moyen des 50 dernières années. Mais comme la simulation est bien plus courte, le champ de vitesse avec la SIA reste encore assez chaotique et sur le profil vertical on trouve encore un facteur 2.7 entre les deux modèles. L'épaisseur et relativement bien représentée exceptée une accumulation trop importante de glace dans la zone inférieure comme observée auparavant. On constate de nouveau que le bilan et le glissement amplifient à certains endroits l'écart dans l'épaisseur de glace entre les modèles et l'atténuent à d'autres (ex. dans la deuxième coupe vers l'abscisse 1000 m l'épaisseur de glace augmente avec la SIA et diminue avec ELMER, l'effet est encore plus fort avec glissement).




(a) M SIA

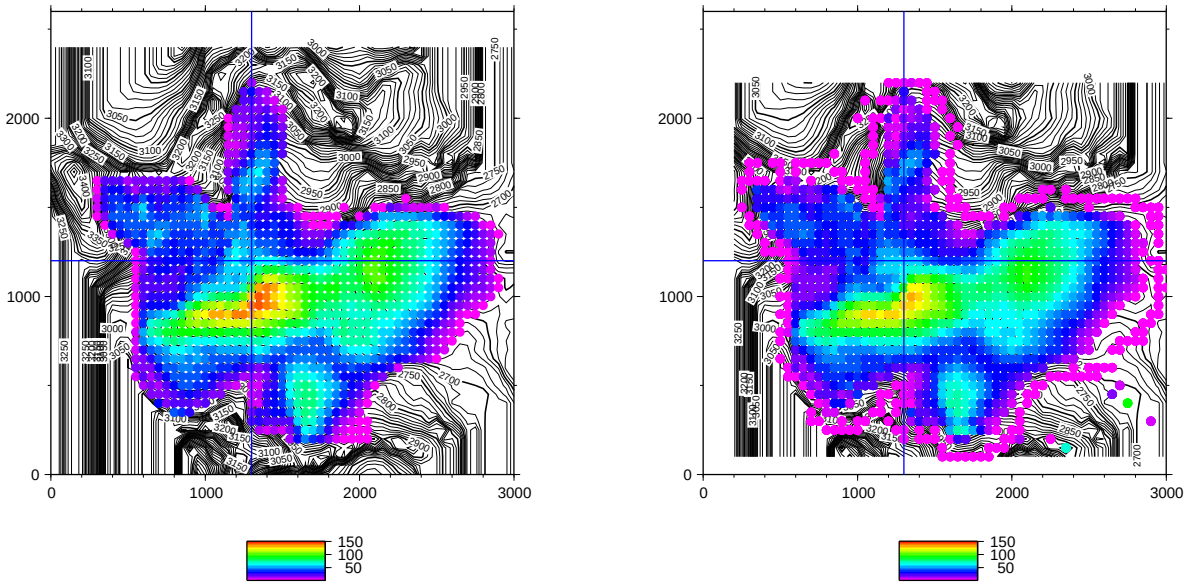



(b) Elmer, maillage rectangulaire



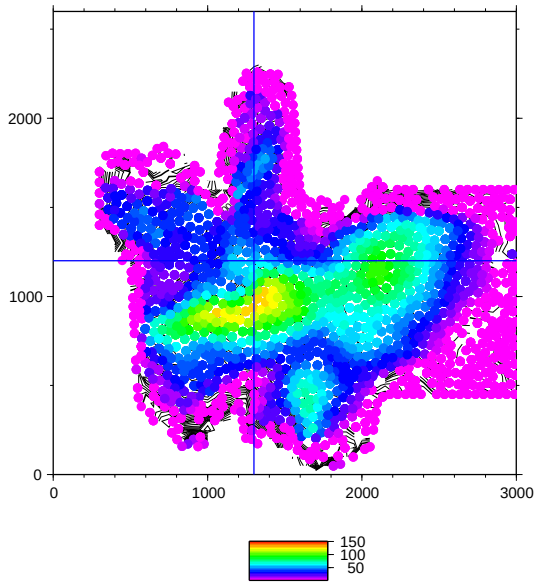

(c) Elmer, maillage de contour

Fig. 4.24.: Valeur absolue des vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan réel sans glissement.
`Absolut values of the velocities (m/yr) for a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding.`




(a) M SIA

(b) Elmer, maillage rectangulaire




(c) Elmer, maillage de contour

Fig. 4.25.: Épaisseur finale (m) après une simulation évolutive de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et sans glissement.
`Final ice-thickness (m) for a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding.`

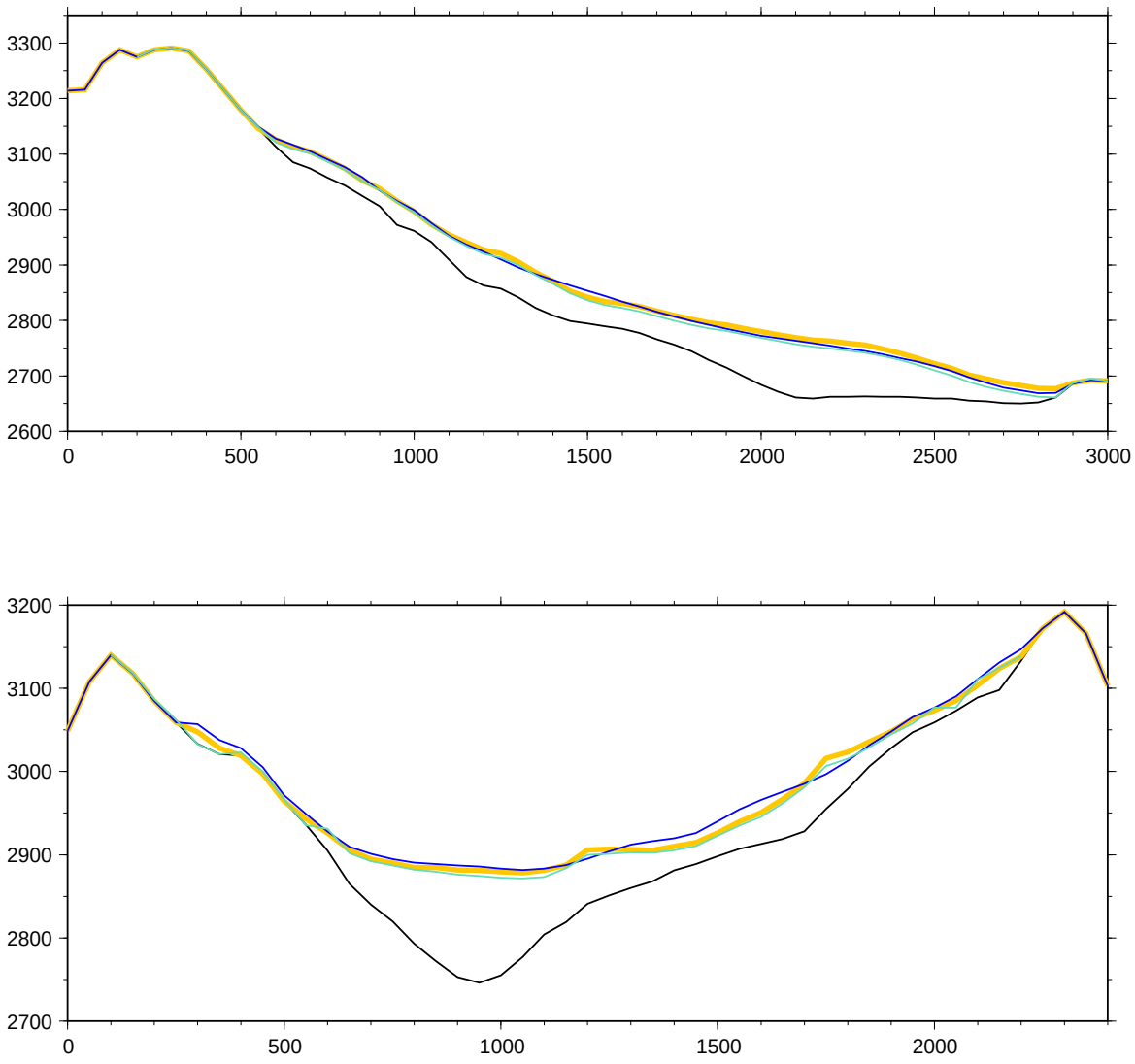



FIG. 4.26.: Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et sans glissement.
`Longitudinal and transversal cross sections after a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding.`

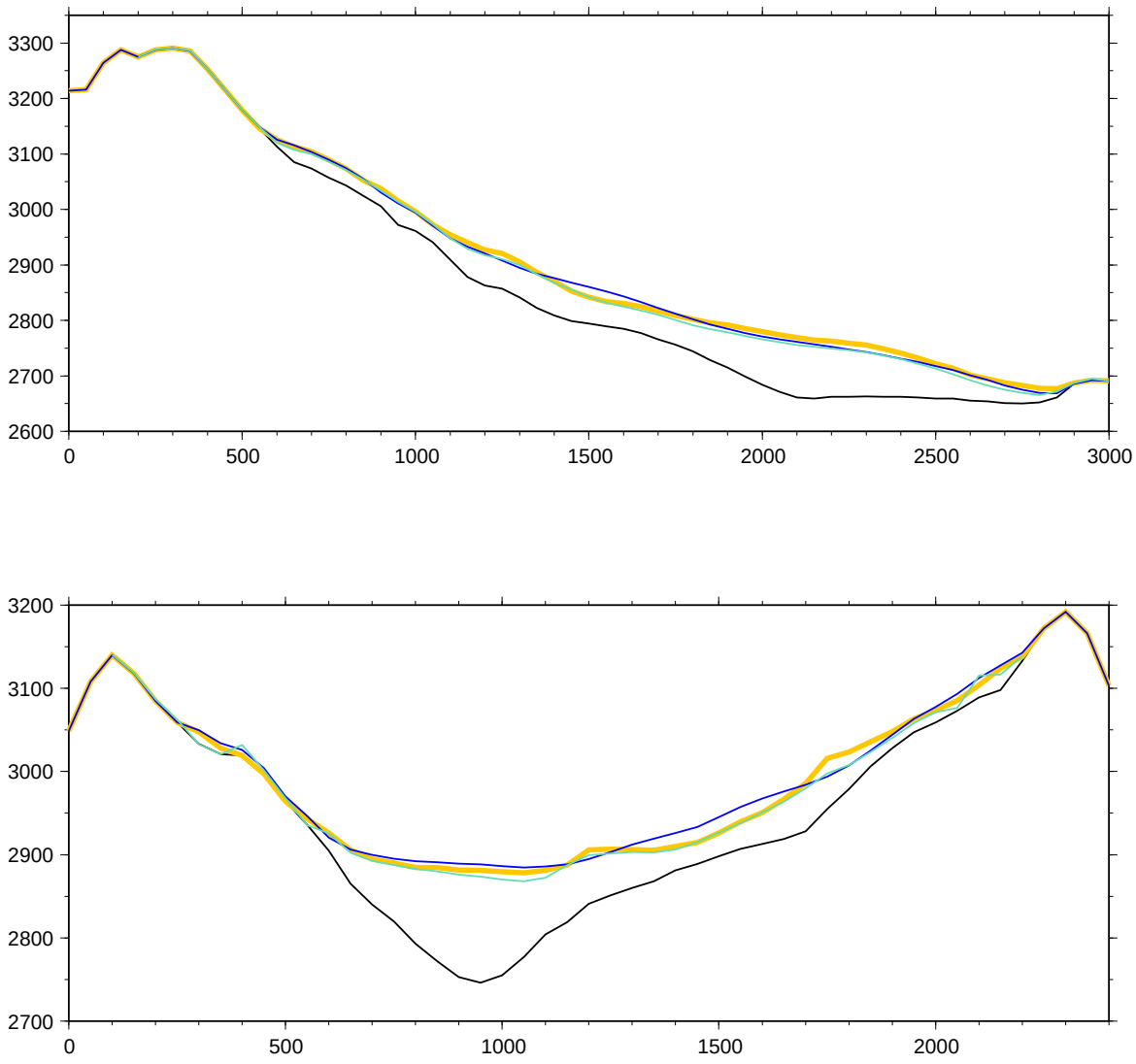



FIG. 4.27.: Coupes verticales et horizontales après une simulation de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et du glissement.
`Longitudinal and transversal cross sections after a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and sliding.`

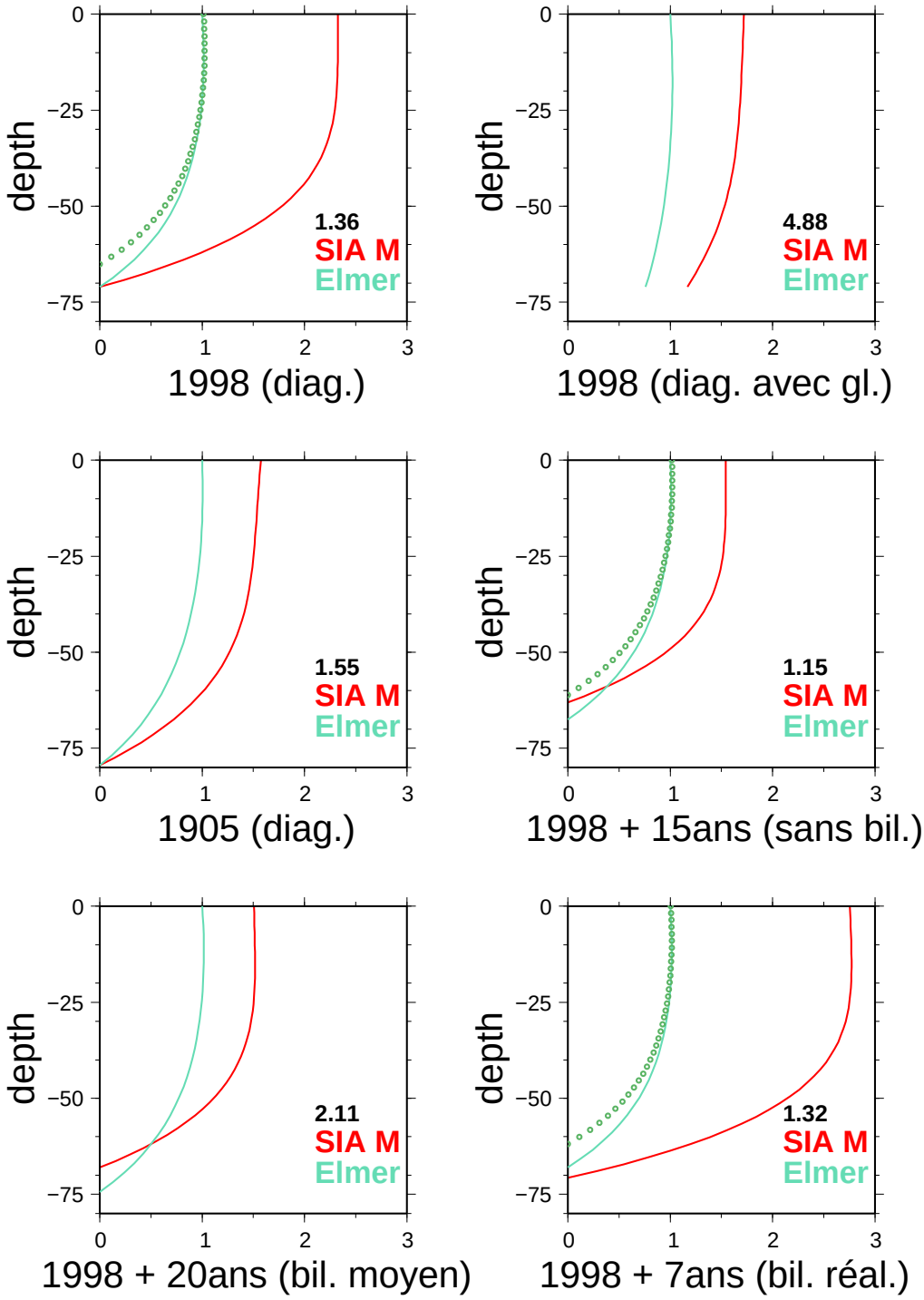



FIG. 4.28.: Profil des valeurs absolues de la vitesse au point $(x, y) = (1000, 1000)$ du glacier de Saint Sorlin pour les différentes simulations. Toutes les vitesses sont normalisées à la vitesse d'ELMER en surface donnée sur la figure (m/an). En rouge la SIA en vert ELMER, en pointillé le maillage de contour.
`Profile of the absolute values of the velocity at point` $(x, y) = (1000, 1000)$ `of the Saint Sorlin Glacier for the different simulations. All velocities are normalized to the velocity of` ELMER `on the surface given in the figure (m/yr). In red the` SIA `and in green` ELMER`, dotted line for the contour gridding.`

## 4.3. Comparaison avec la réalité

Enfin, on peut comparer le champ de vitesse en surface ainsi que l'évolution de la position du front avec les mesures effectuées sur la période de 1998 à 2005.

### 4.3.1. Vitesses de surface

Le champ des vitesses de surface est comparé pour la surface de 1998 et celle de 2005 (simulation évolutive de 7 ans en partant de la surface de 1998). Cette comparaison est utilisée pour essayer de mieux ajuster le coefficient de frottement avec Elmer.
Des données pour les vitesses de surface sont disponibles au niveau des balises d'ablation. On travaille ici avec les vitesses horizontales absolues en surface et non pas avec les vitesses absolues, pour s'affranchir des différentes définitions d'une vitesse verticale lors des mesures (vitesse d'enfoncement du pied de la balise, vitesse réelle d'une particule de glace qui se déplace,...).

#### 1998

En 1998 la vitesse a été mesurée à 14 balises. La Figure 4.29 présente toutes les balises utilisées pendant la période de 1998 à 2005. Pour la plupart des balises, des mesures existent uniquement pour quelques années au cours de cette période. Concrètement pour

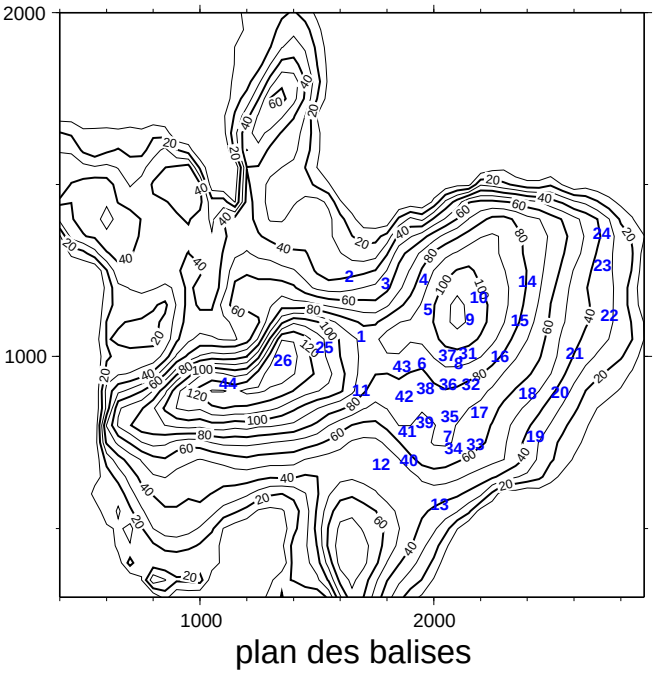



Fig. 4.29.: Carte des balises de bilan de masse. `Map of mass balance stakes.`

l'année 1998 des données sont disponibles pour les balises 7-9 (profil transversal dans la partie basse du glacier), 12-13 (en rive droite du glacier), 14-17 (profil transversal en aval du profil 7-9) et 20-24 (profil transversal vers le front).
Avec le frottement utilisé initialement on trouve avec les deux modèles (SIA et ELMER) les valeurs présentés sur la Figure 4.30 qui se sont comparées aux mesures (pour les sorties de modèles le point de grille le plus proche de la balise est considéré).

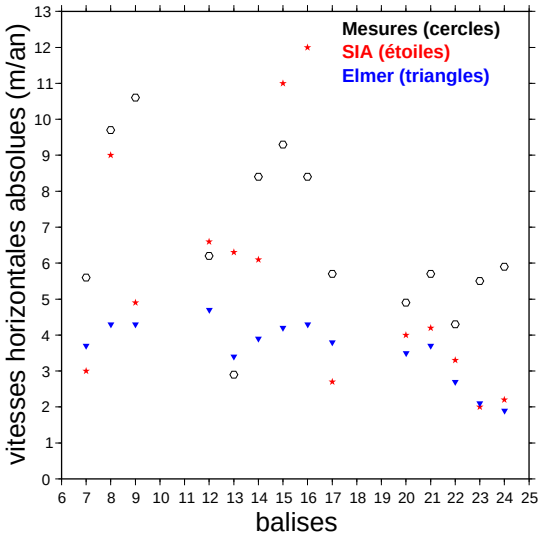



FIG. 4.30.: Vitesses horizontales absolues pour la surface de 1998, mesures et sorties de modèles, pour un frottement de $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.
`Horizontal absolute velocities for the 1998 surface, measurements and model output, with a sliding coefficient` $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.

On trouve un écart quadratique entre mesures et modèle de 13.3 pour ELMER et de 10.6 pour la SIA (si on normalise au nombre de balises on obtient respectivement 1 et 0.6)
Pour optimiser cet écart, nous avons fait varier frottement de 20% à 130% du frottement initial par paliers de 10% (Fig. 4.31). Le meilleur accord est trouvé avec ELMER pour un écart de 7.1 (0.5 avec normalisation au nombre de balises) à 50% du frottement initial. La SIA est beaucoup moins sensible à ce changement et le minimum se trouve avec un frottement plus élevé car les vitesses sans glissement sont déjà très élevées.
Dans le cas optimal, les vitesses d'ELMER et les vitesses mesurées sont comparées (Fig. 4.32). L'accord est bon pour les balises 20-23, 16-17 et 7, mais médiocre ou même mauvais pour les balises 12-13, 14-15, 8-9 et 24. L'accord semble être meilleur en rive gauche, on trouve cette tendance pour tous les profils transversaux. Pour le profil 20-24, un désaccord aurait pu être expliqué par l'incertitude sur le socle rocheux rencontré à cet endroit (cf. le paragraphe sur le calcul du front), mais les vitesses simulées ne montrent pas de dégradation avec la proximité du front, mais plutôt un effet rive gauche - rive droite.

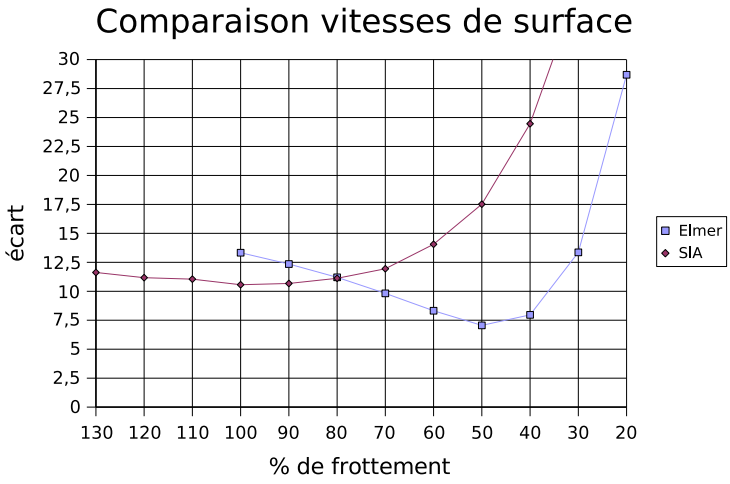



FIG. 4.31.: Optimisation du coéfficient de frottement $C_S$ par minimisation de l'écart de vitesse entre les modèles et les mesures. Les valeurs de $C_S$ sont données relatif à un frottement de $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.
`Optimization of the friction coefficient` $C_S$ `by minimizing the discrepancy in velocities between models and field data. Values fr` $C_S$ `are relative to a friction of` $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.

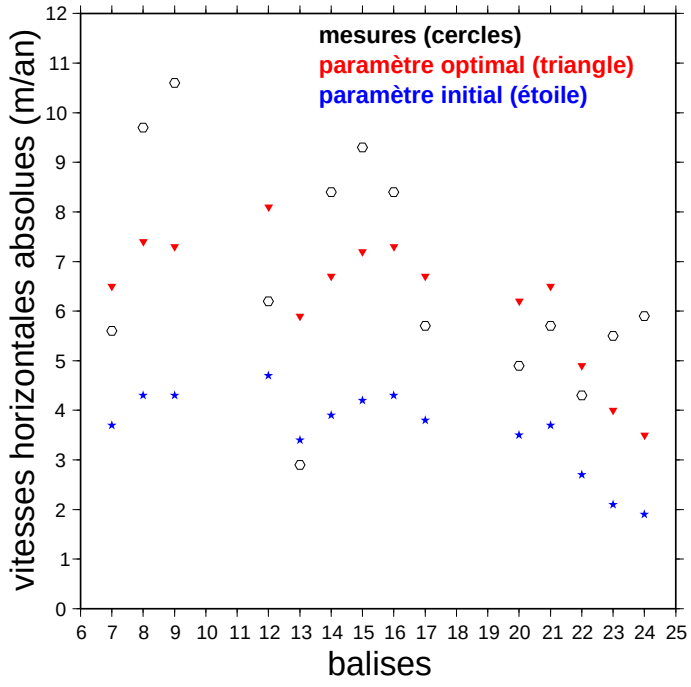



FIG. 4.32.: Vitesses horizontales absolues sur la surface de 1998, mesures et sorties d'ELMER.
`Horizontal absolute velocities for the 1998 surface, measurements and model output from` ELMER.

### 2005

En 2005, des données pour 25 balises sont disponibles (Fig. 4.33). Il s'agit des balises 1, 2, 5 et 6 situées en rive gauche dans la partie supérieure, de la balise 10 en rive gauche, des balises 11 et 12 dans la partie supérieure en rive droite, des balises 7, 17 et 31-43 dans la partie inférieure en rive droite et des balises 25, 26 et 44 dans la partie supérieure du glacier.
On trouve un écart quadratique de 9.4 pour ELMER et de 19.7 avec la SIA (respectivement de 0.4 et 0.8 après normalisation au nombre de balises) avec le frottement initialement utilisé. Avec le frottement optimisé à l'aide des vitesses de 1998 on trouve un écart de 12.3 (0.5 avec normalisation) pour ELMER. L'accord est alors globalement meilleur pour les vitesses de 2005 que pour celles de 1998, par contre l'optimisation pour 1998 dégrade les résultats pour 2005 à la place de les améliorer.

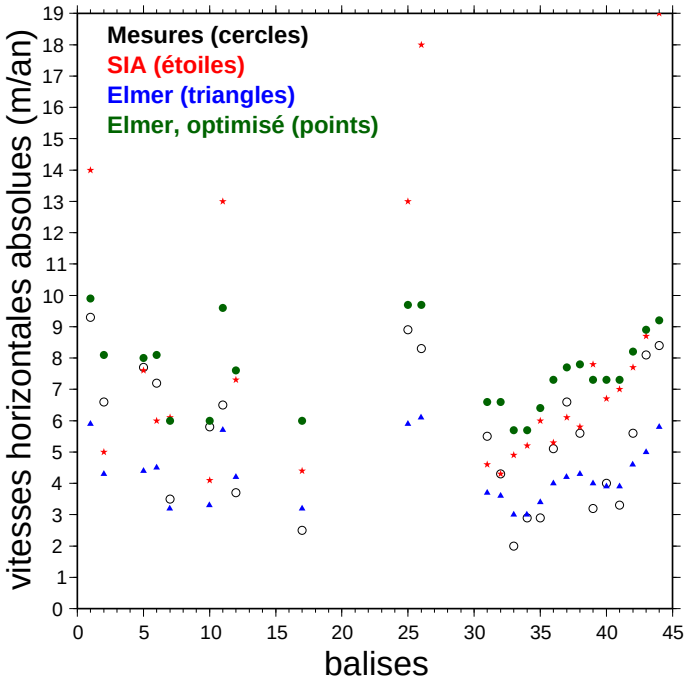



FIG. 4.33.: Vitesses horizontales absolues sur la surface de 2005, mesures et sorties de modèles.
`Horizontal absolute velocities for the 2005 surface, measurements and model output.`

On peut proposer plusieurs explications à ce résultat. Le point le plus important est le fait qu'il n'y ait que 3 balises (7, 12 et 17) qui sont communes aux années 1998 et 2005. Le frottement a alors été essentiellement optimisé en 1998 à partir de balises qui ne sont

pas remesurées en 2005. Deuxièmement, les balises ne sont pas distribuées de façon homogène à la surface du glacier. En 2005 il y a les balises 7, 17 et 31-43, très proches l'une de l'autre, en 1998 il n'y a pas de mesures du tout dans la partie supérieure du glacier. Si on suppose une légère variation spatiale du frottement, il faudra pondérer les différentes mesures selon la répartition spatiale des balises.
Plus précisément on trouve en 2005 (avec le frottement "optimisé") un bon accord pour les balises dans la partie supérieure en rive gauche (1, 2, 5, 6 et 10) ainsi que pour les balises 25 et 26 également dans la partie supérieure. Pour les balises 7, 17 et 31-43, qui sont très proches l'une de l'autre, dans la partie inférieure en rive gauche l'accord n'est pas très bon (à l'exception des balises 31, 37 et 43). Il en est de même pour les balises 11 et 12 dans la partie supérieure en rive droite. On retrouve un comportement différent pour les parties droite et gauche du glacier.

Pour mieux comprendre cette asymétrie rive droite - rive gauche et la loi de frottement apparemment variable spatialement, l'évolution des vitesses au cours du temps a été étudiée pour toutes les balises avec Elmer pour les deux coefficients de frottement différents. Sur les Figures 4.34 et 4.35 toutes les mesures disponibles (points noirs) ainsi que les sorties du modèle (bleu pour le glissement initial et vert pour le glissement "optimisé") sont présentées.
Les mesures reflètent une certaine variation spatiale des vitesses, des balises avec des vitesses relativement basse et plutôt constantes (notamment pour la zone des balises autour de la 7 et la 17), et aussi une variation temporelle à certains endroits avec des vitesses plus élevées associées à des croissances et décroissances marquées (ex. balises 1, 2, 25 et 26). Les sorties de modèle ne reflètent pas du tout ce comportement. Le changement du frottement amène un décalage global des vitesses vers des vitesses plus élevées, mais ne change pas l'allure de la courbe.

Dans la suite, pour améliorer ce travail d'ébauche à une modélisation plus poussée du glacier de Saint Sorlin, il ne suffira pas simplement de mieux adapter le coefficient du frottement. Une variabilité spatiale, mais aussi temporelle, ainsi que probablement une loi non-linéaire, seront nécessaires pour expliquer les variations spatiales et temporelles des vitesses mesurées.

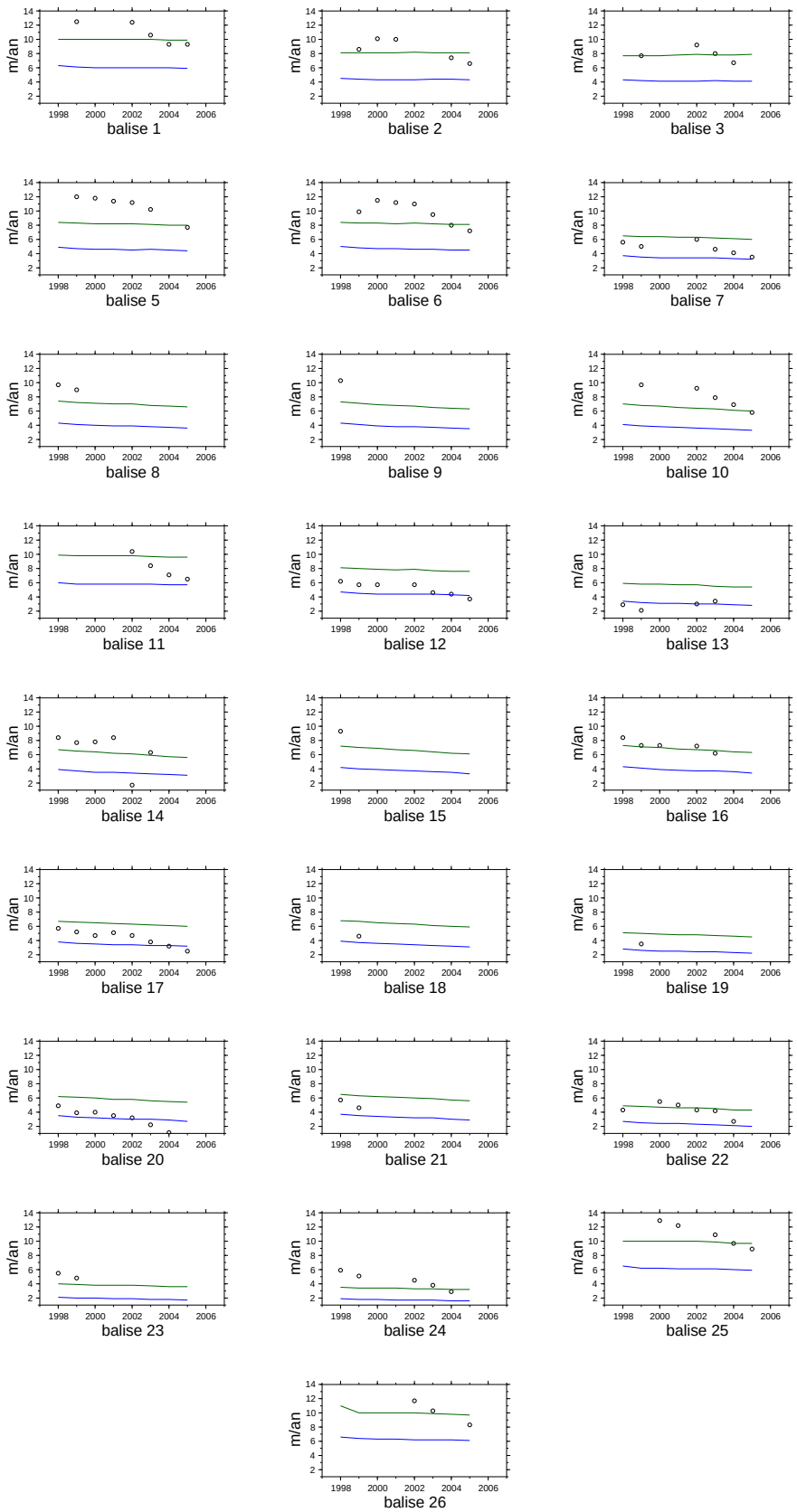



FIG. 4.34.: Vitesses de surface pour toutes les balises d'ablation pendant la période 1998-2005, les mesures disponibles sont en noir, les sorties de modèle avec deux coefficients de frottement différents pour ELMER sont en bleu et en vert.



Surface velocities at all ablation mass balance stakes for the period 1998-2005, measurements are in black, model outputs from ELMER for two different friction coefficients are in blue and green.

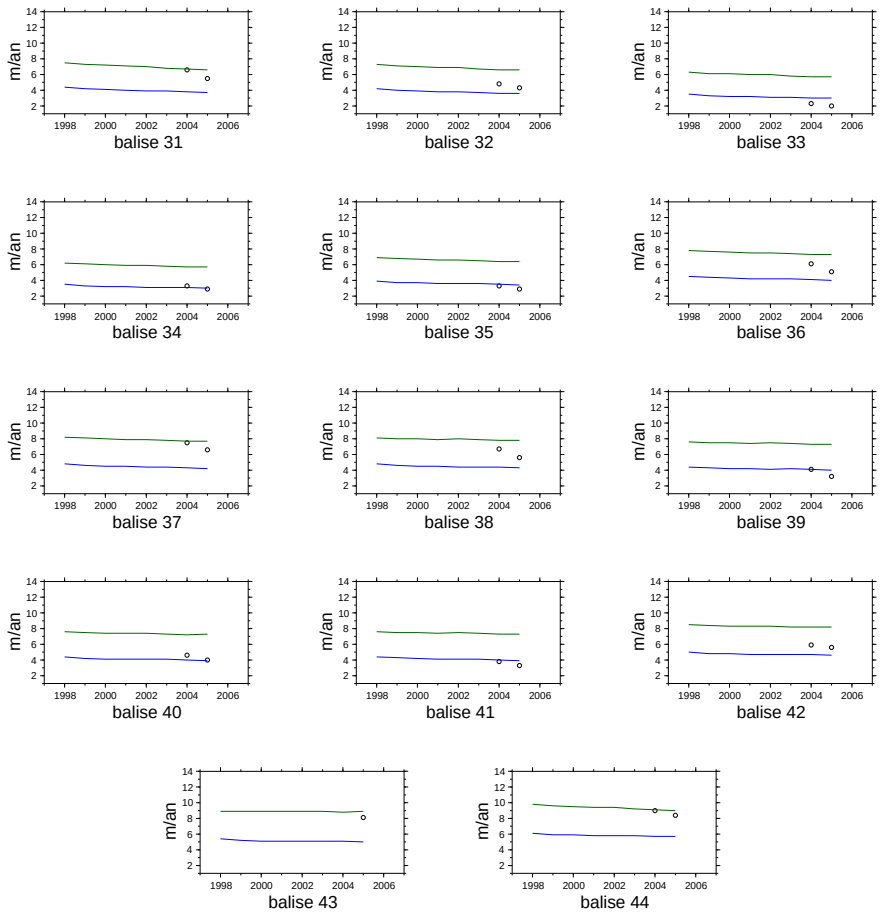



FIG. 4.35.: Vitesses de surface pour toutes les balises d'ablation pendant la période 1998-2005 (suite).
`Surface velocities for all ablation mass balance stakes for the 1998-2005 period (continued).`

### 4.3.2. La position du front

La version améliorée de l'algorithme du calcul de la position du front est utilisée dans ce paragraphe (résultats relatifs à la position de 1998 et calcul avec une ligne de base décalée). Pour ELMER une petite modification supplémentaire a dû être introduite : il est difficile d'identifier les points englacés en aval de la ligne de base pour le calcul du front à cause des accumulations de glace dans la zone hors glacier dues à la mauvaise résolution de l'équation de transport. Seuls les points avec plus d'un mètre de glace qui sont initialement englacés sont pris en compte. Cette approximation semble justifiée car le glacier recule dans toutes les simulations effectuées.
Sur la Figure 4.36 l'évolution de la position du front est présentée pour une simulation évolutive de 20 ans sans glissement avec le champ de bilan moyen des 50 dernières années (cercles sur la figure). Au début, le glacier est plus avancé avec la SIA, ce qui paraît normal car la SIA surestime la déformation. Vers 2008 le front re-avance avec ELMER, ce qui n'est à priori pas possible avec le champ de bilan appliqué. Il s'agit d'un problème dans l'identification des points englacés qui s'amplifie avec le temps ; les points initialement sans glace ont une épaisseur virtuelle d'un mètre. Les instabilités de la résolution de l'équation de transport s'amplifient avec le temps et il devient difficile de distinguer des points réellement, mais faiblement, englacés des points sans glace avec une épaisseur qui s'écarte à cause des instabilités de 1 m. La condition supplémentaire, de prendre en compte uniquement les poins initialement englacées, résout le problème au début, mais au fur à mesure que le glacier recule une nouvelle zone sans glace se développe et cette condition ne fonctionne plus.

Sur la même figure les résultats de la simulation avec un champ de bilan réaliste associé à du glissement sont montrés, en bleu clair (étoiles) le coefficient de frottement initialement appliqué et en bleu foncé celui optimisé avec les vitesses de surface (50% du frottement initial). Comme attendu, le glacier recule plus dans le premier cas. Les données sont présentées également sur la figure (triangles jaunes) et ne peuvent pas être reproduites correctement. Notamment le coefficient de frottement optimisé avec les vitesses de surface de 1998 est moins bon.
La simulation étant assez courte, elle ne devrait pas être trop sensible au problème d'identification des points englacés rencontré ci-dessus avec la simulation sur 20 ans.

Cette petite étude donne un aperçu du travail possible (et nécessaire) dans l'avenir et montre également déjà les limites. D'un point purement technique, le modèle ELMER devrait être amélioré pour mieux gérer les surfaces sans glace et permettre d'identifier correctement les points englacés en aval de la ligne de base.
La position de cette ligne de base devrait être aussi repensé. Un aspect qui n'est pas non plus abordé ici concerne aussi sa longueur. En reculant la ligne de base, on devrait probablement ne pas prendre en compte tous les points en aval de cette ligne (Fig. 4.37 à gauche), mais seulement ceux qui sont directement en aval d'une portion de longueur finie de la ligne de base (comme indiqué sur la Figure 4.37 à droite). Cette longueur reste à déterminer également.

