



HAL
open science

Chaos quantique et micro-lasers organiques

Mélanie Lebental

► **To cite this version:**

Mélanie Lebental. Chaos quantique et micro-lasers organiques. Physique Atomique [physics.atom-ph].
Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT: . tel-00194350v1

HAL Id: tel-00194350

<https://theses.hal.science/tel-00194350v1>

Submitted on 6 Dec 2007 (v1), last revised 17 Dec 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Normale Supérieure de Cachan

Université Paris XI

THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE PARIS XI
Spécialité : Physique

présentée par

Mélanie LEBENTAL

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de L'UNIVERSITE PARIS XI

Sujet de la thèse :

Chaos quantique et micro-lasers organiques

A soutenir le 17 septembre 2007 devant le jury composé de :

Eugène BOGOMOLNY	(Directeur de thèse)
Marie-Claude CASTEX	(Rapporteur)
Richard CHANG	
Dominique DELANDE	(Rapporteur)
Serge HAROCHE	
Jean-Sébastien LAURET	(Invité)
Fabrice MORTESSAGNE	
Joseph ZYSS	(Directeur de thèse)

Résumé

Le terme de « chaos quantique » recouvre l'étude des relations entre un système ondulatoire et son homologue classique, que le système dynamique soit intégrable, pseudo-intégrable, mixte ou chaotique. Les billards, puits de potentiel infini enfermant une particule libre, en constituent le sujet d'étude par excellence, car un déplacement de la frontière permet de changer aisément de système dynamique. Aussi avons-nous fabriqué des micro-lasers plans de formes diverses (stade, disque, polygones, ...) où, par analogie formelle, le champ électromagnétique joue le rôle d'une particule quantique. La limite classique correspond alors à celle de l'optique géométrique.

L'originalité de notre étude repose sur l'utilisation de matériaux organiques à faibles indices de réfraction qui facilite le couplage avec l'extérieur de la lumière piégée dans la cavité. Ces billards ouverts présentent des caractéristiques génériques très différentes de celles attendues pour des systèmes équivalents fermés. En particulier, le lien entre optiques géométrique et ondulatoire s'est révélé beaucoup plus étroit.

Nos études expérimentales ont concerné les directions d'émission et les spectres. Pour les premières, nous avons proposé un modèle analytique dans le cas de cavités chaotiques. Concernant les spectres, nous avons développé une méthode d'analyse qui extrait les longueurs géométriques des orbites périodiques. Ce procédé s'avère très efficace pour tester les prédictions théoriques (formule de trace). Par ailleurs, un modèle ondulatoire pour les cavités polygonales ainsi qu'une approche perturbative adaptée aux déformations continues du disque ont été validés par des simulations numériques.

Abstract

Quantum chaos research deals with connections between a wave system and its classical counterpart with a dynamical system which can be integrable, pseudo-integrable, mixed or chaotic. In this context, billiards are typical topics because they are made up of an infinite potential confining a free particle and so the dynamical system is easily modified by moving the boundary. To study this field, we have made flat micro-lasers with various shapes (stadium, disk, polygons, etc...). Actually, due to a formal analogy, the electromagnetic field plays the role of a quantum particle. The classical limit then corresponds to the geometrical optics limit.

The original aspect of our study is based on the use of organic materials. In fact their low refractive indexes facilitate the output coupling of the light confined inside the resonator. The generic features of these open billiards are very different from what is expected for equivalent closed systems. In particular, they reveal close links between wave and geometrical optics.

Concerning experiments, we have studied directions of emission and spectra. For the first ones, an analytical model has been proposed in the case of chaotic cavity. For spectra, a data processing has been developed to extract the geometrical length of the dominant periodic orbits. It has been proved to be very efficient in testing theoretical predictions (trace formula). Furthermore, a wave model for polygonal cavities as well as an analytical approach for disk continuous perturbations have been confirmed by numerical simulations.

Remerciements

Je tiens à remercier Serge Haroche qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi que Marie-Claude Castex et Dominique Delande qui ont accepté de juger ce travail et ce manuscrit. Mes remerciements vont aussi à Richard K. Chang et Fabrice Mortessagne qui sont venus de loin - voire de très loin - pour participer à ce jury.

Je suis redevable à Joseph Zyss, à l'époque directeur du LPQM, de m'avoir proposé ce sujet de thèse puis encadrée, soutenue et encouragée jusqu'à maintenant. L'enthousiasme et l'investissement d'Eugène Bogomolny se sont aussi révélés essentiels au succès de cette entreprise. En plus de mes directeurs de thèse, Charles Schmit et Jean-Sébastien Lauret ont accompagné mon travail, l'un à Orsay, l'autre à Cachan, me prodigant leurs conseils de bon aloi, humains et scientifiques.

Cette thèse s'est déroulée à parts égales entre le LPTMS à Orsay et le LPQM à Cachan. Je tiens à remercier leurs directeurs respectifs, Isabelle Ledoux et Stéphane Ouvry, ainsi que leurs équipes administratives, pour leur aide logistique tout au long de cette thèse. Je suis aussi redevable à Claire Dupas, directrice de l'ENS de Cachan, pour m'avoir permis de réaliser ce projet.

Les enseignements que j'ai réalisés au département de physique de l'ENS de Cachan ont profondément enrichi ce travail de recherche. Mes remerciements vont donc à ceux qui m'ont fait confiance et m'ont permis d'en profiter : Alain Aspect, Antoine Browaeys, Hubert Krivine, Vincent Jacques, Jean-François Roch et Joseph Zyss.

L'ambiance de convivialité et d'entraide qui régnait dans les laboratoires d'accueil a beaucoup contribué à la réussite de cette thèse. La liste des doctorants, post-doctorants et membres permanents que je devrais remercier pour leurs conseils, leur soutien ou même le prêt de matériel serait trop longue¹ et je me contenterai donc de saluer mes collaborateurs directs et quotidiens : Rolland Hierle et Joseph Lautru pour leur gestion de la salle blanche ainsi que Nadia Djellali et Rémy Dubertrand, les doctorants qui poursuivent ces travaux.

¹Avec une mention spéciale toutefois pour Sophie Brasselet et Oriol Bohigas

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte	2
1.1 Historique du sujet de thèse	2
1.2 Système ouvert / système fermé	4
1.3 Couplage cohérent	6
2 Description du système	8
2.1 La cavité	8
2.1.1 Matériaux	9
2.1.2 Protocole de fabrication	10
2.1.3 Dispositif expérimental	13
2.2 Cavité passive	16
2.2.1 Modélisation	16
2.2.2 Etude d'un cas intégrable : le disque	22
2.2.3 Etude d'un cas chaotique : le stade	26
2.2.4 Simulations numériques	29
2.3 Effet laser	35
2.3.1 Description du milieu amplificateur	36
2.3.2 Expériences	39
2.3.3 Modèle et simulations numériques	43
3 Propriétés d'émission	48
3.1 Singularités douces	48
3.1.1 Diffraction par une singularité du deuxième ordre : cas du stade	48
3.1.2 Perturbation d'une orbite marginale par une singularité	54
3.2 Singularités du premier ordre : le coin	57
3.2.1 Polygones	57
3.2.2 Disque coupé : approche perturbative	63
3.3 Emission par réfraction	69
3.3.1 Constatations	69
3.3.2 Phénomène stationnaire	72
3.3.3 Modèle de lentille	76
4 Spectres	82
4.1 Spectres et orbites périodiques	82
4.1.1 Résonateur Fabry-Perot	83
4.1.2 Coexistence d'orbites : formule de trace	87
4.1.3 Compétition entre orbites	97

4.2	Polygones et superscars	101
4.2.1	Systèmes intégrables et pseudo-intégrables	101
4.2.2	Carré : superscar or not superscar ?	105
4.2.3	Superscars pour le pentagone	109
4.3	Systèmes chaotiques	113
4.3.1	Caractéristiques génériques	113
4.3.2	Le stade : orbites confinées	114
4.3.3	Le disque coupé : orbites non-confinées	120
	Conclusion	125
	A Pertes et courants pour le disque diélectrique	127
	B Formule de trace et formule de Krein	129
	C Caractéristiques de quelques orbites périodiques	132
	C.1 Stade de Bunimovich	132
	C.2 Disque coupé	134
	D Protocole de fabrication	136
	E Tests d'autres matériaux	139
	F Instabilités de couches	141
	G Imagerie du flanc des cavités	144
	H Imagerie par au-dessus	146
	I Lasers aléatoires	149
	J Ecriture de singularités	151
	K Notations	153
	L Articles	155
	Bibliographie	177

Introduction

Le travail présenté dans ce manuscrit a été réalisé de l'été 2004 à l'été 2007 dans le cadre d'une thèse effectuée au Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire (LPQM, ENS de Cachan-CNRS) et au Laboratoire de Physique Théorique et Modèle Statistique (LPTMS, Université Paris XI-CNRS). Les équipes étaient constituées d'une part d'Angela Vella (post-doctorante jusqu'en février 2005), de Jean-Sébastien Lauret (maître de conférence depuis février 2005), de Rolland Hierle (ingénieur salle blanche jusqu'en décembre 2006), de Joseph Lautru (ingénieur salle blanche depuis janvier 2007), de Nadia Djellali (doctorante depuis janvier 2007) et de Joseph Zyss (directeur de thèse); et d'autre part de Charles Schmit (chercheur spécialiste des simulations numériques, décédé en septembre 2006), de Rémy Dubertrand (doctorant, sur le sujet depuis l'automne 2006) et d'Eugène Bogomolny (directeur de thèse).

L'originalité de cette étude repose sur la complémentarité entre une approche théorique en chaos quantique et un savoir-faire technologique et expérimental autour des micro-lasers en matériaux organiques. La problématique a été orientée vers le concept de système ouvert. La pertinence de ce choix est argumentée dans le chapitre 1 qui résume le contexte scientifique.

Ce manuscrit est constitué principalement de trois chapitres, numérotés 2, 3 et 4. Les deux derniers (chapitres 3 et 4) rassemblent les résultats obtenus durant ces trois années concernant les propriétés d'émission et les caractéristiques spectrales. Quant au chapitre 2, il précise le cadre de l'étude à la fois du point de vue théorique et expérimental. Quelques compléments sont regroupés dans les annexes qui reprennent les détails de certains calculs (annexes A, B et C) ou présentent des expériences réalisées en parallèle (annexes D à J). Pour faciliter la lecture, les principales notations utilisées ainsi que les termes techniques fondamentaux sont explicités à l'annexe K. Les articles acceptés avant juin 2007 sont rassemblés à l'annexe L.

Chapitre 1

Contexte

Ce chapitre introductif a pour objectif d'expliquer la problématique de ce travail de thèse. A ce titre, il permet de préciser certaines notions clefs telles que "chaos quantique" ou "cavité ouverte" qui sont au cœur de l'étude et de les insérer dans le contexte scientifique.

1.1 Historique du sujet de thèse

La recherche sur les cavités polymères est un des axes de recherche majeur du Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire (LPQM, ENS de Cachan-CNRS). Elle a bénéficié, entre autres, du savoir-faire issu du centre de recherche et développement de France Telecom à Bagneux. La salle blanche dédiée permet de concevoir et réaliser en interne des composants en matériaux organiques éventuellement dopés par des colorants lasers ou des molécules aux propriétés particulières. Deux applications directes de cette technologie performante et bas-coût sont développées : les capteurs¹ et l'optoélectronique². Afin d'optimiser les performances, il est nécessaire d'étudier en parallèle les aspects fondamentaux de ces résonateurs : directions d'émission et caractéristiques spectrales. Dans ce but, une collaboration avec l'université de Yale a été établie dans les années 2000 à l'initiative de Joseph Zyss et de Richard Chang. Tahar Ben Messaoud³, François Courvoisier⁴ et Daniel Whright⁵ ont bénéficié de séjours dans le groupe de Yale [30] où ils ont introduit les avantages de la technologie polymère. Ce groupe travaille depuis le milieu des années 90 avec celui de Douglas Stone sur les relations entre micro-lasers et chaos quantique.

Le domaine appelé "chaos quantique" s'intéresse aux liens entre les propriétés classiques d'un système (intégrable, mixte ou chaotique) et ses manifestations ondulatoires. Un système classique est dit intégrable s'il possède autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté. Par exemple dans un billard plan en forme de disque, l'énergie de la particule est conservée ainsi que son angle d'incidence sur la paroi. Il s'agit donc d'un système intégrable. La correspondance quantique consiste à considérer la particule comme une onde et à résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire⁶ d'énergie ϵ , par exemple pour un billard plan :

$$(\Delta + \epsilon) \psi = 0 \quad \psi|_{\text{frontiere}} = 0$$

¹ATER de Carole Arnaud.

²Thèse de Patrice Nagtegale soutenue en janvier 2005 [79] et thèse de François Duport en cours.

³Thèse au LPQM soutenue en décembre 2003 [10].

⁴Thèse en co-direction entre le LPQM et le groupe de J.-P. Wolf au LASIM soutenue en juin 2005.

⁵Post-doctorant au LPQM en de 2001 à 2003.

⁶Pour simplifier, $\frac{\hbar^2}{2m} = c = 1$.

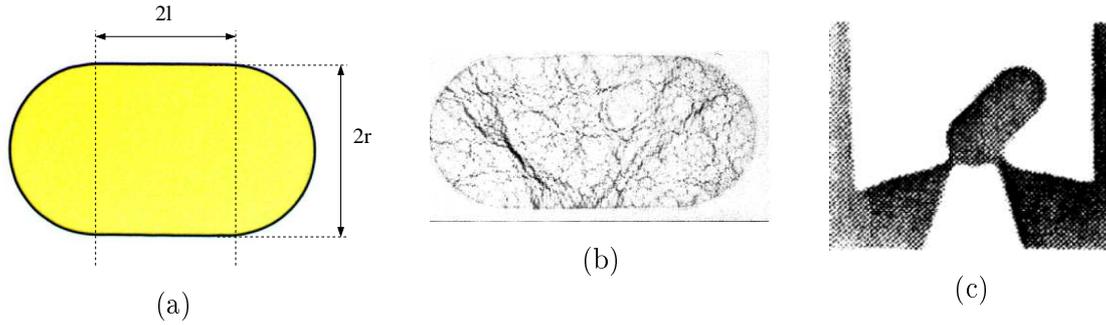


FIG. 1.1 – (a) Photographie au microscope optique d'un stade en matériaux organiques. Dimension typique $100 \mu\text{m}$. r correspond au rayon des demi-cercles et $2l$ à la longueur du segment de droite. (b) Onde acoustique dans l'eau [32]. (c) Stade en boîte quantique [74].

Le potentiel est nul à l'intérieur et la condition au bord précise que la particule ne peut pas sortir de la cavité. Un système classique intégrable demeure intégrable dans le domaine ondulatoire si ses constantes du mouvement commutent. Il possède alors autant de nombres quantiques que de degrés de liberté, par exemple pour le disque, les nombres d'excitations radiales et orthoradiales (cf. par exemple [23]). Les propriétés du spectre et des fonctions d'onde s'analysent aisément puisque ces quantités s'expriment de manière analytique (cf. partie 2.2.2).

En revanche l'étude s'avère plus délicate pour un système chaotique qui par définition possède moins de constantes du mouvement que de degrés de liberté (cf. [111] et références incluses). Il est donc plus difficile de prévoir les propriétés du système ondulatoire et, à l'heure actuelle, ces prédictions reposent sur des conjectures. Ces études entrent dans le cadre du chaos quantique.

Le champ d'application du chaos quantique est très vaste puisqu'il ne se restreint pas aux cas purement chaotiques mais s'intéresse aussi à des systèmes intermédiaires de type mixte ou pseudo-intégrable (cf. partie 4.2). Il s'agit d'établir des liens entre les caractéristiques classiques d'un système et ses propriétés quantiques. Par analogie, ces relations s'étendent aux systèmes ondulatoires en général⁷ tels que l'acoustique, les plaques vibrantes ou l'électromagnétisme. En effet, l'analogie formelle entre l'équation de Schrödinger stationnaire et celle régissant le système considéré justifie cette appellation générique. Par exemple, la figure 1.1 présente trois types d'expériences réalisées sur un même système chaotique, le stade de Bunimovich [27]. Pour nos micro-résonateurs, l'analogie formelle relie l'équation de Schrödinger stationnaire à l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0$$

La fonction d'onde ψ représente alors les champs électrique ou magnétique et le nombre d'onde k s'apparente à la racine carrée de l'énergie $\sqrt{\epsilon}$. Le passage vers le cas classique $\hbar \rightarrow 0$ (aussi appelée limite semi-classique) devient alors $k \rightarrow \infty$ et correspond à l'optique géométrique. Nous discuterons des conditions d'application de cette analogie aux parties 2.2.1 et 4.1.2. Toutefois la question générale posée par le chaos quantique retrouve les mêmes échos dans le cadre de l'optique standard : dans quelle mesure l'optique ondulatoire est-elle régie par l'optique géométrique et ses rayons ?

Dans le cas des micro-lasers, c'est la forme de la cavité qui dicte le comportement d'optique géométrique. Via l'analogie entre une particule ponctuelle et un rayon, les réso-

⁷L'expression consacrée "chaos quantique" est parfois remplacée par "chaos ondulatoire".

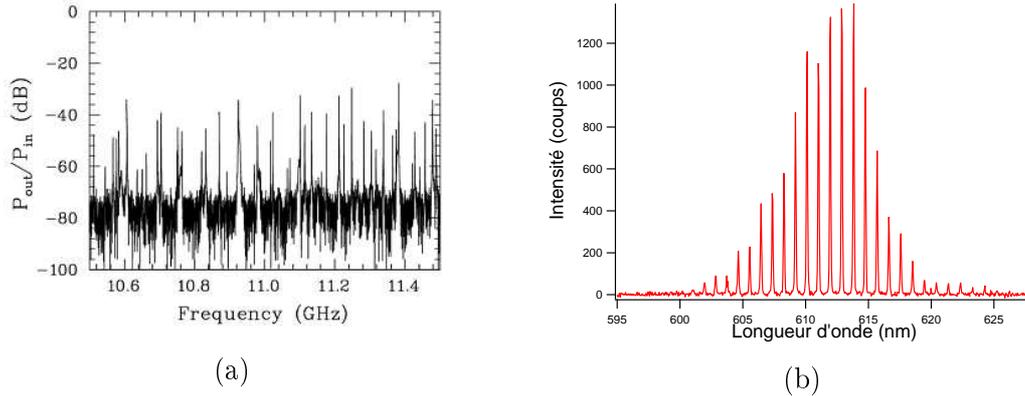


FIG. 1.2 – (a) Spectre expérimental micro-ondes dans une cavité supra-conductrice [2] en forme de stade. (b) Spectre laser expérimental d'une de nos micro-cavités organiques en forme de stade.

nateurs sont classés suivant le type de dynamique qu'ils imposent : intégrable, mixte ou chaotique. Par la suite, nous utiliserons une classification équivalente reposant sur la stabilité des orbites périodiques détaillée en 2.2.3. Un système sera dit chaotique si toutes ces orbites périodiques sont instables ou marginales. Le stade (cf. figure 1.1) en est une bonne illustration. Pour comprendre les propriétés ondulatoires de ces micro-lasers, il est donc intéressant de bénéficier des connaissances accumulées dans le domaine du chaos quantique.

1.2 Système ouvert / système fermé

Pour bénéficier d'un support théorique en chaos quantique, cette thèse a été réalisée en co-direction avec le groupe spécialiste du domaine au Laboratoire de Physique Théorique et Modèle Statistique (LPTMS, Université Paris XI-CNRS). En fait ces résonateurs diélectriques se sont révélés un objet d'étude à part entière particulièrement original car ils constituent des systèmes ouverts au comportement très différent des prédictions du chaos quantique jusqu'à présent limitées aux systèmes fermés. En effet ces micro-cavités présentent des pertes puisqu'elles émettent. Même si les questions fondamentales restent celles du chaos quantique, certains outils doivent être adaptés. Nous en discuterons au cours des parties 2.2.1 et 4.1.2.

Une première différence entre résonateurs diélectriques et systèmes fermés tient aux propriétés spectrales. Dans les années quatre-vingts, O. Bohigas, M.-J. Giannoni et C. Schmit ont avancé l'idée que les niveaux d'énergie des systèmes chaotiques⁸ présentent des fluctuations semblables à celles des valeurs propres de matrices aléatoires [19]. Par exemple, considérons un billard en forme de stade. Son spectre expérimental est représenté figure 1.2 (a). Il a été mesuré sur une cavité micro-onde supra-conductrice, c'est à dire que les pertes par effet de peau restent très négligeables. Alors la distribution $p(s)$ des distances s entre niveaux adjacents suit la loi $p(s) \propto s e^{-as^2}$ [1, 2]. Cette conjecture a été vérifiée sur un très grand nombre de systèmes (cf. par exemple [110] page 91). Pour comparaison, le spectre de la figure 1.2 (b) a été enregistré sur un de nos micro-lasers typiques en forme de stade. Contrairement au spectre de la cavité fermée, il semble que les raies soient régulièrement espacées. Nous développerons cet aspect au chapitre 4.

⁸Dans [19], il est question de systèmes invariants par retournement temporel.

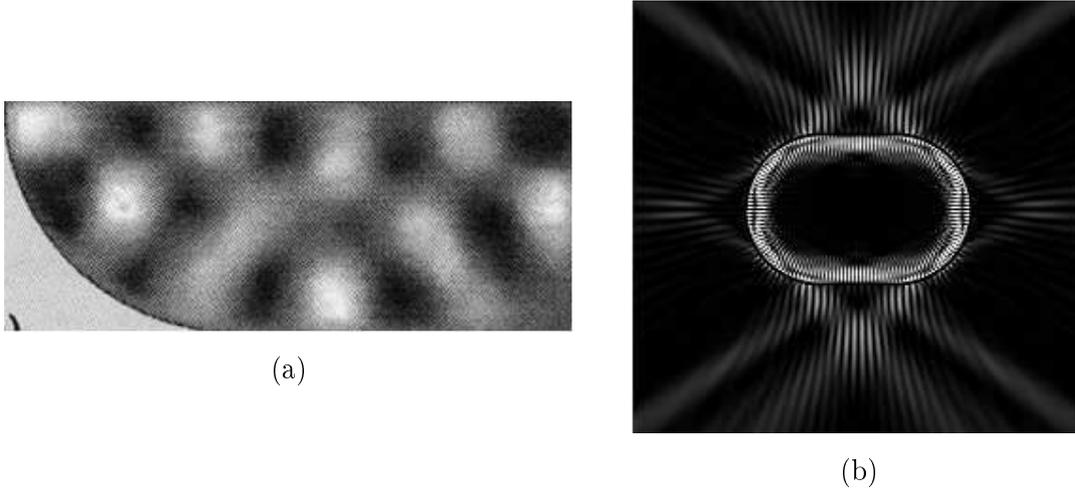


FIG. 1.3 – (a) Fonction d'onde expérimentale enregistrée sur une cavité micro-onde métallisée en forme de quart de stade [109]. (b) Fonction d'onde (module au carré) obtenue par simulations numériques pour un stade diélectrique. Echelle de gris, les zones de plus forte intensité sont indiquées en blanc.

Les fonctions d'onde aussi s'avèrent très différentes. La figure 1.3 compare les répartitions spatiales des intensités pour des cavités en forme de stade. En (a) il s'agit d'une cavité micro-onde métallisée donc à faibles pertes et en (b) d'un résonateur diélectrique. Dans [11], M. Berry propose de décrire les fonctions d'onde de systèmes chaotiques comme une superposition aléatoire d'ondes planes. Cette conjecture a été vérifiée sur différents billards fermés et on peut constater sur la figure 1.3 (a) que la lumière occupe l'ensemble de la cavité. En revanche, cette conjecture ne s'applique manifestement pas aux micro-cavités diélectriques puisqu'en (b) la lumière reste localisée à la périphérie. Ce phénomène de localisation, dénommé "scar", existe aussi dans les systèmes fermés [52], mais il apparaît de manière exceptionnelle alors qu'il semble être de règle pour les résonateurs diélectriques.

L'invalidation de ces conjectures rend les systèmes ouverts très attractifs. Les résonateurs diélectriques en particulier, parce qu'en plus de leur intérêt technologique et industriel, leur traitement ondulatoire reste une énigme. Alors que le problème de la diffraction d'une onde plane par un coin métallique a été résolu par Sommerfeld il y a plus d'un siècle [106], son équivalent diélectrique résiste encore aux théoriciens. Pourtant une méthode analytique rendrait de fiers services dans de nombreux domaines d'application, de la propagation d'ondes radio en milieu urbain jusqu'aux systèmes de sécurité en aviation. Nous en proposerons une approche complémentaire à la partie 3.2.

Au-delà de ces aspects scientifiques, les résonateurs diélectriques présentent l'avantage majeur d'émettre, contrairement à leurs homologues fermés. Ils nous offrent donc des moyens supplémentaires d'investigation comme par exemple la dynamique de relaxation ou les directions d'émission. Le chapitre 3 met à profit cette caractéristique pour explorer les propriétés internes de ces systèmes.

Les micro-cavités diélectriques renouvellent donc les voies d'exploration du chaos quantique parce qu'elles présentent des propriétés originales et permettent une exploration ex-

périmentale riche et différente de celle réservée aux systèmes fermés.

1.3 Couplage cohérent

Les recherches systématiques sur l'ouverture d'un système ondulatoire ont débuté dans les années quatre-vingt dix [26, 124], notamment dans le but de protéger les états quantiques de leur environnement pour prolonger leur durée de vie. En général, le couplage avec le continuum extérieur est modélisé par du bruit et il semble que le système tende alors vers un comportement classique [25, 50]. Ces études sont rassemblées sous le terme générique de décohérence.

En fait les micro-résonateurs présentent des caractéristiques analogues à ces systèmes ondulatoires ouverts. Nous verrons d'ailleurs à la partie 3.3 et au chapitre 4 que leurs propriétés sont fortement marquées par le système classique. La différence majeure réside dans le type de couplage vers l'extérieur qui, pour nous, reste cohérent.

Diverses méthodes ont été explorées pour produire un système ondulatoire ouvert. Tout d'abord on peut envoyer une particule sur un potentiel et observer les résonances. Les aspects théoriques ont été largement développés dans les années 50-70 dans le cadre de la physique nucléaire et des hautes énergies. La partie 4.1.2 traite des adaptations au cas diélectrique où le potentiel équivalent dépend de l'énergie.

Des études de diffusion ont été réalisées directement dans le cadre du chaos quantique à partir du transport électronique dans des cavités semi-conductrices. La forme de la cavité impose la dynamique classique (intégrable, mixte ou chaotique) et les mesures de conductance en conservent la trace [66, 74].

Une variante à ces expériences consiste à envoyer une onde sur des diffuseurs, par exemple des disques métallisés [37, 59, 86] ou des plots diélectriques [78]. En général, on assiste alors au phénomène de localisation : la fonction d'onde s'installe et reste localisée par un jeu d'interférences. Les lasers aléatoires⁹ fonctionnent sur ce principe [29]. Il semble que les résonateurs diélectriques et, de manière générale, les systèmes ouverts chaotiques possèdent cette faculté de localiser leurs fonctions d'onde sur des orbites périodiques (cf. par exemple [43, 46, 51, 67] pour les micro-lasers et [58] pour les "open quantum maps"). Nous développerons cet aspect au chapitre 4.

Dans ce contexte, l'utilisation de l'effet laser présente l'avantage d'amplifier les résonances et d'en faciliter ainsi l'identification. Divers dispositifs ont été étudiés, à commencer par des micro-disques en puits quantiques [75], des gouttelettes d'éthanol dopée Rhodamine [76] ou des sphères de silice dopée néodyme [97]. Par la suite d'autres expériences ont été réalisés sur des structures mouvantes comme un jet de colorant laser à la forme contrôlée [68] ou des composants orientés vers des applications industrielles comme une gaine autour d'une fibre optique [39]. Pour s'approcher des billards, systèmes canoniques du chaos quantique, de nombreuses études dont la nôtre sont effectuées sur des cavités quasi-bidimensionnelles avec différentes méthodes d'investigation : directions d'émission, spectres, propagation d'un pulse [35, 41] ou facteur de qualité [5]. Certains groupes ont déjà commencé à s'intéresser au couplage de deux [96] voire même de cinq ou douze cavités [53, 93].

Jusqu'à très récemment, ces micro-résonateurs étaient fabriqués en matériaux semi-conducteurs pour faciliter leur incorporation potentielle dans des composants industriels. Mais comme

⁹Nous en avons fabriqué par hasard et réservons leur description pour l'annexe I

nos travaux [63] ont montré la pertinence des technologies polymères, quelques groupes ont développé ce savoir-faire, notamment celui de Hui Cao à l'université de Chicago (USA) [44] et de Chil-Min Kim à l'université de Pai-Chai (Corée du sud). En effet outre leur bas-coût et leur flexibilité, les matériaux organiques possèdent des indices de réfraction très faibles ($n \sim 1.5$). La lumière s'échappe aisément de la cavité et le système est franchement ouvert. Des phénomènes jusqu'alors masqués par le confinement trop important dans les dispositifs semi-conducteurs ($n \sim 3 - 4$) deviennent accessibles avec ces cavités polymères. Nous soulignerons cet aspect à la partie 3.3 et au chapitre 4.

Conclusion Notre objectif principal consiste à prédire et interpréter les propriétés ondulatoires de résonateurs diélectriques de formes variées dans le domaine semi-classique, c'est à dire lorsque la longueur d'onde reste bien plus petite que les dimensions caractéristiques du système.

De nombreux groupes travaillent sur ce type de micro-résonateurs de par le monde [115, 116], certains par exemple pour fabriquer des dispositifs à vocation industrielle [40, 61, 80] ou d'autres pour tester de nouvelles approches en optique quantique [3, 121]. Plusieurs équipes avec lesquelles nous sommes en contact sont impliquées dans des thématiques semblables aux nôtres autour du chaos quantique, parmi elles citons notamment celle de T. Harayama dans le centre ATR au Japon, celle de C.-M. Kim à l'université de Pai-Chai en Corée, celle de H. Cao à l'université de Chicago (USA), celles de M. Hentschel et J. Wiersig en Allemagne et celles de R. Chang et de D. Stone à l'université de Yale (USA) dont les anciens doctorants A. Poon, H. Türeci et J. Nöckel ont essayé.

Chapitre 2

Description du système

Ce chapitre décrit les principales caractéristiques du système, depuis la fabrication de la cavité jusqu'à ses propriétés lasers. Il reprend les éléments qui s'avèrent nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Certaines parties telles que la structure électronique du colorant laser, rassemblent des informations récoltées dans divers articles et réorganisées autour de la problématique globale. En revanche d'autres parties ayant trait au protocole de fabrication ou à l'étude de l'effet laser ont fait l'objet d'études approfondies. En effet leurs spécificités nous a incités à leur accorder une attention particulière car certaines informations critiques n'existent pas dans la littérature et leur originalité présente un intérêt scientifique à part entière.

Ce chapitre de présentation est organisé en trois parties. La première décrit les principales caractéristiques techniques utilisées lors des expériences. Elle brosse un rapide portrait des cavités, de leurs propriétés chimiques aux bancs de tests optiques. La partie suivante dresse un état de l'art sur l'approche théorique de ce type de système ouvert. Elle expose le modèle retenu et les méthodes de simulations numériques utilisées. La dernière partie est consacrée à l'effet laser. Nous avons essayé d'y concilier les études standard avec les propriétés particulières de nos micro-lasers.

2.1 La cavité

Nos micro-lasers sont des objets presque plans, dont l'épaisseur reste inférieure à 1 micron pour des dimensions transverses environ 100 fois plus grandes. La recherche fondamentale sur ce type de systèmes s'inscrit directement dans les thématiques du LPQM, notamment dans le cadre de leurs applications en optique intégrée [79, 80]. Le choix de matériaux organiques permet de concilier le savoir-faire développé dans le groupe et originaire du CNET Bagnex avec des propriétés physiques originales liées aux bas indices de réfraction et de ce fait inaccessibles aux composants semi-conducteurs. Ces caractéristiques intéressantes incitent d'ailleurs certains groupes à développer une technologie polymère (eg. groupe de Hui Cao, Université de Northwestern, USA [44]).

Les principaux choix en termes de matériaux, de procédé de fabrication et de banc de mesures, ont été effectués par le doctorant qui m'a précédée, Tahar Ben Messaoud [10] avec l'aide du post-doctorant Daniel Wright. Ils répondent à un souci de simplicité (pompage et émission dans le visible) s'appuyant sur la salle blanche dédiée et l'expertise de Rolland Hierle¹.

¹Rolland Hierle est remplacé par Joseph Lautru depuis janvier 2007, suite à son départ en retraite

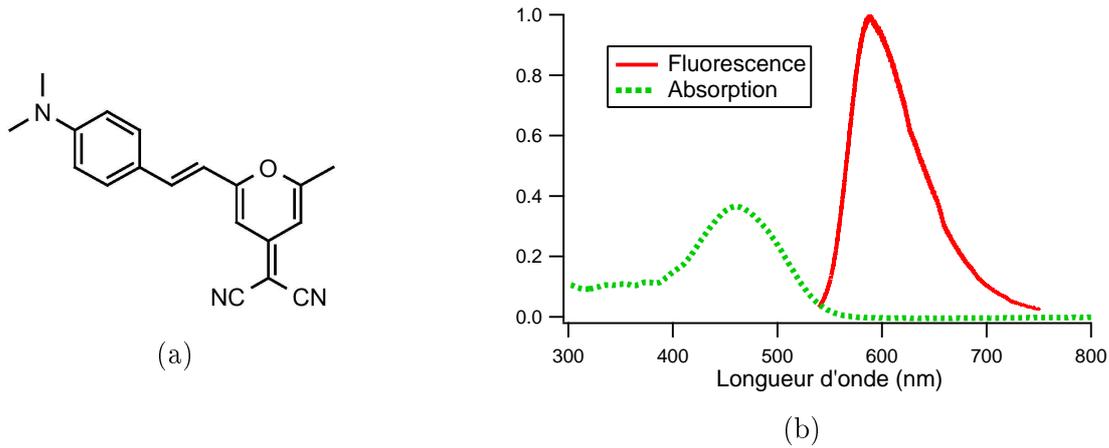


FIG. 2.1 – a) Molécule de DCM. b) Spectre d'absorption (vert, pointillés, échelle réelle) et de fluorescence (rouge, continu, échelle normalisée) pour une même couche de PMMA dopée DCM à 5 % en masse d'épaisseur $0.5 \mu\text{m}$ sur lame de verre.

Cette partie consacrée à la description des outils expérimentaux se compose de trois paragraphes relatifs aux matériaux, au protocole de fabrication et aux dispositifs de mesure. Pour chacun d'eux nous avons pris soin de mentionner certaines alternatives et améliorations, avec le souci de ne détailler que les éléments nécessaires à la compréhension ou intervenant dans le cadre de cette étude.

2.1.1 Matériaux

Les cavités sont constituées d'une matrice hôte passive dopée par un matériau actif, le tout sur un support passif. La matrice hôte que nous avons principalement utilisée est un polymère, le polyméthacrylate de méthyle² (PMMA) plus connu sous le nom commercial de Plexiglas. Ce polymère très utilisé dans l'industrie, présente, entre autres, deux avantages très importants pour les micro-lasers. D'une part il est transparent aux longueurs d'onde d'intérêt comme l'ont confirmé des mesures d'absorption par spectrophotométrie. Et d'autre part il peut être travaillé après une cuisson à seulement 120°C , ce qui permet de préserver les propriétés du colorant laser.

Le choix du matériau actif s'est porté sur le DCM³, colorant laser d'usage courant au laboratoire. Malgré une relative fragilité, il est bien adapté pour les micro-lasers car il présente un décalage de Stokes important (environ 100 nm) et un rendement quantique de fluorescence élevé (~ 0.7 [38, 112]).

Les propriétés d'absorption et d'émission du matériau sont résumées sur la figure 2.1 (b). Elles ont été obtenues à partir d'une couche d'épaisseur $0.5 \mu\text{m}$ sur lame de verre, réalisée dans des conditions standard (cf. § 2.1.2). La courbe d'absorption représentée en pointillés verts a été mesurée avec un spectrophotomètre lambda 950 Perkinelmer. Elle indique notamment que le pompage à 532 nm , bien que plus pratique en termes de source et d'optiques, n'est pas le plus efficace. L'expérience a toutefois montré qu'il permet d'atteindre les seuils lasers sans aucun problème. Cependant, pour certaines expériences d'écriture dans le matériau (cf. annexe J), un laser bleu continu à 473 nm s'est révélé plus adapté.

²($\text{C}_5\text{O}_2\text{H}_8$)_n, poids moléculaire 495 000

³[2-[2-[4-(diméthylamino)phényl]éthényl]-6-méthyl-4H-pyran-4-ylidène]-propanedinitrile, $\text{C}_{19}\text{H}_{17}\text{N}_3\text{O}$, poids moléculaire 303.

Quant à la courbe de fluorescence, elle a été obtenue avec un pompage par laser continu Nd :YAG doublé à 532 nm, dans une configuration de détection semblable à celle utilisée pour les micro-lasers⁴ (cf. § 2.1.3).

Le choix du matériau support est dicté par la nécessité d'un confinement vertical : son indice de réfraction doit être inférieur à celui de la couche PMMA-DCM de l'ordre de 1.5 (cf. § 2.2.1 pour une étude plus détaillée). Le silicium, support usuel, présente un indice de 3.9 à 600 nm. Il faut donc avoir recours à une couche intermédiaire. Pendant les deux premières années de ma thèse, nous avons utilisé du SOG (polymère commercial, indice de réfraction 1.42 à 600 nm), matériau passif. Puis, il a été remplacé par la silice (indice de réfraction 1.46 à 600 nm) lorsque le dispositif de mesure a permis d'utiliser des échantillons entiers car plus pratique mais plus difficile à couper.

Le flexibilité de notre procédé de fabrication permet de l'adapter à divers types de matériaux et nous avons testé quelques alternatives (cf. annexe E). Toutefois, pour les travaux décrits dans ce manuscrit, nous nous sommes contentés d'une structure fonctionnelle de type PMMA-DCM sur SOG (ou silice), le tout sur substrat de silicium.

2.1.2 Protocole de fabrication

Le protocole de fabrication est détaillé dans l'annexe D. Ici nous nous attacherons à en décrire les principes. Il conduit à des cavités de formes et de tailles diverses, limitées seulement par l'imagination (et la patience) du dessinateur de masque (cf. figure 2.2). Pour donner quelques ordres de grandeur typiques, un échantillon de 2 pouces ($\emptyset \sim 5$ cm, cf. fig. 2.3 (a)) comporte environ 200 cavités (fig. 2.3 (b)) et peut être fabriqué en deux demi-journées. En condition d'utilisation standard, un échantillon présente une durée de vie supérieure à deux ans.

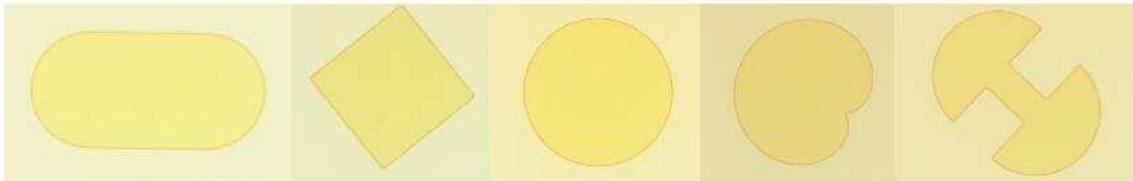


FIG. 2.2 – Photographies par microscope optique de micro-cavités aux formes variées : stade, carré, disque, cardioïde, quasi-stade. Dimension typique : 100 μ m.

Le procédé de gravure est semblable à celui utilisé pour les composants semi-conducteurs. L'intérêt des matériaux organiques réside dans la phase d'élaboration des couches. Alors que la croissance de couches par épitaxie nécessite des installations coûteuses, le dépôt de solutions organiques par centrifugation (spin-coating) est aisé et rapide. Le composé est dissout dans un solvant idoine, puis le support est recouvert de quelques gouttes et mis en rotation, typiquement à quelques milliers de tours par minute pendant 20 secondes, grâce à un appareil nommé "tournette". La solution s'étale, le solvant s'évapore et la couche se fige. Elle doit ensuite être cuite pour dissiper les restes de solvant et permettre la poly-

⁴Le spectre complet est composé de plusieurs spectres juxtaposés grâce à la fonction "step and glue" du logiciel Winspec. Les jonctions restent parfois un peu visibles.

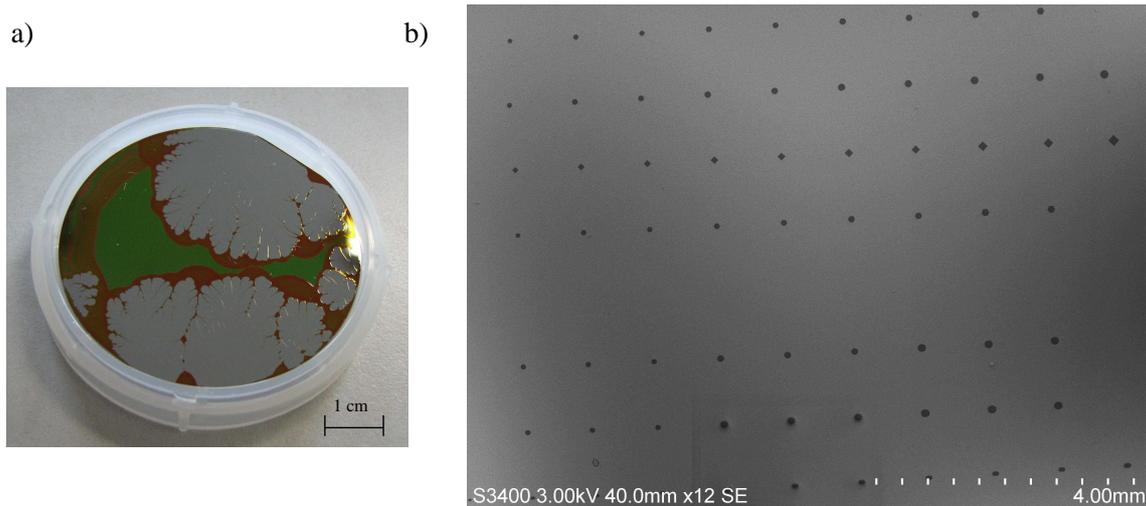


FIG. 2.3 – a) Photographie d'un échantillon de 2 pouces avec une couche de PMMA-DCM directement sur Si. Les irisations et structures proviennent d'une instabilité de la couche (cf. annexe F). b) Quelques rangées de cavités visualisées au microscope électronique à balayage (Les microscopes optiques du laboratoire munis de caméra ne permettent pas de photographier un champ aussi large.). Les cavités sont espacées d'un millimètre et alignées suivant leur forme. Les rangées du dessus contiennent des disques, carrés et hexagones, celles du dessous des stades $l/r=0.1, 0.2$ et 0.5 .

mérisation. L'épaisseur est mesurée par un profilomètre⁵. Pour la contrôler, les paramètres essentiels sont la vitesse de rotation, la viscosité et les tensions superficielles. Dans certains cas, il est nécessaire d'avoir recours à un promoteur d'adhérence ou une activation par bombardement ionique.

