

UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN  
U.F.R. DE SCIENCES EXACTES ET EXPÉRIMENTALES

Année 2007

# THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

**Youssef OUAFIK**

le 22 octobre 2007

## Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en contact

Directeur de Thèse

Co-directeur de Thèse

M. Mircea SOFONEA *Professeur*

M. Mikaël BARBOTEU *Maître de Conférences Habilité*

### JURY

Messieurs	Mikaël BARBOTEU	<i>Maître de Conférences</i>	Examineur
	Abdelhaq EL JAI	<i>Professeur</i>	Examineur
	Jérôme FORTIN	<i>Maître de Conférences</i>	Examineur
	Patrick HILD	<i>Professeur</i>	Rapporteur
	Frédéric LEBON	<i>Professeur</i>	Rapporteur
	Mircea SOFONEA	<i>Professeur</i>	Examineur

*À mes parents*  
*À toute ma famille*

# Table des matières

<b>Introduction</b>		<b>v</b>
<b>Notations</b>		<b>ix</b>
<b>I Requis et préliminaires</b>		<b>1</b>
<b>1 Description des structures piézoélectriques en contact</b>		<b>5</b>
1.1 Cadre physique - modèles mathématiques . . . . .		5
1.2 Lois de comportement . . . . .		10
1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement . . . . .		13
<b>2 Espaces fonctionnels</b>		<b>19</b>
2.1 Cadre fonctionnel “scalaire” . . . . .		19
2.2 Cadre fonctionnel “vectoriel” . . . . .		24
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .		26
<b>3 Éléments d’analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert</b>		<b>31</b>
3.1 Inéquations variationnelles elliptiques . . . . .		31
3.2 Équations et inéquations variationnelles d’évolution . . . . .		37
3.3 Inclusions différentielles . . . . .		41
3.4 Lemmes de type Gronwall . . . . .		42
<b>4 Traitement numérique du contact avec frottement</b>		<b>45</b>
4.1 Méthodes basées sur le Lagrangien augmenté . . . . .		46
4.1.1 Cas du contact unilatéral . . . . .		46
4.1.2 Cas du frottement pur . . . . .		48
4.1.3 Cas du contact avec frottement . . . . .		48
4.2 Cinématique d’un contact discret . . . . .		51

<b>II</b>	<b>Problèmes statiques</b>	<b>55</b>
<b>1</b>	<b>Problème électro-élastique de contact bilatéral avec frottement de Tresca</b>	<b>59</b>
1.1	Problème mécanique et formulation variationnelle . . . . .	59
1.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	63
1.3	Formulation duale du problème . . . . .	66
<b>2</b>	<b>Problème électro-élastique avec compliance normale et frottement de Coulomb statique</b>	<b>77</b>
2.1	Problème mécanique et formulation variationnelle . . . . .	77
2.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	81
2.3	Dépendance continue par rapport aux données . . . . .	86
<b>III</b>	<b>Problèmes quasistatiques</b>	<b>91</b>
<b>1</b>	<b>Problème électro-élastique avec compliance normale et frottement de Coulomb en vitesse</b>	<b>95</b>
1.1	Problème mécanique . . . . .	95
1.2	Existence de la solution . . . . .	98
1.3	Démonstration du Théorème III.1.1 . . . . .	100
<b>2</b>	<b>Problème électro-viscoélastique avec contact unilatéral sans frottement</b>	<b>107</b>
2.1	Problème mécanique . . . . .	107
2.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	110
2.3	Démonstration du Théorème III.2.1 . . . . .	112
<b>IV</b>	<b>Modélisation numérique des structures piézoélectriques en contact</b>	<b>115</b>
<b>1</b>	<b>Cas statique</b>	<b>119</b>
1.1	Électro-élasticité, formulation variationnelle . . . . .	119
1.2	Formulation variationnelle approchée, estimation d'erreurs . . . . .	122
1.3	Méthode de résolution . . . . .	128
1.3.1	Formulation en quasi-lagrangien augmenté . . . . .	129

1.3.2	Algorithme de résolution . . . . .	132
1.4	Présentation des résultats numériques . . . . .	135
<b>2</b>	<b>Cas quasistatique</b>	<b>141</b>
2.1	Électro-viscoélasticité, formulation variationnelle . . . . .	141
2.2	Formulation variationnelle approchée, estimation d'erreurs . . . . .	143
2.3	Méthode de résolution . . . . .	150
2.3.1	Formulation en quasi-lagrangien augmenté . . . . .	150
2.3.2	Algorithme de résolution . . . . .	152
2.4	Quelques simulations numériques . . . . .	155
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>161</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>



# Introduction

Les travaux sur les matériaux dits actifs se sont considérablement multipliés au cours des dix dernières années; ils se caractérisent par leur capacité à fournir une action mécanique sous l'effet d'un couplage, généralement réversible, de type électromécanique (matériau piézoélectrique), magnétoélastique (matériau magnétostrictif) ou bien encore thermoélastique (alliage à mémoire de forme). L'intérêt est en effet de développer des matériaux, ou des structures dites intelligentes dans de nombreuses branches de l'industrie.

La piézoélectricité traduit l'aptitude que présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). La piézoélectricité ne peut se manifester, ni pour des corps conducteurs, ni pour des corps à haut degré de symétrie, autrement dit, tous les matériaux piézoélectriques sont anisotropes. Ceci signifie qu'ils possèdent des propriétés physiques variant selon la direction considérée.

Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1879, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Par la suite le formalisme de la piézoélectricité a été développé par P. Duhem, F. Pockels et particulièrement par W. Voigt en 1894. Une présentation des débuts de la piézoélectricité peut être trouvée dans [22, 71, 72, 73, 111, 112, 113, 115], et plus récemment [6, 16, 57, 109, 114].

Les matériaux piézoélectriques peuvent se regrouper en trois classes principales :

- (1) les cristaux, dont le plus connu est le quartz ;
- (2) les polymères, à base de fibres de caoutchouc, laine, cheveux, bois et soie ou bien le polymère Poly-Vinyl-DiFluoridène (PVDF) ;
- (3) les céramiques, qui comportent de nombreux éléments, citons entre autres, les titanates de baryum, les titanates de plomb et la famille des PZT (plomb,zirconate,titanate) qui offre le plus de possibilités au niveau industrialisation.

Ces matériaux ne sont pas restés une simple curiosité scientifique et sont maintenant très répandus dans de nombreuses applications allant de l'allume gaz, à l'informatique (buses d'imprimante à jet d'encre) en passant par les oscillateurs à quartz des horloges électriques. Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux intelligents (adaptatifs); ils ont surtout trouvé application dans le contrôle des vibrations dans

les domaines de l'automobile (injecteurs), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, miroirs des télescopes) ainsi que dans le contrôle en acoustique des nuisances sonores : le quartz est largement utilisé dans le domaine des télécommunications en tant que filtre contrôleur ou générateur de fréquence. Actuellement, il y a de nouvelles applications dans le domaine de la médecine, du suivi de grossesse aux problèmes cardiaques en passant par l'examen du tube digestif, le principe est le même que celui du sonar. Bien d'autres applications sont données dans [9, 57, 105].

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps (piézoélectrique) déformable entre en contact avec d'autres corps : dans un contexte médical, la modélisation correcte de l'interaction entre les outils de chirurgie et les organes est de première importance pour réaliser des simulations réalistes. Ainsi, ce travail se donne pour objectif l'étude de quelques problèmes de contact entre ces structures piézoélectriques et une fondation.

Il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc.... Avant l'application de forces sur un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ; par ailleurs, les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inégalités ou d'équations non linéaires (non linéarités géométriques ou matérielles). D'ailleurs, quand le frottement est présent, des solutions multiples de ces équations décrivant le contact peuvent exister, et la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe.

L'abondance de ce type de problèmes a fait prendre un essor considérable mais relativement récent à l'étude mécanique, mathématique et numérique de la Mécanique du Contact, engendrant de nombreux ouvrages sur le sujet. Signorini fut le premier à énoncer un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide [94]. Ce problème fut résolu pour la première fois par Fichera dans [41]. La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact débute avec Duvaut et Lions [36], qui présentèrent des formulations variationnelles des problèmes de contact et des résultats d'existence et d'unicité. D'autres références incontournables sont les livres de Panagiotopoulos [84], Kikuchi et Oden [59], Hlaváček, Haslinger, Nečas et Lovíšek [54] ; dans les deux derniers l'analyse numérique de quelques problèmes de contact est présentée. Loin de faire une énumération complète, nous citons aussi les ouvrages édités de Raous, Jean et Moreau [90] et Martins et Monteriro Marques [68], qui présentent

l'état de l'art dans le domaine. En particulier, on trouvera dans [18, 67, 98, 99] des résultats concernant l'étude des problèmes de contact des corps piézoélectriques.

S'il existe une difficulté à formuler les problèmes de contact impliquant le frottement, leur résolution numérique est plus difficile encore, car ils sont décrits par une loi multivoque qui ne dérive pas d'un potentiel naturel (même non différentiable). Aussi, ils ne peuvent pas être formulés en tant que problèmes standards d'optimisation (avec contraintes inégalité). De nombreux travaux portant sur l'étude numérique des problèmes de contact peuvent être cités, par exemple [30, 40, 39, 64, 89] ou d'autres [2, 4, 116].

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact, avec ou sans frottement, entre un corps piézoélectrique déformable et une fondation. Nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations et nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Ce mémoire se divise en quatre parties que nous allons brièvement décrire.

Dans la *première* partie, le but est d'introduire les outils mathématiques, numériques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par présenter les divers modèles mécaniques de contact étudiés, puis nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution, les inclusions différentielles, et les lemmes de Gronwall. Pour finir, nous présentons brièvement le traitement numérique adopté pour résoudre les lois de contact avec frottement.

Dans la *deuxième* partie, nous traitons deux chapitres sur l'étude théorique des problèmes de contact pour des lois constitutives non linéaires électro-élastiques dans des processus statiques et sous divers types de contact. Les conditions de contact employées sont une condition de contact bilatéral avec frottement de Tresca dans le premier chapitre, et une condition de compliance normale avec frottement de Coulomb dans le deuxième chapitre. Les résultats de cette partie se situent dans une optique théorique. Pour chaque type de problèmes, nous donnons une formulation mécanique ainsi qu'une formulation faible. L'existence et l'unicité de la solution faible sont étudiées. Nous complétons cette étude en donnant une formulation duale pour le premier problème et un résultat de dépendance continue de la solution par rapport aux données pour le second problème.

Dans la *troisième* partie, nous nous intéressons à l'étude théorique des problèmes de contact pour des lois constitutives électro-élastiques et électro-viscoélastiques dans des processus quasistatiques et sous diverses lois de contact. Les conditions de contact employées sont une condition de compliance normale avec frottement de Coulomb en vitesse dans le premier chapitre, et une condition unilatérale sans frottement dans le deuxième chapitre. Les résultats que nous obtenons concernent l'existence et parfois l'unicité des solutions faibles.

Dans la *quatrième* partie, subdivisée en deux chapitres, nous proposons une modélisation numérique des structures piézoélectriques en contact, discrétisé par différences finies en temps et éléments finis en espace. Les différentes lois de contact et frottement abordées sont traitées à l'aide d'une formulation de type Lagrangien augmenté développée par Alart-Curnier [4]. Le premier chapitre porte essentiellement sur la modélisation du comportement électro-élastique avec compliance normale et frottement de Coulomb dans un processus statique. Le deuxième chapitre concerne la modélisation du comportement électro-viscoélastique avec contact unilatéral et sans frottement dans un processus quasistatique. Pour chaque type de problème, on démontre un résultat d'estimation d'erreur sous certaines hypothèses de régularité et on y présente l'algorithme de résolution. Des résultats numériques correspondants et mettant en valeur les estimations d'erreurs sont présentés.

## Notations

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$int(\Omega)$	l'intérieur de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$\Gamma_i$ ( $i = \overline{1, 5}$ )	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ( $d - 1$ ) dimensionnelle de $\Gamma_1$ .
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .
$v_\nu, \mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\mathbf{v}$ défini sur $\overline{\Omega}$ .
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans $\Omega$ .
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ .
$H_1$	l'espace $H_1(\Omega)^d$ .
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$ .
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H} \mid \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega) \}$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on utilise les notations suivantes

$H^d$	l'espace $\{ \mathbf{x} = (x_i) \mid x_i \in H \}$ .
$H_s^{d \times d}$	l'espace $\{ \mathbf{x} = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H \}$ .
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de $H$ .
$\  \cdot \ _H$	la norme de $H$ .
$H'$	l'espace dual de $H$ .
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit dualité entre $H'$ et $H$ .
$\psi_K$	la fonction indicatrice de $K \subset H$ .
$2^K$	l'ensemble de toutes les parties de $K$ .
$x_n \rightarrow x$	la convergente forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ .

$x_n \rightharpoonup x$  la convergente faible de la suite  $(x_n)$  vers l'élément  $x$  dans  $H$ .  
 $\mathcal{L}(H)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H$  dans  $H$ .

Si de plus  $[0, T]$  est un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

$\mathcal{C}([0, T]; H)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H$ .  
 $\|\cdot\|_{0, H}$  la norme de  $\mathcal{C}([0, T]; H)$ .  
 $\mathcal{C}^1([0, T]; H)$  l'espace des fonctions continûment dérivable de  $[0, T]$  dans  $H$ .  
 $\|\cdot\|_{1, H}$  la norme de  $\mathcal{C}^1([0, T]; H)$ .  
 $L^p(0, T, H)$  l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $[0, T]$  dans  $H$   
telles que  $\int_0^T |f(t)|_H^p dt < +\infty$  avec les modifications usuelles  
si  $p = +\infty$ .  
 $\|\cdot\|_{0, p, H}$  la norme de  $L^p(0, T, H)$ .  
 $W^{k, p}(0, T, H)$  l'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$ .  
 $\|\cdot\|_{k, p, H}$  la norme de  $W^{k, p}(0, T, H)$ .

Pour une fonction  $f$ , on note

$\text{dom} f$  le domaine de  $f$ .  
 $\text{supp} f$  le support de  $f$ .  
 $\dot{f}, \ddot{f}$  les dérivées première et seconde de  $f$  par rapport au temps.  
 $\partial_i f$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ ème composante  $x_i$ .  
 $\nabla f$  le gradient de  $f$ .  
 $\varepsilon(f)$  la partie symétrique du gradient de  $f$  qui vaut  $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$ .  
 $\text{Div} f$  la divergence de  $f$ .  
 $\partial f$  le sous-différentiel (classique) de  $f$ .

Si  $H^1$  et  $H^2$  sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H^1$  dans  $H^2$ .  
 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$  la norme de  $\mathcal{L}(H^1, H^2)$ .

Première partie  
Requis et préliminaires



# Partie I

## Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique et fonctionnel dans lesquels on va travailler : nous commençons par préciser le cadre physique et les modèles mathématiques “généraux” utilisés, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement.

Après un bref rappel de mécanique des milieux continus nous continuons par les espaces fonctionnels. On introduit les espaces, dont nous nous servons par la suite, qui représentent le cadre mathématique des démonstrations à venir. Nous y abordons de façon succincte les espaces de fonctions à valeurs réelles, tels que l’espace de fonctions  $C^m$ , de type  $L^p$  ou de Sobolev. Nous présentons également les espaces et les notations adoptées par la suite dans l’étude des problèmes de contact en petites déformations, leurs principales propriétés avec notamment les théorèmes de trace. Pour clôturer ce chapitre, nous reprenons les espaces introduits à la première section en les étendant aux fonctions à valeurs vectorielles.

Ensuite, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d’analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations variationnelles elliptiques, les équations, les inéquations variationnelles d’évolution et inclusions différentielles ainsi que quelques principaux résultats portant sur ce type de problèmes. Nous finissons en donnant quelques lemmes de type Gronwall, qui seront des plus utiles notamment dans les démonstrations d’unicité des solutions faibles ainsi que les estimations d’erreurs.

Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifiées dans chacun des paragraphes suivants.



# Chapitre 1

## Description des structures piézoélectriques en contact

Ce chapitre introduit le cadre physique utilisé dans ce mémoire et en même temps il représente un bref rappel de mécanique des milieux continus. On rappelle notamment ici l'équation de mouvement de Cauchy et l'équation de la conservation de la charge, on décrit les lois de comportement électro-élastiques et électro-viscoélastiques ; finalement, on précise les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement.

### 1.1 Cadre physique - modèles mathématiques

Nous allons introduire dans ce paragraphe le modèle général du problème mécanique utilisé dans presque toute la thèse. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour les problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation correspondant au cadre physique d'étude.

Le **cadre physique** est le suivant. Nous envisageons un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ) avec une surface de frontière régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que  $mes \Gamma_1 > 0$ ,  $mes \Gamma_a > 0$  et  $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_b$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $\mathbf{f}_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $\mathbf{f}_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$  (voir figure I.1.1). On suppose que  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_0$  varient très lentement par rapport au temps. Le milieu est soumis à l'action de potentiel fixé  $\varphi_0$  sur la

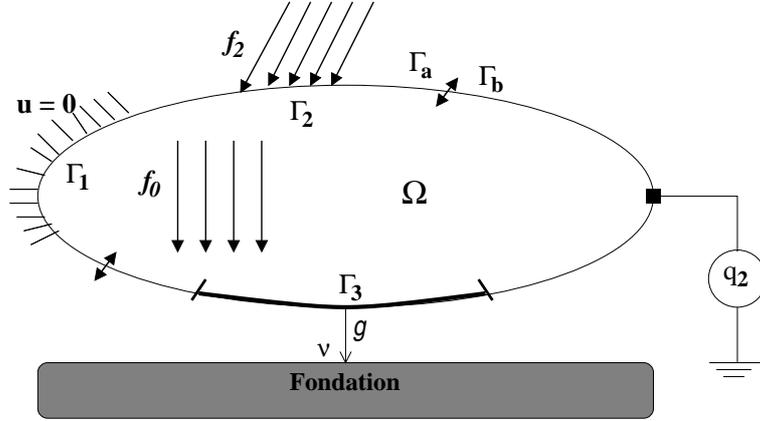


FIG. I.1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec un isolateur.

partie  $\Gamma_a$  de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissant sur la partie  $\Gamma_b$ . Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est (ou peut arriver) en contact avec un obstacle isolateur sur la partie  $\Gamma_3$ .

Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et thermiques et à considérer l'interaction électro-mécanique uniquement. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement comme les céramiques, les polymères et les piézo-composites.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ); " $\cdot$ " et  $|\cdot|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad |\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d,$$

avec la convention de l'indice muet.

Soient  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$  le champ des *contraintes* et le vecteur des *déplacements électriques*,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$  le champ des *déplacements* et le *potentiel électrique*,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{E}(\varphi)$  le champ des *déformations infinitésimales* et le champ *électrique*. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$  et  $t \in [0, T]$ .

Pour un vecteur  $\mathbf{u}$  nous désignons par  $u_\nu$  et  $\mathbf{u}_\tau$  les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire :

$$(I.1.1) \quad u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Pour le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  nous notons par  $\sigma_\nu$  et  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, à savoir

$$(I.1.2) \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

En utilisant (I.1.1) et (I.1.2), nous obtenons la relation

$$(I.1.3) \quad (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$$

où  $\dot{\mathbf{u}}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{\mathbf{u}}$  désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  les notations  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  désignent respectivement la vitesse *normale* et *tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire :

$$\dot{u}_\nu = \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}} - \dot{u}_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Nous rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites déformations :

$$(I.1.4) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Nous notons que ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés au cadre physique ci-dessus.

**Modèle mathématique :** Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le *cadre physique* de la figure I.1.1 (page 6). L'état électromécanique d'un milieu piézoélectrique est déterminé par le couple  $(\mathbf{u}, \varphi)$  tel que  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement et  $\varphi$  est le potentiel électrique.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$(I.1.5) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la *densité de masse*. Les processus d'évolution définis par (I.1.5) s'appellent *processus dynamiques*. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  peut être négligé. Dans ce cas l'équation (I.1.5) devient

$$(I.1.6) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

L'équation (I.1.6) s'appelle *l'équation d'équilibre*. Les processus d'évolution définis par (I.1.6) s'appellent *processus quasistatiques*. Nous rappelons que dans le *cadre physique* de figure I.1.1 (page 6),  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_0$  varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas *quasistatique* et nous utilisons l'équation (I.1.6).

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, la loi de comportement contient une nouvelle inconnue, le champ électrique  $\mathbf{E}$ , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge

$$(I.1.7) \quad \text{div } \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

avec  $q_0$  la densité volumique de charge au sein du matériau. Cette équation est valable dans un milieu non aimanté. Cette hypothèse a été confirmée expérimentalement par H.F. Tiersten [110].

Nous avons rappelé que le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  d'ordre 2 ne dépend en fait que du vecteur  $\mathbf{u}$  ; de même, le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  dérive d'autres quantités, en particulier du potentiel scalaire électrique. Plus précisément, on sait qu'un champ électrique variant en fonction du temps, induit un champ magnétique  $B$  et vice-versa ; ce phénomène se traduit par les équations de Maxwell-Ampère

$$(I.1.8) \quad \text{rot } B = \mu_1 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

et de Maxwell-Faraday

$$(I.1.9) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

où  $\mu_1$  désigne la perméabilité magnétique du matériau. La quatrième équation de Maxwell s'ajoute aux équations déjà citées (Maxwell-Gauss, Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday) et traduit la loi de conservation du flux magnétique,

$$(I.1.10) \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Pour la construction et l'étude de ces équations, nous renvoyons à [33] et à [87]. La loi de conservation (I.1.10) implique l'existence d'un vecteur  $A$  appelé *potentiel magnétique vecteur* tel que

$$(I.1.11) \quad B = \operatorname{rot} A.$$

Cette dernière équation combinée avec l'équation de Maxwell-Farraday implique que la somme de vecteurs  $\mathbf{E} + \frac{\partial A}{\partial t}$  admet un rotationnel nul, donc dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$ , c'est-à-dire

$$(I.1.12) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Les inconnues du système de la piézoélectricité ainsi écrit sont donc maintenant le déplacement  $\mathbf{u}$ , le potentiel scalaire  $\varphi$  et le potentiel vecteur  $A$ . Dans le cas dynamique, afin de gérer l'inconnue  $A$ , nous utilisons l'équation de Maxwell-Ampère (I.1.8) qui n'a pas été utilisée jusqu'ici.

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'approximation quasi-électro-statique, qui revient à négliger la partie magnétique dans l'équation de Maxwell-Faraday (I.1.9). Alors, pour  $A = 0$ , en utilisant (I.1.12) on a

$$(I.1.13) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

soit encore,

$$(I.1.14) \quad \mathbf{E}(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

et les inconnues se réduisent à  $\mathbf{u}$  et  $\varphi$ . Nous considérons que le potentiel électrique comme étant l'inconnue électrique plutôt que son gradient (voir Banks et al. [9]), ceci est justifié par les conditions aux limites qui seront imposées par la suite sur le potentiel électrique.

Puisque le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements s'annule ici :

$$(I.1.15) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T).$$

La condition aux limites en traction est

$$(I.1.16) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$\mathbf{f}_2$  étant une donnée du problème.

Les conditions aux limites électriques sont déterminées à partir des deux équations

$$(I.1.17) \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(I.1.18) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T),$$

où  $\varphi_0$  et  $q_2$  étant des données du problème.

Les équations (I.1.6)–(I.1.7) associées aux conditions aux limites et (I.1.15)–(I.1.18) sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même : c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre. Par ailleurs, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution piézo-électrique du corps en contact, nous préciserons les conditions aux limites sur  $\Gamma_3$  en décrivant les différentes lois de contact et de frottement utilisées ; cela fera l'objet du troisième paragraphe de ce chapitre.

## 1.2 Lois de comportement

La caractérisation systématique des propriétés électro-mécaniques des milieux piézo-électriques est fondée sur une représentation tensorielle du couplage entre les systèmes électrique et mécanique [57]. Cette approche s'impose notamment du fait de l'anisotropie inhérente à l'existence même de la piézoélectricité.

Les grandeurs locales macroscopiques, généralement choisies comme variables mécaniques et électriques dans les milieux continus, sont, respectivement, les tenseurs de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et les vecteurs déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et champ électrique  $\mathbf{E}$ . La représentation des propriétés piézoélectriques de la matière conduit donc, en fonction du système de variables indépendantes  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ ,  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$ ,  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  ou  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$  choisi, à la définition de quatre couples de relations fondamentales traduisant les effets direct et inverse de la conservation énergétique. Dans le cadre des hypothèses classiques de la théorie de l'élasticité et de la viscoélasticité, en supposant en particulier que les amplitudes des déformations restent faibles, les propriétés de symétrie des tenseurs de déformation et de contrainte permettent de ramener les relations tensorielles initiales à des relations matricielles plus simples à manipuler. Ainsi, en choisissant par

exemple les variables intensives  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$  comme couple de variables indépendantes, les propriétés piézoélectriques de la matière se traduisent par les relations suivantes :

**Lois de comportement des matériaux électro-élastiques.** Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le vecteur des déplacements électriques  $\mathbf{D}$  sont reliés par la loi de comportement

$$(I.1.19) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi), \end{cases}$$

où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur d'élasticité non forcément linéaire à champ électrique nul (matériau piézoélectrique de court-circuité),  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$  est le tenseur *diélectrique* à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$  où  $e_{ijk}^* = e_{kij}$ , dénote le transposé du tenseur  $\mathcal{E}$ , tel que

$$(I.1.20) \quad \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}^*\mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

En électro-élasticité linéaire, on suppose que le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire

$$(I.1.21) \quad \sigma_{ij} = f_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) - e_{ijk}^*E_k(\varphi),$$

où  $\mathcal{F} = (f_{ijkh})$  est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes  $f_{ijkh}$  s'appellent *coefficients d'élasticité* et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure et  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur des *constantes piézoélectriques*. Dans le cas non-homogène  $f_{ijkh}$  et  $e_{ijk}$  dépendent du point  $\mathbf{x} \in \Omega$  et dans le cas homogène  $f_{ijkh}$  et  $e_{ijk}$  sont des constantes.

Nous présentons maintenant deux exemples de loi du comportement électro-élastique non linéaire. Dans le premier exemple, on prend dans (I.1.19)

$$(I.1.22) \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{\xi} - P_K\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d,$$

où  $\lambda$  est une constante strictement positive.  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est un tenseur d'ordre quatre symétrique, défini positif;  $K \in \mathbb{S}^d$  est un convexe fermé tel que  $0_d \in K$  et  $P_K$  est l'opérateur de projection sur  $K$ . Ce convexe est d'habitude défini par l'égalité

$$K = \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \mid G(\boldsymbol{\xi}) \leq k \},$$

où  $G : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe et continue telle que  $G(\mathbf{0}) = 0$  et  $k > 0$ . Pour plus de détails, on renvoie par exemple à [65], [84] p. 97 et [107] p. 68.

Un deuxième exemple de loi de comportement élastique non linéaire est celui proposé par Hencky (pour plus de détails, voir [49]). On introduit alors la trace  $tr \boldsymbol{\xi}$  et le déviateur  $\boldsymbol{\xi}^D$  de tout élément  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$  données par les relations :

$$tr \boldsymbol{\xi} = \xi_{ii}, \quad \boldsymbol{\xi}^D = \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{d} (tr \boldsymbol{\xi}) \mathbf{I}_d,$$

où  $\mathbf{I}_d \in \mathbb{S}^d$  est le tenseur unitaire. On prend dans (I.1.19)

$$(I.1.23) \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = K_0 (tr \boldsymbol{\xi}) \mathbf{I}_d + \psi(\|\boldsymbol{\xi}^D\|^2) \boldsymbol{\xi}^D \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d,$$

où  $K_0$  est une constante strictement positive,  $\psi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction régulière satisfaisant les conditions suivantes : ils existent  $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$  tels que

$$\psi(s) \leq d_1, \quad -c_1 \leq \psi'(s) \leq 0, \quad c_2 \leq \psi(s) + 2\psi'(s)s \leq d_2 \quad \forall s \geq 0.$$

Sous ces conditions, il est immédiat que l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  donné par (I.1.22) ou par (I.1.23) satisfait à des hypothèses ultérieurement spécifiées dans les chapitres suivants.

**Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.** Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de construction est de la forme

$$(I.1.24) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta} \mathbf{E}(\varphi), \end{cases}$$

dans laquelle interviennent l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}$ , l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$ , non forcément linéaires, le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  et le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$ .

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire de type Kelvin-Voigt (voir par exemple [48]) et en tenant compte de la dépendance du champ des contraintes avec le champ électrique, le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$(I.1.25) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\dot{\mathbf{u}}) + f_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) - e_{ijk}^* E_k(\varphi).$$

Un exemple de loi électro-viscoélastique non linéaire est

$$(I.1.26) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varrho(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi),$$

où  $\mathcal{A}$  est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes  $a_{ijkl}$  s'appellent *coefficients de viscosité*,  $\rho$  est une constante strictement positive,  $K \in \mathbb{S}^d$  est un convexe fermé tel que  $0_d \in K$  et  $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$  est l'opérateur de projection sur  $K$ . L'opérateur d'élasticité est donné par  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \rho(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K \boldsymbol{\varepsilon})$  et  $\mathcal{E}$  est un tenseur d'ordre trois. Ses composantes  $e_{ijk}$  s'appellent *coefficients piézoélectriques*.

### 1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Dans ce paragraphe, nous exposons en détails les conditions aux limites que nous utilisons dans les problèmes de contact en petites déformations. Nous décrivons aussi bien l'aspect mathématique que mécanique de ces conditions.

Par *condition de contact* nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par *loi de frottement* nous comprenons une relation impliquant la contrainte tangentielle  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  et la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  ou le déplacement tangentiel  $\mathbf{u}_\tau$ . On note ici que  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  s'appelle aussi *force de frottement*.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées par la suite dans ce mémoire. Nous nous plaçons dans le *cadre physique* de la figure I.1.1 (page 6). Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ .

**Contact bilatéral.** Ici, le contact se fait de façon *bilatérale* c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement ; il n'y a pas de séparation entre le corps et la fondation. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$(I.1.27) \quad u_\nu = 0,$$

et elle sera utilisée dans la deuxième partie de ce mémoire.

**Condition de contact unilatéral.** Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$(I.1.28) \quad u_\nu \leq 0,$$

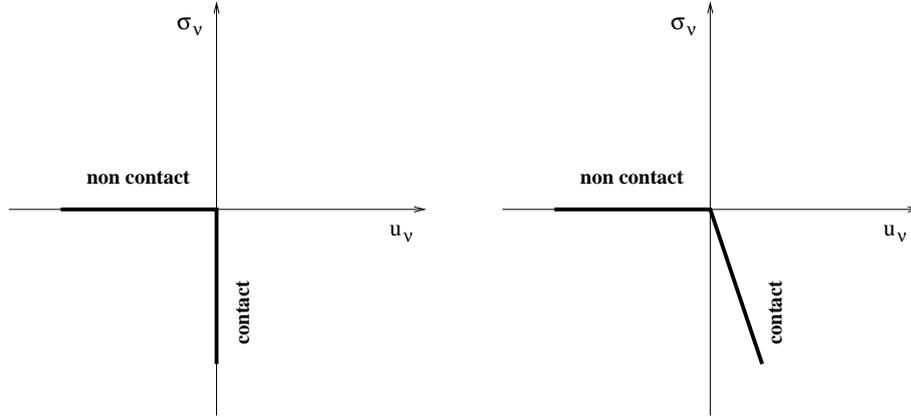


FIG. I.1.2 – Loi de Signorini (1) et loi de compliance normale (2) pour  $g = 0$ .

en supposant que l'interstice entre le corps et la fondation est nul ; dans le cas contraire, on considère l'inégalité

$$(I.1.29) \quad u_\nu \leq g,$$

où  $g$  représente l'interstice de contact. Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu < g$ , le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$(I.1.30) \quad u_\nu < g \Rightarrow \sigma_\nu = 0.$$

Aux points de  $\Gamma_3$  tels que  $u_\nu = g$ , le contact est maintenu et la base rigide exerce une réaction normale orientée vers  $\Omega$ . Nous avons donc

$$(I.1.31) \quad u_\nu = g \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0.$$

Pour résumer, les conditions de contact (I.1.29)–(I.1.31) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$(I.1.32) \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0.$$

Les conditions (I.1.32) s'appellent les conditions de contact unilatéral (dit de *Signorini*). Le contact est un phénomène non-dissipatif donc réversible. Il peut être représenté sous la forme du graphe présenté par la figure I.1.2 (1) pour  $g = 0$ . On se rend facilement compte sur ce figure, que la loi de contact unilatéral n'est pas un graphe de fonction et aussi la très forte non linéarité de cette loi. C'est une loi multivoque.

D'après les travaux de Moreau [74] on peut écrire que la force de contact  $\sigma_\nu$ , ainsi que  $u_\nu$ , dérivent (au sens des sous-gradients) de deux potentiels d'énergie libres convexes non-différentiables sous la forme d'une inclusion :

$$\sigma_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^-}(u_\nu - g) \quad \text{ou} \quad u_\nu - g \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(\sigma_\nu),$$

où  $\partial\Psi_{\mathbb{R}^-}$  représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\Psi_{\mathbb{R}^-}$  de la partie négative de  $\mathbb{R}$ .

Ces condition de contact bilatéral et unilatéral ont été utilisée à plusieurs reprises, nous pouvons aiguiller le lecteur vers les références [27, 28, 29, 106].

**Contact avec compliance normale.** Dans ce cas, la fondation est supposée légèrement déformable. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait la condition dite de *compliance normale*, c'est-à-dire

$$(I.1.33) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $g$  représente l'*interstice* entre le corps et la fondation et  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, appelée *fonction de compliance normale*. Cette condition dit que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration  $u_\nu - g$ . Des conditions de contact avec compliance normale ont été proposées dans [69] et ont été utilisées par exemple dans [5, 46, 50, 61, 62, 77].

Comme exemple de fonction de compliance normale  $p_\nu$  nous pouvons considérer

$$(I.1.34) \quad p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Le graphe de la fonction (I.1.34), pour  $g = 0$ , est donné sur la figure I.1.2 (2). Cette loi régularise la condition de Signorini, elle donnera un certain confort mathématique comme nous l'évoquerons dans la suite. L'identification ou plutôt le choix des coefficients  $c_\nu$  est arbitraire. Dans ce cas particulier, la loi de compliance normale peut se mettre sous la forme de l'inclusion suivante :

$$\sigma_\nu \in \partial\left[\left(\Psi_{\mathbb{R}^-} \nabla \partial\frac{c_\nu}{2} \|\cdot\|^2\right)(u_\nu - g)\right] \iff \sigma_\nu \in \partial\left[\frac{c_\nu}{2} \text{dist}^2(u_\nu - g, \mathbb{R}^-)\right],$$

où  $\nabla$  est le produit inf-convolution.

Ensuite, nous présentons les lois de frottement utilisées dans ce mémoire.

**Contact sans frottement.** Dans le deuxième chapitre de la troisième partie du mémoire on suppose qu'on a un glissement parfait, ou sans frottement. Ceci se traduit par l'égalité

$$(I.1.35) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}.$$

Autrement dit, la contrainte tangentielle s'annule à la surface du contact, tout au long du processus. Si au contraire, une force tangentielle existe, on dit que l'on a un glissement avec frottement et on est amené à introduire une loi de frottement qui relie cette composante tangentielle aux autres variables du système.

**Loi de frottement de type Tresca.** Cette loi de frottement est à seuil  $S$ , que nous considérons fixe. Tant que la contrainte tangentielle  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  n'a pas atteint le seuil  $S$ , le corps ne peut pas glisser sur la fondation et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint, il y a glissement et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette loi de frottement est :

- dans le cas quasistatique,

$$(I.1.36) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq S, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -S \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

- dans le cas statique,

$$(I.1.37) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq S, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -S \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

où  $S > 0$  est le seuil de frottement. La loi de Tresca a été utilisée récemment dans [7, 55, 76], entre autres références. On note ici que dans la deuxième partie du mémoire nous nous plaçons dans ce type de frottement.

**Loi de frottement de type Coulomb.** Dans la deuxième et la troisième partie du mémoire nous allons considérer la loi de frottement dite de type Coulomb. C'est une des lois les plus répandues et elle est plus réaliste que celle de Tresca. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale et peut s'énoncer comme suit :

- dans le cas quasistatique,

$$(I.1.38) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p(\sigma_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < p(\sigma_\nu) \implies \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = p(\sigma_\nu) \implies \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu \dot{\mathbf{u}}_\tau, \mu \geq 0, \end{cases}$$

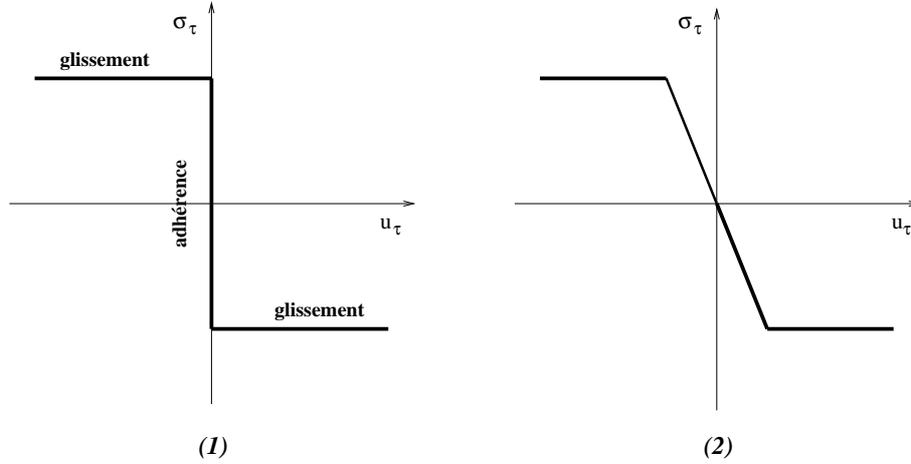


FIG. I.1.3 – Loi de Coulomb (1) et sa régularisation (2).

- dans le cas statique,

$$(I.1.39) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p(\sigma_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < p(\sigma_\nu) \implies \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = p(\sigma_\nu) \implies \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu \mathbf{u}_\tau, \mu \geq 0, \end{cases}$$

où  $p$  est une fonction positive, représentant le seuil de frottement. Tant que le seuil n'est pas atteint, il y a immobilité (nullité de la vitesse tangentielle ou du déplacement tangentiel). Quand ce seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement (voir figure I.1.3 (1)). Comme précédemment pour la loi de contact unilatéral, l'ensemble de ces conditions (I.1.39) peut se résumer sous une forme plus condensée en termes de pseudo potentiels

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \in \partial\Psi_{C(\sigma_\nu)}(\mathbf{u}_\tau) \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}_\tau \in \partial\Psi_{C(\sigma_\nu)}^*(\boldsymbol{\sigma}_\tau),$$

où la notation  $C(\sigma_\nu)$  désigne le disque convexe de rayon  $-p(\sigma_\nu)$  et  $\Psi_{C(\sigma_\nu)}^*$  est la conjugué au sens de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice  $\Psi_{C(\sigma_\nu)}$ .