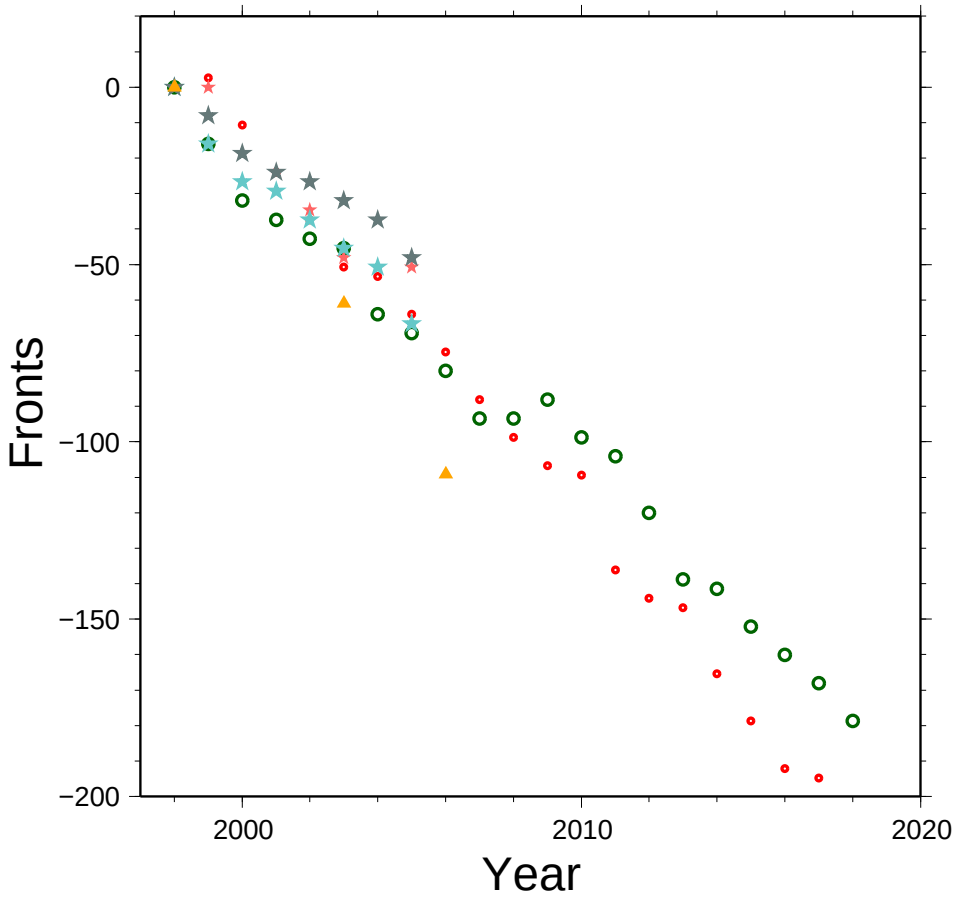



FIG. 4.36.: Position de front du glacier de Saint Sorlin, France. Les mesures sont représentées avec des triangles jaunes et les cercles sont le résultat d'une simulation évolutive avec le champ de bilan moyen des 50 dernières années (en rouge/petit la SIA, en vert/plus grand ELMER) et les étoiles ceux d'une simulation réaliste avec ELMER. Les cercles plus foncés correspondent à une simulation avec moins de frottement.
`Snout position for the Saint Sorlin glacier, France. Measurements are represented by yellow triangles. Time-dependent simulation results are depicted with cercles (red/small : SIA, green/bigger : ELMER), whereas a realistic simulation with ELMER with stars (the darker cercles correspond to less basal friction).`

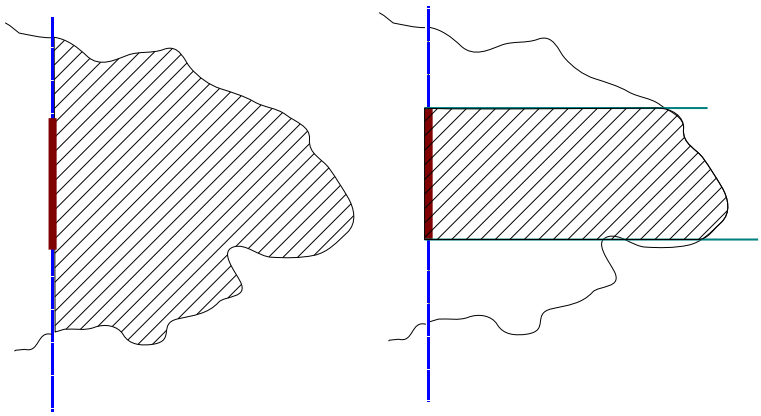


FIG. 4.37.: Calcul de la position du front, à gauche à l'aide de tous les points en aval de la ligne de base (bleue), à droite à l'aide de tous les points en aval d'une portion de longueur finie (rouge) de la ligne de base.
`Determination of the snout position, with on the left side all points downhill of the base line (blue), or (right side) with only the points downhill of a section of this line (red).`

D'un point de vue plus global, l'écart entre la position du front calculée avec les sorties de modèles et les observations reflète des erreurs systématiques. Les erreurs sur la topographie dans la zone du front de 1998 apparaissent ici, ainsi que la méconnaissance de la loi de frottement (et peut-être aussi le coefficient de la loi de Glen). Une loi non-linéaire, probablement avec un coefficient qui varie spatialement, devrait améliorer l'accord.

Une fois les différents points techniques résolus, la position du front ainsi que les vitesses de surface devraient permettre de mieux ajuster cette loi de frottement.

## 4.4. Perspectives

Les perspectives de ce qu'il sera nécessaire, souhaitable ou important à faire dans la suite se divisent en trois catégories ; (i) un travail technique pour améliorer les modèles utilisés (en priorité ELMER), (ii) un travail pour améliorer le jeu de données (en terme d'analyse, mais aussi en terme de mesures) et (iii) d'autres simulations qui permettront d'aller plus loin.

### 4.4.1. Améliorations d'ordre technique du modèle Elmer

Le point le plus important à améliorer semble le problème des grandes zones sans glace. Même avec le maillage en contour cette question se pose, car des mailles sans glace doivent pouvoir exister (existence d'une frange initiale déglacée permettant au glacier de progresser, ou mailles qui au fil de la simulation peuvent se libérer de glace.)
D'une part, une solution correcte de l'équation de transport sans créer des accumulations de glace virtuelles est souhaitable, d'autre part un coefficient de frottement ne dépendant pas de la hauteur de glace serait souhaitable.
Pour économiser le temps de calcul, il serait bon de retravailler le maillage de contour proprement, surtout près des bords dans la partie supérieure du glacier. Un effort pour adapter les outils d'analyse à ce maillage irrégulier sera nécessaire également.
La mise en place de calculs en parallèle sera aussi une bonne alternative.
A terme il sera également intéressant de passer à un maillage plus fin, par exemple de 10 m. Une révision des données sera alors nécessaire.

### 4.4.2. Perspectives au niveau de données

Il sera intéressant de retravailler le champ de bilan de masse pour mieux définir la zone où les valeurs extrapolées issues des mesures seront appliquées. Pour l'instant ceci est fait un peu grossièrement en positionnant la rimaye sur une orthophoto. Il paraît aussi important de trouver une meilleure solution que celle consistant à fixer le bilan à -10 m w.e. en dehors du domaine.

La position de front est un bon indicateur pour comparer les sorties de modèles et la réalité. Pour mieux exploiter cet observable, il y a deux aspects différents. Du côté numérique il faudra optimiser la façon de calculer la surface du front sur une grille de 50 m. Du côté définition du front, le mieux sera probablement de redéfinir le front par rapport à une autre ligne de base pour s'affranchir des surfaces très petites ou négatives. Une nouvelle analyse des données depuis 1905 sera probablement nécessaire.

En terme de données disponibles, les données de la topographie du socle rocheux sont le point faible, surtout sur la partie inférieure proche du front de 1998 et dans la pente sous l'Etendard avec les problèmes qu'on y rencontre respectivement et qui sont cités plus haut.

### 4.4.3. D'autres simulations pour aller plus loin

La première chose à faire c'est de faire un ajustement des différentes paramètres qui interviennent (loi de Glen, loi de frottement,...) avec ELMER. L'utilisation d'une loi non-linéaire pour le frottement sera intéressante.
Ensuite, des simulations réalistes seront envisageables en partant des surfaces de 1905, 1971[1] et aussi 1998.

## 4.5. Conclusion

Différents modèles ont été comparés sur un cas réel, le glacier de Saint Sorlin dans le massif des Grandes Rousses en France. Des simulations diagnostiques (surface de 1905 et celle de 1998) ainsi que des simulations évolutives ont été effectuées en partant de la surface de 1998. Même si l'accent est mis sur l'inter-comparaison des modèles, une première comparaison avec les observations est proposée. Quelques défauts dans les données ont pu être relevés.

### Simulations diagnostiques

Pour les simulations diagnostiques on observe, de la même manière que pour les tests synthétiques, un écart très grand entre la SIA et ELMER. La SIA surestime les vitesses. Cet écart diminue un peu avec glissement, car les vitesses d'ELMER observent une augmentation relative plus importante que la SIA.
La surface de 1905 n'a pas pu être utilisée pour d'autres simulations car une incertitude sur les données du socle rocheux est apparue.
L'écart entre la SIA et ELMER en terme de temps de calcul est conséquent (quelques heures au regard de quelques secondes).

### Simulations évolutives

Pour les simulations évolutives l'écart des vitesses entre la SIA et ELMER diminue. On observe de nouveau la même rétroaction négative comme présentée pour les tests synthétiques.
L'épaisseur de glace est globalement assez bien représentée par la SIA. Néanmoins des coupes transversale et longitudinale montrent que la SIA déforme trop la surface et aplatit la surface plus qu'ELMER à certains endroits avec beaucoup de relief. Avec glissement cet effet est moins marqué, car ELMER a la même tendance. L'importance du glissement, pourtant relativement mal connu, est alors démontré. Avec bilan de masse, cet effet est parfois amplifié, parfois atténué selon le champ de bilan appliqué.
Pour conclure on peut dire que la SIA reproduit assez bien la géométrie à conditions de s'intéresser à l'état global du glacier et non pas aux détails de la géométrie de la surface. Par contre, les vitesses ne sont pas bien reproduites.

[1] Les données topographiques de 1971 ne sont pas pour l'instant traitées pour être utilisées dans un modèle.

### Temps de calcul

Le temps de calcul avec ELMER est bien plus élevé que celui avec la SIA (de l'ordre de plusieurs dizaines d'heures comparées à quelques secondes pour une simulation évolutive de 20 ans). Ce temps de calcul est difficile à quantifier, car le comportement de la convergence est assez sensible au glissement, au bilan,... Étonnamment un deuxième maillage (un maillage de contour) n'amène quasiment pas de gain en temps de calcul à cause d'un comportement de convergence moins bon malgré un nombre de nœuds réduits.

### Comparaison avec les observations

Une première comparaison avec les observations a été effectuée avec le but de montrer ce qu'il sera possible et nécessaire à faire dans l'avenir. Quelques problèmes techniques de modèle ainsi que sur les données ont été soulevés.
A terme, les vitesses de surface ainsi que la position du front devraient permettre de mieux ajuster la loi de frottement et peut-être aussi le paramètre de la loi de Glen.

# 5. Conclusions

L'inter-comparaison présentée dans les chapitres précédents porte sur différents modèles allant de la SIA à l'ordre zéro jusqu'à un modèle résolvant la totalité des équations de Stokes en passant par un modèle intermédiaire d'ordre supérieur. Ces modèles ont été appliqués à différents glaciers ; des glaciers synthétiques aux géométries relativement simples permettant de faire varier le rapport d'aspect ainsi qu'un cas réel, le glacier de Saint Sorlin dans les Alpes Françaises. L'objectif de cette étude a été d'étudier le type de modèle le plus approprié pour un certain type de glacier en tenant compte de la précision souhaitée et des moyens nécessaires en terme de calcul.
Une première ébauche de comparaison des résultats des modèles à la réalité a aussi été effectuée pour le glacier de Saint Sorlin. La conclusion principale porte sur le fait qu'aujourd'hui le glissement ne peut pas être paramétré correctement, d'une part au niveau de la loi de glissement avec ses paramètres numériques, d'autre part au niveau de la variabilité spatiale et temporelle du processus. Même avec un modèle *Full Stokes* il est aujourd'hui impossible de correctement reproduire la réalité à cause de cette méconnaissance des processus physiques et leur retranscription très approximative dans les modèles.

Les modèles SIA sont des modèles fréquemment utilisés dans la modélisation des grandes calottes glaciaires. Ils présentent l'avantage d'un très faible coût en temps de calcul et dans une moindre mesure, un travail de développement beaucoup plus simple. Néanmoins cette approximation est uniquement valable pour des objets glaciaires avec un rapport d'aspect et une pente du socle rocheux faibles. Dans cette théorie, les contraintes longitudinales ($\sigma'_{x,y,z}$) sont négligées. Il s'agit donc d'une théorie locale comme il n'y a aucune transmission de contraintes d'un point du glacier à un autre. L'évolution du glacier à un point donné ne dépend que de la topographie à ce même point, il n'y a aucune interaction entre les différents points de grille d'un modèle. Cette approximation n'est certainement pas très réaliste, notamment dans le cas d'une topographie perturbée ou un socle rocheux avec une certaine rugosité pour lequel on sait que l'écoulement en un point dépend de la géométrie dans les alentours. Cette hypothèse n'est également pas valable dans le cas d'un glissement basal important, surtout dans le cas d'une forte variabilité spatiale qui se traduit par la transmission de contraintes entre les différentes points de grille du modèle. Le cisaillement dans le plan horizontal ($\tau'_{xy}$) est également négligé dans cette théorie. En particulier pour les glaciers de montagne encaissés dans une vallée, cette approximation n'est pas justifiée. L'importance du cisaillement dans le plan horizontal est dans ce cas très bien illustrée dans la réalité par les bandes de forbes qui prennent rapidement une forme en ogives au cours de leur déplacement.
Dans de tels cas il faut alors avoir recours à un modèle plus sophistiqué, plus coûteux, un modèles d'ordre supérieur voire un *Full Stokes*.

Dans les expériences effectuées dans ce travail il a été clairement montré que la SIA ne capte pas les effets à petite échelle et que la déformation est surestimée (en terme de vitesses ainsi qui en terme de déformation de la surface). Par rapport a cette surestimation de la déformation, qui est liée au fait que le couplage avec les contraintes longitudinales est négligé et qu'il s'agit d'une théorie locale, une rétroaction négative a pu être identifiée, laquelle montre que la SIA devient un peu meilleure avec les simulations évolutives.
Comme observé aussi par Le Meur et al. (2004), les résultats de la SIA deviennent nettement moins bon pour un rapport d'aspect plus élevé - qu'il s'agisse de celui lié à la pente du socle ou de celui lié à la géométrie du glacier lui-même.
Les deux implémentations différentes de la SIA ne montrent aucune différence significative entre elles en terme de précision. Par contre, le modèle utilisant des formules analytiques et une inversion de matrice à la place d'un calcul itératif pour la solution de l'équation de transport s'avère beaucoup plus rapide.

Dans les simulations avec glissement la validité de la SIA devrait normalement se dégrader, car la transmission spatiale des gradients de contraintes (négligée dans la SIA) devient plus importante (Gudmundsson, 2003). Pattyn (2002) n'a pas observé cette dégradation, tout comme dans les expériences montrées ici, où ce phénomène n'apparaît pas non plus. Au contraire, l'accord entre la SIA et les modèles d'ordre supérieur est même un peu amélioré dans la mesure où l'augmentation relative de vitesse est plus importante avec les modèles d'ordre supérieur qu'avec les modèles SIA.

Les simulations avec champ de bilan de masse ne permettent pas pour l'instant de véritable conclusion sur l'influence respective sur l'écoulement de la déformation visqueuse de la glace et de la contribution du bilan de masse. Même si la position du front est en général assez bien reproduite avec la SIA (comme aussi observé par Leysinger Vieli et Gudmundsson (2004)), la surface totale du glacier est, selon le cas, un peu mieux ou un peu moins bien reproduite avec un champ de bilan de masse.

Le chapitre sur la comparaison des temps de calcul montre très bien le grand avantage de la SIA : un temps de calcul très faible comparé aux modèles d'ordre supérieur. Par contre, le temps de calcul n'augmente que très peu lors du passage d'un modèle d'ordre supérieur à un modèle *Full Stokes*. Une étude plus détaillé sera nécessaire pour mieux préciser le genre de simulations pour lequel un modèle d'ordre supérieur pourra présenter des avantages par rapport à un modèle *Full Stokes*.

Sixième partie .

# Un exemple de glacier tropical : Le glacier du Cotopaxi en Equateur

# 1. Introduction

La différence fondamentale entre les glaciers extra-tropicaux et les glaciers tropicaux réside dans le fait que, dans les zones tropicales, les réserves en neige doivent se constituer pendant toute l'année et non pas uniquement pendant la période froide de l'année, généralement trop pauvre en précipitations.
D'autre part, l'ablation y a lieu pendant toute l'année, que ce soit pendant les intersaisons, en hiver quand la radiation solaire est intense, et aussi bien sûr pendant les périodes sèches de l'été.
Cela amène à une distribution du bilan de masse sur l'année complètement différente et qui se complique à cause de l'alternance des saisons sèches et humides. De plus, les périodes d'accumulation et de fonte coïncident souvent pendant la saison des pluies. En été, l'état du glacier est un équilibre délicat entre le stock de neige et l'ablation due au rayonnement solaire et à une température élevée.
Dans les Andes, on distingue les glaciers de la zone tropicale externe (Pérou, Bolivie) où la fonte et l'accumulation se produisent pendant la saison humide (de novembre à mars), et les glaciers de la zone tropicale interne (Équateur) où l'accumulation et la fonte ont lieu toute l'année.
A cause de la position élevée du soleil dans les zones tropicales pendant toute l'année, les différences d'exposition (Nord et Sud) sont moins marquées qu'ailleurs. Par contre, le cycle de formation des nuages pendant la journée doit être considéré parce qu'il affecte l'exposition au soleil, et donc le bilan de masse d'un glacier. Les nuages descendent régulièrement dans la nuit vers 3500 m - 4000 m, les glaciers sont donc complètement exposés au soleil le matin, même pendant les saisons des pluies. Les nuages qui se développent plus tard dans la journée en altitude protègent le glacier pendant le reste de la journée. Les pentes Est et Nord sont moins couvertes de glace que les autres, parce que l'Est est exposé au soleil le matin et parce que les pentes Nord reçoivent une radiation solaire plus importante que les autres versants dans l'hémisphère sud. La position du front est donc plus basse sur les versants Ouest et Sud et monte de 100 m à 300 m pour ceux exposés à l'Est et au Nord.
Combiné avec l'air extrêmement sec, la radiation solaire produit un phénomène particulier sur les surfaces de névé et de glace à savoir le développement de pénitents (Fig. 1.1). Ce phénomène dépend aussi de la pente et de l'exposition à la radiation. Le cycle climatique annuel, ajouté aux particularités environnementales des différentes sites est responsable d'une grande variété dans la taille et la forme des pénitents.
Bien que les glaciers tropicaux représentent moins de 5% des glaciers de montagne du globe, leur influence socio-économique est importante. En effet, les eaux de la fonte de ces glaciers alimentent en eau potable plusieurs grandes villes, en Amérique du Sud telles

FIG. 1.1.: Pénitents au sommet du Cotopaxi. `Penitents on top of Cotopaxi.`

que La Paz, Lima, ou Quito. Elles font également fonctionner les usines hydroélectriques.

Dans cette partie le glacier volcanique du Cotopaxi en Équateur est d'abord présenté avec son contexte un peu différent de celui des Alpes (*chapitre 2*). Ensuite, la campagne de mesures 2007 (*chapitre 3*) ainsi qu'une synthèse de toutes les données disponibles sont décrites (*chapitre 4*). Enfin le *chapitre 5* décrit le travail de modélisation effectué sur ce glacier.

# 2. Le Cotopaxi, situation générale, problématique du risque

Le Cotopaxi est un glacier tropical couvrant le sommet d'un volcan situé en Équateur, dans la Cordillère des Andes orientales, en Amérique du Sud. Il est situé à environ 150 km de l'équateur dans le parc national du Cotopaxi - le plus fréquenté de l'Equateur, à 60 km au sud-est de Quito et à 45 km au nord de Latacunga (Fig. 2.1).
Ses coordonnées sont 0°38' de latitude Sud et 78°26' de longitude Ouest.

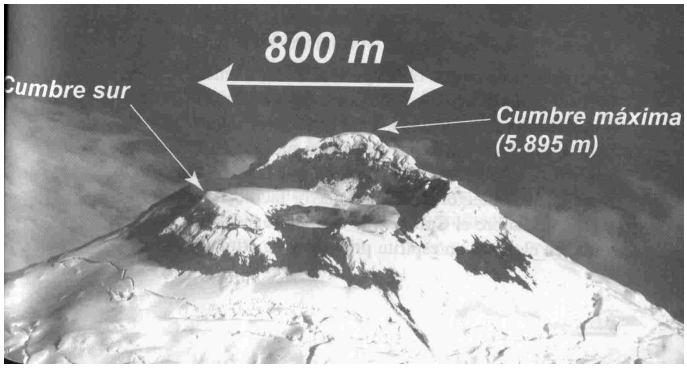
FIG. 2.1.: Carte de l'Equateur, d'après Lonely Planet.
`Map of Ecuador, from Lonely Planet.`

C'est le deuxième sommet du pays avec une altitude de 5897 m. Il possède une forme assez caractéristique (Fig. 2.2(a)), c'est-à-dire un cône presque parfait avec un grand

cratère quasiment déglacé au sommet (Fig. 2.2(b) et 2.2(c)). Le sommet du volcan se caractérise par une couronne entourant le cratère sur laquelle on distingue le sommet Nord et le sommet Sud un peu moins élevé.

(a) Cotopaxi, côté Nord. `Cotopaxi, nothern side.`

(b) Le cratère au sommet.
`The crater at the top.`




(c) Le sommet. `The summit.`

FIG. 2.2.: Le Cotopaxi, photo P. Ramón. `The Cotopaxi, picture P. Ramón.`

Le risque volcanique est un des risques majeurs naturels en Equateur (Fig. 2.3). Le Cotopaxi est un volcan actif, néanmoins il se contente actuellement d'émettre quelques fumerolles visibles uniquement du bord du cratère couvert de glace (Fig. 2.4(a)).

De nombreuses éruptions violentes ont eu lieu au cours des siècles passés et trois d'entre elles ont détruit la ville de Latacunga. Il y a à peu près une éruption par siècle (Hall, 1977), les dernières ont eu lieu en 1534, 1744 et 1877. Celle de 1877 a duré 15 minutes et a détruit la Valle de los Chillos. Durant les éruptions les plus fortes, de 0.1 à 1 $km^3$ de magma ont été éjectés.
Une catastrophe comparable a eu lieu en 1985 dans la ville d'Armero en Colombie lors d'une éruption du Nevado del Ruiz qui a causé la mort de 26 000 personnes.
Les zones aujourd'hui menacées sont d'un grand intérêt économique pour le pays, parmi lesquelles on peut citer la zone métropolitaine de Quito (Valle de los Chillos, Tumbaco, Latacunga, Salcedo,...) avec de nombreuses infrastructures comme l'hôpital, l'aéroport... (Fig. 2.4(c)). Ces éruptions sont particulièrement dangereuses car les laves associées à l'eau résultant de la fonte de la glace érodent et entraînent de la matière solide (terre, rochers, moraines) pour former une lave torrentielle très volumineuse et dévastatrice (Rapport IRD, 2005).

Ce glacier est suivi par l'IRD-Quito (en collaboration avec l'INAMHI[1] sur place). Le but principal de ce suivi est l'estimation et la surveillance de la masse totale de glace qui pourrait fondre en cas d'éruption volcanique et provoquer une lave torrentielle dévastatrice faite d'un mélange de boue, d'eau et de glace. Quant à l'activité volcanique, le volcan est en permanence suivi par l'IG (Instituto Geofísico de la escuela politécnica nacional).

Le second intérêt vient du fait que ce glacier réagit rapidement aux changements climatiques et qu'il est situé dans une zone clé pour la compréhension du climat et des liens que ce dernier développe avec les glaciers.

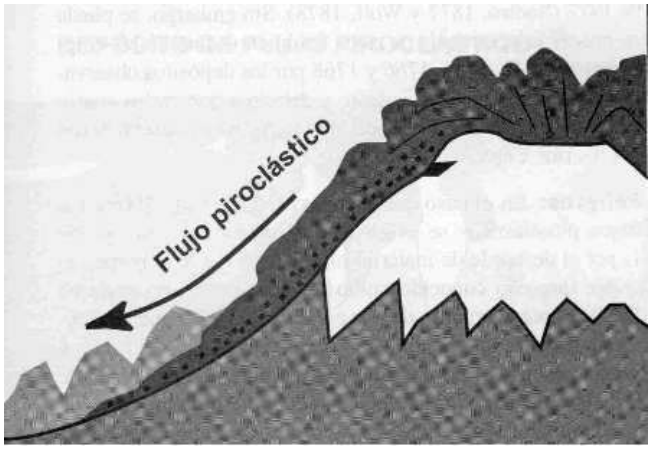
En janvier/février 2007, j'ai eu la possibilité d'encadrer un étudiant dans le cadre d'une campagne de mesures radar sur le Cotopaxi et d'un travail de modélisation numérique du glacier. Ce travail a fait l'objet d'un poster présenté en 2007 à l'EGU à Vienne (cf. Annexe IX.3.2).

[1] IRD = Institut de Recherche et Développement, INAMHI = Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología

**Figura 1.** Arco volcánico del Ecuador (Modificado de Hall y Beate, 1991). En los Andes del Ecuador se ha podido identificar más de 50 complejos volcánicos, entre los cuales se cuentan ocho considerados como activos (con al menos una erupción en tiempos históricos, es decir desde la llegada de los españoles en 1532); y diez volcanes más considerados como potencialmente activos (con erupciones ocurridas en los últimos 10 mil años).

FIG. 2.3.: Carte des volcans en Equateur, figure extraite du Rapport IRD (2005), Hall et Beate (1994).
List of volcanos in Ecuador, figure taken from Rapport IRD (2005), Hall et Beate (1994).

(a) Fumerolles sortant du cratère du Cotopaxi.
Fumes out of the Cotopaxi crater.




(b) Schématisation d'une coulée de lave, figure extraite du Rapport IRD (2005).
Schematic representation of a lava flow, figure from Rapport IRD (2005).

Fig2.4 Zonas de peligro de Latacunga (cortesía del IG/EPN)

(c) Cartographie des zones menacées par les éruptions à Latacunga.
Mapping of the threatened zones in Latacunga in case of a volcanic eruption.

FIG. 2.4.: Le risque volcanique lié au Cotopaxi. Volcanic risk from the Cotopaxi.

# 3. Campagne de mesure 2007

En janvier 2007, une campagne de mesures d'environ une semaine à permis de réaliser deux profils de mesures radar, un sur le versant Nord et un autre sur le versant Sud. Les versants Est et Ouest se sont montrés trop difficiles d'accès. Une dizaine de personnes ont participé à cette campagne, notamment deux Chiliens du Centro Investigación Científica Valdivia (Chili) avec leur système radar.

## 3.1. Le système radar

Le système radar utilisé est un radar à impulsion avec une fréquence de 6 MHz. Toutes les 2 secondes une mesure est enregistrée.
Cette méthode consiste à émettre une impulsion en utilisant des antennes qui propagent une onde électromagnétique à partir d'un émetteur situé en surface du glacier (Copland et Sharp, 2001; Black, 1992). L'impulsion qui traverse la glace, est réfléchie sur le socle rocheux puis enregistrée par une deuxième antenne réceptrice en surface. Les radars à impulsion sont souvent utilisés dans les études géophysiques, archéologiques ou glaciologiques. La tension des impulsions est générée par la décharge d'une capacité de l'ordre de plusieurs kilovolts. Les impulsions sont dirigées à l'aide d'adaptateurs d'impédance situées à l'intérieur des antennes.
La Figure 3.1 montre la géométrie de ce genre de dispositif de mesures. La distance $D$ correspond à l'épaisseur de glace cherchée, $S$ correspond à la distance entre l'émetteur et le récepteur et $\Delta t$ correspond au temps entre l'arrivée de l'onde directe en surface et la réception de l'onde réfléchie en profondeur. La profondeur est donnée par (Narod et Clarke, 1994) :

$$D = 0.5\sqrt{c'^2(\Delta t + \frac{S}{c})^2 - S^2}, \tag{3.1}$$

où $c$ représente la vitesse de l'onde électromagnétique dans l'air et $c'$ celle dans la glace. Un exemple de signal obtenu est présenté sur la Figure 3.2.
L'ensemble du dispositif de mesures est schématisé sur la Figure 3.3. En pratique, les deux antennes sont transportées dans des sangles (Fig. 3.4(a)). Elles sont tirées l'une derrière l'autre et non pas en parallèle comme souvent pour ce genre de dispositif. Pour garder une distance à peu près constante entre elles, elles sont espacées par une corde de 8 m (Fig. 3.4(b)). En dehors des antennes, de l'émetteur et du récepteur, le système d'acquisition consiste en un ordinateur de terrain (Fig. 3.4(c)), un oscilloscope (Fig. 3.4(d)) et bien sûr des batteries d'alimentation (Fig. 3.4(e)). Le parcours effectué est simultanément enregistré par GPS. Les données GPS et les données radar sont ultérieurement synchronisées à l'aide de l'heure. La progression (Fig. 3.4(f)) se fait à plusieurs personnes alignées les unes derrière les autres.

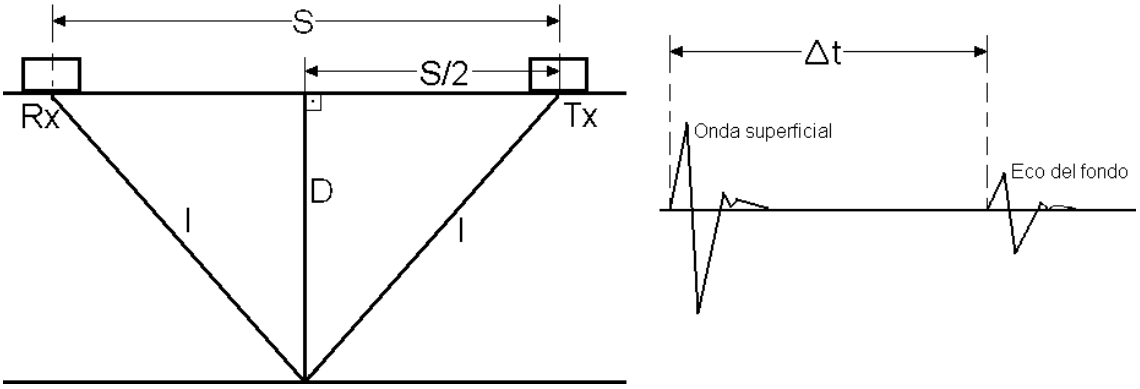



FIG. 3.1.: Géométrie de la mesure de l'épaisseur de glace à l'aide d'un radar à impulsion en surface.
`Geometry of ice thickness measurements using a bistatic impulse radar operating from the surface.`

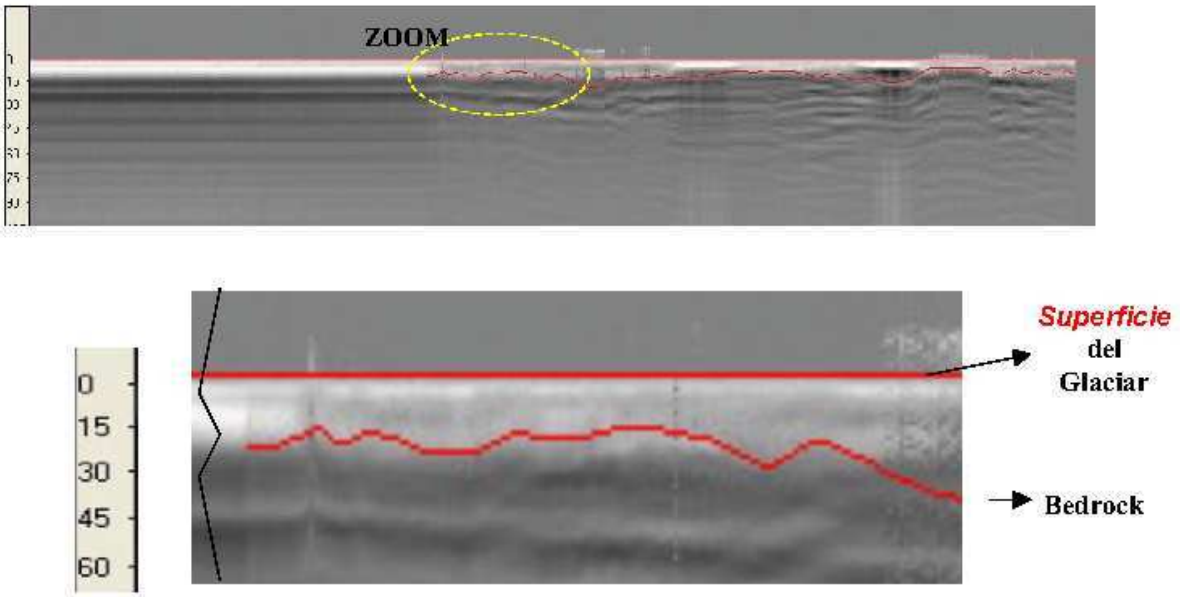



FIG. 3.2.: Exemple d'une réflexion radar marquant le profil topographique du socle.
`Radar profile outlining the underlying bedrock topography.`

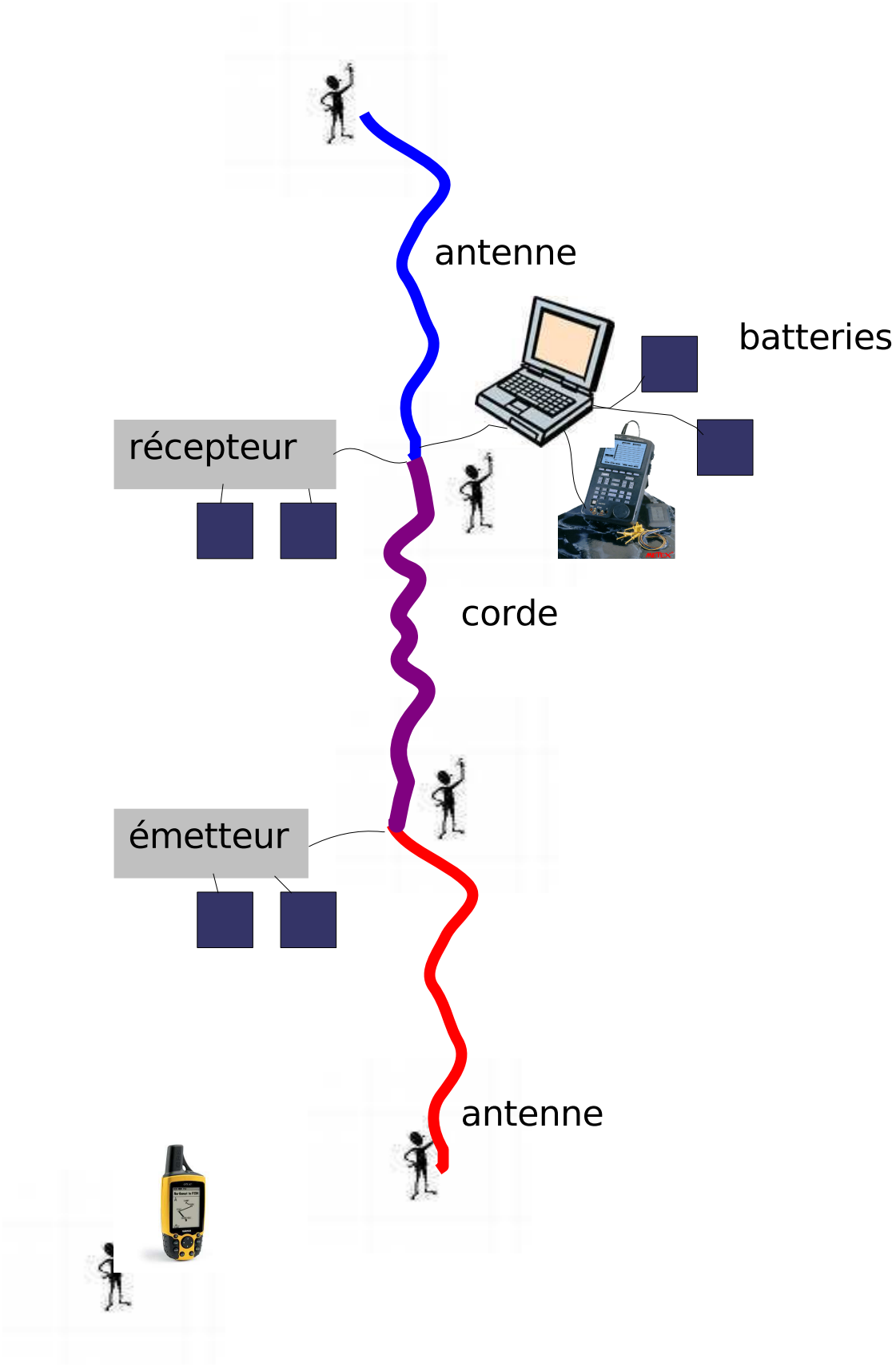



FIG. 3.3.: Vue d'ensemble du dispositif de mesures radar.
`Overview of the radar measurement system.`

(a) L'antenne dans une sangle.
The antenna wrapped in a strap.

(b) La corde entre les deux antennes.
The rope between the two antennas.

(c) L'ordinateur de terrain. Field computer.

(d) L'oscilloscope. The oscilloscope.

(e) Alimentation en énergie (batteries).
Power supply (batteries).

(f) En progression. On the move.

FIG. 3.4.: Les différents éléments du système radar.
The different components of the radar system.

## 3.2. Résultats

Deux profils, l'un en versant Nord, l'autre en versant Sud (ainsi qu'un petit profil test aussi en versant Sud) ont pu être réalisés (Figure 3.5).

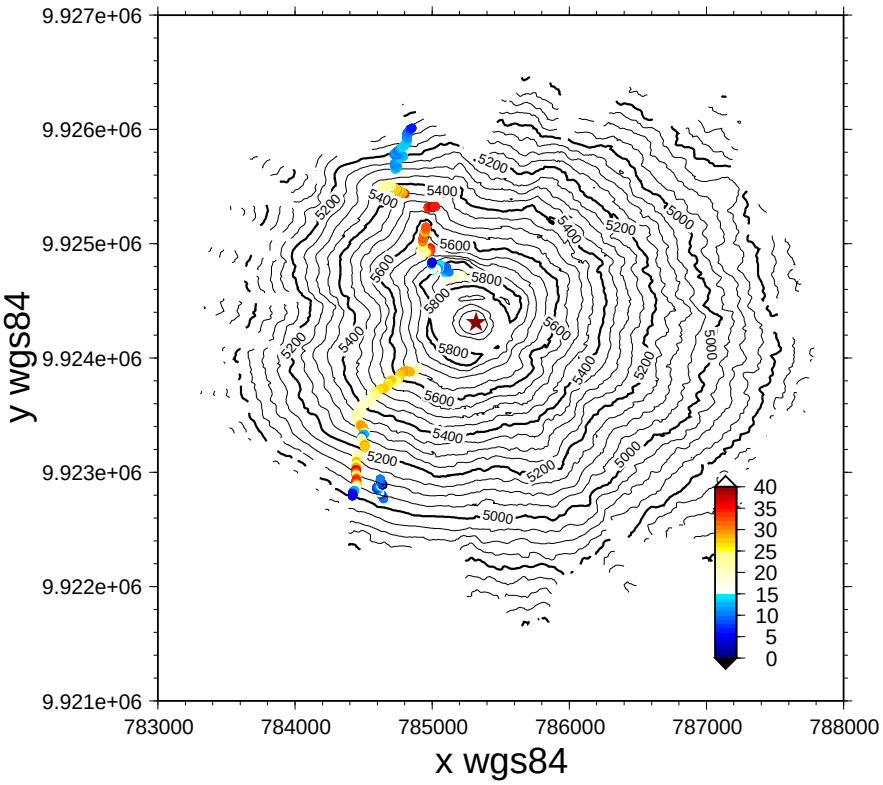



FIG. 3.5.: Profils de mesures radar réalisés en 2007 sur le Cotopaxi.
`Radar measurement profiles carried out in 2007 on the Cotopaxi.`

Au Nord, le profil suivait la voie normale d'ascension du sommet. Dans la partie basse, une zone plus large a été balayée par quelques zigzag, ceci afin de retrouver (en vain) une dépression détectée en 2004.
Côté sud, il a fallu abandonner un peu en-dessous du sommet à cause d'une mauvaise météo.
Les profils, présentés en détail sur la Figure 3.6, montrent une faible épaisseur de glace presque uniforme. L'épaisseur de glace diminue seulement vers le front et vers le cratère. On suppose une très faible épaisseur de glace dans la partie supérieure vers 5650 m au-dessus d'une petite rupture de pente. Malheureusement ceci n'a pas pu être tout à fait confirmé avec un seul profil atteignant le sommet. Cette zone est partiellement déneigée

en quelques endroits (cf. Figure 3.7). D'un point de vue modélisation il sera important de mieux connaître cette zone pour savoir si la glace qui s'y trouve participe activement à l'écoulement, et/ou si elle peut être la source d'apports de neige dans les zones plus basses, via les avalanches ou chutes de séracs.

