



**HAL**  
open science

# RHEOLOGIE ET IMAGERIE DES ECOULEMENTS 2D DE MOUSSE

approche expérimentale, numérique et  
théorique

Christophe Raufaste

► **To cite this version:**

Christophe Raufaste. RHEOLOGIE ET IMAGERIE DES ECOULEMENTS 2D DE MOUSSEap-  
proche expérimentale, numérique et théorique. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université  
Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00193248

**HAL Id: tel-00193248**

**<https://theses.hal.science/tel-00193248>**

Submitted on 3 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE I

N° attribué par la bibliothèque  
-----

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UJF**

**Spécialité : Physique**

préparée au Laboratoire de Spectrométrie Physique

dans le cadre de l'École Doctorale de Physique

par

**Christophe RAUFASTE**

soutenance le 19 octobre 2007

**RHEOLOGIE ET IMAGERIE  
DES ECOULEMENTS 2D  
DE MOUSSE**

**APPROCHE EXPERIMENTALE, NUMERIQUE ET  
THEORIQUE**

-----  
**Directeur de thèse :**

François GRANER  
-----

**JURY**

Mme	Isabelle CANTAT	, Rapporteur
Mme	Sylvie COHEN-ADDAD	, Rapporteur
M.	François GRANER	, Directeur de Thèse
M.	Amine AMMAR	, Examineur
M.	Simon COX	, Examineur



# Remerciements

Cette page est l'occasion pour moi de remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné lors de ces trois années sur le plan personnel et sur le plan professionnel ; bien souvent sur les deux à la fois.

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse François Graner de m'avoir introduit dans le monde bien réel des mousses, de m'avoir guidé tout en me laissant la plus grande autonomie et de m'avoir fait voyager tout au long de ma thèse à la rencontre des autres mousseux. Grand merci aussi à Philippe Marmottant et Catherine Quilliet pour toutes ces discussions constructives. Merci à Richard Perli sans qui la manip n'aurait sans doute jamais existé. Je remercie très fortement Benjamin Dollet, compagnon de la semaine et des weekends, pour son exemplarité professionnelle et pour nous en avoir fait baver en montagne dès le début. Merci à Yi Jiang et Simon Cox, chez qui mes visites ont été riches en travail et en découverte. Merci à Florence Elias, Wiebke Drenckhan pour le très bon souvenir que je garde de l'Ecole des Houches. Merci à tous les stagiaires pour leur aide précieuse et leur bonne humeur : Amandine, Jérôme, Joris, David, Steven, Etienne.

Je remercie sincèrement les membres de jury pour avoir concrétiser l'aboutissement de ce projet, notamment mes deux rapporteurs Isabelle Cantat et Sylvie Cohen-Addad, dont la lecture détaillée et critique a permis d'améliorer le manuscrit. Merci à Amine Ammar, dont j'apprécie l'approche rigoureuse.

Merci aux personnes avec qui j'ai passé tout simplement de bons moments ou partagé une activité au laboratoire (football, frisbee, pétanque, baby-foot) : Gwennou, Mourad, Gerrit, Ibrahim, Shirin, Andreea, Cécile, Victoria, toute l'équipe de foot emmenée par Mathieu. Merci aussi aux anciens : Malika, Cyrille, Philippe. Merci à Boris, Jan-Paul, Jos, Giovanni, Olga, Vincent, Hadrien, Sandrine, Jérémy, Joris, Laurent et Aurélie, compagnons de jeux, de balades, ou prêts à me suivre pour ramasser deux champignons.

Je tiens à remercier ma famille et en premier lieu mes parents pour être toujours prêts à traverser les montagnes ou les mers, et m'avoir toujours soutenu.

Merci enfin à Claire pour avoir partagé cette aventure.



## La bonne réputation

d'après Jos Käfer et François Graner

(sur l'air de "La mauvaise réputation", de Georges Brassens)

Dans l'équipe, sans prétention,  
J'ai une bonne réputation  
Que je bull' ou que j'reste coi,  
Tout le monde parle de moi.  
Je ne fais pourtant obstacl' à personne  
En bullant des mouss's qui débit'nt des tonnes  
Mais si j'persist' à débiter \  
Ma poubelle va déborder / (bis)  
Toutes les mousses je les ai vues,  
sauf les petites, bien entendu.

Pour mes rares jours fériés,  
Je rentre dans mon nid douillet.  
Patat's, cak', et poir's à ramener  
Les pizzas me suiv'nt par courrier.  
Avec ma copine lorraine Claire  
On met les p'tits plats dans les tupperware  
Mais si j'persist' à entasser \  
Ma cuisine va déborder / (bis)  
Tout le monde mange chez moi,  
pour la mirabell', ça va de soi.

Quand j'crois' un ballon malchanceux  
J'lui montre c' que c'est qu'un footeux.  
Jeu d' tarot, pétanqu', et frisbee  
Pour passer d'méchant à gentil.  
Je ramèn' mes pièc's d' voitur' de Lorraine  
J'en ai rapporté 6 petites reines  
Mais si j'persist' à entasser \  
Mon garage va déborder / (bis)  
Tout le mond' se promèn' avec moi,  
sauf les culs-d'-jatt', ça va de soi.

Pas besoin d'être un champion  
Pour récolter des pieds d' mouton  
Mais j'ai beau varier mes endroits  
Jan-Paul pass' toujours avant moi.  
Stat's, Pays de Gall's, Berlin, Chamechine,  
Si Oslo c'est trop près, j'irai jusqu'en Chine  
Mais si Jan-Paul persist' à v'nir \  
Je n'aurai plus rien à cueillir. / (bis)  
Toutes les montagnes je les aurai vues,  
pour la physique, bien entendu !

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la mécanique des mousses</b>	<b>1</b>
1.1	Mesures . . . . .	1
1.1.1	Rhéométrie des mousses . . . . .	1
1.1.2	Ecoulements 2D de mousse quasi 2D . . . . .	3
1.2	Modélisation . . . . .	5
1.2.1	Comportement complexe : échelle locale . . . . .	5
1.2.2	Modèles phénoménologiques . . . . .	8
1.2.3	Lien individuel-collectif . . . . .	12
1.3	Questions en suspens . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Matériels et méthodes</b>	<b>17</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	17
2.1.1	Soufflerie à mousse . . . . .	17
2.1.2	Paramètres . . . . .	20
2.1.3	Configurations expérimentales . . . . .	22
2.1.4	Traitement des images . . . . .	25
2.1.5	Autres géométries . . . . .	25
2.2	Approche numérique . . . . .	25
2.2.1	Modèle de Potts . . . . .	25
2.2.2	Hypothèse quasistatique . . . . .	30
2.2.3	Adaptation à notre géométrie . . . . .	30
2.2.4	Mesure de la tension de ligne . . . . .	33
2.2.5	Autres approches numériques . . . . .	36
2.3	Analyse d'images expérimentales et numériques . . . . .	38
2.3.1	Grandeurs locales mesurées . . . . .	38
2.3.2	Représentation des données . . . . .	44
2.3.3	Fraction liquide effective . . . . .	48
2.4	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Ecoulement permanent : mesures globales</b>	<b>53</b>
3.1	Géométrie des bulles, lien $\Phi$ - $\Phi_{eff}$ . . . . .	53
3.2	Mesure de dissipation . . . . .	56
3.2.1	Modèles existants . . . . .	57

3.2.2	Mesures de perte de charge . . . . .	59
3.2.3	Discussion . . . . .	61
3.3	Stabilité de la mousse . . . . .	62
3.3.1	Perte de rigidité de la mousse . . . . .	63
3.3.2	Instabilité . . . . .	64
3.3.3	Visualisation de la limite en pression : expérience en micro- canal . . . . .	69
3.4	Mesure de force . . . . .	70
3.4.1	Principe de la mesure de la force de réseau $F^n$ . . . . .	71
3.4.2	Effet du confinement . . . . .	73
3.4.3	Effet de la taille de l'obstacle . . . . .	76
3.4.4	Effet de la fraction liquide . . . . .	77
3.4.5	Effet de la taille des bulles . . . . .	78
3.4.6	Force de pression . . . . .	78
3.4.7	Effet de la polydispersité . . . . .	81
3.4.8	Discussion sur les forces . . . . .	81
3.5	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Ecoulement permanent : mesures locales</b>	<b>87</b>
4.1	Méthodes . . . . .	87
4.2	Champs expérimentaux . . . . .	89
4.2.1	Expérience type . . . . .	89
4.2.2	Autres expériences . . . . .	98
4.2.3	Taille des éléments représentatifs de volume (RVE) . . . . .	101
4.3	Champs des simulations . . . . .	103
4.3.1	Comparaison avec l'expérience . . . . .	103
4.3.2	Champs de pression . . . . .	104
4.4	Propriétés de la mousse . . . . .	104
4.4.1	Affinité : comparaison $\overline{G}$ - $\overline{\nabla}v$ . . . . .	104
4.4.2	Elasticité . . . . .	106
4.4.3	Plasticité dans le régime <i>bulles relaxées</i> . . . . .	107
4.5	Conclusion . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Ecoulement simplifié : étude transitoire</b>	<b>115</b>
5.1	Modèle . . . . .	115
5.1.1	Motivation . . . . .	115
5.1.2	Hypothèses . . . . .	116
5.1.3	Equations . . . . .	116
5.1.4	Tests . . . . .	117
5.2	Régime élastique . . . . .	118
5.2.1	Matériau initialement isotrope . . . . .	119
5.2.2	Matériau initialement anisotrope . . . . .	120
5.2.3	Commentaires . . . . .	122

5.3	Régime élasto-plastique . . . . .	123
5.3.1	Limite plastique, état stationnaire . . . . .	123
5.3.2	Réponse transitoire - Effet de $h$ . . . . .	124
5.3.3	Sursaut . . . . .	128
5.4	Comparaison aux simulations . . . . .	129
5.4.1	Régime saturé . . . . .	130
5.4.2	Sursaut . . . . .	132
5.4.3	Proportion de plasticité . . . . .	134
5.5	Discussion . . . . .	135
5.5.1	Du modèle au comportement . . . . .	135
5.5.2	Détermination de $h$ . . . . .	137
5.5.3	De la structure au modèle . . . . .	137
5.5.4	Validations futures . . . . .	138
5.5.5	Différence scalaire-tensoriel . . . . .	139
5.6	Conclusion . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Discussion</b>	<b>143</b>
6.1	Dynamique de la mousse et des bulles . . . . .	143
6.1.1	Equation d'évolution de la quantité de mouvement . . . . .	143
6.1.2	Equations constitutives . . . . .	144
6.1.3	Ordres de grandeur des paramètres . . . . .	145
6.1.4	Discussion . . . . .	146
6.2	Validité d'une approche locale et continue. . . . .	148
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
7.1	Résumé . . . . .	151
7.2	Perspectives . . . . .	153
<b>A</b>	<b>Elasticité d'une mousse ordonnée</b>	<b>155</b>
A.1	Paramétrage . . . . .	155
A.1.1	Transformations . . . . .	155
A.1.2	Coordonnées initiales . . . . .	156
A.1.3	Expression des grandeurs . . . . .	156
A.2	Cisaillement simple . . . . .	156
A.3	Elongation . . . . .	157
A.4	Module de cisaillement . . . . .	158
A.5	Déformation maximale . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Détails de l'équation de plasticité</b>	<b>161</b>
B.1	Calculs directs . . . . .	161
B.2	Eléments propres . . . . .	162
B.3	Régime saturé . . . . .	163
B.4	Régime élastique . . . . .	164



# Avant-propos

## Généralités sur les mousses liquides

Les mousses liquides sont omniprésentes autour de nous. Nous les retrouvons ainsi dans les produits agroalimentaires (mousse au chocolat, mousse de bière), les produits cosmétiques (mousse à raser) que nous utilisons quotidiennement ; mais aussi pour des applications plus techniques telles que la séparation de minerais, la décontamination nucléaire, l'extraction du pétrole ou la prévention des accidents d'avions (la piste d'atterrissage peut très rapidement être couverte de mousse pour amortir le choc). Elles sont souvent à la base des mousses solides qui composent par exemple le pare-chocs des voitures, les mousses isolantes des maisons ou les crèmes glacées. Nous les retrouvons aussi dans la nature. Les larves de petits insectes, les cicadelles, se protègent en produisant un véritable bouclier de mousse ("crachat de coucou"). Certains amas de bulles sont aussi responsables de phénomènes très impressionnants, tels que les éruptions volcaniques stromboliennes.

Les nombreuses applications résultent de propriétés particulières. On peut citer par exemple les propriétés optique (matériau très diffusant), massique (très léger comparé à un liquide usuel, pratique pour recouvrir un feu d'hydrocarbures par exemple), isolantes (thermique et acoustique) et mécanique (elle peut garder sa forme, être sculptée, s'infiltrer dans des trous ou remplir des cavités)

Pourtant, rien n'est plus facile que de fabriquer une mousse liquide soi-même. Il suffit de souffler avec une paille dans de l'eau savonneuse pour pouvoir admirer les bulles s'arranger en mousse. Pour fabriquer une mousse on a ainsi besoin de gaz (la plus grande partie du volume), de liquide (de l'ordre de 10 à 100 fois moins que de gaz) et de liquide vaisselle ou autres surfactants (de l'ordre de 10 à 100 fois moins que de liquide). La différence avec une émulsion est que le liquide, la phase continue, entoure une phase dispersée gazeuse (les bulles). L'eau se retrouve ainsi dans les films séparant deux bulles, dans les lignes séparant trois bulles (bords de Plateau) et dans le sommet formé par l'intersection de quatre bulles (vertex) [139].

Les échelles de longueur sont variées : typiquement, pour des bulles de diamètre environ un millimètre et de fraction liquide de l'ordre de 1 %, les bords de Plateau

(qui contiennent une grande partie de l'eau) ont une taille de l'ordre du 1/10ème de millimètre. Les surfactants se situent à l'interface entre gaz et liquide ; ils forment une couche de quelques nanomètres environ d'épaisseur. C'est grâce à la présence des différentes échelles que les mousses présentent des propriétés originales, de même que d'autres matériaux "mous", tels que les émulsions, les verres, les pâtes, les solution de polymères.

## Contexte de la thèse

Parmi les différentes propriétés des mousses liquides, nous nous concentrons dans cette thèse sur les propriétés rhéologiques : ces mousses font partie des fluides dits complexes. En effet une mousse liquide présente à la fois des caractéristiques élastiques, plastiques et visqueuses. Cela lui permet de garder sa forme comme un solide élastique au repos, ou de s'écouler comme un fluide visqueux lorsqu'on lui applique une contrainte (par exemple pour l'étaler sur un visage pour une mousse à raser). Les différentes notions sont précisées dans la suite. Nous travaillons sur des temps assez courts pour négliger la diffusion de gaz entre les bulles et son effet sur l'écoulement [20].

Cette thèse s'inscrit donc dans le cadre de la rhéologie des mousses. Ce domaine de la recherche des mousses est très actif. Il regroupe des chercheurs de nombreux laboratoires dans le monde au sein d'une communauté d'aphrorhéologues qui a pris la bonne habitude de se réunir souvent durant ma thèse : Aberystwyth 2005, Ecole de Physique Les Houches 2006, Eufoam 2006, GDR mousse 2006.

J'ai pu profiter au commencement de ma thèse de l'expertise dans ce domaine de l'équipe DyFCOM du laboratoire de Spectrométrie Physique qui développe cette thématique depuis 7 ans. B. Dollet avait déjà étudié expérimentalement l'influence sur les écoulements 2D de mousse de différents paramètres tels que l'aire des bulles, la viscosité de la solution, la nature du tensioactif [38, 41, 42]. En revanche il manquait l'effet de la fraction liquide et de la vitesse, ce qui a motivé le début de ma thèse. L'approche numérique est complémentaire des expériences ; j'ai eu la possibilité d'interagir fortement avec des chercheurs effectuant des simulations des écoulements de mousse : S. Cox (The University of Wales, UK), et Y. Jiang (Los Alamos National Laboratory, US) chez qui j'ai effectué un séjour d'un mois pour apprendre à simuler les mousses avec le modèle de Potts. Sur le campus grenoblois, l'équipe travaille aussi avec des mathématiciens du Laboratoire Jean Kuntzmann pour ce qui concerne la modélisation de milieux continus : P. Saramito, I. Cheddadi. Plus généralement, j'ai bénéficié du travail des nombreux visiteurs qui se sont succédés au sein de l'équipe depuis sept années : S. Courty (thèse), M. Asipauskas, M. Aubouy, E. Janiaud, F. Elias et J. Glazier.

En pratique, j'ai bénéficié du programme de suivi de bulle écrit par B. Dollet durant sa thèse, de l'expérience en microcanaux de J.-P. Raven, de l'expertise technique de R. Perli et de conseils pour fabriquer un dispositif 2D de I. Cantat

(Groupe Matière Condensée et Matériaux, Rennes 1). L'aide des autres membres de l'équipe était précieuse, notamment pour ce qui concerne l'approche tensorielle : F. Graner, P. Marmottant, C. Quilliet. Mon travail a enfin été épaulé par de nombreux stagiaires que j'ai eu plaisir à encadrer ou avec qui j'ai interagi : A. Foulon, J. Legoupil, J. Munoz, D. Rabaud, S. Thomas.





# Chapitre 1

## Introduction à la mécanique des mousses

### 1.1 Mesures

Pour étudier le comportement d'un matériau qui se déforme ou qui coule, il est possible de mesurer une quantité globale résultant de la déformation (rhéométrie) ou de visualiser la structure locale. Les mousses liquides présentent l'avantage de pouvoir cumuler et relier les deux approches.

#### 1.1.1 Rhéométrie des mousses

Les rhéomètres permettent de donner une mesure globale d'un échantillon et sont très utilisés pour l'étude des fluides complexes en général. Les différentes configurations de rhéomètres plaque-plaque, cône-plaque ou cylindre-cylindre fournissent un couple et mesurent une vitesse de rotation, ou l'inverse (voir [63] pour une revue complète dans le cas des mousses). Parmi les expériences type il est possible d'appliquer un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  constant, d'appliquer des paliers de contrainte  $\sigma$  (fluage), des paliers de déformation  $\gamma$  (relaxation). Des études expérimentales [33, 77] mais aussi numériques avec le modèle des bulles [47, 49] présentent des lois de type  $\sigma = \sigma_Y + m\dot{\gamma}^n$ , avec un exposant  $n$  variant entre 0.25 et 1 [63].

Une autre façon de caractériser un fluide complexe est de lui appliquer une déformation sinusoïdale  $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$  et de mesurer les contraintes  $\sigma$  que développe le matériau. On utilise  $G'$  et  $G''$ , respectivement la partie en phase et en opposition de phase de la réponse complexe du système  $G = \sigma/\gamma$  [104, 91, 128, 88] :

$$G' = -\frac{1}{\gamma_0^2 \pi \omega} \int_0^T \sigma(t) d\dot{\gamma}, \quad (1.1)$$

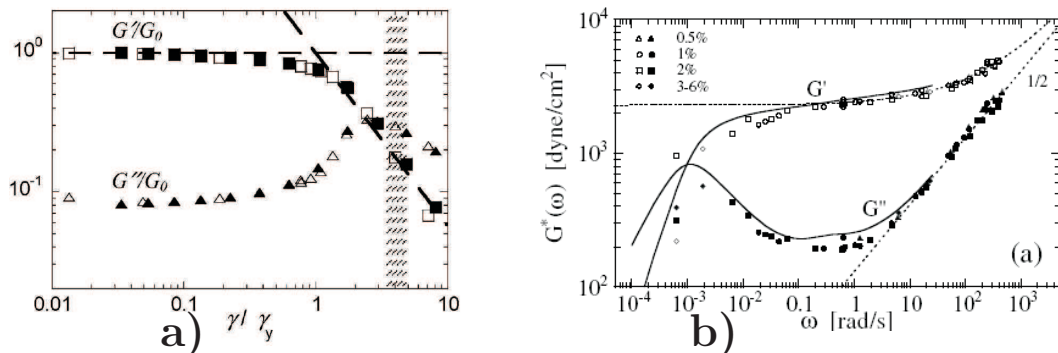


FIG. 1.1 – Rhéométrie oscillatoire de mousses liquides.  $G'$  et  $G''$  fonction (a) de l'amplitude (d'après [120]) et (b) de la fréquence (d'après [54]).

$$G'' = \frac{1}{\gamma_0^2 \pi} \int_0^T \sigma(t) d\gamma. \quad (1.2)$$

En faisant varier la fréquence  $\omega$ , on a accès par exemple aux temps de relaxation du système [19], ce qui est utilisé pour la caractérisation des fluides visco-élastiques, tels que les polymères [88]. Travailler à  $\omega$  constant en faisant varier  $\gamma_0$ , fait ressortir les non-linéarités et déformations caractéristiques, ce qui est utile pour les fluides élasto-plastiques tels que les émulsions [94] ou les suspensions colloïdales.

Les mousses liquides présentent des propriétés visco-élasto-plastique et les deux approches sont nécessaires (figure (1.1)). Récemment, il a été proposé de travailler avec  $\gamma_0$  et  $\omega$  couplés sur l'exemple des suspensions colloïdales [141].

A faible taux de cisaillement  $\gamma_0 \cdot \omega$ , la mousse se comporte comme un matériau élasto-plastique (élastique à petite déformation, plastique à grande déformation). Höhler *et al.* [64] soulignent qu'un tel matériau est faiblement dissipatif ( $G'' \ll G'$  à faible  $\gamma_0$ ). L'étude à fréquence imposée est alors bien adaptée. Cette méthode a d'abord été utilisée pour les émulsions [94, 95, 96] avant d'être utilisée pour les mousses [121, 97, 120]. A faible  $\gamma_0$  le rapport  $G'/G''$  pourrait prendre des valeurs différentes suivant le surfactant employé [142, 77, 19], mais le débat reste largement ouvert, car le mûrissement influe aussi sur ce rapport [54]. Ces différences seraient liées à la dissipation : elle affecte  $G''$  alors qu'elle touche faiblement  $G'$  [97]. A noter aussi un changement de comportement de ces courbes près de la perte de rigidité de la mousse [94, 121], c'est-à-dire lorsque la mousse devient tellement humide que les bulles deviennent de plus en plus isolées les unes des autres, et perdent une partie de leur réponse collective.

On constate des similarités entre différents matériaux élasto-plastiques : émulsions, mousses, suspensions [36, 141]. Dans la classification des matériaux suivant leur réponse à longue amplitude ( $\omega$  fixée,  $\gamma_0$  varie), proposée dans les références [66, 125], ces matériaux font partie de la classe III (sursaut en  $G''$ , pas en  $G'$ ,

voir figure (1.1a)).

Une autre mesure globale consiste à mesurer la force exercée par une mousse s'écoulant autour d'un obstacle en géométrie 3D [23, 31, 32, 14, 16] ou 2D [22, 37, 38, 39, 40, 41, 27, 113]. Ces expériences s'inspirent de l'expérience originale de Stokes. Les différentes expériences confirment la présence d'un seuil de plasticité et d'une force qui augmente lorsque la différence de vitesse entre la mousse et l'obstacle augmente.

Enfin, l'étude des modes d'oscillation d'une mousse excitée par une onde acoustique permet de remonter aux propriétés visco-élastiques de la mousse dans le régime des petites déformations [98].

### 1.1.2 Ecoulements 2D de mousse quasi 2D

Une mousse 3D est un milieu diffusant (trouble) dans lequel il est difficile d'observer les bulles. De plus, on a seulement accès aux bulles situées dans le plan focal de l'objectif de la caméra. Des techniques de reconstruction 3D d'image, type tomographie optique ou rayons X, devraient être opérationnelles d'ici peu pour l'étude de la rhéologie. Actuellement, elles fonctionnent sur des échelles de temps encore trop longues pour pouvoir suivre des bulles en écoulement [85]. Dans le but d'imager l'ensemble de l'écoulement il est plus simple de réaliser des écoulements 2D (c'est-à-dire dont le champ de vitesse est 2D) de mousse quasi 2D (c'est-à-dire d'une seule bulle d'épaisseur).

#### Dispositifs de mousse quasi 2D

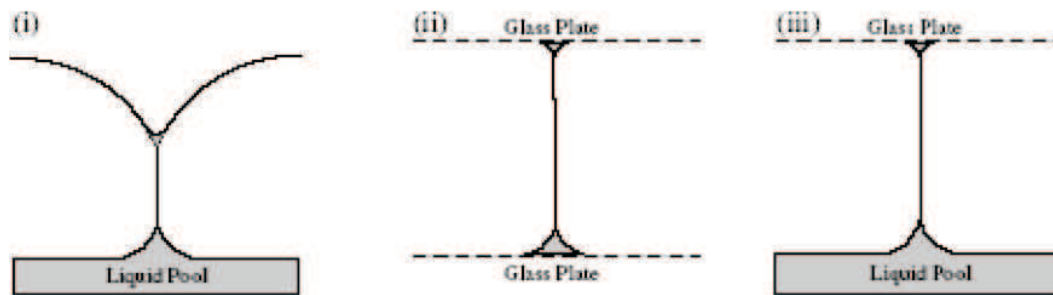


FIG. 1.2 – D'après [24]. Dispositifs à monocouche de bulles : (i) eau-air (radeau de bulles), (ii) verre-verre (cellule de Hele-Shaw), (iii) eau-verre (radeau de bulles confinées). Voir [135] pour une description détaillée des systèmes.

Plusieurs dispositifs sont utilisables pour obtenir une monocouche de bulles (figure (1.2)). Les bulles peuvent soit flotter à la surface d'un bassin de liquide (eau-air), soit être confinée entre deux plaques de verre (verre-verre) ou entre

un bassin de liquide et une plaque de verre (eau-verre). Ces dispositifs quasi 2D permettent une observation aisée des bulles. En revanche ils introduisent de nouveaux problèmes, comme la répartition de l'eau dans ces géométries [113], ou l'influence du frottement des bulles sur le bassin d'eau ou les plaques de verre. Il est maintenant établi que le frottement sur les plaques de verre a une influence déterminante dans ces dispositifs [137] ; l'entraînement du liquide du bassin par la mousse a un effet plus faible.

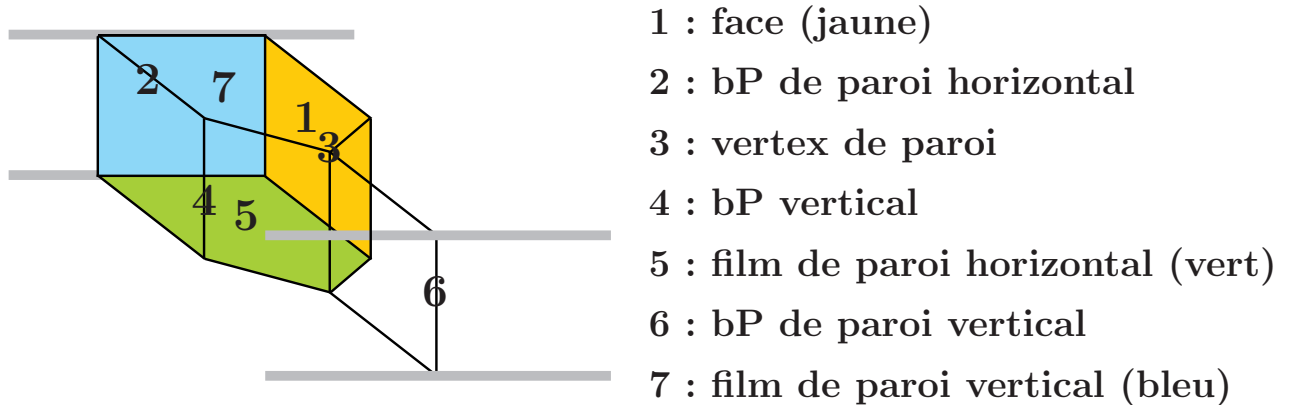


FIG. 1.3 – Nomenclature spécifique à la géométrie verre-verre. Ici, bP désigne un bord de Plateau.

Dans la suite, nous utilisons une nomenclature spécifique à la géométrie verre-verre, utilisée dans cette thèse. Les différents termes sont explicités sur la figure (1.3).

### Différentes géométries

Disposer d'un grand nombre de géométries permet de caractériser le mieux possible un matériau. Comme pour les granulaires [50], de nombreuses géométries ont déjà été testées pour les mousses : écoulements homogènes, hétérogènes, zones de cisaillement, d'élongation. A 2D, on peut citer les mousses qui s'écoulent autour d'un obstacle [38, 37, 39, 40, 42, 27, 113] ou d'une grosse bulle [13, 15], qui passent dans une constriction [3, 6], qui sont cisailées entre deux plaques [1, 112, 137] ou entre deux cylindres concentriques [30, 89, 110, 90, 35]. Dans certains cas, une mesure globale (couple, force) est couplée à la visualisation locale des bulles.

### Simulations numériques

Les simulations numériques ont toujours été complémentaires des expériences pour l'étude des mousses, notamment parce que la structure d'équilibre d'une mousse correspond à un minimum local d'énergie d'un milieu désordonné (1.2.1).

Les simulations étudient en général ce que l'on appelle le régime quasistatique, régime dans lequel l'évolution de la mousse est lente devant les différents temps

caractéristiques du système. La simulation impose à la mousse une déformation, puis lui laisse le temps de relaxer avant de la solliciter à nouveau. C’est le cas par exemple des simulations déterministes *Surface Evolver* [7, 8] ou des simulations Monte Carlo avec le modèle de Potts. Le modèle des vertex [101, 102] (la mousse est représentée par la position de ses vertex) et le modèle des bulles [47, 48, 130] (interaction type ressort entre bulles faiblement déformables, donc plutôt pour mousse humide) permettent en plus d’introduire des termes visqueux ; ils ont été utilisés pour simuler un cisaillement simple. Le modèle de Potts a été utilisé pour : cisaillement simple [71] et écoulement autour d’obstacle [113]. *Surface Evolver* a été utilisé pour : cisaillement simple [72, 25, 26, 73], cisaillement de Couette [25, 26], élongation [28] et écoulement autour d’obstacle [23, 27, 113].

Les simulations de rhéologie des mousses ne considèrent pas d’effet de température effective. Celle-ci permet de franchir plus facilement les barrières d’énergie pour atteindre d’autres minima locaux d’énergie. Cet effet se retrouve dans les simulations d’autres matériaux (colloïdes), pour lesquels les dimensions des objets sont suffisamment petites pour que la température joue un rôle ou pour les cellules biologiques qui fluctuent beaucoup.

Les simulations sont souvent comparées à la limite “vitesse d’écoulement tendant vers 0” des expériences. Cette limite ne correspond pas nécessairement au régime quasistatique (succession de sollicitations-relaxations). Néanmoins, le test de ces deux approches en expérience n’a pas révélé de résultat fondamentalement différent [133].

Il est aussi possible d’ajouter une sorte de friction liée aux plaques pour prendre en compte cette caractéristique des systèmes expérimentaux 2D. Le modèle *viscous froth*, basé sur le même algorithme que *Surface Evolver*, permet une telle approche [25, 75, 26, 45].

## 1.2 Modélisation

Une récente revue de la rhéologie des mousses [63] décrit les comportements rhéologiques observés à l’échelle de la mousse. Nous rappelons brièvement quelques points.

### 1.2.1 Comportement complexe : échelle locale

L’ingrédient physique principal du comportement solide de la mousse est la tension de surface  $\Gamma$ . Il s’agit de l’énergie par unité de surface que coûte une interface liquide-gaz : elle est positive. A l’équilibre les bulles tendent donc à minimiser leur surface. Une bulle isolée prend une forme sphérique, qui est la forme qui minimise une aire à volume constant. Dans une mousse très humide, les bulles sont quasi-isolées les unes des autres et prennent cette forme.

Par contre, plus la mousse devient sèche et plus les bulles sont coincées par leurs voisines. La forme des bulles résultant de la minimisation de l'aire devient alors de plus en plus polyédrique. La structure est déterminée par les lois de Plateau [106] : trois faces se rencontrent au niveau d'un bord de Plateau en faisant un angle de  $120^\circ$  entre elles ; les bords de Plateau se rejoignent au niveau des vertex en faisant un angle égal entre eux,  $109.5^\circ$ .

La tension de surface est à l'origine de la pression de Laplace, pression exercée au niveau de l'interface du fait de sa courbure. A l'équilibre, la surpression  $\Delta P$  de part et d'autre d'une interface gaz-liquide-gaz est donnée par :

$$\Delta P = 2\Gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

$R$  et  $R'$  étant les deux rayons de courbures principaux de l'interface [139].

A 2D dans le cas sec, on utilise plutôt la notion de tension de ligne  $\lambda$  : il s'agit de l'énergie par unité de longueur de la projection des faces de bulle (interface gaz-liquide-gaz). A titre d'exemple, un système idéal 2D d'épaisseur  $e$  a une tension de ligne égale à  $2\Gamma e$  [113]. Si la tension de ligne est homogène, alors la mousse 2D tend à minimiser son périmètre. Dans le cas d'une mousse 2D idéale (invariant suivant une dimension), la différence entre vertex et bords de Plateau n'est plus si évidente : on utilise l'une ou l'autre des désignations pour nommer cette projection du point de contact entre trois bulles.

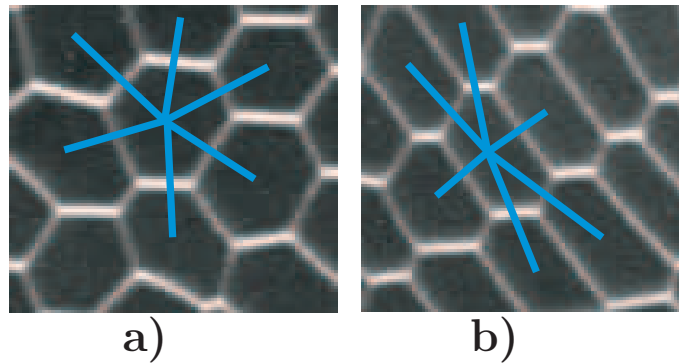


FIG. 1.4 – Etirement de la structure : (a) mousse isotrope ; (b) mousse étirée. En bleu on représente les liens entre barycentres de bulles voisines.

La mousse est à l'équilibre quand elle est dans un minimum local d'énergie. En essayant de déformer cette structure, le milieu répond (étirement des bulles, voir figure (1.4)) et s'oppose en créant des contraintes, dites élastiques, pour essayer de retourner dans son état non-contraint. Par contre si les bulles se déforment trop, un changement de voisins (ou topologique) a lieu : deux bulles se séparent et deux autres bulles se mettent en contact. Sur la figure (1.5), on visualise ce processus : le lien rouge disparaît et le lien bleu apparaît, signe du changement de voisins.

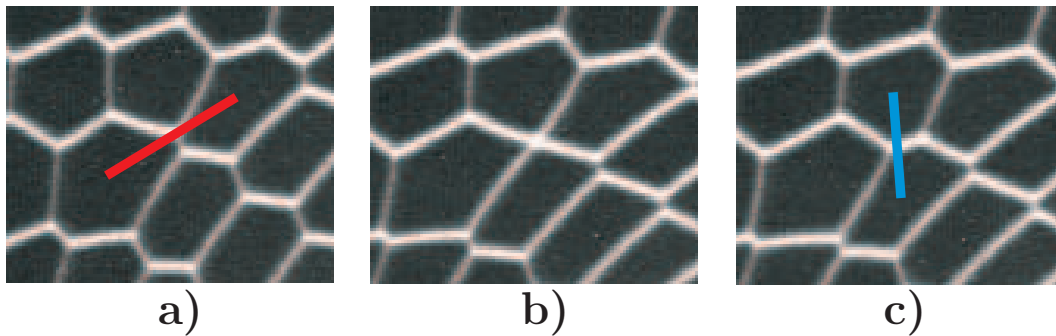


FIG. 1.5 – Réarrangement de la structure, processus T1. (a), (b) et (c) respectivement avant, pendant et après le T1. On a représenté le réseau des centres de bulle. En rouge, lien qui disparaît après le T1. En bleu, lien qui apparaît après le T1.

Ce processus, nommé T1 [138], est caractéristique de la plasticité des mousses et permet à la mousse de se réarranger. L'état représenté sur la figure (1.5b), correspondant à un vertex à 4 branches, est un état instable qui se déstabilise rapidement vers l'état de la figure (1.5c).

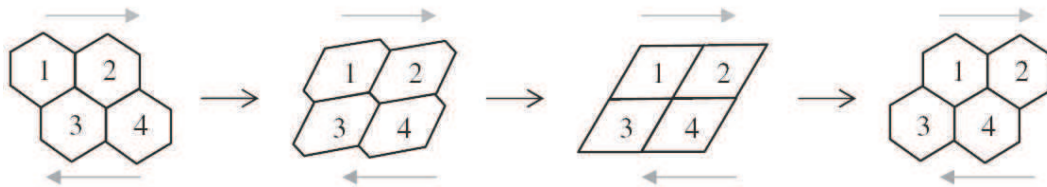


FIG. 1.6 – D'après [63]. Plasticité dans le modèle de Princen [111] pour une mousse dans la limite sèche. Toutes les bulles se meuvent et s'étirent de la même façon. Lorsque le lien entre 2 et 3 devient trop petit, il disparaît et un lien entre 1 et 4 est créé (processus T1). C'est un modèle qui prend en compte l'élasticité (étirement des bulles) et la plasticité (étirement maximal limité par les T1s).

La prise en compte du comportement individuel d'une bulle est à la base de certains modèles structuraux qui permettent de retrouver des caractéristiques rhéologiques. Princen [111], Khan et Armstrong [76, 78] considèrent ainsi le cas d'un cristal parfait de bulles (figure (1.6)) et calculent pour cette géométrie le module de cisaillement et le seuil de déformation. La modélisation des écoulements et donc de la dissipation est aussi possible. Kraynik [80] donne une revue de ces modèles de mousses spatialement périodiques.



## 1.2.2 Modèles phénoménologiques

### Elasticité

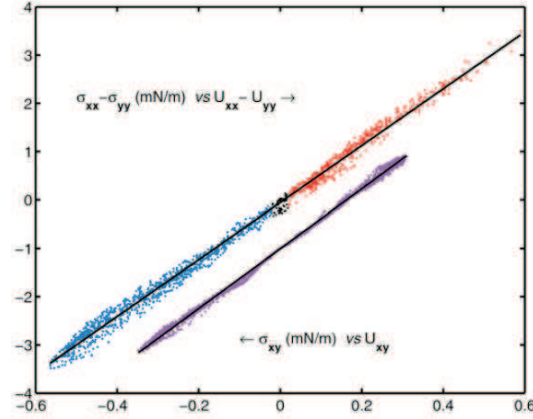


FIG. 1.7 – D’après [3]. Mesure d’élasticité pour une expérience de constriction. Les composantes du tenseur des contraintes élastiques  $\bar{\sigma}^{el}$  sont tracées en fonction de celles du tenseur de déformation élastique  $\bar{U}$ . Les composantes  $xy$  sont décalées par souci de clarté.

L’étude du module élastique des mousses est facilité par les logiciels de minimisation d’énergie, en particulier dans la limite sèche. Kraynik *et al.* [81] ont par exemple étudié le cas de mousses 3D ayant un ordre cristallin (répétition périodique d’un motif). Pour le cas 2D, les modèles cristallins de type Princen permettent d’estimer le module de cisaillement [111]. Celui-ci est proportionnel à  $\lambda/\sqrt{A}$ , avec  $\lambda$  la tension de ligne et  $A$  l’aire moyenne des bulles. Plus récemment des études théoriques [83] et numériques [29] cherchent à comprendre l’effet du désordre.

Même dans le régime plastique, lorsque les T1s apparaissent, la mousse présente aussi de l’élasticité, car les bulles sont étirées. Il est possible de remonter à la contrainte élastique locale en mesurant localement l’étirement des bulles, via le tenseur de texture  $\bar{M}$  [4, 3]. Cette mesure directe et locale donne une mesure de la déformation élastique  $\bar{U}$ , analogue à la déformation stockée dans un ressort élastique, valable quel que soit le régime (élastique, plastique) (figure (1.7)). Nous utilisons de tels outils, décrits en (2.3.1).

A noter aussi que les contraintes élastiques des mousses présentent une différence de contraintes normales non nulle [3, 84, 73]. Ces contraintes se retrouvent dans d’autres matériaux élastiques et sont par exemple responsables de l’effet Weissenberg (montée d’un fluide soumis à un cisaillement) [91]. Pour les mousses 2D, l’existence de telles contraintes peut se comprendre simplement en modélisant la mousse par un maillage de lignes parallèles qui se déforme en écoulement [73].

## Plasticité

Picard *et al.* [105] ont étudié l'effet sur l'ensemble d'un milieu élastique d'un événement plastique localisé. Dans le cas des mousses ces événements ont lieu lors des T1s : les bulles ne sont plus capables de se déformer plus pour s'opposer aux contraintes appliquées et se réarrangent. La notion de seuil de déformation est alors importante.

Comme on l'a vu, les modèles cristallins permettent de donner une idée de cette valeur, notamment en fonction de la fraction liquide. Des modèles phénoménologiques élasto-plastiques (ex : ressort-palet, figure (1.8)) permettent de rendre compte de ce seuil. Marmottant et Graner [92] proposent de lisser la façon dont il est atteint, pour décrire l'effet du désordre dans la mousse.

Expérimentalement ce seuil semble augmenter avec le taux de cisaillement, si celui-ci devient supérieur à l'inverse du temps de relaxation des T1s [119]. D'un point de vue géométrique, les études expérimentales [93] ou numériques [136] montrent que les T1s ont lieu en moyenne dans la direction des contraintes.

Les T1s peuvent avoir lieu sous forme d'avalanche, c'est-à-dire une succession de T1s corrélés. Ces événements semblent se retrouver surtout dans les géométries assez homogènes (cisaillement simple [1], cisaillement de Couette [119, 137]), pour lesquelles la contrainte est homogène, mais le débat reste toujours ouvert. Les T1s peuvent aussi se retrouver localisés sous forme de bandes de cisaillement. Cela peut résulter de la géométrie du rhéomètre : dans le cas des rhéomètres de Couette, la contrainte est hétérogène. Elle peut favoriser une ségrégation entre une zone liquide cisailée au dessus de la contrainte seuil et une zone solide en-dessous de ce seuil [90]. Dans ce cas le taux de cisaillement est discontinu au niveau de cette limite liquide-solide. Une localisation apparaît aussi lorsque le système est confiné par des plaques de verre [137, 69] : dans ce cas le profil de vitesse est continu.

## Dissipation

La dissipation dans les mousses est plus difficile à aborder. En effet, les écoulements de liquide sont plus difficilement visualisables que les effets élastiques et plastiques. D'autre part ils ont plusieurs origines physiques : soit dans les écoulements volumiques, soit dans les écoulements surfaciques à l'interface entre le liquide et l'air [10]. On s'attend notamment à ce que la nature du surfactant joue un rôle déterminant, selon que les interfaces sont fluides, rigides ou entre les deux [33]. Comme le cisaillement prend place dans des zones spatialement petites, cela entraîne des viscosités effectives beaucoup plus importantes que celle de la phase continue.

La rhéologie oscillatoire (1.1.1) donne aussi des indications sur la dissipation. Ainsi, la composante  $G''$  est proportionnelle à l'énergie injectée dans le rhéomètre par période (équation (1.2), [92]). Ainsi la diminution de  $G''$  avec la fraction li-

quide observée chez Saint-Jalmes et Durian [121] pourrait être en partie expliquée par une diminution de la viscosité effective que l'on doit introduire pour interpoler les données dans le régime sans réarrangement. Lorsque l'on travaille à fréquence imposée suffisamment faible ( $w$  fixe et  $\gamma_0$  varie), les modèles élasto-plastiques de type palet-ressort prévoient une variation de  $G''$  en  $\gamma_0^{-1}$  lorsque  $\gamma_0$  devient suffisamment grand [92, 64]. Ceci est lié à la dissipation de l'élément plastique (palet), en l'occurrence les T1s pour les mousses qui sont suivis d'écoulements dissipatifs lors de la réorganisation des bulles. Ces modèles sont dits faiblement dissipatifs [64] car ils supposent que la dissipation est suffisamment rapide comparée au temps caractéristique de l'écoulement ( $1/\gamma_0\omega$ ). Les réarrangements peuvent aussi être induits par le mûrissement [54], entraînant une dissipation et donc une augmentation de  $G''$ , que l'on observe par exemple à basses fréquences sur la figure (1.1b).

Concernant les mousses 2D, il est important d'introduire la dissipation au contact des plaques comme force extérieure dans les modèles [69, 18]. Cette étude met en jeu les écoulements de liquide proches de la surface et fait ressortir l'effet du nombre capillaire. La modélisation de cette dissipation sera discutée en (3.2).

### Différents modèles

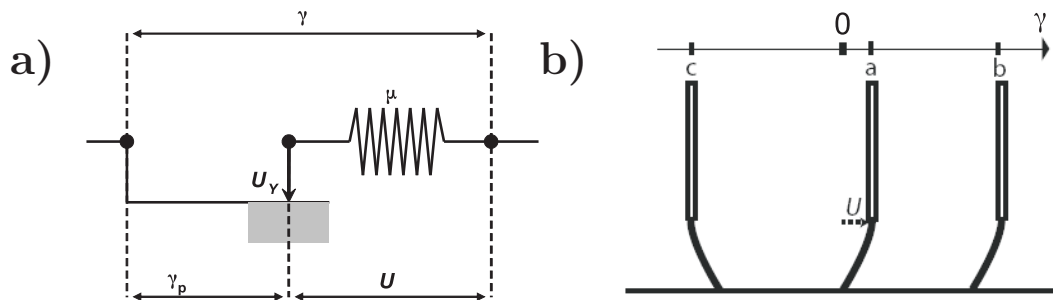


FIG. 1.8 – D'après [92]. Représentation schématique de différents modèles élasto-plastiques : a) ressort (élasticité) + palet (plasticité). b) pinceau : déformation des poils  $u$  (élasticité) + glissement des poils (plasticité)

Différents modèles phénoménologiques permettent de rendre compte des caractéristiques visco-élasto-plastique des matériaux observées lors d'expériences de rhéologie. On peut citer le modèle scalaire de Maxwell (visco-élastique linéaire) :  $\tau\dot{\sigma} + \sigma = \eta\dot{\gamma}$  : ici  $\tau$  est un temps caractéristique et vaut  $\tau = \eta/\mu$ , avec  $\eta$  la viscosité et  $\mu$  le module élastique. Ce modèle prévoit que pour des temps caractéristiques

courts devant  $\tau$ , le milieu répond de façon élastique ( $\dot{\sigma} = \mu\dot{\gamma}$ ). Au contraire il répond comme un liquide visqueux sur des échelles plus longues ( $\sigma = \eta\dot{\gamma}$ ).

Ce modèle ne rend pas compte du seuil de plasticité que l'on rencontre dans les matériaux comme les mousses, pour lesquels le matériau ne se met à couler qu'à partir d'une contrainte (ou déformation) seuil. Il est alors nécessaire d'introduire des non-linéarités dans les équations. Dans la limite quasistatique ( $\dot{\gamma}^{-1} \gg \tau$ ), où seules l'élasticité et la plasticité sont présentes, on peut le représenter de façon phénoménologique par l'assemblage d'un ressort et d'un palet (figure (1.8a)). La contrainte est alors d'origine purement élastique, et liée à la déformation  $u$  du ressort  $\sigma = \mu u$ . Au-delà d'un seuil  $u_Y$  pour lequel le palet se met à glisser, la déformation imposée ne sert plus à étirer le ressort : ainsi  $\dot{u} = \dot{\gamma}$  si  $u \leq u_Y$ , caractérise le régime élastique, et  $u = u_Y$  le régime plastique. Il faut ajouter la condition  $\dot{u} = \dot{\gamma}$  si  $(u\dot{\gamma}) \leq 0$  pour tenir compte de ce qu'expérimentalement il n'y a pas de plasticité si l'on ne cisaille pas dans la direction de la déformation ; c'est notamment pour cette raison que la contrainte effectue un cycle d'hystérésis lorsque l'on change la direction de cisaillement une fois dans le régime plastique [73].

De tels modèles [92, 64] interpolent bien différentes expériences de rhéologie oscillatoire. Une extension proposée par Marmottant et Graner [92] consiste à considérer une transition plus douce entre le régime élastique et le régime plastique. Ils nomment ce modèle, "modèle du pinceau" (figure (1.8b)). Cette transition est caractérisée par une fonction  $h$  nommée "proportion de plasticité". Cette extension prend la forme :

$$\frac{du}{dt} = \dot{\gamma} - \dot{\gamma} h\left(\frac{u}{u_Y}\right) \mathcal{H}(u\dot{\gamma}). \quad (1.3)$$

La fonction Heaviside  $\mathcal{H}$  décrit le fait qu'il n'y a pas de plasticité lorsque le cisaillement n'est pas orienté suivant la déformation  $u$ . En prenant  $h = 0$  et  $h = 1$ , on retrouve respectivement les limites élastique et plastique. Entre ces deux extrêmes,  $h$  caractérise le régime élasto-plastique. La forme de  $h$  n'est pas toujours importante et dans ce cas, certaines fonctions sont plus pratiques à utiliser que d'autres ; ainsi prendre  $h$  sous la forme d'un  $\sin^2$  [92], donne une réponse  $u$  fonction de  $\gamma$  sous la forme d'un arctan, fonction souvent utilisée pour des raisons numériques [69].

Une fois que l'élasticité sature, le matériau coule. Dans le régime faible vitesse, l'écoulement est plastique (friction solide indépendante de  $\dot{\gamma}$ ). Au-delà de ce régime la mousse présente des caractéristiques visco-plastiques : l'écoulement devient aussi visqueux et présente une friction fluide (dépendance avec  $\dot{\gamma}$ ). On peut les modéliser simplement par des lois type fluide de Bingham : pour  $\sigma \leq \sigma_Y$ ,  $\dot{\gamma} = 0$  et  $\sigma = \sigma_Y + \eta\dot{\gamma}$  pour  $\sigma \geq \sigma_Y$ . Des relations plus proches des expériences peuvent être utilisées (type Herschel-Bulkley)  $\sigma = \sigma_Y + m\dot{\gamma}^n$ . La modélisation de ce qui se passe dans les rhéomètres peut être plus complexe car l'écoulement

peut présenter à la fois un comportement solide et un comportement liquide de part et d'autre d'une bande de cisaillement.

### 1.2.3 Lien individuel-collectif

#### Approche continue

A cause du caractère discret des bulles ou des changements topologiques, les données sont fluctuantes. Certaines expériences présentent cependant des variations spatiales continues des valeurs moyennes. Parmi les différents champs, on peut citer le champ de vitesse [30, 89, 90, 35, 137, 74], champ de déformation [68, 42, 93], champ de plasticité [93]. Différentes études [68, 42] ont notamment montré que de fortes fluctuations sont tout de même compatibles avec la continuité des champs des grandeurs moyennes.

Avoir une approche continue des mousses consiste à dire que l'écoulement de la mousse peut être décrit par un modèle, tels que ceux présentés précédemment, non seulement globalement (échelle d'un rhéomètre), mais aussi localement. Des équations aux dérivées partielles doivent pouvoir prédire la forme du champ de vitesse qui donne lieu à la réponse du rhéomètre. Nous discutons ici les conditions de validité d'une approche continue dans le cas des mousses liquides.

En hydrodynamique classique, plusieurs hypothèses doivent être vérifiées pour valider cette approche [87]. Ainsi, il doit exister différentes échelles de longueur entre l'échelle microscopique (taille des particules, distance entre particules) et l'échelle macroscopique (géométrie de l'écoulement), pour lesquelles les différentes quantités moyennes sont indépendantes de l'échelle considérée. Grâce à ces hypothèses on s'assure aussi d'un nombre suffisamment grand de particules pour que les valeurs moyennes soient significatives. Les moyennes sont effectuées à une de ces échelles intermédiaires à l'intérieur de ce que l'on appelle des volumes élémentaires représentatifs (RVEs en anglais).

Pour passer à une approche continue complète, une généralisation tensorielle des modèles scalaires devient nécessaire. De nombreux modèles prennent déjà en compte un ou plusieurs aspects du comportement visco-élasto-plastique des mousses (voir [122] pour l'évolution des modèles). Ainsi, motivé par les mousses liquides, Saramito [122] a récemment proposé un modèle intégrant les trois comportements.

#### Fluctuations

L'approche continue suppose que les corrélations longue portée sont négligeables. Or un tel phénomène peut apparaître dans les mousses sous forme d'avalanches de T1s. Il faut alors s'assurer que la longueur caractéristique de tels événements soit inférieure au RVE considéré. Ainsi Rouyer *et al.* [119] ont montré expérimentalement (figure (1.9a)) que, du fait des avalanches, le champ de vitesse moyen fluctue for-

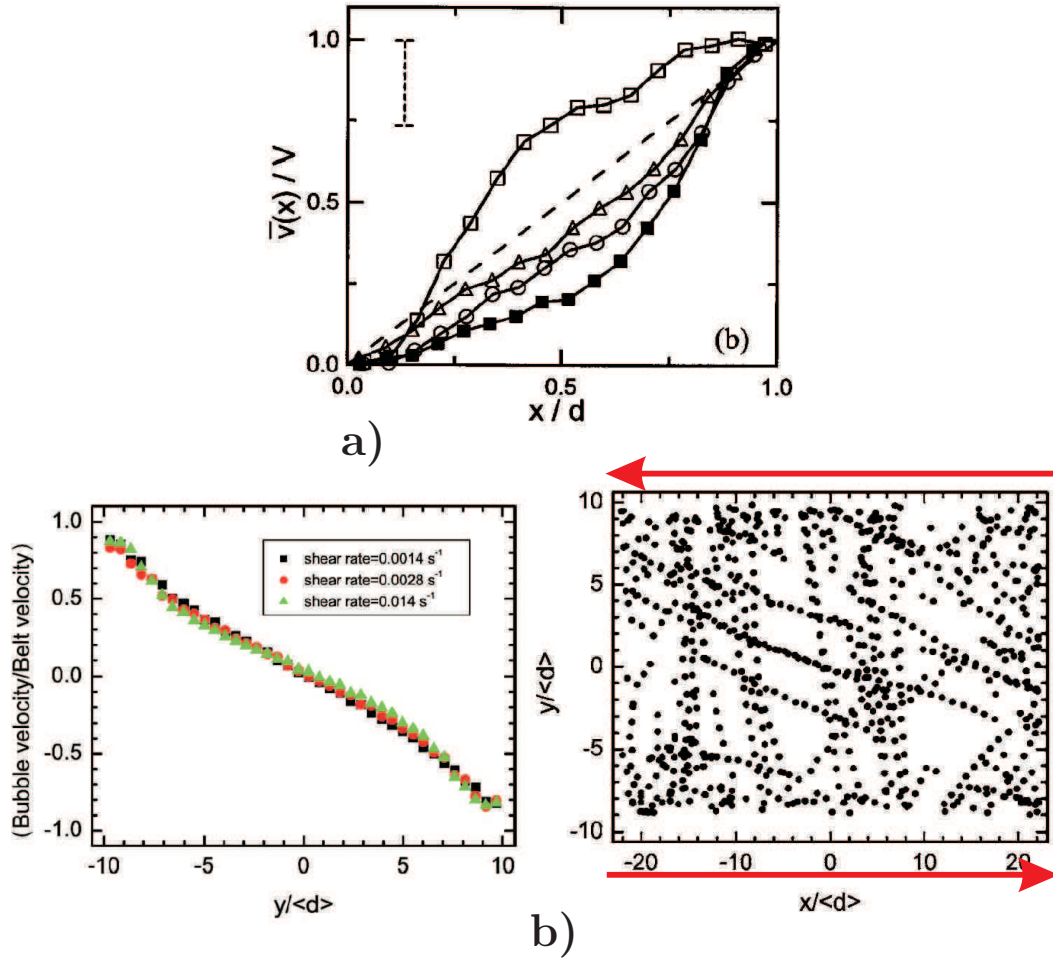


FIG. 1.9 – Cisaillement de Couette d’une mousse. Champ de vitesse en géométrie 3D (a) (d’après [119]). (b) géométrie 2D eau-air (d’après [137]). A gauche : champ de vitesse (b1). A droite : Répartition des réarrangements. Une succession de T1 en ligne est le signe d’une avalanche de T1s. Les flèches rouges indiquent la direction du cisaillement.

tement en fonction de la position dans le rhéomètre. En revanche, en géométrie 2D eau-air, Wang *et al.* [137] obtiennent un champ de vitesse linéaire, malgré la présence majoritaire de bandes de cisaillement dans l’entrefer du rhéomètre : les avalanches ne semblent pas avoir un effet prépondérant sur l’écoulement (figure (1.9b)). Dans tous les cas, si ce phénomène devient dominant, alors l’approche continue ne peut plus être appliquée. Certaines études montrent des avalanches d’ampleur arbitrairement grande [102, 116, 71] : les avalanches ont l’air de se produire pour des mousses ordonnées et à faible taux de cisaillement.

### Autres approches

La mousse présente un désordre certain. Des modèles plus généraux des matériaux vitreux peuvent être pertinents, en particulier la théorie SGR (Soft Glassy Rheology) [126]. Les auteurs prennent comme hypothèses de départ un matériau désordonné et métastable coincé dans un minimum d'énergie. Ce milieu peut engranger de l'énergie élastique jusqu'à un certain seuil au-delà duquel le milieu transite instantanément (hypothèse quasistatique) vers un nouvel état métastable. Le désordre joue le rôle d'une température effective, donnant une probabilité plus ou moins grande de transiter avant le seuil. Dans le même esprit Hébraud et Lequeux [62] considèrent le cas non-quasistatique : la relaxation prend un certain temps, et affecte la contrainte stockée des zones voisines. Ce genre de modèles prend en compte les différents ingrédients (visco-élasto-plastiques) des mousses et sont capables en choisissant les bons paramètres de retrouver des résultats proches de ceux que l'on peut trouver pour les mousses non-mûrissantes (sur ce point on peut consulter l'article de Sollich [127]). Malgré cela le lien avec la physique des mousses n'est pas clairement établi [63].

## 1.3 Questions en suspens

Notre étude vise à la compréhension de ce fluide complexe qu'est la mousse liquide. Dans cette thèse nous proposons et validons un système d'équations constitutives continues. On peut citer les différentes étapes nécessaires pour atteindre cet objectif :

1. Création et montage d'une soufflerie à mousse pour étendre le diagramme de phase connu des mousses 2D vers des fractions liquides plus sèches (la gamme totale obtenue couvre un facteur 3000) et des vitesses d'écoulement plus élevées (la gamme totale obtenue couvre un facteur 50000).
2. Evaluation des effets liés à la géométrie 2D : répartition du liquide dans la mousse ; mesures de la dissipation liée au frottement sur les parois et comparaison avec les modèles.
3. Perturbation de l'écoulement par un obstacle pour obtenir un écoulement hétérogène (à la fois cisaillement et élongation).
4. Mesure des grandeurs locales avec des outils adaptés à la description des matériaux cellulaires.
5. Compréhension et validation (expérimentale, numérique et théorique) du lien entre mesures locales et globales.
6. Test de l'effet à haute vitesse des non-linéarités élastiques, et étude d'éventuelles instabilités.



7. Comparaison de la limite “vitesse d’écoulement tendant vers 0” du régime quasistatique avec des simulations Potts. Mesure de pression et effet de la compressibilité.
8. Généralisation tensorielle du modèle élasto-plastique développé au sein de l’équipe. Effet de la “proportion de plasticité”, test avec d’autres géométries (données expérimentales et numériques) et étude des effets physiques liés aux tenseurs.
9. Validation de l’approche continue. Test de l’hypothèse affine. Ecriture d’un système d’équations fermées

Ces différents points sont discutés tout au long du manuscrit. Le chapitre (2) décrit les dispositifs utilisés. Les effets liés à la géométrie, ainsi que la force exercée sur l’obstacle sont décrits dans le chapitre (3). Le chapitre (4) présentent les cartes des champs. La généralisation tensorielle du modèle scalaire a lieu dans le chapitre (5). Enfin, l’écriture d’un système fermé d’équations constitutives et la validité de l’approche continue sont discutées dans le chapitre (6).





# Chapitre 2

## Matériels et méthodes

Dans ce chapitre nous décrivons l'ensemble des techniques expérimentales, numériques et d'analyse employées pour notre étude des écoulements bidimensionnels de mousse. Nous présentons d'abord comment nous avons obtenu des écoulements, expérimentalement et numériquement. Nous décrivons ensuite les différentes grandeurs (tenseurs, fraction liquide effective) que nous utilisons pour caractériser l'écoulement et la mousse.

### 2.1 Dispositif expérimental

Le but de ce dispositif expérimental est l'obtention de débit d'écoulement et de fraction liquide de mousse pouvant varier sur plusieurs ordres de grandeur. La géométrie confinée verre-verre est choisie pour éviter les problèmes de mousse 3D qui peuvent apparaître dans des dispositifs type radeau de bulles. Les solutions choisies sont présentées ici.

#### 2.1.1 Soufflerie à mousse

La soufflerie (figure (2.1)) est composée de deux parties : une boîte de formation des bulles et un canal d'écoulement, reliés par une ouverture permettant le passage des bulles. La formation et l'écoulement des bulles sont ainsi dissociés, ce qui permet de travailler avec des tailles de bulle constantes pendant l'expérience, en évitant une rétroaction de l'écoulement sur la formation des bulles. Dans le cas contraire des effets inattendus apparaissent : c'est le cas par exemple des systèmes microfluidiques, pour lesquels l'encombrement est un critère important [114].

#### Solution savonneuse

La solution savonneuse utilisée est constituée de 95% en masse d'eau désionisée et de 5% de détergent commercial (Dreft bleu), lui-même constitué principale-

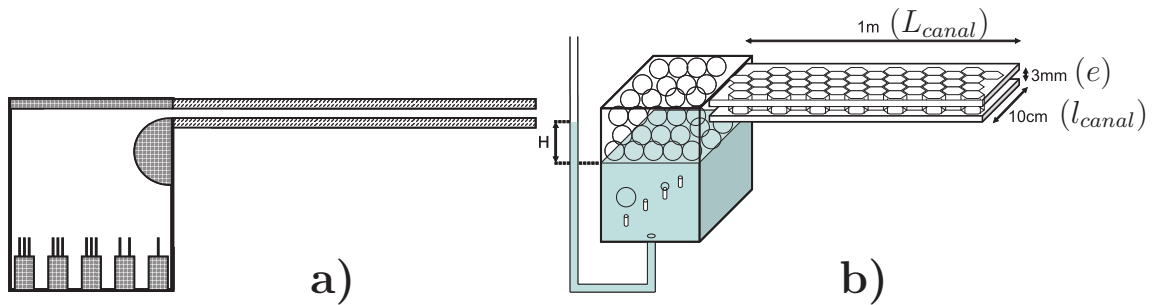


FIG. 2.1 – Soufflerie à mousse. a) coupe de côté du dispositif à vide. On distingue les blocs d’aiguilles dans la boîte de formation des bulles, et le demi-cylindre pour une entrée plus douce dans le canal d’écoulement. b) Schéma de la soufflerie en fonctionnement.

ment de surfactant anionique. De cette façon, on est sûr d’être au-dessus de la concentration micellaire critique.

### Formation des bulles

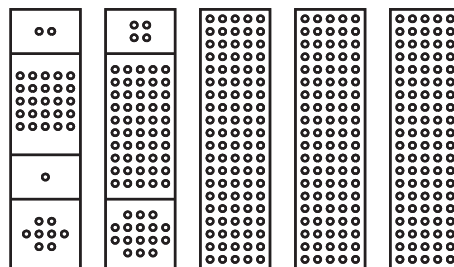


FIG. 2.2 – Vue du dessus des blocs d’aiguilles. Les compartiments sont étanches et ouverts en-dessous pour l’arrivée du gaz. On a ainsi des blocs de 1, 2, 4, 8, 16, 25, 50 et  $3 \times 100$  aiguilles que l’on alimente séparément.

Le gaz (azote) est fourni par une bouteille connectée à trois débitmètres asservis *Brooks* contrôlés par ordinateur. Les différents débitmètres sont intercalés entre la bouteille d’azote et la boîte de formation des bulles. On dispose de gammes de débits : 10-200  $\text{ml}/\text{min}$ , 100-2000  $\text{ml}/\text{min}$  et 2000-40000  $\text{ml}/\text{min}$ . En plaçant les débitmètres en parallèle on dispose d’une gamme complète allant de  $10^{-2}$  à 40  $\ell/\text{min}$  d’azote. La précision indiquée par le constructeur est inférieure au pour-cent. En sortie des débitmètres, le gaz entre dans la boîte de formation des bulles (cube de 22 cm d’arête). Il est dirigé vers des chambres via des robinets. Chaque chambre est connectée à la solution savonneuse par des aiguilles de se-

ringues (diamètre intérieur 0.4 mm et extérieur 1 mm) (figure 2.1). Les différentes chambres utilisées sont représentées sur la figure (2.2), et permettent d'alimenter indépendamment 1, 2, 4, 8, 16, 25, 50 et  $3 \times 100$  aiguilles (figure 2.2), donc toutes les combinaisons entières de 1 à 406.

Dans une expérience type, la boîte contient entre 2.5 et 10  $\ell$  de liquide dans lequel bullent les aiguilles. Chaque aiguille bulle de façon monodisperse jusqu'à des débits d'environ 100  $\text{ml}/\text{min}$ . Dans la suite nous avons toujours travaillé avec cette valeur de débit par aiguille, ce qui donne un volume de bulle  $\vartheta_0$  constant et reproductible :

$$\vartheta_0 = (35 \pm 2) \text{mm}^3.$$

Cette valeur est déduite en mesurant l'aire projetée  $A_0 = (12 \pm 0.6) \text{mm}^2$  par bulle dans la limite sèche, et en la multipliant par l'espacement entre les plaques  $e$ . Dans le cas général, il faut tenir compte de la proportion  $\Phi$  de liquide de la mousse dans l'aire projetée  $A$  :  $A = A_0/(1 - \Phi)$ . Les bulles sont incompressibles et le mûrissement est négligeable durant la période de l'expérience. Si on veut augmenter le débit de mousse, tout en gardant des bulles de même volume, il faut augmenter le nombre d'aiguilles. Les bulles montent dans le liquide et vont pousser les bulles déjà formées au niveau de l'interface liquide/mousse. C'est de cette façon que les bulles montent dans la boîte et entrent dans le canal via le demi-cylindre (diamètre 6 cm) qui adoucit leur passage (figure 2.1).

### Canal d'écoulement

Le canal est constitué de deux plaques de verre parallèles encastrées dans la boîte de formation de bulles. Elles ont pour dimensions  $1000 \times 180 \times 5 \text{mm}^3$ . Elles sont espacées de 3 mm grâce à deux cales en verre de dimensions  $1000 \times 40 \times 3 \text{mm}^3$ . L'étanchéité est obtenue en sandwichant les deux plaques et les cales avec des serre-joints (l'effort est reparti en intercalant une plaque de métal entre les serre-joints et les plaques de verre). On obtient donc un canal (espace libre pour la mousse) de 1 m de long ( $L_{canal}$ ), 10 cm de large ( $l_{canal}$ ) et de 3 mm d'épaisseur (notée  $e$ ). Etant donnée la taille des bulles (de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{mm}^3$ ), cette épaisseur est suffisamment faible pour obtenir une mono-couche de bulles [135]. La sortie du canal est libre.