La couche active de PMMA-DCM doit mesurer entre 0.4 et $0.7 \mu\text{m}$ pour qu'une seule excitation verticale puisse exister⁶. Il est possible de contrôler cette épaisseur assez finement. L'homogénéité est de l'ordre de 30 nm à l'échelle de l'échantillon et reste inférieure à 10 nm sur une même cavité. Pour la couche de confinement inférieure (SOG ou silice), des simulations ont montré qu'une épaisseur de $2 \mu\text{m}$ est suffisante pour éviter la fuite du mode vers le silicium du substrat. Elles ont été confirmées par des tests expérimentaux avec des épaisseurs différentes. En essayant d'augmenter l'épaisseur de SOG, des instabilités de couches ont été observées. Ces jolies structures sont présentées en annexe F. La figure 2.3 (a) montre un autre exemple d'instabilité.

La phase de gravure repose sur les mêmes procédés que ceux employés pour les matériaux semi-conducteurs. Elle est cependant considérablement plus courte parce que les cavités sont constituées d'une seule couche. La figure 2.4 en illustre les étapes importantes. Les cavités sont reproduites à partir d'un masque constitué d'une matrice de quartz transparente aux ultra-violets et de parties opaques en chrome qui correspondent aux cavités. Le dessin du masque est effectué avec le logiciel Wavemaker et la fabrication réalisée par l'entreprise Photronics avec une précision revendiquée de $0.25 \mu\text{m}$. Au cours de ma thèse, j'ai dessiné et utilisé essentiellement deux masques, l'un consacré au stade et l'autre à des

⁵Le principe d'un profilomètre repose sur une pointe qui se déplace à la surface de l'échantillon. Sa position verticale indique l'épaisseur locale.

⁶Une excitation verticale en polarisation TE et une autre en polarisation TM (cf. partie 2.2.1)

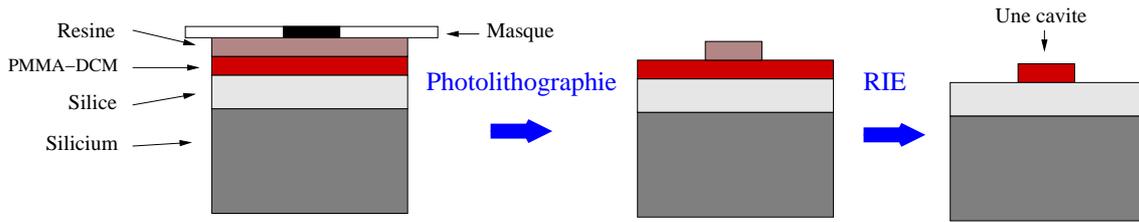


FIG. 2.4 – Etapes de fabrication d'un échantillon une fois les différentes couches déposées et cuites.

formes plus originales.

Le motif du masque est imprimé sur une résine photosensible positive par photolithographie : les rayonnements ultra-violettes modifient les parties non-protégées par le chrome ; celles-ci sont ensuite éliminées grâce à un développeur adapté. La couche de PMMA-DCM n'est pas affectée par ce procédé. À l'issue de cette étape, l'échantillon présente donc des cavités en résine sur une couche de PMMA-DCM.

La dernière étape consiste à bombarder l'échantillon par un plasma d'oxygène pour supprimer le PMMA-DCM non protégé par les îlots de résine. Ce bombardement par RIE (Reactive-Ion Etching) détruit aussi la résine. Il suffit donc de jouer sur le temps d'attaque et l'épaisseur de la couche de résine pour obtenir des cavités en PMMA-DCM et supprimer toute la résine. La qualité des flancs est très satisfaisante et les détails du masque sont bien reproduits (fig. 2.2 et 2.5).

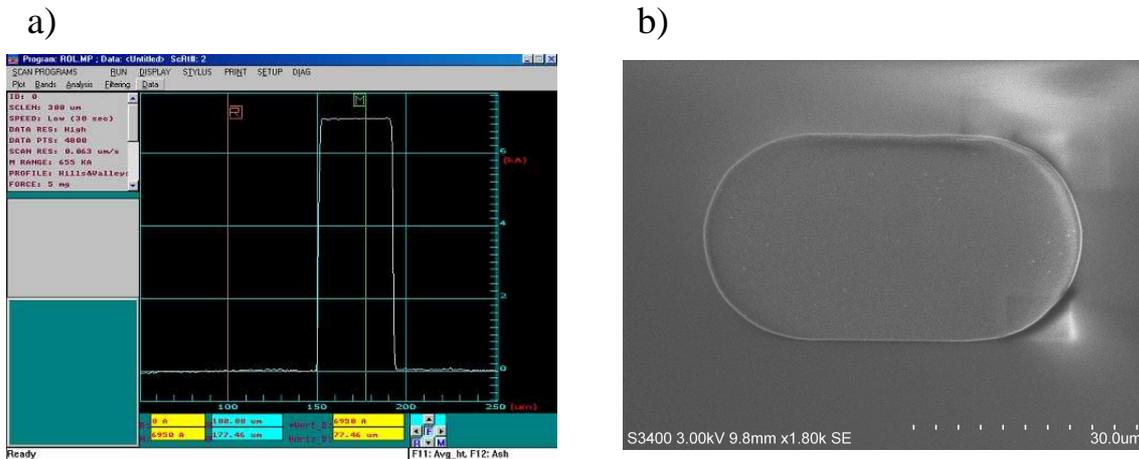


FIG. 2.5 – a) Profil d'une cavité obtenu grâce au profilomètre. Sur cette image, on lit une épaisseur de $0.70 \pm 0.05 \mu\text{m}$ pour une largeur de $195 \pm 2 \mu\text{m}$. b) Vue globale d'un stade par microscope électronique à balayage (MEB). On distingue à droite les modifications dues au MEB lui-même.

Ce procédé de fabrication pourrait être considérablement simplifié en considérant le PMMA lui-même comme résine photo-sensible⁷. Cette méthode est utilisée dans [44]. Le masque est alors directement imprimé en utilisant des longueurs d'onde, un temps d'exposition et un développeur adaptés. Pour l'instant nous n'avons pas encore tenté l'expérience.

⁷Les habitués des technologies semiconducteurs connaissent le PMMA essentiellement à travers cet usage.

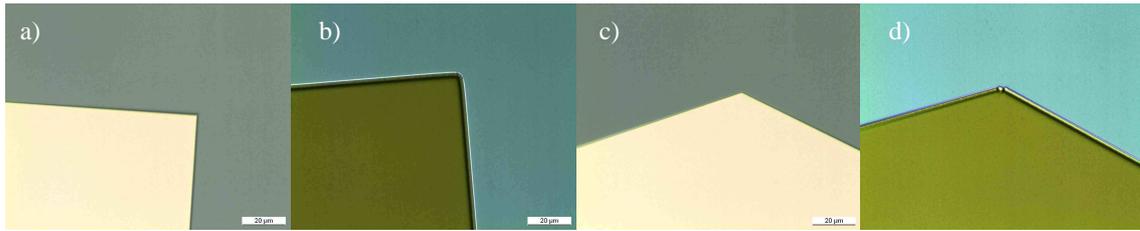


FIG. 2.6 – Détails de coins au microscope optique avec un même grossissement. La barre d'échelle correspond à $20\ \mu\text{m}$. a) Coin d'un carré sur le masque. b) Coin du même carré gravé en PMMA-DCM. c) Coin d'un octogone sur le masque. d) Coin du même octogone gravé en PMMA-DCM.

La gravure par RIE ne permet pas d'atteindre des états de surface compatibles avec l'étude de certains types de cavités tels que les polygones où la qualité des coins est déterminante. La figure 2.5 présente une comparaison entre des coins de cavités correspondantes sur le masque et sur l'échantillon. Elle montre que la perte de résolution provient du procédé de gravure et non de la qualité du masque. Il existe deux types de défauts, soit le coin est lissé (fig. 2.6 (b)), soit il est rentré (fig. 2.6 (d)). L'écriture directe par faisceaux d'ions (FIB) ou d'électrons (e-beam) semble la seule solution envisageable. Des premiers essais concluants ont été réalisés à Graz (Autriche) par Martin Weinberg sur FIB. D'autres ont été entrepris à l'IEMN (Lille, Karine Blary) par e-beam au début de ma thèse et poursuivis grâce à une collaboration avec le LPN (Marcoussis, Christian Ulysse).

Toutefois il faut souligner que beaucoup d'études ne nécessitent qu'une qualité de coin tout à fait accessible à notre technologie. De plus la figure 2.7 montre une rugosité inférieure à la longueur d'onde, ce qui reste compatible avec nos besoins.

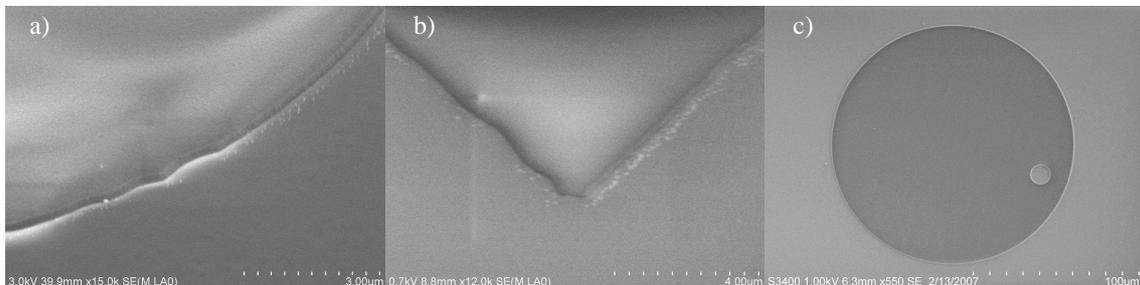


FIG. 2.7 – Détails de nos cavités vues au MEB. Photos a) et b) réalisées par l'équipe de Pr. Harayama (ATR, Japon) et c) par Joseph Lautru (LPQM, Cachan). a) Vue de profil d'un bord de cavité. b) Détail du coin d'un carré. c) Vue globale d'une cavité annulaire avec disques à 200 côtés.

En conclusion, ce procédé de fabrication permet d'obtenir sur un même échantillon une centaine de cavités aux propriétés uniformes, dont les tailles dictées par le masque varient typiquement de 40 à 150 microns.

2.1.3 Dispositif expérimental

Le principe des mesures expérimentales s'énonce simplement : la cavité est pompée par le dessus et l'émission émise par la tranche est détectée dans le plan de la cavité. Le schéma 2.8 décrit la configuration la plus utilisée pendant ma thèse. Elle est due à Daniel

Wright, post-doctorant au LPQM de 2001 à 2003. Dans cette partie nous développerons tout d'abord les contraintes liées au pompage, et décrirons ensuite les différents dispositifs de mesure.

Le pompage optique présente l'avantage de pouvoir modifier aisément la forme et la taille de la zone de gain. Par la suite nous décrirons essentiellement des expériences réalisées en pompage uniforme⁸, c'est à dire que le faisceau incident est beaucoup plus large que la cavité.

Un pompage par laser continu permet de mesurer des propriétés de fluorescence (cf. fig. 2.1 (b)) et de propagation dans les couches (cf. partie 2.3.2). Pour obtenir un effet laser, il faut avoir recours à un laser impulsif de sorte que le milieu amplificateur réagisse rapidement et que les molécules excitées n'aient pas le temps de peupler un état électronique qui les piège (cf. partie 2.3.1). Nous avons utilisé un laser Nd :YAG doublé de la société Ekspla pompé par lampes flashes⁹. Il émet des impulsions à 532 nm¹⁰ de largeur temporelle à mi-hauteur d'environ 30 ps avec un taux de répétition de 10 Hz. L'écart type des fluctuations d'intensité reste inférieur à 2 %, mais certaines impulsions peuvent s'écarter davantage de la moyenne, jusqu'à 10 %, et s'avèrent très gênantes pour certains types de mesure (seuil laser et directions d'émission).

Des essais réalisés avec un laser femto-seconde ont montré que la réduction des durées d'impulsion n'est pas néfaste au fonctionnement de nos micro-lasers. Par contre une durée d'impulsion de l'ordre de la nano-seconde nécessite l'utilisation d'énergies trop importantes qui détériorent le matériau.

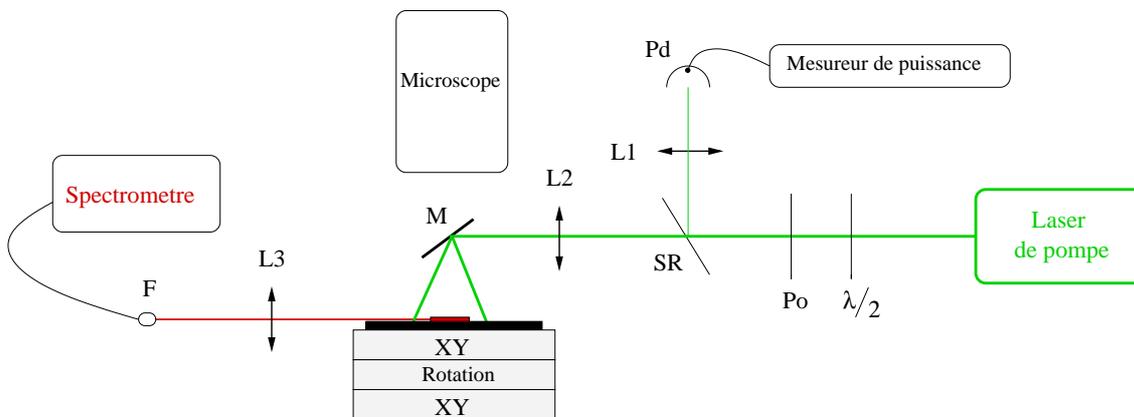


FIG. 2.8 – *Dispositif expérimental le plus utilisé.* Notations : lentilles $L1$, $L2$ et $L3$, miroir M , lame semi-réfléchissante SR , photodiode Pd , polariseur Po , lame demi-onde $\lambda/2$, connecteur de la fibre optique F , platines de translation horizontale XY .

Le dispositif expérimental le plus utilisé est schématisé sur la figure 2.8. L'énergie du faisceau de pompe peut être modifiée en tournant une lame demi-onde $\lambda/2$ placée devant un polariseur Po . Ensuite, pour contrôler cette énergie, une partie du faisceau de pompe

⁸L'annexe H rapporte des expériences réalisées en pompage localisé. D'autres expériences de ce type ont été réalisées par Tahar Ben Messaoud [10].

⁹L'entretien de ce laser constitua un des soucis majeurs car le fonctionnement impulsif était assuré, entre autres, par un absorbant saturable liquide dont la durée de vie n'excédait guère trois semaines. Depuis janvier 2007, ce laser fonctionne avec un absorbant saturable solide

¹⁰Pour tester certains matériaux actifs, il nous est arrivé d'utiliser les faisceaux à 1064 nm et 355 nm, mais en très grande majorité, nous nous sommes contentés du faisceau à 532 nm.

est prélevée grâce à une lame semi-réfléchissante SR¹¹ et focalisée par la lentille L1 sur la photodiode Pd (PD10 Ophir), elle-même reliée à un mesureur de puissance. Son temps de réponse lui permet de mesurer l'énergie d'impulsions indépendantes jusqu'à un taux de répétition de 10 kHz, donc compatible avec notre laser de pompe. Ensuite la lentille L2 contrôle la taille du faisceau sur l'échantillon. Le miroir¹² M permet d'éclairer la cavité par le dessus à partir d'un faisceau horizontal. Pour obtenir un pompage uniforme sur l'ensemble d'une microcavité, le faisceau est rendu beaucoup plus large que lui (diamètre d'environ 600 μm , cf. partie 2.3.2). Les cavités voisines ne peuvent pas perturber l'étude car elles sont espacées d'au moins un millimètre.

La lumière émise par la tranche est collectée au moyen de la lentille L3 et injectée dans une fibre optique (connecteur F). L'angle (vertical et horizontal) de collection est imposé par le diamètre de la lentille et sa distance à la cavité. Il peut être modifié, mais en général il est maintenu aux environs de 10 degrés. La lumière provenant de la fibre optique est analysée par un spectromètre Acton 2500i couplé à une caméra refroidie. Ce dispositif atteint facilement une résolution spectrale de 0.1 nm, mais pour obtenir un étalonnage précis (cf. partie 4.1.1) nous avons dû remplacer notre caméra Andor par une Pixis 100B de chez Princeton instrument (lié à Acton) car le logiciel Andor ne comprenait pas cette fonction. Les platines de translation XY1 permettent de déplacer l'échantillon sous contrôle d'un microscope (plutôt une loupe) et de positionner une cavité au centre du faisceau de pompe (préalablement superposé à l'image du réticule). Le système de détection (L3 F) est fixe. Un plateau de rotation motorisé oriente la cavité dans la direction voulue après que son centre de rotation a été positionné au centre du réticule (donc du faisceau de pompe) par les platines de rotation XY2.

Ce montage relativement simple (pas d'atmosphère d'azote, pas de refroidissement) permet de mener des études sur les spectres, les directions d'émission et l'effet laser.

Avant le début de ma thèse, Daniel Wright avait adapté ce montage pour imager le flanc de la cavité, suivant un schéma dû à l'équipe du Professeur R. K. Chang (Université de Yale, USA). Nous l'avons utilisé pendant quelques mois. Des exemples de données expérimentales réalisées dans cette configuration sont présentées dans l'annexe G, auxquels il faut ajouter les mesures de seuil laser décrites dans la partie 2.3.2.

Un autre dispositif très prometteur repose sur l'utilisation d'un microscope dont l'objectif focalise le faisceau de pompe et collecte le signal émis, dirigé ensuite vers une matrice de détecteurs. Le prêt d'un tel appareil par Sophie Brasselet nous a permis de réaliser quelques expériences préliminaires décrites dans l'annexe H.

Les expériences se présentent donc selon un principe aisément modulable, d'autant plus qu'elles ne nécessitent ni refroidissement, ni atmosphère contrôlée¹³. Certaines améliorations plus coûteuses sont en attente de financement.

¹¹Il s'agit d'une simple lame de verre.

¹²Pour limiter les contraintes d'encombrement, il s'agit d'un morceau de silicium recouvert d'une couche d'aluminium.

¹³Certains auteurs ont rapporté que l'utilisation du colorant laser sous flux d'azote augmente son temps de vie [72, 123]. Dans la mesure où celui-ci ne contraint pas nos expériences, nous n'avons pas ressenti la nécessité d'avoir recours à ce type de dispositif.

2.2 Cavité passive

La motivation première de nos travaux est liée au caractère original des microrésonateurs diélectrique en tant que système passif ouvert. Suivant le programme proposé au chapitre 1, nous nous attacherons à décrire dans cette partie le cadre théorique des études développées aux chapitres suivants. Le traitement actif lié à l'effet laser sera abordé à la partie 2.3. Il faut préciser qu'un modèle de cavité passive permet d'obtenir une vue d'ensemble cohérente et nous a apporté une compréhension suffisante pour prédire la plupart des phénomènes observés.

Cette partie rapporte les connaissances disponibles au début de ma thèse sur nos microcavités. La première sous-partie propose une modélisation du caractère ouvert, électromagnétique et quasi bidimensionnel de ces résonateurs diélectriques. Ensuite deux exemples sont proposés, le disque et le stade, archétypes de systèmes respectivement intégrable et chaotique. Pour finir, nous décrivons les simulations numériques de nature géométrique et ondulatoire que nous utiliserons par la suite.

2.2.1 Modélisation

Etats quasi-stationnaires

Nous définissons un système fermé comme un système sans perte : si une intensité I est déposée dans le système à l'instant $t = 0$, elle y reste conservée à tous les instants ultérieurs. Les cavités micro-ondes supra-conductrices en sont un bon exemple. Par comparaison, les résonateurs diélectriques sont ouverts puisque la lumière finit par s'échapper de la cavité. La structure diélectrique planaire la mieux confinante est le disque. Celui-ci n'est toutefois pas exempt de fuites. Nous verrons à la partie 2.2.2 qu'elles apparaissent sous forme d'effet tunnel occasionné par la courbure de la frontière.

Pour un système diélectrique, il n'existe pas d'état lié¹⁴. La description standard la mieux adaptée est celle des processus de diffusion (cf. par exemple [62]). La structure diélectrique est analogue à un puits de potentiel et le champ électromagnétique à une particule. Considérons un exemple unidimensionnel. Des équations de Maxwell dérive l'équation de propagation qui, en régime harmonique (transformée de Fourier temporelle), devient l'équation de Helmholtz (scalaire dans le cas 1D) :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + n^2(x)k^2 \right) \psi = 0$$

où ψ représente le champ électrique ou magnétique, $n(x)$ l'indice de réfraction et $k = \omega/c$ le nombre d'onde dans le vide. La dépendance temporelle est alors de la forme $e^{\pm ikt}$ avec $c = 1$. Cette équation s'écrit aussi

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2(1 - n^2(x)) \right) \psi = k^2\psi$$

et prend alors la forme d'une équation de Schrödinger¹⁵ stationnaire d'énergie $\epsilon = k^2$. Il apparaît l'analogie d'un potentiel

$$V(x) = k^2(1 - n^2(x))$$

¹⁴Tout au moins, nous ne connaissons aucune structure qui en possède.

¹⁵avec $\hbar^2/2m = 1$

Comme n est supérieur à 1 et k réel, ce potentiel est toujours négatif, donc attractif. A l'infini, l'indice tend vers 1 (air environnant) et le potentiel s'annule. La structure diélectrique est donc bien confinante. Toutefois, il faut rester prudent car l'analogie avec un système quantique n'est pas complète : le potentiel dépend de l'énergie. Alors que pour une particule, un potentiel négatif à une dimension qui tend vers zéro à l'infini induit au moins un état lié [62], pour le champ électromagnétique, il n'en existe aucun.

Malgré cette différence, il existe beaucoup de similitudes entre le champ électromagnétique et une particule, en particulier le comportement classique $\hbar = 0$ ou $k = \infty$. Dans un cas l'onde s'interprète en termes de rayons et dans l'autre comme une particule ponctuelle. La transition de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique ou de la physique quantique à la physique classique s'effectue à la limite dite "semi-classique" $\hbar \rightarrow 0$ ou $k \rightarrow \infty$. Ce passage est décrit avec des techniques équivalentes : la théorie WKB pour une particule [23, 62] et la méthode eikonale pour la lumière [20]. Pour un système fermé comme une cavité micro-onde supraconductrice, l'analogie formelle est exacte. Par extension, les résonateurs diélectriques constituent un analogue d'un système quantique ouvert. La question fondamentale du chaos quantique reste identique : comment les caractéristiques classiques gouvernent-elles le système ondulatoire ?

Puisqu'une structure diélectrique ne possède que des états libres, nous allons utiliser la théorie de la diffusion. L'équation aux valeurs propres $H\psi = \epsilon\psi$ possède un spectre continu d'énergie réelle et les fonctions propres associées sont orthogonales¹⁶. Reprenons le cas unidimensionnel, les fonctions d'onde peuvent s'écrire

$$\psi_k(x) = e^{-ikx} + S(k)e^{ikx} \quad (2.1)$$

où le nombre d'onde k est réel ($k = \sqrt{\epsilon}$). Nous choisissons la convention où e^{+ikx} représente une onde se propageant dans la direction des x positifs¹⁷. L'amplitude réfléchi par le potentiel, $S(k)$, est appelée matrice de diffusion¹⁸ [62]. Avec cette base, il est possible de représenter l'évolution d'un champ initial quelconque $\psi^0(x)$ (par exemple un champ uniforme sur toute la cavité) en considérant sa projection sur chacune des ψ_k notée $c(k) = \langle \psi_k | \psi^0 \rangle$. Dans un cadre quantique, l'évolution temporelle s'écrit $e^{-i\epsilon t}$. D'après ce qui précède, pour un champ électromagnétique, elle devient¹⁹ e^{-ikt} :

$$\psi(x, t) = \int c(k) e^{-ikt} \psi_k(x) dk = \int f(k) e^{-ikt} dk$$

où, pour alléger les notations, on a remplacé $c(k)\psi_k$ par $f(k)$. Pour obtenir l'évolution temporelle de la fonction initiale, il faut calculer cette intégrale complexe. La méthode standard consiste à chercher les pôles de f notés $p_j = \alpha_j + i\beta_j$. Compte-tenu du choix de signe dans e^{-ikt} et de $k > 0$, le contour doit être fermé vers le bas pour assurer la convergence à l'infini. L'intégrale s'exprime donc comme une somme sur les résidus de f pour les pôles à partie imaginaire négative à laquelle s'ajoutent éventuellement des termes correctifs provenant du contour ou de singularités plus compliquées de f :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \text{res } f|_{p_j} e^{-i\alpha_j t} e^{-|\beta_j|t} + \text{corrections} \quad (2.2)$$

¹⁶En fait elles vérifient la relation d'orthogonalité $\int n^2(x)\psi_i^*(x)\psi_j(x)dx = \delta_{ij}$.

¹⁷Les fonctions propres sont réelles, mais par commodité, nous utilisons l'écriture standard en exponentielles complexes.

¹⁸Cette définition est correcte à une dimension et doit être modifiée pour un problème de diffusion dans le plan ou l'espace.

¹⁹Le signe $-$ provient de la convention en e^{+ikx} . Nous avons opté pour ce choix de signe, le seul utilisé dans le cadre de la physique quantique.

L'évolution temporelle est donc imposée par le pôle dont la partie imaginaire est la plus proche de l'axe réel. Avec la convention opposée sur les signes, le contour doit englober les pôles à partie imaginaire positive, ce qui conduit à la même expression (2.2). La transformée de Fourier temporelle renseigne sur le contenu fréquentiel :

$$\psi(x, \omega) = \sum \gamma_j \frac{1}{\beta_j^2 + (\omega - \alpha_j)^2} \quad (2.3)$$

Chacun des pôles $p_j = \alpha_j + i\beta_j$ est donc à l'origine d'une résonance qui s'exprime sous forme de lorentzienne. La position en fréquence est donnée par la partie réelle α_j et la partie imaginaire β_j correspond à la largeur du pic. Ces pôles sont ceux de $f(k) = \langle \psi_k | \psi^0 \rangle \psi_k$. Comme ψ^0 est indépendante de k , ils ne peuvent provenir que de S et S^* . Donc en fait, les pôles de la matrice de diffusion correspondent aux résonances du système. Ce résultat est généralisable aux systèmes à deux et trois dimensions [62]. Nous l'utiliserons à la partie 2.2.4 pour justifier les simulations ondulatoires et y reviendrons à la partie 4.1.2 en lien avec les orbites périodiques.

Notre travail repose sur l'étude des p_j et des répartitions spatiales d'intensité associées. Aussi notre fonction ψ_0 est-elle uniforme sur l'ensemble de la cavité et nulle à l'extérieur²⁰. Elle permet ainsi de ne privilégier a priori aucune résonance. Pour la même raison, nos expériences sur les micro-lasers sont réalisées avec un pompage uniforme. Une analyse spectrale révélerait une série de pics lorentziens, conformément à l'expression (2.3) et l'observation de la cavité avec un filtre fin centré en α_j ferait apparaître une distribution d'intensité particulière. En effet, d'après l'expression (2.2), une amplitude $\varphi_j(x)$ est associée à chaque pôle²¹ p_j :

$$\varphi_j(x) \propto \text{res } f|_{p_j} = \lim_{p \rightarrow p_j} f(p)(p - p_j) = \lim_{p \rightarrow p_j} \langle \psi_p | \psi^0 \rangle \psi_p(x)(p - p_j)$$

Par la suite, ces φ_j seront appelées fonctions d'onde des résonances. Elles n'ont aucune raison d'être réelles ou orthogonales entre elles.

Cavités diélectriques

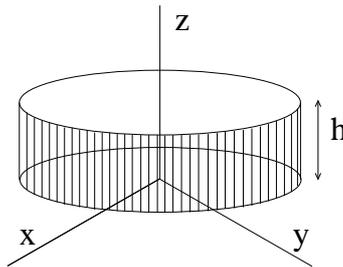


FIG. 2.9 – Schéma de principe du système.

L'étude ondulatoire de nos cavités passives découle de la résolution des équations de Maxwell pour une structure diélectrique d'indice n_{gl} d'épaisseur h , reposant sur un substrat d'indice n_1 et plongée dans l'air d'indice $n_2 = 1$. Les notations sont résumées sur la figure

²⁰Les méthodes numériques FDTD (Finite-Difference Time-Domain) reposent directement sur ce principe [43]

²¹On se restreint aux pôles simples.

2.9. Un traitement stationnaire passe par les équations de propagation, équivalentes pour \vec{E} et \vec{B} :

$$(\Delta + n_i^2 k^2) \vec{E}, \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

où n_i correspond à l'indice de réfraction du milieu considéré. Ces équations sont couplées par les conditions aux bords de la cavité : continuité pour les composantes tangentielles \vec{E}_{\parallel} et \vec{B}_{\parallel} et pour les composantes normales $n_i^2 E_{\perp}$ et B_{\perp} . Ce problème serait incomplet si nous ne précisions pas les conditions à l'infini. Nous cherchons les résonances du système, c'est à dire les pôles de S . D'après l'expression (2.1), seul subsiste le terme en e^{ikx} correspondant à l'onde sortante. Ceci est en conformité avec le modèle développé au paragraphe précédent où de l'énergie est injectée dans la cavité puis en sort organisée en résonances. Nous imposons donc un comportement à l'infini en e^{ikr} . Dans ce cas, les nombres d'onde solutions de ce problème correspondent aux pôles de la matrice S et deviennent alors complexes. De même, les champs \vec{E} et \vec{B} associés sont les équivalents des fonctions d'onde φ_j des résonances.

Ce problème se révèle bien compliqué car il couple deux quantités vectorielles, \vec{E} et \vec{B} , via les conditions aux bords. A l'heure actuelle, les seuls systèmes tridimensionnels exactement solubles sont la sphère diélectrique [6, 114] et le cylindre infini à base circulaire [99]. Nous devons donc avoir recours à une approximation. Celle que nous avons utilisée, la plus courante, consiste à séparer le champ en deux polarisations indépendantes : la polarisation TM où \vec{E} est vertical et \vec{B} dans le plan (x,y) et la polarisation TE où \vec{E} et \vec{B} inversent leur rôle²². Pour justifier cette hypothèse, il existe deux approches complémentaires :

- (a) On décompose les champs par transformée de Fourier dans la direction z . La dépendance en z est donc de la forme e^{iqz} . Les équations de Maxwell et les conditions aux bords conduisent alors à des composantes $E_z^{(q)}$ et $B_z^{(q)}$ découplées si et seulement si $q = 0$. Ceci implique que notre approximation en polarisations TE et TM indépendantes n'est valable que si les champs sont indépendants de z . Ce modèle serait correct si le résonateur était un cylindre formé sur la cavité et infini dans la direction z . Il est d'autant moins valable que l'épaisseur de nos micro-résonateurs est comparable à la longueur d'onde.
- (b) On décompose les champs par transformée de Fourier dans le plan (x,y) , de nombre d'onde associé $p^2 = p_x^2 + p_y^2$. La dépendance des champs selon z est alors imposée par l'équation :

$$(\partial_z^2 + n_i^2 k^2 - p^2) \vec{\Phi} = 0 \quad (2.5)$$

où $\vec{\Phi}$ représente \vec{E} ou \vec{B} . De même qu'en (a), les conditions aux bords de la cavité imposent une contradiction. Ce modèle serait correct pour des couches infinies dans les directions x et y . Il n'est pas valable puisque toute la physique qui nous intéresse dépend justement de la forme de la cavité. Toutefois, dans la mesure où les dimensions transverses sont beaucoup plus grandes que l'épaisseur (facteur ~ 100), nous utiliserons cette approximation qui a fait ces preuves par ailleurs [113, 117].

Nous retenons donc l'approximation de couches infinies dans les directions transverses qui permet de découpler le problème en l'étude distincte des polarisations TM et TE. Dans ce cadre, le champ \vec{E} (TM) ou \vec{B} (TE) ne possède qu'une composante non nulle selon l'axe z et s'écrit de la forme $\Phi = \varphi(z)\psi(x,y)$ où $\varphi(z)$ vérifie l'équation (2.5). Le paragraphe suivant indique comment prendre en compte la direction verticale par un indice effectif.

²²Pour certains auteurs, ces appellations TE et TM sont différentes.

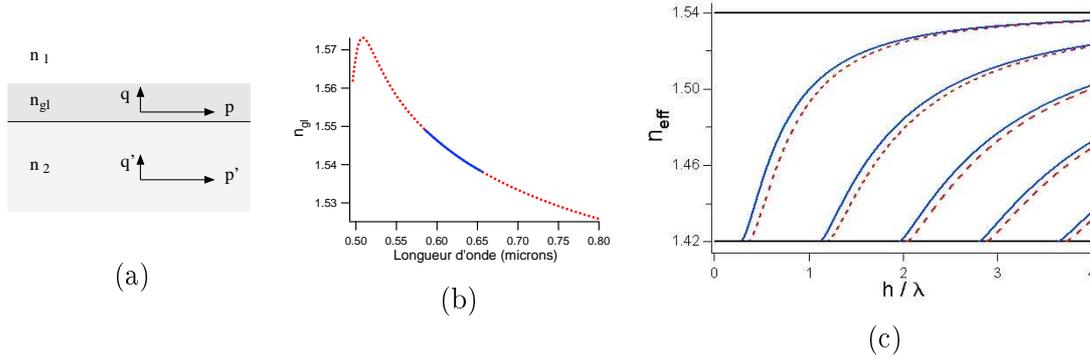


FIG. 2.10 – a) Notations pour le modèle d'indice effectif. b) Indice de la couche active en fonction de la longueur d'onde, coefficient de corrélation pour la régression 0.9988. Superposition en trait continu bleu de l'ajustement $n_{gl} = 1.86 - 0.87\lambda + 0.58\lambda^2$ (λ en microns). c) Indice effectif à indices de couches constants. l augmente de la gauche vers la droite. La polarisation TE est représentée en trait bleu continu et la polarisation TM en pointillés rouges.

Indice effectif

Nous souhaitons résoudre l'équation (2.5) pour les polarisations TM ou TE :

$$(\partial_z^2 + n_i^2 k^2 - p_i^2) \varphi = 0$$

L'indice i précise le milieu traversé. Des expériences et des simulations numériques ont montré qu'une épaisseur de SOG ou de silice de 2 microns est suffisante pour éviter les fuites vers le silicium. Nous allons donc considérer seulement trois milieux : la couche guidante de PMMA-DCM d'indice $n_{gl} = 1.54$ et d'épaisseur h entourée par deux milieux infinis, le SOG $n_1 = 1.42$ et l'air $n_2 = 1$. Les notations sont résumées à la figure 2.10 (a). A l'intérieur de la couche guidante, φ est alors de la forme $\varphi(z) = \alpha e^{iqz}$. Après un aller-retour et réflexion sur chacune des interfaces, la condition de cohérence (retour en phase) impose

$$r_1 r_2 e^{2iqh} = 1 \quad (2.6)$$

r_1 et r_2 sont les coefficients de réflexion en amplitude aux interfaces entre la couche guidante et les milieux externes. Ils dépendent de la polarisation considérée. Une fois déterminés les nombres d'onde verticaux q qui vérifient cette équation, on peut les réinjecter dans l'équation de propagation (2.4) qui devient alors

$$(\Delta_{xy} + n_{eff}^2 k^2) \psi = 0 \quad (2.7)$$

avec $n_{eff}^2 k^2 = n_{gl}^2 k^2 - q^2$. Il s'agit maintenant d'une équation de propagation à deux dimensions dans le plan (x, y) . Seul l'indice effectif n_{eff} prend en compte la dimension verticale.

Pour déterminer n_{eff} , il faut résoudre l'équation (2.6). Les coefficients de réflexion r_1 et r_2 dépendent de la polarisation choisie TE ou TM et de l'angle d'incidence défini par p et q (cf. figure 2.10 (a) pour les notations). Si on considère la réflexion d'une onde plane d'un milieu d'indice n_{gl} (propagation selon (p, q)) vers un milieu d'indice²³ n' (propagation

²³ n' représente n_1 ou n_2 suivant l'interface considérée.

selon (p', q') , les coefficients de Fresnel sont donnés par [56] :

$$r_{TE} = \frac{q - q'}{q + q'} \quad r_{TM} = \frac{n'^2 q - n_{gl}^2 q'}{n'^2 q + n_{gl}^2 q'} \quad (2.8)$$

On cherche à relier q et q' aux différents indices : $p^2 + q^2 = n_{gl}^2 k^2$, $p'^2 + q'^2 = n'^2 k^2$ et $n_{eff}^2 k^2 = n_{gl}^2 k^2 - q^2$. La condition de continuité à l'interface conduit à $p = p'$, ce qui implique $q'^2 = n'^2 k^2 - p^2$. Comme on cherche une onde guidée, donc une réflexion totale, il faut que q' soit imaginaire positif : $q' = i\sqrt{n'^2 k^2 - p^2}$. Les coefficients de réflexion deviennent alors des déphasages purs et s'écrivent sous la forme $r = e^{-2i\varphi}$ où

$$\tan \varphi = \eta \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n'^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}}$$

où $\eta = 1$ en polarisation TM et $\eta = n_{gl}^2/n'^2$ en polarisation TE. En reportant l'ensemble dans l'équation (2.6), on obtient l'équation vérifiée par l'indice effectif :

$$kh\sqrt{n^2 - n_{eff}^2} = \tan^{-1} \left(\eta \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}} \right) + \tan^{-1} \left(\eta \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_2^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}} \right) + l\pi \quad l \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

Il dépend de l'épaisseur h , du nombre d'onde dans le vide k et des indices des trois couches. Si un des indices externes, n_1 ou n_2 , est supérieur à celui de la couche centrale n , il n'existe pas de solution réelle, la lumière n'est pas confinée. Si les indices des couches externes étaient identiques et inférieurs à n , il existerait toujours au moins un mode guidé, quelle que soit l'épaisseur h . Mais dans notre cas asymétrique ($n_1 \neq n_2$), une coupure inférieure apparaît h_{min} . Elle diffère légèrement selon la polarisation : pour $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, $h_{min}^{TE} = 0.17 \mu\text{m}$ et $h_{min}^{TM} = 0.21 \mu\text{m}$. Lorsque l'épaisseur augmente, d'autres excitations verticales surviennent ($l = 1, 2, \dots$). Par exemple, l'apparition du deuxième mode excité TE pour $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ correspond à une épaisseur de $h = 0.67 \mu\text{m}$. La figure 2.10 (b) représente les branches des modes en fonction du paramètre sans dimension kh . Les calculs sont effectués numériquement par dichotomie. Lors de la fabrication des micro-lasers, pour assurer un fonctionnement vertical monomode (un mode TE et un mode TM), l'épaisseur de la couche PMMA-DCM doit être comprise entre $h = 0.3 \mu\text{m}$ et $h = 0.65 \mu\text{m}$. Pour une couche d'épaisseur $0.6 \mu\text{m}$ et des longueurs d'onde comprises entre $0.6 \mu\text{m}$ et $0.63 \mu\text{m}$, l'indice effectif TE vaut 1.498 ± 0.002 et l'indice effectif TM 1.491 ± 0.002 . Nous retiendrons un indice effectif moyen²⁴ de 1.50 ± 0.01 .

Les indices des couches ont été déduits par le logiciel Winelli II à partir de mesures réalisées avec un ellipsomètre Sopra GES 5. Sur la plage de longueurs d'onde qui nous concerne, entre 600 et 630 nm, la dispersion du SOG est quasi-nulle et celle du PMMA-DCM reste très faible. Si elles peuvent être négligées en général, elles jouent un rôle déterminant pour l'étude des spectres comme expliqué à la partie 4.1.1.

Conclusion Voici la description retenue pour nos résonateurs diélectriques passifs. Le champ électromagnétique se décompose en polarisations TE et TM indépendantes. La composante verticale (E en TM et B en TE) notée ψ vérifie l'équation dans le plan (2.7).

²⁴Lorsque la couche inférieure de SOG est remplacée par de la silice d'indice 1.45, les indices effectifs TE et TM sont un peu plus élevés, mais l'indice effectif moyen demeure 1.50 ± 0.01 .

L'indice effectif défini par l'équation (2.9) permet de prendre en compte la dimension verticale. ψ est continue sur les parois verticales de la cavité ainsi que $\eta \partial_\nu \psi$ où $\eta = 1$ en polarisation TM et $\eta = 1/n_i^2$ en polarisation TE et ν représente la coordonnée normale. Le champ à l'infini est de la forme e^{ikr} et représente une onde sortante. Ainsi les nombres d'onde solutions de l'équation de propagation (2.7) et de ces conditions au limite correspondent aux résonances, c'est à dire aux pôles de la matrice S . D'après l'expression (2.2), leur partie imaginaire quantifie les pertes du modes, alors que leur partie réelle possède un contenu analogue au nombre d'onde standard.

Cette approche doit être utilisée avec précaution. D'une part les distributions ψ solutions de l'équation (2.7) et des conditions aux limites sont a priori complexes et non orthogonales. D'autre part cette décomposition en polarisations TE et TM ne devrait s'appliquer que pour des couches infinies dans les directions x et y . Les parois de la cavité s'avèrent donc délicates à traiter. Par exemple, on peut se demander quel indice choisir pour la condition de continuité en polarisation TE : l'indice de la couche n_{gl} ou l'indice effectif n_{eff} . Nous verrons par la suite que les résultats expérimentaux diffèrent peu des prédictions réalisées avec ce modèle, ce qui lui confère une certaine légitimité. Toutefois, nous aurons parfois l'occasion d'attirer l'attention sur une déviation due aux effets tridimensionnels (eg. partie 4.1.2).

2.2.2 Etude d'un cas intégrable : le disque

A l'heure actuelle, le disque est la seule forme connue où le problème décrit ci-dessus est intégrable. Il présente donc le double avantage de pouvoir exprimer analytiquement le spectre et les fonctions d'onde et de permettre un traitement perturbatif au voisinage de cette géométrie (cf. partie 3.2.2). La dérivation des nombres d'onde et des états quasi-stationnaires, très standard, se retrouve dans la littérature (cf. par exemple [42, 82]). Nous la rapportons ici pour préciser les notations et les approximations.