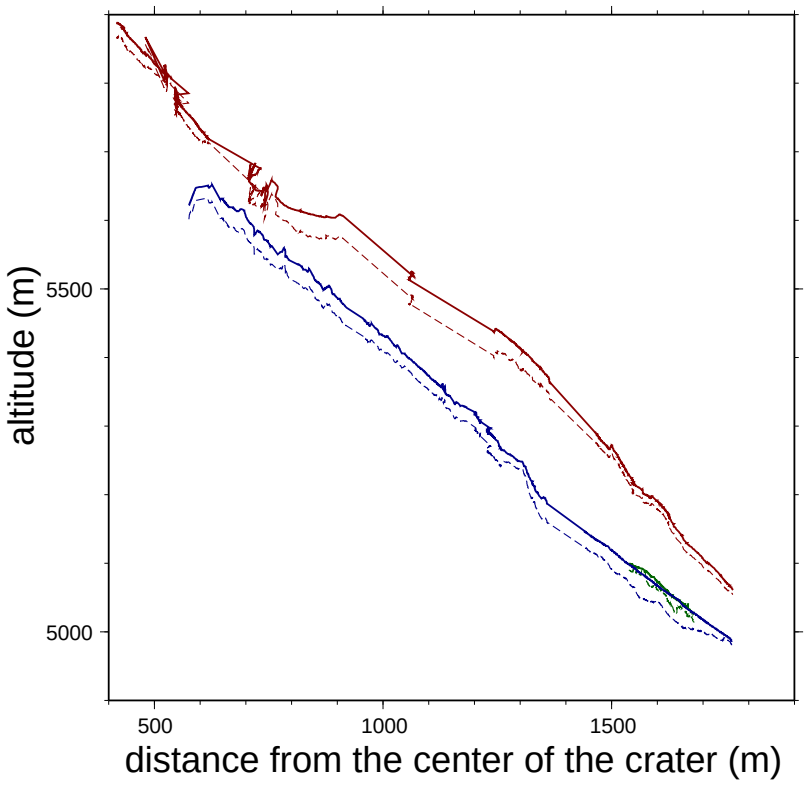



FIG. 3.6.: Epaisseurs de glace le long des profils radar de 2007 représentée en coupe (profil Nord en rouge, profils Sud en bleu et vert).
`Ice thickness cross-sections along the radar profiles carried out in 2007 (North profile in red, South profiles in blue and green).`

La Figure 3.8 montre une épaisseur moyenne de glace d'environ 25 m sur la plus grande partie du glacier. L'épaisseur maximale trouvée est de 38 m de glace.

FIG. 3.7.: La zone déglacée sous le sommet.
`The deglaciated zone below the summit.`

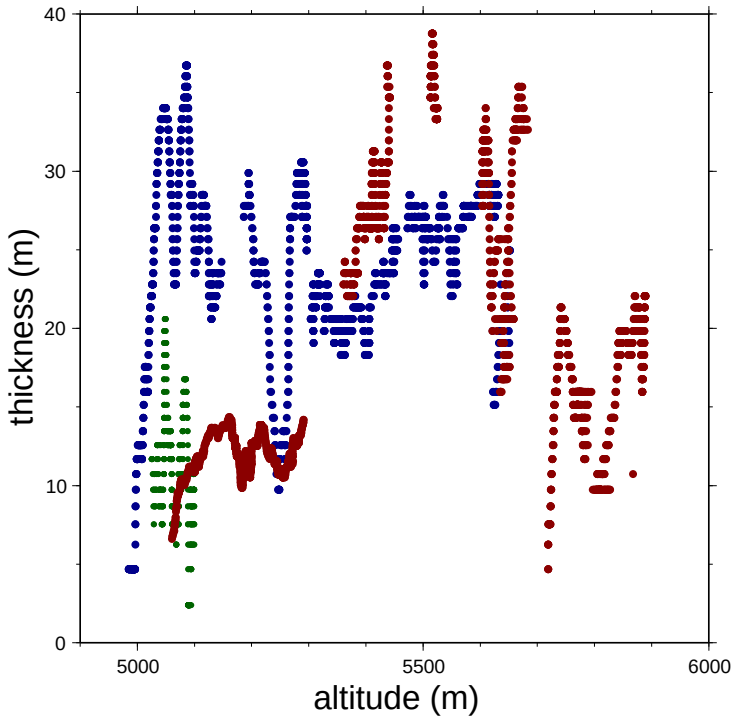



FIG. 3.8.: La distribution de l'épaisseur de glace le long des 3 profils de 2007, même code couleur que sur la Figure 3.6.
`Thickness distribution along the 3 profiles from 2007, same color code as in Figure 3.6.`

## 3.3. Discussion des résultats

Comme indiqué dans la section précédente et comme cela sera détaillé dans le chapitre sur la modélisation, les données sont largement insuffisantes pour correctement modéliser le glacier.
De plus, une certaine prudence s'impose quant à la performance et l'adéquation du système radar utilisé. En particulier, la mesure correcte des faibles épaisseurs de glace rencontrées nécessiterait une fréquence de fonctionnement du radar plus élevée.
De plus, comme souvent lors des mesures radar, des réflexions multiples sont apparues. En effet, on observe souvent des réflexions multiples d'une part sur les bords d'un glacier quand celui-ci est encaissé dans une vallée (réflexions latérales), et d'autre part lorsqu'il existe une alternance de couches de glace et de sédiments en profondeur, ce qui peut facilement être le cas avec d'anciennes couches de cendres volcaniques. La réflexion retenue a toujours été la première, ce qui peut avoir comme conséquence que les épaisseurs de glace sont systématiquement sous-estimées.
Dans le futur, plus de mesures seront nécessaires, notamment des mesures à l'aide d'autres fréquences, avec différents systèmes, et sur des profils croisés. Un forage pourrait être aussi très utile pour confirmer la stratégie d'interprétation des réflexions multiples.

# 4. Données disponibles

## 4.1. Régime Thermique

Aucune donnée concernant le régime thermique n'est actuellement disponible. Néanmoins, on suppose que la glace est isotherme et qu'il n'y a pas de fusion basale malgré l'activité volcanique (ou du moins qu'elle est négligeable). L'hypothèse que la glace est isotherme est confirmée par des mesures sur d'autres glaciers équatoriaux. Par exemple au Chimborazo (le sommet plus haut d'Equateur, situé un peu plus au sud), la glace est tempérée jusqu'à environ 6000 m d'altitude, pour ensuite devenir froide (températures inférieures à 0° C) au dessus (Francou, 2007). Quant au glissement, nous avons appliqué, à défaut de mieux, la même loi avec les mêmes paramètres que pour les simulations sur le glacier de Saint Sorlin.

## 4.2. Épaisseur de glace

Pour l'épaisseur de glace, deux campagnes de mesures radar ont été entreprises, une en 2004, l'autre en 2007. En 2004 (Rapport IRD, 2004), des mesures en continu n'ont pas été possibles, mais des mesures ponctuelles ont été faites en divers endroits (Figure 4.1). Il s'est avéré que les mesures de 2004 et 2007 ne sont pas compatibles au niveau de l'interprétation des signaux radar, notamment par rapport aux réflexions multiples.
L'épaisseur moyenne de glace mesurée en 2004 est autour de 40 m et celle mesurée en 2007 est de 25 m (cf. Chapitre 3). Plutôt que d'invoquer 15 m de fonte au cours des trois dernières années, on suppose que cette différence est plutôt liée à une interprétation différente des réflexions multiples en 2004 et 2007.
Une meilleure prise en compte de ces effets sera nécessaire pour interpréter les données d'une façon cohérente et pour pouvoir comparer les deux années en terme de perte de glace et/ou eau.

## 4.3. Bilan de masse

Le bilan de masse sur le Cotopaxi n'est pas du tout connu. Pour l'instant, les bilans d'un autre glacier volcanique - l'Antisana (Fig. 4.2) - avec une altitude de 5705 m situé à 50 km du Cotopaxi, sont utilisés.
Sur l'Antisana, le bilan de masse est suivi depuis quelques années le long de deux profils, malheureusement tous les deux exposés selon la même orientation.
Il se révèle que le bilan de l'Antisana peut-être caractérisé par une dépendance linéaire avec l'altitude, avec un changement du coefficient à la ligne d'équilibre (Fig. 4.3).

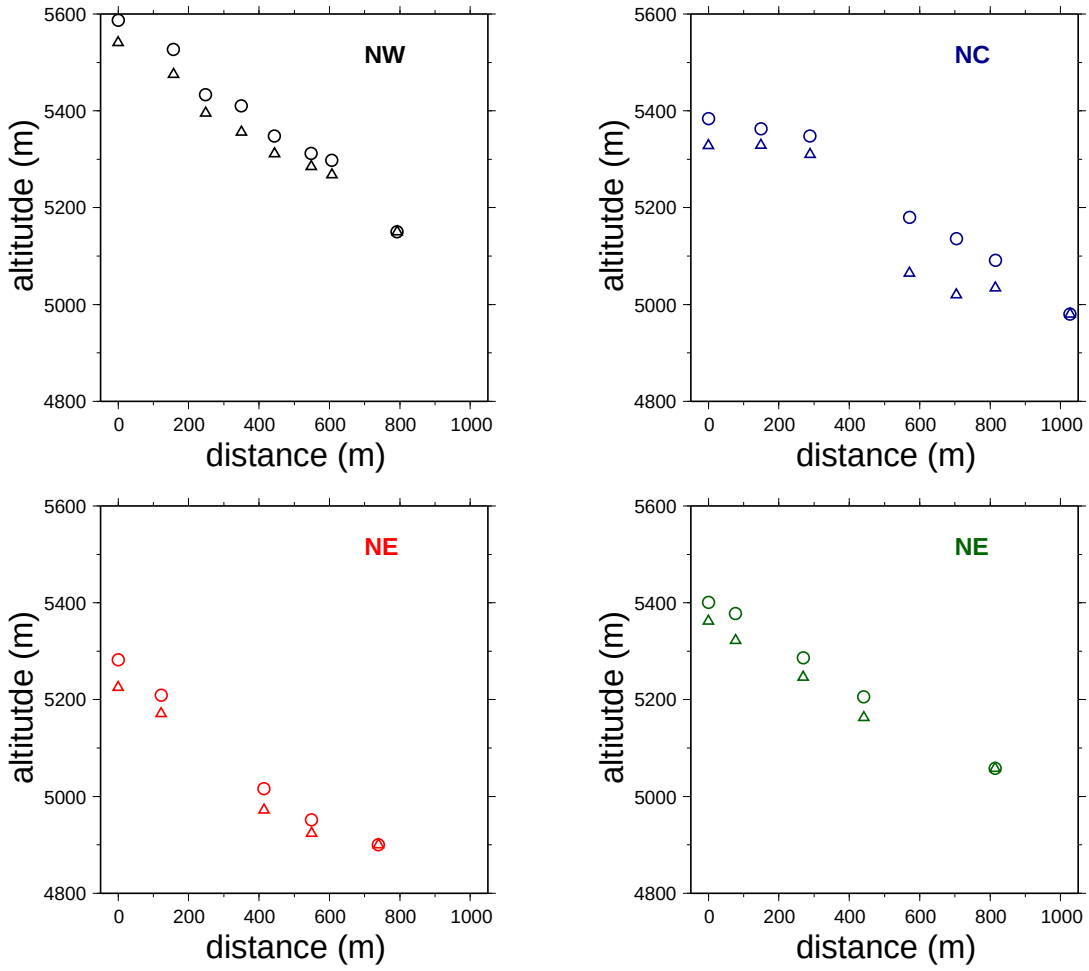



FIG. 4.1.: Mesures radar en 2004 : ∘ représente la surface de glace et △ le socle rocheux. NW indique le profil Nord-Ouest, NC le profil Nord (centre) et NE les profils Nord-Est.
`2004 Radar measurements : ∘ features the ice surface whereas △ stands for the bedrock. NW stands for the North-West profile, NC for the North (center) one and NE for the North-East ones.`

Dans une première étape les valeurs de 2001 sont considérées. Il s'agit d'une année ne subissant ni des effets El Niño ni des effets El Niña importants.

$$c_1 = 0.022,\ c_2 = 0.00114$$

On fait l'hypothèse que les deux coefficients de linéarité ne dépendent ni du temps, ni de l'exposition et qu'ils sont les mêmes au Cotopaxi et à l'Antisana.

FIG. 4.2.: Le volcan Antisana. `The Antisana volcano.`

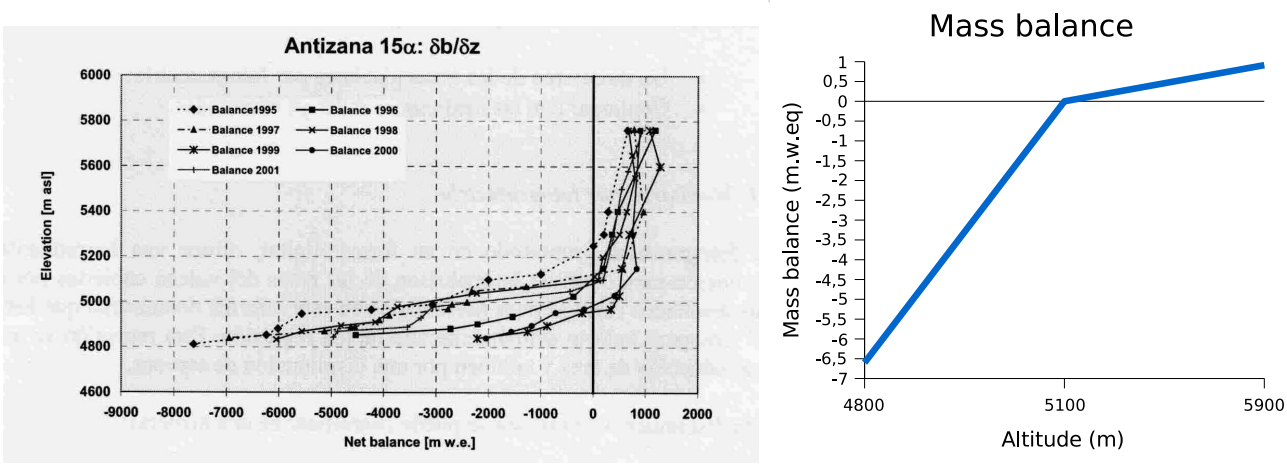



FIG. 4.3.: Mesures de bilan de masse sur le glacier 15 de l'Antisana (Cáceres et al., 2003) et sa paramétrisation utilisée dans cette étude.
`Measured mass balance on the glacier 15 of the Antisana (Cáceres et al., 2003) and its parametrization used in this study.`

Seule l'altitude de la ligne d'équilibre est supposée varier en fonction du temps, de l'exposition et aussi de l'Antisana au Cotopaxi.
Néanmoins, malgré la proximité de l'équateur, on suppose une certaine dépendance de l'altitude de la ligne d'équilibre (et peut-être aussi des coefficients de proportionnalité) à l'exposition car les différents versants ne sont pas exposés de la même façon aux nuages et aux précipitations.

## 4.4. Surface topographique

La surface topographique est connue pour les années 1976, 1997 et 2006 grâce à l'aérotriangulation (Jordan et al., in press) (Figures 4.4 et 4.5).

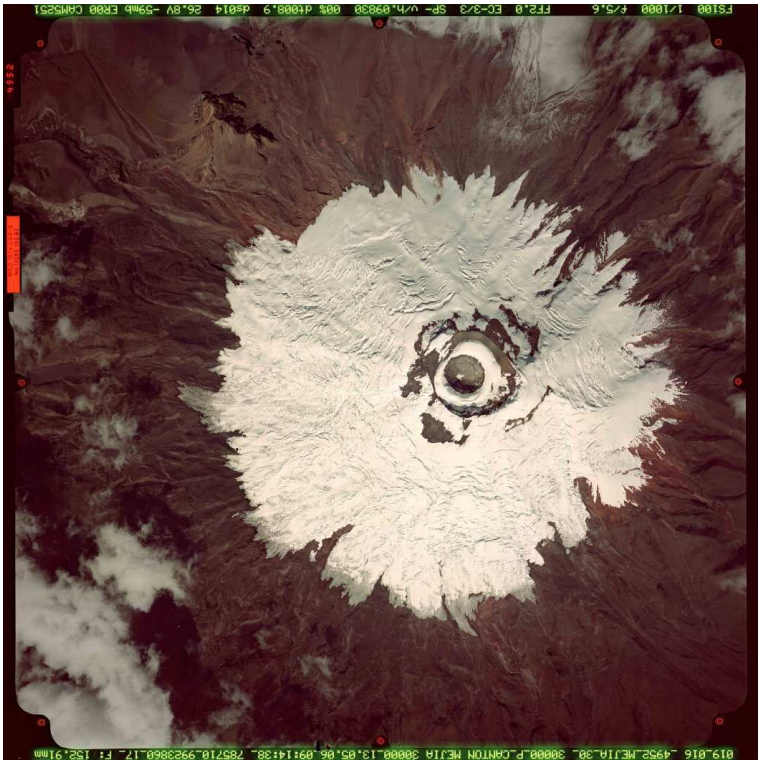


FIG. 4.4.: Orthophoto du volcan prise en 2006, IRD Quito.
`Orthophoto from the Cotopaxi, 2006, IRD Quito.`

En 1976, une surface de 20 $km^2$ était couverte de glace. Depuis, 309 millions $m^3$ d'eau ont été perdus et 7.3 $km^2$ ont été déglacés (pour plus de détails voir le Tableau 4.1).

| période | perte de surface | | perte de volume |
|---|---|---|---|
| | en $km^2$ | en % | en millons de $m^3$ |
| 1976 - 1997 | 5.7 | 29 | 270 |
| 1997 - 2006 | 1.6 | 12 | 39 |
| 1976 - 2006 | 7.3 | 38 | 309 |

TAB. 4.1.: Pertes en surface et volume du glacier du Cotopaxi.
`Ice surface and volume losses of the Cotopaxi glacier.`

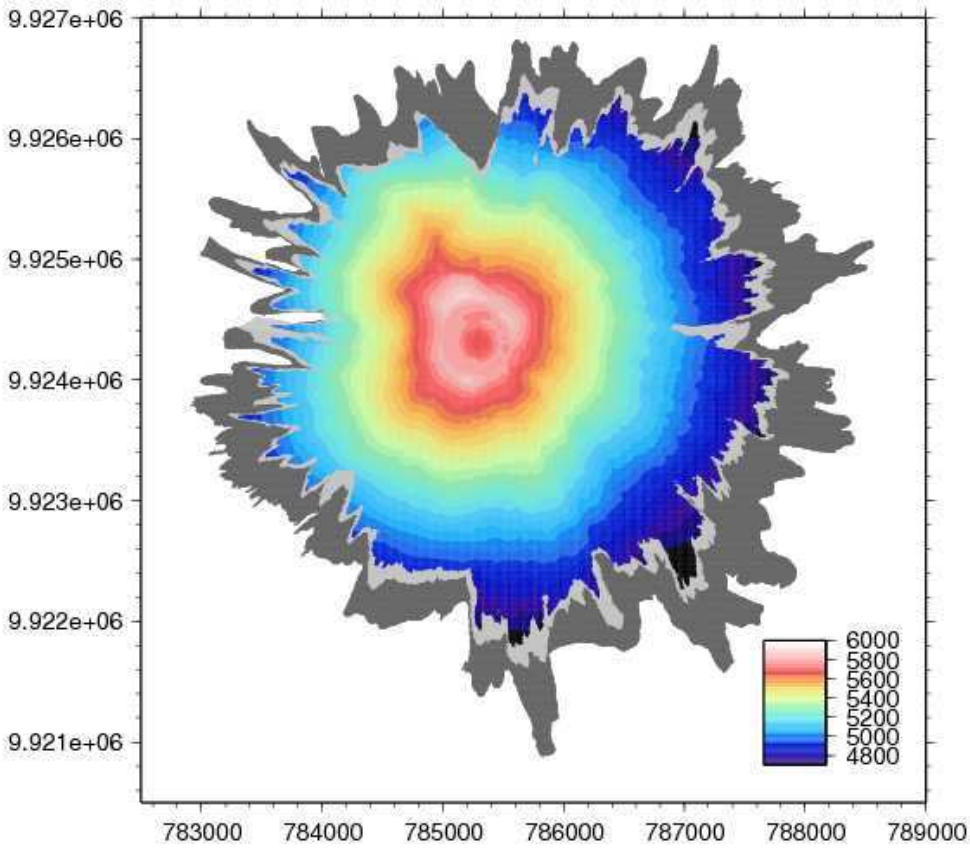



FIG. 4.5.: Topographie de surface du Cotopaxi de 2006 (en couleur) à laquelle ont été ajoutés les contours de 1976 et de 1997 (en gris).
`Surface topography of the Cotopaxi in 2006 (colored) on top of the glacier outline in 1976 and 1997 (grey).`

# 5. Modélisation

## 5.1. Choix du modèle

Les toutes premières simulations ont été effectuées avec un modèle SIA (Le Meur et Vincent (2003), partie IV). Plus tard il s'est révélé que ce modèle n'était pas adapté à ce type de glacier. Ces premiers résultats avaient plus une dimension pédagogique que scientifique en accord avec ce qui m'était demandé à Quito. Ces résultats (influence de la ligne d'équilibre sur la position du front, influence de la pente sur le front et l'épaisseur de glace, influence du bilan,...) ne sont donc pas montrés ici.
Au cours d'une étape suivante (voir la Partie V), les différents modèles d'écoulement disponibles ont été comparés et testés. Le glacier synthétique conique utilisé dans cette comparaison et dont les caractéristiques principales sont :
– un socle rocheux en forme de cône,
– une pente variant entre 0.3 et 0.8,
– de la glace de 4800 m à 5800 m,
– un cratère sans glace au milieu au niveau duquel le bilan de masse est nul,
– un bilan de masse égal à celui de l'Antisana avec une ligne d'équilibre vers 5100 m,
est proche de la géométrie du Cotopaxi.
Les simulations de la surface stationnaire montrent que le modèle SIA n'est pas approprié (Fig. 5.1 et Partie V), car la surface stationnaire avec ce modèle est très différente de celle avec Elmer, le modèle qui est considéré le plus proche de la réalité (Partie V). Le modèle Elmer a été préféré par rapport à celui dit *higher order* de Pattyn (2003) car ce premier peut tirer parti de la symétrie axiale du problème et ainsi beaucoup gagner en temps de calcul.

## 5.2. Simulation réaliste

Avec les données disponibles, il n'était pas envisageable de faire une simulation réelle de l'ensemble du volcan Cotopaxi.
Au lieu de cela, le glacier synthétique conique a été adapté au mieux aux données réelles de 2007, c'est-à-dire une position de front vers 4850 m, une épaisseur de glace de 25 m et une pente de 0.55. La surface stationnaire en fonction de l'altitude de la ligne d'équilibre a été étudiée. Selon les simulations, pour garder la même position de front qu'aujourd'hui, la ligne d'équilibre devrait se trouver à 5000 m (Fig. 5.2). Cependant, bien que les résultats de l'aérotriangulation montrent qu'on est presque dans le cas d'une surface stationnaire (Francou, 2007), il est impossible de modéliser une surface stationnaire correspondant à la surface d'aujourd'hui, notamment dans la partie supérieure du gla-

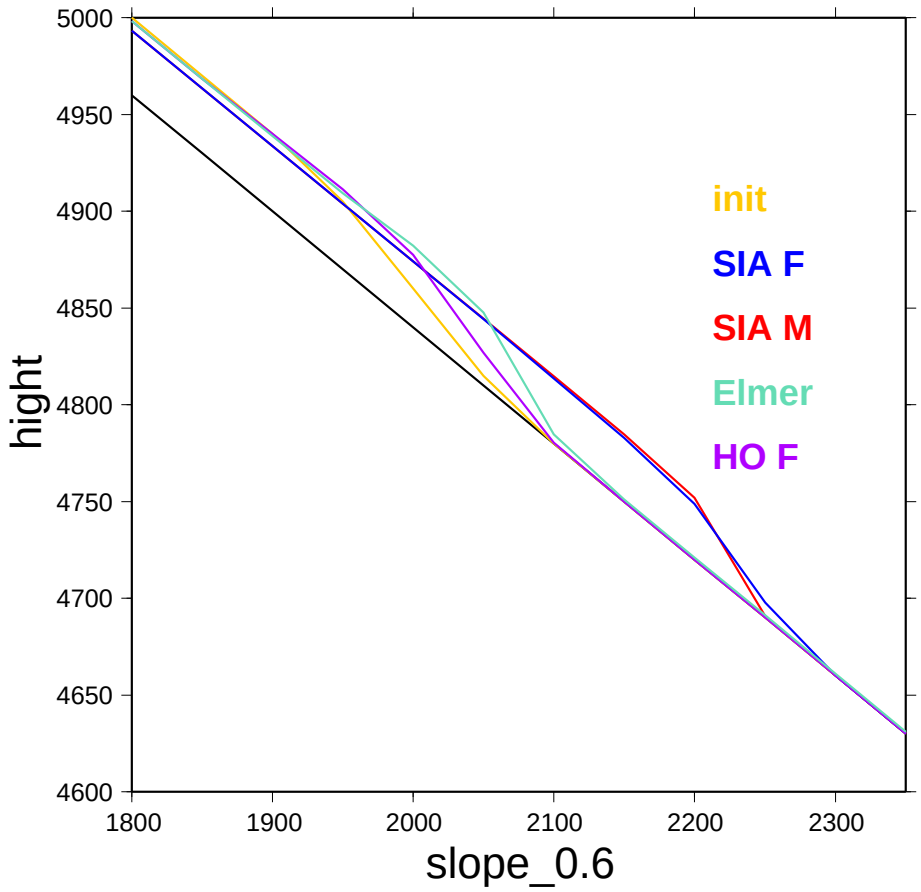



FIG. 5.1.: Simulation de la surface stationnaire du Cotopaxi à l'aide de différents modèles pour trouver le modèle le plus adapté à l'écoulement du glacier du Cotopaxi. La surface initiale (init) ainsi que les différentes surfaces obtenues par les modèles proposés sont présentées (pour des détails sur les différents modèles voir le Chapitre V.2).
`Simulation of the steady state surface of the Cotopaxi with various models in order to find an appropriate model for this glacier. The initial surface as well as the different surfaces produced by the proposed models are depicted (details of the different models can be found in Chapter V.2).`

cier. Ceci montre que le glacier synthétique proposé ici ne permet pas de reproduire exactement l'écoulement du Cotopaxi. L'épaisseur de glace devrait être mieux connue, notamment dans la zone sommitale ainsi que l'influence du cratère (influence thermique et/ou topographique et une éventuelle redistribution de la neige ou de la glace).

Aucune autre simulation n'a ensuite été effectuée, les anciennes effectuées avec la SIA n'ont pas non plus été reprises. En effet, il semble essentiel et indispensable de mieux comprendre dans un premier temps la géométrie du glacier avant de poursuivre en modélisation.

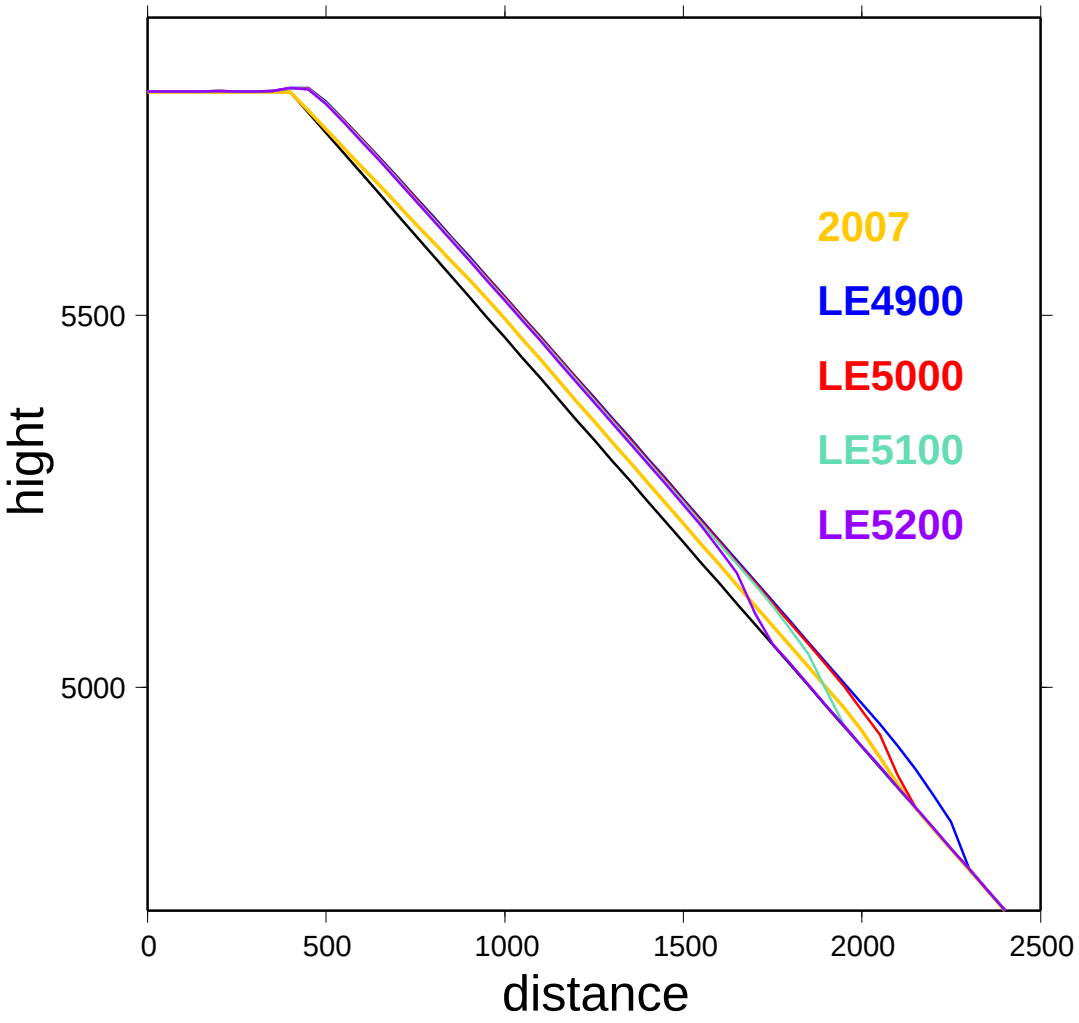



FIG. 5.2.: Détermination de l'altitude de la ligne d'équilibre de 2007 offrant la position la plus réaliste du front.
`Determination of the equilibrium line altitude in 2007 that best matches the snout position.`

# 6. Conclusion

## 6.1. Données

Les données topographiques et radar donnent une première impression de la géométrie du glacier et de son volume. Plus de mesures seront nécessaires pour mieux comprendre cette géométrie, notamment autour du cratère et au dessus de la petite rupture de pente. D'autre part la méthode d'interprétation des signaux radar devrait être revue et mise au point.
Un réseau d'au moins quelques balises afin de mieux caler les paramètres de la distribution du bilan de masse (paramétrisation comme pour l'Antisana) sera nécessaire.
L'apport de neige en terme d'avalanche ou chute de sérac de la partie haute et sommitale devrait aussi être examiné.

## 6.2. Modélisation

Des tests simples sur un glacier avec une géométrie simple mais proche du Cotopaxi ont montré qu'un simple modèle SIA n'est pas approprié. Le modèle Elmer (*Full Stokes*) a donc été proposé. Des simulations avec ce modèle avec une géométrie proche de la réalité montrent que la ligne d'équilibre actuelle devrait être vers 5000 m. Mais il persiste trop d'incertitudes sur la géométrie et sur le bilan de masse pour aller plus loin en terme de modélisation.

Septième partie .

# Conclusions

Dans cette thèse des aspects très variés de la modélisation (l'implémentation, l'amélioration mais aussi l'utilisation et l'application de modèles glaciologiques) ont été abordés. D'une part des points assez techniques proches du développement d'un modèle ont été traités, et d'autre part des aspects concernant aussi les données (collecte, utilisation).
En même temps, la participation à des campagnes de mesures sur le terrain a donné une assez bonne impression de l'effort de collecte, mais aussi de ce qu'il est possible d'obtenir comme données en terme de précision, de résolution et de fréquence.
A plusieurs reprises il a fallu faire face au manque de données, comme par exemple avec le glacier du Cotopaxi où pour l'instant très peu de données ont été collectées, le seul remède étant alors l'utilisation d'un glacier synthétique. En ce qui concerne les simulations de l'évolution future d'un glacier (ici le glacier de Saint Sorlin), le manque évident de données a été comblé par l'utilisation d'un modèle de bilan de masse.

Dans la Partie IV un nouveau schéma numérique est introduit dans un modèle SIA déjà utilisé auparavant. Ce schéma semi-implicite remplace un schéma ADI et conserve ainsi nettement mieux la masse. Dans le cas du glacier de Saint Sorlin, l'impact sur l'évolution de la géométrie n'est pas très important, ce qui permet de considérer les travaux effectués auparavant avec le schéma ADI comme toujours valables.
D'autres simulations ont montré l'importance d'empêcher la glace de coloniser les régions en amont de la rimaye. Dans la réalité la neige qui y tombe ne peut pas persister à cause d'une pente trop élevée et elle est alors rapidement transportée ailleurs (par le vent ou les avalanches) et participe donc ailleurs au bilan de masse dont les mesures tiennent déjà compte en ces endroits.
Une dernière amélioration traitant des épaisseurs négatives qui peuvent apparaître en bordure de glacier est introduite. Des solutions autres qu'une simple mise à zéro (ce qui affecte la conservation de la masse) sont proposées et résolvent en grande partie ce problème.

Cette partie présente également un travail sur l'évolution future du glacier de Saint Sorlin à l'aide de ce modèle amélioré. Pour cela, une nouvelle approche pour le bilan de masse est introduite (grâce à un modèle de bilan de masse), comparée avec les mesures et finalement validée. Un avantage autre que la prédiction du bilan de masse futur selon un scénario climatique donné est également apparu : les bilans de masse pour des zones inaccessibles ou simplement difficiles d'accès peuvent ainsi être simulés.
Avec le scénario B1 du IPCC le glacier devrait disparaître avant la fin du siècle comme beaucoup d'autres glaciers de cette taille à cette altitude dans les Alpes. L'évolution du glacier montre également l'importance d'un modèle d'écoulement pour une telle prédiction, car en fait, les derniers vestiges de glace ne se situent pas aux endroits avec les bilans les plus positifs, mais sont déterminés par l'interaction entre le bilan et l'écoulement de la glace ainsi que, bien sûr, par la distribution initiale de glace.

La partie V, qui porte sur une inter comparaison entre différents modèles, adresse essentiellement la question du type de modèle devant être utilisé pour une certaine géométrie

de glacier. Elle porte sur quatre modèles différents, deux modèles SIA, un modèle d'ordre supérieur et un modèle qui résoud les équations de Stokes sans approximation. On suppose que ce dernier modèle, ELMER, reproduit la réalité au mieux. Les différences observées entre les différents modèles ne sont pas uniquement des résultats d'effets numériques (sauf entre les deux modèles SIA) car on compare des modèles avec des approximations différentes de la physique de l'écoulement.
Différentes géométries synthétiques et expériences incluant un cas réel ont été proposées. Ils s'agit d'une demi-sphère sur un plan incliné, d'un glacier conique proche du Cotopaxi, d'un glacier de vallée proche du glacier d'Argentière et du glacier de Saint Sorlin. Les quatre modèles ont été adaptés sur ces différentes géométries. Plusieurs problèmes de non-convergence ont été rencontrés, souvent liés au glissement basal et à l'absence de glace sur de grandes surfaces.

Les modèles SIA sont des modèles généralement utilisés dans la modélisation des grandes calottes glaciaires comme l'Antarctique ou le Groenland, car ils présentent l'avantage d'un très faible coût informatique. Par contre, en principe cette approximation est uniquement valable pour des objets glaciaires avec un rapport d'aspect et une pente du socle rocheux faibles car les contraintes longitudinales ($\sigma'_{x,y,z}$) et le cisaillement dans le plan horizontal ($\tau'_{xy}$) sont négligés dans cette théorie. Il s'agit donc d'une théorie locale comme il n'y a aucune transmission de contraintes d'un point du glacier à un autre. Dans le cas d'une topographie perturbée ou un socle rocheux avec une certaine rugosité cette hypothèse n'est certainement pas valable ainsi que dans le cas d'un glissement basal important, surtout dans le cas d'une forte variabilité spatiale qui se traduit par la transmission de contraintes entre les différentes points de grille du modèle.
Dès que ces contraintes deviennent trop importantes, il faut alors avoir recours à un modèle plus sophistiqué, plus coûteux, un modèles d'ordre supérieur voire un *Full Stokes*.
Par rapport à la validité de la SIA, la conclusion principale du travail présenté ici réside dans le fait que la déformation de la glace est nettement surestimée par les modèles SIA, ce qui est lié au fait que le couplage avec les contraintes longitudinales est négligé et qu'il s'agit d'une théorie locale. Cette surestimation peut être observée sur les champs de vitesses, mais aussi sur la géométrie. On trouve un accord excellent entre les deux modèles SIA en terme de résultat. Par contre, le modèle utilisant des formules analytiques et une inversion de matrice à la place d'un calcul itératif pour la solution de l'équation de transport s'avère beaucoup plus rapide.
Par rapport à la géométrie, le modèle F HO sous estime un peu la déformation de la surface. Par contre, il présente un très bon accord pour les vitesses avec ELMER, le modèle sensé être le plus proche de la réalité. L'écart dans la surface, malgré un bon accord pour les vitesses, s'explique probablement par le cumul de petites différences et des différences dans la manière de calculer la nouvelle surface.
Le désaccord entre la SIA et les autres modèles s'amplifie avec le rapport d'aspect (expérience du glacier de vallée) ainsi qu'avec la pente du socle (expérience glacier conique).
Pour les simulations évolutives, on trouve un bon accord sur les vitesses entre tous les modèles grâce à une rétroaction négative pour la SIA : Initialement, la SIA surestime les

vitesses. Le glacier se déforme plus et devient moins épais qu'il ne devrait être, la surface devient plus lisse. Les vitesses, qui dépendent de l'épaisseur de glace et de la pente locale de surface, diminuent alors. Le glacier "freine". Ce phénomène se reproduit jusqu'à ce qu'on trouve un champ de vitesses qui est en "équilibre" avec la surface.
Avec glissement, on peut faire à peu près les mêmes observations. Dans les cas synthétiques, le glissement a été très probablement choisi trop faible pour observer de véritables effets. En principe la validité de la SIA devrait se dégrader dans les simulations avec glissement, car la transmission spatiale des gradients de contraintes (négligée dans la SIA) devient plus importante.
Les simulations avec champ de bilan de masse ne permettent pas pour l'instant de véritable conclusion sur l'influence respective sur la dynamique de la déformation visqueuse de la glace et de la contribution du bilan de masse. Même si la position du front est en général assez bien reproduite avec la SIA, la surface totale du glacier est, selon le cas, un peu mieux ou un peu moins bien reproduite avec un champ de bilan de masse.
Pour conclure, on peut dire que dans la plupart des cas, un modèle SIA devrait donner des résultats satisfaisants à condition de traiter des géométries avec des rapports d'aspect et des pentes du socle faibles ainsi que pour une topographie sans irrégularités ; et surtout lorsque l'intérêt principal porte sur la géométrie globale du glacier et non pas sur les vitesses ou la géométrie de détail.