### Visualisation et éclairage

L'éclairage doit être à la fois homogène et intense. Plusieurs solutions ont été envisagées :

- la première consiste à éclairer par le dessus avec un néon circulaire. Cette solution est adaptée pour la plupart des cas, exceptés les cas de mousses très sèches. En effet dans ce cas, les bords de bulle ne réfractent pas assez la lumière.

- la seconde consiste à éclairer par le côté avec deux néons, profitant de ce que les cales sont transparentes à la lumière. Cette méthode donne un meilleur

contraste avec les mousses très sèches, bien que l'homogénéité soit un peu moins bonne : les bords du canal sont plus intenses que le centre.

La visualisation est opérée par une caméra numérique classique. Pour des écoulements à haute vitesse, nous avons eu recours à une caméra rapide (1000 fps en plein champ  $1024 \times 1024$  pix<sup>2</sup>). Il est à noter que dans ces gammes de fréquences d'échantillonnage les oscillations d'intensité du néon apparaissent et un traitement un peu plus poussé est nécessaire sur les images.

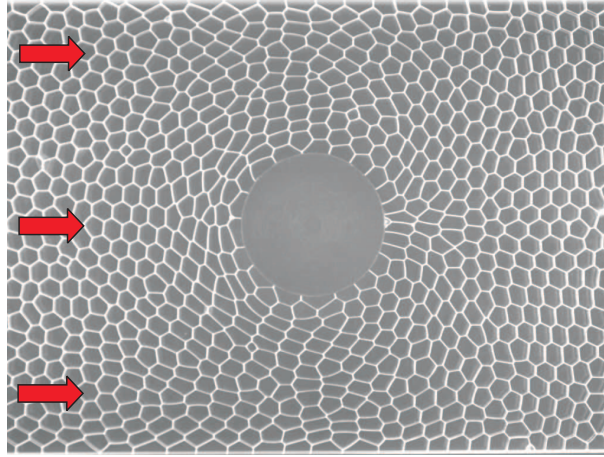


FIG. 2.3 – Image typique d'une mousse (ici plutôt sèche, fraction liquide inférieure à 1%). On obtient une monocouche de bulles qui s'écoule de gauche à droite (ici à 5.6 mm/s).

### 2.1.2 Paramètres

Les différents paramètres que nous pouvons faire varier sont : le débit volumique d'azote  $Q_{N_2}$ , le débit volumique total  $Q$ , la fraction de liquide  $\Phi$  (quantité volumique de liquide dans la mousse), la différence  $H$  entre les niveaux d'eau à l'intérieur et à l'extérieur de la boîte, et la hauteur de mousse dans la boîte de formation  $w$  (figures (2.4) et (2.5)).

**Fraction liquide :** La mesure de la fraction liquide s'effectue en plaçant une balance en sortie de canal. A l'aide d'un chronomètre on mesure donc une masse par unité de temps. Il s'agit du débit massique d'eau, que l'on relie au débit volumique d'eau  $Q_{eau}$  par la masse volumique de l'eau  $\rho_{eau}=1$  kg/ $\ell$ . On peut alors en déduire la fraction liquide

$$\Phi = \frac{Q_{eau}}{Q} = \frac{Q_{eau}}{Q_{N_2} + Q_{eau}}. \quad (2.1)$$

La précision de la balance est de 0.01 g. Nous pesons en général 1 g (erreur  $\simeq 1\%$ ). Pour une mousse de  $\Phi = 1\%$ , la mesure prend alors 60 s (erreur environ 1 s liée à la lecture du chronomètre, donc inférieure à 2%). Pour les mousses les plus sèches, nous avons limité le temps de mesure à 600 s, car l'eau s'évapore du plateau de la balance. Pour les mousses les plus humides et les plus rapides, on préfère travailler en fixant le temps de mesure à 60 s, car la barre des 1 g est rapidement atteinte. Dans les cas les plus extrêmes (très humide et très haute vitesse), la mesure doit être rapide (10 s) car la mousse évolue rapidement (la mousse entraîne beaucoup d'eau, donc  $w$  diminue rapidement, donc  $\Phi$  change rapidement, voir *autres paramètres*). Nous avons donc une erreur de l'ordre de 10% dans les cas les plus défavorables. A noter que le  $\Phi$  mesuré ici est un  $\Phi$  dynamique, qui ne coïncide avec le  $\Phi$  statique que si la mousse coule en bloc. Dans la suite nous ferons cette hypothèse, qui paraît justifiée en (3.1) lors de la comparaison de  $\Phi$  et du rayon des bords de Plateau  $R_P$ .

**Vitesse moyenne d'écoulement :** La vitesse moyenne d'écoulement est reliée au débit d'azote entrant dans le canal, ainsi qu'à la fraction liquide :

$$V = \frac{Q}{el_{canal}} = \frac{Q_{N_2}}{el_{canal}} \frac{1}{1 - \Phi}. \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une mousse très sèche, la vitesse moyenne d'écoulement est donc imposée par le débit d'azote. De plus, les  $\Phi$  les plus grands valent 30 %, ce qui augmente la vitesse d'écoulement de 40% tout au plus par rapport à la limite sèche.  $V$  est donc en première approximation proportionnelle à  $Q_{N_2}$ . La vitesse  $V$  peut aussi être mesurée directement à partir des images fournies par la caméra (suivi de bulles).

**Autres paramètres :** A vitesse d'écoulement donnée,  $w$  joue sur la fraction liquide : la partie haute, mousseuse de la boîte va perdre de l'eau sous l'effet de la gravité, c'est le phénomène de drainage [139]. Plus l'épaisseur de mousse dans la boîte est importante, plus une bulle met du temps avant d'entrer dans le canal, et donc plus elle perd d'eau. Donc plus  $w$  est grand, plus la mousse est sèche. Nous préférons ajuster empiriquement  $\Phi$  à partir de  $w$ , ce qui est plus précis que faire une estimation théorique du temps de drainage. La boîte de formation des bulles est aussi percée d'un trou qui relie l'intérieur de la boîte à un tuyau donnant sur l'air ambiant (figure (2.4)). Il est pratique car il permet de remplir la cuve avec la solution savonneuse, mais surtout de donner une mesure de la perte de charge dans le canal. En notant  $\Delta P$  la perte de charge totale et  $H$  la différence de hauteur du liquide entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte, on a

$$\Delta P = \rho_{eau} g H, \quad (2.3)$$

où  $\rho_{eau}$  est la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération de gravité. Les différentes longueurs,  $w$  et  $H$  sont déterminées à l'aide d'un réglet et on leur attribue une

erreur de 1 mm liée à la précision sur la lecture et à la forme irrégulière de l'interface bulle-eau.

Les différents paramètres peuvent être soit imposés, soit mesurés. Ceci va être déterminé par la configuration expérimentale choisie et permet d'explorer au maximum l'espace des paramètres.

### 2.1.3 Configurations expérimentales

Nous explicitons ici les deux configurations expérimentales utilisées : *débit d'azote imposé* et *pression imposée*.

#### Débit d'azote imposé

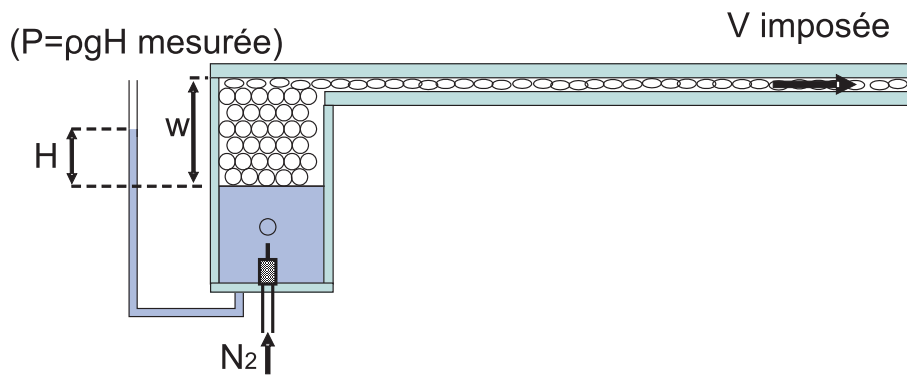


FIG. 2.4 – Configuration *débit d'azote imposé* ou boîte fermée. Le débit d'azote  $Q_{N_2}$  est imposé et la hauteur de mousse dans la boîte  $w$  est contrôlée.

La configuration *débit d'azote imposé* (figure 2.4) est la configuration classique de l'expérience. La boîte de formation des bulles est fermée, de sorte que toute bulle créée entre dans le canal. Le débit d'azote  $Q_{N_2}$  est imposé,  $w$  est contrôlée (nous allons voir ce que cela veut dire) et  $H$  est mesurée. On peut utiliser de 1 à 400 aiguilles. En pratique, au delà de 200 aiguilles la mousse n'est pas stable (3.3.2) : ceci correspond à un débit d'azote de 20  $\ell/\text{min}$  et une vitesse moyenne d'écoulement d'environ 1.2 m/s. Dans une expérience type, on remplit initialement la boîte avec de l'eau ( $w$  très petit). Au début, la quantité de mousse dans la boîte est très faible (quelques millimètres), ce qui conduit à une mousse humide, puis le niveau d'eau diminue à cause de l'entraînement d'une partie de l'eau dans le canal :  $w$  augmente (jusqu'à 15 cm) et la mousse s'assèche. L'évolution du niveau d'eau dans la boîte de formation est suffisamment lente pour que l'on puisse considérer que la fraction liquide ne varie pas durant un point de mesure. En réalité,  $w$  évolue plus rapidement en début d'expérience qu'à la fin car de

moins en moins d'eau est entraînée dans le canal. A l'extrême (mousse très humide et très rapide), il faut prendre un point de mesure en 10 s pour considérer que  $\Phi$  varie peu. En une seule expérience (environ 1 heure) on est donc capable d'explorer toute une gamme de fractions liquides, en général de  $10^{-4}$  à 0.3.

En résumé, la configuration *débit d'azote imposé* offre la possibilité de faire varier le débit de notre mousse d'un facteur 400, la fraction liquide d'un facteur 3000, et de mesurer une perte de charge.

### Pression imposée

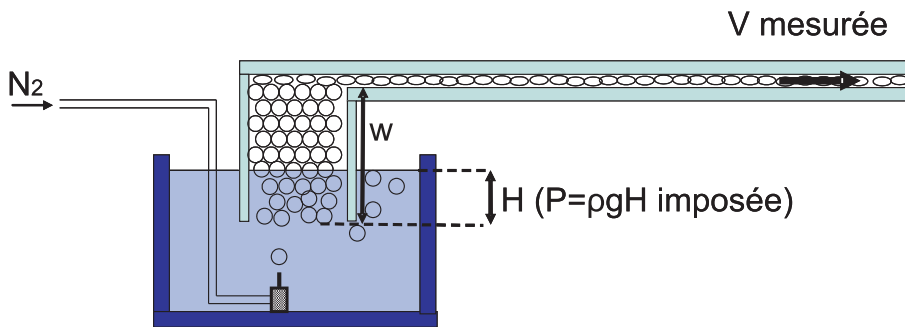


FIG. 2.5 – Configuration *pression imposée* ou boîte ouverte.  $H$  (donc  $\Delta P$ ) et  $w$  sont imposées ; le débit total de mousse dans le canal est inférieur à celui fourni par les débitmètres car toutes les bulles n'entrent pas dans le canal.

La configuration *pression imposée* consiste à imposer maintenant  $w$  et  $H$ . C'est-à-dire que la pression est imposée, alors que le débit de la mousse ne l'est plus. Pour cela on ouvre la boîte de formation des bulles par le dessous et on la plonge dans une cuve (figure 2.5). On ne fait buller cette fois qu'une seule aiguille que l'on place au fond de la cuve. On constate que la boîte se remplit de bulles. Une fois remplie, le surplus de bulles s'échappe par dessous. On obtient ainsi une configuration où la pression est imposée par la différence de hauteur  $H$  entre le niveau d'eau à l'air libre et le fond de la boîte. L'avantage est que l'on crée des écoulements plus lents puisque toutes les bulles n'entrent pas dans le canal, tout en travaillant avec les mêmes tailles de bulle. La vitesse se mesure à partir du suivi de bulles avec la caméra : on en déduit le débit total. Nous obtenons une gamme de débit allant de 0.008 à 0.17 fois le débit que l'on obtiendrait si toutes les bulles entraient dans le canal. C'est à dire que seulement de 0.85 % à 17 % des bulles entrent dans le canal. L'aire par bulle dans cette configuration vaut  $A_0 = (12.8 \pm 0.4) \text{ mm}^2$ .

Par contre il n'est pas possible d'avoir plusieurs fractions liquides pour un débit de mousse donné, puisque la hauteur de mousse dans la boîte  $w$  est maintenant constante (ou alors il faudrait changer la taille de la boîte). Nous obtenons ainsi des mousses plutôt sèches dont la fraction liquide  $\Phi$  est difficile à évaluer :



les débits sont tellement lents et les mousses tellement sèches que nous ne sommes pas capables de mesurer la masse en sortie de canal avant que l'eau de la mousse s'évapore! Nous sommes alors obligé de procéder à une estimation via la mesure de  $L_c$ , longueur minimale d'un côté avant T1 (2.3.3) : par cette méthode nous estimons des fractions liquides de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-4}$ .

En résumé, la configuration *pression imposée* permet l'exploration de débits de mousse très faibles avec des mousses très sèches, ce qui permet d'étendre encore un peu plus l'espace des paramètres et d'approcher un peu plus la limite "vitesse d'écoulement tendant vers 0".

Finalement, on représente l'ensemble de nos points expérimentaux (vitesse moyenne d'écoulement et fraction liquide) sur la figure (2.6). L'ensemble des points est limité : au-delà de  $\Phi \simeq 30\%$  on passe d'une mousse à un écoulement de bulles sans contact les unes avec les autres. Si la mousse devient trop sèche ou l'écoulement trop rapide, la mousse devient instable et les bulles se cassent. Ces différents points sont discutés en (3.3).

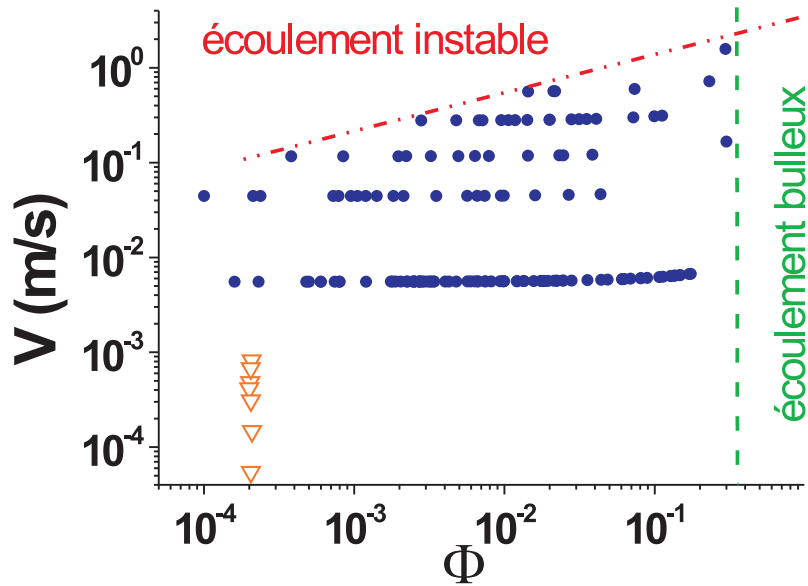


FIG. 2.6 – Ensemble des points expérimentaux : vitesse moyenne d'écoulement et fraction liquide. Les points bleus et les triangles oranges correspondent respectivement à la configuration *débit d'azote imposé* et *pression imposée*. Pour cette dernière  $\Phi$  est déduite de la mesure de  $L_c$  (2.3.3) et de l'équation (3.2).

### 2.1.4 Traitement des images

Les images d'une expérience obtenues à partir des caméras sont codées en niveaux de gris. Afin d'identifier les bulles, on procède à une binarisation : couleur noire pour les bords de bulle et blanche pour l'intérieur. Pour cela on utilise le logiciel libre *ImageJ*. Il permet d'effectuer séquentiellement des opérations courantes de traitement d'image (figure (2.7)) : seuillage, squelettisation. On obtient à la fin de ce prétraitement un ensemble d'images squelettisées, c'est-à-dire avec des bords de bulle noirs d'épaisseur 1 pixel entourant les bulles en blanc (figure (2.7c)).

Ces images sont ensuite traitées par le programme écrit par Benjamin Dollet durant sa thèse [41]. Il permet d'avoir une information statique (repérage des centres de bulle et vertex sur chaque image) et cinématique (suivi des centres de bulle au cours du temps). Pour pouvoir suivre les bulles d'une image sur l'autre, il est nécessaire que celles-ci ne bougent pas beaucoup entre deux images (une fraction de diamètre de bulle). C'est pour cette raison que nous avons utilisé une caméra rapide pour des mousses s'écoulant à plus de 1 cm/s.

### 2.1.5 Autres géométries

Différents types d'expérience sont envisageables pour étudier la rhéologie des mousses 2D (1.1.2). J'ai moi-même pu réanalyser des images d'autres expériences et géométries d'écoulement 2D de mousse, qui m'ont été aimablement fournies (figure (2.8)) : écoulement de Stokes en géométrie eau/verre par Benjamin Dollet [38], expérience de Couette cylindrique par Georges Debrégeas [30] et expérience de constriction (passage par un petit trou) par Marius Asipauskas [3]. Au-delà des différentes tailles de bulle, dispersité, fractions liquides qui rendent intéressantes l'étude de ces autres systèmes, nous avons surtout choisi d'analyser ces expériences pour tester notre approche sur d'autres formes d'écoulement et contraindre le plus possible les modèles.

## 2.2 Approche numérique

Nous présentons ici les différentes simulations quasistatiques utilisées durant la thèse : simulations Potts effectuée en collaboration avec Yi Jiang (Los Alamos National Laboratory, US) et simulations Surface Evolver effectuée par S. Cox (The University of Wales, UK).

### 2.2.1 Modèle de Potts

Le modèle de Potts a été introduit en 1952 [108] comme généralisation à plusieurs composantes du modèle à deux composantes d'Ising [67]. Historiquement

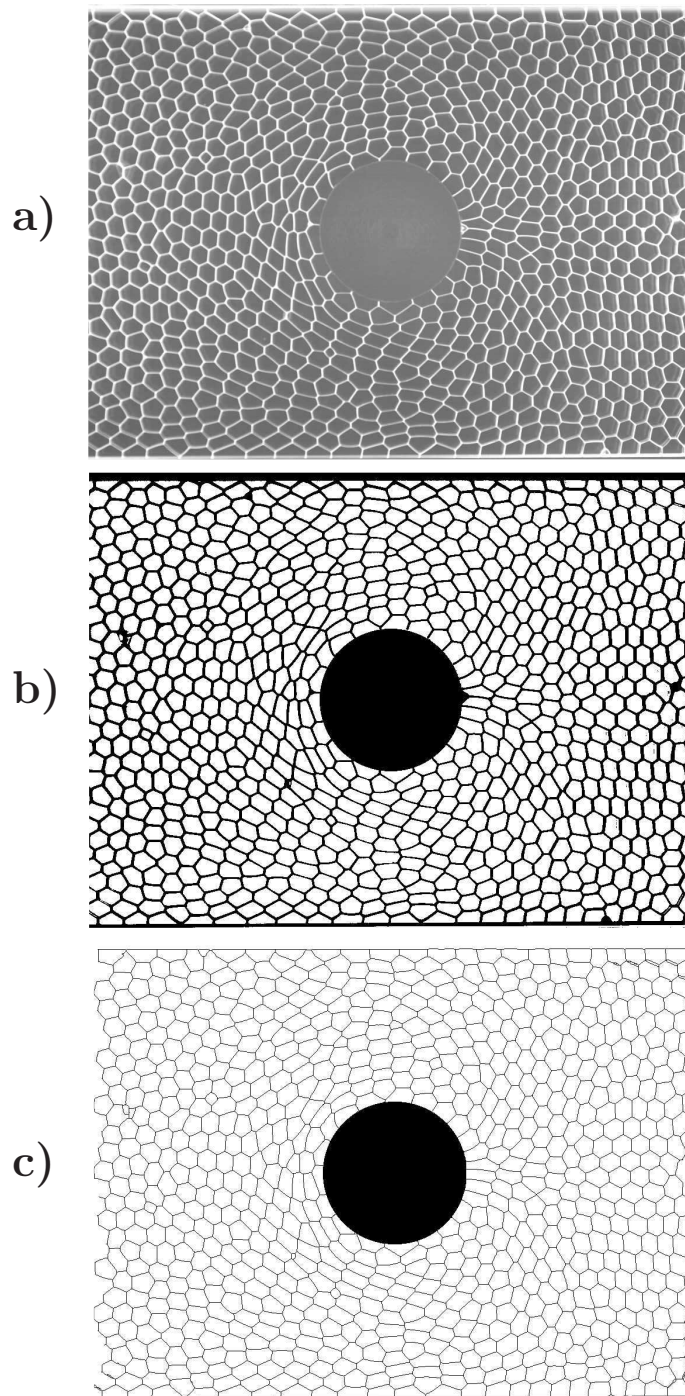


FIG. 2.7 – Différentes phases de la binarisation des images. (a) image brute ; (b) image seuillée ; (c) image squelettisée. Pour améliorer le passage d'une étape à l'autre, on peut par exemple, lisser, rehausser le contraste ou enlever les barbules.

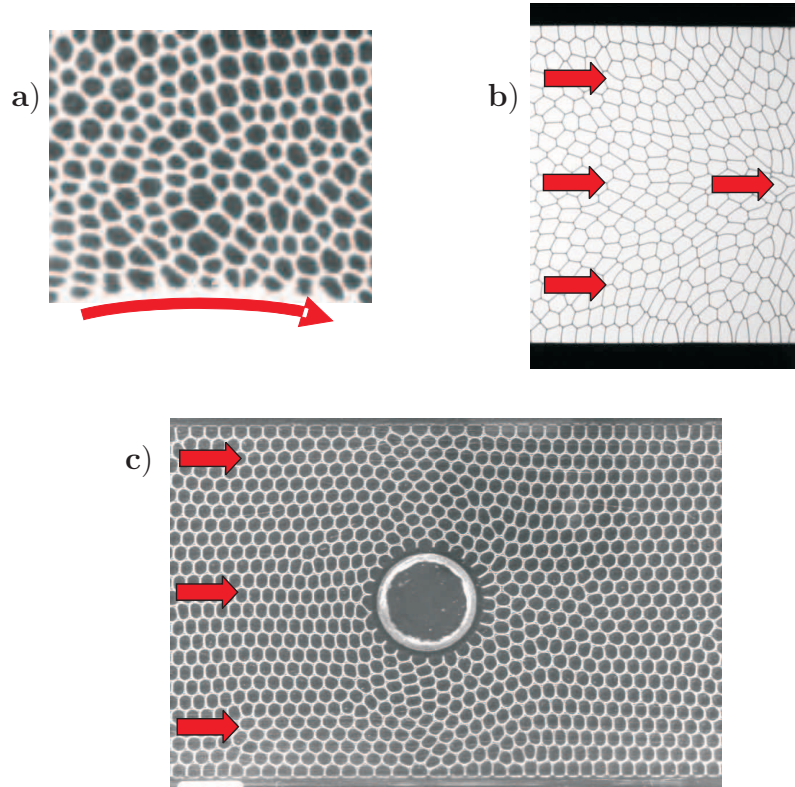


FIG. 2.8 – Autres géométries 2D analysées durant ma thèse. (a) Couette cylindrique par Georges Debrégeas [30]). (b) Constriction par Marius Asipauskas [3]). (c) Expérience de Stokes en géométrie eau-verre par Benjamin Dollet (c) [38]).

une version du modèle à quatre composantes a été étudiée en 1948 par Ashkin et Teller [2]. Le modèle a beaucoup été utilisé pour l'étude de la croissance et l'évolution d'assemblages de forme, comme les grains métalliques [140], les mousses et les cellules biologiques [55]. On peut alors parler de modèle cellulaire de Potts pour tout ce qui concerne les motifs cellulaires. Concernant les mousses, ce modèle a d'abord été utilisé pour étudier le mûrissement et confronter les résultats à la loi de Von Neuman [52]. Plus généralement ce modèle est utilisé pour étudier le mûrissement [131], le drainage [70], la rhéologie [71] et la structure [56] des mousses à 2D ou 3D.

Ici, on considère une mousse 2D constituée de  $N$  bulles. On la représente sur un réseau 2D (figure (2.9)). Ce réseau est constitué de  $L_x$  pixels fois  $L_y$  pixels. La taille du réseau est  $p = L_x \times L_y$ . Chaque pixel porte un numéro  $S_i = 1, \dots, N$ . On définit une bulle comme une zone connectée de pixels de même numéro  $S$ , ce qui va identifier cette bulle au cours de l'évolution. Typiquement le nombre de pixels par bulle est  $p/N \approx 100$  à 500.

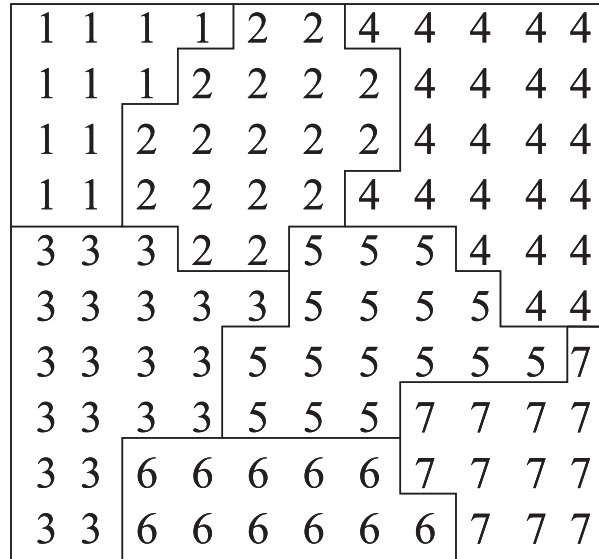


FIG. 2.9 – Dans le modèle de Potts, chaque bulle est représentée par les pixels du réseau qui portent le même numéro (ici, 7 bulles sur un réseau  $L_x \times L_y = 10 \times 10$ ).

### Energies du système

Le modèle de Potts permet de simuler une minimisation d'énergie. Celle-ci résulte de différents termes :

- L'énergie d'interface est proportionnelle au périmètre des frontières entre bulles voisines. Les interactions sont localisées en périphérie de ces domaines. On note  $E_I$  cette forme d'énergie. Pour un modèle sur réseau on peut prendre la forme discrète suivante [131] :

$$E_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\langle j \rangle_i} J [1 - \delta(S_i - S_j)]. \quad (2.4)$$

$\langle j \rangle_i$  signifie une sommation sur tous les sites  $j$  voisins du site  $i$ .  $J$  est un facteur de proportionnalité que l'on prend égal à 3 sans perte de généralité. Le facteur  $1/2$  évite de compter deux fois chaque frontière de bulle. On utilise le symbole de Kronecker  $\delta$ , de sorte que si les sites  $i$  et  $j$  ont même numéro ( $S_i = S_j$ ) le coût énergétique est nul; alors que si les sites correspondent à des bulles différentes ( $S_i \neq S_j$ ) cela ajoute  $J$  à l'énergie totale. Nous considérons dans la suite la somme jusqu'aux 4èmes voisins (20 sites les plus proches, figure (2.14a)). Cela permet de réduire l'anisotropie liée au réseau en-deçà de 3% [51] (Une autre façon serait d'augmenter la température [65], ce que l'on ne souhaite pas faire en rhéologie des mousses car cela induirait des réarrangements).

- Sans autre terme, une minimisation de cette énergie conduirait au phénomène de mûrissement [139], c'est-à-dire à un transfert de gaz d'une bulle à l'autre. En



effet, si le mûrissement est permis, il permet de réduire le coût énergétique en diminuant le périmètre total. Or dans de nombreux cas, notamment celui de nos expériences, ce phénomène est très lent comparé à l'échelle de temps de l'expérience (2.1.1). Pour s'affranchir de ce phénomène, il convient d'ajouter une contrainte d'aire qui limite les variations d'aire des bulles. L'énergie totale prend alors la forme :

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\langle j \rangle_i} J[1 - \delta(S_i - S_j)] + \sum_S \frac{1}{2} \kappa (A_S - A_S^c)^2 \quad (2.5)$$

On a rajouté une somme sur toutes les bulles  $S$ .  $A_S^c$  désigne l'aire cible de la bulle  $S$ , c'est-à-dire l'aire pour laquelle il n'y a pas de surcoût énergétique. En jouant sur  $\kappa$ , on joue sur la compressibilité de la mousse (voir Pression en (2.3.1)) et on permet des variations d'aire plus ou moins importantes. En pratique (sauf dans les sections relatives à la mesure de pression (2.3.1)), on prend  $\kappa = 2$ . Ceci donne des variations d'aire de 1 ou de 2  $\text{pix}^2$ , faibles devant l'aire des bulles (on travaille avec des bulles incompressibles, ce qui est le cas de l'écoulement expérimental).

### Evolution de la mousse

La mousse évolue avec un algorithme de type Metropolis-Monte Carlo [99]. A chaque pas de temps on choisit aléatoirement un site  $i$ . On choisit un site  $j$  au hasard parmi les quatre premiers voisins de  $i$ . Si  $j$  appartient à une bulle différente ( $S_j \neq S_i$ ), alors on fait un test : on bouge la frontière entre les bulles en changeant la valeur  $S_i$  du site  $i$  en  $S_j$ . Si ce changement correspond à une diminution d'énergie du système ( $E_f - E_i < 0$ ), le changement est accepté. Il a 50 % de chance d'être accepté si l'énergie est inchangée, et aucune chance si il a un coût d'énergie positif. Un pas de Monte Carlo (MCS) est défini comme  $p$  essais aléatoires, de telle sorte que chaque site est visité en moyenne une fois par pas de Monte Carlo. A noter qu'un  $\kappa$  trop élevé interdirait toute variation d'aire, donc toute évolution de la simulation.

Il faut maintenant forcer la mousse à couler. Si on veut que l'écoulement se fasse dans le sens des  $x$  croissants, on va ajouter un terme dans le bilan d'énergie : on va désormais comparer  $E_f - E_i + g(x_j - x_i)$  par rapport à 0 ;  $g$  mesure l'intensité du biais que l'on veut imposer, et les probabilités de changement valent désormais :

$$P = \begin{cases} 1 & \text{si } E_f - E_i + g(x_j - x_i) < 0 \\ 0.5 & \text{si } E_f - E_i + g(x_j - x_i) = 0 \\ 0 & \text{si } E_f - E_i + g(x_j - x_i) > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

On a donc pris en compte trois type d'énergies pour permettre de simuler des mousses comparables aux expériences : énergie d'interface, incompressibilité, écoulement dans une direction donnée.

### 2.2.2 Hypothèse quasistatique

La choix du biais  $g$  est important. Nous rappelons que le modèle de Potts est adapté pour des écoulements quasistatiques, c'est-à-dire suffisamment lents pour que les temps de réarrangements des bulles soient faibles devant le temps caractéristique de l'écoulement. En effet, en évoluant à chaque fois vers un état correspondant à un minimum local d'énergie, on dissipe instantanément une partie de l'énergie du système. On ne pourra donc pas simuler par exemple des écoulements à haute vitesse, pour lesquels le processus de dissipation visqueuse devient plus lent que l'échelle de temps de l'écoulement. Le terme de biais doit donc rester suffisamment petit et entraîner des écoulements très inférieurs à 1 pix/MCS (cas où tous les changements se font dans la direction de l'écoulement).

Il a fallu trouver la valeur du biais optimale pour se placer le plus près possible de la limite quasistatique. Pour cela on a testé différentes valeurs de  $g$  (jusqu'à  $g=10$ ) (figure (2.10)). Différents critères permettent de juger : vitesse moyenne d'écoulement, force de réseau sur l'obstacle (3.4), état relaxé ou non de la mousse. Sur la figure (2.10a) nous constatons que pour  $g \leq 1$ , il n'y a pas d'écoulement. La valeur minimale d'écoulement est de 1.1. Lorsque  $g$  tend vers cette valeur ( $g \leq 1.5$ ) la vitesse moyenne d'écoulement tend vers 0.002 pix/MCS (ce qui implique un grand nombre de MCS pour faire couler la mousse sur le canal entier : 500000 MCS pour un canal de 1000 pixels). Sur la figure (2.10c), nous traçons la statistique de  $\mathcal{P}/3.72\sqrt{A}$  pour toutes les bulles (environ 1000) à un instant donné d'un écoulement et pour différents  $g$ .  $\mathcal{P}$  désigne le périmètre d'une bulle. On constate que plus  $g$  est faible plus les valeurs se rapprochent de 1, valeur pour laquelle les bulles sont relaxées [56]. En traçant  $\langle \mathcal{P}/3.72\sqrt{A} \rangle$  fonction de  $g$  (d), nous constatons que celui-ci semble tendre vers un plateau quand  $g$  tend vers 1.1. Il faut préciser que la moyenne est effectuée sur l'ensemble des bulles, notamment avec les bulles proches de l'obstacle, très déformées, qui font augmenter cette moyenne. Nous avons deux mesures ici (relaxation et vitesse) qui semblent devenir indépendantes de  $g$  quand celui-ci se rapproche de 1.1, ce qui valide l'hypothèse quasistatique. Concernant la force de réseau (figure (2.10b)), nous devinons aussi un plateau lorsque  $g$  devient petit. Ce critère est toute fois moins pertinent que les précédents car il repose sur le comportement des bulles localisées autour de l'obstacle et présente de grandes fluctuations (3.4).

On prend donc dans la suite  $g = 1.1$ , valeur minimale pour faire couler la mousse (excepté en pour la mesure de pression en (2.3.1)).

### 2.2.3 Adaptation à notre géométrie

Il a fallu adapter les simulations à la géométrie recherchée : c'est-à-dire préparer dans un canal une mousse qui ne soit pas précontrainte, mettre un obstacle en son milieu et garder l'intégrité des bulles. Nous imposons à la mousse des conditions

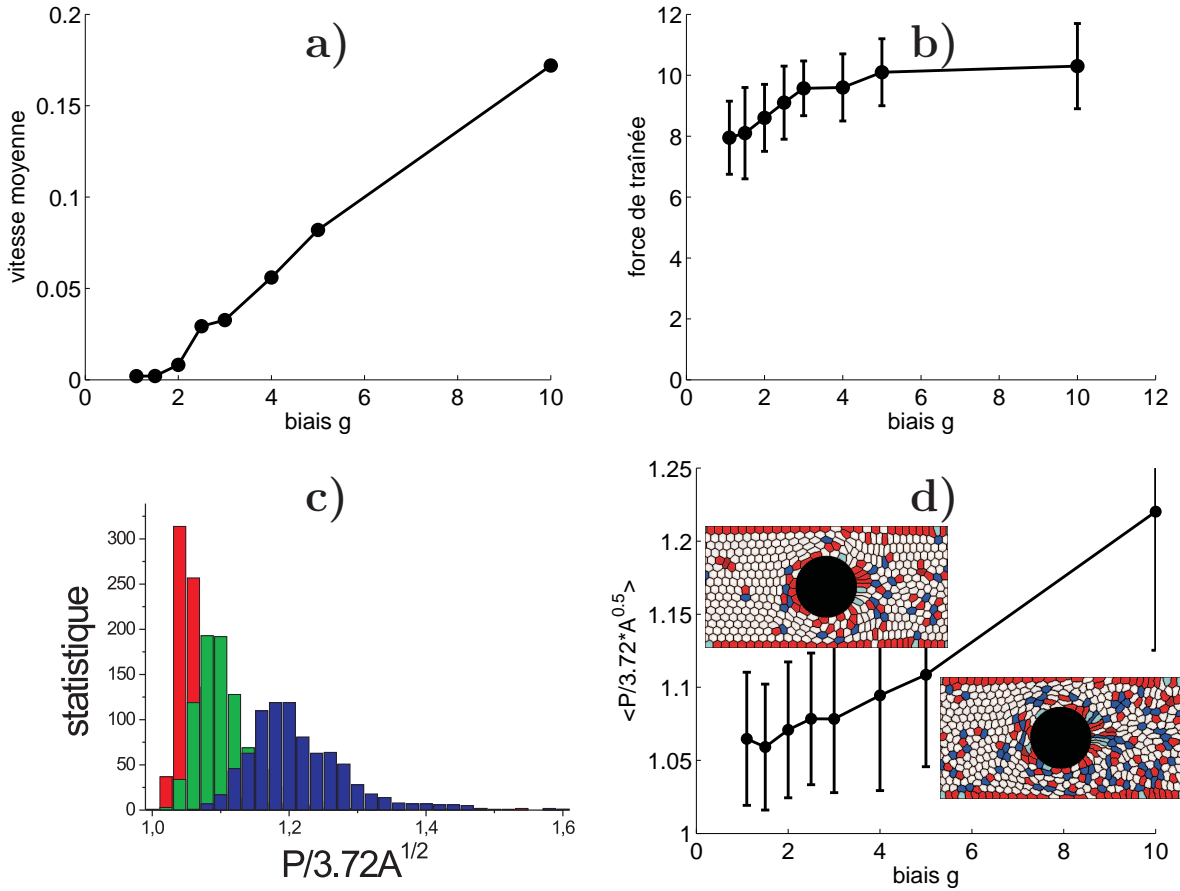


FIG. 2.10 – Choix du biais. Effet du biais sur la vitesse moyenne d'écoulement de la mousse (a) et sur la force de réseau mesurée sur l'obstacle (b). La valeur minimale pour avoir un écoulement est de 1.1. (c) : statistique de  $\mathcal{P}/3.72\sqrt{A}$  pour toutes les bulles de l'écoulement (1 image) et différents biais :  $g = 1.1$  (rouge), 5 (vert) et 10 (bleu). (d) :  $\mathcal{P}/3.72\sqrt{A}$  moyenné sur l'ensemble des bulles de l'écoulement en fonction de  $g$ ; en insert, aspect de la mousse pour  $g = 1.1$  (gauche) et 10 (droite).

aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement ( $x$ ) et des parois fixes dans la direction transverse ( $y$ ). Cela signifie que toute bulle qui sort par la droite du canal re-rentre par la gauche.

### Préparation de la mousse

Pour préparer la mousse, nous plaçons des bulles carrées (dont l'aire est l'aire cible voulue : de 64 à 400  $\text{pix}^2$ ) dans la partie gauche d'un canal. On place l'obstacle à droite (figure (2.11)), le reste étant considéré comme une grosse bulle sans aire cible. Nous faisons ensuite couler la mousse vers la droite en prenant



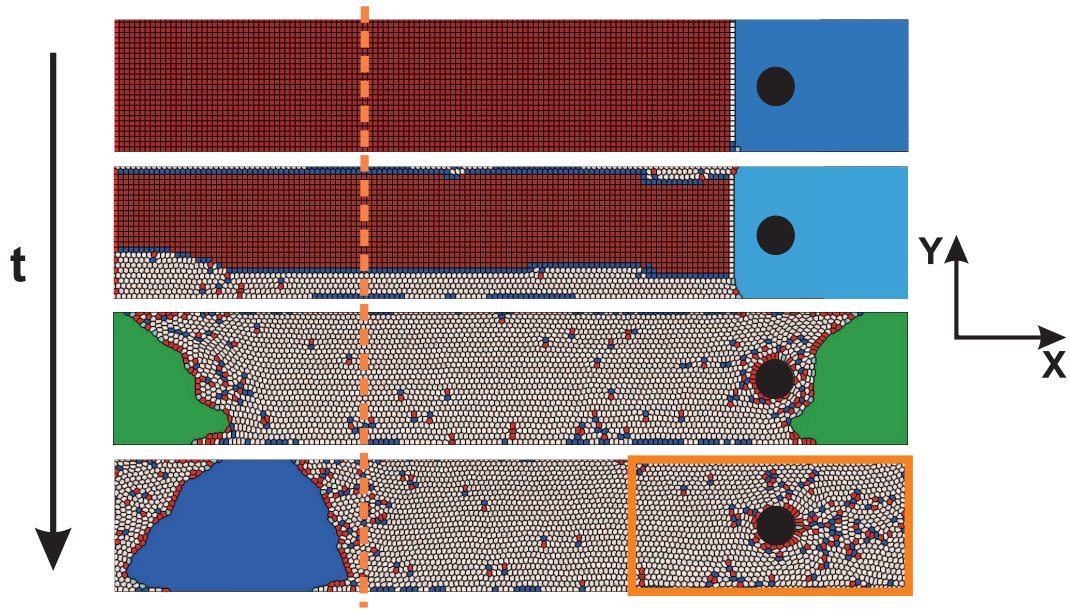


FIG. 2.11 – 4 étapes de la préparation de la mousse (chronologiquement de haut en bas). La ligne verticale orange en pointillé indique l’endroit de la coupure en fin de préparation. Le rectangle orange indique la zone de visualisation de la mousse lors d’un écoulement. Remarque : le code de couleur des bulles carrées (rouge bordeaux) ou de la grosse bulle n’a pas de sens ici.

$g = 1.1$ . Nous constatons que la relaxation des bulles (d’une forme carrée vers une forme hexagonale) commence par les bords avant de se propager vers le centre ; puis la mousse se met à couler tout doucement vers l’obstacle. Il arrive que la mousse ne se referme pas derrière l’obstacle (sillage) : on change alors la direction du biais suivant  $y$  pendant quelques MCS, ce qui permet d’englober l’obstacle dans la mousse. On arrête l’étape de préparation lorsque le canal est rempli de mousse. On supprime alors le tiers gauche du canal où se trouve maintenant la grosse bulle (à gauche de ligne en pointillé orange sur la figure (2.11)). En pratique on part d’un canal de préparation de  $1536 \times 256 \text{ pix}^2$  et à la fin on a un canal rempli de mousse de  $1024 \times 256 \text{ pix}^2$ . Les bulles sont bien monodisperses, exceptées celles qui ont été coupées à la fin de la procédure de préparation (gauche et droite du canal).

### Écoulement type

Lors de la simulation nous gardons toujours le même sens d’écoulement que lors de la préparation de la mousse et nous arrêtons la simulation lorsque les bulles coupées par la procédure de préparation atteignent l’obstacle. Chaque bulle passe ainsi une seule fois sur l’obstacle. En pratique nous ne recueillons des données (position des bulles, ...) que sur la partie droite du canal de dimensions  $512 \times 256$

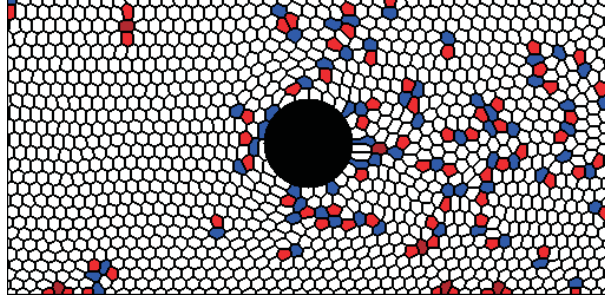


FIG. 2.12 – Simulation d'un écoulement 2D de mousse obtenu avec le modèle de Potts. Il s'agit d'un zoom sur la droite du canal (rectangle orange de la figure (2.11)). La charge topologique (écart à 6 voisins) est représentée par le jeu de couleurs : rouge foncé +2, bleu +1, rouge -1, ... On constate que la mousse en sortie d'obstacle garde une trace de son passage sur l'obstacle (plus de défauts topologiques qu'en amont).

$\text{pix}^2$ , centrée sur l'obstacle (figure 2.12).

Etant donné la vitesse moyenne d'écoulement (2.2.2), environ 500 000 MCS sont nécessaires pour qu'une bulle couvre l'ensemble du canal, soit environ 12 h de temps de calcul sur un processeur Pentium III. En général, les mesures sont effectuées tous les 1000 MCS (soit 500 points) et on sort une image de la mousse tous les 6000 MCS (soit environ 85 images par simulation).

## 2.2.4 Mesure de la tension de ligne

Dans cette section, nous voulons comparer pour chaque bulle  $S$  l'énergie d'interface  $E_S$ , grandeur qui dépend de la portée de l'interaction choisie (ici 4ème voisin), et le périmètre  $\mathcal{P}_S$ . Cela permet de vérifier la proportionnalité entre les deux [131] et d'en tirer la valeur de la tension de ligne (1.2.1). La tension de ligne  $\lambda$  est définie pour chaque bulle  $S$  par :

$$E_S = \lambda \mathcal{P}_S. \quad (2.7)$$

Si  $\lambda$  est constante nous pouvons récrire l'énergie totale d'interface  $E_I$  (2.2.1) :

$$E_I = \frac{1}{2} \sum_S E_S = \frac{1}{2} \lambda \sum_S \mathcal{P}_S. \quad (2.8)$$

Les sommes s'effectuent sur l'ensemble des bulles. Dans les deux membres on trouve le facteur 1/2 car chaque interface est partagée par deux bulles et on évite ainsi de compter deux fois ( $\lambda$  est l'énergie de la double interface air-eau-air).

Dans la suite nous vérifions que  $\lambda$  est bien définie et constante, puis nous l'estimons.

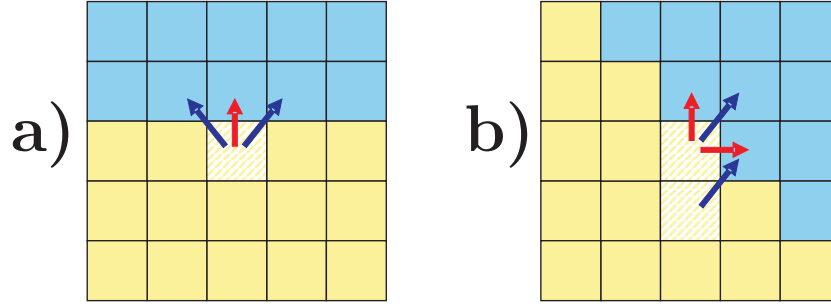


FIG. 2.13 – Contribution à la mesure du périmètre d’une bulle dans le cas d’un bord à  $0^\circ$  (a) et à  $45^\circ$  (b). Les contacts des sites hachurés avec les 1ers et 2nds voisins sont représentés respectivement par des flèches rouges et bleues.

### Mesure du périmètre des bulles

Nous pouvons définir un périmètre discret pour nos bulles comme défini dans [56]. Pour une bulle  $S$ ,  $\mathcal{P}_S = (\sqrt{2} - 1)N_1 + (1 - 1/\sqrt{2})N_2$ , où  $N_1$  et  $N_2$  sont respectivement le nombre de 1ers et de 2nds voisins sur le bord de la bulle. Cette méthode surestime le périmètre de la bulle d’un facteur  $1/N$  tout au plus,  $N$  étant le nombre de sites du bord de bulle. Nous pouvons vérifier cette méthode avec deux cas particuliers (figure (2.13)). Pour un bord à  $0^\circ$  (figure (2.13a)), pour une longueur de 1 pix, on a  $N_1 = 1$  et  $N_2 = 2$ . Pour un bord à  $45^\circ$  (figure (2.13b)), pour une longueur de  $\sqrt{2}$  pix, on a  $N_1 = 2$  et  $N_2 = 2$ . Sur la figure (2.15), nous comparons les périmètres des bulles ainsi définis au périmètre minimum d’une bulle  $3.72\sqrt{A_S}$ . Cette valeur correspond à la forme hexagonale, et à environ toute forme régulière [56]. Les données sont en bon accord. Les points qui s’écartent de la droite unité correspondent à des bulles étirées probablement par le passage autour de l’obstacle et dont le périmètre est supérieur à celui de la forme hexagonale.

### Mesure de l’énergie des bulles

A partir des équations (2.4) et (2.8) nous explicitons l’énergie d’interface de la bulle  $S$  :

$$E_S = \sum_{i \in S} \sum_{\langle j \rangle_i} J[1 - \delta(S_i - S_j)]. \quad (2.9)$$

Nous pouvons faire aisément le calcul théorique dans le cas d’un bord de bulle à  $0^\circ$  et un à  $45^\circ$  (figure (2.14)). Pour cela on peut s’aider de la forme noire qui permet de visualiser la portée de l’interaction (4ème voisins).

Pour un bord de bulle à  $0^\circ$  (haut de la figure (2.14)) : pour un bord de longueur 1 pix, deux sites de la bulle interagissent ; l’un a 8 voisins différents, l’autre en a 3, soit une énergie d’interface de  $(8J + 3J) = 11J$  pour ces sites.

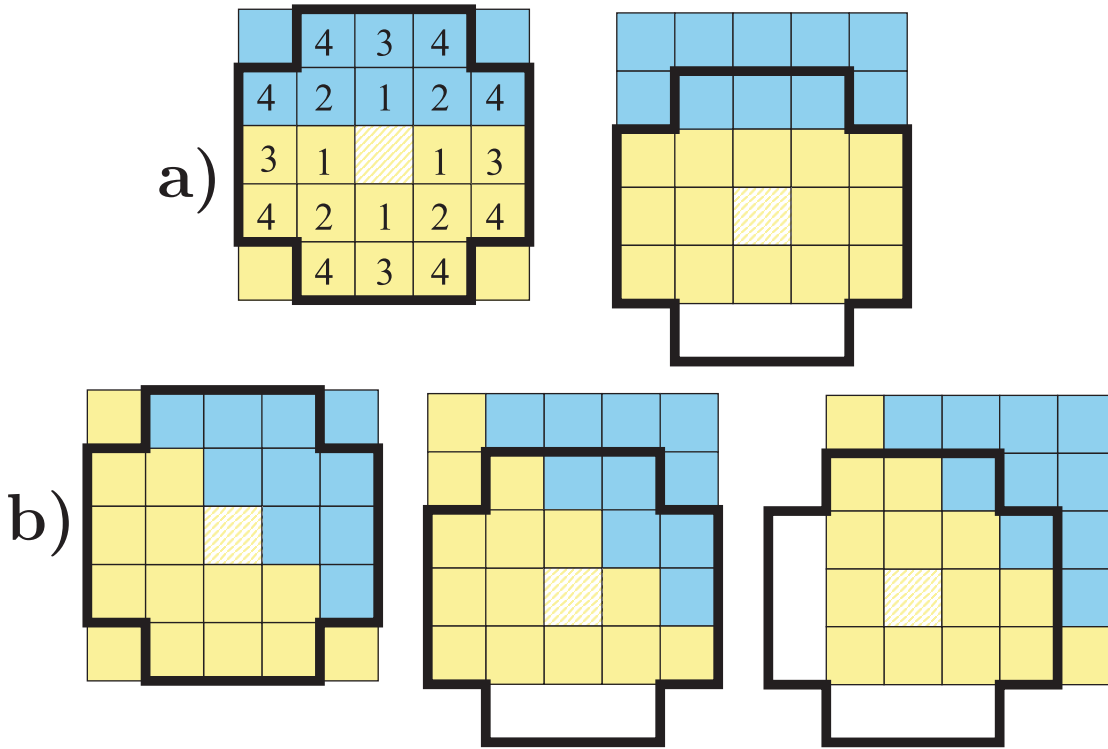


FIG. 2.14 – Mesure de l'énergie d'interface dans 2 cas. (a) Bord à  $0^\circ$ . (b) Bord à  $45^\circ$ . La forme noire représente la portée de l'interaction (4ème voisin) et on a représenté le détail des voisins sur la première figure.

Pour un bord de bulle à  $45^\circ$  (bas de la figure (2.14)) : pour un bord de longueur  $\sqrt{2}$  pix, trois sites interagissent, avec 9, 5 et 2 voisins différents, soit une énergie d'interface de  $16J$ .

### Mesure de $\lambda$

Nous mesurons le périmètre  $\mathcal{P}_S$  et l'énergie d'interaction  $E_S$  pour chaque bulle pour différentes simulations : différentes aires de bulles (de 81 à 400 pix<sup>2</sup>), différentes distributions (2 polydisperses et 6 monodisperses). Pour chaque simulation nous analysons une image en début et en fin de simulation. Les données sont représentées sur la figure (2.15). Certaines bulles sont relaxées, ce sont les bulles pour lesquelles  $\mathcal{P}_S \approx 3.72A_S^{1/2}$  [56] ; d'autres sont étirées ( $\mathcal{P}_S > 3.72A_S^{1/2}$ ), probablement à cause du passage autour de l'obstacle. Dans tous les cas, on trouve que la tension de ligne  $\lambda$  est très bien définie dans le cas de l'interaction au 4ème voisin. On trouve  $E_S/\mathcal{P}_S = 31.8 \pm 0.3$  pour  $J = 3$ , soit dans le cas général :

$$\lambda = (10.6 \pm 0.1)J \quad (2.10)$$

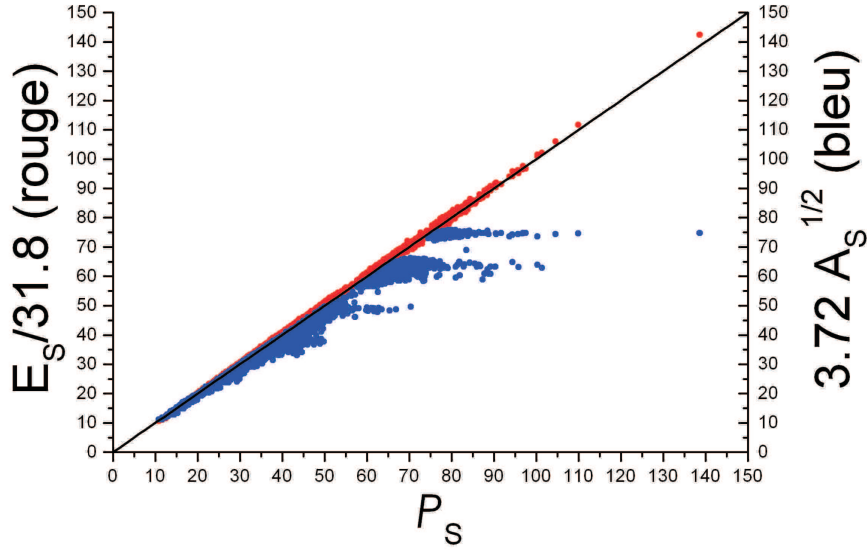


FIG. 2.15 –  $E_S/31.8$  (rouge) et  $3.72A_S^{1/2}$  (bleu) fonction de  $\mathcal{P}_S$ . Un point correspond à une bulle et nous traitons 28000 bulles. En noir la droite identité. L'interpolation linéaire donne  $E_S/\mathcal{P}_S = 31.8 \pm 0.3$ .

Nous comparons cette valeur avec le calcul théorique pour les cas particuliers de bords à  $0^\circ$  et  $45^\circ$  :

$$\lambda_{0^\circ} = 11/1 J = 11.0 J \quad (2.11)$$

$$\lambda_{45^\circ} = 16/\sqrt{2} J = 11.3 J \quad (2.12)$$

La différence entre  $\lambda_{0^\circ}$  et  $\lambda_{45^\circ}$  est inférieure à 3%, ce qui justifie l'utilisation d'une interaction au 4ème voisin [65].

En résumé,  $\lambda$  est bien définie et peut être prise constante du moment que la portée de l'interaction reste la même. Nous mesurons à partir des simulations une valeur légèrement inférieure aux cas particuliers théoriques des bords à  $0^\circ$  et  $45^\circ$ . Cette petite différence est peut-être due aux fluctuations des interfaces qui tendent à diminuer la valeur de  $\lambda$  (données non présentées). Dans toutes les simulations avec  $J = 3$ , nous prenons donc  $\lambda = 31.8$ .

### 2.2.5 Autres approches numériques

Nos études (5.4) ont été complétées par les données de simulations quasistatiques réalisées par S. Cox (The University of Wales, UK). Il utilise le logiciel libre *Surface Evolver* [8] pour une approche déterministe de la minimisation d'énergie.

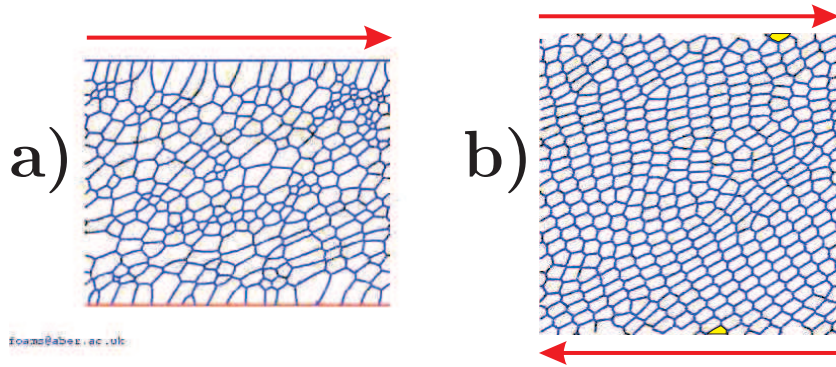


FIG. 2.16 – Images de simulations *Surface Evolver* d’une mousse cisillée. (a) Mousse polydisperse cisillée entre 2 plaques et périodique dans la direction de cisaillement. (b) Mousse monodisperse avec conditions aux limites périodiques dans toutes les directions, avec un décalage des mousses touchant les bords haut et bas pour induire le cisaillement (en jaune on représente une même bulle à cheval sur les bords verticaux).

Ces simulations sont plus précises, par rapport au modèle de Potts, mais avec une plus faible statistique (moins de bulles) pour un même temps de calcul. Nous avons utilisé des simulations de cisaillement de Couette (figure (2.16)). 2 configurations sont possibles : cisaillement entre deux plaques d’une mousse de 296 bulles confinée et périodique dans la direction du cisaillement (seule la plaque du haut bouge) ; cisaillement d’une mousse totalement périodique de 400 bulles en décalant les bulles à cheval sur les bords verticaux. Cette dernière permet de s’affranchir d’un éventuel effet de bord. Les différentes simulations sont identifiées par un code de couleur que l’on détaille dans le tableau (2.1). On note  $\gamma$  la déformation imposée (distance parcourue par les bulles du haut par rapport aux bulles du bas, adimensionnée par la hauteur de mousse). On part d’une mousse quasi-isotrope (construction Voronoï) [29] à laquelle on applique des cycles de déformation avec des  $\gamma$  compris en général  $-2.5$  et  $2.5$  dans le cas confiné,  $-2$  et  $2$  dans l’autre cas. D’un pas de temps à l’autre  $\gamma$  varie de  $\pm 0.0025$ , puis la mousse relaxe avant de passer au pas de temps suivant. L’écoulement est bien quasistatique.



couleur	$\Phi_{eff}$	$\delta A/A$	géométrie	$\gamma$
noir	$9.7.10^{-5}$	0	tot. périodique	$\pm 2$
bleu	$3.9.10^{-4}$	0	tot. périodique	$\pm 2$
vert	$3.9.10^{-4}$	0.025	tot. périodique	$\pm 2$
cyan	$3.9.10^{-4}$	0.66	tot. périodique	$\pm 2$
rouge	$3.5.10^{-4}$	0	confinée	$\pm 2.5$
magenta	$3.5.10^{-4}$	0.66	confinée	$\pm 2.5$

TAB. 2.1 – Caractéristiques des différentes simulations *Surface Evolver*. La dernière colonne correspond à l’amplitude des cycles de déformation imposée.

## 2.3 Analyse d’images expérimentales et numériques

### 2.3.1 Grandeurs locales mesurées

Nos écoulements de mousse sont divisés en éléments représentatifs de volume (RVE) dans lesquels nous mesurons les différentes grandeurs (chapitres (4) et (5)). Nous moyennons spatialement à l’intérieur d’un RVE mais nous pouvons aussi moyenner temporellement si l’écoulement est stationnaire. L’opération moyenne est notée  $\langle . \rangle$ . La taille des RVEs est discutée plus loin (figures (2.19) et (4.13)).

Nous pouvons ainsi obtenir des champs qui apparaissent dans l’équation d’évolution de la quantité de mouvement de la mécanique des fluides [61]. Dans le cas des matériaux cellulaires comme les mousses, nous avons aussi accès directement au motif discret du matériau et à son évolution temporelle en moyennant sur la structure. Enfin, dans le but d’une approche continue il faut introduire des grandeurs qui éliminent ce caractère discret. Les différents outils sont présentés ci-dessous.

#### (a) Grandeurs de l’équation d’évolution de la quantité de mouvement

Parmi les champs de l’équation de conservation de la quantité de mouvement, les champs de vitesse et de contraintes élastiques sont directement mesurables. Pour mesurer la pression à partir d’images, il faut travailler avec une mousse compressible : celle-ci est fournie par les simulations. Finalement, seules les contraintes visqueuses ne sont pas mesurées.

**Vitesse  $\vec{v}$  et gradient de vitesse  $\overline{\nabla}v$**  La vitesse est mesurée en suivant les barycentres des différentes bulles à l’intérieur d’un RVE. Nous estimons ensuite les différentes composantes du gradient de vitesse  $(\overline{\nabla}v)_{ij} = \partial v_i / \partial_j$  en effectuant des dérivées spatiales discrètes. Par exemple :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq \frac{v_x(x, y + \Delta y) - v_x(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}. \quad (2.13)$$

où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les distances entre deux RVEs dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. Cette définition est celle utilisée par les mécaniciens [91, 88], par opposition à la définition du gradient en mathématiques pour laquelle les indices  $i$  et  $j$  sont inversés.

**Contraintes élastiques**  $\overset{=el}{\sigma}$  Les bulles sont sous tension, ce qui se traduit par des contraintes élastiques. A deux dimensions et dans la limite sèche, ces dernières se déduisent directement du profil des côtés de bulles et de la tension de ligne  $\lambda$  [68]. Ici nous utilisons une forme approchée valable en régime quasistatique [68] et qui suppose que les côtés des bulles reliant deux vertex sont droits. On note  $\vec{L}$  (de norme  $L$ ) tel vecteur reliant deux vertex. Nous avons alors :

$$\overset{=el}{\sigma} = \lambda \rho \left\langle \frac{\vec{L} \otimes \vec{L}}{L} \right\rangle = \lambda \rho \begin{pmatrix} \langle L_x L_x / L \rangle & \langle L_x L_y / L \rangle \\ \langle L_y L_x / L \rangle & \langle L_y L_y / L \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

où  $\rho$  est la densité surfacique (en  $m^{-2}$ ) des côtés des bulles. Chaque côté est partagé par deux bulles et chaque bulle a en moyenne 6 côtés. Nous prenons donc  $\rho = 3/A$  avec  $A$  l'aire moyenne des bulles. Cette formule approchée suppose notamment que  $\lambda$  est homogène et que le gradient de pression local soit suffisamment faible (notamment le cas en régime quasistatique) pour que la courbure moyenne des faces de bulle n'ait pas d'orientation privilégiée. Seules les composantes du tenseur déviatorique sont utilisables avec cette approximation [68].

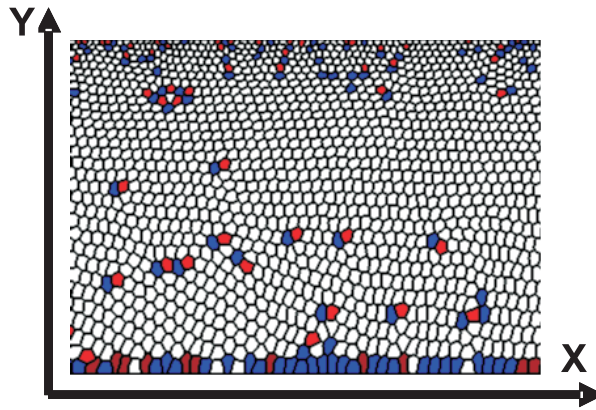


FIG. 2.17 – Effet d'un biais dans la direction  $y$  (direction confinée) sur une mousse très compressible.

**Pression  $P$**  La mesure de la pression s'effectue en mesurant les variations de l'aire 2D (aire projetée) des bulles. L'expression de l'énergie des mousses dans les



simulations (équation 2.5) peut se récrire en introduisant un terme de pression  $P_S$  pour chaque bulle  $S$  :

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\langle j \rangle_i} J[1 - \delta(S_i - S_j)] - \frac{1}{2} \sum_S P_S (A_S - A_S^c) \quad (2.15)$$

$$P_S = -\frac{\partial E}{\partial A_S} = -\kappa(A_S - A_S^c) \quad (2.16)$$

Nous retrouvons toujours le terme d'énergie d'interface  $E_I$  (gauche) et le terme de variation d'aire que l'on notera  $E_P$  (droite). La pression peut être positive (diminution d'aire) ou négative (augmentation d'aire). Il suffit de connaître la valeur de l'aire des bulles pour remonter à l'information.

Pour évaluer les variations d'aire au cours d'une simulation, il faut s'intéresser aux variations des différents termes énergétiques  $\Delta E_I$  et  $\Delta E_P$  au cours d'un changement de numéro d'un pixel. Ainsi, on considère une bulle  $S$  dont l'aire augmente de  $dA = \pm 1 \text{ pix}^2$  lors du changement de valeur d'un de ses sites. Si on cherche seulement un ordre de grandeur, on ne fait le calcul que pour une seule bulle (alors qu'en réalité une autre bulle subit le changement d'aire opposé) :

$$\Delta E_P = \frac{1}{2} \kappa [(dA + \Delta A_S)^2 - \Delta A_S^2] = \frac{\kappa}{2} [1 + 2dA\Delta A_S] \approx \kappa \Delta A_S \quad (2.17)$$

$$\Delta E_I \approx J \quad (2.18)$$

Ici  $\Delta A_S = A_S - A_S^c$ . Lors de l'évolution de la mousse on a un ajustement entre ces différentes contributions :  $\Delta E_I \approx \Delta E_P$ . Ce qui mène à :

$$\Delta A_S \approx J/\kappa \quad (2.19)$$

Pour avoir une précision suffisante sur notre mesure, nous avons choisi de travailler avec  $\kappa = 0.2$  et  $0.1$ . Ces deux valeurs permettent alors des variations d'aire de l'ordre de 15 et 30  $\text{pix}^2$  respectivement (jusqu'à 20 % de l'aire cible au maximum), ce qui ne perturbe pas la forme des bulles, ni l'écoulement par rapport au cas incompressible (figure (2.18)). En prenant  $\kappa$  plus petit, des mousses très compressibles peuvent être obtenues (figure (2.17)).

Nous avons constaté que le biais minimum pour faire couler la mousse dépend légèrement de  $\kappa$ . Nous avons ainsi pris respectivement  $g = 1.3$  et  $1.4$ . Il est aussi judicieux d'introduire la compressibilité car elle fait apparaître les variations d'aire relative des bulles :

$$-\frac{1}{A} \frac{dA}{dP} = \frac{1}{\kappa A} \approx \frac{\Delta A}{JA} \quad (2.20)$$

Nous avons travaillé avec une mousse de 289  $\text{pix}^2$ , ce qui donne une compressibilité  $1/(\kappa A)$  de 0.017 et 0.035  $\text{pix}^2 \cdot \text{J}^{-1}$  respectivement.