Nous cherchons à résoudre l'équation (2.7) avec les conditions aux bords TE ou TM pour un disque de rayon R . Comme le système est séparable, la fonction d'onde s'écrit $\Psi(r, \theta) = \psi(r) \varphi(\theta)$. En utilisant l'opérateur laplacien en coordonnées polaires $\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \Psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$, l'équation de Helmholtz devient

$$\frac{r}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + r^2 n_i^2 k^2 = 0$$

Soit

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = K$$

où K est une constante a priori complexe. Comme nous avons choisi d'étudier un problème quasi-stationnaire, φ doit être périodique de période 2π . Cette condition impose $K = -m^2$ où m est un entier relatif.

$$\varphi(\theta) = A e^{im\theta} + B e^{-im\theta}$$

Pour $m > 0$, $e^{im\theta}$ correspond à une onde qui se propage dans le sens trigonométrique et $e^{-im\theta}$ dans le sens antitrigonométrique. La partie radiale de la fonction d'onde vérifie alors une équation de Bessel

$$\psi_r'' + \frac{1}{r} \psi_r' + (n_i^2 k^2 - \frac{m^2}{r^2}) \psi_r = 0 \quad (2.10)$$

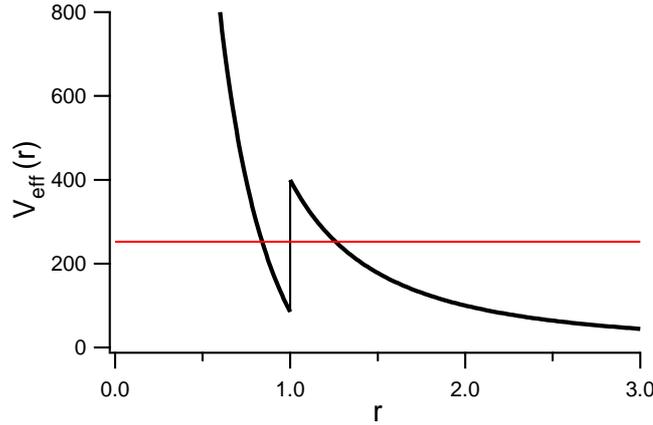


FIG. 2.11 – Potentiel effectif pour un disque diélectrique de rayon $R = 1$ et d'indice $n = 1.5$ dans l'air, pour l'état $m = 20$ et $p = 0$, soit $k_{mp}R = 15.87$. La ligne horizontale est placée à l'ordonnée k^2 .

Suivant l'analogie développée en 2.2.1, l'équation de Bessel (2.10) peut être interprétée comme une équation de Schrödinger stationnaire²⁵ utiliser le changement de d'énergie $\epsilon = k^2$, avec le potentiel effectif²⁶

$$V_{eff}(r) = k^2(1 - n_i^2) + \frac{m^2}{r^2}$$

Il est tracé en fonction de r sur la figure 2.11. Il se présente sous forme d'un puits, donc il est susceptible d'accueillir des états confinés. L'énergie minimale admise vérifie $k_{min}^2 = V_{eff}(R^-)$, soit $k_{min}R = m/n > 0$. Or le potentiel tend vers zéro à l'infini, donc il n'existe aucun état complètement confiné. Tous les états dans le puits s'échappent par effet tunnel. Les états ne sont plus du tout confinés s'ils se trouvent au-dessus du puits, c'est à dire si $kR > m$. C'est pourquoi nous appelons "états quasi-stationnaires", les états qui vérifient

$$\frac{m}{n} < k < m$$

L'équation de Bessel (2.10) possède deux solutions : $J_m(n_i k r)$ et $Y_m(n_i k r)$. La solution complète $\psi(r)$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces fonctions. Mais Y_m diverge en $r = 0$ et la fonction d'onde doit rester définie au centre du disque, donc on ne conserve que J , soit

$$\Psi(r, \theta) = A J_m(n k r) e^{\pm i m \theta} \quad r < R$$

A l'extérieur de la cavité, cet argument de divergence n'intervient pas. En revanche il faut assurer un comportement en $e^{i k r}$ à l'infini comme discuté au paragraphe 2.2.1. Pour $x \gg 1$, voici les comportements asymptotiques des fonctions de Bessel de premier et deuxième types [8] :

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

²⁵Pour ramener l'équation (2.10) à une forme plus standard de l'équation de Schrödinger sans terme en d/dr , on peut utiliser le changement de variable $\xi = \ln(kr)$ (cf. [82] page 168 pour une discussion détaillée).

²⁶Nous rappelons qu'il faut manier ce potentiel avec prudence car il dépend de l'énergie.

Pour obtenir le comportement asymptotique souhaité, il faut donc utiliser la combinaison linéaire $J_m + iY_m$ qui correspond à la définition de la fonction de Hankel de premier type $H_m^{(1)}$. La fonction d'onde à l'extérieur s'écrit alors

$$\Psi(r, \theta) = B H_m^{(1)}(kr) e^{\pm im\theta} \quad R < r$$

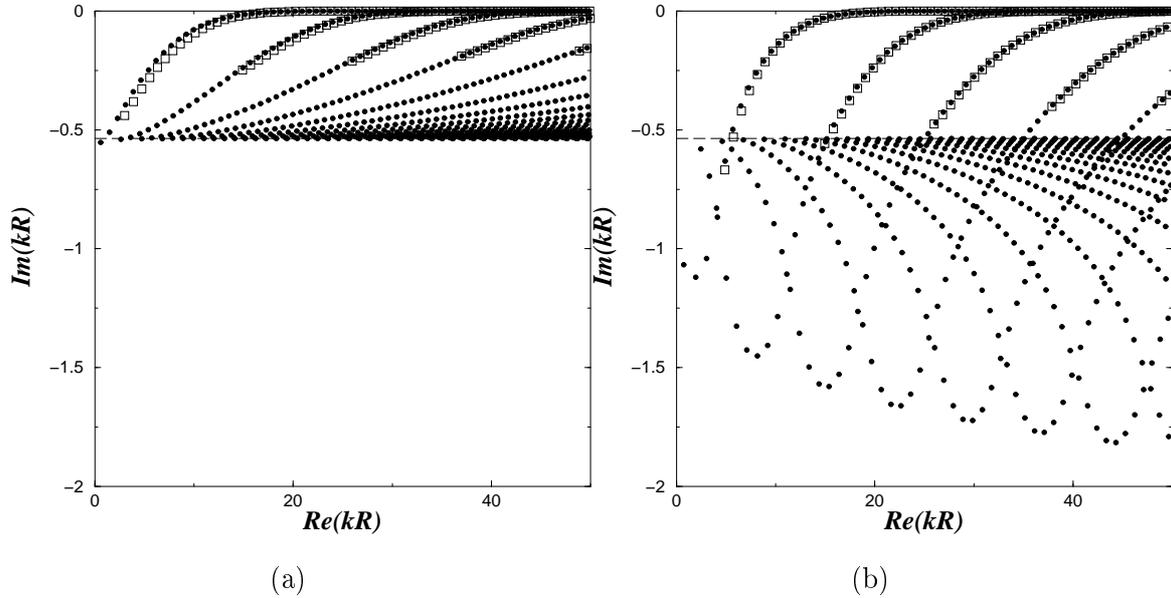


FIG. 2.12 – Spectres du disque diélectrique d'indice $n = 1.5$ dans l'air. Les disques noirs correspondent à la résolution numérique de l'équation (2.10) et les carrés évidés à l'approximation semi-classique dictée par l'équation (2.13) pour la partie réelle et l'équation (4.17) pour la partie imaginaire. (a) Polarisation TM. (b) Polarisation TE. Les lignes horizontales à $y = -0.54$ correspondent aux pertes du diamètre.

La quantification du vecteur d'onde k est déterminée par les conditions au bord qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \Psi|_{R^-} &= \Psi|_{R^+} & \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{R^-} &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{R^+} & \text{Polarisation TM} \\ \Psi|_{R^-} &= \Psi|_{R^+} & \frac{1}{n^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{R^-} &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{R^+} & \text{Polarisation TE} \end{aligned}$$

La continuité de Ψ valable pour tout θ assure l'égalité entre l'entier m à l'intérieur et à l'extérieur du disque, ce que nous avons implicitement supposé. Elle permet aussi d'exprimer B en fonction de A : $B = A J_m(nkR)/H_m^{(1)}(kR)$.

Quant à la continuité de la dérivée normale de Ψ , elle permet de définir le nombre d'onde k :

$$\frac{n J_m'}{\nu J_m}(nkR) = \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(kR) \quad (2.11)$$

où ν vaut 1 en polarisation TM et n^2 en polarisation TE. Cette équation ne possède pas de solution réelle, k est nécessairement complexe, de la forme $k = x + iy$ avec x réel positif et y réel négatif. Il s'agit bien de modes quasi-stationnaires comme définis au paragraphe 2.2.1. Pour chaque valeur de m , il peut exister plusieurs valeurs de k vérifiant (2.11), aussi

les résonances sont-elles identifiées par deux indices, m et p . Le nombre quantique p correspond au nombre d'excitations radiales.

Les disques noirs sur les figures 2.12 indiquent les solutions de l'équation (2.11) calculées numériquement. On constate que les parties imaginaires en polarisation TM sont minorées par celles du diamètre²⁷ indiqués par des lignes horizontales en pointillés. En fait il existe des résonances beaucoup moins confinées, même en polarisation TM. Elles sont décrites dans [42].

Pour obtenir des expressions analytiques des résonances utilisables par la suite (cf. eg. partie 4.1.2), nous devons procéder à quelques approximations. Tout d'abord, nous supposons $y \ll 1$, ce qui est réaliste pour les états bien confinés à la limite semi-classique. Par exemple pour $m = 40$ et $p = 0$, $kR = 30.1 - 1.8 \cdot 10^{-5} i$. On peut alors déduire de l'équation (2.11) une expression de y en fonction de x

$$y = -\frac{1}{n^2 - 1} \frac{2}{\pi x} \frac{1}{|H_m(x)|^2} \quad (2.12)$$

Pour obtenir cette expression, on a développé l'équation (2.11) autour de x pour $y \ll 1$, puis séparé les contributions réelles (termes en J) de celles imaginaires (dues à y et $H^{(1)}$) et enfin simplifié l'ensemble grâce au wronskien de J et Y . L'expression (4.17) suppose seulement $y \ll 1$. Il est possible de la retrouver grâce à la conservation du courant, ce qui identifie bien la partie imaginaire du nombre d'onde y à des pertes radiatives. La démonstration est reportée à l'annexe A.

En ce qui concerne la partie réelle x , nous allons nous intéresser aux états quasi-stationnaires (ie. $\frac{m}{n} < k < m$) pas trop près du fond du puits (sinon cf. [42]), états que nous étudierons à la partie 4.1.2. Lorsqu'on se place à la limite semi-classique $x \gg 1$, on peut utiliser les développements de Langer des fonctions de Bessel [8],

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(x^2 - m^2)^{1/4}} \cos\left(\sqrt{x^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{x} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_m^{(1)}(x) &= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\sqrt{m^2 - x^2}}}{(m^2 - x^2)^{1/4}} \left(\frac{m}{x} + \sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)^2 - 1}\right)^m \end{aligned}$$

qui, une fois injectés dans l'équation (2.11), conduisent à

$$\sqrt{n^2 x^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{nx} - \frac{\pi}{4} = \arctan \nu \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2 x^2 - m^2}} + p\pi \quad (2.13)$$

où ν vaut toujours 1 en polarisation TM et n^2 en polarisation TE. L'entier p correspond au nombre quantique radial.

Conclusion Les résonances d'un disque diélectrique d'indice n plongé dans l'air sont données par l'équation (2.11). Nous en avons dérivé l'expression (4.17) pour la partie imaginaire du nombre d'onde, valable pour $y \ll 1$, et l'expression (2.13) pour sa partie réelle, valable à la limite semi-classique pour les états quasi-stationnaires.

²⁷Pour les estimer, on écrit la condition de quantification sur un tour : $r^2 e^{ik4R} = 1$. Pour le diamètre, $r = (n-1)/(n+1)$, ce qui conduit à

$$yR = \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

2.2.3 Etude d'un cas chaotique : le stade

Un système classique est généralement défini comme chaotique en relation avec l'ergodicité, c'est à dire les propriétés aux temps longs. Dans le cas des systèmes ouverts comme les cavités diélectriques, cette notion perd de son sens et il est préférable d'utiliser une caractérisation par les orbites périodiques. Une cavité sera dite chaotique si toutes ses orbites périodiques sont instables, sauf éventuellement quelques unes marginales.

La stabilité des orbites périodiques s'évalue grâce à la matrice de monodromie \mathcal{M} aussi appelée matrice de Floquet ou matrice de rayons (cf. [23, 110] pour l'aspect système dynamique et [105] pour l'approche par l'optique géométrique). On considère un petit déplacement $d\vec{r}$ dans l'espace des phases au voisinage d'un point de l'orbite x_0 (cf. notations fig. 2.13). Après un tour en suivant la dynamique du système, le déplacement est devenu $d\vec{r}'$. La matrice de monodromie relie à l'ordre linéaire $d\vec{r}'$ à $d\vec{r}$:

$$d\vec{r}' = \mathcal{M} d\vec{r}$$

Pour les billards plans, $d\vec{r}$ correspond à un petit déplacement du point d'impact et de l'angle d'incidence. On peut montrer que la matrice de monodromie pour un billard plan s'obtient en multipliant une combinaison de matrices élémentaires 2×2 , $\Pi(\mathcal{L})$ et $R(\chi)$, définies par

$$\Pi(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho \cos(\chi)} & 1 \end{pmatrix}$$

$\Pi(\mathcal{L})$ correspond à la matrice de monodromie pour une propagation sur une distance \mathcal{L} et $R(\chi)$ après une réflexion sur une surface de rayon de courbure ρ avec un angle d'incidence χ . Considérons comme exemple le cas du rectangle dans le stade (cf. fig. 2.14 (a)). La matrice de monodromie comptée à partir du point bleu s'écrit

$$\mathcal{M} = \Pi(l_1)R\left(\frac{\pi}{4}\right)\Pi(l_2)R\left(\frac{\pi}{4}\right)\Pi(l_1)R\left(\frac{\pi}{4}\right)\Pi(l_2)R\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

où l_1 représente la longueur du rectangle et l_2 sa largeur. Cette matrice de déterminant 1 (système hamiltonien) possède deux valeurs propres Λ et Λ^{-1} définies comme les racines du polynôme caractéristique

$$P(|\det(\mathcal{M} - \Lambda I)|) = \Lambda^2 - \Lambda \operatorname{tr} \mathcal{M} + 1$$

de discriminant

$$\Delta = (\operatorname{tr} \mathcal{M})^2 - 4$$

Si $\Delta < 0$, ie. $|\operatorname{tr} \mathcal{M}| < 2$, alors les valeurs propres Λ et Λ^{-1} sont complexes conjugués et l'orbite est dite stable. Si $\Delta > 0$, ie. $|\operatorname{tr} \mathcal{M}| > 2$, les valeurs propres sont réelles et l'une d'elles (par exemple Λ) est supérieur à 1. On définit alors le coefficient de Lyapounov λ comme

$$\Lambda = e^{\lambda L}$$

où L est la longueur de l'orbite périodique. Si $\Delta = 0$, ie. $|\operatorname{tr} \mathcal{M}| = 2$, l'orbite est dite à stabilité marginale. C'est le cas, par exemple, pour toutes les orbites périodiques du disque. La matrice de monodromie dépend du point à partir duquel elle est calculée, mais les propriétés de stabilité et le coefficient de Lyapounov sont des caractéristiques propres à l'orbite.

Le stade est un système chaotique [27]. Toutes ses orbites périodiques sont instables sauf celle de type Fabry-Perot entre les parties rectilignes qui est marginale. Dans les

chapters suivants, nous aurons besoin de leurs caractéristiques : longueurs et coefficients de Lyapounov. Dans un billard chaotique, le nombre d'orbites croît exponentiellement avec leur longueur [47]. Mais pour nos cavités diélectriques à faible indice de réfraction, il est raisonnable de se limiter aux orbites confinées par réflexion totale. Lorsque l/r est inférieur à 1, il s'agit des polygones allongés représentés sur la figure 2.14 (a) avec m rebonds sur le demi-cercle de gauche et p sur celui de droite.

Pour les cas symétriques où $m = p$, on note α l'angle d'incidence. Il s'écrit

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Entre chaque rebond sur le demi-cercle, le rayon parcourt la même distance $2 \cos(\alpha)$. La matrice élémentaire $A = \Pi(2 \cos \alpha)R(\alpha)$ vérifie la relation

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 + 2m & -2mr \cos \alpha \\ \frac{2m}{r \cos \alpha} & 1 - 2m \end{pmatrix}$$

Cette matrice A^m correspond à la matrice de monodromie pour un polygone à m côtés dans un disque de rayon r . Quel que soit m , sa trace vaut 2, c'est à dire que ces orbites présentent une stabilité marginale.

A partir de cette matrice A^m , on obtient aussi la matrice de monodromie pour les polygones allongés du stade avec $m = p$:

$$tr \mathcal{M} = 2 + \frac{16 m l}{\sin(\frac{\pi}{2m}) r} + \frac{16 m^2}{\sin^2(\frac{\pi}{2m})} \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

La longueur de l'orbite vaut

$$L = 4 \left(l + mr \sin \frac{\pi}{2m}\right)$$

Lorsque le nombre de rebonds m devient très grand, la longueur L tend vers le périmètre $4l + 2\pi r$ et $tr \mathcal{M}$ s'écrit comme une puissance de m . Donc le coefficient de Lyapounov se comporte comme

$$\lambda \sim \ln(m)$$

De manière générale, plus le nombre de rebonds sur les arcs de cercle augmente, plus l'orbite est instable. On le comprend plus aisément en exprimant la matrice de monodromie d'un polygone à m côtés dans un disque, calculée à partir du milieu d'un côté

$$A_{bis}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{m+2}{r \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut bien 1 et sa trace 2. Le terme non diagonal croît avec m , mais il n'a pas d'influence parce qu'il n'est pas couplé aux termes diagonaux. Pour le stade, l'ajout de la partie rectiligne crée ce couplage qui déstabilise l'orbite. Les premiers coefficients de Lyapounov de ces polygones allongés sont tracés en rouge en fonction de l/r sur la figure 2.13 (b).

Le cas des polygones de type (m,p) avec $m \neq p$ se traite de manière identique, à ceci près que ces orbites n'existent pas pour toute valeur de l/r . En effet elles doivent vérifier la conservation de l'angle d'incidence lors de la réflexion, contrainte plus difficile à remplir lorsque le nombre de rebonds augmente. Les coefficients de Lyapounov associés à ces orbites sont tracés en noir sur la figure 2.13 (b).

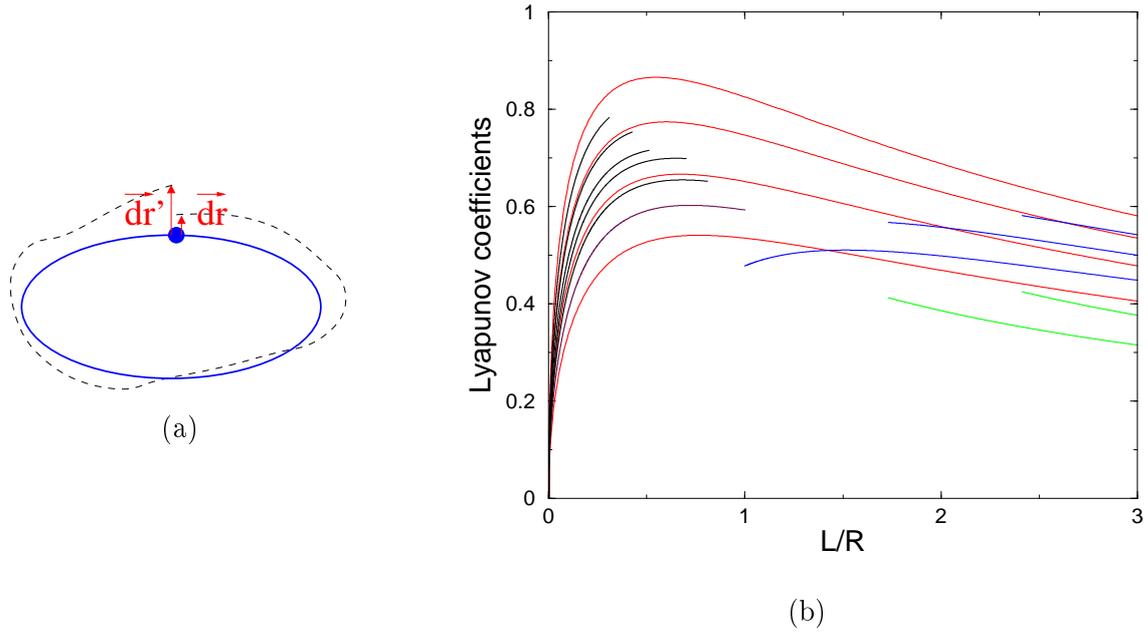


FIG. 2.13 – (a) Schéma expliquant le principe de la matrice de monodromie. (b) Coefficients de Lyapounov pour quelques orbites du stade en fonction du paramètre l/r .

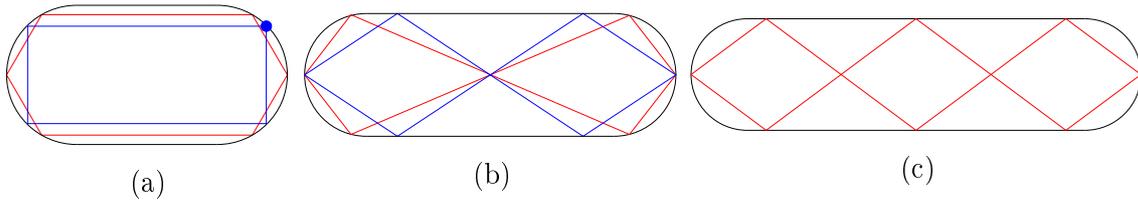


FIG. 2.14 – Exemples d'orbites périodiques du stade. (a) $l/r = 1$ orbites en polygones allongés : le rectangle ($m = 2, n = 2$) en bleu et l'hexagone ($m = 3, n = 3$) en rouge (b) $l/r = 2$ orbites avec un passage au centre (orbites en huit) avec rebonds sur les parties droites (bleu) ou seulement sur les demi-cercles (rouge). (c) $l/r = 3$ orbite avec deux passages au centre.

Lorsque l/r devient supérieur à 1, un type d'orbites avec un croisement au centre apparaît. Elles peuvent rebondir seulement sur les parties circulaires comme l'exemple en rouge sur la figure 2.14 (b) et conduire aux coefficients de Lyapounov tracés en bleu sur la figure 2.13 (b) ou présenter des rebonds sur les parties rectilignes (exemple en bleu sur la figure 2.14 (b) et coefficients de Lyapounov en vert sur la figure 2.13 (b)). Lorsque l/r augmente encore, des orbites avec davantage de croisements au centre peuvent exister comme celle de la figure 2.14 (c). Les formules conduisant aux coefficients de Lyapounov de ces différentes orbites périodiques sont détaillées dans l'annexe C.

Les coefficients de Lyapounov sont attachés aux orbites périodiques et permettent de quantifier les systèmes chaotiques. Ils sont calculables analytiquement pour les billards plans de forme relativement régulière tels que le stade et le disque coupé.

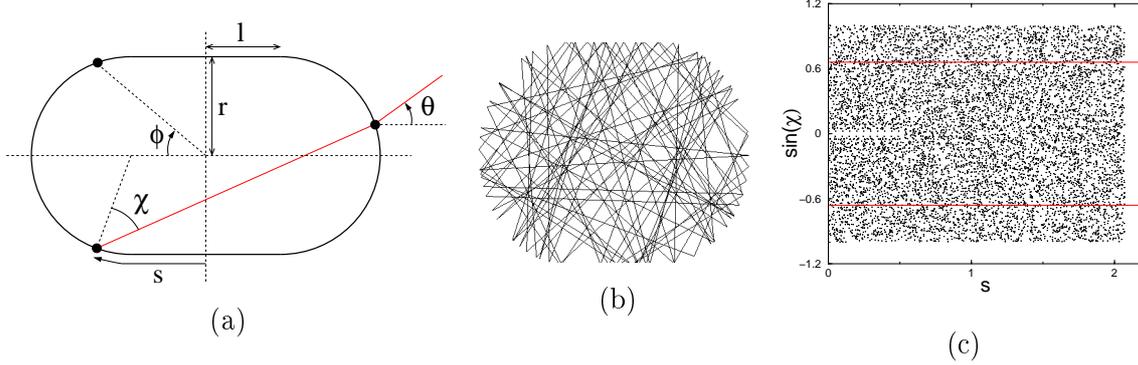


FIG. 2.15 – (a) Notations : χ angle d'incidence, s coordonnée curviligne le long de la frontière, θ direction d'émission, r rayon des demi-disques et l demi-longueur de la partie rectiligne. (b) Trajectoire typique dans un stade fermé durant environ 100 rebonds. (c) Section de Poincaré correspondant à la trajectoire représentée en b) avec environ 8000 rebonds (quart de stade). Les deux droites horizontales indiquent l'angle critique : $\sin(\chi) = \pm 1/n$.

2.2.4 Simulations numériques

Les simulations numériques se révèlent un outil fructueux, à la fois pour vérifier la validité de certaines approches analytiques, mais aussi pour explorer des domaines encore inaccessibles à la théorie et aux expériences. Cette partie se compose de deux paragraphes, le premier sur les simulations d'optique géométrique dont je m'occupais, et le second sur celles d'optique ondulatoire réalisées par Charles Schmit. Dans les deux cas, la propagation "passive" s'effectue dans le plan avec un indice de réfraction égal à 1.5 à l'intérieur de la cavité et à 1 à l'extérieur.

Optique géométrique

Le principe de ces simulations consiste à lancer des rayons dans la cavité. Ils s'y propagent avant de sortir par réfraction ou restent piégés. L'objectif est d'obtenir des informations sur la lumière émise lorsqu'elle se conforme aux lois de l'optique géométrique ($kR \rightarrow \infty$). Ce régime se rapproche des ordres de grandeur expérimentaux. L'étude des billards repose en général sur l'utilisation de la section de Poincaré. Il s'agit d'une coupe de l'espace des phases, ici à 4 dimensions (2×2), à énergie fixée (vitesse constante), lors du rebond sur la paroi. Les coordonnées standard sont décrites sur la figure 2.15 (a) : s l'abscisse curviligne le long de la frontière, et $\sin(\chi)$ le sinus de l'angle d'incidence correspondant à l'impulsion tangentielle. La figure 2.15 présente une trajectoire (b) et une section de Poincaré (c) typiques pour un billard fermé en forme de stade. Quel que soit le point de départ du rayon²⁸, la répartition des points d'impact sur la section de Poincaré est dense. Le stade est un système chaotique. Toutes les orbites périodiques sont instables sauf celle perpendiculaire aux segments de droite, nommée "bouncing ball", dont la stabilité est marginale. Elle apparaît légèrement sur la section de Poincaré.

Dans le cas des billards diélectriques, à chaque impact, le rayon est réfracté ou non selon son angle d'incidence. Pour la plupart des simulations, j'ai considéré qu'un rayon incident avec un angle inférieur à l'angle critique est considéré comme totalement sorti de

²⁸Sauf l'ensemble des orbites périodiques

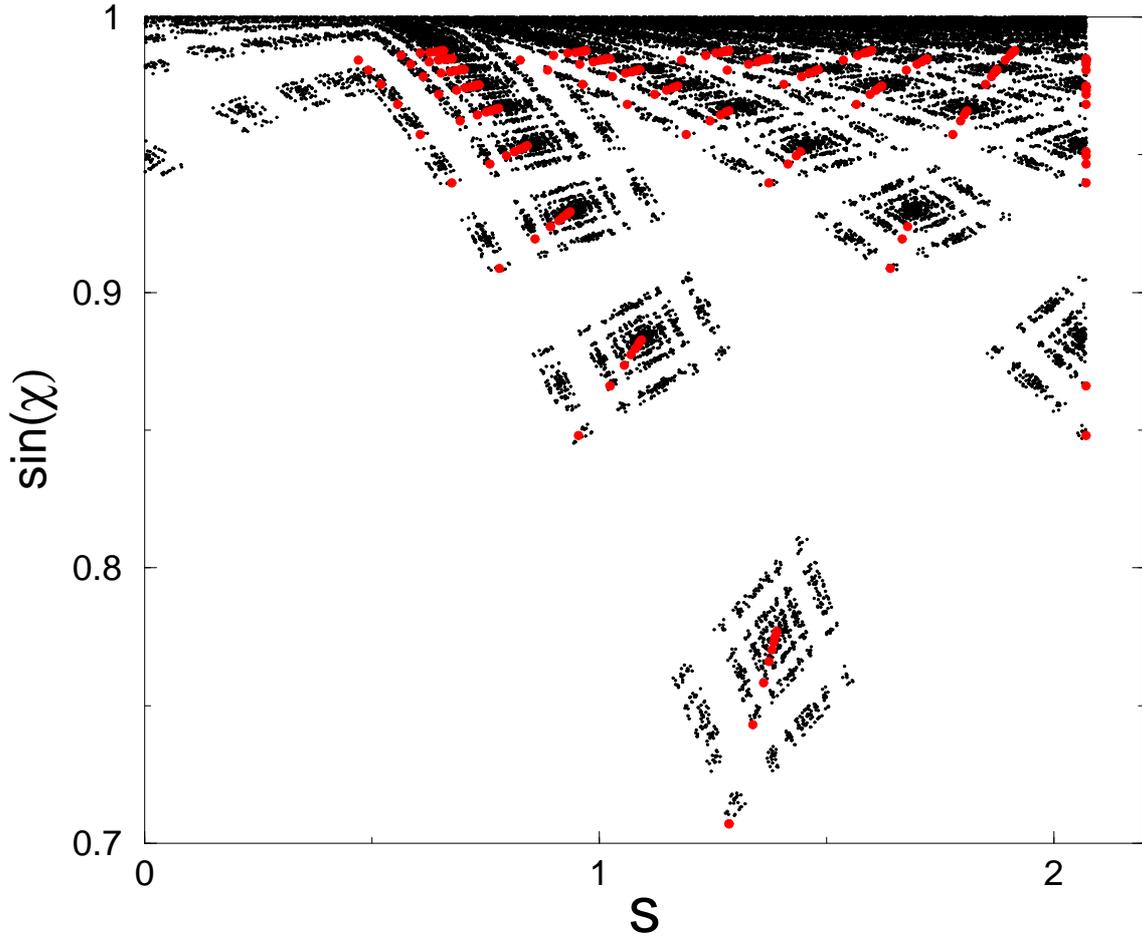


FIG. 2.16 – Section de Poincaré pour un quart de stade $l/r = 0.5$: repousseur étrange en noir (rayons qui survivent après 20 rebonds en temps positif et négatif) et en rouge quelques orbites périodiques de type polygone allongé.

la cavité. Pour être plus exact, il faudrait tenir compte de la partie réfléchie qui poursuit sa propagation dans la cavité et distinguer entre les polarisations TE et TM suivant les coefficients de Fresnel (2.8). Dans la pratique, les variations quantitatives entre ces différents cas restent très faibles et, lors d'une approche qualitative, je me contente de la "sortie directe".

Pour reproduire une distribution initiale de lumière uniforme sur la cavité, on lance un grand nombre de rayons ($\sim 10^7$) dont les points de départ et les directions de propagation sont choisis au hasard²⁹. Deux cas se présentent : soit les rayons sortent par réfraction au bout d'un nombre fini de rebonds, soit ils restent piégés sur des orbites stables ou marginales. Les simulations de systèmes intégrables ou presque intégrables apportent peu d'informations car, une fois le régime stationnaire atteint, les rayons sont bloqués sur leur orbite. Pour ces systèmes, les mécanismes d'émission sont de nature ondulatoire : diffraction par une singularité (eg. carré) ou effet tunnel (eg. disque). Par contre les simulations en rayon

²⁹Au début de la thèse, j'utilisais un générateur de nombres aléatoires dont le cycle s'est révélé trop court. Charles Schmit m'en a proposé un autre qui repose sur des divisions successives modulo des nombres premiers. Quelques résultats quantitatifs comme les temps de décroissance ont été légèrement modifiés.

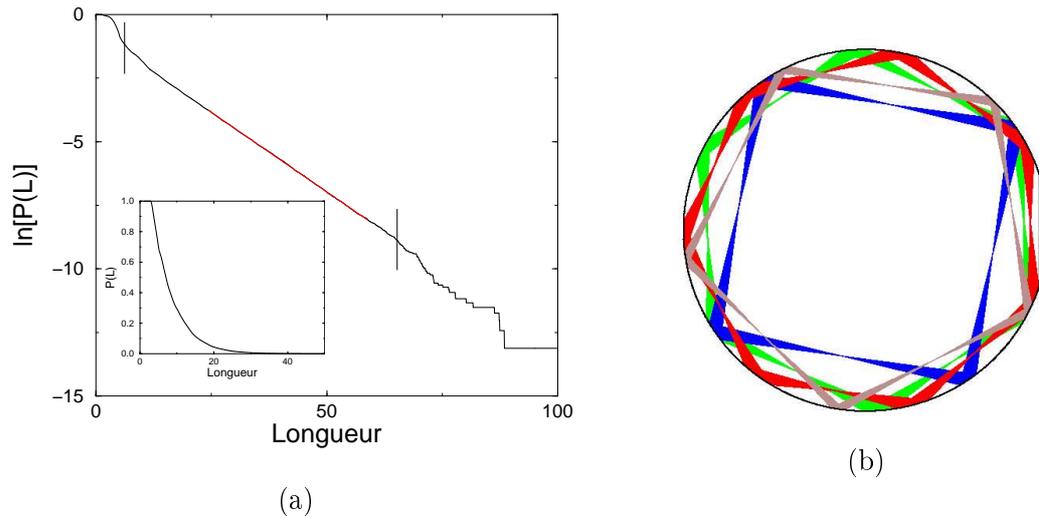


FIG. 2.17 – (a) Logarithme de $P(L)$, probabilité de survie d'un rayon en fonction de la distance parcourue L dans la cavité pour un stade $l/r = 0.5$. Les distances sont mesurées en unité de rayon ($r = 1$). Ajustement linéaire en rouge. Encart : $P(L)$ en fonction de L . (b) Trajectoires au voisinage d'orbites marginales dans le disque faiblement coupé, $\epsilon = 0.05$. La coupure se trouve à droite.

de systèmes chaotiques comme le stade et le disque coupé se révèlent très efficaces. Les orbites périodiques instables structurent la dynamique et forment un repousseur étrange. La figure 2.16 montre celui du stade : on a tracé l'ensemble des points de départ qui conduit à des rayons confinés au bout de 20 rebonds³⁰ et superposé les orbites périodiques de type polygones allongés.

Ces simulations en rayons fournissent des résultats quantitatifs sur deux types de données : les directions d'émission et les temps de décroissance.

Les directions d'émission s'étudient très facilement. Pour chaque rayon qui sort, on calcule la direction du rayon réfracté. La distribution de ces angles sur un grand nombre de rayons forme une courbe en cloche dont le maximum indique la direction globale d'émission. Ces simulations adaptables à diverses formes de billards, donnent des résultats en très bon accord avec l'expérience. Leur étude est développée dans la partie 3.3.

Le deuxième type d'étude concerne les temps de décroissance. Au temps $t = 0$, on lance un grand nombre de rayons uniformément distribués sur la cavité, et à chaque pas de temps, on compte les rayons qui se trouvent encore à l'intérieur. Le temps est compté en unité de longueur (vitesse de la lumière égale à 1). Pour un système chaotique comme le stade, on obtient une courbe comme celle dans l'encart de la figure 2.17 (a). Elle a été normalisée pour représenter la probabilité qu'un rayon vive dans la cavité après avoir parcouru la distance L . Comme cette probabilité décroît de manière plus ou moins exponentielle, son logarithme en fonction de L a été tracé sur la figure 2.17 (a). Elle se compose de trois parties dont les frontières un peu floues sont matérialisées par les barres verticales. Au début, le nombre de rayons chute brusquement. Il s'agit des rayons dont les points de départ et les directions initiales les contraignent à sortir dès le premier rebond. Cette étape est analogue à l'émission de la fluorescence. Ensuite, la décroissance est exponentielle (ajustement linéaire en rouge)

³⁰Pour obtenir cette figure, il faut considérer 20 rebonds pour une évolution temporelle positive et négative.

et correspond à un régime stationnaire. Nous y reviendrons à la partie 3.3.2. A la fin, il ne reste que quelques rayons isolés dont la statistique n'est pas représentative dans le cas du stade, mais peut le devenir s'il existe des orbites marginales confinées (eg. disque coupé). Il est alors possible de les identifier en remontant aux conditions initiales de ces rayons à longue vie. La figure 2.17 (b) en montre quelques exemples pour le disque coupé. Ces orbites modifient le type de décroissance temporelle comme nous le verrons à la partie 3.1.2.

Ces simulations en rayons fournissent une compréhension qualitative sur le fonctionnement des billards. Dans la limite de l'optique géométrique, ils permettent aussi d'obtenir des résultats quantitatifs sur les directions d'émission et les temps de décroissance.

Optique ondulatoire

Les simulations ondulatoires permettent d'obtenir des informations pour des domaines en kR inaccessibles à l'expérience : entre 5 et 30 chez nous, jusqu'à 100 pour certaines équipes. Charles Schmit utilisait la méthode des éléments de frontière (boundary element method) [118, 119]. Bien que les principes restent simples, la mise en application s'avère assez délicate. Comme je n'ai pas participé à l'élaboration des programmes, je mentionnerai seulement les principes généraux.

L'idée générale consiste à résoudre l'équation de Helmholtz bi-dimensionnelle

$$(\Delta + n_i^2 k^2) \psi_i = 0 \quad (2.14)$$

puis à imposer les conditions aux bords. Pour prendre en compte la direction verticale, la méthode développée à la partie 2.2.1 consiste à remplacer l'indice de réfraction par l'indice effectif (cf. équation (2.7)) : $n_i = 1.5$ à l'intérieur de la cavité et $n_i = 1$ à l'extérieur. En général, par souci de simplicité, on préfère les conditions de type TM : continuité à la frontière pour la fonction d'onde et sa dérivée normale. L'expression ci-dessous vérifie les équations (2.14) et peut donc être utilisée comme fonction d'onde :

$$\psi_i(\vec{r}) = \oint ds \mu_i(s) G_i(\vec{r}, \vec{r}_s; k) \quad (2.15)$$

où G_i représente les fonctions de Green intérieure et extérieure et les μ_i sont nommées charges intérieure et extérieure. Cette forme est très générale. Une fois imposée les conditions au bord, elle regroupe toutes les solutions de notre problème. Elle comprend aussi celle de la cavité fermée. Ces états dits "spurius" qui ne nous intéressent pas sont aisément identifiables car $\text{Im } k = 0$.

L'équation de Helmholtz possède deux types de fonctions de Green : la fonction de Hankel d'ordre 1 $H_0^{(1)}$ et celle d'ordre 2 $H_0^{(2)}$. Nous avons vu à la partie 2.2.2 qu'à l'infini, la première correspond à une onde sortante et la deuxième à une onde entrante. A l'extérieur, nous choisissons donc $H_0^{(1)}$. A l'intérieur, les calculs effectués avec $H_0^{(1)}$ sont plus stables et diffèrent peu de ceux menés avec $H_0^{(2)}$. Les fonctions de Green s'écrivent alors

$$G_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2 : k) \propto H_0^{(1)}(n_i k |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

et l'expression (2.15) devient

$$\psi_i(\vec{r}) = \oint ds \mu_i(s) H_0^{(1)}(n_i k |\vec{r} - \vec{r}_s|) \quad (2.16)$$

Une fois les μ_i déterminées, elles donnent accès aux fonctions d'onde grâce à l'expression (2.16). Celle-ci pourrait présenter des divergences dues à la fonction de Hankel, mais une observation plus attentive [118] montre qu'il n'en est rien. Toutefois, pour des raisons de convergence numérique, les fonctions d'onde ne sont pas calculées au voisinage de la frontière, ce qui reste matérialisé par une zone noire (cf. par exemple la figure 2.18).

Pour simplifier, le problème est séparé en classes de symétrie distinctes. Par exemple pour le stade, on se limite à un quart comme sur la figure 1.3 (a) et les fonctions d'onde peuvent être symétriques ou antisymétriques par rapport à chacun des axes. Sur ces parois fictives, les conditions aux bords sont de type Dirichlet pour le cas antisymétrique (noté $-$) et de type Neumann pour le cas symétrique (noté $+$). Pour certaines formes de cavités comme les polygones réguliers, les classes de symétries $+$ sont plus délicates à calculer que les $-$ car la fonction d'onde ne s'annule pas sur les coins. Sur les vraies parois, les conditions au bord sont imposées par le type de polarisation choisie TE ou TM.

La frontière est discrétisée avec typiquement 10 à 30 points par longueur d'onde. En chaque point, les deux conditions au bord sont appliquées, ce qui conduit à une matrice de taille $2N \times 2N$, dont le déterminant s'annule pour chaque résonance k_j . D'après la partie 2.2.1, ces nombres d'onde doivent être complexes et de partie imaginaire négative. Ils sont obtenus par minimisation du déterminant dans des fenêtres fixées par l'utilisateur. Une coupure inférieure sur la partie imaginaire permet de ne conserver que les modes les mieux confinés et de limiter le temps de calcul. Susumu Shinoara, spécialiste de ce type de simulations pour le groupe de Takahisha Harayama (ATR, Japon), assure une "précision jusqu'à la cinquième décimale". Nous retiendrons en générale entre quatre et cinq chiffres significatifs. La plage spectrale explorée est limitée essentiellement par le nombre de points sur la frontière (taille du déterminant à calculer).