Dans le cas du frottement sec de Coulomb, nous avons

$$p(r) = \mu|r|,$$

où  $\mu > 0$  est un coefficient de frottement.

Dans le cas d'un modèle de compliance, on peut considérer la régularisation suivante :

$$p(r) = c_\tau r_+,$$

avec  $c_\tau$  une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Nous pouvons aussi considérer l'exemple

$$p(r) = \mu [r(1 - \alpha r)]_+,$$

où  $\mu > 0$  est un coefficient de frottement et  $\alpha$  est un petit coefficient positif relatif à la dureté de la surface de contact.

Les expressions des conditions d'adhérence et de glissement, données par la loi de Coulomb, ne sont pas des fonctions biunivoques de la vitesse de glissement. Cela peut conduire à des difficultés pour les techniques classiques de résolution. Pour cela, des lois de frottement adoucies, proches de celle de Coulomb, sont utilisées.

Un exemple est l'introduction d'un glissement élastique dans la zone d'adhérence, justifié par une déformation élastique des aspérités sur la zone de contact. Parmi les régularisations classiques de la loi de Coulomb, nous présentons le raccordement de polynômiale par morceaux (voir figure I.1.3 (2)) ; on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu |\sigma_\nu| \phi_\epsilon(\mathbf{u}_\tau),$$

avec

$$\phi_\epsilon(\mathbf{u}_\tau) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{u}_\tau < -\epsilon, \\ c_\tau \mathbf{u}_\tau & \text{si } -\epsilon \leq \mathbf{u}_\tau \leq \epsilon, \\ +1 & \text{si } \mathbf{u}_\tau > \epsilon, \end{cases}$$

où  $\epsilon$  dépend de  $\mu |\sigma_\nu|$  et  $c_\tau$  et dans ce cas particulier, cette loi s'écrit sous forme de pseudo potentiels :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \in \partial \left[ \left( \Psi_{C^*(\sigma_\nu)} \nabla \partial \frac{c_\tau}{2} \|\cdot\|^2 \right) (\mathbf{u}_\tau) \right].$$

avec  $c_\tau > 0$ , une constante donnée.

En conclusion, les conditions sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_3$  peuvent être très diverses et par conséquent, on peut générer une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Par ailleurs, nous ne saurions pas clore ce paragraphe sans citer d'autres exemples de lois qui modélisent le comportement à la surface potentielle de contact, notamment les versions de la loi de frottement de Coulomb et le contact avec frottement et usure. Ces modèles ont été utilisés par exemple dans [26, 27, 31, 69, 76, 93, 102].

## Chapitre 2

# Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre on introduit les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire. On donne aussi quelques propriétés qui seront utilisées dans la suite. Partout dans ce chapitre,  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2,3$ ), de frontière  $\Gamma$ . Nous supposons que  $\Omega$  est un domaine lipschitzien, c'est-à-dire que  $\Gamma$  est représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\Omega$  étant situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  et  $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$  avec  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  telle que  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a, \Gamma_b$  sont mesurables et  $mes \Gamma_1 > 0$ ,  $mes \Gamma_a > 0$ .

### 2.1 Cadre fonctionnel "scalaire"

Dans ce paragraphe, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions  $p$ -intégrables, les espaces de Sobolev, qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochain paragraphe. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces. Nous ne donnons pas de démonstrations afin de pas rallonger la longueur de ce manuscrit. Le lecteur souhaitant de plus amples approfondissements pourra se reporter par exemple à [1], [21] ou encore [92].

Nous introduisons la notation classique

$$(I.2.1) \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

dans laquelle figurent le multi-index  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et sa longueur  $|\alpha| =$

$\sum_{i=1}^d \alpha_i$ . Dans ce manuscrit, pour désigner les dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  d'une fonction  $u$ , nous adoptons indifféremment les notations usuelles suivantes  $\partial_{x_i} u, \partial_i u, u_{x_i}$  ou encore  $u_{,i}$ .

Le cadre étant posé, commençons tout d'abord par les espaces classiques de fonctions continues et continûment différentiables.

**Espaces de fonctions continues et continûment différentiables.** Nous notons  $C(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions uniformément continues sur  $\Omega$ . Toute fonction de  $C(\bar{\Omega})$  est bornée. La notation  $C(\bar{\Omega})$  désigne que toute fonction uniformément continue sur  $\Omega$  possède une unique extension continue sur  $\bar{\Omega}$ . C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \bar{\Omega}\}.$$

Nous utilisons par la suite la notation  $C(0; T)$  pour désigner l'espace des fonctions uniformément continues sur l'intervalle  $[0, T]$ , avec  $T > 0$ . Pour tout entier  $m$ , l'espace  $C^m(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$  dont les dérivées d'ordre au plus  $m$  sont également continues sur  $\bar{\Omega}$ ,

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est également un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\bar{\Omega})},$$

où l'opérateur  $D^\alpha$  est donné à la relation (I.2.3). L'espace  $C^\infty(\bar{\Omega})$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega}).$$

De cette définition, nous pouvons nous intéresser à l'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble  $\Omega$  à support inclus dans  $\Omega$ ,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où le support d'une fonction  $v$  se définit de la façon suivante

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}.$$

La fonction  $v$  est dite à support compact dans  $\Omega$  si son support  $\text{supp } v$  est un sous ensemble propre de l'ensemble  $\Omega$ . Il est clair que l'inclusion  $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$  est valable.

**Les espaces**  $L^p(\Omega)$ . De façon usuelle, nous désignons par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables et  $p$ -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue pour  $p \in [1, +\infty[$ . L'espace  $L^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées. Nous munissons ces espaces de leurs normes usuelles  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ ,  $p \in [1, +\infty[$ .

**Définition I.2.1.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ , on dit qu'une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $L^p_{loc}(\Omega)$  si  $uI_K \in L^p(\Omega)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ , où  $I_K$  représente l'application identité de  $K$ .

Et on a le résultat suivant.

**Remarque I.2.2.** Soit  $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ , si on a

$$\int_{\Omega} v(x)\psi(x)dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

alors  $v = 0$  p.p. dans  $\Omega$ .

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante. Soit  $1 < p < +\infty$  un réel. On pose  $p' = \frac{p}{p-1}$  et on dit que  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ . L'exposant  $p'$  est caractérisé par  $1/p + 1/p' = 1$ . Pour  $p = 1$  (res.  $p = +\infty$ ) nous poserons naturellement  $p' = +\infty$  (res.  $p' = 1$ ).

Quelques propriétés de ces espaces  $L^p(\Omega)$  sont résumées ci-après.

**Théorème I.2.3.** Pour tout  $p$  de  $[1, +\infty[$ , les espaces  $L^p(\Omega)$  vérifient les assertions suivantes:

- (1) Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont des espaces de Banach.
- (2) Toute suite de Cauchy de  $L^p(\Omega)$  possède une sous-suite convergente ponctuellement sur  $\Omega$ .
- (3) Pour toute fonction  $u \in L^p(\Omega)$ , toute  $v \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $p'$  désignant l'exposant conjugué de  $p$ , l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

- (4) Les deux des espaces  $L^p(\Omega)$ , pour  $p \in [1, +\infty[$ , vérifient  $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ .
  - (5) Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont des espaces réflexifs pour  $p \in ]1, +\infty[$ .
  - (6) Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont des espaces séparables pour  $p \in [1, +\infty[$ .
- L'espace  $L^2(\Omega)$  possède une propriété en plus, à savoir c'est un espace de Hilbert s'il

est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour  $p = 2$ , est vérifiée i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

**Espaces de Sobolev d'ordre entier.** Nous commençons par les définitions suivantes.

**Définition I.2.4.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . soit  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . On dit que la fonction  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  est la dérivée faible d'ordre  $\alpha$  de  $u$  si

$$\int_{\Omega} u(x)D^{\alpha}\phi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Il résulte de la Remarque I.2.2 que la dérivée faible, si elle existe, est déterminée de manière unique dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Définition I.2.5.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , on définit l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  comme

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\},$$

où  $D^{\alpha}$ . est la  $\alpha^{i\grave{e}me}$  dérivée faible.

Nous notons  $H^k(\Omega)$  l'espace  $W^{k,2}(\Omega)$ . Nous munissons  $W^{k,p}(\Omega)$  de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Quand  $p = 2$ , cette norme provient d'un produit scalaire. On définit aussi la semi-norme :

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Une propriété importante de ce type d'espaces est la suivante.

**Théorème I.2.6.** *Les espaces de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, +\infty]$ , munis de la norme  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ , sont des espaces de Banach. De plus, les espaces  $H^k(\Omega)$ , pour tout  $k$  entier, sont des espaces de Hilbert.*

Nous avons besoin de la définition d'ouverts de classe  $C^m$  et de classe  $C^{m,\beta}$ , qui précisent les diverses régularités sur les ensembles que nous considérons.

**Définition I.2.7.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{Z}$  un espace de fonctions à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}^{d-1}$ . La frontière  $\Gamma$  de l'ensemble  $\Omega$  est dite de classe  $\mathcal{Z}$  si, pour tout point  $x_0$  de la frontière  $\Gamma$ , il existe un réel  $r > 0$  et une fonction  $f$  de l'espace  $\mathcal{Z}$  tels que*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \mid x_d > f(x_1, \dots, x_{d-1})\},$$

où  $B(x_0, r)$  est la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . En particulier si  $\mathcal{Z}$  désigne l'ensemble des fonctions Lipschitziennes, l'ouvert  $\Omega$  est dit domaine de Lipschitz. Si  $\mathcal{Z}$  désigne l'espace  $C^m$  alors l'ensemble  $\Omega$  est dit domaine de classe  $C^m$ .

La modélisation des problèmes mécaniques font intervenir la plupart du temps la valeur de fonctions sur la frontière. Nous devons définir correctement les traces de ces fonctions sur la frontière. Pour cela, nous introduisons la notion d'application trace  $\gamma$  des fonctions des espaces de Sobolev, qui d'ailleurs coïncide, dans le cas des fonctions continues, à leurs restrictions sur la frontière.

**Théorème I.2.8.** *Soit  $\Omega$  un domaine de Lipschitz de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma$  et  $1 \leq p < \infty$ . Il existe une application linéaire continue  $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$  possédant les propriétés suivantes :*

- (1)  $\gamma v = v|_{\Gamma}$  si  $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,
- (2) l'application  $\gamma$  est une application compacte,
- (3) il existe une constante  $k > 0$ , provenant de la continuité de l'application  $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ , telle que

$$\|\gamma v\|_{L^p(\Gamma)} \leq k \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Nous notons  $\gamma v$  la trace d'une fonction  $v \in W^{1,p}(\Omega)$ . Nous nous permettons, lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, de remplacer la notation  $\gamma v$  par  $v$ .

## 2.2 Cadre fonctionnel “vectoriel”

La modélisation de problèmes de mécanique nécessite la plupart du temps l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans cette section les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés. Nous en profitons pour adopter certaines habitudes typographiques.

On introduit les espaces suivants :

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H, \end{aligned}$$

respectivement, où  $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont les opérateurs de *déformation* et de *divergence*, définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées par  $\|\cdot\|_H$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ , respectivement.

Puisque la frontière  $\Gamma$  est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\boldsymbol{\nu}$  à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{v} \in H_1$  nous utilisons la notation  $\boldsymbol{\nu}$  pour désigner la trace  $\gamma \mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  sur  $\Gamma$ .

Nous rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_{\Gamma}$ ; ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_{\Gamma}$  le dual de  $H_{\Gamma}$  et  $(\cdot, \cdot)$

le produit de dualité entre  $H'_\Gamma$  et  $H_\Gamma$ . Pour tout  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément noté  $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \in H'_\Gamma$  tel que

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v})_H \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_1.$$

En outre, si  $\boldsymbol{\sigma}$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v} \, da \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_1.$$

Donc, pour  $\boldsymbol{\sigma}$  assez régulier nous avons la formule suivante :

$$(I.2.2) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v} \, da \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_1.$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de  $H_1$ , dont la définition est donnée ci-après

$$(I.2.3) \quad V = \{ \boldsymbol{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}.$$

Puisque  $mes \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Korn s'applique sur  $V$  : il existe une constante  $C_K > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$(I.2.4) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|\boldsymbol{v}\|_{H_1} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [79].

Sur  $V$  nous considérons le produit scalaire donné par

$$(I.2.5) \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$$

et soit  $\|\cdot\|_V$  la norme associée, i.e.

$$(I.2.6) \quad \|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, (\cdot, \cdot)_V)$  est un espace de Hilbert.

En outre, il existe une constante  $C_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma$  telle que

$$(I.2.7) \quad \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma)^d} \leq C_0 \|\boldsymbol{v}\|_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

La notation  $(V, (\cdot, \cdot))$  sera utilisée tout au long de cette thèse sauf mention explicite.

On introduit également les espaces suivants :

$$W = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \},$$

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega) \},$$

où  $\operatorname{div} \mathbf{D} = (D_{i,i})$ . Ces espaces  $W$  et  $\mathcal{W}$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires données par

$$(\varphi, \psi)_W = (\varphi, \psi)_{H^1(\Omega)}, \quad (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)}.$$

On note par  $\|\cdot\|_W$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$  les normes associées respectivement. Puisque la partie  $\Gamma_a$  a été supposée de mesure non nulle, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante  $c_1$  strictement positive ne dépendant que du domaine  $\Omega$  et de la partie de la frontière  $\Gamma_a$  telle que :

$$(I.2.8) \quad \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^d} \geq c_1 \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W.$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [78].

Pour des détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple aux références [96, 97].

## 2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un interval de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru bienvenue.

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel. Nous notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .

**Définition I.2.9.** *Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $\|u_n(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $t \in [0, T] \setminus E$ .*

**Définition I.2.10.** *Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite fortement dérivable dans  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$  appelé la dérivée forte de  $u$  dans  $t_0$ , tel*

que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

**Définition I.2.11.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

**Théorème I.2.12. (Bochner)** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  mesurable est intégrable si et seulement si  $x \mapsto \|u(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T u dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u\|_X dt.$$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $u : (0, T) \rightarrow X$  mesurables, telles que l'application  $t \rightarrow \|u(t)\|_X$  appartient à  $L^p(0, T)$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \left\{ c > 0 \mid \|u(t)\|_X \leq c, \text{ p.p. } t \in (0, T) \right\} \quad \text{si } p = \infty.$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

**Proposition I.2.13.** (1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.

(2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3)  $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$ , avec injection continue,  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

(4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où  $L^p(0,T;X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0,T;X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition I.2.14.** Soit  $u, w \in L^1(0,T;X)$ . La fonction  $w$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0,T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T),$$

$C_0^\infty(0,T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans  $(0,T)$ .

Nous écrivons  $w = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $w = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0,T;X)$  est l'espace des fonctions  $u : [0,T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0,T;X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$ .  $W^{1,p}(0,T;X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier,  $W^{1,2}(0,T;X)$  est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

**Définition I.2.15.** Une fonction  $f : [0,T] \rightarrow X$  est dite absolument continue si quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour toute suite d'intervalles  $(a_i, b_i)$  disjoints, inclus dans  $[0,T]$ , tels que  $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$  on a  $\sum_i \|f(b_i) - f(a_i)\|_X \leq \varepsilon$ .

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(0,T;X)$ .

**Théorème I.2.16.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $X$  un espace de Banach réflexif et soit  $u \in L^p(0,T;X)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ .
- (2)  $u$  admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans  $L^p(0,T;X)$ .
- (3) Il existe  $u_0 \in X$  et  $g \in L^p(0,T;X)$ , telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si  $X$  est un espace réflexif, alors toute fonction  $u \in W^{1,p}(0,T;X)$  est fortement dérivable p.p. sur  $(0,T)$  et  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  p.p. sur  $(0,T)$ . Par ailleurs,  $W^{1,1}(0,T;X)$  coïncide avec l'ensemble des fonctions

$u : [0, T] \rightarrow X$  absolument continues et  $W^{1, \infty}(0, T; X)$  coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes  $u : [0, T] \rightarrow X$ .

Étant donné un entier  $k \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace

$$W^{k, p}(0, T; X) = \left\{ u \in W^{k-1, p}(0, T; X); \dot{u} \in W^{k-1, p}(0, T; X) \right\}.$$

On vérifie aisément que  $u \in W^{k, p}(0, T; X)$  si et seulement s'il existe  $k$  fonctions  $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$  telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(i)}(t) dt = (-1)^i \int_0^T g_i(t) \varphi(t), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

où  $\varphi^{(i)}$  désigne la dérivée d'ordre  $i$  de  $\varphi$ . On peut donc considérer les dérivées successives  $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$ . L'espace  $W^{k, p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k, p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

On a alors les résultats suivants :

**Théorème I.2.17.** *Si la fonction  $u$  appartient à présent à l'espace  $W^{1, p}(0, T; X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Nous avons alors :*

(1)  $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$

(2) si de plus  $p < \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^{p-1} \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

(3) si  $p = \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}(r)\|_{L^\infty(0, T; X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

**Théorème I.2.18.** *Dans le cas où l'espace  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  est un espace de Hilbert et si la fonction  $u$  appartient à l'espace  $H^1(0, T; X)$ , alors :*

(1) la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$  est une fonction absolument continue sur l'intervalle  $]0, T[$ ,

(2)  $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X \quad p.p. \ t \in ]0, T[$ ,

(3)  $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$

Ces quelques propriétés achèvent cette section et ce chapitre. Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons par exemple aux références [15, 21].

## Chapitre 3

# Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles d'évolution et les inclusions différentielles qui interviennent dans l'étude des problèmes de ce mémoire. Pour finir, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui seront utilisés. De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, nous pouvons renvoyer le lecteur soucieux de plus détails à, par exemple [8, 43, 60, 66, 103]

### 3.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $X$  munit du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_X$ . Nous pouvons identifier l'espace  $X$  à son dual  $X'$ . Nous dénotons respectivement par " $\rightharpoonup$ " et " $\rightarrow$ " la convergence faible et la convergence forte sur  $X$ . Ensuite  $0_X$  représentera l'élément zéro dans  $X$ . Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire.

**Définition I.3.1.** *L'opérateur  $A$  est dit :*

(1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(3) de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

**Proposition I.3.2.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .*

Le résultat précédent est un cas particulier du Théorème de Minty-Browder (voir par exemple [21] p.88). Il nous prouve que tout opérateur  $A : X \rightarrow X$  fortement monotone et de Lipschitz est inversible. Les propriétés de son inverse  $A^{-1}$  sont données par le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate, voir par exemple [96].

**Proposition I.3.3.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse  $A^{-1} : X \rightarrow X$  est également un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

On utilisera ce résultat dans le deuxième et la troisième partie de ce mémoire. En plus, on utilisera aussi le résultat suivant.

**Proposition I.3.4.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  fortement monotone et  $B : X \rightarrow X$  monotone. Alors,  $A + B : X \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone.*

Nous continuons avec quelques définitions portant sur les formes bilinéaires définies dans un espace de Hilbert.

**Définition I.3.5.** *Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue s'il existe un réel  $M > 0$  tel que*

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

**Définition I.3.6.** *Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $X$ -elliptique s'il existe une constante  $m > 0$  telle que*

$$a(u, u) \geq m\|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Si  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire continue alors, par le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons exhiber un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow X$  tel que

$$a(u, v) = (Au, v)_X \quad \forall u, v \in X.$$

Il est immédiat que la continuité (respectivement la  $X$ -ellipticité) de la forme bilinéaire  $a$  est équivalente à la lipschitzianéité (forte monotonie) de l'opérateur  $A$ . De même il est possible de définir une forme linéaire  $l : X \rightarrow X$  à partir d'une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  en posant  $(f(t), v)_X = l(v) \quad \forall v \in X$ .

Rappelons à présent quelques notions relatives aux fonctions convexes. Soit  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction convexe ; le domaine  $dom(j)$  et l'épigraphe  $epi(j)$  sont, respectivement, des ensembles convexes des espaces  $X$  et  $X \times \mathbb{R}$ , avec

$$dom(j) = \{u \in X \mid j(u) < \infty\},$$

$$epi(j) = \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} \mid j(u) \leq t\}.$$

Ce qui conduit à la définition suivante.

**Définition I.3.7.** *La fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est propre si elle n'est pas identiquement égale à  $+\infty$  ( $dom(j) \neq \emptyset$ ), et si elle ne prend jamais la valeur  $-\infty$ .*

Introduisons à présent la notion de semi-continuité inférieure. Cette notion va intervenir aussi bien dans les résultats abstraits qui vont suivre que dans l'étude des problèmes que nous avons envisagés.

**Définition I.3.8.** *La fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est une fonction semi-continue inférieurement en  $u$  de l'espace  $X$ , si pour toute suite  $(u_n)_n$  d'éléments de l'espace  $X$  convergeant vers  $u$  dans l'espace  $X$ , elle vérifie*

$$(I.3.1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} j(u_n) \geq j(u).$$

Il est possible d'étendre cette définition et de considérer la semi-continuité inférieure sur un sous-ensemble. La fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est dite semi-continue inférieure sur un sous-ensemble  $V$  de l'espace  $X$  si, cette fonction est semi-continue inférieurement en tout point du sous-ensemble  $V$ . Cette fonction est dite fonction semi-continue inférieure si elle est semi-continue inférieurement sur l'espace  $X$  tout entier.

Il convient de remarquer que dans la définition précédente, la suite d'éléments  $(u_n)_n$  converge fortement vers l'élément  $u$ . Si cette suite  $(u_n)_n$  converge faiblement vers un élément  $u$  et que l'inégalité (I.3.1) est vérifiée, alors la fonction  $j$  est dite *fonction faiblement semi-continue inférieurement au point  $u$* . De plus la notion de semi-continuité inférieure peut être définie sur un espace normé. Il est possible de caractériser la semi-continuité inférieure au sens des propositions équivalentes ci-après.

- La fonction  $j$  est (faiblement) semi-continue inférieurement,
- l'ensemble  $\{u \in X \mid j(u) \leq t\}$  est (faiblement) fermé pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,
- l'épigraphe  $\text{epi}(j)$  de la fonction  $j$  est (faiblement) fermé dans  $X \times \mathbb{R}$ .

Il est possible de lier la notion des fonctions semi-continue inférieurement et la notion de fonction faiblement semi-continue inférieurement. Ce résultat est utile notamment pour les fonctions indicatrices.

**Proposition I.3.9.** *Si la fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est convexe, propre et semi-continue inférieurement alors elle faiblement semi-continue inférieurement et réciproquement.*

Nous pouvons appliquer ce qui précède aux fonctions indicatrices de sous-ensembles. Si l'espace  $X$  désigne un espace de Hilbert réel et un  $K$  un sous-ensemble de l'espace  $X$ , en considérant  $\psi_K$  de  $K$  définie par

$$(I.3.2) \quad \psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K, \end{cases}$$

nous savons que l'ensemble  $K$  est fermé, non vide et convexe si et seulement si sa fonction indicatrice  $\psi_K$  est une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement.

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous gradient d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquemment en mécanique et notamment dans la Mécanique du Contact.

**Définition I.3.10.** *Soit une fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) \neq \pm\infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$  est l'ensemble défini par*

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle \quad \forall v \in X\}.$$

Le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant la dualité entre  $X'$  et  $X$ .

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Soit  $K$  un sous-ensemble convexe non vide de l'espace  $X$ . Considérons la fonction indicatrice  $\psi_K$  de l'ensemble  $K$ . Nous avons de suite que si  $u \notin K$  alors  $\partial \psi(u) = \emptyset$ . Supposons alors que  $u \in K$ . Il vient que si  $u' \in \partial \psi_K(u)$  alors  $\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in X$ .

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel  $\partial\psi_K$  d'une fonction indicatrice  $\psi_K$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' \mid \langle u', v - u \rangle_X \leq 0 \quad \forall v \in K\}.$$

Tout sous-gradient  $u' \in \partial\psi_K(u)$  est appelé support de la fonction en  $u$ . De plus, il est possible de montrer que si  $u \in \text{int}(K)$ , l'intérieur de l'ensemble  $K$ , alors le sous-différentiel  $\partial\psi_K(u)$  se réduit à  $\partial\psi_K(u) = \{0\}$ .

On peut alors donner la

**Proposition I.3.11.** *Si la fonction  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est convexe, propre et semi-continue inférieurement alors on a  $\partial j(u) \neq \emptyset$  pour tout  $u \in \text{int}(\text{dom}(j))$ , i.e.  $j$  est sous-différentiable sur  $\text{int}(\text{dom}(j))$ .*

Nous allons rappeler maintenant trois résultats d'existence et d'unicité de la solution des inéquations variationnelles. Soit maintenant un opérateur  $A : X \rightarrow X$ ,  $K \subset X$  et  $f \in X$ . Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant les formes suivantes :

**Problème I.** *Trouver  $u$  tel que*

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Ce problème est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur  $X$ .

**Problème II.** *Trouver  $u$  tel que*

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

où  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Ce problème est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur  $X$ .

**Problème III.** *Trouver  $u$  tel que*

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

où  $j : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . La nouveauté consiste ici dans la dépendance de la fonctionnelle  $j$  de la solution du problème, ce qui conduit à une *inéquation quasivariationnelle de type elliptique*.

En ce qui concerne les Problèmes *I* et *II* on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

**Théorème I.3.12.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $K$  est un convexe fermé non-vide de  $X$ . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.*

**Théorème I.3.13.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes peuvent être trouvées par exemple dans [19, 37].

Dans l'étude du Problème *III* nous faisons les hypothèses suivantes.

$A$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$(I.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(b) il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

La fonctionnelle  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :

$$(I.3.4) \quad j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est convexe sur } X, \text{ pour tout } \eta \in X.$$

Nous formulons dans la suite quelques conditions sur  $j$  pour résoudre le problème *III*. En gardant à l'esprit (I.3.4), il est bien connu qu'on peut définir la dérivée directionnelle  $j'_2$  donnée par

$$(I.3.5) \quad j'_2(\eta, u; v) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, u + \lambda v) - j(\eta, u)] \quad \forall \eta, u, v \in X.$$

Nous considérons maintenant les conditions suivantes.

$$(I.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty \\ \text{et toute suite } \{t_n\} \subset [0,1] \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(t_n u_n, u_n; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(I.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty \\ \text{et toute suite borne } \{\eta_n\} \subset X \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(\eta_n, u_n; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(I.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ et } \{\eta_n\} \subset X \text{ tels que} \\ u_n \rightharpoonup u \in X, \eta_n \rightharpoonup \eta \in X \text{ et pour toute } v \in X, \text{ alors on a} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, y) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{array} \right.$$

$$(I.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \alpha < m \text{ telle que} \\ j(u, v) - j(u, u) + j(v, u) - j(v, v) \leq \alpha \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

Le résultat principal obtenu pour le problème *III*, qui peut être trouvé dans [77], est le suivant

**Théorème I.3.14.** *Supposons que les conditions (I.3.3)–(I.3.4) sont vérifiées.*

(1) *Sous les hypothèses (I.3.6), (I.3.7) et (I.3.8), le problème III possède au moins une solution.*

(2) *Sous les hypothèses (I.3.6), (I.3.7), (I.3.8) et (I.3.9), le problème III possède une solution unique  $u = u(f)$  qui est une fonction lipschitzienne de  $f \in X$  avec une constante de Lipschitz  $(m - \alpha)^{-1}$ , i.e.*

$$\|u(f_1) - u(f_2)\|_X \leq \frac{1}{m - \alpha} \|f_1 - f_2\|_X \quad \forall f_1, f_2 \in X.$$

Le cas quasistatique est plus délicat ; il se caractérise par la présence de la dérivée temporelle de la solution, ce qui conduit à imposer une valeur initiale, comme on le montrera dans la section suivante.

## 3.2 Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe un résultat sur les équations d'évolution et deux résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution.

Dans la quatrième partie de ce mémoire, on va utiliser la version suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz :

**Théorème I.3.15.** *Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$ , qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$(I.3.10) \quad \begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{cases}$$

$$(I.3.11) \quad \text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$$

Alors, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Pour des détails sur ce théorème on peut envoyer le lecteur par exemple à [104] p.60.

Soit maintenant  $X$  un espace de Hilbert réel munit du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associé  $\|\cdot\|_X$ . Nous allons rappeler un résultat abstrait dans l'étude d'une classe d'inéquations variationnelles d'évolution qui va être utilisé dans ce mémoire.

Soient  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire sur  $X$ ,  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : [0, T] \rightarrow X$  et  $u_0 \in X$ . Nous considérons le problème d'évolution suivant: trouver  $u : [0, T] \rightarrow X$  telle que

$$(I.3.12) \quad \begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(I.3.13) \quad u(0) = u_0.$$

Dans l'étude du problème (I.3.12)–(I.3.13), nous introduisons les hypothèses suivantes :

$$(I.3.14) \quad \begin{cases} a : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et} \\ (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X; \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \end{cases}$$

$$(I.3.15) \quad \begin{cases} j : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ et pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{est une fonctionnelle positive homogène et sous-additive, i.e.} \\ (a) j(\eta, \lambda u) = \lambda j(\eta, u) \quad \forall u \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+; \\ (b) j(\eta, u + v) \leq j(\eta, u) + j(\eta, v) \quad \forall u, v \in X. \end{cases}$$

$$(I.3.16) \quad f \in W^{1,\infty}(0,T; X).$$

$$(I.3.17) \quad u_0 \in X.$$

$$(I.3.18) \quad a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X.$$

En se référant à la condition (I.3.15), la fonctionnelle  $j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe pour tout  $\eta \in X$ . Cette fonctionnelle possède donc une dérivée directionnelle  $j'_2$  donnée par (I.3.5).

Nous supposons aussi que la fonctionnelle  $j$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$(I.3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{toute suite } \{t_n\} \subset [0,1] \text{ et pour tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(t_n u_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(I.3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty, \text{ toute} \\ \text{suite bornée } \{\eta_n\} \subset X \text{ et tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(\eta_n, u_n - \bar{u}; -u_n) \right] < m. \end{array} \right.$$

$$(I.3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{u_n\} \subset X \text{ et } \{\eta_n\} \subset X \text{ telles que} \\ u_n \rightharpoonup u \in X, \eta_n \rightharpoonup \eta \in X \text{ et pour tout } v \in X, \\ \text{on a} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{array} \right.$$

$$(I.3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c_0 \in (0, m) \text{ telle que} \\ j(u, v - u) - j(v, v - u) \leq c_0 \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

$$(I.3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe deux fonctions } a_1 : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } a_2 : X \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{qui mènent des sous-ensembles bornés de } X \\ \text{dans des sous-ensembles bornés de } \mathbb{R} \text{ tels que} \\ |j(\eta, u)| \leq a_1(\eta) \|u\|_X^2 + a_2(\eta) \quad \forall \eta, u \in X, \\ \text{et } a_1(0_X) < m - c_0. \end{array} \right.$$

$$(I.3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{\eta_n\} \subset X \text{ avec } \eta_n \rightharpoonup \eta \in X \\ \text{et pour toute suite bornée } \{u_n\} \subset X, \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, u_n) - j(\eta, u_n)] = 0. \end{array} \right.$$

$$(I.3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } s \in (0, T] \text{ et pour toute fonction} \\ u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X) \text{ avec } u(0) = v(0), u(s) \neq v(s), \\ \text{on a} \\ \int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) \\ - j(v(t), \dot{v}(t))] dt < \frac{m}{2} \|u(s) - v(s)\|_X^2. \end{array} \right.$$

$$(I.3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \alpha \in (0, \frac{m}{2}) \text{ telle que pour tout } s \in (0, T] \\ \text{et toutes fonctions } u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X) \text{ avec} \\ u(s) \neq v(s), \text{ on a} \\ \int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) \\ - j(v(t), \dot{v}(t))] dt < \alpha \|u(s) - v(s)\|_X^2. \end{array} \right.$$

Dans l'étude du problème quasivariationnel d'évolution du type (I.3.12)–(I.3.13), nous avons donc le résultat suivant.

**Théorème I.3.16.** *Supposons vérifiées les conditions (I.3.14)–(I.3.18). Alors :*

(i) *Sous les hypothèses (I.3.19)–(I.3.24), le problème (I.3.12)–(I.3.13) possède au moins une solution  $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ .*

(ii) *Sous les hypothèses (I.3.19)–(I.3.25), le problème (I.3.12)–(I.3.13) possède une solution unique  $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ .*

(iii) *Sous les hypothèses (I.3.19)–(I.3.24) et (I.3.26), le problème (I.3.12)–(I.3.13) possède une solution unique  $u$  telle que  $(f, u_0) \mapsto u$  est une fonction lipschitzienne de  $W^{1,\infty}(0, T; X) \times X$  à valeurs dans  $L^\infty(0, T; X)$ .*

Du Théorème I.3.16 on découle le résultat suivant :

**Corollaire I.3.17.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une semi-norme continue. Nous supposons que les hypothèses (I.3.14), (I.3.16) et (I.3.17) sont vérifiées et que  $u_0$  satisfait la condition*

$$a(u_0, v) + \varphi(v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X.$$

*Alors, il existe une fonction unique  $u \in W^{1,\infty}(0, T; X)$  telle que*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + \varphi(v) - \varphi(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \\ \forall v \in X, p.p t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

En outre, l'application  $(f, u_0) \rightarrow u$  est lipschitzienne de  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  à valeurs dans  $L^\infty(0, T; X)$ .

Remarquons que dans l'inéquation (I.3.12) la fonctionnelle  $j$  prend deux arguments et dépend directement de la solution (c'est-à-dire  $j = j(u, \cdot)$ ). Un résultat portant sur l'existence, l'unicité et la dépendance de cette solution vis à vis des données a été obtenu dans [76]. La démonstration se base sur des arguments relatifs aux inégalités quasivariationnelles elliptiques et sur une méthode de discrétisation en temps.

### 3.3 Inclusions différentielles

Dans cette section, nous présentons un résultat abstrait sur les inclusions différentielles que nous utilisons dans l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution faible des problèmes mécaniques abordés. Nous présentons également des notions portant sur les opérateurs maximaux monotones ainsi que quelques unes de leurs propriétés, qui aident à la bonne compréhension de ce résultat abstrait.

Par la suite, nous supposons que l'espace  $X$  est un espace de Hilbert. La notation usuelle  $2^X$  désigne l'ensemble des parties de l'espace  $X$ . Soit  $A$  un opérateur multivoque de l'espace  $X$  dans  $2^X$ . La notation  $\text{dom}(A)$  désigne le domaine de l'opérateur  $A$ , soit l'ensemble

$$\text{dom}(A) = \{h \in X, Ah \neq \emptyset\}.$$

Nous sommes donc conduits à poser les définitions suivantes.

**Définition I.3.18.** *L'opérateur  $A$  est dit monotone, si pour tout  $x_1$  et  $x_2$  dans  $X$ , la relation suivante est vérifiée*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2.$$

**Définition I.3.19.** *L'opérateur  $A$  est dit maximal monotone s'il est monotone et si pour tout  $x$  et  $y$  dans l'espace  $X$ , nous avons*

$$\langle y - A\zeta, x - \zeta \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \zeta \in \text{dom}(A) \implies y \in Ax.$$

Les assertions suivantes sont extraites de [20] et seront très utiles dans ce qui suit.

**Proposition I.3.20.** *Le sous-différentiel  $\partial\psi_K : X \longrightarrow 2^X$  de la fonction indicatrice d'un convexe fermé  $K$  de l'espace  $X$  est un opérateur maximal monotone.*

**Proposition I.3.21.** *La somme d'un opérateur maximal monotone et un opérateur monotone et de Lipschitz est un opérateur maximal monotone.*

Nous rappelons à présent un résultat abstrait portant sur l'existence et l'unicité d'une solution d'une certaine classe d'inclusions différentielles.

Considérons une application multivoque  $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$  telle que  $A + \omega Id$  est maximal monotone pour certains réels  $\omega$ ,  $Id$  désignant l'application identité sur l'espace  $X$ . Soit de plus une fonction  $f$  et un élément  $u_0$  vérifiant :

$$(I.3.27) \quad f \in W^{1,1}(0,T; X),$$

$$(I.3.28) \quad u_0 \in \text{dom}(A).$$

**Théorème I.3.22.** *Sous les hypothèses (I.3.27) et (I.3.28), il existe une unique fonction  $u$  de régularité:  $u \in W^{1,\infty}(0,T; X)$ , vérifiant*

$$(I.3.29) \quad \dot{u}(t) + Au(t) \ni f(t) \quad p.p. t \in ]0,T[,$$

$$(I.3.30) \quad u(0) = u_0.$$

L'énoncé et la démonstration de ce théorème figurent dans [14] p.32.

### 3.4 Lemmes de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [56, 96]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

**Lemme I.3.23.** *Soient  $m, n \in C([0,T]; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0,T]$ ,  $a \geq 0$  une constante, et  $\psi \in C([0,T]; \mathbb{R})$ .*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp\left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds.$$

Dans le cas particulier  $m = 0$ , la partie (1) de ce lemme devient :

**Corollaire I.3.24.** Soit  $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire I.3.24 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par  $\psi$  la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer  $\psi$  sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction  $n \geq 0$ . L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de  $\psi$ .

**Lemme I.3.25.** Soient  $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0, n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$  et  $a \geq 0$ . Soit également  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq \left( a + \int_0^s m(t) dt \right) e^{\int_0^s n(t) dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier  $n = 0$ , le Lemme I.3.12 devient :

**Corollaire I.3.26.** *Soit  $m \in C([0,T],\mathbb{R})$  tel que  $m(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,T]$  et soit  $a \geq 0$ .  
Soit également  $\phi : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t) dt \quad \forall s \in [0,T].$$

*Alors,*

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t) dt \quad \forall s \in [0,T].$$

## Chapitre 4

# Traitement numérique du contact avec frottement

Ce chapitre concerne la formulation numérique pour résoudre les problèmes de contact, assez classique, entre un solide déformable et un obstacle rigide dans le cas de petites déformations pour limiter la difficulté et se concentrer sur la non linéarité matérielle de contact plutôt que géométrique. Ces problèmes nécessitent une discrétisation spatiale par éléments finis, une discrétisation en temps par différences finis (pour les problèmes de type évolution). Le traitement numérique du contact est réalisé à partir d'une formulation de type Lagrangien augmenté. On se réfère dans ce qui suit notamment à Alart [2] et Alart-Curnier [3, 4].