Le gain en temps de calcul est important si on compare les modèles d'ordre supérieurs avec la SIA (facteur 1000 à 10 000). Par contre le changement d'un modèle d'ordre supérieur à un modèle Stokes complet n'est plus si important pour des simulations évolutives (facteur 10 à 100). Une étude plus détaillée sera nécessaire pour mieux préciser le genre de simulations pour lequel un modèle d'ordre supérieur pourra présenter des avantages par rapport à un modèle *Full Stokes*.
Malgré le rapport élevé entre le SIA et les autres modèles, selon l'application souhaitée le temps de calcul avec un modèle *Full Stokes* peut parfois rester tout à fait abordable, comme par exemple pour les simulations effectuées ici avec le glacier de Saint Sorlin (résolution spatiale 50 m, une vingtaine d'années de simulation avec un glacier d'une taille de l'ordre de 2 $km^2$). Par contre, pour des simulations avec une résolution bien plus fine ou pour des glaciers bien plus étendus et avec des temps de simulations bien plus longs (ex. un cycle glaciaire avec une calotte) ou encore des applications bien différentes comme des méthodes inverses, ce coût peut être beaucoup trop élevé.

Les simulations effectuées (simulations diagnostiques de 1905 et de 1998 ainsi que des simulations évolutives en partant de la surface de 1998) avec le glacier de Saint Sorlin dans le massif des Grandes Rousses en France confirment essentiellement les conclusions faites avec les géométries synthétiques.
Après un travail conséquent de préparation des données pour l'utilisation dans un modèle, une première confrontation avec les observations a été effectuée avec pour but de montrer ce qu'il sera possible et nécessaire de faire dans l'avenir. Quelques problèmes techniques concernant le modèle ainsi que les données ont été soulevés. Mais la conclusion principale

porte sur le fait qu'aujourd'hui le glissement ne peut pas être paramétré correctement, d'une part au niveau de la loi de glissement avec ses paramètres numériques, d'autre part au niveau de la variabilité spatiale et temporelle du processus. Apparemment il est encore aujourd'hui impossible de correctement reproduire la réalité pour un glacier de montagne même avec un modèle *Full Stokes*.

En terme de perspectives pour cette partie d'inter comparaison, il sera intéressant d'améliorer quelques détails des géométries choisies, mais surtout de comparer l'accord entre les modèles dans le temps, c'est-à-dire de ne plus comparer seulement les vitesses diagnostiques et les vitesses ou surfaces finales, mais de les comparer à des temps intermédiaires pour avoir une comparaison sur la dynamique des processus. Cela donnerait aussi des indications sur les critères à mettre en place pour sélectionner les durées de simulations ayant pour objet la comparaison de l'état final.
Pour le glacier sphérique, il serait intéressant de faire davantage varier la pente ou le rapport d'aspect du glacier lui-même pour essayer de comprendre pourquoi la SIA donne apparemment des résultats meilleurs pour les fortes pentes testées ici.
Quant au glacier de vallée, le paramètre $E_0$ induit un changement de pente qu'on pourrait éviter avec une autre paramétrisation de la géométrie. Il serait intéressant aussi d'effectuer de telles simulations.
Quant à des simulations destinées à reproduire la réalité, les perspectives se divisent en trois catégories ; (i) un travail technique pour améliorer les modèles utilisés (en priorité Elmer), (ii) un travail pour améliorer le jeu de données (en terme d'analyse, mais aussi en terme de mesures) et (iii) d'autres simulations qui permettront d'aller plus loin. Par rapport au point (i) le plus important à améliorer semble le problème des grandes zones sans glace où l'équation de transport n'est pas correctement résolue. Par rapport aux données, il sera intéressant de retravailler le champ de bilan de masse pour mieux définir la zone où les valeurs extrapolées issues des mesures seront appliquées. En terme de données disponibles, les données de la topographie du socle rocheux constituent le point faible, surtout sur la partie inférieure proche du front de 1998 et dans la pente sous l'Etendard.
Enfin, avant de pouvoir aller plus loin, le glissement devrait être mieux connu, un véritable modèle d'hydrologie basale devrait être établi permettant l'utilisant une loi de glissement non-linéaire avec une dépendance spatiale et temporelle.

La partie VI sort quelque peu des autres thématiques de cette thèse. Sur la demande de l'IRD un travail préliminaire sur le glacier du Cotopaxi dans les Andes a été effectué. Ce travail a été motivé par le risque glaciaire associé à ce glacier : en cas d'éruption volcanique une grande partie de la glace risque de fondre et cette eau ainsi que des laves torrentielles conséquentes pourraient menacer plusieurs villages et villes, notamment certaines zones de la capitale Quito. Il apparaît souhaitable de connaître l'évolution du volume de glace en jeu. Ce premier travail à surtout consisté en une synthèse des données disponibles et des perspectives sur ce qu'il serait nécessaire dans la suite de produire en terme de données pour un travail de modélisation correct.

Les données topographiques et radar disponibles pour l'instant donnent une première impression de la géométrie du glacier et de son volume. Plus de mesures seront nécessaires pour mieux comprendre cette géométrie, notamment autour du cratère et au dessus de la petite rupture de pente. L'apport de neige en terme d'avalanche ou de chute de sérac de la partie haute et sommitale devrait aussi être examiné. Dans un premier temps la méthode d'interprétation des signaux radar devrait être revue et mise au point pour obtenir des mesures plus fiables.
Un réseau d'au moins quelques balises afin de mieux caler les paramètres de la distribution du bilan de masse ainsi que pour mettre en évidence une éventuelle dépendance à l'exposition (effets des nuages ou des précipitations) sera nécessaire.
En terme de modélisation, des tests simples sur un glacier avec une géométrie simple mais proche du Cotopaxi ont montré qu'un simple modèle SIA n'est pas approprié. Le modèle Elmer (*Full Stokes*) a donc été proposé. Des simulations utilisant ce modèle avec une géométrie proche de la réalité montrent que la ligne d'équilibre actuelle devrait être vers 5000 m. Mais il persiste encore trop d'incertitudes sur la géométrie et sur le bilan de masse pour aller plus loin en terme de modélisation.
Ce travail montre alors bien l'importance de la qualité des données pour la modélisation et illustre comment la modélisation peut inversement donner des indications importantes sur les données nécessaires ou manquantes.

# Huitième partie .

# Annexes

# 1. Méthodes numériques

[1] Les modèles mathématiques permettent la représentation du phénomène physique de l'écoulement et de la déformation de la glace. Ils utilisent tous des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires (EDP) dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage).

Pour passer d'un tel problème exact continu régit par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- **Les Différences Finies**
  La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.
  Avantages : grande simplicité d'écriture et souvent un faible coût de calcul.
  Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.
- **Les Volumes Finis**
  La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.
  Avantages : permet de traiter de géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, méthode plus naturelle pour des conditions aux limites de type Neumann.
  Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence.
- **Les Éléments Finis**
  La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (par exemple la minimisation de l'énergie) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.
  Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.
  Inconvénient : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

[1] Cette partie est inspirée de Goncalvès (2005).

## 1.1. Les Différences Finies

### 1.1.1. Principe

La méthode se déduit directement de la définition de la dérivée et consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développement de Taylor. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du $18^{ème}$ siècle (Euler, Taylor, Leibniz...). Soit $u(x,y,z,t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y,z,t) - u(x,y,z,t)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Si $\Delta x$ est petit, un développement de Taylor de $u(x+\Delta x,y,z,t)$ au voisinage de $x$ donne :

$$u(x+\Delta x,y,z,t) = u(x,y,z,t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y,z,t) + \dots \tag{1.2}$$

En tronquant la série au premier ordre en $\Delta x$, on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x,y,z,t) - u(x,y,z,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t) + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{1.3}$$

Cette approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t)$ est alors d'ordre 1, indiquant que l'erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de $\Delta x$.

### 1.1.2. Schémas d'ordre un

Dans le cas 1D, on note $u_i$ la valeur discrète de $u(x)$ au point $x_i$, soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud $x_i$, on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées de la grandeur $u$ et dans les cas multidimensionnels.
Pour la dérivée première il y a deux façons différentes d'écrire le schéma aux Différences Finies d'ordre 1 en notation indicielle : en schéma "avant" ou *forward*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \tag{1.4}$$

ou en schéma "arrière" ou *backward*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{1.5}$$

Ces schémas sont souvent utilisés aux bords du maillage.
Cette dérivée peut également être considérée au point $i+\frac{1}{2}$ (ou $i-\frac{1}{2}$) et est alors centrée dans le cadre de grilles alternées.

### 1.1.3. Schémas d'ordre supérieur

Des schémas aux Différences Finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de $x_i$. On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3), \tag{1.6}$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3). \tag{1.7}$$

La soustraction de ces deux relations donne : $u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$. Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour la première dérivée de $u$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{1.8}$$

Ce schéma est en général utilisé à l'intérieur du maillage.
Au bord on obtient à l'ordre deux

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-4u_{i-1} + u_{i-2} + 3u_i}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \ (\textit{backward}) \text{ et} \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-4u_{i+1} - u_{i+2} - 3u_i}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \ (\textit{forward}). \tag{1.10}$$

## 1.2. Les Volumes Finis

### 1.2.1. Introduction

La méthode des Volumes Finis consiste à écrire sous forme intégrale les équations sur des volumes élémentaires. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation. Elle est ainsi très utilisée en mécanique de fluides.
Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies.

### 1.2.2. Le principe

Considérons une loi de conservation $\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}F(w) = S(w)$ d'une grandeur physique $w$ dans une maille de volume $\Omega$, faisant intervenir un flux $F(w)$ et un terme de source $S(w)$. Son expression sous forme intégrale est :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega w d\Omega + \int_\Omega \mathrm{div}F(w) d\Omega = \int_\Omega S(w) d\Omega. \tag{1.11}$$

Si $\Sigma$ est la surface de la maille, de normale extérieure $n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F(w)\cdot n d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega. \tag{1.12}$$

L'intégrale $\oint_{\Sigma} F(w)\cdot n d\Omega$ représente la somme des flux à travers chaque face de la maille. Le flux est supposé uniforme sur chaque face, l'intégrale se ramène à une somme discrète sur chaque face de la maille. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} F(w)\cdot n d\Omega = \sum_{\text{faces de la maille}} F_{\text{face}}\cdot n_{\text{face}} \quad \Sigma_{\text{face}}. \tag{1.13}$$

La quantité $F_{\text{face}} = F(w_{\text{face}})$ est une approximation du flux $F$ sur une face de la maille, c'est le flux numérique sur la face considérée.
On suppose également que S et $w$ sont constantes dans chaque maille. On obtient

$$\int_{\Omega} S d\Omega = S\Omega, \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} w d\Omega = \Omega\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{maille}} = \Omega\frac{\Delta w}{\Delta t}. \tag{1.14}$$

La loi de conservation discrétisée avec la méthode des Volumes Finis s'écrit finalement

$$\Omega\frac{\Delta w}{\Delta t} + \sum_{\text{faces de la maille}} F_{\text{face}}\cdot n_{\text{face}} \quad \Sigma_{\text{face}} = \Omega S. \tag{1.15}$$

## 1.3. Les Éléments Finis

### 1.3.1. Introduction

La méthode des Éléments Finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. Cette forme variationnelle est équivalente à une forme de minimisation de l'énergie en général (principe des travaux virtuels). La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).
Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter des géométries complexes contrairement aux Différences Finies mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

### 1.3.2. Exemple simple (1D)

Dans un souci de clarté les idées de base de la méthode sont présentées à l'aide d'un exemple simple en 1D. L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) & = & f(x), & x \in ]0,1[\,, \\ u(0) = u(1) & = & 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Soit une fonction $v(x) \in \mathcal{C}^1([0,1])$, nulle en 0 et 1. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{1.17}$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V, \tag{1.18}$$

avec $V = \{v \in \mathcal{C}^0([0,1]); v(0) = v(1) = 0, v' \text{continue par morceaux}\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1])$.
Une solution de la forme variationnelle s'appelle solution faible du problème de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\tilde{V}$ un sous-espace vectoriel de $V$ de dimension $N$ finie. Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_N$ $N$ fonctions linéairement indépendantes de $V$. Ces fonctions constituent une base du sous-espace $\tilde{V}$. Ainsi toute fonction $\tilde{u}$ de $\tilde{V}$ peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x). \tag{1.19}$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \tag{1.20}$$

c'est-à-dire chercher $N$ réels $u-1, u-2, \ldots, u_N$ vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}; \tag{1.21}$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \quad \forall \phi_i \in \tilde{V}. \tag{1.22}$$

Soient $A$ la matrice $N \times N$ d'éléments $a_{ij}$ et $B$ le vecteur à $N$ composantes $b_i$ définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx, \text{ et } b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx. \tag{1.23}$$

Par définition, la matrice $A$ est symétrique. Notons $U$ le vecteur des $N$ inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution de système linéaire :

$$A \cdot U = B. \tag{1.24}$$

Il reste maintenant à choisir les $N$ fonctions $\phi_i$ de façon que le système soit simple à résoudre numériquement.

### Choix des fonctions $\phi_i$ : les Éléments Finis

L'intervalle ]0,1[ est discrétisé en $N$ points de coordonnées $x_i$. Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si} \quad x_i < x < x_{x+i}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.25}$$

Ces fonctions (cf. Croquis 1.1) sont appelées les Éléments Finis de degré 1.

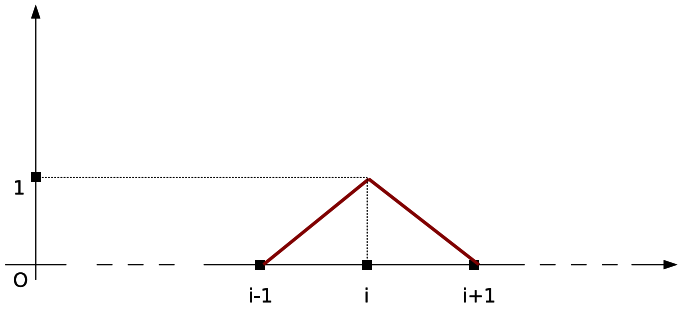



FIG. 1.1.: Éléments Finis de degré 1. `First order Finite Elements.`

Le calcul de la matrice $A$ fait intervenir les dérivées $\phi_i'$ simples à calculer :

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si} \quad x_i < x < x_{x+i}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.26}$$

Avec ces Éléments Finis, la matrice $A$ est tri-diagonale, les trois termes des diagonales

sont :

$$a_{ii} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_i'(x)dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, \tag{1.27}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_{i+1}'(x)\phi_i'(x)dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}, \tag{1.28}$$

$$a_{i-1,i} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}. \tag{1.29}$$

Les composants du vecteur $B$ sont calculés par une méthode des trapèzes (Fig. 1.2), soit :

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = f_i \left( \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right). \tag{1.30}$$

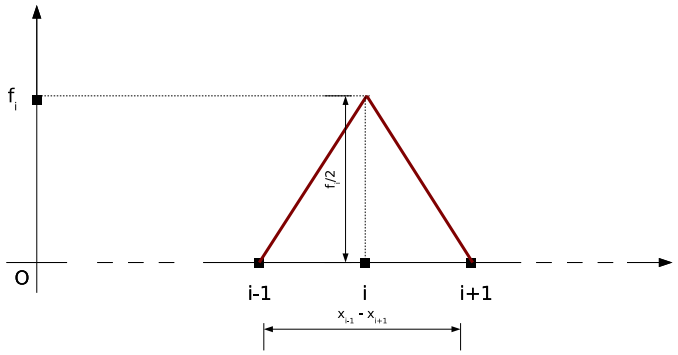



FIG. 1.2.: Méthode des trapèzes. `Method of trapezes.`

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc finalement :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, N. \tag{1.31}$$

Pour des problèmes plus complexes en 2D ou 3D on procède de la même manière.

Neuvième partie .

# Publications

# 1. Improvements of a 2D-SIA ice flow model ; application to the Saint Sorlin glacier, France

M. Schäfer et E. Le Meur, 2007
Journal of Glaciology **53** (183) 713-722

# Improvement of a 2-D SIA ice-flow model: application to Glacier de Saint-Sorlin, France

Martina SCHÄFER, Emmanuel LE MEUR

*Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement du CNRS*
*(associé à l'Univerisité Joseph Fourier–Grenoble I),*
*54 rue Molière, BP 96, 38402, Saint-Martin-d'Hères Cedex, France*
*E-mail: schaefer@lgge.obs.ujf-grenoble.fr*

**ABSTRACT. A number of improvements have been made to an existing two-dimensional ice-flow model applied to an alpine glacier. Analysis of the results of the existing model revealed several shortcomings. The first concerns the lack of mass conservation of the applied alternating-direction-implicit (ADI) scheme. A semi-implicit (SI) scheme is therefore proposed and the effects on mass conservation assessed by a comparison with the ADI scheme. The comparison is first carried out with a simple theoretical glacier for which the improvement is significant. Concerning the real case of Glacier de Saint-Sorlin, France, the initial deviation in mass conservation was much less pronounced such that the new scheme, although improving mass conservation, does not significantly change the modelled dynamics. However, other shortcomings that have a more profound impact on the modelling of glacier behaviour have been identified. The ice thickness may become negative over some gridpoints, leading to an inconsistency. The problem is partly resolved by incorporating extra checks on critical gridpoints at the glacier border. Finally, with the help of ice particle tracking, unrealistic ice settlement above the bergschrund has been identified as the main reason for spurious dynamic effects and has been corrected.**

## 1. INTRODUCTION

Owing to their characteristic geometry, correct modelling of alpine-type glaciers usually requires three-dimensional (3-D) models in order to capture the specific features of their complex dynamics. However, for some glaciers, a relatively low aspect ratio (vertical to horizontal characteristic dimensions) allows the use of the shallow ice approximation (SIA) in two-dimensional (2-D) ice-flow models, provided the emphasis is on large-scale dynamic results as demonstrated by Le Meur and Vincent (2003) and Le Meur and others (2004). For instance, with such a 2-D SIA model, the dynamics of Glacier de Saint-Sorlin, France, have been modelled and successively compared to measurement data, making it possible to tune a number of key parameters (Le Meur and Vincent , 2003). Regarding the numerical scheme, this model was based on a finite-difference approach making use of the alternating-direction-implicit (ADI) method (Huybrechts, 1992).

A more recent appraisal of the model results, especially when conducted with synthetic, simple-shaped glaciers, showed that our implementation of this numerical scheme did not ensure correct mass conservation. This led us to propose a different numerical scheme (Hindmarsh and Payne, 1996) that includes more implicitness than the ADI scheme and solves the mass conservation problem. Although mass conservation is important from a theoretical point of view, the real question is how much non-conservation will affect model behaviour, especially for real cases. Although the sensitivity to mass conservation differs greatly depending on the type of glacier modelled, it appears that in most cases the changes in dynamics between the two schemes remain limited. Note that checking for mass conservation with a real case such as Glacier de Saint-Sorlin is difficult to carry out. It was therefore decided to compare the two numerical schemes in terms of final steady-state surfaces. Despite minor differences in these surfaces, which tend to indicate that old results from the ADI scheme are still significant, it was decided to adopt the new scheme because of its relative ease of implementation and the limited extra computer resources it requires.

Whatever scheme is adopted, the way the ice flow is computed from one gridpoint to a neighbouring point sometimes leads to a physical inconsistency in the model, leading to negative ice thicknesses at some points. Simply setting these values to zero, as was initially done, is the simplest way of dealing with the problem but inevitably alters the total mass count. Some spurious dynamic effects could also be expected. A solution that incorporates systematic checks on the capability of peripheral points to provide ice to their neighbouring points partly solves this problem and also contributes to better mass conservation. Another inconsistency inherent in the old algorithm is the colonization of ice in the upper part of the glacier above the bergschrund, resulting in an overestimation of the local mass balance which also affects the ice dynamics. A solution in the form of a very simple additional check is proposed and offers a satisfactory remedy to the problem.

The paper is organized as follows: after identifying the mass conservation problem, the main equations of the SIA model are presented and used to introduce the new semi-implicit (SI) scheme (section 2). This is compared to the ADI scheme in section 3 for the simple case of a theoretical glacier (mass conservation) and for Glacier de Saint-Sorlin (mass conservation and steady-state geometries). Section 4 deals both with the problems of negative ice thicknesses and the upward extension of the glacier, and presents the proposed solutions. This helped in learning more about the dynamics of the glacier from the tracking of ice particles along their flow through the glacier.

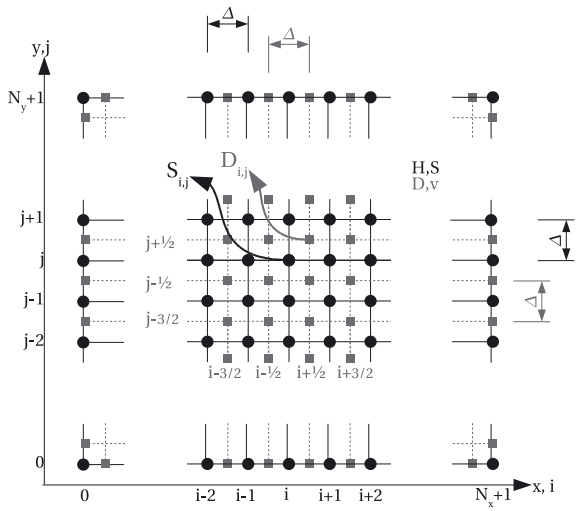



**Fig. 1.** Staggered grid used for spatial discretization of the model. The area extent requires $N_x$ by $N_y$ gridpoints, but, for calculation purposes, indices are extended from 0 to $N_x + 1$ and $N_y + 1$ for $x$ and $y$ directions respectively. Grid spacing $\Delta$ is the same in both directions.

## 2. ADI AND SI SCHEMES

### 2.1. Main equations of the model within the shallow ice approximation

The main equation of the 2-D SIA model is derived from the continuity equation and gives the ice-thickness rate of change as a function of the local surface mass-balance value and the divergence of the flow:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \nabla \vec{q}, \tag{1}$$

where $H$ is the ice thickness, $\vec{q}$ the horizontal ice flux and $a$ the surface mass balance. Under the SIA (Hutter, 1983) with a non-linear rheology for ice, namely the Glen's flow power law with exponent $n = 3$ (Glen, 1955), Equation (1) can be written as the diffusion equation

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = a + \frac{2(\rho g)^3}{5}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right], \tag{2}$$

where $S$ is the surface elevation and $D$ the diffusivity. The latter reads

$$D = H^3|\vec{\nabla} S|^2\left(AH^2 + \frac{5A_s}{2}\right),$$

$$|\vec{\nabla} S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2,$$

with flow law rate factor $A$ ($1.3\times10^{-24}\,\mathrm{Pa^{-3}\,s^{-1}}$ ($\mathrm{m^6\,N^{-3}\,s^{-1}}$); see, e.g., Vincent and others, 2000), ice density $\rho$ ($8.8 \times 10^2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) and gravitational acceleration $g$ ($9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$). $\partial H/\partial t$ equals $\partial S/\partial t$ since $\partial B/\partial t = 0$ (isostasy neglected). Sliding is accounted for in the form of a Weertman-type sliding law (Weertman, 1964) with a related sliding coefficient $A_s = 5.0 \times 10^{-14}\,\mathrm{m^8\,N^{-3}\,a^{-1}}$ (for more details see, e.g., Le Meur and Vincent , 2003). These equations are then approximated using finite differences.

### 2.2. Finite-difference discretization schemes

A SI scheme providing more implicitness is introduced as an alternative to the ADI scheme. A similar comparison of various schemes with different degrees of implicitness has been proposed by Greve and Calov (2002) and further details can be found in Hindmarsh (2001).

For both the ADI and SI schemes, spatial discretization of the transport equation is carried out by computing the diffusion coefficients at 'intermediate' points on a staggered grid (Fig. 1) that are offset from the main points (where thickness and surface elevation are computed) by half a grid spacing ($\Delta/2$). This spatial scheme is fully described in Hindmarsh and Payne (1996, method 1). Although shifted in the $x$ and $y$ directions by $\Delta/2$, indices for $D$ are designated as integers for clarity such that $D_{i,j}$ is computed from ice-thickness and elevation values at the four neighbouring points with indices $(i, j)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$ and $(i + 1, j + 1)$.

Equation (2) is discretized by applying the finite-difference method after integration between $t_0$ and $t_0 + \Delta t$ (for details see Appendix A). Depending on the chosen scheme (ADI or SI) certain surface terms are evaluated explicitly or implicitly in this discretized equation. The obtained matrix equations are then solved for the new surface elevation $S_{i,j}$ at every gridpoint of the domain.

#### *2.2.1. ADI scheme*

With the ADI scheme, forward integration from $t_0$ to $t_0+\Delta t$ is carried out in two half-steps ($\Delta t/2$) during which an implicit direction $x$ or $y$ is chosen. At each half-step, the central point and the two neighbouring points along the implicit direction are considered implicit, whereas remaining neighbouring surface points along the other direction are kept explicit. This leads to several tridiagonal matrices at each half-step (see Appendix B for details).

#### *2.2.2. SI scheme*

The SI scheme improves the degree of implicitness by considering all neighbouring points implicitly. This leads to one pentadiagonal matrix. Details of the terms of the SI matrix can be found in Appendix C. Inversion of this matrix is carried out using the LAPACK software package (Anderson and others, 1999).

The main consequence in terms of CPU time is that the SI scheme allows a larger time-step. The more implicit a scheme, the larger the time-step it can adopt without becoming unstable. On the other hand, the new SI matrix is so much larger that its single inversion is more time-consuming than the previous ADI multiple inversions (see computational efficiency below).

#### *2.2.3. Time-step*

Several runs have been carried out in order to optimize the time-step in agreement with the grid spacing $\Delta = 50\,\mathrm{m}$. For comparison of the two methods, a time-step of 0.05 years initially optimized for the ADI scheme will be used. Because of a higher degree of implicitness for the SI scheme, the associated optimal time-step can be increased up to 0.3 years. However, to avoid any spurious effect from too large a time-step, a value of 0.1 years will be used hereafter for simulations only requiring the SI method.

To compare the efficiency of the two schemes, a 100 year benchmark simulation with zero mass balance for a synthetic glacier (described in section 3.1) was run with time-steps of 0.05 and 0.3 years for the ADI and SI schemes, respectively.

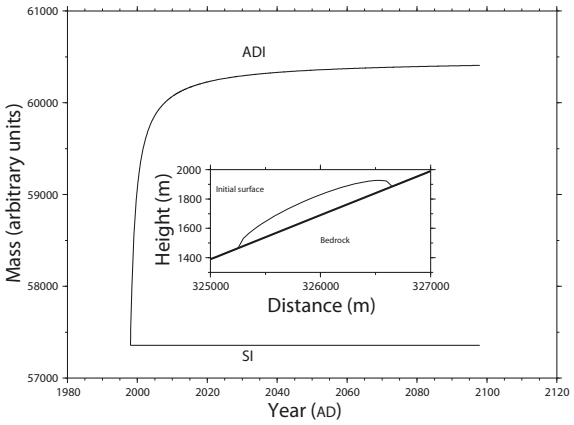



**Fig. 2.** Time-dependent total mass of the circularly symmetric synthetic glacier when modelled with the ADI and SI numerical schemes. The results have already been corrected for negative ice thicknesses as described in section 4.1. The inset shows the cross-section of the synthetic glacier resting on an inclined plane.

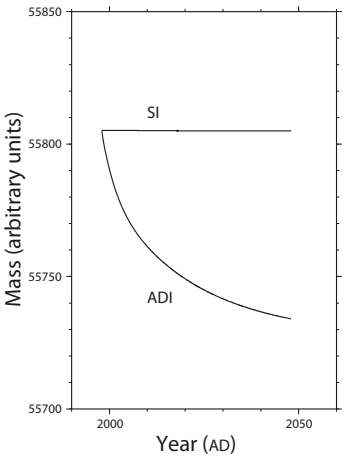



**Fig. 3.** Time-dependent total mass of Glacier de Saint-Sorlin for the two numerical schemes with zero mass balance. The same correction with regard to negative ice thicknesses as in Figure 2 has been applied.

With the ADI scheme, this simulation requires 19 s of CPU time, whereas 74 s are needed for the SI scheme. Even with fewer matrix inversions and a longer time-step compared to the ADI scheme, the SI scheme still needs more CPU time. Nevertheless, with grid sizes such as those used here, this increase of the order of a factor of 3–4 remains acceptable given the gain in accuracy expected.

## 3. COMPARISON OF THE DIFFERENT NUMERICAL SCHEMES IN TERMS OF MASS CONSERVATION

### 3.1. Mass non-conservation in the ADI case

The ADI scheme was identified as the cause of the mass conservation problem during simulations on a theoretical simply shaped glacier carried out to provide a better understanding of dynamic effects. The glacier was circularly symmetric with the shape of a flattened hemisphere and rested on an inclined plane with a uniform slope of 0.3, as can be seen in the inset of Figure 2. This simple geometry avoids dynamic effects driven by topographic irregularities and resulting complexities in the flow pattern. The experimental set-up consisted of an initially circular glacier of 700 m radius with a given maximal thickness of 140 m and a zero mass balance over the entire area. The model was run forward in time for 100 years with parameters similar to those used by Le Meur and Vincent (2003), that is a grid spacing of 50 m, a time-step of 0.05 years and with sliding incorporated. As can be seen from Figure 2 (curve labelled ADI), the total mass of the glacier is not constant and a gain in mass of about 5% can be detected after about 10 years of simulation. Despite a much less pronounced mismatch for the real case of Glacier de Saint-Sorlin (see section 3.3), this led us to question the ADI scheme or at least the way it is implemented in the model.

### 3.2. Mass conservation with the synthetic glacier in the SI case

The same experiment as in section 3.1 was performed with the new SI scheme, and the corresponding mass of the synthetic glacier during the 100 year simulation is depicted in Figure 2 (curve labelled SI). As can be seen from the figure, no mass change is detectable, which shows the efficiency of the new scheme with regard to mass conservation.

### 3.3. Evolution of Glacier de Saint-Sorlin

A similar comparison was then carried out for the more realistic case of Glacier de Saint-Sorlin. Again, the model was run forward in time for 100 years starting from the 1998 surface of the glacier (see, e.g., Le Meur and Vincent , 2003) and with a prescribed zero mass balance throughout, which made it possible to focus on the ability of the numerical scheme to conserve mass. As Figure 3 shows, the SI scheme strictly conserves mass similarly to the previous case, whereas a mass loss is observed with the ADI scheme. However, note that the Saint-Sorlin case is much less sensitive to mass non-conservation than the theoretical glacier. The mass loss after 100 years of simulation is less than 0.2%.

The same experiment with a natural mass-balance field made it possible to assess more realistically the impact of the numerical scheme on the ice dynamics. The same comparison experiment (apart from the duration, which is now 300 years to ensure a steady state for the non-zero mass balance) was considered with both schemes, forced by the 1957–1997 measured average mass-balance field for the glacier (see section 4.2 and Fig. 4). Mass conservation is more difficult to assess here because the total ice mass count is modified by the prescribed surface mass balance and the fact that the glacier extent varies during the simulation. However, the SI scheme still proves more efficient (not shown). The focus is now on the comparison of final steady-state surfaces for both cases. As depicted in Figure 5, some changes can be detected, but they remain minor and are essentially concentrated at the glacier snout. Because of this limited sensitivity of Glacier de Saint-Sorlin to the numerical scheme with regard to mass conservation and ice dynamics, previous results such as those of Le Meur and Vincent (2003) can still be considered as significant for the overall glacier dynamics. However, as demonstrated above, some theoretical glacier configurations are definitely more sensitive, and we believe that switching to the SI method constitutes a real improvement in the correct representation of ice dynamics of several real-case glaciers.

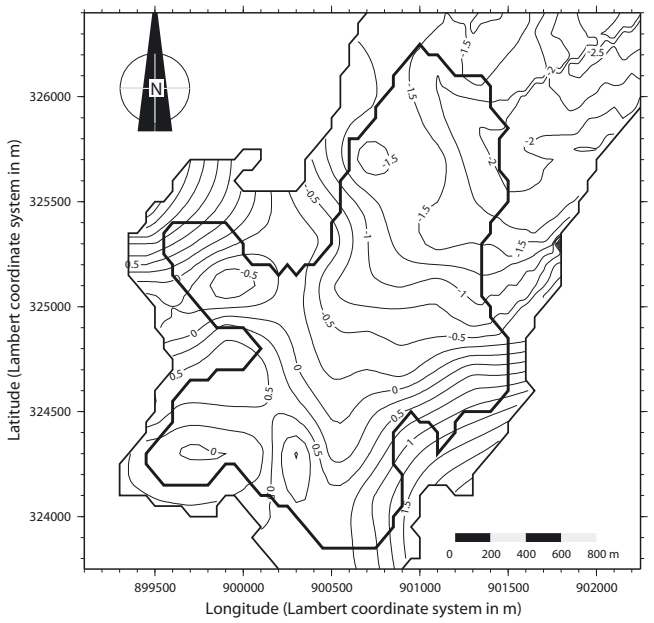



**Fig. 4.** Average measured mass balance for Glacier de Saint-Sorlin for 1957–99 (adapted from Le Meur and Vincent , 2003).

### 3.4. Explanation for the mass-conservation properties of the ADI and SI schemes

With a zero surface mass balance, Equation (1) can be written

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}. \tag{3}$$

For mass to be conserved, spatial integration of the discretized flux divergence ($\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y$) should equal zero.

Integration of $\partial q_x/\partial x$ in the $x$ direction can be written such that all terms except those at the border of the grid cancel each other. The remaining border terms , which are proportional to the corresponding diffusion coefficients, finally reduce to zero since the domain is chosen such that its outer fringe remains ice-free, leading to zero diffusion coefficients there (for details see Appendix D1).

By contrast, spatial integration at the same half time-step of the term $\partial q_y/\partial y$ in the $y$ direction is not equal to zero (see Appendix D1) because of remaining terms of the form

$$D_{l,k}\left[\left(S^{t_0}_{l,k+1} - S^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}_{l,k+1}\right) + \left(S^{t_0}_{l,k} - S^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}_{l,k}\right)\right], \tag{4}$$

$$l = i, i+1, \quad k = 1, \ldots, N_y - 1.$$

The same calculation for the second half time-step leads to a similar result, which does not cancel out that of the first half time-step. Our implementation of the ADI scheme is therefore inherently non-mass conserving. It is possible to imagine another form of the ADI scheme (Appendix D2) that would be inherently mass conserving, but this alternative shows problems regarding numerical stability.

It can easily be shown that the SI scheme conserves mass, since $\partial q_x/\partial x$ and $\partial q_y/\partial y$ both have the same expression as $\partial q_x/\partial x$ computed in the ADI scheme (by replacing $t_0+\Delta t/2$ with $t_0 + \Delta t$), which equals zero after spatial integration.

A closer look at the remaining terms in Equation (4) shows that with the ADI scheme the non-conservation of mass should be more pronounced where the glacier undergoes the largest thickness changes. This was confirmed by running the model forward in time for 5 years with the SI scheme and the same glacier as above. From there, one more time-step was integrated with either the SI or the ADI scheme, and the differences in the final thicknesses were assessed.

Since the SI method conserves mass, points where there are differences with the ADI method are most likely those where errors on mass conservation originate. As can be seen in Figure 6, these areas correspond to those where the glacier surface evolved most over the last time-step, which confirms the link between mass non-conservation and the ice-thickness rate of change. It is therefore not surprising to

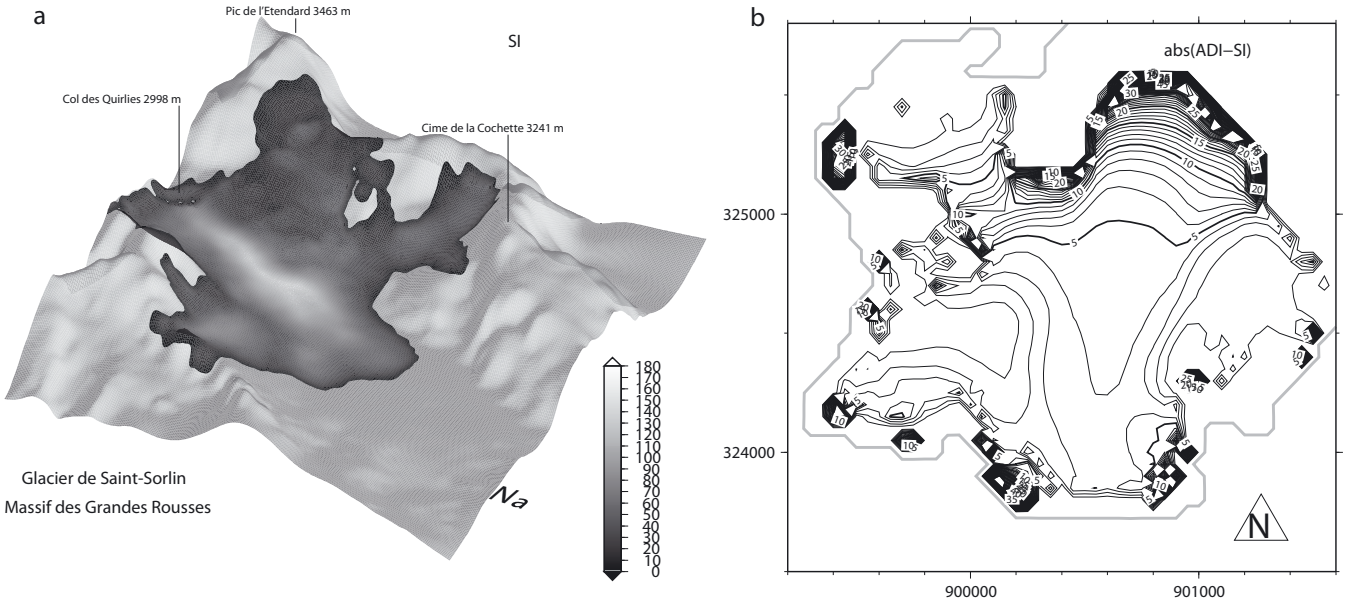



**Fig. 5.** Steady-state simulation over 300 years for Glacier de Saint-Sorlin with the 1957–99 average measured mass balance. In (a) the ice thickness obtained with the SI numerical scheme is presented as well as the bedrock topography, whereas in (b) the absolute value of the difference (m) between the two schemes is shown.

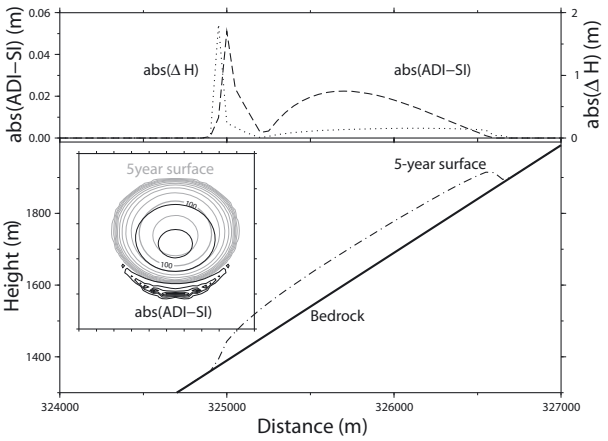



**Fig. 6.** Localization of the mass-balance error with the ADI scheme. The upper panel is a longitudinal profile showing both the difference between the two schemes (abs(ADI–SI), dashed curve) and the ice thickness change (abs($\Delta H$), dotted curve) during the last time-step with the SI method. From the inset in the lower panel, it is clear that this mass error (dark contours) is concentrated at the glacier area near the snout where the glacier undergoes the largest ice thickness changes.

observe that the glacier area near the snout is mainly conserved, since the initial glacier configuration is far from steady state (an extremely thin and extended glacier), leading the glacier to spread rapidly downstream. In this process of converging towards steady state, driving slopes and thicknesses rapidly reduce, thereby reducing the ice flow in such a way that the total mass eventually stabilizes (with the ADI scheme).

The fact that Glacier de Saint-Sorlin is much less sensitive to the mass conservation problem (see section 3.3) now becomes clearer. The explanation probably resides in low dynamics for the glacier. Indeed, starting from the 1998 surface under a zero mass-balance field, forthcoming ice-thickness changes will only result from ice flow in a glacier with small driving slopes (at least compared to those of the beginning of the synthetic glacier).

Inspection of Equation (4) also suggests a possible effect of the time-step on the mass error term. This expression can in fact be summarized as $D \times \partial S/\partial t \times \Delta t$. If the diffusion coefficient were time-step-independent, a time-step-independent total mass error could be expected, as the cumulative mass error should become something like $D(S^{\text{final}} - S^{\text{initial}})$. However, because $D$ changes from one time-step to another, the error term grows with the chosen time-step, and in the particular case of the synthetic glacier we even observed strictly linear growth.