La figure 2.19 montre deux types de spectres très caractéristiques. Celui de gauche (a) correspond à celui d'un rectangle dont le rapport $\rho = \text{longueur}/\text{largeur}$ vaut 7. Si ce système était un billard fermé, il serait intégrable. En tant que résonateur diélectrique, il ne l'est pas à cause de la diffraction par les coins diélectriques, problème encore insoluble. Lorsque $\text{Re}(ka)$ augmente, des branches apparaissent. Une apparition semble directement liée à l'ouverture d'un nouveau canal. Leur démarrage est indiqué par les barres noires verticales. Leur position a été calculée en considérant ce long rectangle comme une bande d'indice $n_b = 1.5$ dans un milieu d'indice $n_e = 1$ et en utilisant le modèle d'indice effectif décrit à la partie 2.2.1. La formule (2.9) pour des milieux extérieurs d'indices identiques et une bande d'épaisseur l s'écrit

$$\tan\left(\frac{kl}{2}\sqrt{n_b^2 - n_{eff}^2}\right) = \sqrt{\frac{n_{eff}^2 - n_e^2}{n_b^2 - n_{eff}^2}}$$

A l'ouverture d'un canal, l'indice effectif est égal à l'indice extérieur, soit $n_{eff} = 1$, ce qui conduit à

$$k_p l = \frac{2\pi}{\sqrt{n_b^2 - 1}} p$$

Ces valeurs réelles du nombre d'onde correspondent aux positions des barres noires sur la figure 2.19 (a).

Le spectre d'un système chaotique comme le stade (figure 2.19 (b)) présente des structures (en bleu) très différentes qui ressemblent à des oscillations. Une explication a été avancée

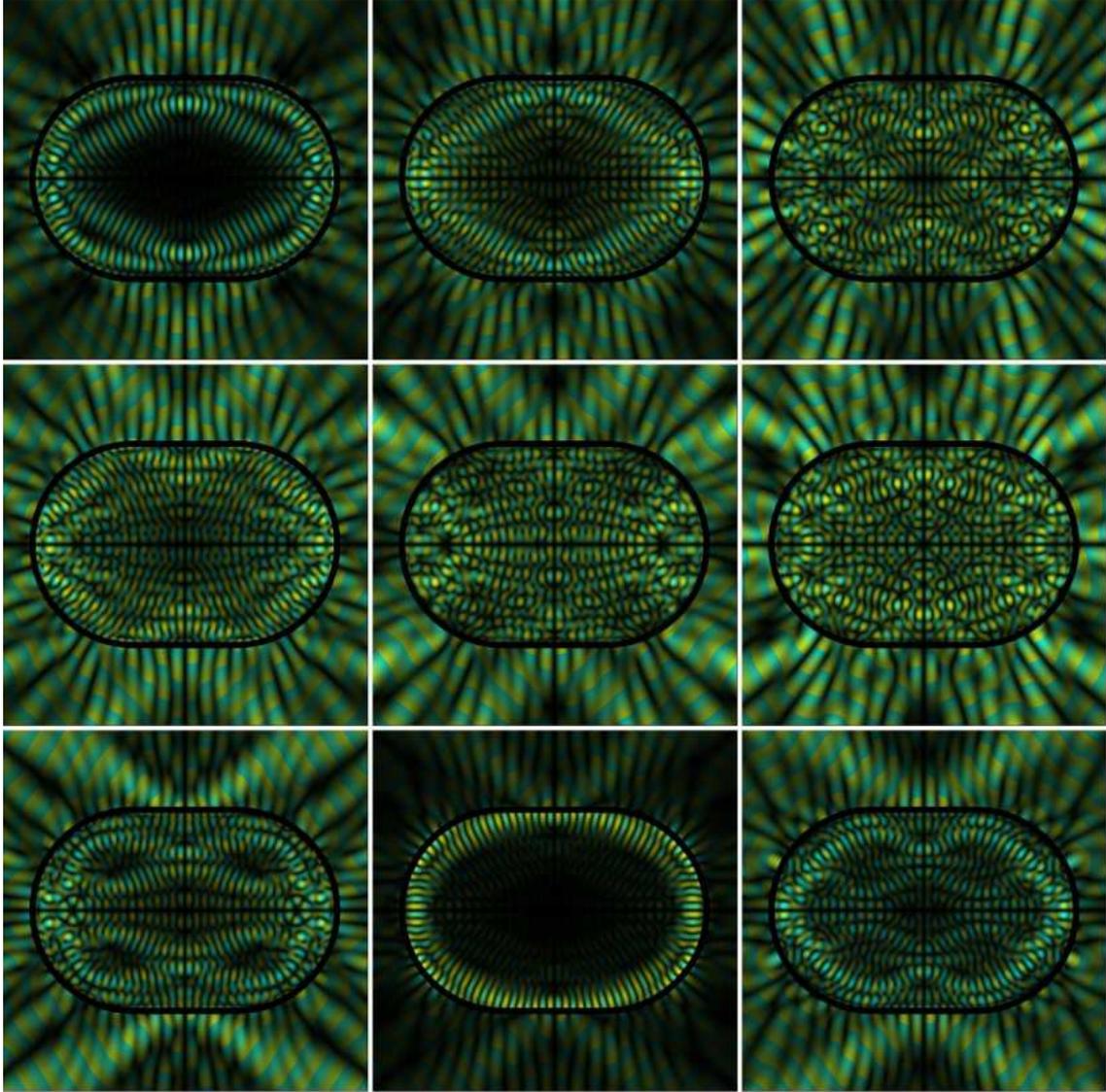


FIG. 2.18 – Série de fonctions d’onde pour un stade $l/r = 0.5$ affichées dans leur ordre d’apparition par l’algorithme. Polarisation TM et fonctions d’onde antisymétriques par rapport aux axes du stade. Les parties réelles des nombres d’onde s’échelonnent entre $Re\ kr = 28.03$ et $Re\ kr = 28.88$. L’intensité est indiquée par une échelle sombre-clair : les zones de forte intensité sont plus claires. Les couleurs représentent un codage de la phase.

dans [44]. De ces spectres, il est possible d’extraire la longueur des orbites périodiques sous-jacentes. Ce sujet est développé dans la partie 4.3.2.

Une fois déterminés les nombres d’onde k_j , on remonte aux charges correspondantes intérieure et extérieure $\mu_i(s)$ et de là aux fonctions d’onde. La figure 2.18 présente une série de fonctions d’onde par $Re(kr)$ croissant. Plus $Im(kr)$ est faible (beaucoup de pertes) plus l’intensité semble importante à l’extérieur de la cavité³¹. Les fonctions d’onde de la troisième colonne font partie de ce type de résonances à pertes importantes. Pour les fonctions d’onde à fort confinement, il est difficile de discerner une émission hors des frontières.

³¹L’intensité totale n’est pas normalisée.

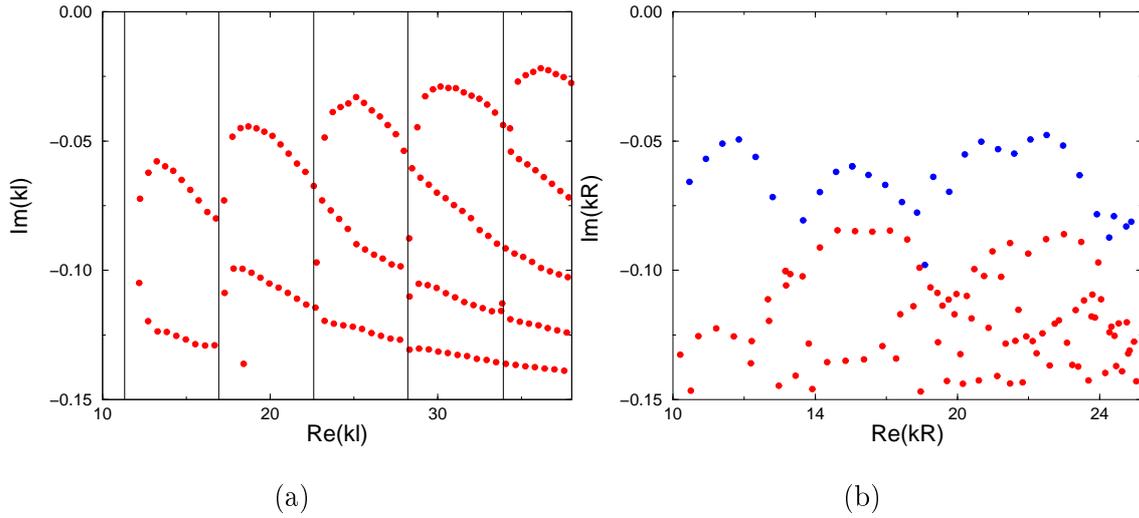


FIG. 2.19 – (a) Spectre d'un système presque intégrable, le rectangle. Sa longueur est 7 fois plus grande que sa largeur l . L'ouverture d'un nouveau canal est indiquée par une barre noire verticale. (b) Spectre d'un système chaotique, le stade. Ici $l/r = 2$. L'oscillation des modes les mieux confinés est indiquée en bleu.

La fonction d'onde en bas au milieu en est une représentante. Elles présentent une distribution spatiale d'intensité très semblable et leurs nombres d'onde associés se trouvent dans la branche isolée du spectre tels les points bleus du spectre 2.19 (a). Parfois il est possible d'isoler une classe intermédiaire de résonances, comme les deux à gauche de la ligne supérieure figure 2.18. Le champ à l'intérieur de la cavité semble structuré mais les pertes restent non négligeables.

L'émission en champ lointain est calculée directement à partir des charges extérieures. Son étude est détaillée dans la partie 3.3.1 pour le cas du stade.

Conclusion Dans cette partie sur la cavité passive, nous avons décrit le système étudié et précisé les outils employés. Les cavités diélectriques tridimensionnelles sont modélisées comme des résonateurs bidimensionnels vérifiant l'équation de Helmholtz (2.7) pour chacune des polarisations TE et TM et les conditions aux limites correspondantes. La dimension verticale est prise en compte par un indice effectif. Les nombres d'onde résonants sont alors complexes et leur partie imaginaire rend compte des pertes du mode. Seul la cavité circulaire peut être traitée de manière analytique et exacte. Des méthodes approchées seront développées, notamment à la partie 3.2.2. Les simulations numériques ondulatoires permettent d'avoir accès à diverses formes de cavités.

Les simulations d'optique géométrique correspondent à une approche de type physique classique. Les orbites périodiques constituent un élément clef de la dynamique. Pour les systèmes complètement chaotiques comme le stade, les coefficients de Lyapounov permettent de quantifier leur instabilité.

2.3 Effet laser

L'effet laser nous permet de visualiser aisément certaines caractéristiques des résonateurs, comme les modes à faibles pertes, qui sinon resteraient masqués dans le bruit. De plus, l'utilisation d'un matériau non-linéaire (ici le DCM) présente l'avantage de découpler

l'injection d'énergie de la répartition d'intensité entre les modes. Dans le cas d'un pompage uniforme, les molécules excitées sont réparties dans toute la cavité, contrairement à certaines expériences où le type de pompage sélectionne quelques résonances [6, 114]. Mises à part les expériences décrites dans l'annexe H, les cavités ont toujours été pompées de manière uniforme. Mais il est possible de favoriser l'émergence de certains modes en utilisant un pompage localisé [10, 33].

Toutefois l'effet laser génère une complexité supplémentaire qui modifie les propriétés de la cavité passive et brouille les conclusions. Nous en verrons une illustration à la partie 4.1.3. Il s'est donc révélé nécessaire d'approfondir ses propriétés pour pouvoir interpréter certaines données expérimentales.

Cette partie se compose de trois paragraphes : tout d'abord une description du milieu amplificateur telle qu'elle apparaît dans la bibliographie contemporaine, puis quelques expériences relatives à nos matériaux permettant de préciser leurs caractéristiques, et enfin des simulations numériques réalisées à partir d'un modèle phénoménologique pour avoir accès à la dynamique du système.

2.3.1 Description du milieu amplificateur

Les colorants lasers ont été très étudiés au début de l'ère du laser (années 60-70 [107]) car ils présentent de nombreux avantages telles qu'un maniement aisé (quoique risqué), un faible coût et une large bande de fluorescence [87]. Nous en avons aussi bénéficié. Traditionnellement, ces milieux amplificateurs sont considérés comme des systèmes à quatre niveaux [84]. En fait il s'agit de deux niveaux électroniques S^0 et S^1 élargis par les vibrations. Le schéma standard décrit par la figure 2.20 est le suivant. L'absorption s'effectue entre le fondamental de S^0 et la bande autour de S^1 . Puis les molécules relaxent rapidement (~ 300 fs) et de manière non radiative vers le bas de la bande de S^1 . La fluorescence (émission spontanée) apparaît alors entre ce niveau et la bande autour de S^0 . Enfin les molécules relaxent rapidement et de manière non-radiative vers le fondamental de S^0 . Ce processus est très efficace : le rendement quantique de fluorescence est estimé à environ 70 % [38, 112].

Cependant ces colorants lasers possèdent deux inconvénients majeurs qui contraignent fortement leur utilisation : le blanchiment ("bleaching") et le clignotement ("blinking"). Ce dernier s'interprète à l'aide du diagramme 2.20. Le passage de S^0 à S^1 correspond à l'excitation d'un électron sans changement de spin. Une fois dans l'état S^1 , la molécule peut se désexciter vers T^1 , état triplet d'énergie plus faible où les deux spins sont indentiques. Une fois dans cet état, la molécule reste piégée car la transition vers l'état fondamental implique un retournement de spin difficile à réaliser (temps de vie de l'ordre de la microseconde) et la transition n'est pas radiative. Dans le cas d'un pompage continu, les molécules finissent par peupler cet état triplet T^1 et l'émission de fluorescence s'arrête. Comme la transition $S^1 \rightarrow T^1$ implique un retournement de spin, elle est relativement lente (environ 10 ns), alors que $S^1 \rightarrow S^0$ s'effectue très rapidement (de l'ordre de la nanoseconde). Un pompage ultra-rapide (moins de 1 ns, 30 ps pour nous) permet donc de générer de l'émission stimulée avant que les molécules ne partent peupler l'état triplet T^1 [87, 108]. De manière générale, le clignotement apparaît dès que la molécule passe dans des niveaux autres que S^0 et S^1 , par exemple lors de la photoisomérisation. Il semble qu'un pompage rapide en limite l'influence.

Le blanchiment correspond à une dégradation de la molécule qui devient alors incapable de fluorescer. D'après certains auteurs [72, 123], la présence d'oxygène augmenterait ce phénomène. Ils recommandent donc de travailler sous atmosphère d'azote. Il a été rapporté

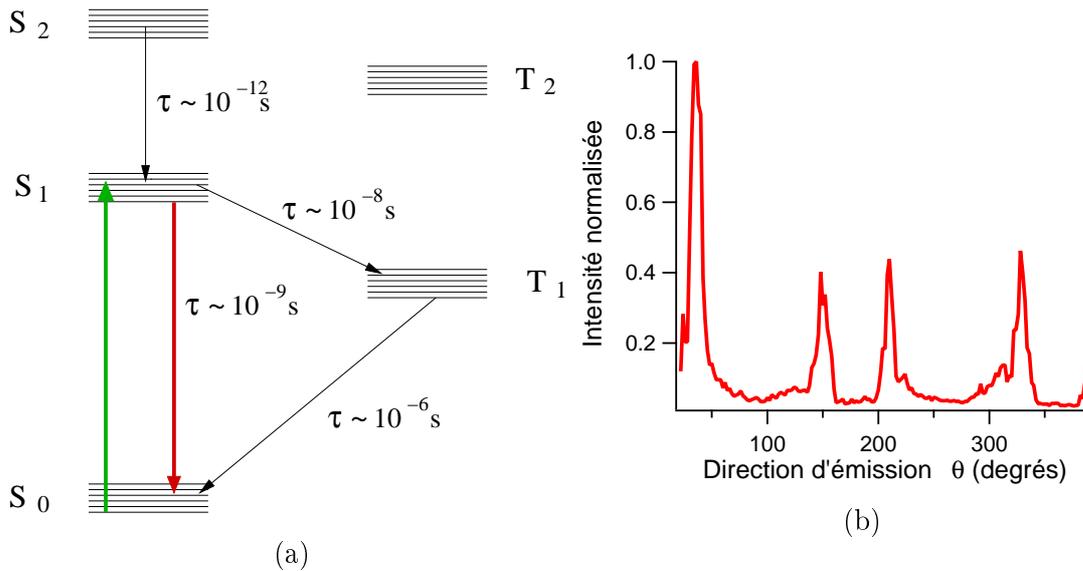


FIG. 2.20 – (a) Diagramme énergétique d'un colorant laser standard. (b) Diagramme d'émission (intensité en champ lointain en fonction de la direction d'observation). Les données ont été enregistrées de manière chronologique à partir de $\theta = 0$, avec trois secondes d'intégration, soit 30 impulsions de pompe par point.

que l'utilisation d'une matrice polymère solide diminue considérablement le blanchiment par rapport à une solution liquide [54, 55].

Dans nos expériences, le blanchiment et le clignotement n'ont jamais joué le rôle de facteur limitant. Lors des expériences sur les directions d'émission (cf partie 3.3), une même cavité est soumise à 30×40 impulsions de pompe sur des durées assez courtes (15-20 minutes). Nous avons constaté que pour une énergie de pompe raisonnable, l'intensité émise par la cavité se stabilise une fois passée la première centaine de pulses. L'effet est bien visible sur la figure 2.20 (b). Si le milieu amplificateur possédait des propriétés uniformes dans le temps, les quatre pics seraient de même intensité. Si les capacités d'émission du milieu décroissaient au cours de temps, les pics devraient diminuer de la gauche vers la droite. Or les trois derniers pics sont de même taille et nettement plus petits que le premier. On conclut donc à une stabilisation du milieu après une certaine durée d'utilisation. En revanche, pour une énergie de pompe trop élevée, typiquement $300 \text{ pJ}/\mu\text{m}^2$, on constate une dégradation irréversible du matériau (cf. figure 2.21 (a)). Il est toutefois difficile d'en distinguer l'origine : passage dans des états excités noirs, brisure du colorant laser, fonte de la matrice polymère, ...

Comme les molécules de DCM se présentent sous forme allongée, il semble naturel de jouer sur la polarisation de la pompe. Mais la concentration de DCM est relativement importante (5 % en masse de DCM dans le PMMA) et il a été montré que le FRET (Förster resonance energy transfer) joue un rôle prépondérant à ces densités [70]. Il s'agit d'un transfert d'énergie entre la molécule excitée et ses voisines qui rend le pompage plus ou moins isotrope même si le faisceau de pompe est polarisé de manière rectiligne. D'ailleurs nous n'avons constaté aucune modification de l'émission d'un stade en tournant la polarisation du faisceau de pompe ou en la rendant circulaire.

De même, la lumière émise par les cavités ne présente pas une polarisation bien définie, mais plutôt un mélange TE/TM comme le montre la figure 2.21 (b). Pour réaliser ce test,

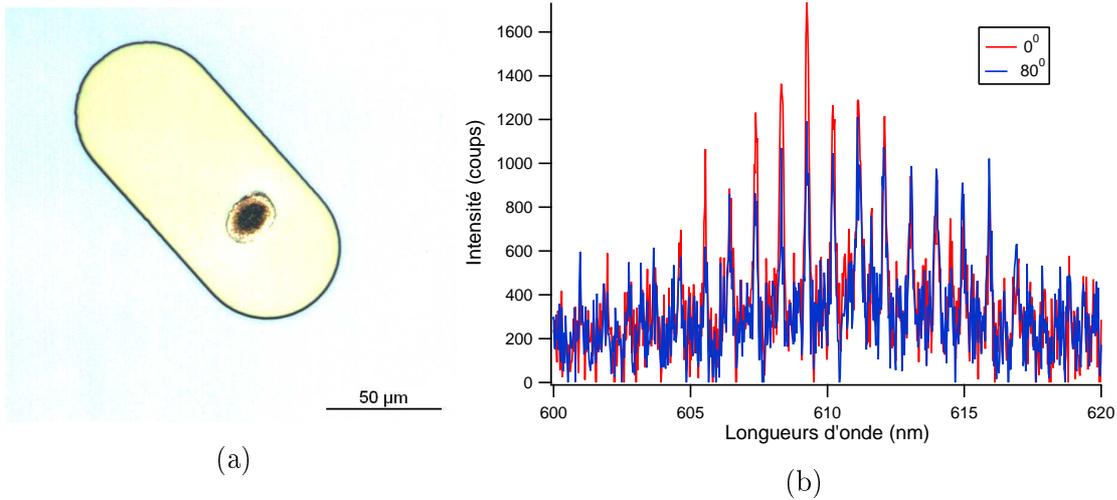


FIG. 2.21 – a) Photo d'un stade brûlé par le faisceau de pompe focalisé. b) Emission d'un stade pour deux positions de la lame demi-onde (cf. texte). Stade d'épaisseur $2.5 \mu\text{m}$. Temps d'intégration 5 s. Le laser de pompe était particulièrement instable lors de cette expérience.

il faut prendre quelques précautions car le système de détection spectromètre + caméra est polarisé. Nous avons placé un polariseur à l'entrée de la fibre et intercalé une lame demi-onde entre elle et l'échantillon. Ainsi, en tournant la lame, on teste la polarisation d'émission de la cavité. Nous n'avons effectué ces mesures que sur quelques stades et un carré et il semble qu'aucune polarisation ne soit favorisée. Il serait toutefois préférable d'approfondir ces expériences avant d'en tirer une conclusion définitive.

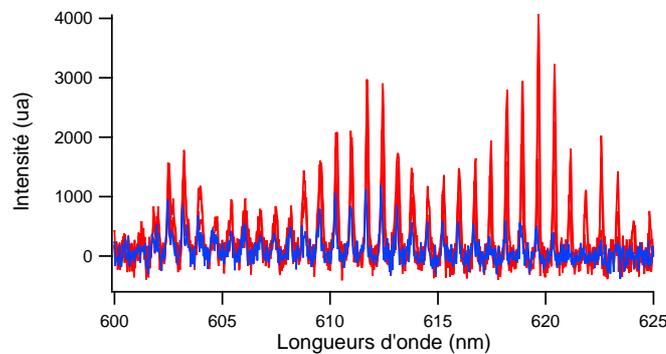


FIG. 2.22 – Spectres d'un même stade pour quatre énergies de pompe différentes (de 2 à 6 en unité arbitraire). Celui de plus faible intensité est tracé en bleu et les trois autres en rouge. Intégration sur 30 impulsions.

Comme autre effet non-linéaire lié au colorant laser, il faut aussi mentionner le "pulling effect". Il s'agit d'un déplacement des résonances dû à une modification de l'indice de réfraction et lié au caractère actif du matériau. La partie imaginaire de l'indice étant intimement connectée à sa partie réelle, le gain engendre une dispersion supplémentaire. Cet effet est connu depuis longtemps et bien documenté en régime stationnaire [105]. En revanche nous n'avons pas trouvé d'information pertinente en fonctionnement impulsif. Dans la mesure où les spectres expérimentaux ne dépendent pas de l'énergie de pompe (cf.

figure 2.22) et s'interprètent sans recourir à cette notion, il est vraisemblable que son influence soit négligeable.

2.3.2 Expériences

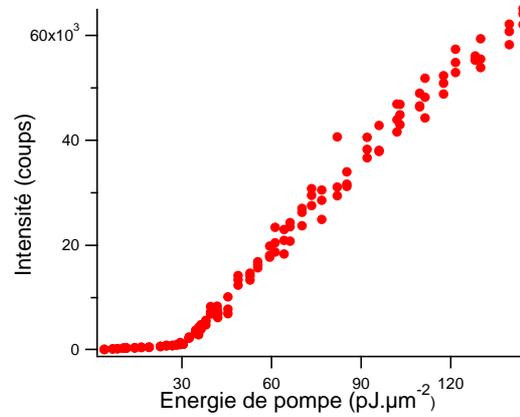


FIG. 2.23 – Intensité détectée en fonction de l'énergie surfacique de pompage pour un stade de rayon $r = 30 \mu$ et $l/r = 0.83$. Les valeurs en abscisses ont été déduites d'après les paramètres décrits dans le texte.

Ces micro-résonateurs organiques présentent de bonnes propriétés lasers. La courbe de seuil 2.23 a été réalisée sur un stade dans la direction d'émission maximale pour un dispositif expérimental en configuration imagerie. L'intensité du pic le plus élevé est reporté en fonction de l'énergie surfacique injectée par la pompe. La dispersion de la courbe est liée aux fluctuations du laser de pompe. En effet, l'intensité de certaines impulsions isolées s'écarte jusqu'à 10 % de la valeur moyenne. Pour chaque valeur moyenne indiquée en abscisse, j'ai donc enregistré cinq images correspondant à cinq impulsions différentes et je n'ai conservé que les trois les plus semblables. L'énergie moyenne totale du faisceau est mesurée avec une photodiode Ophir PD10 adaptée à ces taux de répétition et donc capable d'isoler chaque impulsion. Ensuite, pour déduire l'énergie surfacique au niveau de l'échantillon, on mesure la taille du faisceau avec le dispositif décrit à la figure 2.24 (a) qui donne la courbe représentée figure 2.24 (b), et on suppose que le faisceau est gaussien et la cavité placée à son maximum. Ce type d'expérience a été réalisé tout au début de ma thèse. Depuis lors, le banc de mesure a été sensiblement modifié et la taille du faisceau a changé. Elle est typiquement³² estimée à $500 \mu\text{m}$ de diamètre, ce qui conduit³³ à des valeurs de seuil de l'ordre de $10 \text{ pJ}/\mu\text{m}^2$.

Je n'ai réalisé de courbes de seuil que sur des stades. Globalement le seuil augmente lorsque la taille ou l'épaisseur de la cavité diminue. Pour chaque cavité, il est toujours clairement défini, mais peut varier d'environ 20 % d'une cavité à l'autre de mêmes caractéristiques, peut être à cause d'inhomogénéité de fabrication. Pour certaines formes comme le disque où la lumière reste bien confinée, il est vraisemblable que le seuil laser ne puisse pas être

³²Il faut aussi tenir compte de la lame semi-réfléchissante (simple lame de verre) dont le rapport réflexion/transmission dépend de son orientation et reste de l'ordre de 10 % (4% de réflexion sur chacune des faces)

³³On suppose que le faisceau de pompe présente une répartition d'intensité de la forme $I_0 e^{-2r^2/w^2}$ avec $w = 175 \mu\text{m}$ d'après les résultats de la figure 2.24 et que l'énergie surfacique de pompage correspond à I_0 . Alors une lecture au mesureur de $0.1 \mu\text{J}$ représente un pompage de $I_0 = 10 \times 0.1 \times 2/\pi 175^2 = 20 \text{ pJ.}\mu\text{m}^{-2}$

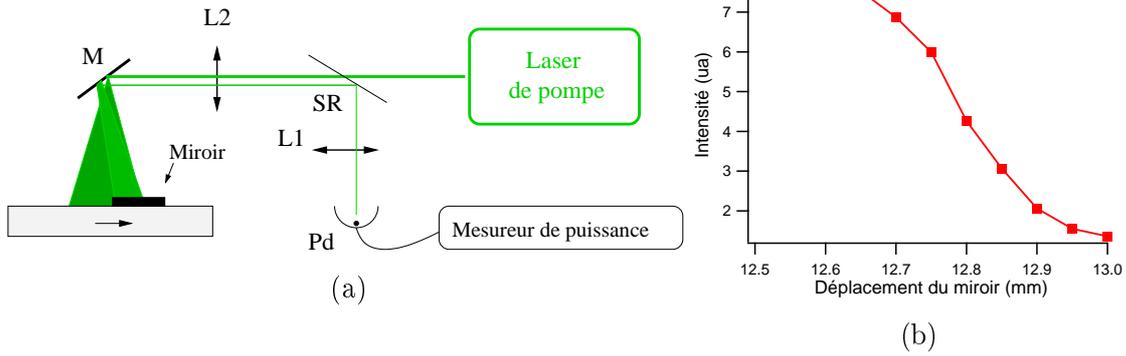


FIG. 2.24 – b) Courbe obtenue avec le dispositif décrit en a) et permettant d’obtenir la taille du faisceau au niveau de la cavité.

mesuré car, à ces énergies de pompe, l’émission reste trop faible comparée au bruit. Toutefois, la plupart des formes présente un seuil laser clairement identifiable.

Le gain pour un tour d’orbite périodique peut être évalué grâce à l’expression standard

$$G = \Delta N \sigma_e \eta L$$

où ΔN est la densité de molécules excitées, σ_e la section efficace d’émission, η le rendement quantique de fluorescence et L la longueur de l’orbite périodique. L’article [112] rapporte des données concernant des molécules de DCM dans du PMMA massif. La section efficace d’émission σ_e varie entre 1.10^{-20} m^2 et 2.10^{-20} m^2 pour des longueurs d’onde comprises entre 600 et 630 nm, ce qui correspond à peu près à un Angström carré, estimation raisonnable. Quant au rendement quantique de fluorescence η , il vaudrait 0.66. Cette mesure est conforme à d’autres données rapportées entre autres dans [38]. Pour évaluer la densité de molécules excitées, nous avons réalisé une mesure d’absorption par spectrophotométrie. La courbe verte de la figure 2.1 (b) indique un rapport d’intensité $I(l)/I(0) = 0.85$ à 532 nm pour une épaisseur traversée $l = 0.5 \text{ }\mu\text{m}$. Si on néglige la diffusion, cette atténuation d’intensité s’exprime comme

$$\frac{I(l)}{I(0)} = e^{-\sigma_a n_0 l}$$

ce qui permet de déduire $\sigma_a n_0 = 0.32 \text{ }\mu\text{m}^{-1}$. La référence [112] donne $\sigma_a = 1.5 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$ à 530 nm ce qui correspond à une densité $n_0 = 2.10^7 \text{ }\mu\text{m}^{-3}$ soit une distance typique entre molécules de DCM de l’ordre de $l = n_0^{-1/3} \simeq 4 \text{ nm}$, en accord avec une autre approche proposée dans [70]. Si on estime l’énergie typique injectée à la surface de la cavité à $10 \text{ pJ}/\mu\text{m}^2$, le nombre de photons incidents vaut $\mathcal{N}_{inc} = 2.5 \cdot 10^7 \text{ }\mu\text{m}^{-2}$. On peut supposer que le faisceau traverse l’épaisseur de la couche, notée $h \simeq 0.6 \text{ }\mu\text{m}$, et se réfléchit sur le silicium. Il parcourt donc une distance $2h$ dans le milieu amplificateur. Une majoration du nombre de molécules excitées conduit à $\Delta n = \mathcal{N}_{inc} \sigma_a n_0 2h = 10^7 \text{ }\mu\text{m}^{-2}$ et donc à une densité $\Delta N = \Delta n/h = 1.7 \cdot 10^7 \text{ }\mu\text{m}^{-3}$. Si on tient compte de l’atténuation du faisceau de pompe au cours de sa propagation et de la réflexion sur le silicium (75 % de pertes), on obtient $\Delta N = 0.8 \cdot 10^7 \text{ }\mu\text{m}^{-3}$. On constate que même au seuil, une proportion non négligeable des molécules de DCM sont excitées, de 40 à 85 % selon les estimations.

Pour évaluer le seuil laser, considérons pour exemple le cas d’un résonateur Fabry-Perot de largeur $L = 200 \text{ }\mu\text{m}$ et d’indice $n = 1.5$ dans l’air. Le coefficient de transmission en

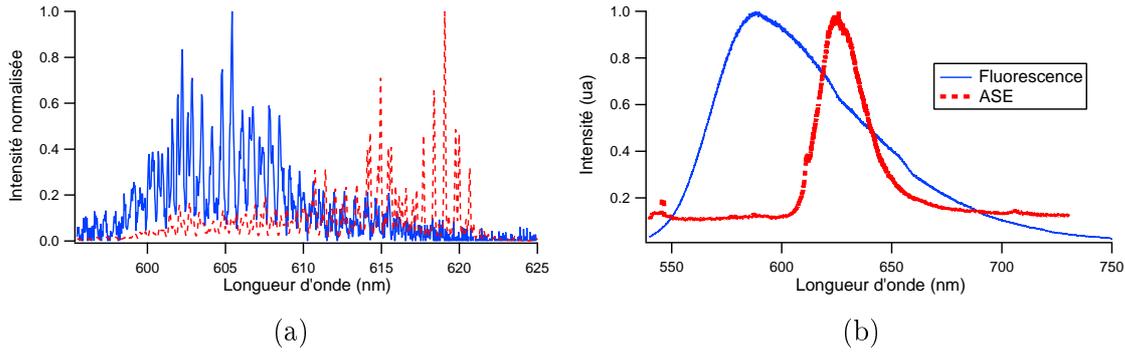


FIG. 2.25 – a) Deux spectres lasers d’un même stade réalisés avec des énergies de pompe de 50 ua (en ligne continue bleue) et de 500 ua (en pointillés rouges). b) Comparaison entre le spectre de fluorescence réalisé en pompage continu sur substrat de verre (lame porte-objet, indice 1.55), en ligne continue bleue, et un spectre d’ASE réalisé en pompage pulsé sur substrat de SOG, en pointillés rouges. Les irrégularités des courbes sont dues à des parasites extérieurs liés à la méthode d’enregistrement des spectres (fonction step-and-glué du logiciel Winspec).

intensité vaut $T = 1 - (n - 1)^2 / (n + 1)^2 = 0.96$, c’est à dire qu’un photon qui arrive à l’interface a 96 % de chance de sortir directement. Sa durée de vie est donc comparable à son temps de vol $\frac{1}{\gamma} \sim \frac{nL}{c} = 1$ ps. En général le seuil laser apparaît lorsque le gain compense les pertes. Ici les pertes sont estimées³⁴ à un photon par ps. Quant au gain, il s’écrit

$$g = \Delta N \sigma_e L = 1.10^7 \times 1.5 \cdot 10^{-8} \times 200 \simeq 20 \text{ ps}^{-1}$$

Nos données numériques semblent donc incompatibles : au seuil expérimental, le gain est vingt fois plus élevé que les pertes. Il se peut que les résonances présentent d’autres pertes, dues par exemple à la rugosité et aux effets tridimensionnels, mais un facteur vingt serait détectable directement sur le spectre via la largeur des pics. A l’heure actuelle, nous suspectons plutôt la réabsorption par le colorant lui-même et l’estimation des sections efficaces.

Le large décalage de Stokes du DCM le rend apte à des applications lasers. Toutefois il existe un léger recouvrement entre la bande d’absorption et celle de fluorescence. Il est probable qu’il soit à l’origine du déplacement du spectre vers le rouge lors de l’augmentation du pompage [48]. Cet effet est bien visible sur les spectres de la figure 2.25 (a). La figure 2.25 (b) compare les spectres de fluorescence et d’ASE (Amplified Spontaneous Emission) et montre bien le rétrécissement et le décalage vers le rouge dû à l’absorption. Pour bien distinguer la fluorescence de l’ASE, les spectres ont été réalisés dans des conditions appropriées : pour la fluorescence, pompage continu d’une couche déposée sur une lame porte-objet dont l’indice de réfraction ne permet pas un confinement dans le plan ; pour l’ASE, pompage pulsé d’une couche sur SOG.

Le dynamique de l’effet laser ne nous est connue qu’à travers des expériences indirectes. Sauf mention contraire, les spectres présentés dans ce manuscrit sont enregistrés avec un temps d’intégration de 3s, c’est à dire qu’ils correspondent à la superposition de 30 spectres

³⁴Il s’agit d’un ordre de grandeur. Le calcul exact pour un résonateur Fabry-Perot conduit à $1/\gamma \simeq 0.3$ ps. Pour un stade de rayon $r = 30 \mu\text{m}$ et de forme $l/r = 0.5$ (périmètre $240 \mu\text{m}$), on obtient $1/\gamma = 1$ ps en supposant que la quantité $Imkr$ des modes les mieux confinés déduite des simulations ondulatoires reste constante jusqu’aux valeurs typiques de $Rekr$ considérés expérimentalement.

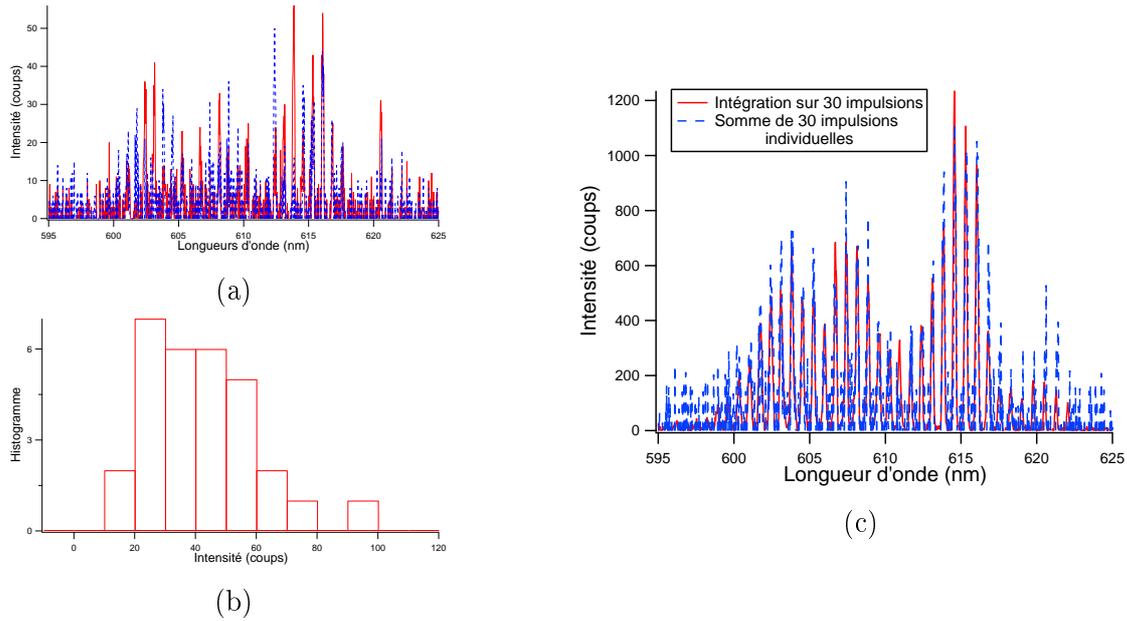


FIG. 2.26 – (a) Spectres enregistrés après deux impulsions de pompe adjacentes. (b) Histogramme des intensités par impulsion de pompe pour un pic apparaissant sur le spectre total en (c). (c) En trait continu rouge, spectre enregistré après une intégration de la caméra sur 3s. En pointillés bleus, somme de 30 spectres enregistrés avec une seule impulsion de pompe. Le signal somme (bleu) a été décalé de 0.14 nm vers le rouge pour qu’il se superpose au spectre standard (rouge).

individuels. La figure 2.26 (a) montre deux spectres individuels. Ils sont issus de deux impulsions de pompe successives, toutes choses étant égales par ailleurs. On constate que les pics n’apparaissent pas aux mêmes longueurs d’onde. Il faut sommer un grand nombre de ces spectres individuels pour obtenir un signal complet. La figure 2.26 (c) présente la comparaison entre le spectre standard avec un temps d’intégration de 3s (en rouge) et la somme de 30 spectres individuels (en pointillés bleus). Ce phénomène s’explique grâce à la largeur de gain homogène. En effet le démarrage de l’effet laser s’effectue aléatoirement dans chacune des résonances grâce à la fluorescence, le mode étant ensuite amplifié par émission stimulée. D’une impulsion de pompe à l’autre, l’intensité de chaque pic devrait donc varier de manière aléatoire. L’histogramme de ces intensités a été tracé sur la figure 2.26 (b) pour un des pics du spectre en (c). Sa forme de bosse assez large incline à penser qu’il s’agit bien d’un processus aléatoire. Pour l’identifier, il faudrait approfondir ces expériences.

Avec nos cavités, les spectres ne présentent en général qu’une seule série de raies régulièrement espacées. Parfois une deuxième série apparaît. Elle correspond à un autre type d’orbite périodique favorisée par l’effet laser. Une discussion sur le sujet est développée à la partie 4.1.3.

On s’attend à ce que les spectres lasers s’inscrivent dans la courbe d’ASE. En fait ils présentent en général des modulations très reproductibles, comme celui de la figure 2.27 (b). M. Austerer (Université technologique de Vienne) a remarqué un effet similaire sur des structures assez semblables [88]. Il l’attribue à une largeur de gain inhomogène due à la distribution en taille des puits quantiques. Cette explication ne peut pas s’appliquer à nos microlasers car la largeur de gain est essentiellement homogène. Des tests en pompage

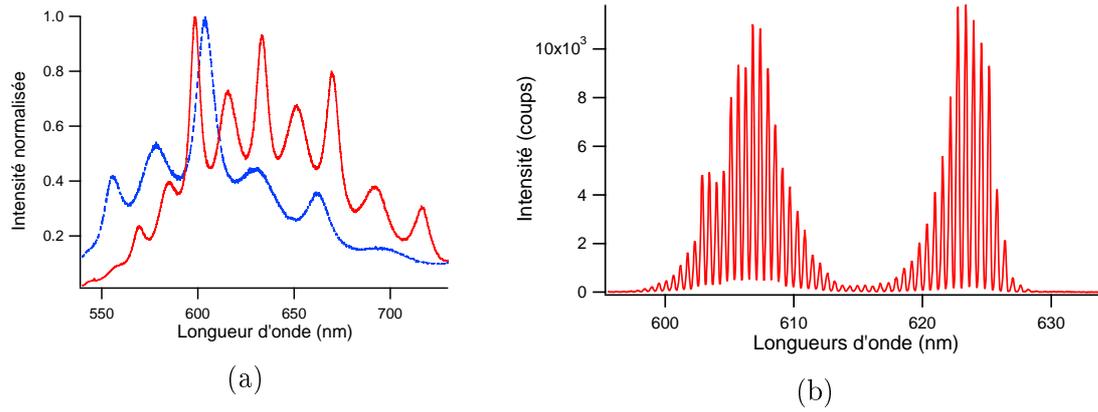


FIG. 2.27 – a) Spectres en pompe continue d’une couche SU8-DCM d’épaisseur $2 \mu\text{m}$ sur silice (en ligne continue rouge) et d’une couche de PMMA-DCM d’épaisseur $1.2 \mu\text{m}$ sur SOG (en pointillés bleus). b) Spectre en pompe standard impulsif pour une cavité de type Fabry-Perot de largeur $200 \mu\text{m}$ avec une couche d’épaisseur $0.6 \mu\text{m}$.

continu sur des couches uniformes ont montré que cet effet n’est lié ni au type de cavité utilisé, ni à l’émission stimulée, mais qu’il dépend des épaisseurs des couches et du confinement vertical. En effet, lorsque la propagation dans la couche n’est pas possible, le spectre de fluorescence ne présente pas de modulation (cf. figure 2.25 (b)). De plus, le nombre de bosses dépend de l’épaisseur comme le montre les spectres de la figure 2.27 (a). Un modèle de transmission verticale à travers les trois couches Si/SiO₂/PMMA-DCM reproduit à peu près les caractéristiques de ces modulations, mais il ne permet pas d’expliquer le couplage dans le plan.