Pour un solide élastique libre soumis à des forces conservatives, le principe des travaux virtuels n'est rien d'autre que la variation de son énergie potentielle. Plus précisément, si  $\Pi(\mathbf{v})$  représente l'énergie de déformation élastique du corps  $\Omega$ , alors l'équilibre mécanique, en l'absence de contact, s'écrit :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \Pi(\mathbf{v}) \iff \Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}.$$

Si  $\Pi(\mathbf{v})$  est différentiable, alors la condition nécessaire pour l'équilibre mécanique du corps est :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) = 0,$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient. Si de plus,  $\Pi(\mathbf{v})$  est convexe, cette condition devient aussi suffisante pour atteindre un minimum.

## 4.1 Méthodes basées sur le Lagrangien augmenté

La méthode de Lagrangien augmenté a été développée à l'origine par Hestenes [52] et Powell [88] pour les problèmes de minimisation avec contraintes d'égalités et par Rockafellar pour des problèmes avec des contraintes d'inégalités convexes. Alart et Curnier [4] d'une part, De Saxce et Feng [34] d'autre part, et Simo et Laursen [95] étaient les premiers à utiliser cette méthode pour les problèmes de contact avec frottement. Cette méthode présente l'avantage d'éviter la mauvais conditionnement pour des valeurs élevées du coefficient de pénalisation. Un autre avantage de cette méthode est de permettre de résoudre le problème de contact sans approximation. Mais elle introduit de nouvelles variables, les multiplicateurs de Lagrange, donc de nouvelles équations. Dans les trois sections suivantes, nous présentons les formulations du problème de contact avec frottement basées sur l'approche du Lagrangien augmenté en commençant d'abord par le cas simple du contact unilatéral.

### 4.1.1 Cas du contact unilatéral

La formulation variationnelle des problèmes de contact entre un solide élastique et un fondation est basée sur des fonctionnelles non-différentiables des lois de contact (unilatéral, frottement pur et contact avec frottement). Pour un contact unilatéral, l'équilibre mécanique est obtenu en ajoutant un pseudo-potential de contact à l'énergie de déformation  $\Pi(\mathbf{v})$  du solide :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_3} \Psi_{\mathbb{R}^+}[g_\nu] \right\},$$

où  $\Psi_C[x]$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$ , i.e.

$$\Psi_C[x] = \begin{cases} 0 & x \in C, \\ \infty & x \notin C. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^+$  le cône positif de  $\mathbb{R}$  et  $g_\nu$  représente la distance normale de contact vérifiant la loi de contact unilatéral suivante :

$$g_\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu g_\nu = 0.$$

Le problème du contact unilatéral peut être formulé comme un problème d'optimisation convexe sous contraintes :

$$(I.4.1) \quad \min_{\substack{\mathbf{v} \\ g_\nu \in \mathbb{R}^+}} \{ \Pi(\mathbf{v}) \}.$$

La première étape pour résoudre le problème est d'introduire le Lagrangien ordinaire  $L$  de la forme :

$$(I.4.2) \quad L(\mathbf{v}, \gamma_\nu) = \Pi(\mathbf{v}) + (g_\nu, \gamma_\nu),$$

où  $(\cdot, \cdot)$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}$  et  $\gamma_\nu$  est le multiplicateur de Lagrange. Le problème primal de minimisation sous contrainte inégalité non linéaire est alors remplacé par un problème de min-max mixte sous contrainte inégalité duale linéaire :

$$(I.4.3) \quad \min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma_\nu \in \mathbb{R}^-} \{L(\mathbf{v}, \gamma_\nu)\}.$$

La deuxième étape consiste à ajouter au Lagrangien ordinaire un terme de pénalité afin de décontraindre le problème. Le résultat est le Lagrangien augmenté  $L_r$  [3] :

$$(I.4.4) \quad L_r(\mathbf{v}, \gamma_\nu) = L(\mathbf{v}, \gamma_\nu) + \frac{r}{2} \|g_\nu(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2(\gamma_\nu + r g_\nu(\mathbf{v}), \mathbb{R}^-),$$

où  $r > 0$  est un paramètre de pénalisation et  $\text{dist}(x, \mathcal{C})$  est la distance de  $x$  à  $\mathcal{C}$ .

Le problème de min-max associé au Lagrangien augmenté n'est pas contraint :

$$(I.4.5) \quad \min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma_\nu} \{L_r(\mathbf{v}, \gamma_\nu)\}.$$

De plus, la fonctionnelle  $L_r(\mathbf{v}, \gamma_\nu)$  est différentiable en  $\mathbf{v}$  et en  $\gamma_\nu$ . Le point selle  $(\mathbf{u}, \lambda_\nu)$  vérifie les conditions d'optimalité de premier ordre :

$$(I.4.6) \quad \nabla_{\mathbf{u}, \lambda_\nu} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu) = \mathbf{0}.$$

En utilisant (I.4.2) et (I.4.4), on déduit donc les gradients :

$$(I.4.7) \quad \nabla_{\mathbf{u}} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu) = \nabla_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) + [\nabla_{\mathbf{u}} g_\nu(\mathbf{u})]^T P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) = \mathbf{0},$$

$$(I.4.8) \quad \nabla_{\lambda_\nu} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu) = -\frac{1}{r} \{\lambda_\nu - P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u}))\} = 0,$$

où  $P_{\mathbb{R}^-}$  est la projection sur  $\mathbb{R}^-$ .

En adoptant une forme vectorielle, on obtient alors le système suivant :

$$(I.4.9) \quad G(\mathbf{u}) + F_e(\mathbf{u}, \lambda_\nu) = \mathbf{0},$$

avec

$$(I.4.10) \quad G(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} \Pi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_e(\mathbf{u}, \lambda_\nu) = \begin{bmatrix} [\nabla_{\mathbf{u}} g_\nu(\mathbf{u})]^T P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) \\ -\frac{1}{r} \{\lambda_\nu - P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u}))\} \end{bmatrix}.$$

### 4.1.2 Cas du frottement pur

Pour les problèmes avec frottement pur (à pression constante), on ajoute au accroissement d'énergie de déformation élastique du corps un potentiel de frottement  $I_{C^p}^*(\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}))$  :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_3} \Psi_C^*[\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})] \right\},$$

où  $\Psi_C^*[\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})]$  est le conjuguée, selon Fenchel, de la fonction indicatrice  $\Psi_C[\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})]$  du disque convexe  $C[\sigma_\nu]$  de rayon fixe  $-\mu\sigma_\nu$ . La distance tangentielle  $\mathbf{g}_\tau$  vérifie la loi statique de frottement suivante :

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| + \mu\sigma_\nu \leq 0, \quad \mathbf{g}_\tau = \|\mathbf{g}_\tau\| \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|}, \quad \|\mathbf{g}_\tau\|(\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| + \mu\sigma_\nu) = 0.$$

La solution du problème est caractérisée par des inéquations variationnelles.

Le problème de frottement pur peut être traité de la même manière que celui du contact unilatéral en remplaçant  $g_\nu(\mathbf{v})$  par  $\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})$ ,  $\gamma_\nu$  par  $\boldsymbol{\gamma}_\tau$  et  $\mathbb{R}^-$  par  $C$ . Le Lagrangien augmenté associé au problème est [3] :

$$(I.4.11) \quad \begin{aligned} L_r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}_\tau) = & \Pi(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_\tau + \frac{r}{2} \|\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})\|^2 \\ & - \frac{1}{2r} \operatorname{dist}^2 \{ \boldsymbol{\gamma}_\tau + r\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}), C[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{v})] \}. \end{aligned}$$

L'opérateur de frottement  $F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_\tau)$  dérivant de ce Lagrangien augmenté est :

$$(I.4.12) \quad F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \begin{bmatrix} [\nabla \mathbf{u} \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})]^T \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r\mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) \\ -\frac{1}{r} \{ \boldsymbol{\lambda}_\tau - \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r\mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) \} \end{bmatrix}.$$

### 4.1.3 Cas du contact avec frottement

Le contact avec frottement est un couplage du contact unilatéral et du frottement pur. La fonctionnelle associée est la somme des deux pseudo-potentiels (contact unilatéral et frottement pur) et de l'énergie totale de déformation élastique du corps :

$$(I.4.13) \quad \mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_3} \Psi_{\mathbb{R}^+}[g_\nu(\mathbf{v})] + \int_{\Gamma_3} \Psi_{C[\sigma_\nu(\mathbf{u})]}^*[\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})] \right\}.$$

On peut remarquer que ce problème n'est pas standard dans le sens où la minimisation dépend de la solution. En effet, le disque de Coulomb  $C$  dépend de la solution  $\mathbf{u}$ . Pour cette raison, on dira par la suite que le problème (I.4.13) est un problème *quasi-variationnel*. Il peut s'écrire sous la forme d'un problème min-max obtenu via un Lagrangien ou plutôt un *quasi-Lagrangien* ( $(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau)$  est la solution recherchée),

$$(I.4.14) \quad L(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma_\nu \in \mathbb{R}^-} \max_{\boldsymbol{\gamma}_\tau \in C[\sigma_\nu(\mathbf{u})]} L(\mathbf{v}, \gamma_\nu, \boldsymbol{\gamma}_\tau),$$

où

$$(I.4.15) \quad L(\mathbf{v}, \gamma_\nu, \boldsymbol{\gamma}_\tau) = \Pi(\mathbf{v}) + (g_\nu(\mathbf{v}), \gamma_\nu) + \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_\tau.$$

Les variables  $\gamma_\nu$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\tau$  interviennent comme multiplicateurs associés aux contraintes de contact et frottement. On peut remarquer que ces contraintes ont été ainsi transférées des variables primales  $g_\nu$  et  $\mathbf{g}_\tau$  aux multiplicateurs  $\gamma_\nu$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\tau$  (variables duales). On peut également identifier ces multiplicateurs aux composantes normale et tangentielle des efforts de contact, représentés alors par le champ  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\lambda}_\tau$  ( $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\gamma}_\tau$  pour les champs tests).

Alart et Curnier [4] ont suggéré un quasi-Lagrangien augmenté sous la forme suivante :

$$(I.4.16) \quad \begin{aligned} L_r(\mathbf{v}, \gamma_\nu, \boldsymbol{\gamma}_\tau) = & L(\mathbf{v}, \gamma_\nu, \boldsymbol{\gamma}_\tau) \\ & + \frac{r}{2} \|g_\nu\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2\{\gamma_\nu + r g_\nu(\mathbf{v}), \mathbb{R}^-\} + \frac{r}{2} \|\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})\|^2 \\ & - \frac{1}{2r} \text{dist}^2\{\boldsymbol{\gamma}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}), \hat{C}[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})]\}, \end{aligned}$$

où  $\hat{C}[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})] := C\{\text{proj}_{\mathbb{R}^-}[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})]\}$ . Ils ont postulé pour une forme particulière du quasi-Lagrangien en remplaçant  $C[\sigma_\nu(\mathbf{u})]$  par  $\hat{C}[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})]$ . Le problème dual correspondant est alors :

$$(I.4.17) \quad \min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma_\nu} \max_{\boldsymbol{\gamma}_\tau} L_r(\mathbf{v}, \gamma_\nu, \boldsymbol{\gamma}_\tau).$$

Une solution  $(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau)$  à ce problème dual satisfait les conditions d'optimalité de premier ordre :

$$(I.4.18) \quad \nabla_{\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \mathbf{0}.$$

On pourra notamment se référer à [3] pour les questions d'existence et d'unicité du problème (I.4.17).

En utilisant (I.4.15)–(I.4.16), on déduit donc les gradients :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{u}} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \nabla_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) + [\nabla_{\mathbf{u}} g_\nu(\mathbf{u})]^T P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) \\ \quad + [\nabla_{\mathbf{u}} g_\tau(\mathbf{u})]^T \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\lambda_\nu} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = -\frac{1}{r} \{ \lambda_\nu - P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) \} = 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}_\tau} L_r(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = -\frac{1}{r} \{ \boldsymbol{\lambda}_\tau - \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) \} = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

où  $\hat{P}$  est la projection sur le disque  $\hat{C}[\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})]$ .

En adoptant une forme vectorielle, on obtient alors le système suivant :

$$(I.4.19) \quad G(\mathbf{u}) + F_e(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \mathbf{0},$$

avec

$$G(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} \Pi \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

(I.4.20)

$$F_e(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \begin{bmatrix} [\nabla_{\mathbf{u}} g_\nu(\mathbf{u})]^T P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) + [\nabla_{\mathbf{u}} g_\tau(\mathbf{u})]^T \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) \\ -\frac{1}{r} \{ \lambda_\nu - P_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u})) \} \\ -\frac{1}{r} \{ \boldsymbol{\lambda}_\tau - \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u})) \} \end{bmatrix}.$$

**Remarque.** La méthode de pénalité peut être obtenue à partir de la formule (I.4.16) en prenant les multiplicateurs de Lagrange  $\gamma_\nu = 0$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\tau = \mathbf{0}$ , ce qui produit la fonctionnelle pénalisée non-contrainte :

$$(I.4.21) \quad \bar{\Pi}(\mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{v}) + \Psi_{\mathbb{R}^+} \nabla \frac{r}{2} \|g_\nu(\mathbf{v})\|^2 + \Psi_{\hat{C}[r g_\nu(\mathbf{u})]}^* \nabla \frac{r}{2} \|\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})\|^2.$$

où  $r$  est le coefficient de pénalisation, sa valeur étant relativement grande par rapport au rigidité de solide en contact. On utilise pour cela un petit résultat d'analyse convexe qui dit que :

*si  $f : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une fonction convexe et semi-continue inférieurement alors  $f \nabla \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$  est de classe  $C^1$  et*

$$\text{a) } \nabla(f \nabla \frac{1}{2} \|\cdot\|^2)(x) = \text{prox}_{f^*}(x),$$

$$\text{b) } (f \nabla \frac{1}{2} \|\cdot\|^2) + (f^* \nabla \frac{1}{2} \|\cdot\|^2) = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2,$$

où  $f^*$  est la fonction conjuguée de  $f$  et  $\text{prox}_{f^*}(x)$  est le point proximal de  $x$  associée à  $f^*$ , c'est l'unique solution du problème  $\inf_z \{f(z) + \frac{1}{2}\|z - x\|^2\}$ .

La méthode de pénalité permet une légère pénétration  $g_\nu$  proportionnelle à la compression  $\sigma_\nu$  dans la direction normale et un micro-glissement proportionnel au cisaillement dans la direction tangentielle. Ainsi les lois de contact unilatéral et de glissement sont remplacées par des lois pénalisées (voir les figures I.1.2 et I.1.3). Cette méthode correspond donc à une régularisation de la loi de Signorini, ce qui revient en quelque sorte à la loi de compliance normale et aussi à une régularisation de la loi de frottement de Coulomb.

Le principal inconvénient de la méthode de pénalité réside dans le fait que les conditions de contact de Signorini ne sont pas correctement vérifiées, car la pénétration des solides en contact est possible. Seules des valeurs très élevées du coefficient de pénalisation normal  $r$  assurent le respect de la condition d'impénétrabilité, mais au prix d'un mauvais conditionnement du problème et d'instabilités numériques. Parmi les avantages de la méthode de pénalité, nous pouvons notamment mentionner la facilité de mise en oeuvre et l'absence d'inconnues supplémentaires.

## 4.2 Cinématique d'un contact discret

En analogie avec les éléments finis pour la discrétisation des corps déformables, on introduit la notion d'éléments finis de contact destinés à discrétiser l'interface de contact. Cet élément de contact est utilisé pour traduire le comportement de l'interface de contact. Dans la lignée d'éléments contacts développés dans nombre de codes industriels, Alart et Curnier [3] ont étendu la notion d'élément fini mixte pour créer le concept d'élément fini de contact frottant, en fournissant une contribution élémentaire en terme de forces de contact généralisées et de matrices tangentes associées. Ce choix suppose l'utilisation d'une méthode de Newton comme solveur non linéaire, dont la formulation et la justification seront données plus loin.

Considérons un corps susceptible d'entrer en contact avec une fondation, dans sa configuration de référence. Le corps  $\Omega$  est discrétisé en  $N^h$  éléments finis reliés entre eux par  $N^{tot}$  noeuds. La surface discrète de contact entre le corps et la fondation est

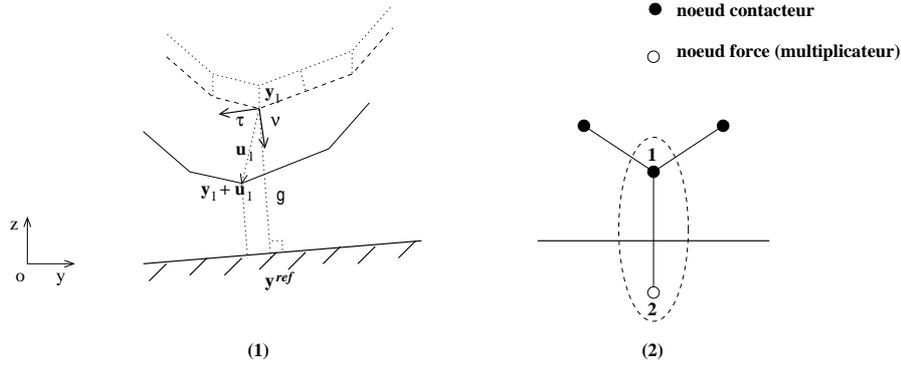


FIG. I.4.1 – Description Géométrique de l'interface corps déformable/corps rigide (1) et Élément “noeud à rigide” (2).

constituée par l'ensemble de noeuds d'une surface  $\Gamma \in \partial\Omega$ . Un élément de contact est défini par un noeud de  $\Gamma$  et un noeud fictif correspondant sur la fondation.

Dans le cas des petits glissements ou des petites déformations, c'est-à-dire que si une correspondance biunivoque entre les noeuds au niveau de la surface de contact est maintenue pendant la période de contact, la géométrie de l'élément de contact du type “noeud à rigide” est adéquate. Cet élément est présenté par un élément fini barre constitué d'un noeud 1, appartenant au corps déformable et d'un noeud multiplicateur ou fictif, numéroté 2, dont les degrés de liberté contiennent les multiplicateurs ou forces de contact issus de la méthode quasi-Lagrangien augmenté de type pénalité-dualité (voir la figure I.4.1 (2)). La position de ce noeud est arbitraire. Dans le cas d'une méthode standard de pénalité, ce noeud fictif ne joue aucun rôle.

On note  $\mathbf{u}^e$  (ou plus simplement  $\mathbf{u}$  pour alléger les notations) le vecteur des déplacements générales du  $e^{ième}$  élément et  $\boldsymbol{\lambda}^{ième}$  les forces de contact généralisées.

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{u}_q^e \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\lambda}^{ième} = \mathbf{u}_{q+1}^e = \boldsymbol{\lambda}.$$

La distance de contact discrète  $g$  est définie par

$$g = \mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}^{ref}.$$

où  $\mathbf{y}_1$  la position de la particule dans la configuration de référence et la notion  $\mathbf{y}^{ref}$  représente la projection orthogonale de la position du noeud 1 sur la surface cible (voir la figure I.4.1 (1)).

La définition de l'écart normal sur l' $i^{\text{ème}}$  élément prend ainsi la forme suivante :

$$(I.4.22) \quad g_\nu = \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}^{ref}).$$

L'incrément de glissement tangentiel s'exprime par

$$(I.4.23) \quad \mathbf{g}_\tau = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T) (\mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}^{ref}).$$

Afin de déterminer l'opérateur (I.4.20), il convient d'évaluer les grandeurs  $\nabla \mathbf{u} g_\nu$  et  $\nabla \mathbf{u} \mathbf{g}_\tau$ . Pour ce cas simplifié de contact, nous avons

$$(I.4.24) \quad \nabla \mathbf{u} g_\nu = \boldsymbol{\nu}^T \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{u} \mathbf{g}_\tau = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)^T = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T.$$

Il est utile à ce stade d'introduire ce qu'Alart et Curnier appellent des multiplicateurs augmentés en référence à la formulation quasi-Lagrangien augmenté,

$$(I.4.25) \quad \begin{aligned} \sigma_\nu^e = \sigma_\nu = \lambda_\nu + r g_\nu(\mathbf{u}) & \quad ; & \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^e = \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_\tau. & \end{aligned}$$

Une fois les grandeurs discrètes établies, nous pouvons caractériser l'opérateur élémentaire de contact. Comme cela a déjà été évoqué, cet opérateur peut se définir par analogie avec le vecteur des forces internes généralisées pour un élément fini solide ; il représente ainsi les forces de contact généralisées sur l'élément fini de contact introduit un peu plus haut. Cet opérateur élémentaire de contact (I.4.20) peut se formuler en fonction des différents statuts de contact frottant en évaluant les projections  $P_{R^-}(\sigma_\nu)$  et  $P_{\hat{C}[\mathbf{u}]}(\boldsymbol{\sigma}_\tau)$  selon les cas :

$$(I.4.26) \quad P_{R^-}(\sigma_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_\nu > 0, \text{ non contact,} \\ \sigma_\nu & \text{si } \sigma_\nu \leq 0, \text{ contact.} \end{cases}$$

$$(I.4.27) \quad P_{\hat{C}[\mathbf{u}]}(\boldsymbol{\sigma}_\tau) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si non contact,} \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau & \text{si } \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq -\mu\sigma_\nu, \text{ adhérence,} \\ -\epsilon\mu\sigma_\nu \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|} & \text{si } \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| > -\mu\sigma_\nu, \text{ glissement.} \end{cases}$$

Rappelons que  $\hat{C}[\mathbf{u}] = C[P_{R^-}(\sigma_\nu)]$ . La quantité  $\frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|}$  n'est rien que le vecteur tangentiel unité de glissement ( $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|}$ ).

- **Cas de contact sans frottement**

En utilisant les formules (I.4.26)–(I.4.27), l'opérateur de contact élémentaire (I.4.10) est alors donné (en considérant  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_\nu \boldsymbol{\nu}$ ) :

$$F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \lambda_\nu \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} & \text{si } \sigma_\nu > 0, \text{ non contact,} \\ \begin{bmatrix} \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} \\ -\frac{1}{r} (\lambda_\nu - \sigma_\nu) \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} & \text{si } \sigma_\nu \leq 0, \text{ contact.} \end{cases}$$

Dans la perspective d'utiliser une méthode de Newton, il nous faut calculer la matrice tangente élémentaire de  $F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ , que l'on notera  $\mathbf{T}_e$  et qui prend la forme :

$$(I.4.28) \quad \mathbf{T}_e = \nabla_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}} F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} r\mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \frac{1}{r}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{M}$  représente une matrice bloc  $2 \times 2$ , qui, selon les statuts de contact, peut prendre la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{cas non contact,} \\ \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T & \text{cas contact.} \end{cases}$$

• **Cas de contact avec frottement**

Le calcul de l'opérateur élémentaire de contact (I.4.20) à partir des expressions (I.4.26)–(I.4.27) donne :

$$F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F_e(\mathbf{u}, \lambda_\nu \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} & \text{si } \sigma_\nu > 0, \text{ non contact,} \\ \begin{bmatrix} \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ -\frac{1}{r} (\boldsymbol{\lambda} - (\sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_\tau)) \end{bmatrix} & \text{si } \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq -\mu \sigma_\nu, \text{ adhérence,} \\ \begin{bmatrix} \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} - \epsilon \mu \sigma_\nu \boldsymbol{\tau} \\ -\frac{1}{r} (\boldsymbol{\lambda} - \sigma_\nu (\boldsymbol{\nu} - \epsilon \mu \boldsymbol{\tau})) \end{bmatrix} & \text{si } \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| > -\mu \sigma_\nu, \text{ glissement.} \end{cases}$$

La matrice tangente élémentaire  $\mathbf{T}_e$ , associée à cet opérateur, est de la forme :

$$(I.4.29) \quad \mathbf{T}_e = \nabla_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}} F_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} r\mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \frac{1}{r}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{M}$  représente une matrice bloc  $2 \times 2$ , elle se distingue par plusieurs statuts correspondant au contact avec frottement :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{statut non contact,} \\ \mathbf{I} & \text{statut adhérence,} \\ (\boldsymbol{\nu} - \epsilon \mu \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\nu}^T & \text{statut glissement.} \end{cases}$$

Deuxième partie  
Problèmes statiques



## Partie II

### Problèmes statiques

La deuxième partie de ce mémoire propose certaines innovations et prolongements de travaux pour des problèmes statiques de contact avec frottement entre un corps électro-élastique et une fondation isolatrice. Cette partie est composée de deux chapitres.

Dans le premier chapitre nous commençons par un problème de contact bilatéral entre un corps électro-élastique et une fondation rigide, le frottement est modélisé par la loi de frottement de Tresca. L'objectif est d'une part d'examiner l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel correspondant et d'autre part de présenter une formulation duale du problème en donnant un résultat d'équivalence entre les deux précédentes formulations variationnelles.

Dans le deuxième chapitre nous décrivons un problème mécanique de contact entre un corps électro-élastique et une fondation ; le contact est modélisé par une condition de compliance normale et la frottement associée est de type de Coulomb. On y donne, après avoir posé notre problème, une formulation variationnelle. On y établit ensuite un résultat d'existence et d'unicité pour ce problème et on y démontre aussi un résultat de dépendance de la solution par rapport aux fonctions de compliance.



# Chapitre 1

## Problème électro-élastique de contact bilatéral avec frottement de Tresca

Nous considérons ici un problème statique modélisant le contact entre un corps de loi constitutive électro-élastique non linéaire et un obstacle assimilé à une fondation. Le contact est bilatéral et frottant ; il est décrit à l'aide de la loi de frottement de Tresca, dans laquelle le seuil de frottement est fixe. Le chapitre est structuré de la manière suivante. Dans le premier paragraphe nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Dans le deuxième paragraphe nous énonçons et nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité. La démonstration est basée sur un résultat abstrait pour les inéquations variationnelles. Enfin, le troisième paragraphe est consacré à l'étude de la formulation duale de ce problème. Une partie de ce chapitre a fait l'objet de l'article [82].

### 1.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la figure I.1.1 p.6. On considère que le corps est électro-élastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (I.1.19). En ce qui concerne le contact, on le modélise par une condition de contact bilatéral avec frottement de Tresca.

Sous ces considérations, le problème électro-mécanique qu'on étudie peut se formuler de la manière suivante.

**Problème  $P_1$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que le champ des*

déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que

$$(II.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.1.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.1.3) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.1.4) \quad \text{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.1.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$(II.1.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

$$(II.1.7) \quad \begin{cases} u_\nu = 0, & \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq S, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -S \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} & \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(II.1.8) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a,$$

$$(II.1.9) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b.$$

Rappelons que les équations (II.1.1) et (II.1.2) représentent la loi constitutive électro-élastique, les équations (II.1.3) et (II.1.4) représentent les équations d'équilibre, tandis que les conditions (II.1.5) et (II.1.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions. La condition (II.1.7) représente les conditions de contact bilatéral avec frottement de Tresca où  $S$  représente le seuil de frottement, supposé fixe. Pour plus de précisions sur ce type de conditions de contact, nous renvoyons à la section I.1.3 p.13. Et, pour finir, (II.1.8) et (II.1.9) représentent les conditions aux limites électriques.

Nous allons fournir les hypothèses avec les quelles nous travaillons par la suite. Pour toutes les notations, nous renvoyons le lecteur à la partie I.2.2 p.24, notamment en ce qui concerne le choix des espaces  $V$  et  $W$  et des normes sur ces espaces.

Nous supposons que l'opérateur *d'élasticité*  $\mathcal{F}$  satisfait les propriétés suivantes :

$$(II.1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) il existe } M_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq M_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) } \mathcal{F}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable Lebesgue dans } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) } \mathcal{F}(\cdot, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

Le tenseur *piézoélectrique* (de couplage)  $\mathcal{E}$  vérifie

$$(II.1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

Le tenseur *diélectrique*  $\boldsymbol{\beta}$  vérifie

$$(II.1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \beta_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) } \beta_{ij} = \beta_{ji}. \\ \text{(d) il existe } m_{\boldsymbol{\beta}} > 0 \text{ telle que } \beta_{ij}(\mathbf{x}) E_i E_j \geq m_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

On suppose que le *seuil de frottement*  $S$  est tel que

$$(II.1.13) \quad S \in L^\infty(\Gamma_3), \quad S \geq 0,$$

et que les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$(II.1.14) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

De même, la densité volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  satisfont

$$(II.1.15) \quad q_0 \in L^2(\Omega), \quad q_2 \in L^2(\Gamma_b), \quad q_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3.$$

La dernière partie de ces conditions,  $q_2 = 0$  sur  $\Gamma_3$ , représente une condition de compatibilité qui est nécessaire parce que la base est censée être isolatrice.

Afin de prendre en considération la condition de contact sur  $\Gamma_3$ , partout dans ce chapitre, nous travaillons avec l'espace

$$(II.1.16) \quad V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

Par simplicité, nous utilisons la notation  $V$ . L'espace  $V$  sera muni du produit scalaire habituel donné par (I.2.5) et de la norme (I.2.6).

Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence de deux éléments  $\mathbf{f} \in V$  et  $q \in W$  tels que :

$$(II.1.17) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.1.18) \quad (q, \psi)_W = \int_{\Omega} q_0 \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \psi \, da \quad \forall \psi \in W.$$

Les conditions (II.1.14) et (II.1.15) impliquent

$$(II.1.19) \quad \mathbf{f} \in V, \quad q \in W.$$

Soit  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle

$$(II.1.20) \quad h(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} S \|\mathbf{v}_\tau\| \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Les conditions (II.1.13) entraînent que l'intégrale dans (II.1.20) est bien définie.

Si  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  sont des fonctions régulières qui satisfont (II.1.3)–(II.1.9), alors  $\mathbf{u} \in V$ ,  $\varphi \in W$ . En utilisant la formule de Green, on déduit

$$(II.1.21) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.1.22) \quad (\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W.$$

En mettant (II.1.1) dans (II.1.21) puis (II.1.2) dans (II.1.22) et du fait que  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème  $P_1$  en deux inconnues : le déplacement mécanique et le potentiel électrique.

**Problème  $P_1^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} \in V$  et le potentiel électrique  $\varphi \in W$  tels que*

$$(II.1.23) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.1.24) \quad (\boldsymbol{\beta} \nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

## 1.2 Existence et unicité de la solution

Dans ce paragraphe nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité de la solution  $(\mathbf{u}, \varphi)$  du problème  $P_1^V$  c'est-à-dire l'existence d'une solution faible unique du problème mécanique  $P_1$ . Notre résultat est le suivant.

**Théorème II.1.1.** *On considère les hypothèses (II.1.10)–(II.1.15). Alors, le problème  $P_1^V$  possède une solution unique  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$  qui est une fonction lipschitzienne de  $\mathbf{f} \in V$  et  $q \in W$ .*

La démonstration du théorème II.1.1 est obtenue en plusieurs étapes en s'appuyant sur le résultat abstrait mis en évidence dans l'étude d'une classe d'inéquations variationnelles elliptique (voir théorème I.3.13 p.36). On suppose dans la suite que les hypothèses (II.1.10)–(II.1.15) sont vérifiées.

On introduit à présent l'espace  $X = V \times W$  la structure hilbertienne produit définie par

$$(II.1.25) \quad (x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W$$

pour tout  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  et  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in X$ . La norme associée sera notée par  $\|\cdot\|_X$ .

On définit l'opérateur  $A : X \rightarrow X$  par l'égalité

$$(II.1.26) \quad (Ax, y)_X = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d}$$

pour tout  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  et  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in X$ .

Et notons par  $j$  le prolongement de la fonctionnelle  $h$  définie par (II.1.20) sur  $X$ . Ceci se traduit par

$$(II.1.27) \quad j(x) = h(\mathbf{u}) \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X.$$

Finalement, nous notons par  $f$  l'élément de  $X$  donné par

$$(II.1.28) \quad f = (\mathbf{f}, q) \in X.$$

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer le résultat suivant :

**Lemme II.1.2.** *Le couple  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du problème variationnel  $P_1^V$  si et seulement si*

$$(II.1.29) \quad (Ax, y - x)_X + j(y) - j(x) \geq (f, y - x)_X \quad \forall y \in X.$$

**Démonstration.** Soit  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  une solution du problème  $P_1^V$  et soit  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in Y$ . En prenant  $\mathbf{v} = \psi - \varphi$  dans (II.1.23); en additionnant l'inégalité obtenue avec (II.1.24) et en utilisant (II.1.25)–(II.1.28) nous obtenons (II.1.29). Inversement, soit  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  une solution de l'inéquation variationnelle elliptique (II.1.29). En appliquant maintenant (II.1.29) pour  $y = (\mathbf{v}, \varphi)$ , où  $\mathbf{v}$  est un élément arbitraire de  $V$ , on obtient (II.1.23). À partir de (II.1.29) appliquée pour  $y = (\mathbf{v}, \varphi + \psi)$  puis pour  $y = (\mathbf{v}, \varphi - \psi)$ , où  $\psi$  est un élément arbitraire de  $W$  et en faisant la différence entre les deux expressions obtenues, on obtient (II.1.24), ce qui termine la preuve du Lemme II.1.2.  $\square$

L'étape suivante consiste à explorer les propriétés de l'opérateur  $A$ :

**Lemme II.1.3.** *L'opérateur  $A$  défini par (II.1.26) est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

**Démonstration.** Soient à présent  $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1)$ ,  $x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$ . On obtient alors de (II.1.26)

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = & \\ (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_1 - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d} + & \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}. & \end{aligned}$$

Sachant d'autre par que  $(\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d}$  pour tout  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$ , (voir (I.1.20)), il s'en suit que

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = & \\ (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_1 - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}. & \end{aligned}$$

Compte tenu du (II.1.10), (II.1.12) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (voir I.2.8), il existe  $c_1 > 0$  ne dépendant que de  $\mathcal{F}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq c_1 (\|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2),$$

et, gardant à l'esprit (II.1.25), nous trouvons

$$(II.1.30) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq c_1 \|x_1 - x_2\|_X^2.$$

En utilisant maintenant (II.1.10)–(II.1.12), après quelques calculs, il résulte l'existence d'une constante  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $\mathcal{F}$ ,  $\beta$  et  $\mathcal{E}$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq c_2 (\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V \\ + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W)$$

pour tout  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in V$ . Cette inégalité devient alors en utilisant (II.1.25)

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq 4c_2 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_V \quad \forall y \in X$$

et en prenant  $y = Ax_1 - Ax_2 \in X$  dans l'inégalité précédente, on obtient

$$(II.1.31) \quad \|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq 4c_2 \|x_1 - x_2\|_X.$$

Le lemme II.1.3 est à présent une conséquence de (II.1.30) et (II.1.31).  $\square$

Maintenant nous étudions les propriétés de la fonctionnelle  $j$  donnée par (II.1.27), (II.1.20).

**Lemme II.1.4.** *La fonctionnelle  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et continue.*

**Démonstration.** Il est immédiat que  $j$  est une fonctionnelle convexe sur  $X$ . Prenons  $\{x_n\} = \{(\mathbf{u}_n, \varphi_n)\} \subset X$  une suite vérifiant  $x_n \rightarrow x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$ . Nous obtenons  $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$  dans  $L^2(\Gamma_3)^d$ , ce qui implique

$$(II.1.32) \quad \|\mathbf{u}_{n\tau}\| \rightarrow \|\mathbf{u}_\tau\| \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3).$$

Enfin, de la définition de  $j$  et de (II.1.32) nous déduisons que  $j(x_n) \rightarrow j(x)$  quand  $n \rightarrow \infty$  et le lemme II.1.4 est ainsi démontré.  $\square$

Après tous ces résultats intermédiaires, on est à présent en mesure de donner la démonstration du théorème II.1.1.

**Démonstration du théorème II.1.1.** Compte tenu des lemmes II.1.2 et II.1.3, le problème variationnel (II.1.29) admet une solution unique  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$ , assurée par le théorème I.3.13 p.36 ; et en utilisant le lemme II.1.1, il résulte que  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$  est une solution unique du problème  $P_1^V$ . En outre, cette solution est une fonction lipschitzienne de  $\mathbf{f} \in V$  et  $q \in W$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Un “quadruplet”  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  qui satisfait aux relations (II.1.23), (II.1.24) s'appelle *solution faible* du problème (II.1.1)–(II.1.9). Nous concluons par le théorème II.1.1

que le problème  $P_1$  admet une solution unique. En ce qui concerne la régularité de la solution faible, il suffit de référer à la régularité de l'élément  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ , à la loi constitutive (II.1.1)–(II.1.2) et aux hypothèses (II.1.10)–(II.1.15); nous obtenons alors que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d$ . En prenant maintenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm \mathbf{z}$ , où  $\mathbf{z} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (II.1.21) et  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans (II.1.22) et en utilisant (II.1.3)–(II.1.9) nous trouvons

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{D} = q_0.$$

De (II.1.14) et (II.1.15) il s'en suit que  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$  et  $\text{div } \mathbf{D} \in L^2(\Omega)$  et par conséquent

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1, \quad \mathbf{D} \in \mathcal{W}.$$

### 1.3 Formulation duale du problème

Nous donnons dans cette section une formulation duale du problème  $P_1$ , exprimée en terme de contrainte et de champ des déplacements électriques. Cette formulation faible établie, nous présentons deux résultats dont le premier concerne l'existence et l'unicité d'une solution faible. L'autre est un résultat d'équivalence entre les deux solutions faibles (primale et duale), permettant ainsi de déduire l'existence des solutions faibles l'une par rapport à l'autre. Partout dans la suite  $c$  représentera une constante positive dont sa valeur pourra changer de ligne en ligne.

Pour définir la formulation duale du problème  $P_1$ , on considère l'espace de Hilbert  $\mathbb{Y} = \mathcal{H} \times L^2(\Omega)^d$ , muni de produit scalaire donné par

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{Y}} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}), \mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbb{Y}$$

et soit  $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$  la norme associée, i.e.

$$(II.1.33) \quad \|\mathbf{y}\|_{\mathbb{Y}} = (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathbf{E}\|_{L^2(\Omega)^d}^2)^{1/2} \quad \forall \mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbb{Y}.$$

On définit l'opérateur

$$(II.1.34) \quad \mathbb{T} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}, \quad \mathbb{T}\mathbf{y} = \left( \overbrace{\mathcal{F}\boldsymbol{\tau} + \mathcal{E}^*\mathbf{E}}^{\equiv \mathbb{T}_1\mathbf{y}}, \overbrace{\boldsymbol{\beta}\mathbf{E} - \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}}^{\equiv \mathbb{T}_2\mathbf{y}} \right) \\ = (\mathbb{T}_1\mathbf{y}, \mathbb{T}_2\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbb{Y}.$$

On a le résultat suivant.