## 4. FURTHER IMPROVEMENTS TO THE MODEL

### 4.1. Handling of negative ice thicknesses

Implementation of an ice-flow scheme requires careful attention as some gridpoints may undergo negative ice thicknesses, especially in the vicinity of the border of the glacier. In order to avoid the ensuing model crash, these negative ice thicknesses were first unsatisfactorily reset to zero, leading to a degradation in mass conservation and possible impacts on the ice flow. For instance, resetting the negative ice thicknesses to zero in a 100 year simulation of Glacier de Saint-Sorlin under zero mass balance led to an error of 20% on the final mass (when using the SI scheme).

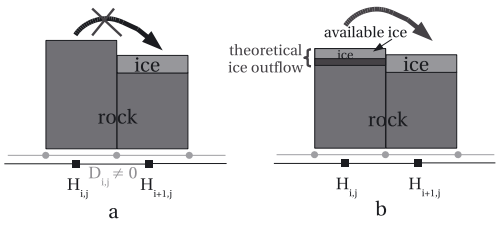



**Fig. 7.** The two conditions of negative ice thickness resulting from an erroneous ice-flow computation by the model.

When considering Equation (1) in its discrete form, given the new ice thickness at $t_0 + \Delta t$,

$$H^{t_0+\Delta t} = H^{t_0} + \Delta t \cdot (a - \nabla \vec{q}), \tag{5}$$

it is clear that negative ice thicknesses can be a consequence of a negative mass balance and/or of ice flow divergence exceeding the available amount of ice.

The problem of mass errors resulting purely from surface mass balance, especially with negative values downstream of the ice margin, has been treated by Van den Berg and others (2006). In the present case, such negative ice thicknesses are simply set to zero. Methods to deal with negative ice thicknesses resulting from ice flow divergence are described in sections 4.1.1 and 4.1.2. Note that the results of Figures 3 and 5 have already been corrected using these methods.

#### *4.1.1. Ice-free points at the border of the glacier*

Because of the staggered grid and the way the diffusion coefficient is computed from neighbouring points, some ice can theoretically flow from an ice-free point towards one of its adjacent icy points, as shown in Figure 7a. In such a case, corresponding coefficients in the matrix are set such that outflow from this point as well as the relevant inflows towards the neighbouring points are zero. If such an ice-free point undergoes positive mass balance, the outflow remains zero as described above and the final thickness is set to this mass-balance value, which leads to a small error.

The ice-free gridpoints seem to account for most of the mass error, given that the error in the run cited above (100 years, no mass balance, Glacier de Saint-Sorlin) is reduced from 20% to only 0.1%.

#### *4.1.2. Lightly ice-covered points*

This problem essentially concerns border points for which the theoretical ice outflow exceeds the available ice, as shown in Figure 7b. This is possible because this outflow depends on the four neighbouring diffusion coefficients, which are themselves computed from averaged neighbouring thicknesses and slopes. In fact, points where an excess of ice outflow can potentially occur are almost systematically border points with less than 10 cm of ice and at least one of the neighbouring points with more than 1 m of ice, leading to an overestimation of the diffusion coefficient. This error is therefore due to a geometrical problem, confirmed by the fact that varying the time-step brought no noticeable changes. We suspect a strong sensitivity to grid spacing instead.

In this case the ice thickness is only set to zero, as in the initial case. Mass conservation would require restricting the outflow to the available amount of ice. This is not easy as

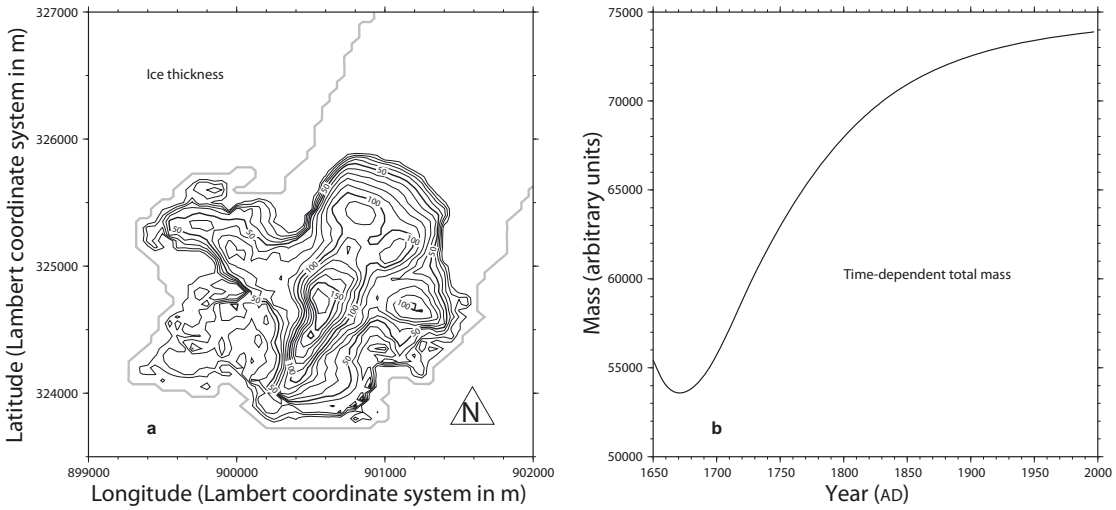



**Fig. 8.** Steady-state ice-thickness distribution (a) and time-dependent total mass (b) for Glacier de Saint-Sorlin when ice is allowed to settle above the bergschrund.

the outflow is split between the four neighbouring points. Note that this error remains small compared to the error in section 4.1.1.

## 4.2. Preventing spurious dynamics from ice above the bergschrund

### *4.2.1. Unrealistic ice settlement*

The upper part of the glacier is outlined by a bergschrund above which no significant ice thickness can develop as slopes are too pronounced. Snow may temporarily accumulate there, but eventually avalanches or is blown away, ending up on the glacier downstream where it contributes to the mass balance. The mass-balance field depicted in Figure 4 already takes this extra snow into account as it is measured from stakes. Therefore, measurements should not be extrapolated to the region above the bergschrund, as this would be equivalent to counting the same snow twice in the glacier budget.

In other cases, for instance, if the mass-balance field comes from a mass-balance model (generally fed by climate model outputs), this snow redistribution must be accounted for explicitly. In any case, to prevent unrealistic ice development over the upper part of the glacier, ice is not allowed to settle over points satisfying the following three conditions: (1) the point lies in the region above the bergschrund, (2) it was initially not glaciated (for Saint-Sorlin the 1998 surface is taken as reference) and (3) the slope at that point is steeper than a certain threshold. Note that this test still allows the glacier to progress on flatter areas if allowed by the mass balance. This check was already used by Le Meur and Vincent (2003) but was not discussed explicitly.

### *4.2.2. Effects on modelled dynamics*

The impacts on the glacier dynamics resulting from letting the ice settle, or preventing it from settling, above the bergschrund have been assessed by simulating the glacier starting from its 1998 surface under the 1957–99 average mass-balance field with and without applying this check.

The SI-simulated steady-state surface of the glacier as well as the time-dependent evolution of the total mass of the

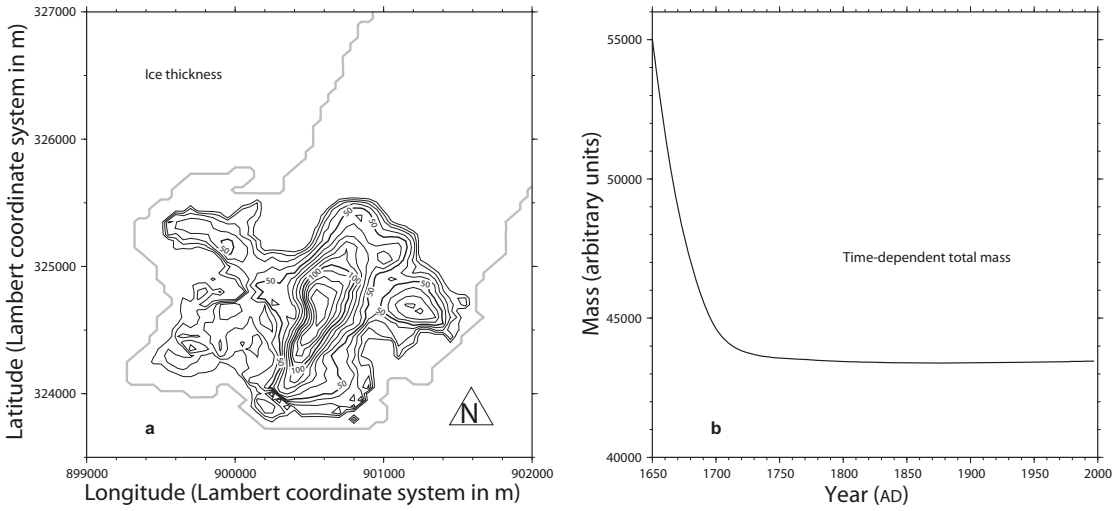



**Fig. 9.** As for Figure 8, but ice is prevented from settling above the bergschrund (with a slope threshold of 0.7).

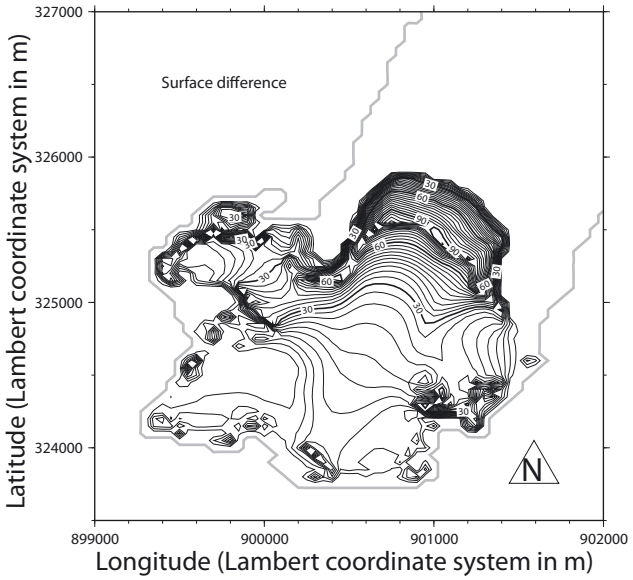



**Fig. 10.** Difference (m) between steady-state glacier surfaces with and without ice-settling restriction (absolute values).

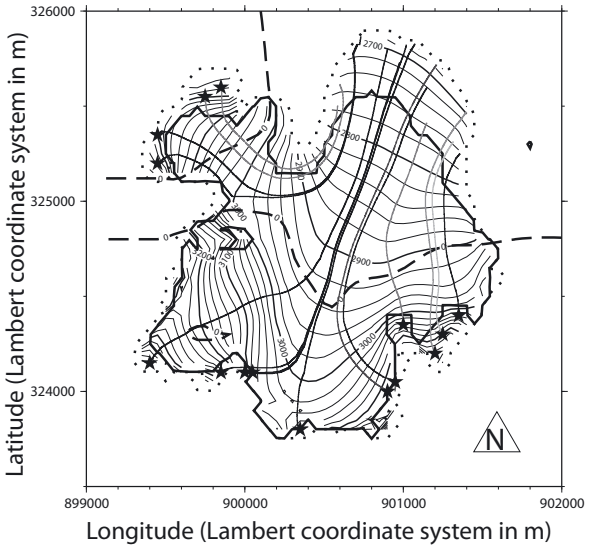



**Fig. 11.** Trajectories followed by ice particles deposited in the 'forbidden zone' (stars). The darker the featured trajectories, the longer the corresponding times between deposition and re-emergence. The two glacier extents with (full curve) and without (dotted curve) the ice-settling restriction are also shown as well as the equilibrium line (dashed curve indicating zero mass balance).

glacier when computed without this check is depicted in Figure 8. Observing the figure, the most striking result is the fact that, despite a negative specific mass balance of around $-0.25$ m w.e. a$^{-1}$ (see Le Meur and Vincent , 2003 concerning a similar experiment), the glacier gains mass. Moreover, steady state is achieved only after 500 years of simulation time, which contradicts previous results with a similar experiment (Le Meur and Vincent , 2003).

The same experiment was performed with the ice prevented from colonizing areas above the bergschrund, and the corresponding results are depicted in Figure 9. The slope threshold was set to 0.7 corresponding to a slope of 35°. Results are quite different in terms of total ice mass evolution, since the glacier now loses mass, consistent with a negative specific mass balance, until achieving steady state. Furthermore, the time required to reach steady state and the final surface are now more compatible with results of Le Meur and Vincent (2003).

The final surface also differs significantly. The difference between the two steady-state surfaces as depicted in Figure 10 is essentially concentrated over the glacier snout area and to a lesser degree over the area above the bergschrund. This suggests that over-thickening and over-expansion on the lower part of the glacier is a direct consequence of the unrealistic ice settlement above the bergschrund. To confirm this, the trajectories of particles deposited above the bergschrund are computed according to the previous steady-state surface of the glacier.

### *Tracking of ice particles*

Ice tracking consists of following ice particles during their travel inside the glacier from their sinking after deposition in the accumulation zone until their re-emergence at the surface in the ablation zone. Calculation of the trajectories is done iteratively; at each time-step, the three components of the steady-state velocity vector $(u, v, w)$ are computed to obtain the new position of each particle at the next time-step $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$. The relationship between the new and the previous position $(x_n, y_n, z_n)$ is simply

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t\, u, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t\, v, \\ z_{n+1} &= z_n + \Delta t\, w. \end{aligned} \tag{6}$$

The starting point $x_0, y_0$ can be chosen freely and $z_0$ is then the surface elevation at this point. The iteration is stopped when the ice particle reaches the surface. $\Delta t$ has been set at 0.05 years. Figure 11 shows the trajectories of selected particles deposited on the 'forbidden settling zone' (above the bergschrund). Also depicted are the two steady-state extents of the glacier when ice freely expands in the upper part (dotted curve) and when it is restricted according to our criterion (solid curve).

As expected, the figure confirms that particles deposited in the region above the bergschrund re-emerge in the over-expansion and over-thickening region in the lower part of the glacier.

This result is consistent with allowing ice to settle above the actual upper limit of the glacier when it has already been included in the mass balance further down the glacier, hence leading to an overestimation of the total glacier mass budget. This causes the glacier to grow whereas it should shrink under the 1957–99 average mass-balance field. The singularity in the time-dependent mass evolution shown in Figure 8 can now also be explained. Under a negative specific balance of $-0.25$ m w.e. a$^{-1}$, the glacier starts shrinking but later grows to an erroneous steady-state configuration due to the spurious ice settling over the bergschrund.

## 5. CONCLUSIONS

Several shortcomings of a 2-D SIA ice-flow model applied to an alpine glacier have been identified and corresponding solutions proposed. First, the initial ADI numerical scheme

used so far proved deficient with regard to mass conservation, although the consequences on the actual dynamics of Glacier de Saint-Sorlin remain limited. Because some other types of glaciers might be more sensitive to mass conservation, an SI scheme is proposed as an alternative due to its ability to conserve mass and for its low costs (easy implementation and limited CPU time).

Two other problems concerning the flow of ice and the way it is accounted for in the model appear to alter the total mass count with potential effects on ice dynamics. The first illustrates the inability of the model to distribute ice in a consistent manner between certain points, mainly on the glacier periphery. Appropriate methods are proposed that solve most of the errors. Lastly, with the help of particle tracking, a tendency of the modelled glacier to extend above its upper bergschrund has been identified as the main cause of an overestimation of the glacier mass balance with noticeable changes on the glacier behaviour. A very simple solution to this problem based on the slope of the bedrock is described and demonstrates the importance of understanding the real physics of glaciers rather than solely relying on model equations.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We thank all those who contributed to the data collection effort on Glacier de Saint-Sorlin. Support from the French Ministry of Research financing the GLACIOCLIM Observatory (http://www-lgge.ujf-grenoble.fr/ServiceObs/) and from INSU (Institut National des Sciences de l'Univers du CNRS) is gratefully acknowledged. This work benefited from financial support from the French glacier survey observatory, part of the Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble (OSUG). We express our gratitude to R. Greve, R.C.A. Hindmarsh and F. Saito for considerably improving the quality of this paper.

## REFERENCES

Anderson, E. and 10 others. 1999. *LAPACK User's Guide. Third Edition.* Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mechanics.

Glen, J.W. 1955. The creep of polycrystalline ice. *Proc. R. Soc. London, Ser. A,* **228**(1175), 519–538.

Greve, R. and R. Calov. 2002. Comparison of numerical schemes for the solution of the ice-thickness equation in a dynamic/thermodynamic ice-sheet model. *J. Comput. Phys.,* **179**(2), 649–664.

Hindmarsh, R.C.A. 2001. Notes on basic glaciological computational methods and algorithms. *In* Straughan, B., R. Greve, H. Ehrentraut and Y. Wang, *eds. Continuum mechanics and applications in geophysics and the environment* Berlin, etc., Springer-Verlag, 222–249.

Hindmarsh, R.C.A. and A.J. Payne. 1996. Time-step limits for stable solutions of the ice-sheet equation. *Ann. Glaciol.,* **23**, 74–85.

Hutter, K. 1983. *Theoretical glaciology; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets.* Dordrecht, D. Reidel Publishing Co./Tokyo, Terra Scientific Publishing Co.

Huybrechts, P. 1992. The Antarctic ice sheet and environmental change: a three-dimensional modelling study. *Ber. Polarforsch.* 99.

Le Meur, E. and C. Vincent. 2003. A two-dimensional shallow ice-flow model of Glacier de Saint Sorlin, France. *J. Glaciol.,* **49**(167), 527–538.

Le Meur, E., O. Gagliardini, T. Zwinger and J. Ruokolainen. 2004. Glacier flow modelling: a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes equation. *C. R. Phys.,* **5**(7), 709–722.

Van den Berg, J., R.S.W. van de Wal and J. Oerlemans. 2006. Effects of spatial discretization in ice-sheet modelling using the shallow-ice approximation. *J. Glaciol.,* **52**(176), 89–98.

Vincent, C., M. Vallon, L. Reynaud and E. Le Meur. 2000. Dynamic behaviour analysis of glacier de Saint Sorlin, France, from 40 years of observations, 1957–97. *J. Glaciol.,* **46**(154), 499–506.

Weertman, J. 1964. The theory of glacier sliding. *J. Glaciol.,* **5**(39), 287–303.

## APPENDIX A. DISCRETIZATION OF THE ICE-THICKNESS EQUATION

Discretization of the ice-thickness Equation (2) requires the calculation of several derivatives according to

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{t_0+\Delta t} - H_{i,j}^{t_0}}{\Delta t}, \tag{A1}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{\Delta}, \tag{A2}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j}}{\Delta}. \tag{A3}$$

Therefore,

$$|\vec{\nabla} S|^2_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{(S_{i+1,j}-S_{i,j})}{\Delta} + \frac{(S_{i+1,j+1}-S_{i,j+1})}{\Delta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{(S_{i,j+1}-Si,j)}{\Delta} + \frac{(S_{i+1,j+1}-S_{i+1,j})}{\Delta}}{2}\right)^2 \tag{A4}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{D_{i,j}+D_{i,j-1}}{2}\cdot\frac{S_{i+1,j}-S_{i,j}}{\Delta} - \frac{D_{i-1,j}+D_{i-1,j-1}}{2}\cdot\frac{S_{i,j}-S_{i-1,j}}{\Delta}\right), \tag{A5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{D_{i,j}+D_{i-1,j}}{2}\cdot\frac{S_{i,j+1}-S_{i,j}}{\Delta} - \frac{D_{i,j-1}+D_{i-1,j-1}}{2}\cdot\frac{S_{i,j}-S_{i,j-1}}{\Delta}\right). \tag{A6}$$

The diffusivity $D$ splits into a deformation component $D_{\text{def}}$ and a sliding component $D_{\text{slid}}$ according to

$$D = \underbrace{AH^5|\vec{\nabla} S|^2}_{D_{\text{def}}} + \underbrace{\frac{5A_s}{2}H^3|\vec{\nabla} S|^2}_{D_{\text{slid}}} \tag{A7}$$

and their discretizations lead to

$$D_{i,j,\mathrm{def}} = A\left[\frac{1}{4}\left(H_{i,j}+H_{i+1,j}+H_{i,j+1}+H_{i+1,j+1}\right)\right]^5 \times\left(\frac{\left(S_{i+1,j}-S_{i,j}\right)+\left(S_{i+1,j+1}-S_{i,j+1}\right)}{2\Delta}\right)^2, \quad \text{(A8)}$$

$$D_{i,j,\mathrm{slid}} = \frac{5}{2}A_\mathrm{s}\left[\frac{1}{4}\left(H_{i,j}+H_{i+1,j}+H_{i,j+1}+H_{i+1,j+1}\right)\right]^3 \times\left(\frac{\left(S_{i+1,j}-S_{i,j}\right)+\left(S_{i+1,j+1}-S_{i,j+1}\right)}{2\Delta}\right)^2. \quad \text{(A9)}$$

Finally, the discretized version of the ice-thickness Equation (2) can be written

$$\begin{aligned} &S_{i,j}^{t_1}\cdot\left(1+2k\left(D_{i,j}+D_{i,j-1}+D_{i-1,j}+D_{i-1,j-1}\right)\right)\\ &-S_{i+1,j}^{t_2}k\cdot\left(D_{i,j}+D_{i,j-1}\right)\\ &-S_{i-1,j}^{t_2}k\cdot\left(D_{i-1,j}+D_{i-1,j-1}\right)\\ &-S_{i,j+1}^{t_3}k\cdot\left(D_{i,j}+D_{i-1,j}\right)\\ &-S_{i,j-1}^{t_3}k\cdot\left(D_{i,j-1}+D_{i-1,j-1}\right)=S_{i,j}^{t_0}+a_{i,j}\Delta t,\quad \forall i,j, \end{aligned} \quad \text{(A10)}$$

where $k=(\rho g^3/5)\times(\Delta t/\Delta^2)$.

In the last equation, the lower indices for the surface $S$ refer to the gridpoints. Depending on the position indices, $S$ on the lefthand side is evaluated either at $t_1$, $t_2$ or $t_3$. Respective values for these times depend upon the selected scheme and reflect its degree of implicitness, as detailed in Appendices B and C. The terms on the righthand side and the diffusitivity $D$ are always evaluated explicitly, that is, at time $t_0$.

## APPENDIX B. ADI SCHEME

Forward integration of Equation (2) is carried out in two half-steps during which an implicit direction is chosen. For instance, during the first half-step, the system is solved according to the lines $x$, $y$ where the $x$, $y$ directions are denoted by the indices $i$, $j$. This implies that the system variables can be reduced to the central point $(i,j)$ and the two neighbouring points along the implicit direction with indexes $(i-1,j)$ and $(i+1,j)$. Therefore, upper surface points $S_{i,j}^{t_0+\Delta t/2}$, $S_{i-1,j}^{t_0+\Delta t/2}$, $S_{i+1,j}^{t_0+\Delta t/2}$ are considered implicit (evaluated at $t_0+\Delta t/2$), whereas remaining neighbouring surface points along the $y$ direction ($S_{i,j-1}^{t_0}$, $S_{i,j+1}^{t_0}$) remain explicit (i.e. evaluated at $t_0$). That means $t_1=t_2=t_0+\Delta t/2$ and $t_3=t_0$.

For each of the lines (terms of constant index $j$), this leads to a system of $N_y$ equations with three unknowns ($N_y$ being the number of rows) written in a matrix form implying a tridiagonal matrix. After inverting all of the $N_x$ resulting matrices ($N_x$ being the number of lines), an intermediate surface at $t_0+\Delta t/2$ is obtained, and from this surface, the second step of the forward integration is now performed according to the rows ($y$ direction) in order to provide the final surface at $t_0+\Delta t$. This procedure is exactly the same as above but with inversion of indices $i$ and $j$. It then leads to $t_1=t_3=t_0+\Delta t$, $t_2=t_0+\Delta t/2$.

## APPENDIX C. SI SCHEME

In this scheme, all neighbouring points are considered implicitly, that is, directly at $t_0+\Delta t$, leading to $t_1=t_2=t_3=t_0+\Delta t$. The area needs to be swept only once, leading to a system that can now be expressed with a pentadiagonal $N_xN_y\times N_xN_y$ matrix resulting from $N_xN_y$ equations with five unknowns (central and all neighbouring points evaluated at $t_0+\Delta t$),

$$\mathcal{A}\vec{S}^{t_0+\Delta t}=\vec{B}^{t_0}, \quad \text{(C1)}$$

where $\vec{S}^{t_0+\Delta t}$ is the vector of all implicit surface elevations $S_{i,j}^{t_0+\Delta t}$, $\mathcal{A}$ is a pentadiagonal matrix and $\vec{B}^{t_0}$ is a vector of all explicit terms, including the previous step surface and mass balance at all $N_xN_y$ gridpoints $(i,j)$ of the domain.

Reshuffling Equation (A10) gives the entries of the $\mathcal{A}$ matrix of Equation (C1). $\mathcal{A}$ is a $N_x\cdot N_y\times N_x\cdot N_y$ matrix, indexed by $\mathrm{ind}=(j-1)\cdot N_x+i$.

With $c_1=0.5\times\Delta t/\Delta^2$, the entries of the five diagonals of $\mathcal{A}$ can be written

$$A_{\mathrm{ind,ind}-N_x} = -c_1\left(D_{i,j-1}^{t_0}+D_{i-1,j-1}^{t_0}\right), \quad \text{(C2)}$$

$$A_{\mathrm{ind,ind}-1} = -c_1\left(D_{i-1,j}^{t_0}+D_{i-1,j-1}^{t_0}\right), \quad \text{(C3)}$$

$$A_{\mathrm{ind,ind}} = 1.0+2c_1\left(D_{i,j}^{t_0}+D_{i-1,j-1}^{t_0}+D_{i-1,j}^{t_0}+D_{i,j-1}^{t_0}\right), \quad \text{(C4)}$$

$$A_{\mathrm{ind,ind}+1} = -c_1\left(D_{i,j}^{t_0}+D_{i,j-1}^{t_0}\right), \quad \text{(C5)}$$

$$A_{\mathrm{ind,ind}+N_x} = -c_1\left(D_{i,j}^{t_0}+D_{i-1,j}^{t_0}\right). \quad \text{(C6)}$$

The remaining terms are equal to zero. The values of the vector $\vec{B}$ are given by

$$B_{\mathrm{ind}}^{t_0}=a_{\mathrm{ind}}\Delta t+S_{\mathrm{ind}}^{t_0}. \quad \text{(C7)}$$

## APPENDIX D. MASS CONSERVATION

### D1. ADI case

Once integrated over the first half time-step with the ADI scheme, the $x$ and $y$ derivatives of the flux along the $x$ and $y$ directions can be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} = &\\ &\frac{c}{2\Delta^2}\left[D_{i,j}\left(S_{i+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)-D_{i-1,j}\left(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right.\\ &\left.+D_{i,j-1}\left(S_{i+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)-D_{i-1,j-1}\left(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right] \end{aligned} \quad \text{(D1)}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_y}{\partial y} = &\\ &\frac{c}{2\Delta^2}\left[D_{i,j}\left(S_{i,j+1}^{t_0}-S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)-D_{i,j-1}\left(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i,j-1}^{t_0}\right)\right.\\ &\left.+D_{i-1,j}\left(S_{i,j+1}^{t_0}-S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)-D_{i-1,j-1}\left(S_{i,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}-S_{i,j-1}^{t_0}\right)\right], \end{aligned} \quad \text{(D2)}$$

where $c = 2(\rho g)^3/5$. Spatial integration of $\partial q_x/\partial x$ gives the following equations for all values of $j$:

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_x} \frac{\partial q_x}{\partial x} = \\
&\frac{c}{2\Delta}\left\{\left[D_{1,j}\left(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{0,j}\left(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right]\right. \\
&+ \left[D_{1,j-1}\left(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{0,j-1}\left(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right] \\
&+ \left[D_{2,j}\left(S_{3,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{1,j}\left(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right] \\
&+ \left[D_{2,j-1}\left(S_{3,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{1,j-1}\left(S_{2,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right] \\
&\cdots \qquad \text{(D3)} \\
&+ \left[D_{N_x,j}\left(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - D_{N_x-1,j}\left(S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right] \\
&+ \left[D_{N_x,j-1}\left(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right. \\
&\left.\left. - D_{N_x-1,j}\left(S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x-1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right]\right\} \\
= &- D_{0,j}\left(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{0,j-1}\left(S_{1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{0,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) \\
&+ 0 + D_{N_x,j}\left(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) \\
&+ D_{N_x,j-1}\left(S_{N_x+1,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{N_x,j}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) \qquad \text{(D4)}
\end{aligned}$$

and finally goes to zero since the domain is chosen such that its outer fringe remains ice-free, leading to zero diffusion coefficients at points $(0, j)$, $(0, j-1)$, $(N_x, j)$ and $(N_x, j-1)$.

Spatial integration at the same half time-step of the term $\partial q_y/\partial y$ in the $y$ direction gives

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial q_y}{\partial y} = \\
&\frac{c}{2\Delta}\left\{\left[D_{i,1}\left(S_{i,2}^{t_0} - S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{i,0}\left(S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,0}^{t_0}\right)\right]\right. \\
&+ \left[D_{i-1,1}\left(S_{i,2}^{t_0} - S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{i-1,0}\left(S_{i,1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,0}^{t_0}\right)\right] \\
&+ \left[D_{i,2}\left(S_{i,3}^{t_0} - S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{i,1}\left(S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,1}^{t_0}\right)\right] \\
&+ \left[D_{i-1,2}\left(S_{i,3}^{t_0} - S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) - D_{i-1,1}\left(S_{i,2}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - S_{i,1}^{t_0}\right)\right] \\
&\left.+ \ldots\right\}, \qquad \text{(D5)}
\end{aligned}$$

for all $i$. Because of remaining terms of the form

$$D_{l,k}\left[\left(S_{l,k+1}^{t_0} - S_{l,k+1}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right) + \left(S_{l,k}^{t_0} - S_{l,k}^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}\right)\right], \qquad \text{(D6)}$$

$$l = i, i+1, \quad k = 1, \ldots, N_y - 1,$$

spatial integration of $\partial q_y/\partial y$ (and therefore that of $\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y$) over the first half-step is not equal to zero.

## D2. An alternative form of the ADI scheme

In order to guarantee $\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_x} \partial q_x/\partial x = 0$ as well as $\Delta \cdot \sum_{j=1}^{N_y} \partial q_y/\partial y = 0$ at each half time-step, another form of the ADI scheme can be proposed. So far, all $S_{i,j}$ terms (first line of Equation (A10)) have been considered to be implicit for both half time-steps, whereas $S_{i,j}[1 + k(D_{i,j} + D_{i,j-1} + D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1})]$ could be considered implicit and $S_{i,j}[k(D_{i,j} + D_{i,j-1} + D_{i-1,j} + D_{i-1,j-1})]$ left explicit. Over the first half time-step, this leads to the same expression for $\partial q_x/\partial x$ as before, whereas the expression for $\partial q_y \partial y$ then reads

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{c}{2\Delta^2}&\left[D_{i,j}\left(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0}\right) - D_{i,j-1}\left(S_{i,j}^{t_0} - S_{i,j-1}^{t_0}\right)\right. \\
&\left. + D_{i-1,j}\left(S_{i,j+1}^{t_0} - S_{i,j}^{t_0}\right) - D_{i-1,j-1}\left(S_{i,j}^{t_0} - S_{i,j-1}^{t_0}\right)\right]. \qquad \text{(D7)}
\end{aligned}$$

It can easily be shown that this leads to $\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N_y} \partial q_y/\partial y = 0$ (similar to the approach used with Equation (D2)). An analogous calculation leads to the same result for the second half time-step.

Although it is inherently mass-conserving, under certain geometrical conditions this scheme is numerically unstable unless abnormally small time-steps are used. In a sensitivity test, we observed that some reasonable geometries (bedrock and ice surface slopes) require very small time-steps of the order of 0.001 years. This means that in order to avoid any numerical instability for the various geometries possibly encountered with a real glacier, the time-step has to be extremely small. It was therefore impossible for us to use an ADI scheme that was both inherently mass-conserving and numerically stable.

*MS received 9 June 2006 and accepted in revised form 17 August 2007*

# 2. Disappearance of an Alpine glacier over the 21st Century simulated from modeling its future surface mass balance

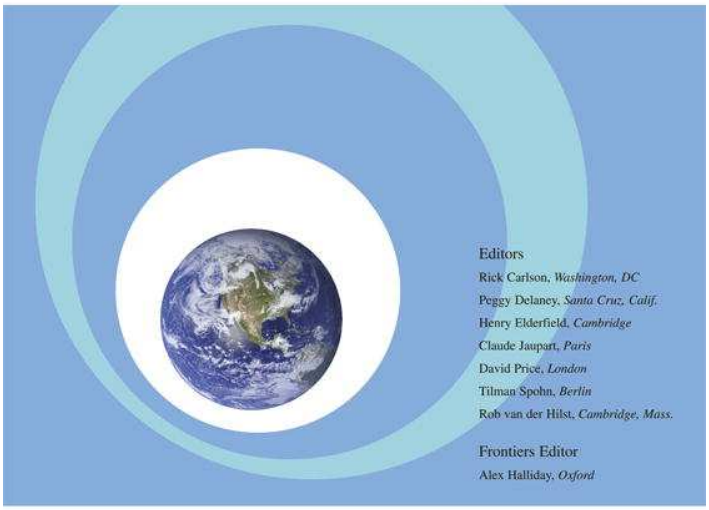
E. Le Meur, M. Gerbaux, M. Schäfer et C. Vincent, 2007
Earth and Planetary Science Letters **261** (2007) 367-374

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Volume 261, Issues 3–4 30 September 2007 ISSN 0012-821X

ELSEVIER

# EARTH & PLANETARY SCIENCE LETTERS




This article was published in an Elsevier journal. The attached copy is furnished to the author for non-commercial research and education use, including for instruction at the author's institution, sharing with colleagues and providing to institution administration.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

http://www.elsevier.com/copyright

Author's personal copy

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Earth and Planetary Science Letters 261 (2007) 367–374
EPSL
www.elsevier.com/locate/epsl

# Disappearance of an Alpine glacier over the 21st Century simulated from modeling its future surface mass balance

E. Le Meur *, M. Gerbaux, M. Schäfer, C. Vincent

*Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, BP 96, 38402 Saint Martin d'Heres, France*

Received 18 December 2006; received in revised form 18 May 2007; accepted 3 July 2007
Available online 21 July 2007
Editor: H. Elderfield

**Abstract**

A spatially-distributed snow/ice model is used to simulate the surface mass balance of the Saint Sorlin Glacier (French Alps) over the 1981–2004 period. The modeled mass balance globally reproduces field data except over places where, because of the scarcity of measurements, small-scale features as proposed by the model are smoothed out by the data interpolation. Both measured and simulated mass balance fields are then used to force a 2-D ice flow model and comparison of respective results show similar large-scale glacier flow dynamics. On the other hand, at a smaller scale, the present-day ice distribution computed from the modeled mass balance field sometimes deviates from that obtained with the interpolated field mass balance. It particularly offers a better match to observations by succeeding in reproducing a specific deglaciation pattern in the upper part of the glacier. These preliminary results led us to consider the possibility of substituting modeled mass balance series to measured ones, especially when modeling the future of the glacier. This latter approach is thus applied to simulate the glacier response under the IPCC SRESB1 scenario. Results show a rapid decay leading to a total disappearance of the glacier by the year 2070.
© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

*Keywords:* glacier; climate; mass balance; meteorology; modeling; ice dynamics

## 1. Introduction

Studying glaciers for climatic purposes is relevant for several reasons. First, their surface mass balance is a good proxy for the annual meteorological conditions since changes in winter and/or summer conditions (precipitation, temperature, solar radiation, ...) are directly reflected in the annual value (Vincent, 2002). When measured for long enough (several decades), mass balance series for a glacier therefore represent good indicators of the climate. Physical models of mass balance are a way of better understanding this relationship, especially with sensitivity tests from which the impact of changes in some meteorologic parameters on surface mass balance can be assessed (Oerlemans and Hoogendoorn, 1989; Oerlemans and Fortuin, 1992; Gerbaux et al., 2005). This sets the bases for a more ambitious approach aiming at detecting trends in individual climatic parameters (e.g. temperature, moisture, cloudiness) from mass balance time series. Secondly, a climate change also induces glacier dynamical changes (length, thickness, surface velocity),

* Corresponding author.
*E-mail address:* lemeur@lgge.obs.ujf-grenoble.fr (E. Le Meur).

0012-821X/$ - see front matter © 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.epsl.2007.07.022

Author's personal copy



but the resulting non-linear time-lagged relationship is complex and apprehending this much less straightforward climate proxy usually requires the use of an ice flow model. This is why glacier flow models – especially when run in the reverse mode – are appropriate for inferring a climate signal from glacier change over periods during which no mass balance series are available. Last, (forward) modeling of glaciers gives the possibility for a better understanding of their dynamics and allows for prediction of their future in response to various climatic scenarios.

This paper focuses on this latter aspect. It also shows how replacing spatially incomplete measured mass balance series by modeled ones when forcing an ice flow model can improve results. The two mass balance series for the Saint Sorlin Glacier (from measurements and modeling) are first described and compared. Then, by feeding an ice flow model, their respective impacts in terms of ice dynamics are analyzed before focusing on the future behavior of the glacier during the 21st Century.

## 2. Surface mass balance

### 2.1. Field measurements

Surface annual mass balance over the Saint Sorlin Glacier has been intensively measured on some 30 different sites since 1957, which provides one of the most complete series in terms of both spatial and temporal coverage for an alpine glacier. With the help of a statistical model (Lliboutry, 1974) and a minimum curvature interpolator, these point measurements are turned into mass balance maps such that terms like ‘measurements’ or ‘measured’ will hereafter refer to these interpolated maps. The resulting annual surface mass balance for the glacier averaged over the study period (1981–2004) is depicted in the upper part of Fig. 1, where the glacier main characteristics are also summarized. More details on the glacier itself as well as the surface mass balance measurements can be found in Vincent et al. (2000) or at www-lgge.obs.ujf-grenoble.fr/ServiceObs/recherche.htm, where values appear slightly higher since they do not account for years from 1998 to 2004 which underwent a strong deficit (as can be judged from Fig. 2).

### 2.2. Modeled approach

The core of the modeled approach lies in CROCUS (Brun et al., 1989, 1992), a prognostic snow model adapted for glaciers (Gerbaux et al., 2005) which computes the time-dependent evolution of the snow pack from which both the temporal (1-hour step) and the spatial (200-m resolution) variability of the surface mass balance is obtained. Meteorological input data (2-m air temperature and moisture, 10-m wind speed, precipitation amount and phase, long and short-wave radiation components, and cloudiness) come from the disaggregator SAFRAN (Durand et al., 1993) which assimilates synoptic meteorological fields and more local observations. CROCUS is then forced by these input data at the hourly step for every surface exposure and altitude. The effects of time-dependent glacier surface altitudinal changes on the surface mass balance are accounted for by simultaneously running an ice flow model (see the use of vertical mass balance gradients in Section 3.3), the principal effect being that of induced temperature changes with an evolving glacier surface. From there, by accounting for the different terms of the energy balance (latent and sensible heat, short and long-wave radiative transfers, precipitations), CROCUS computes the internal spatial distribution of mass and energy within the snow pack. Ice is treated explicitly as a particular kind of snow (density, roughness, albedo…) and snow metamorphism as well as percolation process are also accounted for since they play an important part in the energy fluxes (see Gerbaux et al., 2005 for more details).

### 2.3. Tuning and validation of the CROCUS model over the glacier

Because of small-scale topographic effects which the disaggregator SAFRAN is unable to capture, modeled winter precipitation has to be tuned against field data (Gerbaux et al., 2005). Therefore validation can only be carried out against summer ablation or annual mass balance (algebraic sum of these two terms). This annual specific balance in the form of a ‘water equivalent’ thickness (m w.e.) as produced by CROCUS can be summed over the entire surface of the glacier to provide the ‘volumetric’ balance (i.e. the total volume change of the glacier during the hydrological year). Fig. 2 represents both measured and modeled cumulative specific annual balance for the glacier during the study period. The fact that as time goes, no split grows between the two curves shows the ability of the model to reproduce the summer ablation and that possible errors do not exhibit any bias. Last, with a volume rate of loss of about 22 m w.e. in 22 yr, these curves indicate a greater shrinkage after 1980 compared to the reconstructed 20th-century average rate of about 0.35 m w.e. per year (Vincent, 2002).