Lorsque les stades sont longs (environ $l/r > 1$ et $r > 30 \mu\text{m}$), il apparaît des modulations de périodicité comparable, mais il n’est pas certain qu’elles soient de même nature. Dans [44], elles sont attribuées à des variations du facteur de qualité pour les résonances les mieux confinées.

2.3.3 Modèle et simulations numériques

Le modèle décrit dans cette partie propose une approche phénoménologique de l’effet laser dans les micro-résonateurs. On s’intéresse seulement au nombre total de photons dans chacun des modes et à des molécules évoluant dans un système à quatre niveaux avec largeur de gain homogène. Compte-tenu des temps de relaxation entre les différents niveaux, nous utilisons la réduction standard à un système à deux niveaux avec absorption des photons de pompe, mais pas de ceux émis par les molécules.

Tout d’abord on considère l’interaction d’un seul mode avec le milieu amplificateur et on suppose que la densité de molécules excitées \mathcal{M} reste constante. L’équation d’évolution du nombre de photons I s’écrit alors

$$\frac{dI}{dt} = \kappa \mathcal{M} I - \gamma I \quad (2.17)$$

L’échange d’excitation entre le milieu et le mode est représenté par $\kappa \mathcal{M} I$ et γI correspond aux pertes du mode. Pour identifier κ à des grandeurs connues, on peut remarquer que le seuil laser correspond au changement de pente, soit $\kappa \mathcal{M} = \gamma$. Avec ces notations, $\kappa = \sigma_e L$, où L est la distance parcourue par un photon pendant l’unité de temps ($L=200 \mu\text{m}$ en

1 ps dans un milieu d'indice 1.5). L'effet laser en impulsionnel devrait donc démarrer une fois que le nombre de molécules excitées \mathcal{M} devient supérieur à $\gamma/\kappa \simeq 5.10^5 \mu\text{m}^{-3}$. Avec la formulation (2.17), il est nécessaire d'imposer une condition initiale non-nulle, donc arbitraire. Dans la pratique, l'effet laser démarre sur les photons produits par fluorescence. Pour en rendre en compte, il faudrait utiliser un formalisme quantique assez lourd. Il est d'usage de ramener ces expressions couplant la matière et le champ électromagnétique à la formulation semi-classique suivante

$$\frac{dI}{dt} = \kappa\mathcal{M}(I+1) - \gamma I \quad \text{avec } I(0) = 0 \quad (2.18)$$

où le +1 représente le photon déposé dans le mode par fluorescence. Par commodité, l'origine des temps n'est pas toujours placée en $t = 0$. Dans les simulations, elle correspond au maximum de l'impulsion de pompe. Il faut alors comprendre les conditions initiales comme évaluées avant que l'influence de la pompe ne se fasse sentir.

Compte-tenu des propriétés du milieu amplificateur (cf. partie 2.3.1), il n'est pas possible d'utiliser un pompage stationnaire. De plus il faut ajouter à notre modèle (2.18) l'évolution de la densité de molécules excitées :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \kappa\mathcal{M}(I+1) - \gamma I & I(0) &= 0 \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -\kappa\mathcal{M}(I+1) - \Gamma\mathcal{M} + \mathcal{P} & \mathcal{M}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

De même que pour (2.17), $\kappa\mathcal{M}(I+1)$ correspond au couplage entre le mode et l'inversion de population. Le pompage est représenté par

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau_p^2}}$$

Le temps caractéristique de $1/\Gamma$ est celui de desexcitation globale vers l'ensemble de tous les niveaux disponibles. Comme la fluorescence est le processus le plus efficace, l'échelle de temps se ramène à la sienne, soit quelques nanosecondes, ce qui conduit à $b = \Gamma/\gamma \sim 10^{-2} - 10^{-3}$. Pour $b = 0$, le système global est sans perte : chaque excitation fournie par \mathcal{P} est transformée en photon et sera détectée via les fuites radiatives γI après un temps plus ou moins long.

L'échelle de temps est alors imposée par le pompage ($2\tau_p \simeq 30$ ps) ou par le taux de décroissance du mode. D'après la discussion de la partie précédente, la durée de vie d'un photon dans une cavité typique est de l'ordre de la picoseconde. Pour certaines formes bien confinantes (eg. disque) cette durée de vie devient plus importante mais il est vraisemblable qu'elle reste comparable à la durée de l'impulsion de pompe. D'après le système (2.19), l'échelle de temps naturelle est $\tau = \gamma t$. Mais comme la dynamique est imposée par le pompage, le nombre de pas de discrétisation est maintenue constant sur chaque τ_p , soit $\tau_p/\Delta\tau = 20000$. J'ai utilisé la méthode d'Euler pour résoudre numériquement ce système d'équations couplées non-linéaires. Lorsque le nombre de points est multiplié par un facteur 10 ou 100, les résultats restent parfaitement stables, ce qui atteste la fiabilité de l'algorithme et évite le recours à des méthodes plus sophistiquées. Les simulations laissent la liberté de jouer sur trois paramètres indépendants : la durée de pompage τ_p , le rapport b des pertes non radiatives sur celles qui le sont, et l'intensité du pompage \mathcal{P}_0 . Pour évaluer l'ordre de grandeur de \mathcal{P}_0 , on impose que la densité totale de molécules excitées $\Delta N = \int \mathcal{P}(t)dt = \mathcal{P}_0\tau_p\sqrt{\pi}$ reste constante quelle que soit la durée de l'impulsion de pompe,

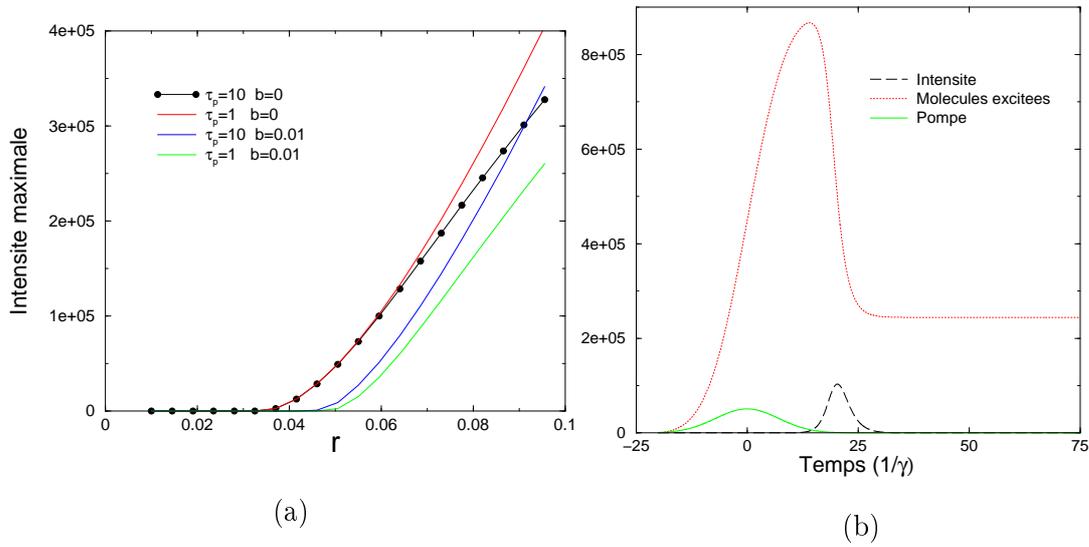


FIG. 2.28 – (a) Courbe de seuil laser pour différentes valeurs des paramètres : largeur temporelle de la pompe τ_p et pertes du milieu amplificateur b . On a tracé l'intensité maximale atteinte en fonction de l'intensité du pompage paramétrée par r . (b) Evolution temporelle des différentes grandeurs, avec $b = 0$ et $r = 0.06$. L'unité de temps vaut $1/\gamma \sim 1$ ps.

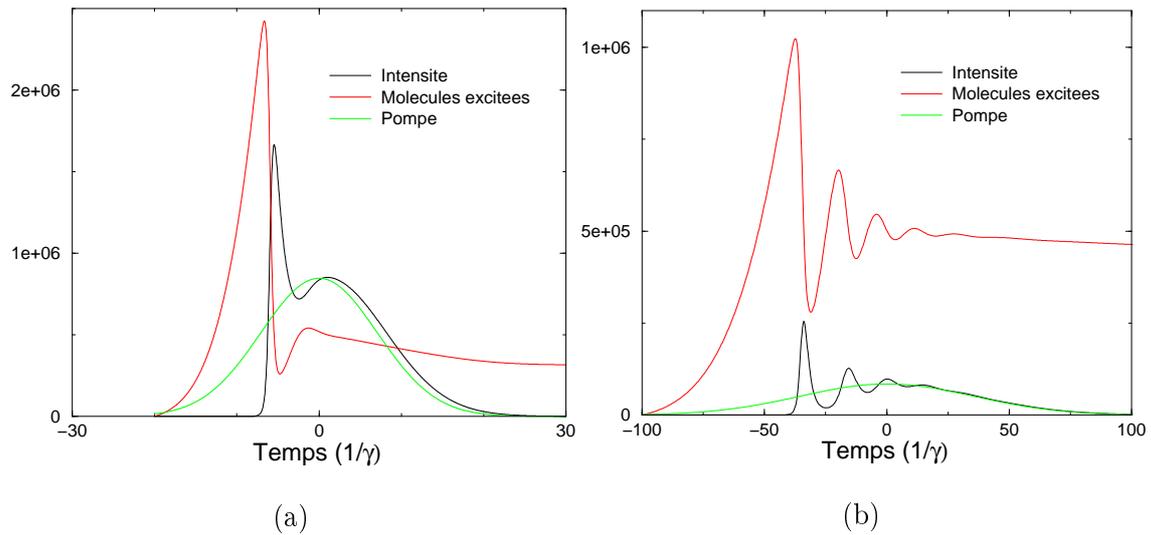


FIG. 2.29 – Evolution temporelle des différentes grandeurs pour $b = 0$. L'unité de temps vaut $1/\gamma \sim 1$ ps. (a) $\tau_p=10$ et $r = 1$. (b) $\tau_p=50$ et $r = 0.5$.

soit $\Delta N = 0.8 \cdot 10^7 \mu\text{m}^{-3}$. Dans la pratique, nous ferons varier le paramètre r défini par $\mathcal{P}_0 = \frac{\Delta N}{\tau_p \sqrt{\pi}} r$.

Ces simulations délivrent les profils temporels du nombre de photons dans le mode I et de la densité de molécules excitées \mathcal{M} , comme par exemple ceux de la figure 2.28 (b) réalisée juste au-dessus du seuil. Tant que l'effet laser n'a pas démarré, le mode prélève très peu d'excitations du milieu amplificateur, donc \mathcal{M} augmente comme l'intégrale de \mathcal{P} , de là la croissance rapide de la courbe rouge. D'après (2.17), l'amplification laser apparaît lorsque $\mathcal{M}\kappa/\gamma > 1$. Au seuil, la pompe délivre donc le nombre minimal d'excitations pour déclencher l'effet laser :

$$\frac{\mathcal{M}\kappa}{\gamma} = \frac{r_s \Delta N \kappa}{\gamma} = 1 \quad \text{soit} \quad r_s = \frac{1}{30} \simeq 0.03 \quad (2.20)$$

Comme les valeurs numériques utilisées sont celles déduites des expériences, on s'attend à trouver $r_s = 1$. Ce facteur 30 indique que le gain a été surestimé ou les pertes sous-estimées (cf. la discussion de la partie 2.3.2).

Les courbes de la figure 2.28 (a) représentent l'intensité maximale atteinte par le mode en fonction du paramètre de pompage r . Pour se rapprocher de l'expérience, on aurait dû considérer l'intensité totale émise, soit $\int \gamma I(t) dt$. Mais dans le cas d'un faible pompage ($r < r_s$), l'intensité varie très lentement, ce qui nécessite des fenêtres temporelles démesurées. De plus, il est vraisemblable que dans cette situation, la dissipation des photons de pompe s'effectue par d'autres voies. Dans la pratique, les courbes de seuil diffèrent à peine suivant qu'on ait recours à l'une ou l'autre de ces méthodes.

Sur la figure 2.28 (a), le seuil laser se distingue nettement et ne dépend pas de la largeur de pompe τ_p dans la mesure où celle-ci reste faible. Lorsque τ_p augmente, le seuil s'estompe pour laisser place à un accroissement progressif de l'intensité avec le pompage (non présenté). Par ailleurs, la position du seuil r_s dépend aussi des pertes du milieu amplificateur. Si elles s'accroissent ($b \sim 0.01$), le pompage doit s'intensifier pour les compenser. On note alors un décalage des courbes vers la droite (cf. figure 2.28 (a)). Plus le pompage est lent (τ_p grand), plus le système devient sensible à ces pertes, ce qui conduit à une augmentation supplémentaire de r_s .

Considérons par exemple le cas typique de la figure 2.28 (b) correspondant à un pompage proche du seuil ($r \gtrsim r_s$). La densité de molécules augmente rapidement, puis reste constante après la fin de l'impulsion de pompe ($b \sim 0$). Il faut ensuite attendre une vingtaine de picosecondes avant que le mode ne commence à se peupler grâce aux rares photons de fluorescence.

Les figures 2.29 (a) et (b) présentent deux cas de pompage très au-dessus du seuil ($r \gg r_s$). Dans cette configuration, l'effet laser démarre pendant l'impulsion de pompe. La croissance exponentielle de l'intensité entraîne une décroissance rapide de la densité de molécules excitées. Lorsque cette densité devient insuffisante pour compenser les pertes radiatives, l'intensité du mode décroît. Pour des impulsions de pompe suffisamment longues, le niveau excité a le temps de se repeupler, ce qui conduit à des oscillations au terme desquelles l'intensité reproduit le profil de la pompe. Une approximation adiabatique permet d'expliquer ce régime. Elle consiste à supposer un état stationnaire pour \mathcal{M} et I lorsque \mathcal{P} varie suffisamment lentement (valable si $\tau_p \gamma \gg 1$). Comme l'effet laser est installé, on peut négliger les " + 1 " de fluorescence ainsi que $\Gamma \mathcal{M}$ dans les équations (2.19). On en déduit

$$\mathcal{M}_{stat} = \frac{\gamma}{\kappa} \quad I_{stat} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{P}$$

Sur les figures 2.29 (a) et (b), on retrouve bien une densité de molécules excitées à peu près constante de valeur $\gamma/\kappa = 5.10^5 \mu\text{m}^{-3}$ et une intensité égale à la pompe (en unité de τ , $\gamma = 1$).

Ce modèle peut être généralisé à Q modes coexistant dans la cavité et puisant dans la même densité de molécules excitées (gain homogène) :

$$\begin{aligned} \frac{dI_q}{dt} &= \kappa_q \mathcal{M}(I_q + 1) - \gamma_q I_q & I_q(0) &= 0 & q &= 1, \dots, Q & (2.21) \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -\kappa \mathcal{M} \sum_{q=1}^Q (I_q + 1) - \Gamma \mathcal{M} + \mathcal{P} & \mathcal{M}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Chacun d'eux présente des pertes γ_q et un gain κ_q qui peuvent leur être spécifiques. Le couplage intervient à travers la densité de molécules excitées où ils s'alimentent. Dans le cas où tous les gains et pertes sont semblables, le seuil laser demeure identique à celui d'un mode unique car la condition (2.20) reste inchangée. Dans la pratique, pour un pompage proche du seuil, seul l'un ou l'autre de ces modes démarre à cause de la distribution statistique de la fluorescence dont ce modèle simplifié ne tient pas compte. Cet effet est nettement identifiable sur les expériences décrites à la partie 2.3.2 (eg. figure 2.26).

Si on considère deux modes q_1 et q_2 de pertes différentes avec $\gamma_1 < \gamma_2$, alors le seuil de q_1 est plus bas que celui de q_2 et ce dernier présente une intensité d'autant plus faible que le rapport γ_2/γ_1 est élevé.

Cette modélisation standard [105] présente un problème majeur : elle repose sur une répartition des photons entre les modes passifs de la cavité alors que ceux-ci ne sont pas orthogonaux. Certains groupes ont pris le parti de revenir à des équations d'évolution plus fondamentales (les équations de Maxwell-Bloch) où il n'est pas nécessaire d'introduire des modes a priori. Il s'agit de l'interaction entre le champ électrique, la polarisation et l'inversion de population. Au final, ils constatent que les profils de champ qui apparaissent reproduisent ceux des modes passifs [51, 67]. A l'heure actuelle, aucune interprétation n'a été avancée pour expliquer cette ressemblance troublante qui valide notre approche.

Toutefois il faut préciser qu'il ne s'agit que de résultats préliminaires et que la plupart des phénomènes observés au cours de notre étude sur les résonateurs diélectriques sont explicables par le modèle présenté dans cette partie.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rassemblé des informations relatives aux trois grands thèmes de cette étude. Tout d'abord, la constitution de ces résonateurs organiques a été décrite ainsi que leur protocole de fabrication. La description des dispositifs de tests a complété cette partie expérimentale dont les principaux éléments ont été repris dans [63]. Le cadre théorique a ensuite été exploré en insistant sur le contexte de milieu ouvert, spécifique à notre étude. Deux exemples ont été proposés : le disque, seul système intégrable connu, et le stade, archétype de dynamique chaotique. Les simulations numériques de nature géométrique et ondulatoire donnent accès à des informations supplémentaires. Pour compléter cette description de nos microcavités, la dernière partie traite de l'effet laser. Elle rappelle la vision communément adoptée dans la littérature avant de la confronter à nos propres observations et à un modèle dynamique.

Chapitre 3

Propriétés d'émission

Ce chapitre résume les études réalisées au cours de ma thèse sur une caractéristique essentielle des systèmes ouverts : leurs processus d'émission. Ceux-ci se répartissent en trois grandes catégories : effet tunnel, diffraction et réfraction. Les propriétés de l'effet tunnel dépendent fortement de la forme de la cavité. Pour le disque où il s'agit du seul mode d'émission dans le plan pour les résonances bidimensionnelles (cf. partie 2.2.2), il semble que la lumière reste confinée dans le plan et s'échappe par d'autres voies (diffusion sur la rugosité, effets tridimensionnels). L'efficacité de ce type d'émission reste assez faible. Ceci n'a rien d'étonnant compte-tenu des ordres de grandeur explorés : kR compris entre 100 et 1000. Par contre, la dépendance en k de la diffraction peut la rendre détectable expérimentalement. Dans la première partie, nous détaillerons une méthode analytique applicable à des singularités d'ordre supérieur à deux. Pour les singularités du premier ordre de type coin diélectrique, il n'existe pas de solution exacte, mais nous proposons une approche perturbative développée dans la deuxième partie. Quant à la dernière partie, elle traite de l'émission par réfraction, la plus courante et la plus aisément détectable. Il est possible de prévoir sa directivité par un modèle analytique, même dans le cas de système fortement chaotique et son étude apporte des informations fondamentales sur la structure du système dynamique interne à la cavité. Aux détours de chacune de ces parties, nous montrerons l'importance des orbites périodiques qui sous-tendent la dynamique de ces systèmes ouverts.

3.1 Singularités douces

3.1.1 Diffraction par une singularité du deuxième ordre : cas du stade

Le stade présente une singularité du deuxième ordre au niveau du raccord entre les arcs de cercle et les segments de droite. Au début de ma thèse, nous l'avons suspectée d'être à l'origine de l'émission directive. Par la suite, nous avons pu associer cette directionnalité à un autre processus de type purement réfractif en excellent accord avec l'expérience. Toutefois cette étude de la diffraction par la singularité a permis de développer des outils théoriques applicables à d'autres cas (cf. partie 3.2.2). A l'heure actuelle, les expériences n'ont pas pu déterminer quelle est l'importance de cette diffraction, mais quoi qu'il en soit, elle existe.

Pour traiter la diffraction par cette singularité d'ordre deux, nous avons adopté une procédure proposée par Keller et Kamietzky [57]. Elle consiste à se ramener à une interface plane et à tenir compte de la courbure comme un développement perturbatif dans les

conditions au bord.

Position du problème Le champ ψ à l'intérieur de la cavité (milieu i d'indice n_i) et à l'extérieur de la cavité (milieu e d'indice $n_e < n_i$) vérifie les équations de Helmholtz à deux dimensions (cf. partie 2.2.1) :

$$(\Delta + n_{ie}^2 k^2) \psi_{ie} = 0$$

La frontière est représentée sur la figure 3.1 et est définie par

$$y = 0 \quad x > 0 \quad (3.1)$$

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2 \quad x < 0 \quad (3.2)$$

Il s'agit d'un segment de droite pour $x > 0$ (eq. 3.1) et d'un arc de cercle de rayon R centré en $(x = 0, y = -R)$ pour $x < 0$ (eq. 3.2). Pour simplifier, nous choisissons la polarisation TM, c'est à dire que ψ représente le champ électrique et qu'elle vérifie les conditions de continuité à la frontière notée ∂ :

$$\psi_i|_{\partial} = \psi_e|_{\partial} \quad (3.3)$$

$$\partial_\nu \psi_i|_{\partial} = \partial_\nu \psi_e|_{\partial} \quad (3.4)$$

où ν représente la coordonnée normale à l'interface. La fonction d'onde est développée sous la forme

$$\psi_{ie} = \psi_{ie}^{(0)} + \frac{1}{k} \psi_{ie}^{(1)} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad (3.5)$$

qui reste cohérente avec les équations de propagation et les conditions au bord.

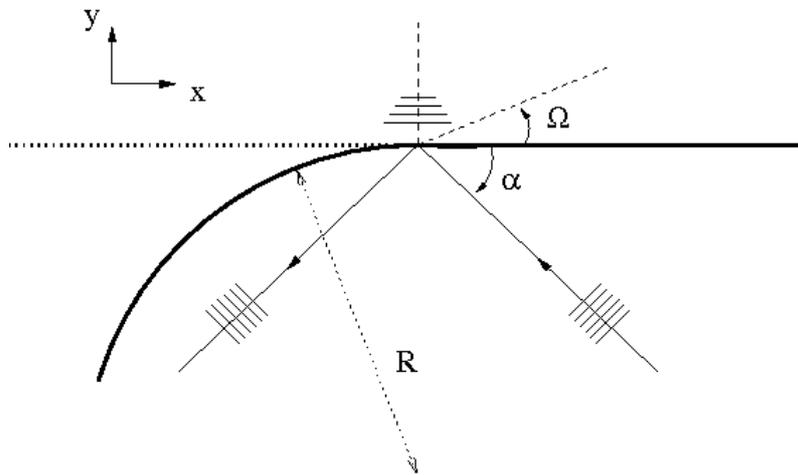


FIG. 3.1 – Schéma et notations pour le traitement de la diffraction par une singularité du deuxième ordre.

Ensuite on se place au voisinage de la singularité, soit $\frac{x}{R} \ll 1$, c'est à dire $y = -\frac{x^2}{2R}$ d'après (3.2), et on développe les conditions au bord en tenant compte de (3.5). En égalisant

les termes de même ordre en $1/k$, la condition (3.3) conduit à

$$\psi_i^{(0)}(x, 0) = \psi_e^{(0)}(x, 0) \quad \forall x \quad (3.6)$$

$$\psi_i^{(1)}(x, 0) = \psi_e^{(1)}(x, 0) \quad x > 0 \quad (3.7)$$

$$\psi_i^{(1)}(x, 0) = \psi_e^{(1)}(x, 0) + \frac{x^2}{2R} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y}(x, 0) \quad x < 0 \quad (3.8)$$

L'arc de cercle apporte une correction en $\partial_y \psi^{(0)}$. Pour la condition au bord sur la dérivée (3.4), il faut exprimer la coordonnée normale ν en fonction de y , et donc considérer le changement de variable $\nu \simeq R + y + \frac{x^2 + y^2}{2R}$ qui se traduit par

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \frac{x}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

en $y = 0$. En égalisant les termes du même ordre en $1/k$, la condition de continuité sur la dérivée normale conduit à

$$\partial_y \psi_i^{(0)}(x, 0) = \partial_y \psi_e^{(0)}(x, 0) \quad \forall x \quad (3.9)$$

$$\partial_y \psi_i^{(1)}(x, 0) = \partial_y \psi_e^{(1)}(x, 0) \quad x > 0 \quad (3.10)$$

$$\partial_y \psi_i^{(1)}(x, 0) = \partial_y \psi_e^{(1)}(x, 0) - \frac{x}{R} \partial_x \psi^{(0)}(x, 0) + \frac{x^2}{2R} \partial_y^2 \psi^{(0)}(x, 0) \quad x < 0 \quad (3.11)$$

Pour résumer, seule la partie courbe induit une modification de la fonction d'onde.

Résolution A l'ordre 0, l'interface se présente sous la forme d'une simple droite localisée en $y = 0$. Les modes propres de la propagation libre sont les ondes planes et le système est linéaire. Il est donc naturel d'exprimer $\psi^{(0)}$ sous la forme d'ondes planes incidente et réfléchi dans le milieu i et d'une onde transmise dans le milieu e , propagative selon x et, selon y , évanescence (cas de la réflexion totale) ou propagative (cas de la réfraction). L'onde arrive avec un angle α sur l'interface, comme indiqué sur la figure 3.1

$$\begin{aligned} \psi_i^{(0)} &= e^{-ixkn_i \cos \alpha} [e^{iykn_i \sin \alpha} + r e^{-iykn_i \sin \alpha}] \\ \psi_e^{(0)} &= t e^{-i\beta kx} e^{-\gamma ky} \end{aligned}$$

Avec l'égalité (3.6), on obtient $t = 1 + r$ et $\beta = n_i \cos \alpha$, et avec (3.9) $\gamma = \sqrt{n_i^2 \cos^2 \alpha - n_e^2}$ (réflexion totale) ou $\gamma = -i\sqrt{n_e^2 - n_i^2 \cos^2 \alpha}$ (réfraction). Ensuite, on utilise l'expression de $\psi^{(0)}$ pour déterminer l'ordre suivant $\psi^{(1)}$. En fait $\psi^{(1)}$ est continue à la frontière car (3.8) ne contient que la dérivée première de $\psi^{(0)}$ qui est continue. La seule condition au bord non triviale s'écrit alors

$$\partial_y \psi_i^{(1)}(x, 0) = \partial_y \psi_e^{(1)}(x, 0) + \frac{x^2}{2R} t e^{-i\beta kx} (n_a^2 - n_b^2) \quad x < 0 \quad (3.12)$$

Cette expression n'est pas linéaire en x . Elle va donc permettre de peupler les autres modes spatiaux à partir de $\psi^{(0)}$. C'est ce coefficient de couplage (le coefficient de diffraction) que nous cherchons. La procédure standard consiste à décomposer les fonctions $\psi_{ie}^{(1)}$ en ondes planes.

$$\psi_i^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int q_i(p) e^{ipkx} e^{-iyk\sqrt{n_i^2 - p^2}} dp \quad (3.13)$$

$$\psi_e^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int q_e(p) e^{ipkx} e^{+iyk\sqrt{n_e^2 - p^2}} dp \quad (3.14)$$

Dans le milieu i , les ondes diffractées se propagent dans la direction $y < 0$ et, dans le milieu e , vers les $y > 0$, d'où les signes devant y dans l'exponentielle. L'angle d'émission est défini par

$$\tan(\Omega) = \frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2}}$$

Il est représenté sur la figure 3.1. La continuité de $\psi^{(1)}$ conduit à $\int (q_i(p) - q_e(p)) e^{ipkx} = 0$ soit

$$q_i = q_e = q$$

Les conditions sur la dérivée (3.10) et (3.11) réécrite en (3.12) imposent

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\pi} \int q(p) k (\sqrt{n_i^2 - p^2} + \sqrt{n_e^2 - p^2}) e^{ipkx} dp &= 0 \quad x > 0 \\ &= \frac{x^2}{2R} tk^2 e^{-i\beta kx} (n_i^2 - n_e^2) \quad x < 0 \end{aligned}$$

En fait il s'agit d'une relation de transformée de Fourier

$$q(p) (\sqrt{n_i^2 - p^2} + \sqrt{n_e^2 - p^2}) = \frac{itk(n_i^2 - n_e^2)}{2R} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-i\beta kx} e^{-ipkx} d(kx)$$

L'intégrale se calcule avec un peu d'analyse complexe¹ : $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}$ avec $\lambda = -i(\beta + p)$, ce qui donne :

$$q(p) = \frac{t(n_i^2 - n_e^2)}{kR} \frac{1}{(\beta + p)^3} \frac{1}{\sqrt{n_i^2 - p^2} + \sqrt{n_e^2 - p^2}}$$

dont on déduit $\psi_i^{(1)}$ et $\psi_e^{(1)}$ via (3.13) et (3.14), par exemple

$$\psi_i^{(1)}(x, y) = \frac{t(n_i^2 - n_e^2)}{2\pi kR} \int \frac{1}{(\beta + p)^3} \frac{1}{\sqrt{n_i^2 - p^2} + \sqrt{n_e^2 - p^2}} e^{ipkx} e^{-iyk\sqrt{n_i^2 - p^2}} dp$$

Compte-tenu des dimensions caractéristiques de notre système ($kR \gg kx \gg 1$), on peut utiliser la méthode du col, appelée aussi méthode de la phase stationnaire [20, 23]. Il faut alors minimiser la fonction $f(p) = p x - \sqrt{n_i^2 - p^2} y$. Le point col p_0 s'écrit : $p_0 = \pm n_i \cos(\Omega)$. Ω est l'angle naturel dans le repère xOy (cf. Fig. 3.1) : $x = r \cos(\Omega)$ et $y = r \sin(\Omega)$. Dans la région i , $\sin(\Omega)$ est négatif. La condition $f'(p_0) = 0$ conduit à $p_0 = +n_i \cos(\Omega)$: $f(p_0) = n_i r$ et $f''(p_0) = -\frac{r}{n_i \sin^2(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \psi_i^{(1)}(x, y) &= \frac{t(n_i^2 - n_e^2)}{2\pi kR} \frac{1}{(n_i \cos(\alpha) + n_i \cos(\Omega))^3} \frac{1}{\sqrt{n_i^2 - n_i^2 \cos^2(\Omega)} + \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \cos^2(\Omega)}} \times \\ &\quad \times e^{in_i k r} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi n_i \sin^2(\Omega)}{kr}} \\ &= \frac{t}{kR} \left(1 - \frac{n_e^2}{n_i^2}\right) \frac{1}{(\cos(\alpha) + \cos(\Omega))^3} \frac{|\sin(\Omega)|}{n_i |\sin(\Omega)| + \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \cos^2(\Omega)}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{in_i k r}}{\sqrt{2\pi n_i k r}} \end{aligned}$$

¹On considère x complexe et λ réel positif ou négatif. Le contour d'intégration parcourt l'axe des réels de $-\infty$ à 0, puis, suivant le signe de λ , l'axe des imaginaires purs de 0 à $\pm\infty$ et se boucle par un arc de cercle. Il n'englobe aucun pôle. L'intégrale souhaitée se ramène donc à l'intégrale sur l'axe imaginaire avec le signe opposé.

Le terme $\frac{e^{in_i kr}}{\sqrt{n_i kr}}$ correspond à une onde sphérique centrée sur la singularité ($r=0$) qui se propage dans un milieu d'indice n_i . Le reste de l'expression représente le coefficient de diffraction. Il diverge pour $\alpha = \Omega + \pi$ (rayon réfléchi), ce qui est naturel avec notre méthode de calcul (divergence à l'optique géométrique). On procède de même pour l'onde diffractée dans le milieu e , soit

$$\psi_e^{(1)}(x, y) = \frac{t}{kR} \left(1 - \frac{n_e^2}{n_i^2}\right) \frac{1}{\left(\frac{n_i}{n_e} \cos(\alpha) + \cos(\Omega)\right)^3} \frac{|\sin(\Omega)|}{n_e |\sin(\Omega)| + \sqrt{n_i^2 - n_e^2 \cos^2(\Omega)}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{in_e kr}}{\sqrt{2\pi n_e kr}}$$

Il s'agit cette fois d'une onde sphérique qui se propage dans un milieu d'indice n_e avec un coefficient de diffraction qui diverge à l'angle de réfraction tel que $n_i \cos(\alpha) = -n_e \cos(\Omega)$. Pour obtenir l'expression complète des coefficients de diffraction, il faut calculer le coefficient de transmission à partir des conditions de continuité sur $\psi^{(0)}$, ce qui conduit à

$$t = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{n_i^2 \cos^2(\alpha) - n_e^2}}{in_i \sin(\alpha)}}$$

Il est réel dans le cas de la réfraction ($\alpha > \alpha_c$) et complexe pour la réflexion totale ($\alpha < \alpha_c$).

Coefficient de diffraction Pour être exhaustif, il faudrait distinguer le cas de l'incidence en réflexion totale de celui de la réfraction. En ce qui concerne le stade, on s'intéresse surtout à des ondes confinées dans la cavité qui subissent des pertes par diffraction. Donc nous allons seulement considérer le cas de la réflexion totale. Le coefficient de transmission s'écrit alors : $|t| = \frac{n_i |\sin(\alpha)|}{\sqrt{n_i^2 - n_e^2}}$. Dans le milieu e , le coefficient de diffraction est réel et son dénominateur ne s'annule jamais :

$$|D_e^{(1)}|(\alpha, \Omega) = \frac{2 |\sin(\alpha) \sin(\Omega)|}{n_i k R} \frac{1}{\left|\frac{n_i}{n_e} \cos(\alpha) + \cos(\Omega)\right|^3} \frac{\sqrt{n_i^2 - n_e^2}}{n_e |\sin(\Omega)| + \sqrt{n_i^2 - n_e^2 \cos^2(\Omega)}}$$

Il est tracé sur la figure 3.2 pour $\alpha = 0.5$, $n_i = 1.5$ et $n_e = 1$.

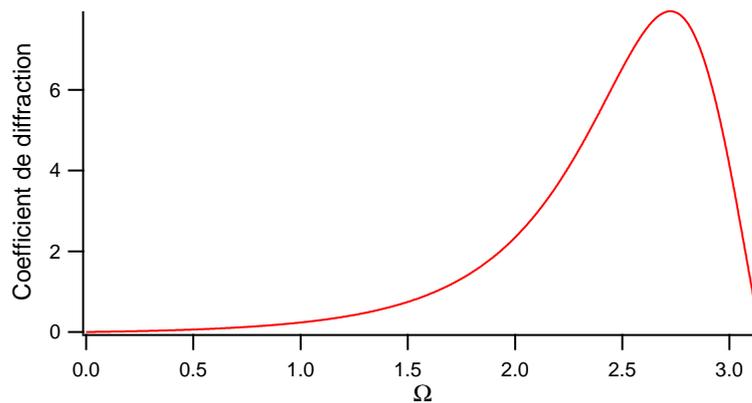


FIG. 3.2 – Coefficient de diffraction à l'extérieur de la cavité, pour un angle d'incidence $\alpha = 0.5$, avec les indices $n_i = 1.5$ et $n_e = 1$. Echelle verticale arbitraire.

Pour le coefficient de diffraction à l'intérieur, il faut distinguer entre différents domaines en Ω par rapport à l'angle critique $\chi_c = \text{Asin}(1/n)$ car le dénominateur $n_i |\sin(\Omega)| + \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \cos^2(\Omega)}$

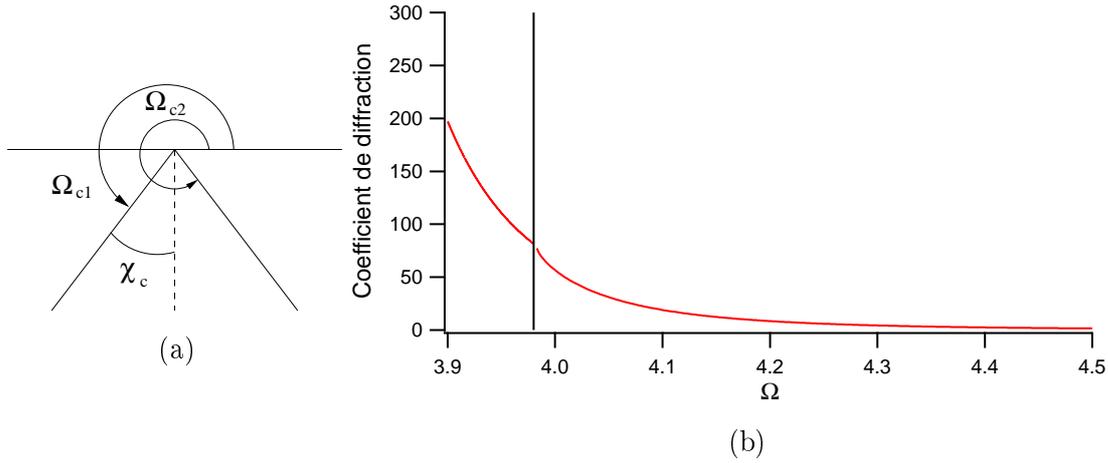


FIG. 3.3 – a) Schéma indiquant les notations pour les angles relatifs au coefficient de diffraction à l'intérieur de la cavité. b) Coefficient de diffraction à l'intérieur de la cavité, pour un angle d'incidence $\alpha = 0.5$, avec les indices $n_i = 1.5$ et $n_e = 1$. La barre verticale indique la position de Ω_{c1} .

passé de réel à complexe. Suivant les notations décrites par la figure 3.3, $\Omega_{c1} = \frac{3\pi}{2} - \chi_c$ et $\Omega_{c2} = \frac{3\pi}{2} + \chi_c$. Le coefficient de diffraction s'écrit alors

$$|D_i^{(1)}|(\alpha, \Omega) = \frac{2|\sin(\alpha)\sin(\Omega)|}{n_i k R} \frac{1}{(\cos(\alpha) + \cos(\Omega))^3} \quad \pi > \Omega > \Omega_{c1} \text{ ou } \Omega_{c2} > \Omega > 2\pi$$

$$|D_i^{(1)}|(\alpha, \Omega) = \frac{2|\sin(\alpha)\sin(\Omega)|}{n_i k R} \frac{1}{(\cos(\alpha) + \cos(\Omega))^3} \frac{\sqrt{n_i^2 - n_e^2}}{n_i |\sin(\Omega)| + \sqrt{n_e^2 - n_i^2 \cos^2(\Omega)}} \quad \Omega_{c1} > \Omega > \Omega_{c2}$$

Il diverge dans la direction $\Omega = \pi + \alpha$ qui correspond au rayon réfléchi. Pour le reste, le comportement est régulier en $1/(\cos(\alpha) + \cos(\Omega))^3$. Cette dépendance en $1/p^3$ provient directement du terme en x^2 dans la condition au bord (3.12) et correspond à une singularité du deuxième ordre. Par ailleurs, le coefficient de diffraction présente une décroissance en $1/kR$ en conformité avec le traitement au premier ordre en $1/k$ dont il dérive.

Par cette méthode perturbative, nous avons obtenu le coefficient de diffraction d'une onde plane par une singularité d'ordre 2. Son comportement des deux côtés de la frontière est résumé sur les figures 3.2 et 3.3 (b).

Pour une étude plus complète, il faudrait considérer une incidence avec un angle $\alpha' = \pi - \alpha$ et le cas de la réfraction. Dans la mesure où l'émissivité du stade peut être interprétée autrement, il n'y a pas lieu d'approfondir ces aspects dans ce manuscrit. Mais il est envisageable d'appliquer cette méthode à d'autres formes avec des singularités d'ordres différents et dans des configurations variées. Son utilisation pour le calcul perturbatif des résonances de disques faiblement coupés est développée à la partie 3.2.2 et s'est révélée très efficace.

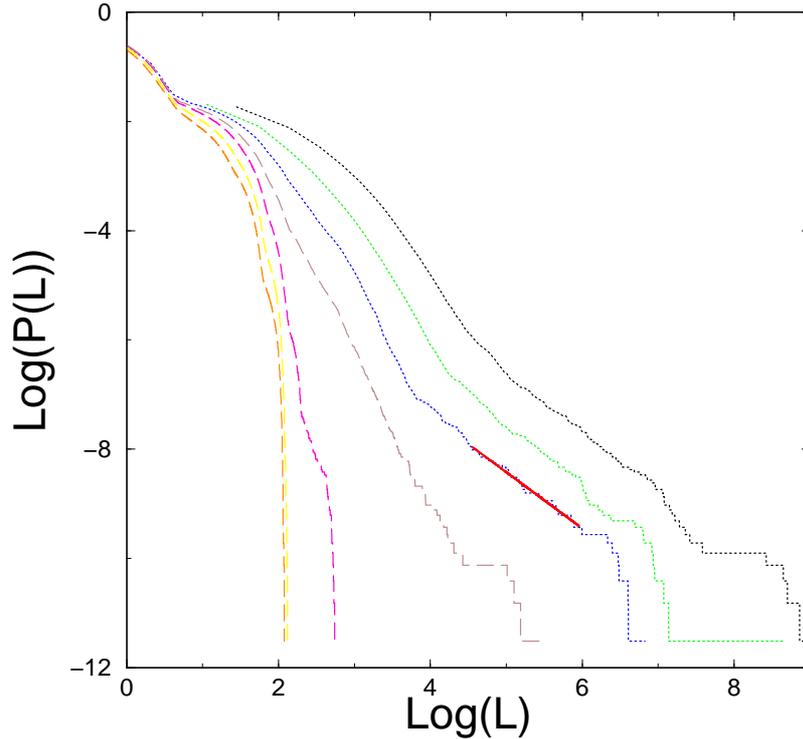


FIG. 3.4 – *Mesure des décroissances temporelles pour le disque coupé : logarithme de la probabilité de survie d'un rayon en fonction du logarithme de la distance parcourue. d croît de la gauche vers la droite. L'ajustement linéaire en trait épais rouge a été réalisé sur la courbe correspondant à $d = 0.7$ et donne une pente de -1.03 . Les courbes correspondant à $d < 0.7$ sont indiquées en tiretés et celles à $d \geq 0.7$ en pointillés.*

3.1.2 Perturbation d'une orbite marginale par une singularité

La présence d'une singularité ne diffracte pas seulement les ondes, elle modifie aussi le comportement des orbites et conduit à une dynamique temporelle originale.

La position des orbites périodiques stables et instables est fixée. En revanche, les orbites marginales peuvent "se déplacer" en ce sens qu'un rayon proche de cette orbite se décale à chaque rebond tout en restant dans le voisinage de l'orbite. La figure 2.17 (b) en présente une illustration pour le disque coupé. Des trajectoires s'enroulent au voisinage de polygones : à chaque tour, elles se décalent légèrement car leur angle de réflexion n'est pas exactement celui d'un polygone régulier. Ce comportement leur procure un temps de vie² beaucoup plus long que la plupart des autres trajectoires. Elles sont détruites lorsqu'elles franchissent la singularité et sentent la rupture de courbure. Cet allongement du temps de vie est bien visible sur la figure 3.4 issue de simulations en rayons, rapportant les décroissances temporelles pour des disques coupés de différents paramètres d (cf. figure 3.5 pour les notations). La courbe brune ($d = 0.7$) marque la transition entre des valeurs de d où il n'existe pas d'orbites périodiques en polygone (courbes orange, jaune et violette) et d'autres (courbes bleue, verte et noire) où elles sont bien présentes. Pour ces dernières, l'espérance de vie d'un rayon augmente considérablement. Prenons comme référence par exemple $\ln(P(L)) = -8$, alors $\ln(L) \simeq 2$ pour $d < 0.7$, tandis que $\ln(L) \simeq 6$ pour $d > 0.7$.