**Lemme II.1.5.**  $\mathbb{T}$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

**Démonstration.** Soient  $\mathbf{y}_1 = (\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{E}_1)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{E}_2) \in \mathbb{Y}$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)_{\mathbb{Y}} &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_1 + \mathcal{E}^*\mathbf{E}_1 - \mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_2 - \mathcal{E}^*\mathbf{E}_2, \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_2 - \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_1 + \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\mathbf{E}_1 - \mathcal{E}^*\mathbf{E}_2, \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Sachant d'autre part que  $(\mathcal{E}^*\mathbf{E}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = (\mathbf{E}, \mathcal{E}\boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}$  pour tout  $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbb{Y}$  (voir (I.1.20)), il résulte

$$(\mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)_{\mathbb{Y}} = (\mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)^d}.$$

En gardant à l'esprit les propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\boldsymbol{\beta}$ , il vient à partir de (II.1.33) qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)_{\mathbb{Y}} &\geq m_{\mathcal{F}}\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathcal{H}}^2 + m_{\boldsymbol{\beta}}\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\geq c\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{Y}}^2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\mathbb{T}$  est fortement monotone.

Soit maintenant  $\mathbf{y}_3 = (\boldsymbol{\tau}_3, \mathbf{E}_3) \in \mathbb{Y}$ , on a :

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)_{\mathbb{Y}} &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_2 + \mathcal{E}^*\mathbf{E}_1 - \mathcal{E}^*\mathbf{E}_2, \boldsymbol{\tau}_3)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_2 - \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_1 + \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{E}_3)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{F}\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\mathbf{E}_1 - \mathcal{E}^*\mathbf{E}_2, \boldsymbol{\tau}_3)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)_{L^2(\Omega)^d} + (\mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_1 - \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{E}_3)_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq c\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathcal{H}}\|\boldsymbol{\tau}_3\|_{\mathcal{H}} + c\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{\tau}_3\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + c\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{L^2(\Omega)^d}\|\mathbf{E}_3\|_{L^2(\Omega)^d} + c\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{E}_3\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq c\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{Y}}\|\mathbf{y}_3\|_{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

et en prenant  $\mathbf{y}_3 = \mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2$  dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\mathbb{T}\mathbf{y}_1 - \mathbb{T}\mathbf{y}_2\|_{\mathbb{Y}} \leq c\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{Y}},$$

qui prouve que  $\mathbb{T}$  est Lipschitz. □

Nous pouvons effectuer la remarque suivante.

**Remarque.** Il en résulte d'après la proposition I.3.3 (page 32) que  $\mathbb{T}$  est inversible et son inverse  $\mathbb{T}^{-1}$  est fortement monotone et de Lipschitz. Soient  $\mathbb{T}_1^{-1}, \mathbb{T}_2^{-1}$  ses composantes.

Nous introduisons aussi

$$\Theta = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H} \mid (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V\},$$

qui un ensemble convexe, fermé et non vide de  $\mathcal{H}$ . En effet  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) \in \Theta$ , car

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V + \underbrace{h(\mathbf{v})}_{\geq 0} \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous utilisons également la notation  $\mathfrak{D}$  pour désigner l'ensemble

$$\mathfrak{D} = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^d \mid (\mathbf{E}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W\}.$$

Commençons tout d'abord par un lemme, qui va nous permettre d'introduire la formulation duale du problème  $P_1$ .

**Lemme II.1.6.** *Si  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \varphi)$  est une solution classique du problème  $P_1$ , alors  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  satisfait*

$$(II.1.35) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Theta, \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Theta.$$

$$(II.1.36) \quad -\mathbf{D} \in \mathfrak{D}, \quad (\mathbf{E} + \mathbf{D}, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}.$$

**Démonstration.** En prenant  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  dans (II.1.21), on obtient

$$(II.1.37) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V.$$

En utilisant maintenant (II.1.21) et (II.1.37), nous déduisons que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V \\ &\geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous déduisons que  $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$ .

Soit  $\boldsymbol{\tau} \in \Theta$ , il vient à présent de la relation (II.1.37) que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} &= (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \\ &= (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V \geq 0 \quad (\text{car } \boldsymbol{\tau} \in \Theta). \end{aligned}$$

Ce qui implique que la relation (II.1.35) est vérifiée.

Considérons maintenant l'élément  $\mathbf{E} \in \mathfrak{D}$  et en utilisant la relation (II.1.22), il découle

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} + \mathbf{D}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} &= (\mathbf{E}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{D}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (q, \varphi)_W - (q, \varphi)_W = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique (II.1.36). □

D'après la définition (II.1.34) de  $\mathbb{T}$ , on peut écrire la loi de comportement (II.1.1)–(II.1.2) sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) = \mathbb{T}_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi), \\ -\mathbf{D} &= -\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \beta\mathbf{E}(\varphi) = \mathbb{T}_2(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi), \end{aligned}$$

ou encore

$$(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \mathbb{T}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi).$$

Or  $\mathbb{T}$  est inversible, on a donc

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi) = \mathbb{T}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}),$$

ou encore

$$(II.1.38) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}),$$

$$(II.1.39) \quad \nabla\varphi = \mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}).$$

où  $\mathbb{T}_1^{-1}$  et  $\mathbb{T}_2^{-1}$  représentent les composantes de l'opérateur  $\mathbb{T}^{-1} : L^2(\Omega)^d \times \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)^d \times \mathcal{H}$ .

Ainsi, en remplaçant (II.1.38)–(II.1.39) dans (II.1.35)–(II.1.36), on obtient la formulation duale suivante du problème en termes de  $\boldsymbol{\sigma}$  et de  $\mathbf{D}$ .

**Problème  $P_1^{Vd}$ .** *Trouver le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  et le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d$  tels que*

$$(II.1.40) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Theta, \quad (\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Theta.$$

$$(II.1.41) \quad -\mathbf{D} \in \mathfrak{D}, \quad (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \mathbf{E} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}.$$

Le premier résultat essentiel, que nous démontrons par la suite est le suivant.

**Théorème II.1.7.** *On considère les hypothèses (II.1.10)–(II.1.15). Alors, le problème  $P_1^{Vd}$  possède une solution unique  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{W}$ .*

La démonstration du théorème II.1.7 est basée sur un résultat abstrait mis en évidence dans l'étude d'une classe d'inéquations variationnelles, que nous rappelons au théorème I.3.12 (page 36). Nous commençons tout d'abord par le résultat d'équivalence suivant.

**Lemme II.1.8.** *Le couple  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{W}$  est une solution du problème variationnel  $P_1^{Vd}$  si et seulement si*

$$(II.1.42) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}, \quad (\mathbb{T}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})_{\mathbb{Y}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{S}.$$

$$\text{où } \mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \quad \mathbf{S} = \Theta \times \mathfrak{D}.$$

**Démonstration.** On note  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D})$  et on rajoute (II.1.40) et (II.1.41) en appliquant le lemme II.1.5 et le théorème I.3.12, on obtient aisément

$$(\mathbb{T}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})_{\mathbb{Y}} \geq 0.$$

Réciproquement, soit  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) \in \mathbf{S}$ . Supposons qu'on a

$$(\mathbb{T}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})_{\mathbb{Y}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbf{S}.$$

Et d'après la définition de  $\mathbb{T}^{-1}$ , il vient

$$(II.1.43) \quad (\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} + (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \mathbf{E} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}) \in \mathbf{S}.$$

En prenant maintenant  $\mathbf{E} = -\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$  dans (II.1.43), on obtient

$$(\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Theta.$$

Ce qui implique que l'inégalité (II.1.40) est vérifiée.

De plus, en prenant  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \in \Theta$  dans (II.1.43), on en déduit :

$$(II.1.44) \quad (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \mathbf{E} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}.$$

Posons maintenant  $\mathbf{F} = -\mathbf{E} - 2\mathbf{D}$ , on définit ainsi un élément de l'ensemble  $\mathfrak{D}$  : on a en effet, pour tout  $\psi \in W$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} &= (-\mathbf{E} - 2\mathbf{D}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = -(\mathbf{E}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - 2(\mathbf{D}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= -(q, \psi)_W + 2(q, \psi)_W = (q, \psi)_W. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{F}$  dans (II.1.44), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \mathbf{F} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} &= (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), -\mathbf{E} - 2\mathbf{D} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), -\mathbf{E} - \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(II.1.45) \quad (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \mathbf{E} + \mathbf{D})_{L^2(\Omega)^d} \leq 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}.$$

Nous déduisons des inégalités (II.1.44) et (II.1.45), que la relation (II.1.41) est vérifiée. Ce qui démontre le lemme II.1.8.  $\square$

Venons-en à la démonstration du théorème II.1.7.

**Démonstration du théorème II.1.7.** Supposons dans la démonstration de ce théorème que les hypothèses (II.1.10)–(II.1.15) sont vérifiées.

On a d'une part,  $\mathbb{T}^{-1}$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz (conséquence du lemme II.1.5). Et d'autre part,  $\mathbf{S}$  est convexe, fermé et non vide de  $\mathbb{Y}$ , en effet :  $(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}), -\nabla q) \in \mathbf{S}$ .

Il s'en suit du théorème I.3.12 (page 36), qu'il existe une unique solution  $\mathfrak{x} \in \mathbb{Y}$  du problème (II.1.42). En utilisant le lemme II.1.8, il résulte que le problème duale  $P_1^{Vd}$  admet une unique solution.

Nous prouvons maintenant la régularité de cette solution, considérons à présent  $\mathfrak{x} = (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) \in \mathbf{S} = \Theta \times \mathfrak{D}$ , nous obtenons  $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$ ,  $-\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ .

Nous pouvons alors conclure que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

$$(\mathbf{D}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W.$$

En prenant maintenant  $\pm \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  et  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans les deux relations précédentes, nous avons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

$$(\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Et en utilisant les notations (III.1.15) et (III.1.16) nous trouvons

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = q_0.$$

De (III.1.15) et (III.1.16), il s'en suit que  $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$  et  $\operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega)$  et par conséquent, on a la régularité

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1, \quad \mathbf{D} \in \mathcal{W}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème II.1.7. □

Notre deuxième résultat essentiel de cette section, qui assure le lien entre la solution  $(\mathbf{u}, \varphi)$  du problème  $P_1^V$  et la solution  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  du problème  $P_1^{Vd}$ , est le suivant.

**Théorème II.1.9.** *On considère les hypothèses (II.1.10)–(II.1.15).*

(1) *Soit  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est la solution du problème  $P_1^V$  obtenu dans le théorème II.1.1 et soient  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}$  définis par*

$$(II.1.46) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi,$$

$$(II.1.47) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi.$$

*Alors  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  est solution du problème  $P_1^{Vd}$ .*

(2) *Réciproquement, soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  la solution du problème  $P_1^{Vd}$  obtenu dans le théorème II.1.7. Alors il existe une unique  $\mathbf{u} \in V$  et une unique  $\varphi \in W$  tel que (II.1.46) et (II.1.47) sont satisfaites et par ailleurs,  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est solution du problème  $P_1^V$ .*

**Interprétation.** Ces solutions des problèmes  $P_1^V$  et  $P_1^{Vd}$  sont donc liées par la loi de comportement (II.1.46)–(II.1.47).

**Démonstration.** (1)  $\implies$  (2) Soit  $(\mathbf{u}, \varphi)$  une solution du  $P_1^V$  et  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  donnée par (II.1.46)–(II.1.47).

Nous obtenons, en mettant les relations (II.1.46) et (II.1.47) dans  $P_1^V$ , que

$$(II.1.48) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

$$(II.1.49) \quad (\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W.$$

En prenant  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  dans (II.1.48), on obtient

$$(II.1.50) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V.$$

En se reportant aux relations (II.1.48) et (II.1.50), nous déduisons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

D'où,

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Theta.$$

En outre, de (II.1.50), nous avons

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} &= (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &= (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \geq 0 \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\tau} \in \Theta. \end{aligned}$$

Des relations (II.1.46), (II.1.47) et (II.1.34), nous pouvons dire que

$$(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \mathbb{T}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi),$$

ou encore,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}).$$

On remplace ceci dans  $(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \geq 0$  pour obtenir

$$(\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Ce qui implique (II.1.40).

En outre, il s'en suit de (II.1.49) que

$$(\mathbf{D}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0.$$

Ce qui implique que  $-\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ .

D'autre part, en prenant  $\psi = \varphi$  dans (II.1.49), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} + \mathbf{D}, \mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}))_{L^2(\Omega)^d} &= (\mathbf{E} + \mathbf{D}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\mathbf{E}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{D}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\mathbf{E}, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} - (q, \varphi)_W = 0 \quad \forall \mathbf{E} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Donc, on a prouvé (II.1.41); et par conséquent, 1)  $\implies$  2).

(2)  $\implies$  (1) Soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$  une solution du  $P_1^{Vd}$  et soit  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}$  tel que  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = 0$  pour tout  $\mathbf{v} \in V$ . Il vient d'ici que  $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)^\perp$ , où  $\boldsymbol{\varepsilon}(V)^\perp$  représente l'orthogonal dans  $\mathcal{H}$  de l'espace  $\boldsymbol{\varepsilon}(V) = \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \subset \mathcal{H}$ .

On a  $\boldsymbol{\sigma} \pm \boldsymbol{\tau} \in \Theta$ ; en effet :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \pm \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \\ &\geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{car } \boldsymbol{\sigma} \in \Theta). \end{aligned}$$

En prenant maintenant  $\boldsymbol{\sigma} \pm \boldsymbol{\tau}$  dans (II.1.40), on obtient

$$(\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = 0 \implies \mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp\perp} = \boldsymbol{\varepsilon}(V),$$

car  $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ . La dernière inégalité montre qu'il existe  $\mathbf{u} \in V$  tel que  $\mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , et, vu l'inégalité de Korn, l'élément  $\mathbf{u} \in V$  est unique.

Soit maintenant  $\boldsymbol{\tau} \in \nabla W^{\perp}$ , où  $\nabla W^{\perp}$  représente l'orthogonal de l'espace  $\nabla W = \{\nabla\psi \mid \psi \in W\}$  dans  $L^2(\Omega)^d$ . On a  $(\boldsymbol{\tau}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = 0 \quad \forall \psi \in W$ .

On a aussi  $-\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{D}$ , en effet :

$$(-\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (-\mathbf{D}, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W.$$

En prenant maintenant  $\mathbf{E} = -\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}$  dans (II.1.41), on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}), \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d} = 0 &\implies \mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) \in \nabla W^{\perp\perp} \quad (\text{car } \boldsymbol{\tau} \in \nabla W^{\perp}), \\ &\implies \mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) \in \nabla W \quad (\text{car } \nabla W^{\perp\perp} = \nabla W). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, il existe un unique  $\varphi \in W$  tel que  $\mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \nabla\varphi$ .

En conclusion, nous avons

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \mathbb{T}_1^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \mathbb{T}_2^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \nabla\varphi \end{array} \right\} &\implies \mathbb{T}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi), \\ &\implies (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \mathbb{T}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\varphi), \\ &\implies \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, on trouve (II.1.46)–(II.1.47).

Il reste à prouver que  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est solution du problème  $P_1^V$ .

En utilisant la proposition I.3.11 et le fait que  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par (II.1.20), est convexe, propre et semi-continue inférieurement, il vient que  $h$  est sous-différentiable

sur  $V$ . Donc, il existe un  $\tilde{\mathbf{f}} \in V$  tel que

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) &\geq (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \\ &\geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (I.2.5), nous déduisons que

$$(\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En prenant  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \varepsilon(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}) \in \mathcal{H}$  dans la dernière inéquation, il vient

$$(II.1.51) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En remplaçant  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  dans (II.1.51), nous déduisons que

$$(II.1.52) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V.$$

En se reportant aux relations (II.1.51) et (II.1.52), nous déduisons

$$(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Il vient à présent de la définition de  $\Theta$  que  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \Theta$ .

En prenant maintenant  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  dans (II.1.40), sachant que  $\mathbb{T}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{D}) = \varepsilon(\mathbf{u})$ , il résulte

$$(II.1.53) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \implies \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \geq (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}}.$$

Maintenant, de (II.1.52) et (II.1.53), il est clair que

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u})_V \geq (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}).$$

L'inégalité opposée provient de la définition  $\Theta$  tant que  $\boldsymbol{\sigma} \in \Theta$  et  $\mathbf{u} \in V$ . Nous pouvons alors conclure que

$$(II.1.54) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V.$$

Ainsi, pour tout  $\mathbf{v} \in V$ , on a

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V}_{\geq 0 \text{ car } \boldsymbol{\sigma} \in \Theta} - \underbrace{\{(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_V\}}_{= 0 \text{ par (II.1.54)}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant (II.1.46), on obtient (II.1.23).

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} -\mathbf{D} \in \mathfrak{D} &\implies (-\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} - (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W, \\ &\implies (\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W. \end{aligned}$$

Enfin, on trouve (II.1.24), ce qui conclut la démonstration. □

## Chapitre 2

# Problème électro-élastique avec compliance normale et frottement de Coulomb statique

Nous considérons un modèle mathématique qui décrit le contact entre un corps piézoélectrique et un isolateur. La loi constitutive de comportement est supposée non-linéaire et électro-élastique, et le processus est statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale et la loi de frottement associée est de type de Coulomb. Nous obtenons ensuite une formulation variationnelle du modèle sous une forme d'un système couplé impliquant le déplacement élastique et le potentiel électrique. Ensuite, nous fournissons l'existence d'une solution faible du problème et, sous une hypothèse de petitesse concernant les fonctions de compliance, son unicité. Nous étudions ensuite la dépendance de la solution par rapport aux fonctions de compliance  $p_r$  (pour  $r = \nu, \tau$ ). Puis nous obtenons un résultat de convergence. L'exposé de l'ensemble des résultats de ce chapitre se trouve dans [100].

### 2.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

La situation physique est la même que celle décrite au chapitre précédent, schématisée à la figure I.1.1 p.6. La différence vient ici de la condition de contact considérée sur la partie  $\Gamma_3$  car ici le contact est avec compliance normale et se fait avec frottement de Coulomb. Ces conditions de contact et de frottement sont explicitées aux relations (I.1.33) et (I.1.39). De ces considérations physiques, le problème classique se formule comme suit :

**Problème  $P_2$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$(II.2.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.2.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.2.3) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.2.4) \quad \text{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(II.2.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$(II.2.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

$$(II.2.7) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(II.2.8) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \text{ si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(II.2.9) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a,$$

$$(II.2.10) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b.$$

Les équations (II.2.1) et (II.2.2) représentent la loi constitutive du corps considéré. Les équations (II.2.3) et (II.2.4) sont les équations d'équilibre, tandis que les conditions (II.2.5) et (II.2.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions. Les conditions (II.2.7) et (II.2.8) représentent la condition de contact avec compliance normale et avec frottement de Coulomb associé, et pour finir, (II.2.9) et (II.2.10) sont les conditions aux limites électriques.

Pour l'étude du problème  $P_2$ , nous faisons les hypothèses suivantes sur les diverses quantités intervenant dans le problème électro-élastique. L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  satisfait les propriétés suivantes :

$$(II.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) il existe } M_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq M_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

Le tenseur *piézoélectrique*  $\mathcal{E}$  vérifie

$$(II.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

Le tenseur *diélectrique*  $\boldsymbol{\beta}$  est symétrique, défini positif et vérifie

$$(II.2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \beta_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) } \beta_{ij} = \beta_{ji}. \\ \text{(d) il existe } m_{\boldsymbol{\beta}} > 0 \text{ telle que } \beta_{ij}(\mathbf{x}) E_i E_j \geq m_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

De même, nous supposons que les fonctions de *compliance*  $p_r$  ( $r = \nu, \tau$ ) satisfont

$$(II.2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists L_r > 0 \text{ telle que } |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) l'application } x \mapsto p_r(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } x \mapsto p_r(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right.$$

Dans la première partie du mémoire nous avons donné un exemple de fonctions de compliance normale qui satisfont les hypothèses (II.2.14), voir (I.1.34).

On suppose que l'*interstice*  $g$  est tel que

$$(II.2.15) \quad g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

et que les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$(II.2.16) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

Finalement, les charges électriques dans le milieu et sur la partie  $\Gamma_b$  satisfont

$$(II.2.17) \quad q_0 \in L^2(\Omega), \quad q_2 \in L^2(\Gamma_b), \quad q_2 = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence de deux éléments  $\mathbf{f} \in V$  et  $q \in W$  tel que :

$$(II.2.18) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.2.19) \quad (q, \psi)_W = \int_{\Omega} q_0 \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \psi \, da \quad \forall \psi \in W.$$

Soit  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par

$$(II.2.20) \quad h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\tau - g)\|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous notons qu'en utilisant (II.2.14)–(II.2.17), les intégrales dans (II.2.18)–(II.2.20) sont bien définies.

Si  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  sont des fonctions régulières qui satisfont (II.2.3)–(II.2.10), alors  $\mathbf{u} \in V$ ,  $\varphi \in W$ . En utilisant la formule de Green, on obtient

$$(II.2.21) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.2.22) \quad (\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q, \psi)_W = 0 \quad \forall \psi \in W.$$

En mettant (II.2.1) dans (II.2.21) et (II.2.2) dans (II.2.22) et du fait que  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ , nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème  $P_2$  en termes de déplacement et de potentiel électrique.

**Problème  $P_2^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} \in V$  et le potentiel électrique  $\varphi \in W$  tels que*

$$(II.2.23) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ + h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.2.24) \quad (\boldsymbol{\beta} \nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

Une paire de fonctions  $(\mathbf{u}, \varphi)$  qui satisfait (II.2.23)–(II.2.24) s'appelle *solution faible* du problème mécanique (II.2.1)–(II.2.10).

## 2.2 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans ce paragraphe est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel  $P_2^V$ .

**Théorème II.2.1.** *Supposons vérifiées les conditions (II.2.11)–(II.2.17). Alors :*

- (1) *Le problème  $P_2^V$  possède au moins une solution  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ .*
- (2) *Il existe  $L_0$  dépendant de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \boldsymbol{\beta}$  tel que si  $L_\tau + L_\nu < L_0$ , alors le problème  $P_2^V$  possède une solution unique  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$  qui est une fonction Lipschitzienne de  $(\mathbf{f}, q) \in V \times W$ .*

La démonstration du Théorème II.2.1 sera réalisée en quelques étapes. On va utiliser le théorème I.3.14 (page 37). Nous supposons ensuite que (II.2.11)–(II.2.17) sont vérifiées.

Considérons à présent l'espace de Hilbert réel  $X = V \times W$  muni de produit scalaire donné par

$$(II.2.25) \quad (x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X$$

et soit  $\|\cdot\|_X$  la norme associée.

Nous introduisons l'opérateur  $A : X \rightarrow X$  défini par

$$(II.2.26) \quad \begin{aligned} (Ax, y)_X &= (\mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta} \nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X, \end{aligned}$$

et nous prolongeons la fonctionnelle  $h$  défini par (II.2.20) sur  $X \times X$  en posant

$$(II.2.27) \quad j(x, y) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X.$$

Finalement, nous considérons l'élément  $f \in X$  donné par :

$$(II.2.28) \quad f = (\mathbf{f}, q) \in X.$$

Nous commençons par le résultat d'équivalence suivant.

**Lemme II.2.2.** *Le couple  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du problème  $P_2^V$  si et seulement si*

$$(II.2.29) \quad (Ax, y - x)_X + j(x, y) - j(x, x) \geq (f, y - x)_X \quad \forall y \in X.$$

**Démonstration.** Il suffit d'établir l'équivalence entre (II.2.23)–(II.2.24) et (II.2.29). Soient alors  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  une solution de (II.2.23)–(II.2.24) et  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in X$ . En utilisant (II.2.23) pour  $\psi - \varphi$  puis en faisant l'addition de l'égalité obtenue avec (II.2.24), on obtient moyennant (II.2.25)–(II.2.28) l'inégalité (II.2.29). Réciproquement, supposons que  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  est une solution de (II.2.29). En prenant  $y = (\mathbf{v}, \varphi)$  dans (II.2.29) où  $\mathbf{v}$  est un élément arbitraire de  $V$ , on obtient (II.2.23). En appliquant maintenant (II.2.29) pour  $y = (\mathbf{v}, \varphi + \psi)$  puis pour  $y = (\mathbf{v}, \varphi - \psi)$  où  $\psi$  est un élément arbitraire de  $W$ ; on obtient (II.2.24), ce qui termine la démonstration du lemme II.2.2.  $\square$

L'étape suivante consiste à exploiter les propriétés de l'opérateur  $A$  défini par (II.2.26).

**Lemme II.2.3.** *L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et de Lipschitz.*

**Démonstration.** Soient  $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1)$  et  $x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$ . En utilisant (II.2.26) pour  $\{x = x_1, y = x_1 - x_2\}$  et  $\{x = x_2, y = x_1 - x_2\}$  puis en faisant la différence des deux expressions obtenues, on a :

$$(II.2.30) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = \\ (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\beta\nabla\varphi_1 - \beta\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d} + \\ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}.$$

Sachant d'autre part que  $(\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d}$  pour tout  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  (voir (I.1.20) p.11), il résulte

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X = \\ (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\beta\nabla\varphi_1 - \beta\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_{L^2(\Omega)^d}.$$

En utilisant maintenant (II.2.11) et (II.2.13), il vient à partir de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (voir (I.2.8) p.26) qu'il existe  $c_1 > 0$  ne dépendant que de  $\mathcal{F}$ ,  $\beta$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  tel

que

$$(II.2.31) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq c_1(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2).$$

Gardant à l'esprit (II.2.25) il s'en suit que

$$(II.2.32) \quad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq c_1 \|x_1 - x_2\|_X^2.$$

En utilisant maintenant (II.2.11)–(II.2.13), il vient après quelques calculs qu'il existe une constante  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $\mathcal{F}$ ,  $\beta$  et  $\mathcal{E}$  tel que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq c_2(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W)$$

pour tout  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in V$ . Il résulte de cette dernière inégalité et de (II.2.25) que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq 4c_2 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_V \quad \forall y \in X$$

et, en prenant  $y = Ax_1 - Ax_2 \in X$  dans l'inégalité précédente, on obtient

$$(II.2.33) \quad \|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq 4c_2 \|x_1 - x_2\|_X.$$

Le lemme II.2.3 est à présent une conséquence de (II.2.32) et (II.2.33).  $\square$

Maintenant nous étudions les propriétés de la fonctionnelle  $j$  donnée par (II.2.27), (II.2.20). Nous voyons que  $j$  satisfait la condition (I.3.4) p.36. D'ailleurs, nous avons les résultats suivants.

**Lemme II.2.4.** *La fonctionnelle  $j$  satisfait les conditions (I.3.6), (I.3.7) et (I.3.8).*

**Démonstration.** Soient  $\eta = (\mathbf{w}, \xi)$ ,  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$  des éléments de  $X$  et prenons  $\lambda \in ]0, 1[$ . En utilisant la définition (II.2.27) de la fonctionnelle  $j$ , il vient que

$$j(\eta, x - \lambda x) - j(\eta, x) = -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(w_\nu - g)u_\nu da - \lambda \int_{\Gamma_3} p_\tau(w_\nu - g)\|\mathbf{u}_\tau\| da$$

et, comme  $p_\tau \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ , nous trouvons

$$j(\eta, x - \lambda x) - j(\eta, x) \leq -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(w_\nu - g)u_\nu da.$$

Nous déduisons de (I.3.5) que

$$(II.2.34) \quad j'_2(\eta, x; -x) \leq - \int_{\Gamma_3} p_\nu(w_\nu - g)u_\nu da \quad \forall \eta = (\mathbf{w}, \xi), x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X.$$

Considérons à présent les suites  $\{x_n\} = \{(\mathbf{u}_n, \varphi_n)\} \subset X$  et  $\{t_n\} \subset [0,1]$  telle que  $\|x_n\|_X \rightarrow \infty$ . Utilisant maintenant (II.2.14), il vient que  $p_\nu(t_n u_{n\nu} - g)(u_{n\nu} - g) \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ . Il s'en suit de (II.2.34) que

$$j_2'(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq - \int_{\Gamma_3} g p_\nu(t_n w_{n\nu} - g) da \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et, comme  $g \geq 0$ ,  $p_\nu \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ , nous déduisons

$$j_2'(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui prouve que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.6).

Considérons maintenant les suites  $\{x_n\} = \{(\mathbf{u}_n, \varphi_n)\} \subset X$  et  $\{\eta_n\} = \{(\mathbf{w}_n, \xi_n)\} \subset X$  telles que

$$(II.2.35) \quad \|\eta_n\|_X \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(II.2.36) \quad \|x_n\|_X \rightarrow \infty,$$

où  $C > 0$ . D'après (II.2.34) et (II.2.14), nous déduisons que

$$\begin{aligned} j_2'(\eta_n, x_n; -x_n) &\leq \int_{\Gamma_3} p_\nu(w_{n\nu} - g)|u_{n\nu}| da \leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |w_{n\nu} - g||u_{n\nu}| da \\ &\leq L_\nu (\|w_{n\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|u_n\|_{L^2(\Gamma_3)} \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Utilisant maintenant (I.2.7) et (II.2.35) dans l'inégalité précédente nous obtenons

$$(II.2.37) \quad j_2'(\eta_n, x_n; -x_n) \leq L_\nu c_0 (C c_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|x_n\|_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, des relations (II.2.36) et (II.2.37), nous pouvons conclure que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.7).

Finalement, Prenons  $\{x_n\} = \{(\mathbf{u}_n, \varphi_n)\} \subset X$ ,  $\{\eta_n\} = \{(\mathbf{w}_n, \xi_n)\} \subset X$  deux suites vérifiant:  $x_n \rightharpoonup x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$  et  $\eta_n \rightharpoonup \eta = (\mathbf{w}, \xi) \in X$ . En se rappelant que l'application trace est une application compacte et en utilisant l'hypothèse (II.2.14), il vient que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n\nu} &\rightarrow \mathbf{u}_\nu, & \|\mathbf{u}_{n\tau}\| &\rightarrow \|\mathbf{u}_\tau\| \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3), \\ p_r(w_{n\nu} - g) &\rightarrow p_r(w_\nu - g) \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3) \quad (r = \nu, \tau). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$j(\eta_n, y) \rightarrow j(\eta, y) \quad \forall y \in X \quad \text{et} \quad j(\eta_n, x_n) \rightarrow j(\eta, x), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

qui prouve que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.8).  $\square$

**Lemme II.2.5.** *La fonctionnelle  $j$  satisfait l'inégalité*

$$(II.2.38) \quad j(x, y) - j(x, x) + j(y, x) - j(y, y) \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau)\|x - y\|_X^2 \quad \forall x, y \in X.$$

**Démonstration.** Soit  $x = (\mathbf{u}, \varphi)$ ,  $y = (\mathbf{v}, \psi) \in V$ . Utilisant (II.2.27), (II.2.20) et (II.2.14) nous avons

$$\begin{aligned} & j(x, y) - j(x, x) + j(y, x) - j(y, y) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu - g) - p_\nu(v_\nu - g))(v_\nu - u_\nu) da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_\nu - g) - p_\tau(v_\nu - g))(\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_\nu - g) - p_\nu(v_\nu - g)| |v_\nu - u_\nu| da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} |p_\tau(u_\nu - g) - p_\tau(v_\nu - g)| |\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|| da \\ & \leq (L_\nu + L_\tau)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2. \end{aligned}$$

Utilisant maintenant (I.2.7) et (II.2.25) dans l'inégalité précédente nous obtenons (II.2.38).  $\square$

A présent que nous avons démontré que la fonctionnelle  $j$  entre dans les hypothèses du théorème I.3.14. p.37, nous pouvons passer à la démonstration du théorème II.2.1.

**Démonstration du théorème II.2.1.** Supposons dans la démonstration de ce théorème que les hypothèses (II.2.11)–(II.2.17) sont vérifiées.

(1) En utilisant les lemmes II.2.2 et II.2.3, ainsi que le théorème I.3.14. 1), il vient que l'inégalité variationnelle (II.2.29) a au moins une solution  $x = (\mathbf{u}, \varphi) \in X$ . Nous concluons grâce au lemme II.2.1 que le couple  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du problème  $P_2^V$  ayant la régularité  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ .

(2) Soit  $L_0 = \frac{c_1}{c_0^2}$  où  $c_1$  et  $c_0$  est définie respectivement par (II.2.32) et (I.2.7). Un tel réel  $L_0$  dépend seulement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_a$ ,  $\mathcal{F}$  et de  $\beta$ . Supposons à présent que

$$L_\nu + L_\tau < L_0.$$

Il existe alors un réel  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$c_0^2(L_\nu + L_\tau) < \alpha < c_1.$$

Des relations (II.2.38) et (II.2.32), nous pouvons conclure que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.9). En utilisant à présent le lemme II.2.1, l'hypothèse (II.2.28) ainsi que le théorème I.3.14. 2), on obtient que le problème  $P_2^V$  admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$  qui est une fonction lipschitzienne de  $(\mathbf{f}, q) \in V \times W$ .  $\square$

Un "quadruplet"  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  satisfaisant aux relations (II.2.1), (II.2.2), (III.1.23)–(III.1.24) s'appelle *solution faible* du problème mécanique  $P_2$ . Nous concluons par le théorème II.2.1 que le problème  $P_2$  admet une solution unique sous réserve que  $L_\nu + L_\tau < L_0$ . En ce qui concerne la régularité de la solution faible, il suffit de référer à la régularité de l'élément  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ , à la loi (II.2.1)–(II.2.2) et aux hypothèses (II.2.11)–(II.2.17); nous obtenons alors que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$ ,  $\mathbf{D} \in \mathcal{W}$ .

### 2.3 Dépendance continue par rapport aux données

Dans cette section nous étudions les comportements de la solution du problème  $P_2$  donnée par le théorème II.2.1, liés aux perturbations des fonctions de compliance  $p_\nu$  et  $p_\tau$ . Nous supposons dans la suite que (II.2.11)–(II.2.17) soient vérifiés. Pour chaque  $\alpha > 0$ , soit  $p_r^\alpha$  une perturbation de  $p_r$  qui satisfait (II.2.14) avec une constante de Lipschitz  $L_r^\alpha$ ,  $r = \nu, \tau$ . En outre, nous supposons la condition suivante :

$$(II.2.39) \quad \text{il existe } L_* < L_0 \text{ tel que } L_\nu + L_\tau \leq L_*, \quad L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha \leq L_* \quad \forall \alpha > 0,$$

où  $L_0$  est définie dans le théorème II.2.1 2). Nous introduisons la fonctionnelle  $h^\alpha$  qui s'obtient de  $h$  en remplaçant respectivement  $p_\nu$  et  $p_\tau$  par  $p_\nu^\alpha$  et  $p_\tau^\alpha$ . Nous considérons maintenant le problème variationnel suivant :

**Problème  $P_\alpha^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}^\alpha \in V$  et le potentiel électrique  $\varphi^\alpha \in W$  tels que*

$$(II.2.40) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^\alpha, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha))_{L^2(\Omega)^d} \\ + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^\alpha)_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(II.2.41) \quad (\boldsymbol{\beta} \nabla \varphi^\alpha, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

Il est clair que le problème  $P_\alpha^V$  représente une formulation variationnelle du problème de contact électro-élastique  $P^\alpha$  obtenu à partir du problème  $P_2$  en remplaçant,

respectivement, les fonctions de compliance  $p_\nu$  et  $p_\tau$  par les fonctions de compliance  $p_\nu^\alpha$  et  $p_\tau^\alpha$ . En utilisant le théorème II.2.1, moyennant (II.2.39), il résulte que le problème  $P_\alpha^V$  a une unique solution  $(\mathbf{u}^\alpha, \varphi^\alpha) \in V \times W$ , pour chaque  $\alpha > 0$ . D'ailleurs, le problème  $P_2^V$  a une unique solution  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ .

Supposons maintenant que les fonctions de compliance satisfont l'hypothèse suivante pour  $r = \nu, \tau$  :

$$(II.2.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } a_r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } b_r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ \text{(a) } |p_r^\alpha(\mathbf{x}, u) - p_r(\mathbf{x}, u)| \leq a_r(\alpha) |u| + b_r(\alpha) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \text{ pour tout } \alpha > 0. \\ \text{(b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} a_r(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} b_r(\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat de convergence suivant.

**Théorème II.2.6.** *La solution  $(\mathbf{u}^\alpha, \varphi^\alpha)$  du problème  $P_\alpha^V$  converge vers la solution  $(\mathbf{u}, \varphi)$  du problème  $P_2^V$  dans le sens suivant :*

$$(II.2.43) \quad \mathbf{u}^\alpha \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0,$$

$$(II.2.44) \quad \varphi^\alpha \rightarrow \varphi \quad \text{dans } W \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0.$$

**Démonstration.** Soit  $\alpha > 0$ . Partout dans la suite  $c$  représentera une constante positive qui dépend des données de départ et de la solution  $\mathbf{u}$  mais est indépendante de  $\alpha$  et dont la valeur pourra changer de ligne en ligne.