Author's personal copy



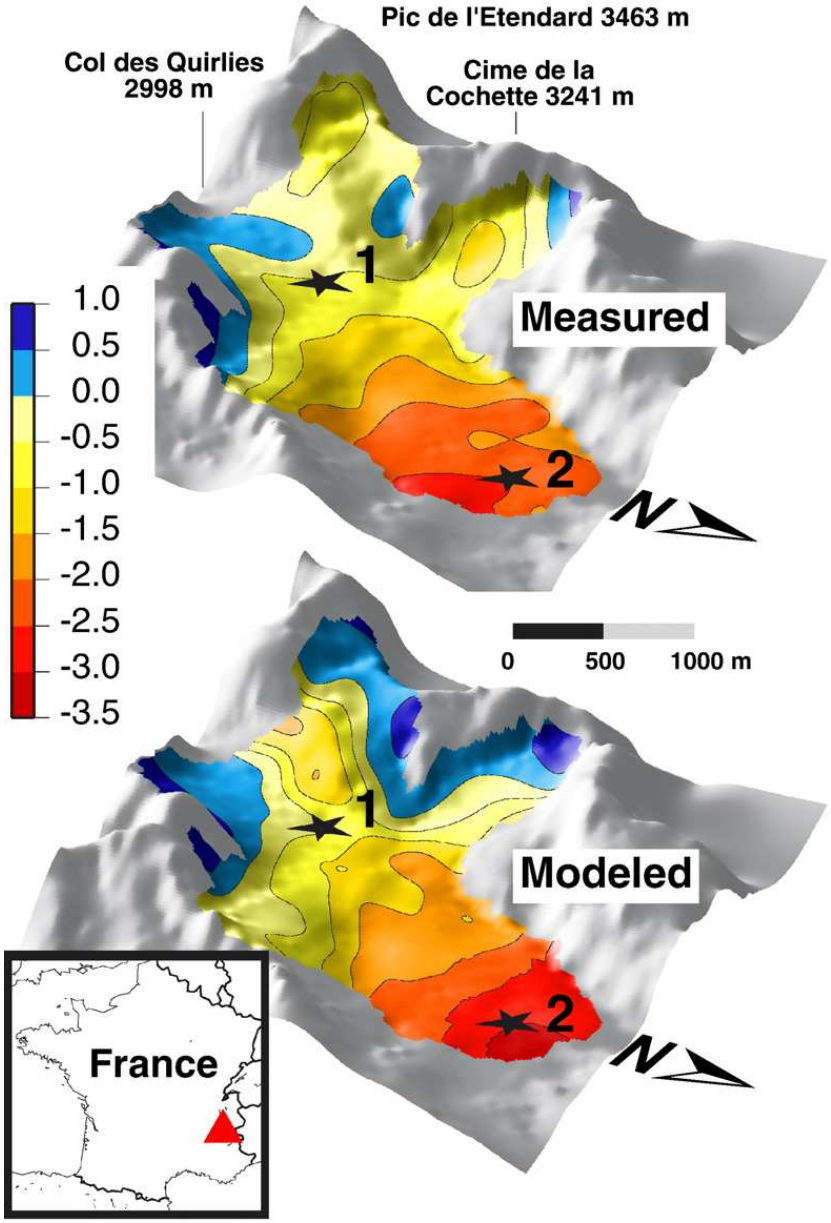



Fig. 1. 1981–2004 average mass balance field in meter water equivalent (m w.e.) from interpolated measurements and from the CROCUS model. The equilibrium line (zero mass balance) is featured by the blue-to-yellow color transition. Stars labeled 1 and 2 indicate the upper and lower locations at which time-dependent surface altitude is depicted in Fig. 3. Glacier de Saint Sorlin has an area of about 3 $km^2$ and elevations ranging from 2700 m to 3400 m a.s.l.

### 2.4. Comparison of measured and modeled mass balance

Inspection of Fig. 1 shows overall similar mass balance patterns which are mainly controlled by altitude. However, despite a similar specific 1981–2004 average balance of about $-1$ m $a^{-1}$ for both sets (see Fig. 2), a slightly stronger vertical gradient is observable with the model (on top of some more local discrepancies). For instance, higher computed mass balance values on the upper part of the glacier (slopes below the Pic de l'Etendard) imply less ablation from the model because modeled accumulation is tuned according to data. High altitude wind erosion (in fact the portion occurring late in the season after the measurements have been performed in April) could provide an explanation since this effect is not accounted for in CROCUS. As for higher modeled ablation rates on the lower part of the glacier, an inaccurate albedo and/or roughness parametrization for ice can be suggested. Indeed, these two parameters are kept constant and uniform throughout the study (only for ice which eventually surfaces in the ablation zone in summer), whereas it is well admitted that they actually undergo large changes which deeply impact on summer ablation (Gerbaux et al., 2005).

Author's personal copy



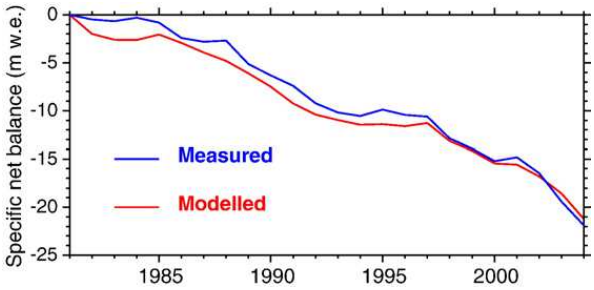



Fig. 2. Modeled and measured cumulative specific net mass balance (m w.e.) for the 1981–2004 period.

One consequence of larger mass balance values on the upper part of the glacier for the modeled data set is a lower ELA (Equilibrium Line Altitude; the theoretical line separating accumulation and ablation zones) leading to a larger accumulation area of 0.76 $km^2$ instead of 0.46 $km^2$ for interpolated field data (see blue colors on Fig. 1). This implies a higher yearly water equivalent accumulation of $251 \cdot 10^3$ $m^3$ instead of only $122 \cdot 10^3$ $m^3$ and therefore more ice flowing down towards the ablation zone. If this does not bring any noticeable difference on the spatially averaged net mass balance (as featured on Fig. 2), it is because the stronger mass balance gradient means higher melting rates on the lower part of the glacier which almost exactly compensate for the ice outflow excess from the upper part of the glacier. It therefore gives respective similar glacier overall balances of $-2.83 \cdot 10^6$ $m^3$ $a^{-1}$ and $-2.85 \cdot 10^6$ $m^3$ $a^{-1}$ for the modeled and measured data sets over the 1981–2004 period.

The most striking difference between the two sets remains probably the strongly depleted area between the Col des Quirlies and the slopes below the Pic de l'Etendard which is not observable from the data because of a lack of measuring points over this crevassed zone. This illustrates the strong dependence of mass balance (mainly summer ablation) on slope orientation in the model, like for instance in the present case where an east-oriented slope undergoes larger ablation rates than the surrounding more northerly ones. We will show from Section 3.3 that this difference is in fact a strength of the model. More generally, despite a fairly low resolution of 200 m, the big advantage of the modeled approach lies in its ability to capture the spatial variability of mass balance where field data are sparse like over most of the upper part of the glacier.

## 3. Ice dynamics

Given the relationship between mass balance and glacier change, the question arises as to how the differences in measured and modeled mass balance patterns will induce changes in ice dynamics. For this purpose, an improved version of an ice flow model (Le Meur and Vincent, 2003) is forced by both types of mass balance and corresponding results are compared.

### 3.1. The ice flow model

The time-dependent ice flow model (Le Meur and Vincent, 2003) numerically computes the ice thickness ($H$) change on every point of a 2-D horizontal grid by solving the continuity equation :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \nabla \cdot \overrightarrow{q} \ , \qquad (1)$$

where $a$ is the surface mass balance term and $\overrightarrow{q}$ is the horizontal ice flux obtained by vertical integration along the ice column of the velocity vector (the sum of ice deformation and sliding which is accounted for with an appropriate law). With the help of a constitutive relation, namely a power flow law for the creep of ice, velocity terms are linked to the components of the stress tensor. These components are solved from the mechanical balance of the ice body (Stokes equations). The model is

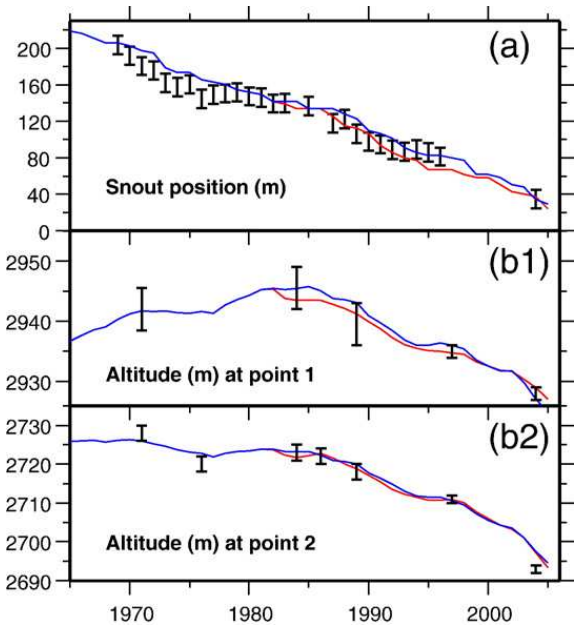



Fig. 3. Modeled snout position [a] and ice surface elevation [b] as a function of time from both measured (blue) and modeled (red) mass balance fields. Point 1 and 2 are located in Fig. 1. Corresponding field data are represented with their associated error bars (see Le Meur and Vincent, 2003 for more details). Curves diverge only after 1981 as a result of different mass balance inputs. The two main parameters for the model are a deformation rate factor $A = 2.5 \cdot 10^{-24}$ $Pa^{-3}$ $s^{-1}$ and a sliding coefficient $A = 7 \cdot 10^{-14}$ $m^8$ $N^{-3}$ $a^{-1}$, see Le Meur and Vincent (2003) for explanations.

Author's personal copy



based on the Shallow Ice Approximation (SIA) which takes advantage of the relatively small aspect ratio (characteristic thickness to characteristic length ratio for the glacier) which allows simplifications in the mechanical equations (Hutter, 1983). The model is solved according to a semi-implicit numerical scheme on a 50 m × 50 m grid with a 18-day time stepping. More details on the model, the SIA and its applicability to the Saint Sorlin Glacier can be found in Le Meur and Vincent (2003) and Le Meur et al. (2004).

### 3.2. Experimental setup

In Le Meur and Vincent (2003) the two main parameters of the ice flow model, namely the ice deformation rate and the basal sliding factor were tuned by matching two independent sets of field data (time-dependent snout position and ice thickness at selected spots). Similar experiments but with the two mass balance fields have been performed here again and their results compared to field data (Fig. 3). The experimental setup consisted of initiating the model with the 1905 topography of the glacier (DEM digitized from a 10-m equidistance map of that date and interpolated with a minimum curvature interpolator) and running it forward in time until 2004. Up to 1957, mass balance forcing resulted from a meteorological and geodetic reconstruction (Vincent, 2002). From 1957 the mass balance distribution exclusively came from interpolated field data. The difference in the two experiments starts after 1981, when either modeled mass balance or interpolated field data serve as input for the run (respectively red and blue curves on Fig. 3). It should be noticed that the effects of glacier surface elevation changes on the modeled mass balance forcing are accounted for by applying appropriate vertical mass balance gradients computed by Gerbaux et al. (2005). From a sensitivity test, these gradients corresponding to 14 equally distributed altitudes from 2100 to 3600 m a.s.l. have been linearly interpolated and applied at every required elevation. Last, ice rheology and sliding parameters are those optimized from Le Meur and Vincent (2003) and are kept the same throughout the simulations. The large changes that for instance sliding undergoes from winter to summer are in fact implicitly accounted for through a yearly-averaged factor (by being forced with a yearly mass balance, the model can not account for seasonal effects).

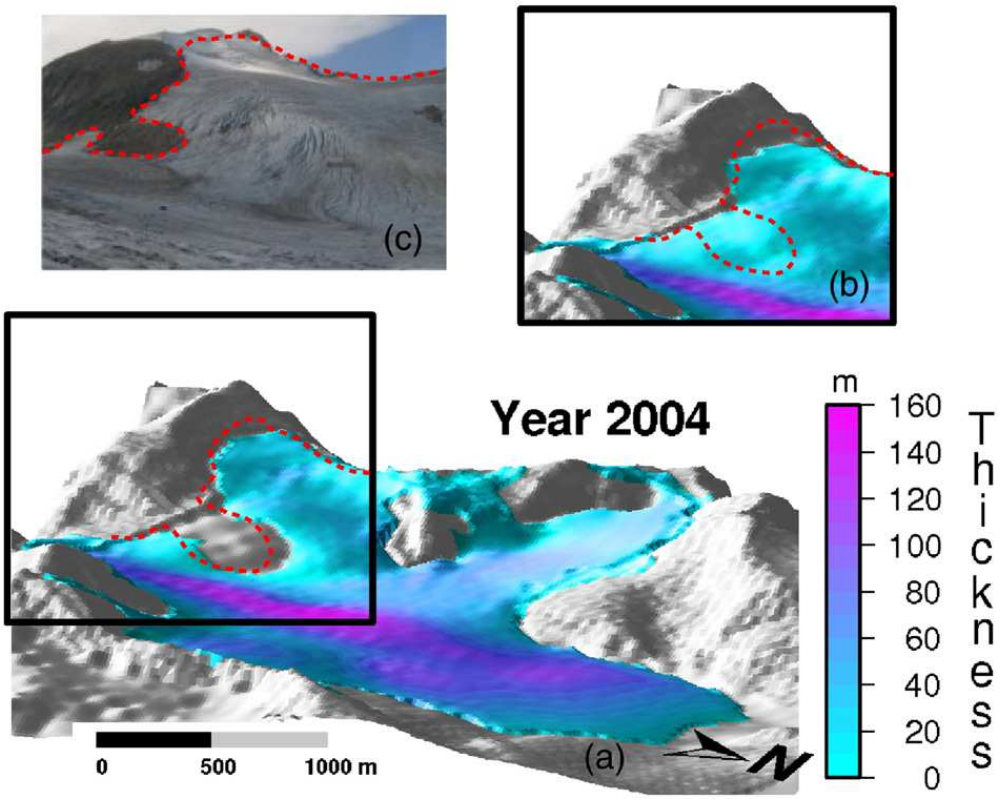



Fig. 4. Ice distribution as given by the ice flow model from modeled mass balance input [a] (all over the glacier) and from measured mass balance [b] (restricted to the black inset for comparison over the upper part of the glacier). Also shown is a 2005 picture [c] roughly covering the same area as the inset from which the glacier limits have been outlined so as to be reported on [a] and [b].

Author's personal copy



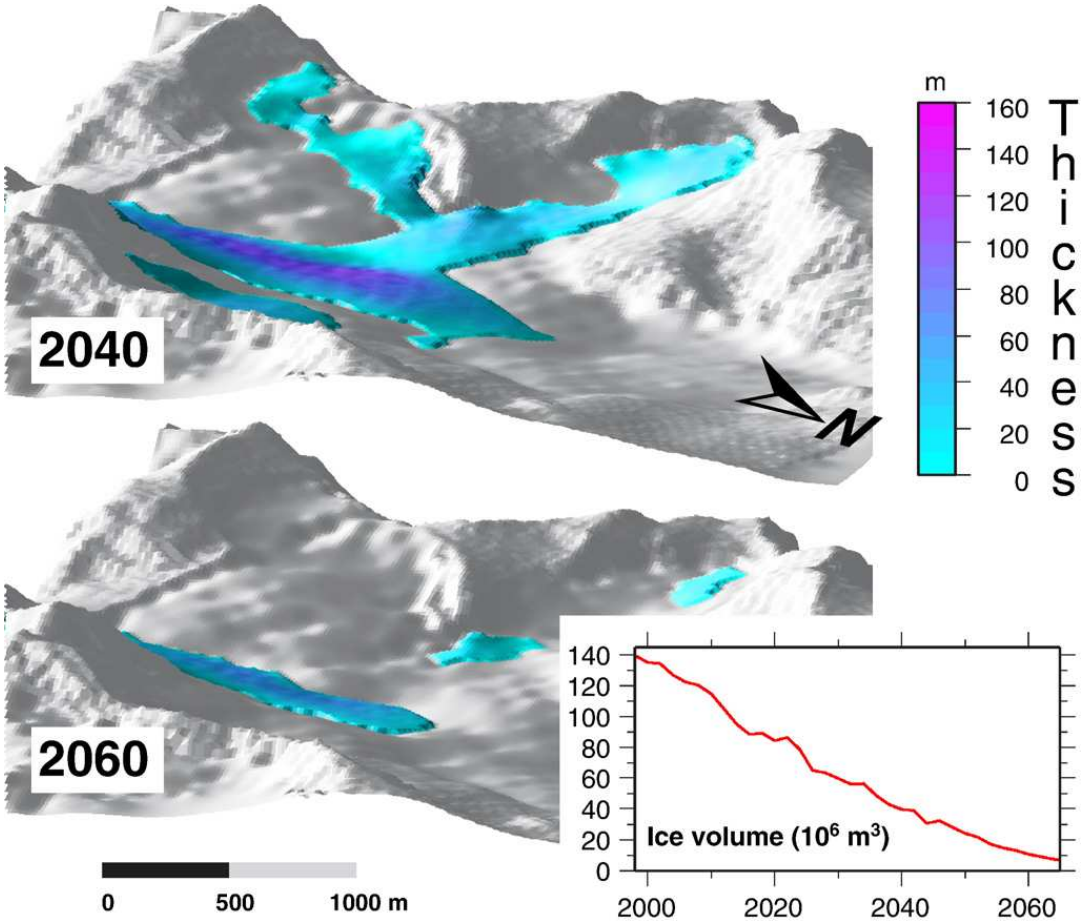



Fig. 5. Simulated glacier configuration in 2040 and 2060 and total ice volume change during the 21st Century.

### 3.3. Sensitivity to surface mass balance

As can be seen from Fig. 3, no significant difference in either the thickness changes at the two specific locations or in the snout position are detectable, both mass balance forcings providing a rather satisfactory match to the data. Since these outputs can be considered as representative of large-scale flow processes (see for instance Le Meur and Vincent, 2003), these results validate the modeled mass balance as a correct (and possibly slightly better) input for simulating large scale dynamics of mountain glaciers. A small snout retreat from the modeled mass balance input (compared to that from field measurements) is however perceptible, a retreat that progressively reduces to about zero by the end of the simulation period (see Fig. 3a). It features a slightly faster response of the glacier snout to warming. This is consistent with an enhanced mass turnover resulting from the higher mass balance gradient obtained with the modeled mass balance (see Section 2.4) which characterizes a glacier with a higher activity index.

As for more local effects on dynamics, it seems interesting to check whether the difference in mass balance patterns between Col des Quirlies and Pic de l'Etendard (Section 2.4) leads to corresponding changes in ice evolution. The use of an ice flow model is necessary since ice thickness changes at a given place result not only from local mass balance but also from the advection of ice (as expressed by Eq. (1)). Fig. 4 represents results of the same experiment as for Fig. 3 in terms of ice distribution at the end of the simulation (2004). As shown by the figure, the modeled mass balance input yields more realistic results since it allows the ice flow model to match (although not exactly) the growing deglaciated area downstream of the pass which does not appear with simulations using interpolated mass balance.

### 3.4. Future of the glacier under global warming

Considering results of the preceding section as a satisfactory validation of the modeled mass balance approach for ice dynamics, the future behavior of the glacier under global warming appears worth investigating. In the following experiment, local meteorological data are extracted from a General Circulation Model (GCM), namely the CM2-0 model of the Geophysical

Author's personal copy



Fluid Dynamics Laboratory (Delworth et al., 2005) whose output is used to adjust the SAFRAN meteorology (by applying anomalies on the SAFRAN archive, see Gerbaux et al., 2005 for more details) before it is supplied to CROCUS. The GCM is forced by the SRESB1 scenario of the IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change, 2001) yielding a global warming of 1.8° by the end of the 21st Century over the Saint Sorlin region. From the corresponding CROCUS output, the ice flow model is run forward from 1998 (initial conditions deduced from an existing 1998 DEM) until the end of the 21st Century.

As can be seen from Fig. 5, the glacier strongly recedes and loses more than 70% of its initial mass within 42 yr (respectively 139 and 40 million $m^3$ in 1998 and 2040). The effects of warming are such that the glacier rapidly becomes unable to accumulate anymore, and by the year 2060, the vanishing glacier essentially owes its existence to the central trough where an initial maximum thickness of about 150 m requires some time to melt down. Under these circumstances, the highly probable development of a lake would certainly speed up the final wastage process.

## 4. Discussion

Our results for a relatively small glacier lying at intermediate altitudes (2700–3400 m a.s.l.) suggest a rapid disappearance well before the end of the 21st Century. It should be noticed that the forcing climatic scenario used here is one amongst several others proposed by the IPCC, depending on the forthcoming rate of greenhouse gas emissions. Anticipating this latter is highly speculative and by sticking to such a moderate scenario, we are in fact proposing a lower bound on the future rate of decay of the glacier. Another study of Schär et al. (2004) based on a Regional Climate Model forced by the more drastic SRESA2 scenario predicts a higher temperature increase (+5°) and a much larger year to year climate variability leading to frequent occurrences of heatwaves similar to that of 2003 by the end of the 21st Century. Under such conditions, the down wasting of the glacier would be even faster and the truth is probably to be found between these two extremes under an intermediate climatic scenario like for instance the recently proposed A1B IPCC scenario. Nevertheless, the fact that such a 'moderate' climatic scenario (only +1.8° in 100 yr compared to +4° or even +6° for other IPCC results) leads to the total disappearance of the glacier emphasizes the high sensitivity of glaciers to climate, thereby justifying their designation as good climate indicators.

The interest of modeling glacier surface mass balance is twofold. It first allows to fill incomplete mass balance series (in terms of spatial and temporal coverages) and secondly, it is the most straightforward way of assessing the future of glaciers under various climatic scenarios. A forecast of the loss of glacierized surfaces over the Alps in the forthcoming decades has been proposed by Paul et al. (2004) by using digitized glacier outlines derived from satellite data. For this purpose, the 1973–98 observed retreats for various altitudinal ranges are extrapolated in the future. If this method can be envisaged for the near future, such extrapolations over too long periods can rapidly become misleading because they do not account for the dynamical adjustment of glaciers to their environment. Therefore predicting the long term future of glaciers requires not only the knowledge of the future climatic conditions and their impacts on glacier mass balance, but also the way glaciers will respond (terminus position changes for instance). This dynamic response is complex because it implies numerous physical processes responsible for a characteristic response time for each glacier. It means that for instance an enhanced response of glacier morphologies to the extremely warm nineties is still to come given response times of the order of several decades for most alpine glaciers. By integrating these physical processes, a deterministic ice flow model should provide more accurate results than time-extroplated or statistical approaches. Such models are also the only way to properly account for feed-backs like effects on mass balance of albedo or glacier surface temperature changes due to the evolving surfaces. It is of course unrealistic to conduct similar modeling exercises on every glacier in the Alps. However, mass balance/ice flow models can be viewed as valuable for assessing the representativity of local measurements, allowing for spatial extrapolations over larger areas. They can also prove useful when calibrating parameterizations of mass balance (and hence climate conditions) as a function of glacier length changes.

## Acknowledgements

The authors wish to thank all those who contributed to the data collection effort on Glacier de Saint Sorlin. This work benefited from financial support from the French glacier survey observatory part of the Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble (OSUG) and from the Climate Change and Cryosphere programme funded by the French Ministry of Research. We are deeply indebted to the 2 reviewers whose comments helped improving the manuscript and to the scientific

Author's personal copy



editor Henry Elderfield for his understanding and patience whilst dealing with this paper.

## References

Brun, E., Martin, E., Simon, V., Gendre, C., Coleou, C., 1989. An energy and mass model of snow cover for operational avalanche forecasting. J. Glaciol. 35 (121), 333–342.

Brun, E., David, P., Sudul, M., Brugnot, G., 1992. A numerical model to simulate snow-cover stratigraphy for operational avalanche forecasting. J. Glaciol. 38 (128), 13–22.

Delworth, et al., 2005. GFDL's CM2 global coupled climate models — part I: formulation and simulation characteristics. J. Climate 19 (5), 643–674.

Durand, Y., Brun, E., Merindol, L., Guiyomarc'h, G., Lesaffre and, B., 1993. A meteorological estimation of relevant parameters for snow models. Ann. Glaciol. 18, 65–71.

Gerbaux, M., Genthon, C., Etchevers, P., Vincent, C., Dedieu, J.P., 2005. Surface balance of the glaciers in the French Alps: distributed modeling and sensitivity to climate change. J. Glaciol. 51 (175), 561–572.

Hutter, K. 1983. Theoretical Glacilogy; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. Dordrecht, etc., D. Reidel Publishing Co., Tokyo, Terra Scientific Publishing Co.

Intergovernmental Panel on Climate Change, 2001. Climate Change: Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge Univ. Press, New York.

Le Meur, E., Vincent, C., 2003. A two-dimensional shallow ice-flow model of Glacier de Saint Sorlin, France. J. Glaciol. 49 (167), 525–538.

Le Meur, E., Gagliardini, O., Zwinger, T., Ruokolainen, J., 2004. Glacier flow modelling: a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes solution. C. R. Phys. 5, 709–722.

Lliboutry, L., 1974. Multivariate statistical analysis of glaciers annual balances. J. Glaciol. 13 (69), 371–392.

Oerlemans, J., Fortuin, J.P., 1992. Sensitivity of glaciers and small ice caps to greenhouse warming. Science 258, 115–117.

Oerlemans, J., Hoogendoorn, N.C., 1989. Mass-balance gradients and climatic change. J. Glaciol. 35 (121), 399–405.

Paul, F., Kääb, A., Maisch, M., Kellenberger, T., Haeberli, W., 2004. Rapid disintegration of Alpine glaciers observed with satellite data. Geophys. Res. Lett. 31, L21402. doi:10.1029/2004GL020816.

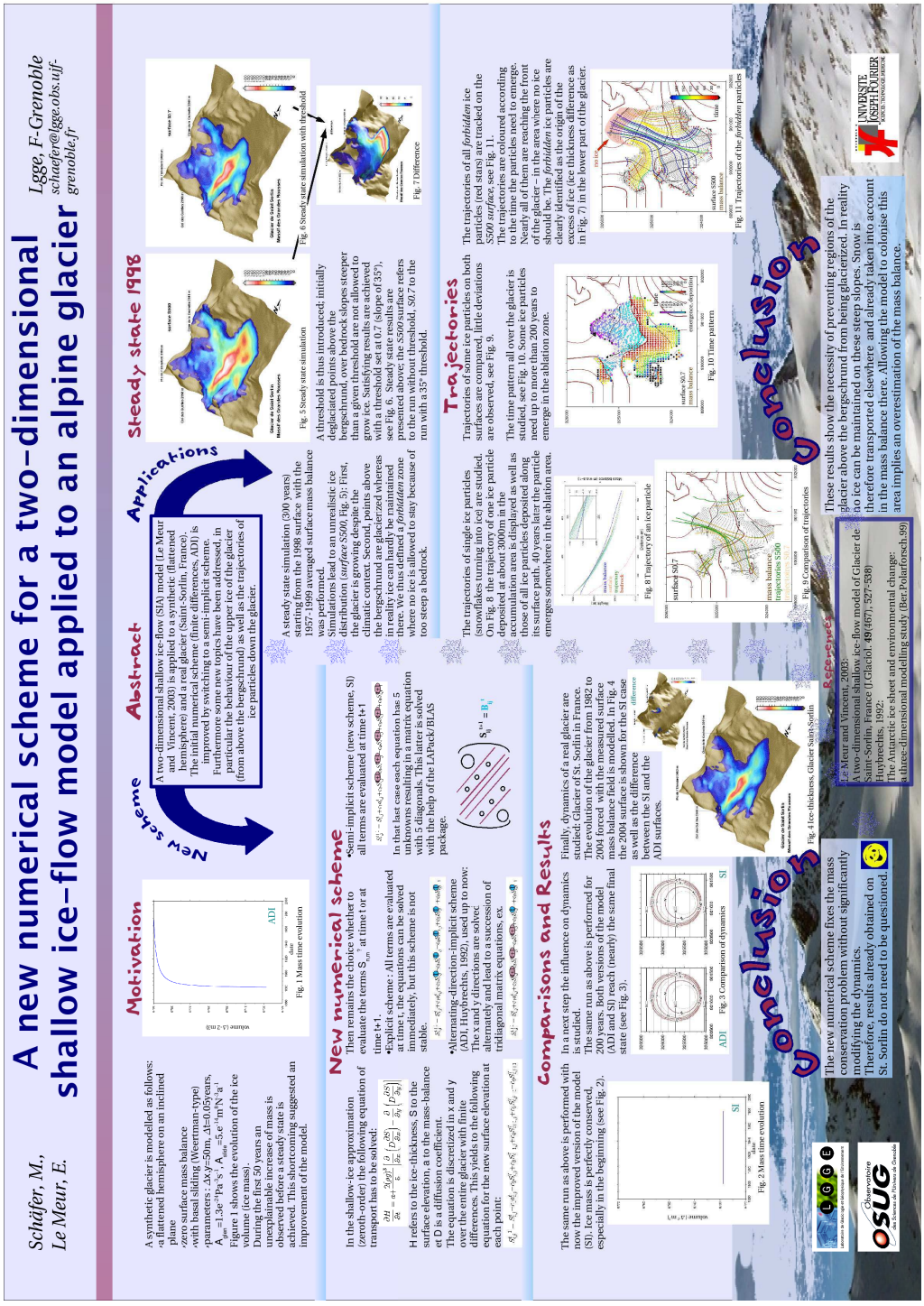
Schär, C., Vidale, P.L., Lüthi, D., Frei, C., Häberli, C., Liniger, M.A., Appenzeller, C., 2004. The role of increasing temperature variability for European summer heat waves. Nature 427, 332–336. doi:10.1038/nature02300.

Vincent, C., 2002. Influence of climate change over the 20th Century on four French glacier mass balance. J. Geophys. Res. 107 (D19), 4375. doi:10.1029/2001JD000832.

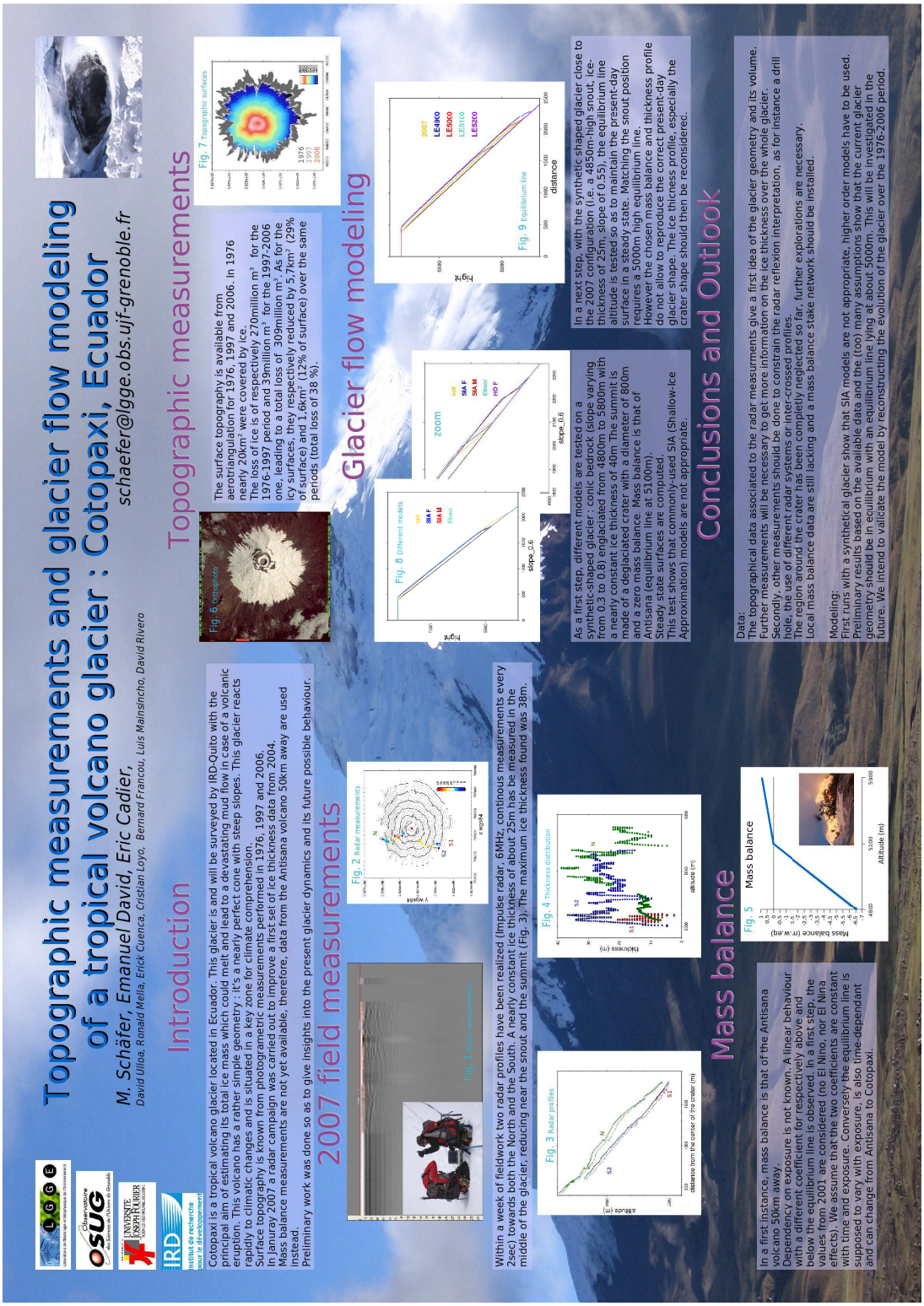
Vincent, C., Vallon, M., Reynaud, L., Le Meur, E., 2000. Dynamic behavior analysis of glacier de Saint Sorlin, France, from 40 years of observations, 1957–97. J. Glaciol. 46 (154), 499–506.

# 3. Posters présentés à l' EGU

## 3.1. EGU 2006 - A new numerical scheme for a two-dimensional shallow ice-flow model



## 3.2. EGU 2007 - Topographic measurements and glacier flow modeling of a tropical volcano glacier : Cotopaxi, Ecuador

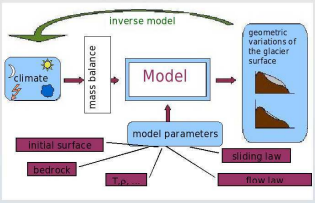


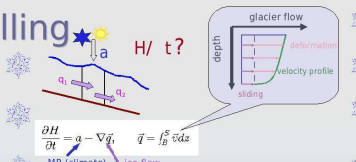
## 3.3. EGU 2007 - Mountain glacier flow modeling : a comparison of different models from the Shallow Ice Approximation to the Full-Stokes solution

# Mountain glacier flow modelling : a comparison of different models from the Shallow Ice Approximation to the Full-Stokes solution

*M. Schäfer, O. Gagliardini, E. Le Meur, F. Pattyn, C. Ritz* *schaefer@lgge.obs.ujf-grenoble.fr*

## Glacier Flow modelling




To calculate the ice thickness rate of change at each point of the glacier, mass balance data and velocity field are necessary.
The velocity field is driven by the force budget (Stokes equations ), a flow law (Glen with n=3), a sliding law (Weertman type) and boundary conditions.

**Models used in this study :**

| | | |
|---|---|---|
| M SIA | Le Meur and Vincent, 2003 | SIA, 0th order |
| F SIA | Pattyn, 2003 | SIA, 0th order |
| F HO | Pattyn, 2003 | Higher Order Hydrostatic approximation dw/dx,y << du,v/dz |
| Elmer | www.csc.fi/elmer | Full Stokes (Finite Elements) |

## Objectives

The objective of the present study is to estimate wich is the most appropriate type of model to use given the specificity of the glacier to model. Respective effects on glacier dynamics of deformation, sliding and mass balance are separatey addressed.

At the present state of the study only theoretical-shaped glaciers are considered in order to better understand the different processes. Later, two real case glaciers (Saint Sorlin glacier, France and Cotopaxi volcano, Ecuador) will be included.
As for now, only effects of deformation and mass balance have been compared, sliding will be included later.
CPU time comparison is also planned in a near future.

## Spherical glacier

As a first test case, an axisymmetric glacier under the form of a flattened hemi-sphere resting on a ramp of uniform slope is used (500m radius, 150m max. ice-thickness, bedrock slope varying from 0 to 0.3, spheric mass balance distribution, slightly shifted downward with reference to the ice ).

Fig. 1 spherical glacier

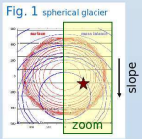



Fig. 2 geometry after 50years, no MB, slope 0.3

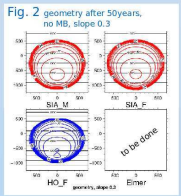



Fig. 3 same as Fig. 2, effect of MB

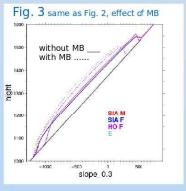
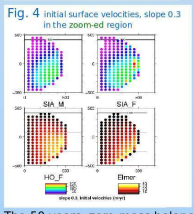



Fig. 4 initial surface velocities, slope 0.3 in the zoom-ed region



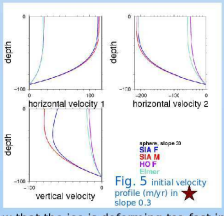




Fig. 5 initial velocity profile (m/yr) in slope 0.3

The 50 years, zero-mass balance runs show that the ice is deforming too fast in the SIA models (Figs. 2 and 3). This is confirmed by the surface velocities and the velocity profile (Figs. 4 and 5, initial state).
After some time, SIA velocities get closer to HO and FS ones (Fig. 9 and 10).
When mass balance is included, one observes a better agreement between the SIA and HO/FS outputs (Fig. 2).
There is nearly no dependency upon the bedrock slope (not shown).

## Conic glacier

Another synthetic shaped glacier is used under the form of a nearly constant 40-m ice thickness from 4800m up to 5800m resting on a conic bedrock (slope varying from 0.3 to 0.8). The summit is occupied by a 800-m diameter deglaciated crater without ice and over which mass balance is zero. The mass balance distribution with altitude is linear (with change of the gradient at the equilibrium line).
This geometry is chosen in analogy to the Cotopaxi volcano glacier in Ecuador.

Fig. 6 conic glacier geometry

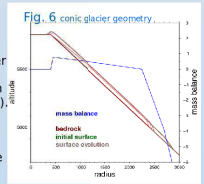



Fig. 7 50year simulation with zero MB

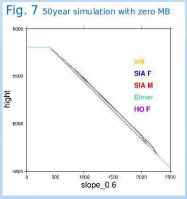



Fig. 8 zoom, same as Fig.7, dependency on the bedrock slope

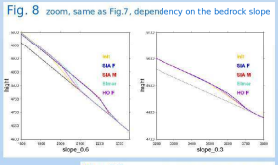



Fig. 9 initial state, conic glacier, slope 0.6

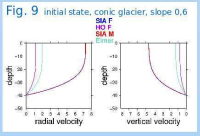
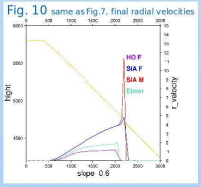



Fig. 10 same as Fig.7, final radial velocities




Similar conclusions as with the spherical glacier are found : The SIA models are deforming too fast and are overestimating the velocities. Contrary to the spherical case, the stronger the bedrock slope, the more pronounced the discrepancy between the models (Fig.8). For instance, with flat cones, one sees a good agreement between the different models whereas for higher slopes the SIA model is no longer valid.

## Conclusions

These preliminary simulations show that ice deforms too fast within SIA models, velocity is also overestimated. The SIA solution gets closer to the HO/FS one when the surface gets closer to a steady state.
There is a better agreement between the SIA and HO/FS models when mass balance is applied, meaning that this latter overcomes the changes resulting from using different flow models.
Comparison of the spherical and conic glaciers show the importance of the ice surface slope and not only bedrock slope or thickness gradient.

## Perspectives

In a next step, CPU time will be compared as well as the influence of sliding included.
A third theoretically-shaped glacier is under study : a valley shaped glacier.
Finally, the same comparison will be conducted on two real case glaciers : Saint Sorlin Glacier in France and Cotopaxi volcano Glacier in Ecuador.