²Comme $c = 1$, le temps de vie d'un rayon dans la cavité est équivalent à la distance parcourue.

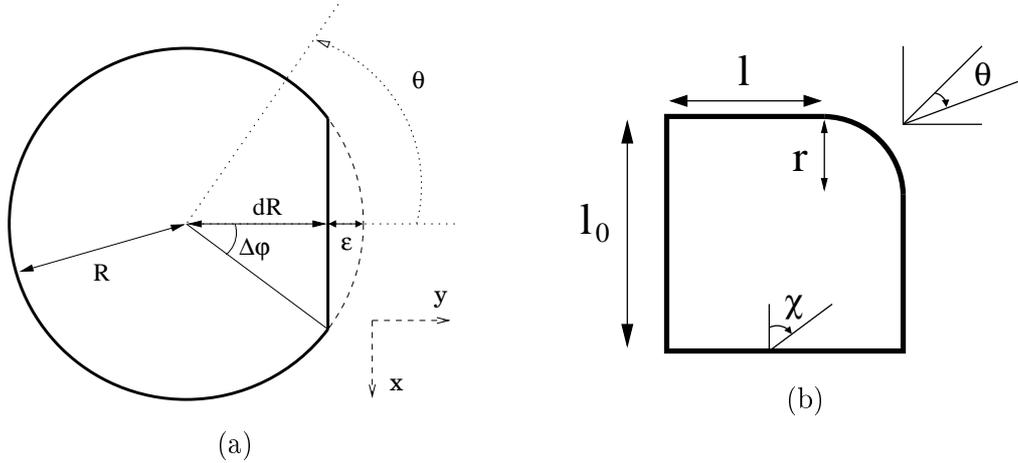


FIG. 3.5 – a) Notations pour le disque coupé. b) Notations pour le carré-rond. $l_0 = l + r$

Autre effet remarquable³, le comportement temporel lié à ces orbites suit une loi en $1/L$, alors que la contribution d'un unique mode quasi-stationnaire conduit nécessairement à une décroissance en $e^{-\beta L}$ (cf. partie 2.2.1) très bien mise en évidence en l'absence d'orbite marginale (cf. figure 2.17 (a) et partie 3.3.2). Cette dépendance temporelle est soulignée par l'ajustement linéaire de pente -1.0 représenté en rouge sur la figure 3.4. Les courbes vertes et noires lui sont bien parallèles.

Cette décroissance caractéristique apparaît de manière plus marquée dans le carré-rond. Il s'agit d'un carré muni d'un coin arrondi (cf. figure 3.5 (b)). La singularité d'ordre deux entre le segment de droite et l'arc de cercle le rend chaotique au même titre que le stade [27]. Pour $l/r > 1$, il possède une seule orbite marginale confinée par réflexion totale : le diamant (cf. fig. 3.7 (a)). Les décroissances temporelles pour différentes valeurs de l/r sont tracées sur la figure 3.6. Les ajustements linéaires en rouge présentent tous des pentes égales à -1.0 à quelques pourcents près, correspondant à un comportement en $1/L$.

Cette décroissance en $1/L$ d'une orbite marginale peut s'expliquer en adaptant une approximation proposée par Baladi, Eckmann et Ruelle [7]. Nous allons supposer qu'un rayon au voisinage du diamant sort de la cavité dès qu'il touche la partie circulaire. Cette hypothèse respecte les ordres de grandeur car après un rebond sur la frontière courbée, la trajectoire du rayon est fortement modifiée et il disparaît en moins de deux réflexions, alors qu'il a déjà parcouru plusieurs tours de diamant. Donc globalement, la longueur à prendre en compte est celle parcourue jusqu'au rebond sur la partie circulaire. Nous allons donc considérer un ensemble de rayons qui partent d'un même point distant de x_0 de la singularité, et dont les angles d'incidence sont proches de $\pi/4$ avec une certaine distribution $\rho(\chi)$. Par simplicité, seuls les angles supérieurs à $\pi/4$ sont pris en compte. Les autres conduisent à des trajectoires se déplaçant en sens opposé. Les rayons dont les angles d'incidence χ sont les plus proches de $\pi/4$ se déplacent les moins vite vers la singularité et vont donc survivre plus longtemps, c'est à dire qu'ils vont parcourir une plus longue distance avant de toucher la singularité. Nous cherchons $P(L)$, la probabilité pour qu'un

³Cet effet a été rapporté dans [9] et [77], mais je n'avais pas eu connaissance de ces travaux lorsque j'ai étudié ces aspects.

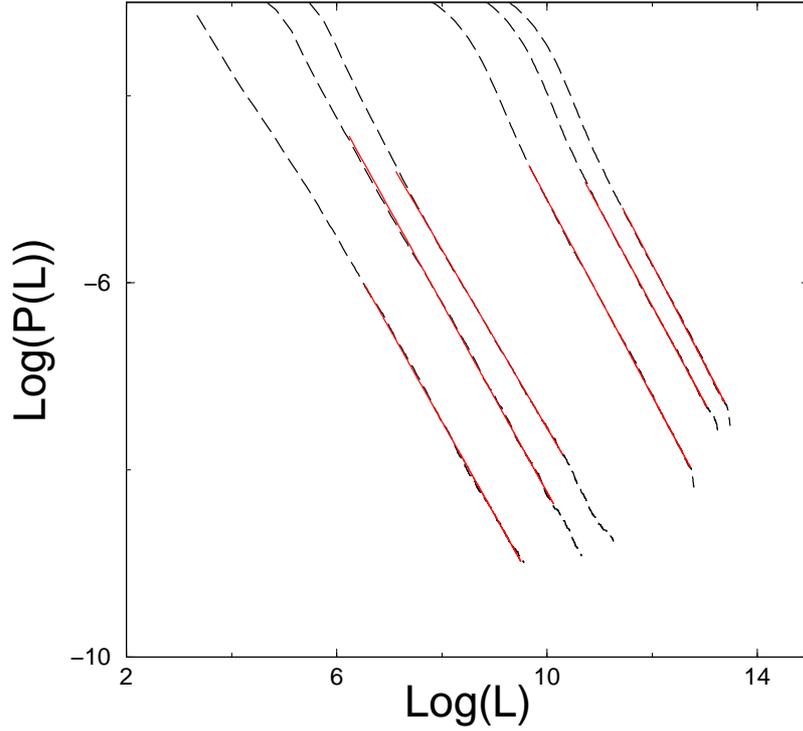


FIG. 3.6 – Mesure des décroissances temporelles pour le carré rond : logarithme de la probabilité de survie d'un rayon en fonction du logarithme de la distance parcourue. Les courbes en pointillés noirs sont obtenues pour des valeurs de l/r croissantes de la gauche vers la droite : 1, 5, 10, 50, 80 100. Les ajustements linéaires en trait épais rouge donnent des pentes égales à -1.00 ± 0.05 .

rayon reste confiné dans la cavité après avoir parcouru la distance L :

$$P(L) = K \int_{\pi/4}^{\chi_L} \rho(\chi) d\chi \quad (3.15)$$

χ_L correspond à l'angle limite au-delà duquel un rayon touche la singularité avant d'avoir parcouru la distance L . Pour trouver $P(L)$, il faut calculer χ_L .

A chaque tour, un rayon parcourt la distance

$$D = \frac{2l_0}{\cos(\chi)}$$

et il se déplace de

$$\Delta x = 2l_0(\tan(\chi) - 1)$$

le long du côté. A la distance L , il a réalisé entre m et $m + 1$ tours, suivant son angle χ :

$$(m + 1)D > L > mD \implies m \simeq \frac{L \cos(\chi)}{2l_0}$$

Il n'a pas encore touché la singularité si

$$m\Delta x < x_0 \iff \sin(\chi) - \cos(\chi) < \frac{x_0}{L}$$

L'angle χ_l vérifie donc

$$\sin(\chi_L) - \cos(\chi_L) = \frac{x_0}{L}$$

Lorsque L augmente, χ_l se rapproche de $\pi/4$. Pour $L \gg l_0$, on peut écrire $\chi_l = \pi/4 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$, soit

$$\sqrt{2} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3) = \frac{x_0}{L} \quad (3.16)$$

Les termes en ϵ^2 se sont supprimés, ce qui rend l'approximation d'autant meilleure. Ensuite il faut l'injecter dans l'expression de la probabilité (3.15)

$$P(L) = K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{x_0}{\sqrt{2}L}} \rho(\chi) d\chi$$

Toujours dans le cas où $L \gg l_0$, cette intégrale s'approxime par l'intégrande $\rho(\frac{\pi}{4})$ multipliée par l'intervalle $\frac{x_0}{\sqrt{2}L}$, soit

$$P(L) = K \frac{x_0}{\sqrt{2}L} \rho\left(\frac{\pi}{4}\right) \propto \frac{1}{L}$$

On obtient bien le comportement en $1/L$ attendu, indépendamment du point de départ x_0 ou de la distribution initiale $\rho(\chi)$. Ce raisonnement se généralise à d'autres formes de cavité présentant des orbites marginales. On peut s'attendre toutefois à des décroissances en $1/\sqrt{L}$ si le premier terme non nulle dans (3.16) est d'ordre 2.

Conclusion Les singularités jouent un rôle déterminant dans les propriétés d'émission. Du point de vue ondulatoire, elles diffractent les ondes. Nous avons dérivé ce coefficient de diffraction pour une singularité d'ordre deux et cette méthode peut être étendue aux ordres supérieurs. Par l'approche en rayons, nous avons montré qu'elles conduisent à une décroissance temporelle particulière lorsqu'il existe des orbites marginales confinées.

3.2 Singularités du premier ordre : le coin

Les propriétés d'émission du stade ne semblent pas gouvernées par la diffraction car la lumière peut sortir par réfraction (cf. partie 3.3), mécanisme qui s'avère beaucoup plus efficace. Pour certaines formes de cavité toutefois, les sorties classiques sont condamnées et il est nécessaire de considérer les effets ondulatoires. C'est le cas par exemple des polygones où il existe des orbites marginales confinées par réflexion totale (carré, pentagone, etc...). L'émission s'effectue alors par les coins (cf. partie 3.2.1). A l'heure actuelle, la diffraction d'une onde par une arête diélectrique reste un problème insoluble alors qu'il possède un grand nombre d'applications directes d'intérêt général comme la propagation de rayonnements électromagnétiques en milieu urbain. L'émission de nos micro-lasers ne pourra donc pas être complètement élucidée et sera traitée en partie par approche perturbative (cf. partie 3.2.2). Mais à l'inverse, ce genre d'étude permet aussi d'éclairer sous un nouvel angle ce problème non résolu de physique fondamentale et apportera peut être des réponses partielles.

3.2.1 Polygones

Approche simpliste

Des cavités en forme de polygone sont couramment décrites dans la littérature car leurs symétries semblent se prêter aisément à la modélisation [24, 31, 45, 81, 92, 119]. Dans la

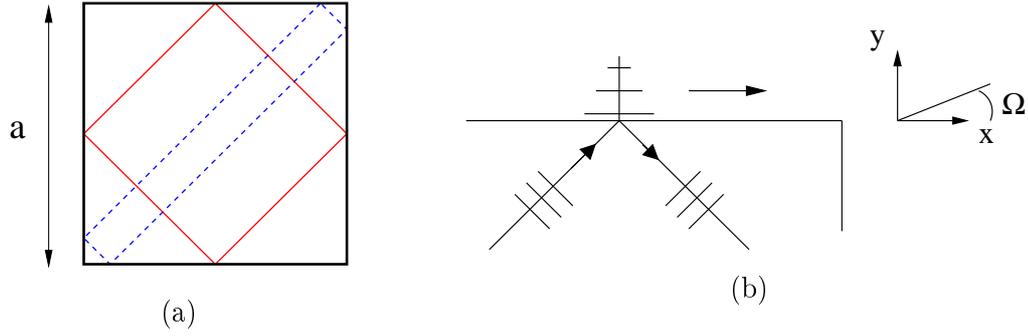


FIG. 3.7 – a) *Orbite en diamant dans le carré. Angle d'incidence. a côté du carré.* b) *Notation pour la diffraction simpliste par le coin.*

partie 4.2, les modes à faibles pertes sont décrits en termes de "superscars", orbites marginales confinées par réflexion totale. Cette approche permet de retrouver les principales propriétés spectrales. Toutefois elle ne dit rien sur le champ à l'extérieur de la cavité. Nous allons donc extrapoler d'après une idée exploitée entre autres dans [119].

Considérons l'exemple du carré. La superscar associée correspond à l'orbite en diamant décrite sur la figure 3.7 (a). Elle est confinée par réflexion totale avec des angles d'incidence $\chi = 45^\circ$. Restreignons-nous au cas élémentaire détaillé sur la figure 3.7 (b). Dans la limite qui nous intéresse $ka \gg 1$, on peut raisonnablement considérer qu'il s'agit d'une onde plane en réflexion totale sur une interface plane infinie. Elle génère donc une onde évanescente selon y , propagative dans la direction des x positifs, de la forme $s(x, y) = e^{ikx}e^{-\gamma y}$ qui est diffractée lorsqu'elle atteint le coin. Sur l'arête définie par $x = 0$, il faut prendre en compte, l'amplitude propagative dans la direction x , soit $s(0, y) = e^{-\gamma y}$ pour $y \in [0, \infty[$ et $s(0, y) = 0$ pour $y \in]-\infty, 0]$. La décomposition en ondes planes conduit à

$$\hat{s}(0, p) = \int_0^\infty e^{-\gamma y} e^{-ipy} dy = \frac{1}{\gamma + ip}$$

dont le module au carré $1/(\gamma^2 + p^2)$ décroît rapidement avec p . L'émission est donc orientée principalement dans la direction $\Omega \simeq 0$ où Ω est défini par $\sin(\Omega) = p/k$. Les mesures expérimentales sont réalisées en champ lointain, c'est à dire dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer qui correspond justement à la transformée de Fourier de $s(0, y)$. On obtient donc une répartition d'intensité de la forme

$$I(x = \infty, p) = \frac{1}{\gamma^2 + p^2}$$

Il faudrait aussi tenir compte de l'onde circulant en sens inverse, de la forme $s_-(x, y) = e^{iky}e^{-\gamma x}$, et qui peut interférer avec celle considérée ci-dessus $s_+(x, y) = e^{ikx}e^{-\gamma y}$. Mais dans la mesure où chacune conduit à une émission très directive dans des directions orthogonales, le recouvrement reste faible et peut être négligé.

Ce modèle très simple conduit donc à un diagramme d'émission constitué de pics de largeur 2γ disposés tous les 90° . Les simulations ondulatoires confirment cette approche comme le montre la figure 3.8 où l'intensité est maximale autour de $\Omega = 0^\circ$ et $\Omega = 90^\circ$. D'après ce modèle, on s'attend à une demi-largeur angulaire $\Delta\Omega$ telle que

$$\sin(\Delta\Omega) = \frac{\Delta p}{k} = \frac{\gamma}{k} = \sqrt{n^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1} \implies \Delta\Omega \simeq 20^\circ \quad (3.17)$$

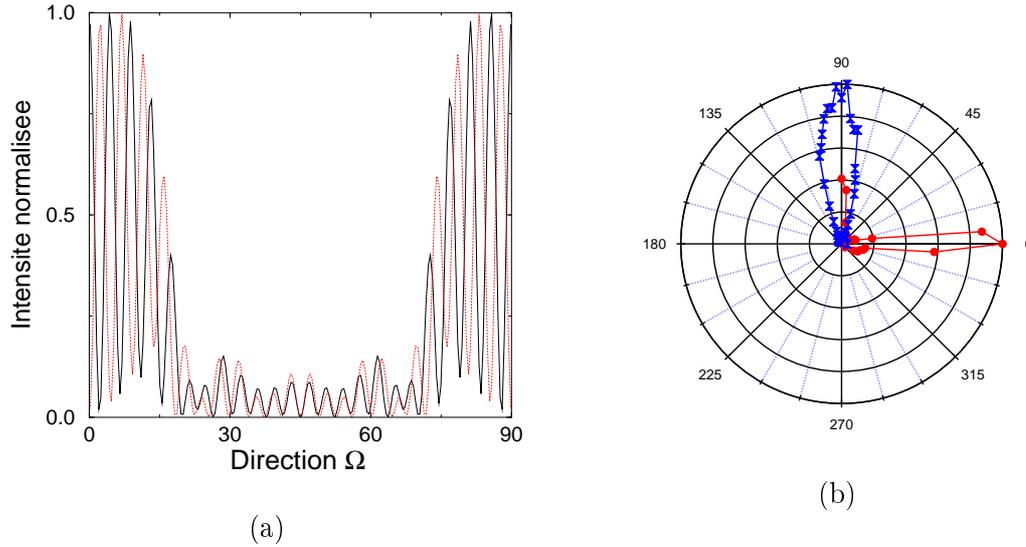


FIG. 3.8 – Intensité en champ lointain pour un carré de côté a . (a) Simulations ondulatoires pour deux résonances bien confinées successives en polarisation TM antisymétriques par rapport aux diagonales. En pointillés rouges $ka = 66.00 - 0.027 i$ et en ligne continue noire $ka = 68.74 - 0.026 i$. Tracé de la fonction $|f(\Omega)|^2$ dont la définition est donnée par l'expression (3.26). (b) Intensités normalisées mesurées en champ lointain en fonction de l'angle Ω . En sabliers bleus, microlaser de côté $a = 130 \mu m$ fabriqué selon le protocole décrit au paragraphe 2.1.2 et sélectionné pour la qualité de ses coins. En ronds rouges, microlaser de côté $a = 100 \mu m$ gravé par faisceau électronique.

qui correspond à peu près à la largeur des pics de la figure 3.8 (a).

Les observations expérimentales confirment ce modèle. La figure 3.8 (b) montre les diagrammes d'émission en champ lointain pour deux carrés à la gravure soignée. La largeur des pics est conforme à la prédiction (3.17), mais il faut préciser que l'angle de collection de la lentille L3 (cf. schéma 2.8) ne permettrait pas de mesurer réellement une meilleure directivité si elle existait.

Ce modèle prévoit quatre directions d'émission parallèlement à chacune des faces. Chacun de ces lobes présente une largeur angulaire totale de 40° qu'il n'est pas possible de réduire en améliorant la qualité de gravure des coins ou en se rapprochant de la limite semi-classique. A l'heure actuelle, aucune expérience ou simulation numérique n'infirme cette prédiction.

Carré et carré-rond

Un coin ne possède pas de taille caractéristique. A toutes les échelles, il se présente de manière identique. Mais dans la pratique, la précision de gravure - et même au-delà, la limite atomique - impose un rayon de courbure minimum. Il est donc légitime de s'interroger sur l'influence d'un coin arrondi. Dans cette partie, nous utiliserons le carré-rond comme modèle ou, plus précisément, le quart de carré-rond dessiné sur la figure 3.5 (b). Il présente l'avantage majeur qu'à la différence du vrai carré, il est chaotique et peut donc être étudié par des simulations en rayons. Pour $l/r \rightarrow \infty$, il se rapproche du vrai carré.

La figure 3.9 présente les distributions des angles d'émission θ obtenues par des simulations

en rayons⁴. Le profil change selon la distance minimale L parcourue par les rayons pris en compte. On peut distinguer trois régions. Pour les petits L , l'émission est centrée en $\theta = 0$ avec des ailes importantes. Puis, pour des L intermédiaires, les ailes disparaissent et il ne reste que le pic central. Enfin, pour les grands L , la distribution se sépare en deux lobes qui se déplacent vers $\theta = 45^\circ$. Ces graphes ont été réalisés pour $l/r = 10$, donc $L = 50$ correspond à une distance légèrement inférieure à deux fois la longueur du diamant. A partir de $L = 200$, on peut considérer que le régime "stationnaire" est atteint et que seuls restent à l'intérieur les rayons proches du diamant.

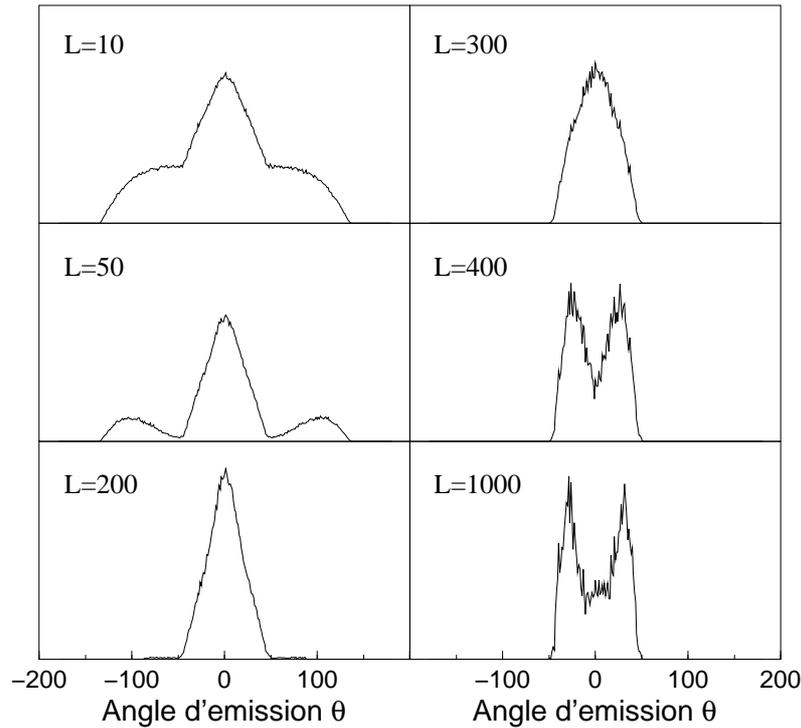


FIG. 3.9 – Distribution des angles d'émission pour un carré-rond de forme $l/r = 10$. Ces simulations ont été réalisées avec 10^6 rayons lancés de manière uniforme en position et en angle. Seuls ceux ayant parcouru plus d'une certaine distance L sont considérés.

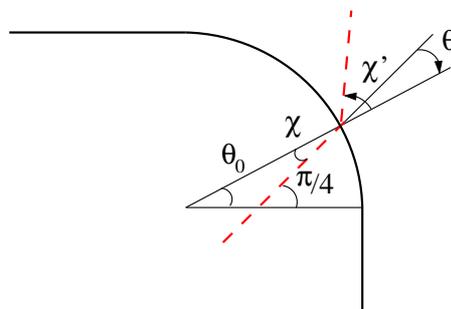


FIG. 3.10 – Notations pour les directions d'émission du carré rond.

⁴Pour des raisons de symétrie, dans cette partie, les angles θ sont comptés algébriquement à partir de la diagonale du carré (cf. fig. 3.10).

Pour modéliser ces distributions, considérons des rayons au voisinage du diamant et le schéma de la figure 3.10. Ces rayons se réfléchissent sur les parties droites avec un angle très proche de $\pi/4$. Mais lorsqu'ils rencontrent l'arrondi, leur angle d'incidence χ dépend du point d'impact et peut devenir inférieur à l'angle critique conduisant à une émission par réfraction. La position du point d'impact étant paramétrée par l'angle θ_0 , la distribution des directions d'émission $P(\theta)$ dépend alors de la distribution des points d'impact $\mathcal{P}(\theta_0)$, suivant la loi

$$P(\theta) = \int_{\theta_0^{min}}^{\pi/4} \delta(\theta - f(\theta_0)) \mathcal{P}(\theta_0) d\theta_0 \quad (3.18)$$

où $f(\theta_0)$ donne l'angle d'émission θ en fonction du point d'impact θ_0 :

$$\theta \equiv f(\theta_0) = \theta_0 - \frac{\pi}{4} + A \sin(n \sin(\frac{\pi}{4} - \theta_0))$$

Les bornes de l'intégrales (3.18) sont restreintes par la symétrie du problème et par l'angle critique. En effet θ_0^{min} défini par $n \sin(\pi/4 - \theta_0^{min}) = 1$ correspond à l'angle θ_0 minimal conduisant à une sortie réfractive et l'intégrale complémentaire de $\pi/4$ à $\pi/2 - \theta_0^{min}$ est obtenue par symétrisation de $P(\theta)$ par rapport à $\theta = 0$. Pour une distribution $\mathcal{P}(\theta_0)$ uniforme, l'intégrale (3.18) se calcule analytiquement en utilisant le changement de variable $\delta(g(x)) = \delta(x - \bar{x})/|g'(\bar{x})|$ où \bar{x} est le zéro de g et $g(\theta_0) = \theta - f(\theta_0)$. La distribution des directions d'émission ainsi obtenue est tracée sur la figure 3.11 (a) en pointillés bleus après symétrisation. La comparaison avec la courbe continue rouge déduite directement des simulations numériques est très satisfaisante. Les principales caractéristiques telles que la largeur et le support sont bien reproduites, ce qui confirme la validité de notre modèle. On peut aussi s'intéresser aux rayons qui gouvernent la dynamique aux temps longs, c'est à dire ceux très proches de diamant. A chaque tour, ils se déplacent très légèrement, donc lors de l'émission par réfraction, leur angle d'incidence s'approche de l'angle critique. Pour modéliser ce phénomène, on peut choisir par exemple une gaussienne centrée en $\theta_c = \theta_0^{min}$ dont le paramètre α gouverne la largeur :

$$\mathcal{P}(\theta_0) \propto e^{-\alpha^2(\theta_0 - \theta_c)^2/\pi^2}$$

Sur la figure 3.11 (b) sont reportées les distributions d'émission (non symétrisées) calculées pour différentes valeurs de α . Lorsque ce paramètre augmente, on note un creusement du lobe principal en $\theta = 0$ et le lobe latéral ainsi formé se rétrécit et se décale vers $\theta = 45^\circ$. On retrouve ainsi le comportement observé avec les simulations en rayons et décrit par les trois graphes de droite de la figure 3.9.

En résumé, cette étude classique d'un carré arrondi montre que la lumière est émise principalement dans la direction des diagonales. Mais aux temps longs, l'émission s'oriente parallèlement aux faces. Grâce à ces observations, nous pouvons expliquer pourquoi les carrés testés expérimentalement dans [31] et par nous-mêmes⁵ n'émettent pas dans l'axe des faces, mais avec un certain angle par rapport aux côtés (cf. figure 3 (a) dans [31]) alors que les micro-lasers gravés par faisceau électronique émettent bien parallèlement aux faces (cf. figure 3.8 (b)). En effet la qualité de gravure joue sur le temps de vie de la lumière dans la cavité. La suppression des défauts (eg. rugosité) limite les diffusions intempestives. La dynamique est alors dictée par les rayons qui sont les plus proches du diamant et la direction d'émission tend à devenir parallèle aux faces.

⁵Dans un cas comme dans l'autre, les cavités étaient fabriquées dans la salle blanche du LPQM selon le même protocole.

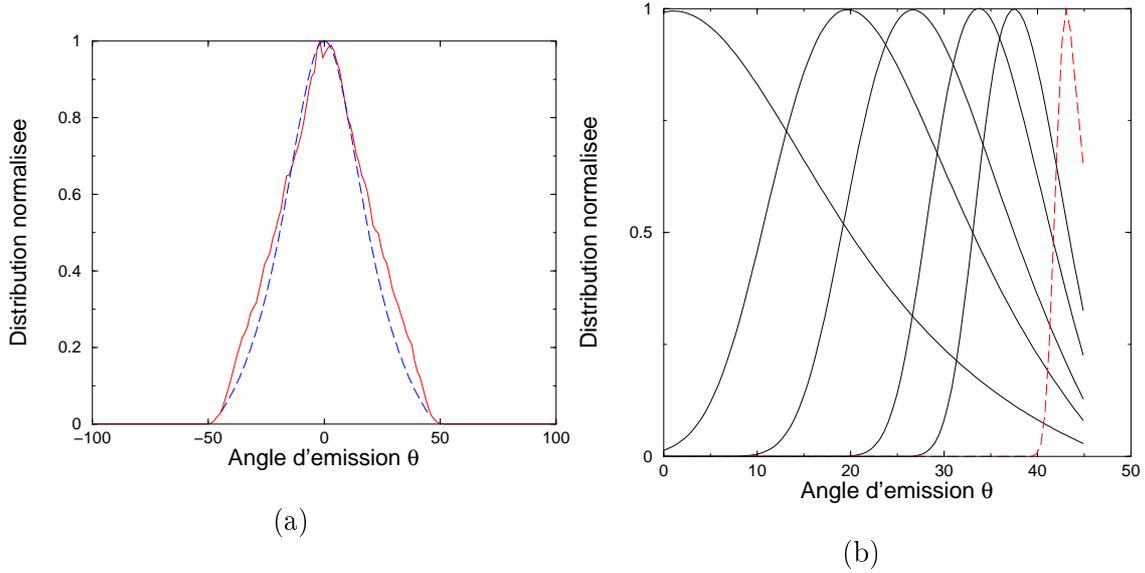


FIG. 3.11 – (a) Distributions des directions d'émission pour un carré-rond de forme $l/r = 50$. Les maxima ont été normalisés à 1. L'histogramme en ligne continue rouge correspond à 10^6 rayons lancés uniformément en position et en direction à l'intérieur de la cavité. Ne sont comptés que ceux qui ont parcouru au moins une distance de $300 r$ avant de sortir. La prédiction théorique avec une distribution $\mathcal{P}(\theta_0)$ uniforme est représentée en tirets bleus. (b) Distributions théoriques des directions d'émission lorsque la largeur de la distribution $\mathcal{P}(\theta_0) = e^{-\alpha^2 (\theta_0 - \theta_c)^2 / \pi^2}$ varie : de gauche à droite $\alpha = 1, 10, 20, 50, 100, 1000$. La dernière est représentée en pointillés rouges.

Polygones stabilisés

Les exemples des disque coupé et carré-rond traités ci-dessus concernent des systèmes où les orbites sont soit instables, soit marginales. Il ressort de notre étude que les orbites marginales confinées par réflexion totale dominent la dynamique. A l'instar de [49], on peut se demander comment se manifeste la présence d'une orbite stable. Par manque de temps, l'étude n'est pas terminée, mais les micro-lasers existent (cf. figure 3.12). Il s'agit de cavités de forme polygonale aux parois légèrement incurvées, de sorte que les orbites marginales du polygone originel deviennent stables. Leur frontière est paramétrée en coordonnées polaires (r, φ) par

$$r = r_0 (1 + a_N \cos(N\varphi)) \quad (3.19)$$

a_N est un petit paramètre qui est déterminé en imposant que la frontière décrite par 3.19 possède une courbure infinie (ie. une partie rectiligne) tous les $\varphi = 2\pi/N$, de sorte qu'elle dessine un polygone arrondi à N côtés. La courbure peut être calculée en coordonnées polaires par la formule

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r' - rr''}$$

Pour annuler le dénominateur en $\varphi = 2\pi/N$, a_N vérifie un polynôme de degré 2 dont les racines sont $a_N = -1$ correspondant à une rosace et

$$a_N = -\frac{1}{1 + N^2} \quad (3.20)$$

Les cavités représentées figure 3.12 (a) et (b), ont été dessinées avec des paramètres a_5 et a_6 vérifiant la formule (3.20). La légère courbure des parois assure la stabilisation des

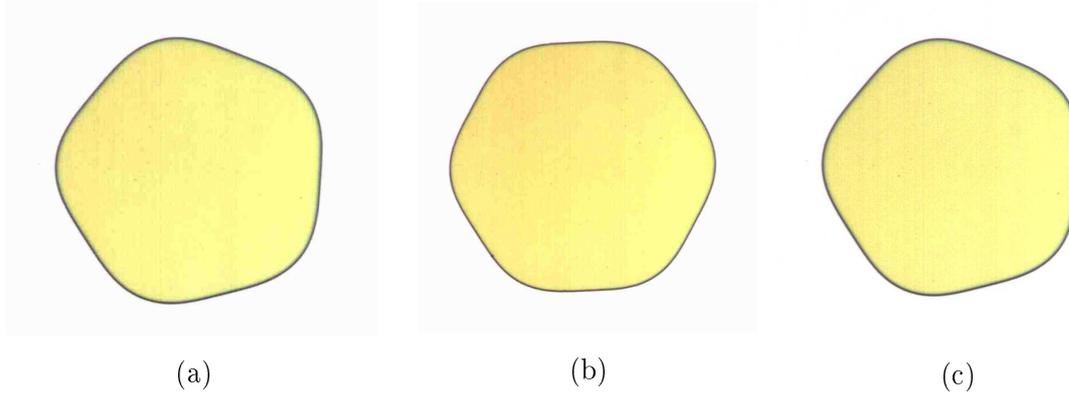


FIG. 3.12 – Photographies réalisées avec un microscope optique de cavités dont les frontières sont définies par les équations (a) (3.19) avec $a_5 = 1/26$, (b) (3.19) avec $a_6 = 1/37$ et (c) (3.21) avec $a_5 = 0.03$ et $b_5 = 0.2$. La dimension typique est $100 \mu\text{m}$.

orbites qui seraient marginales dans un vrai polygone.

Pour rompre la symétrie par rotation de $2\pi/N$, nous proposons une forme définie par

$$r = r_0 (1 - a_N \cos(N\varphi) + b_N \cos(\varphi)) \quad (3.21)$$

La cavité représentée figure 3.12 (c) a été dessinée avec les paramètres $a_5 = 0.03$ et $b_5 = 0.2$. On s'attend à une émission rendue directionnelle par l'ajout du terme en $\cos(\theta)$ et plus intense grâce à la stabilisation de l'orbite qui devrait augmenter le temps de vie et donc le gain [49].

3.2.2 Disque coupé : approche perturbative

La partie précédente 3.2.1 a exploré les propriétés du coin diélectrique via l'optique géométrique. Dans cette partie, nous étudions le système du disque coupé d'un point de vue purement ondulatoire. La méthode perturbative décrite ici permet de calculer de manière analytique le spectre et les fonctions d'onde d'une cavité, le disque coupé, présentant à la fois une singularité du premier ordre et une dynamique chaotique. Les principes de cette méthode sont exposés ci-dessous. L'article [42] en présente une version plus complète.

Position du problème

Cette méthode repose sur les mêmes principes que celle utilisée au paragraphe 3.1.1 : la frontière est légèrement déformée pour ramener l'étude à celle d'un système intégrable [57]. Dans le cas des cavités diélectriques, seul le disque est intégrable, donc nous allons étudier une perturbation du disque : le disque faiblement coupé. Cette petite perturbation est paramétrée par ϵ , avec $\epsilon/R \ll 1$ (cf. figure 3.5 (a)). La cavité d'indice n (milieu 1) est plongé dans un milieu d'indice 1 (milieu 2). Pour simplifier le problème, nous nous intéressons seulement à la polarisation TM, c'est à dire que les fonctions d'onde et leurs dérivées normales sont continues à la frontière.

Les fonctions propres du système non perturbé (le disque), indicées par l , sont définies par leur nombre d'onde k_l et leur moment angulaire m_l . D'après la partie 2.2.2, elles s'écrivent

$$\begin{aligned} \psi_l^1(r, \varphi) &= J_{m_l}(nk_l r) e^{im_l \varphi} \\ \psi_l^2(r, \varphi) &= d_l H_{m_l}^{(1)}(k_l r) e^{im_l \varphi} \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $d_l = \frac{J_{m_l}(nk_l R)}{H_{m_l}^{(1)}(k_l R)}$ est fixé par continuité de la fonction à la frontière et k_l par celle de la dérivée normale conduisant à :

$$n \frac{J'_{m_l}(nk_l R)}{J_{m_l}(nk_l R)} = \frac{H'^{(1)}_{m_l}(k_l R)}{H_{m_l}^{(1)}(k_l R)}$$

Le principe du calcul perturbatif consiste à décomposer la fonction d'onde du disque coupé ψ comme la somme d'une fonction propre du système non perturbé ψ_0 (une des ψ_l) et d'une perturbation $\delta\psi$:

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi$$

Ensuite il suffit d'écrire les conditions de continuité sur ψ en injectant celles de ψ_0 , pour obtenir des contraintes sur $\delta\psi$. Ainsi la condition de continuité sur ψ s'écrit-elle

$$\begin{aligned} \psi^1(R - \delta, \varphi) &= \psi^2(R - \delta, \varphi) && \text{partie droite} \\ \psi^1(R, \varphi) &= \psi^2(R, \varphi) && \text{ailleurs} \end{aligned}$$

avec $R - \delta$ le rayon sur la partie droite (cf. figure 3.5 (a)) et $\delta = \epsilon - R\varphi^2/2$ petit. Elle conduit au premier ordre en δ à

$$\delta\psi^1(R, \varphi) = \delta\psi^2(R, \varphi) \quad \forall \varphi \quad (3.23)$$

Au premier ordre, la perturbation reste continue à la frontière. On procède de même pour la dérivée normale

$$\begin{aligned} \partial_y \psi^1(R - \delta, \varphi) &= \partial_y \psi^2(R - \delta, \varphi) && \text{partie droite} \\ \partial_r \psi^1(R, \varphi) &= \partial_r \psi^2(R, \varphi) && \text{ailleurs} \end{aligned}$$

Sur la partie droite, la coordonnée normale devient y et non plus φ . Il faut donc utiliser le changement de variable

$$\partial_y \psi = \cos \varphi \partial_r \psi - \frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi \psi$$

En fait, la dérivée par rapport à φ n'apporte pas d'information car le moment angulaire se conserve de l'intérieur vers l'extérieur, à la fois pour ψ_0 et pour la fonction d'onde totale au premier ordre de perturbation. Donc la condition $\partial_y \psi^1 = \partial_y \psi^2$ se ramène à $\partial_r \psi^1 = \partial_r \psi^2$. Comme $\partial_r \psi$ s'exprime en fonction de $\partial_r^2 \psi_0$:

$$\partial_r \psi(R - \delta, \varphi) = \partial_r \delta\psi(R, \varphi) - \delta \partial_r^2 \psi_0(R, \varphi)$$

il faut utiliser l'équation de Bessel vérifiée par ψ_0 pour exprimer $\partial_r^2 \psi_0$ en fonction de ψ_0 et de $\partial_r \psi_0$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \partial_r [\delta\psi^1(R, \varphi) - \delta\psi^2(R, \varphi)] &= \delta k_0^2 (1 - n^2) \psi_0^1(R, \varphi) && \text{partie droite} \\ &= 0 && \text{ailleurs} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Calcul de la perturbation

Maintenant que nous connaissons les conditions de continuité à imposer à la perturbation (3.23 et 3.24), il faut la développer sur une base puis rechercher les coefficients vérifiant ces conditions. En général, on a recours aux fonctions propres du système non perturbé

[62], mais dans le cas du disque diélectrique, elles ne sont pas orthogonales. Nous allons donc utiliser les fonctions de Bessel pour un nombre d'onde k à déterminer :

$$\begin{aligned}\psi^1(r, \varphi) &= J_{m_0}(nkr) \cos(m_0\varphi) + \sum_{l \neq m_0} c_l J_l(nkr) \cos(l\varphi) \\ \psi^2(r, \varphi) &= d_{m_0}^{pert} H_{m_0}^{(1)}(kr) \cos(m_0\varphi) + \sum_{l \neq m_0} c_l d_l H_l^{(1)}(kr) \cos(l\varphi)\end{aligned}$$

Nous cherchons les coefficients $\{c_l\}$, $\{d_l\}$ et $d_{m_0}^{pert}$, et le nombre d'onde $k = k_0 + \delta k$. L'invariance par rotation autorise l'utilisation des exponentielles complexes (3.22) dans le cas du disque complet. Pour le disque coupé, la perturbation lève la dégénérescence, mais comme elle est paire la dépendance angulaire peut s'exprimer sous forme de cosinus ou de sinus. Ici nous nous contentons des fonctions paires.

$$\begin{aligned}\psi_0^1(r, \varphi) &= J_{m_0}(nk_0r) \cos(m_0\varphi) \\ \psi_0^2(r, \varphi) &= d_{m_0} H_{m_0}^{(1)}(k_0r) \cos(m_0\varphi)\end{aligned}$$

La perturbation s'exprime comme la différence de ces deux contributions : $\delta\psi = \psi - \psi_0$. Pour déterminer le nombre d'onde k et les coefficients c_l et d_l nous allons utiliser le projecteur

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \quad (3.25)$$

agissant sur la base des $\cos(l\varphi)$. La condition (3.23) sur la continuité de la perturbation conduit aux coefficients d_l :

$$d_{m_0}^{pert} = \frac{J_{m_0}(nkR)}{H_{m_0}^{(1)}(kR)} \quad d_l = \frac{J_l(nkR)}{H_l^{(1)}(kR)}$$

La condition (3.24) sur la dérivée normale fournit les coefficients c_l pour $m = l \neq m_0$

$$c_l = \frac{J_{m_0}(nk_0R)}{J_l(nk_0R)} \frac{1}{n \frac{J'_l(nk_0R)}{J_l(nk_0R)} - \frac{H'_l^{(1)}(k_0R)}{H_l^{(1)}(k_0R)}} \frac{k_0}{\pi} (1 - n^2) a(m_0, l)$$

où $a(m_0, l)$ se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}a(m_0, l) &= \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} \delta \cos(m_0\varphi) \cos(l\varphi) d\varphi \\ &\simeq \frac{\sin(\Delta\varphi (m_0 - l))}{(m_0 - l)^3} + \frac{\sin(\Delta\varphi (m_0 + l))}{(m_0 + l)^3} - \Delta\varphi \frac{\cos(\Delta\varphi (m_0 - l))}{(m_0 - l)^2} - \Delta\varphi \frac{\cos(\Delta\varphi (m_0 + l))}{(m_0 + l)^2}\end{aligned}$$

avec $\Delta\varphi = \sqrt{2\epsilon/R}$ et $\delta \simeq \epsilon - R\varphi^2/2$ (cf. fig. 3.5 (a)). La correction sur le nombre d'onde $\delta k = k - k_0$ s'obtient par la projection sur m_0 .

$$\delta k = \frac{k_0}{\pi R} b(m_0, \Delta\varphi)$$

avec

$$\begin{aligned}b(m_0, \Delta\varphi) &= \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} \delta \cos^2(m_0\varphi) d\varphi \\ &= \frac{R\Delta\varphi^3}{3} + \frac{R}{8m_0^3} \sin(2m_0\Delta\varphi) - \frac{R\Delta\varphi}{4m_0^2} \cos(2m_0\Delta\varphi)\end{aligned}$$

Pour $\Delta\varphi$ petit, on obtient

$$\delta k = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^{3/2} k_0 = \frac{\delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}} k_0$$

\mathcal{A} correspond à l'aire de la surface non perturbée (ie. $\mathcal{A} = \pi R^2$) et $\delta\mathcal{A}$ à celle de la surface retirée : $\delta\mathcal{A} = (R^2) \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^{3/2}$. La loi de Weyl indique que le nombre moyen d'états d'énergie inférieure à E vérifie $N(E) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi} E$ [23]. Transcrite en termes de nombre d'onde, elle s'écrit⁶ $N(k) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi} k^2$. On considère que la perturbation ne crée pas d'états nouveaux ; elle ne fait que déplacer ceux du système non perturbé de surface $\mathcal{A} - \delta\mathcal{A}$, donc $N(k)$ reste constant :

$$N(k) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi} k^2 = \frac{\mathcal{A} - \delta\mathcal{A}}{4\pi} (k + \delta k)^2$$

On obtient directement $\delta k = \frac{\delta\mathcal{A}}{2\mathcal{A}} k_0$

Pertes et courant

Le calcul de la partie imaginaire de k , donc des pertes, s'avère plus délicat car il faut poursuivre le développement au deuxième ordre. Plutôt que de m'aventurer dans cette direction traitée dans [42], je vais utiliser la conservation du courant, méthode décrite à l'annexe A pour le disque complet. Dans le cas du disque coupé, le nombre d'onde s'écrit $k = X + iY = x + \delta x + iy + i\delta y$, où x et y correspondent au disque entier et δx à la perturbation au premier ordre (en $(\frac{\epsilon}{R})^{3/2}$) calculée ci-dessus. On rappelle l'expression du courant

$$J = n^2(k^2 - (k^*)^2) \int_V |\psi|^2 d\tau = \int_S (\psi \partial_\nu \psi^* - \psi^* \partial_\nu \psi) ds$$

où S est la surface englobant le volume V et ν est la composante normale à cette surface.