Utilisant maintenant (II.2.23), (II.2.24), (II.2.40) et (II.2.41) et après quelques calculs, nous obtenons

$$(II.2.45) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^\alpha - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) - \varepsilon(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \\ \leq h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\alpha) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha),$$

$$(II.2.46) \quad (\beta\nabla\varphi^\alpha - \beta\nabla\varphi, \nabla\varphi^\alpha - \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}), \nabla\varphi^\alpha - \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d} = 0.$$

Additionnant (II.2.45) et (II.2.46) et en utilisant (II.2.30)–(II.2.31), on obtient

$$(II.2.47) \quad c_1(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V^2 + \|\varphi^\alpha - \varphi\|_W^2) \leq h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\alpha) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha).$$

Nous notons que

$$\begin{aligned} & h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\alpha) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu - g) - p_\nu^\alpha(u_\nu^\alpha - g))(u_\nu^\alpha - u_\nu) da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_\nu - g) - p_\tau^\alpha(u_\nu^\alpha - g)) (\|\mathbf{u}_\tau^\alpha\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \text{(II.2.48)} \quad & h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\alpha) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} [(p_\nu(u_\nu - g) - p_\nu^\alpha(u_\nu^\alpha - g)) + (p_\tau(u_\nu - g) - p_\tau^\alpha(u_\nu^\alpha - g))] \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\| da. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire pour  $r = \nu$  ou  $\tau$ , il vient que

$$\begin{aligned} |p_r(u_\nu - g) - p_r^\alpha(u_\nu^\alpha - g)| & \leq |p_r(u_\nu - g) - p_r^\alpha(u_\nu - g)| \\ & \quad + |p_r^\alpha(u_\nu - g) - p_r^\alpha(u_\nu^\alpha - g)| \end{aligned}$$

et, gardant à l'esprit (II.2.14) et (II.2.42)(a), nous obtenons

$$|p_r(u_\nu - g) - p_r^\alpha(u_\nu^\alpha - g)| \leq a_r(\alpha)|u_\nu - g| + b_r(\alpha) + L_r^\alpha |u_\nu^\alpha - u_\nu|$$

p.p. sur  $\Gamma_3$ . Nous mettons l'inégalité précédente dans (II.2.48) et en utilisant (I.2.7), on obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} \text{(II.2.49)} \quad & h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\alpha) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}) - h^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\alpha) \\ & \leq c [a_\nu(\alpha) + a_\tau(\alpha) + b_\nu(\alpha) + b_\tau(\alpha)] \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V \\ & \quad + c_0^2 (L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha) \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V^2. \end{aligned}$$

Maintenant, de (II.2.39) il est clair que  $c_0^2(L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha) \leq c_0^2 L_* < c_1$  et en combinant (II.2.47) et (II.2.49), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \text{(II.2.50)} \quad & \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V^2 + \|\varphi^\alpha - \varphi\|_W^2 \\ & \leq c [a_\nu(\alpha) + a_\tau(\alpha) + b_\nu(\alpha) + b_\tau(\alpha)] \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\text{(II.2.51)} \quad \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V \leq c [a_\nu(\alpha) + a_\tau(\alpha) + b_\nu(\alpha) + b_\tau(\alpha)].$$

Le théorème II.2.6 est maintenant une conséquence de (II.2.51), (II.2.50) et (II.2.42)(b).  $\square$

Nous prolongeons maintenant le résultat de convergence du théorème II.2.6 à la solution faible du problème électro-élastique de contact. Soient  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  définis par

$$(II.2.52) \quad \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi^\alpha), \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi).$$

Soient, de plus,  $\mathbf{D}^\alpha$  et  $\mathbf{D}$  définis par

$$(II.2.53) \quad \mathbf{D}^\alpha = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha) + \beta\mathbf{E}(\varphi^\alpha), \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi).$$

Il est clair que  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$  et  $\mathbf{D}^\alpha, \mathbf{D} \in \mathcal{W}$ . Nous avons aussi

$$(II.2.54) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(II.2.55) \quad \text{div } \mathbf{D}^\alpha = \text{div } \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En outre, de (II.2.52)–(II.2.55) et des hypothèses (II.2.11)–(II.2.13) concernant les opérateurs  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\beta$ , nous obtenons que

$$\|\boldsymbol{\sigma}^\alpha - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}_1} \leq c(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V + \|\varphi^\alpha - \varphi\|_W),$$

$$\|\mathbf{D}^\alpha - \mathbf{D}\|_{\mathcal{W}} \leq c(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}\|_V + \|\varphi^\alpha - \varphi\|_W).$$

Pour conclure, de (II.2.43) et (II.2.44) il s'en suit que

$$(II.2.56) \quad \boldsymbol{\sigma}^\alpha \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \mathcal{H}_1 \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0,$$

$$(II.2.57) \quad \mathbf{D}^\alpha \rightarrow \mathbf{D} \quad \text{dans } \mathcal{W} \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0.$$

En dehors de l'intérêt mathématique, le résultat de convergence (II.2.43), (II.2.44), (II.2.56) et (II.2.57), est important dans les applications, car il indique que de petites imprécisions dans les conditions de contact conduisent à petites imprécisions dans la solution.



Troisième partie  
Problèmes quasistatiques



## Partie III

### Problèmes quasistatiques

Dans cette partie du mémoire, composée de deux chapitres, nous procédons à l'étude des problèmes de contact avec ou sans frottement, entre un corps électro-élastique ou électro-viscoélastique et une fondation isolatrice en se plaçant dans les hypothèses de petites déformations. La nouveauté réside ici dans le fait que le processus considéré est quasistatique ce qui conduit à un problème dont la formulation faible formulée en déplacements et en potentiel électrique est exprimée en terme d'inégalité variationnelle d'évolution.

Le cas quasistatique est plus délicat ; il se caractérise par la présence de la dérivée temporelle de la solution, ce qui conduit à imposer une valeur initiale pour le champ des déplacements. Dans ce contexte, la plupart des travaux utilisent des lois de contact régularisées.

Dans le premier chapitre, nous commençons par un problème électro-élastique de contact avec un frottement. Ce problème conduit à l'étude d'une classe d'inéquations variationnelles d'évolution avec fonction non différentiable dépendant de la solution. Nous présentons un résultat d'existence de la solution.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un problème modélisant le contact unilatéral sans frottement d'un corps électro-viscoélastique avec une fondation rigide. Nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution.



# Chapitre 1

## Problème électro-élastique avec compliance normale et frottement de Coulomb en vitesse

Dans ce chapitre, Nous abordons un problème similaire à celui énoncé au chapitre précédent. Il s'agit d'un problème quasistatique de contact entre un corps de loi constitutive électro-élastique linéaire et un obstacle assimilé à une fondation isolatrice. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale et la loi de frottement associée est de type de Coulomb en termes de vitesse.

Nous présentons tout d'abord le problème physique. De cette description, nous dérivons une formulation variationnelle sous une forme d'un système couplé impliquant le déplacement élastique et le potentiel électrique. Ensuite, nous fournissons l'existence d'une solution faible du problème moyennant des résultats généraux des inégalités variationnelles d'évolution. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet d'un article [101].

### 1.1 Problème mécanique

Nous reprenons la situation physique décrit dans la partie précédente, schématisée à la figure I.1.1 p.6. Ici nous utilisons la même loi constitutive électro-élastique linéaire dans un processus quasistatique. Le contact est avec compliance normale, la nouveauté résidant dans le fait que nous considérons une version plus générale de la loi de frottement de Coulomb. Ces conditions de contact et de frottement sont explicitées aux relations (I.1.33) et (I.1.38). Une telle loi a déjà été considérée dans [77]. De ces

considérations, le problème physique peut se formuler de la façon suivante :

**Problème  $P_3$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$(III.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.1.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.1.3) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.1.4) \quad \text{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.1.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(III.1.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(III.1.7) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(III.1.8) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \text{ si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(III.1.9) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(III.1.10) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(III.1.11) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Les équations (III.1.1) et (III.1.5) représentent la loi constitutive du corps considéré. Les équations (III.1.2) et (III.1.3) sont les équations d'équilibre, tandis que les conditions (III.1.4) et (III.1.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions. Les conditions (III.1.7) et (III.1.8) représentent la condition de contact avec compliance normale et avec frottement de Coulomb, (III.1.9) et (III.1.10) sont les conditions aux limites électriques et pour finir, l'expression (III.1.11) représente la condition initiale.

Précisons maintenant les hypothèses sur les données. Nous supposons que le tenseur d'élasticité  $\mathcal{F}$ , le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\beta}$  satisfont les

propriétés suivantes :

$$(III.1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} = (f_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } f_{ijkl} = f_{klij} = f_{jikl} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) } \exists m > 0 \text{ telle que } f_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

$$(III.1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(III.1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ \text{(b) } \beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) il existe } m_\beta > 0 \text{ telle que } \beta_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_\beta\|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

Et remarquons que maintenant l'opérateur d'élasticité est supposé être linéaire.

Dans ce chapitre, nous supposons que les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$ , les tractions  $\mathbf{f}_2$  et les charges électriques volumiques  $q_0$  et surfaciques  $q_2$  ont la régularité

$$(III.1.15) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_3)^d),$$

$$(III.1.16) \quad q_0 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_b)).$$

En plus, nous admettons que les charges électriques  $q_2$  sur la partie  $\Gamma_b$  et l'*interstice*  $g$  satisfont les conditions

$$(III.1.17) \quad q_2(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0,T],$$

$$(III.1.18) \quad g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Rappelons que l'hypothèse (III.1.17) est de nature physique et elle considérée ici pour modéliser le fait que la base est supposée être isolatrice.

De même, nous supposons que les fonctions de *compliance*  $p_r$  ( $r = \nu, \tau$ ) satisfont

$$(III.1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists L_r > 0 \text{ telle que } |p_r(x,u_1) - p_r(x,u_2)| \leq L_r|u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } x \mapsto p_r(x,u) \text{ est mesurable Lebesgue sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } x \mapsto p_r(x,u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right.$$

Nous définissons maintenant les applications  $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f} : [0, T] \longrightarrow V$  et  $q : [0, T] \longrightarrow W$  données par

$$(III.1.20) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\| da,$$

$$(III.1.21) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da,$$

$$(III.1.22) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $\psi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . En utilisant les conditions (III.1.15)–(III.1.19) nous déduisons que les intégrales dans (III.1.20)–(III.1.22) sont bien définies.

Finalement, pour les données initiales nous avons considéré les hypothèses

$$(III.1.23) \quad \mathbf{u}_0 \in V,$$

$$(III.1.24) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}(0), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

où  $\varphi_0$  est l'unique élément de  $W$  satisfait

$$(III.1.25) \quad (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_0, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(0), \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

La définition de  $\varphi_0$  est basée sur les conditions (III.1.14), (I.2.8) et le lemme de Lax-Milgram. Remarquons que (III.1.24) représente une hypothèse de compatibilité pour les données du problème  $P_3$ . Ce type d'hypothèse est fréquemment utilisé dans l'étude des problèmes quasistatiques pour les matériaux élastiques ou élasto-visco-plastiques (pour plus de détails voir [49, 93]).

## 1.2 Existence de la solution

En utilisant la formule de Green et en supposant dans la suite que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  sont des fonctions régulières satisfaisant (III.1.2)–(III.1.10), nous avons

$$(III.1.26) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) \geq (\mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v})_V,$$

$$(III.1.27) \quad (\mathbf{D}(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\psi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Mettons maintenant (III.1.1) dans (III.1.26), (III.1.5) dans (III.1.27) et gardant à l'esprit que  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$  ainsi que la condition initiale (III.1.11) nous obtenons pour le problème mécanique  $P_3$  la formulation variationnelle suivante.

**Problème  $P_3^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  et le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  tels que*

$$(III.1.28) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$(III.1.29) \quad (\beta\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \forall t \in [0, T],$$

$$(III.1.30) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Le principal résultat, que nous démontrons par la suite est le suivant.

**Théorème III.1.1.** *Sous réserve que les hypothèses (III.1.12)–(III.1.19) et (III.1.23)–(III.1.25) soient satisfaites, il existe un réel  $L_0$  dépendant seulement des données  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_a$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\beta$  et  $\mathcal{E}$  tel que si  $L_\nu + L_\tau < L_0$  alors le problème variationnel  $P_3^V$  possède au moins une solution  $(\mathbf{u}, \varphi)$  qui vérifie la régularité*

$$(III.1.31) \quad \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

Un “quadruplet”  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  satisfaisant aux relations (III.1.1), (III.1.5), (III.1.28)–(III.1.30) s'appelle *solution faible* du problème mécanique  $P_3$ . Nous concluons par le théorème III.1.1 que le problème  $P_3$  admet au moins une solution sous réserve que  $L_\nu + L_\tau < L_0$ . En ce qui concerne la régularité de la solution faible, il suffit de se référer à la régularité de l'élément  $(\mathbf{u}, \varphi) \in W^{1,\infty}(0, T; V) \times W^{1,\infty}(0, T; W)$  et aux hypothèses (III.1.1)–(III.1.5); nous obtenons alors que  $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$ ,  $\mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$ . En prenant maintenant  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t) \pm \mathbf{z}$ , où  $\mathbf{z} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (III.1.26) et  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans (III.1.27) et en utilisant (III.1.2)–(III.1.10) nous trouvons

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{D}(t) = q_0(t)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . De (III.1.15) et (III.1.16) il s'en suit que  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$  et  $\text{div } \mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$  et par conséquent

$$(III.1.32) \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad \mathbf{D} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}).$$

Nous concluons que la solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  du problème  $P_3$  aura la régularité (III.1.31)–(III.1.32).

### 1.3 Démonstration du Théorème III.1.1

La démonstration du théorème III.1.1, basée sur le théorème abstrait I.3.16 p.40, se déroule en plusieurs étapes, similaires à celles utilisées dans [76, 98], mais avec un choix différent d'opérateurs. Pour établir ce théorème, on a besoin de quelques résultats préliminaires qu'on donnera sous forme de lemmes afin de prouver que la fonctionnelle  $j$  définie par la relation (III.1.20), rentre dans les hypothèses de ce théorème abstrait. Pour cela, supposons dans la suite que les hypothèses (III.1.12)–(III.1.19) et (III.1.23)–(III.1.25) soient vérifiées.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz nous définissons les opérateurs  $\mathcal{B} : W \rightarrow W$  et  $\mathcal{C} : V \rightarrow W$  par les égalités suivantes :

$$(III.1.33) \quad (\mathcal{B}\varphi, \psi)_W = (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d},$$

$$(III.1.34) \quad (\mathcal{C}\mathbf{v}, \varphi)_W = (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)^d},$$

pour tout  $\varphi, \psi \in W, \mathbf{v} \in V$ . De (I.2.8) et (III.1.14), on déduit que  $\mathcal{B}$  est un opérateur linéaire, symétrique et positivement défini. Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est un opérateur inversible et continu sur  $W$ .

Maintenant, en utilisant (I.2.5) et (III.1.13) il s'en suit que  $\mathcal{C}$  est un opérateur linéaire et continue sur  $V$ . Soit  $\mathcal{C}^* : W \rightarrow V$  l'adjoint de  $\mathcal{C}$ . Ainsi, à partir de (I.1.20) nous pouvons écrire

$$(III.1.35) \quad (\mathcal{C}^*\varphi, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \varphi \in W.$$

Soit  $t \in [0, T]$ . En introduisant (III.1.33) et (III.1.34) dans l'égalité (III.1.29), il vient

$$(\mathcal{B}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{C}\mathbf{u}(t), \psi)_W + (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,$$

et par conséquent

$$\mathcal{B}\varphi(t) = \mathcal{C}\mathbf{u}(t) + q(t).$$

D'autre part,  $\mathcal{B} : W \rightarrow W$  est inversible. L'égalité précédente devient alors

$$(III.1.36) \quad \varphi(t) = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}(t) + \mathcal{B}^{-1}q(t).$$

En utilisant (III.1.36) dans l'inégalité (III.1.28) et les définitions des opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^*$  données par (III.1.33)–(III.1.35), on obtient

$$(III.1.37) \quad (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + \\ j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t) - \mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}q(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \\ \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Soit l'opérateur  $\mathbf{L} : V \rightarrow V$  définie par

$$(III.1.38) \quad \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En gardant à l'esprit les propriétés des opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$ , nous déduisons que  $\mathbf{L}$  est un opérateur linéaire, symétrique et positif sur  $V$  :

$$(III.1.39) \quad (\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}, \mathcal{C}\mathbf{v})_W \\ = (\mathcal{C}\mathbf{u}, \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{v})_W = (\mathbf{u}, \mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{v})_V = (\mathbf{u}, \mathbf{L}\mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \\ (\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{v}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{v}, \mathcal{C}\mathbf{v})_W \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Pour simplifier les notations par la suite, nous définissons la forme bilinéaire  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation

$$(III.1.40) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant les conditions (III.1.12), (I.2.5) et (III.1.39), il est clair que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercive sur  $V$  :

$$(III.1.41) \quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (M + \|\mathbf{L}\|)\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(III.1.42) \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq m\|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Et,  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{L}$  étant symétriques, ceci prouve que la symétrie de  $a(\cdot, \cdot)$  est vérifiée en observant (III.1.40).

Soit la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  donnée par

$$(III.1.43) \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}q(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Les hypothèses (III.1.15) et (III.1.16) impliquent que les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $q$ , données respectivement par (III.1.21) et (III.1.22), satisfont  $\mathbf{f} \in W^{1, \infty}(0, T; V)$  et  $q \in W^{1, \infty}(0, T; W)$ .

En gardant à l'esprit que  $\mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}$  est un opérateur linéaire et continu, il s'en suit de (III.1.43) que

$$(III.1.44) \quad \mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0,T;V).$$

Les relations (III.1.37), (III.1.40), (III.1.43) et (III.1.30) nous amènent à considérer le problème variationnel suivant.

**Problème  $P_3^{Vb}$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0,T] \rightarrow V$  tel que*

$$(III.1.45) \quad \begin{aligned} & a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned}$$

$$(III.1.46) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

On va donner dans la suite un résultat d'existence des solutions du problème  $P_3^{Vb}$ . Pour la démonstration, on utilise le résultat donné par le théorème I.3.16. Elle sera réalisée en plusieurs étapes. Pour cela, nous supposons par la suite que (III.1.12)–(III.1.19) et (III.1.23)–(III.1.25) sont vérifiées et nous analysons les propriétés de la fonctionnelle  $j$  donnée par (III.1.20). Nous voyons que  $j$  satisfait la condition (I.3.15) p.38. En plus, nous avons les résultats suivants.

**Lemme III.1.2.** *La fonctionnelle  $j$  vérifie les hypothèses (I.3.19) et (I.3.20).*

**Démonstration.** Soit  $\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \in V$  et soit  $\lambda \in ]0,1]$ . Utilisant (III.1.20), nous obtenons

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} - \lambda \mathbf{u}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \leq \\ & -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(\eta_\nu - g)u_\nu da - \lambda \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_\nu - g)|\mathbf{u}_\tau - \bar{\mathbf{u}}_\tau| da + \lambda \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_\nu - g)\|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da, \end{aligned}$$

et comme  $p_\tau \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ , nous trouvons

$$j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} - \lambda \mathbf{u}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \leq -\lambda \int_{\Gamma_3} p_\nu(\eta_\nu - g)u_\nu da + \lambda \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_\nu - g)\|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da.$$

En plus, de (I.3.5), nous obtenons

$$(III.1.47) \quad \begin{aligned} & j'_2(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}) \leq \\ & - \int_{\Gamma_3} p_\nu(\eta_\nu - g)u_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_\nu - g)\|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \in V. \end{aligned}$$

Considérons à présent les suites  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$ ,  $\{t_n\} \subset [0,1]$  et l'élément  $\bar{\mathbf{u}} \in V$ . En utilisant (III.1.19) nous avons  $p_\nu(t_n u_{n\nu} - g)(u_{n\nu} - g) \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$  et ainsi (III.1.47) implique

$$j_2'(t_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}_n) \leq - \int_{\Gamma_3} g p_\nu(t_n u_{n\nu} - g) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(t_n u_{n\nu} - g) \|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da,$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Et puisque  $g \geq 0$ ,  $p_\nu \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ , de (III.1.19) et (I.2.7) et de l'inégalité précédente, nous déduisons

$$j_2'(t_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}_n) \leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(t_n u_{n\nu} - g) \|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da \leq$$

$$L_\tau \int_{\Gamma_3} (|u_{n\nu}| + |g|) \|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da \leq L_\tau c_B \left( c_B \|\mathbf{u}_n\|_V + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|\bar{\mathbf{u}}\|_V.$$

En outre, de l'inégalité précédente, il découle que si  $\|\mathbf{u}_n\|_V \rightarrow \infty$  alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|_V^2} j_2'(t_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}_n) \right] \leq 0.$$

Ce qui prouve que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.19).

Considérons maintenant les suites  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$ ,  $\{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset V$  telles que

$$(III.1.48) \quad \|\mathbf{u}_n\|_V \rightarrow \infty,$$

$$(III.1.49) \quad \|\boldsymbol{\eta}_n\|_V \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où  $C > 0$ . Soit  $\bar{\mathbf{u}}$  un élément de  $V$ . Des relations (III.1.47) et (III.1.19), nous obtenons

$$j_2'(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}_n) \leq \int_{\Gamma_3} p_\nu(\eta_{n\nu} - g) |u_{n\nu}| da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_{n\nu} - g) \|\bar{\mathbf{u}}_\tau\| da \leq$$

$$L_\nu \left( \|\boldsymbol{\eta}_n\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|\mathbf{u}_n\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + L_\tau \left( \|\boldsymbol{\eta}_n\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant maintenant (I.2.7) et (III.1.49) dans l'inégalité précédente nous obtenons

$$(III.1.50) \quad j_2'(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n - \bar{\mathbf{u}}; -\mathbf{u}_n) \leq c_B (C c_B + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)}) (L_\nu \|\mathbf{u}_n\|_V + L_\tau \|\bar{\mathbf{u}}\|_V)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, des relations (III.1.50) et (III.1.48), nous pouvons conclure que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.20).  $\square$

**Lemme III.1.3.** *La fonctionnelle  $j$  satisfait les conditions (I.3.21) et (I.3.24).*

**Démonstration.** Soient  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$  et  $\{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset V$  deux suites telles que  $\boldsymbol{\eta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \in V$  et  $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \in V$ . Par la propriété de compacité de l'application de trace et par (III.1.19) il s'en suit que

$$(III.1.51) \quad p_r(\eta_{m\nu} - g) \rightarrow p_r(\eta_\nu - g) \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3) \quad (r = \nu, \tau),$$

$$(III.1.52) \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3).$$

Par ailleurs, en utilisant (III.1.51) et (III.1.52) nous avons

$$j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}).$$

Ce qui montre que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.21).

Soit maintenant  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$  une suite bornée telle que

$$(III.1.53) \quad \|\mathbf{u}_n\|_V \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où  $C > 0$ . Nous avons

$$|j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(\eta_{m\nu} - g) - p_\nu(\eta_\nu - g)| |u_{n\nu}| da + \int_{\Gamma_3} |p_\tau(\eta_{m\nu} - g) - p_\tau(\eta_\nu - g)| \|\mathbf{u}_{n\tau}\| da.$$

Et, en utilisant (I.2.7), nous obtenons

$$(III.1.54) \quad |j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n)| \leq c_B \left( \|p_\nu(\eta_{m\nu} - g) - p_\nu(\eta_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(\eta_{m\nu} - g) - p_\tau(\eta_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|\mathbf{u}_n\|_V.$$

Il ne reste plus qu'à conclure grâce aux relations (III.1.51), (III.1.53) ainsi que (III.1.54) que  $j$  satisfait la condition (I.3.24).  $\square$

**Lemme III.1.4.** *La fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.23). De plus,*

$$(III.1.55) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - j(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq c_B^2 (L_\nu + L_\tau) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

**Démonstration.** Soit  $\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u} \in V$ . En se rappelant les conditions (III.1.19) et (III.1.20) il vient

$$|j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})| \leq \int_{\Gamma_3} p_\nu(\eta_\nu - g) |u_\nu| da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\eta_\nu - g) \|\mathbf{u}_\tau\| da \leq L_\nu \|\eta_\nu - g\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + L_\tau \|\eta_\nu - g\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

en se reportant à l'inégalité (I.2.7), il vient

$$|j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})| \leq c_B(L_\nu + L_\tau)(c_B \|\boldsymbol{\eta}\|_V + \|g\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}\|_V.$$

Ce qui implique que la condition (I.3.23) est vérifiée.

Considérons maintenant  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  deux éléments de  $V$ . En se reportant encore une fois aux hypothèses (III.1.19) et (III.1.20), nous pouvons énoncer que

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - j(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \\ & \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu - g) - p_\nu(v_\nu - g))(v_\nu - u_\nu) da + \\ & \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_\nu - g) - p_\tau(v_\nu - g))(|\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau|) da \leq \\ L_\nu \int_{\Gamma_3} |u_\nu - v_\nu|^2 da + L_\tau \int_{\Gamma_3} |u_\nu - v_\nu| |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau| da &\leq \\ (L_\nu + L_\tau) \int_{\Gamma_3} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 da. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (I.2.7) dans l'inégalité précédente nous obtenons (III.1.55).  $\square$

Le résultat d'existence concernant la formulation variationnelle  $P_3^{Vb}$  est le suivant :

**Lemme III.1.5.** *Sous les hypothèses (III.1.12)–(III.1.19) et (III.1.23)–(III.1.25), il existe  $L_0 > 0$  dépendant de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{E}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  tel que si  $L_\nu + L_\tau < L_0$ , alors le problème  $P_3^{Vb}$  possède au moins une solution. En outre, la solution satisfait  $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ .*

**Démonstration.** En utilisant les conditions (III.1.41) et (III.1.42), il est clair que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie par la relation (III.1.40) est symétrique, continue et coercive, soit

$$(III.1.56) \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq m \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit  $L_0 = m/c_B^2$ . Un tel réel  $L_0$  dépend seulement de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_a, \mathcal{F}, \mathcal{E}$  et  $\boldsymbol{\beta}$ . Supposons à présent que  $L_\nu + L_\tau < L_0$ . Il existe alors un réel  $c_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $c_B^2(L_\nu + L_\tau) \leq c_0 < m$ . La propriété (III.1.55) implique alors que

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - j(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq c_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous pouvons alors conclure que la fonctionnelle  $j$  satisfait la condition (I.3.22).

En utilisant à présent les lemmes III.1.2–III.1.4, les hypothèses (III.1.23)–(III.1.25), (III.1.43) ainsi que le théorème I.3.16. p.40, il vient que le problème  $P_3^{Vb}$  a au moins une solution  $\mathbf{u}$  de régularité  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème III.1.1.

**Démonstration du Théorème III.1.1.** Considérons, l'élément  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$  solution du problème  $P_3^{Vb}$  et  $\varphi$  définie par (III.1.36). Nous concluons grâce aux relations (III.1.45), (III.1.46) et (III.1.36) que le couple  $(\mathbf{u},\varphi)$  est une solution du problème  $P_3^V$ . De plus la régularité (III.1.31) provient du lemme III.1.5 et (III.1.36).  $\square$

## Chapitre 2

# Problème électro-viscoélastique avec contact unilatéral sans frottement

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide. Ce problème connu sous le nom de *problème de Signorini* a été étudié dans [41] pour les matériaux ayant une loi de comportement élastique et dans [12, 13] pour les matériaux viscoélastiques. Notre objectif ici est l'étude quasistatique de ce même problème pour des matériaux électro-viscoélastiques ayant une loi de comportement de la forme (I.1.19) en contact avec un isolateur.

Nous présentons tout d'abord le problème physique. De là, nous dérivons une formulation faible en termes de déplacements et du potentiel électrique. Pour cette formulation, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution dite faible, dont la démonstration est basée sur un résultat abstrait portant sur les inclusions différentielles faisant intervenir des opérateurs maximaux monotones.

### 2.1 Problème mécanique

Dans ce paragraphe, nous allons décrire le modèle du processus et préciser les hypothèses sur les données. Nous partons du cadre physique décrit dans la partie I des préambules, schématisée à la figure I.1.1 p.6. On doit préciser maintenant la loi de comportement et les conditions de contact. On suppose que le corps est électro-viscoélastique qui repose sur une fondation rigide par la partie  $\Gamma_3$  de sa frontière et que ce contact s'effectue sans frottement c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont complètement libres. On précise en outre qu'on étudie le cas quasistatique et que le corps  $\Omega$  a une loi de comportement de la forme (I.1.24). Sous ces considérations, le

problème mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

**Problème  $P_4$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$(III.2.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.2.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.2.3) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.2.4) \quad \text{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(III.2.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(III.2.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(III.2.7) \quad u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(III.2.8) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(III.2.9) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(III.2.10) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Rappelons que les équations (III.2.1) et (III.2.2) représentent la loi constitutive électroviscoélastique, les équations (III.2.3) et (III.2.4) représentent les équations d'équilibre, tandis que les conditions (III.2.5) et (III.2.6) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacements et en tractions. La condition aux limites (III.2.7) représentent les conditions de contact sans frottement de Signorini rappelées dans la première partie de ce mémoire ; (III.2.8) et (III.2.9) sont les conditions aux limites électriques. Finalement, l'expression (III.2.10) représente la condition initiale.

Pour l'étude du problème  $P_4$ , nous supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}$ , l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$ , le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$  et le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\beta}$  satisfont les propriétés suivantes :

$$(III.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{A} = (a_{ijkh}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) a_{ijkh} = a_{khij} = a_{jikh} \in L^\infty(\Omega). \\ (c) \text{il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad a_{ijkh}\boldsymbol{\tau}_{ij}\boldsymbol{\tau}_{kh} \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

$$(III.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) \text{ il existe } \mathcal{L}_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ (c) \text{ l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ l'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

$$(III.2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (b) e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(III.2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (b) \beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ (c) \text{ il existe } m_\beta > 0 \text{ telle que } \beta_{ij}(\mathbf{x}) E_i E_j \geq m_\beta \|\mathbf{E}\|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

Nous supposons que les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$ , les tractions  $\mathbf{f}_2$  et les charges électriques volumiques  $q_0$  et surfaciques  $q_2$  satisfont

$$(III.2.15) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d),$$

$$(III.2.16) \quad q_0 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_b)),$$

$$(III.2.17) \quad q_2(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T].$$

Les conditions (I.2.4) et (III.2.11) nous permettent de munir l'espace  $V$ , donné par (I.2.3), du produit scalaire et de la norme associée définis par

$$(III.2.18) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad \|\mathbf{u}\|_V = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_V^{1/2}.$$

Nous remarquons que cette norme sur  $V$  est équivalente à celle de  $H^1(\Omega)^d$ . Nous utilisons ces notations tout au long de ce chapitre.

Nous introduisons le convexe  $K$  qui sera l'espace des *déplacements admissibles*, c'est à dire compatibles avec les liaisons (conditions aux limites et conditions unilatérales) :

$$(III.2.19) \quad K = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \}.$$

Finalement, on fait l'hypothèse suivante :

$$(III.2.20) \quad \mathbf{u}_0 \in K.$$

Pour la suite, nous considérons l'espace fonctionnel suivant :

$$W = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}.$$

Maintenant nous avons tous les ingrédients nécessaires pour pouvoir fournir une formulation faible du problème  $P_4$  et présenter le résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible.

## 2.2 Existence et unicité de la solution

Nous allons, dans cette section, commencer par donner une formulation variationnelle en termes de déplacements et de potentiel électrique. Une fois cette formulation faible établie, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible.

Soient  $\mathbf{f} : [0, T] \longrightarrow V$  et  $q : [0, T] \longrightarrow W$  les fonctionnelles

$$(III.2.21) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da,$$

$$(III.2.22) \quad (q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi \, da,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\psi \in W$ ,  $t \in [0, T]$ . Et nous notons que les conditions (III.2.15) et (III.2.16) impliquent

$$(III.2.23) \quad \mathbf{f} \in W^{1,1}(0, T; V), \quad q \in W^{1,1}(0, T; W).$$

Utilisant la formule de Green en supposant dans la suite que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  sont des fonctions régulières satisfaisant (III.2.3)–(III.2.9), nous avons

$$(III.2.24) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{v})_V,$$

$$(III.2.25) \quad (\mathbf{D}(t), \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (q(t), \psi)_W = 0,$$

pour tout  $\mathbf{v} \in K$ ,  $\psi \in W$  et  $t \in [0, T]$ . Mettons maintenant (III.2.1) dans (III.2.24), (III.2.2) dans (III.2.25) et en gardant à l'esprit que  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla \varphi$  ainsi que la condition initiale (III.2.10) nous obtenons pour le problème mécanique  $P_4$  la formulation variationnelle en termes de déplacements et de potentiel électrique suivante.

**Problème  $P_4^V$ .** Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  et le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  tels que

$$(III.2.26) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$(III.2.27) \quad (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \forall t \in [0, T],$$

$$(III.2.28) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Le fait que le problème  $P_4^V$  soit bien posé résulte du résultat d'existence et d'unicité suivant, que nous allons établir dans la prochaine section.

**Théorème III.2.1.** *Nous supposons que (III.2.11)–(III.2.17) et (III.2.20) soient vérifiées. Alors le problème variationnel  $P_4^V$  possède une solution unique  $(\mathbf{u}, \varphi)$ , ayant la régularité*

$$(III.2.29) \quad \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W).$$

Un “quadruplet”  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  satisfaisant aux relations (III.2.1), (III.2.2), (III.2.26)–(III.2.28) s'appelle *solution faible* du problème mécanique  $P_4$ . Nous concluons par le théorème III.2.1 que le problème  $P_4$  admet une solution unique. En ce qui concerne la régularité de la solution faible, il suffit de référer à la régularité de l'élément  $(\mathbf{u}, \varphi) \in W^{1,\infty}(0, T; V) \times W^{1,\infty}(0, T; W)$ , à la loi constitutive (III.2.1)–(III.2.2) et aussi aux hypothèses (III.2.11)–(III.2.14); nous obtenons alors que  $\boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ ,  $\mathbf{D} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$ . En prenant maintenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \pm \mathbf{z}$ , où  $\mathbf{z} \in C_0^\infty(\Omega)^d$  dans (III.2.24) et  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  dans (III.2.25) et en utilisant les notations (III.2.21)–(III.2.22) nous trouvons

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{D}(t) = q_0(t)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . De (III.2.15) et (III.2.10) il s'en suit que  $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$  et  $\text{div } \mathbf{D} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et par conséquent

$$(III.2.30) \quad \boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_1), \quad \mathbf{D} \in L^\infty(0, T; \mathcal{W}).$$

Nous concluons que la solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D})$  du problème  $P_4$  aura la régularité (III.2.29), (III.2.30).

## 2.3 Démonstration du Théorème III.2.1

Nous allons utiliser le théorème abstrait I.3.22 p.42 afin d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela, supposons dans la suite que les hypothèses (III.2.11)–(III.2.17) et (III.2.20) soient vérifiées.

Par le théorème de représentation de Riesz nous définissons les opérateurs  $\mathcal{B} : W \rightarrow W$  et  $\mathcal{C} : V \rightarrow W$  comme suit :

$$(III.2.31) \quad (\mathcal{B}\varphi, \psi)_W = (\beta \nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d},$$

$$(III.2.32) \quad (\mathcal{C}\mathbf{v}, \varphi)_W = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^d},$$

pour tout  $\varphi, \psi \in W, \mathbf{v} \in V$ . De (I.2.8) et (III.2.14), on déduit que  $\mathcal{B}$  est un opérateur linéaire, symétrique et positivement défini. Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est un opérateur inversible et continue sur  $W$ .

Maintenant, en utilisant (III.2.18) et (III.2.13) il s'en suit que  $\mathcal{C}$  est un opérateur linéaire et continu sur  $V$ . Soit  $\mathcal{C}^* : W \rightarrow V$  l'adjoint de  $\mathcal{C}$ . Ainsi, de (I.1.20) nous pouvons écrire

$$(III.2.33) \quad (\mathcal{C}^*\varphi, \mathbf{v})_V = (\mathcal{E}^*\nabla \varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \varphi \in W.$$

Soit  $t \in [0, T]$ . En mettant (III.2.31) et (III.2.32) dans l'égalité (III.2.27), on obtient

$$(\mathcal{B}\varphi(t), \psi)_W = (\mathcal{C}\mathbf{u}(t), \psi)_W + (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W,$$

et par conséquent

$$\mathcal{B}\varphi(t) = \mathcal{C}\mathbf{u}(t) + q(t).$$

D'autre part,  $\mathcal{B} : W \rightarrow W$  est inversible. L'égalité précédente devient alors

$$(III.2.34) \quad \varphi(t) = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}(t) + \mathcal{B}^{-1}q(t).$$

En utilisant (III.2.34) dans l'inégalité (III.2.26) et les définitions des opérateurs  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*$  données par (III.2.31)–(III.2.33), on obtient :

$$(III.2.35) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + \\ (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \geq (\mathbf{f}(t) - \mathcal{C}^*\mathcal{B}^{-1}q(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Soit l'opérateur  $\mathbf{L} : V \rightarrow V$  défini par

$$(III.2.36) \quad \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{C}^* \mathcal{B}^{-1} \mathcal{C}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

et en gardant à l'esprit les propriétés des opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^*$ , nous déduisons que  $\mathbf{L}$  est un opérateur linéaire, continu sur  $V$ .

$$(III.2.37) \quad \|\mathbf{L}\mathbf{u}_1 - \mathbf{L}\mathbf{u}_2\|_V \leq \|\mathbf{L}\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V.$$

Nous désignons par  $\mathcal{G} : V \rightarrow V$  l'opérateur basé sur la représentation de Riesz et donné par

$$(III.2.38) \quad (\mathcal{G}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

En tenant compte maintenant de (III.2.12), (III.2.11), (III.2.18) et (III.2.38), il résulte

$$(III.2.39) \quad \|\mathcal{G}\mathbf{u}_1 - \mathcal{G}\mathbf{u}_2\|_V \leq \left( \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|\mathbf{L}\| \right) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V.$$

Cette relation prouve que l'opérateur  $\mathcal{G}$  est un opérateur de Lipschitz.

Soit la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  donnée par

$$(III.2.40) \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathcal{C}^* \mathcal{B}^{-1} q(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant (III.2.23) et le fait que  $\mathcal{C}^* \mathcal{B}^{-1}$  est linéaire et continu, il vient en observant la relation (III.2.40) que

$$(III.2.41) \quad \mathbf{f} \in W^{1,1}(0, T; V).$$

D'autre part, l'opérateur

$$\mathcal{G} + \left( \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|\mathbf{L}\| \right) I : V \rightarrow V$$

est un opérateur de Lipschitz sur  $V$ . On introduit à présent la fonction indicatrice  $\psi_K : V \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  de l'ensemble  $K$  ainsi que son sous-différentiel  $\partial\psi_K$ . L'ensemble  $K$  étant non vide, fermé et convexe, le sous-différentiel  $\partial\psi_K$  est un opérateur maximal monotone sur l'espace  $V$ . Le domaine de ce sous-différentiel est ainsi :  $D(\partial\psi_K) = K$ .

Nous pouvons à présent dire que la somme

$$\partial\psi_K + \mathcal{G} + \left( \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|\mathbf{L}\| \right) I : K \subset V \rightarrow 2^V$$

est un opérateur maximal monotone. Les hypothèses (III.2.41) et (III.2.20) étant satisfaites, nous pouvons appliquer le théorème I.3.22 avec  $X = V$ ,  $A = \partial\psi_K + \mathcal{G} : D(A) = K \subset V \rightarrow 2^V$  et  $\omega = \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}}{m_{\mathcal{A}}} + \|\mathbf{L}\|$ . De ce théorème, nous déduisons qu'il existe un unique élément  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$  vérifiant

$$(III.2.42) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) + \partial\psi_K(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{G}\mathbf{u}(t) \ni \mathbf{f}(t) \quad \text{p.p. } t \in (0,T),$$

$$(III.2.43) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

De plus, pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{g} \in V$  nous avons l'équivalence :

$$\mathbf{g} \in \partial\psi_K(\mathbf{u}) \iff \mathbf{u} \in K, \quad (\mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

L'inclusion différentielle (III.2.42) est équivalente à l'inéquation variationnelle :

$$(III.2.44) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + (\mathcal{G}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ \forall \mathbf{v} \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0,T).$$

Il vient à partir de (III.2.44), (III.2.38) et (III.2.18) que  $\mathbf{u}$  satisfait l'inéquation

$$(III.2.45) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \\ (\mathbf{L}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad \text{p.p. } t \in (0,T).$$

Des relations (III.2.45), (III.2.38), (III.2.36) et (III.2.40), nous concluons que  $\mathbf{u}$  satisfait l'inéquation (III.2.35). Soit  $\varphi$  la fonction donnée par (III.2.34). En utilisant (III.2.35), (III.2.43) et (III.2.34), il résulte que  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est solution du problème variationnel  $P_4^V$ . En ce qui concerne la régularité de la fonction  $\varphi$ , il suffit de se référer à la régularité de l'élément  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$  et aux hypothèses (III.2.34), (III.2.23) ; nous obtenons alors que la fonction  $\varphi$  possède la régularité  $\varphi \in W^{1,\infty}(0,T;W)$ .