# Bibliographie

# Bibliographie


A. Abe-Ouchi, 1993, Ice sheet response to climate changes : a modelling approach, *Züricher Geogr. Schr.* **54**

O. Albrecht, 2000, Dynamics of glaciers and ice sheets : A numerical model study, Ph.D. Thesis, Swiss Fed. Inst. of Technol., Zürich

C. Baiocchi, F. Brezzi, L. P. Franca, 1993, Virtual bubbles and the Galerkin least squares method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **105**, 125-141

D. R. Baral, 1999, Asymptotic theories of large scale motion, temperature and moisture distributions in land based polythermal ice shields and in floating ice shelves. A critical review and new developments, Ph.D. Thesis, Dept. Mech., Darmstadt, Tech. Univ., Germany

D. R. Baral, K. Hutter, 1999, An iterative solution procedure for shallow stokes flows. The shallow ice approximation revisited, Advances in Cold-Region Thermal Engineering and Sciences, Lecture Notes in Physics, Volume 533, ISBN 978-3-540-66333-1, Springer-Verlag, 1999, p. 273

D. R. Baral, K. Hutter, R. Greve, 2001, Asymptotic theories of large-scale motion, temperature, and moisture distribution in land-based polythermal ice sheets : A critical review and new developments, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. **54**, no 3, may 2001

D. J. Benny, 1996, Long waves in liquid films, *J. Lath. Phys* **45**, 150-155

E. Berthier, 2005, Dynamique et bilan de masse des glaciers de montagne (Alpes, Islande, Himalaya) : Contribution de l'imagerie satellitaire, Thèse de l'Université Toulouse III, soutenue le 16 septembre 2005

R. Bintanja, R. S. W. van de Wal, J. Oerlemans, 2002, Global ice volume variations through the last glacial cycle simulated by a 3-D ice-dynamical model, Quaternary International **95-96** (2002) 11-23

D. L. Black, 1992, An overview of impulse radar phenomenon, Aerospace and Electronics Conference, NAECON 1992, Proceedings of the IEEE 1992 National, Pages : 320-326, Vol. 1

H. Blatter, 1995, Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients, *J. Glaciol.* **41**(138), 333-344

E. Bruder, 2004, Modélisation du glacier de St. Sorlin, Validation du modèle en différences finies, étude du comportement du glacier et comparaison avec un code aux éléments finis, Projet de fin d'études et rapport de stage DEA, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble

E. Brun, E. Martin, V. Simon, C. Gendre and C. Coleou, 1989, An energy and mass model of snow cover of operational avalanche forecasting *J. Glaciol.,* **35**(121), 333-342

E. Brun, P. David, M. Sudul and G. Brugnot, 1992, A numerical model to simulate snow-cover stratigraphy for operational avalanche forecasting, *J. Glaciol.* **38**(128), 13-22

W. F. Budd, B. Coutts and R. C. Warner, 1998, Modelling the Antarctic and Northern Hemisphere ice-sheet changes with global climate through the glacial cycle, *Ann. Glaciol.* **27**, 153-160

A. Buisson, F. Guirado, F. Lacroix et F. Valla, 1999, Glaciers à risques, Alpes françaises, Inventaire et suivi, 1999, Rapport Cemagref pour le ministère de l'aménagement du territoire et de l'environnement

B. Cáceres, L. Maisincho, J. D. Taupin, P. Tachker, B. Francou, J. P. Chazarin, V. Favier, 2003, El Glaciar 15 del Antizana (Ecuador) : Balance de masa, topografía, meterología, hidrología y balance de energia, Año 2002 (Ecuador), Informe IRD-INAMHI-EMAAP

J. Colinge, H. Blatter, 1998, Stress and velocity fields in glaciers : Part I, Finite-difference schemes for higher-order glacier models, *J. Glaciol.* **44**(148), 448-456

L. Copland, M. Sharp, 2001, Mapping thermal and hydrological conditions beneath a polythermal glacier with radio-echo sounding, *J. Glaciol.* **57**(157), 232-243

D. Dahl-Jensen, 1989, Steady thermomechanical flow along two-dimensional flow lines in large grounded ice sheets, *J. Geophys. Res.* **94**(B8), 10355-10, 362

A. Deponti, V. Pennati, L. De Biase, 2006, A fully 3D finite volume method for incompressible Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume **52**, Issue 6, pages 617 - 638

A. Deponti, V. Pennati, L. De Biase, V. Maggi, F. Berta, 2006, A new fully three-dimensional numerical model for ice dynamics, *J. Glaciol.* **52**(178), 365-376(12)

Y. Durand, E. Brun, L. Merindol, G. Guiyomarc'h, B. Lesaffre and M. E., 1993, A meteorological estimation of relevant parameters for snow models, *Ann. Glaciol.* **18**, 65-71

EISMINT, European Ice Sheet Modeling INiTiative,
URL : http :\\homepages.vub.ac.be\∼phuybrec\eismint.html

Elmer, URL : http :\\www.csc.fi\elmer

L. P. Franca, S. L. Frey, T. J. R. Hughes, 1992a, Stabilized finite element methods : I. Application to the advective-diffusive model, *Comput. Methods Appl. Mech. Engr.* **95**, 253-276

L. P. Franca, S. L. Frey, T. J. R. Hughes, 1992b, Stabilized finite element methods : II. The incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engr.* **99**, 209-233

B. Francou, janvier 2007, Communication personelle

K. O. Friedrichs, 1948, Water waves on shallow sloping beach, *Comm. Appl. Math* **1**, 109-134

O. Gagliardini, J. Meyssonnier, 1997, Flow simulation of a firn-covered cold glaicer, *Ann. Glaciol.* **24**

O. Gagliardini, septembre 2007, Communication personelle

M. Gerbaux, 2005, Reconstitution du bilan de masse des glaciers alpins et impact du changement climatique, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1, soutenue le 31 octobre 2005

M. Gerbaux, C. Genthon, P. Etchervers, C. Vincent, J. P. Dedieu, 2005, Surface mass balance of glaciers in the French Alps : Distributed modelling and sensitivity to climate change, *J. Glaciol.* **51**(175), 561-572

Glacioclim, Les GLACIers, un Observatoire du CLIMat,
URL : http :\\www-lgge.ujf-grenoble.fr\ServiceObs\

J. W. Glen, 1955, The creep of polycrystalline ice, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **228**(1175), 519-538

P. Wessel, W. H. F. Smith, 1991, Free software helps map and display data, EOS Trans. AGU, 72, 441

E. Goncalvès, 2005, Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, Institut National Polytéchnique de Grenoble

W. Greuell, 1992, Hintereisferner, Austria : mass-balance reconstruction and numerical modelling of the historical lenght variation, *J. Glaciol.* **38**(129)

R. Greve, 1997a, A Continuum-Mechanical Formulation for Shallow Polythermal Ice Sheets, Philosophical Transactions : *Mathematical, Physical and Engineering Sciences,* Vol. **355**, No. 1726, pp. 921-974

R. Greve, 1997b, Application of a Polythermal Three-Dimensional Ice Sheet Model to the Greenland Ice Sheet : Response to Steady-State and Transient Climate Scenarios, *J. Climate* **10**, 901-918

R. Greve, M. Weis and K. Hutter, 1998, Palaeoclimatic evolution and present conditions of the Greenland ice sheet in the vicinity of Summit : and approach by larce-scale modelling, *Palaeoclimates* **2**(2-3), 133-161

R. Greve and R. Calov, 2002, Comparison of Numerical Schemes for the Solution of the Ice-Thickness Equation in a Dynamic/Thermodynamic Ice-Sheet Model, *Journal of Computational Physics* **179**, 649-664, doi :10.1006/jcph.2002.7081

G. H. Gudmundsson, 2003, Transmission of basal variability to a glacier surface, *J. Geophys. Res.* **108**(B5), 2253, doi :10.1029/2002JB002107

M. Hall, 1977, El volcanismo en el Ecuador, IPGH, Sección Nacional del Ecuador

M. Hall, B. Beate, 1991, El volcanismo Plio-Cuaternarion en los Andes del Ecuador en el paisaje volcánico de la Sierra ecuatoriana, estudos de Geografía, pp. 5-13

G. J. Haltiner, R. T. Wiliams, 1980, Numerical prediction and dynamic meteorology, *John Wiley & Sons, New York*

R. C. A. Hindmarsh, A. J. Payne, 1996, Time-step limits for stable solutions of the ice-sheet equations, *Ann. Glaciol.* **23**, 74-85

R. C. A. Hindmarsch, 2001, Notes on basic glaciological computational methods and algorithms, B. Straughan, R. Greve, H. Ehrentraut and Y. Wang, (eds.), Continuum Mechanics and Applications in Geophysics and the Environment, p. 222-249, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

R. C. A. Hindmarsh, 2004, A numerical comparison of approximations to the Stokes equations used in ice sheet and glacier modeling, *J. Geophys. Res.* **109**, (F01012)

J. T. Houghton *and 7 others*, eds. 2001 : Climate change 2001 : the scientific basis, Cambridge, etc., Cambridge University Press, Intergovernmental Panel on Climat change, (Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report)

A. Hubbard, H. Blatter, P. Nienow, D. Mair, B. Hubbard, 1998, Comparison of a three-dimensional model for glacier flow with field data from Haut Glacier d'Arolla, Switzerland, *J. Glaciol.* **44** (147)

L. C. Hulbe, D. R. MacAyeal, 1999, A new numerical model of coupled inland ice sheet, ice stream, and ice shelf flow and its application to the West Antarctic Ice Sheet, *J. of Geophys. Res.*, Vol. 104(**B11**), p. 25349-25366

K. Hutter, 1980, Time-dependent surface elevation of an ice slope, *J. Glaciol.* **25**(92)

K. Hutter, 1981, The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet : in defence of using stretched coordinates, *J. Glaciol.* **27**(95)

K. Hutter, 1983, Theoretical glaciology ; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets, Dordrecht, etc., D. Reidel Publishing Co. ; Tokyo, Terra Scientific Publishing Co.

P. Huybrechts, J. Oerlemans, 1988, Evolution of the East Antarctic ice sheet : a numerical study of thermo-mechanical response patterns with changing climate, *Ann. Glaciol.* **11**, 52-59

P. Huybrechts, 1990a, A 3-D model for the Antarctic ice sheet : a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast, *Climate Dyn.* **5**(2), 79-92

P. Huybrechts, 1990b, The antarctic ice sheet during the last glacial-interglacial cycle : a three-dimensional experiment, *Ann. Glaciol.* **14**, 115-119

P. Huybrechts, 1992, The Antarctic ice sheet and environmental change : a three-dimensional modelling study, *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung

P. Huybrechts, J. de Wolde, 1999, The dynamic response of the Greenland and Antarctic Ice Sheet to Multiple-Century Climatic Warming, *J. Climate* **12**, 2169-2188

IPCC, Intergovernmental Panel on Climate Change, 2001, *Climate Change : Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, Cambridge Univ. Press, New York

IRD, 2004, Determinacíon del volumen del casquette de hielo del vocán Cotopaxi, informe IRD-INAMHI-EMAAP

IRD, 2005, Los peligros volcánicos asociados con el Cotopaxi, Corporación Editora Nacional

ISMIP, Ice Sheet Model Intercomparison Project,
URL : http :\\homepages.ulb.ac.be\∼fpattyn\ismip\welcome.html

D. Jenssen, 1977, A three-dimensional polar ice-sheet model, *J. Glaciol.* **18**(80)

T. Jóhannesson, 1992, Landscape of temperate ice caps, Ph.D. Thesis, Geophysics Program, Univ. Washington, Seattle

E. Jordan, L. Ungerechts, B. Cáceres, B. Francou, A. Peñafiel, 2007, en presse : Photogrammetric determination of the ice loss at the Cotopaxi Volcano, Ecuador

B. Kamb, K. A. Echlemeyer, 1986a, Stress-Gradient coupling in glacier flow : I. Longitudinal averaging of the influence of ice thickness and surface slope, *J. Glaciol.* **32**(111)

B. Kamb, K. A. Echlemeyer, 1986b, Stress-Gradient coupling in glacier flow : II. Longitudinal averaging in the flow response to small perturbations in ice thickness and surface slope, *J. Glaciol.* **32**(111)

B. Kamb, 1986, Stress-Gradient coupling in glacier flow : III. Exact longitudinal equilibrium equation, *J. Glaciol.*, **32**(112)

J. B. Keller, 1948, The solitary wave and periodic waves in shallow water, *Comm. Appl. Math.* **1**, 323-339

LAPACK Users's Guide, 1999, Society for Industrial and Applied Mathematics

E. Le Meur, C. Vincent, 2003, A two-dimensional shallow ice-flow model of Glacier de Saint-Sorlin, France, *J. Glaciol.* **49**(167), 527-53

E. Le Meur et al., 2004, Glacier flow modelling : a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes solution, C. R. Physique 5 (2004) 709-722

E. Le Meur, C. Vincent, 2006, Monitoring of the Taconnaz ice fall (French Alps) using measurements of mass balance, surface velocities and ice cliff position, Cold Regions Science and Technology, **46**(1-11)

E. Le Meur, M. Gerbaux, M. Schäfer and C. Vincent, 2007, Disappearance of an Alpine glacier over the 21st Century simulated from modeling its future surface mass balance, Earth and Planetary Science Letters **261**(2007) 367-374

A. Letréguilly, P. Huybrecht, N. Reeh, 1991, Steady state characteristics of the Greenland ice sheet under different climates, *J. of Glaciol.* **37**(125), p. 149-157

L. Lliboutry, 1965, Traité de glaciologie, Glaciers - Variations du climat - Sols gelés, Masson & Cie Editeurs

L. Lliboutry, 1974, Multivariate statistical analysis of glacier annual balances, *J. Glaciol.* **13**(69), 371-392

L. Lliboutry, 1987a, Very Slow Flow of Solids : Basics of Modeling in Geodynamics and Glaciology, Martinus Nijhoff, Dordrecht, Netherlands

L. Lliboutry, 1987b, Realistic, yet simple bottom boundary conditions for glaciers and ice sheets, *J. Geophys. Res.* **92**(B9), 9101-9109

L. Lliboutry, 1993, Glaciers, Glaciologie, extraits de l'Encyclopédie Universalis, Corpus 10, Paris

M. Lüthi, M. Funk, 2000, Dating ice cores from a high Alpine glacier with a flow model for cold firn, *Ann. Glaciol.* **31**, 69-79

D. R. MacAyeal, 1989, Large scale ice flow over a viscous basal sediment : theory and application to the Ice Stream B, Antarctica, *J. Geophys. Res.* **94**(B4), 4071-4087

M. W. Mahaffy, A Three-Dimensional Model of Ice Sheets : Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories, *J. Geophys. Res.* **81**(6)

A. Mangeney, F. Califano, O. Castelnau, 1996, Isothermal flow of an anisotropic ice sheet in the vicinity of an ice divide, *J. Glaciol.*, **101**(B12), pages 28,189-28,204

S. J. Marshall, G. K. C. Clarke, W. R. Peltier, 2000, Glaciological reconstruction of the Laurentide ice sheet : physical processes and modelling changes, *Can. J. Earth Sci.* **37**(5), 769-793

C. Mayer, 1996, Numerische Modellierung der Übergangszone zwischen Eisschild und Shelfeis (numerical modelling of the transition zone between an ice sheet and an ice shelf), *Ber. Polarforsch.* 214, 1-150

C. Mayer, M. J. Siegert, 2000, Numerical modelling of ice-sheet dynamics across the Vostok subglacial lake, central East Antarctica, *J. Glaciol.* **46**(153)

L. W. Morland, 1984, Thermomechanical Balances of Ice Sheet Flows, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, Vol. **29**, pp. 237-266

L. W. Morland, 1987, Unconfined ice-shelf flow, Dynamics of the West Antarctic ice sheet, ed. C. J. Van der Veen and J. Oerlemans (Dordrecht, etc.), 99-116

H. C. Muller, 1991, Une méthode iterative simple pour résoudre les équations de mouvement d'un glacier, Mémoire de Diplôme en Mathématiques, Université de Genève

B. Narod & G. K. C. Clarke, 1994, Miniature High-Power Transmitter for Radio Echo Soundng, *J. Glaciol.* **40**, 134 :190-194

J. Oerlemans, 1982, A model of the Antarctic Ice Sheet, *Nature*, Vol. **297**

W. S. B. Paterson, 1994, *The physics of glaciers*, Third edition, Oxford, etc., Elsevier

F. Pattyn, 2000, Ice-sheet modelling at different spatial resolutions : focus on the grounding zone, *Ann. Glaciol.* **31**, 211-216

F. Pattyn, 2002, Transient glacier response with a higher-order numerical ice-flow model, *J. Glaciol.* **48**(162)

F. Pattyn, 2003, A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model : Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes, *J. Geophys. Res.* **108**(B8), 2382, doi :10.1029/2202JB02329

F. Pattyn, 2006, GRANTISM : An ExcelTM model for Greenland and Antarctic ice-sheet response to climate changes, *Computers & Geosciences,* V. 32, no. **3**, pp. 316-325

A. J. Payne, 1999, A thermomechanical model of ice flow in West Antarctica, *Climate Dyn.* **15**(2), 115-125

V. Peyaud, C. Ritz, G. Krinner, 2007, Modelling the Early Weichselian Eurasian Ice Sheets : role of ice shelves and influence of ice-dammed lakes, *Clim. Past Discuss.* **3**, 221-247

A. Philip, J. Meyssonnier, 1999, Anisotropic Isothermal Ice-Cap Flow with the Shallow Ice Approximation, Advances in Cold-Region Thermal Engineering and Sciences, Lecture Notes in Physics, Volume 533, ISBN 978-3-540-66333-1, Springer-Verlag, p. 237

D. Pollard, R. M. DeConto, 2006, A Coupled Ice-sheet/Ice-shelf/Sediment Model Applied to a Marine-margin Flowline : Patterns of Sediment Deposits, Eos Trans. AGU, 87(52), Fall Meet. Suppl., Abstract C11A-1124

S. F. Price, E. D. Waddington, H. Conway, 2007, A full-stress thermomechanical flow band model using the finite volume method, *J. Geophys. Res.* **112**, F03020, doi :10.1029/2006JF000724

C. F. Raymond, Deformation in the vicinity of ice divides, 1983, *J. of Glaciol.* **29**, p. 357-373

L. Reynaud, 1985, *La Mer de Glace et les glaciers du Mont Blanc*

C. Ritz, A. Fabre, A. Letreguilly, 1997, Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation, *Climate Dynamics* **13** :11-24

C. Ritz, V. Rommelaere, C. Dumas, 2001, Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420.000 years : Implications for altitude changes in the Vostok region, *J. Geophys. Res.* **106**(D23), 31,943 - 31,964

V. Rommelaere, 1997, Trois Problèmes Inverses en Glaciologie, Thèse de l'Université Joseph-Fourier, Grenoble 1, soutenue le 23 septembre 1997

F. Saito, 2002, Development of a three dimensional ice sheet model for numerical studies of Antarctic and Greenland ice sheet, Ph.D. Thesis, Univ. of Tokyo, Tokyo

F. Saito, A. Abe-Ouchi and H. Blatter, 2004, Effects of the first-order stress gradients to an ice sheet evaluated by a three-dimensional thermo-mechanical coupled model, *Ann. Glaciol.*, **37**, 166-172

M. Schäfer, E. Le Meur, 2007, Improvements of a 2D-SIA ice flow model ; application to the Saint Sorlin glacier, France, *J. Glaciol.* **53**(183)

O. Soucek, Z. Martinec, 2007, Iterative algorithm for improvement of the Shallow Ice Approximation solution of a 3-D ice flow, *Geophysical Research Abstracts*, Vol. **9**, 02611, 2007 SRef-ID : 1607-7962/gra/EGU2007-A-02611

S. Suter, M. Hoelzle, 2002, Cold firn in the Mont Blanc and Monte Rosa areas, European Alps : spatial distribution and statistical models, *Ann. Glaciol.*, **35**, 2002

L. Tarasov and W. Richard Peltier, 2002, Greenland glacial history and local geodynamic consequences, *Geophys. J. Int.* 150, 198-229

E. Thibert, R. Blanc, C. Vincent, N. Eckert, Glaciological and Volumetric Mass Balance Measurements - Error Analysis over 51 years for the Sarennes glacier, French Alps, soumis au *J. Glaciol.*

J. Van den Berg, R. S. W. Van de Wal, J. Oerlemans, 2006, Effects of spatial discretization in ice-sheet modelling using the shallow-ice approximation, *J. Glaciol.* **52**(176), 89-98

C. J. van der Veen, 1986, Ice sheets, atmospheric $CO_2$ and sea level, Ph.D. thesis

C. J. van der Veen, 1989, A numerical Scheme for Calculating Stresses and Strain Rates in Glaciers, *Mathematical Geololgy*, Vol. **21**, No.3

C. J. van der Veen, I. M. Whillans, 1989, Force Budget : I. Theory and numerical methods, *J. Glaciol.* **35**(119)

VAW Zürich, Naturgefahren Gletscher, *Inventaire des glaciers à risque en Suisse*, URL : http :\\glaciology.ethz.ch\inventar

G. J.-M. C. Leysinger Vieli, G. H. Gudmundsson, 2004, On estimationg length fluctuations of glaciers caused by changes in climatic forcing, *J. Geophys. Res.*, Vol. **109**, F01007, doi :10.1028/2003JF00027

C. Vincent, M. Vallon, L. Reynaud, E. Le Meur, 2000, Dynamic behaviour analysis of glacier de Saint Sorlin, France, from 40 years of observation, 1957-97, *J. Glaciol.* **46**(154), 499-506

C. Vincent, G. Kappenberger, F. Valla, A. Bauder, M. Funk and E. Le Meur, 2004, Ice ablation as evidence of climate change in the Alps over the 20th century, *J. Geophys. Res.* **109,** D10104, doi : 10.1029/2003JD003857

C. Vincent, M. Vallon, E. Le Meur, 2004, Rapport sur les travaux exécutés par la LGGE, Lac et glacier de Rochemelon

C. Vincent, E. Le Meur, D. Six, M. Funk, 2005, Solving the paradox of the end of the Little Ice Age in the Alps, *Geophysical Research Letters,* Vol. **32**, L09706, doi :10.1029/2005GL022552

C. Vincent, R. Blanc, 2006, Evolution du glacier de Gébroulaz (Vanoise) au cours des 100 dernières années, Travaux scientifiques du Parc de la Vanoise, Tome XXIII

C. Vincent, D. Six, E. Le Meur, 2006, Compte-rendu des mesures, Glacier de la Mer de Glace

C. Vincent, E. Le Meur, D. Six, M. Funk, M. Hoelzle and S. Preunkert, 2007a, Very high-elevation Mont Blanc glaciated areas not affected by the 20th Century climate change, *J. Geophys. Res.*, Vol. **112**, No. D9, D09120, 10.1029/2006JD007407, 15 May 2007

C. Vincent, E. Le Meur, D. Six et E. Thibert, 2007b, Un service d'observation des glaciers des Alpes françaises « GLACIOCLIM-ALPES », pour quoi faire ? La Houille Blanche, 10.1051/lhb :2007040, 2007

C. Vincent et al., 2007c, unpublished

J. Weertman, 1957 Deformation of floating ice shelves, *J. Glaciol.* **3**(21), 38-42

J. Weertman, 1964, The theory of glacier sliding, *J. Glaciol.* **5**(39), 287-303

T. Zwinger, R. Greve, O. Gagliardini, T. Shiraiwa, M. Lyly, 2006, A full Stokes-flow thermo-mechanical model for firn and ice applied to the Gorshokov crater glacier, Kamchatka, *Ann. Glaciol.* **00**, 1-15

# Tables

# Table des figures


**I Introduction** **8**

1.1. Coupe schématique d'un glacier depuis la rimaye jusqu'au front. `Schematic cross section of a glacier, from the bergschrund down to the snout.` . . . . . 10

1.2. La ligne d'équilibre sur le glacier d'Argentière (Chamonix), photo de septembre 2006. `Equilibrium line on the glacier d'Argentière (Chamonix), picture from September 2006.` . . . . . 11

1.3. Typologie des crevasses. `Different types of crevasses.` . . . . . 12

1.4. Rimaye sur le Glacier de la Girose (Ecrins). `Bergschrund on the Glacier de la Girose (Ecrins).` . . . . . 13

1.5. Structures caractéristiques à la surface des glaciers. `Caracteristic structures at the surface of glaciers.` . . . . . 14

1.6. Image satellite de l'Antarctique (photo tirée du site web Wikipédia). `Satellite photo of Antarctica (picture from the Wikipédia website).` 17

1.7. La calotte glaciaire du Vatnajökull en Islande (photo tirée du site web de Wikipédia). `The Vatnajökull Ice-cap in Iceland (picture from the Wikipédia website).` . . . . . 18

1.8. Le glacier d'Aletsch en Suisse dans le Berner Oberland, le plus long glacier des Alpes (photo tirée du site web de Wikipédia). `The Aletsch glacier in the Berner Oberland in Switzerland, the longest glacier of the Alps (picture from the Wikipédia website).` 19

1.9. Le Cotopaxi en Équateur dans les Andes. `The Cotopaxi glacier in Ecuador, Andes.` . . . . . 19

1.10. Dôme du Goûter dans le massif du Mont Blanc. `Dôme du Goûter in the Mont Blanc massif.` . . . . . 20

1.11. Morphologie du glacier d'Argentière (Chamonix). `Morphology of the Glacier d'Argentière (Chamonix).` . . . . . 21

1.12. Glaciers avec des formes particulières. `Glaciers with specific morphologies.` . . . . . 22

1.13. Byrd glacier (Antarctique) : un fleuve de glace qui se transforme en glacier émissaire quand il traverse les montagnes (photo tirée du site web de Wikipédia).
Byrd glacier (Antarctica) : an ice-stream that becomes un outlet glacier when it crosses the moutains (picture from the Wikipédia website). . . . . 23
1.14. Ice-shelf ou plate-forme flottante (photo tirée du site web de Wikipédia).
Ice-shelf (picture from the Wikipédia website). . . . . 24
1.15. Particularités structurales et morphologiques du bord marin d'une calotte glaciaire, schéma de l'AWI (Alfred Wegner Institut).
Specific structures at the border of a marine ice-sheet, sketch from AWI (Alfred Wegner Institut). . . . . 25
1.16. Le glacier Noir dans le massif des Ecrins (photo de Louis Reynaud, 1983).
Glacier Noir in the massif des Ecrins (picture from Louis Reynaud, 1983). . . . . 26
1.17. Glacier rocheux du Laurichard (photo de Louis de Reynaud, 1987).
Rocky glacier, glacier du Laurichard (picture from Louis Reynaud, 1987). . . . . 26
1.18. Un exemple de glacier régénéré : le bas du glacier d'Argentière (Chamonix).
The bottom part of the glacier d'Argentière (Chamonix) as an example for a regenerated glacier. . . . . 27
1.19. La langue glaciaire Engabreen du glacier Svartisen en Norvège s'arrête à quelques vingt mètres de la ligne de rivage de l'Océan Atlantique (photo tirée du site web de Wikipédia).
The Svartisen glacier (Engabreen part) in Norway whose snout stops some 20 m upstream of the shoreline of the Antlantic Ocean (picture from the Wikipédia website). . . . . 28

2.1. Bilan spécifique annuel cumulé pour plusieurs glaciers alpins.
Specific cumulated mass balance for several alpine glaciers. . . 31
2.2. Position du front de la Mer de Glace (Chamonix) à plusieurs époques.
Snout position of the Mer de Glace (Chamonix) at different periods. 32
2.3. Positions du front de plusieurs glaciers du massif du Mont Blanc ainsi que celui de Grindelwald (Suisse).
Snout positions of several glaciers in the Mont Blanc range as well as that of the Grindelwaldgletscher (Switzerland). . . . . 33
2.4. Lac pro-glaciaire (Mer de Glace, Chamonix).
Pro-glacial lake (Mer de Glace, Chamonix). . . . . 35
2.5. Lacs glaciaires. Glacier lakes. . . . . 36
2.6. Lac supra-glaciaire (Rochemelon, France) avant et après sa vidange artificielle (photos de M. Capelin).
Glacier surface lake (Rochemelon, France) before and after its artificial draining (pictures from M. Capelin). . . . . 38

2.7. Vidange de poche d'eau intra-glaciaire.
Outburst of an intraglacial water pocket. . . . . 41
2.8. Le glacier de Tête-Rousse après la catastrophe.
Tête-Rousse glacier after the disaster. . . . . 42
2.9. Les deux types de zones de départ (rupture par glissement ou basculement), figure extraite de Buisson et al. (1999).
Two types of ice falls (rupture by sliding or tipping), figure from Buisson et al. (1999). . . . . 43
2.10. Glacier de Taconnaz, Chamonix.
Taconnaz glacier, Chamonix. . . . . 44
2.11. Chute de glace en août 1965 au glacier d'Allalin en Suisse.
Glacier tongue collapse in august 1965 at the Allalin glacier in Switzerland. . . . . 45
2.12. Schéma d'une rupture par glissement, figure de Buisson et al. (1999).
Sketch of a breaking off by sliding, figure from Buisson et al. (1999). . . . . 46
2.13. Aspects économiques et sociaux des glaciers.
Economic and social aspects of glaciers. . . . . 48
2.14. Protection de la glace par des bâches blanches, Zugspitze (Allemagne).
Shielding of the ice with white plastic sheets, Zugspitze (Germany). 49

3.1. Schéma de la structure d'un modèle d'écoulement glaciaire.
Sketch of the structure of an ice flow model. . . . . 51

4.1. Mesures de la vitesse en surface à l'aide d'une balise.
Surface velocity measurements from mass balance stakes. . . . . 53
4.2. Représentation de la surface topographique du glacier de Gébroulaz (Massif de la Vanoise), d'après Vincent et Blanc (2006).
Surface topography of the Gébroulaz Glacier (Massif de la Vanoise), from Vincent et Blanc (2006). . . . . 54
4.3. Mesures de l'épaisseur de glace à l'aide d'un radar.
Thickness measurements with the help of a ground penetrating radar. 55
4.4. Mesures de l'épaisseur de glace à l'aide de forages.
Thickness measurements from ice drilling down to the bedrock. . 55
4.5. Profil de température et de densité le long d'un forage au Dôme du Goûter (Massif du Mont Blanc), d'après Vincent et al. (2007a).
Temperature and density versus depth from drilling core data at Dôme du Goûter (Mont Blanc massif), from Vincent et al. (2007a). 56

II Données du Service d'Observation Glacioclim 58

1.1. Les glaciers suivis par le Service d'Observations des glaciers alpins.
Glaciers surveyed by the French glacier observatory. . . . . 61

1.2. Sites de mesure pour les mesures de bilan de masse sur la Vallée Blanche (Mont Blanc).
Mass balance measurement network on the Vallée Blanche (Mont Blanc). 62

1.3. Bilans de masse volumétriques issus des mesures de terrain calés sur ceux issus de la photogrammétrie.
Field mass balance measurements adjusted to mass balance from photogrammetry. 64

1.4. Mesures de vitesses d'écoulement le long de deux profils sur le glacier d'Argentière (Chamonix), d'après Vincent et al. (2007b).
Ice flow velocity measurements along two profiles located on the glacier d'Argentière (Chamonix), from Vincent et al. (2007b). . 64

1.5. Variations d'épaisseurs le long d'un profil (Les Mottets) sur le glacier de la Mer de Glace (Chamonix) déduites des mesures de la surface topographique, d'après Vincent et al. (2006).
Ice-thickness variations on a profile (Les Mottets) on the Mer de Glace (Chamonix) from ice surface topographic measurements, from Vincent et al. (2006). . . . . 65

1.6. Front et variation de la position du front du glacier d'Argentière (Chamonix), d'après Vincent et al. (2007c).
Snout and variation of the snout position of the glacier d'Argentière (Chamonix), from Vincent et al. (2007c). . . . . 66

2.1. Bilan spécifique du glacier de Saint Sorlin (France) au cours des 50 dernières années.
Specific mass balance for the Saint Sorlin Glacier (France) over the last 50 years. . . . . 67

3.1. Mesure du bilan hivernal et estival en zone d'accumulation.
Measurement of winter and summer mass balances in the accumulation zone. . . . . 70

3.2. Mesures à l'aide des balises. Measurements from wooden stakes. . . . 70

3.3. Mesure du bilan hivernal et estival en zone d'ablation.
Measurement of winter and summer mass balances in the ablation zone. . . . . 71

3.4. Synthèse des mesures de bilan.
Summary of mass balance measurements. . . . . 72

3.5. Photos des campagnes de mesure. Pictures of the field operations. 73

3.6. Bilan de masse annuel en fonction de la distance au Col des Quirlies (glacier de Saint Sorlin, France).
Annual mass balance as a function of the distance to the Col des Quirlies (Saint Sorlin Glacier, France). . . . . 75

3.7. Bilan de masse moyen des 50 dernières années ainsi que les points de mesures en 2004 (uniquement ceux en zone d'ablation), glacier de Saint Sorlin (France).
Average masse balance field over the last 50 years and the measurement points in 2004 (only the ones in the ablation zone), Saint Sorlin Glacier (France). . . . . 77

III Modélisation de l'écoulement des glaciers 80

1.1. Référentiel et notations utilisés. Coordinate system and notations. 81
1.2. Conditions aux limites pour les vitesses.
Boundary conditions for velocities. . . . . 84
1.3. Composantes du tenseur des contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube élémentaire.
Components of the stress tensor applied to the faces of an elementary cube. . . . . 86

IV Modèle à deux dimensions, approximation de la couche mince (SIA) 114

1.1. Illustration de la non-conservation de la masse avec le schéma ADI dans le cas d'un glacier synthétique.
Deficiency of the ADI method with regard to the mass conservation issue. . . . . 116
1.2. Double grille, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Staggered grid, from Schäfer et Le Meur (2007). . . . . 118
1.3. Évolution de la masse totale du glacier de Saint Sorlin avec les deux schémas numériques. La même correction concernant les épaisseurs négatives que sur la Figure 1.1 est appliquée, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Evolution of the total mass for the glacier of Saint Sorlin with both numerical schemes. The same correction for negative ice thicknesses as in Figure 1.1 is applied, from Schäfer et Le Meur (2007). . . 123
1.4. 300 ans de simulation stationnaire de Saint Sorlin forcés par le bilan moyen mesuré de la période 1957-1997 (Figure 3.2).
300 years of steady state simulation of the glacier of Saint Sorlin driven by the 1957-97 averaged measured mass balance (Figure 3.2). 124
1.5. Simulation évolutive du glacier de Saint Sorlin sur la période 1982-2004 (même représentation que sur la Figure 1.4).
Time-dependent simulation of the Saint Sorlin glacier over the 1982-2004 period (same output as on Figure 1.4). . . . . 125
1.6. Localisation de l'erreur dans la non-conservation de la masse avec le schéma ADI.
Localisation of the error on mass conservation with the ADI scheme. 130

2.1. Deux conditions d'occurrence des épaisseurs négatives comme conséquence d'un calcul de flux de glace surestimé du modèle, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
The two conditions of occurrence of negative ice-thicknesses resulting from an overestimated ice flow computation by the model, from Schäfer et Le Meur (2007). . . . . 132

3.1. Simulation stationnaire en partant de la surface de 1998 avec le champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999, glacier de Saint Sorlin, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Steady state simulation starting from the 1998 surface with the 1957-1999 average mass balance field, Saint Sorlin glacier, from Schäfer et Le Meur (2007). . . . . 134

3.2. Champ moyen du bilan mesuré sur la période 1957-1999 du glacier Saint-Sorlin, adapté de Le Meur et Vincent (2003).
1957-99 average mass balance field for the Saint Sorlin glacier, adapted from Le Meur et Vincent (2003). . . . . 135

3.3. Simulation stationnaire améliorée (Saint Sorlin), après application du critère de non-colonisation dans la partie supérieure du glacier, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Improved steady state simulation (Saint Sorlin glacier), with application of the non-colonisation criterion in the upper part of the glacier, from Schäfer et Le Meur (2007). . . . . 136

3.4. Différence entre la *fausse* et la *vraie* surface stationnaire, d'après Schäfer et Le Meur (2007).
Difference between the *wrong* and *correct* surface, from Schäfer et Le Meur (2007). . . . . 136

3.5. Trajectoires de particules de glace.
Trajectories of ice-particles. . . . . 138

3.6. Comparaison des trajectoires sur les différentes surfaces.
Comparison of particle trajectories on the different surfaces. 138

3.7. Trajectoire des particules issues la *zone interdite*.
Trajectories followed by ice particles deposited in the *'forbidden zone'*. . . . . 139

3.8. Durée de trajet des particules de glace au sein du glacier.
Duration of the ice particles flow path within the glacier. . . 140

4.1. Bilan moyen sur la période de 1982 à 2004 issu des mesures et d'une modélisation (glacier de Saint Sorlin).
Averaged mass balance over the 1982 to 2004 period from measurements and modelling (Saint Sorlin glacier). . . . . 142

4.2. Etat final de la simulation de 1981 à 2003 avec deux approches différentes pour le bilan de masse.
Final surface of the simulation from 1981 to 2003 with the two different approaches for mass balance. . . . . 144
4.3. Évolution de la masse et du bilan spécifique au cours du temps.
Time-dependent mass and specific mass balance evolutions. . . . . 145
4.4. Simulation stationnaire avec deux approches différentes pour le bilan de masse.
Steady state simulation using the two different approches for mass balance. . . . . 145
4.5. La petite zone déglacée entre le Col des Quirlies et le Pic de l'Etendard.
The small deglaciated zone between the Col des Quirlies and the Pic de l'Etendard. . . . . 146
4.6. Simulation de l'évolution future du glacier de Saint Sorlin selon le scénario B1 de l'IPCC.
Simulation of the future evolution of the Saint Sorlin glacier according to the IPCC B1 scenario. . . . . 147

**V Comparaison des modèles** **150**

1.1. Variété des géométries de glaciers étudiés.
Variety of different glaciers geometries studied. . . . . 151

2.1. Éléments utilisés dans Elmer. Elments used with Elmer. . . . . 161
2.2. Schéma du modèle Elmer. Sketch of the model Elmer. . . . . 165

3.1. Géométrie du glacier sphérique.
Geometry of the spherical glacier. . . . . 168
3.2. Glacier sphérique : simulation évolutive sans bilan et sans glissement (E_SB_SG).
Spherical glacier : time dependent simulation with zero mass balance and without sliding (E_SB_SG). . . . . 172
3.3. Glacier sphérique : simulation évolutive avec bilan et sans glissement (E_AB_SG).
Spherical glacier : time dependent simulation with mass balance and without sliding (E_AB_SG). . . . . 173
3.4. Glacier sphérique en coupe : simulation évolutive sans glissement avec/sans bilan de masse (E_AB_SG en pointillé, E_SB_SG comme ligne).
Spherical glacier cross section : time dependent simulation without sliding and with/without mass balance (E_AB_SG with points, E_SB_SG as a line). . . . . 174
3.5. Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse diagnostique en surface, sans glissement (D_SG).
Spherical glacier : $u$ component of the diagnostic surface velocity, without sliding (D_SG). . . . . 177

3.6. Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse en surface, sans bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_SB_SG).
Spherical glacier : $u$ component of the surface velocity, without mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG). 178

3.7. Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse en surface, avec bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_AB_SG).
Spherical glacier : $u$ component of the surface velocity, with mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG). 179

3.8. Glacier sphérique : profil vertical des vitesses diagnostiques au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), sans glissement (D_SG).
Spherical glacier : diagnostic vertical velocity profile at point $(x, y) = (300, -250)$, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), without sliding (D_SG). . . . . 181

3.9. Glacier sphérique : profil vertical des vitesses au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), sans bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_SB_SG).
Spherical glacier : vertical velocity profile at point $(x, y) = (300, -250)$, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), with zero mass balance and without sliding, time-dependent simulation (E_SB_SG). . . . . 182

3.10. Glacier sphérique : profil vertical de vitesse au point $(x, y) = (300, -250)$, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), avec bilan de masse, sans glissement, simulation évolutive (E_AB_SG).
Spherical glacier : vertical velocity profile at point $(x, y) = (300, -250)$, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), with mass balance and sliding, time-dependent simulation (E_AB_SG). 183

3.11. Glacier sphérique : terme $u$ de la vitesse diagnostique, avec glissement (D_AG).
Spherical glacier : $u$ component of the diagnostic velocity, with sliding (D_AG). . . . . 186

3.12. Terme $u$ de la vitesses de surface au point $(x, y) = (300, -250)$ relatif à celle d'Elmer sur la surface initiale pour les différentes simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 D_AG, 5 E_AG_SB.
$U$ component of Surface velocities at point (300/-250) normalized to that of Elmer on the initial surface for the different runs : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 D_AG, 5 E_AG_SB. . . . . 187

3.13. Glacier sphérique en coupe : simulation évolutive sans bilan de masse avec/sans glissement (E_AG_SB en pointillé, E_SG_SB comme ligne).
Spherical glacier cross section : time-dependent simulation without mass balance and with/without sliding (E_AG_SB as dotted line, E_SG_SB as a continous line). . . . . 188