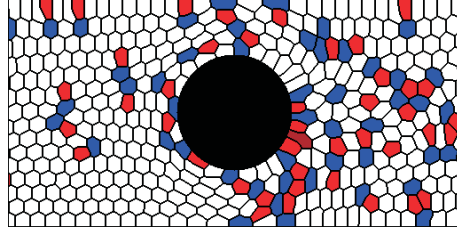


FIG. 2.18 – Image d'une simulation avec  $\kappa = 0.1$  ; les bulles en aval de l'obstacle (droite) sont plus grandes qu'en amont (gauche).

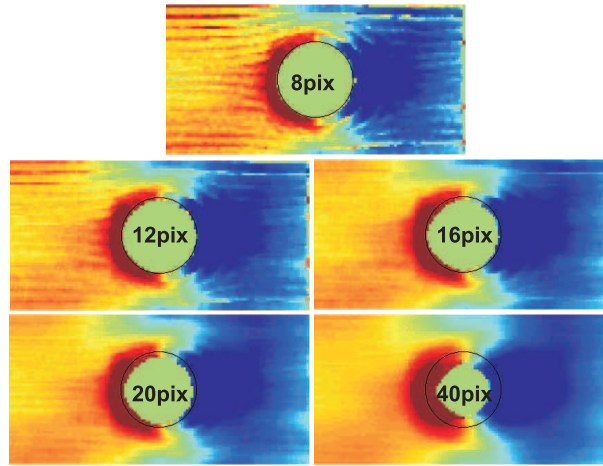


FIG. 2.19 – Champ de pression d'une mousse compressible ( $A = 289 \text{ pix}^2$ ,  $\kappa = 0.1$ ). En rouge les fortes pressions et en bleu les faibles pressions. On moyenne la pression dans des boîtes de 8, 12, 16, 20 et 40 pixels de côté (de haut en bas). Le maillage est composé de sites espacés de 4 pixels. Les champs sont moyennés sur 500 mesures (écoulement entier).

Pour obtenir des cartes de pression, on répartit les points de mesure sur un maillage carré de 4 pixels de côté. On cherche quels sont les centres de bulle compris dans une boîte de moyenne centrée sur le point de mesure et de côtés 8, 12, 16, 20 ou 40 pixels. On moyenne sur la pression de toutes les bulles contenues dans la boîte au cours de la simulation et on obtient les cartes de la figure (2.19). Une boîte de moyenne de côtés 16 pixels semble bien adaptée pour lisser la trace discrète des bulles tout en gardant une bonne précision.

### (b) Grandeurs discrètes moyennées

Une façon de rendre compte du motif d'un matériau cellulaire (ou d'une assemblée de particules) consiste à prendre en compte les liens  $\vec{\ell}$  reliant les barycentres de deux bulles voisines [57]. Ces liens sont donc définis par les relations de voisinage entre bulles (topologie), c'est-à-dire l'existence d'une face séparant deux

bulles. Sur la figure (1.4) on donne un exemple de tels liens partants d'une bulle pour une mousse isotrope et une mousse étirée. Pour le cas étiré, ces liens font apparaître la direction d'élongation. Les liens évoluent géométriquement dans le temps (exemple d'un étirement) ou peuvent apparaître/disparaître suite à un changement topologique. On note  $N_{tot}$  le nombre de liens sur lesquels on a moyenné dans le RVE.

**Texture**  $\bar{M}$  La texture est une mesure statique du motif du matériau et est définie directement à partir des liens  $\vec{\ell}$  entre bulles :

$$\bar{M} = \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \ell_x \ell_x \rangle & \langle \ell_x \ell_y \rangle \\ \langle \ell_y \ell_x \rangle & \langle \ell_y \ell_y \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

On utilise dans la suite la notation compacte, qui est équivalente à celle faisant apparaître les composantes ( $x$  et  $y$ ) et permet de généraliser pour des écoulements tridimensionnels.

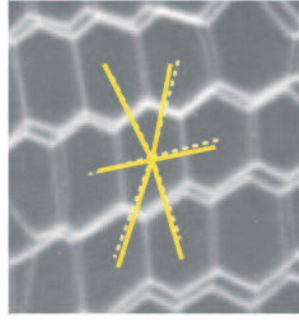


FIG. 2.20 – Changement géométrique. Superposition de deux images successives et tracé en jaune des liens entre centres de bulle. Continu : 1ère image ; pointillé : 2ème image.

**Changement géométrique**  $\bar{C}$  Ce tenseur mesure le changement de la géométrie des liens (longueur et orientation) avec le temps (figure (2.20)). On le définit par :

$$\bar{C} = \left\langle \vec{\ell} \otimes \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right\rangle. \quad (2.22)$$

**Changement topologique**  $\bar{T}$  Ce tenseur tient compte des changements topologiques. Il faut prendre en compte les liens qui apparaissent (notés  $\vec{\ell}_a$ ) et ceux qui disparaissent (notés  $\vec{\ell}_d$ ). Un exemple est donné sur la figure (1.5). On construit alors  $\bar{T}$  en faisant apparaître  $\dot{N}_a$  et  $\dot{N}_d$ , respectivement le nombre de liens apparaissant et disparaissant par unité de temps :

$$\bar{T} = \frac{\dot{N}_a}{N_{tot}} \langle \vec{\ell}_a \otimes \vec{\ell}_a \rangle - \frac{\dot{N}_d}{N_{tot}} \langle \vec{\ell}_d \otimes \vec{\ell}_d \rangle. \quad (2.23)$$

On se retrouve ainsi avec un tenseur construit sur la géométrie moyenne d'un T1 et pondéré par le nombre de T1s par unité de temps et de liens contenus dans le RVE.

Ces différentes quantités sont reliées entre elles [93]. Si on suppose que le nombre de T1s entre deux pas de temps est faible devant le nombre de liens dans la boîte, alors

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \bar{J}_M + \left( \bar{C} + \bar{C}^t \right) + \bar{T}, \quad (2.24)$$

où  $-\vec{\nabla} \cdot \bar{J}_M$  représente le terme d'advection. Il tient compte des liens qui entrent et qui sortent de la boîte de moyenne. Le deuxième terme tient compte du changement de norme et de direction des liens dans le RVE. Le troisième considère la création ou l'annihilation de liens (changements topologiques).

### (c) Grandeurs continues

Dans le but de passer à une approche continue de la rhéologie des mousses, il faut aller au-delà de la description discrète du motif de la mousse, dont la taille caractéristique est donnée par celle des bulles. Ces outils se déduisent directement des outils discrets.

**Déformation élastique**  $\bar{U}$  Elle a été introduite par Aubouy *et al.* [4] pour caractériser la déformation du matériau vis-à-vis d'un état de référence  $\bar{M}_0$  :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \left( \log \bar{M} - \log \bar{M}_0 \right). \quad (2.25)$$

Le logarithme est pris ici au sens des matrices. Ce tenseur s'identifie à la notion classique de l'élasticité dans le domaine de validité de l'élasticité classique, mais peut être étendu au-delà des premiers réarrangements. Des comparaisons quantitatives avec les contraintes élastiques ont validé l'utilisation de ce tenseur pour décrire l'élasticité des mousses [3, 22, 68].

**Taux de déformation continue**  $\bar{G}$  Il s'agit de l'équivalent continu de  $\bar{C}$  :

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle^{-1} \left\langle \vec{\ell} \otimes \frac{d\vec{\ell}}{dt} \right\rangle \\ &= \bar{M}^{-1} \bar{C}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Taux de déformation plastique  $\bar{P}$**  Il s'agit de l'équivalent continu de  $\bar{T}$  :

$$\bar{P} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{T}^{-1} M + \bar{M}^{-1} \bar{T}}{2}. \quad (2.27)$$

On introduit un signe  $-$  par rapport à  $\bar{T}$  car la plasticité relâche de la déformation.

De même, ces différentes quantités sont reliées entre elles. A partir de l'équation (2.24) on peut montrer qu'en première approximation [93] :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{J}_U + \frac{\bar{G} + \bar{G}^t}{2} + o(\bar{G}\bar{U}) - \bar{P}. \quad (2.28)$$

On retrouve toujours un terme d'advection, un terme de déformation lié à l'évolution des liens et un terme de changement topologique. Le terme d'évolution des liens est une forme approchée au premier ordre : une forme analytique n'a pour le moment pas été obtenue, à cause de la difficulté de traiter le logarithme lors du passage de  $\bar{M}$  à  $\bar{U}$ . Cette forme approchée est valable lorsque les valeurs propres de  $\bar{U}$  sont négligeables devant 1.

### 2.3.2 Représentation des données

Les données scalaires et vectorielles peuvent être représentées très facilement : niveau de gris ou échelle de couleur dans un cas, champ de vecteur dans l'autre cas. Pour les tenseurs utilisés il faut représenter localement les 4 informations contenues dans les composantes.

#### Cas des tenseurs symétriques

Dans le cas des tenseurs symétriques ( $\bar{M}, \bar{T}, \bar{U}, \bar{P}$ ), il faut extraire seulement 3 informations. Ces tenseurs ont notamment la particularité d'être diagonalisables. Si on considère un tenseur  $\bar{Q}$  quelconque, on peut écrire :

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$= \bar{R} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \bar{R}^t \quad (2.30)$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 \cos^2(\theta) + q_2 \sin^2(\theta) & (q_1 - q_2) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ (q_1 - q_2) \sin(\theta) \cos(\theta) & q_1 \sin^2(\theta) + q_2 \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où  $q_1, q_2$  sont les deux valeurs propres,  $\theta$  la direction propre de  $q_1$  (la direction propre de  $q_2$  est perpendiculaire).  $\bar{R}$  est la matrice rotation qui a permis de passer

de la base initiale à la base propre :

$$\bar{\bar{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Notons que  $\theta$  (modulo  $\pi/2$ ) peut être calculer directement à partir des composantes :  $\tan 2\theta = 2Q_{xy}/(Q_{xx} - Q_{yy})$ . On note  $\text{diag } \bar{\bar{Q}}$  la représentation du tenseur dans sa base propre :

$$\text{diag } \bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

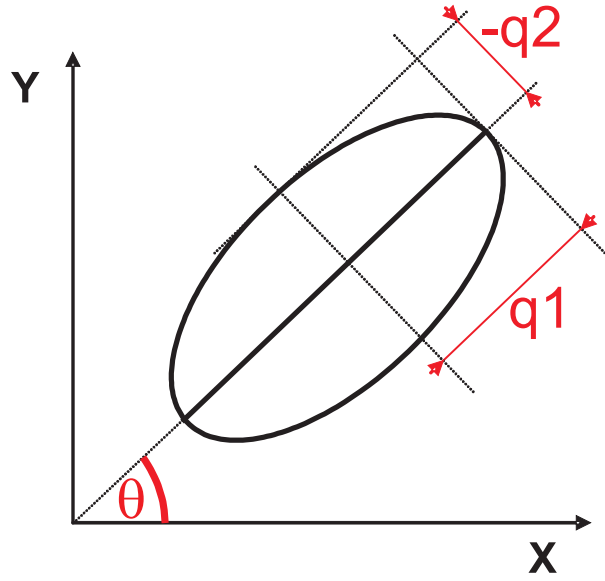


FIG. 2.21 – Représentation elliptique de  $\bar{\bar{Q}}$ . On a pris ici  $q_1$  positive (trait épais) et  $q_2$  négative.

On représente le tenseur par une ellipse dont la taille et l'orientation des axes sont données par les caractéristiques propres, cf figure (2.21). L'axe de l'ellipse est marqué par un trait si celui-ci correspond à une valeur propre positive et n'est pas marqué dans le cas contraire.

Il est courant de décomposer le tenseur en une partie isotrope (valeurs propres égales) et une partie déviatorique (valeurs propres opposées et de même valeur absolue  $Q = |q_1 - q_2|/2$ ). On utilise la trace  $\text{Tr}(\bar{\bar{Q}}) = q_1 + q_2$  du tenseur :

$$\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{Q}}_{\text{isotrope}} + \bar{\bar{Q}}_{\text{anisotrope}} \quad (2.34)$$

$$= \bar{\bar{R}} \left[ \begin{pmatrix} \text{Tr}(\bar{\bar{Q}})/2 & 0 \\ 0 & \text{Tr}(\bar{\bar{Q}})/2 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \bar{\bar{R}}^t \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\bar{Q}}) \bar{\bar{I}}d + Q \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

où  $\overline{Id}$  est le tenseur identité. On définit  $Q$  comme l'amplitude (au sens des mécaniciens) du tenseur déviatorique. Elle apparaît notamment dans l'expression de la composante tangentielle et de la différence des contraintes normales, alors que  $\text{Tr}(\overline{Q})$  apparaît dans la moyenne des composantes normales :

$$\begin{cases} Q_{xy} &= Q \sin(2\theta) \\ (Q_{xx} - Q_{yy})/2 &= Q \cos(2\theta) \\ (Q_{xx} + Q_{yy})/2 &= \text{Tr}(\overline{Q})/2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Dans la suite on fera toujours apparaître la différence des composantes normales divisée par 2, ce qui permet qu'elle soit comparable à la composante tangentielle. On a notamment  $Q_{xy}^2 + ((Q_{xx} - Q_{yy})/2)^2 = Q^2$ .

### Cas d'un tenseur quelconque

L'ellipse ne permet pas de représenter les tenseurs  $\overline{C}$ ,  $\overline{G}$  ou  $\overline{\nabla v}$ , qui ne sont pas symétriques par construction. La première étape consiste alors à décomposer le tenseur [61] :

$$\overline{G} = \frac{\overline{G} + \overline{G}^t}{2} - \frac{\overline{G}^t - \overline{G}}{2} \quad (2.38)$$

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} G_{xx} & \frac{G_{xy} + G_{yx}}{2} \\ \frac{G_{xy} + G_{yx}}{2} & G_{yy} \end{pmatrix} - \frac{G_{yx} - G_{xy}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Le tenseur est donc décomposable en une partie symétrique, notée  $\overline{G}_{sym}$  que l'on représente par une ellipse, et une partie antisymétrique, caractérisée par un scalaire  $\Omega = (G_{yx} - G_{xy})/2$  que l'on représente en niveau de gris. Dans le cas particulier du gradient de vitesse  $\overline{\nabla v}$ , ce scalaire équivaut à la vorticité  $\omega$  ( $1/2 \times$  rotationnel).

### Représentation temporelle d'un tenseur symétrique-déviatorique

Lors de l'étude transitoire du chapitre (5), nous sommes amenés à étudier l'évolution temporelle des tenseurs. Tracer les composantes du tenseur au cours du temps ne donne pas toujours une représentation très intuitive. On peut suivre l'évolution de l'ellipse au cours du temps, mais ceci est difficilement représentable sur un seul graphique.

Pour un tenseur symétrique-déviatorique, la solution envisagée est de tracer par exemple la trajectoire effectuée par le point  $(U \cos \theta, U \sin \theta)$ . En d'autres termes, on peut suivre la bi-trajectoire effectuée par la valeur propre positive du tenseur déviatorique (celle de la valeur propre négative est tournée de  $90^\circ$ ). On suit ainsi l'orientation et l'amplitude du tenseur (figure (2.22a)). Cette représentation est nommée *trajectoire propre*.

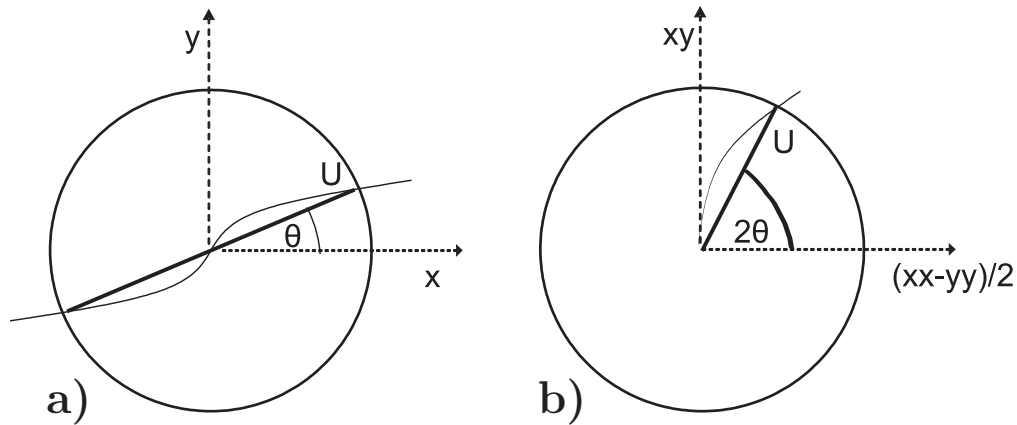


FIG. 2.22 – Représentation temporelle de  $\bar{U}$  déviatorique. a) *trajectoire propre* : suivi de  $(U \cos \theta, U \sin \theta)$ . A un instant donné l'ellipse représentant  $\bar{U}$  déviatorique est circulaire. Le cercle a pour rayon  $U$  et est orienté par  $\theta$ , direction de la valeur propre positive. On le représente ici seulement par deux points, de coordonnées  $(U \cos \theta, U \sin \theta)$  et  $(-U \cos \theta, -U \sin \theta)$  correspondants aux deux extrémités de l'axe propre. b) *trajectoire des composantes* : suivi de  $((U_{xx} - U_{yy})/2, U_{xy})$  équivalent à  $(U \cos 2\theta, U \sin 2\theta)$ .

Une autre façon de faire est de représenter  $U_{xy}$  fonction de  $(U_{xx} - U_{yy})/2$  (figure (2.22b)), ce qui revient au même que de tracer la trajectoire effectuée par le point  $(U \cos 2\theta, U \sin 2\theta)$ . Cette représentation est très proche de la précédente mais évite la redondance de la symétrie centrale. Cette façon de représenter s'inspire des cercles de Mohr-Coulomb utilisés par les mécaniciens [58] et a déjà été utilisée dans le cas des mousses [73]. On nomme cette représentation *trajectoire des composantes*.

En conclusion on dispose de différents outils pour caractériser l'écoulement, ainsi que d'un mode de représentation qui permet de visualiser toutes les informations relatives à une grandeur, facilement et sur une même carte.

### 2.3.3 Fraction liquide effective

La fraction liquide  $\Phi$  est le rapport du volume d'eau sur le volume total de la mousse. On sait [111] qu'une mousse humide a une contrainte seuil plus faible qu'une mousse sèche. On aimerait donc relier la fraction liquide de la mousse à ses propriétés mécaniques.

Or la définition habituelle n'est pas satisfaisante pour les mousses quasi-2D. La répartition de l'eau varie d'une géométrie à l'autre (verre-verre, eau-verre) et il n'est pas toujours évident de la déterminer (exemple de l'expérience eau-verre [113]). Et comment définir la fraction liquide pour les simulations, pour lesquelles on n'implémente pas de milieu diphasique ?



A l'échelle de la bulle, la plasticité se manifeste par les transformations topologiques T1s (1.2.1). A 3D, un T1 se déclenche lorsque deux vertex sont suffisamment proches et se touchent. Cette distance que l'on appelle longueur de coupure  $L_c$  (figure 2.23) est donc un paramètre important pour caractériser mécaniquement la plasticité des mousses. Dans notre géométrie, les vertex de paroi et les bords de Plateau verticaux (figure (1.3)) ont même position en vue de dessus.  $L_c$  caractérise alors la distance minimale entre deux de ces projections avant que le T1 ait lieu.

### Cas d'une mousse 2D idéale, définition de $\Phi_{eff}$ [113]

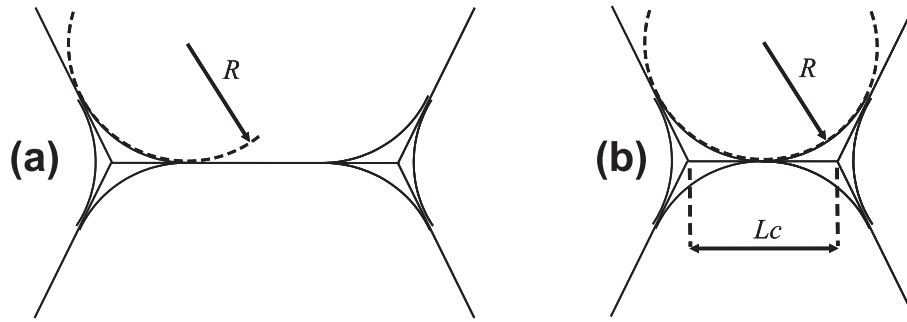


FIG. 2.23 –  $L_c$ . (a) Bords de Plateau 2D de rayon  $R$ . (b) Définition de  $L_c$  : les deux bords de Plateau se touchent.

Une mousse 2D idéale est un réseau purement 2D de bulles. Les bulles se rencontrent au niveau de bords de Plateau à deux dimensions. Ceux-ci sont constitués de trois arcs concaves se touchant tangentiellement. Si les bulles sont symétriques, et donc de rayon de courbure  $R$  identique pour les trois (figure (2.23)), l'aire  $A_{PB}$  d'un bord de Plateau 2D vaut [113] :

$$A_{PB} = \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) R^2 \quad (2.40)$$

La fraction liquide vaut  $\Phi = A_l/A$ , avec  $A$  l'aire totale par bulle et  $A_l$  l'aire occupée par le liquide dans une bulle. Dans le cas d'une mousse idéale, l'eau est concentrée au niveau des bords de Plateau 2D. En moyenne, chaque bulle est en contact avec 6 bords de Plateau, chacun partagé par 3 bulles, d'où  $A_l = 2A_{PB}$ . On a donc :

$$\Phi = \left( 2\sqrt{3} - \pi \right) \frac{R^2}{A} \quad (2.41)$$

$L_c$  est liée au rayon des bords de Plateau 2D (figure (2.23)). Par convention on prend comme déclenchement du T1 l'instant pour lequel les bords de Plateau 2D se touchent. D'où

$$L_c = 2R/\sqrt{3}. \quad (2.42)$$

Dans la suite on appelle fraction liquide mécanique ou effective  $\Phi_{eff}$ , la grandeur adimensionnée faisant apparaître  $L_c$  et qui coïncide avec la fraction liquide d'une mousse parfaitement 2D :

$$\Phi_{eff} = \frac{3}{2} \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{L_c^2}{A} \approx 0.242 \frac{L_c^2}{A} \quad (2.43)$$

On validera dans les prochains chapitres cette définition.

### Cas des simulations

Dans le cas des simulations avec *Surface Evolver*,  $L_c$  est un paramètre directement entré dans le programme, ce qui permet de choisir facilement les fractions liquides effectives. Pour des raisons de stabilité numérique, les fractions liquides effectives obtenues sont inférieures à 1 % ( $10^{-6}$  à  $10^{-2}$  en pratique).

Dans le cas du modèle de Potts,  $L_c$  n'est pas un paramètre, mais est imposé par le réseau. En effet deux bulles se mettent en contact suite au changement d'un pixel. En prenant une barre d'erreur raisonnable on peut estimer  $L_c$  de l'ordre de 1 à 2 pixels. On a choisit de prendre  $L_c = \sqrt{2}$  (compris entre 1 et 2 en échelle logarithmique). Ainsi la fraction liquide effective est uniquement fonction du nombre de pixels par bulle. En prenant une fourchette de 64 à 400 pix<sup>2</sup>, on a pu atteindre des fractions liquides effectives de 0.00125 à 0.0075.

### Cas de l'expérience

Pour les expériences deux cas se présentent suivant la configuration expérimentale.

Pour la configuration *débit d'azote imposé*, on a plus facilement accès à la fraction liquide volumique  $\Phi$ , et  $L_c$  n'est pas mesurée. En (3.1), on explique comment relier  $\Phi$  à  $\Phi_{eff}$ , via une hypothèse de répartition du liquide dans notre géométrie.

Pour la configuration *pression imposée*, la mesure est faite dans un seul cas particulier. En effet, cette mesure est contraignante : il faut pour chaque mesure changer le réglage de l'objectif de la caméra et placer un obstacle dans le canal (notamment pour les mesures de dissipation qui s'effectuent sans obstacle). Comme la hauteur de drainage est la même pour toutes ces expériences et le temps de montée des bulles très lent, on a supposé que la mousse entrant dans le canal a atteint sa fraction liquide d'équilibre. On suppose donc que  $L_c$  est à peu près le même pour toutes ces expériences.

En zoomant le plus possible sur la mousse, dans une zone où de nombreux T1s se produisent (derrière l'obstacle par exemple), on est capable de mesurer  $L_c$  même si la mousse est très sèche : sur la figure (2.24) on présente les images d'une telle expérience. Malgré la très forte pixellisation, on est capable d'identifier la position des vertex de paroi en prolongeant les bords de Plateau de paroi horizontaux, et donc de mesurer  $L$  pour les différentes images. Sur la figure (2.25), on

trace  $L$  en fonction du temps. On prend comme instant  $t = 0$  s du T1 la moyenne des temps des deux images adjacentes à l'instant du T1 (soit une précision de 0.1 s). En extrapolant à  $t = 0$  s la distance entre vertex de paroi en fonction du temps, on obtient une mesure de  $L_c$ . Dans la suite, nous prenons  $L_c = 0.08$  mm pour nos expériences à *pression imposée*. Avec  $A = 12.8$  mm<sup>2</sup>, on prend donc  $\Phi_{eff} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ , ce qui correspond à  $\Phi = 2 \cdot 10^{-4}$  (3.1).

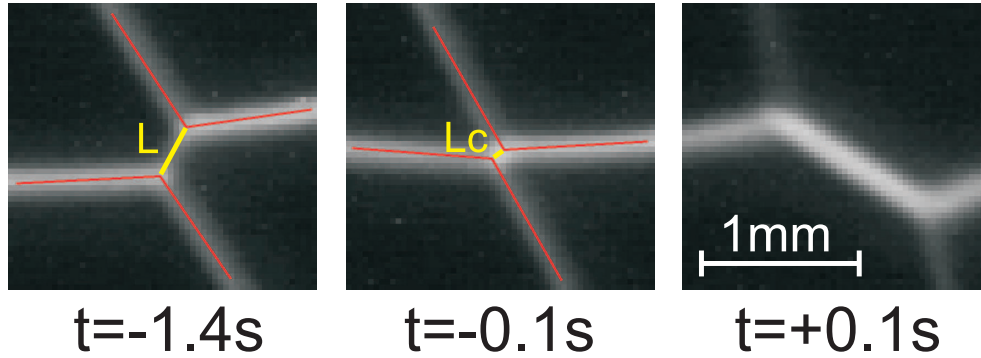


FIG. 2.24 – Zoom sur un T1. 3 images avant, juste avant et juste après le T1.  $t=0$  est identifié comme le moment du T1 (un  $t$  négatif est antérieur au T1). En rouge on représente la façon dont on trouve la position des vertex de paroi et mesure  $L$  : croisement du prolongement des bords de Plateau de paroi horizontaux.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit comment nous obtenons des écoulements 2D de mousse. L'utilisation d'un dispositif verre-verre permet l'obtention d'une grande gamme de vitesses d'écoulement (facteur 50000) et de fractions liquides (3000) (2.1). En explorant l'espace des paramètres, la mousse est limitée aux grandes fractions liquides (écoulement bulleux) et devient instable lorsque l'écoulement devient trop rapide, avec une légère dépendance de la fraction liquide. Des mousses très lentes peuvent être obtenues ( $V \simeq 0.04$  mm/s).

La limite basse vitesse est approchée avec des simulations quasistatiques (2.2). Nous utilisons pour cela le modèle de Potts. Les jeux de paramètres utilisés permettent de simuler des écoulements de bulles relaxées plus ou moins compressibles. La mousse est bien caractérisée et la tension de ligne déterminée pour une interaction au 4ème voisin.

Nous décrivons les différentes grandeurs mesurées lors des expériences (2.3) : les grandeurs de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement, les grandeurs statistiques décrivant l'évolution de la structure et les grandeurs continues correspondantes. Les différents modes de représentation sont exposés pour identifier simplement l'information sur les cartes ou au cours du temps. Nous introduisons enfin la fraction liquide effective  $\Phi_{eff}$ , qui permet de caractériser les

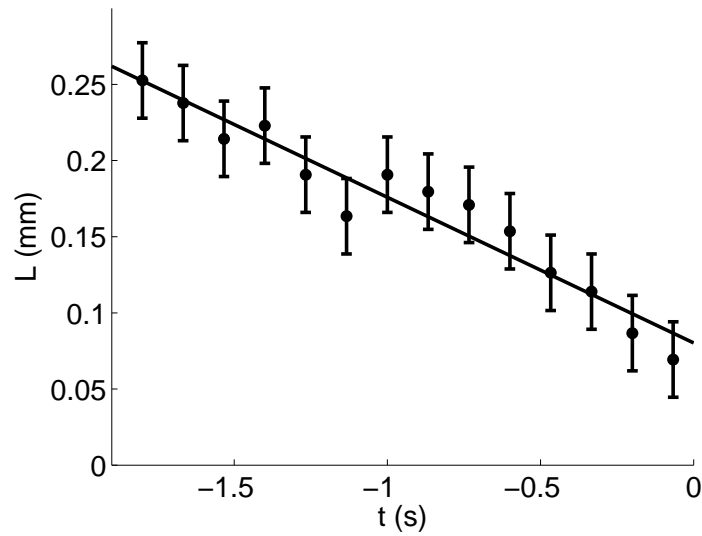


FIG. 2.25 – Détermination de  $L_c$ . A partir d'images telles que celles de la figure (2.24), on trace  $L$  en fonction du temps pour une expérience *pression imposée* ( $A = 12.8 \text{ mm}^2$ ,  $H = 3.5 \text{ cm}$ ). Les barres d'erreur correspondent à la pixellisation des images. Interpolation des points expérimentaux :  $L(\text{mm}) = -0.0956 \times t(\text{s}) + 0.0803$ , soit  $L_c = L(0) = 0.08 \pm 0.008$  mm en tenant compte des barres d'erreur sur les coefficients.

propriétés plastiques d'une mousse 2D indépendamment du système expérimental ou numérique utilisé.



# Chapitre 3

## Écoulement permanent : mesures globales

Dans ce chapitre nous abordons quatre caractéristiques globales des écoulements 2D de Stokes : la répartition du liquide dans la mousse ; l'interaction de la mousse avec l'extérieur, dissipation liée au frottement sur les parois (typique de la géométrie 2D) ; les conditions d'obtention de la mousse ; et la force appliquée sur l'obstacle.

### 3.1 Géométrie des bulles, lien $\Phi$ - $\Phi_{eff}$

Dans cette partie nous faisons le lien pour nos expériences entre la proportion de liquide dans la mousse  $\Phi$ , et  $\Phi_{eff}$  qui a l'avantage d'avoir un sens mécanique (critère des T1s) quel que soit le système expérimental ou numérique utilisé (2.3.3). Ce rapprochement est d'autant plus important que seule  $\Phi$  est mesurée dans les expériences à *débit d'azote contrôlé* et seule  $\Phi_{eff}$  est connue dans les expériences à *pression contrôlée* et les simulations. Pour ceci nous allons utiliser comme intermédiaire le rayon des bords de Plateau, noté  $R_P$ .

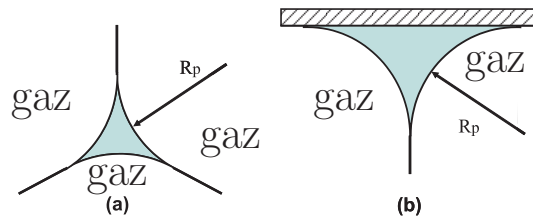


FIG. 3.1 – Géométrie des bords de Plateau. Bord de Plateau vertical (a) et bord de Plateau de paroi horizontal (b).

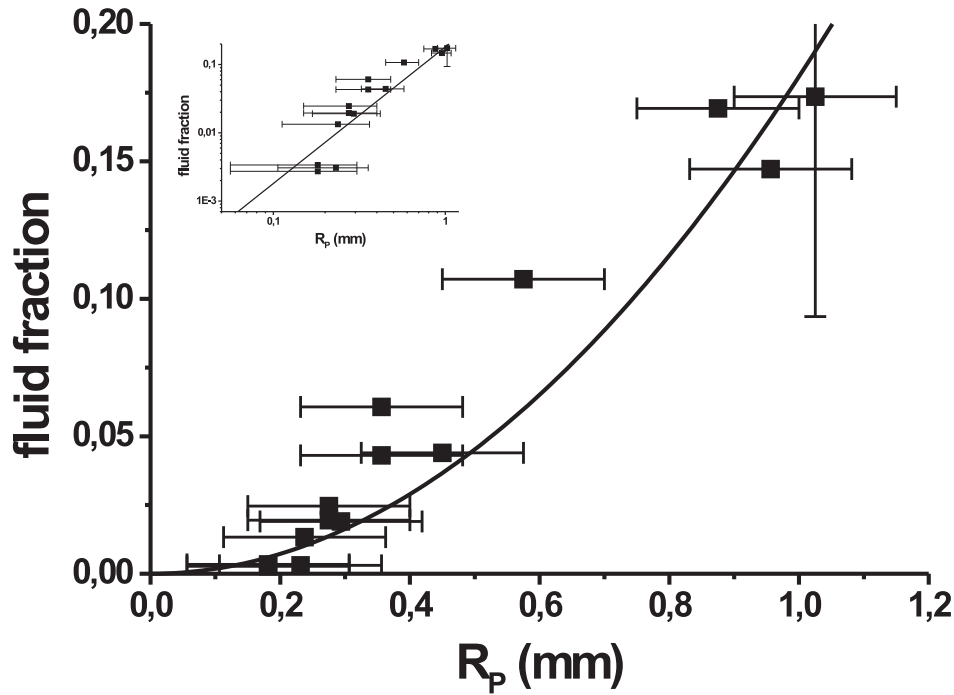


FIG. 3.2 – Caractérisation des bords de Plateau.  $\Phi$  en fonction de  $R_P$ , mesurée directement sur les images (figure (3.3)). En trait plein, le modèle limite sèche (3.1). En insert, échelle logarithmique.

Pour faire le lien entre les deux, il faut faire une supposition quant à la répartition de l'eau dans la mousse. Dans la limite mousse sèche, une hypothèse usuelle est de considérer que toute l'eau se trouve dans les bords de Plateau. Sur la figure (3.1), on a représenté les sections des deux sortes de bords de Plateau que l'on trouve dans la mousse : les verticaux, formés de trois faces concaves (contact entre trois bulles) et les horizontaux de paroi, avec deux faces concaves et une face plate (contact entre deux bulles et une plaque horizontale).

La phase liquide est continue, ce qui permet de dire que la pression dans le liquide est à peu près la même dans les différents bords de Plateau autour d'une bulle. Par conséquent, la loi de Laplace nous dit que le rayon  $R_P$  des bords de Plateau est homogène ( $R_P$  est le même pour les horizontaux de paroi et les verticaux). Si on note  $S_v$  et  $S_h$  respectivement les sections des bords de Plateau verticaux et horizontaux de paroi respectivement, un calcul de géométrie donne  $S_v = C_v R_P^2$  et  $S_h = C_h R_P^2$  avec  $C_v = 0.1613$  et  $C_h = 0.4292$ . Considérons une bulle unique de périmètre et d'aire projetés  $\mathcal{P}$  et  $A$ . Elle est en contact avec en moyenne 6 bords de Plateau verticaux de hauteur environ égale à l'espacement

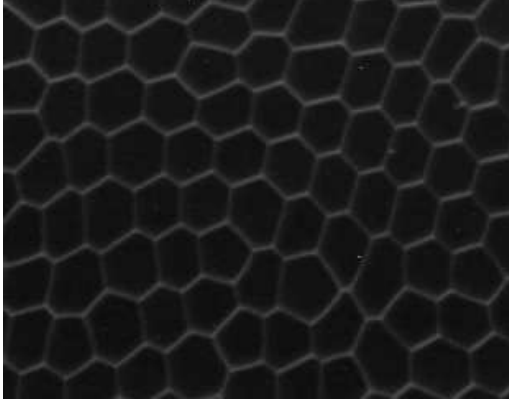
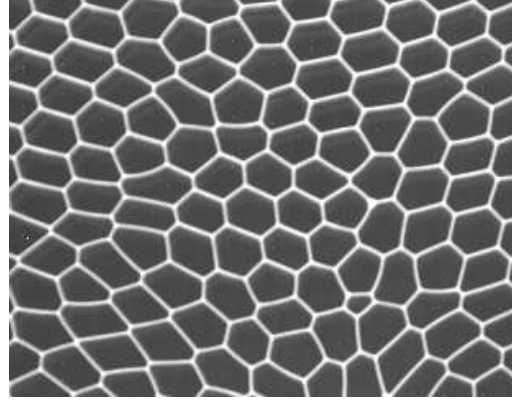
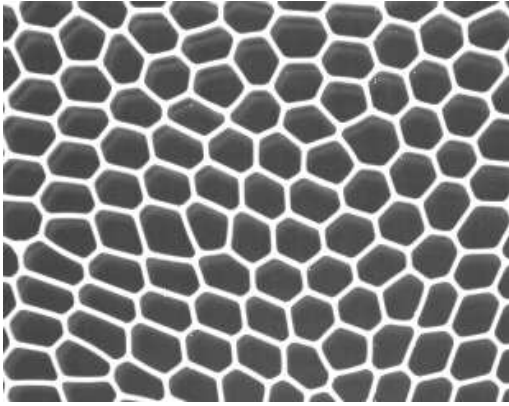
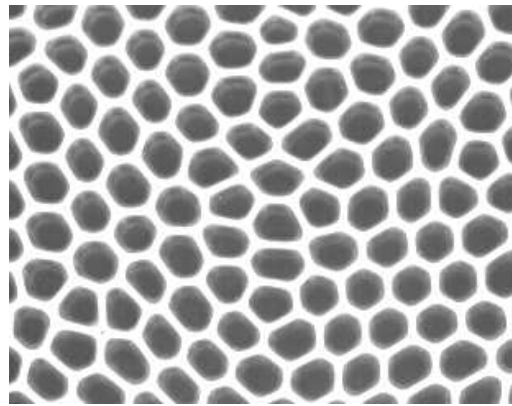
(a)  $\Phi = 2.0 \cdot 10^{-4}$ (b)  $\Phi = 3.4 \cdot 10^{-3}$ (c)  $\Phi = 1.0 \cdot 10^{-2}$ (d)  $\Phi = 1.1 \cdot 10^{-1}$ 

FIG. 3.3 – Images de mousse de fractions liquides différentes. (a) *pression imposée*.  $\Phi$  déduit de  $\Phi_{eff}$  (équation (3.2)). (b), (c) et (d) *débit d'azote imposé*.

des plaques  $e = 3\text{mm}$  chacun (partagés par 3 bulles chacun) et de 12 bords de Plateau de paroi horizontaux de longueur  $\mathcal{P}/6$  chacun (partagés par 2 bulles chacun). Au total la fraction volumique de liquide  $\Phi$ , avec  $\mathcal{P}=13\text{ mm}$  et  $e=3\text{ mm}$  pour l'application numérique, est :

$$\Phi = \left( C_h \frac{\mathcal{P}}{e} + 2C_v \right) \frac{R_P^2}{A} \simeq 2.18 \frac{R_P^2}{A}. \quad (3.1)$$

Sur la figure (3.2), on trace  $\Phi$  en fonction du rayon des bords de Plateau  $R_P$  apparent, celui-ci étant mesuré directement sur les images (bords de Plateau horizontaux, figure (3.3)).  $R_P$  apparent donne un bon ordre de grandeur de  $R_P$  réel, bien qu'il y ait un facteur géométrique dû à la réfraction des rayons lumineux



et à l'angle de mouillage [134]. On estime que cette incertitude est du même ordre que celle de l'équation reliant  $L_c$  à  $R_P$  (voir paragraphe suivant). Cette mesure est donc cohérente. La taille du pixel de l'image introduit des barres d'erreur de l'ordre de 0.1 mm et nous empêche de prendre une mesure dans le cas des très basses fractions liquides. On compare ces données au modèle (figure (3.2)). On trouve un bon accord, même pour des fractions liquides élevées, pour lesquelles une partie importante de l'eau se trouve aussi dans les vertex.

Il reste à relier  $L_c$  et  $R_P$ . A ce niveau nous sommes obligés aussi de faire une hypothèse quant au déclenchement du T1. En vue de dessus, les vertex de parois et les bords de Plateau verticaux ont la même position. Nous ne sommes pas en mesure de dire si c'est le rapprochement des vertex de parois ou celui des bords de Plateau verticaux qui déclenche le T1. On peut définir le rayon de courbure moyen du vertex  $R_v$  : on le définit d'après la loi de Laplace qui conduit à  $2/R_v = 1/R_P$ . En vue de dessus le vertex de paroi a donc une extension plus grande que le bord de Plateau vertical ( $R_v > R_P$ ). On choisit alors de prendre  $R = R_v$  dans la formule (2.42), ce qui nous permet de faire le lien entre  $\Phi$  et  $\Phi_{eff}$  :

$$\frac{\Phi}{\Phi_{eff}} = \frac{1}{0.242} \left( C_h \frac{\mathcal{P}}{e} + 2C_v \right) \left( \frac{R_P}{L_c} \right)^2 \simeq 1.7. \quad (3.2)$$

La conséquence de faire une hypothèse quant au déclenchement du T1 est une éventuelle barre d'erreur systématique d'un facteur 4 (par rapport au choix  $R = R_P$ ), ce qui ne change pas l'ordre de grandeur des fractions fluides ainsi évaluées. A posteriori ce coefficient entre  $\Phi$  et  $\Phi_{eff}$  est validé par les résultats expérimentaux (figures (3.6) et (4.5)).

On utilise ce coefficient multiplicateur dans la suite pour en déduire  $\Phi$  à partir de  $\Phi_{eff}$  pour notre géométrie. Ce résultat permet de comparer les données sur une même échelle. Il est obtenu pour la limite sèche mais nous l'utilisons aussi pour les mousses plus humides.

## 3.2 Mesure de dissipation

La friction sur les plaques différencie les écoulements 2D réels d'une mousse idéale 2D. Des conséquences de cette friction ont déjà été observées expérimentalement : déstabilisation par une grosse bulle d'un écoulement bouchon de bulles plus petites [11, 13, 15], localisation des T1s dans une expérience de cisaillement [137]. Désormais les modèles [69, 18, 17] et les simulations [25] prennent en compte cette force extérieure agissant sur la mousse.

Une des questions qui se pose est l'origine de la friction. Il est possible qu'elle provienne des films de mouillage des bulles, mais aussi des bords de Plateau au contact des parois [33]. Les modèles relient cette question avec les propriétés de

surface de la mousse (notamment reliées aux surfactants), dont l'importance se retrouve aussi par exemple dans les études de drainage [79, 139].

Plusieurs études expérimentales de la friction sur les parois ont été menées avec une bulle unique [5, 34], un train de bulles 1D [12, 129] ou une couche de bulles 2D [6, 33, 34, 43] (figure (3.4a)). Notre étude concerne la friction d'une couche de bulles 2D et elle a l'avantage de tester l'effet de la fraction liquide sur une large gamme.

### 3.2.1 Modèles existants

Les modèles existants essaient de trouver la forme de l'écoulement du liquide (supposé newtonien) au niveau de la zone de contact entre mur et bulles (figure (3.4b)). Les propriétés de surface des bulles jouent un rôle important dans les conditions aux bords. On peut ainsi être en présence d'interfaces dites *fluides*, pour lesquelles l'interface ne possède pas de propriété mécanique particulière, par opposition aux interfaces *rigides*, c'est-à-dire attachées à la bulle. Entre ces deux extrêmes, on peut en principe trouver toutes sortes de comportements dépendant notamment du surfactant utilisé.

En général, les modèles considèrent une bulle unique en géométrie 2D. On note  $L_b$  la longueur de la bulle suivant la direction du mouvement,  $l_b$  la largeur (3ème dimension) et  $R_P$  le rayon du bord de Plateau de paroi. La hauteur de la bulle n'a pas d'importance car la friction ne se fait pas suivant cette dimension. Le nombre capillaire  $Ca = \eta_L V / \Gamma$ , avec  $V$  la vitesse bulle/mur,  $\eta_L$  la viscosité dynamique du liquide et  $\Gamma$  la tension de surface, est une bonne variable adimensionnée dans ce problème faisant intervenir des effets capillaires et visqueux.

#### Interfaces fluides

Les premiers travaux concernent la dissipation d'une bulle unique dans un capillaire fin. Bretherton [9] a montré que pour une interface non soumise à des contraintes tangentielles (interface *fluide*) et dans les hypothèses de lubrification, la dissipation est localisée au niveau de la région de transition entre le film mouillant et le bulbe arrondi de la bulle. Ceci est le résultat d'un écoulement dans cette région induite par une variation de la pression capillaire. Dans ce cas, le saut de pression le long de la bulle suit une loi du type :  $\Gamma Ca^{2/3} / r$ , où  $r$  est le rayon du capillaire. Cet exposant  $2/3$  a notamment été confirmé par une étude numérique d'un train de bulle : Saugey *et al.* [123] argumentent que tant que  $Ca \leq 10^{-3}$ , la dissipation du train de bulles apparaît juste avant et juste après les bords de Plateau de paroi et suit le même exposant. Pour  $Ca \geq 10^{-3}$  néanmoins, les zones de dissipation s'élargissent et interagissent à travers le bord de Plateau de paroi. Dans ce cas l'hypothèse de lubrification n'est plus valable et l'exposant s'écarte de  $2/3$ .

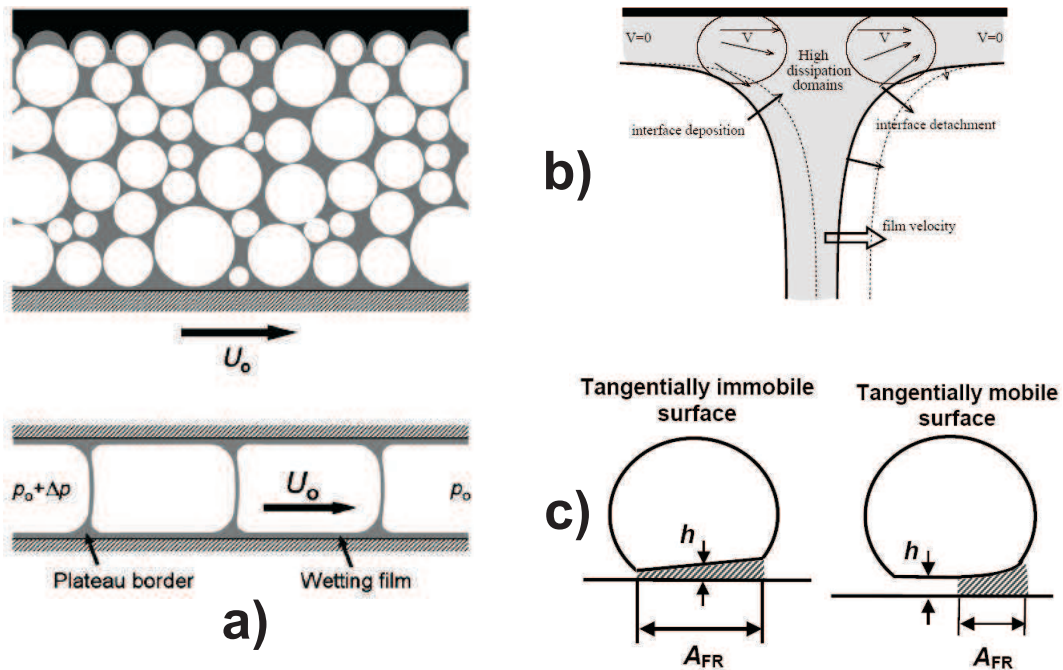


FIG. 3.4 – Friction sur les parois dans la littérature. a) expériences types d'étude de la friction bulles-paroi [123] avec en haut la frottement d'une couche de bulles et en bas celui d'un train de bulles. b) Ecoulement dans un bord de Plateau de paroi à l'origine de la dissipation [12]. c) Deux hypothèses de localisation de la dissipation : bords de Plateau de paroi pour interfaces *fluides* et film mouillant pour interfaces *rigides* [33].

### Interfaces rigides

Cet exposant  $2/3$  n'a pas été retrouvé dans de nombreuses expériences, pour lesquelles un exposant  $1/2$  convenait mieux [124]. Denkov *et al.* [33] ont montré expérimentalement que cet exposant dépendait des propriétés rhéologiques de surface. Pour une interface *fluide* ils ont retrouvé l'exposant  $2/3$ , alors que pour une interface *rigide* l'exposant devient  $1/2$ . Ils ont montré que, contrairement au modèle de Bretherton, la dissipation est significative dans le film mouillant entre la bulle et l'interface du moment que le film n'est pas plat (figure (3.4c)).

### Cohérence des modèles

Pour concilier les propriétés de surface et la localisation de la dissipation, Denkov *et al.* [34] ont traité le problème complet du film mouillant et du bord de Plateau de paroi. Dans ce cas, quelles que soient les conditions aux bords, la dissipation est la somme d'une contribution du film proportionnelle à  $Ca^{1/2}$  et d'une contribution du bord de Plateau de paroi en  $A_1 Ca^{3/4} + A_2 (R_P/L_b)^{1/4} Ca$  ( $A_1$  et  $A_2$  de l'ordre de l'unité). Dans le cas où  $10^{-7} < Ca < 10^{-3}$ , ils montrent

que la contribution du bord de Plateau de paroi est bien approchée par  $Ca^{2/3}$ . Ce résultat est accord avec la littérature en disant que la nature du surfactant privilégie alors la dissipation dans les films mouillant pour des interfaces *rigides* et les bords de Plateau de paroi pour les interfaces *fluides*.

Terriac *et al.* [129] arrivent aux mêmes résultats avec une autre approche. Sans supposer de profil particulier et en prenant l'hypothèse de lubrification, ils arrivent à une forme générale de la force de friction appliquée sur une bulle par unité de longueur de bord de Plateau :

$$f_v \propto \Gamma \left( \frac{L_b}{R_P} \right)^2 F \left( \left[ \frac{R_P}{L_b} \right]^3 Ca \right) \quad (3.3)$$

$F$  étant une fonction adimensionnée. En prenant  $F$  sous forme d'une loi de puissance  $n$ , cette forme est en bon accord avec leurs expériences et l'approche de Denkov *et al.*, en prenant respectivement  $n = 1/2$  et  $n = 2/3$  pour une dissipation dans les films et dans les bords de Plateau de paroi.

Pour étendre ces modèles à une couche de bulles 2D et une friction dans les bords de Plateau de paroi, Cantat *et al.* [12] ont proposé d'utiliser la longueur projetée du bord de Plateau de paroi suivant le plan normal à la direction d'écoulement. En effet un bord de Plateau de paroi perpendiculaire à l'écoulement frotte plus qu'un bord aligné. Cette hypothèse prévoit notamment un changement de la dissipation avec la géométrie des bulles. Ceci se voit expérimentalement pour des systèmes dont les dimensions du canal sont proches de celles des bulles et induisant du coup des arrangements de bulles différents [115, 114].

### 3.2.2 Mesures de perte de charge

En l'absence d'obstacle, l'écoulement dans le canal est bouchon. La seule source de dissipation provient donc de la friction entre les bulles et les plaques. La chute de pression dans la boîte de formation des bulles est :

$$\Delta P_{boite} = \rho_{mousse} g w = (\Phi \rho_{eau} + (1 - \Phi) \rho_{air}) g w, \quad (3.4)$$

avec  $w$  la hauteur de mousse dans la boîte (figures (2.4) et (2.5)). Les valeurs typiques pour une mousse humide et sèche sont respectivement  $H = 1$  cm,  $\Phi = 0.3$  et  $H = 10$  cm,  $\Phi = 10^{-4}$ , soit  $\Delta P_{boite} = 30$  et 1 Pa respectivement. Comparé à nos mesures, on vérifie que cet effet est négligeable et que nos mesures de différence de pression sont simplement liées à ce qui se passe dans le canal. Notre système est donc bien adapté pour cette étude.

On représente toutes nos données de dissipation sur la figure (3.5). On utilise plutôt le gradient de pression  $\nabla P = \Delta P / L_{canal}$ , exprimé en Pa/m. Pour les expériences *débit d'azote imposé*, une couleur correspond à une vitesse donnée, modulo les petites variations de vitesse liées à la fraction liquide. Pour les expériences

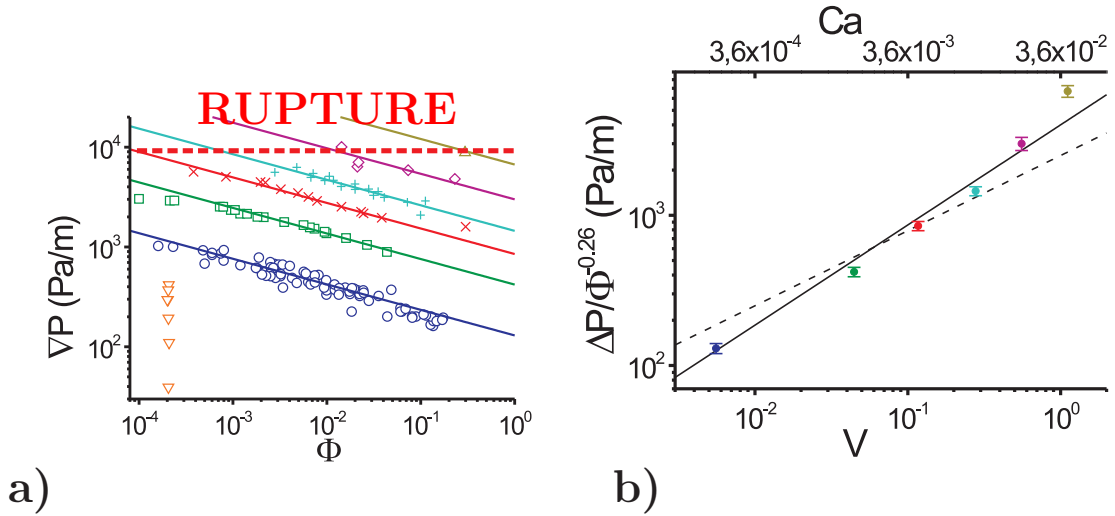


FIG. 3.5 – Etude de la dissipation (gradient de pression). (a)  $\nabla P$  fonction de  $\Phi$  pour différentes vitesses en *débit d'azote imposé* :  $\circ$  0.0056 m/s,  $\square$  0.044 m/s,  $\times$  0.12 m/s,  $+$  0.28 m/s,  $\diamond$  0.56 m/s et  $\triangle$  1.2 m/s. Pour les données *pression imposée* ( $\nabla$ ),  $\Phi$  est fixée et les vitesses s'échelonnent de  $5.4 \cdot 10^{-5}$  à  $8.0 \cdot 10^{-4}$  m/s. Lignes : ajustement par  $\nabla P \propto \Phi^{-0.26}$ . La ligne rouge désigne 9400 Pa/m (voir (3.3)). (b)  $\nabla P / \Phi^{-0.26}$  en fonction de  $V$  (axe du bas) et de  $Ca$  (axe du haut) pour les points *débit d'azote imposé*. On garde le même jeu de couleur qu'en (a). En trait plein, loi de puissance d'exposant  $2/3$ , en pointillé d'exposant  $1/2$ .

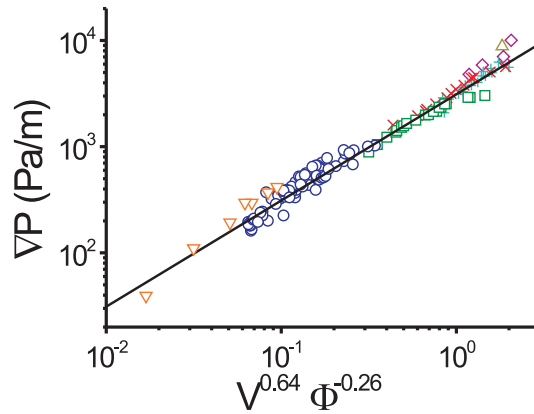


FIG. 3.6 – Interpolation de toutes les données *débit imposé* par  $\nabla P \propto V^{0.64} \Phi^{-0.26}$ . On extrapole cette loi aux données *pression imposée* ( $\nabla$ ). Mêmes symboles que la figure (3.5).

*pression imposée* représentées en orange, on a supposé  $\Phi_{eff}$  et donc  $\Phi$  constante

égale à  $2.0 \cdot 10^{-4}$ .

L'ajustement en loi de puissance des données à vitesse  $V$  égale à  $0.0056$  m/s (couleur bleue, vitesse pour laquelle on dispose du plus de points) donne  $\nabla P \propto \Phi^{-0.26 \pm 0.01}$ . Cet exposant permet un bon accord avec l'ensemble des données des autres vitesses (figure (3.5a)). En traçant  $\nabla P / \Phi^{-0.26}$  en fonction de  $V$  pour les points *débit d'azote imposé*, on en déduit que l'exposant de la vitesse est plus proche de  $2/3$  (en trait plein) que de  $1/2$  (trait en pointillé). L'ajustement à deux paramètres des données à *débit d'azote imposé* donne :

$$\nabla P = (3100 \pm 100) V^{0.64 \pm 0.1} \Phi^{-0.26 \pm 0.1}. \quad (3.5)$$

Ici  $\nabla P$  est en Pa/m et  $V$  en m/s. On constate sur la figure (3.6) que l'extrapolation de la loi vers les points *pression imposée* marche très bien, et la courbe obtenue couvre 2 décades, englobant 4 décades en  $\Phi$  et 5 décades en  $Ca$  (figure (3.7)).

Il serait intéressant de mesurer les propriétés de surface de notre mousse, comme le module surfacique de dilatation [33] ou la mobilité  $M$ .

### 3.2.3 Discussion

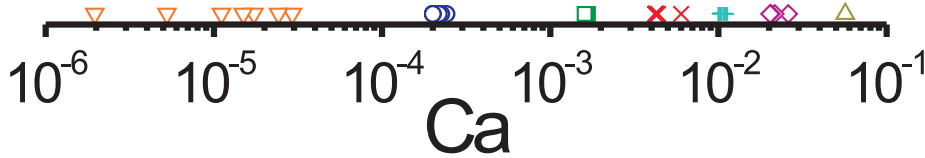


FIG. 3.7 – Nombres capillaires  $Ca$  expérimentaux. On reprend les symboles de la figure (3.5).

Pour situer nos mesures par rapport à la littérature, on peut donner une idée de nos nombres capillaires  $Ca = \eta_L V / \Gamma$ . On prend  $\Gamma = 25$  mN/m et  $\eta_L = 0.9$  mPl. On représente les valeurs (expériences *débit d'azote imposé* et *pression imposée*) sur la figure (3.7). Ces valeurs tombent dans les mêmes intervalles que les différentes études [34, 123].

Si on reprend les modèles de bulle unique, la force de friction exercée sur la bulle est donnée par [33] :

$$F_{FR} \simeq A_{FR} \frac{\eta V}{h_{AV}} = \Gamma \frac{A_{FR}}{h_{AV}} Ca. \quad (3.6)$$

$A_{FR}$  est l'aire de la région où la friction a lieu et  $h_{AV}$  est la hauteur moyenne du film de paroi dans cette région. On rappelle les longueurs du problème :  $L_b$  longueur de la bulle,  $l_b$  largeur de la bulle (dimension invariante) et  $R_P$  rayon du bord de Plateau de paroi.

Dans le cas où la dissipation a lieu au niveau des bords de Plateau de paroi, la longueur caractéristique importante est  $R_P$ , du moment que la bulle est suffisamment grande [123]. Dans ce cas  $h_{AV} = R_P \tilde{h}_{AV}^P(\text{Ca})$  et  $A_{FR} = l_b R_P \tilde{A}_{FR}^P(\text{Ca})$ . Ici le tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) indique une quantité sans dimension. On a donc :

$$F_{FR}^P = \Gamma l_b \tilde{F}_{FR}^P(\text{Ca}). \quad (3.7)$$

Dans le cas où la dissipation a lieu au niveau du film mouillant, la référence [33] a montré que  $h_{AV} = \sqrt{R_P L_b} \tilde{h}_{AV}^f(\text{Ca})$  et  $A_{FR} = l_b L_b \tilde{A}_{FR}^f(\text{Ca})$ . Ce qui donne :

$$F_{FR}^f = \Gamma l_b \sqrt{\frac{L_b}{R_P}} \tilde{F}_{FR}^f(\text{Ca}). \quad (3.8)$$

On trouve ainsi avec ces modèles que la dissipation dans les bords de Plateau de paroi est indépendante de  $R_P$  et la friction dans le film mouillant est proportionnelle à  $R_P^{-1/2}$ . Ce résultat se retrouve avec l'approche de Terriac *et al.* [129] en prenant pour  $F$  (équation (3.3)) une fonction puissance d'exposant  $2/3$  pour une localisation dans les bords de Plateau de paroi et  $1/2$  dans le film mouillant. La comparaison des données expérimentales avec les modèles indique que l'exposant obtenu pour la vitesse suggère une dissipation dans les bords de Plateau de paroi. En revanche, l'exposant correspondant à la fraction liquide ou au rayon des bords de Plateau de paroi ( $\nabla P \propto R_P^{-0.52}$  d'après l'équation (3.1)) suggère une dissipation au niveau du film mouillant.

En résumé, la loi de puissance obtenue pour la perte de charge en fonction de la vitesse suggère que la dissipation ait lieu dans les bords de Plateau de paroi. Par contre la dépendance obtenue pour la fraction liquide (ou rayon des bords de Plateau de paroi) n'est pas prédite par les modèles de bulle unique. Nous n'avons pas pu relever d'expérience similaire montrant cet effet. La prise en compte d'une autre longueur caractéristique dans les modèles semble nécessaire.

### 3.3 Stabilité de la mousse

Sur les figures (2.6) et (3.5), nous avons représenté l'ensemble des données expérimentales obtenues. En explorant le plus possible l'ensemble des paramètres perte de charge  $\nabla P$ , fraction liquide  $\Phi$  et vitesse  $V$ , on constate que l'espace des paramètres est limité aux grands  $\Phi$  et aux grands  $\nabla P$ . C'est ce que l'on propose d'étudier dans cette partie.



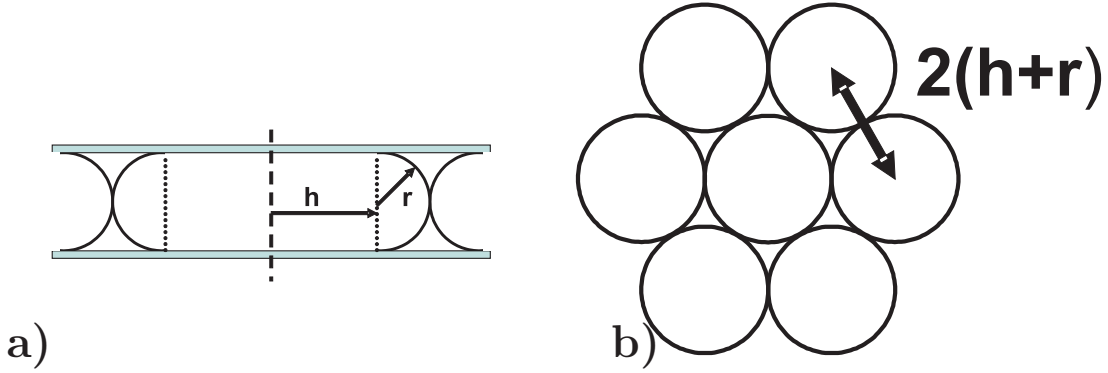


FIG. 3.8 – Schéma de bulle. a) : Coupe d’une bulle mouillant totalement les plaques de verre (vue de côté). b) : Arrangement hexagonal correspondant à la limite de la perte de rigidité (vue de dessus).

### 3.3.1 Perte de rigidité de la mousse

Dans l’ensemble de nos expériences, nous observons des mousses jusqu’à  $\Phi \approx 30\%$  ; au delà l’écoulement est plutôt bulleux que mousseux. Or la perte de rigidité d’une mousse en nid d’abeille purement 2D apparaît à 9.31 % [111]. Nous posons donc la question : est-ce compatible avec notre géométrie quasi-2D ?

Nous faisons le calcul ici dans le cadre de notre géométrie. Pour calculer cette limite, il faut considérer le cas d’une bulle d’air coincée entre deux plaques de verre (figure (3.8)). Si on suppose que l’eau mouille totalement le verre et que la quantité d’eau contenue dans ce film mouillant est négligeable, alors la bulle peut être considérée comme un objet de révolution, d’épaisseur  $e$  (espacement des plaques) et arrondi au bord (rayon  $r = e/2$ ). On note  $h$  la distance centre-bulbe. Deux paramètres définissent la bulle :  $r$  (imposée par la géométrie de l’expérience) et  $h$ . Un bref calcul intégral donne pour le volume d’une bulle  $\vartheta_0$  :

$$\vartheta_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi^2 h r^2 + 2\pi h^2 r. \quad (3.9)$$

A la limite de rigidité de la mousse, les bulles sont à la limite du contact. En représentant les bulles dans un arrangement hexagonal compact, dont la maille (distance centre-centre) vaut  $2(h+r)$ , on en déduit que le volume de cellule disponible par bulle vaut  $4\sqrt{3}r^3(1+x)^2$ , avec  $x = h/r$ . On en déduit la fraction liquide maximale  $\Phi_{max}$ , pour laquelle la perte de rigidité intervient :

$$\Phi_{max} = \frac{4\sqrt{3}(1+x)^2 - 4\pi/3 - \pi^2 x - 2\pi x^2}{4\sqrt{3}(1+x)^2}. \quad (3.10)$$



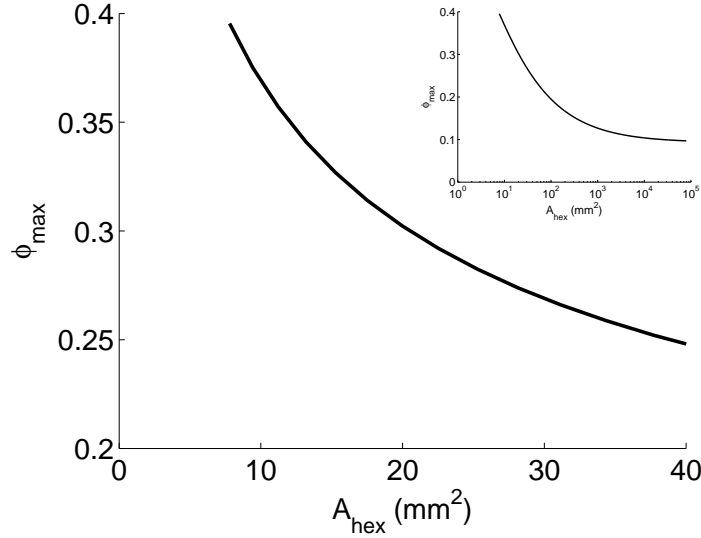


FIG. 3.9 –  $\Phi_{max}$  fonction de  $A_{hex}$  (équations (3.10) et (3.11)) pour le modèle simpliste de perte de rigidité. Zoom sur des aires réalistes (échelle linéaire). En insert : gamme d’aires plus large (échelle semi-logarithmique).

En prenant  $x \gg 1$  on retrouve notamment la limite de Princen, 9.31 %. On préfère tracer (figure (3.9))  $\Phi_{max}$  en fonction de l’aire projetée de l’hexagone encadrant les bulles (ou inverse de la densité surfacique moyenne de bulles)

$$A_{hex} = 2\sqrt{3}r^2(1 + x)^2. \quad (3.11)$$

Pour nos expériences,  $A_{hex} = 12 \text{ mm}^2$  dans la limite mousse sèche, et un peu plus lorsque la mousse devient humide. Pour ces valeurs, le présent modèle, certes simpliste, donne des  $\Phi_{max}$  compris entre 0.3 et 0.35, ce qui est en accord avec la limite atteinte en expérience.