Nous venons d'exhiber une solution  $(\mathbf{u}, \varphi)$  de régularité :  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ ,  $\varphi \in W^{1,\infty}(0,T;W)$ . La partie unicité de la fonction  $\varphi$  se déduit de l'unicité de la fonction  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$  solution des relations (III.2.42), (III.2.43) donnée par le théorème I.3.22 ainsi qu'en tenant compte de (III.2.34).  $\square$

## Quatrième partie

# Modélisation numérique des structures piézoélectriques en contact



## Partie IV

# Modélisation numérique des structures piézoélectriques en contact

L'analyse des problèmes de contact avec frottement est très importante et intervient dans de nombreuses applications d'ingénierie industrielle, citons entre autre [3, 80, 89]. La recherche d'une solution analytique d'un problème de mécanique issu d'une modélisation complexe, où par exemple le contact et le frottement s'ajoutent à des non linéarités du matériau ou de la géométrie, devient fastidieuse, voire impossible. Il faut en conséquence faire appel à des techniques numériques pour obtenir une solution approchée du problème. Ces techniques vont faire l'objet de cette partie.

Nous allons alors introduire l'analyse numérique, que nous allons adopter pour résoudre le type de problèmes précédemment envisagés. Cette analyse repose sur une approximation à la fois en temps et en espace, en utilisant notamment une méthode de type éléments finis pour la discrétisation spatiale [24, 53, 81, 91, 117] et la méthode d'Euler implicite pour la discrétisation en temps [32].

Deux approches numériques, basées sur la méthode de Lagrangien augmenté et la méthode de pénalité (voir [2, 4]) sont également utilisées pour résoudre le contact d'un corps piézoélectrique, sans et avec frottement, avec un isolateur. La méthode de pénalité convertit les problèmes de contact contraints par inégalité et donc non différentiables en des problèmes non-contraints différentiables mais approchés. Elle reste cependant sensible au choix du paramètre de pénalité, qui par sa valeur élevée pose des problèmes de conditionnement. La méthode du Lagrangien augmenté transforme les mêmes problèmes en des problèmes non-contraints différentiables exacts. Elle connaît de plus en plus de succès car elle permet d'éviter les problèmes de la méthode de pénalité, elle est notamment caractérisée par sa robustesse, son bon conditionnement et surtout sa solution exacte. Avec les deux approches, pénalité et Lagrangien augmenté, les non-linéarités sont résolues avec une méthode qui repose sur un algorithme de type prédiction-correction combinant la méthode d'Euler implicite et la méthode de Newton

généralisée (voir [2, 3]) étendue aux problèmes du contact d'un corps piézoélectrique. Cette méthode permet de transformer le système d'équations différentielles partielles non linéaires en une succession de systèmes d'équations linéarisées pouvant être traité par une méthode classique de résolution de système linéaire. L'algorithme numérique développé dans ce travail est ensuite implémenté dans le cadre de la Bibliothèque Modulef [17].

Le modèle théorique et l'algorithme numérique sont testés sur des problèmes-test pour en vérifier la validité. Enfin, dans le premier chapitre, le modèle est appliqué au problème de contact avec frottement d'un corps électro-élastique avec un isolateur ; le problème est alors traité dans un cadre statique. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude numérique d'un problème de contact unilatéral sans frottement d'un corps électro-viscoélastique avec un isolateur. Dans ce cas, le problème est résolu de manière quasistatique. Pour chacun de ces problèmes, nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème discrétisé puis nous présentons un résultat abstrait d'estimations d'erreurs qui dépend des éléments finis utilisés ainsi que de la régularité des solutions.

Plusieurs publications récentes (voir par exemple [18, 55, 67, 85, 98, 99]) ont été dédiées à la modélisation, à l'analyse variationnelle et à l'approximation numérique de problèmes piézoélectriques.

# Chapitre 1

## Cas statique

Dans ce chapitre on reprend le problème statique de contact entre un corps électro-élastique et un isolateur avec une loi de frottement de type Coulomb qui a été analysée dans le deuxième chapitre de la partie II. Après avoir décrit dans la première section quelques rappels sur le problème mécanique étudié, nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles pour la formulation variationnelle. Nous abordons dans la deuxième section l'approche numérique du problème, en étudiant les estimations d'erreurs. Dans la troisième section, nous introduisons un algorithme itératif pour la résolution des problèmes approchés. Enfin, des résultats numériques sont présentés dans la dernière section et montrent l'efficacité de la méthode.

L'objectif du présent chapitre, qui a fait l'objet de la communication [83], est de présenter et d'étendre les résultats acquis dans [10] pour le contact unilatéral sans frottement au cas du contact et du frottement régularisés de type compliance et de proposer une analyse numérique du modèle.

### 1.1 Électro-élasticité, formulation variationnelle

Nous gardons ici les mêmes notations qu'au deuxième chapitre de la partie II de ce mémoire (page 78) et nous reprenons le même modèle physique.

**Problème  $P_5$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que*

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.1.1)} \quad & \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) && \text{dans } \Omega, \\
 \text{(IV.1.2)} \quad & \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi) && \text{dans } \Omega, \\
 \text{(IV.1.3)} \quad & \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} && \text{dans } \Omega, \\
 \text{(IV.1.4)} \quad & \text{div } \mathbf{D} = q_0 && \text{dans } \Omega, \\
 \text{(IV.1.5)} \quad & \mathbf{u} = \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1, \\
 \text{(IV.1.6)} \quad & \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 && \text{sur } \Gamma_2, \\
 \text{(IV.1.7)} \quad & -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) && \text{sur } \Gamma_3, \\
 \text{(IV.1.8)} \quad & \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \text{ si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} && \text{sur } \Gamma_3, \\
 \text{(IV.1.9)} \quad & \varphi = 0 && \text{sur } \Gamma_a, \\
 \text{(IV.1.10)} \quad & \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 && \text{sur } \Gamma_b,
 \end{aligned}$$

où la frontière de  $\Omega$  est composée de  $\Gamma_3$  (de mesure non nulle),  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , d'une part, et de  $\Gamma_a$  (de mesure non nulle) et  $\Gamma_b$ , d'autre part. On supposera que le tenseur de l'élasticité d'ordre quatre  $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$  est symétrique et défini positif, le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  vérifie  $e_{ijk} = e_{ikj}$  et le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$  est symétrique et défini positif. Les chargements extérieurs sont représentés par  $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ ,  $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_3)^d$ ,  $q_0 \in L^2(\Omega)$  et  $q_2 \in L^2(\Gamma_b)$  (avec  $q_2 = 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ ). Sur la frontière  $\Gamma_3$ , le corps électro-élastique  $\Omega$  peut rentrer en contact avec un obstacle isolateur.

Ici  $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$  est le déplacement normal,  $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$  représente le déplacement tangentiel,  $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$  est la contrainte normale et  $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$  est la contrainte tangentielle. Les fonctions  $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (pour  $r = \nu, \tau$ ) sont des fonctions positives satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$\text{(IV.1.11)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists L_r > 0 \text{ telle que } |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) l'application } x \mapsto p_r(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } x \mapsto p_r(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right.$$

La fonction  $g$  représente l'interstice initial entre le corps et la fondation, mesuré le long de la normale  $\boldsymbol{\nu}$  telle que

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Afin de présenter la formulation variationnelle du problème  $P_5$  nous introduisons les espaces de Hilbert

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}, \\ W &= \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}. \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{f} \in V$  (respectivement  $q \in W$ ) l'élément défini par le théorème de Riesz représentant  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  (respectivement  $q_0$  et  $q_2$ ) (voir (II.2.18)–(II.2.19) p.80).

Soit  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour le problème mécanique  $P_5$  la formulation variationnelle suivante :

**Problème  $P_5^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} \in V$  et le potentiel électrique  $\varphi \in W$  tels que*

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.12)} \quad & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ & + h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$\text{(IV.1.13)} \quad (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi)_W \quad \forall \psi \in W.$$

On a prouvé dans le deuxième chapitre de la partie II que  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du problème (IV.1.12)–(IV.1.13), si et seulement si  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est une solution du problème ci-après.

**Problème  $P_5^{Vb}$ .** *Trouver  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ , tel que*

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.14)} \quad & a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + j((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) - j((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{u}, \varphi)) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \psi - \varphi) \\ & \forall (\mathbf{v}, \psi) \in V \times W, \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} \\ &+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

$$j((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$L(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V + (q, \psi)_W.$$

L'existence et l'unicité d'un couple de solution  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$  du problème  $P_5^V$  ont été établies dans le théorème II.2.1, p.81.

Il n'existe pas de problème d'optimisation équivalent du fait que l'on a ici un problème quasi-variationnelle et non variationnelle car la fonctionnelle  $j$  dépend de la solution (d'autant plus que le problème est également non symétrique). Cependant, en utilisant le principe des travaux virtuels (voir [63] ou encore [86]) généralisé à des efforts d'interface, le problème variationnel (IV.1.14) est équivalent au problème suivant :

**Problème  $P_5^{Vp}$ .** *Trouver  $(\mathbf{u}, \varphi) \in V \times W$ , tel que*

$$(IV.1.15) \quad a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + \int_{\Gamma_3} g_\nu(\mathbf{v}) \gamma_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_\tau \, da = L(\mathbf{v}, \psi)$$

$$\forall (\mathbf{v}, \psi) \in V \times W.$$

Les efforts de contact  $\gamma_\nu$  et de frottement  $\boldsymbol{\gamma}_\tau$  sont respectivement définis par (voir la section I.1.3 p.13),

$$\gamma_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g_\nu) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}_\tau \in \partial\Psi_{C[\sigma_\nu(\mathbf{u})]}^*(\mathbf{g}_\tau).$$

Remarquons que les termes de contact et de frottement sont non différentiables. Nous allons voir à la section prochaine comment palier à cette difficulté en adoptant une formulation en quasi-Lagrangien augmenté.

## 1.2 Formulation variationnelle approchée, estimation d'erreurs

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment approximer la formulation variationnelle  $P_5^V$ . Pour l'approximation via éléments finis, on va suivre les techniques classiques cités aux références [86, 117]. La méthode des éléments finis consiste en une discrétisation spatiale du corps en éléments géométriques simples connectés par un nombre fini de noeuds. Supposant une solution de type polynômiale par morceaux dans chaque élément, la méthode permet de trouver une solution discrète aux noeuds, permettant d'approximer les mouvements du corps dans l'espace. Une fois la description de l'approximation du problème électro-élastique avec contact faite, on va montrer un résultat

de convergence et d'estimation d'erreur. Ce résultat représente une extension du travail réalisé dans [10] au cas du contact avec frottement de type compliance normale ; ce travail [10] est cependant présenté brièvement dans le corollaire IV.1.3.

Partout dans cette section nous supposons que les hypothèses du théorème II.2.1, p.81. sont satisfaites. Soit  $V^h \subset V$  l'espace d'éléments finis approprié pour approcher le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  et soit  $W^h \subset W$  l'espace d'éléments finis destiné à l'approximation du champ du potentiel électrique  $\varphi$ . Ainsi la formulation discrète du problème  $P_5$  peut être formulée comme suit :

**Problème  $P_5^{V^h}$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}^h \in V^h$  et le potentiel électrique  $\varphi^h \in W^h$  tels que*

$$(IV.1.16) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h))_{L^2(\Omega)^d} \\ + h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(IV.1.17) \quad (\boldsymbol{\beta} \nabla \varphi^h, \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} = (q, \psi^h)_W \quad \forall \psi^h \in W.$$

Utilisant les arguments présentés au paragraphe précédent, nous voyons que sous les conditions établies au théorème II.2.1, le problème  $P_5^{V^h}$  possède une unique solution  $(\mathbf{u}^h, \varphi^h) \in V^h \times W^h$ .

Par la suite, nous adoptons la constante  $c$  pour désigner une constante générique, sa valeur pourra changer selon le contexte dans lequel elle est employée. Nous donnons à présent un résultat d'estimation de l'erreur :

**Théorème IV.1.1.** *Nous gardons les hypothèses du théorème II.2.1, si  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est la solution du problème  $P_5$  et si  $(\mathbf{u}^h, \varphi^h)$  est la solution du problème discret  $P_5^{V^h}$ , alors il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que :*

$$(IV.1.18) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W \leq c \inf_{(\mathbf{v}^h, \psi^h) \in V^h \times W^h} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\varphi - \psi^h\|_W \\ + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + \|\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^{1/2} + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}^{1/2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^{1/2} \\ + (\|p_\nu(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}^{1/2} \}.$$

**Démonstration.** Prenons  $\psi = \psi^h \in W^h$  dans (IV.1.13) et ajoutons l'inégalité à (IV.1.17) pour obtenir

$$(\boldsymbol{\beta} \nabla (\varphi - \varphi^h), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad \forall \psi^h \in W^h.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \varphi^h))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \varphi^h))_{L^2(\Omega)^d} \\ &= (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d}, \quad \forall \psi^h \in W^h. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.19)} \quad & (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \varphi^h))_{L^2(\Omega)^d} = (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \varphi^h))_{L^2(\Omega)^d} \\ & - (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} + (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

pour tout  $\psi^h \in W^h$ .

Ensuite, il s'agit de donner une majoration des erreurs  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$  et  $\|\varphi - \varphi^h\|_W$ . Prenons maintenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^h \in V^h$  dans (IV.1.12), nous avons

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.20)} \quad & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{L^2(\Omega)^d} \leq \\ & h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h)_V. \end{aligned}$$

L'inégalité variationnelle (IV.1.16) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.21)} \quad & (-\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{\mathcal{H}} + (-\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{L^2(\Omega)^d} \leq \\ & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ & + h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned}$$

Nous ajoutons maintenant (IV.1.20) et (IV.1.21), nous avons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{\mathcal{H}} + (\nabla(\varphi - \varphi^h), \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{L^2(\Omega)^d} \leq \\ & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ & + h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned}$$

En outre, de (IV.1.19) nous déduisons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \varphi^h))_{L^2(\Omega)^d} \leq \\ & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} \\ & + (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} \\ & + h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad \forall \psi^h \in W^h. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (II.2.12)–(II.2.13) sur l'inégalité précédente, nous avons

$$(IV.1.22) \quad m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^2 + m_{\beta} \|\varphi - \varphi^h\|_W^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

où

$$R_1 = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}$$

$$+ (\boldsymbol{\beta}\nabla(\varphi - \varphi^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), \nabla(\varphi - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d},$$

$$R_2 = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}))_{L^2(\Omega)^d} + h(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V,$$

$$R_3 = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

$$R_4 = h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - h(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - h(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}).$$

Nous estimons les termes du membre droit de (IV.1.22). En utilisant les propriétés des opérateurs  $\mathcal{F}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\mathcal{E}$ , on a

$$(IV.1.23) \quad |R_1| \leq c \{ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{\mathcal{H}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{\mathcal{H}} \\ + \|\varphi - \varphi^h\|_W \|\varphi - \psi^h\|_W + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{\mathcal{H}} \|\varphi - \psi^h\|_W \}.$$

Utilisant (IV.1.11), nous avons

$$(IV.1.24) \quad |R_2| \leq \|\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{\mathcal{H}} \\ + (\|p_{\nu}(u_{\nu} - g)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_{\tau}(u_{\nu} - g)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}.$$

De

$$R_3 = \int_{\Gamma_3} [(p_{\nu}(u_{\nu} - g) - p_{\nu}(u_{\nu}^h - g))(u_{\nu}^h - u_{\nu}) \\ + (p_{\tau}(u_{\nu} - g) - p_{\tau}(u_{\nu}^h - g))(|\mathbf{u}_{\tau}^h| - |\mathbf{u}_{\tau}|)] da,$$

nous avons

$$|R_3| \leq \int_{\Gamma_3} [L_{\nu}|u_{\nu} - u_{\nu}^h|^2 + L_{\tau}|u_{\nu} - u_{\nu}^h| |\mathbf{u}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}^h|] da,$$

ainsi,

$$(IV.1.25) \quad |R_3| \leq c (L_{\nu} + L_{\tau}) \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Pareillement,

$$R_4 = \int_{\Gamma_3} [(p_\nu(u_\nu^h - g) - p_\nu(u_\nu - g))(v_\nu^h - u_\nu) + (p_\tau(u_\nu^h - g) - p_\tau(u_\nu - g))(\|\mathbf{v}_\tau^h\| - \|\mathbf{u}_\tau\|)] da.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.26)} \quad |R_4| &\leq \int_{\Gamma_3} [L_\nu |u_\nu - u_\nu^h| |u_\nu - v_\nu^h| + L_\tau |u_\nu - u_\nu^h| |\mathbf{u}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h|] da \\ &\leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N} \\ &\leq c \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Cauchy

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2, \quad a, b, \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0,$$

et des inégalités (IV.1.22)–(IV.1.26), après quelques calculs, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^2 + \|\varphi - \varphi^h\|_W^2 &\leq c \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \|\varphi - \psi^h\|_W^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}^2 \\ &\quad + \|\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi^h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V \\ &\quad + (\|p_\nu(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N} \}. \end{aligned}$$

où  $c > 0$  une constante assez petite, par conséquent, nous avons prouvé le résultat (IV.1.18).  $\square$

L'inégalité (IV.1.18) est le point de départ des estimations d'erreurs pour les choix particuliers des sous espaces de dimension finie  $V^h$  et  $W^h$  et de conditions supplémentaires de régularité de la solution. Comme exemple, nous supposons que  $\boldsymbol{\sigma}_\tau \in (L^2(\Gamma_3))^N$  et en intégrant par partie, nous avons

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} [\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) + p_\tau(u_\nu - g)(\|\mathbf{v}_\tau^h\| - \|\mathbf{u}_\tau\|)] da.$$

Par conséquent,

$$\text{(IV.1.27)} \quad \|R_2\| \leq (\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}.$$

Par conséquent, nous avons la variante suivante du théorème IV.1.1.

**Théorème IV.1.2.** *Nous gardons les hypothèses du théorème II.2.1. Sous la condition supplémentaire  $\boldsymbol{\sigma}_\tau \in (L^2(\Gamma_3))^N$ , si  $L_\nu + L_\tau$  est assez petit, alors nous avons l'estimation de l'erreur de la solution qui découle de (IV.1.27) et (IV.1.18) :*

$$(IV.1.28) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W \leq c \inf_{(\mathbf{v}^h, \psi^h) \in V^h \times W^h} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\varphi - \psi^h\|_W \\ + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + (\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} \|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_3)^N}^{1/2} \}.$$

La fiabilité des estimations d'erreur dépend étroitement de la qualité de la solution recouverte. Cela nous permet de choisir celle qui offre la meilleure estimation d'erreur pour le problème étudié ; dans ce cas, nous supposons les conditions supplémentaires de régularité suivantes :

$$(IV.1.29) \quad \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^N, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3)^N, \quad \varphi \in H^2(\Omega).$$

Nous utilisons  $\Pi^h \mathbf{u}$  pour désigner l'élément fini standard interpolant de  $\mathbf{u}$ . Aussi nous utilisons le même symbole  $\Pi^h \mathbf{u}$  pour l'interpolation sur  $\Gamma_3$  et  $\Pi^h \varphi$  pour noter l'interpolant de  $\varphi$ . et d'après (IV.1.28), nous avons

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W \leq c \{ \|\mathbf{u} - \Pi^h \mathbf{u}\|_V + \|\varphi - \Pi^h \varphi\|_W \\ + \|\mathbf{u} - \Pi^h \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + (\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} \|\mathbf{u} - \Pi^h \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)^N}^{1/2} \}.$$

Nous avons aussi les majorations classiques d'erreur d'interpolation suivantes (voir [24]) :

$$\|\mathbf{u} - \Pi^h \mathbf{u}\|_V \leq c h |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^N}, \\ \|\mathbf{u} - \Pi^h \mathbf{u}\|_{H^2(\Gamma_3)^N} \leq c h^2 |\mathbf{u}|_{H^2(\Gamma_3)^N}, \\ \|\varphi - \Pi^h \varphi\|_W \leq c h |\varphi|_{H^2(\Omega)^N}.$$

Par conséquent, sous les hypothèses supplémentaires (IV.1.29), nous obtenons l'estimation d'erreur d'ordre optimal :

$$(IV.1.30) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W \leq c h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^N} + |\varphi|_{H^2(\Omega)^N} \\ + |\mathbf{u}|_{H^2(\Gamma_3)^N} + (\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^N} + \|p_\tau(u_\nu - g)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} |\mathbf{u}|_{H^2(\Gamma_3)^N}^{1/2} \}.$$

L'estimation d'erreur est construite à partir des informations sur la solution éléments finis (degrés des fonctions d'interpolation), la géométrie du domaine (les éventuelles singularités) et le maillage associé (la taille des éléments). Par conséquent, les estimations d'erreurs (IV.1.30) sont des exemples de résultats parmi bien d'autres, ceci

sous certaines conditions de régularité. Si les conditions de régularité sont différentes, les estimations d'erreurs sont à modifier en conséquence, mais ceci s'en suit clairement de (IV.1.18). L'objectif principal de cette estimation est la prédiction du taux de convergence asymptotique de l'erreur éléments finis.

Il convient de rappeler un résultat d'estimation d'erreur établi dans [10] pour le cas du contact unilatéral sans frottement entre un corps électro-élastique et une fondation rigide, qui prend la forme suivante :

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Dans ce cas, on a

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(\mathbf{v}^h \cdot \boldsymbol{\nu} - u_\nu) da, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

et si l'on suppose que

$$(IV.1.31) \quad \sigma_\nu \in L^2(\Gamma_3), \quad u_\nu \in H^2(\Gamma_3).$$

Alors, on a le résultat suivante :

**Corollaire IV.1.3.** *Sous les conditions de régularité (IV.1.29) et (IV.1.31), on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$(IV.1.32) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W \leq ch.$$

Pour les détails de la démonstration, on peut se référer à [10].

### 1.3 Méthode de résolution

Dans cette section nous décrivons les méthodes numériques pour le traitement du contact avec frottement entre un corps électro-élastique et une fondation immobile. La formulation mixte utilisant un quasi-Lagrangien augmenté a été spécialement développée dans la perspective d'utiliser une méthode de type Newton sur le système non linéaire et non différentiable (voir le chapitre 4 du partie I). Cette formulation de type Lagrangien sera utilisée à la fois pour traiter le cas du contact unilatéral sans frottement mais également pour les problèmes régularisés de type compliance (on prendra pour cela le multiplicateur nul).

Les simulations numériques ayant été faites en dimension 2, nous nous plaçons par la suite dans le cadre bidimensionnel. Nous admettons que le corps considéré  $\Omega$  est

un domaine polygonal de l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Ce dernier peut ainsi être décomposé en un nombre fini  $N^h$  de triangles ou de quadrilatères  $\Omega^e$  de taille maximale  $h$ , compatible avec la partition de la frontière  $\Gamma$ , via une triangularisation  $\mathcal{T}^h = \{\Omega^e\}$ ;  $h$  désigne le diamètre maximum des éléments  $\Omega^e$ , tels que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N^h} \bar{\Omega}^e$ . La triangulation  $\mathcal{T}^h$  est supposée régulière.

Notons  $X^h$  l'espace élément fini des éléments linéaires correspondant à la triangulation  $\mathcal{T}^h$  construite, les espaces de dimension fini  $V^h$  et  $W^h$  sont données par

$$V^h = X^h \cap V \quad \text{et} \quad W^h = X^h \cap W.$$

Si l'on considère la famille d'éléments  $P_1$ , les espaces discrets approchant  $V$  et  $W$  sont alors définis par :

$$(IV.1.33) \quad V^h = \{\mathbf{v}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d ; \mathbf{v}^h|_{\Omega^e} \in [P_1(\hat{\Omega}^e)]^d, \quad \Omega^e \in \mathcal{T}^h\},$$

$$(IV.1.34) \quad W^h = \{\psi^h \in C(\bar{\Omega}) ; \psi^h|_{\Omega^e} \in P_1(\hat{\Omega}^e), \quad \Omega^e \in \mathcal{T}^h\},$$

où  $\hat{\Omega}^e$  désigne l'élément référence sur lequel sont définies les fonctions du base.

### 1.3.1 Formulation en quasi-lagrangien augmenté

Afin de régulariser la non-différentiabilité des termes de contact et de frottement, nous utilisons une formulation en quasi-lagrangien augmenté, introduite par Alart et Curnier [4]. Dans la littérature, ce choix est justifié par le fait que cette méthode :

- i) assure de manière (macroscopiquement) exacte les conditions de contact unilatéral ;
- ii) est fondée sur l'optimisation sans contraintes d'un Lagrangien régulier ( $C^1$ ), contrairement au formalisme Lagrangien classique [4, 86] ;
- iii) ne perturbe que très peu le conditionnement des systèmes à résoudre, à la différence des méthodes de pénalité (ou de manière similaire le traitement des lois de type compliance) [116].

La méthode de Lagrangien augmenté introduit un paramètre (dit d'augmentation) dont le choix optimal n'est pas simple ; de mauvais choix peuvent donner lieu à de mauvais conditionnements, à l'instar de la méthode de pénalité (mais dans une moindre mesure).

Cette formulation possède l'avantage de traiter les lois multivoques de contact et de frottement telle qu'elles se présentent. Toutes les grandeurs à venir sont supposées totalement discrétisées en espace (méthode éléments finis). Nous désignons respectivement par  $\mathbf{u}^h, \varphi^h$  et  $\boldsymbol{\lambda}^h$  les approximations discrètes de  $\mathbf{u}, \varphi$  et  $\boldsymbol{\lambda}$ .

En utilisant une approche en quasi-Lagrangien augmenté (pour plus de détails nous renvoyons notamment à [3], ainsi qu'au chapitre 4 du partie I), le problème (IV.1.15) devient

$$(IV.1.35) \quad a((\mathbf{u}^h, \varphi^h), (\mathbf{v}^h, \psi^h)) + \int_{\Gamma_3} \nabla \mathbf{u}(l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \mathbf{v}^h \, da \\ + \int_{\Gamma_3} \nabla \boldsymbol{\lambda}(l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \boldsymbol{\gamma}^h \, da = L(\mathbf{v}^h, \psi^h)$$

pour tout  $(\mathbf{v}^h, \psi^h) \in V^h \times W^h$  et  $\boldsymbol{\gamma}^h \in H_c^h$ , où  $H_c^h$  représente un sous-espace de dimension finie inclus dans l'espace  $L^2(\Gamma_3)$ . Les termes  $l_\nu^r$  et  $l_\tau^r$  représentent les régularisées des fonctions indicatrices  $\Psi_{\mathbb{R}^-}(\lambda_\nu^h)$  et  $\Psi_{\hat{C}(\lambda_\nu^h + r g_\nu^h)}$  et sont définis de la façon suivante (voir (I.4.16) p.49) :

$$l_\nu^r(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h) = (g_\nu(\mathbf{v}^h), \gamma_\nu^h) + \frac{r}{2} \|g_\nu^h\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2\{\gamma_\nu^h + r g_\nu(\mathbf{v}^h), \mathbb{R}_-^p\}, \\ l_\tau^r(\mathbf{v}^h, \gamma_\tau^h) = \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}^h) \cdot \boldsymbol{\gamma}_\tau^h + \frac{r}{2} \|\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}^h)\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2\{\boldsymbol{\gamma}_\tau^h + r \mathbf{g}_\tau(\mathbf{v}^h), \hat{C}[\lambda_\nu^h + r g_\nu(\mathbf{u}^h)]\}.$$

**Remarques.** i) la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est définie positive (mais non symétrique puisque la matrice de la piézoélectricité globale est antisymétrique). Cependant, il est possible d'utiliser une deuxième formulation variationnelle équivalente caractérisée par une forme bilinéaire  $\check{a}(.,.)$  symétrique mais non-elliptique (voir [70]). La forme bilinéaire  $\check{a}(.,.)$  est définie par :

$$\check{a}((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, -\psi)).$$

ii) À partir de cette seconde forme variationnelle, il est possible de considérer l'énergie de déformation piézoélectrique définie par :

$$\Pi(\mathbf{v}, \psi) = \frac{1}{2} \check{a}((\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{v}, \psi)) - L(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in V \times W,$$

ou encore

$$\Pi(\mathbf{v}, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [f_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \beta_{ij} \psi_{,j} \psi_{,i} + e_{ikl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) \psi_{,i} + e_{kij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \psi_{,k}] \, dx \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{f}_0)_i \mathbf{v}_i \, dx - \int_{\Gamma_2} (\mathbf{f}_2)_i \mathbf{v}_i \, da - \int_{\Omega} (q_0)_i \psi_i \, dx + \int_{\Gamma_b} (q_2)_i \psi_i \, da.$$

iii) On rappelle que la méthode de pénalité peut être obtenue via la formulation en quasi-Lagrangien augmenté en considérant les multiplicateurs  $\gamma_\nu$  et  $\gamma_\tau$  nuls. Les Lagrangiens  $l_\nu^r$  et  $l_\tau^r$  prendraient respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} p_\nu^r(\mathbf{v}) &= \Psi_{\mathbb{R}^+} \nabla \frac{r}{2} \|g_\nu(\mathbf{v})\|^2, \\ p_\tau^r(\mathbf{v}) &= \Psi_{\tilde{C}[rg_\nu(\mathbf{u})]}^* \nabla \frac{r}{2} \|\mathbf{g}_\tau(\mathbf{v})\|^2. \end{aligned}$$

La discrétisation est appliquée sur le corps  $\Omega$  mais également sur l'interface de contact, elle se fait via des éléments contact "noeud à rigide" selon le type de problème traité. Les multiplicateurs augmentés se discrétisent de la même manière que les champs de déplacement et de potentiel électrique. Un moyen commode de les introduire est de déclarer une couche de noeuds supplémentaire dont les degrés de liberté deviennent les multiplicateurs en question (voir la section 4.2 p.51). Pour plus de détails concernant ces éléments contacts, nous renvoyons à [3, 4].

Introduisons maintenant, dans chaque sous-domaine  $\Omega^e$ , les notations matricielles suivantes :

$$(IV.1.36) \quad \mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \mathbf{u}^i \alpha^i, \quad \varphi^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \varphi^i \zeta^i, \quad \boldsymbol{\lambda}^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \boldsymbol{\lambda}^i \xi^i,$$

où  $\alpha^i$ ,  $\zeta^i$  et  $\xi^i$  sont les fonctions de bases, constantes par morceaux, prenant la valeur 1 au noeud  $i$  et 0 aux autres noeuds, nous avons pris ici une interpolation linéaire de type  $P_1$ . Elles dépendent du type d'élément contact utilisé (et plus particulièrement de la géométrie de l'élément contact (voir la section I.4.2 p.51)); pour plus de précisions sur le sujet, nous reportons le lecteur à la référence [63]. Les vecteurs  $\mathbf{u}^i$ ,  $\varphi^i$  et  $\boldsymbol{\lambda}^i$  sont respectivement les valeurs aux noeuds  $i$  des fonctions  $\mathbf{u}^h$ ,  $\varphi^h$  et  $\boldsymbol{\lambda}^h$ .  $N^{tot}$  est le nombre total de noeuds du maillage. Avec cette construction des espaces  $V^h$  et  $W^h$ , les fonctions  $\mathbf{u}^h \in V^h$  (resp  $\varphi^h \in W^h$ ) sont caractérisées par leurs valeurs aux sommets de la triangularisation (voir [24]).

Après discrétisation par éléments finis électro-élastiques et de contact, le système (IV.1.35) peut s'écrire, pour tout champ test élastique  $\mathbf{v}^h$ , tout champ test électrique  $\psi^h$  et tout champ test multiplicateur  $\boldsymbol{\gamma}^h$ ,

$$(IV.1.37) \quad (\mathbf{G}(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi))_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} + (F(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}))_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}}} = 0$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N^{tot}}$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^{N^{tot}}$  et  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}}$ . La notation  $\mathbf{G}$  désigne l'opérateur d'électro-rigidité, défini par

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}(\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi))_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} = & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi^h, \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} \\ & - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_V - (q, \psi^h)_W \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \psi^h \in W^h. \end{aligned}$$

et  $F$  représente l'opérateur de contact frottant défini par

$$(F(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}))_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}}} = \int_{\Gamma_3} \nabla \mathbf{u} (l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \mathbf{v}^h \, da + \int_{\Gamma_3} \nabla \boldsymbol{\lambda} (l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \boldsymbol{\gamma}^h \, da$$

pour tout  $\mathbf{v}^h \in V^h$  et  $\boldsymbol{\gamma} \in H_c^h$ .

Dans les précédentes relations,

- $\mathbf{v}$  (resp  $\psi$ ) représente le vecteur test généralisé constitué par les valeurs  $\mathbf{v}^i$  (resp  $\psi^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N^{tot}$ ,
- $\mathbf{u}$  (resp  $\varphi$ ) représente le vecteur solution généralisé constitué par les valeurs  $\mathbf{u}^i$  (resp  $\varphi^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N^{tot}$ ,
- $\boldsymbol{\lambda}$  (resp  $\boldsymbol{\gamma}$ ) représente le vecteur solution (resp test) généralisé constitué par les valeurs  $\boldsymbol{\lambda}^i$  (resp  $\boldsymbol{\gamma}^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N_{\Gamma_3}^{tot}$ ,
- $N_{\Gamma_3}^{tot}$  désigne le nombre d'éléments utilisés  $\Gamma_3^e$ , issus de la discrétisation du domaine  $\Gamma_3$ .

### 1.3.2 Algorithme de résolution

Les algorithmes de résolution des problèmes issus de Lagrangien augmenté sont traditionnellement des algorithmes de type Uzawa, réputés pour être très stables mais aussi très lents. Cet inconvénient vient du fait qu'ils sont basés sur un traitement alternatif des variables primales et duales. Pour ces raisons, Alart et Curnier [3] se sont tournés vers un algorithme de Newton généralisé permettant de traiter simultanément les variables primales et duales comme inconnues du problème et dont la vitesse de convergence est quadratique au voisinage de la solution. La difficulté de notre problème réside dans la non-différentiabilité du système à résoudre. Une extension rigoureuse de l'algorithme de Newton aux équations non régulières utilise la notion de sous-différentiel et des matrices tangentes généralisées.

En adoptant une forme vectorielle, il est possible de réécrire le système (IV.1.37) sous la forme

$$(IV.1.38) \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}, \varphi) + F(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0},$$

où  $F$  représente l'opérateur de contact frottant, sa forme explicite est donnée par la formule (I.4.20) (page 50), les vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  représentent respectivement les vecteurs généralisés définis comme suit :

$$(IV.1.39) \quad \mathbf{u} = \{\mathbf{u}^i\}_{i=1}^{N^{tot}}, \varphi = \{\varphi^i\}_{i=1}^{N^{tot}} \text{ et } \boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}^i\}_{i=1}^{N^{tot}}.$$

Il convient cependant de noter que les opérateurs  $\mathbf{G}$  et  $F$  présents dans le système (IV.1.38) ont pour une dimension le nombre total de noeuds (électro-élastiques et multiplicateurs).

Afin de résoudre ce système, nous allons adopter une méthode de Newton généralisée (voir [10]) en tenant compte du fait qu'interviennent des opérateurs non différentiables. Cette méthode permet de traiter de manière simultanée les variables déplacements  $\mathbf{u}$ , potentiels  $\varphi$  et multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ . Pour cette raison, nous utilisons par la suite la variable  $\mathbf{x}$  définie comme suit :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\lambda}).$$

Appliquée au système (IV.1.38), la méthode de Newton généralisée s'exprime de la manière suivante :

- Initialisation  
 $\mathbf{x}_0$  solution initiale,
- Itérations  
 $i = 0, \dots, n$  :

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - (\mathbf{K}^i + \mathbf{T}^i)^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{u}^i, \varphi^i) + F(\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i)),$$

$$\mathbf{K}^i = D_{\mathbf{u}, \varphi} \mathbf{G}(\mathbf{u}^i, \varphi^i) \text{ et } \mathbf{T}^i \in \partial_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}} F(\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i),$$

jusqu'à :  $\|\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i\| < \epsilon \|\mathbf{x}^{i+1}\|$ ,  $\epsilon$  précision de convergence.

La matrice  $\mathbf{K}^i$  est la matrice de rigidité électro-élastique tandis que  $\mathbf{T}^i$  représente la matrice tangente de contact issue de l'assemblage des matrices tangentes élémentaires de contact  $\mathbf{T}_e$  définies dans le chapitre 4 du partie I. Cette extension de la méthode de Newton est en définitive assez formelle car en pratique, les itérés n'ont aucune chance de se situer en un point de non-différentiabilité car un ensemble de tels points est de mesure nulle [2]. Cette méthode de résolution de systèmes non linéaires nous conduit

évidement pour chaque itération à la résolution de systèmes linéaires qui ont la forme suivante :

$$(\mathbf{K}^i + \mathbf{T}^i) \Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{G}(\mathbf{u}^i, \varphi^i) - F(\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\lambda}^i),$$

où  $\Delta \mathbf{x}^i = (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \varphi^i, \Delta \boldsymbol{\lambda}^i)$  avec  $\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i$ ,  $\Delta \varphi^i = \varphi^{i+1} - \varphi^i$  et  $\Delta \boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\lambda}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}^i$ .

Une caractéristique de la formulation hybride est qu'elle conduit à une matrice tangente non symétrique (dans le cas de certaines lois de contact avec frottement), non définie positive, quelque fois mal conditionnée et avec des zéros sur la diagonale. Les solveurs linéaires doivent donc être adaptés à une telle situation. Pour les méthodes directes, il est capital de veiller à la numérotation du maillage ; le numéro d'un noeud multiplicateur doit être supérieur à l'un au moins des noeuds solides du même élément contact afin d'éviter les pivots nuls. Ceci doit se faire sans trop agrandir la largeur de bande de la matrice. Les méthodes itératives ne présentent pas pour l'essentiel cet inconvénient surtout si l'on utilise les techniques de stockage des matrices creuses (sparse matrices). On a donc eu recours pour l'essentiel aux algorithmes du double gradient conjugué préconditionné, qui permettent de résoudre des systèmes non symétriques. Un des nombreux avantages de l'approche couplant formulation hybride et méthode de Newton généralisée réside dans la possibilité d'utiliser les multiples techniques de préconditionnement des systèmes linéarisés, d'accélération de convergence développées pour les systèmes standards en général symétriques issus des modélisations éléments finis ordinaires.