A l'extérieur de la cavité, la fonction d'onde est donnée par

$$\psi^2(r, \varphi) = d_{m_0}^p H_{m_0}(kr) \cos(m_0\varphi) + \sum_{l \neq m_0} c_l d_l H_l(kr) \cos(l\varphi)$$

Comme pour le disque entier, on calcule le courant à travers un cercle de rayon r grand. Les $H_l(kr)$ s'écrivent donc

$$H_l(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\varphi_l} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

φ_l est une constante indépendante de r et φ . L'intégrale sur φ pour le calcul du courant correspond au projecteur (3.25). Les termes croisés de la forme $\cos(m_0\varphi) \cos(l\varphi)$ ne contribuent donc pas. Par analogie avec le cas du disque entier, on obtient⁷

$$J = -4i (|d_{m_0}^p|^2 + \sum_{l \neq m_0} |c_l|^2 |d_l|^2)$$

A l'intérieur de la cavité, la fonction d'onde est donnée par

$$\psi(r, \varphi) = J_{m_0}(nkr) \cos(m_0\varphi) + \sum_{l \neq m_0} c_l J_l(nkr) \cos(l\varphi)$$

⁶Dans notre cas, il faudrait écrire $N(k) = \frac{\mathcal{A}}{8\pi} k^2$ car on n'a considéré qu'une seule parité.

⁷Pour le disque entier, le facteur multiplicatif est 8 et non 4, parce qu'on utilise des exponentielles complexes et non des cosinus. L'intégrale de 0 à 2π vaut donc maintenant π , et non plus 2π .

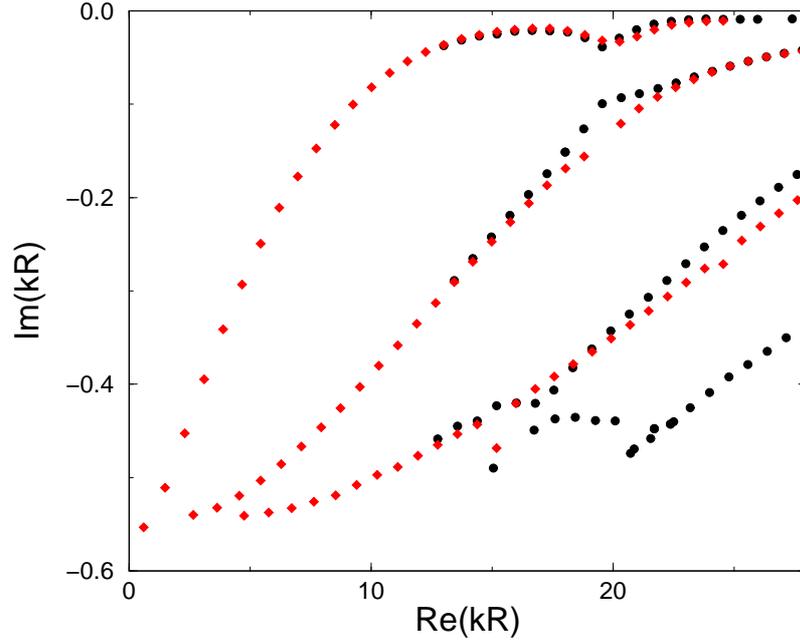


FIG. 3.13 – Spectres du disque coupé pour $\epsilon/R = 0.05$, calculés par simulations ondulatoires (ronds noirs) et par la méthode perturbative (losanges rouges).

On veut calculer une intégrale sur le volume de la cavité. De même que pour le calcul du courant à l'extérieur, l'intégrale sur φ fait office de produit scalaire et annule les contributions des termes croisés. On suppose que les arguments des fonctions de Bessel sont réels et on utilise les mêmes types d'égalité que pour le disque entier (cf. annexe A), ce qui donne

$$J = 2i\pi Y X R^2 (n^2 - 1) [J_{m_0}^2(nXR) + \sum_{l \neq m_0} |c_l|^2 J_l^2(nXR)]$$

Lorsqu'on réunit les contributions des différents courants

$$YR = \frac{2}{XR\pi} \frac{1}{1-n^2} \frac{|d_{m_0}^p|^2 + \sum_{l \neq m_0} |c_l|^2 |d_l|^2}{J_{m_0}^2(nXR) + \sum_{l \neq m_0} |c_l|^2 J_l^2(nXR)}$$

Mais pour rester à un ordre raisonnable du développement perturbatif et sachant qu'on se place dans la limite semi-classique pour une fonction non perturbée bien confinée ($|d_{m_0}|^2$ petit), on peut simplifier davantage et négliger la somme sur l au dénominateur. Le terme correctif à la partie imaginaire s'écrit alors

$$\delta y R = \frac{2}{\pi^3} \frac{k_0(1-n^2)}{R} \sum_{l \neq m_0} \frac{1}{|H_l(k_0R)|^2} \frac{a(m_0, l)^2}{\left| n \frac{J'_l(nk_0R)}{J_l(nk_0R)} - \frac{H'_l{}^{(1)}(k_0R)}{H_l^{(1)}(k_0R)} \right|^2}$$

Une étude plus détaillée est développée dans [42]. Elle tient compte de manière plus précise des corrections au deuxième ordre et de la partie imaginaire du nombre d'onde.

Comparaison avec les simulations ondulatoires

La comparaison avec les simulations ondulatoires réalisées par Charles Schmit permet de valider cette méthode perturbative. La figure 3.13 présente les spectres calculés par

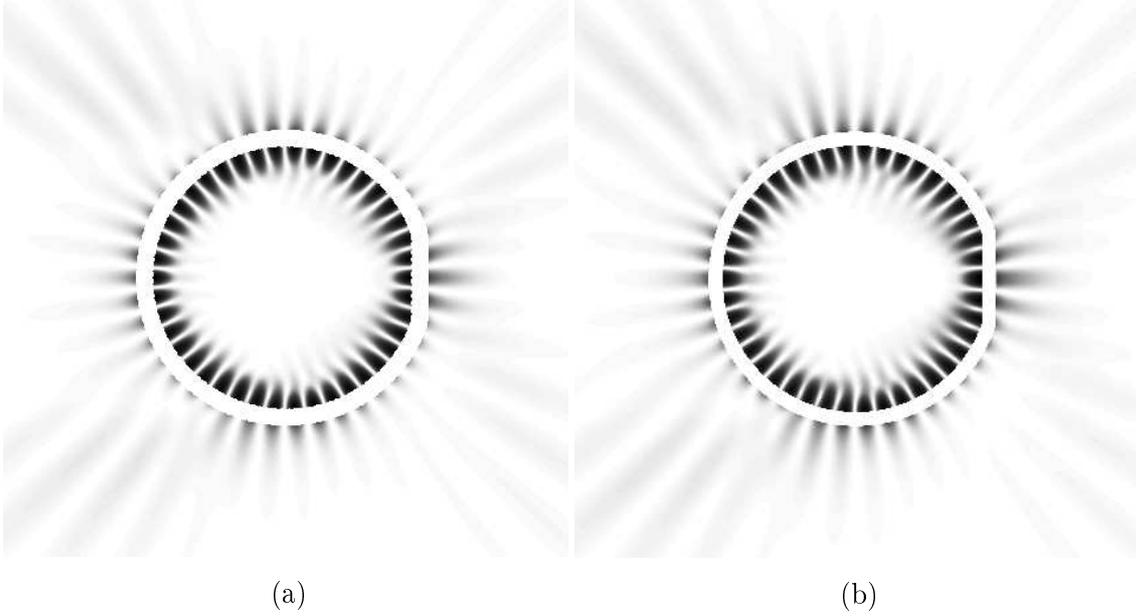


FIG. 3.14 – (a) Fonction d'onde calculée par simulations numériques. (b) Fonction d'onde calculée par la méthode perturbative avec les paramètres correspondant à (a), soit $m_0 = 21$ et $p_0 = 0$. Sont représentés les modules au carré des fonctions d'onde selon une échelle de gris non linéaire où le noir correspond aux régions de forte intensité. La bande blanche au voisinage de la frontière provient du calcul numérique et a été reproduit artificiellement sur (b) pour aider à la comparaison.

simulation (ronds noirs) et par la méthode perturbative (losanges rouges). L'accord est très satisfaisant. On note toutefois des décrochages aux réminiscences des croisements du système intégrable. Par exemple pour $\text{Re}(kR) \simeq 20$, la branche la mieux confinée et la suivante semblent se rejoindre. A cet endroit, il manque un losange rouge qui se trouve en fait éjecté vers des $\text{Im}(kR)$ très négatifs. Cet artefact est lié aux corrections un peu brutales effectuées sur la partie imaginaire et disparaît lorsque le calcul est raffiné [42].

Les fonctions d'onde montrent aussi un bon accord entre les simulations numériques et la méthode perturbative pour les résonances sur les branches $p = 0$ et $p = 1$ (les plus proches de $\text{Im}(kR) = 0$). La fonction d'onde présentée figure 3.14 (a) a été calculée par simulation numérique. De son aspect, on déduit les paramètres p_0 et m_0 . En effet p_0 correspond au nombre d'oscillations radiales - ici on n'en voit qu'une seule, donc $p_0 = 0$ - et m_0 à la moitié du nombre d'oscillations orthoradiales qu'il suffit de compter pour obtenir $m_0 = 21$. Avec ces deux données et l'expression des c_l , on dessine la fonction d'onde 3.14 (b). La répartition d'intensité à l'intérieur de la cavité est bien reproduite, ainsi que la structure à quatre rebonds, ce qui confirme la validité de notre approche.

Des études théoriques et expérimentales sont en cours sur le champ à l'extérieur de la cavité et à l'infini. Elles permettront peut être d'isoler la contribution diffractive des phénomènes réfractifs.

Cette méthode perturbative permet de calculer analytiquement le spectre et les fonctions d'onde du disque coupé. Elle donne des résultats très encourageants et peut être généralisée à d'autres types de perturbation du disque, comme la spirale [42, 69]. Il peut paraître surprenant qu'une méthode analytique donne accès aux propriétés ondulatoires

d'un système chaotique qui, de surcroît, possède des coins diélectriques. En fait "la morale est sauve" car le développement perturbatif n'est valable que si ϵk est suffisamment petit pour que l'onde ne voie pas vraiment la coupure. Toutefois une contribution diffractive devrait apparaître, notamment dans les directions d'émission.

3.3 Emission par réfraction

Lorsque la cavité présente une forme chaotique ou possède des orbites périodiques courtes non confinées (par exemple de type Fabry-Perot), l'émission de la lumière est dominée par les processus réfractifs. Ils sont caractérisés par un seuil laser plus élevé qui compense les pertes réfractives et une intensité détectée plus importante due à un couplage direct vers l'extérieur. En termes d'efficacité laser, ce mode d'émission peut se révéler un bon compromis et ces résonateurs à facteur de qualité modeste constituent des cavités bien adaptées à certains usages où la finesse des raies n'est pas indispensable.

Des tentatives d'explications ont été avancées pour comprendre la directivité de l'émission de certaines formes de cavités telles que le stade. La plupart de ces modèles repose sur une orbite confinée dont les angles d'incidence sont proches de l'angle critique. Par le biais de la "variété instable" [98, 101, 102] ou d'un "effet tunnel" [89], la lumière s'échappe de la cavité dans certaines directions bien particulières. Même si, *in fine*, c'est nécessairement le long d'une direction instable que les rayons sortent du résonateur, ces approches restent purement descriptives, puisqu'elles ne permettent ni de prévoir l'orbite à considérer, ni de justifier la contribution d'une orbite unique.

Dans ce contexte, nous avons proposé un modèle simple, aisément généralisable : le modèle de lentille. Le premier paragraphe rassemble les principales observations relatives au stade décrites par nous et d'autres groupes. Dans le deuxième paragraphe, nous insistons sur l'apparition d'un régime stationnaire qui permet de formuler une hypothèse très forte que nous utilisons ensuite, dans le troisième paragraphe, pour justifier le modèle de lentille.

3.3.1 Constatations

Les mesures expérimentales ont montré que la plupart des résonateurs chaotiques présentent une grande directivité d'émission : stade, cardioïde, disque coupé. Celle-ci dépend du paramètre l/r pour le stade et d pour le disque coupé et respecte les symétries triviales (cf. figure 3.15). Par la suite nous illustrerons notre propos avec des résultats propres au stade, mais des études préliminaires ont montré que les propriétés le concernant semblent généralisables aux autres formes.

Tout d'abord, cette directivité d'émission est une caractéristique propre au résonateur passif. La figure 3.16 (a) montre la répartition d'intensité en champ lointain en fonction de la direction d'observation pour un stade pompé en dessous du seuil laser. On distingue des bosses émergeant du fond de fluorescence isotrope. Lorsque ce fond est soustrait, comme sur la figure 3.16 (b), les lobes qui apparaissent reproduisent exactement ceux du même stade pompé au-dessus du seuil laser.

Ces directions d'émission dépendent du paramètre l/r . Sur la figure 3.17, les mesures expérimentales sont indiquées par des points rouges. Les barres d'erreur de $\pm 5^\circ$ sont relatives à l'angle de collection fixé par la lentille L3 (cf. notations fig. 2.8). L'émission s'oriente parallèlement au grand axe du stade lorsque l/r augmente. Ces variations de directions d'émission sur une plage angulaire de plus de 30° sont de bon augure pour de futures

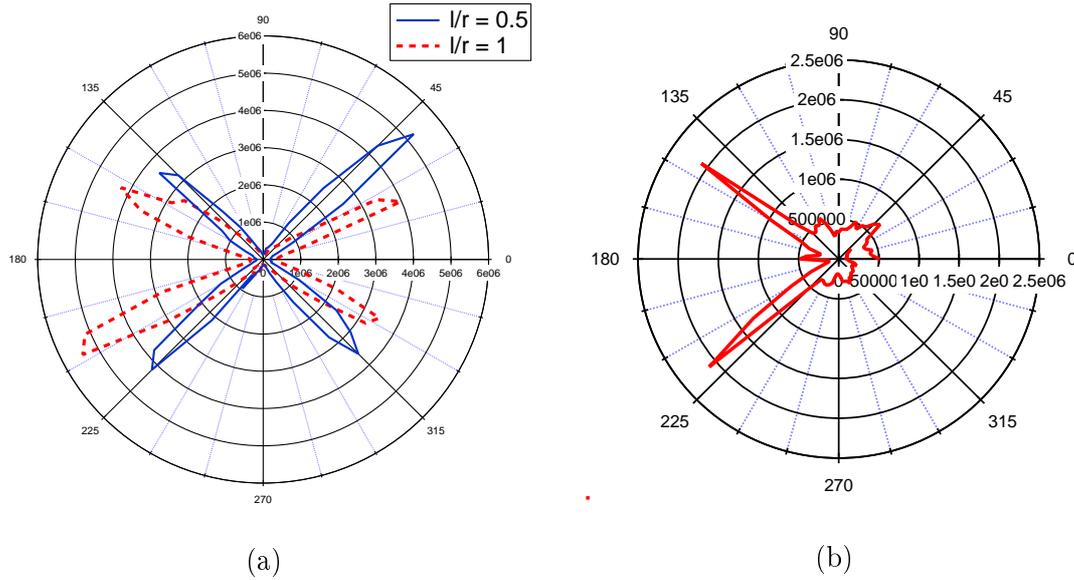


FIG. 3.15 – (a) *Stade* : intensité détectée en champ lointain en fonction de l'angle d'observation θ , pour deux valeurs du paramètre l/r avec $r \sim 30 \mu\text{m}$. La direction $\theta = 0$ correspond au grand axe du stade. (b) *Disque coupé* : Intensité détectée en champ lointain en fonction de l'angle d'observation θ pour $d = 0.9$ et $R = 60 \mu\text{m}$ (cf. notations fig. 3.5 (a)).

applications technologiques.

Les prédictions des simulations géométriques, représentées par une ligne bleue sur la figure 3.17, reproduisent au mieux les observations expérimentales. Ces simulations ont été réalisées en considérant 10^7 rayons dont les points de départ sont répartis de manière uniforme à la surface du stade et les directions initiales distribuées de manière uniforme entre 0 et 2π . La distribution des directions d'émission pour $l/r = 0.5$ est représentée dans l'encart de la figure 3.18 (a). On distingue un pic sur un large pied issu des rayons sortis rapidement. Si on impose une longueur minimale à parcourir L_c , typiquement deux fois le périmètre, le pied disparaît et la distribution se rétrécit. La figure 3.18 (a) montre cette distribution pour trois valeurs différentes de l/r . Sur la figure 3.17, on a tracé la position de leur maximum en fonction de l/r . Pour des valeurs de l/r supérieures à 1 environ, les distributions forment des bosses dont le maximum peut être déterminé sans ambiguïté. Pour les faibles valeurs de l/r , leur structure s'avère plus complexe. Il ne s'agit pas de fluctuations. Pour L_c suffisamment élevée, elle est parfaitement reproductible. Le groupe de Takahisha Harayama (ATR, Japon) a constaté le même phénomène pour leurs simulations avec un indice de réfraction plus élevé (n entre 3 et 4). Il est vraisemblable que ces pics soient liés à la variété sous-jacente du stade. Comme nous nous intéressons aux propriétés grossières des directions d'émission, nous avons considéré seulement le maximum du pic le plus large, c'est à dire celui qui correspond à un maximum de lumière émise. Il est toutefois vraisemblable qu'une étude approfondie de la structure fine révélerait des informations supplémentaires sur le système dynamique.

Les simulations ondulatoires permettent aussi d'obtenir des informations sur le champ lointain. En utilisant le développement asymptotique de la fonction de Hankel dans l'ex-

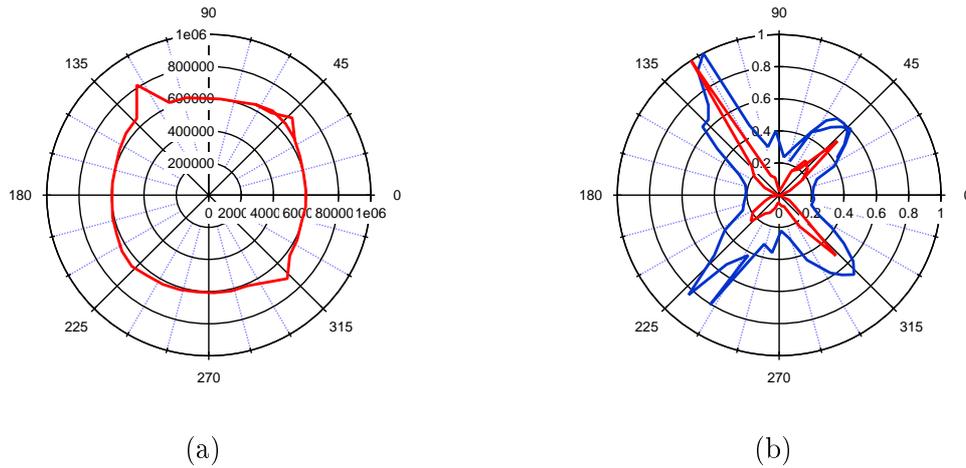


FIG. 3.16 – *Stade*. Intensité détectée en champ lointain en fonction de l'angle d'observation θ . La direction $\theta = 0$ correspond au grand axe du stade : (a) pompage en dessous du seuil laser, (b) pompage au dessus du seuil laser (courbe bleue) et pompage en-dessous du seuil laser (courbe rouge, données expérimentales de (a) où le fond isotrope de fluorescence a été soustrait)

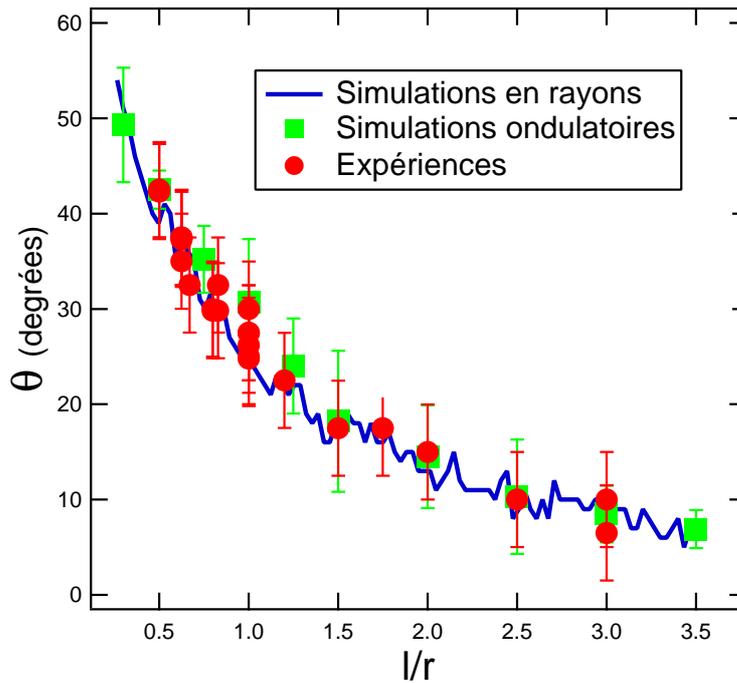


FIG. 3.17 – *Direction d'émission du stade en fonction du paramètre l/r* . Comparaison entre les expériences (ronds rouges), les simulations en rayons (ligne bleue) et les simulations ondulatoires (carrés verts).

pression (2.16), la fonction d'onde à l'infini s'écrit

$$\psi(\rho, \theta) = f(\theta) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \quad (3.26)$$

Sur la figure 3.18 (b), $|f(\theta)|^2$ a été tracé pour des fonctions d'onde bien confinées avec

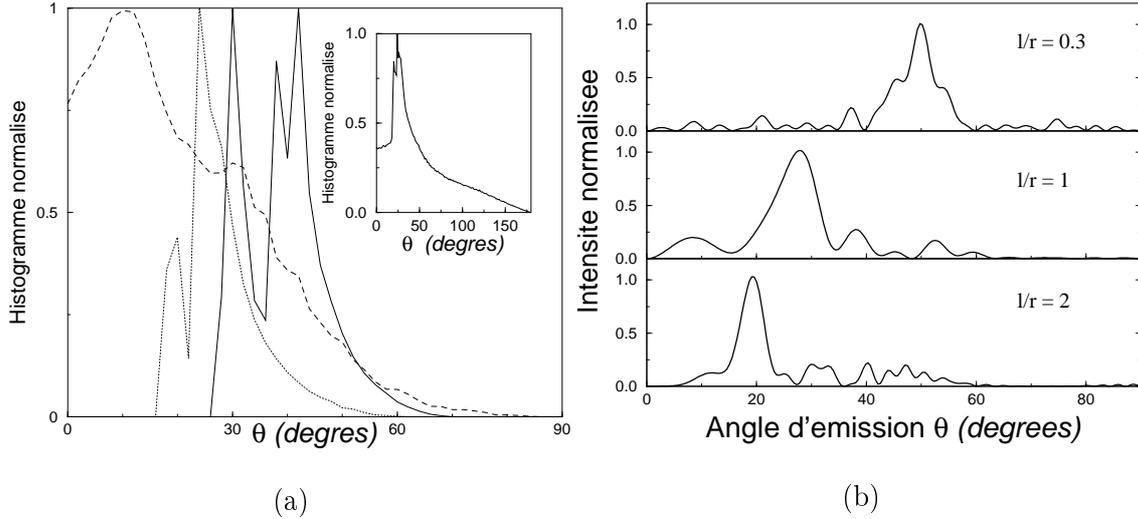


FIG. 3.18 – (a) Distributions normalisées des angles d'émission calculées par des simulations en rayons avec distribution des points de départ uniforme en direction et en position pour $l/r = 0.5$ (ligne continue), $l/r = 1$ (pointillés) et $l/r = 2.5$ (tirets). Seuls les rayons ayant parcouru une distance supérieure à deux fois le périmètre sont comptabilisés. Encart : idem pour $l/r = 0.5$, mais sans distance minimale. (b) Module au carré normalisé de fonctions d'onde en champ lointain $|f(\theta)|^2$. Du haut vers le bas : ($l/r=0.3$, $Re(kr)=39.31$) ; ($l/r=1$, $Re(kr)=13.88$) ; ($l/r=2$, $Re(kr)=23.29$).

trois valeurs différentes de l/r . Chaque fonction d'onde bien confinée présente un champ lointain avec un maximum bien défini. Les carrés verts de la courbe 3.17 correspondent à la moyenne des positions de ce maximum pour les 8 fonctions d'onde les mieux confinées dans la plage de kr explorée par les simulations. Les barres d'erreur reproduisent l'écart type. Pour des valeurs de l/r supérieures à 2 environ, un deuxième maximum apparaît. Nous en discuterons à la lumière du modèle de lentille au paragraphe 3.3.3.

Les groupes qui étudient ces propriétés insistent sur la ressemblance des champs lointains alors même que les fonctions d'onde sont très différentes à l'intérieur de la cavité. À l'aide de la projection de Husimi, ils montrent que ces fonctions d'onde reproduisent la forme de la variété instable à la frontière [43, 101, 102]. Pour ma part, je trouve très significatif que les fonctions d'onde bien confinées suivent un comportement dicté par l'optique géométrique, même pour des valeurs de kr relativement faibles. Pour succomber à la tentation de généraliser, il est possible d'émettre la conjecture que l'émission en champ lointain suit les directions des rayons lorsqu'une sortie réfractive est possible. Dans le cas d'un résonateur Fabry-Perot par exemple, il semble naturel que la lumière soit émise dans la direction normale aux parois de la cavité.

Pour résumer, nous avons observé expérimentalement que des cavités chaotiques comme le stade présentent une émission en champ lointain très directionnelle bien reproduite par les simulations géométrique et ondulatoire. Il semble que cet accord entre ondes et particules soit lié au caractère réfractif de l'émission.

3.3.2 Phénomène stationnaire

Pour améliorer notre compréhension de ce phénomène réfractif, nous avons étudié le "régime stationnaire" propre au stade. Il apparaît dans les simulations géométriques une

fois que les premiers rayons correspondant à la fluorescence ont été émis. La probabilité de survie d'un rayon $P(L)$ présente alors une décroissance exponentielle, nettement visible dans l'encart de la fig. 2.17 (a). Sur le graphe principal, le logarithme de $P(L)$ a été tracé en fonction de la distance parcourue L et l'ajustement linéaire s'y accorde très bien [9, 77, 96, 103]. Ce comportement se retrouve pour les formes chaotiques où il n'existe pas d'orbites marginales confinées et correspond à la décroissance exponentielle des modes quasi-stationnaires prévue pour ce type de système ouvert (cf. partie 2.2.1).

Ce régime stationnaire est caractérisé par un flux constant de rayons qui s'échappent de la cavité [9]. Il est possible de le quantifier avec le coefficient α issu de $P(L) = e^{-\alpha L}$ et mesuré directement par la pente de l'ajustement linéaire⁸. La quantité α/n est tracée en fonction du paramètre l/r sur la figure 3.19. Elle tend vers 0 pour les systèmes intégrables, c'est à dire pour le disque ($l/r = 0$) et pour le guide d'onde ($l/r \rightarrow \infty$), et passe par un maximum autour de $l/r = 1$ qui correspond à peu près au maximum des coefficients de Lyapounov (cf. partie 2.2.3).

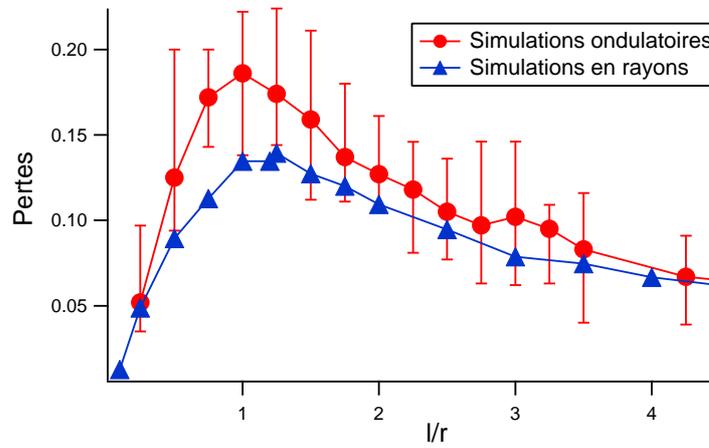


FIG. 3.19 – Pertes pour le stade en fonction de sa forme l/r . Coefficient α/n calculé à partir des simulations en rayons (triangles, barres d'erreur négligeables) et $2\langle \text{Im}(kr) \rangle$ déduit des simulations ondulatoires (ronds rouges, barres d'erreur correspondant aux valeurs extrêmes).

La division par l'indice n permet de rapporter α aux quantités ondulatoires équivalentes. Pour s'en convaincre, considérons par exemple le cas d'un résonateur Fabry-Perot de largeur L_0 selon la direction x . A l'instant initial, N rayons sont émis le long de cette direction x . On note $P(L)$ le nombre de rayons qui restent dans la cavité après avoir parcouru la distance L , donc $P(L = 0) = N$. Lorsqu'un rayon touche une extrémité du Fabry-Perot, il est réfléchi avec la probabilité r^2 , où r est le coefficient de réflexion en amplitude. En $L = L_0$, tous les rayons ont atteint une extrémité une et une seule fois, donc $P(L = L_0) = Nr^2$. Et m fois après avoir parcouru la distance mL_0 , soit

$$P(L = mL_0) = N r^{2m} = N r^{2L/L_0} \Rightarrow \ln(P(L)) \sim \ln(N) + \frac{2 \ln(r)}{L_0} L \quad \text{pour } L \rightarrow \infty$$

La pente équivalente obtenue par les simulations géométriques s'écrit donc $\alpha = 2 \ln(r)/L_0$.

⁸L'unité de longueur est le rayon du stade.

Par ailleurs, pour l'aspect ondulatoire, considérons la condition de cohérence

$$r^2 e^{ink} 2L_0 = 1$$

Elle conduit à $n\text{Im}(k)2L_0 = 2 \ln(r)$, soit

$$\text{Im}(k) = \frac{2 \ln(r)}{L_0} \frac{1}{2n} = \frac{\alpha}{2n}$$

Le 2 indique que les simulations ondulatoires fournissent une information en amplitude et les simulations géométriques en intensité. Le facteur n précise que le nombre d'onde k est calculé à l'extérieur de la cavité.

Dans le même but de se rapprocher davantage des simulations ondulatoires, les coefficients de Fresnel en polarisation TM ont été pris en compte dans les simulations géométriques. Sur la figure 3.20, on ne constate pas de différence avec les simulations en sortie directe (rayon totalement réfracté ou totalement réfléchi).

La figure 2.19 (b) montre un spectre de stade calculé grâce aux simulations ondulatoires. La branche bleue, isolée des autres, correspond aux états quasi-stationnaires les mieux confinés. Leur décroissance temporelle est de la forme $e^{-|\text{Im}(kr)|L}$. Pour comparer leurs pertes avec celles déduites des simulations en rayon, on considère la moyenne de leur partie imaginaire $\langle \text{Im}(kr) \rangle$ à multiplier par deux pour passer de l'amplitude à l'intensité (cf. ci-dessus). Cette quantité est tracée avec des ronds rouges sur la figure 3.19. Elle suit le comportement asymptotique de son équivalent géométrique, mais elle présente un maximum plus marqué autour de $l/r = 1$. Une interprétation envisage la fonction d'onde comme localisée autour des feuillettes de la variété instable suivie par les rayons. Comme la fonction d'onde recouvre plusieurs feuillettes, elle s'échappe par l'intervalle entre eux. Toutefois, on peut constater que la limite inférieure des barres d'erreur reproduit le comportement classique.

Pour obtenir une prédiction quantitative de ces pertes, nous utilisons une méthode proposée par Cvitanović dans [36] et appliquée avec succès à un problème de diffusion dans [37]. La transposition au cas des résonateurs diélectriques s'effectue au prix d'approximations plus ou moins justifiées. Les courbes de la figure 3.20 montrent que les résultats sont en accord raisonnable avec les simulations.

L'outil fondamental est la fonction de Selberg. Elle possède un contenu équivalent à celui de la densité d'états⁹ [23]. Au lieu d'une somme infinie de diracs $d(E) = \sum \delta(E - E_m)$, il s'agit d'un produit infini de monômes $Z(E) = \prod (E - E_m)$. Il conduit à des calculs plus accessibles car les résonances sont représentées par des zéros, alors que pour la somme $d(E)$, elles correspondent à des pôles. De même que pour la densité d'états d'un système chaotique, on peut exprimer Z grâce aux orbites périodiques p [23] :

$$Z(k) = \prod_p \left(1 - \frac{e^{ikL_p}}{\Lambda_p^{1/2}} \right)$$

où L_p est la longueur de l'orbite et Λ_p la valeur propre maximale (positive) de sa matrice de monodromie (cf. partie 2.2.3). Si on considère une seule orbite, alors le nombre d'onde k qui annule Z vérifie

$$\text{Im}(k) = -\frac{1}{2L_p} \ln(\Lambda) = -\frac{\lambda_p}{2} \quad \text{et} \quad \text{Re}(k) = \frac{2\pi}{L_p} j \quad j \in \mathbb{Z}$$

⁹Les informations relatives à la densité d'états sont regroupées à la partie 4.1.2.

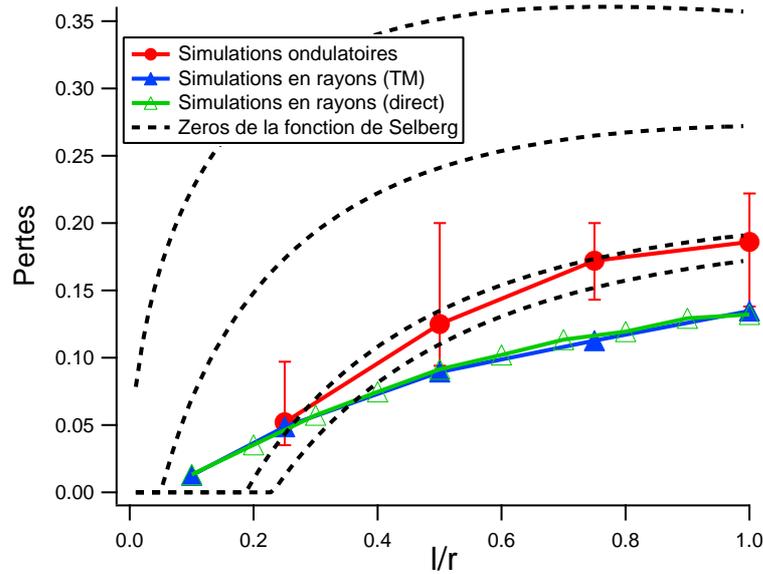


FIG. 3.20 – Pertes en intensité pour le stade en fonction de sa forme l/r . Coefficient α/n calculé à partir des simulations en rayons (triangles bleus, barres d'erreur négligeables), $2 < \text{Im}(kr) >$ déduit des simulations ondulatoires (ronds rouges, barres d'erreur correspondant aux valeurs extrêmes) et s_0/n (avec $Z(s_0) = 0$) estimation déduite de la formule de Selberg avec, de haut en bas, 1, 2, 10 et 30 orbites prises en compte (courbes en pointillés noirs).

Sa partie imaginaire est directement liée au coefficient de Lyapounov de l'orbite. Pour simplifier, nous allons nous placer sur le zéro classique, c'est à dire $j = 0$, et $\Lambda^{1/2}$ est remplacé par Λ pour considérer les pertes en intensité et non en amplitude. La fonction de Selberg prend alors le nom de fonction zeta de Ruelle :

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{e^{-sL_p}}{\Lambda_p} \right)$$

Ce produit possède des zéros non triviaux parce qu'il est infini. Comme nous ne pouvons pas tenir compte d'un nombre infini d'orbites, nous avons recours à une simplification proposée dans [36, 37] où seules les orbites simples primitives (pas de répétition) sont considérées ainsi que le terme linéaire du produit :

$$\zeta(s) \simeq 1 - \sum_{opp} \frac{e^{-sL_p}}{\Lambda_p} \quad (3.27)$$

où *opp* signifie "orbites périodiques primitives". Cette approximation deviendrait exacte, si les orbites plus compliquées pouvaient s'exprimer comme le produit des poids d'orbites simples

$$\frac{e^{-sL_{p_{complique}}}}{\Lambda_{p_{complique}}} = \frac{e^{-sL_{p_{simple1}}}}{\Lambda_{p_{simple1}}} \times \frac{e^{-sL_{p_{simple2}}}}{\Lambda_{p_{simple2}}} \quad (3.28)$$

Ainsi tous les termes du produit se simplifieraient-ils entre eux sauf les termes constant et linéaire de l'expression (3.27).

Dans le cas du stade diélectrique, seules les orbites confinées par réflexion totale sont prises en compte. Pour $l/r < 1$, il s'agit des polygones allongés de type (m,n) avec m rebonds sur le demi-cercle de gauche et n sur celui de droite (cf. figure 2.14 (a)). Il est raisonnable de supposer des approximations semblables à (3.28) car les longueurs des orbites simples correspondent à peu près au périmètre et celles des orbites compliquées à ses multiples.

Dans le cadre de l'approximation (3.28), l'orbite dominante est celle dont le coefficient de Lyapounov est le plus faible. Pour le stade, il s'agit du rectangle. La présence des autres orbites diminue les pertes, car les rayons qui s'échappent du rectangle peuvent être attirés par elles plutôt que de sortir directement. Les courbes noires de la figure 3.20 correspondent à la solution de $\zeta(s) = 0$ d'après l'expression (3.27) pour 1, 2, 10 et 30 orbites prises en compte par ordre de lyapounov croissants. On constate que l'allure générale des pertes en fonction de l/r est bien reproduite. Bien que l'estimation ne semble pas converger vers les résultats des simulations géométriques, l'accord quantitatif reste raisonnable.

3.3.3 Modèle de lentille

Dans une cavité close en forme de stade, la dynamique est complètement chaotique. Lorsque la frontière devient poreuse, le système n'est plus strictement chaotique puisqu'il s'agit d'une propriété aux temps longs. Toutefois l'apparition d'un régime stationnaire est le signe d'une certaine ergodicité, hypothèse principale du modèle de lentille.

L'observation de la section de Poincaré fournit un argument supplémentaire en faveur de cette homogénéisation. Pour n'en retenir que les éléments essentiels, la section de Poincaré de la figure 3.21 (a) a été tracée avec les simulations géométriques en considérant des points de départs localisés au voisinage de la frontière du demi-cercle de droite avec des directions presque tangentes au cercle et orientées dans le même sens. Avec les notations de la figure 3.22 (a), φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ et χ reste proche de $\pi/2$. Les intersections de chaque rayon avec la frontière sont indiquées jusqu'à leur sortie lorsque l'angle d'incidence devient inférieur à l'angle critique. Sur la figure 3.21 (a), la structure en feuillet est nettement visible. On constate surtout une organisation en branches, identique pour les deux demi-cercles : φ' variant de $-\pi/2$ à $\pi/2$ (demi-cercle de gauche) et de $\pi/2+1$ à $3\pi/2+1$ (demi-cercle de droite). Ces branches sont parfaitement reproduites sur la figure 3.21 (b) issue d'un calcul analytique. On considère des points sources sur le demi-cercle de droite qui émettent vers le demi-cercle de gauche. Les distributions en φ et $\sin(\chi)$ sont uniformes :

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \sin(\chi) \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\sin(\chi)$ est borné inférieurement par $1/n$, sinon le rayon aurait été réfracté lors du rebond. Une fois fixé (φ, χ) , un peu de trigonométrie permet de déduire (φ', χ') :

$$\varphi' = \text{Acos}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+1}}\right) - \text{Acos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right) \quad \text{et} \quad \chi' = \varphi' + \varphi + \chi \quad (3.29)$$

avec les paramètres auxiliaires a et c définis par

$$a = -\tan(\varphi + \chi) \quad \text{et} \quad c = -\left[2a\frac{l}{r} + a\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\right]$$

La grande langue à gauche de la figure 3.21 (b) correspond à ces rayons. Ceux qui se retrouvent en-dessous de la ligne $\sin(\chi) = 1/n$ sont réfractés et la distribution des angles

d'émission θ reproduit les données de la figure 3.18. Les autres rayons sont réfléchis et rebondissent du demi-cercle de gauche sur lui-même avec conservation de l'angle d'incidence χ , ce qui conduit aux autres petites branches. Cette dynamique en rebonds successifs est modifiée lorsque les rayons atteignent la partie droite ($\varphi' > \pi/2$).