### 3.3.2 Instabilité

Lorsque l’on augmente la vitesse de l’écoulement la mousse devient instable (figure (2.6)). Ainsi la mousse la plus rapide obtenue allait à 1.2 m/s pour une fraction liquide d’environ 30%. Cette vitesse critique diminue légèrement quand  $\Phi$  diminue. Lors d’une expérience typique, par exemple  $V = 0.6 \text{ m/s}$ , on commence avec une mousse très humide,  $\Phi \approx 30\%$ . Elle s’assèche au fur et à mesure de

l'expérience (déplacement vers la gauche sur le diagramme de la figure (2.6)), jusqu'à devenir instable.

### Hypothèse : courbure maximale

Pour expliquer l'instabilité au-delà d'un gradient de pression maximal (figure (3.5)), nous supposons que la géométrie utilisée ne peut plus contenir la courbure des faces de bulle liée au frottement sur les plaques.

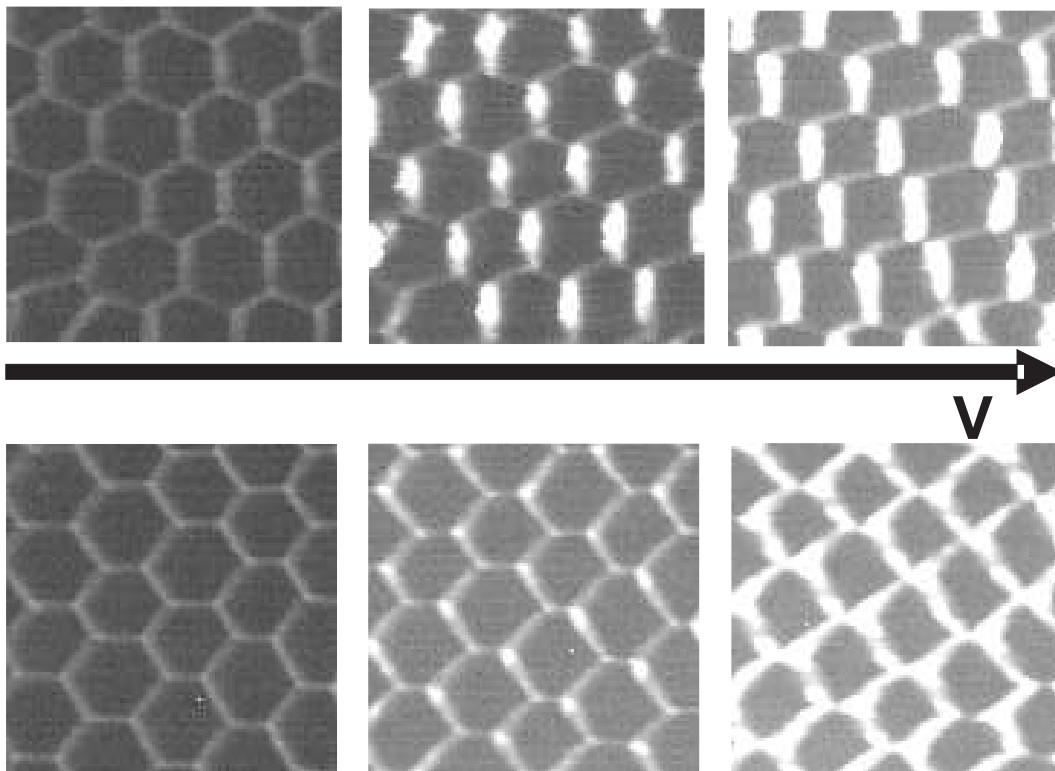


FIG. 3.10 – Effet de l'augmentation de la vitesse sur les bulles ( $\Phi = 0.20\%$  et  $V$  passe de 0 à 39 cm/s). Visualisation de la projection des faces de bulle en vue de dessus. Le temps de pose de la caméra est suffisamment rapide devant le temps caractéristique de l'écoulement pour que les faces ne soient pas floues. La mousse est ordonnée en réseau presque hexagonal avec l'un des axes perpendiculaire (haut) ou parallèle (bas) à l'écoulement.

Une face est une double interface gaz-eau-gaz (figure (1.3)). Lorsqu'elle frotte sur une paroi, elle se courbe. Cela permet de compenser, avec une force capillaire, la force visqueuse qui s'applique sur le bord de Plateau au contact de la paroi (figure (3.4b)). Cette force capillaire est de norme constante  $\Gamma$  par unité de longueur, mais elle peut changer son orientation pour s'adapter à la force de dissipation. Dans notre expérience nous ne voyons que la projection de ces faces

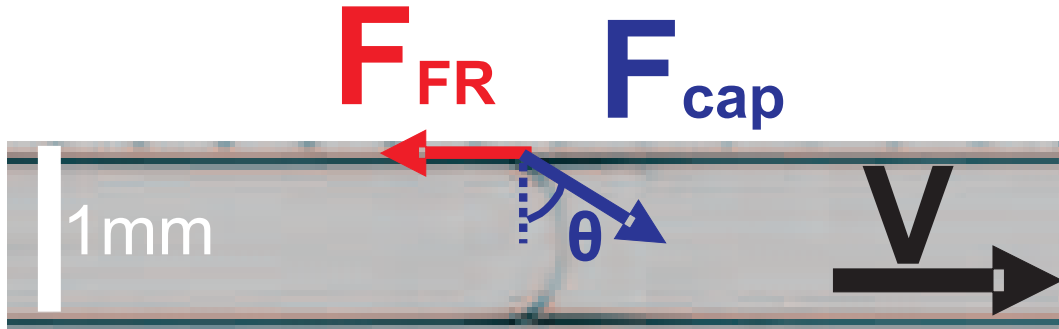


FIG. 3.11 – Compensation locale de la force de friction “bord de Plateau de paroi-mur” par la force capillaire, voir figure (3.4b). Cette photo est une vue de dessus du microcanal de la section (3.3.3) ; elle correspondrait à une vue de côté de notre dispositif.

en vue de dessus. Cette projection s’épaissit au fur et à mesure que la vitesse de l’écoulement augmente, ce qui montre bien que la courbure des faces augmente avec la vitesse (figure (3.10)). Une vue de côté de l’expérience focalisée sur une face pourrait ressembler à la figure (3.11).

L’hypothèse de courbure maximale consiste à dire que si les faces des bulles sont trop courbées, elles deviennent instables. En effet, si le rayon de courbure des faces de bulle devient plus petit que la moitié de l’épaisseur entre les plaques ( $\Theta = 90^\circ$  sur la figure (3.11)), les plaques ne peuvent plus retenir les faces et celles-ci se déstabilisent. Dans notre expérience, la courbure des faces est reliée à la pression de Laplace (1.2.1), donc cela fixe la limite du gradient de pression imposé.

On peut faire un calcul d’ordre de grandeur du gradient maximal de pression supporté. La distance entre deux bulles est de l’ordre de  $\sqrt{A} \approx 3.5$  mm. De l’entrée à la sortie du canal il y a donc la succession de  $1000/3.5 = 285$  bulles. Chaque face peut encaisser au maximum une pression de Laplace de  $2\Gamma/(e/2)$  (courbure dans la seule direction de l’écoulement). En prenant  $\Gamma = 25$  mN/m et  $e = 3$  mm, cela donne une pression de 33 Pa par face. Cela fait une différence de pression bout à bout  $\Delta P_{max} = 285 \times 33 \approx 9400$  Pa. Le canal faisant un mètre de long, on a donc  $\nabla P_{max} \simeq 9400$  Pa/m. Avec ce rapide calcul, on retrouve très bien les gradients de pression maximaux atteints lors des expériences (figure (3.5)).

On peut aussi noter sur la figure (3.10) un changement de la forme des bulles, lorsque la vitesse augmente : ainsi on retrouve des formes allant du rectangle au losange suivant l’orientation de la structure initiale. Il semblerait que les bulles privilégient leurs faces perpendiculaires à l’écoulement. En supposant qu’une partie de la dissipation s’effectue dans les bords de Plateau de paroi, cela signifierait que la mousse dissipe plus pour une même vitesse, en augmentant ce que Cantat *et al.* appellent la longueur projetée [12].

## Visualisation de l'instabilité

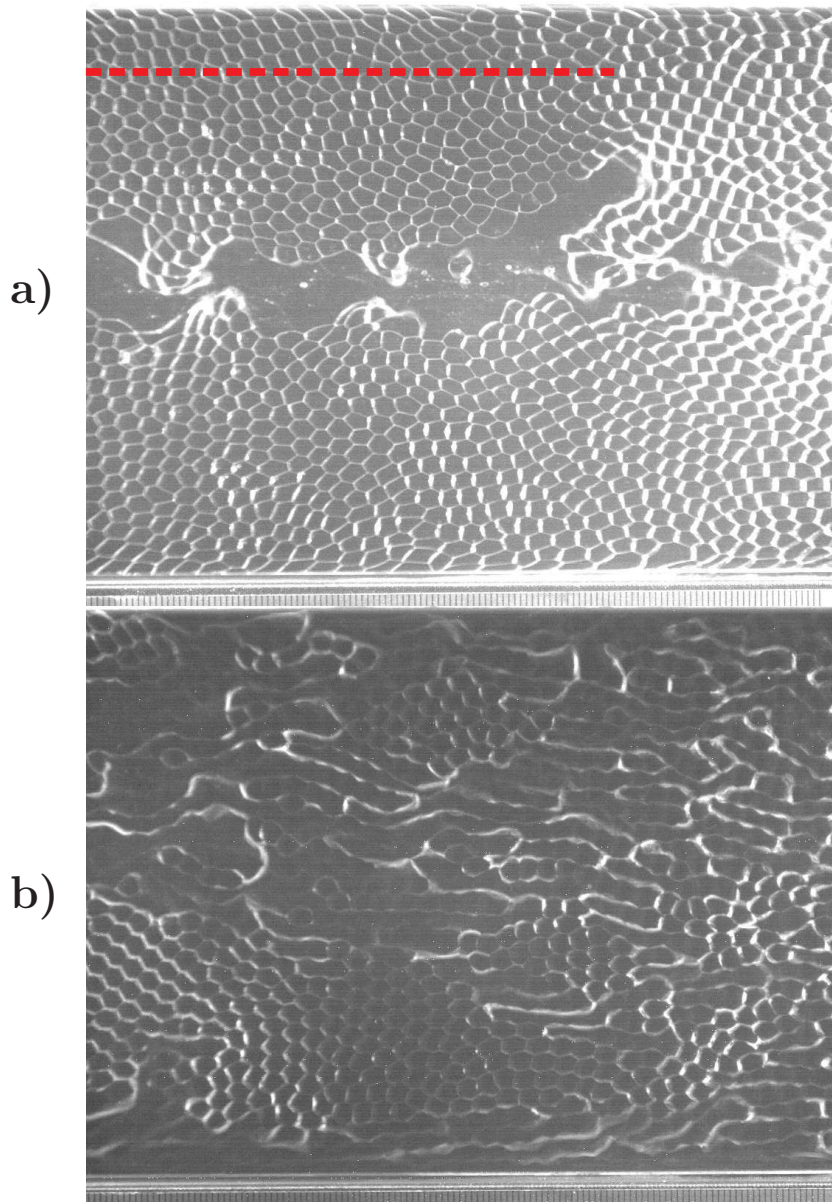


FIG. 3.12 – Deux types d'instabilité observés : doigt ( $\Phi = 0.20\%$ ,  $V = 39$  cm/s) a) ou front ( $\Phi = 0.023\%$ ,  $V = 7.4$  cm/s) b).  $V$  désigne la vitesse de la mousse juste avant l'instabilité. La graduation en mm au bas de chaque image donne l'échelle (longueur totale de l'image : 13 cm).

Lorsque le gradient de pression imposé devient proche de la valeur maximale, la mousse devient instable. Sur la figure (3.12), on a représenté les deux types d'instabilités que l'on a pu visualiser : propagation d'un doigt, ou propagation

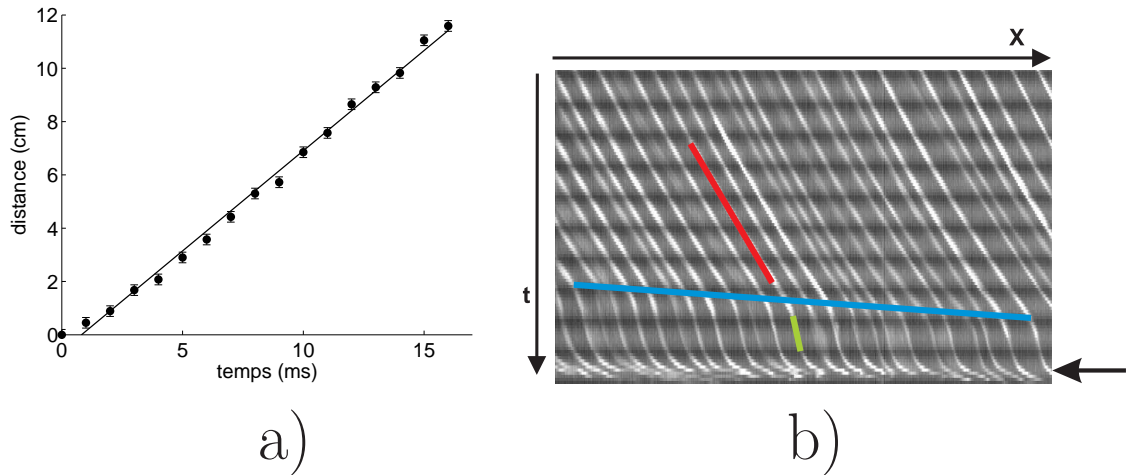


FIG. 3.13 – caractérisation de l’instabilité doigt. a) Suivi du front de l’instabilité au cours du temps. La pente de la droite correspond à 7.5 m/s. b) diagramme spatio-temporel suivant la droite rouge de la figure (3.12). Chaque courbe blanche correspond ainsi au suivi d’une bulle. On peut ainsi remonter à la vitesse avant l’instabilité (pente rouge), à la vitesse une fois que le doigt est passé (pente verte) et par la rupture de pente entre les deux à la vitesse de l’instabilité (pente bleue). Les fluctuations temporelles d’intensité sont liées au 100 Hz de l’éclairage. La flèche indique la réaccélération après le passage du doigt (instabilité front).

d’un front sur toute la largeur du canal. Ces instabilités entraînent la brisure de bulles; le mécanisme est trop rapide dans notre cas pour être visualisé.

Pour ce faire on part d’une mousse au repos, et on augmente la vitesse : c’est un déplacement vers le haut dans le diagramme de phase de la figure (2.6). L’instabilité doigt peut être suivie de l’instabilité front; mais pas le contraire, car l’instabilité front conduit à la destruction irréversible de toutes les faces et donc de la mousse. Dans tous les cas, l’instabilité intervient en amont de notre zone de visualisation, probablement en entrée de canal où le passage de la boîte de formation au canal peut favoriser un excès de courbure. Une fois l’instabilité commencée, le canal se remplit d’une mousse 3D de bulles très petites, résultant de la brisure des faces de bulles; de sorte qu’il devient opaque.

L’instabilité doigt semble se propager à vitesse constante (figure (3.13a)). A partir d’un diagramme spatio-temporel (figure (3.13b)), on peut remonter aux différentes vitesses. On a mesuré ainsi des vitesses de propagation du doigt de l’ordre de 5 à 8 m/s pour des mousses de fraction liquide aux alentours de 0.2%. Le doigt avance d’une part car le débit d’azote est toujours conservé (les bulles sur le côté du doigt sont quasiment à l’arrêt, donc l’azote injecté passe par le doigt) et par la cassure de faces (pour la mousse de la figure (3.13) 20 faces sont

brisées successivement en 15 ms). Sur les trois expériences analysées, la part de chaque effet est respectivement  $1/3$  et  $2/3$  environ. L'expérience se faisant à *débit d'azote constant*, la courbure des bulles en aval de l'instabilité n'est pas modifiée car elles frottent toujours autant. Au contraire, la vitesse des bulles en amont de la pointe du doigt est largement inférieure et les faces très peu courbées : elles ne frottent plus et ont déjà relaxées. Il n'y a donc pas de phénomène d'avalanche, ce qui explique que la vitesse de propagation du doigt est constante. Localement, le doigt doit modifier la vitesse et donc la courbure des bulles. On s'attend donc à ce que la propagation du doigt soit liée au temps de brisure d'une face touchant l'extrémité d'un doigt. Ce temps est inférieur à 0.75 ms, ce qui explique que l'on ne puisse pas visualiser le mécanisme de déstabilisation avec notre caméra à 1000 Hz.

L'instabilité frontale est beaucoup plus rapide : 2 à 4 images à 1000 Hz pour traverser les 13 cm de notre champ de caméra. On peut seulement donner un ordre de grandeur de cette vitesse : de l'ordre de 100 m/s pour des fractions liquides de 0.025% environ (2 échantillons). Cette instabilité peut être précédée de l'instabilité doigt : sur la figure (3.13b), on constate que la mousse réaccélère après le passage du doigt (le doigt s'est rebouché probablement en amont) et éclate sur quelques images du fait de l'instabilité front. Toutes les faces dans une tranche de la largeur du canal se courbent et éclatent en même temps, faisant penser à la propagation d'une onde. Pour les mousses, la vitesse du son est inférieure à celle du liquide ou celle du gaz la constituant, car elle possède à la fois une densité inférieure à celle du liquide et une compressibilité inférieure à celle du gaz [100]. Mujica *et al.* [100] mesurent pour  $\Phi \simeq 5\%$  des vitesses du son de l'ordre de 50 m/s pour une mousse 3D ; ce qui est comparable à la vitesse de notre instabilité.

### 3.3.3 Visualisation de la limite en pression : expérience en microcanal

Pour compléter cette approche nous avons utilisé l'expérience en microcanal de J.-P. Raven [114]. Cette expérience permet de comprendre la relation entre pression, courbure et vitesse. Nous avons essayé d'approcher le seuil de l'instabilité ( $\Theta = 90^\circ$ ). Ce montage nous a permis de faire s'écouler des faces individuelles dans le canal de la figure (3.11) (largeur 1 mm, épaisseur de  $100 \mu\text{m}$ ). La vue de dessus de cette expérience correspond à peu près à la vue de côté d'une face de notre expérience, que nous ne sommes pas en mesure de visualiser (en réalité la face frotte sur les quatre côtés du canal, contrairement à notre expérience).

La courbure observée sur la figure (3.11) est liée à la friction sur les parois supérieures et inférieures. Sur la figure (3.14) on présente différentes images d'une expérience. La différence de pression totale entrée-sortie est fixée. Le système répond en dissipant : la force de friction totale s'oppose à la force de pression totale. Plus il y a de bulles dans le canal, plus la friction est partagée, et moins



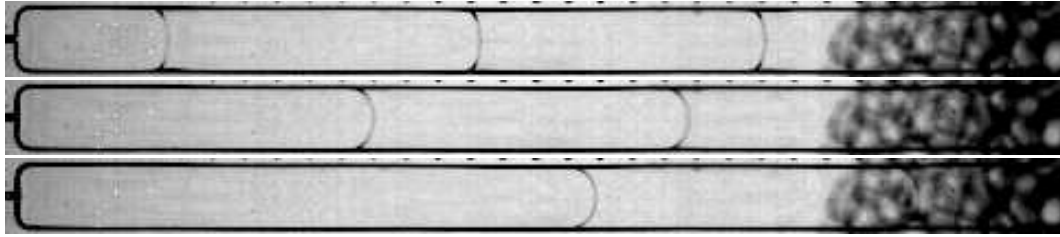


FIG. 3.14 – Expérience à différence de pression totale constante. De haut en bas 4, 3 et 2 faces dans le canal de la figure (3.11). A chaque fois une face est cachée par la mousse qui s’amasse à l’extérieur en sortie de canal, à droite sur la photo.

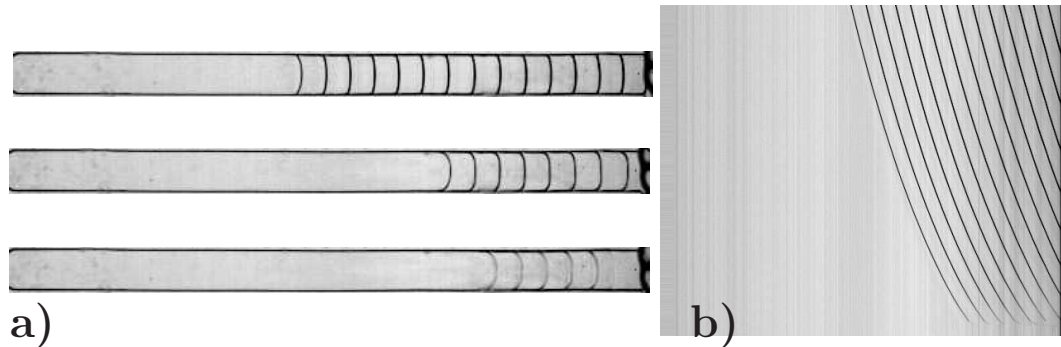


FIG. 3.15 – Visualisation de la relation pression-courbure-vitesse. a) écoulement dans le canal de la figure (3.11) d’un train de bulles dont le nombre diminue au cours du temps (évacuation en fin de canal). b) : diagramme spatio-temporel correspondant suivant la ligne centrale de l’écoulement. L’abscisse croît vers la droite et le temps vers le bas.

les faces sont courbées; moins il y a de bulles dans le canal, plus il faut que chacune frotte et donc accélère. On est capable de faire changer le nombre de bulles dans le canal et on a ainsi pu avoir des faces très courbées.

Il y a donc une relation entre pression, courbure et vitesse que l’on illustre sur la figure (3.15) : il s’agit d’un train de bulles dont le nombre diminue au cours du temps car les bulles finissent par sortir du canal. Sur le diagramme spatio-temporel on observe l’augmentation de la vitesse, en même temps que la courbure des faces pour compenser la force de pression totale constante. On a ainsi pu obtenir des faces très courbées et se déstabilisant lorsqu’un nombre très petit d’entre elles supportent toute la dissipation. Le mécanisme de déstabilisation reste malheureusement une fois de plus trop rapide pour être visualisé.

### 3.4 Mesure de force

La mesure de la force exercée sur l’obstacle est une façon de remonter aux propriétés rhéologiques du matériau étudié, de même que l’expérience de Stokes

pour un fluide newtonien permet de remonter à la viscosité. Dans le cadre des mousses on peut comptabiliser trois contributions à la force totale  $F^t$  : force de réseau  $F^n$  due aux faces de bulle qui tirent l'obstacle, force de pression  $F^p$  due au gaz dans les bulles et force visqueuse  $F^v$ . Si on se place à la limite des très basses vitesses, la contribution visqueuse est négligeable et on parle de forces au seuil ("yield") :

$$F_Y^t = F_Y^n + F_Y^p. \quad (3.12)$$

Celle-ci contient une contribution de réseau  $F_Y^n$  et de pression  $F_Y^p$ . Dans nos expériences et simulations nous ne pouvons pas mesurer directement la force totale. Dans les deux cas on a accès à la force de réseau par analyse d'image. Dans les simulations on a en plus accès à la force de pression lorsque l'on travaille avec une mousse compressible. On s'intéresse dans cette partie à ces forces au seuil, notamment grâce aux simulations quasistatiques (2.2).

La traînée est la composante de la force le long de l'écoulement ( $x$ ) et la portance est la composante de la force perpendiculaire à l'écoulement ( $y$ ).

### 3.4.1 Principe de la mesure de la force de réseau $F^n$

Dans cette section, on présente le principe de la mesure de la force de réseau. Il s'agit de la force exercée du fait de la tension de surface par les bords de bulles touchant l'obstacle.

#### Cas général

En vue de dessus (figure (3.16)) la séparation entre deux bulles (projection de la face au contact de l'obstacle) tire l'obstacle avec une force dont le module est la tension de ligne  $\lambda$ . Sur la figure (3.16), on présente des images centrées sur l'obstacle pour deux écoulements lents (a et b) et un écoulement rapide (c), ainsi que des simulations quasistatiques (d et e). Dans le cas général, la mousse n'a pas forcément le temps de relaxer (les lois de Plateau ne sont pas vérifiées). C'est le cas pour les expériences haute vitesse (figure (3.16c)). Il faut alors tenir compte de l'orientation de la projection des faces et effectuer une somme vectorielle des forces individuelles. Chaque face au contact de l'obstacle tire ainsi avec une force de norme  $\lambda$  et dont l'orientation est celle de la tangente à la projection de la face au niveau de l'obstacle.

Pour pouvoir comparer les différentes expériences et simulations et étudier l'influence des autres paramètres on trace toujours les forces divisées par  $\lambda$ , qui est la seule échelle de force du problème.

#### Limite "vitesse d'écoulement tendant vers 0"

Dans le cas des simulations ou des expériences à basse vitesse, la mousse est relaxée (les lois de Plateau sont vérifiées) et la dissipation au contact de l'obstacle



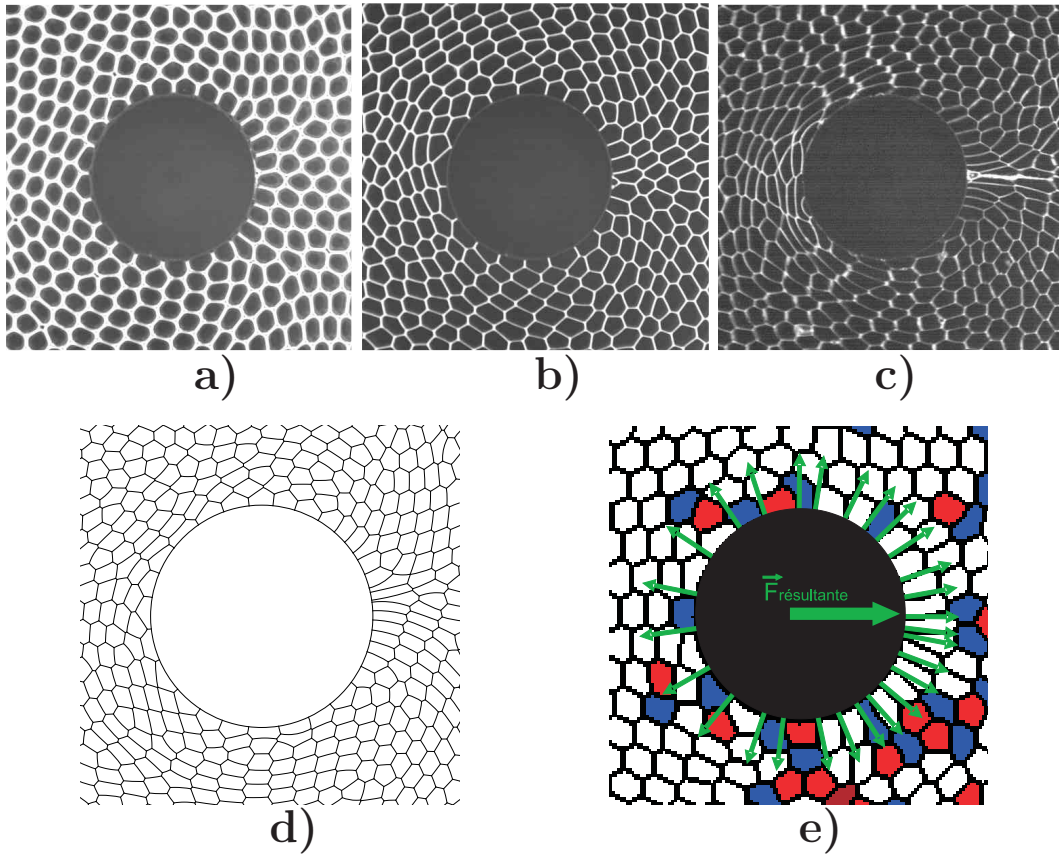


FIG. 3.16 – Zoom sur l’obstacle, effet de  $\Phi$  et de  $V$ . a)  $\Phi = 12.7\%$ ,  $V = 6.6$  mm/s. b)  $\Phi = 1.2\%$ ,  $V = 5.5$  mm/s. c)  $\Phi = 1.2\%$ ,  $V = 380$  mm/s. d) Simulation Surface evolver  $\Phi_{eff} = 6 \cdot 10^{-6}$ . e) Simulation Potts ( $A = 100$  pix<sup>2</sup>,  $d_o = 74$  pix,  $\Phi_{eff} = 0.5\%$ ). Sur cette dernière on présente le principe de la mesure de la force de réseau  $F_{\gamma}^n$  pour la limite “vitesse d’écoulement tendant vers 0”.

est négligeable. Les faces de bulles qui touchent l’obstacle le rencontrent donc à  $90^\circ$  (figure (3.16a,b,d,e)). Pour mesurer la force il suffit alors de repérer les points de contact des faces avec l’obstacle et d’attribuer à chaque point de contact une force normale à l’obstacle de norme  $\lambda$  et dirigée vers l’extérieur de l’obstacle. La force résultante est la somme vectorielle des forces exercées par les faces (figure (3.16e)); chacune participe à la traînée et à la portance, respectivement avec la force  $\lambda \cos \theta$  et  $\lambda \sin \theta$ ,  $\theta$  étant l’angle de la force individuelle avec  $\vec{e}_x$ . On peut évaluer l’erreur due à la pixellisation : pour un obstacle de rayon 37 pix et en faisant une erreur de 2 pix sur la détermination du point de contact face-obstacle, on a une erreur de  $\tan^{-1}(2/37) = 3^\circ$ . Cette erreur est aléatoire. On s’attend donc que l’erreur totale (somme sur tous les points) soit inférieure.

## Fluctuations temporelles

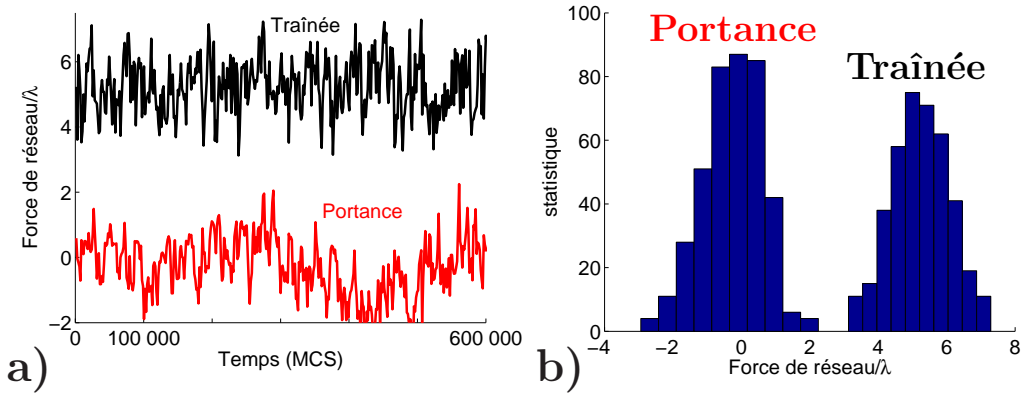


FIG. 3.17 – Force de réseau : a) fluctuation temporelle lors d'un écoulement permanent (simulation  $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ). b) statistique correspondante.

Les fluctuations temporelles de la force sont représentées sur la figure (3.17a). Elles ne sont pas nécessairement entières à cause du facteur  $\cos \theta$  pour la traînée (ou  $\sin \theta$  pour la portance). Celles-ci sont de l'ordre de  $\pm 1$  en  $F/\lambda$  pour une mousse monodisperse, ce qui correspond à plus ou moins une bulle en train de tirer ou de pousser l'obstacle (des bulles sont constamment en train de s'accrocher ou de se décrocher de l'obstacle). Ces fluctuations peuvent être importantes (de l'ordre de 20% de la valeur moyenne). Elles sont notamment supérieures à l'erreur sur la détermination de l'orientation de la force exercée par une face individuellement (voir paragraphe précédent). On prend donc l'amplitude de ces fluctuations comme mesure de l'écart-type de nos mesures. Les statistiques ont une forme gaussienne et la valeur moyenne de la portance est nulle (figure (3.17b)). Pour les simulations, on moyenne en général sur toute la simulation (soit 500 points de mesure).

## 3.4.2 Effet du confinement

L'effet du confinement a été étudié en simulation, d'une part en faisant varier la taille du canal, et d'autre part en décentrant l'obstacle, c'est-à-dire en le rapprochant de plus en plus des bords. Cette dernière étude est le résultat du stage Master de Steven Thomas que j'ai encadré.

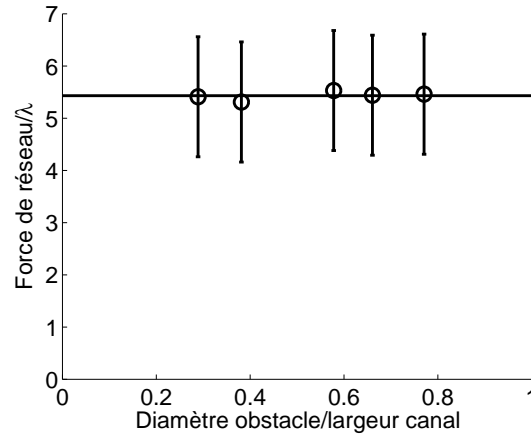


FIG. 3.18 – Effet de la largeur du canal sur la traînée.  $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$  sont fixés.

### Canal réduit

On travaille toujours avec les paramètres de référence,  $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ . On part initialement d'un canal de largeur 256 pix. Pour préparer différentes tailles de canal on a simplement rogné de plus en plus sur les bords. Ceci est plus rapide que de re-préparer à chaque fois une mousse pour une taille de canal donnée, mais a le désavantage de rogner les bulles sur les côtés. Sur la figure (3.18) on trace la composante de traînée de la force de réseau en fonction du rapport diamètre de l'obstacle sur largeur du canal, qui correspond à peu près à la fraction d'espace libre où la mousse peut s'écouler. On constate ainsi que cette force ne dépend quasiment pas de la largeur du canal. En effet, les bords n'affectent que les bulles en train de contourner l'obstacle. Sur la figure (3.16), on voit bien que celles-ci participent peu à la traînée, avec une contribution principalement perpendiculaire à l'écoulement, contrairement aux bulles en amont et en aval de l'obstacle. Concernant les cas extrêmes, nous n'avons pas simulé la limite  $l_{canal} \gg d_o$  car les temps de calcul deviennent trop importants ; nous n'attendons pas de résultat différent. Au lieu de simuler la limite  $l_{canal} \simeq d_o$ , nous préférons décentrer l'obstacle dans un canal suffisamment grand pour étudier l'effet d'un seul bord.

### Obstacle décentré

On présente ici l'effet du décentrage de l'obstacle dans les conditions de référence ( $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ,  $l_{canal} = 256 \text{ pix}$ ). Différentes mousses sont préparées avec pour chacune un espace mur-obstacle différent (de 0 à 91 pix). Lors du remplissage du canal par la mousse, il a fallu changer la direction du biais comme pour une mousse centrée (2.2.3). Cela n'a posé aucun problème

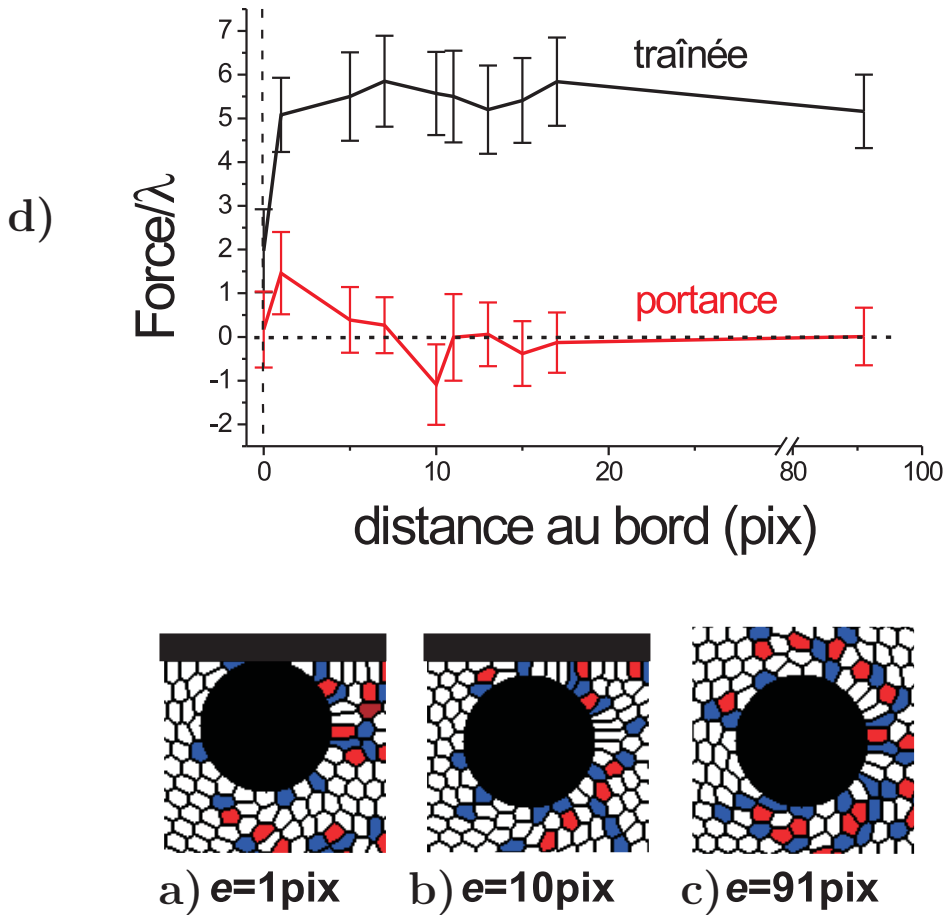


FIG. 3.19 – Obstacle décentré. Traînée et portance sur l’obstacle en fonction de la distance au bord ( $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ). Une portance positive correspond à une répulsion du bord. Images de la mousse pour un écartement de 1, 10 et 91 (cas centré) pixels.

car dans tous les cas la mousse peut s’écouler entre le mur et l’obstacle. La seule exception est le cas *collé* (obstacle qui touche la paroi) : on a alors préparé la mousse en laissant un passage de 1 pix de libre que l’on a rebouché une fois la mousse préparée.

Les résultats de la traînée et de la portance de la force de réseau sont représentés sur la figure (3.19). On constate que la traînée ne varie quasiment pas avec l’espaceur mur-obstacle, excepté pour le cas *collé*. Ceci peut s’expliquer car il s’agit du seul cas où la mousse reste immobile au niveau de l’interstice et la mousse se trouve ainsi figée dans l’état dans lequel on l’a préparée.

Concernant la portance, on constate un changement de signe lorsqu'on s'éloigne du bord (succession d'attractions et de répulsions). On peut comprendre physiquement cet effet en regardant la géométrie des bulles passant dans l'interstice (figure (3.19a,b,c)). Par exemple, pour un interstice de 1 pix(a), les bulles s'étirent fortement dans le sens de l'écoulement pour pouvoir passer, ce qui veut dire une densité de liens plus petite de ce côté et donc une répulsion. Par contre pour un interstice de 10 pix (b), une seule bulle passe, mais elle est accrochée à la fois au mur et à l'obstacle (étirement dans la direction perpendiculaire à l'écoulement). D'où une densité de liens plus grande de ce côté et donc une attraction. En augmentant l'interstice, les mêmes effets réapparaissent mais avec plusieurs couches de bulle ; l'intensité de cet effet est donc lissé et diminue lorsque l'on éloigne l'obstacle du mur.

En résumé, on a constaté que les effets de bord n'influencent quasiment pas la traînée. En revanche ils donnent lieu à des effets discrets sur la portance lorsque la taille caractéristique des bulles est comparable à la distance aux bords.

### 3.4.3 Effet de la taille de l'obstacle

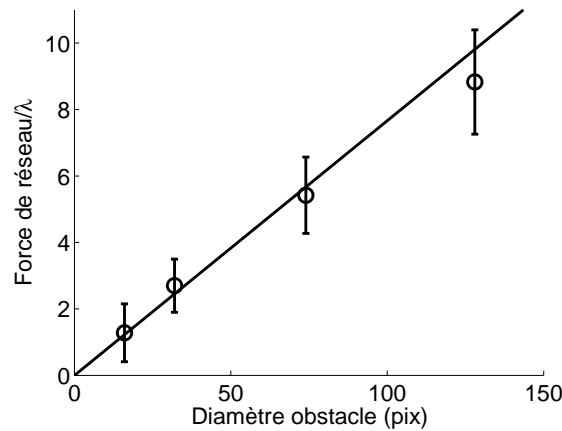


FIG. 3.20 – Effet du diamètre de l'obstacle.  $A = 100 \text{ pix}^2$  et  $l_{canal} = 256 \text{ pix}$ .

L'effet du diamètre de l'obstacle  $d_o$  est représenté sur la figure (3.20) et semble compatible avec une loi linéaire. Ce résultat semble intuitif. Plus l'obstacle est grand, plus la différence de lien avant-arrière est accentuée car un plus grand nombre de bulles sont accrochées. Nous n'avons pas pu descendre à plus petit  $d_o$  car l'effet de la pixellisation de l'obstacle devient trop forte. A l'autre extrême, la limite  $d_o$  de l'ordre de  $l_{canal}$  est discutée dans le paragraphe précédent.

On trouve le même résultat pour la force totale au seuil en géométrie eau-verre de Dollet *et al.* [38], ce qui tendrait à dire que les forces de réseau et de

pression au seuil ont la même évolution linéaire en fonction de  $d_o$ . Faute de modèle élasto-plastique appliqué à l'écoulement autour d'obstacle dans la littérature, nous n'avons pas pu valider théoriquement cette observation.

### 3.4.4 Effet de la fraction liquide

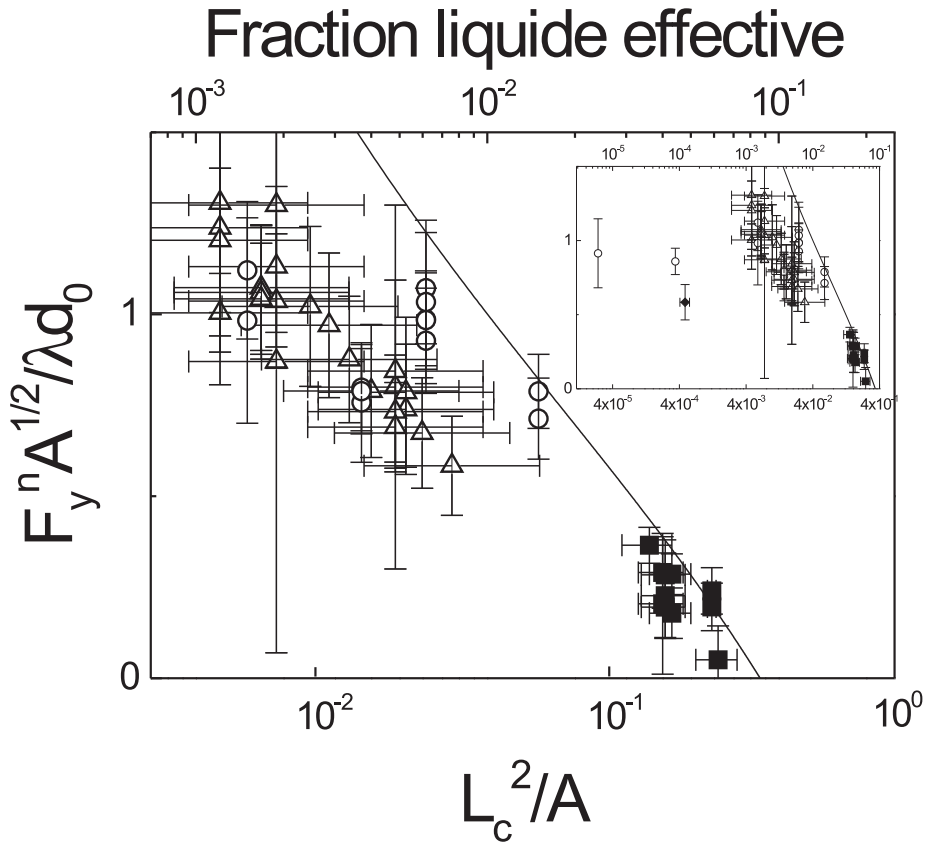


FIG. 3.21 – Effet de la fraction liquide.  $F_y^n$ , adimensionnée par  $\lambda d_o / \sqrt{A}$ , en fonction de  $L_c^2 / A$  (échelle du bas), et de la fraction liquide effective  $\Phi_{eff}$  (échelle du haut), en échelle semi-logarithmique. Les barres verticales indiquent l'écart type des fluctuations dans le temps. Les barres horizontales représentent l'incertitude liée à la détermination de  $L_c$ . Les données sont tirées des expériences eau-verre (■) et verre-verre (◆), des simulations Surface Evolver (○) et Potts (△); la ligne représente le modèle analytique (3.4.8). Insert : échelle logarithmique en abscisse et ajout de 3 points très secs.

Pour étudier l'effet de la fraction liquide, on trace pour les différents points

$F_Y^n \sqrt{A} / \lambda d_o$  (cet adimensionnement est discuté dans la section suivante) en fonction de  $L_c^2/A$  ou de la fraction liquide effective  $\Phi_{eff}$  (équation (2.43)).

On présente ici les résultats d'expériences basse vitesse eau-verre et verre-verre, ainsi que ceux des simulations Surface Evolver et de nos simulations Potts. Ceux-ci sont détaillés en [113]. Les différentes données semblent suivre la même tendance (figure (3.21)). On voit un net effet de la fraction liquide effective : la force adimensionnée a une valeur quasi nulle proche de la perte de rigidité théorique d'une mousse 2D ordonnée (9.31 % [113]), et augmente lorsque  $\Phi_{eff}$  passe de 10 % à 0.1 %. Ceci caractérise bien l'effet des réarrangements sur la force, via l'effet de  $L_c$ .

Pour des  $\Phi_{eff}$  encore plus secs, il semblerait que la force sature (voir l'insert et (3.4.8)). Le point expérimental verre-verre (◆) est légèrement abaissé par la présence d'une petite bulle ne se détachant pas à l'arrière de l'obstacle. Ceci a une répercussion sur la force de réseau, car cette bulle n'est pas étirée par l'écoulement, impliquant une densité de liens moins importante en aval de l'obstacle.

On discute le lien structure-force en (3.4.8) avec notamment l'effet de la fraction liquide effective.

### 3.4.5 Effet de la taille des bulles

$F_Y^n / \lambda$  est adimensionnée et proportionnelle à  $d_o$ ;  $\sqrt{A}$  étant la seule autre échelle de longueur pertinente ( $L_c$  apparaît via la fraction liquide effective qui est aussi adimensionnée), on s'attend à une évolution proportionnelle à  $d_o / \sqrt{A}$ . La densité de liens sur l'obstacle est aussi proportionnelle à  $1 / \sqrt{A}$ . Enfin, de nombreuses quantités présentent une proportionnalité en  $1 / \sqrt{A}$ , notamment le module élastique [111, 76, 78].

Or on constate sur la figure (3.22) que la force ne présente pas de grande variation en fonction de l'aire des bulles. Cet effet contre-intuitif cache en fait l'effet de la fraction liquide effective. En effet, en changeant  $A$  on change aussi  $\Phi_{eff}$  à  $L_c$  fixé (équation (2.43)). Ces deux effets ( $A$  et  $\Phi_{eff}$ ) se compensent ainsi dans le domaine exploré de la figure. A la vue du résultat de la section précédente, l'effet de  $\Phi_{eff}$  est bien identifié et celui de  $A$  semble compatible avec une force proportionnelle à  $\sqrt{A}$  pour  $\Phi_{eff}$  fixée :

$$\frac{F_Y^n}{\lambda} = \frac{d_o}{\sqrt{A}} F(\Phi_{eff}). \quad (3.13)$$

### 3.4.6 Force de pression

On présente ici des résultats concernant la mesure de la force de pression. La mesure de la pression pour chaque bulle est explicitée en (2.3.1). On a choisi de travailler avec des bulles de 289 pix<sup>2</sup> dans un canal de 256 pix de large et un



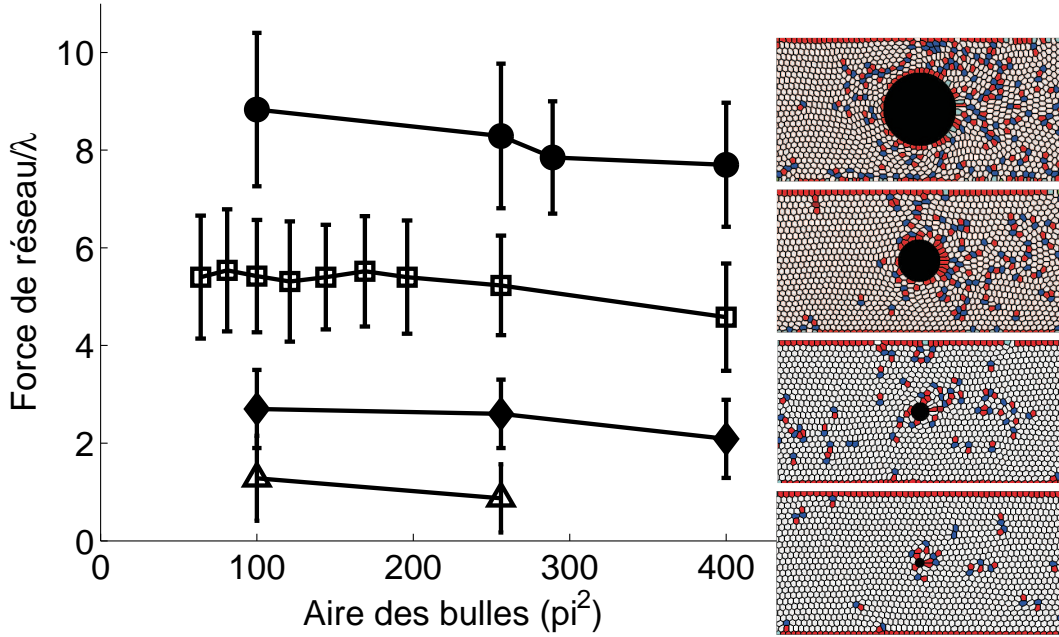


FIG. 3.22 –  $F_Y^n$  fonction de l'aire de bulles  $A$  pour différents diamètres d'obstacle  $d_o$  : 16 ( $\Delta$ ), 32 ( $\blacklozenge$ ), 74 ( $\square$ ) et 128 ( $\bullet$ ) pixels. Les différents obstacles sont représentés sur la droite du graphique.

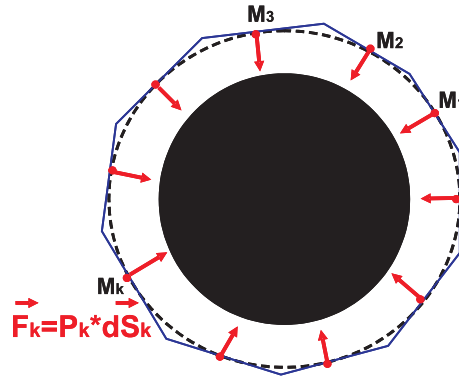


FIG. 3.23 – Mesure de la force de pression. La force de pression totale est la somme vectorielle des contributions de chaque petit élément de surface  $dS_k$  centré sur les points  $M_k$ .

obstacle de 128 pix de diamètre. Pour mesurer cette force on a besoin de mesurer des variations d'aires suffisantes. Pour cela on a fait tourner la simulation avec des valeurs de  $\kappa$  égales à 0.2 et 0.1.

Pour la mesure de la force de pression, on discrétise en 1000 points le cercle centré sur l'obstacle et dont le rayon est le rayon de l'obstacle + 2 pix (figure



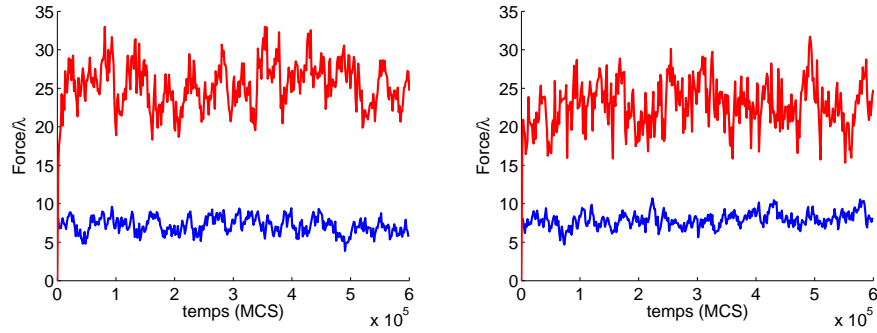


FIG. 3.24 – Effet de la compressibilité. Force de réseau (bleu), force de pression (rouge) en fonction du temps pour deux simulations ; gauche :  $\kappa=0.1$ , droite :  $\kappa=0.2$ .

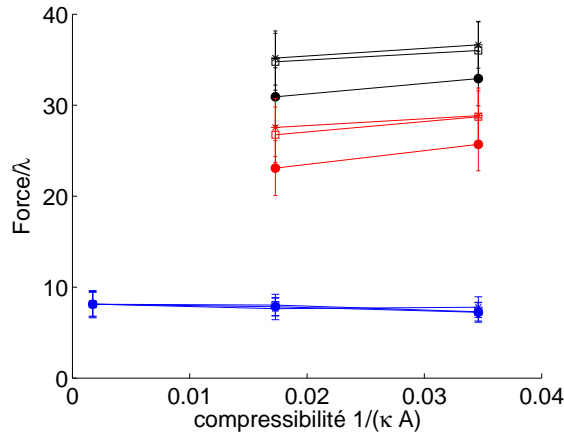


FIG. 3.25 – Force de réseau (bleu), force de pression (rouge) et force totale (noir) en fonction de la compressibilité  $1/(\kappa A)$  pour différentes distributions.  $\mu_2(A) = 0.11$  ( $\bullet$ ),  $0.25$  ( $\square$ ) et  $0.34$  ( $*$ ). Pour la mousse la moins compressible, les variations d'aires trop faibles des bulles ne permettent pas d'avoir une mesure de la force de pression pertinente.

(3.23)). On est ainsi sûr que chaque point tombe dans une bulle et non pas dans l'obstacle. La pression attribuée à chaque point est celle de la bulle à laquelle appartient le point de mesure. Par cette méthode on approche en fait le cercle par un polygone à 1000 côtés, sur lesquels on calcule la force normale de pression. La force totale de pression est la somme vectorielle de toutes ces forces. On a vérifié que 1000 points sont suffisants pour ne pas faire ressortir la discrétisation du cercle (erreur inférieure à 1 %).

La force de pression  $F_Y^p$  et la force de réseau  $F_Y^n$  pour les deux simulations sont représentées sur la figure (3.24). Dans les deux cas la force de pression est supérieure à la force de réseau, et il semblerait qu'il n'y ait pas de corrélation entre

leurs fluctuations. On peut étudier la force totale  $F_Y^t = F_Y^p + F_Y^n$ . On constate sur la figure (3.25) que ces forces varient peu avec la compressibilité. Cela indique bien que les compressibilités utilisées perturbent peu l'écoulement par rapport au cas incompressible.

Il semblerait que la force de réseau diminue un peu avec la compressibilité. Cela peut peut-être s'expliquer par le fait que plus les bulles sont compressibles, plus les bulles en amont sont petites, plus la densité de liens touchant l'obstacle augmente en amont, et diminue en aval pour la même raison.

Pour  $\kappa = 0.1$  et  $\kappa = 0.2$ , on a respectivement  $F_Y^p/F_Y^n = 3.54 \pm 0.66$  et  $F_Y^p/F_Y^n = 2.94 \pm 0.36$ . Ces valeurs peuvent être comparées avec des simulations Surface Evolver de mousse sèche incompressible (rapport  $\approx 1$ ) et des expériences de mousse plutôt humide et compressible (rapport  $\approx 2$ ) (données non publiées). Il n'y a donc pas de rapport universel entre les deux forces. On discute la différence entre ces deux forces en (3.4.8).

### 3.4.7 Effet de la polydispersité

Sur la figure (3.25) la force de réseau est tracée pour différentes distributions d'aire (voir figure (4.15)), avec la même valeur moyenne  $289 \text{ pix}^2$ . Pour quantifier la dispersité des distributions d'aires, on utilise l'écart-type de la distribution d'aire adimensionnée :

$$\frac{\delta A}{\langle A \rangle} = \frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}}{\langle A \rangle}. \quad (3.14)$$

On constate que la force de réseau ne présente pas de variation significative avec la dispersité d'aires. Ceci est assez intuitif puisque la force de réseau est la conséquence du détachement local des bulles autour de l'obstacle (3.4.8) et dépend de ce fait principalement de la fraction liquide (3.4.4).

Au contraire la force de pression présente des variations suivant la dispersité (figure (3.25)). Sur les figures (4.15) et (4.16), on se rend compte de la distribution spatiale de la pression. Contrairement à la force de réseau, la force de pression n'est pas liée à un effet localisé autour de l'obstacle. Les variations de pression ont une distribution spatiale plus élargie pour une mousse polydisperse (figure (4.16)). On discute les conséquences en (3.4.8).

### 3.4.8 Discussion sur les forces

#### Lien écoulement-force

Les différentes forces qui agissent sur l'obstacle sont liées à l'asymétrie du champ de pression pour la force de pression et à l'asymétrie de la répartition des liens autour de l'obstacle pour la force de réseau. Dans ce qui suit nous présentons dans le cas de la force de réseau comment l'écoulement crée cette

asymétrie et comment on peut la quantifier à partir des caractéristiques élastique ( $\lambda$ ) et plastique ( $L_c$ ) de la mousse.

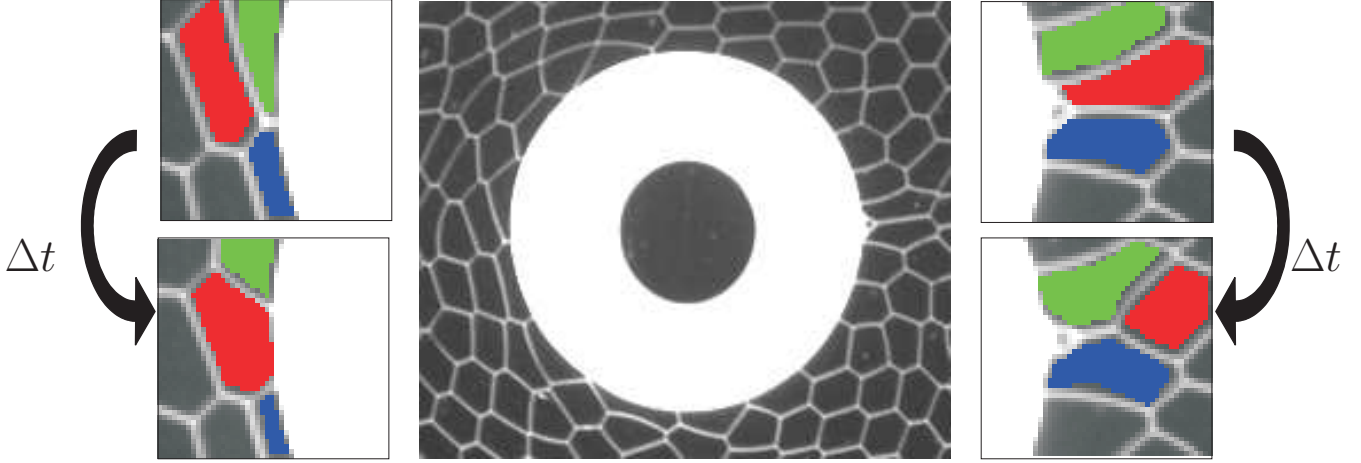


FIG. 3.26 – Asymétrie de la structure autour de l’obstacle. Images d’une mousse en *pression imposée*. A gauche : attachement d’une bulle (identifiée en rouge) en amont de l’obstacle. A droite : même chose pour le détachement.  $\Delta t = 0.57$  s

Lors de l’écoulement de la mousse autour de l’obstacle, les bulles touchant l’obstacle glissent le long de celui-ci, et s’orientent suivant l’écoulement (en fait suivant le gradient de vitesse symétrisé). Ainsi, les bulles en amont de l’obstacle se trouvent étirées perpendiculairement à l’écoulement moyen, alors que celles en aval sont orientées suivant cette direction. De cette asymétrie de direction d’élongation résulte une asymétrie de la densité de liens touchant l’obstacle. C’est ce qui crée la force élastique appliquée sur l’obstacle. Par contre cet étirement des bulles est limité par la plasticité, ce qui va limiter la force. Dans les régions de forte élongation (en amont et en aval de l’obstacle) de nouvelles bulles s’accrochent ou se détachent de l’obstacle, limitant ainsi l’étirement des autres bulles (figure (3.26)).

On se propose de modéliser cet effet.

Dans l’expression phénoménologique de la force de réseau (équation (3.13)), on retrouve une partie géométrique  $d_o/\sqrt{A}$  liée à la section efficace de l’obstacle et à la densité moyenne de liens sur l’obstacle ; mais aussi une partie dépendant de la fraction liquide effective (proportionnelle à  $L_c^2/A$ ) : c’est la partie de la force qui gouverne l’étirement des bulles et donc l’asymétrie.

On peut calculer la densité de lien en amont de l’obstacle juste avant l’attachement d’une nouvelle bulle ( $1/L_{max}$ ) et la densité en aval juste avant le détachement d’une bulle ( $1/L_{min}$ ) (figure (3.27)). Ces quantités sont liées à  $L_c$  par de simples relations géométriques :

$$L_{min} = \sqrt{3}L_c. \quad (3.15)$$

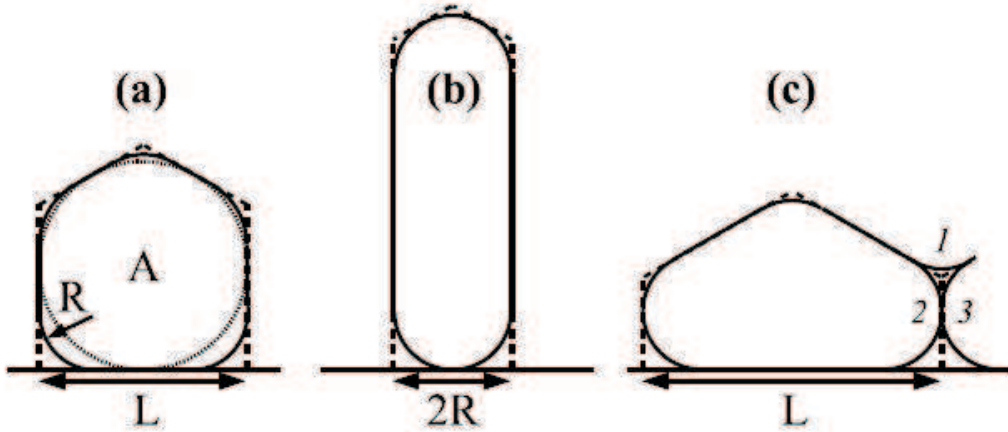


FIG. 3.27 – Bulles sur une paroi. La densité de liens locale par unité de longueur de l’obstacle vaut  $1/L$  (a). La densité de liens en aval (b) et en amont (c) de l’obstacle (respectivement  $1/L_{min}$  et  $1/L_{max}$ ) juste avant détachement ou attachement est reliée au rayon des vertex  $R$  et donc à  $L_c$ .

$$L_{max} = L_c \left[ \sqrt{3(\sqrt{3} + 1)^2 + 4\sqrt{3}\frac{A}{L_c^2}} - \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \right], \quad (3.16)$$

voir Raufaste *et al.* [113] pour le détail des calculs.

On peut alors utiliser une interpolation simple qui suppose que la densité de liens le long de l’obstacle varie de façon linéaire entre ces deux valeurs. Ce modèle donne la courbe continue de la figure (3.21) et capture bien l’essentiel du phénomène ; il surestime un peu la force car le modèle suppose que les bulles sont toujours dans ces cas limites.

Cependant ce modèle prévoit une divergence de la force lorsque la fraction liquide effective tend vers 0, car la densité de lien tend alors vers l’infini en aval de l’obstacle. Or en pratique (expérience et simulation) la force semble plutôt saturer. La densité limite ne semble plus être le critère déterminant : en effet seulement quelques bulles (celles qui sont proches de se décrocher) sont très étirées (voir zoom sur les mousses très sèches, figure (3.16d) par exemple). L’interpolation linéaire de la densité de liens entre  $1/L_{max}$  et  $1/L_{min}$  n’est plus valide. L’écoulement étire très fort les bulles juste en arrière de l’obstacle, par de très forts gradients de vitesse (voir champ de  $\overline{\nabla} v_{sym}$  sur la figure (4.9b)), mais pas les autres bulles dès que l’on s’écarte un petit peu de l’arrière de l’obstacle.

### Force globale

On compare ici la force de réseau et la force de pression, dans le but de comprendre la force totale qui s’applique sur l’obstacle. Contrairement à la force de pression, la force de réseau est locale et dépend pour cela des conditions

au niveau de l'obstacle. Dans les simulations et la plupart des expériences, on travaille avec une condition de glissement des bulles sur l'obstacle. Mais on peut aussi accrocher les bulles (roue dentée) [37] et dans ce cas avoir une densité de liens symétrique sur l'obstacle ; en ce cas il n'y a pas de force de réseau. De même, la présence de petites bulles non advectées au bout de l'obstacle peut changer les conditions de détachement des bulles, et donc la force de réseau.

La mesure directe de la force totale appliquée sur un obstacle de type roue dentée [37] a montré que les conditions sur l'obstacle ne sont pas si importantes ; il suffit de considérer un obstacle dont la taille effective est celle de l'obstacle à laquelle on ajoute la couronne de bulles attachées.

On voit donc qu'il est important de considérer l'ensemble de l'écoulement si on veut être capable d'expliquer la force sur l'obstacle ; en particulier l'effet de la polydispersité, pour laquelle la force de réseau est inchangée à aire moyenne des bulles constante, mais la force de pression peut être différente (voir (3.4.6)).

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé le problème de la répartition du liquide dans notre géométrie (3.1 et 3.3.1), de la dissipation lié au frottement de la mousse sur les plaques de verre (3.2), de la stabilité de la mousse à haute vitesse (3.3), ainsi que de la force appliquée par la mousse sur un obstacle (3.4).

La connaissance de la répartition de l'eau dans la mousse permet de faire le lien entre la fraction liquide  $\Phi$  et la fraction liquide effective  $\Phi_{eff}$  (3.1), grandeur caractéristique des propriétés plastiques. Dans la plupart de nos expériences nous mesurons la fraction liquide. Pour notre taille de bulles et hauteur du canal, on a la relation  $\Phi \simeq 1.7\Phi_{eff}$ . Lorsque la quantité d'eau devient trop importante ( $\simeq 30\%$ ), l'écoulement devient bulleux. Cette limite est retrouvée en considérant à la limite un arrangement cristallin de bulles sans contact (3.3.1).