La résolution du système non linéaire (IV.1.38), issu de problème de contact avec frottement, est alors obtenue en couplant le solveur non linéaire de type Newton généralisé et un solveur linéaire itératif ; ainsi, le schéma global de résolution peut prendre la forme suivante :

- Initialisation
- Boucle sur les incrémentales de charge (*nbinc*)

$\mathbf{x}_0$  solution initiale

$nb = 0, nbinc$

↪ Itérations de Newton

$\mathbf{x}_{nb+1}^0 = \mathbf{x}_{nb}$

$i = 0, \dots :$

- ▶ calcul de la matrice assemblée  $\bar{\mathbf{K}}^i = (\mathbf{K}^i + \mathbf{T}^i)$ .
- ▶ calcul du second membre assemblé  $\mathbf{b}_{nb}^i$ .
- ▶ calcul du préconditionneur  $\mathbf{C}$  (de type ILU).
- ▶ résolution de  $(\mathbf{C}^{-1}\bar{\mathbf{K}}^i).\Delta\mathbf{x}^i = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}_{nb}^i$ .
- ▶ actualisation de la solution  $\mathbf{x}_{nb+1}^{i+1} / \mathbf{x}_{nb+1}^{i+1} = \mathbf{x}_{nb+1}^i + \Delta\mathbf{x}^i$ .

jusqu'à convergence :  $\|\Delta\mathbf{x}^{i+1}\| \leq \epsilon \|\Delta\mathbf{x}^i\|$

## 1.4 Présentation des résultats numériques

Afin de vérifier le comportement asymptotique de convergence des solutions approchées établi dans la section IV.1.2, nous avons mis en oeuvre quelques simulations numériques en dimension 2. Ces méthodes ont été implémentées sous Modulef, un code d'éléments finis développé par l'INRIA (voir [17]).

Nous supposons qu'on a un corps semi-infini suivant l'axe  $X_1$ , dans un repère orthogonal  $(O, X_1, X_2, X_3)$  des cristallographes : il n'y a pas de variation possible des degrés de liberté calculés (le déplacement  $\mathbf{u}$  et le potentiel électrique  $\varphi$ ) dans cette direction. Ici, les tenseurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont nulles suivant  $X_1$ . Autrement dit, le matériau est en état de déformations planes par rapport au plan  $(O, X_2, X_3)$  (on aura donc  $\varepsilon_{11} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = 0$ ,  $\varepsilon_{13} = 0$ ) et à déplacement électrique nul suivant  $X_1$  ( $\mathbf{D}_1 = 0$ ). Pour ces tests numériques, on considère un matériau électro-élastique anisotrope transverse hexagonal de classe 6mm (c'est à dire possédant un axe de symétrie  $X_3$  qui représente la direction de la polarisation  $\mathbf{P}$ , et les six plans de symétrie) ; on prend alors comme exemple la matériau PZT-5A (voir [57]). Cela a pour conséquence principale que la loi de comportement s'exprime, à partir des deux équations (IV.1.1) et (IV.1.2), uniquement dans le plan  $(O, X_2, X_3)$  ; ce qui permet de travailler en deux dimensions

uniquement. Le tenseur des contraintes mécaniques et le vecteur des déplacements électriques caractérisants le PZT-5A s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$(IV.1.40) \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\sigma}_{33} \\ \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & e_{32} \\ f_{23} & f_{33} & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & f_{44} & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & -\beta_{22} & 0 \\ e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & -\beta_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ -E_2 \\ -E_3 \end{pmatrix}$$

Dans l'équation (IV.1.40), en utilisant les propriétés de symétrie du tenseur mécanique, le passage du tenseur d'ordre 4 ( $f_{ijkl}$ ) vers un tenseur d'ordre 2 (avec la notation matricielle  $f_{pq}$ ) est donné par le jeu d'identification qui, à toute paire d'indices ou d'exposants pouvant être interchangés, on associe un entier selon le schéma suivant :

$$f_{ijkl} \equiv f_{pq} = \begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} & 0 \\ f_{23} & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & f_{44} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} ij \text{ ou } kl = 22 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 2, \\ ij \text{ ou } kl = 33 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 3, \\ ij \text{ ou } kl = 23 \text{ ou } 32 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 4. \end{aligned}$$

De la même façon pour le tenseur d'ordre 3 piézoélectrique, nous avons

$$e_{ijk} \equiv e_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{24} \\ e_{32} & e_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} jk = 22 &\longrightarrow q = 2, \\ jk = 33 &\longrightarrow q = 3, \\ jk = 23 \text{ ou } 32 &\longrightarrow q = 4. \end{aligned}$$

Pour les tests numériques, on considère un matériau piézoélectrique PZT-5A caractérisé par les coefficients données dans le tableau 2.1, établi par Feng et Wu dans [38]. La permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8.885 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ .

Nous considérons deux problèmes de contact, l'un avec du contact unilatéral et l'autre avec compliance normale avec frottement pour un coefficient de  $\mu = 0.2$ , en déformations planes sans force volumique ( $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0} N/m^3$ ). Ces deux problèmes ont été

Élastiques ( $GPa$ )				Piézoélectriques ( $C/m^2$ )			Diélectriques ( $C^2/Nm^2$ )	
$f_{22}$	$f_{23}$	$f_{33}$	$f_{44}$	$e_{32}$	$e_{33}$	$e_{24}$	$\beta_{22}/\epsilon_0$	$\beta_{33}/\epsilon_0$
121	75.2	111	21.1	-5.4	15.8	12.3	916	830

TAB. 1.1 – Les valeurs des coefficients du matériau PZT-5A.

choisi pour retrouver le comportement asymptotique de convergence établi en section IV.1.2. Dans un premier temps, les résultats qui vont suivre concernent le problème électro-élastique de contact avec compliance normale et frottement. Le domaine  $\Omega$  est un rectangle de dimension  $8m \times 4m$ . La discrétisation est faite avec des éléments finis triangulaires de type  $P_1$  (triangles à 3 noeuds). Dans le cas de la figure IV.1.1, nous avons choisi de prendre 16 noeuds en contact actifs avec la surface rigide. Le déplacement vertical est nul sur  $\Gamma_1 = \{0\} \times [0,4]$  et le potentiel électrique est libre. Soit  $\Gamma_2 = (\{8\} \times [0,4]) \cup ([0,8] \times \{4\})$ . L'intensité des forces surfaciques agissant sur la partie  $[0,8] \times \{4\}$  de la frontière du corps est donnée par la formule :  $\mathbf{f}_2 = (0, -10x_3)N/m^2$ , tandis que la partie  $\{8\} \times [0,4]$  est libre. Sur la partie  $\Gamma_3 = [0,8] \times \{0\}$  le corps est en contact avec une fondation isolatrice et immobile. Finalement, nous supposons qu'aucune charge électrique n'agisse sur le corps, i.e.  $q_0 = 0 C/m^3$ .

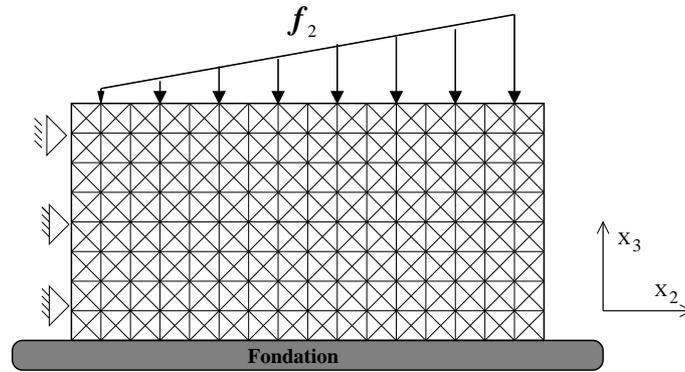


FIG. IV.1.1 – Discrétisation du corps en contact avec une fondation.

Afin d'avoir une déformation visible, on a augmenté la pression sur la partie  $\Gamma_2$  du corps (voir la figure IV.1.2). À l'interface du contact, on a un contact avec frottement ; les flèches présentent les forces de contact frottant. Cette force de contact s'oriente de plus en plus vers la droite, proportionnellement à l'intensité de la force appliquée. Au cours de la simulation, on observe un glissement entre le corps et la fondation avec une pénétration maximum de  $4.10^{-3} m$ , ce qui est cohérent avec la précision de la méthode

de pénalité où le coefficient de pénalisation avait été fixé à  $10^4$ .

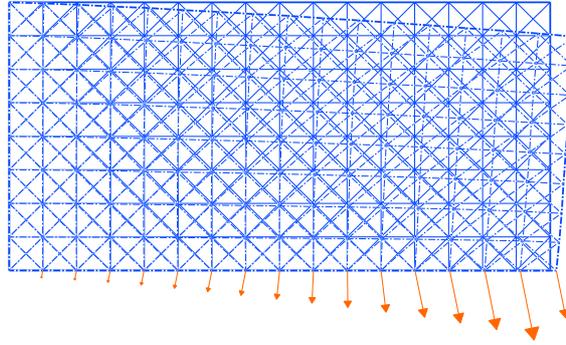


FIG. IV.1.2 – *Configurations initiale et déformée avec les forces de contact.*

En outre, Si on applique une force de compression, le matériau va se déformer de telle sorte que le barycentre des charges positives et celui des charges négatives vont s'écartier. On a ainsi créé un dipôle électrique qui par réaction, va faire apparaître des charges de signes opposés sur la surface. Sur la figure IV.1.3 on voit la distribution du potentiel et le champ de déplacement électrique dans le corps dont sa direction est expliquée par la relation :  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  avec  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  (c'est-à-dire pas de champ électrique appliqué). C'est un exemple d'action d'un capteur piézoélectrique : on peut donc placer des électrodes en n'importe quel point de la surface du matériau et détecter un changement de contrainte. Il existe deux types de mesures, l'une qualitative et l'autre quantitative. La mesure qualitative consiste à détecter si la force mesurée dépasse un certain seuil, il suffit pour cela de mesurer la résistance électrique du matériau ; désormais une alarme pourra sonner bien avant que le matériau ne s'effondre par exemple. La mesure quantitative consiste à associer une grandeur numérique à la mesure de la force ; elle peut donc servir à construire une balance.

Nous pouvons facilement noter une certaine correspondance entre la distribution de potentielle électrique et les contraintes élastiques à l'intérieur du corps, présentée dans la figure IV.1.4. Il est normal que les valeurs du potentiel électrique soient plus élevées là où les contraintes sont plus importantes ; c-à-d là où il y a une réaction forte entre le corps et la fondation. Pour évaluer les effets du coefficient du frottement à l'interface du contact, trois valeurs ont été testées,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0.2$  et  $\mu = 1$ . La distribution du potentiel est reportée dans la figure IV.1.5 en fonction du contact actif sur  $\Gamma_3$ .

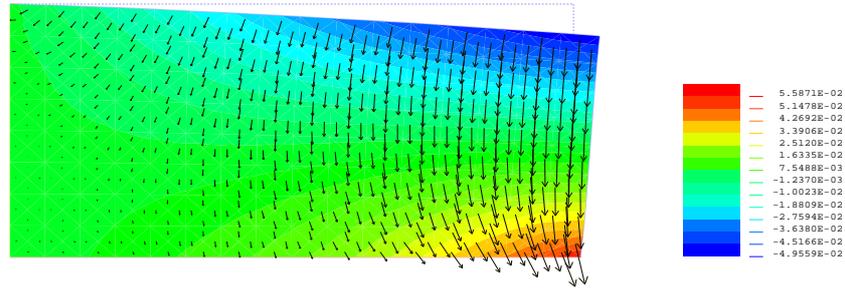


FIG. IV.1.3 – Le champ de déplacement et le potentiel électriques dans la configuration déformée.

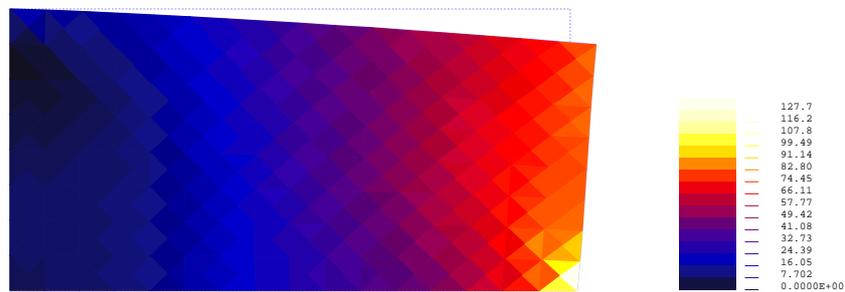


FIG. IV.1.4 – Contraintes de Von Mises dans la configuration déformée.

Nos tests numériques consistent à mesurer respectivement les erreurs  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$  et  $\|\varphi - \varphi^h\|_W$  avec les normes  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  pour des maillages quasi-uniformes de

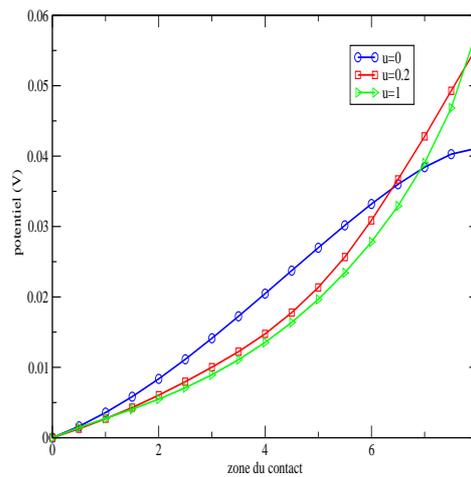


FIG. IV.1.5 – Distribution du potentiel à l'interface du contact.

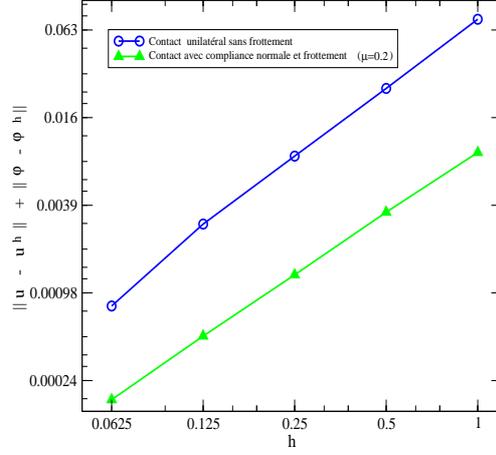


FIG. IV.1.6 – *Estimation d'erreur.*

pas  $h \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}\}$ . Il n'est pas possible de raffiner uniformément la taille des éléments autant que nécessaire, ceci pour des raisons évidentes de coûts de calculs. Comme on ne dispose pas de solution analytique pour notre problème, l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W$  est évaluée numériquement par  $\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}^h\|_V + \|\varphi_{ref} - \varphi^h\|_W$ . La solution de référence  $(\mathbf{u}_{ref}, \varphi_{ref})$  est calculée sur un maillage de référence comportant 131072 éléments et 197763 degrés de liberté (correspondant à  $h = 1/256$ ). Sur la figure IV.1.6 l'ordre de convergence de la méthode pour différents pas de discrétisation  $h$  est représenté. Nous constatons que le comportement asymptotique linéaire de convergence que nous avons établi dans la cas d'une intégration exacte, obtenu aux résultats (IV.1.30) et (IV.1.32), est pratiquement confirmé lorsqu'on observe les figures IV.1.6.

## Chapitre 2

### Cas quasistatique

Dans ce chapitre on reprend le problème quasistatique de contact sans frottement d'un corps électro-viscoélastique avec une base rigide isolatrice, qui a été analysé dans le deuxième chapitre de la partie III. Dans la perspective de mettre en oeuvre les simulations correspondantes, nous donnons, dans la première section, quelques rappels sur le problème mécanique étudié, dont nous formulons par la suite un résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles pour la formulation variationnelle. Dans la deuxième section, nous abordons l'approche numérique du problème, en étudiant les estimations d'erreurs. L'algorithme mis en oeuvre, détaillé dans la section 3, repose sur un schéma de type prédiction-correction couplant différences finis et itérations linéaires (méthode de Newton). Enfin, le comportement asymptotique de la convergence et la robustesse de l'algorithme sont présentés sur des tests en dimension 2 dans la dernière section.

L'objectif du présent chapitre est d'étendre les résultats acquis dans [11] pour un problème électro-viscoélastique de contact avec compliance normale, au cas du contact unilatéral de Signorini et de proposer une analyse numérique du modèle.

#### 2.1 Électro-viscoélasticité, formulation variationnelle

Nous gardons ici les mêmes notations qu'au deuxième chapitre de la partie III de ce mémoire et nous considérons le même modèle physique. Cependant par la suite, nous supposons qu'il y a une distance  $g$  entre le corps et la fondation et on impose un champ électrique sur la frontière du corps.

**Problème  $P_6$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que*

le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que

$$(IV.2.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(IV.2.2) \quad \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(IV.2.3) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(IV.2.4) \quad \text{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(IV.2.5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(IV.2.6) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(IV.2.7) \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(IV.2.8) \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

$$(IV.2.9) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T),$$

$$(IV.2.10) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

où la frontière de  $\Omega$  est composée de  $\Gamma_3$  (de mesure non nulle),  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , d'une part, et de  $\Gamma_a$  (de mesure non nulle) et  $\Gamma_b$ , d'autre part. On supposera que le tenseur de viscosité  $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$  d'ordre quatre est symétrique et défini positif, Le tenseur de l'élasticité d'ordre quatre  $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$  est symétrique et défini positif, le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  vérifie  $e_{ijk} = e_{ikj}$  et le tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$  est symétrique et défini positif. Les chargements extérieurs sont représentés par

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &\in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \\ q_0 &\in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \\ q_2(t) &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ici  $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$  est le déplacement normal,  $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$  représente le déplacement tangentiel,  $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$  est la contrainte normale et  $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$  est la contrainte tangentielle.

La fonction  $g$  représente l'interstice initial entre le corps et la fondation, mesuré le long de la normale  $\boldsymbol{\nu}$  telle que

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \Gamma_3.$$

Afin de présenter la formulation variationnelle du problème  $P_5$  nous introduisons les espaces de Hilbert

$$V = \{ \mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \},$$

$$W = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_a \},$$

$$W_0 = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}.$$

La cadre fonctionnel approprié pour ce problème fait intervenir le cône convexe fermé de  $V$

$$(IV.2.11) \quad K = \{ \mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

On fait l'hypothèse suivante sur la condition initiale :

$$\mathbf{u}_0 \in K.$$

Finalemment, soit  $\mathbf{f} \in V$  (respectivement  $q \in W$ ) l'élément défini par le théorème de Riesz représentant  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  (respectivement  $q_0$  et  $q_2$ ).

En utilisant la formule de Green, on obtient pour le problème mécanique  $P_6$  la formulation variationnelle suivante :

**Problème  $P_6^V$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  et le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  tels que*

$$(IV.2.12) \quad \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$(IV.2.13) \quad (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)^d} = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W_0, \forall t \in [0, T],$$

$$(IV.2.14) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Le résultat d'existence et d'unicité d'un couple de solution  $(\mathbf{u}, \varphi) \in W^{1,\infty}(0, T; V) \times W^{1,\infty}(0, T; W)$  du problème  $P_6^V$  est obtenu en suivant les mêmes démarches déjà utilisées dans la démonstration du théorème III.2.1, p.111.

## 2.2 Formulation variationnelle approchée, estimation d'erreurs

De la même manière que pour le problème  $P_5^V$  qui a été analysé dans le premier chapitre de cette partie, nous étudions un schéma discret total d'approximation numérique du problème  $P_5^V$ .

Partout dans cette section nous supposons que les hypothèses du théorème III.2.1 sont satisfaites. Soit  $\mathcal{T}^h$  une famille de triangularisations régulières de type éléments finis du domaine  $\Omega$ , qui est un polygone, dont le diamètre ne dépasse pas  $h$  et compatible avec la partition de la frontière  $\Gamma$ . Soient également  $V^h \subset V$ ,  $W^h \subset W$  et  $W_0^h \subset W_0$  trois espaces d'éléments finis utilisés pour approcher respectivement le champ des déplacements  $V$  et les champ potentiels  $W$  et  $W_0$ , définis par :

$$(IV.2.15) \quad V^h = \{\mathbf{v}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d; \mathbf{v}_{|\Omega^e}^h \in [P_1(\hat{\Omega}^e)]^d, \quad \Omega^e \in \mathcal{T}^h, \quad \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_3\},$$

$$(IV.2.16) \quad W^h = \{\psi^h \in C(\bar{\Omega}); \psi_{|\Omega^e}^h \in P_1(\hat{\Omega}^e), \quad \Omega^e \in \mathcal{T}^h, \quad \psi^h = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

$$(IV.2.17) \quad W_0^h = \{\psi^h \in C(\bar{\Omega}); \psi_{|\Omega^e}^h \in P_1(\hat{\Omega}^e), \quad \Omega^e \in \mathcal{T}^h, \quad \psi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

où  $P_1(\hat{\Omega}^e)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1 sur l'élément référence  $\hat{\Omega}^e$ . Ensuite, on introduit le cône fermé discret  $K^h = K \cap V^h$ , sous-ensemble d'un espace de dimension finie :

$$(IV.2.18) \quad K^h = \{\mathbf{v}^h \in V^h; v_\nu^h(a_i) \leq g \quad \forall a_i \in N_{\Gamma_3}^{tot}(\Omega, \mathcal{T}^h)\},$$

où  $N_{\Gamma_3}^{tot}(\Omega, \mathcal{T}^h)$  représente l'ensemble de noeuds de  $\mathcal{T}^h$  se trouvant sur  $\Gamma_3$ .

Pour discrétiser la variable temporelle, on considère une subdivision équidistante  $\bigcup_{n=1}^N [t_{n-1}, t_n]$  de l'intervalle  $[0, T]$  telle que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  et on définit par  $k = T/N$  le pas de temps. Soit une suite  $\{\mathbf{w}_n\}_{n=0}^N$ , nous utilisons la notation  $\delta \mathbf{w}_n$  pour la différence divisée, i.e.  $\delta \mathbf{w}_n = (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1})/k$ . La valeur de la fonction continue  $f(t)$  au point  $t_n$  est notée par  $f_n = f(t_n)$ .

La méthode d'approximation discrète totale du problème  $P_6^V$ , avec les conditions initiales  $\mathbf{u}_0^{hk}$ , que nous allons analyser est la suivante :

**Problème  $P_6^{Vhk}$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  et le potentiel électrique  $\varphi^{hk} = \{\varphi_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset W^h$  tels que  $\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$ , et pour  $n = 1, \dots, N$ ,*

$$(IV.2.19) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\delta \mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk}, \varepsilon(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \\ \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in K^h,$$

$$(IV.2.20) \quad (\beta \nabla \varphi_n^{hk}, \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} = (q_n, \psi^h)_W, \quad \forall \psi^h \in W_0^h.$$

En utilisant la relation (IV.2.20), nous introduisons les potentiels initiaux  $\varphi_0^{hk}$ .

On a le résultat d'existence et d'unicité reposant sur la même démarche déjà utilisée dans la démonstration du théorème III.2.1 (page 111).

**Proposition IV.2.1.** *Sous réserve que les hypothèses du théorème III.2.1 soient satisfaites, le problème discrétisé  $P_6^{Vhk}$  admet une unique solution  $(\mathbf{u}^{hk} \times \varphi^{hk}) \subset W^{1,\infty}(0,T;V^h) \times W^{1,\infty}(0,T;W^h)$ .*

Le résultat essentiel de ce paragraphe est d'obtenir une estimation d'erreurs pour la solution discrète. Dans ce but, nous supposons dans la suite du paragraphe la condition supplémentaire de régularité suivante sur la solution du problème  $P_6^V$  :

$$(IV.2.21) \quad \mathbf{u} \in C^1(0,T;V) \quad \text{et} \quad \varphi \in C^1(0,T;W).$$

Nous obtenons alors l'estimation d'erreurs suivante :

**Théorème IV.2.2.** *Sous les hypothèses du théorème III.2.1 et (IV.2.21), Soit  $(\mathbf{u},\varphi)$  la solution du problème  $P_6^V$  et soit  $(\mathbf{u}^{hk},\varphi^{hk})$  la solution du problème discrétisé  $P_6^{Vhk}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $h$  et  $k$ , telle que*

$$(IV.2.22) \quad \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \} \leq c \max_{1 \leq j \leq N} \left( \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 + \|\varphi_j - \psi_j^h\|_W^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V \right) + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + c \max_{1 \leq j \leq N} \|\dot{\mathbf{u}}_j - \delta \mathbf{u}_j\|_V^2 \\ + ck^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_V^2.$$

**Démonstration.** On va donner d'abord une majoration de l'erreur  $\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W$ . Prenons maintenant  $\psi = \psi^h \in W_0^h$  dans (IV.2.13) en  $t = t_n$  et faisons une soustraction de cette inégalité et (IV.2.20), nous obtenons

$$(\boldsymbol{\beta} \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \nabla \psi^h)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \quad \forall \psi^h \in W_0^h.$$

Par conséquent,

$$(\boldsymbol{\beta} \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}), \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_{L^2(\Omega)^d} \\ = (\boldsymbol{\beta} \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}), \nabla(\varphi_n - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \nabla(\varphi_n - \psi^h))_{L^2(\Omega)^d},$$

pour tout  $\psi^h \in W_0^h$ .

De l'inégalité de Cauchy

$$(IV.2.23) \quad ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2, \quad a, b, \epsilon \in \mathbb{R}, \eta > 0$$

et des équations (III.2.13)–(III.2.14), après quelques calculs, nous avons pour certaine constante  $c > 0$

$$(IV.2.24) \quad \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_V^2 \leq c(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \psi^h\|_W^2), \quad \forall \psi^h \in W_0^h.$$

Ensuite, nous procédons une estimation d'erreurs pour le champ de déplacement  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V$ . Prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n^{hk}$  dans (IV.2.12) en  $t = t_n$ , on obtient pour  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$(IV.2.25) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} \\ \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n)_V.$$

Nous pouvons réécrire (IV.2.19) sous la forme

$$(IV.2.26) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}.$$

Nous faisons maintenant une soustraction de cette inégalité avec (IV.2.25) pour obtenir

$$(IV.2.27) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h)_V \\ + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v}^h \in K^h.$$

Nous notons que

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}},$$

et aussi

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}},$$

où

$$\delta\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{k}.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(\delta\mathbf{u}_n - \delta\mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} &= (\mathcal{A}\varepsilon\left(\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{k} - \frac{\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}}{k}\right), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathcal{A}\varepsilon\left(\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}}{k} - \frac{\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}}{k}\right), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En utilisant les deux égalités ci-dessus dans (IV.2.28) et en tenant compte les propriétés de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}^*$ , après quelques calculs, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq c \left( \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \right. \\ &\quad + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}\|_V \\ &\quad + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n\|_V \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \\ &\quad + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n\|_V \\ &\quad \left. + \frac{1}{k} (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk} - (\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk})), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \right). \end{aligned}$$

Appliquant maintenant l'inégalité de Cauchy (IV.2.23), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq ck \left( \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \right. \\ &\quad + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta\mathbf{u}_n\|_V^2 + (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk} - (\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk})), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}\|_V^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq ck \sum_{j=1}^n \left( \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_{\mathcal{H}} + \|\dot{\mathbf{u}}_j - \delta\mathbf{u}_j\|_V^2 \right) \\ &\quad + c \sum_{j=1}^n (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk} - (\mathbf{u}_{j-1} - \mathbf{u}_{j-1}^{hk})), \varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 \quad \forall \{\mathbf{v}_j^h\}_{j=1}^n \subset K^h, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq c \max_{1 \leq j \leq N} \left( \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V \right) \\ &\quad + c \sum_{j=1}^N k \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V^2 + c \sum_{j=1}^N k \|\varphi_j - \varphi_j^{hk}\|_W^2 \\ &\quad + c \sum_{j=1}^n (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk} - (\mathbf{u}_{j-1} - \mathbf{u}_{j-1}^{hk})), \varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + c \max_{1 \leq j \leq N} \|\dot{\mathbf{u}}_j - \delta\mathbf{u}_j\|_V^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 \quad \forall \{\mathbf{v}_j^h\}_{j=1}^n \subset K^h. \end{aligned}$$

Nous notons maintenant que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk} - (\mathbf{u}_{j-1} - \mathbf{u}_{j-1}^{hk})), \varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h))_{\mathcal{H}} \\
 &= (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h), \varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1^h))_{\mathcal{H}} \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{n-1} (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}), \varepsilon(\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)))_{\mathcal{H}} \\
 & \leq \xi \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + c\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n^h\|_V^2 + c\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_V^2 \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_V,
 \end{aligned}$$

où  $\xi > 0$  est un paramètre supposé être assez petit.

Finalement, en utilisant (IV.2.24) et en appliquant une version discrète de l'inégalité du Gronwall [48], nous obtenons le résultat (IV.2.22).  $\square$

Nous notons que l'évaluation d'erreur ci-dessus peut être améliorée en utilisant les idées semblables à ceux appliqués dans [51] dans le cas d'un problème de contact entre deux corps viscoplastiques. Nous supposons alors

$$(IV.2.28) \quad \sigma_\nu \in C(0, T; L^2(\Gamma_3)).$$

**Remarque.** Nous notons qu'il y a une différence entre les hypothèses (IV.2.21) et (IV.2.28) et la régularité de la solution donnée dans le théorème III.2.1, qui utilise  $\sigma_\nu \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_3))$ . Cette différence reste un problème largement ouvert, cela nécessiterait une étude plus profonde du point de vue mathématiques des problèmes de contact.

En utilisant les mêmes arguments que dans [51], nous obtenons l'estimation d'erreur suivante :

**Corollaire IV.2.3.** *Sous les hypothèses du théorème IV.2.2 et (IV.2.28), nous avons l'estimation*

$$\begin{aligned}
 (IV.2.29) \quad & \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \} \leq c \max_{1 \leq j \leq N} \{ \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 + \|\varphi_j - \psi_j^h\|_W^2 \\
 & + \|(\mathbf{u}_j)_\nu - (\mathbf{v}_j^h)_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \} + c\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + c \max_{1 \leq j \leq N} \|\dot{\mathbf{u}}_j - \delta \mathbf{u}_j\|_V^2 \\
 & + ck^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_V^2.
 \end{aligned}$$

L'estimation (IV.2.29) est le point de départ pour l'analyse de convergence. Pour des choix particuliers des conditions supplémentaires de régularité de la solution du problème  $P_6$ , nous supposons que

$$(IV.2.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &\in H^2(0,T;V) \cap C(0,T;[H^2(\Omega)]^d), \quad u_\nu \in C(0,T;H^2(\Gamma_3)), \\ \dot{\mathbf{u}} &\in L^2(0,T;[H^2(\Omega)]^d), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;V), \quad \varphi \in C(0,T;H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation d'erreurs suivante pour la solution en discrétisation totale :

**Corollaire IV.2.4.** *Sous les hypothèses du corollaire IV.2.3 et les conditions supplémentaires de régularité (IV.2.30). Alors, la convergence linéaire de l'algorithme est obtenue, c'est-à-dire, il existe  $c > 0$ , indépendant de  $h$  et  $k$ , tels que*

$$(IV.2.31) \quad \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \} \leq c(h+k).$$

**Démonstration.** Définissons  $\mathbf{v}_j^h = \Pi \mathbf{u}_j$  pour  $j = 0, \dots, N$ , où  $\Pi^h = (\pi^h)_{i=1}^d : [C(\bar{\Omega})]^d \rightarrow V^h$ , et  $\pi^h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow B^h$  est l'opérateur d'interpolation des éléments finis (voir par exemple [25]). Les valeurs initiales de potentiel sont définies par  $\varphi_0^{hk} = \pi^h \varphi(0)$ . Nous avons  $\mathbf{u} \in C(0,T;[H^2(\Omega)]^d)$  et  $u_\nu \in C(0,T;H^2(\Gamma_3))$ , ce qui donne (voir [25])

$$(IV.2.32) \quad \begin{aligned} \max_{0 \leq j \leq N} \|\mathbf{u}_j - \Pi^h \mathbf{u}_j\|_V &\leq ch \|\mathbf{u}\|_{C(0,T;[H^2(\Omega)]^d)}, \\ \max_{0 \leq j \leq N} \|(\mathbf{u}_j)_\nu - \pi^h (\mathbf{u}_j)_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq ch^2 \|u_\nu\|_{C(0,T;H^2(\Gamma_3))}, \\ \max_{0 \leq j \leq N} \|\varphi_j - \Pi^h \varphi_j\|_W &\leq ch \|\varphi\|_{C(0,T;[H^1(\Omega)]^d)}. \end{aligned}$$

De (IV.2.30), il s'en suit que

$$(IV.2.33) \quad \max_{1 \leq j \leq N} \|\dot{\mathbf{u}}_j - \delta \mathbf{u}_j\|_V \leq ck \|\ddot{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Le dernière terme dans (IV.2.29) est borné en utilisant les idées appliquées dans ([23, 47]). D'abord, nous notons que

$$(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h) - (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h) = (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) - \pi^h (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) = k(\delta \mathbf{u}_{j+1} - \pi^h \delta \mathbf{u}_{j+1}),$$

$$\text{où } \delta \mathbf{u}_{j+1} = \frac{\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j}{k}.$$

Par conséquent, de  $\delta \mathbf{u}_{j+1} = \frac{1}{k} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{\mathbf{u}}(t) dt$  il s'en suit que

$$\|\delta \mathbf{u}_{j+1}\|_{[H^2(\Omega)]^d}^2 \leq \frac{1}{k^2} \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^d} dt \right)^2 \leq \frac{1}{k} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^d}^2 dt.$$

Et gardant à l'esprit (IV.2.32), nous déduisons

$$\|(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h) - (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h)\|_V^2 \leq ckh^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^d}^2 dt,$$

ce qui donne

$$(IV.2.34) \quad k^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \|(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h) - (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j^h)\|_V^2 \leq ch^2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;[H^2(\Omega)]^d)}^2.$$

Finalement, le corollaire IV.2.4 se déduit maintenant, en combinant (IV.2.32), (IV.2.33), (IV.2.34) et (IV.2.24).  $\square$

## 2.3 Méthode de résolution

Dans cette section, nous décrivons les méthodes numériques pour le traitement du contact sans frottement entre un corps électro-viscoélastique et une fondation. La formulation mixte utilisant un quasi-Lagrangien augmenté a été spécialement développée dans la perspective d'utiliser une méthode de type Newton sur le système non linéaire et non différentiable.

Les simulations numériques ayant été faites en dimension 2, nous nous plaçons par la suite dans le cadre bidimensionnel. Nous admettons que le corps considéré  $\Omega$  est un domaine polygonal de l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Ce dernier peut ainsi être décomposé en un nombre fini  $N^h$  de triangles ou des quadrilatères  $\Omega^e$  de taille maximale  $h$ , via une triangulation  $\mathcal{T}^h = \{\Omega^e\}$ ,  $h$  désignant le diamètre maximum des éléments  $\Omega^e$ , tels que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N^h} \bar{\Omega}^e$ . La triangulation  $\mathcal{T}^h$  est supposée régulière.

Notons  $X^h$  l'espace élément fini des éléments linéaires correspondant à la triangulation  $\mathcal{T}^h$  construite, les espaces de dimension fini  $V^h$  et  $W^h$  sont données par

$$V^h = X^h \cap V, \quad W^h = X^h \cap W \quad \text{et} \quad W_0^h = X^h \cap W_0.$$

Si l'on considère la famille d'éléments  $P_1$ , les espaces discrets approchant  $V$ ,  $W$  et  $W_0$  sont alors définis par (IV.2.15)–(IV.2.17).

### 2.3.1 Formulation en quasi-lagrangien augmenté

Afin de régulariser, la non-différentiabilité de terme de contact, nous utilisons une formulation en quasi-lagrangien augmenté. Toutes les grandeurs à venir sont supposées totalement discrétisées à la fois en espace (méthodes éléments finis) et en temps

(méthode d'Euler implicite). Nous désignons respectivement par  $\mathbf{u}_{n+1}^h$ ,  $\varphi_{n+1}^h$  et  $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^h$  les approximations discrètes de  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  et  $\boldsymbol{\lambda}$ . Le terme  $\delta\mathbf{u}_{n+1}^h$  est l'approximation de la vitesse définie à partir de  $\mathbf{u}_{n+1}^h$  et  $\mathbf{u}_n^h$ .

Bien entendu, en utilisant le principe des travaux virtuels, vu au chapitre précédent, le problème  $P_6^{Vhk}$  complètement discrétisé par la méthode d'Euler et avec les conditions initiales  $\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$  est équivalent au problème suivant :

**Problème**  $P_6^{Vp}$ . *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_{n+1}^h \in V^h$  et le potentiel électrique  $\varphi_{n+1}^h \in W^h$  tels que*

$$(IV.2.35) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_{n+1}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n+1}^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \\ + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_{n+1}^h, \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^h), \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} \\ + \int_{\Gamma_3} \nabla\mathbf{u}_{\nu}^{l^r} \cdot \mathbf{v}^h \, da + \int_{\Gamma_3} \nabla\boldsymbol{\lambda}_{\nu}^{l^r} \cdot \boldsymbol{\gamma}^h \, da = (\mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h)_V + (q_{n+1}, \psi^h)_W$$

pour tout  $(\mathbf{v}^h, \psi^h) \in V^h \times W_0^h$  et  $\boldsymbol{\gamma}^h \in H_c^h$ , le terme  $H_c^h$  représente un sous-espace de dimension finie inclus dans l'espace  $L^2(\Gamma_3)$ . Le terme  $l_{\nu}^r$  représente la régularisée de la fonction indicatrice  $\Psi_{\mathbb{R}^-}(\lambda_{\nu}^h)$  et est défini sous forme incrémentale de la façon suivante (voir (I.4.16) p.49)

$$l_{\nu}^r(\mathbf{v}^h, \boldsymbol{\gamma}_{\nu}^h) = ((g_{\nu}^h)_{n+1}, \boldsymbol{\gamma}_{\nu}^h) + \frac{r}{2} \|(g_{\nu}^h)_{n+1}\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2\{\boldsymbol{\gamma}_{\nu}^h + r(g_{\nu}^h)_{n+1}, \mathbb{R}_-^p\}.$$

La discrétisation est appliquée sur le corps  $\Omega$  mais également sur l'interface de contact, elle se fait via des éléments contact "noeud à rigide". Pour plus de détails concernant ces éléments contacts, nous renvoyons à la section I.4.2 ou à [3, 4].

Introduisons maintenant, dans chaque sous-domaine  $\Omega^e$ , les notations matricielles suivantes :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \mathbf{u}^i \alpha^i, \quad \varphi^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \varphi^i \zeta^i, \quad \boldsymbol{\lambda}^h = \sum_{i=1}^{N^{tot}} \boldsymbol{\lambda}^i \xi^i,$$

où  $\alpha^i$ ,  $\zeta^i$  et  $\xi^i$  sont les fonctions de bases, constantes par morceaux, prenant la valeur 1 au noeud  $i$  et 0 aux autres noeuds, nous avons pris ici une interpolation linéaire de type  $P_1$ ; les vecteurs  $\mathbf{u}^i$ ,  $\varphi^i$  et  $\boldsymbol{\lambda}^i$  sont respectivement les valeurs aux noeuds  $i$  des fonctions  $\mathbf{u}^h$ ,  $\varphi^h$  et  $\boldsymbol{\lambda}^h$ .  $N^{tot}$  est le nombre total de noeuds du maillage. Avec cette construction des espaces  $V^h$  et  $W_0^h$ , les fonctions  $\mathbf{u}^h \in V^h$  (resp  $\varphi^h \in W_0^h$ ) sont caractérisées par leurs valeurs aux sommets de la triangularisation (voir [24]).