3.14. Position du front pour les différentes simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 E_AG_SB. L'épaisseur croissante des traits caractérise une pente du socle variant de 0 à 0.3.
Snout positions for the different simulations : 1 D_SG, 2 E_SG_SB, 3 E_SG_AB, 4 E_AG_SB. Increasing line thicknesses represent bedrock slopes varying from 0 to 0.3. . . . . 189
3.15. Coupe de la surface à l'issue d'une simulation évolutive de 10 ans avec bilan de masse et glissement ; en rouge M SIA, en vert Elmer, en jaune la surface initiale.
Cross section of the surface after 10 years of a time-dependent simuation with mass balance and sliding ; red M SIA, green Elmer, yellow the inital surface. . . . . 189
3.16. Géométrie du glacier conique.
Geometry of the conic glacier. . . . . 190
3.17. Glacier conique le long d'une ligne d'écoulement : simulation évolutive sans glissement avec/sans bilan de masse (E_SG_AB pointillé, E_SG_SB ligne continue).
Flowline of the conical glacier : evolutive simulation without sliding with/without mass balance (E_SG_AB dotted lines, E_SG_SB as continous lines). . . . . 194
3.18. Glacier conique : position du front (altitude) en fonction de la pente du socle (ligne continue (E_SG_SB), pointillé (E_SG_AB)).
Conic glacier : snout position (altitude) as a fonction of the bedrock slope (as continous lines for (E_SG_SB) and dotted lines for (E_SG_AB)). . . . . 195
3.19. Rapport entre la vitesse SIA et celle d'Elmer pour la simulation D_SG. Il s'agit de la vitesse radiale dans la partie où l'épaisseur du cône est constante.
Ratio between SIA and Elmer velocities for the simulation D_SG. The velocity is the radial velocity in the region of the glacier where the ice-thickness is constant. . . . . 196
3.20. Glacier conique : vitesse diagnostique radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (D_SG). La surface initiale et le socle sont également représentés.
Conic glacier : radial diagnostic surface velocity (m/yr) on a flow line (D_SG). The initial surface and the bed are presented as well. . . . . 197
3.21. Glacier conique : vitesse diagnostique verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (D_SG). La surface initiale et le socle sont également représentés.
Conic glacier : vertical diagnostic surface velocity (m/yr) on a flow line (D_SG). The initial surface and the bed are presented as well. . . . . 198

3.22. Glacier conique : vitesse évolutive radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (E_SG_SB). Le socle est représenté également.
Conic glacier : radial evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line (E_SG_SB). The bedrock is presented as well. . . . . 200

3.23. Glacier conique : vitesse évolutive verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement (E_SG_SB). Le socle est représenté également.
Conic glacier : vertical evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line (E_SG_SB). The bedrock is presented as well. . . . . 201

3.24. Glacier conique : vitesse évolutive radiale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement, simulation avec bilan de masse (E_SG_AB). Le socle est représenté également.
Conic glacier : radial evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line, simulations with mass balance (E_SG_AB). The bedrock is presented as well. . . . . 202

3.25. Glacier conique : vitesse évolutive verticale (m/an) en surface le long d'une ligne d'écoulement, simulation avec bilan de masse (E_SG_AB). Le socle est représenté également.
Conic glacier : vertical evolutive surface velocity (m/yr) on a flow line, simulation with mass balance (E_SG_AB). The bedrock is presented as well. . . . . 203

3.26. Glacier conique : profil vertical de vitesse diagnostique (D_SG) à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), sans glissement.
Conic glacier : diagnostic vertical velocity profil (D_SG) at 1100 m of the center, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), no sliding. . . . . 206

3.27. Glacier conique : profil vertical de vitesse à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), simulation évolutive E_SG_SB.
Conic glacier : vertical velocity profil at 1100 m of the center, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), time dependent simulation E_SG_SB. . . . . 207

3.28. Glacier conique : profil vertical de vitesse à 1100 m du centre, normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an), simulation évolutive E_SG_AB.
Conic glacier : vertical velocity profil at 1100 m from the center, normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr), time dependent simulation E_SG_AB. . . . . 208

3.29. Evolution de l'écart de la vitesse verticale en surface (trait continu) et de celui de l'épaisseur de glace (trait pointillé) entre la SIA et ELMER pour la simulation E_SG_SB.
Evolution of the difference of the vertical surface velocity (line) and that of the ice-thickness (dotted line) between the SIA and ELMER for the simulation E_SG_SB. . . . . 209

3.30. Glacier de vallée en coupe : avec une épaisseur initiale qui diminue linéairement vers le front (en rouge sur la figure, socle en bleu) l'écoulement ultérieur du glacier se caractérisera par le creusement d'une dépression sommitale et la mise en place en conséquence d'un bombement dans la partie inférieure lequel migre vers le front qui reste fixe (orange à gris sur la figure).
Valley glacier (cross section) : With an initial ice-thickness that reduces linearly towards the snout (in red in the figure, bedrock in blue) the glacier flow is caracterized by an upper growing depression and a resulting bulging in the lower part of the glacier, bulging which migrates towards the snout, this latter remaining fixed (orange to grey in the figure). . . . . 211

3.31. Glacier de vallée en coupe orthogonale à l'écoulement ($y$=2500 m) et dans le sens de l'écoulement au centre du glacier ($x = 0$ m).
Valley glacier cross section perpendicular to the ice flow at $y$=2500 m and in the direction of the ice flow along the centerline of the glacier ($x$=0 m). . . . . 212

3.32. Coupe en direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et sans bilan de masse (E_SG_SB).
Cross section in the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and without mass balance (E_SG_SB). 219

3.33. Coupe orthogonale à la direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et sans bilan de masse (E_SG_SB).
Cross section perpendicular to the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and without mass balance (E_SG_SB). . . . . 220

3.34. Coupe orthogonale à la direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et avec bilan de masse (E_SG_AB).
Cross section perpendicular to the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and with mass balance (E_SG_AB). . . . . 222

3.35. Coupe en direction de l'écoulement pour le glacier de vallée, simulation évolutive sans glissement et avec bilan de masse (E_SG_AB). L'évolution dans le temps est figurée à l'aide de quelques coupes intermédiaires, ainsi que la surface initiale.
Cross section along the flow direction for the valley glacier. Time-dependent simulation without sliding and with mass balance (E_SG_AB). The time evolution is shown with the help of some intermediate curves, as well as the initial surface. . . . . 223

3.36. Valeurs absolues des vitesses diagnostiques en surface pour le glacier de vallée, D_SG.
Absolut values of the diagnostic surface velocities for the valley glacier D_SG. . . . . 225

3.37. Valeurs absolues des vitesses en surface pour le glacier de vallée, simulation
évolutive sans bilan de masse est sans glissement (E_SG_SB).
Absolut values of the surface velocities for the valley glacier, time-dependent simulation with zero mass balance and without sliding (E_SG_SB). . . . . 226

3.38. Valeurs absolues des vitesses en surface pour le glacier de vallée, simulation
évolutive avec bilan de masse est sans glissement (E_SG_AB).
Absolut values of the surface velocities for the valley glacier, time dependent simulation with mass balance and without sliding (E_SG_AB). . . . . 227

3.39. Profil vertical des vitesses diagnostiques au point $(x, y) = (350, 5400)$ pour le glacier de vallée (simulation D_SG), normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an).
Vertical diagnostic velocity profile at point $(x, y) = (350, 5400)$ for the valley glacier (D_SG simulation), normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr). . . . . 228

3.40. Profil vertical des vitesses au point $(x, y) = (350, 5400)$ pour le glacier de vallée, surface évolutive sans glissement sans bilan de masse (E_SG_SB), normalisé à la vitesse d'Elmer en surface (donnée en m/an).
Vertical velocity profile at point $(x, y) = (350, 5400)$ for the valley glacier, time-dependent simulation without sliding and mass balance (E_SG_SB), normalized to the surface velocity of Elmer (given in m/yr). . . . . 229

4.1. Données topographiques (coord. Lambert). A gauche les données disponibles sont montrées. A droite la rotation du système de coordonnées est illustrée : la grille rouge est la grille finale.
Topographic data (in the Lambert coordinate system). On the left side the avaible data. On the right side the rotation of the coordinates is shown. The red grid is the final grid. . . . . 240

4.2. Sur la figure à gauche, l'interpolation (bi)linéaire nécessaire lors de la rotation est illustrée. A droite la prolongation des données en dehors de la zone connue est montrée (système de coordonnés de travail).
On the left side the (bi)linear interpolation necessary for the rotation is illustrated. On the right side the extension of the data over the area where no data is known is shown (new coordinate system). . . . . 241

4.3. Deux types de maillages différents pour le glacier de Saint Sorlin, maillage rectangulaire et maillage de contour.
Two types of grids for the Saint Sorlin glacier. . . . . 242

4.4. Champ de bilan pour le glacier de Saint Sorlin (en m w.e. par an). Le bilan est mis à -10 m w.e. par an hors de la zone colorée (points invisibles sur la figure), système de coordonnés de travail.
The Saint Sorlin mass balance field (m w.e. per year). The mass balance is set to -10 m w.e per year out of the coloured area (invisible points on the figure), new coordinate system. . . . . 243

4.5. La ligne rouge représente la coupe transversale pour le calcul du front (dite "ligne de base") superposée à l'épaisseur de glace de 1905 en vert (système de coordonnés de travail).
The red line is the transversal profile for the calculation of the snout position, the ice-thickness from 1905 is also presented in green (new coordinate system). . . . . 244

4.6. Dépendance de la position du front de Saint Sorlin au paramètrage du glissment basal. En jaune les mesures. En rouge différents coefficients de glissement pour une loi linéaire, en bleu pour une loi non-linéaire, en noir sans glissement du tout.
Dependence of the snout position of Saint Sorlin on the basal sliding parametrization. In Yellow the measurements. In red different sliding coefficients for a linear law, in blue for a non-linear law. . . 245

4.7. Epaisseur de glace de 1998 issue des données discrétisées (noir) et contour du glacier en 1998 (mesures, jaune), coordonnés Lambert.
Ice-thickness in 1998 from the descretized data (black) and the glacier outline (measurements, yellow), Lambert coordinate system. 247

4.8. Données pour le socle rocheux de Saint Sorlin. En jaune les lignes d'iso-altitude d'une carte digitalisée, en noir la compilation et discrétisation de toutes les données. En rose le contour du glacier en 1998 (coordonnées Lambert).
Data for the Saint Sorlin bedrock. In yellow the iso-altitude lines from a digitalised map, in black the compilation and discretization of all data. In pink the glacier outline in 1998 (Lambert coordinate system). . . . . 248

4.9. Positions du front du glacier de Saint Sorlin : les triangles rouges représentent les mesures, les points bleus la simulation avec le modèle M SIA.
Snout position of Saint Sorlin Glacier : the red triangles represent measurements, the blue points the simulation with the M SIA model. 249

4.10. Vitesses absolues diagnostiques de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (m/an).
Diagnostic absolut velocities of the 1998 surface of the glacier of Saint Sorlin (m/yr). . . . . 253

4.11. Pente de surface de la surface de 1998.
Surface slope of the 1998 surface. . . . . 254

4.12. Valeur absolues des vitesses diagnostiques de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement (m/an).
Absolut values of diagnostic velocities of the 1998 surface of the glacier of Saint Sorlin with sliding (m/yr). . . . . 255

4.13. Valeur absolue de vitesses absolues diagnostiques de la surface de 1905 du glacier de Saint Sorlin (m/an).
Absolut values of diagnostic velocities on the 1905 surface of the glacier of Saint Sorlin (m/yr). . . . . 256

4.14. Valeur absolue des vitesses (m/an) au cours d'une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan ni glissement).
Absolut values of velocities (m/yr) for a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and no sliding). . . . . 258

4.15. Épaisseur de glace finale (m) après une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan ni glissement).
Final ice-thickness (m) after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and no sliding). . . . . 259

4.16. Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin (sans bilan de masse ni glissement). Jaune : surface initiale, rouge et bleu : modèles SIA, vert : ELMER.
Longitudinal and transveral cross sections after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier (with zero mass balance and no sliding). Yellow : initial surface, red and blue : SIA, green : ELMER. . . . . 260

4.17. Valeur absolue des vitesses (m/an) au cours d'une simulation évolutive de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement (bilan de masse nul).
Absolut values of velocities (m/yr) for a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin glacier (with zero mass balance and with sliding. . . . . 261

4.18. Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 15 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec glissement. Jaune : surface initiale, bleu : modèle SIA, vert : ELMER.
Longitudinal and transversal cross section after a 15 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with sliding. Yellow : the initial surface, blue : SIA, green : ELMER. . . . . 262

4.19. Valeurs absolues des Vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (sans glissement).
Absolut values of velocities (m/yr) after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface, Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance of the last 50 years (without sliding). 264

4.20. Épaisseur de glace (m) finale après une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des derniers 50 années (sans glissement).
Final ice-thickness (m) after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (without sliding). 264

4.21. Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (sans glissement).
Longitudinal and transversal cross sections after a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (without sliding). . . . . 265

4.22. Valeur absolue des vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (avec glissement).
Absolut values of velocities (m/yr) for a 20 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance of the last 50 years (with sliding). . . . . 266

4.23. Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 20 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan moyen des dernier 50 années (avec glissement).
Longitudinal and transversal cross sections after a 20 year time-dependent simulation departing from the the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the average mass balance field of the last 50 years (with sliding). . . . . 267

4.24. Valeur absolue des vitesses (m/an) d'une simulation évolutive de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec le champ de bilan réel sans glissement.
Absolut values of the velocities (m/yr) for a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding. . . . . 269

4.25. Épaisseur finale (m) après une simulation évolutive de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et sans glissement.
Final ice-thickness (m) for a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding. . . . . 270

4.26. Coupes longitudinale et transversale après une simulation de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et sans glissement.
Longitudinal and transversal cross sections after a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and no sliding. . . . . 271

4.27. Coupes verticales et horizontales après une simulation de 7 ans en partant de la surface de 1998 du glacier de Saint Sorlin avec un champ de bilan réaliste et du glissement.
Longitudinal and transversal cross sections after a 7 year time-dependent simulation departing from the 1998 surface of the Saint Sorlin Glacier, with the real mass balance field and sliding. . . . . 272

4.28. Profil des valeurs absolues de la vitesse au point $(x, y) = (1000, 1000)$ du glacier de Saint Sorlin pour les différentes simulations. Toutes les vitesses sont normalisées à la vitesse d'Elmer en surface donnée sur la figure (m/an). En rouge la SIA en vert Elmer, en pointillé le maillage de contour.
Profile of the absolute values of the velocity at point $(x, y) = (1000, 1000)$ of the Saint Sorlin Glacier for the different simulations. All velocities are normalized to the velocity of Elmer on the surface given in the figure (m/yr). In red the SIA and in green Elmer, dotted line for the contour gridding. . . . . 273

4.29. Carte des balises de bilan de masse.
Map of mass balance stakes. . . . . 274

4.30. Vitesses horizontales absolues pour la surface de 1998, mesures et sorties de modèles, pour un frottement de $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.
Horizontal absolute velocities for the 1998 surface, measurements and model output, with a sliding coefficient $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$. 275

4.31. Optimisation du coéfficient de frottement $C_S$ par minimisation de l'écart de vitesse entre les modèles et les mesures. Les valeurs de $C_S$ sont données relatif à un frottement de $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$.
Optimization of the friction coefficient $C_S$ by minimizing the discrepancy in velocities between models and field data. Values fr $C_S$ are relative to a friction of $C_s = 0.025\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{MPa\,a}$. . . . . 276

4.32. Vitesses horizontales absolues sur la surface de 1998, mesures et sorties d'Elmer.
Horizontal absolute velocities for the 1998 surface, measurements and model output from Elmer. . . . . 276

4.33. Vitesses horizontales absolues sur la surface de 2005, mesures et sorties de modèles.
Horizontal absolute velocities for the 2005 surface, measurements and model output. . . . . 277

4.34. Vitesses de surface pour toutes les balises d'ablation pendant la période 1998-2005.
Surface velocities for all ablation mass balance stakes for the period 1998-2005. . . . . 279

4.35. Vitesses de surface pour toutes les balises d'ablation pendant la période 1998-2005 (suite).
Surface velocities at all ablation mass balance stakes for the 1998-2005 period (continued). . . . . 280

4.36. Position de front du glacier de Saint Sorlin, France.
Snout position for the Saint Sorlin glacier, France. . . . . 282

4.37. Calcul de la position du front, à gauche à l'aide de tous les points en aval de la ligne de base (bleue), à droite à l'aide de tous les points en aval d'une portion de longueur finie (rouge) de la ligne de base.
Determination of the snout position, with on the left side all points downhill of the base line (blue), or (right side) with only the points downhill of a section of this line (red). . . . . 283

## VI Un exemple de glacier tropical : Le glacier du Cotopaxi en Equateur290

1.1. Pénitents au sommet du Cotopaxi. Penitents on top of Cotopaxi. . 291

2.1. Carte de l'Equateur, d'après Lonely Planet.
Map of Ecuador, from Lonely Planet. . . . . 292
2.2. Le Cotopaxi, photo P. Ramón. The Cotopaxi, picture P. Ramón. . . . 293
2.3. Carte des volcans en Equateur, figure extraite du Rapport IRD (2005), Hall et Beate (1994).
List of volcanos in Ecuador, figure taken from Rapport IRD (2005), Hall et Beate (1994). . . . . 295
2.4. Le risque volcanique lié au Cotopaxi. Volcanic risk from the Cotopaxi. 296

3.1. Géométrie de la mesure de l'épaisseur de glace à l'aide d'un radar à impulsion en surface.
Geometry of ice thickness measurements using a bistatic impulse radar operating from the surface. . . . . 298
3.2. Exemple d'une réflexion radar marquant le profil topographique du socle.
Radar profile outlining the underlying bedrock topography. . . . 298
3.3. Vue d'ensemble du dispositif de mesures radar.
Overview of the radar measurement system. . . . . 299
3.4. Les différents éléments du système radar.
The different components of the radar system. . . . . 300
3.5. Profils de mesures radar réalisés en 2007 sur le Cotopaxi.
Radar measurement profiles carried out in 2007 on the Cotopaxi. 301
3.6. Epaisseurs de glace le long des profils radar de 2007 représentée en coupe (profil Nord en rouge, profils Sud en bleu et vert).
Ice thickness cross-sections along the radar profiles carried out in 2007 (North profile in red, South profiles in blue and green). 302
3.7. La zone déglacée sous le sommet.
The deglaciated zone below the summit. . . . . 303
3.8. La distribution de l'épaisseur de glace le long des 3 profils de 2007, même code couleur que sur la Figure 3.6.
Thickness distribution along the 3 profiles from 2007, same color code as in Figure 3.6. . . . . 303

4.1. Mesures radar en 2004 : ∘ représente la surface de glace et △ le socle rocheux. NW indique le profil Nord-Ouest, NC le profil Nord (centre) et NE les profils Nord-Est.
2004 Radar measurements : ∘ features the ice surface whereas △ stands for the bedrock. NW stands for the North-West profile, NC for the North (center) one and NE for the North-East ones. . . . 306
4.2. Le volcan Antisana. The Antisana volcano. . . . . 307
4.3. Mesures de bilan de masse sur le glacier 15 de l'Antisana (Cáceres et al., 2003) et sa paramétrisation utilisée dans cette étude.
Measured mass balance on the glacier 15 of the Antisana (Cáceres et al., 2003) and its parametrization used in this study. . . . . 307
4.4. Orthophoto du volcan prise en 2006, IRD Quito.
Orthophoto from the Cotopaxi, 2006, IRD Quito. . . . . 308
4.5. Topographie de surface du Cotopaxi de 2006 (en couleur) à laquelle ont été ajoutés les contours de 1976 et de 1997 (en gris).
Surface topography of the Cotopaxi in 2006 (colored) on top of the glacier outline in 1976 and 1997 (grey). . . . . 309

5.1. Simulation de la surface stationnaire du Cotopaxi à l'aide de différents modèles pour trouver le modèle le plus adapté à l'écoulement du glacier du Cotopaxi.
Simulation of the steady state surface of the Cotopaxi with various models in order to find the most appropriate model for this glacier. 311
5.2. Détermination de l'altitude de la ligne d'équilibre de 2007 offrant la position la plus réaliste du front.
Determination of the equilibrium line altitude in 2007 that best matches the snout position. . . . . 312

**VII Conclusions** **317**

**VIII Annexes** **325**

1.1. Éléments Finis de degré 1. First order Finite Elements. . . . . 330
1.2. Méthode des trapèzes. Method of trapezes. . . . . 331

# Liste des tableaux

I Introduction 8

II Données du Service d'Observation Glacioclim 58

1.1. Caractéristiques des glaciers suivis par le Service d'Observation.
`Caracteristics of the glaciers surveyed in the framework of the Observation network.` . . . . . 62

III Modélisation de l'écoulement des glaciers 80

2.1. Les différentes étapes du changement de coordonnées pour le développement de la SIA.
`The different steps of the coordinate change in the` SIA `development.` 92

IV Modèle à deux dimensions, approximation de la couche mince (SIA) 114

V Comparaison des modèles 150

2.1. Schéma du modèle F HO. `Sketch of the` F HO `model structure.` . 159
2.2. Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.` . . . . . 163
2.3. Paramètres pour le *Free-Surface Solver*.
`Parameters for the Free-Surface Solver.` . . . . . 164
2.4. Paramètres pour le *Mesh-Update Solver*.
`Parameters for the Mesh-Update Solver.` . . . . . 165
2.5. Valeurs numériques pour les paramètres utilisés.
`Numerical values for the parameters used.` . . . . . 166
2.6. Machines utilisées.
`Computers used.` . . . . . 166

3.1. Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
`Parameters for the Navier-Stokes Solver.` . . . . . 169

3.2. Simulations effectuées pour le glacier sphérique.
Simulations for the spherical glacier. . . . . 170
3.3. Position du front (glacier sphérique).
Snout position (spherical glacier). . . . . 175
3.4. Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
Parameters for the Navier-Stokes Solver. . . . . 191
3.5. Simulations effectuées pour le glacier conique.
Simulations for the conical glacier. . . . . 192
3.6. Pas de temps et temps CPU pour le glacier de vallée (simulation évolutive sans bilan, E_SG_SB).
Time step and CPU time for the valley glacier (time dependent simulation with zero mass balance, E_SG_SB). . . . . 215
3.7. Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
Parameters for the Navier-Stokes Solver. . . . . 216
3.8. Pas de temps et temps CPU pour le glacier de vallée (demi-domaine, simulation E_SG_SB).
Time step and CPU time for the valley glacier (half of the glacier, simulation E_SG_SB). . . . . 216
3.9. Simulations effectuées pour le glacier de vallée.
Simulations for the valley glacier. . . . . 217
3.10. Temps de calcul en secondes pour différents jeux de paramètres, calcul du champ de vitesse diagnostique pour le glacier sphérique avec une pente de 0.2. Il est à remarquer que les simulations d'Elmer portent sur le demi-domaine.
CPU time in seconds for different parameters, calculation of the diagnostic velocity field for the spherical glacier in the case of a slope of 0.2. It should be noticed that the simulations with Elmer are only performed on half of the domaine. . . . . 234
3.11. Les différents jeux de paramètres pour la comparaison du temps de calcul.
Different parameters for the CPU time comparison. . . . . 234
3.12. Temps de calcul en secondes pour différents jeux de paramètres, simulation évolutive (10 ans) pour le glacier sphérique avec une pente de 0.2. Il est a remarquer que les simulations d'Elmer portent sur le demi-domaine.
CPU time in seconds for different parameters with 10 years of simulation for the spherical glacier in the case of a slope of 0.2. It should be noticed that the simulations with Elmer are only performed on half of the domaine. . . . . 237
3.13. Les différents jeux de paramètres pour la comparaison du temps de calcul.
Different parameters for the CPU time comparison. . . . . 237

4.1. Paramètres pour le *Solver* de Navier-Stokes.
Parameters for the Navier-Stokes Solver. . . . . 251

**VI Un exemple de glacier tropical : Le glacier du Cotopaxi en Equateur290**

4.1. Pertes en surface et volume du glacier du Cotopaxi.
`Ice surface and volume losses of the Cotopaxi glacier.` . . . . . 308

**VII Conclusions** **317**

**VIII Annexes** **325**

# Notations utlisées dans cette thèse

| symbole | variable (français,`anglais`) | première utilisation | valeur utilisée dans la thèse |
|---|---|---|---|
| $a, b$ | bilan<br>`mass balance` | p. 82 | |
| $f$ | fusion basale<br>`basal melting` | p. 82 | |
| $\phi$ | flux géotérmique<br>`geothermal heat flux` | p. 82 | $60\,\mathrm{mW\,m^{-2}}$ |
| $\alpha_i, \beta_t, \epsilon_{i,t}$ | paramètres du modèle linéaire<br>`parameters of the linear model` | p. 74 | |
| $\Delta t$ | pas de temps dans les modèles<br>`time-step` | p. 115 | unité : années |
| $\Delta$ | pas de grille dans les modèles<br>`grid spacing` | p. 115 | sauf exception 50 m |
| $H$ | épaisseur de glace<br>`ice thickness` | p. 81 | |
| $S$ | altitude de la surface<br>`surface elevation` | p. 81 | |
| $B$ | altitude du socle rocheux<br>`bedrock elevation` | p. 81 | |
| $\rho$ | densité<br>`density` | p. 83 | $880\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ |
| $g$ | gravité<br>`gravity` | p. 86 | $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ |
| $D, D_{def}, D_{glis}$ | coefficient de diffusion<br>(partie déformation, partie glissement)<br>`diffusion coefficient`<br>`(deformation and sliding parts)` | p. 103 | |
| $(x, y, z), (x_1, x_2, x_3), \vec{x}$ | coordonnées dans l'espace<br>`spatial coordinates` | p. 81 | |
| $(u, v, w), (u_1, u_2, u_3), \vec{v}$ | vitesses<br>`velocities` | p. 81 | |
| $\vec{v}_h$ | vitesses horizontales<br>`horizontal velocities` | p. 101 | |
| $v_r, v_z$ | vitesses verticales et radiales<br>en coordonnés cylindriques<br>`vertical and radial velocities`<br>`in cylindric coordinates` | p. 196 | |
| $(u_b, v_b, w_b), \vec{v}_b$ | vitesses du glissement basal<br>`basal velocities` | p. 88 | |

| symbole | variable (français,`anglais`) | première utilisation | valeur utilisée dans le texte |
|---|---|---|---|
| $A$ | coefficient de la loi de Glen<br>`Glen's law coefficient` | p. 87 | $1.3 \times 10^{-24}\,\mathrm{Pa}^{-3}\,\mathrm{a}^{-1}$ |
| $\eta$ | viscosité<br>`viscosity` | p. 87 | $0.2301\,\mathrm{MPa}\,\mathrm{a}^{1/3}$ |
| $A_s, A'_s, C_s$ | paramètre de la loi de glissement<br>`sliding law parameter` | p. 88 et p. 163 | $0.00004\,\mathrm{m}\,\mathrm{Pa}^{-1}\,\mathrm{a}^{-1}$ (sphère, loi lin.),<br>$0.00022\,\mathrm{m}\,\mathrm{Pa}^{-1}\,\mathrm{a}^{-1}$ (St.Sorlin, loi lin.)<br>$5{\times}10^{-4}\,\mathrm{m}^{8}\,\mathrm{N}^{-3}\,\mathrm{a}^{-1}$ (loi non-lin.) |
| $P, P_{atm}$ | pression (atmosphérique)<br>`(atmospheric) pressure` | p. 85 | |
| $\tau_{ij}$, $\sigma_i$ $\bar{\tau}$, $\bar{\sigma}$ | tenseur des contraintes<br>`stress tensor` | p. 85 | |
| $\tau'_{ij}$,$\sigma'_{ij}$, $\bar{\tau}'$, $\bar{\sigma}'$ | tenseur des contraintes déviatoriques<br>`deviatoric stress tensor` | p. 85 | |
| $\tau_0$ | cission efficace<br>`effective shear stress` | p. 85 | |
| $\vec{\tau}_b$ | cisaillement basal<br>`basal shear stress` | p. 88 | |
| $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\bar{\dot{\epsilon}}$ | tenseur des taux de déformation<br>`strain rate tensor` | p. 85 | |
| $\dot{\epsilon}_\star$ | deuxième invariant du tenseur des taux de déformation<br>`second invariant of the deformation rate tensor` | p. 87 | |
| $\vec{\tau}, \vec{\tau}', \vec{\dot{\epsilon}}$ | vecteur des composantes $xz$ et $yz$ correspondantes<br>`vector of the corresponding components` $xz$ `and` $yz$ | p. 100 | |
| $\vec{n}_s, \vec{t}_s$ | vecteur normal et tangentiel<br>`normal et tangential vectors` | p. 87 | |
| $\epsilon$ | rapport d'aspect<br>`aspect ratio` | p. 90 | |
| $[H], [V], [L], [V_H], [\tau]$ | grandeurs caractéristiques<br>`typical dimensions` | P. 91 | |
| $\vec{\nabla}_h$ | gradient horizontal<br>`horizontal gradient` | p. 164 | |
| $\vec{\nabla} S$ | gradient horizontal de la surface<br>`horizontal surface gradient` | p. 100 | |

# Table des Matières

# Table des matières

**Merci** a

**Résumé** c

**Abstract** e

**Introduction générale** 1

**1. Contexte** 3

**2. Organisation de la thèse** 5

**I. Introduction** 7

**1. Qu'est-ce qu'un glacier ?** 9
1.1. Le fonctionnement d'un glacier . . . 9
1.1.1. Coupe schématique d'un glacier alpin . . . 9
1.1.2. Bilan de masse . . . 10
1.1.3. Structures caractéristiques à la surface des glaciers . . . 12
1.1.4. Régime thermique des glaciers . . . 15
1.2. Les différentes formes glaciaires . . . 16
1.2.1. Classement par rapport à la taille . . . 17
1.2.2. Classement des glaciers par rapport à des particularités de forme . 20
1.2.3. Glaciers particuliers à proximité ou aux bords d'une calotte glaciaire 23
1.2.4. Glaciers anecdotiques . . . 26

**2. Motivations pour la modélisation de l'écoulement des glaciers alpins** 29
2.1. Notion d'indicateur climatique glaciaire . . . 30
2.1.1. Le bilan de masse comme indicateur climatique direct . . . 30
2.1.2. L'évolution de la géométrie d'un glacier au cours du temps comme indicateur climatique indirect . . . 30
2.2. Risque glaciaire . . . 34
2.2.1. Les vidanges de lacs glaciaires . . . 35
2.2.2. Poches intra-glaciaires . . . 40
2.2.3. Chutes de glace . . . 42

2.2.4. Changements de taille et foirages (surges) . . . 47
2.3. Aspects économiques et sociaux . . . 47
2.3.1. Ressources . . . 47
2.3.2. Tourisme . . . 48

**3. Les principes d'un modèle d'écoulement glaciaire 50**

**4. Méthodes d'acquisition des mesures de terrain 52**

**II. Données du Service d'Observation Glacioclim 57**

**1. Glacioclim 59**
1.1. Glacioclim : ORE et Service d'observation . . . 59
1.2. Service d'Observations des glaciers alpins . . . 60
1.2.1. Sites de mesures . . . 60
1.2.2. Données . . . 63

**2. Bilan de Masse 67**

**3. Techniques de mesure du bilan de masse 68**
3.1. Description des méthodes de mesure . . . 68
3.1.1. La méthode cartographique ou volumétrique . . . 68
3.1.2. La méthode directe ou glaciologique . . . 69
3.2. Description des mesures du LGGE . . . 69
3.2.1. Bilan hivernal, estival et annuel . . . 69
3.2.2. Calcul de la répartition spatiale du bilan de masse à partir d'un nombre limité de points de mesures . . . 74

**4. Donnés exploitées 78**

**III. Modélisation de l'écoulement des glaciers 79**

**1. Dynamique glaciaire 81**
1.1. Référentiel et notations utilisés . . . 81
1.2. Bilan de masse et fusion basale . . . 82
1.3. Conservation de la masse . . . 83
1.3.1. L'incompressibilité . . . 83
1.3.2. L'équation de continuité . . . 83
1.4. Contraintes et déformation . . . 85
1.4.1. Les contraintes . . . 85
1.4.2. La déformation . . . 85
1.4.3. Les équations d'équilibre quasi-statique . . . 86
1.4.4. La loi de comportement . . . 87

1.5. Conditions aux limites pour les contraintes et les vitesses . . . . . 87
1.5.1. Conditions en surface . . . . . 87
1.5.2. Conditions au fond . . . . . 88
1.5.3. Conditions sur le bord . . . . . 88
1.6. Champs de vitesse . . . . . 89

**2. La Shallow Ice Approximation (SIA) 90**
2.1. Introduction . . . . . 90
2.2. Le rapport d'aspect . . . . . 90
2.3. Développement rigoureux de la SIA . . . . . 91
2.3.1. Équations sans unités . . . . . 91
2.3.2. Changement d'échelle . . . . . 93
2.3.3. Développement en série . . . . . 96
2.3.4. Le résultat à l'ordre zéro . . . . . 97
2.3.5. Ordres supérieurs . . . . . 99
2.4. L'ordre zéro en détail . . . . . 100
2.4.1. Les vitesses . . . . . 101
2.4.2. L'équation de transport et de diffusion . . . . . 102
2.5. Conclusion . . . . . 103

**3. Inventaire de modèles 104**
3.1. Les débuts de la modélisation . . . . . 105
3.2. La Shallow Ice Approximation . . . . . 105
3.2.1. SIA, ordre zéro . . . . . 105
3.2.2. SIA aux ordres supérieurs ou modèles "higher order" . . . . . 109
3.3. Modèles "Stokes complet" ou "Full Stokes" . . . . . 111
3.3.1. Éléments Finis . . . . . 111
3.3.2. Volumes Finis . . . . . 112
3.3.3. Approche itérative . . . . . 112

**IV. Modèle à deux dimensions, approximation de la couche mince (SIA) 113**

**1. Améliorations du modèle - conservation de la masse 115**
1.1. Conservation de masse comme incitation pour un nouveau schéma numérique 115
1.2. Équations principales . . . . . 116
1.3. Discrétisation avec la méthode des Différences Finies . . . . . 117
1.3.1. Méthode Alternating-Direction-Implicit (ADI) . . . . . 120
1.3.2. Méthode semi-implicite (SI) . . . . . 121
1.4. Comparaison des résultats des deux schémas numériques . . . . . 122
1.4.1. Conservation de la masse dans un cas synthétique . . . . . 122
1.4.2. Simulation de l'évolution du glaicer de Saint Sorlin . . . . . 123
1.5. Efficacité et choix du pas de temps . . . . . 126
1.6. Explication de la non-conservation de la masse . . . . . 126

**2. Amélioration supplémentaire par le traitement des épaisseurs négatives 131**
2.1. Points sans glace au bord du glacier . . . 131
2.2. Points avec peu de glace . . . 132

**3. Étude de la zone en amont de la rimaye 133**
3.1. Effets sur la dynamique du glacier . . . 133
3.2. Trajectoires des particules de glace . . . 137
3.3. Étude annexe sur l'âge de la glace . . . 140

**4. Utilisation des bilans modélisés, comparaison avec les données et application au futur du glacier 141**
4.1. Bilans mesurés . . . 141
4.2. Bilans modélisés . . . 141
4.3. Comparaison du bilan mesuré et modélisé . . . 142
4.4. Comparaison de l'évolution du glacier avec les deux approches différentes pour le bilan . . . 143
4.5. Prédictions de l'évolution du glacier, scénario IPCC . . . 146

**5. Conclusions 148**

## V. Comparaison des modèles 149

**1. Motivation et Objectifs de cette étude 151**

**2. Présentation des modèles 154**
2.1. Modèles SIA . . . 154
2.1.1. Le modèle de Grenoble (Le Meur et Vincent, 2003) . . . 154
2.1.2. Le modèle de Frank Pattyn (Pattyn, 2003) . . . 155
2.2. Modèle higer order (HO) . . . 155
2.2.1. Équations de base . . . 156
2.2.2. Conditions aux bords . . . 158
2.2.3. Glissement . . . 158
2.2.4. Schéma du modèle . . . 158
2.3. Code aux Éléments Finis : Elmer . . . 160
2.3.1. Introduction . . . 160
2.3.2. Maillage . . . 160
2.3.3. Le Solver de Navier-Stokes . . . 161
2.3.4. Le Free-Surface Solver . . . 164
2.3.5. Le Mesh-Update Solver . . . 164
2.3.6. Système couplé . . . 165
2.4. Valeurs numériques . . . 166
2.5. Machines utilisées . . . 166

**3. Comparaison : cas synthétiques** **167**
3.1. Glacier sphérique . . . 167
3.1.1. Description de l'expérience . . . 167
3.1.2. Modèles . . . 168
3.1.3. Simulations effectuées . . . 169
3.1.4. Comparaison . . . 171
3.2. Glacier conique (volcan) . . . 190
3.2.1. Description de l'expérience . . . 190
3.2.2. Modèles . . . 191
3.2.3. Simulations effectuées . . . 192
3.2.4. Comparaison . . . 192
3.3. Glacier de vallée . . . 210
3.3.1. Description de l'expérience . . . 210
3.3.2. Modèles . . . 214
3.3.3. Simulations effectuées . . . 215
3.3.4. Comparaison . . . 218
3.4. Conclusion sur l'influence respective de la déformation de la glace, du bilan de masse et du glissement . . . 230
3.5. Comparaison des temps de calcul . . . 233
3.5.1. Champs de vitesses diagnostiques . . . 233
3.5.2. Simulation évolutive . . . 236

**4. Un cas réel, le glacier de St. Sorlin** **239**
4.1. Travaux préliminaires . . . 239
4.1.1. Des données topographiques vers une grille et un maillage . . . 239
4.1.2. Bilan de masse . . . 243
4.1.3. Mise en place d'une méthode d'un calcul de la position du front . . . 244
4.1.4. Paramètres rhéologiques et de glissement . . . 247
4.2. Comparaison des modèles . . . 250
4.2.1. Détails sur les modèles . . . 250
4.2.2. Simulations comparatives . . . 252
4.3. Comparaison avec la réalité . . . 274
4.3.1. Vitesses de surface . . . 274
4.3.2. La position du front . . . 281
4.4. Perspectives . . . 284
4.4.1. Améliorations d'ordre technique du modèle Elmer . . . 284
4.4.2. Perspectives au niveau de données . . . 284
4.4.3. D'autres simulations pour aller plus loin . . . 285
4.5. Conclusion . . . 285

**5. Conclusions** **287**

**VI. Un exemple de glacier tropical : Le glacier du Cotopaxi en Equateur 289**

1. Introduction 290

2. Le Cotopaxi, situation générale, problématique du risque 292

3. Campagne de mesure 2007 297
3.1. Le système radar . . . 297
3.2. Résultats . . . 301
3.3. Discussion des résultats . . . 304

4. Données disponibles 305
4.1. Régime Thermique . . . 305
4.2. Épaisseur de glace . . . 305
4.3. Bilan de masse . . . 305
4.4. Surface topographique . . . 308

5. Modélisation 310
5.1. Choix du modèle . . . 310
5.2. Simulation réaliste . . . 310

6. Conclusion 313
6.1. Données . . . 313
6.2. Modélisation . . . 313

VII. Conclusions 315

VIII. Annexes 323

1. Méthodes numériques 325
1.1. Les Différences Finies . . . 326
1.1.1. Principe . . . 326
1.1.2. Schémas d'ordre un . . . 326
1.1.3. Schémas d'ordre supérieur . . . 327
1.2. Les Volumes Finis . . . 327
1.2.1. Introduction . . . 327
1.2.2. Le principe . . . 327
1.3. Les Éléments Finis . . . 328
1.3.1. Introduction . . . 328
1.3.2. Exemple simple (1D) . . . 328

IX. Publications 333

1. Improvements of a 2D-SIA ice flow model ; application to the Saint Sorlin glacier, France 335

2. Disappearance of an Alpine glacier over the 21st Century simulated from modeling its future surface mass balance 337

3. Posters présentés à l' EGU 338
   3.1. EGU 2006 - A new numerical scheme for a two-dimensional shallow ice-flow model . . . 339
   3.2. EGU 2007 - Topographic measurements and glacier flow modeling of a tropical volcano glacier : Cotopaxi, Ecuador . . . 340
   3.3. EGU 2007 - Mountain glacier flow modeling : a comparison of different models from the Shallow Ice Approximation to the Full-Stokes solution . . 341

Bibliographie 343

Tables 355

Table de figures 357

Liste des tableaux 377

Liste des notations utilisées 381

Table des Matières 383