Les écoulements bouchons permettent une étude de la friction entre la mousse et la plaque (3.2). On rappelle où se situe la répartition de la dissipation : bords de Plateau de paroi pour des interfaces plutôt fluides, films de paroi pour des interfaces plutôt rigides. Une relation empirique sur l'ensemble des données expérimentales (facteur 50000 en nombre capillaire) donne pour le gradient de pression mesuré :  $\nabla P = (3100 \pm 100)V^{0.64 \pm 0.1}\Phi^{-0.26 \pm 0.1}$ . Cette loi est comparée au modèle de dissipation 1D : elle présente la puissance en  $V$  d'une dissipation dans les bords de Plateau de paroi et la puissance en  $\Phi$  d'une dissipation dans les films de paroi.

En augmentant la vitesse, la mousse devient instable avec une légère dépendance avec la fraction liquide (3.3). Sous pression, les faces s'orientent et se courbent, puis cassent : l'instabilité est due soit à la propagation d'un doigt (fracture), à quelques m/s, soit à un front qui détruit toute la mousse à quelques dizaines de m/s. L'hypothèse de courbure maximale des bulles est compatible avec une limite

en pression que l'on retrouve bien avec un calcul d'ordre de grandeur. Enfin, la relation vitesse-courbure-pression est visualisée avec une expérience en microcanal qui permet de faire s'écouler des faces de bulle uniques.

En plaçant un obstacle dans le canal, la mousse va répondre en créant une force sur celui-ci. Dans la limite "vitesse d'écoulement tendant vers 0", les contributions de la force de réseau et de la force de pression sont étudiées (simulations quasistatiques complétées par des données expérimentales à basse vitesse). La force de réseau est de la forme  $F(\Phi_{eff})d_o/\sqrt{A}$ , soulignant bien une partie géométrique liée à l'obstacle et aux bulles, et une partie mécanique liée à  $\Phi_{eff}$ . L'effet du confinement est faible, sauf lorsque les dimensions deviennent de l'ordre de la taille des bulles. L'effet de la dispersité est négligeable pour la force de réseau, contrairement à la force de pression. Ceci est dû au fait que la force de réseau est liée à l'écoulement local des bulles autour de l'obstacle, alors que la force de pression est une résultante globale du comportement mécanique de la mousse. La modélisation de cette force nécessite donc la compréhension de tout l'écoulement, et donc des propriétés rhéologiques de la mousse. Ceci fait l'objet des chapitres (4) et (5).



# Chapitre 4

## Écoulement permanent : mesures locales

Nous présentons ici les résultats des mesures locales en présence d'obstacle sur les expériences de référence (*débit d'azote imposé* (2.1.3)) pour différentes fractions liquides et vitesses de mousse. On dispose aussi des cartes pour une expérience très basse vitesse (*pression imposée* (2.1.3)) et la simulation de référence que l'on considère comme limite quasistatique. D'autres géométries (2.1.5) sont aussi analysées avec les mêmes outils : Stokes eau-verre, constriction et cisaillement de Couette cylindrique. Ces différentes cartes permettent de décrire le comportement rhéologique de la mousse et de caractériser les propriétés d'élasticité et de plasticité, ainsi que de discuter du caractère affine des déformations.

### 4.1 Méthodes

Un obstacle est placé au milieu du canal d'écoulement. Celui-ci a un diamètre de 3 cm (respectivement 3.8 cm) pour la configuration *débit d'azote imposé* (respectivement *pression imposée*). La simulation numérique présentée a un obstacle de diamètre 74 pix dans un canal de 256 pix de large, ce qui correspond au rapport d'aspect de la configuration *débit d'azote imposé*, ainsi que l'expérience eau-verre.

Nous décrivons brièvement la façon avec laquelle on mesure les différentes grandeurs.

Le premier point concerne le découpage en éléments représentatifs de volume (RVE) à l'intérieur desquels les moyennes sont effectuées. Si on considère le suivi des liens  $\vec{\ell}$  rejoignant les barycentres de deux bulles voisines, il s'agit de déterminer le RVE auquel on l'attribue. Dans le cas simple où le lien appartient entièrement à un RVE, on l'attribue sans ambiguïté. La question se pose lorsque le lien est à cheval sur plusieurs. La méthode la plus rigoureuse consiste à découper le lien et à attribuer chaque portion au RVE correspondant. Pour des raisons d'efficacité, nous choisissons en fait d'attribuer entièrement le lien au RVE contenant le ba-



rycentre de ce lien. Certains auteurs proposent que les liens soient pondérés [53], c'est-à-dire prendre des boîtes aux limites plus ou moins franches, type gaussienne [57]; ceci est utile surtout dans les cas où une réelle séparation des échelles n'est pas possible (taille des bulles non négligeable devant la longueur caractéristique du canal). Nous moyennons aussi dans le temps (en général 1000 images) car nous supposons l'écoulement stationnaire. Nous verrons sur les cartes ainsi obtenues que le grand nombre de liens traversant un RVE durant une analyse permet de justifier notre approche (4.2.3).

Un autre point concerne la détermination de  $\overline{\overline{M}}_0$ , tenseur qui sert de référence pour définir la déformation élastique  $\overline{\overline{U}}$ . Nous considérons que la mousse est un matériau au repos.  $\overline{\overline{M}}_0$  prend alors la forme :

$$\overline{\overline{M}}_0 = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_0 \overline{\overline{I}}_D . \quad (4.1)$$

Avec notamment

$$\det \overline{\overline{M}}_0 = \lambda_0^2, \quad (4.2)$$

où  $\det$  représente le déterminant d'un tenseur.

Dans les expériences d'écoulement autour d'obstacle, on considère que  $\overline{\overline{M}}_0$  est homogène. On l'évalue en faisant la moyenne de  $\det \overline{\overline{M}}$  sur les deux rangées de RVEs perpendiculaires à l'écoulement et les plus éloignées de l'obstacle : une en amont (première rangée), l'autre en aval de l'obstacle (dernière). On observe que dans ces zones la mousse est relaxée et ne présente pas de direction privilégiée. Cette mesure nous donne une estimation de  $\lambda_0^2$ . Pour l'expérience de constriction, on fait de même, mais on ne peut utiliser que la rangée de RVEs en amont de la constriction. Concernant l'expérience de Couette cylindrique, on n'a pas accès sur les images à un état de référence relaxé. On fait alors l'hypothèse que l'incompressibilité au sens de l'aire projetée entraîne une trace de  $\overline{\overline{U}}$  nulle, soit :

$$\text{Tr}(\overline{\overline{U}}) = 0. \quad (4.3)$$

On voit sur les cartes (exemple des figures (4.1d), (4.9a), (4.11a)) que cette hypothèse est bien vérifiée pour des mousses confinées entre deux plaques de verre, mais moins pour l'expérience eau-verre, voir carte de la figure (4.10a), pour laquelle l'aire projetée des bulles peut changer de l'ordre de 20 % [39]. En partant d'une mousse au repos, Dollet [41] a aussi montré théoriquement que  $\text{Tr}(\overline{\overline{U}}) = 0$  jusqu'à un ordre deux en déformation imposée lorsque l'on impose une déformation affine. En utilisant la forme diagonalisée de  $\overline{\overline{M}}$  :

$$\text{diag}(\overline{\overline{M}}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

on déduit la forme diagonalisée de  $\bar{U}$  :

$$\text{diag}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & \log \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

On en déduit une propriété générale si  $\bar{M}_0$  est isotrope :

$$\text{Tr}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \log(\det \bar{M}) - \frac{1}{2} \log(\det \bar{M}_0) = \log \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_0^2}}. \quad (4.6)$$

Dans le cadre de l'hypothèse  $\text{Tr}(\bar{U}) = 0$ ,  $\lambda_0^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \det \bar{M}$ , on évalue donc  $\lambda_0$  localement (chaque boîte a un  $\lambda_0$  sensiblement différent des autres) par :

$$\lambda_0 \cong \sqrt{\det \bar{M}}. \quad (4.7)$$

Nous sommes alors en mesure de déterminer les différentes grandeurs caractéristiques des différents écoulements. Les méthodes utilisées (quand il y en a plusieurs) pour la détermination de  $\bar{M}_0$  donnent des résultats très proches ; en effet le choix d'un  $\bar{M}_0$ , si celui-ci est isotrope, ne joue que sur la trace de  $\bar{U}$ , et non pas sur la composante tangentielle, ni sur la différence des composantes normales.

## 4.2 Champs expérimentaux

Nous présentons ici les différents champs expérimentaux : la configuration *débit d'azote imposé* permet de voir l'influence de la fraction liquide et de la vitesse, alors que la configuration *pression imposée* fournit des champs d'écoulement très lents. L'analyse d'autres géométries renforce notre analyse. Enfin nous vérifions que la taille des RVEs n'influence pas notre approche.

### 4.2.1 Expérience type

Nous considérons ici la configuration *débit d'azote imposé*. Le diamètre de l'obstacle vaut 3 cm. L'écoulement est découpé en RVEs contenant environ 3 bulles. Sur la figure (4.1) on représente les différents champs pour une expérience plutôt sèche et à basse vitesse. Parmi les caractéristiques de l'écoulement, on remarque :

- Les champs sont très asymétriques entre l'amont et l'aval.
- Le champ de vitesse présente un sursaut derrière l'obstacle. Celui-ci se distingue mieux en se plaçant dans le référentiel du fluide (comme si l'obstacle se mouvait de droite à gauche dans un fluide au repos), voir figure (4.2). La divergence de  $\vec{v}$  est négligeable : l'écoulement est bien incompressible.

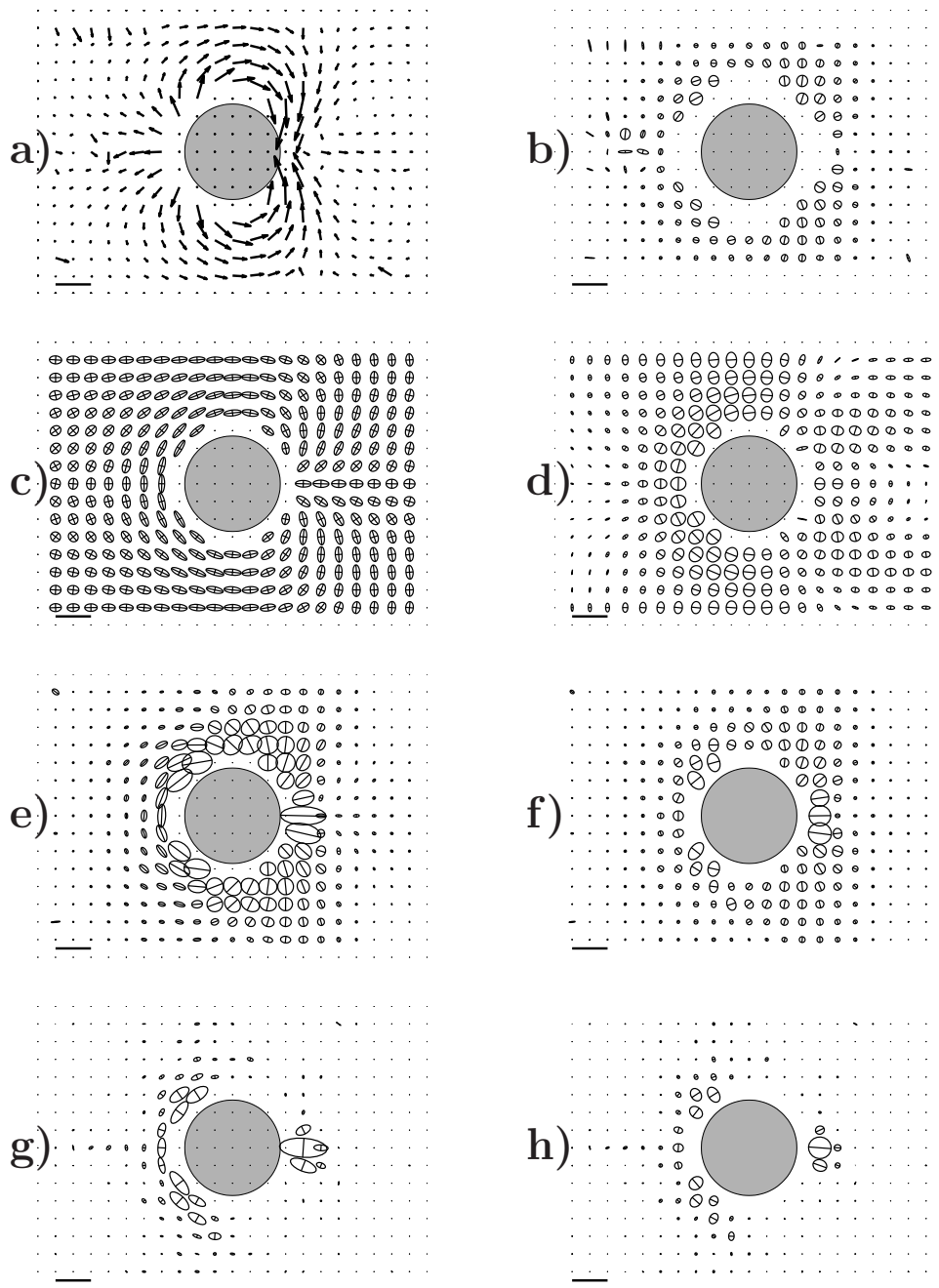


FIG. 4.1 – Champs expérimentaux pour une expérience à  $\Phi = 1.2\%$  et  $V = 5.5$  mm/s. Pour l'échelle,  $d_o = 3$  cm. Respectivement (de a à h) : champ de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel de l'obstacle,  $\overline{\nabla v_{sym}}$ ,  $\overline{M}$ ,  $\overline{U}$ ,  $\overline{C_{sym}}$ ,  $\overline{G_{sym}}$ ,  $\overline{T}$ ,  $\overline{P}$ . Echelles : la barre noire représente 7.5 mm/s pour a), 0.6 s<sup>-1</sup> pour b), f) et h), 26 mm<sup>2</sup> pour c), 0.71 pour d), 6.7 mm<sup>2</sup>/s pour e) et g).

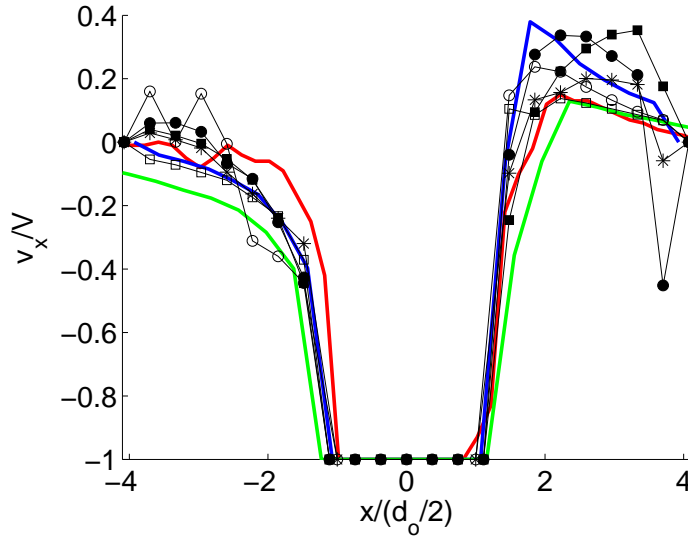


FIG. 4.2 – Sursaut en vitesse. Composante longitudinale de la vitesse (dans le référentiel du fluide) suivant l’axe de symétrie ( $y = 0$ ) pour les différentes configurations de l’expérience de Stokes. noir : configuration classique ( $\circ$  :  $\Phi = 1.2\%$ ,  $\square$  :  $\Phi = 6.3$ ,  $*$  :  $\Phi = 12.7\%$ ) ouvert :  $V = 5.5$  mm/s, fermé :  $V = 550$  mm/s (à la correction de  $\Phi$  près, équation (2.2)). Bleu : expérience très basse vitesse, vert : expérience eau-verre, rouge : simulation de référence.

- Il y a des zones de plasticité (T1s). Elles permettent à la mousse de s’écouler autour de l’obstacle.
- La déformation élastique sature. On note  $U_Y$  la valeur à saturation de l’amplitude de  $\bar{U}$ .

Les différents champs sont suffisamment lisses, ce qui est signe d’une bonne statistique dans chaque boîte. On discute ce point un peu plus bas (4.2.3).

### Différentes fractions liquides

On présente ici l’effet de la fraction liquide pour des expériences à même débit d’azote (100 ml/min), donc quasiment avec la même vitesse (de 5.5 à 6.6 mm/s suivant  $\Phi$ , équation (2.2)). L’écoulement est suffisamment lent pour que la forme des bulles ait le temps de relaxer (figure (3.16)). L’effet de la relaxation des bulles est étudiée dans la prochaine section.

A partir des figures (4.1) et (4.3) on peut comparer les champs de deux mousses de fractions liquides différentes, une mousse plutôt sèche ( $\Phi = 1.2\%$ ) et une plutôt humide ( $\Phi = 12.7\%$ ). Les champs de vitesse, de gradient de vitesse, de déformation continue sont comparables. Par contre les champs de déformation et de changement topologique sont très différents. Dans le cas le plus sec, les bulles peuvent être déformées beaucoup plus (on le voit aussi sur les images brutes,

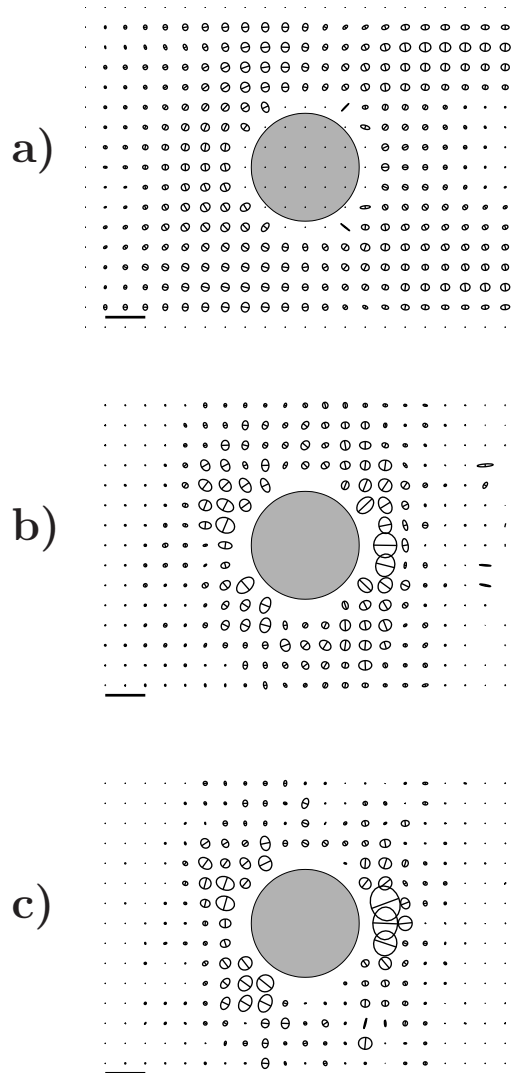


FIG. 4.3 – Différents champs d’une mousse à  $\Phi = 12.7\%$  et  $V = 6.6$  mm/s. a)  $\bar{U}$ , b)  $\bar{G}_{sym}$ , c)  $\bar{P}$ . Les échelles sont les mêmes que sur la figure (4.1d, f et h).

cf figure (3.16)) et les T1s sont localisés dans une région plus petite autour de l’obstacle.

Ces deux effets ne sont pas indépendants. Les bulles ne peuvent s’étirer indéfiniment car elles finissent par être le siège d’un T1. Plus la mousse est sèche, plus la longueur critique  $L_c$  entre deux vertex avant T1 est petite et plus l’amplitude de la déformation saturée  $U_Y$  est grande. De même, plus les bulles peuvent être étirées, plus tard elles feront des T1s, ce qui explique la diminution de la zone des T1s lorsque la fraction liquide diminue. Ceci se retrouve si on compare

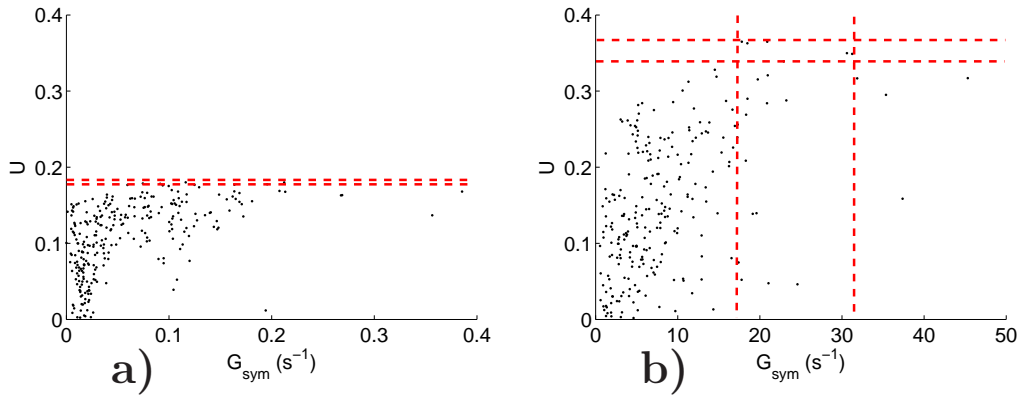


FIG. 4.4 – Détermination de  $U_Y$ . On trace l'amplitude de  $\bar{U}$  en fonction de l'amplitude de  $\bar{G}_{sym}$  pour une mousse à  $\Phi = 6.3\%$ . (a)  $V = 5.9$  mm/s. (b)  $V = 590$  mm/s. Les deux traits rouges horizontaux délimitent la région contenant les points de plus forte amplitude  $U$ . Pour (b), les traits rouges verticaux délimitent la zone de  $G_{sym}$  correspondante.

par exemple  $\bar{G}_{sym}$  et  $\bar{P}$ . Dans le cas humide ces deux tenseurs sont très proches, montrant que toute déformation supplémentaire du matériau est relaxée par les changements topologiques (on ne considère pas le terme de flux), ce qui ne permet pas d'augmenter l'amplitude de  $\bar{U}$ . Dans le cas plus sec, on constate des zones où  $\bar{G}_{sym}$  est non nul et d'amplitude supérieure à  $\bar{P}$ , signe d'une zone où le matériau se déforme de plus en plus.

Pour mesurer  $U_Y$ , on trace l'amplitude de  $\bar{U}$  en fonction de l'amplitude de  $\bar{G}_{sym}$ . En effet les zones de plasticité correspondent souvent aux zones subissant une déformation. On estime  $U_Y$  comme la valeur moyenne des dix points de plus grande amplitude de  $\bar{U}$  (figure (4.4a)).  $U_Y$  en fonction de  $\Phi_{eff}$  est représenté sur la figure (4.5).  $\Phi_{eff}$  a l'avantage d'être bien défini quel que soit le système expérimental ou numérique ; cela permet de comparer avec l'expérience très basse vitesse et la simulation Potts de référence. On a ajouté la mesure globale de  $U_Y$  obtenues par les simulations *Surface Evolver* d'un cisaillement (points noir, bleu et vert dans le tableau (2.1)). L'accord est bon entre les différentes configurations est bon. On a tracé la courbe  $U_{max}$  fonction de  $\Phi_{eff}$  dans le cas d'une mousse type Princen (Annexe (A)) pour se donner une idée de l'effet de  $\Phi_{eff}$ . Il est normal que cette courbe surestime les points car ce tracé suppose que les bulles se trouvent à la limite de se réarranger de façon stationnaire.

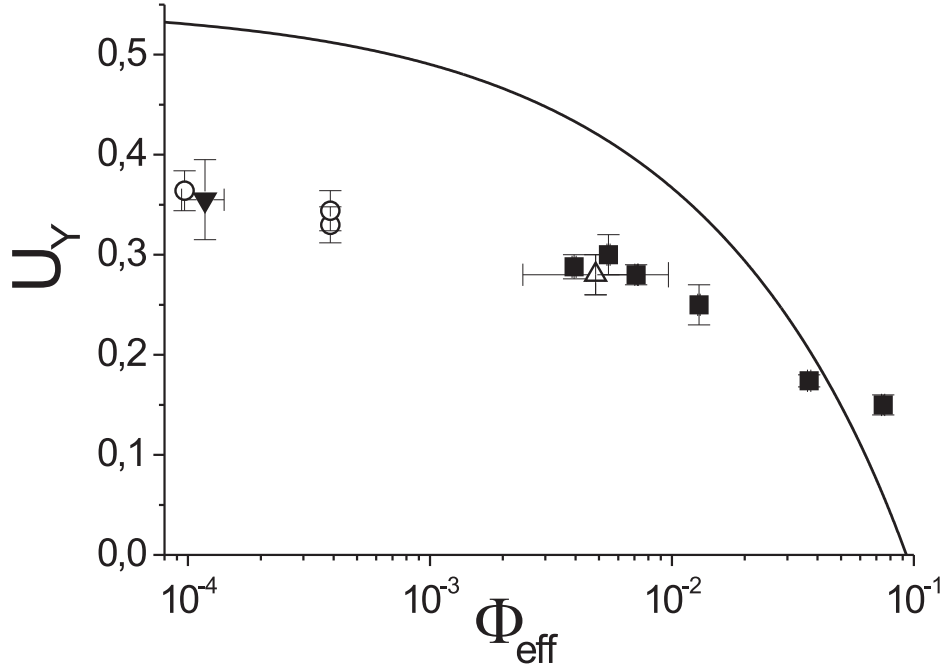


FIG. 4.5 –  $U_Y$  en fonction de  $\Phi_{eff}$ . Comparaison de différentes expériences à  $Q_{N_2} = 100 \text{ ml/min}$  ( $V$  entre 5.5 et 6.6 mm/s) (carré plein), pour une expérience à très basse vitesse ( $V = 0.3 \text{ mm/s}$ ) (triangle plein), la simulation de référence (triangle ouvert) et trois simulations *Surface Evolver* (cercle ouvert). On trace  $U_{max}$  (ligne continue) en fonction de  $\Phi_{eff}$  pour une mousse type Princen (Annexe (A)).

### Différentes vitesses

Dans cette partie nous présentons les résultats des écoulements haute vitesse. Les gradients de vitesse obtenus sont suffisamment rapides pour que la mousse soit hors-équilibre, c'est-à-dire que les lois de Plateau ne sont pas vérifiées (figure (3.16c)).

On prépare initialement une mousse à basse vitesse (1 aiguille), ce qui permet de bien contrôler ses propriétés. On arrête alors les débitmètres. On pousse ensuite à haute vitesse. Les débitmètres fournissent rapidement ( $< 100 \text{ ms}$ ) le bon débit, ce qui permet de démarrer l'acquisition de la caméra au moment où on déclenche les débitmètres. Un demi-canal de mousse préparée peut alors passer sur l'obstacle, mais une instabilité peut avoir lieu lorsque la vitesse devient trop élevée (3.3.2). On garde les données une fois que la vitesse d'écoulement atteint sa valeur stationnaire.

Sur la figure (4.6), nous comparons les champs  $\bar{U}$ ,  $\bar{G}_{sym}$  et  $\bar{P}$  pour une même

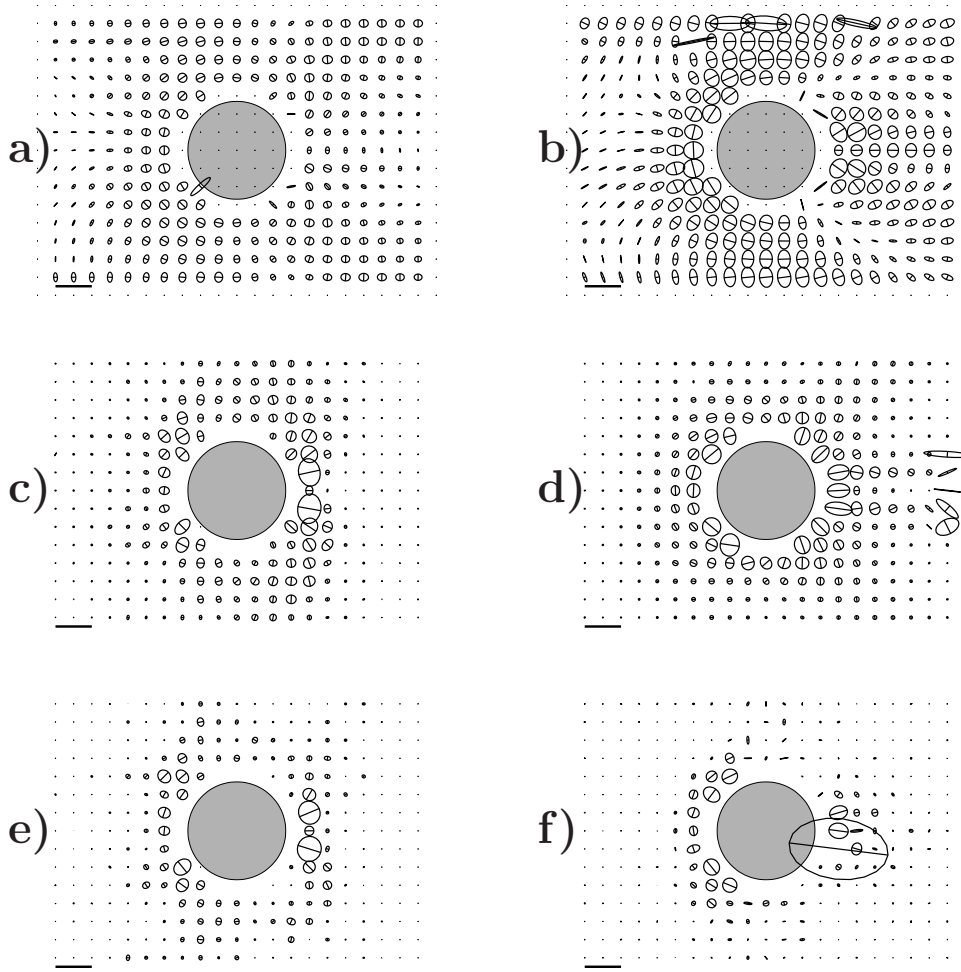


FIG. 4.6 – Effet de la vitesse.  $\Phi = 6.3\%$ . (a,c,d)  $V = 5.9$  mm/s. (b,d,e)  $V = 590$  mm/s. (a,b)  $\overline{U}$ ; (c,d)  $\overline{G}_{sym}$ ; (e,f)  $\overline{P}$ . Les échelles sont les mêmes que sur la figure (4.1d, f et h); sauf pour (d,f) dont l'échelle est 100 fois plus grande, pour faciliter la comparaison.

mousse mais à deux vitesses d'écoulement différentes. L'écoulement le plus rapide est obtenu en poussant la mousse avec 100 seringues ( $Q_{N_2} = 10$  l/min). 180 images prises ont été prises avec un échantillonnage de 1000 fps. Les champs présentent des différences par rapport au cas lent :

1. Les déformations sont plus importantes (figures (4.6a,b) et (4.4)). Ceci est compatible avec le fait que la mousse est hors-équilibre. Sa déformation maximale  $U_Y$  passe de  $0.17 \pm 0.01$  à  $0.35 \pm 0.1$ . Des déformations encore plus importantes (bulles très étirées) sont localisées très près de l'obstacle. Le traitement des images ne peut pas les évaluer, car les relations de voisinage



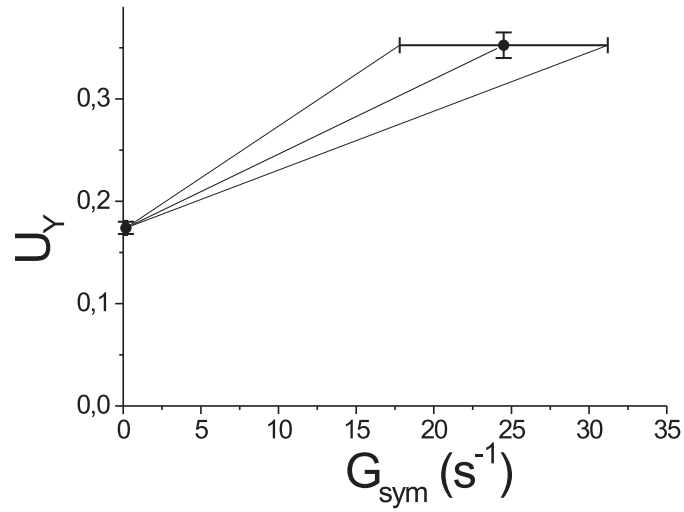


FIG. 4.7 – Estimation du temps de relaxation.  $U_Y$  en fonction de  $G_{sym}$ .

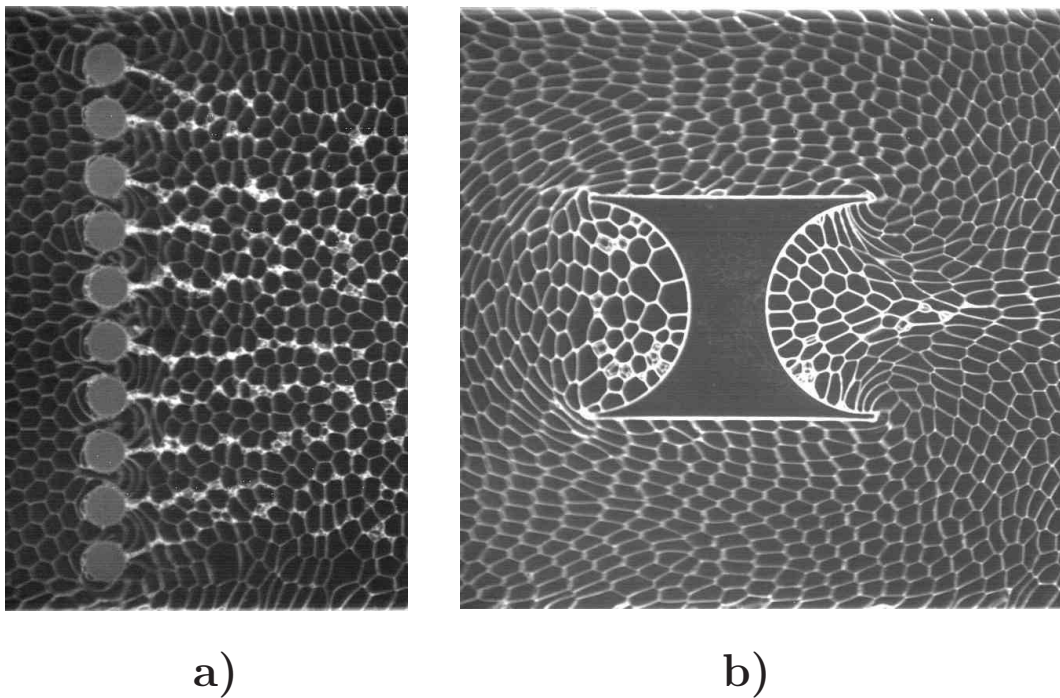


FIG. 4.8 – Autres obstacles utilisés : a) grille composée de 10 cylindres équidistants et de diamètre 6 mm. b) obstacle anti-profilé. Pour l'échelle la dimension verticale est de 10 cm dans les deux cas.

sont alors difficiles à déterminer.

2. Les T1s sont localisés plus près de l'obstacle (figure (4.6e,f)). Cela est

à mettre en relation avec des déformations plus grandes : les bulles se déforment plus avant de se réarranger. Cet effet a déjà été observé pour des mousses 3D [119]. Il faut noter que les champs de  $\bar{T}$  et  $\bar{P}$  correspondent aux changements de voisins, ce qui ne correspond pas à la relaxation complète du T1. Celle-ci est de l'ordre de 10 ms (observation directe de la mousse), mais elle ne change pas beaucoup la position des centres de bulle (cette remarque appuie un peu plus l'utilisation des centres de bulle plutôt que les liens entre vertex pour la construction des outils statistiques (4.4.1)).

3. L'écoulement est légèrement modifié (figure (4.6c,d)). Il présente une plus grande extension en aval de l'obstacle et le sursaut en vitesse est amplifié (4.2). Un léger sursaut apparaît aussi en amont de l'obstacle, mais il est tout juste significatif. L'écoulement ne semble pas fluctuant.

Sur les images, nous constatons aussi un léger effet de dilatance (figure (3.16c)) : le sillage de l'obstacle semble plus humide.

Pour quantifier l'effet du gradient de vitesse sur la déformation, on trace l'un en fonction de l'autre pour les différents RVEs de l'écoulement (figure (4.4)). On estime  $U_Y = 0.35 \pm 0.1$  en prenant les valeurs des 6 RVEs présentant les déformations les plus importantes. A partir des valeurs de  $G_{sym}$  correspondant à ces 6 points, on estime  $G_{sym} = (24 \pm 7) \text{ s}^{-1}$ . L'incertitude vient de ce que la déformation à l'intérieur d'un RVE ne dépend pas seulement du gradient de vitesse local, mais aussi des gradients de vitesse adjacents : le temps de transit d'une bulle à l'intérieur d'un RVE est comparable au temps de relaxation. Pour l'expérience lente correspondante, on a  $U_Y = 0.17 \pm 0.01$  et  $G_{sym} = (0.17 \pm 0.07) \text{ s}^{-1}$ . Ces points sont tracés sur la figure (4.7). La pente  $\tau$  de la droite reliant ces points caractérise le temps de relaxation de la structure. On mesure  $\tau = (7.5 \pm 3) \text{ ms}$ , ce qui est cohérent avec les temps de relaxation des T1s mesurés qualitativement directement sur les images.

On peut alors estimer un nombre de Weissenberg  $Wi = \tau G_{sym}$  qui caractérise l'état hors-équilibre de la structure, ainsi que les non-linéarités dans l'équation d'évolution de la structure (équivalent à l'équation d'évolution de la contrainte dans la littérature) [60]. On mesure alors  $Wi = 0.18$  en prenant  $G_{sym} = 24 \text{ s}^{-1}$  pour cette expérience haute vitesse. Dans les régions proches de l'obstacle, le gradient de vitesse peut être plus important et entraîner des déformations plus importantes, et donc des  $Wi$  un peu plus élevés.

Si l'on augmente encore la vitesse, les bulles deviennent très hors d'équilibre : certaines bulles vont jusqu'à se diviser en deux par contact de faces en vis à vis. Enfin l'étude est limitée par une vitesse maximale au-delà de laquelle la mousse devient instable (3.3.2). On peut donc dire que notre domaine d'étude se limite aux mousses modérément hors-équilibre :  $Wi \leq 1$ .

On peut faire remarquer que des  $Wi$  du même ordre de grandeur pourraient être obtenus avec des écoulements plus lents si le temps de relaxation devient plus important. Ainsi avec un surfactant à base de SDS (respectivement albumine de

sérum de boeuf), Durand et Stone [46] obtiennent dans une cellule d'1 cm de hauteur des  $\tau$  de l'ordre de 0.5 s (respectivement 3.7 s).

Le nombre de Weissenberg quantifie la part des non-linéarités dans l'équation d'évolution de la contrainte élastique (ou de la structure dans notre cas). Comme dans le cas des non-linéarités inertielles [103, 107], ces non-linéarités élastiques peuvent conduire à la turbulence [59, 60]. A 3D, avec des solutions de polymères, ces effets apparaissent pour des  $Wi$  de l'ordre de 1, avec une légère dépendance suivant la géométrie utilisée [60].

Notre dispositif est bien adapté pour essayer d'observer ces effets en géométries 2D avec des objets 2D modérément hors-équilibre ( $Wi \leq 1$ ). Pour cela nous avons varié les géométries d'obstacle : obstacles rond, carré. Nous avons essayé d'induire différentes échelles dans le système en plaçant une grille de cylindres (figure (4.8a)). Enfin, nous avons favorisé de fort gradients de vitesse localisés en testant un obstacle anti-profilé (figure (4.8b)). Dans tous les cas nous n'avons pas détecté (qualitativement) de fluctuations caractéristiques d'une déstabilisation de l'écoulement. La grille n'induit un écart par rapport à l'écoulement bouchon que très localement, avec rupture d'une partie des bulles. La mousse s'adapte à l'obstacle anti-profilé en créant des zones solides en amont et aval de l'obstacle (parties concaves) autour desquelles elle coule. Dans le régime bulles modérément hors-équilibre (pas de cassure ou division de bulle) les non-linéarités élastiques ne semblent pas suffisantes pour déstabiliser l'écoulement.

## 4.2.2 Autres expériences

Nous présentons ici les cartes obtenues pour les autres expériences : expérience très basse vitesse, expérience de Stokes eau-verre par B. Dollet, constriction verre-verre par M. Asipauskas et cisaillement de Couette cylindrique verre-verre par G. Debrégeas, cf (2.1.5). Pour ces différentes expériences nous présentons les champs de  $\bar{U}$ ,  $\bar{G}_{sym}$ ,  $\bar{P}$  et la prédiction de  $\bar{P}$ , cf (4.4.3). Ces champs sont utilisés en (4.4.3) pour valider nos prédictions de plasticité.

### Expérience très basse vitesse

Nous présentons les champs obtenus avec la vitesse d'écoulement la plus faible ( $\Phi = 0.02\%$  et  $V = 0.3$  mm/s). Elle sert de référence pour l'approche de la limite "vitesse d'écoulement tendant vers 0" et c'est pour cette raison que nous la nommons très basse vitesse. Elle est obtenue avec la configuration *pression contrôlée*. Les champs sont représentés sur la figure (4.9). Les champs semblent bien lisses, sauf pour  $\bar{P}$  expérimental qui est plus bruité que les champs de référence (4.1). La différence est due à la statistique : comme l'écoulement est plus lent dans l'expérience très basse vitesse, même en prenant la fréquence d'échantillonnage la plus faible de la caméra, on a environ deux fois moins de T1s enregistrés.

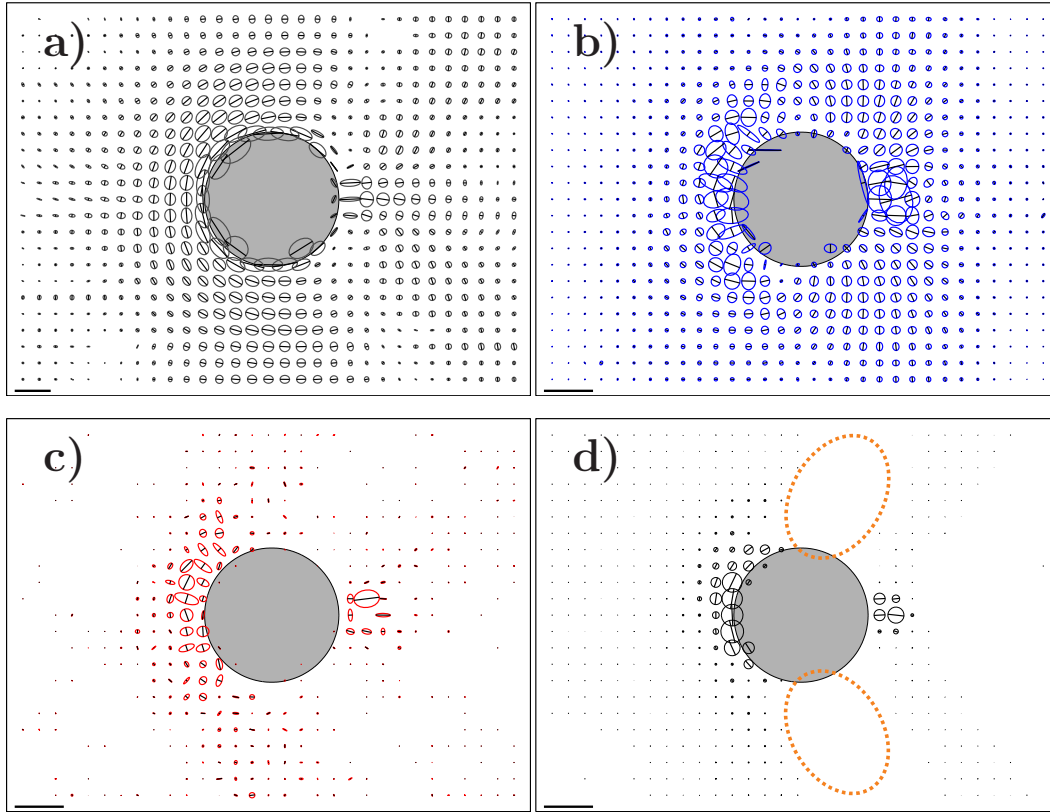


FIG. 4.9 – Champs obtenus pour l'expérience très basse vitesse : (a)  $\overline{\overline{U}}$ , (b)  $\overline{\overline{G}}_{sym}$ , (c)  $\overline{\overline{P}}$  expérimental et (d) prédit. Echelle pour  $\overline{\overline{U}}$  : barre = 1. Echelle pour  $\overline{\overline{G}}_{sym}$  et  $\overline{\overline{P}}$  : barre =  $0.035 \text{ s}^{-1}$ . Ellipses oranges : zones proches de l'obstacle où  $\overline{\overline{U}}:\overline{\overline{G}}_{sym} < 0$ .

### Stokes en eau-verre

Les champs sont représentés sur la figure (4.10). L'écoulement de l'expérience de Stokes en eau-verre est proche de notre configuration expérimentale et les champs sont bien lisses. La mousse présente néanmoins la particularité d'être plus compressible car les bulles ne sont pas confinées dans la troisième direction. Ceci se voit notamment sur la carte de  $\overline{\overline{U}}$  pour laquelle  $\text{Tr}(\overline{\overline{U}})$  est non nulle dans les zones proches de l'obstacle.

Cette expérience est analysée quantitativement ((4.4.3) et [93]) pour la comparaison avec le modèle (cf (4.4.3)).

### Constriction

Les champs sont représentés sur la figure (4.11). Pour l'expérience de constriction, nous constatons que  $\overline{\overline{P}}$  est très proche de  $\overline{\overline{G}}_{sym}$ . Localement tout surplus de déformation est relaxé par les T1s et l'accroissement de déformation se fait

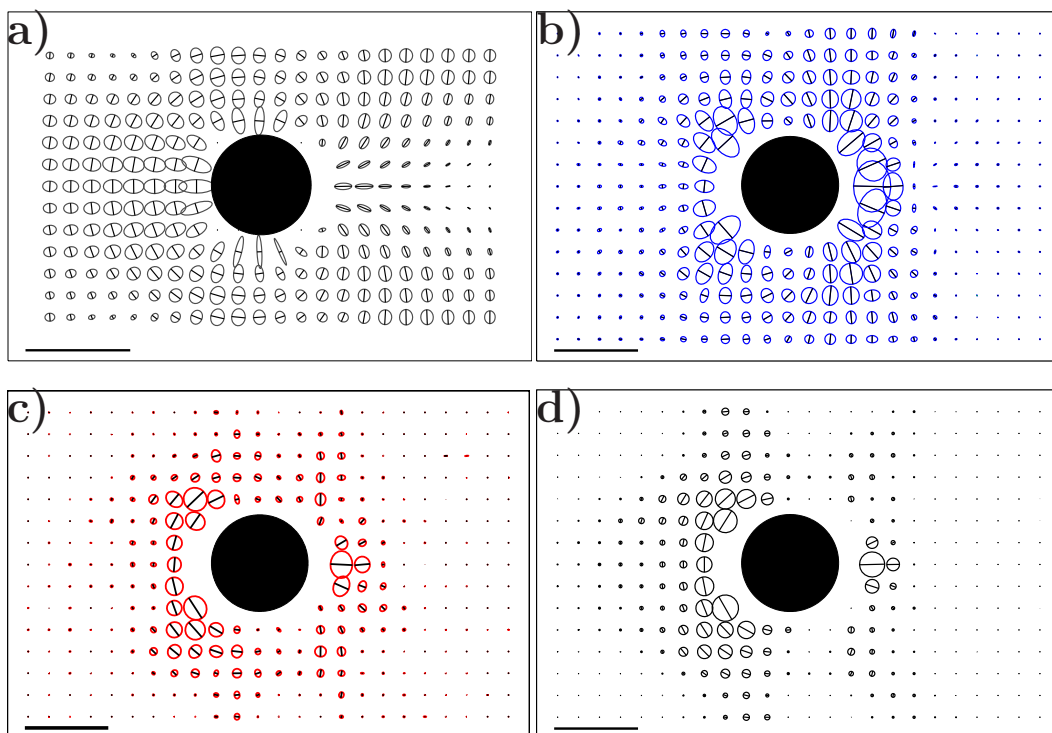


FIG. 4.10 – Champs obtenus pour l'expérience de Stokes eau-verre : (a)  $\bar{U}$ , (b)  $\bar{G}_{sym}$ , (c)  $\bar{P}$  expérimental et (d) prédit. Echelle pour  $\bar{U}$  : barre = 1. Echelle pour  $\bar{G}_{sym}$  et  $\bar{P}$  : barre =  $1 \text{ s}^{-1}$ .

lentement d'un RVE à l'autre le long d'une ligne de courant. Dans ce sens cette expérience est moins hétérogène que l'expérience de Stokes.

### Cisaillement de Couette cylindrique

Les champs sont représentés sur la figure (4.12). Dans cette géométrie l'écoulement est simplifié : il n'y a pas de terme de transport le long d'une ligne de courant du fait de l'invariance par rotation. En régime stationnaire on s'attend alors à ce que l'amplitude de  $\bar{U}$  soit constante le long d'une ligne de courant, et  $\bar{P}$  égal à  $\bar{G}_{sym}$  dans chaque RVE (du moins à l'ordre 1, cf équation (2.28)). On constate que c'est quasiment le cas. En (4.4.1), on montre que  $\bar{G}$  et  $\bar{\nabla}v$  sont comparables, du coup si l'écoulement est incompressible, on s'attend à ce que  $\text{Tr}(\bar{G}_{sym})$  soit nulle. Dans les autres expériences en géométrie confinée cette condition semble satisfaite. Ici de façon surprenante  $\text{Tr}(\bar{G}_{sym})$  est non nulle. Lors de l'analyse d'images, les bulles bougent beaucoup d'une image sur l'autre si l'on compare aux autres expériences, ce qui pourrait entraîner tel effet, du fait d'un échantillonnage trop lent.

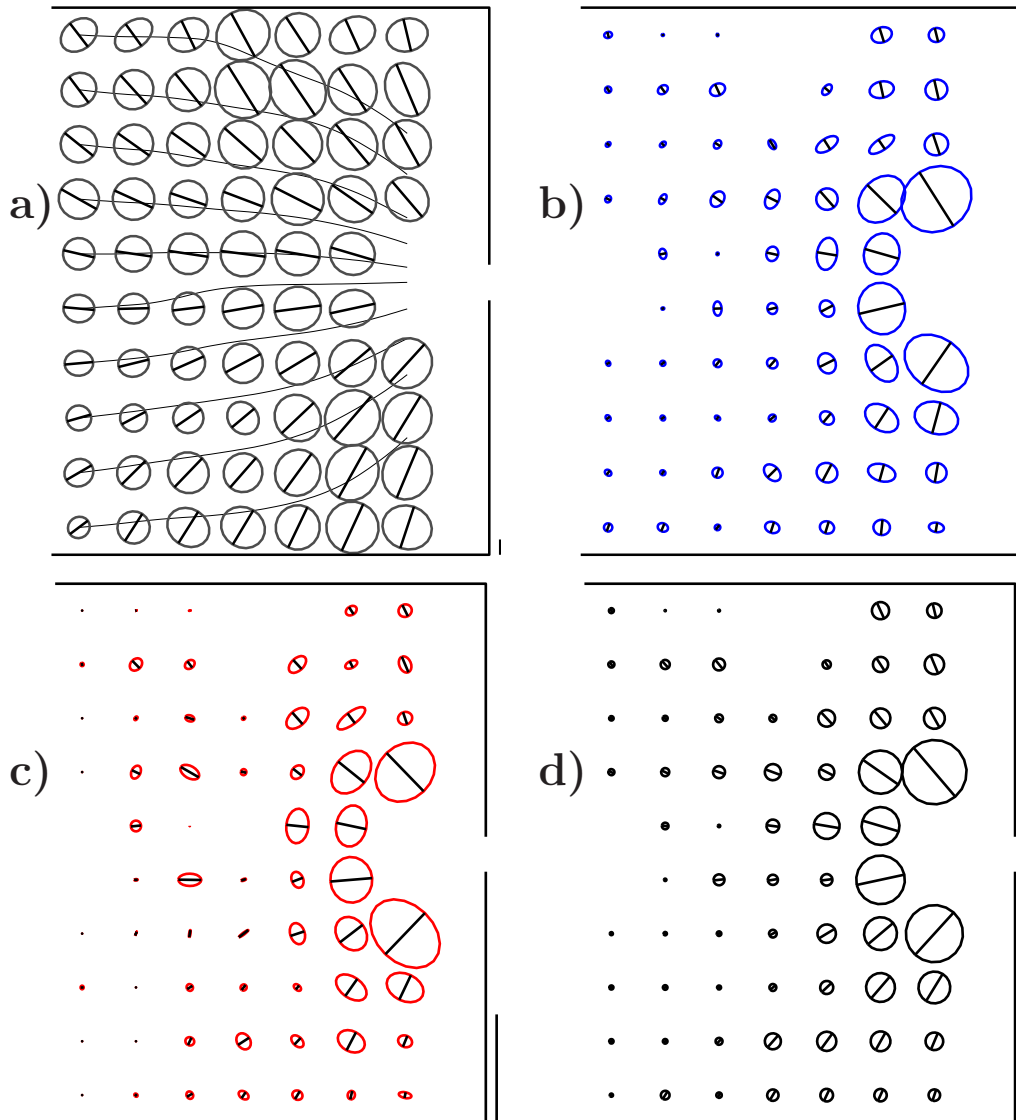


FIG. 4.11 – Champs obtenus pour l'expérience de constriction : (a)  $\bar{U}$ , (b)  $\bar{G}_{sym}$ , (c)  $\bar{P}$  expérimental et (d) prédit. Echelle pour  $\bar{U}$  : barre = 0.1. Echelle pour  $\bar{G}_{sym}$  et  $\bar{P}$  : barre = 0.25 s<sup>-1</sup>. Les lignes continues représentent les lignes de courant.

### 4.2.3 Taille des éléments représentatifs de volume (RVE)

Nous présentons ici le résultat de mesure de champs pour différentes tailles de RVE, en essayant d'appliquer notre approche à de très petites tailles de boîte. On compare des RVEs comprenant respectivement 3.3 et 0.33 bulles par boîte. Les résultats sont représentées sur la figure (4.13) pour une quantité statique  $\bar{U}$ , et figure (4.17) pour deux quantités cinétiques  $\bar{G}$  et  $\bar{\nabla}v$ . Dans les différents cas,

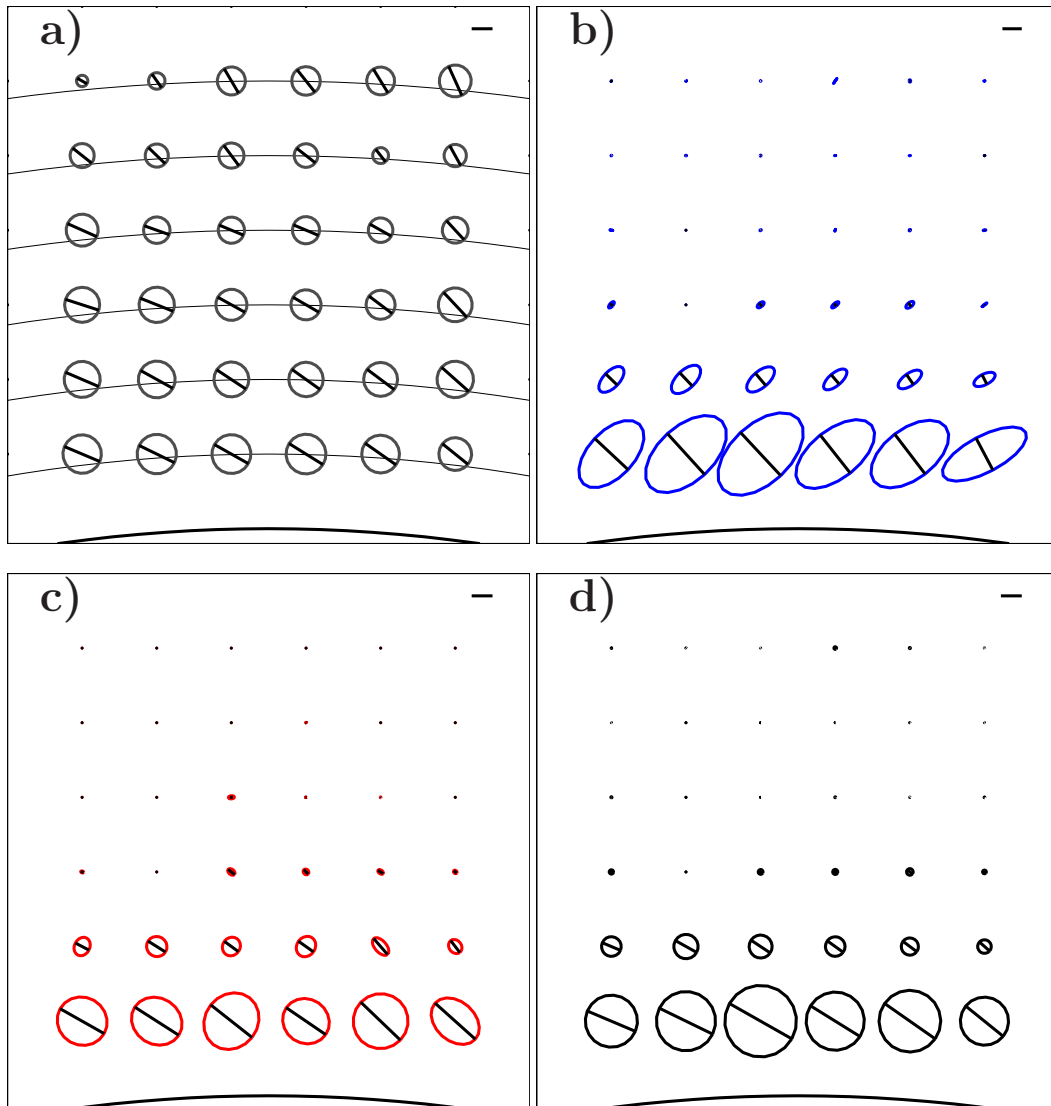


FIG. 4.12 – Champs obtenus pour l’expérience de Couette cylindrique : (a)  $\bar{U}$ , (b)  $\bar{G}_{sym}$ , (c)  $\bar{P}$  expérimental et (d) prédit. Echelle pour  $\bar{U}$  : barre = 0.1. Echelle pour  $\bar{G}_{sym}$  et  $\bar{P}$  : barre = 0.25 s<sup>-1</sup>. Les lignes continues représentent les lignes de courant.

les champs semblent bien lisses et ne présentent pas de variations significatives suivant l’échelle spatiale utilisée.

Dans notre cas, nous moyennons sur 1000 images. Cela qui veut dire que dans le pire des cas la moyenne s’effectue sur 330 bulles (environ 1000 liens), ce qui permet d’avoir une erreur statistique raisonnable. En fait le nombre de bulles effectif est un peu moins élevé, puisque si les images sont prises de façon rapide, on compte plusieurs fois la même bulle.



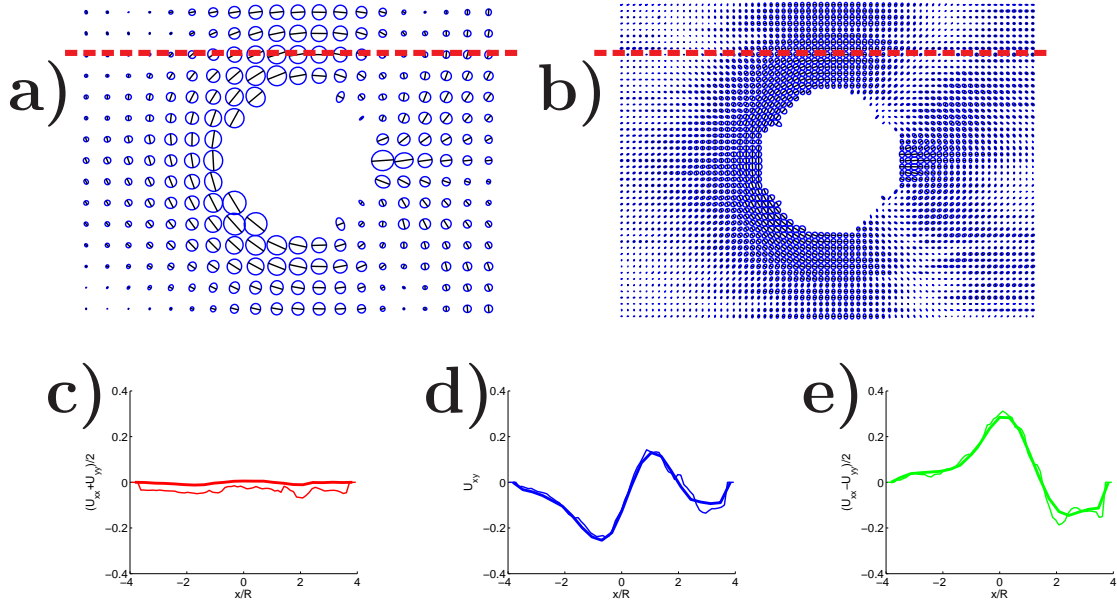


FIG. 4.13 – Effet de la taille des RVEs sur les cartes de  $\bar{U}$ . a) et b) respectivement 3.3 et 0.33 bulles par RVE. Comparaison des composantes selon la ligne rouge : c)  $(xx+yy)/2$ , d)  $xy$ , e)  $(xx-yy)/2$ . Trait épais et fin, respectivement 3.3 et 0.33 bulles par boîte.

## 4.3 Champs des simulations

### 4.3.1 Comparaison avec l'expérience

Sur la figure (4.14) on représente  $\bar{U}$  et  $\bar{\nabla}v_{sym}$  pour la simulation de référence ( $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $\kappa = 2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ,  $l_{canal} = 256 \text{ pix}$ ). Ces champs présentent, de même que les champs expérimentaux, une très forte asymétrie amont-aval. Le sursaut en vitesse à l'arrière de l'obstacle est aussi présent (figure (4.2)). L'amplitude de  $\bar{U}$  sature de même pour une valeur  $U_Y = 0.28 \pm 0.02$ , mais dans une région plus localisée que dans les expériences (il y a 2 RVEs pour lesquels l'amplitude  $U$  est distinctement supérieure). Cette valeur de  $U_Y$  est comparable aux valeurs expérimentales (figure (4.5)). Il est à noter que la distribution spatiale de la représentation de  $\bar{U}$  se rapproche plus de l'expérience très basse vitesse (figure (4.9)) que des expériences plus rapides (figure (4.1)). Pour ces dernières, les déformations sont moins localisées dans le sillage juste derrière l'obstacle, mais plus diffuses. Ce point sera discuté dans la partie (6.1).



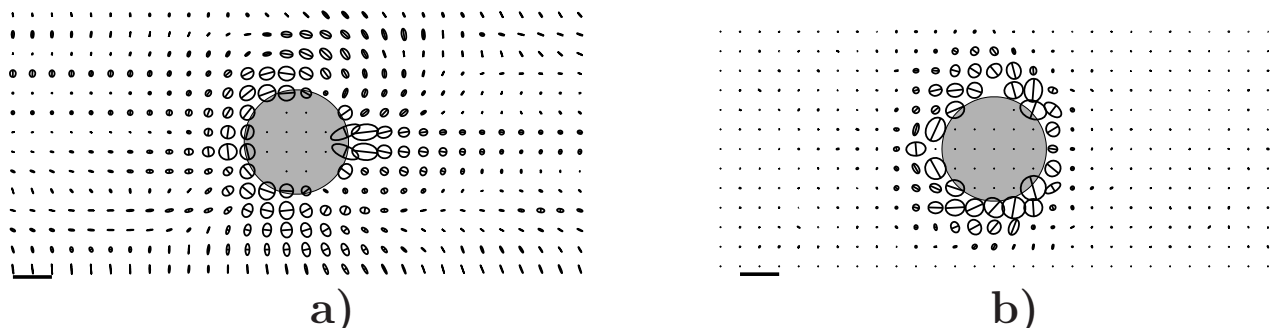


FIG. 4.14 – Champs obtenus avec une simulation ( $A = 100 \text{ pix}^2$ ,  $\kappa = 2$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ,  $l_{canal} = 256 \text{ pix}$ ). a)  $\overline{U}$ . b)  $\overline{G}_{sym}$ . Echelle pour  $\overline{U}$  : barre = 0.53 et pour  $\overline{G}_{sym}$  : barre = 0.05  $\text{MCS}^{-1}$ .

### 4.3.2 Champs de pression

Contrairement aux expériences confinées, les simulations permettent de changer la compressibilité des bulles et de donner accès à une mesure de la pression (2.3.1). On travaille avec une mousse compressible ayant les caractéristiques suivantes :  $\langle A \rangle = 289 \text{ pix}^2$ ,  $\kappa = 0.1$ ,  $d_o = 74 \text{ pix}$ ,  $l_{canal} = 256 \text{ pix}$ .

L'effet de la polydispersité peut être étudié car les simulations permettent d'obtenir un bon mélange des différentes tailles de bulle. La polydispersité est caractérisée par l'écart-type relatif des aires de bulle  $\delta A / \langle A \rangle$  défini en (3.4.7). Les différentes distributions d'aire sont représentées sur la figure (4.15). L'asymétrie amont-aval est une nouvelle fois marquée, avec une extension qui augmente en amont de l'obstacle avec la polydispersité, mais semble inchangée en aval. Une coupe suivant l'axe de symétrie ( $y = 0$ ) est représentée sur la figure (4.16). La force de pression sur l'obstacle est étudiée en (3.4.6).