Après discrétisation par éléments finis électro-viscoélastiques et de contact, le système (IV.2.35) peut s'écrire, pour tout champ test viscoélastique  $\mathbf{v}$ , tout champ test électrique  $\psi$  et tout champ test multiplicateur  $\boldsymbol{\gamma}$ ,

$$(IV.2.36) \quad (\mathbf{A}(\delta\mathbf{u}_{n+1}), \mathbf{v})_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} + (\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}), (\mathbf{v}, \psi))_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} \\ + (F(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}))_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N^{tot}}, \psi \in \mathbb{R}^{N^{tot}}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}},$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{G}$  sont respectivement les opérateurs de viscosité et d'électro-rigidité définis par

$$(\mathbf{A}(\delta\mathbf{u}_{n+1}), \mathbf{v})_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_{n+1}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \\ (\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}), (\mathbf{v}, \psi))_{\mathbb{R}^{N^{tot}}} = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_{n+1}^h, \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n+1}^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}^h), \nabla\psi^h)_{L^2(\Omega)^d} \\ - (\mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h)_V - (q_{n+1}, \psi^h)_W \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \psi^h \in W^h,$$

et  $F$  représente l'opérateur de contact frottant défini par

$$(F(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}))_{\mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^{tot}}} = \int_{\Gamma_3} \nabla\mathbf{u}(l_\nu^r) \cdot \mathbf{v}^h \, da + \int_{\Gamma_3} \nabla\boldsymbol{\lambda}(l_\nu^r) \cdot \boldsymbol{\gamma}^h \, da \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \boldsymbol{\gamma}^h \in H_c^h.$$

Dans les relations précédentes,

- $\mathbf{v}$  (resp  $\psi$ ) représente le vecteur test généralisé constitué par les valeurs  $\mathbf{v}^i$  (resp  $\psi^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N^{tot}$ ,
- $\mathbf{u}$  (resp  $\varphi$ ) représente le vecteur solution généralisé constitué par les valeurs  $\mathbf{u}^i$  (resp  $\varphi^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N^{tot}$ ,
- $\boldsymbol{\lambda}$  (resp  $\boldsymbol{\gamma}$ ) représente le vecteur solution (resp test) généralisé constitué par les valeurs  $\boldsymbol{\lambda}^i$  (resp  $\boldsymbol{\gamma}^i$ ) pour  $i = 1, \dots, N_{\Gamma_3}^{tot}$ ,
- $N_{\Gamma_3}^{tot}$  désigne le nombre d'éléments utilisés  $\Gamma_3^e$ , issus de la discrétisation du domaine  $\Gamma_3$ .

### 2.3.2 Algorithme de résolution

En adoptant une forme vectorielle, il est possible de réécrire le système (IV.2.36) sous la forme :

$$(IV.2.37) \quad \mathbf{A}(\delta\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}) + F(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) = \mathbf{0},$$

où  $\mathbf{A}$  (dans la quelle intervient la contribution incrémentale  $\delta\mathbf{u}_{n+1}$  de la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$ ),  $\mathbf{G}$  sont respectivement les opérateurs (différentiables) de viscosité et de rigidité et  $F$  une partie non différentiable, issue des éléments de contact, sa forme explicite est donnée par la formule (I.4.10) (page 47).

En utilisant la méthode d'Euler implicite (approximation par différences finies), pour intégrer les vitesses et les déplacements de corps, on peut donc approcher ces termes de vitesse incrémentale  $\delta\mathbf{u}_{n+1}$ , pour  $0 \leq n \leq N$ , par

$$\delta\mathbf{u}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{k}, \quad \text{où } k = \frac{T}{N}.$$

Dans le cas de résolutions implicites, le calcul des variables liées au temps  $t$  s'effectue par un schéma de prédiction-correction : il s'agit d'évaluer le comportement ultérieur de la solution, en chaque point afin de le connaître à l'instant choisi. Une telle méthode, inconditionnellement stable, exige de nombreuses étapes de calcul.

Dans le but de combiner dans un même algorithme la méthode des différences finies et une méthode d'itérations linéaires de type Newton, nous adoptons l'algorithme suivant :

- 1) Une étape d'initialisation des termes de déplacements et de vitesses  $\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u}_0$ .
- 2) Une étape de prédiction incrémentale donne les champs de déplacements, de potentiels et de vitesses au début de l'incrément

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad \varphi_{n+1}^0 = \varphi_n \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{0}.$$

- 3) Une étape de résolution d'itérations linéaires permet d'obtenir les variations incrémentales  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$  et  $\Delta\varphi = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ .
- 4) Une étape de correction actualise les champs de déplacements, de potentiels et de vitesses en fin d'incrément

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^0 + \Delta\mathbf{u}, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^0 + \Delta\varphi \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u}_{n+1} = \delta\mathbf{u}_{n+1}^0 + \frac{\Delta\mathbf{u}}{k}.$$

Il ne reste plus à présent qu'à unifier cet algorithme avec la méthode de Newton généralisée. Il convient pour cela de combiner la méthode des itérations linéaires et la prédiction de la méthode des différences finies. L'algorithme traite simultanément les champs inconnus, à savoir les variables de déplacement  $\mathbf{u}_{n+1}$ , de potentiel  $\varphi_{n+1}$  et les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$  via la variable  $\mathbf{x}_{n+1}$  définie comme suit :

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}).$$

Ce schéma conduit à chaque itération  $i$  de la méthode de Newton généralisée à la résolution, imbriquée dans une boucle incrémentale  $n$ , d'un système d'équations linéaires non différentiables s'écrivant :

$$\mathbf{x}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{x}_{n+1}^i - \left( \frac{\mathbf{Q}_{n+1}^i}{k} + \mathbf{K}_{n+1}^i + \mathbf{T}_{n+1}^i \right)^{-1} \times \left( \mathbf{A}(\delta \mathbf{u}_{n+1}^i) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \varphi_{n+1}^i) + F(\mathbf{x}_{n+1}^i) \right),$$

où  $\mathbf{K}_{n+1}^i = D_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \varphi_{n+1}^i)$ ,  $\mathbf{Q}_{n+1}^i = D_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\delta \mathbf{u}_{n+1}^i)$  et  $\mathbf{T}_{n+1}^i \in \partial F(\mathbf{u}_{n+1}^i, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i)$ . Les termes  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{G}$ ,  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{A}$  représentent les différentielles des opérateurs  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$ . Le terme  $\partial F$  désigne le jacobien généralisé du terme de contact frottant  $F$  en  $\mathbf{x}$ , sa forme explicite est donnée par (I.4.28) (page 54). Posons  $\Delta \mathbf{x}^i = (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \varphi^i, \Delta \boldsymbol{\lambda}^i)$  avec  $\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{u}_{n+1}^i$ ,  $\Delta \varphi^i = \varphi_{n+1}^{i+1} - \varphi_{n+1}^i$  et  $\Delta \boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i$ .

L'algorithme que nous avons adopté prend la forme suivante :

- Initialisation  $\mathbf{u}_0$  et  $\delta \mathbf{u}_0$
- Boucle incrémentale  $n$   
 $\rightsquigarrow$  Etape de prédiction

$$\mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n, \quad \delta \mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{0}.$$

- Boucle d'itérations linéaires  $i$   
 $\rightsquigarrow$  Etape de linéarisation de Newton

$$\mathbf{x}_{n+1}^i = (\mathbf{u}_{n+1}^i, \varphi_{n+1}^i, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i),$$

$$\left( \frac{\mathbf{Q}_{n+1}^i}{k} + \mathbf{K}_{n+1}^i + \mathbf{T}_{n+1}^i \right) \Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{A}(\delta \mathbf{u}_{n+1}^i) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \varphi_{n+1}^i) - F(\mathbf{x}_{n+1}^i),$$

- $\mathbf{K}_{n+1}^i$  : matrice d'électro-rigidité,
- $\mathbf{Q}_{n+1}^i$  : matrice de viscosité,
- $\mathbf{T}_{n+1}^i$  : matrice tangente de contact.

- $\rightsquigarrow$  Etape de correction

$$\mathbf{x}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{x}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{x}^i, \quad \delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \delta \mathbf{u}_{n+1}^i + \frac{\Delta \mathbf{u}^i}{k}.$$

L'algorithme ayant été présenté, il ne reste plus qu'à tester sa robustesse et son efficacité sur des simulations en dimension 2 pour les divers potentiels électro-viscoélastiques.

Par ailleurs, nous essaierons dans la prochaine section de retrouver le comportement asymptotique linéaire de convergence établi au résultat (IV.2.31).

## 2.4 Quelques simulations numériques

Pour tester l'efficacité de l'algorithme numérique ci-dessus, qui est basé sur la méthode du Lagrangien augmenté, nous avons mis en oeuvre quelques simulations numériques en dimension 2. Ces méthodes ont été implémentées sous Modulef (voir [17]).

On considère l'exemple académique simple d'un corps semi-infini suivant l'axe  $X_1$ , dans un repère orthogonal  $(O, X_1, X_2, X_3)$  des cristallographes : il n'y a pas de variation possible des degrés de liberté calculés (le déplacement  $\mathbf{u}$  et le potentiel électrique  $\varphi$ ) dans cette direction. Ici, les tenseurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont nulles suivant  $X_1$ . Autrement dit, le matériau est en état de déformations planes par rapport au plan  $(O, X_2, X_3)$  (on aura donc  $\varepsilon_{11} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = 0$ ,  $\varepsilon_{13} = 0$ ) et à déplacement électrique nul suivant  $X_1$  ( $\mathbf{D}_1 = 0$ ). Pour ces tests numériques, on considère un matériau électro-élastique anisotrope transverse hexagonal de classe 6mm, on prend alors comme exemple l'oxyde de zinc (ZnO) (voir [42]) que l'on enrichit d'un comportement visqueux. Cela a pour conséquence principale d'exprimer la loi de comportement, à partir des deux équations (IV.2.1) et (IV.2.2) dans le plan  $(O, X_2, X_3)$ . Le tenseur des contraintes mécaniques et le vecteur des déplacements électriques s'expriment ainsi, sous la forme matricielle suivante :

$$(IV.2.38) \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\sigma}_{33} \\ \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & e_{32} \\ f_{23} & f_{33} & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & f_{44} & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & -\beta_{22} & 0 \\ e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & -\beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

Dans l'équation (IV.2.38), en utilisant les propriétés de symétrie du tenseur mécanique, le passage des tenseurs d'ordre 4 ( $f_{ijkl}$ ) et ( $a_{ijkl}$ ) vers un tenseur d'ordre 2 (avec la notation matricielle  $f_{pq}$  et  $a_{pq}$ ) est donné par le jeu d'identification qui, à toute paire

d'indices ou d'exposants pouvant être interchangés, on associe un entier selon le schéma suivant :

$$f_{ijkl} \equiv f_{pq} = \begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} & 0 \\ f_{23} & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & f_{44} \end{pmatrix} ; \quad a_{ijkl} \equiv a_{pq} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} ij \text{ ou } kl = 22 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 2, \\ ij \text{ ou } kl = 33 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 3, \\ ij \text{ ou } kl = 23 \text{ ou } 32 &\longrightarrow p \text{ ou } q = 4. \end{aligned}$$

De la même façon pour le tenseur d'ordre 3 piézoélectrique, nous avons

$$e_{ijk} \equiv e_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{24} \\ e_{32} & e_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} jk = 22 &\longrightarrow q = 2, \\ jk = 33 &\longrightarrow q = 3, \\ jk = 23 \text{ ou } 32 &\longrightarrow q = 4. \end{aligned}$$

Pour les tests numériques, on considère un matériau piézoélectrique dont les coefficients sont données dans les tableaux 2.1 et 2.2. La permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8.885 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ .

Élastiques (GPa)				Viscoélastique (GPa · s)			
$f_{22}$	$f_{23}$	$f_{33}$	$f_{44}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{33}$	$a_{44}$
210	105	211	42.5	21	10.5	21.1	4.25

TAB. 2.1 – Les valeurs des coefficients mécaniques du matériau considéré.

Piézoélectriques (C/m <sup>2</sup> )			Diélectriques (C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup> )	
$e_{32}$	$e_{33}$	$e_{24}$	$\beta_{22}/\epsilon_0$	$\beta_{33}/\epsilon_0$
-0.61	1.14	-0.59	-8.3	-8.8

TAB. 2.2 – Les valeurs des coefficients électriques du matériau considéré.

Nous considérons un problème de contact unilatéral qui est supposé sans frottement, avec une fondation rigide isolatrice. Le problème est ramené à une analyse

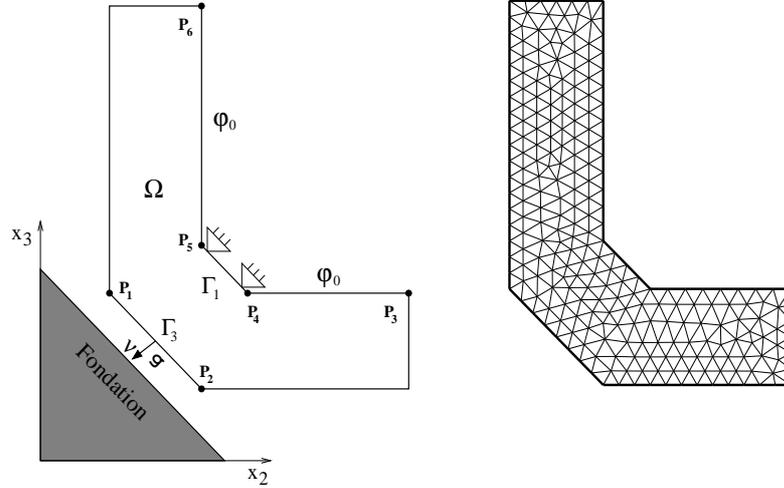


FIG. IV.2.1 – A gauche, la définition du problème. A droite, le maillage 2D du corps.

bidimensionnelle en déformations planes (figure IV.2.1). Pour fixer les caractéristiques géométriques du domaine  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$ , nous avons choisi les points comme suit  $P_1 = (0,1)$ ,  $P_2 = (1,0)$ ,  $P_3 = (3,1)$ ,  $P_4 = (1.5,1)$ ,  $P_5 = (1,1.5)$  et  $P_6 = (1,4)$ , avec les données suivantes :  $\Gamma_b = \Gamma_3 = [P_1, P_2]$ ,  $\Gamma_1 = [P_4, P_5]$  et  $\Gamma_2 = \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ . Le corps  $\Omega$  est discrétisé en 418 éléments triangulaires reliés par 248 noeuds dont 9 éléments de contact répartis le long de l'interface de contact  $\Gamma_3$  (voir la figure IV.2.1). On impose une condition de déplacement nul sur  $\Gamma_1$ .

Dans les tests numériques présentés, on s'est intéressé à l'étude de l'effet piézoélectrique inverse, c'est-à-dire la déformation du corps  $\Omega$  lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Le champ électrique est appliqué par une différence de potentiel (ddp) entre deux électrodes placées sur des bords du domaine  $\Omega$ . Nous avons donc considéré les données suivantes :

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \text{ N/m}^2, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ N/m}^3, \quad q_0 = 0 \text{ C/m}^3,$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} 20 \text{ V} & \text{sur } [P_3, P_4], \\ 0 \text{ V} & \text{sur } [P_5, P_6], \end{cases}$$

$$g = 10^{-4} \text{ m}, \quad T = 10 \text{ s}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \text{ m}, \quad \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0} \text{ m/s}.$$

Sous l'effet des forces électrostatiques (créées par une différence de potentiel entre les électrodes), la distance entre les barycentres des charges positives et négatives va

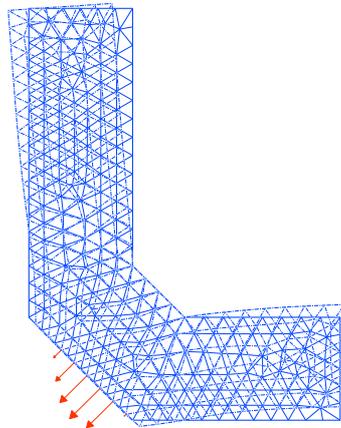


FIG. IV.2.2 – Configurations initiale et déformée avec les forces de contact.

augmenter, générant ainsi une déformation (figure IV.2.2). Sur l'interface de contact, on a représenté les forces de contact (flèches), ce qui montre bien que le corps  $\Omega$  est rentré en contact avec l'obstacle rigide sur la frontière  $\Gamma_3$ , séparé au départ par une distance  $g$ . Au cours de la simulation, on observe un glissement entre le corps et la fondation sans aucune pénétration; la force de contact est perpendiculaire à la fondation, cela traduit le fait qu'on a un contact unilatéral sans frottement.

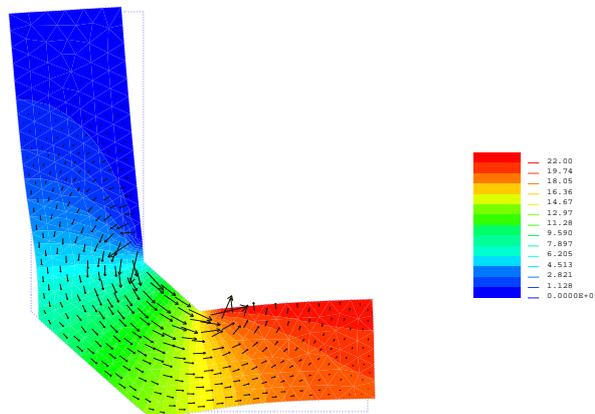


FIG. IV.2.3 – Le champ de déplacement et le potentiel électriques dans la configuration déformée.

En outre, la figure IV.2.3 montre la distribution du potentiel et le champ de déplacement électriques dans le corps. Quand le champ électrique augmente, le champ appliqué est suffisamment important, la densité de charge  $D$  est presque nulle. Lorsque

le potentiel revient à zéro, il reste une polarisation  $\mathbf{P}_r$  résiduelle qui est permanente pour un champ élevé et seulement provisoire pour un champ faible ; ce qui explique la direction et la valeur du champ de déplacement électriques.

Nous pouvons facilement noter une certaine correspondance entre la distribution de potentielle électrique et les contraintes élastiques à l'intérieur du corps, présentées dans la figure IV.2.4.

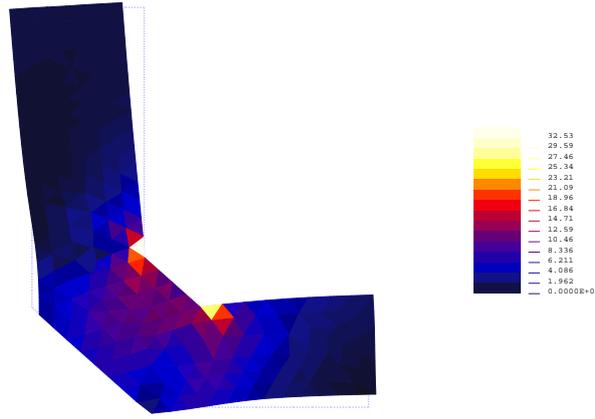


FIG. IV.2.4 – Contraintes de Von Mises dans la configuration déformée.

Pour mesurer respectivement les erreurs  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$  et  $\|\varphi - \varphi^{hk}\|_W$  avec les normes  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , nous avons employé un procédé analogue à celui développé dans le chapitre précédent, en gardant les mêmes propriétés géométriques du modèle (voir la figure IV.1.1 p.137). Nous avons considéré des maillages quasi-uniformes de pas  $h \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}\}$  et des pas de temps  $k \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}\}$ . Comme on ne dispose pas de solution analytique pour notre problème, l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V + \|\varphi - \varphi^{hk}\|_W$  est évaluée numériquement par  $\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}^{hk}\|_V + \|\varphi_{ref} - \varphi^{hk}\|_W$ . La solution de référence  $(\mathbf{u}_{ref}, \varphi_{ref})$  est calculée sur un maillage de référence comportant 131072 éléments et 197763 degrés de liberté (correspondant à  $h = 1/256$  et  $k = 1/256$ ). Sur la figure IV.2.5, l'ordre de convergence de la méthode pour différents pas de discrétisation  $h + k$  est représenté. Nous constatons que le comportement asymptotique linéaire de convergence que nous avons établi dans le résultat (IV.2.31), est pratiquement confirmé lorsqu'on observe la figure IV.2.5.

Le fonctionnement d'un actionneur piézoélectrique repose sur l'exploitation d'une déformation mécanique, générée par l'effet piézoélectrique inverse, permettant d'engendrer le contact. Sur la base de ce principe, on peut concevoir et réaliser un actionneur

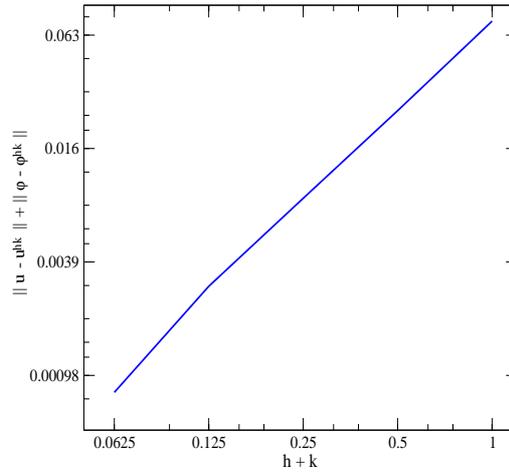


FIG. IV.2.5 – *Estimation d'erreur.*

piézoélectrique pour le positionnement de la tête de lecture d'un disque dur, permettant de créer un positionnement micrométrique à une vitesse satisfaisante. Le procédé est similaire pour des micro-robots mobiles : l'actionnement est basé sur le principe du stick-slip avec des actionneurs piézoélectriques positionnés dans des pieds conducteurs (pour éviter des fils) ; les actionneurs jouent donc le rôle des pattes. Un autre exemple est l'utilisation de l'actionneur piézoélectrique pour protéger des matériaux, déjà en contact ; ceci afin de ne pas dépasser les seuils de tension spécifiés par le fabricant.

## Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons envisagé quelques problèmes en Mécanique de Contact pour des lois constitutives électro-élastiques et électro-viscoélastiques, en traitant diverses lois de contact et de frottement dans les cas statique et quasistatique de façon théorique et numérique. En petites déformations, nous avons proposé des formulations fortes et faibles, donné des résultats d'existence, parfois d'unicité, ainsi qu'une formulation duale du problème et aussi un résultat de dépendance de la solution par rapport aux fonctions de compliance.

Nous avons aussi étudié l'approche numérique du problème, en utilisant un schéma d'éléments finis avec une discrétisation implicite en temps. On a montré l'existence et l'unicité des problèmes discrétisés considérés ainsi que des résultats d'estimation d'erreur sous des hypothèses de régularité.

Une extension de la méthode de Lagrangien augmenté (et celle de pénalité) a été utilisée pour résoudre un problème incrémental de minimisation avec des contraintes résultant de la modélisation du contact avec ou sans frottement d'un corps piézoélectrique avec une fondation isolatrice. La fonctionnelle mixte correspondante est définie dans la forme continue et trouver son optimum constitue un problème de point selle par rapport aux déplacements, aux potentiels et aux multiplicateurs de Lagrange. Les équations vectorielles non linéaires des solides piézoélectriques obtenues sont linéarisées par l'utilisation de la méthode de Newton généralisée. Enfin, un élément fini de contact "noeud à rigide" a été implanté dans le code `Modulef`.

Le modèle théorique et l'algorithme numérique ont été testés sur des cas simples pour vérifier la validité et l'efficacité et aussi le comportement asymptotique de la convergence. La thèse se termine par des simulations numériques, en dimension 2, d'un problème électro-élastique statique de contact avec frottement et aussi d'un problème électro-viscoélastique quasistatique de contact sans frottement.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées à ce travail de recherche. On peut dans un premier temps prolonger les cas statique et quasistatique développés dans ce mémoire au cas dynamique. Par ailleurs, il serait nécessaire de tester d'autres méthodes de prise en compte du contact, comme la méthode du Lagrangien perturbé ou la méthode du bi-potential. De même dans cette thèse, nous avons travaillé exclusivement avec la méthode d'intégration d'Euler implicite. Or, si cette méthode a l'avantage d'être

très stable, elle a aussi l'inconvénient de ne pas être très rapide. Il serait intéressant de considérer des schémas plus performantes comme la  $\alpha$ -méthode et d'en faire l'analyse numérique sur nos problèmes piézoélectriques. D'autre part, dans notre travail nous ne considérons que des problèmes bidimensionnels, pour prendre en compte toutes les propriétés des matériaux piézoélectriques, il serait souhaitable d'étendre nos travaux en dimension 3.

Une autre voie ensuite est la formulation des modèles théoriques et des algorithmes numériques, au niveau de la surface de contact, entre un corps piézoélectrique et une base conductrice et plus généralement entre deux corps piézoélectriques. Pour cela, il faudrait formuler une loi à l'interface de contact, cohérente et réaliste, couplant d'une part, le contact électrique entre les deux corps, et d'autre part, une loi de contact avec ou sans frottement. Cela entraînerait également et de faire une extension de la méthode du Lagrangien augmenté à la modélisation numérique de l'électro-mécanique des contacts et de résoudre les nonlinéarités avec une méthode de Newton généralisée, déjà utilisée pour des contacts purement mécanique, mais étendue à l'électro-mécanique des contacts. On pourrait encore aller plus loin en introduisant d'autres lois constitutives qui existent entre les propriétés électriques, thermiques et mécaniques d'un matériau piézoélectrique (lois électro-thermo-élastiques et électro-thermo-viscoélastiques) dans lesquelles intervient essentiellement la température due à la chaleur dégagée par le frottement par exemple, et son influence sur les propriétés du matériau piézoélectrique.

Par ailleurs, il serait nécessaire de comparer les solutions obtenues lors des simulations par rapport à des mesures réelles. En effet, la piézoélectricité a depuis lors trouvé un large champ d'applications dans le domaine de l'ingénierie électro-mécanique, des matériaux intelligents multifonctionnels capable de s'adapter à leur environnement. Depuis l'origine, les matériaux piézoélectriques ont été classés en deux grandes catégories : les matériaux de structure qu'on utilise principalement pour leurs propriétés mécaniques (construction de bâtiments, équipement sportif...) et les matériaux fonctionnels dont la capacité à conduire le courant électrique par exemple (la biomédecine, la robotique...). Une cellule piézoélectrique en contact direct avec un support constitue un capteur simple et efficace pour enregistrer la propagation d'ondes sismiques suite à un choc. Les matériaux piézoélectriques ont également été appliquées aux concepts des structures actives et adaptatives : les piézo-laminés étant parfaitement adaptés au rôle de capteurs de déplacement et de générateurs de force pour le contrôle des phénomènes vibro-acoustiques. Ils peuvent être utilisés pour dissiper les vibrations des skis afin de garantir au mieux le contact du ski avec la neige, qui convertit l'énergie mécanique en

énergie électrique au moyen de laminés piézoélectriques, ces derniers étant connectés à un circuit dissipatif.

Dans ce mémoire, nous avons considéré quelques exemples de problèmes aux limites, mais leur étude a engendré d'autres problèmes nouveaux. Ces lignes succinctes ci-dessus ne font qu'effleurer quelques unes de ces multiples ouvertures potentielles, la liste est loin d'être exhaustive. La mécanique est un champ privilégié d'applications des mathématiques, et en même temps, ses problèmes ouverts sont des sources inépuisables d'inspirations qui nous amènent à forger de nouveaux outils mathématiques. Nous espérons ainsi sensibiliser le lecteur à la richesse des problèmes soulevés, et lui susciter le désir d'aller encore plus loin, pour explorer les profondeurs de cet immense domaine de recherche en Mécanique de Contact.



# Bibliographie

- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] P. Alart, *Méthode de Newton généralisée en mécanique de contact*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **76** (1997), 83–108.
- [3] P. Alart and A. Curnier, *A generalized Newton method for contact problems with friction*, Dans Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, 67–82, 1988.
- [4] P. Alart and A. Curnier, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **92** (1991), 353–375.
- [5] L.-E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Analysis TMA, **16** (1991), 407–428.
- [6] F. Auricchio, P. Bisegna and C. Lovadina, *Finite element approximation of piezoelectric plates*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., **50** (2001), 1469–1499.
- [7] B. Awbi, M. Shillor and M. Sofonea, *Dual formulation of a quasistatic viscoelastic contact problem with Tresca's friction law*, Applicable Analysis, **79** (2000), 1–20.
- [8] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [9] H.T. Banks, R.C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley, 1996.
- [10] M. Barboteu, J.R. Fernández and Y. Ouafik, *Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems*, Preprint 2006.
- [11] M. Barboteu, J.R. Fernández and Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, Preprint 2006.
- [12] M. Barboteu, W. Han and M. Sofonea, *A frictionless contact problem for viscoelastic materials*, IMA Journal of Numerical Analysis, **2** (2002), 1–21.
- [13] M. Barboteu, T.-V. Hoarau-Mantel and M. Sofonea, *On the frictionless unilateral contact of two viscoelastic bodies*, J. Appl. Math., **11** (2003), 575–603.

- [14] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston, 1984.
- [15] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- [16] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. Elasticity, **38** (1995), 209–218.
- [17] M. Bernadou et al., *Modulef une Bibliothèque Modulaire D'éléments Finis*, Inria, 1988.
- [18] P. Bisegna, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, Contact mechanics (Praia da Consolação, 2001), 347–354, Solid Mech. Appl., **103**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [19] H. Brézis, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 115–175.
- [20] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.
- [21] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [22] W.G. Cady, *Piezoelectricity; an Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, Mc Graw-Hill, New York, London, 1946.
- [23] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han and M. Sofonea, *A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191** (2002), 5007–5026.
- [24] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [25] P.G. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, in P.G., Ciarlet and J.L. Lions, Eds, Handbook of numerical analysis, Vol II, North Holland, Amsterdam, (1991), 17–351.
- [26] C. Ciulcu, D. Motreanu and M. Sofonea, *Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Inequalities & Applications, **4** (2001), 465–479.
- [27] M. Cocu, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engng. Sci., **22** (1984), 567–581.
- [28] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, *Analysis of an incremental formulation for frictional contact problems*, Contact Mechanics, Eds. M. Raous, M. Jean, J. J. Moreau, Plenum Press, New York, 1995.

- [29] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, Int. Jour. Engng. Sci., **34** (1996), 783–798.
- [30] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani and T. Sassi, *Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies*, Mathematics of Computations, **71** (2002), 1–25.
- [31] C. Corneschi, T.-V. Hoarau-Mantel and M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction for elastic materials*, Journal of Applied Analysis, **8** (2002), 59–80.
- [32] A. Curnier, *Méthodes numériques en mécanique des solides*, Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993.
- [33] R. Dautray and J.L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques*, Masson, Paris, **1** (1984), **5** (1988).
- [34] G. De Saxce and Z.Q. Feng, *New inequality and functional for contact with friction: the implicit standard material approach*, Mechanical Structures & Machines **19** (1991), 301–325.
- [35] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris, 1998.
- [36] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1972.
- [37] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [38] M.L. Feng and C.C. Wu. *A study of three-dimensional four-step braided piezoceramic composites by the homogenization method*, Comp. Scien. Tech., **61** (2001), 1889–1898.
- [39] J. R. Fernández, P. Hild and J. M. Viaño, *Résolution numérique d'un problème de contact entre corps élasto-viscoplastiques et maillages éléments finis incompatibles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, S. I, **331** (2000), 833–838.
- [40] J.R. Fernández, M. Sofonea and J.M. Viaño, *A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance: Numerical analysis and computational experiments*, Numer. Math., **90** (2002), 689–719.
- [41] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I, **5** (1964), 91–140.
- [42] C.M. Frans and Van De Pol, *Thin-film ZnO-properties and applications*, Ceramic Bulletin, **69** (1990), 1959–1965.

- [43] P. Germain and P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.
- [44] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [45] R. Glowinski, J.-L. Lions and R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [46] W. Han, *On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance*, Numer. Funct. Anal. et Optimiz, **17** (1996), 307–321.
- [47] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage*, J. Comput. Appl. Math., **137** (2001), 377–398.
- [48] W. Han and M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis, **38** (2000), 556–579.
- [49] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, vol. **30** of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Rhode Island; International Press, Massachusetts, 2002.
- [50] W. Han and M. Sofonea, *Analysis et numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance*, Applicationes Mathematicae, **26** (1999), 415–435.
- [51] W. Han and M. Sofonea, *Numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190**, (2000) 179–191.
- [52] M.R. Hestenes, *Multiplier and gradient methods*, Journal of Optimization Theory and Applications, **4** (1969), 303–320.
- [53] P. Hild and P. Laborde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems*, Applied Numerical Mathematics, **41** (2002), 401–421.
- [54] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs and J. Lovíšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [55] S. Hübner, A. Matei and B.I. Wohlmuth, *A mixed variational formulation and an optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **48** (2005), 209–232.
- [56] I.R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [57] T. Ideka, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxfors, 1990.

- [58] IEEE std, 1988, *IEEE standard on piezoelectricity*, ANSI/IEEE Std 176–1987.
- [59] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [60] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media*, Int. J. Engng. Sci., **18** (1982), 1173–1284.
- [61] A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, *A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance in Unilateral Problems in Structural Analysis*, Vol. 4, Eds. G. Del Piero and F. Maceri, Birkhauser, Boston (1991), 85–111.
- [62] A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Internat. J. Engrg. Sci., **26** (1988), 811–832.
- [63] T.A. Laursen, *Computational contact and impact mechanics*, Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis Springer-Verlag, 2002.
- [64] F. Lebon, *Contact problems with friction: Models and simulations*, Simulation Modelling Practice and Theory, **11** (2003), 449–464.
- [65] F. Léné, *Sur les matériaux élastiques à énergie de déformation non quadratique*, Journal de Mécanique, **13** (1974), 499–534.  
Masson et Springer-Verlag, Paris, 1990.
- [66] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [67] F. Maceri and B. Bisegna, *The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support*, Math. Comput. Modelling, **28** (1998), 19–28.
- [68] J.A.C. Martins, M.D.P. Monteiro Marques MDP, Eds., *Contact Mechanics*, Dordrecht, Kluwer, 2002.
- [69] J.A.C. Martins and J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlinear Anal., **11** (1987), 407–428.
- [70] H. Mechkour, *Homogénéisation et simulation numérique de structures piézoélectriques perforées et laminées*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie Paris, 2004.
- [71] R.D. Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics*, Internat. J. Solids Structures, **4** (1968), 637–663.
- [72] R.D. Mindlin, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, Internat. J. Solids Structures, **4** (1969), 1197–1213.

- [73] R.D. Mindlin, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*, J. Elasticity, **4** (1972), 217–280.
- [74] J.J. Moreau, *Les liaisons unilatérales et le principe de gauss*, C.R.A.S., **256** (1963), 871–874.
- [75] A. Morro and B. Straughan, *A uniqueness theorem in the dynamical theory of piezoelectricity*, Math. Methods Appl. Sci., **14** (1991), 295–299.
- [76] D. Motreanu and M. Sofonea, *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, **4** (1999), 255–279.
- [77] D. Motreanu and M. Sofonea, *Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. Sci. Appl., **10** (2000), 103–118.
- [78] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [79] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [80] J.T. Oden and J.A.C. Martins, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **52** (1985), 527–634.
- [81] J.T. Oden and J.A.C. Reddy, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite elements*, Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [82] Y. Ouafik, *A piezoelectric body in frictional contact*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **48** (2005), 233–242.
- [83] Y. Ouafik, *Analyse numérique des structures piézoélectriques en contact avec frottement*, Poster, 8ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Chambéry, 2006.
- [84] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhauser, Basel, 1985.
- [85] V. Piefort, *Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures*, PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [86] G. Pietrzak and A. Curnier, *Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **177** (1999), 351–381.
- [87] L. Pinchard, *Electromagnétisme classique et théorie des distributions*, Ellipses, 1990.

- [88] M.J.D. Powell, *A method for nonlinear constraints in minimization problems*, R. FLETCHER, ed., Optimization, Academic Press, New-York (1969), 283–298.
- [89] M. Raous, P. Chabrand and F. Lebon, *Numerical methods for frictional contact problems and applications*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, suppl N1, **7** special issue, 1988.
- [90] M. Raous, M. Jean, J.J. Moreau, Eds., *Contact Mechanics, New York*, Plenum Press, 1995.
- [91] P.A. Raviart et J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
- [92] L. Schawrtz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1979.
- [93] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [94] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933.
- [95] J.C. Simo and T.A. Laursen, *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computer & Structures **42** (1992), 97–116.
- [96] M. Sofonea, *Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, 1993.
- [97] M. Sofonea, *On a contact problem for elastic-viscoplastic bodies*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **29** (1997), 1037–1050.
- [98] M. Sofonea and E.-H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl., **14** (2004), 25–40.
- [99] M. Sofonea and E.-H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Math. Model. Anal., **9** (2004), 229–242.
- [100] M. Sofonea and Y. Ouafik, *A piezoelectric contact problem with normal compliance*, Appl. Math., **32** (2005), 425–442.
- [101] M. Sofonea and Y. Ouafik, *Quasistatic Frictional Contact of a Elastic Piezoelectric Body*, Preprint 2006.
- [102] N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, **33** (1996), 1817–1836.
- [103] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear PDE and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, 1990.

- [104] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [105] G.W. Taylor, J.J. Gagnepain, T.R. Meeker, T. Nakamura and L.A. Shuvalov, *Piezoelectricity*, **4** Gordon and Breach, New York, 1985.
- [106] J.J. Telega, *Quasi-static Signorini's contact problem with friction and duality*, Int. Ser. Num. Math., **101** (1991), 199–214.
- [107] R. Temam, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Méthodes mathématiques de l'informatique, Gauthiers-Villars, Paris, 1983.
- [108] R. Temam and A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [109] B. Tengiz and G. Tengiz, *Some Dynamic Problems of the Theory of electroelasticity*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, **10** (1997), 1–53.
- [110] H.F. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York, 1969.
- [111] R.A. Toupin, *The elastic dielectrics*, J. Rational Mech. Anal., **5** (1956), 849–915.
- [112] R.A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Internat. J. Engrg. Sci., **1** (1963), 101–126.
- [113] R.A. Toupin, *Stress tensors in elastic dielectrics*, Arch. Rational Mech. Anal., **5** (1960), 440–452.
- [114] N. Turbé and G.A. Maugin, *On the linear piezoelectricity of composite materials*, Math. Methods Appl. Sci., **14** (1991), 403–412.
- [115] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristall-Physik*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [116] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Wiley-Verlag, 2002.
- [117] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite Element Method*, Vol I and II, McGraw-Hill, New York, 1991.