## 4.4 Propriétés de la mousse

### 4.4.1 Affinité : comparaison $\overline{G}$ - $\overline{\nabla v}$

L'idée de cette comparaison est de faire le lien entre deux grandeurs dont la détermination est différente :  $\overline{G}$  est mesuré sur les liens, puis moyenné.  $\overline{\nabla v}$  résulte d'une moyenne, suivie d'une dérivée spatiale. Or elles sont égales si la déformation est affine et homogène (équation (C.2) et [57]). Lors d'un T1 le mouvement des liens entre vertex  $\vec{L}$  impliqués n'est pas affine, donc  $\overline{G}$  construit à partir de ces liens ne pourrait pas être égal à  $\overline{\nabla v}$ . On pose ici la question de savoir ce qu'il en

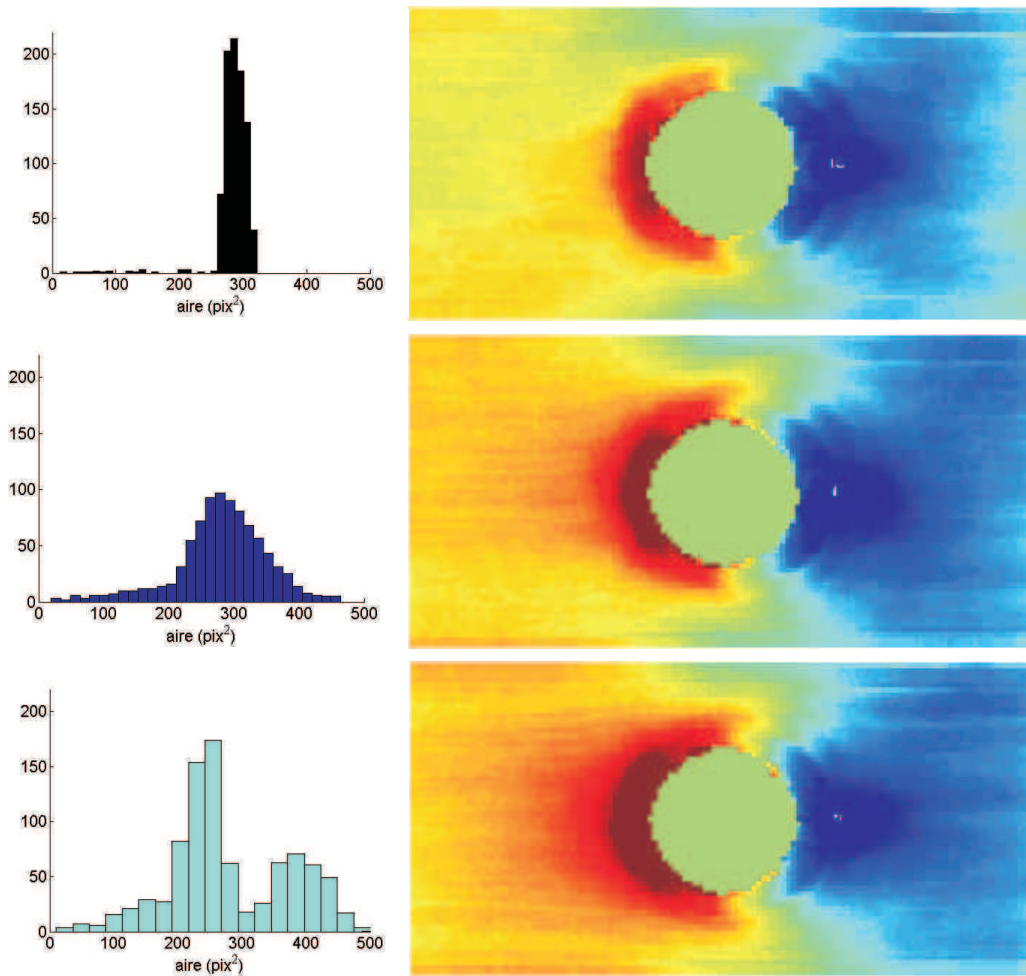


FIG. 4.15 – Pression et polydispersité. Histogramme des aires (gauche) et champ de pression (droite) pour les différentes distributions pour une boîte de moyenne de 8 pix. De haut en bas,  $\delta A/\langle A \rangle = 0.11$  monodisperse (noir), 0.25 large (bleu) et 0.34 bidisperse (cyan). Rouge et bleu, respectivement hautes et basses pressions.

est pour nos grandeurs construites sur les liens  $\vec{\ell}$  entre centres de bulle.

Sur la figure (4.17) on trace les cartes des 2 champs avec deux tailles de boîte, respectivement 3.3 et 0.33 bulles par boîte, pour l'expérience très basse vitesse ( $V = 0.30$  mm/s). La comparaison des composantes ou l'orientation des ellipses donne des points très proches de la droite unité (figure (4.18)). Ce résultat semble indiquer que le mouvement des centres de bulle dû à un T1 est suffisamment faible pour ne créer aucune non-affinité détectable. De plus (annexe (C)), pour un écoulement affine avec des gradients de vitesse inhomogènes à l'intérieur d'un RVE, la différence entre  $\overline{\overline{G}}$  et  $\overline{\overline{\nabla v}}$  est du second ordre : elle est négligeable si la texture reste à peu près homogène à l'intérieur du RVE.

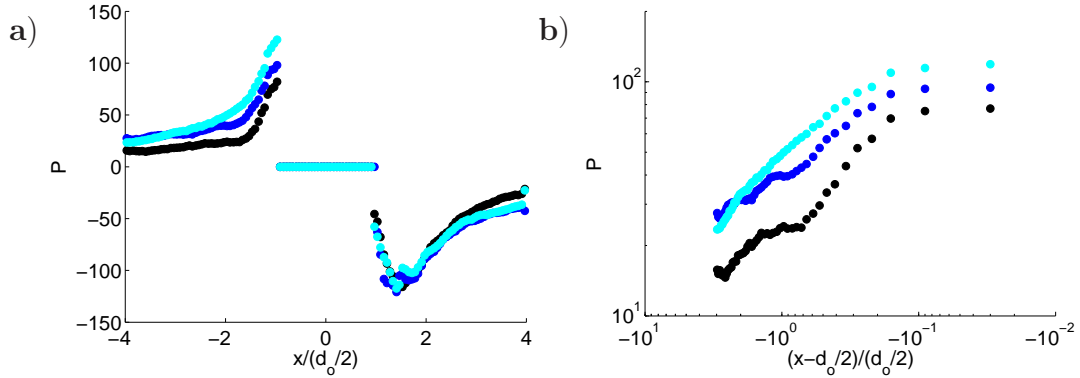


FIG. 4.16 – Champ de pression. (a) Coupe le long de l’axe  $y = 0$  :  $\delta A/\langle A \rangle = 0.11$  (noir), 0.25 (bleu) et 0.34 (cyan). (b) graphique log-log de la partie en amont de l’obstacle.

Finalement, travailler avec l’une ou l’autre des grandeurs revient au même :

$$\overline{\overline{G}} \simeq \overline{\overline{\nabla v}} . \quad (4.8)$$

Pour des raisons pratiques on peut préférer travailler avec l’une ou l’autre.

Ce rapprochement entre  $\overline{\overline{G}}$  et  $\overline{\overline{\nabla v}}$  est d’autant plus important qu’il permet de fermer le système d’équations constitutives (6.1.1).

#### 4.4.2 Elasticité

Cette étude valide les études précédentes de la relation contrainte-déformation élastique basée sur  $\overline{\overline{U}}$  [3, 22, 68], mais cette fois avec un tenseur basé sur les centres de bulle. Sur la figure (4.19) on représente les composantes déviatoriques des contraintes élastiques en fonction des composantes de  $\overline{\overline{U}}$  pour l’expérience présentée en (4.2.1). La relation est linéaire et isotrope jusqu’à des déformations importantes de l’ordre de 0.3. Ceci justifie notamment le terme de déformation élastique pour  $\overline{\overline{U}}$ .

Une telle relation est aussi obtenue pour des simulations de cisaillement, voir (2.2.5) et figure (4.20). Pour ces simulations on a directement pu vérifier que l’énergie fournie au système sous forme de travail se retrouve bien dans l’énergie d’interface de la mousse et est dissipée par les T1s (les écarts par rapport à la droite de pente 1 correspondent à l’énergie dissipée par les T1s).

Un calcul analytique pour le cas d’une mousse parfaitement ordonnée montre que la linéarité est valable jusqu’à un ordre 2 en déformation imposée pour un cisaillement simple [41] et en écoulement élongationnel (annexe (A)). En plus des propriétés citées dans l’introduction (1.2.2), comme le fait que  $\overline{\overline{U}}$  reste valide même après réarrangement de bulles, ou le fait qu’il coïncide avec la définition

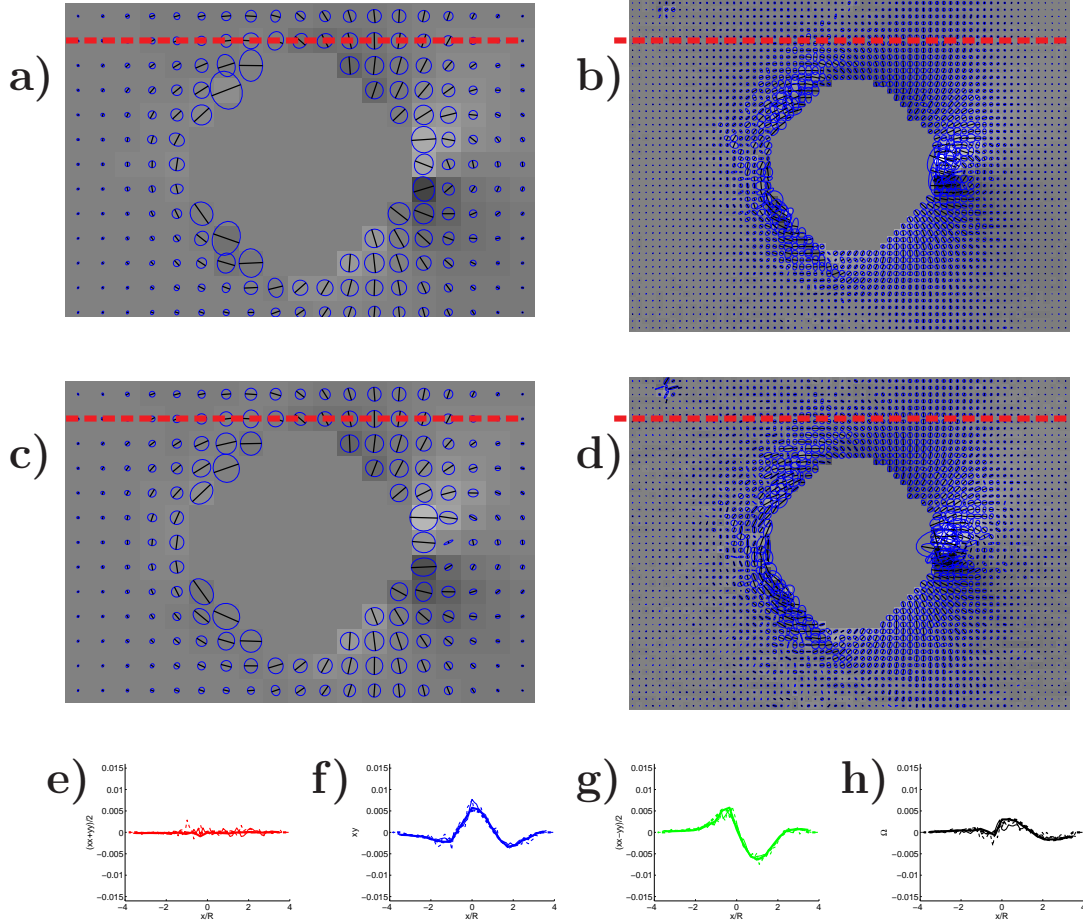


FIG. 4.17 – Vérification de l'hypothèse d'affinité. Expérience très basse vitesse. Représentation de  $\overline{\overline{G}}$  (a,c) et  $\overline{\overline{\nabla v}}$  (b,d) pour deux tailles de boîtes, respectivement 3.3 et 0.33 bulles par boîte. Comparaison des composantes selon la ligne rouge : trait plein :  $\overline{\overline{G}}$ , tirets :  $\overline{\overline{\nabla v}}$ . Trait épais et fin, respectivement 3.3 et 0.33 bulles par boîte. e)  $(xx+yy)/2$ , f)  $xy$ , g)  $(xx-yy)/2$ , h)  $\Omega$ .

classique de l'élasticité à faible déformation, le calcul analytique montre que ce tenseur offre l'avantage d'avoir une trace nulle jusqu'à un ordre 2 en déformation incompressible imposée.

### 4.4.3 Plasticité dans le régime *bulles relaxées*

#### Modèle

Dans cette partie la plasticité est décrite à partir d'un modèle phénoménologique qui généralise le modèle élasto-plastique du pinceau décrit en introduction (1.2.2).

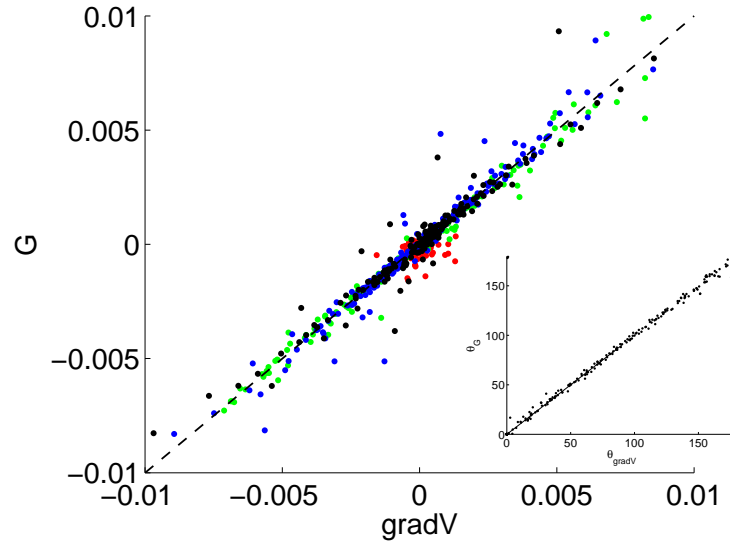


FIG. 4.18 – Comparaison de  $\overline{\overline{G}}$  et  $\overline{\overline{\nabla v}}$ . Les composantes de  $\overline{\overline{G}}$  sont tracées en fonction de celles de  $\overline{\overline{\nabla v}}$ . Mêmes données et légende que les figures (4.17a,c). En insert, on compare l'orientation des ellipses. Pointillés : droite unité.

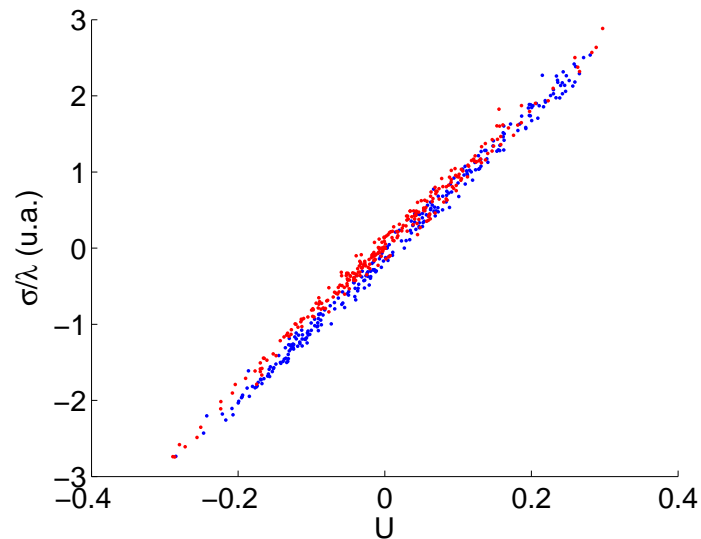


FIG. 4.19 – Contrainte en fonction de la déformation élastique pour l'expérience de la figure (4.1). Deux points par RVE : en rouge la composante tangentielle  $xy$ , en bleu la moitié de la différence des composantes normales  $(xx-yy)/2$ .

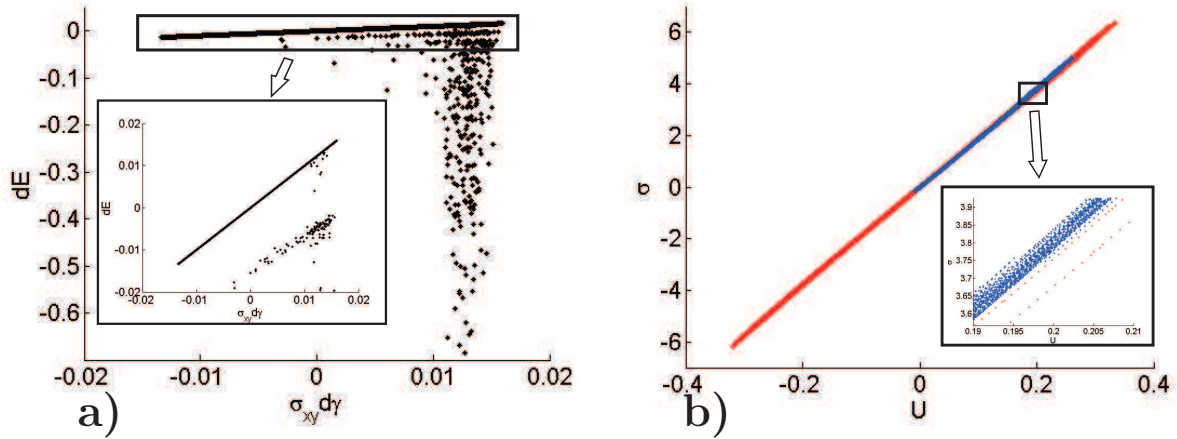


FIG. 4.20 – Données à chaque pas de temps (7200 points) d’une simulation de cisaillement de Couette (couleur bleue dans tableau (2.1)) : (a) variation de l’énergie d’interface de la mousse (tension de ligne  $\times$  périmètre total de la mousse 2D) en fonction du travail fourni par les forces extérieures entre deux pas de temps. (b) même légende que la figure (4.19). Les lucarnes correspondent à des zooms.

Les conséquences de cette généralisation sont décrites dans le chapitre (5). L’idée est de prédire les T1 à partir de l’état actuel de la mousse :  $\bar{U}$  et  $\bar{G}$ . Avec des hypothèses raisonnables, détaillées dans la référence [93], nous prédisons :

$$\text{si } \bar{G}_{sym} : \bar{U}_d < 0, \quad \bar{P} = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{si } \bar{G}_{sym} : \bar{U}_d > 0, \quad \bar{P} = h(U_d) \frac{(\bar{G}_{sym} : \bar{U}_d) \bar{U}_d}{2U_d^2}. \quad (4.10)$$

Cette équation fait apparaître le produit contracté de tenseurs de rang 2, défini par  $\bar{A} : \bar{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ , ainsi que  $\bar{U}_d$  qui désigne la partie déviatorique de  $\bar{U}$  (donc l’élongation sans la compression) :

$$\bar{U}_d \equiv \bar{U} - \frac{1}{2}(\text{Tr } \bar{U}) \bar{I}. \quad (4.11)$$

Ce modèle suppose que lorsque le taux de déformation appliqué  $\bar{G}_{sym}$  est opposé à la déformation élastique ( $\bar{G}_{sym} : \bar{U}_d < 0$ ), le matériau est déchargé élastiquement et n’est pas le siège de T1. Dans le cas contraire la plasticité est décrite à partir de l’état actuel du matériau ( $\bar{U}_d$  et  $\bar{G}_{sym}$ ) et par la fonction  $h$ , dépendant de l’amplitude de  $\bar{U}_d$ , que l’on appelle proportion de plasticité. Cette fonction  $h$  vaut 1 en  $U_d$ , valeur à saturation de  $U_d$ . Cette valeur a été déterminée pour les différentes expériences (figure (4.5)).

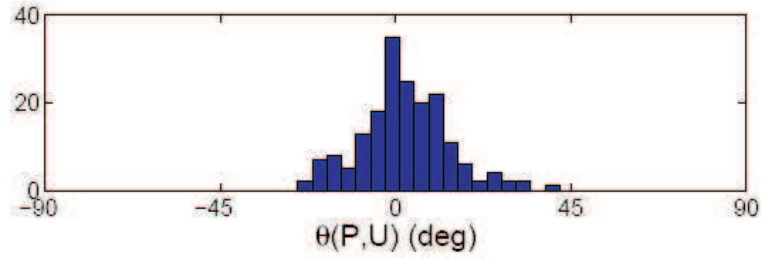


FIG. 4.21 – Histogramme de la différence de direction entre  $\bar{P}$  et  $\bar{U}$ . On trouve un angle de  $0^\circ \pm 9^\circ$ .

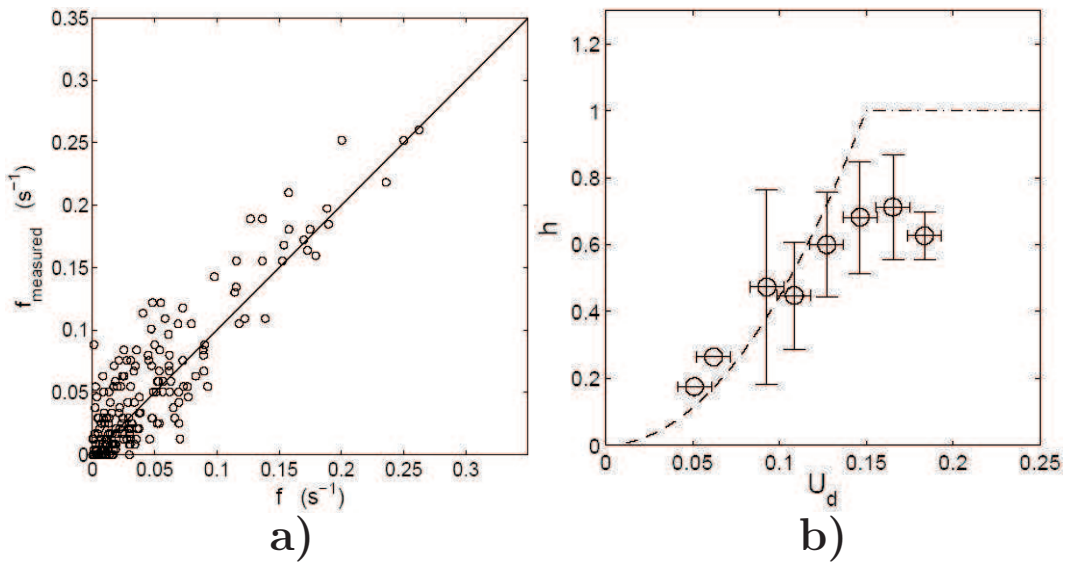


FIG. 4.22 – Prédiction de la fréquence des T1s. a) Fréquence expérimentale en fonction de la fréquence prédite, en prenant dans le modèle (équation (4.10))  $h = \min((U_d/U_Y)^2, 1)$  et  $U_Y = 0.15$ . b) Evaluation directe de  $h$ . On trace  $h \simeq P/G_{sym}$  fonction de  $U_d$  en regroupant les points expérimentaux ayant des  $U_d$  proches (barres horizontales).  $h$  modèle (équation (4.15)) est tracé en pointillé.

## Mesures

Les résultats et figures présentés dans ce paragraphe sont tirés de l'expérience eau-verre, cf (4.2.2). Elles permettent de vérifier les différentes hypothèses qui ont permis d'arriver à la formule (4.10).

- $\bar{P}$  et  $\bar{U}$  semblent alignés (mêmes directions propres et même signe), ce qui signifie qu'en moyenne les T1s se font dans la direction d'élongation des bulles. Ce résultat se voit sur la figure (4.21) et est en accord avec des résultats sur l'étude de T1s dans une mousse vieillissante [136].

- La représentation de  $\bar{P}$  sur les cartes est quasiment circulaire ( $\text{Tr } \bar{P}$  quasi-



ment nulle). Les T1s relâchent donc de la déformation sans comprimer le milieu. Si on considère la plasticité moyenne engendrée par un T1, notée  $\delta \bar{U}$ , on s'attend à avoir

$$\delta \bar{U} = \varepsilon_0 \frac{\bar{U}_d}{U_d}. \quad (4.12)$$

$\varepsilon_0$  est l'amplitude de la plasticité engendrée par un T1 et  $\bar{P}$  prend la forme

$$\bar{P} = f \delta \bar{U}, \quad (4.13)$$

où  $f$  est la fréquence des réarrangements par unité de liens comme définie en (2.3.1) :  $f = \dot{N}_a/N_{tot} = \dot{N}_d/N_{tot}$ . On estime  $\varepsilon_0$  à partir de l'amplitude de  $\bar{P}$  et de  $f$  expérimentales :  $\varepsilon_0 \simeq 1.2 \pm 0.2$ .

• La fréquence  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{si } \bar{G}_{sym} : \bar{U}_d > 0, \quad f &= \frac{h(U_d)}{2\varepsilon_0 U_d} \left( \bar{G}_{sym} : \bar{U}_d \right), \\ \text{si } \bar{G}_{sym} : \bar{U}_d < 0, \quad f &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans le cas de l'expérience eau-verre, une fonction  $h$  prise par simplicité sous la forme

$$h = \min \left( \left( \frac{U_d}{U_Y} \right)^2, 1 \right) \quad (4.15)$$

avec  $U_Y = 0.15$  est en accord avec l'expérience (figure (4.22a)).

Une estimation préliminaire directement à partir des données est testée : si on suppose que  $\bar{U}_d$  et  $\bar{G}_{sym}$  sont orientés dans la même direction, alors  $\bar{G}_{sym} : \bar{U}_d = 2G_{sym}U_d$  et on estime  $h = P/G_{sym}$ . Sur la figure (4.22b) on trace cette estimation de  $h$  fonction de  $U_d$ . On constate que  $h$  croît plus ou moins comme la fonction proposée, mais a une valeur maximale en-deçà de 1, qui est la valeur que l'on attend pour  $h$  à saturation (1.2.2). On sous-estime en fait  $h$  par la prise en compte de points pour lesquels  $\bar{U}_d$  et  $\bar{G}_{sym}$  ne sont pas alignés. Ils peuvent même être en opposition ( $\bar{G}_{sym} : \bar{U}_d < 0$ ), c'est à dire des points pour lesquels les bulles se rétractent sans se réarranger (ellipses oranges sur l'exemple de la figure (4.9)). Dans le cas de l'expérience de constriction,  $\bar{U}_d$  et  $\bar{G}_{sym}$  sont en général bien alignés et cette estimation donne de meilleurs résultats [93]. Le faible nombre de T1s par RVE limite pour le moment une détermination précise de la forme de  $h$  par cette méthode directe.

## Cartes

On compare les cartes de  $\bar{P}$  avec la prédiction pour les différentes expériences de la partie (4.2.2). Les cartes du modèle sont tracées sur les figures correspondantes (4.9,4.10,4.11,4.12). Dans tous les cas on a pris le  $h$  de l'équation (4.15).  $U_Y$



est mesuré directement à partir des valeurs de  $U_d$  à saturation, soit respectivement 0.35, 0.15, 0.32 et 0.15. L'accord est bon quelle que soit l'expérience. L'expérience de Stokes joue un rôle déterminant dans la validation du modèle. L'écoulement fortement hétérogène donne accès à des points de mesure très différents. Ainsi, il y a une région étendue où des bulles sont déformées mais pour laquelle le taux de déformation appliquée  $\overline{G}_{sym}$  est opposée à la déformation élastique (exemple sur la figure (4.9d)). On vérifie bien que dans cette région il n'y a pas de T1, comme on le suppose avec l'équation (4.10).

Il semblerait donc que l'on soit en mesure de décrire la plasticité à partir de l'état local de la mousse et de la fonction  $h$ , proportion de plasticité, dont la forme est discutée en (5.4.3). Notre analyse se base sur des champs stationnaires, bien qu'en réalité le mouvement d'une bulle unique au cours du temps soit loin d'être simple, notamment dans les écoulements type Stokes. Une telle forme pour la plasticité en régime transitoire est testée dans le chapitre (5). A noter aussi que cette étude est valable car les écoulements étudiés sont suffisamment lents pour permettre aux bulles de relaxer. A haute vitesse, avec des déformation supérieures à  $U_Y$  et des T1s qui relâchent beaucoup plus de déformation, il faut un modèle dynamique (6.1.2).

## 4.5 Conclusion

Dans cette partie nous avons représenté les différentes cartes pour les expériences (4.2) et simulation (4.3) en régime permanent.

Plus la mousse est sèche, plus les bulles peuvent se déformer et plus les réarrangements sont localisés proches de l'obstacle. Le tracé de  $U_Y$  (0.15 à 0.36), déformation à saturation, en fonction  $\Phi_{eff}$  ( $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ ) pour les différents systèmes est en accord (4.2.1).  $U_Y$  ne semble pas dépendre de la forme d'écoulement (cisaillement, élongation).

En augmentant la vitesse (4.2.1), les bulles peuvent se déformer encore plus, car elles n'ont plus le temps de relaxer. On peut définir un nombre de Weissenberg localement :  $Wi = \tau G_{sym}$  pour caractériser l'écart à la relaxation et les non-linéarités dans l'équation d'évolution de la structure.  $G_{sym}$  est le gradient de vitesse symétrisé local et  $\tau$  le temps de relaxation de la structure (environ 10 ms). Différents obstacles sont testés (rond, carré, grille de cylindres, anti-profilé) pour essayer d'augmenter les non-linéarités élastiques. On atteint  $Wi \leq 1$ , après quoi la mousse casse avant d'observer des non-linéarités.

L'utilisation de tenseurs statistiques basés sur les centres des bulles, plutôt que sur les vertex de paroi, est validée :

1. malgré les réarrangements, les centres de bulles évoluent suivant le gradient de vitesse local, ce qui n'est pas le cas des vertex de paroi. On vérifie que

$\bar{G} \simeq \bar{\nabla} v$ , signe d'un mouvement affine (4.4.1).

2. la relation des composantes déviatoriques de  $\bar{\sigma}^{el}$  en fonction de celles de  $\bar{U}$  est bien linéaire, au moins jusqu'à des déformations de 0.3 (4.4.2).
3. on généralise aux tenseurs le modèle scalaire du pinceau : on est en mesure de décrire la plasticité à partir de l'état local de la mousse et de la fonction  $h$ , proportion de plasticité (4.4.3). L'accord est bon pour la fréquence, la direction et la distribution spatiale des T1s. Différentes géométries sont testées.
4. on a vérifié que les champs semblent toujours continus jusqu'à des échelles inférieures à la taille de la bulle (4.2.3).



# Chapitre 5

## Écoulement simplifié : étude transitoire

### 5.1 Modèle

#### 5.1.1 Motivation

On se propose dans cette partie d'étudier la réponse transitoire de la mousse et compléter ainsi l'étude en régime stationnaire du chapitre précédent. Notamment, on teste sur la réponse transitoire d'un écoulement de mousse la forme tensorielle de l'équation d'évolution de la structure proposée dans le chapitre précédent (4.4.3). Cette équation est une généralisation tensorielle du modèle scalaire élasto-plastique du pinceau présenté en introduction (1.2.2). Elle peut servir de modèle pour l'étude d'autres matériaux cellulaires ou particuliers. Elle s'intègre avec l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (équation (6.1)) dans un système d'équations fermé (6.1).

Pour cela on se place dans une géométrie simplifiée (cisaillement de Couette). On va étudier les prédictions qui découlent de cette équation et les comparer à des simulations quasistatiques (présentées en (2.2.5)), ce qui nous assure que les bulles ont le temps de relaxer. On impose une déformation et non pas une contrainte aux mousses. cela nous permet d'étudier uniquement l'équation d'évolution de la structure, sans passer par l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (équation (6.1)).

Nous choisissons de travailler avec l'équation d'évolution de  $\bar{M}$  (équation (2.24)). Celle-ci a l'avantage d'être développée exactement en fonction des différentes grandeurs statistiques, contrairement à l'équation d'évolution de  $\bar{U}$  (équation (2.28)). En revanche nous choisissons de représenter  $\bar{U}$  car cette grandeur fait le lien avec les contraintes élastiques (voir (4.4.2)) et est donc le paramètre mécanique important ;  $\bar{U}$  se déduit directement de  $\bar{M}$ , via sa définition (équation (2.25)).

### 5.1.2 Hypothèses

Les différents résultats présentés dans le chapitre (4) permettent de fermer le système d'équations (cf (6.1.2)) :

- La section (4.4.1) suggère que :

$$\bar{\bar{G}} \simeq \bar{\bar{\nabla}} \bar{\bar{V}} . \quad (5.1)$$

• D'après le résultat présenté en (4.4.3),  $\bar{\bar{U}}$  et  $\bar{\bar{P}}$  sont alignés. Il en est de même pour  $\bar{\bar{M}}$  qui par définition est alignée avec  $\bar{\bar{U}}$  (pour un  $\bar{\bar{M}}_0$  isotrope).  $\bar{\bar{T}}$  se déduit alors directement en inversant l'équation (2.27) définissant  $\bar{\bar{P}}$  :

$$\bar{\bar{T}} = - \left( \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} \right) \mathcal{H} \left( \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} \right) h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} \cdot \bar{\bar{M}} . \quad (5.2)$$

Dans cette expression, nous avons utilisé la première hypothèse (équation (5.1)) et supposé que  $\text{Tr}(\bar{\bar{U}}) = 0$ . Cette hypothèse est exacte pour le modèle et est bien vérifié pour les écoulements de mousses incompressibles (figure (4.1d)) par exemple), dont les simulations utilisées dans ce chapitre (figure (5.1)). La fonction Heaviside  $\mathcal{H}$  est utilisée pour tenir compte du fait qu'il n'y a pas de T1 lorsque la déformation élastique  $\bar{\bar{U}}$  et le taux de déformation appliqué  $\bar{\bar{G}}_{sym}$  (remplacé ici par  $\bar{\bar{\nabla}} v_{sym}$ ) ne sont pas dans le même sens ( $\bar{\bar{U}} : \bar{\bar{G}}_{sym} < 0$ ).  $h$  est la fonction proportion de plasticité (1.2.2) et vaut 1 en  $U = U_Y$ .

### 5.1.3 Equations

Le modèle présenté ici est a priori local, mais nous l'étudions dans la suite du chapitre en moyennant sur tout l'échantillon. Dans ce cas le terme de transport est nul :

$$\frac{d \bar{\bar{M}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\bar{M}}}{\partial t} .$$

L'équation d'évolution de la structure prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{\bar{M}}}{\partial t} = \bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{\nabla}} v + \bar{\bar{\nabla}} v^t \cdot \bar{\bar{M}} - \left( \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} \right) \mathcal{H} \left( \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} \right) h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \frac{\bar{\bar{U}}}{\bar{\bar{U}}} \cdot \bar{\bar{M}} . \quad (5.3)$$

On retrouve dans cette équation d'évolution de la structure un terme de charge, c'est-à-dire une déformation de la structure liée à l'écoulement ; et un terme de relaxation de la structure, du fait des T1s.

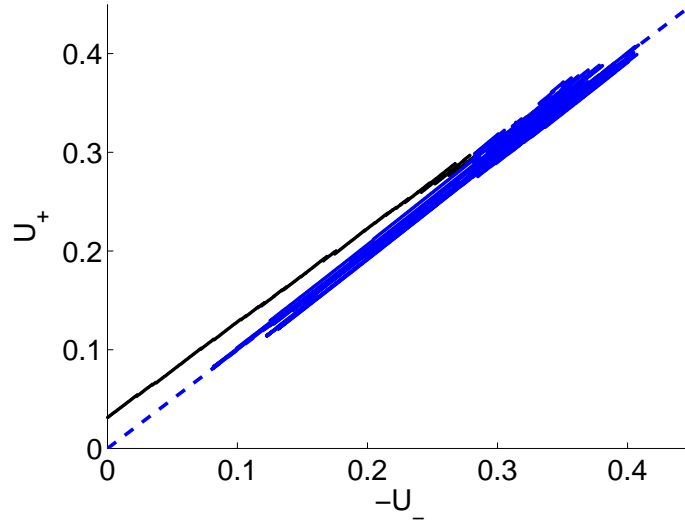


FIG. 5.1 – Vérification de l’hypothèse  $\text{Tr}(\overline{U}) = 0$  (simulation bleue, voir tableau (2.1) et figure (2.16b)). Pour cela on trace la valeur propre positive  $U_+$  en fonction de l’opposée de la valeur propre négative  $-U_-$ . Un point représente un pas de temps. Noir : premiers points de la simulation correspondant à l’évolution à partir de la structure Voronoï. La droite pointillée est de pente unité.

#### 5.1.4 Tests

Nous allons tester nos équations sur une géométrie de cisaillement de Couette (figure (5.2)),  $x$  représentant la direction du cisaillement et  $y$  la direction orthogonale. On impose une déformation  $\gamma$  globale définie par  $\gamma = d/L$ ,  $d$  étant le déplacement des bulles du haut par rapport à celles du bas, et  $L$  la hauteur de la mousse dans la direction  $y$ . D’après la géométrie du système, la composante  $\partial_y v_x$  du gradient de vitesse est la seule non nulle ; elle est égale au taux de déformation  $\dot{\gamma}$  (dérivée temporelle de  $\gamma$ ). Cela revient à dire que l’on impose un gradient de vitesse de la forme

$$\overline{\nabla}v = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_x v_y \\ \partial_y v_x & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Rappelons qu’on prend ici la convention définie au chapitre (2) :  $(\overline{\nabla}v)_{ij} = \partial v_i / \partial_j$ . En injectant cette expression dans l’équation d’évolution de la structure (5.3), on déduit directement l’évolution de  $\overline{M}$ . On montre alors (Annexe (B)) que l’équation d’évolution de la structure est en fait quasistatique et que la variable pertinente est la déformation imposée  $\gamma$  (et non pas le temps, ou le taux de déformation). La résolution numérique de l’équation d’évolution est implémentée avec une méthode de différences finies, dont on trouve une convergence robuste en prenant des pas de déformation suffisamment petits.

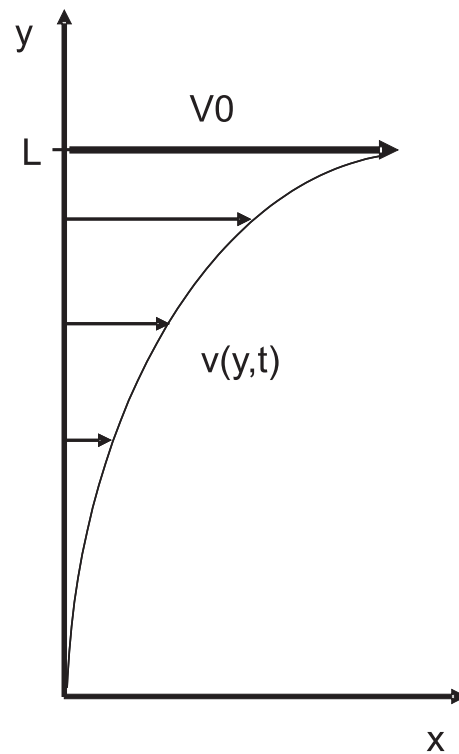


FIG. 5.2 – Géométrie du cisaillement de Couette. Toutes les quantités sont indépendantes de  $x$ , direction de l'écoulement

Nous représentons l'évolution de  $\bar{U}$ , et de  $U_{xy}$  : en effet cette composante de  $\bar{U}$  est proportionnelle à la contrainte extérieure tangentielle (voir (4.4.2)), qui est la grandeur mesurée en pratique dans les expériences. On représente aussi les *trajectoires propres* et *trajectoires des composantes* comme définies en (2.3.2). Ces deux trajectoires portent les mêmes informations, mais l'une peut être plus pratique que l'autre suivant le cas.

## 5.2 Régime élastique

On étudie ici le régime purement élastique. Cette partie s'applique donc à tout matériau cellulaire ou particulaire pour lequel on peut définir des relations de topologie et ne subissant pas de réarrangement. L'équation (5.3) devient :

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = \bar{M} \cdot \bar{\nabla} v + \bar{\nabla} v^t \cdot \bar{M}.$$

On retrouve seulement le terme de charge (déformation imposée) et le matériau ne peut pas relâcher de déformation (cas sans T1 s'il s'agit d'une mousse).

Notre formalisme permet de décrire le régime purement élastique. Bien que ce formalisme ne soit pas nécessairement le meilleur comparé au formalisme de la cinématique des grandes déformation [84], il reste tout de même bon et a déjà été validé par des études précédentes (4.4.2). Nous approfondissons ici le régime élastique avec notre formalisme, en présentant notamment les représentations, qui seront utiles lors du passage au régime élasto-plastique.

### 5.2.1 Matériau initialement isotrope

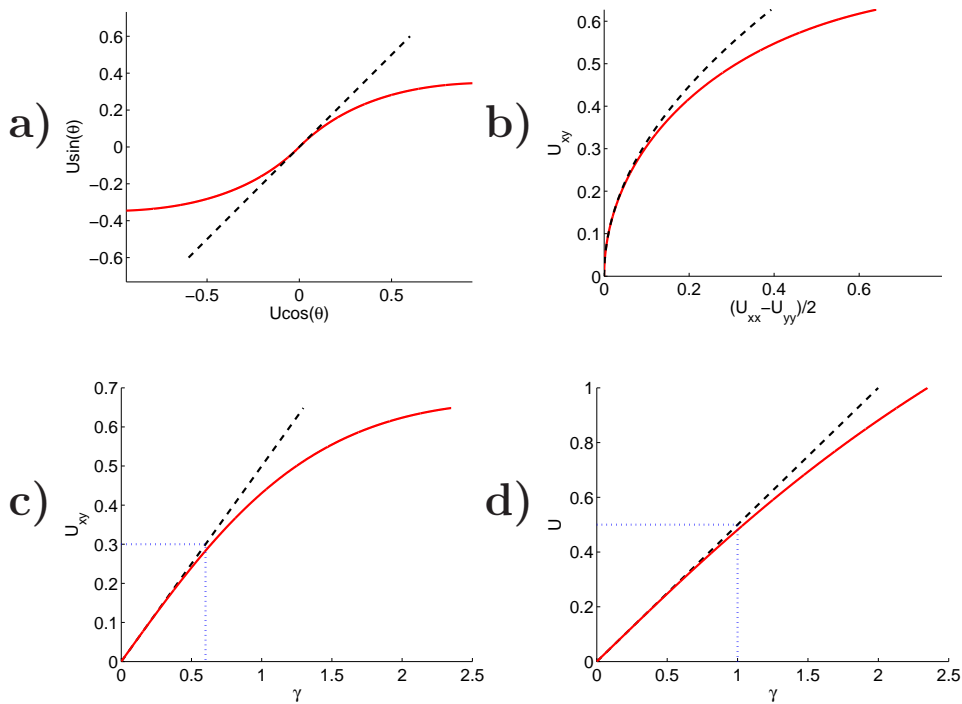


FIG. 5.3 – Courbes d'élasticité en partant d'un état isotrope (en rouge). (a) *Trajectoire propre* de  $\bar{U}$  ( $U \cos \theta, U \sin \theta$ ) (noir : pente à  $45^\circ$ ). (b) *Trajectoire des composantes* ( $U_{xy}$  fonction de  $(U_{xx} - U_{yy})/2$ ) (en noir la fonction racine carrée). (c)  $U_{xy}$  (noir : droite de pente  $1/2$ , pointillés bleus : point  $(0.6, 0.3)$ ) et (d)  $U$  (noir : droite de pente  $1/2$ , pointillés bleus : point  $(1, 0.5)$ ) fonction de  $\gamma$ . Les courbes sont tracées jusqu'à des déformations de  $U = 1$ .

On représente sur la figure (5.3) les résultats prédits par le modèle concernant le cisaillement d'un matériau initialement isotrope (pas d'élongation ou  $U = 0$ ). On constate qu'à petite déformation  $U$  et  $U_{xy}$  sont proportionnels à  $\gamma/2$ .  $U_{xy}$  s'écarte de la droite plus tôt que  $U$  à cause d'un effet de rotation. En effet on voit sur la *trajectoire propre* de  $U$ , que le matériau s'étire d'abord à  $45^\circ$  avant de



s'étirer de plus en plus horizontalement. Ce que l'on appelle le régime linéaire est donc limité par un effet de rotation (observable à partir de  $\gamma = 0.6$  et  $U = 0.3$  sur  $U_{xy}$  fonction de  $\gamma$ ) et non pas d'élongation (observable à partir de  $\gamma = 1.0$  et  $U = 0.5$  sur  $U$  fonction de  $\gamma$ ). On retrouve cette limite sur la *trajectoire des composantes* : dans la limite faible déformation, on a  $U_{xy}^2 \simeq (U_{xx} - U_{yy})/2$ .

### 5.2.2 Matériau initialement anisotrope

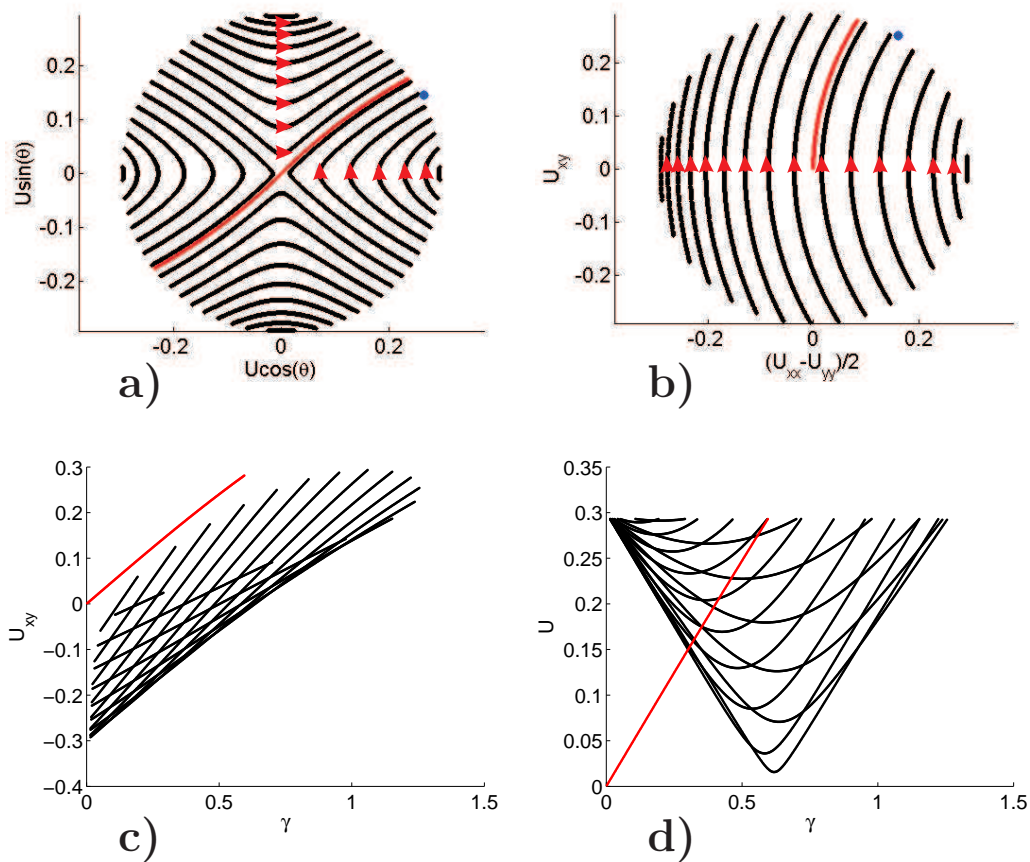


FIG. 5.4 – Effet de l'orientation initiale en régime purement élastique : *trajectoire propre* (a), *trajectoire des composantes* (b) de  $\bar{U}$  (les flèches rouges indiquent le sens des trajectoires);  $U_{xy}$  (c) et  $U$  (d) fonction de  $\gamma$  pour différentes orientations initiales de  $\bar{U}$ .  $U = 0.3$  initialement. En rouge la courbe obtenue à partir de l'état isotrope. Le point bleu représente la limite plastique pour  $U_Y = 0.3$ .

On considère maintenant le cas général d'un matériau initialement orienté (ou précontraint). Pour cela on choisit différentes orientations initiales de  $\bar{U}$  ayant toute pour amplitude initiale  $U = 0.3$  (figure (5.4)). On utilise alors les mêmes

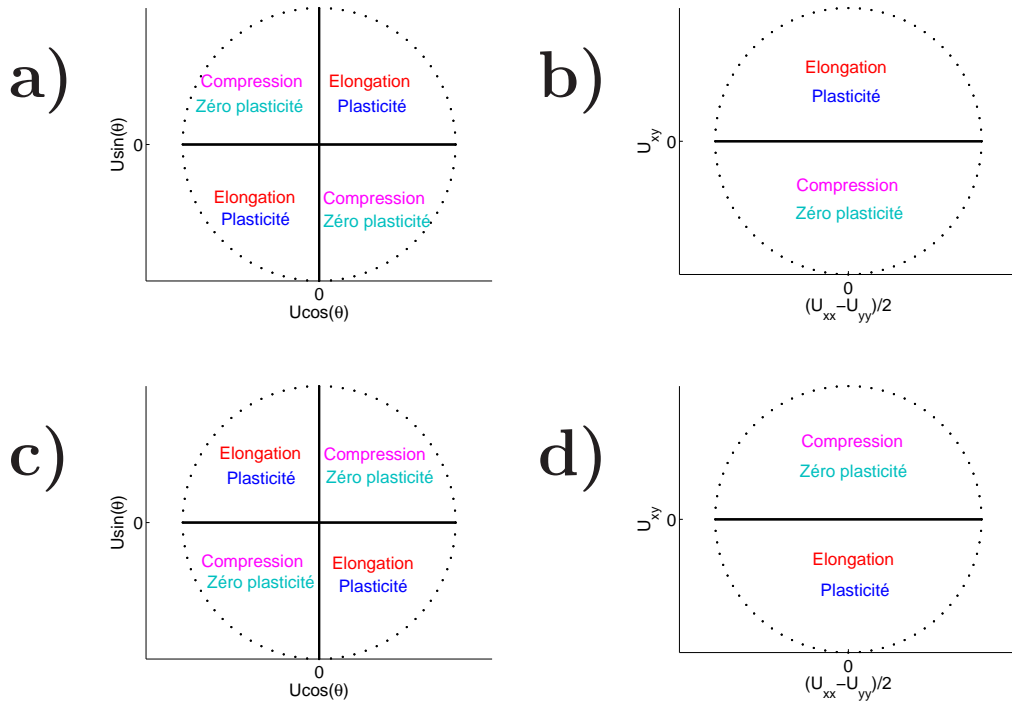


FIG. 5.5 – Comportement mécanique suivant la position sur les trajectoires propres (a) et des composantes (b) pour  $\dot{\gamma} > 0$ . Les zones d'élongation du matériau et de plasticité correspondent à  $\bar{\bar{U}} \cdot \bar{\bar{\nabla}} v_{sym}$ , soit  $\bar{\bar{U}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} > 0$ . Dans le cas contraire, les tenseurs sont d'orientation opposée, le matériau subit une compression, sans plasticité. Pour  $\dot{\gamma} < 0$  les zones sont inversées (c) et (d).

représentations que pour le cas isotrope, celui-ci étant représenté en rouge. Nous prenons la valeur 0.3 car elle correspond à des déformations typiques de nos mousses. Ceci n'est toute fois pas restrictif, puisqu'en zoomant sur des trajectoires (*propre* ou *des composantes*) à plus grande déformation, on peut déduire les trajectoires de déformations plus petites (figure (5.6)).

Sur la représentation des *trajectoires propres*, comme sur celle des *trajectoires des composantes*, on voit que le matériau effectue des trajectoires qui ne se recoupent pas, avec des zones où le matériau se comprime ( $U$  diminue) et d'autre où il s'étire ( $U$  augmente). Les *trajectoires propres* finissent dans le quadrant supérieur-droit et les *trajectoires des composantes* dans le demi-plan supérieur. Ainsi le matériau s'oriente suivant le cisaillement imposé, en se rétractant lorsque le matériau n'est pas orienté suivant le cisaillement ( $\bar{\bar{U}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} < 0$ ), et en s'étirant une fois bien orienté ( $\bar{\bar{U}} : \bar{\bar{\nabla}} v_{sym} > 0$ ). Ces comportements sont résumés sur la figure (5.5) pour les *trajectoires propres* et les *trajectoires des composantes*. A noter que les *trajectoires propres* sont symétriques vis à vis des axes des abscisses et des

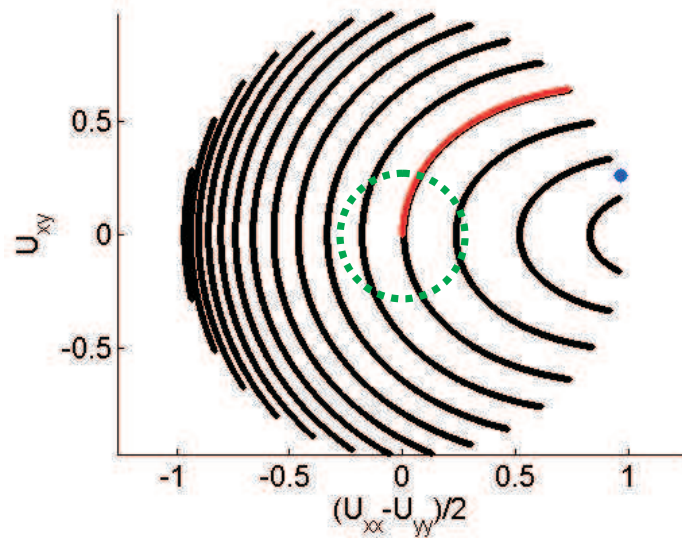


FIG. 5.6 – *Trajectoire des composantes* en régime purement élastique; Initialement  $U = 1$  et chaque trajectoire correspond à une orientation initiale de  $\bar{U}$  différente. Le cercle vert correspond au zoom sur  $U = 0.3$ , soit la figure (5.4). Le point bleu représente la limite plastique pour  $U_Y = 1$ .

ordonnées, alors que les *trajectoires des composantes* ne sont symétriques que par rapport à l’axe des abscisses.

Dans le cas des mousses, les déformations les plus grandes atteintes en régime relaxé (basse vitesse, respectant les lois de Plateau) sont de l’ordre de 0.35 (cette valeur correspond aux mousses les plus sèches : figure (4.5)). Pour des matériaux tels que les polymères on peut avoir des déformations beaucoup plus importantes.

### 5.2.3 Commentaires

Pour des matériaux isotropes, dont les contraintes sont fonction uniquement de la déformation totale (régime élastique), alors la différence des contraintes normales, la contrainte tangentielle et la déformation appliquée sont reliées :  $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma_{xy}\gamma$ . Cette “relation de Poynting”, a été trouvée par Rivlin [117] en analysant les travaux de Poynting [109]. Elle découle du fait que le tenseur des contraintes est orienté suivant la seule direction préférentielle du matériau [84], obtenue par exemple en diagonalisant le tenseur des déformations de Finger [88]. Dans notre cas, le tenseur de texture est proportionnel à ce tenseur, et on peut montrer directement à partir de nos équations que (voir annexe (B)) :

$$\frac{U_{xx} - U_{yy}}{2} = \frac{U_{xy}\gamma}{2}. \quad (5.5)$$

A faible  $\gamma$  et en partant d'un état isotrope, on a  $U_{xy} \simeq \gamma/2$ , ce qui conduit à  $(U_{xx} - U_{yy})/2 \simeq U_{xy}^2$  (vérifié avec le modèle sur la figure (5.3d)).

Sur la représentation des *trajectoires des composantes* (figure (5.6)) on constate que les différentes trajectoires peuvent être approchées par des paraboles au voisinage de l'axe des abscisses. La concavité de la parabole augmente lorsque l'on se déplace vers la droite sur l'axe des abscisses. Ce résultat est intéressant puisque, comme on va le voir, le régime plastique tend à nous déplacer sur la droite dans cette représentation. Par contre, dans le cas des mousses, cet effet est trop faible pour être observable, car les déformations élastiques ne sont pas suffisamment importantes.

## 5.3 Régime élasto-plastique

Nous prenons désormais en compte le terme de plasticité dans l'équation (5.3). Ce terme est écrit ici pour les mousses, mais il peut servir de modèle pour l'évolution d'un autre matériau cellulaire ou particulière.

### 5.3.1 Limite plastique, état stationnaire

On appelle limite plastique ou saturation plastique, l'état stationnaire obtenu à grande déformation imposée (voir annexe (B)). On le trouve en cherchant la solution de l'équation (5.3) dont la dérivée temporelle est nulle. On a alors un équilibre entre la charge (déformation appliquée) qui tend à étirer le matériau, et les T1s qui relâchent la déformation. Dans le modèle, on suppose que les T1s relâchent la déformation dans la direction de la déformation elle-même. De même la forme de  $\bar{T}$  est choisie pour que  $U = U_Y$  dans la limite plastique.

En résolvant les équations (annexe (B)), on trouve que cette limite plastique est définie par :

$$\begin{cases} U = U_Y \\ \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-4U}}} \\ \sin(\theta) = \text{sign}(\dot{\gamma}) \frac{1}{\sqrt{e^{4U}+1}} \end{cases} \quad (5.6)$$

On note alors  $U_Y$  et  $\theta_Y$  respectivement la norme et la direction de cette limite plastique. La limite plastique est indépendante de la fonction  $h$ , puisque lorsque  $U = U_Y$ ,  $h = 1$ . L'angle  $\theta_Y$  est défini à  $180^\circ$  près puisqu'il nous donne la direction d'étirement du matériau. Dans le cas où  $\dot{\gamma} > 0$  le matériau a un angle compris entre  $0$  et  $45^\circ$  ; dans le cas contraire l'angle est négatif, d'où le facteur  $\text{sign}(\dot{\gamma})$ . On représente sur la figure (5.7)  $\theta_Y$  fonction de  $U_Y$  pour  $\dot{\gamma} > 0$ . Plus  $U_Y$  est grand, plus l'angle s'écarte des  $45^\circ$  et décroît vers  $0^\circ$ .

L'état plastique est représenté par un point sur la représentation des *trajectoires propres*. Il se situe en  $U = U_Y$  sur la trajectoire élastique dont la tangente

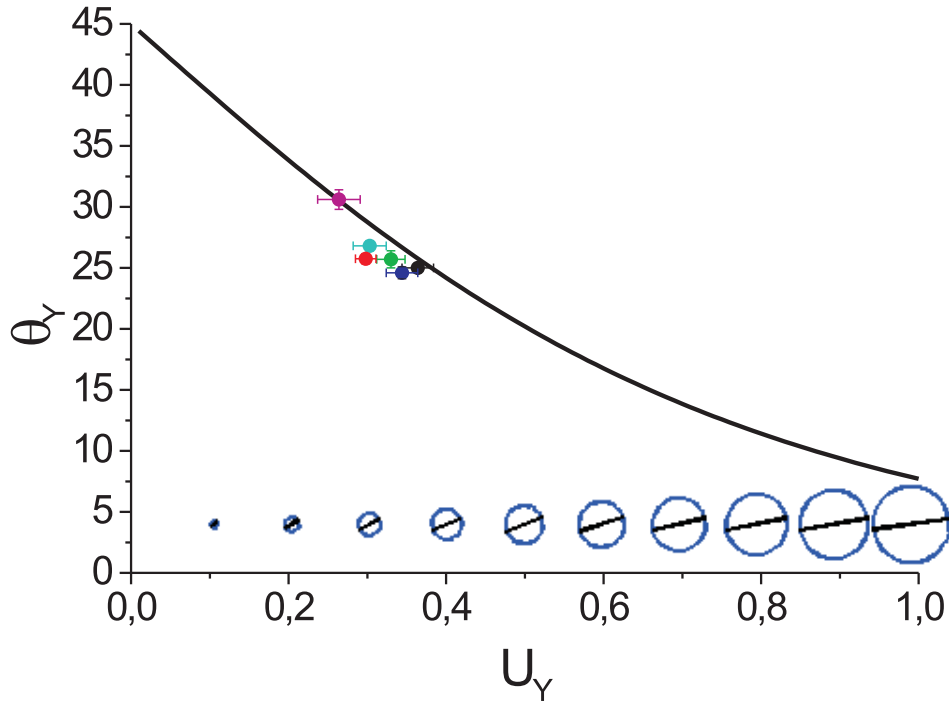


FIG. 5.7 – Limite plastique pour  $\dot{\gamma} > 0$  :  $\theta_Y$  en fonction de  $U_Y$  pour le modèle et 6 points de simulations (voir tableau (2.1)). L'ellipse (ici, un cercle) représentant  $\bar{U}$  à saturation est représentée pour différents  $U_Y$ .

pointe vers l'origine, et est orienté dans le même sens que la déformation appliquée ( $\bar{U}:\bar{\nabla}v_{sym} > 0$ ). La même méthode permet de trouver ce point sur les *trajectoires des composantes*. Ces points sont représentés par exemple sur les figures (5.4) et (5.6).

### 5.3.2 Réponse transitoire - Effet de $h$

Dans cette section on décrit comment la mousse passe d'un régime purement élastique au régime saturé. On rappelle que les T1s sont décrits par la fonction proportion de plasticité, notée  $h$ . Cette fonction de  $U$  vaut 0 dans le régime purement élastique et 1 dans la limite saturée.

Pour étudier l'effet de  $h$  on a pris comme exemple des fonctions puissances :

$$h = \min \left( \left( \frac{U}{U_Y} \right)^n, 1 \right), \quad (5.7)$$

avec  $n > 0$ . Plus  $n$  est grand, plus les T1s apparaissent tardivement (figure (5.8)). A l'extrême  $n = +\infty$ . Cette puissance correspond à la limite pour laquelle  $h = 0$  partout sauf en  $U = U_Y$ .

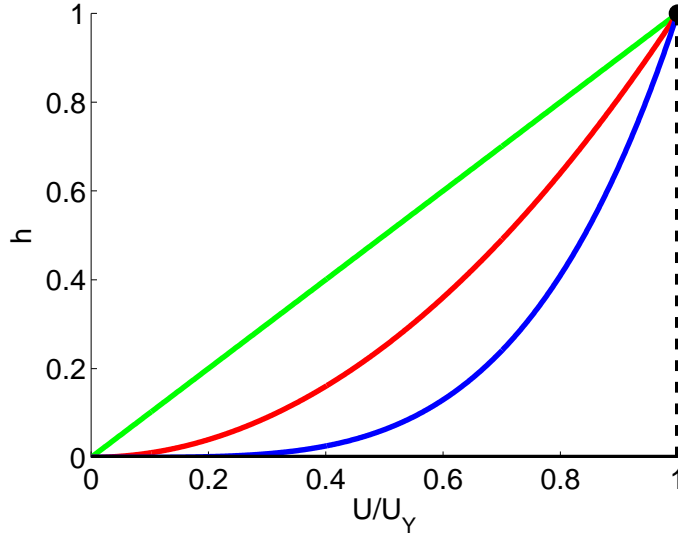


FIG. 5.8 –  $h$  sous forme de loi de puissance (équation (5.7)).  $n = 1$  (vert),  $n = 2$  (rouge),  $n = 4$  (bleu) et  $n = +\infty$  (noir).

Sur la figure (5.9), on représente différentes trajectoires élasto-plastiques pour  $U_Y = 0.3$ ,  $n = 2$  et  $n = +\infty$ . Pour  $n = +\infty$ , les trajectoires sont semblables aux trajectoires élastiques, sauf en  $U = U_Y$ . Lorsque cette valeur est atteinte,  $U$  se maintient en  $U_Y$  et les trajectoires tournent le long du cercle  $U = U_Y$  vers la limite plastique. Pour  $n = 2$  le matériau quitte les trajectoires élastiques plus tôt pour se diriger vers la limite plastique. Les *trajectoires propres* et *des composantes* perdent ainsi leur symétrie du fait de la plasticité car les T1s n'apparaissent que lorsque la structure est étirée (figure (5.5)). Au niveau formel, cela est dû à la fonction Heavidside  $\mathcal{H}$  dans l'expression de la plasticité (équation (5.2)). Celle-ci brise la symétrie  $t \rightarrow -t$  de l'équation d'évolution de la structure (équation (2.24)).

On retrouve ce comportement pour la 1ère charge et d'autres  $n$  sur la figure (5.10). Elle représente un demi-cycle de déformation imposée (en fait un peu plus). On effectue une première charge avec  $\gamma$  de 0 à 4 ( $\dot{\gamma} > 0$ ), suivie d'une charge opposée avec  $\gamma$  de 4 à -4 ( $\dot{\gamma} < 0$ ) pour  $U_Y = 0.3$  et différents  $n$ . En changeant le signe de  $\dot{\gamma}$ , on inverse les zones de compression, d'élongation et de plasticité du matériau de la figure (5.5c,d).

De même la limite plastique passe de  $\theta_Y$  à  $-\theta_Y$  (équation (5.6)). Ceci explique ce qui se passe sur les différentes représentations. Lors du changement de direction de cisaillement, le matériau n'est plus orienté suivant le gradient de vitesse symétrisé. Cela correspond à une rétraction en même temps qu'une réorientation suivant le gradient de vitesse symétrisé. Une fois la réorientation effectuée, le matériau peut se réétirer, et plastifier plus ou moins suivant la forme de  $h$ . On

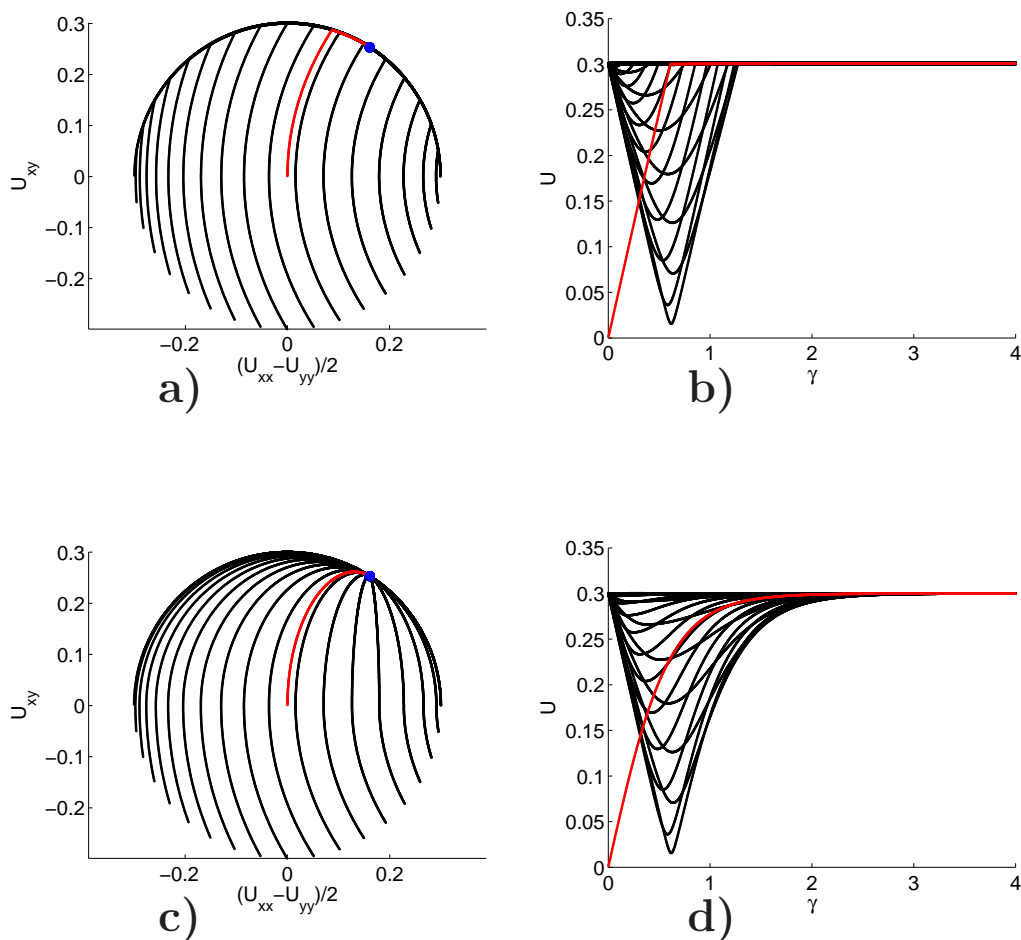


FIG. 5.9 – Régime élasto-plastique pour différentes structures initiales,  $\dot{\gamma} > 0$  et  $U_Y = 0.3$ . Trajectoire des composantes et  $U$  fonction de  $\gamma$  pour différents exposants de la fonction de plasticité  $h$  :  $n = +\infty$  (respectivement a et b) et  $n = 2$  (respectivement c et d).

constate que plus  $n$  est grand, plus le régime saturé est atteint rapidement (figure 5.10c,d)). Cela est d'autant plus vrai pour la charge opposée, qu'il suffit de rester sur la trajectoire élastique pour trouver la nouvelle limite plastique. Pour les trajectoires propres ou des composantes, on atteint dans tous les cas une courbe limite (figure (5.11)) : c'est l'ensemble des points qui seraient atteints si on continuait à effectuer des cycles de cisaillement d'amplitude suffisamment grande.

On constate qu'une fois que la mousse a atteint le régime saturé (de façon plus générale, une fois que le matériau plastifie), l'arrêt du cisaillement ( $U_{xy} = 0$ )

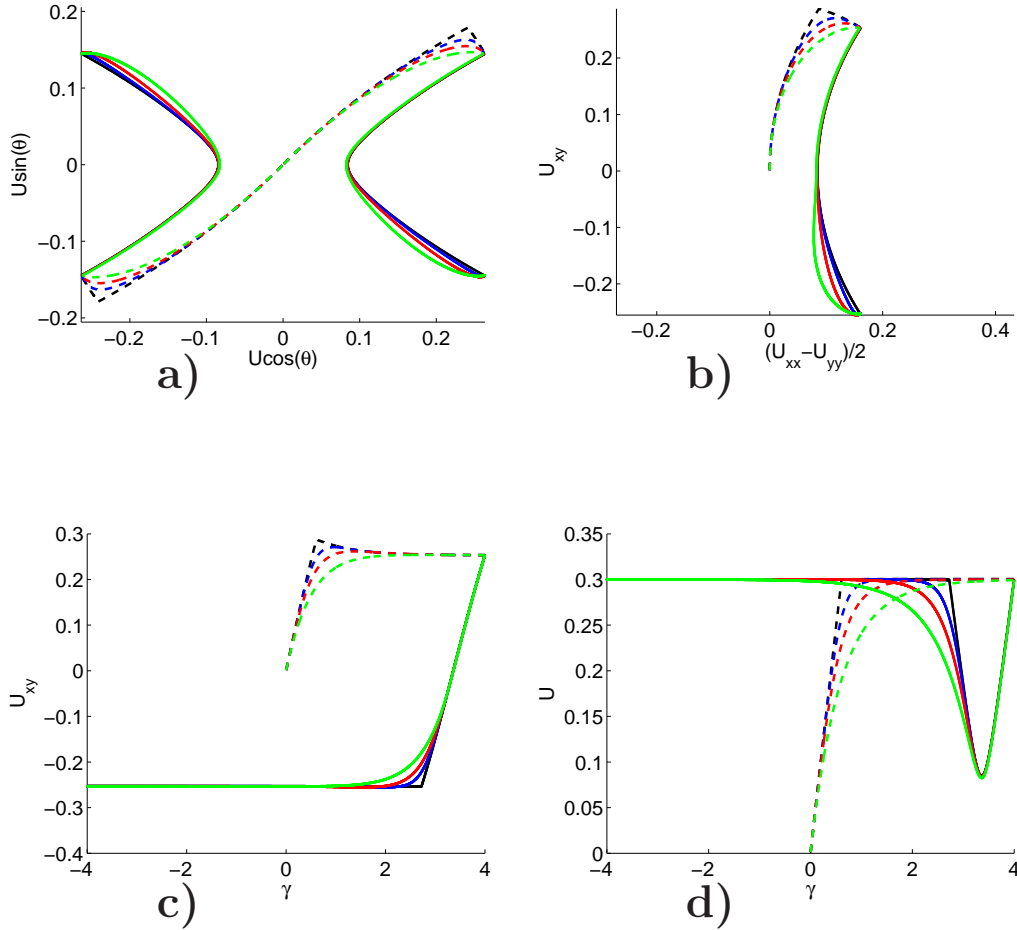


FIG. 5.10 – Demi-cycle de déformation imposée pour le modèle avec  $U_Y = 0.3$ . On représente la 1ère charge ( $\dot{\gamma} > 0$ ) jusqu'à  $\gamma = 4$  en tiret, suivi d'une charge opposée ( $\dot{\gamma} < 0$ ) jusqu'à  $\gamma = -4$  en trait plein. Différents exposants de la fonction de plasticité  $h$  sont testés :  $n = 1$  (vert),  $n = 2$  (rouge),  $n = 4$  (bleu) et  $n = +\infty$  (noir). *trajectoire propre* (a), *trajectoire des composantes* (b) de  $\bar{U}$ ;  $U_{xy}$  (c) et  $U$  (d) en fonction de  $\gamma$ .

n'entraîne pas l'annulation de la différence des composantes normales. Arrêter de cisailer ne permet donc pas de retrouver un matériau isotrope. Pour retrouver un milieu isotrope, il faut judicieusement cisailer. Ainsi on peut imaginer qu'effectuer des cycles de cisaillement dans les différentes directions et d'amplitudes d'abord très supérieures à  $U_Y$  (jusqu'à  $\gamma = \pm 2$ , valeur pour laquelle la saturation est atteinte pour  $U_Y = 0.3$  et  $n = 2$ ), puis de plus en plus petites permettrait de rendre le matériau plus isotrope. Les travaux de Kraynik & al [82] présentent



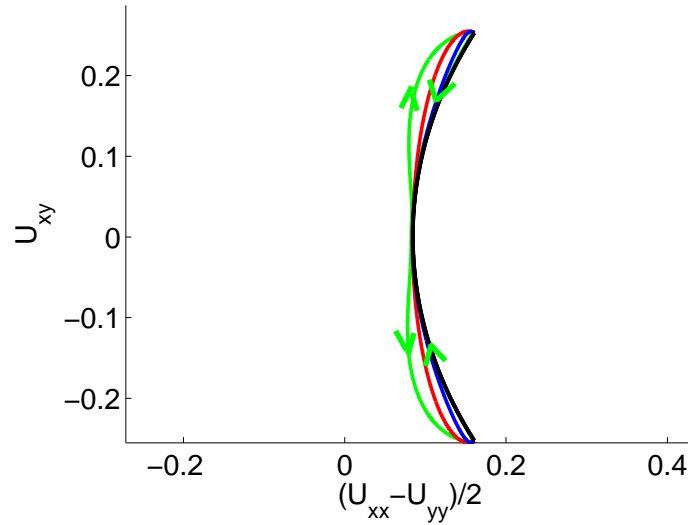


FIG. 5.11 – Cercle limite pour les *trajectoires des composantes*. Différents exposants :  $n = 1$  (vert),  $n = 2$  (rouge),  $n = 4$  (bleu) et  $n = +\infty$  (noir). Le sens du cycle est indiqué par les flèches vertes pour  $n = 1$ .

une procédure qui va dans ce sens : les directions de cisaillement sont changées, mais les variations d'amplitude ne sont pas très importantes.

### 5.3.3 Sursaut

Le sursaut en contrainte d'un matériau soumis à un cisaillement est un effet bien connu des matériaux visco-élastiques [88]. Dans le cas des mousses, cet effet a été observé pour une mousse soumise à un cisaillement dans un rhéomètre plan-plan [77]. On a aussi pu observer un sursaut avec des simulations numériques quasistatiques de cisaillement [73, 102]. Nous suggérons dans cette partie une cause possible du sursaut de contrainte dans les mousses, découlant directement du caractère tensoriel des équations, et liée à une rotation de la structure.

Dans un écoulement suffisamment lent, notamment pour des simulations quasistatiques, les contraintes sont d'origine purement élastique (voir (6.1)). On a pu montrer aussi que  $\sigma_{xy}^{el}$  est proportionnel à  $U_{xy}$  (voir (4.4.2)), ce qui veut dire que l'étude de la contrainte tangentielle appliquée au matériau revient à l'étude de  $U_{xy}$ . Sur la figure (5.10c), on constate la présence d'un tel sursaut, en l'occurrence un maximum de  $U_{xy}$ , d'amplitude d'autant plus grande que  $n$  est grand. Le cas particulier  $n = +\infty$  est très démonstratif (figure (5.9a)) : en chargeant élastiquement le matériau à partir de l'état isotrope, on constate sur la trajectoire des composantes que  $U_{xy}$  augmente jusqu'à ce que  $U = U_Y$ . Sur cette trajectoire le point évolue alors sur le cercle de rayon  $U_Y$  vers l'état saturé. Ceci correspond à une diminution de  $U_{xy}$  et donc à un sursaut. La fonction d'écoulement  $h$  va

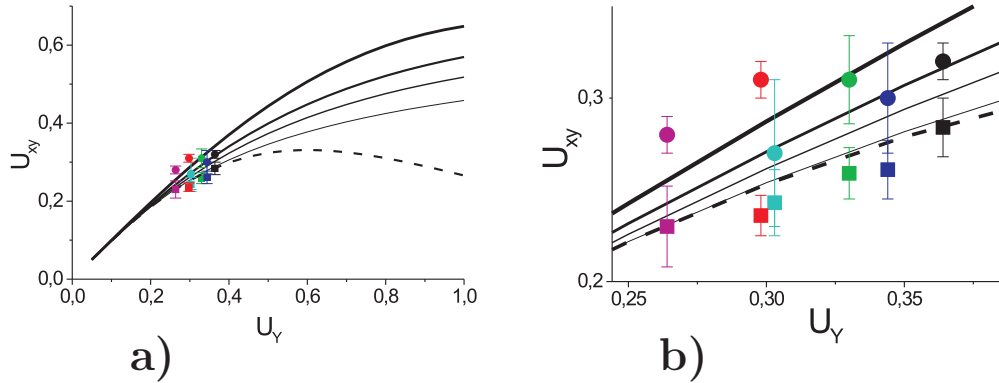


FIG. 5.12 – Sursaut en fonction de  $U_Y$ . En tirets noir on représente la valeur à saturation de  $U_{xy}$ . En trait plein, la valeur de  $U_{xy}$  au moment du sursaut pour différents exposants, du plus fin au plus épais :  $n = 1, 2, 3$  et  $+\infty$ . Les points correspondent aux données des 6 simulations (voir tableau (2.1)) : rond (sursaut), carré (saturation). Les barres d’erreur correspondent aux fluctuations. (a) Pour  $U_Y$  de 0 à 1. (b) Zoom sur les simulations.

ensuite plus ou moins lisser la trajectoire suivant que les T1s apparaissent tôt ( $h$  progressive et sursaut affaibli) ou tard ( $h$  abrupte et sursaut fort). L’effet de  $U_Y$  est très important sur le sursaut (figure (5.12)). Plus  $U_Y$  est faible, plus l’état purement élastique d’une charge à partir de l’état isotrope et la limite plastique sont proches, et donc le sursaut amoindri.

Le modèle fait donc apparaître un sursaut d’origine purement orientationnelle, lié à la rotation vers la limite plastique. Un sursaut des contraintes normales pourrait aussi être a priori observé si on partait d’un état orienté en conséquence (à droite du cycle limite sur la figure (5.11)). Cet effet purement tensoriel, qui apparaît dans le transitoire pour atteindre un état plastique bien défini, doit être comparé à des effets de réorganisation de la structure, affectant par exemple  $U_Y$ , et qui ne sont pas pris en compte dans le modèle (voir section suivante).

## 5.4 Comparaison aux simulations

On compare dans cette partie le modèle aux simulations numériques quasi-statiques *Surface Evolver* présentées en (2.2.5). On dispose ainsi de mousses soit confinées entre deux plaques, soit totalement périodiques, pour lesquelles on applique une déformation imposée suivant  $x$  (figure (5.2)). C’est un écoulement 2D pour lequel la condition d’homogénéité n’est pas garantie *a priori* (notamment suivant  $y$ ) ; ceci ne pose pas de problème puisque l’on s’intéresse ici au comportement moyen de la mousse. On le décrit avec des variables 0D (moyenne suivant

les différentes dimensions de l'espace), ce qui a pour avantage d'augmenter la statistique. Les données brutes des simulations sont présentées sur la figure (5.13). Comme  $\gamma$  est oscillant dans le temps, il est plus clair de tracer le temps en abscisse pour  $U$  et  $U_{xy}$ .

### 5.4.1 Régime saturé

On repère les caractéristiques de la limite plastique ( $U_Y, \theta_Y$ ) en moyennant sur les données de la dernière charge, une fois que le plateau en  $U$  est atteint. Sur la figure (5.7) on représente ces points sur un graphique de  $\theta_Y$  en fonction de  $U_Y$ ; le domaine de  $U_Y$  étudié est restreint. L'accord est bon; cela confirme le fait que les T1s sont en moyenne orientés suivant la déformation élastique (cf (5.3.1)), du moins dans le régime saturé.

L'influence de plusieurs paramètres sur  $U_Y$  a été étudiée : fraction liquide effective, dispersité, confinement (figure (5.14)). Dans tous les cas, le nombre des simulations étant limité, on ne peut donner que des tendances. Ainsi on voit que la dispersité abaisse  $U_Y$ , bien que l'effet soit faible : pour une dispersité  $\delta A/A = 0.66$  (voir définition en (3.4.7)),  $U_Y$  n'est abaissé que de quelques pour cent par rapport au cas strictement monodisperse. Concernant l'effet de  $\Phi_{eff}$ , on n'a que deux points à comparer (noir et bleu dans tableau (2.1)). On a tracé la courbe  $U_{max}$  fonction de  $\Phi_{eff}$  dans le cas d'une mousse type Princen (Annexe (A)) pour se donner une idée de l'effet de  $\Phi_{eff}$  (4.2.1). Les  $\Phi_{eff}$  des simulations sont plutôt sèches et il est difficile d'obtenir des mousses plus humides avec ce genre de simulation [113] (des données expérimentales de mousses plus humides en cisaillement simple devrait bientôt être disponibles au sein de l'équipe : thèse de S. Attai Talebi). Malgré cela, la comparaison avec des mesures de  $U_Y$  dans d'autres géométries et pour d'autres fractions liquides effectives est en excellent accord (figure (4.5)); pour comparaison on n'a gardé que les mousses faiblement disperses et non confinées). On constate aussi l'effet des bords (rouge et magenta dans le tableau (2.1)), dont la présence semble abaisser  $U_Y$ .

En accord avec le modèle, les *trajectoires propres* et *des composantes* présentent une courbe limite une fois que le matériau a été suffisamment cisailé (figure (5.13)). Ce résultat a été mis en évidence par Kabla et Debrégeas [73] dans le cas de simulation de mousse. Cette courbe limite ne s'éloigne finalement que très peu de la trajectoire élastique passant par la limite plastique. En effet, elle ne dépend pas beaucoup de la plasticité, ce que l'on voit sur la figure (5.11) pour différents  $n$ .

Finalement il y a plusieurs possibilités pour caractériser le régime saturé : soit la valeur de  $U_Y$ ; la courbe limite (courbe d'élasticité passant par la limite plastique); soit plus simplement la valeur de  $(U_{xx} - U_{yy})/2$  à  $U_{xy} = 0$  (c'est-à-dire sans contrainte extérieure) de cette courbe limite.

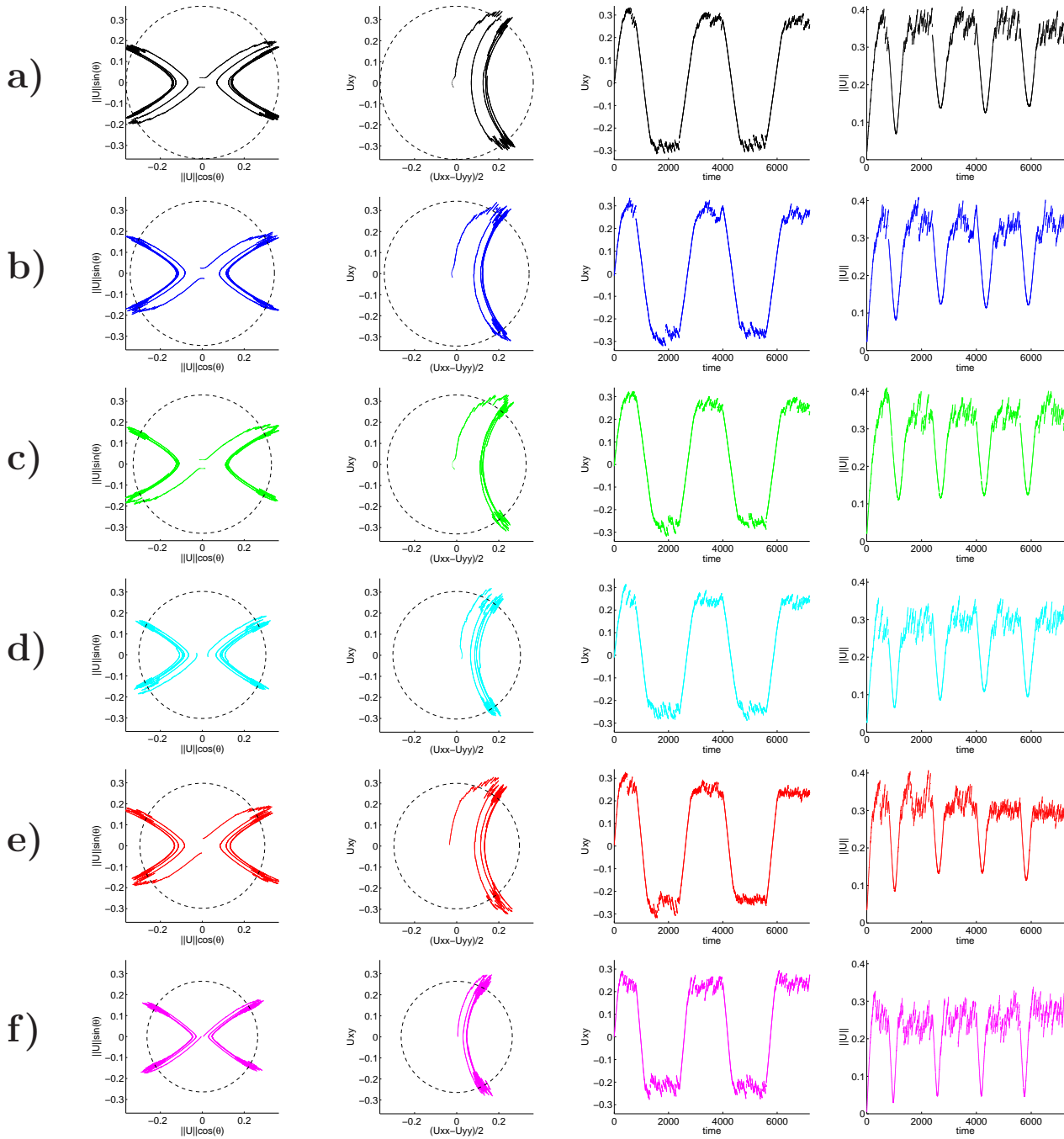


FIG. 5.13 – Différentes représentations pour les simulations (voir tableau (2.1)). De gauche à droite : *trajectoire propre*, *trajectoire des composantes*,  $U_{xy}$  et  $U$  en fonction du temps. Le cercle en pointillé a pour rayon  $U_Y$ , mesuré sur chaque simulation.

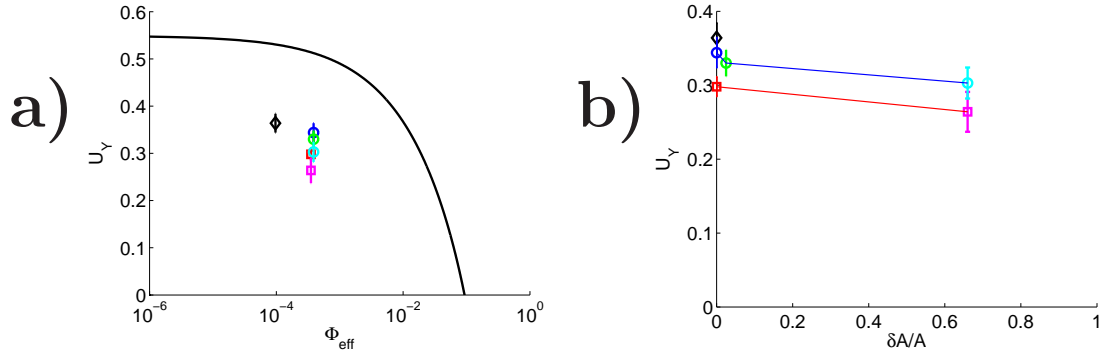


FIG. 5.14 – Déformation à saturation  $U_Y$  pour les différentes simulations (voir tableau (2.1)) : a) en fonction de  $\Phi_{eff}$  ; on trace  $U_{max}$  (ligne continue) en fonction de  $\Phi_{eff}$  pour une mousse type Princen (Annexe (A)) ; b) en fonction de la dispersité  $\delta A/A$ .  $\diamond$  :  $\Phi_{eff} = 9.7 \cdot 10^{-5}$ ,  $\square$  :  $\Phi_{eff} = 3.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\circ$  :  $\Phi_{eff} = 3.9 \cdot 10^{-4}$ .

## 5.4.2 Sursaut

Dans cette partie on discute le sursaut de  $U_{xy}$  (ou  $\sigma_{xy}^{el}$ ) observé lors du cisaillement d'une mousse initialement isotrope. Une explication possible réside dans un effet orientationnel qui apparaît dans le modèle (cf (5.3.3)) : bien que  $U$  ne subisse pas de sursaut lors de la charge,  $U_{xy}$  en présente un, du fait de la rotation de la structure ( $U_{xy} = U \sin(2\theta)$ ). L'autre possibilité pour expliquer ce sursaut serait un sursaut directement sur  $U$ , non décrit par le modèle, et qui pourrait résulter par exemple d'un changement de structure de la mousse (désordre, drainage, brisure de bulles, ...). Nous présentons d'abord les données des simulations, puis nous comparons à l'expérience tirée de Khan & al [77].

Pour les simulations, le sursaut est mesuré directement sur les courbes de  $U_{xy}$  en fonction de  $\gamma$  (figure 5.13). Les résultats sont tracés sur la figure (5.12). Les barres d'erreur tiennent compte du caractère fluctuant des données. Les points sont comparés au sursaut obtenu avec le modèle pour différents exposants  $n$  de la fonction  $h$ . Pour les différentes simulations, on s'attend à un comportement proche de  $n = 2$  pour les simulations périodiques et  $n = 4$  pour les mousses confinées qui sont plus ordonnées (voir (5.5)). La différence du sursaut entre chaque point numérique et le modèle est lié au changement de structure. En effet on constate aussi un sursaut sur les courbes de  $U$  en fonction de  $\gamma$  : il est lié probablement à la diminution du désordre (voir (5.5)). Il semble donc que le sursaut mesuré ici ait deux origines, orientationnelle et structurelle, qui sont du même ordre de grandeur.

On a repris les points expérimentaux de Khan & al. [77] sur la figure (5.15), concernant le cisaillement d'une mousse 3D dans un rhéomètre plan-plan. Leurs

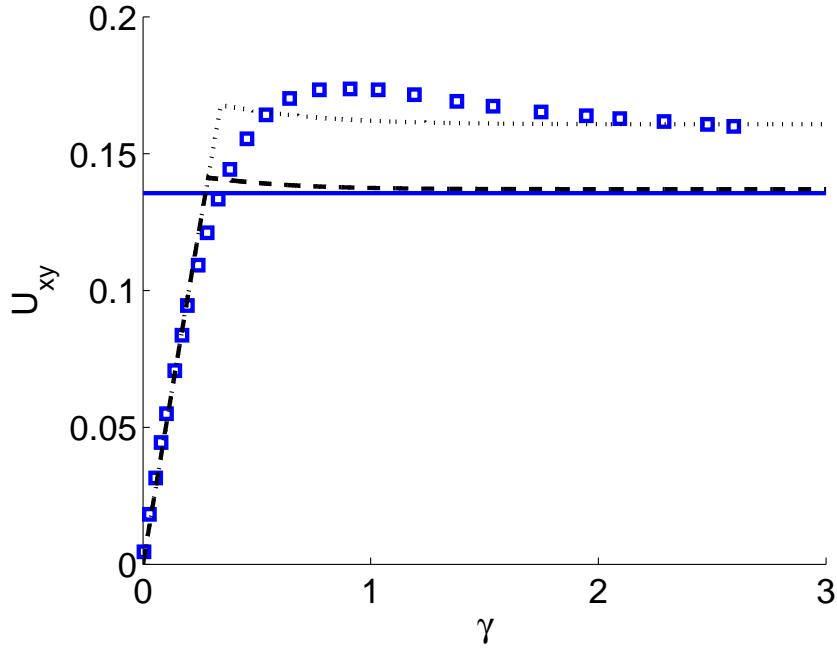


FIG. 5.15 – Sursaut. Comparaison des points expérimentaux en bleu de [77] et de celui prédit par le modèle. La ligne horizontale bleue correspond à la valeur longue déformation. Pour le modèle (en noir) on a pris  $n = +\infty$  et  $U_Y = 0.17$  (pointillé) et 0.14 (tiret).

données correspondent à un régime quasistatique de la mousse, grâce à un bon adimensionnement en fonction du taux de cisaillement. On peut donc supposer que les contraintes sont bien d'origine purement élastique. Les auteurs tracent  $\sigma_{xy}$  en fonction de  $\gamma$  (ils ne définissent d'ailleurs pas  $\gamma$ , qui n'est pas homogène localement pour la géométrie du rhéomètre utilisé). Ne connaissant pas le module de cisaillement de cette mousse pour remonter à  $U_{xy}$ , on a redimensionné leurs données pour que la pente élastique initiale ( $\gamma = 0$ ) de leurs données coïncide avec la courbe d'élasticité du modèle.

Leurs données montrent un maximum de  $U_{xy}$  à 0.17 et saturent à 0.14 environ. Cette valeur n'est atteinte qu'à très longue déformation, et le point expérimental correspondant n'est pas tracé. On le représente donc par la ligne horizontale bleue sur la figure (5.15). De cette valeur, on tire le  $U_Y$  correspondant : 0.14. En essayant d'ajuster le modèle en variant  $n$ , on peut dire que le sursaut tensoriel obtenu avec le modèle serait insignifiant (le sursaut maximum, pour  $n = +\infty$  est tracé sur la figure). De même, en prenant un  $U_Y$  supérieur, valant 0.17 et correspondant au dernier point expérimental visible, on trouve un sursaut orientationnel très petit. Le sursaut visible expérimentalement ne se résorbe que très lentement en fonction de  $\gamma$ , comparé à un sursaut orientationnel. Il semble probable que la structure ait changé dans cette expérience, sur un  $\gamma$  caractéristique plus grand que celui

prédit par le modèle.

### 5.4.3 Proportion de plasticité

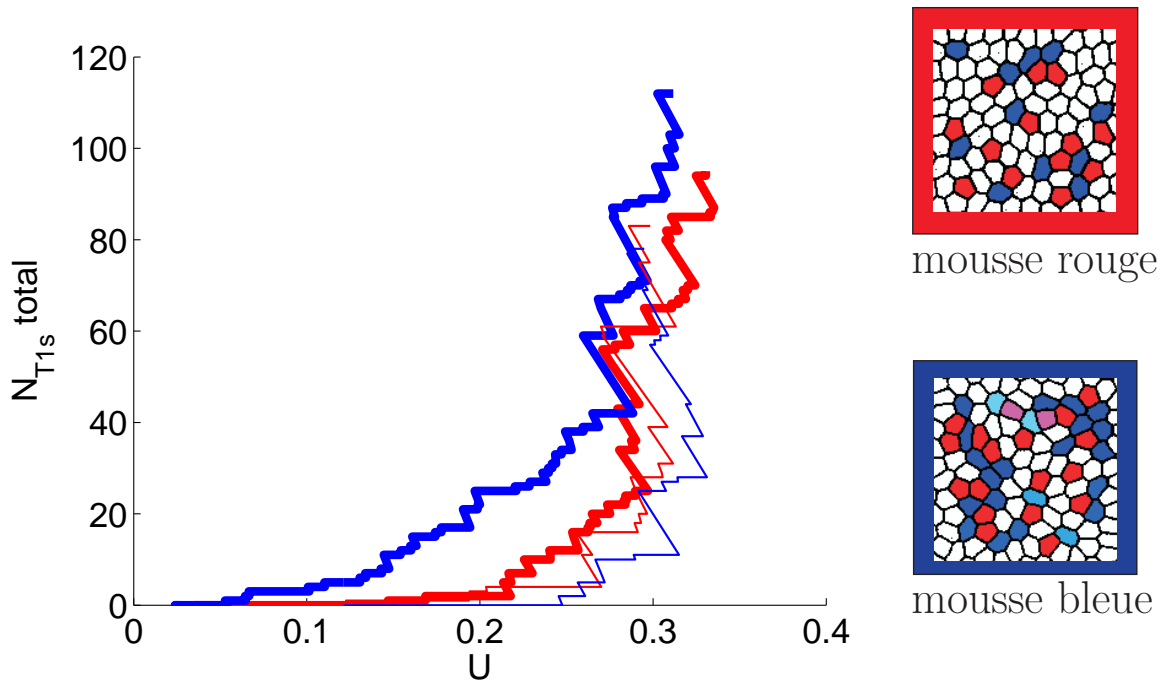


FIG. 5.16 – Nombre de T1s accumulés, en fonction de  $U$ , pour deux mousses de désordre différent (rouge et bleue dans tableau (2.1)). On cisaille pour  $\gamma$  de 0 à 1, à partir de la mousse isotrope (trait épais) et à partir d'une mousse ayant déjà subi deux cycles complets (trait fin). Sur la droite de la figure on représente les deux mousses à l'état initial (une bulle colorée a un nombre de voisins différent de 6).

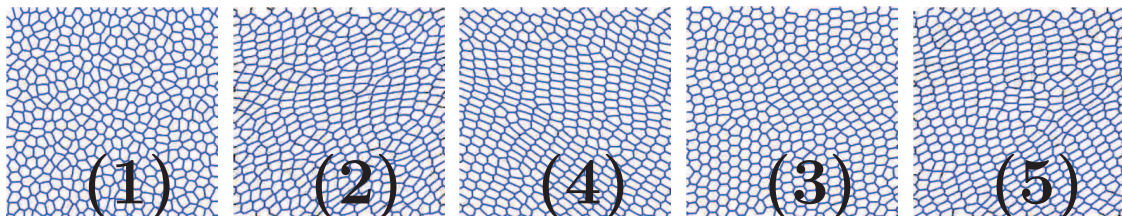


FIG. 5.17 – Image de la mousse correspondant aux numéros sur la figure (5.18).

Dans cette partie on compare  $\overline{T}$  mesuré sur les simulations la prédiction du modèle, basée sur la fonction proportion de plasticité  $h$ . Les simulations ne

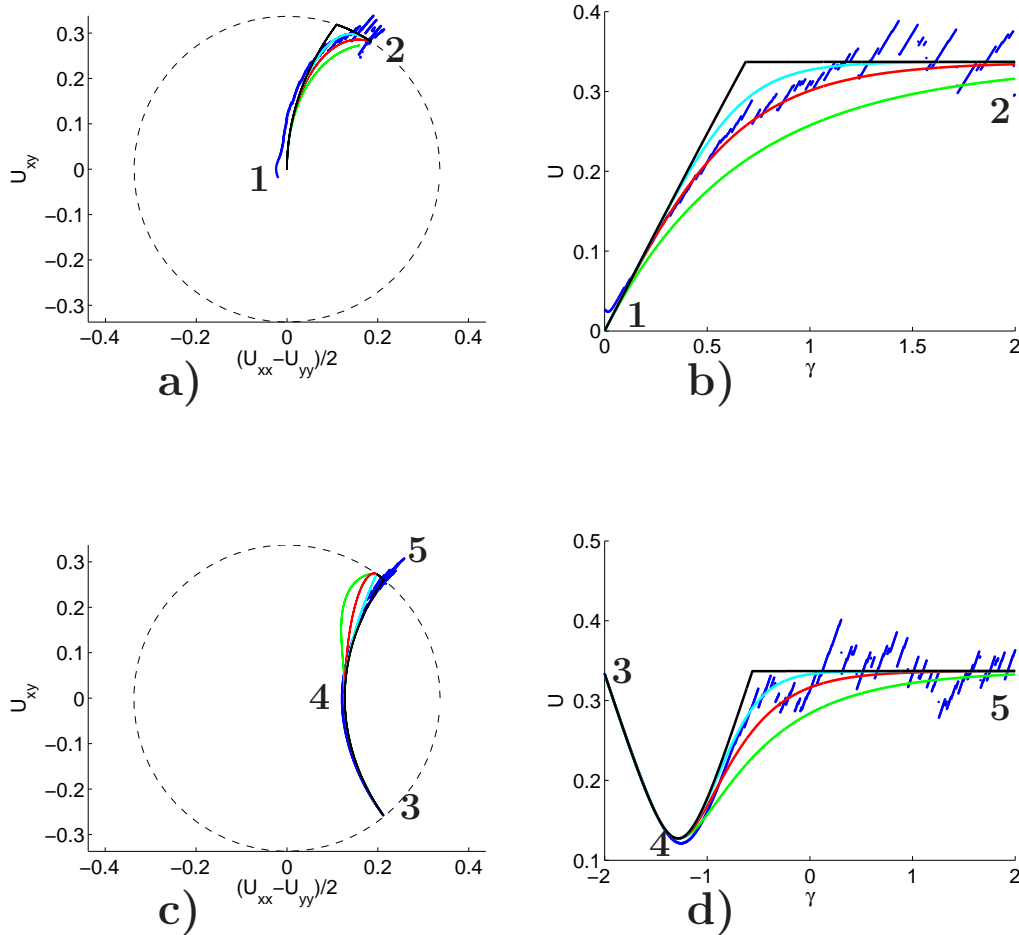


FIG. 5.18 – Ajustement de la simulation bleue (voir tableau (2.1)). *Trajectoire des composantes et  $U$  en fonction de  $\gamma$  lors de la 1ère charge (respectivement a et b) et d’une charge après 2 cycles complets (respectivement c et d). Les interpolations sont effectuées avec des fonctions  $h$  sous forme de loi de puissance, avec  $n = +\infty$  (noir), 4 (cyan), 2 (rouge) et 1 (vert). Les numéros 1 à 5 correspondent aux structures de la figure (5.17).*

présentent pas de T1 lorsque  $\bar{U}$  n’est pas orienté suivant  $\bar{\nabla}v_{sym}$  ( $\bar{U}:\bar{\nabla}v_{sym} < 0$ ), ce qui est conforme aux hypothèses du modèle. Du fait du caractère intermittent des T1s,  $\bar{T}$  mesuré est très fluctuant : il est nul la plupart du temps (aucun T1 entre deux pas de temps) et prend des valeurs très différentes lorsque des T1s ont lieu. Il est donc difficile de faire une comparaison directe. Par contre on peut regarder l’effet cumulatif en sommant leur nombre (figure (5.16)) ; ou alors supposer une



forme de  $h$  et voir si ses prédictions sont en accord avec les données de  $\bar{U}$  des simulations (figure (5.18)).

La première méthode détermine  $h$  directement. Cependant elle nécessite de rapporter à une seule quantité scalaire l'ensemble des informations tensorielles. Or l'expression de la fréquence des T1s dépend de l'orientation de  $\bar{U}$  par rapport à  $G_{sym}^{\bar{}}$  (équation (4.14)). Cette méthode s'applique donc dans le cas où la structure reste orientée avec un angle proche de  $45^\circ$ .

La deuxième méthode est plus générale, c'est pourquoi nous la développons plus ici. Sur la figure (5.18), on a interpolé les points expérimentaux bleus (voir tableau (2.1)) en prenant  $U_Y = 0.337$  (mesure décrite en (B.3)) et  $h$  sous forme de loi de puissance (cela permet de donner une idée de la forme de  $h$ ). On interpole ainsi la première charge, ainsi que celle après deux cycles complets.

Lors de la première charge les T1s apparaissent plus tôt (en terme de  $U$ ) qu'après deux cycles complets. La première charge semble assez bien décrite par un  $n = 2$  alors que la deuxième a plutôt  $n = 4$ . Ceci est notamment à mettre en relation avec l'évolution de la structure. Ainsi, au début, la mousse est désordonnée, facilitant des T1s précoces ; mais elle tend à s'ordonner (elle se rapproche d'un arrangement cristallin) au fur et à mesure du cisaillement (figure 5.17). Ainsi, plus la mousse est ordonnée et plus les T1s arrivent tard : on dit que la mousse se durcit. On constate cet effet sur la figure (5.16), à partir du cisaillement de deux mousses de désordre différent : la mousse rouge, plus désordonnée que la bleue, donne lieu à des T1s plus tôt. L'effet initial sur les T1s est flagrant, mais les différences s'amenuisent avec le nombre de cycles de cisaillement, une fois que la mousse bleue s'est ordonnée (comparer les images 1 et 4 de la figure (5.17)).

## 5.5 Discussion

### 5.5.1 Du modèle au comportement

On dispose ici d'une équation d'évolution de la structure tensorielle (équation (5.3)), qui permet de généraliser le modèle scalaire élasto-plastique. Pour effectuer cette généralisation on a dû faire des hypothèses sur  $\bar{T}$ , mais ce modèle peut servir de référence pour tout matériau cellulaire ou particulaire, présentant un seuil de déformation, et dont le taux de plasticité est colinéaire à la déformation élastique [57, 93].

L'équation d'évolution de la structure du modèle s'insère ainsi dans un système d'équations fermées permettant une modélisation complète de l'écoulement du matériau (6.1).

Pour les mousses, le fait que les tenseurs  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  soient alignés est bien vérifié par les simulations et les expériences, du moins dans le régime saturé, pour lequel on a pu établir une relation entre déformation et orientation de la

structure (5.3.1). Concernant le régime transitoire, la fonction  $h$  régit la façon dont le milieu va atteindre son état saturé (5.3.2). Il est difficile de remonter directement à la forme de  $h$ , à cause du caractère fluctuant des données, mais la comparaison avec des lois de puissance donne des idées (5.4.3). On prédit aussi un sursaut des contraintes élastiques tangentielles d'origine orientationnelle (5.3.3). On se retrouve avec un modèle cohérent qui semble capturer l'essentiel des ingrédients physiques : à partir de  $U_Y$  et  $h$  (ou un paramètre, ici  $n$ ) on peut modéliser le comportement.

### 5.5.2 Détermination de $h$

Plusieurs manières de déterminer  $h$  ont été testées dans ce manuscrit :

- Détermination directe à partir des données expérimentales tirées des cartes (4.4.3). Les écoulements très hétérogènes, comme Stokes, donnent de nombreuses données spatialement réparties sur tout l'écoulement. En une seule expérience, on a ainsi accès à différents points de la fonction  $h$  (figure (4.22b)). Cette détermination est préliminaire car les statistiques sont pour le moment encore peu significatives (peu de T1s dans chaque RVE).

- Détermination indirecte. On suppose une forme de  $h$  et on regarde si celle-ci s'ajuste avec l'évolution de la structure observée lors du passage du régime élastique au régime plastique saturé (5.4.3). L'étude de ce régime transitoire permet donc de balayer toute la fonction  $h$ . Les données sont bruitées car seulement 100 T1s ont lieu lors de ce régime transitoire (figure (5.16)) et des dislocations apparaissent une fois que le milieu s'est ordonné. Malgré cela une tendance raisonnable de  $h$  est déterminée.

### 5.5.3 De la structure au modèle

Une question que l'on a abordé aussi dans ce chapitre est l'effet de la structure (fraction liquide, dispersité, désordre) sur les paramètres de modélisation ( $U_Y, h$ ).

A l'inverse, un effet remarquable est l'évolution de la structure au cours d'un écoulement, notamment liée à l'évolution du désordre dans la mousse [1, 112] : en partant d'une mousse monodisperse assez désordonnée, celle-ci tend à s'ordonner de plus en plus de façon cristalline au fur et à mesure de la simulation. Or quand la mousse est très cristalline, les T1s apparaissent plus tard et en conséquence  $h$  se durcit (5.4.3). L'effet du désordre sur  $U_Y$  a été pointé en (5.4.2). Lors de la charge du matériau à partir de l'état isotrope,  $U$  présente un sursaut comparé au  $U$  mesuré à saturation. Ce sursaut est faible mais montre que  $U_Y$  semble légèrement augmenter avec le désordre (mousse noire, bleue et verte dans tableau (2.1)).

Lorsque la mousse se cristallise, les T1s ont de plus en plus tendance à apparaître sous forme d'avalanches. Ces avalanches apparaissent dans la direction

de l'écoulement et leur longueur caractéristique est au moins de l'ordre de grandeur de la taille de notre système numérique (environ 19 bulles côte-à-côte dans la longueur). Par conséquent, la déformation fluctue beaucoup, donnant une valeur moyenne de  $U$  inférieure à celle d'une mousse plus désordonnée.

La présence des parois va aussi jouer sur l'évolution, en particulier lorsque la mousse s'est ordonnée : du fait de la présence des bords, on induit des défauts en périphérie de zones plus ordonnées. Celles-ci sont donc plus rigides, et les T1s ont lieu là où le matériau est plus faible, au niveau des défauts. La conséquence est que les avalanches de T1s ont lieu encore plus tôt et  $U_\gamma$  est abaissée, d'où une impression de sursaut plus important pour ces simulations (mousses rouge et magenta du tableau (2.1)).

#### 5.5.4 Validations futures

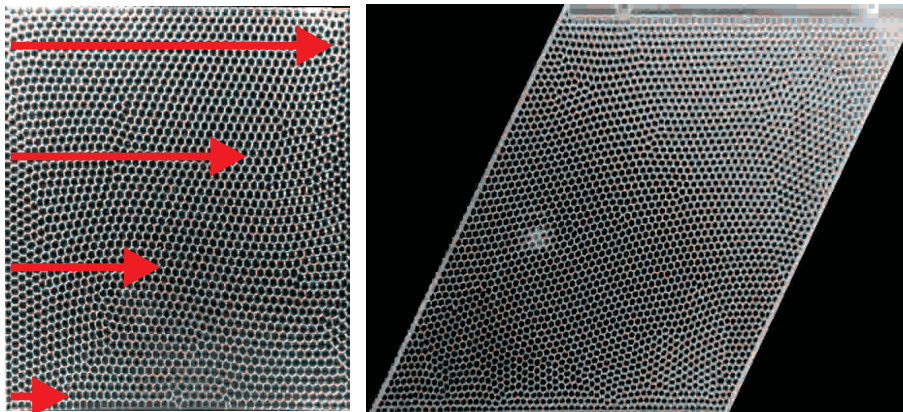


FIG. 5.19 – Géométrie de *cisaillement simple* (d'après S. Attai Talebi et C. Quilliet). Les flèches rouges représentent le vecteur vitesse suivant la hauteur dans le dispositif.

Notre espérons approfondir cette étude en déterminant plus précisément  $h$  grâce à une augmentation des statistiques (plus de T1s) ; ainsi qu'en la validant avec d'autres expériences et simulations pour lesquelles l'approche continue serait valable. En effet, le fait que le système présente des avalanches de T1s au cours de l'évolution des simulations ne nous permet pas de modéliser le champ de vitesse à l'intérieur du rhéomètre avec des équations continues. De plus, couplées avec la taille finie du système ou la présence des bords, ces avalanches entraînent une fluctuation des données moyennées et donc une imprécision sur la détermination des paramètres du modèle.

Ces effets (paroi, évolution de la structure au cours de la simulation, avalanches de T1s) pourront être réduits en prenant une mousse polydisperse et avec plus de bulles ; et en utilisant une géométrie de *cisaillement simple* [1, 112] : on impose le mouvement de cisaillement à l'ensemble des bulles (figure (5.19)) et non pas seulement aux bulles touchant les parois comme dans les géométries de *cisaillement de Couette* (simulations de ce chapitre) ou de *Couette cylindrique* (voir expérience en (2.1.5)). Les personnes impliquées dans ces validations sont citées en (7.2).

Les futures études pourront être plus quantitatives en mesurant par exemple l'évolution du désordre ( $\delta n / \langle n \rangle$ ),  $n$  étant le nombre moyen de voisins d'une bulle).

### 5.5.5 Différence scalaire-tensoriel

Pour passer du modèle scalaire au modèle tensoriel, nous avons dû faire des hypothèses sur la géométrie des T1s, en supposant notamment que le taux de déformation plastique est parallèle à la déformation élastique (4.4.3). La comparaison entre les deux modèles se fait via la contrainte tangentielle  $\sigma_{xy}$ . Celle-ci est proportionnelle à  $u$  pour le modèle scalaire et  $U_{xy}$  pour le modèle tensoriel. On peut noter quelques différences :

1. En réalité il faut comparer  $U_{xy}$  à  $u/2$ , du fait de la définition habituelle du tenseur de déformation [86], car la déformation interne réelle est proportionnelle à  $\gamma/2$ . Notamment, on trouve respectivement pour le modèle scalaire et tensoriel :  $\sigma_{xy} = \mu u$  et  $\sigma_{xy} = 2\mu U_{xy}$ ,  $\mu$  étant le module élastique de cisaillement 2D. La cohérence des deux modèles s'écrit donc :

$$u = 2U_{xy}. \quad (5.8)$$

2. Dans le régime purement élastique, le modèle scalaire suppose  $du/dt = d\gamma/dt$ . Le modèle tensoriel, quant à lui, donne une relation linéaire entre  $U_{xy}$  et  $\gamma$  jusqu'à  $U_{xy} \simeq 0.3$  ; au-delà, des effets de rotation de  $\bar{U}$  apparaissent.
3. Dans le domaine élasto-plastique, des effets tensoriels apparaissent dès  $U_{xy} \simeq 0.25$ , avec notamment pour effet un sursaut en  $U_{xy}$  (5.3.2) ; ou encore un état saturé qui n'est pas atteint directement pour  $U = U_Y$ , car la structure peut encore tourner (5.3.3).
4. D'autre part le modèle scalaire ne capte pas d'effet tel la différence des contraintes normales. Pour ce modèle il n'y a pas de distinction entre un matériau isotrope et un matériau précontraint à  $u = 0$ .

En fait les modèles sont équivalents tant que les tenseurs gardent une direction proche de celle du cisaillement imposé ( $\bar{U}$  et  $\nabla v_{sym}$  ont même direction). C'est le cas jusqu'à  $U_{xy} \simeq 0.25$ , ce qui couvre une grande gamme de mousse en fraction liquide (figure (4.5)), ainsi que d'autres matériaux. Dans ce cas on a alors  $U \simeq U_{xy} \simeq u/2$  et :

$$u_Y \simeq 2U_Y. \quad (5.9)$$

Sur la figure (5.20), on vérifie ce point en reprenant des données de rhéologie oscillatoire ( $G'$ ,  $G''$  voir (1.1.1)) concernant des émulsions, et bien modélisées par le modèle scalaire [92]. Le modèle tensoriel s'accorde bien au modèle scalaire, car  $U_Y$  est inférieur à 0.25.

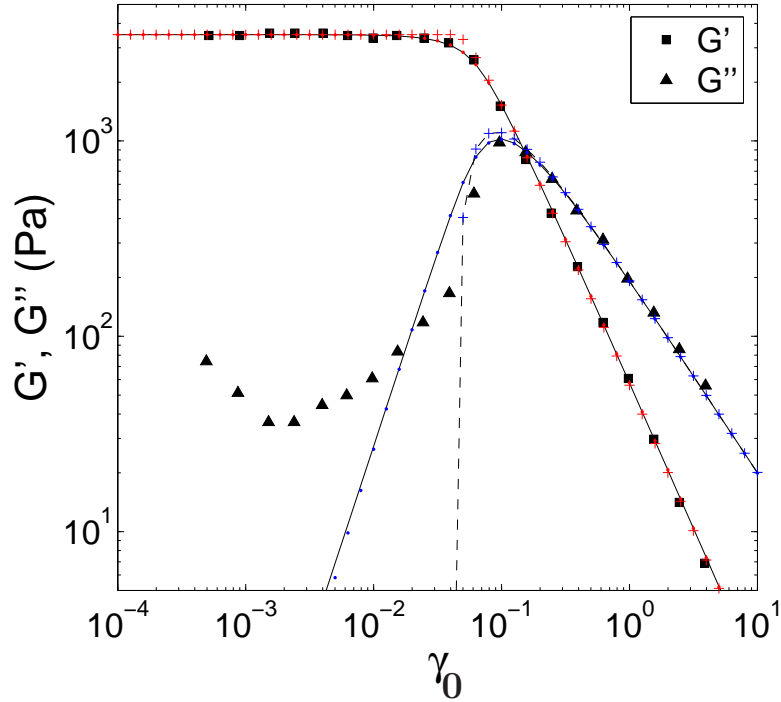


FIG. 5.20 – D’après [92]. Comparaison des données en rhéologie oscillatoire  $G'$ ,  $G''$  fonction de l’amplitude de l’oscillation  $\gamma_0$  pour le modèle scalaire ( $n = 2$  en continu,  $n = \infty$  en tiret) et des données expérimentales sur des émulsions [94]. On a ajouté les points que donne le modèle tensoriel ( $\bullet$  :  $n = 2$ ,  $+$  :  $n = \infty$ ). L’accord entre le modèle scalaire et le modèle tensoriel est excellent, en prenant  $u_Y = 0.045$  et  $U_Y = 0.0225$  respectivement (voir équation (5.9)). Par souci de clarté, on n’a pas ajouté le terme de viscosité (non étudiée ici), qui permet de reproduire très bien  $G''$  à petit  $\gamma_0$  [92].

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé les prédictions du modèle élasto-plastique tensoriel sur une géométrie simplifiée. On limite alors notre étude à l’équation

d'évolution de la structure. Ce modèle semble capturer l'essentiel des ingrédients physiques : à partir de  $U_Y$  et  $h$  on peut modéliser le comportement. Les différents régimes élastique (pas de T1), élasto-plastique (T1 et évolution de la structure) et plastique (T1 et plus d'évolution de la structure) sont explorés.  $U_Y$  est la valeur de la déformation dans le régime plastique.  $h$ , proportion de plasticité, caractérise la transition entre le régime purement élastique et le régime purement plastique, ce qui permet de distinguer un matériau plutôt mou (qui plastifie tôt et progressivement) d'un matériau plutôt dur (qui plastifie tard et brutalement).

Ce modèle peut servir de référence pour tout matériau cellulaire ou particulaire, présentant un seuil de déformation (mousses, émulsions, suspensions colloïdales [92]), et dont le taux de plasticité est aligné avec la déformation élastique.

Dans le régime purement élastique (5.2), ce modèle est valable pour tout matériau cellulaire ou particulaire pour lequel on peut définir des relations de voisinage. Tant que les déformations restent suffisamment petites ( $U \leq 0.3$ ), le matériau s'étire suivant le gradient de vitesse symétrisé et  $\dot{U} \simeq \dot{U}_{xy} \simeq \dot{\gamma}/2$ . Ce régime, dit linéaire, est limité par un effet de rotation de la structure pour  $U > 0.3$ . Dans le cas général, le matériau se rétracte si il n'est pas orienté suivant le gradient de vitesse symétrisé et s'étire dans le cas contraire. On peut traiter toute déformation initiale et tout cisaillement, de directions relatives quelconques.

Plus les T1s arrivent tardivement, plus le régime saturé est atteint rapidement. Le régime élasto-plastique (5.3) est décrit par  $h$ . Pour des mousses typiques (modélisation  $n = 2$  et  $U_Y = 0.3$  pour des mousses assez désordonnées et plutôt sèches) en partant d'un état non-déformé, la saturation est atteinte pour  $\gamma = 2$ . Une fois le régime saturé ou plastique atteint, le matériau décrit un cycle limite si on le cisaille alternativement. Ce cycle est proche de la trajectoire élastique passant par la limite plastique et pointe la difficulté de retourner vers un état déformé une fois que le matériau a plastifié. A cette fin une procédure est proposée.

L'état purement plastique (5.3.1), déterminé par  $U_Y$  est représenté par un point sur les trajectoires : il se situe en  $U = U_Y$  sur la trajectoire élastique dont la tangente pointe vers l'origine. Ceci découle de l'hypothèse bien vérifiée que les T1s sont en moyenne orientés suivant la structure, du moins dans le régime saturé.

Les paramètres du modèle dépendent de la structure (5.4) :  $U_Y$  dépend fortement de la fraction liquide, un petit peu de la dispersité et de la présence de bords. Une mousse désordonnée facilite des T1s précoces ; mais tend à s'ordonner au fur et à mesure du cisaillement.

Une cause possible du sursaut de contrainte dans les mousses est pointée (5.3.3). Celle-ci est liée à une rotation de la structure car la limite plastique n'est pas orientée suivant le gradient de vitesse symétrisé (visible à partir de  $U_Y = 0.25$ ). Ce sursaut découle directement du caractère tensoriel des équations et doit être comparé à des effets de réorganisation de la structure.

Enfin, les modèles scalaire et tensoriel sont similaires jusqu'à des déformations

$U = 0.25$  ( $\bar{U}$  aligné avec  $\bar{\nabla}v_{sym}$ ), mais le modèle scalaire ne capte pas d'effet tel que les différences de contraintes normales (5.5.5). Cette limite couvre déjà une grande gamme de mousse en fraction liquide, ainsi que d'autres matériaux. Le passage d'un modèle à l'autre s'effectue via l'équation  $u = 2U_{xy}$ . Pour  $U_Y < 0.25$ ,  $u_Y = 2U_Y$ .



# Chapitre 6

## Discussion

### 6.1 Dynamique de la mousse et des bulles

Dans les sections précédentes on a fait des prédictions sur la structure de la mousse : description des T1s dans (4.4.3), évolution de  $\bar{U}$  dans le chapitre (5). Pour cela, soit on a observé directement la structure, soit on lui a imposé un mouvement global contrôlé (chapitre (5)). Ces différentes étapes nous ont permis de supposer une forme pour l'équation d'évolution de la structure (équation (5.3)), valide pour des bulles relaxées. Dans le cas contraire, la structure n'a pas le temps de relaxer et des déformations supérieures sont observées (4.2.1). Cet effet doit alors être pris en compte [122].

Par contre il est beaucoup plus difficile de prédire la forme complète d'un écoulement, car cela suppose de connaître toutes les forces qui interviennent, via l'équation d'évolution de la quantité de mouvement.

#### 6.1.1 Equation d'évolution de la quantité de mouvement

Dans le cas des écoulements, il faut tenir compte à la fois des contraintes internes, mais aussi des forces extérieures dans le bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v} = \nabla \cdot \bar{\sigma} + \vec{f}_{ext}. \quad (6.1)$$

Du fait de la géométrie 2D, on choisit d'utiliser les variations de quantité de mouvement par unité de surface :  $\rho$  désigne la densité massique ( $\text{kg}/\text{m}^2$ ),  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes ( $\text{N}/\text{m}$ ) et  $\vec{f}_{ext}$  les forces surfaciques extérieures ( $\text{N}/\text{m}^2$ ), ici la friction sur les plaques. Les contraintes sont d'origines à la fois élastique et visqueuse ; on peut supposer la forme suivante, pour étendre le modèle scalaire [92] :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= -p \bar{I}d + \bar{\sigma}^{el} + \bar{\sigma}^{vis} \\ &\simeq -p' \bar{I}d + 2\mu \bar{U} + 2\eta \bar{G}_{sym} \end{aligned} \quad (6.2)$$



Par convention  $p$  a l'unité d'une force par unité de longueur ;  $\mu$  et  $\eta$  sont respectivement le module élastique de cisaillement et la viscosité élongationnelle à 2D. Le terme de pression effective  $p'$  incorpore la trace des différents tenseurs de contrainte, en plus de la pression  $p$ .

On suppose que l'élasticité est décrite par  $\bar{U}$ , conformément aux différentes données expérimentales ([3], [68] et (4.4.2)).  $\bar{U}$  évolue suivant l'équation d'évolution de la structure (équation (2.28)) dont les réarrangements peuvent être décrits par l'équation (4.10) lorsque les bulles ont le temps de relaxer.

La forme des contraintes visqueuses internes est ici supposée, puisque nous ne disposons pas de données expérimentales. La dissipation interne dans les mousses trouve de nombreuses origines, liées notamment à la localisation des différents écoulements de liquide à l'intérieur de la mousse [10]. On prend ici la forme la plus simple, linéarisée, faisant apparaître  $\bar{G}_{sym}$ . Ce tenseur décrit bien les mouvements entre bulles et semble coïncider à grande échelle avec  $\bar{\nabla}v_{sym}$  (voir (4.4.1)), qui est le tenseur usuel utilisé par les mécaniciens pour décrire ce genre de force.

### 6.1.2 Equations constitutives

A partir des différentes hypothèses, l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (équation (6.1)), l'équation d'évolution de la structure (équation (5.3)), on remplace la dérivée partielle par rapport au temps par une dérivée particulière pour tenir compte du transport), l'équation définissant  $\bar{U}$  (équation (2.25)) et l'équation d'incompressibilité forment un système fermé d'équations constitutives :

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt} \vec{v} &= \nabla \cdot \left( -p' \bar{I}d + 2\mu \bar{U} + 2\eta \bar{\nabla}v_{sym} \right) + \vec{f}_{ext} \\ \frac{d}{dt} \bar{M} &= \bar{M} \cdot \bar{\nabla}v + \bar{\nabla}v^t \cdot \bar{M} - \left( \frac{\bar{U}}{\bar{U}} : \bar{\nabla}v_{sym} \right) \mathcal{H} \left( \frac{\bar{U}}{\bar{U}} : \bar{\nabla}v_{sym} \right) h \left( \frac{\bar{U}}{\bar{U}_Y} \right) \frac{\bar{U}}{\bar{U}} \cdot \bar{M} \\ \bar{U} &= \frac{1}{2} \left( \log \bar{M} - \log \bar{M}_0 \right) \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Cela est permis grâce à l'élimination de  $\bar{G}$  dans les deux premières équations grâce à l'hypothèse  $\bar{G} \simeq \bar{\nabla}v$  (4.4.1). L'expression de la plasticité (5.2) est utilisée dans la deuxième équation.

Le système d'équations est aussi applicable à 3D, mais n'a pour le moment pas encore été validé.

On se retrouve avec un système de trois équations à trois inconnues. Ainsi dans l'équation d'évolution de la structure,  $\bar{M}$  ne dépend que du gradient de vitesse local  $\bar{\nabla}v$ , qui lui même est couplé à  $\bar{M}$  (via  $\bar{U}$ ) dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement. Ces trois grandeurs  $\bar{M}$ ,  $\bar{U}$  et  $\bar{\nabla}v$  représentent bien

chacune leur niveau de description :  $\bar{M}$  pour la structure,  $\bar{U}$  pour les déformations élastiques (aspect solide) et  $\bar{\nabla}v$  pour l'écoulement (aspect liquide).

Le test d'un tel système d'équations constitutives n'est pas aisé, notamment à cause de la difficulté de traiter les non-linéarités engendrées par le logarithme. Inspiré par les mousses, P. Saramito [122] a proposé un modèle qui incorpore les principales caractéristiques et étend le modèle pour des écoulements hors du régime relaxé des bulles.

### 6.1.3 Ordres de grandeur des paramètres

Au vu des différents résultats expérimentaux on peut comparer les différentes forces : friction sur les plaques ; élasticité ; friction interne.

$f_{ext}$  se déduit de la mesure de la perte de charge dans le canal  $\Delta P$  (3.2.2). L'équilibre des forces en régime stationnaire de la mousse à l'intérieur du canal donne

$$f_{ext} = \Delta P \frac{l_{canal} \cdot e}{L_{canal} \cdot l_{canal}} = \nabla P \cdot e. \quad (6.4)$$

$L_{canal} = 1$  m,  $l_{canal} = 10$  cm et  $e = 3$  mm sont les dimensions du canal. A partir de l'équation (3.5), on peut alors estimer la force extérieure en fonction de la vitesse locale  $v$ . En prenant par exemple  $\Phi = 1\%$ , on a :

$$f_{ext} = 31 v^{0.64}, \quad (6.5)$$

où  $f_{ext}$  est exprimée en N/m<sup>2</sup> et  $v$  en m/s.

La contrainte élastique dépend de la valeur de la tension de ligne. En prenant  $\Gamma = 25$  mN/m et en supposant que la mousse est suffisamment sèche pour que les faces de bulle soient verticales (1.2.1), on a :

$$\lambda \simeq \Gamma 2e = 0.15 \text{ mN}.$$

De cette valeur, on déduit à partir des équations (A.8) et (A.16) le module de cisaillement  $\mu$  :

$$\mu = \frac{3^{1/4}}{2^{3/2}} \frac{\lambda}{\sqrt{A}} \simeq 2.0 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}.$$

L'ordre de grandeur de la force élastique surfacique locale est reliée aux variations locales  $\delta U$  de  $\bar{U}$  sur une échelle de longueur  $\delta r$  :

$$f^{el} = 2\mu \frac{\delta U}{\delta r} = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\delta U}{\delta r}. \quad (6.6)$$

Dans cette formule,  $f^{el}$  est exprimée en N/m<sup>2</sup> et  $\delta r$  en m.

La comparaison de la force extérieure de friction  $f_{ext}$  (équation (6.5)) et des forces élastiques  $f^{el}$  (équation (6.6)) fait donc intervenir localement la vitesse de

l'écoulement  $v$  (vitesse par rapport aux plaques),  $\delta U$  et  $\delta r$ . Ces deux forces sont du même ordre de grandeur si

$$v_{cri}^{0.64} = 1.3 \cdot 10^{-3} \frac{\delta U}{\delta r}, \quad (6.7)$$

avec  $\delta r$  en m et  $v_{cri}$  en m/s. En prenant des échelles typiques :  $\delta U = 0.3$ ,  $\delta r = 5$  mm, on obtient une vitesse critique  $v_{cri} = 18$  mm/s. Cette échelle de vitesse est importante pour dire lequel des deux effets est dominant. Si localement l'écoulement est suffisamment lent par rapport à cette vitesse, la force élastique est dominante devant la friction externe. Remarquons tout de même que l'échelle des variations spatiales n'est pas homogène : les variations spatiales sont plus fortes à l'arrière de l'obstacle qu'à l'avant.

La force de friction visqueuse interne n'a pas pu être évaluée directement dans nos expériences. Plusieurs possibilités peuvent néanmoins être envisagées pour l'estimer. A partir d'expérience de rhéologie oscillatoire 3D à  $\omega$  fixé et  $\gamma_0$  variant,  $G'$  et  $G''$  sont constants sur une large bande à faible  $\gamma_0$  (figure (1.1a)). A partir de ces valeurs, on en déduit le module de cisaillement 3D et la viscosité de cisaillement 3D, dont le rapport doit être environ le même qu'en 2D pour une solution savonneuse donnée.

Une autre possibilité est d'utiliser les résultats de Janiaud *et al.* [69]. Ils expliquent la localisation dans les expériences de cisaillement de Couette par une compétition entre force visqueuse interne et externe :  $f_{ext} = \beta v$ ,  $f_{int} = \eta \nabla v$ . D'après les expériences, ils évaluent  $\eta/\beta$  comme la taille d'une bulle (soit  $\sqrt{A}$ ). Cette relation doit être générale (si  $e$  est de l'ordre de la taille d'une bulle) et à peu près indépendante de  $\Phi$ . On a donc approximativement :

$$\frac{\nabla v_{cri}}{v_{cri}} \simeq \frac{1}{\sqrt{A}} = 290 \text{ m}^{-1}. \quad (6.8)$$

Ce qui donne  $\nabla v_{cri} = 5.2 \text{ s}^{-1}$ . Soit un temps caractéristique  $1/\nabla v_{cri} \simeq 200$  ms.

### 6.1.4 Discussion

Nous discutons ici la contribution sur les écoulements obtenus des différentes forces évaluées précédemment. Un troisième effet dissipatif est présent lors d'un T1 (4.2.1) : les écoulements de liquide dissipent l'énergie relâchée par le T1, entraînant la relaxation de la forme des bulles. Cet effet existe même en régime quasistatique mais ne se voit que pour des gradients de vitesse suffisamment élevés par rapport au temps de relaxation du T1, et a pour conséquence des étirements de bulle plus élevés, et donc des contraintes élastiques plus élevées. Cet effet se joue sur une échelle de temps plus rapide ( $\simeq 10$  ms) que celle de la dissipation interne ( $\simeq 200$  ms). De façon générale, ces trois effets dissipatifs entraînent une augmentation des contraintes avec la vitesse de l'écoulement.

Le régime relaxé correspond à des écoulements suffisamment lents devant le temps de relaxation des T1s : c'est le cas le plus usuel des expériences présentées dans le chapitre (4). Même dans ce cas le plus simple, il n'est pas évident de savoir quelles sont les forces dominantes. Ainsi, dans une géométrie de Couette en régime permanent, Janiaud *et al.* [69] ont montré que l'élasticité sature dans la zone fluide de l'écoulement. Cela signifie que  $U$  a atteint sa valeur de saturation  $U_Y$  (5.3.1) et  $\bar{U}$  est homogène (même direction) car la direction de cisaillement est elle-même homogène. En conséquence  $\delta U \simeq 0$  dans l'équation (6.7), et l'écoulement résulte d'une compétition entre forces de friction externe et interne. Leur analyse, basée sur un modèle continu scalaire, est en accord avec l'observation expérimentale qu'on localise l'écoulement lorsqu'on ajoute une plaque dans une expérience eau-air [137]. Récemment I. Cheddadi [17] en collaboration avec notre équipe a confirmé ce scénario pour l'expérience de Couette cylindrique présentée en (2.1.5) à partir d'un modèle continu tensoriel.

Dans le cas de l'écoulement de Stokes, l'écoulement est hétérogène et  $\bar{U}$  varie spatialement. La simulation représente la limite quasistatique, c'est-à-dire que les trois effets dissipatifs sont suffisamment rapides pour ne pas être pris en compte dans les équations. Concernant les expériences, on a estimé une vitesse critique (respectivement un gradient de vitesse critique) à partir de laquelle la force de friction externe (respectivement interne) devient comparable à la force élastique. On s'attend alors à ce que l'expérience très basse vitesse soit plus proche des simulations que les expériences à débit d'azote contrôlé (voir cartes, chapitre (4)). Cela semble être le cas, si on compare qualitativement la carte de  $\bar{U}$  derrière l'obstacle (figures (4.9a) et (4.14a)). Dans tous les cas la signature des forces élastiques se retrouve sur le sursaut observé derrière l'obstacle (figure (4.2)). Cet effet est bien connu dans la littérature des écoulements viscoélastiques [44]. Il s'agit en fait d'une signature élastique puisque cet effet est observé de même pour l'écoulement quasistatique, alors qu'un écoulement visco-plastique ne crée pas d'asymétrie [143, 118].

En augmentant la vitesse, on s'attend à ce que les forces de friction interne et externe deviennent de plus en plus grandes. Avec les expériences les plus rapides ( $v = 55$  cm/s,  $\nabla v_{sym} = 24$  s<sup>-1</sup>), on s'attend à ce que ces effets jouent un rôle plus important. En revanche, comme les gradients de vitesse deviennent suffisamment rapides devant la relaxation des T1s, les bulles sont plus étirées et les forces élastiques augmentent aussi (figures (4.6a et b)). La présence du sursaut, amplifié à haute vitesse (figure (4.2)), témoigne que ces effets élastiques ont toujours un poids important, au moins derrière l'obstacle, où l'écoulement impose un point de stagnation et donc des forces de friction externe faibles.

Quoi qu'il en soit, seule la comparaison des expériences avec la résolution numérique 2D d'un modèle visco-élasto-plastique complet pourra permettre de comprendre quelles sont les forces dominantes dans nos expériences.

## 6.2 Validité d'une approche locale et continue.

Nous discutons la validité d'appliquer une approche locale et continue aux mousses au vu des différents résultats rédigés dans ce manuscrit. Comme on l'a vu en introduction (1.2.3), l'hypothèse de milieu continu s'applique lorsqu'il existe une séparation des échelles de grandeur entre les objets individuels constituant l'écoulement et l'écoulement lui-même, et que les interactions à longue portée ont un effet négligeable. Nous discutons ici ces deux conditions :

- En mécanique des fluides, la description continue passe par la notion de *particules fluides* [132]. On suppose que dans un écoulement il existe une gamme d'échelles  $L_2$  entre l'échelle moléculaire  $L_1$  et l'échelle de l'écoulement  $L_3$  ( $L_1 \ll L_2 \ll L_3$ ). Ces hypothèses assurent qu'à toute échelle  $L_2$ , les différentes grandeurs mesurées varient spatialement lentement de sorte que l'on peut utiliser les outils différentiels.

Dans nos expériences de mousses, on a une possibilité de visualiser les bulles sur l'échelle de l'écoulement en entier et donc d'observer simultanément  $L_1$  et  $L_3$ . La conséquence est qu'elles sont peu séparées, donc que la condition  $L_1 \ll L_2 \ll L_3$  n'est qu'approximativement remplie : il n'y a qu'un facteur 10 environ entre la taille caractéristique de l'obstacle et la taille d'une bulle.  $L_2 < L_3$  est important pour voir les variations spatiales : c'est bien le cas ici.  $L_1 < L_2$  est important pour avoir beaucoup de bulles dans chaque statistique ; or on l'a sans avoir besoin de  $L_1 < L_2$ . En effet, la solution envisagée ici est de garder des échelles spatiales suffisamment petites, voire inférieure à la taille d'une bulle, pour mesurer les grandeurs, mais de moyennner dans le temps pour augmenter les statistiques. En prenant ainsi des RVEs contenant en moyenne 0.33 bulles, on a pu garder des moyennes correctes en moyennnant sur 1000 images (330 bulles) (4.2.3). En revanche on perd de la résolution temporelle à effectuer cette opération, ce qui n'est pas gênant du moment que l'écoulement reste stationnaire.

- Concernant l'hypothèse des interactions longues portées, pour les mousses le débat n'est pas encore tranché. Celles-ci peuvent être présentes dans les mousses sous forme d'avalanches de T1s. C'est-à-dire qu'un T1 localisé entraîne d'autres T1s sur des distances en général grandes devant la taille des RVEs. De tels événements ont notamment été observés dans de nombreuses expériences de cisaillement [30, 119, 90, 137], ainsi que dans les simulations du chapitre (5).

Dans certains cas, les forces élastiques sont négligeables devant les forces de friction, et la mousse peut tout de même être décrite comme un milieu continu [69, 17]. Ainsi les champs de vitesse de certaines expériences [30, 90, 137], voir l'exemple sur la figure (1.9b), peuvent être retrouvés par des équations continues et locales. Dans le cas contraire où ces avalanches ont une importance, les champs de vitesse deviennent plus compliqués (figure (1.9a) tirée de [119]). C'est le cas par exemple des simulations du chapitre (5) lorsque la mousse s'ordonne. Ceci justifie notre approche globale pour étudier les caractéristiques de la mousse, plutôt qu'une étude locale qui n'aurait pas eu de sens dans ce régime.

Dès lors il semble qu'il faille prendre des précautions avec la géométrie de cisaillement si les forces de friction ne sont pas dominantes. Le fait que globalement (à l'échelle du rhéomètre) la mousse puisse être décrite par un fluide à seuil, décrite par exemple par le modèle du pinceau, n'implique pas qu'une modélisation avec ces mêmes équations au niveau local permette de retrouver le champ de vitesse obtenu en expérience ou simulation. Dans cette géométrie, les bulles sont proches de leur déformation maximale, et l'élasticité sature de façon quasi-homogène [69]. Dès lors, un T1 entraîne d'autres T1s en avalanche, ce qui n'est pas compatible avec une approche continue si les forces élastiques sont dominantes.

Dans la géométrie de Stokes par contre, l'écoulement est très hétérogène. Il en est de même de la déformation des bulles. Dollet *et al.* [42] ont montré que les corrélations à grande échelle étaient négligeables dans cette géométrie, excepté pour les mousses très humides pour lesquelles des avalanches de T1s sont observées. La continuité des champs obtenus dans le chapitre (4) renforce les arguments pour une approche continue dans cette géométrie.

Encore une fois, seule la comparaison des champs expérimentaux ou numériques avec ceux prédits par un modèle continu, contenant les différents ingrédients rhéologiques des mousses, permettra de trancher cette question.



# Chapitre 7

## Conclusion

### 7.1 Résumé

Ce travail, réalisé dans le contexte de la recherche sur la rhéologie des mousses, s’appuie sur les écoulements 2D de mousse pour tester une approche continue tensorielle.

Dans l’introduction (chapitre (1)) nous rappelons succinctement les différents sujets qui agitent la communauté de la rhéologie des mousses. Le modèle scalaire élasto-plastique que nous utilisons y est décrit.

Dans le chapitre (2), nous décrivons comment nous obtenons des écoulements 2D de mousse. L’utilisation d’un dispositif verre-verre permet l’obtention d’une grande gamme de vitesses d’écoulement et de fractions liquides, et donc une exploration significative de l’espace des paramètres. La limite “vitesse d’écoulement tendant vers 0” est approchée expérimentalement, mais aussi numériquement grâce à l’utilisation de simulations quasistatiques (modèle de Potts). Nous décrivons les différentes grandeurs mesurées. On retrouve les grandeurs apparaissant dans l’équation d’évolution de la quantité de mouvement, les grandeurs statistiques mesurant l’évolution de la structure, ainsi que les grandeurs continues associées (on enlève le caractère discret des bulles). Les modes de représentations sont détaillés. La fraction liquide effective  $\Phi_{eff}$  est définie. Elle caractérise les propriétés plastiques d’une mousse 2D, indépendamment du système expérimental utilisé.

L’utilisation d’un dispositif 2D, entraîne des problèmes spécifiques : répartition du liquide dans la mousse, frottement de la mousse sur les parois, instabilité à haute vitesse. L’ajout d’un obstacle dans le canal permet d’étudier la mousse, via la force qu’elle exerce sur celui-ci. Ces différents points font l’objet du chapitre (3). La connaissance de la répartition de l’eau est importante pour prévoir sa faciliter à réarranger ses bulles. La perte de charge dans le canal présente des variations avec la fraction liquide et la vitesse d’écoulement, qui ne sont pas prédites par les modèles usuels 1D. Lorsque la vitesse d’écoulement devient trop impor-



tante (avec une légère dépendance de la fraction liquide) la mousse peut donner lieu à deux sortes d'instabilité. L'étude de la force exercée sur l'obstacle est une première étape pour caractériser les propriétés rhéologiques de la mousse. Dans le régime basse vitesse, les deux contributions principales sont la force de réseau et la force de pression. La force de réseau présente une dépendance géométrique et une dépendance mécanique, faisant apparaître l'effet de la fraction liquide effective. Cette étude justifie l'utilisation de cette grandeur. Des effets discrets apparaissent lorsque les dimensions du canal deviennent comparables à la taille des bulles.

La description des écoulements fait partie du chapitre (4). On obtient des cartes pour différentes fractions liquides et vitesse d'écoulement. Plus la mousse est sèche, plus les déformations sont importantes et les réarrangements localisés autour de l'obstacle. Le constat est le même lorsque la vitesse d'écoulement est augmentée : les bulles peuvent se déformer plus car elles n'ont plus le temps de relaxer. On peut définir un nombre de Weissenberg  $Wi$  localement pour quantifier le gradient de vitesse local par rapport au temps de relaxation de la structure ( $\simeq 10ms$ ). On atteint  $Wi \leq 1$ , après quoi la mousse casse. Les champs semblent continus même à des échelles inférieures à celle de la bulle. L'utilisation de grandeur statistique basée sur les centres de bulle semble renforcée : la grandeur caractéristique des variations de la structure par l'écoulement  $\bar{G}$  est très bien approximée par le gradient de vitesse. L'élasticité est bien décrite par la déformation élastique  $\bar{U}$ . Les réarrangements sont prédits à partir de l'état local de la mousse en généralisant un modèle élasto-plastique scalaire. Ces différents points soulignent qu'une approche continue des mousses peut être pertinente.

À la vue des résultats précédents, une équation d'évolution de la structure tensorielle aux dérivées partielles est testée (chapitre (5)). Pour cela on se place dans une géométrie simplifiée (cisaillement de Couette) et on impose une déformation globale à la mousse. Les différents régimes élastique (pas de T1), élasto-plastique (T1 et évolution de la structure) et plastique (T1 et plus d'évolution de la structure) sont explorés. Ce modèle semble capturer l'essentiel des ingrédients physiques : en connaissant  $U_Y$  (déformation à saturation) et  $h$  (proportion de plasticité) on peut modéliser le comportement.  $U_Y$  caractérise la déformation maximale pour laquelle le matériau peut se déformer.  $h$  caractérise la transition entre le régime purement élastique et le régime purement plastique. Ce modèle peut servir de référence pour tout matériau cellulaire ou particulaire, présentant un seuil de déformation et dont le taux de plasticité est aligné avec la déformation élastique. Le régime purement élastique est caractérisé. Il présente un régime linéaire tant que les déformations restent inférieures à 0.3. Au-delà, des effets de rotation de la structure apparaissent. Le régime élasto-plastique dépend du désordre. Une fois que le matériau se réarrange un arrêt du cisaillement ne lui permet pas de retrouver une structure isotrope. Le modèle prévoit un sursaut de contrainte lié à une rotation de la structure. Ce sursaut doit être comparé au sursaut lié à la

réorganisation de la structure. Le régime plastique est atteint si le matériau est suffisamment cisailé (jusqu'à une déformation imposée de 2 pour des mousses typiques). L'état du matériau (élongation, orientation) est alors donné par  $U_Y$ , ce qui découle directement de l'hypothèse que les T1s sont alignés avec la structure.  $U_Y$  dépend fortement de la fraction liquide, un petit peu de la dispersité et de la présence de parois. Enfin les modèles scalaire et tensoriel sont similaires tant que les déformations restent inférieures à 0.25.

Le chapitre (6) propose un système fermé d'équations constitutives. Celui-ci comporte une équation d'évolution de la quantité de mouvement ; une équation d'évolution de la structure basée sur la texture ; et une équation reliant la texture à une grandeur continue gommant le caractère discret des bulles : la déformation élastique. Seule la contribution des forces de dissipation interne est postulée sans validation. Les différentes forces mises en jeu sont discutées pour nos expériences, et on évalue une vitesse et un gradient de vitesse critiques au-delà desquels les effets visqueux doivent être pris en compte. Enfin les conditions de validité de cette approche continue sont discutées. Des précautions sont nécessaires pour les géométries simplifiées, pour lesquelles des avalanches de T1s ont souvent lieu.

## 7.2 Perspectives

Cette thèse ouvre de nombreuses perspectives.

Les champs obtenus en géométrie verre-verre peuvent être comparés aux simulations prenant en compte la force de friction sur les parois. Des visites longue durée concernant la rhéologie des écoulements 2D de mousse sont prévues entre notre équipe et celle de Simon Cox (University of Wales, Aberystwyth UK).

Les outils tensoriels développés peuvent être définis pour tout matériau cellulaire ou particulaire, et plus généralement pour tout matériau pour lequel on peut définir des relations de voisinage. Différentes personnes commencent à utiliser cet outil : Jos Käfer, actuellement en thèse dans l'équipe DyFCoM, étudie la comparaison entre mousses et agrégats de cellules biologiques ; Sébastien Courty (ENS, Paris) les utilise pour décrire des tissus biologiques. Gwennou Coupier, postdoctorant dans l'équipe, a fait des essais prometteurs dans le cas d'un système 2D de billes qui se repoussent.

Le modèle élasto-plastique tensoriel peut servir de référence pour l'étude d'autres matériaux. Philippe Marmottant teste cette approche sur des simulations de cisaillement de verres (interaction Lennard-Jonnes) fournie par Anne Tanguy (LPMCN, Lyon). Un projet de thèse a été déposé pour faire de la rhéologie avec des micromousses et des colloïdes en cotutelle avec le groupe du Professeur Maret à Constance (Allemagne).

Des mesures plus précises de la "proportion de plasticité" sont en cours dans le cadre d'une géométrie de cisaillement simple. Ceci fait partie du projet de thèse de S. Attai Talebi, appuyée par Catherine Quilliet et le travail effectué par David

Rabaud dans le cadre de son stage Master 2. M. Idiart (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brésil) travaille actuellement sur des simulations numériques avec le modèle de Potts.

La validation du modèle pour les mousses fait partie du projet de thèse d'Ibrahim Cheddadi, en cotutelle entre le Laboratoire de Spectrométrie Physique et le Laboratoire Jean Kuntzmann à Grenoble. Il résout numériquement un système d'équations constitutives qui a été adapté pour les mousses. Il a déjà eu des résultats prometteurs en géométrie 1D (Couette cylindrique) et s'attaque maintenant aux écoulements 2D (Stokes). Son directeur de thèse, Pierre Saramito, a étendu le modèle pour des bulles non relaxées et une comparaison avec nos données sera effectuée.

Enfin une analyse locale d'un écoulement 3D serait intéressante pour confronter le modèle. Ceci devrait bientôt être possible grâce au perfectionnement des techniques de tomographie rayons X réalisé au synchrotron de Grenoble, en collaboration avec le Groupe Matière Condensée et Matériaux de Rennes, James Glazier (Bloomington, US) et François Graner.

# Annexe A

## Elasticité d'une mousse ordonnée

On calcule nos quantités tensorielles dans le cas de la mousse 2D ordonnée (A.1) selon l'approche de Princen [111]. Le cas du cisaillement simple (A.2) a été traité par B. Dollet [41]; ici on étudie le cas de l'élongation (A.3). On s'intéresse notamment à l'évolution de la mousse et à la déformation maximale des bulles.

### A.1 Paramétrage

#### A.1.1 Transformations

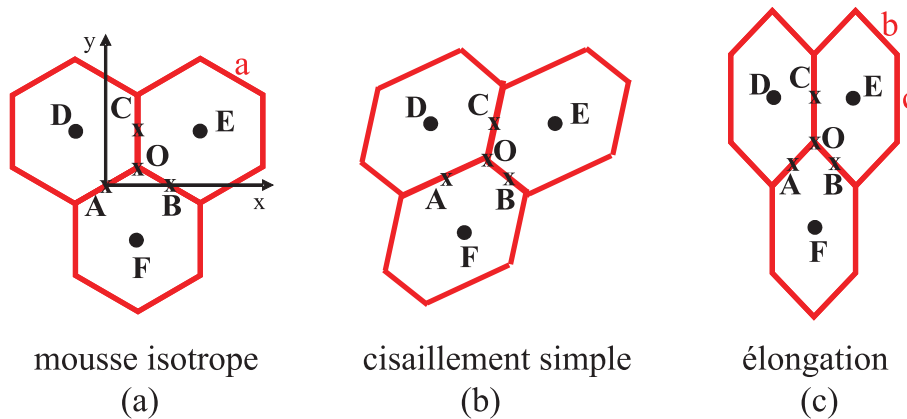


FIG. A.1 – Transformation d'une mousse 2D ordonnée. Paramétrage : A, B et C représentent les milieux des bords de bulles ; D, E et F les barycentres des bulles. O indique la position du vertex.

On part d'une maille d'une mousse isotrope comme sur la figure (A.1). On applique alors une déformation. Les centres des bulles D, E, F, ainsi que les centres des bords de bulles A, B, C suivent la déformation, alors que le mouvement du vertex O n'est pas affine, puisqu'il est défini par la règle de Plateau des  $120^\circ$ . On

appelle  $\vec{l}$  un vecteur qui suit la déformation (par exemple  $\overrightarrow{DE}$ ) et se transforme en  $\vec{l}'$ . Si on note  $\overline{\overline{F}}$  le tenseur gradient de déformation,  $\vec{l}' = \overline{\overline{F}} \cdot \vec{l}$  [91] et on a :

$$\overline{\overline{F}}_{\text{cisaillement}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{\overline{F}}_{\text{elongation}} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dans les deux cas, la transformation est incompressible (déterminant de  $\overline{\overline{F}}^t \cdot \overline{\overline{F}} = 1$ ). L'aire des bulles reste inchangée,  $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ .

### A.1.2 Coordonnées initiales

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{DE} \Big|_0^{a\sqrt{3}} & \overrightarrow{DF} \Big|_{-a3/2}^{a\sqrt{3}/2} & \overrightarrow{FE} \Big|_{a3/2}^{a\sqrt{3}/2} \\ \overrightarrow{AB} \Big|_0^{a\sqrt{3}/2} & \overrightarrow{AC} \Big|_{a3/4}^{a\sqrt{3}/4} & \overrightarrow{CB} \Big|_{-a3/4}^{a\sqrt{3}/4} \end{array}$$

### A.1.3 Expression des grandeurs

D'après (2.3.1), on a :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M}} &= \langle \vec{l}' \otimes \vec{l}' \rangle \\ &= \frac{1}{3} \left( \overrightarrow{DE} \otimes \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} \otimes \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} \otimes \overrightarrow{FE} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma}}^{\text{él}} &= \frac{\lambda}{A} \langle \hat{l} \otimes \vec{l}' \rangle \\ &= \frac{\lambda}{A} \left( \frac{2 \cdot \overrightarrow{OA} \otimes \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} + \frac{2 \cdot \overrightarrow{OB} \otimes \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|} + \frac{2 \cdot \overrightarrow{OC} \otimes \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Cisaillement simple

Ces résultats sont tirés de la thèse de B. Dollet [41]. Pour  $\overline{\overline{M}}$ , on a :

$$\overline{\overline{M}} = \frac{3a^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Pour le calcul de la limite de plasticité, on a besoin de la longueur du plus petit bord de Plateau, ici  $2\|\vec{OB}\|$  et de la déformation  $U$  :

$$2\|\vec{OB}\| = a \frac{2 - \gamma\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \quad (\text{A.6})$$

$$U = \frac{1}{2} \log \left( \frac{2 + \gamma^2 + \sqrt{\gamma^2(4 + \gamma^2)}}{2} \right) \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Elongation

On peut soit appliquer le tenseur gradient de déformation aux différents vecteurs, soit utiliser le fait que les distances horizontales sont rétractées et les distances verticales dilatées d'un facteur  $\alpha$ . La position du point O résulte de la règle des 120°. Après la déformation il y a deux longueurs de bords de bulles différentes :  $c$  et  $b$ . La conservation de l'aire des bulles implique :

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \sqrt{3} \left( c + \frac{b}{2} \right) b. \quad (\text{A.8})$$

Ce qui s'inverse en :

$$c = \frac{A}{\sqrt{3}b} - \frac{b}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Les vecteurs deviennent :

$$\begin{array}{ccc} \vec{OA} \Big|_{\substack{-b\sqrt{3}/4 \\ -b/4}} & \vec{OB} \Big|_{\substack{b\sqrt{3}/4 \\ -b/4}} & \vec{OC} \Big|_0 \\ \vec{DE} \Big|_0 & \vec{DF} \Big|_{\substack{b\sqrt{3}/2 \\ -c-b/2}} & \vec{FE} \Big|_{\substack{b\sqrt{3}/2 \\ c+b/2}} \end{array}$$

On obtient les valeurs des tenseurs :

$$\overset{=}{\sigma} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}a} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\overset{=}{M} = \frac{3a^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{b^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\overset{=}{U} = \log \left( \frac{b}{a} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Comme pour le cisaillement, lors d'une élongation on a  $\text{Tr}(\overset{=}{U}) = 0$  quelle que soit la déformation imposée. Cette propriété est importante. La déformation étant incompressible, on attend effectivement que la trace du tenseur déformation élastique soit nulle [86].

## A.4 Module de cisaillement

En élasticité linéaire, pour un milieu isotrope 2D, on définit le module élastique de cisaillement  $\mu$  par [21] :

$$\begin{cases} \sigma_{xy}^{el} = 2\mu U_{xy} \\ \sigma_{xx}^{el} - \sigma_{yy}^{el} = 2\mu(U_{xx} - U_{yy}) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Dans le cas d'un cisaillement simple, B. Dollet [41] a montré que le module de cisaillement était effectivement isotrope au moins jusqu'à l'ordre 2 et  $\mu_{cis} = \lambda/2\sqrt{3}a$ , retrouvant ainsi le résultat de Princen [111]. Dans le cas de l'élongation, pour étudier les faibles déformations, on pose  $b/a = 1 - \varepsilon$ . On a alors :

$$\begin{cases} U_{xy} = 0 \\ U_{xx} - U_{yy} = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy}^{el} = 0 \\ \sigma_{xx}^{el} - \sigma_{yy}^{el} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}a}(2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

On constate que le module de cisaillement est constant jusqu'à l'ordre 2 et

$$\mu_{el} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}a}, \quad (\text{A.16})$$

$\lambda$  étant la tension de ligne. Si on part d'une mousse tournée initialement de  $90^\circ$ , le calcul est analogue et ce résultat est inchangé. Dans le cas de ces deux transformations, on trouve le même module de cisaillement :  $\mu_{el} = \mu_{cis}$ . Le modèle de mousse idéale semble donc bien isotrope pour ce qui concerne les propriétés élastiques.

## A.5 Déformation maximale

On présente ici le calcul de la déformation maximale  $U_{max}$ . Ce résultat donne une estimation de  $U_Y$  (déformation à saturation). Elle est seulement qualitative car  $U_Y$  est obtenu en fait à partir de la moyenne de  $U$  au cours du temps :  $U_Y$  est donc inférieur à  $U_{max}$ .

Dans le cas de la mousse idéale ordonnée, la déformation maximale est atteinte juste avant le premier T1, car celui-ci fait relaxer toutes les bulles d'un coup. On étudie notamment l'effet de la fraction liquide comme le fait Princen [111].

Le T1 se déclenche lorsque la longueur du plus petit plus bord de Plateau ( $2|\overrightarrow{OB}|$  pour les deux transformations sur la figure (A.1)) devient égale à  $L_c$  (2.3.3). Dans ce cas on définit  $U_{max}$  comme la valeur de  $U$  juste avant que le T1 ne se déclenche. Sur la figure (A.2a), on représente  $U_{max}$  en fonction de  $\Phi_{eff}$  pour un cisaillement et une élongation à partir de la configuration isotrope. Dans les deux cas, on retrouve la perte de rigidité à  $\Phi_{eff} = 0.0931$ .

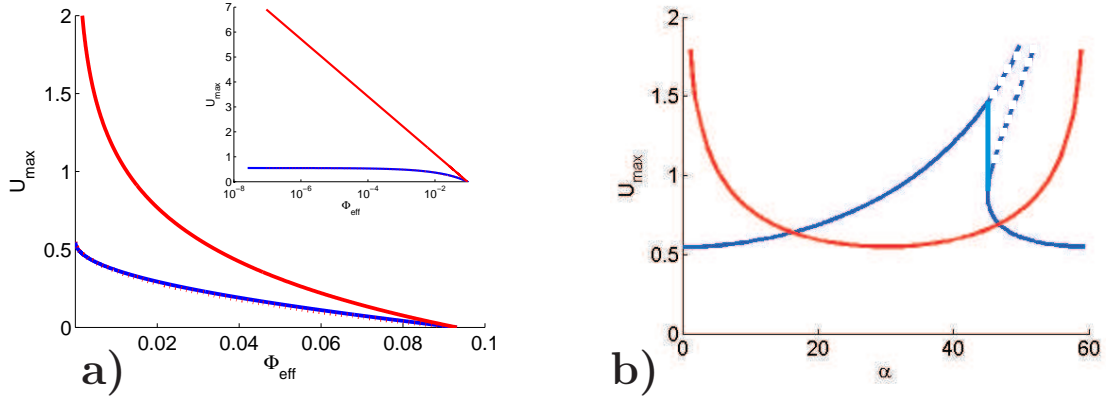


FIG. A.2 – Étude de  $U_{max}$  pour une mousse parfaitement ordonnée : élongation (rouge) et cisaillement (bleu). a) En fonction de  $\Phi_{eff}$ . Trait plein : configuration initiale de la figure (A.1); pointillé : configuration initiale tournée de  $30^\circ$ . En insert, échelle de  $\Phi_{eff}$  logarithmique. b) En fonction de l'orientation de la configuration initiale, pour une mousse infiniment sèche. En pointillé : branches de  $U_{max}$  instable.

Par contre, plus la mousse est sèche, plus les comportements sont différents en élongation et en cisaillement. En fait il s'agit surtout d'un effet d'orientation : si on tourne la configuration initiale de  $30^\circ$  avant d'effectuer l'élongation,  $U_{max}$  devient quasiment égale au cas du cisaillement.

L'effet de l'orientation est représenté sur la figure (A.2b) pour une mousse infiniment sèche.  $\alpha$  désigne l'angle (sens trigonométrique) avec lequel on a tourné la configuration initiale avant de commencer la transformation. On prend  $0 \leq \alpha < 60^\circ$  et non  $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$  pour balayer toutes les configurations ; en effet le cisaillement brise la symétrie  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . La limite sèche est simple à résoudre numériquement. Le critère pour détecter le moment du T1 est que  $O$  se confond avec  $A$ ,  $B$  ou  $C$ , soit en pratique que  $\widehat{ABC}$  ou  $\widehat{CAB}$  ou  $\widehat{BCA} = 120^\circ$ . On constate que dans les deux transformations  $U_{max} \geq 0.549$  mais pour des angles différents :

Pour l'élongation,  $U_{max}$  prend une valeur minimale pour  $\alpha = 30^\circ$  et diverge pour  $\alpha = 0^\circ$ . Dans ce dernier cas (élongation de la figure (A.1)), les bulles peuvent en théorie s'allonger indéfiniment.

Pour le cisaillement,  $U_{max}$  est minimum en  $\alpha = 0^\circ$ . Ce décalage par rapport à l'élongation peut se comprendre car un cisaillement est une succession d'élongations à  $45^\circ$  et de rotations infinitésimales. Par contre, les rotations infinitésimales empêchent la divergence. Les deux branches qui devraient diverger se retrouvent ainsi courbées :  $U_{max}$  se retrouve borné car il saute d'une branche



à l'autre ; les pointillés correspondent aux parties de branche non accessibles car le T1 a lieu à cause de l'autre branche, c'est-à-dire un autre bord de bulle qui a pris la valeur 0. L'effet de la rotation sur la contrainte élastique maximale a déjà été étudié dans la référence [78] pour quelques orientations initiales et différentes fractions liquides.

La figure (A.2) montre que  $U_{max}$ , et donc *a priori*  $U_Y$ , dépend du type de déformation imposée, et de la configuration initiale de la mousse. Or lors d'une expérience de Stokes, voir chapitre (4), où des zones de cisaillement et d'élongation peuvent être clairement identifiées, elles ne présentent pas de différences flagrantes de  $U_Y$ . Il est probable qu'une moyenne sur toutes les orientations possibles de bulle donne un  $U_Y$  semblable pour ces deux transformations.

Cette annexe nous permet aussi de clarifier pourquoi  $U_Y$  (4.2.1) et  $F_Y^n$  (3.4.4) ont une tendance semblable mais quantitativement différente en fonction de la fraction fluide :  $U_Y$  est probablement le résultat d'une moyenne sur toutes les orientations, soit en cisaillement, soit en élongation, alors que  $F_Y^n$  est surtout liée à une forte zone d'élongation, avec des bulles orientées  $\alpha = 0^\circ$  (3.4.8).

## Annexe B

# Détails de l'équation de plasticité

On détaille ici les calculs relatifs à l'équation de plasticité, dans une géométrie de cisaillement simple, avec les hypothèses simplificatrices (5.1.2). On rappelle d'abord les équations (5.1.3) :

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = \bar{M} \cdot \bar{\nabla} v + \bar{\nabla} v^t \cdot \bar{M} + \bar{T} \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{T} = -T_0 \left( \frac{\bar{U}}{\bar{U}} : \bar{\nabla} v_{sym} \right) \mathcal{H} \left( \frac{\bar{U}}{\bar{U}} : \bar{\nabla} v_{sym} \right) h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \frac{\bar{U}}{\bar{U}} \cdot \bar{M} \quad (\text{B.2})$$

On prend une forme plus générale de  $\bar{T}$  en introduisant une constante libre  $T_0$ , puis on montre que pour avoir la condition  $U = U_Y$  dans le régime saturé, alors  $T_0 = 1$  (équation (B.18)).

### B.1 Calculs directs

Dans notre géométrie, seule la composante  $v_x$  de la vitesse est non nulle. Elle ne dépend que de la composante  $y$ . On a notamment  $\dot{\gamma} = \partial_y v_x$  et le gradient de vitesse prend la forme :

$$\bar{\nabla} v = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_x v_y \\ \partial_y v_x & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

On utilise alors cette expression et on explicite les calculs (on rappelle que  $\bar{A} : \bar{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ ) :

$$\bar{M} \cdot \bar{\nabla} v + \bar{\nabla} v^t \cdot \bar{M} = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 2M_{xy} & M_{yy} \\ M_{yy} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}} : \bar{\nabla} v_{sym} = \dot{\gamma} \frac{U_{xy}}{U} \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{T} = -T_0 \dot{\gamma} \frac{U_{xy}}{U} \mathcal{H}(\dot{\gamma} U_{xy}) h\left(\frac{U}{U_Y}\right) \frac{\bar{U}}{U} \cdot \bar{M} \quad (\text{B.6})$$

Les différentes composantes de l'équation (B.1) deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t M_{xy} = \dot{\gamma} M_{yy} + T_{xy} \\ \partial_t M_{xx} = \dot{\gamma} 2M_{xy} + T_{xx} \\ \partial_t M_{yy} = T_{yy} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Ainsi on constate que  $M_{yy}$  évolue uniquement du fait de la plasticité, contrairement aux autres composantes. Rappelons que notre approche est quasistatique et ne doit donc pas dépendre de la vitesse à laquelle s'effectue le mouvement du matériau. En opérant la transformation  $1/\dot{\gamma}\partial_t = \partial_\gamma$  on fait disparaître l'échelle de vitesse et le temps.

$$\begin{cases} \partial_\gamma M_{xy} = M_{yy} - T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} \mathcal{H}(\dot{\gamma} U_{xy}) h\left(\frac{U}{U_Y}\right) \left[ \frac{\bar{U}}{U} \cdot \bar{M} \right]_{xy} \\ \partial_\gamma M_{xx} = 2M_{xy} - T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} \mathcal{H}(\dot{\gamma} U_{xy}) h\left(\frac{U}{U_Y}\right) \left[ \frac{\bar{U}}{U} \cdot \bar{M} \right]_{xx} \\ \partial_\gamma M_{yy} = - T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} \mathcal{H}(\dot{\gamma} U_{xy}) h\left(\frac{U}{U_Y}\right) \left[ \frac{\bar{U}}{U} \cdot \bar{M} \right]_{yy} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Eléments propres

$\bar{U}$  et  $\bar{M}$  sont diagonalisables sur la même base d'après la définition de  $\bar{U}$ . En appelant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) les valeurs propres de  $\bar{M}$  et  $\theta$  l'angle de la direction de la valeur propre  $\lambda_1$  (voir (2.3.2)), on a :

$$\bar{U} \cdot \bar{M} = R \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \end{pmatrix} R^t R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^t \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{U} \cdot \bar{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{U} \cdot \bar{M} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) \cos^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \sin^2(\theta) & \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - \frac{\lambda_2}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \right] \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - \frac{\lambda_2}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \right] \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{\lambda_1}{2} \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) \sin^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

### B.3 Régime saturé

Dans ce régime les dérivées fonction de  $\gamma$  sont nulles. On a donc un équilibre entre charge et plasticité :

$$\begin{cases} M_{yy} &= T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \left[ \bar{U} \cdot \bar{M} \right]_{yy} \\ 2M_{xy} &= T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \left[ \bar{U} \cdot \bar{M} \right]_{xx} \\ 0 &= T_0 \frac{U_{xy}}{U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \left[ \bar{U} \cdot \bar{M} \right]_{yy} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

En utilisant les éléments propres de  $\bar{U}$  ou  $\bar{M}$ , on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 \sin^2(\theta) + \lambda_2 \cos^2(\theta) &= \frac{T_0}{2U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \right] \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 2(\lambda_1 - \lambda_2) \cos(\theta) \sin(\theta) &= \frac{T_0}{2U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \cos^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \sin^2(\theta) \right] \\ 0 &= \frac{T_0}{2U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \sin^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \cos^2(\theta) \right] \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \sin^2(\theta) + \lambda_2 \cos^2(\theta) &= \frac{T_0}{2U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad \times \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \right] \\ 2(\lambda_1 - \lambda_2) &= \frac{T_0}{2U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \\ &\quad \times \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \cos^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \sin^2(\theta) \right] \\ 0 &= \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \sin^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \cos^2(\theta) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

La dernière équation donne

$$\begin{cases} \cos^2(\theta) &= \frac{\lambda_1 \log(\lambda_1/\lambda_0)}{\lambda_1 \log(\lambda_1/\lambda_0) - \lambda_2 \log(\lambda_2/\lambda_0)} \\ \sin^2(\theta) &= \frac{-\lambda_2 \log(\lambda_2/\lambda_0)}{\lambda_1 \log(\lambda_1/\lambda_0) - \lambda_2 \log(\lambda_2/\lambda_0)} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Le système d'équations devient alors :

$$\begin{cases} 1 &= \frac{T_0}{4U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) &= \frac{T_0}{8U^2} h \left( \frac{U}{U_Y} \right) \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left[ \frac{\lambda_1}{2} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) + \frac{\lambda_2}{2} \log \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \right] \\ \cos^2(\theta) &= \frac{\lambda_1 \log(\lambda_1/\lambda_0)}{\lambda_1 \log(\lambda_1/\lambda_0) - \lambda_2 \log(\lambda_2/\lambda_0)} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

On vérifie maintenant que la solution  $\text{Tr}(\bar{\bar{U}}) = 0$  ( $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0^2$ ) est solution du problème. Dans ce cas  $U = \frac{1}{2} \log(\lambda_1/\lambda_0) = -\frac{1}{2} \log(\lambda_2/\lambda_0)$  :

$$\begin{cases} 1 & = & T_0 \cdot h\left(\frac{U}{U_Y}\right) \\ \cos^2(\theta) & = & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{1 + \exp^{-4U}} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

A saturation  $U = U_Y$  et par définition  $h(1) = 1$ . On en déduit que l'état saturé défini par une déformation à saturation  $U = U_Y$  est bien indépendant de la forme de  $h$  et vaut :

$$\begin{cases} T_0 & = & 1 \\ U & = & U_Y \\ \cos^2(\theta) & = & \frac{1}{1 + \exp^{-4U_Y}} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

L'angle  $\theta$  peut encore être positif ou négatif; il faut donc ajouter la condition  $\dot{\gamma}U_{xy} > 0$  ( $\bar{\bar{U}}$  orientée suivant  $\bar{\bar{\nabla}}v_{sym}$ ) pour sélectionner la solution saturée correcte.

## B.4 Régime élastique

Dans le régime élastique ( $\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{0}}$  dans l'équation (B.8)) l'évolution du système est donnée par

$$\begin{cases} M_{yy} & = & M_{yy}^0 \\ M_{xy} & = & M_{yy}^0 \gamma + M_{xy}^0 \\ M_{xx} & = & M_{yy}^0 \gamma^2 + 2M_{xy}^0 \gamma + M_{xx}^0 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Si initialement le matériau est isotrope,  $M_{xx}^0 = M_{yy}^0 = \lambda_0$  et  $M_{xy}^0 = 0$ , alors  $\bar{\bar{M}} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ . On retrouve à un coefficient numérique près le tenseur de Finger, qui caractérise un matériau élastique [88]. On a notamment  $M_{xx} - M_{yy} = M_{xy}\gamma$ , résultat que l'on utilise en (5.2.3).

## Annexe C

# Comparaison $\overline{\overline{G}}$ – $\overline{\overline{\nabla v}}$ pour un écoulement inhomogène

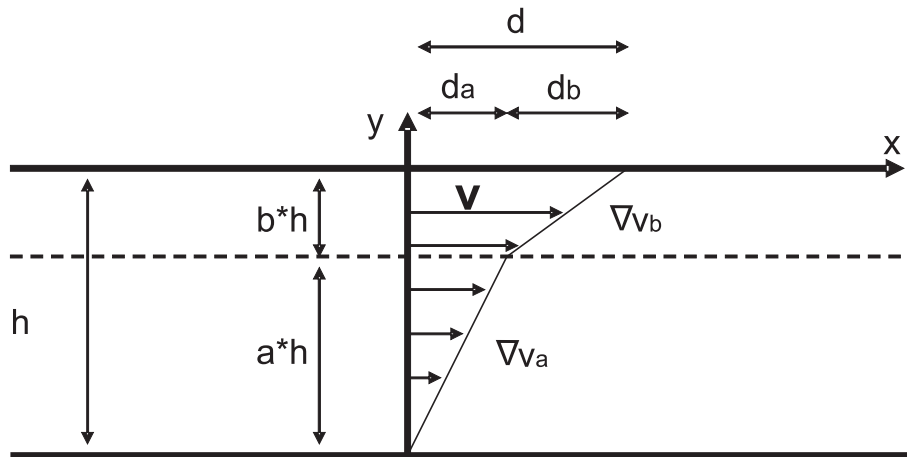


FIG. C.1 – Ecoulement inhomogène constitué de deux zones homogènes décrites par les grandeurs  $\overline{\nabla v}_a$ ,  $\overline{M}_a$  et  $\overline{\nabla v}_b$ ,  $\overline{M}_b$ , respectivement. Les proportions  $a$  et  $b$  de ces zones sont constantes ( $a + b = 1$ ).

Dans un écoulement homogène et affine,  $\overline{\overline{G}}$  coïncide avec  $\overline{\overline{\nabla v}}$  [57]. En effet, si l'écoulement est affine, l'évolution d'un lien  $\vec{\ell}$  reliant deux barycentres de bulles voisines suit la loi

$$\dot{\vec{\ell}} = \overline{\overline{\nabla v}}^t \cdot \vec{\ell}. \quad (\text{C.1})$$

Si en plus  $\bar{\nabla}v$  est homogène, il découle de la définition de  $\bar{G}$  (2.3.1) que

$$\begin{aligned}
 \bar{G} &= \bar{M}^{-1} \cdot \left\langle \vec{\ell} \otimes \bar{\nabla}v^t \cdot \vec{\ell} \right\rangle \\
 &= \bar{M}^{-1} \cdot \left\langle \bar{\nabla}v^t \cdot \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \right\rangle^t \\
 &= \bar{M}^{-1} \cdot \left( \bar{\nabla}v^t \cdot \left\langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \right\rangle \right)^t \\
 &= \bar{M}^{-1} \cdot \bar{M}^t \cdot \left( \bar{\nabla}v^t \right)^t \\
 &= \bar{\nabla}v
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

L'homogénéité de  $\bar{\nabla}v$  permet le passage de la deuxième à la troisième ligne.

Ici on considère le cas d'un écoulement inhomogène, comme par exemple celui de la figure (C.1). Celui-ci est constitué de 2 zones de gradient de vitesse  $\bar{\nabla}v_a$  et  $\bar{\nabla}v_b$  respectivement. C'est par exemple le cas d'un matériau présentant une bande de cisaillement.

On considère  $\bar{\nabla}v$ , la valeur du gradient de vitesse global. Si on a cisailé pendant un temps  $t$ , on a  $\bar{\nabla}v = d/(h \cdot t)$ . Dans chaque zone, on a de même,  $\bar{\nabla}v_a = d_a/(a \cdot h \cdot t)$  et  $\bar{\nabla}v_b = d_b/(b \cdot h \cdot t)$ . On retrouve que le gradient de vitesse global est la moyenne des gradients de vitesse locaux, pondérés par la largeur des bandes :

$$\bar{\nabla}v = a \bar{\nabla}v_a + b \bar{\nabla}v_b. \tag{C.3}$$

Pour des grandeurs statistiques telles  $\bar{M}$  et  $\bar{C}$ , la linéarité de l'opération moyenne implique directement que

$$\bar{M} = \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle = a \cdot \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle_a + b \cdot \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle_b = a \bar{M}_a + b \bar{M}_b, \tag{C.4}$$

$$\bar{C} = \bar{M} \cdot \bar{G} = a \bar{C}_a + b \bar{C}_b = a \bar{M}_a \cdot \bar{G}_a + b \bar{M}_b \cdot \bar{G}_b, \tag{C.5}$$

Pour  $\bar{G}$  par exemple, la situation est différente car ce tenseur n'est pas la moyenne d'une quantité mais un produit de plusieurs tenseur statistiques :  $\bar{G} = \bar{M}^{-1} \cdot \bar{C}$ . En utilisant l'équation (C.3) et le fait que  $\bar{G}_a = \bar{\nabla}v_a$  et  $\bar{G}_b = \bar{\nabla}v_b$  (zones homogènes), on a alors deux possibilités pour récrire  $\bar{C}$  :

$$\bar{C} = \bar{M}_a \cdot \bar{\nabla}v + b(\bar{M}_b - \bar{M}_a) \cdot \bar{\nabla}v_b. \tag{C.6}$$

$$\bar{C} = a(\bar{M}_a - \bar{M}_b) \cdot \bar{\nabla}v_a + \bar{M}_b \cdot \bar{\nabla}v. \tag{C.7}$$

En additionnant  $a$  fois la première expression (équation (C.6)) et  $b$  fois la seconde (équation (C.7)), on obtient :

$$\bar{C} = \bar{M} \cdot \bar{\nabla}v + ab(\bar{M}_b - \bar{M}_a) \cdot (\bar{\nabla}v_b - \bar{\nabla}v_a). \tag{C.8}$$

On trouve alors l'expression de  $\bar{G}$  :

$$\bar{G} = \bar{\nabla} v + ab \bar{M}^{-1} \cdot (\bar{M}_b - \bar{M}_a) \cdot (\bar{\nabla} v_b - \bar{\nabla} v_a). \quad (\text{C.9})$$

En conclusion on constate que même pour un écoulement non affine, si la texture du matériau reste homogène, alors on garde  $\bar{G} \simeq \bar{\nabla} v$ .





# Bibliographie

- [1] A. Abd el Kader, J. C. Earnshaw. Shear-induced changes in two-dimensional foam, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2610–2613 (1999).
- [2] J. Ashkin, E. Teller. Statistics of two-dimensional lattices with four components, *Phys. Rev.* **64**, 178–184 (1943).
- [3] M. Asipauskas, M. Aubouy, J. A. Glazier, F. Graner, Y. Jiang. A texture tensor to quantify deformations : The example of two-dimensional flowing foams, *Granular Matt.* **5**, 71–74 (2003).
- [4] M. Aubouy, Y. Jiang, J. A. Glazier, F. Graner. A texture tensor to quantify deformations, *Granular Matt.* **5**, 67–70 (2003).
- [5] P. Aussillous, D. Quéré. Bubbles creeping in a viscous liquid along a slightly inclined plane, *Europhys. Lett.* **59**, 370–376 (2002).
- [6] Y. Bertho, C. Becco, N. Vandewalle. Dense bubble flow in a silo : An unusual flow of a dispersed medium, *Phys. Rev. E* **73**, 056309 (2006).
- [7] K. Brakke. The Surface Evolver, *Exp. Math.* **1**, 141–165 (1992).
- [8] The Surface Evolver. <http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver/>
- [9] F. B. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes, *J. Fluid Mech.* **10**, 166–188 (1961).
- [10] D. M. A. Buzza, C. Y. D. Lu, M. E. Cates. Linear shear rheology of incompressible foams, *J. Phys. II France* **5**, 37–52 (1995).
- [11] I. Cantat, R. Delannay. Dynamical transition induced by large bubbles in two-dimensional foam flows, *Phys. Rev. E* **67**, 031501 (2003).
- [12] I. Cantat, N. Kern, R. Delannay. Dissipation in foam flowing through narrow channels, *Europhys. Lett.* **65**, 726–732 (2004).
- [13] I. Cantat, R. Delannay. Dissipative flows of 2D foams, *Eur. Phys. J. E* **18**, 55–67 (2005).
- [14] I. Cantat, O. Pitois. Mechanical probing of liquid foam ageing, *J. Phys. : Condens. Matter* **17**, S3455–S3461 (2005).
- [15] I. Cantat, C. Poloni, R. Delannay. Experimental evidence of flow destabilization in a two-dimensional bidisperse foam, *Phys. Rev. E* **73**, 011505 (2006).

- [16] I. Cantat, O. Pitois. Stokes experiment in a liquid foam, *Phys. Fluids* **18**, 083302 (2006).
- [17] I. Cheddadi, C. Raufaste, P. Marmottant, F. Graner, P. Saramito. *En préparation*.
- [18] R. J. Clancy, E. Janiaud, D. Weaire, S. Hutzler. The response of 2d foams to continuous applied shear in a Couette rheometer, *Eur. Phys. J. E* **21**, 123–132 (2006).
- [19] S. Cohen-Addad, H. Hoballah, R. Höhler. Viscoelastic response of a coarsening foam, *Phys. Rev. E* **57**, 6897–6901 (1998).
- [20] S. Cohen-Addad, R. Höhler, Y. Khidas. Origin of the slow linear viscoelastic response of aqueous foams, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 028302 (2004).
- [21] S. Courty, B. Dollet, K. Kassner, A. Renault, F. Graner. Elasticity and plasticity of two-dimensional amorphous solid layers of  $\beta$ -lactoglobulin, *Eur. Phys. J. E* **11**, 53–59 (2003).
- [22] S. Courty, B. Dollet, F. Elias, P. Heinig, F. Graner. Two-dimensional shear modulus of a Langmuir foam, *Europhys. Lett.* **64**, 709–715 (2003).
- [23] S. J. Cox, M. D. Alonso, S. Hutzler, D. Weaire. The Stokes experiment in a foam, in *Proceedings of the 3rd Euroconference on Foams, Emulsions and their Applications*, Ed. P. L. J. Zitha, J. Banhart, G. L. M. M. Verbist, Verl. MIT, Bremen, 282–289 (2000).
- [24] S. J. Cox, M. F. Vaz, D. Weaire. Topological changes in a two-dimensional foam cluster, *Eur. Phys. J. E* **11**, 29–35 (2003).
- [25] S. J. Cox, D. Weaire, J. A. Glazier. The rheology of two-dimensional foams, *Rheol. Acta* **43**, 442–448 (2004).
- [26] S. J. Cox. A viscous froth model for dry foams in the Surface Evolver, *Coll. Surf. A* **263**, 81–89 (2005).
- [27] S. J. Cox, B. Dollet, F. Graner. Foam flow around an obstacle : obstacle-wall interaction, *Rheol. Acta* **45**, 403–410 (2006).
- [28] S. J. Cox. The mixing of bubbles in two-dimensional bidisperse foams under extensional shear, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **137**, 39–45 (2006).
- [29] S. J. Cox, E. L. Whittick. Shear modulus of two-dimensional foams : The effect of area dispersity and disorder, *Eur. Phys. J. E* **21**, 49–56 (2006).
- [30] G. Debrégeas, H. Tabuteau, J.-M. di Meglio. Deformation and flow of a two-dimensional foam under continuous shear, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 178305 (2001).
- [31] J. R. de Bruyn. Transient and steady-state drag in foam, *Rheol. Acta* **44**, 150–159 (2004).
- [32] J. R. de Bruyn. Age dependence of the drag force in an aqueous foam, *Rheol. Acta* **45**, 803–811 (2006).

- [33] N. D. Denkov, V. Subramanian, D. Gurovich, A. Lips. Wall slip and viscous dissipation in sheared foams : Effect of surface mobility, *Coll. Surf. A* **263**, 129–145 (2005).
- [34] N. D. Denkov, S. Tcholakova, K. Golemanov, V. Subramanian, A. Lips. Foam-wall friction : Effect of air volume fraction for tangentially immobile bubble surface, *Coll. Surf. A* **282-283** 329–347 (2006).
- [35] M. Dennin. Statistics of bubble rearrangements in a slowly sheared two-dimensional foam, *Phys. Rev. E* **70**, 041406 (2004).
- [36] C. Derec, G. Ducouret, A. Ajdari, F. Lequeux. Aging and nonlinear rheology in suspensions of polyethylene oxide-protected silica particles, *Phys. Rev. E* **67**, 061403 (2003).
- [37] B. Dollet, F. Elias, C. Quilliet, C. Raufaste, M. Aubouy, F. Graner. Two-dimensional flow of foam around an obstacle : Force measurements, *Phys. Rev. E* **71**, 031403 (2005).
- [38] B. Dollet, F. Elias, C. Quilliet, A. Huillier, M. Aubouy, F. Graner. Two-dimensional flows of foam : Drag exerted on circular obstacles and dissipation, *Coll. Surf. A* **273**, 101–110 (2005).
- [39] B. Dollet, M. Aubouy, F. Graner. Anti-inertial lift in foams : a signature of the elasticity of complex fluids, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 168303 (2005).
- [40] B. Dollet, M. Durth, F. Graner. Flow of foam past an elliptical obstacle, *Phys. Rev. E* **73**, 061404 (2006).
- [41] B. Dollet, *Écoulements bidimensionnels de mousse autour d'obstacles. Contribution à l'étude mécanique des mousses liquides*, thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, non publié, lien Internet <http://www-lsp.ujf-grenoble.fr/pdf/theses/dtbn.pdf> (2005).
- [42] B. Dollet, F. Graner. Two-dimensional flow of foam around a circular obstacle : local measurements of elasticity, plasticity and flow, *J. Fluid Mech.* **585**, 181–211 (2007).
- [43] B. Dollet, C. Raufaste. Dissipation in 2D flow of foam, en préparation.
- [44] H.-S. Dou, N. Phan-Thien. Negative wake in the uniform flow past a cylinder, *Rheol. Acta* **42**, 383–409 (2003).
- [45] W. Drenckhan, S. J. Cox, G. Delaney, D. Weaire. Rheology of ordered foams – on the way to discrete microfluidics, *Coll. Surf. A* **263**, 52–64 (2005).
- [46] M. Durand, H. A. Stone. Relaxation time of the topological T1 process in a two-dimensional foam, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 226101 (2006).
- [47] D. J. Durian. Foam mechanics at the bubble scale, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4780–4783 (1995).
- [48] D. J. Durian. Bubble-scale model of foam mechanics : Melting, nonlinear behavior, and avalanches, *Phys. Rev. E* **55**, 1739–1751 (1997).

- [49] B. S. Gardiner, B. Z. Dlugogorski, G. J. Jameson. The steady shear of three-dimensional wet polydisperse foams, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **92**, 151–166 (2000).
- [50] GDR MiDi. On dense granular flows, *Eur. Phys. J. E* **14**, 341–365 (2004).
- [51] J. A. Glazier. *Dynamics of Cellular Patterns*, The University of Chicago, lien internet : <http://biocomplexity.indiana.edu/jglazier/docs/dissertation/Glazier-Dissertation.pdf> (1989).
- [52] J. A. Glazier, M. P. Anderson, G. S. Grest. Coarsening in the two-dimensional soap froth and the large-Q Potts model : a detailed comparison, *Phil. Mag. B* **62**, 615–645 (1990).
- [53] I. Goldhirsch, C. Goldenberg. On the microscopic foundations of elasticity, *Eur. Phys. J. E* **9**, 245–251 (2002).
- [54] A. D. Gopal, D. J. Durian. Relaxing in foam, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 188303 (2003).
- [55] F. Graner, J. A. Glazier. Simulation of biological cell sorting using a two-dimensional extended Potts model, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2013–2016 (1992).
- [56] F. Graner, Y. Jiang, E. Janiaud, C. Flament. Equilibrium states and ground state of 2D fluid foams , *Phys. Rev. E* **63**, 011402 (2001).
- [57] F. Graner, B. Dollet, C. Raufaste, P. Marmottant. Statistical tools to characterize discrete rearranging patterns, in two or three dimensions : cellular materials, assemblies of particles. *preprint* (2007).
- [58] Granular Volcano Group. [http://www.granular-volcano-group.org/frictional\\_theory.html](http://www.granular-volcano-group.org/frictional_theory.html)
- [59] A. Groisman, V. Steinberg. Elastic turbulence in a polymer solution flow, *Nature* **405**, 53–55 (2000).
- [60] A. Groisman, V. Steinberg. Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions, *New J. Phys.* **6**, 29 (2004).
- [61] É. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences/CNRS Éditions, Paris (2001).
- [62] P. Hébraud, F. Lequeux. Mode-coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2934–2937 (1998).
- [63] R. Höhler, S. Cohen-Addad. Rheology of liquid foam, *J. Phys. : Condens. Matter* **17**, R1041–R1069 (2005).
- [64] R. Höhler, S. Cohen-Addad, V. Labiausse. The solid-liquid transition in complex fluids, *preprint* <http://arxiv.org/ftp/cond-mat/papers/0610/0610279.pdf>
- [65] E. A. Holm, J. A. Glazier, D. J. Srolovitz, G. S. Grest. Effects of lattice anisotropy and temperature on domain growth in the two-dimensional Potts model, *Phys. Rev. A* **43**, 6 (1991).

- [66] K. Hyun, S. H. Kim, K. H. Ahn, S. J. Lee. Large amplitude oscillatory shear as a way to classify the complex fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **107**, 51–65 (2002).
- [67] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Z. Physik* **31**, 253-258 (1925).
- [68] É. Janiaud, F. Graner. Foam in a two-dimensional Couette shear : a local measurement of bubble deformation, *J. Fluid Mech.* **532**, 243–267 (2005).
- [69] E. Janiaud, D. Weaire, S. Hutzler. Two-dimensional foam rheology with viscous drag, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 18303 (2006).
- [70] Y. Jiang, J. A. Glazier. Extended large-Q Potts model simulation of foam drainage, *Phil. Mag. Lett.* **74**, 119 (1996).
- [71] Y. Jiang, P. J. Swart, A. Saxena, M. Asipauskas, J. A. Glazier. Hysteresis and avalanches in two-dimensional foam rheology simulations, *Phys. Rev. E* **59**, 5819–5832 (1999).
- [72] A. Kabla, G. Debrégeas. Local stress relaxation and shear-banding in a dry foam under shear, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 258303 (2003).
- [73] A. Kabla, G. Debregeas. Quasistatic rheology of foams. Part 1. Oscillating strain, *J. Fluid Mech.* **587** 23–44 (2007).
- [74] A. Kabla, J. Scheibert, G. Debregeas. Quasistatic rheology of foams. Part 2. Continuous shear flow, *J. Fluid Mech.* **587** 45–72 (2007).
- [75] N. Kern, D. Weaire, A. Martin, S. Hutzler, S. J. Cox. Two-dimensional viscous froth model for foam dynamics, *Phys. Rev. E* **70**, 041411 (2004).
- [76] S. A. Khan, R. C. Armstrong. Rheology of foams. I. Theory for dry foams, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **22**, 1–22 (1986).
- [77] S. A. Khan, C. A. Schnepper, R. C. Armstrong. Foam rheology : III. Measurement of shear flow properties, *J. Rheol.* **32**, 69–92 (1988).
- [78] S. A. Khan, R. C. Armstrong. Rheology of foams. IV. Effect of gas volume fraction, *J. Rheol.* **33**, 881–911 (1989).
- [79] S. A. Koehler, S. Hilgenfeldt, H. A. Stone. A generalized view of foam drainage : experiment and theory, *Langmuir* **16**, 6372–6341 (2000).
- [80] A. M. Kraynik. Foam flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 325–357 (1998).
- [81] A. M. Kraynik, D. A. Reinelt. Linear elastic behavior of dry soap foams, *J. Colloid Interface Sci.* **91**, 160–175 (1996).
- [82] A. M. Kraynik, D. A. Reinelt, F. van Swol. Structure of random monodisperse foam, *Phys. Rev. E* **67**, 031403 (2003).
- [83] N. P. Kruyt. On the shear modulus of two-dimensional liquid foams : a theoretical study of the effect of geometrical disorder, *J. Appl. Mech.* **74**, 560–567 (2007).

- [84] V. Labiausse, R. Höhler, S. Cohen-Addad. Shear induced normal stress differences in aqueous foams, *J. Rheol.* **51**, 479–492 (2007).
- [85] J. Lambert, I. Cantat, R. Delannay, G. Le Caër, A. Renault, S. Ruellan, F. Graner, S. Jurine, P. Cloetens, J. A. Glazier. Extraction of relevant physical parameters from 3D images of foams obtained by X-ray tomography, *Coll. Surf. A* **263**, 295–302 (2005).
- [86] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, 3rd edition, Reed, Oxford (1986).
- [87] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mécanique des fluides*, 2ème édition, Mir, Moscou (1989).
- [88] R. G. Larson. *The structure and rheology of complex fluids*, Oxford University Press, New York (1999).
- [89] J. Lauridsen, M. Twardos, M. Dennin. Shear-induced stress relaxation in a two-dimensional wet foam, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 098303 (2002).
- [90] J. Lauridsen, G. Chanan, M. Dennin. Velocity profiles in slowly sheared bubble rafts, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 018303 (2004).
- [91] C. W. Macosko. *Rheology : principles, measurements, and applications*, Wiley-VCH, New York (1994).
- [92] P. Marmottant, F. Graner. A quasistatic model for an elastic, plastic, viscous foam, *Eur. Phys. J. E* à paraître (2007).  
*preprint* <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0610261>
- [93] P. Marmottant, C. Raufaste, F. Graner. Plastic deformation in a flowing foam : measurement and prediction, *preprint* (2007).
- [94] T. G. Mason, J. Bibette, D. A. Weitz. Elasticity of compressed emulsions, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2051–2054 (1995).
- [95] T. G. Mason, J. Bibette, D. A. Weitz. Yielding and flow of monodisperse emulsions, *J. Coll. Int. Sci.* **179**, 439–448 (1996).
- [96] T. G. Mason, M. D. Lacasse, G. S. Grest, D. Levine, J. Bibette, D. A. Weitz. Osmotic pressure and viscoelastic shear moduli of concentrated emulsions, *Phys. Rev. E* **56**, 3150–3166 (1997).
- [97] S. P. L. Marze, A. Saint-Jalmes, D. Langevin. Protein and surfactant foams : linear rheology and dilatancy effect, *Coll. Surf. A* **263**, 121–128 (2005).
- [98] J. G. McDaniel, R. G. Holt. Measurement of aqueous foam rheology by acoustic levitation, *Phys. Rev. E* **61**, R2204–R2207 (2000).
- [99] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.* **21** 1087–1092 (1953).
- [100] N. Mujica, S. Fauve. Sound velocity and absorption in a coarsening foam, *Phys. Rev. E* **66**, 021404 (2002).



- [101] T. Okuzono, K. Kawasaki, T. Nagai. Rheology of random foams, *J. Rheol.* **37**, 571–586 (1993).
- [102] T. Okuzono, K. Kawasaki. Intermittent flow behavior of random foams : A computer experiment on foam rheology, *Phys. Rev. E* **51**, 1246–1253 (1995).
- [103] L. Onsager. Statistical hydrodynamics, *Nuevo Cimento Suppl.* **6**, 279 (1949).
- [104] N. Phan-Thien. *Understanding viscoelasticity*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [105] G. Picard, A. Adjari, F. Lequeux, L. Bocquet. Elastic consequences of a single plastic event : A step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluid. *Eur. Phys. J. E* **15**, 371–381 (2004).
- [106] J. A. F. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villard, Paris (1873).
- [107] Y. Pomeau. *Turbulence : a tentative dictionary*, edited by P. Tabeling and O. Cardoso (Plenum, New York, 1995), Vol. 341, p. 117.
- [108] R. B. Potts. Some generalized order-disorder transformations, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 106–109 (1952).
- [109] J. H. Poynting. On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of wires when twisted, *Proc. Roy. Soc. London A* **82**, 546–549 (1909).
- [110] E. Pratt, M. Dennin. Nonlinear stress and fluctuation dynamics of sheared disordered wet foam, *Phys. Rev. E* **67**, 054102 (2003).
- [111] H. M. Princen. Rheology of foams and highly concentrated emulsions. I. Elastic properties and yield stress of a cylindrical model system, *J. Coll. Int. Sci.* **91**, 160–175 (1983).
- [112] C. Quilliet, M. A. P. Idiart, B. Dollet, L. Berthier, A. Yekini. Bubbles in sheared two-dimensional foams, *Coll. Surf. A* **263**, 95–100 (2005).
- [113] C. Raufaste, S. Cox, B. Dollet, F. Graner, Y. Jiang. Yield drag in a two-dimensional foam flow around a circular obstacle : Effect of liquid fraction, *Eur. Phys. J. E* **23**, 217–228 (2007).
- [114] J. P. Raven, P. Marmottant. Periodic microfluidic bubbling oscillator : Insight into the stability of two-phase microflows, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 154501 (2006).
- [115] J. P. Raven, P. Marmottant, F. Graner. Dry microfoams : formation and flow in a microchannel, *Eur. Phys. J. B* **51**, 137–143 (2006)
- [116] D. A. Reinelt, A. Kraynik. Simple shearing flow of dry soap films with tetrahedrally close-packed structure, *J. Rheol.* **44**, 453–471 (2000).
- [117] R. S. Rivlin. The solution of problems in second-order elasticity theory, *J. Rational Mech. Analysis* **2**, 53–81 (1953).



- [118] N. Roquet, P. Saramito. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **192**, 3317–3341 (2003).
- [119] F. Rouyer, S. Cohen-Addad, M. Vignes-Adler, R. Höhler. Dynamics of yielding observed in a three-dimensional aqueous dry foam, *Phys. Rev. E* **67**, 021405 (2003).
- [120] F. Rouyer, S. Cohen-Addad, R. Höhler. Is the yield stress of aqueous foam a well-defined quantity?, *Coll. Surf. A* **263** 111–116 (2005).
- [121] A. Saint-Jalmes, D. J. Durian. Vanishing elasticity for wet foams : Equivalence with emulsions and role of polydispersity, *J. Rheol.* **43**, 1411–1422 (1999).
- [122] P. Saramito. A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **145**, 1–14 (2007).
- [123] A. Saugey, W. Drenckhan, D. Weaire. Wall slip of bubbles in foams, *Phys. Fluids* **18**, 053101 (2006).
- [124] L. W. Schwartz, H. M. Princen, A. D. Kiss. On the motion of bubbles in capillary tubes, *J. Fluid Mech.* **172**, 259–275 (1986).
- [125] H. G. Sim, K. H. Ahn, S. J. Lee. Large amplitude oscillatory shear behavior of complex fluids investigated by a network model : a guideline for classification, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **112**, 237–250 (2003).
- [126] P. Sollich, F. Lequeux, P. Hébraud, M. E. Cates. Rheology of soft glassy materials. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2020–2023 (1997).
- [127] P. Sollich. Rheological constitutive equation for a model of soft glassy materials, *Phys. Rev. E* **58**, 738–759 (1998).
- [128] R. I. Tanner. *Engineering Rheology*, Oxford University Press, Oxford (2000).
- [129] E. Terriac, J. Etrillard, I. Cantat. Viscous force exerted on a foam at a solid boundary : influence of the liquid fraction and of the bubble size, *Europhys. Lett.* **74**, 909–915 (2006).
- [130] S. Tewari, D. Schiemann, D. J. Durian, C. M. Knobler, S. A. Langer, A. J. Liu. Statistics of shear-induced rearrangements in a two-dimensional model foam, *Phys. Rev. E* **60**, 4385 (1999).
- [131] G. L. Thomas, R. M. C. de Almeida, F. Graner. Coarsening of three-dimensional grains in crystals, or bubbles in dry foams, tends towards a universal, statistically scale-invariant regime, *Phys. Rev. E* **74**, 021407 (2006).
- [132] D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, second edition, Oxford University Press (1988).
- [133] M. Twardos, M. Dennin. Comparison between step strains and slow steady shear in a bubble raft, *Phys. Rev. E* **71**, 061401 (2005).

- [134] A. van der Net, L. Blondel, A. Saugey, W. Drenckhan. Simulating and interpreting images of foams with computational ray-tracing techniques, à paraître dans *Coll. Surf. A* (2007).
- [135] M. F. Vaz, S. J. Cox. Two-bubble instabilities in quasi-two-dimensional foams, *Phil. Mag. Lett.* **85**, 415–425 (2005).
- [136] S. Vincent-Bonnieu, R. Höhler, S. Cohen-Addad. A multiscale model for the slow viscoelastic response of liquid foams, *preprint* <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0609363>
- [137] Y. Wang, K. Krishan, M. Dennin. Impact of boundaries on velocity profiles in bubble rafts, *Phys. Rev. E* **73**, 031401 (2006).
- [138] D. Weaire, N. Rivier. Soap, cells and statistics : random patterns in two dimensions, *Contemp. Phys.* **25**, 59 (1984).
- [139] D. Weaire, S. Hutzler, *The physics of foams*, Oxford University Press, Oxford (1999).
- [140] F. Y. Wu. The Potts model, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 235–268 (1982).
- [141] H. M. Wyss, K. Miyazaki, J. Mattsson, Z. Hu, D. R. Reichman, D. A. Weitz. Strain-Rate Frequency Superposition : a rheological probe of structural relaxation in soft materials, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 238303 (2007).
- [142] X. D. Zhang, D. W. Giles, V. H. Barocas, K. Yasunaga, C. W. Macosko. Measurement of foam modulus via a vane rheometer, *J. Rheol.* **42**, 871–889 (1998).
- [143] T. Zisis, E. Mitsoulis. Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **105**, 1–20 (2002).

## Résumé

Cette thèse s'inscrit dans la recherche sur la rhéologie des mousses liquides. Celles-ci font partie de la classe des fluides complexes et exhibent un comportement entre le solide élastique et le liquide visqueux. Elles ont l'avantage d'avoir une structure (les bulles) facilement identifiable, notamment en géométrie 2D (une seule couche de bulles), ce qui en fait un système modèle. Nous présentons comment nous obtenons ces écoulements, expérimentalement (cellule Hele-Shaw) et numériquement (simulations Monte Carlo). Une grande variabilité en vitesse et en fraction liquide est obtenue. La mousse est contrainte de s'écouler autour d'un obstacle, donnant lieu à un écoulement hétérogène. L'état de la structure (étirement des bulles, réarrangements) est mesuré localement et relié aux propriétés mécaniques. La modélisation des écoulements de mousse à partir d'équations continues est étudiée. Des effets liés au confinement (frottement sur les parois, instabilité) sont observés.

## Abstract

This work is related to the field of liquid foams rheology. Liquid foams are an example of complex fluid, with a behaviour between an elastic solid and a viscous liquid. The structure (bubbles) can be easily seen, especially in 2D (one bubble monolayer), making the foam a model system. We present here how we create a flow, both experimentally (Hele-Shaw cell) and numerically (Monte Carlo simulations). Flow velocity and liquid fraction can be easily changed. The foam is constrained to flow around an obstacle, making the flow heterogeneous. The state of the structure (bubbles elongation, rearrangements) is measured and related to the mechanical properties. We test a modelling based on continuous equations. Effects due to the confinement are observed : friction on the plates, instability.