Cette approche reste valable tant que l'indice de réfraction demeure raisonnablement faible. Pour un indice élevé, par exemple $n \sim 3$, la section de Poincaré est plus complexe car peu de rayons sont réfractés. Pour les systèmes qui nous concernent, $n = 1.5$, cette approche donne des résultats très convaincants.

Toutefois, les expressions (3.29) ne permettent pas d'extraire une formule simple pour l'angle d'émission moyen $\langle \theta \rangle$ et il n'est pas aisé de tenir compte des réflexions sur les parties droites qui ne manquent pas de survenir lorsque l/r augmente. Nous avons donc proposé un modèle simplifié qui repose sur l'hypothèse d'ergodicité sur le demi-cercle de droite et considère le demi-cercle de gauche comme une lentille sphérique. Considérons par exemple le point source en rouge sur la figure 3.22 (b). Il émet des rayons avec des angles χ compris entre $1/n$ et $\pi/2$. Par une approximation grossière de type paraxiale, ils peuvent être ramenés à une seule direction principale (χ_0) passant par le centre de la lentille (point noir) émis avec un angle θ vérifiant ($\chi' = 0$, incidence normale) :

$$\sin[\theta(\chi_0)] = \sin(\chi_0) \frac{r}{2l}$$

Les données de la position du point source φ ou de χ_0 sont équivalentes. Pour obtenir la direction moyenne d'émission $\langle \theta \rangle$, il suffit d'intégrer sur tous les angles χ_0 possibles :

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \theta(\chi_0) d\chi_0 \quad (3.30)$$

Comme densité d'intégration, on peut choisir $d\chi_0$, $d\sin(\chi_0)$ ou $d\varphi(\chi_0)$, la variation sur $\langle \theta \rangle$ reste négligeable. Les bornes d'intégration χ_1 et χ_2 sont contraintes d'un côté par $\sin(\chi_1) = 1/n$ et de l'autre par $\tan(\chi_2) = 2l/r$ correspondant à $\varphi(\chi_0) = \pi/2$ (extrémité du demi-cercle). La courbe représentant $\langle \theta \rangle$ en fonction de l/r est tracée en pointillés noirs sur la figure 3.24. Il s'agit de la branche la plus basse. Elle s'arrête lorsque l/r devient inférieur à $1/2\sqrt{n^2 - 1}$ car aucun point source du demi-cercle de droite ne peut émettre de rayon avec $\sin(\chi) > 1/n$ et passant par le centre du demi-cercle de gauche. Autrement dit, la lentille formée par le demi-disque de gauche n'est plus éclairée en son centre (cf. fig. 3.23 (a)). On pourrait d'ailleurs poursuivre l'analogie, même dans cette configuration, et prolonger la courbe jusqu'à $l/r = 0$.

Le même raisonnement peut être repris en considérant un ou plusieurs rebonds sur les parties rectilignes. Il conduit aux autres branches en pointillés noirs de la figure 3.24, indicées par $m \in \mathbb{Z}$. La branche la plus basse est obtenue sans rebond ($m = 0$) et celle juste au-dessus avec un seul rebond sur le segment de droite supérieur ($m = -1$). Les deux branches suivantes ont été tracées en considérant un rebond sur le segment inférieur avec ($m = -2$) ou sans ($m = 1$) rebond préalable sur le segment supérieur. La signe de m rappelle le dépliage du stade par rapport aux parties rectilignes et l'ensemble de ces notations est repris sur la figure 3.23 (b). Un rayon qui se propage vers le bas est noté avec un signe + suivi du nombre d'intersections avec les segments de droite, et de même pour un rayon parti vers le haut, assorti du signe -. Les formules énoncées précédemment se généralisent pour un m quelconque :

$$\theta(\chi_0) = \left| A \sin \frac{m}{\sqrt{m^2 + (l/r)^2}} + A \sin \frac{\sin \chi}{2\sqrt{m^2 + (l/r)^2}} \right|$$

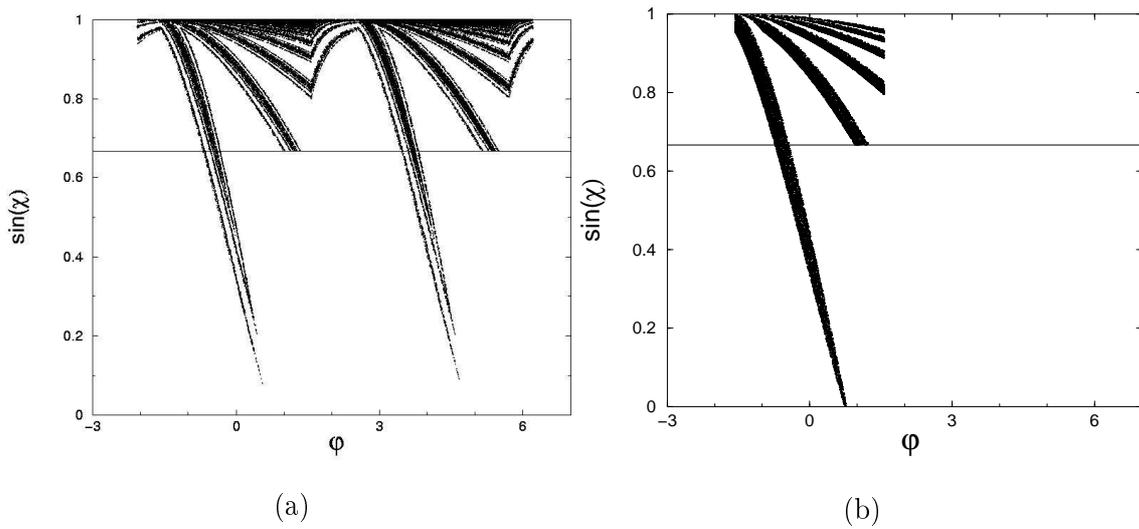


FIG. 3.21 – Section de Poincaré pour un stade de forme $l/r = 0.5$ avec $r = 1$. (a) obtenue avec une simulation en rayons, (b) obtenue à partir des formules (3.29) en supposant une distribution uniforme des s et $\sin(\chi)$ sur le demi-cercle de droite.

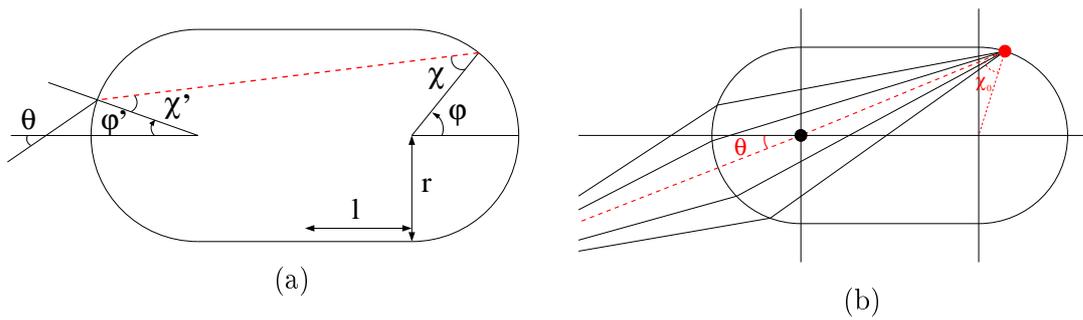


FIG. 3.22 – (a) Notations pour le stade. (b) Schéma explicatif pour le modèle de lentille.

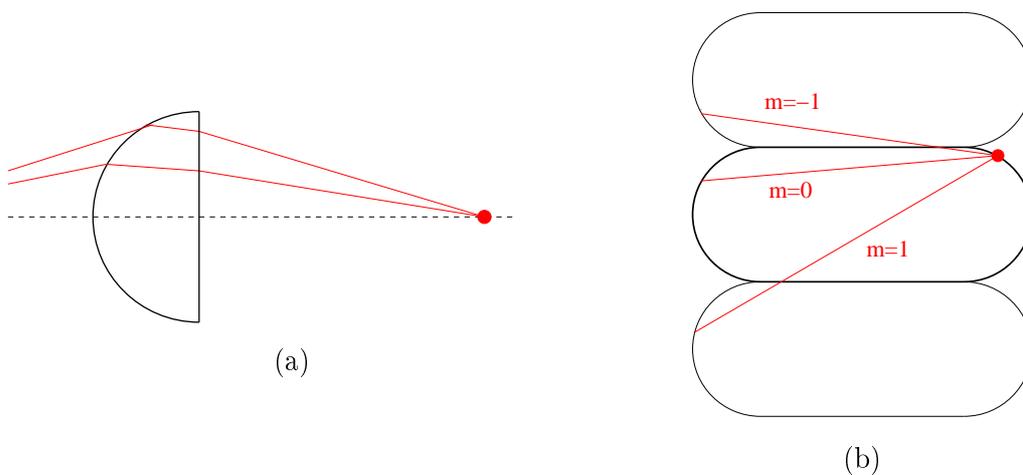


FIG. 3.23 – (a) Lentille éclairée partiellement. (b) Dépliage du stade et notation pour m .

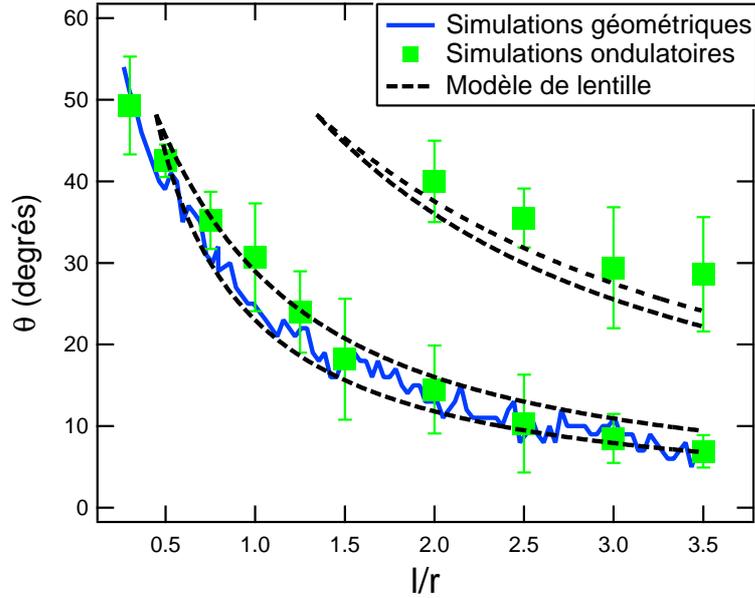


FIG. 3.24 – Direction d'émission du stade en fonction de l/r . Comparaison entre les simulations géométriques (ligne continue bleue), les simulations ondulatoires (carrés verts) et la prédiction du modèle de lentille (lignes pointillées noires).

L'intégrale (3.30) s'effectue toujours à partir de $\sin(\chi_1) = 1/n$, mais maintenant χ_2 est limité par $\sin(\chi_2) = 2l/\sqrt{4l^2 + (2m+1)^2r^2}$, et la branche n'existe que pour l/r supérieur à $|2m+1|/2\sqrt{n^2-1}$. On voit ainsi apparaître des canaux successifs qui s'ouvrent lorsque l/r augmente. Pour $l/r > 2$, les fonctions d'onde bien confinées présentent un deuxième maximum représenté par des ronds verts sur la figure 3.24. Leur position est en bon accord avec ce modèle de lentille. Il en est de même pour les simulations géométriques. Sur la distribution des angles d'émission pour $l/r = 2$, courbe tirée de la figure 3.18, on distingue bien une petite bosse autour de 30° . A l'heure actuelle, la précision expérimentale ne permet pas d'identifier ces voies d'émission secondaires.

Comme le principe de focalisation/défocalisation est au cœur du concept d'ergodicité, il est probable que le modèle de lentille s'applique à d'autres formes de cavités chaotiques. Les premiers essais sur les disques coupés ont été plutôt concluants comme l'atteste la figure 3.25. Les simulations géométriques ont été réalisées avec les mêmes conditions initiales que pour le stade et produisent des distributions d'angle d'émission semblables à celles de la figure 3.18 (a) dont la position du maximum, reportée en bleu sur la figure 3.25, dépend de d (cf. fig. 3.5 (a) pour les notations). Cette ligne n'atteint pas $d = 0$ car le demi-disque est intégrable et les simulations géométriques ne permettent pas de rendre compte de ce régime. Pour les prédictions du modèle de lentille, représentées en ligne pointillée noire, nous avons considéré une distribution uniforme de points sources sur la partie droite. Les contraintes sur les angles sont de même nature que pour le cas du stade. Les points expérimentaux (ronds rouges) confirment ces approches.

Conclusion Au cours de cette partie consacrée aux processus réfractifs, nous avons montré qu'ils conduisent généralement à un régime stationnaire et une émission directionnelle. Ces deux aspects sont intimement liés dans le modèle de lentille qui prédit de manière efficace les directions d'émission de cavités chaotiques.

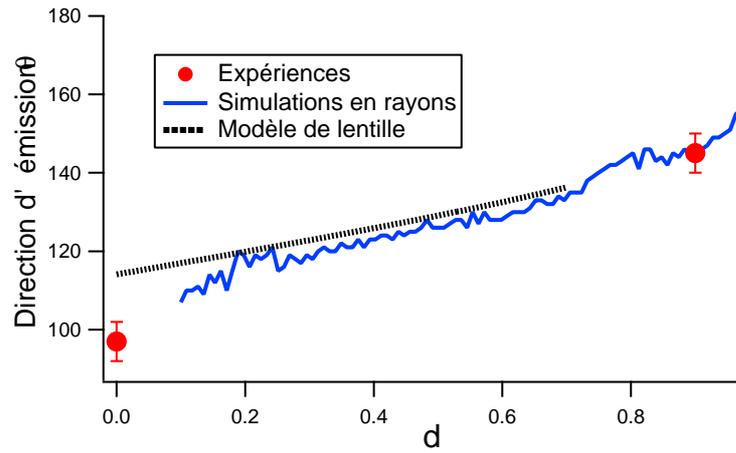


FIG. 3.25 – Direction d'émission du disque coupé en fonction du paramètre d . Comparaison entre les expériences (ronds rouges), les simulations en rayons (ligne bleue) et la prédiction du modèle de lentille (pointillés noirs). Voir la figure 3.5 (a) pour les définitions de d et θ .

Grâce aux informations recueillies, nous pouvons conclure que si l'objectif avoué consiste à proposer une forme de micro-laser à émission unidirectionnelle, le fer-à-cheval répond à ce critère. Les résultats expérimentaux préliminaires de la figure 3.26 en attestent.

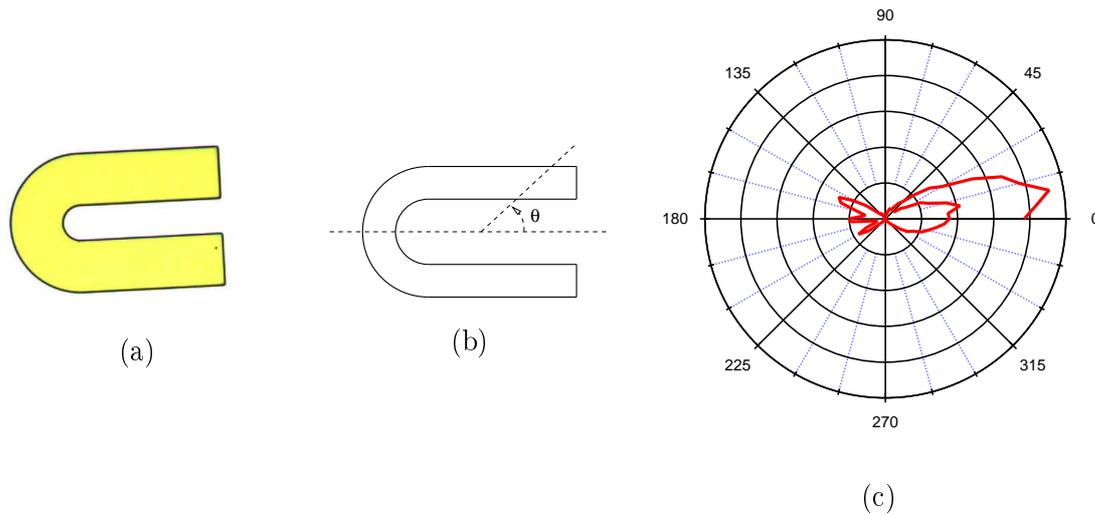


FIG. 3.26 – Fer-à-cheval. (a) Photographie au microscope optique. Dimension typique $100 \mu\text{m}$. (b) Notations. (c) Intensité détectée en fonction de l'angle θ .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les différents mécanismes qui conduisent à une émission de lumière. La diffraction peut être traitée par méthode perturbative même dans des cas non intégrables comme le disque coupé. Cette approche est détaillée dans [42] et généralisée aux perturbations continues du disque. Lorsque la dynamique est chaotique, la réfraction devient le processus dominant. Le modèle de lentille permet alors de rendre compte de l'émission directionnelle. L'article [64] décrit cette méthode et insiste sur la ressemblance entre optiques géométrique et ondulatoire pour ce type de système. Par ailleurs nous avons étudié l'évolution temporelle de l'intensité dans la cavité et montré qu'elle est gouvernée par les orbites périodiques dominantes.

Chapitre 4

Spectres

Les spectres des résonateurs constituent un sujet d'étude standard car ils recèlent une multitude d'informations sur le système. Ils permettent notamment de retrouver des grandeurs relatives au résonateur lui-même : dimension [4], indice effectif [91], facteur de qualité ; et peuvent, par là même, être utilisés comme capteurs via les déplacements des pics [122] ou l'élargissement des raies [5]. Avant tout, la maîtrise d'un laser passe par la compréhension de ses propriétés spectrales liées à la fois aux caractéristiques géométriques de la cavité et au régime dynamique non-linéaire.

Bien que parfois il s'avère nécessaire d'utiliser un modèle avec effet laser (cf. partie 2.3 et 4.1.3), mon travail de thèse est consacré principalement à l'étude des résonateurs passifs en lien avec les travaux sur le chaos quantique pour les systèmes ouverts. Dans ce cadre, l'utilisation de micro-lasers en matériaux organiques présentent un double avantage. D'une part la grande largeur de gain des colorants lasers permet de visualiser le spectre sur une plage conséquente en longueur d'onde (environ 30 nm autour de $\lambda \simeq 600$ nm), d'autre part le faible indice de réfraction ($n \sim 1.5$) opère une sélection dans les orbites périodiques visualisables. Alors que pour les systèmes chaotiques fermés, les scars (ou cicatrices) sont l'exception [52, 110], ici elles sont la règle comme nous le verrons, entre autres, à la partie 4.3.

Au cours de ce chapitre consacré à l'étude des spectres, nous verrons tout d'abord comment en extraire des informations sur les orbites périodiques du système. Ensuite nous aborderons le cas des cavités polygonales pour lequel nous avons proposé un modèle prédictif à base d'orbites périodiques marginales, avant d'explorer les formes chaotiques - stade et disque coupé - et les bifurcations d'orbites qui y sont associées.

4.1 Spectres et orbites périodiques

Les spectres sont naturellement associés aux orbites périodiques. Dans le contexte du chaos quantique, la formule de trace permet de passer des uns aux autres, et pour les laseristes, l'intervalle spectral libre (ISL) renseigne sur les trajets suivis par la lumière. Nos micro-lasers permettent de vérifier les prédictions des modèles théoriques. Cette première partie est consacrée aux conditions de cette validation expérimentale et à l'établissement d'un cadre théorique général. Le cas du résonateur Fabry-Perot (§ 4.1.1) présente une démonstration de principe qui peut être étendue aux cas plus complexes traités par la suite. Le paragraphe 4.1.2 revient en détails sur le rapport entre spectre et orbites périodiques via la formule de trace. Quant aux limitations liées à la coexistence d'orbites et aux contraintes

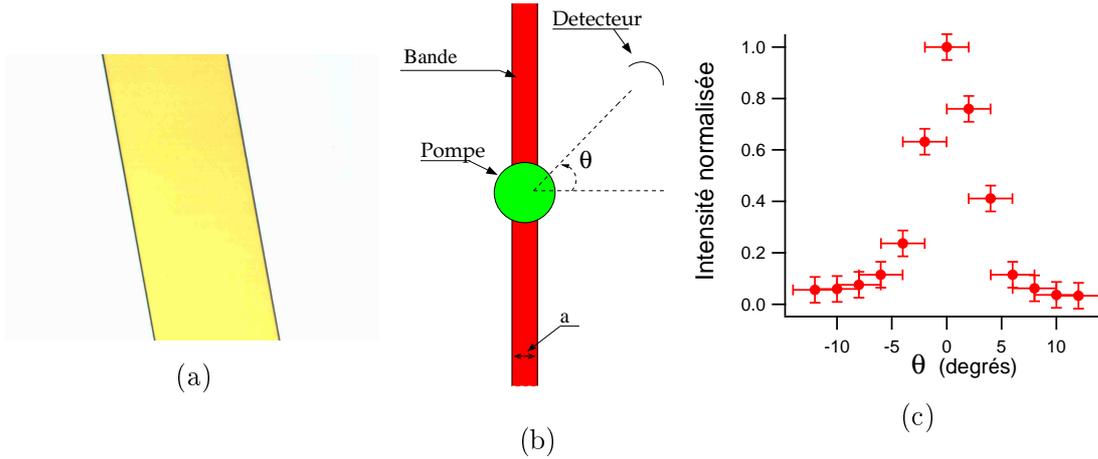


FIG. 4.1 – (a) Photographie au microscope optique d'une bande (vue partielle) utilisée comme résonateur Fabry-Perot. Sa largeur a est de 200 microns. (b) Schéma de l'expérience sur les résonateurs Fabry-Perot. (c) Intensité détectée selon l'angle θ dans la configuration décrite en (b).

technologiques, elles sont détaillées en 4.1.3.

4.1.1 Résonateur Fabry-Perot

Le résonateur Fabry-Perot est indiqué pour vérifier la précision des mesures spectrales car il n'existe qu'une seule orbite périodique et tous les paramètres expérimentaux sont contrôlables indépendamment : largeur de la cavité, indices, étalonnage du spectromètre.

La cavité expérimentale (figure 4.1 (a)) est constituée d'une longue bande pompée de manière uniforme selon sa direction transverse comme indiqué sur le schéma 4.1 (b). La lumière est émise dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (cf. fig. 4.1 (c)), ce qui atteste que l'effet laser apparaît le long de l'orbite périodique de longueur $L = 2a$ connectant les deux faces. La condition de quantification

$$r^2 e^{ikLn_{eff}} = 1$$

implique que les pics de résonance sont disposés de manière périodique en k

$$k_m Ln_{eff} = 2\pi m \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

Compte-tenu des ordres de grandeur ($L = 200 \mu\text{m}$, $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ et $n_{eff} = 1.5$), m varie entre 200 et 600. Comme la plage spectrale explorée est étroite, la périodicité semble apparaître aussi en longueur d'onde, alors qu'elle n'est qu'approximative ($\Delta k = \Delta\lambda/\lambda^2$). En effet le spectre expérimental 4.2 (a) présente un intervalle spectral libre $\Delta\lambda$ régulier. Pour extraire la longueur géométrique de l'orbite, L , quantité qui nous intéresse, on peut mesurer directement $\Delta\lambda$ ou utiliser la transformée de Fourier du spectre représentée sur la figure 4.2 (b). Le spectre peut être décrit par la formule suivante

$$f(k) = \left(g(k) * \sum_m \delta\left(k - m \frac{2\pi}{nL}\right) \right) \times h(k)$$

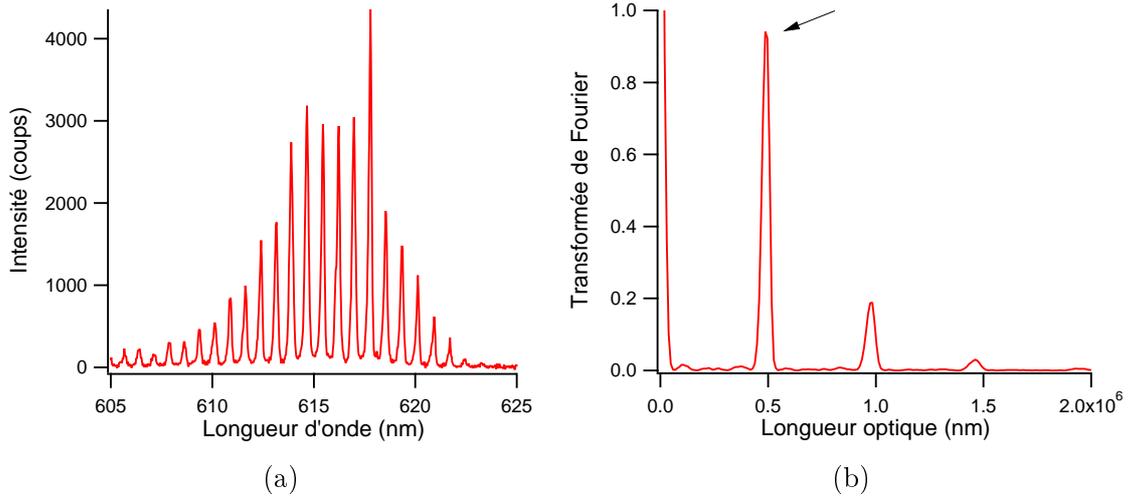


FIG. 4.2 – (a) Spectre d'un très long rectangle de largeur $a = 150 \mu\text{m}$ utilisé en configuration Fabry-Perot (cf. fig. 4.1 (b)). (b) Transformée de Fourier du spectre en (a) exprimé comme l'intensité en fonction du nombre d'onde k . La flèche indique la position de ce qui est appelé le premier pic.

où \times représente le produit simple et $*$ le produit de convolution. Chaque pic Dirac correspondant à une résonance est habillé par la fonction g et l'ensemble est modulé par l'enveloppe h . Après transformation de Fourier

$$\tilde{f}(l) = \tilde{g}(l) \times \left(\sum_m \delta(l - mnL) * \tilde{h}(l) \right)$$

C'est à dire que la transformée du spectre exprimé comme l'intensité en fonction du nombre d'onde k présente des pics à la longueur optique nL et à ses multiples mnL habillés par \tilde{h} . Et la nouvelle enveloppe globale \tilde{g} provient de la forme originelle des pics du spectre. Les résonances du Fabry-Perot sont assez larges (1.5 nm à mi-hauteur) car l'orbite possède des pertes réfractives. Aussi l'enveloppe de la transformée de Fourier \tilde{g} est-elle plutôt étroite et ne laisse-t-elle apparaître que deux ou trois harmoniques.

La position du premier pic de la transformée de Fourier \tilde{f} indique donc directement la longueur optique de l'orbite qu'il est ainsi possible de mesurer de manière systématique pour différentes formes de cavité de tailles variées. L'incertitude de mesure est indiquée par la largeur de ce pic. En général, elle découle de propriétés expérimentales et théoriques - pixelisation du détecteur, bruit dans le spectre, enveloppe h du spectre, coexistence de plusieurs orbites avec des longueurs proches - qui peuvent être considérées comme sources d'erreur statistique. Par contre il existe des erreurs potentielles qui entraînent un biais systématique et doivent donc être identifiées. C'est pourquoi le résonateur Fabry-Perot s'est révélé nécessaire.

Nous avons fabriqué des cavités de largeur a variant entre 100 et 250 μm . Pour chacune d'elles, le spectre a été enregistré et la longueur optique de l'orbite déduite de sa transformée de Fourier. Ces mesures sont reportées par des ronds rouges sur la figure 4.3 assorties des barres d'erreur déduites de la largeur du premier pic de la transformée de Fourier. L'ajustement linéaire en rouge passe par tous les points expérimentaux ce qui est un gage supplémentaire de validité. D'après l'équation (4.1), on s'attend à une droite passant par l'origine de pente $n_{eff} \times 2a$, avec $n_{eff} = 1.50$ (cf. partie 2.2.1). Elle est tracée en pointillés

noirs sur la figure 4.3. L'écart avec les données expérimentales est de 10 %. Rechercher son origine a été l'occasion de contrôler les diverses sources d'erreurs systématiques.

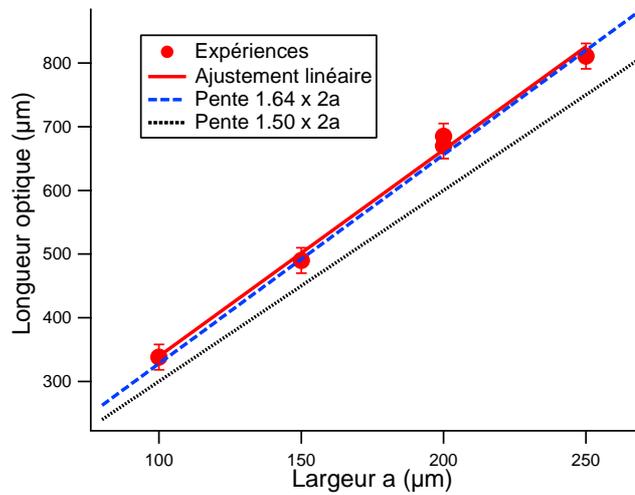


FIG. 4.3 – Longueur optique en fonction de la largeur des résonateurs a . Les points expérimentaux sont indiqués par des ronds rouges et leur ajustement linéaire en trait continu rouge. La droite en tirets bleus correspond à la longueur optique attendue pour un résonateur Fabry-Perot de largeur a avec un indice $n_{tot} = 1.64$, sans paramètre ajusté ; celle en pointillés noirs est tracée avec $n_{eff} = 1.50$.

Avant tout, l'étalonnage du spectromètre est indispensable. Il faut notamment vérifier le calcul de la dispersion, non trivial dans le cas d'un *détecteur étendu* (caméra CCD). En effet si la correspondance longueur d'onde - pixel n'est pas réalisée de manière correcte sur toute la fenêtre de la caméra, la suite du traitement du spectre est faussée. Cette opération est effectuée par le logiciel de la caméra selon un algorithme plus ou moins complexe. Nous avons dû échanger notre caméra contre une autre fabriquée par Princeton instrument pour obtenir la précision de 0.1 nm désirée. L'erreur sur $\Delta\lambda$ a été estimée à moins de 0.01 nm avec le doublet du mercure enregistré à différentes positions par rapport à la fenêtre de la caméra. $\delta\Delta\lambda/\Delta\lambda$ correspond à une erreur statistique de l'ordre du pourcent pour les $\Delta\lambda$ typiques à mesurer ($\Delta\lambda \gtrsim 1$ nm).

Une autre source d'erreur provient de la taille des cavités. En effet la valeur de a reportée sur le graphe 4.3 correspond au dessin du masque. Après mesures au microscope optique, à la fois du masque lui-même et des cavités gravées, nous n'avons pas constaté de déviation notable. Il faut aussi préciser que les outils de mensuration du microscope (logiciel Leica) ont été étalonnés préalablement. Au final la précision sur a est estimée à moins de 2 %.

L'écart de 10 % enregistré sur les mesures Fabry-Perot ne pouvant pas être élucidé ainsi, nous avons exploré les sources technologiques. Les indices de réfraction et les épaisseurs de chacune des couches ont été mesurés séparément par ellipsométrie, puis contrôlés après chaque étape de fabrication (cf. § 2.1.2). Les variations statistiques restent faibles et l'indice effectif est estimé d'après l'équation (2.9) à 1.50 ± 0.01 . Mais le modèle développé au paragraphe 2.2.1 suppose que la couche confinante (SOG ou silice) est infinie, alors qu'elle ne mesure que 2 μm d'épaisseur et repose sur un substrat de silicium. Nous avons alors fabriqué des cavités Fabry-Perot avec une couche de silice de 7 μm d'épaisseur

et avons obtenu des résultats tout à fait similaires à ceux de la figure 4.3, ce qui atteste qu'une épaisseur de $2 \mu\text{m}$ est suffisante pour assurer un confinement vertical.

Nous avons alors cherché l'origine de cet écart de 10 % dans les propriétés non-linéaires. Les mesures spectrales étant enregistrées en régime laser, un rapprochement des raies peut advenir dû au "pulling effect" [105]. Il s'agit d'un changement de l'indice de réfraction causé par la gain qui, modifiant sa partie imaginaire, influe sur sa partie réelle. Ce phénomène est bien documenté pour les lasers en pompage stationnaire et conduit à des variations de $\Delta\lambda$ inférieures à quelques pourcents. Dans le cas d'un pompage impulsif, la bibliographie s'avère très restreinte et nous n'avons pas trouvé de référence proche du cas très particulier de nos micro-lasers où le milieu amplificateur occupe tout le volume de la cavité. Comme il est vraisemblable que cet effet dépende du pompage, nous avons enregistré des spectres pour des intensités de pompe variant d'un facteur 3. Les données de la figure 2.22 indiquent qu'aucune modification n'est détectable. Par ce test, nous avons aussi montré que les non-linéarités de la molécule de DCM (χ_2 entre autres) n'interviennent pas non plus.

En fait l'écart de 10 % vient de la formule utilisée $n_{eff} \times 2a$ qui n'est pas adaptée. Si on suppose que $\delta k_m = k_{m+1} - k_m$ reste constant sur l'intervalle considéré, le développement au premier ordre en δk de l'équation (4.1) conduit à

$$\delta k_m [n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m)] L = 2\pi \quad (4.2)$$

L'indice qui apparaît

$$n_{tot} = n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m) \quad (4.3)$$

est appelé indice total n_{tot} . Il comprend un terme équivalent à une vitesse de phase n_{eff} et un autre similaire à une vitesse de groupe $k_m \partial n_{eff} / \partial k$. A priori ce dernier est négligeable, puisque la dispersion du matériau reste faible. En effet le domaine de longueur d'onde exploré (600 à 630 nm) est assez étroit et l'indice varie donc peu (cf. figure 2.10 (c)), mais c'est la pente de l'indice qui intervient dans (4.2). En fait la correction $k_m \partial n_{eff} / \partial k$ atteint 10 % car elle comprend deux types de contribution qui s'ajoutent : la dispersion du matériau massif (environ 7 %) et celle de l'indice effectif (environ 4 %). Si tous ces paramètres sont pris en compte, c'est à dire que l'indice effectif est calculé avec un indice n_{gl} qui dépend de la longueur d'onde suivant la courbe de la figure 2.10 (c), alors l'indice total est estimé à

$$\boxed{n_{tot} = 1.64 \pm 0.01}$$

Il ne dépend que faiblement de l'épaisseur de la couche active et de la polarisation TE ou TM. Par la suite, nous considérerons que $n_{tot} = 1.64$ avec une précision de quelques pourcents. La droite de pente $1.64 \times 2a$, représentée en tirets bleus sur la figure 4.3 s'accorde bien aux données expérimentales.

Pour résumer, nous avons démontré l'efficacité d'une méthode spectrale pour mesurer la longueur d'une orbite périodique. L'utilisation de résonateurs Fabry-Perot a permis d'évaluer la précision de chacun des paramètres. Il faut souligner qu'il ne s'agit pas d'un étalonnage mais d'une vérification puisque toutes les grandeurs ont été mesurées de manière indépendante, notamment la correction à l'indice effectif n_{tot} .

4.1.2 Coexistence d'orbites : formule de trace

Le résonateur Fabry-Perot est bien adapté pour les tests préliminaires puisqu'il n'existe qu'une seule orbite. Dans le cas général, le nombre d'orbites périodiques peut être assez élevé. Pour les billards chaotiques il croît même exponentiellement avec leur longueur [47]. Alors comment se présente le spectre et comment prévoir la contribution de chaque orbite ? La formule de trace permet de répondre à cette double question.

Formule de trace

La correspondance entre le spectre, représentation ondulatoire, et les orbites périodiques, objets géométriques, n'est pas triviale. Les formules de trace connectent ces deux approches à la limite semi-classique. Considérons par exemple un opérateur \hat{H} de valeurs propres $\{E_m\}$. La densité d'états s'écrit¹

$$d(E) = \sum_m \delta(E - E_m) \quad (4.4)$$

A la limite semi-classique, il est possible de transformer l'expression (4.4) purement ondulatoire en [23, 17] :

$$d(E) = \bar{d}(E) + \sum_p C_p \cos(kL_p + \mu_p) \quad (4.5)$$

où $k = \sqrt{E}$. $\bar{d}(E)$ représente le terme lisse auquel nous ne intéresserons pas. L'indice p identifie chaque orbite périodique. L_p correspond à la longueur de l'orbite d'indice p , C_p est un coefficient de nature géométrique et μ_p prend en compte toutes les phases accumulées [17, 23]. L'équation (4.5) ramène donc le spectre à une somme où seuls interviennent des paramètres géométriques propres à chaque orbite périodique. Cette équivalence a été démontrée pour des systèmes intégrables (formule de Berry-Tabor) et totalement chaotiques (formule de Gutzwiller) [23, 17].

Il faut aussi préciser qu'elle ne concerne que des systèmes fermés. L'adaptation naïve à nos cavités diélectriques consistent à pondérer chaque orbite par ses coefficients de réflexion et à tenir compte des déphasages correspondants. On pourrait s'attendre à une modification plus compliquée. En fait nous avons montré dans deux cas intégrables, le barreau et le disque, que cette approche est correcte. Ces exemples sont traités dans les paragraphes suivants.

La différence majeure entre un résonateur diélectrique et un billard fermé, c'est que l'équation (4.4) n'est plus utilisable. En effet, les modes ne sont plus parfaitement confinés dans le puits de potentiel. Ils s'échappent : les raies sont élargies par les pertes radiatives. Ils sont appelés modes quasi-stationnaires (cf. § 2.2.1). On s'attend alors à une densité d'états comme une somme de lorentziennes² :

$$d(E) = \frac{1}{2k\pi} \sum_m \frac{\text{Im}(k_m)}{(k - \text{Re}(k_m))^2 + \text{Im}(k_m)^2} \quad (4.6)$$

La question se pose alors de savoir si cette forme de densité d'états peut conduire à une somme sur les orbites périodiques telle que l'expression (4.5). Il faut donc s'intéresser à la

¹Pour régulariser cette expression, les mathématiciens préfèrent utiliser une fonction test f . Un équivalent de la densité s'écrit alors : $\text{Tr}[f(\hat{H})] = \int dE \sum \delta(E - E_m) f(E) = \sum f(E_m)$.

²Par changement de variable dans (4.4), on constate que $d(E) = d(k)/2k$. De là le facteur $1/2k$ qui apparaît de manière récurrente.



FIG. 4.4 – (a) Schéma du barreau diélectrique d'indice n compris entre $x = 0$ et $x = L$. (b) Même schéma sans le barreau diélectrique.

grandeur fondamentale qui porte le contenu informatif commun aux formes (4.4) et (4.5) : la fonction de Green G . Elle est définie par l'équation

$$(E - \hat{H}_x)G(x, y) = \delta(x - y) \quad (4.7)$$

avec E réelle et les conditions aux bords. La densité d'états est définie directement à partir de G :

$$d(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} \text{Im} G(x, x) dx \quad (4.8)$$

où \mathcal{D} correspond au domaine de définition de G . L'utilisation de la partie imaginaire $\text{Im}(G)$ permet de s'affranchir de la convention choisie entre fonctions de Green avancée et retardée (cf. § 2.2.1). Nous choisissons cette définition (4.8) comme référence à la fois pour les systèmes ouverts et fermés. Dans le cas des systèmes chaotiques ou intégrables fermés, elle permet de remonter aux expressions (4.5) et (4.4). Nous avons entrepris de justifier ces équivalences pour les résonateurs diélectriques. En effet l'exemple du barreau traité ci-dessous semble indiquer qu'elles doivent exister tout aussi bien.

Cas du barreau diélectrique

Le barreau diélectrique est un système uni-dimensionnel (axe x) où l'indice vaut n pour $x \in [0, L]$ et 1 partout ailleurs comme représenté sur la figure 4.4 (a). A la différence de la configuration Fabry-Perot, on impose l'annulation de la fonction d'onde en $x = 0$ pour nous limiter au cas antisymétrique. En $x = L$, la fonction est continue, ainsi que sa dérivée. Et à l'infini, il n'existe qu'une onde sortante, de la forme e^{ikx} . Nous cherchons l'expression de la fonction de Green, pour ensuite retrouver (4.5) et (4.6) à partir de (4.8). La fonction de Green est définie par (4.7) :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + n_i^2 k^2\right)G(x, y) = \delta(x - y)$$

où $n_i = n$ dans le barreau et 1 à l'extérieur. D'après cette formulation, la dérivée seconde de G en $x = y$ est un dirac. Sa dérivée première correspond alors à une marche de hauteur 1 et G elle-même est continue. Pour résumer, G vérifie les conditions suivantes

$$\begin{aligned} G(x = 0, y) &= 0 \\ G(x = L^-, y) &= G(x = L^+, y) \\ \frac{d}{dx} G(x = L^-, y) &= \frac{d}{dx} G(x = L^+, y) \\ G(x = y^-, y) &= G(x = y^+, y) \\ \frac{d}{dx} G(x = y^-, y) &= \frac{d}{dx} G(x = y^+, y) - 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Deux cas se présentent suivant que y se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du barreau. Le premier cas est traité ici et le deuxième dans l'annexe B. Lorsque $x \neq y$, G vérifie

l'équation de Helmholtz standard avec $n_i = n$ pour $x \in [0, L]$ et $n_i = 1$ pour $x > L$, soit

$$\begin{aligned} G(x, y) &= Ae^{inkx} + Be^{-inkx} & 0 < x < y \\ &= Ce^{inkx} + De^{-inkx} & y < x < L \\ &= Ee^{ikx} & L < x \end{aligned}$$

Les constantes complexes A, B, C, D et E sont déterminées à partir des conditions (4.9) et dépendent donc de y . Après un peu d'algèbre, on obtient :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -\frac{1}{nk} \frac{1}{1 - rr'e^{2inkL}} \sin nkx (e^{inky} - rr'e^{2inkL}e^{-inky}) & 0 < x < y \\ & & \sin nky (e^{inkx} - rr'e^{2inkL}e^{-inkx}) & y < x < L \\ & & \sin nky (1 - rr')e^{ik[x-L(1-n)]} & L < x \end{aligned}$$

Pour l'analogie, nous avons introduit $r = \frac{n-1}{n+1}$ et $r' = -1$. Ce paramètre r correspond au coefficient de réflexion d'un milieu d'indice n vers un milieu d'indice 1 et r' au déphasage de π lors de la réflexion en $x = 0$.

Dans un premier temps, nous allons prouver qu'il est possible de passer de (4.8) à (4.6), montrant ainsi la validité de l'expression (4.6) pour un système ouvert tel que le barreau diélectrique. Il faut donc calculer

$$\int_0^L G(x, x) dx$$

L'intégrale s'effectue entre 0 et L parce que la configuration choisie impose $y \in [0, L]$. La partie $y > L$ est traitée dans l'annexe B et n'apporte pas de contribution pertinente.

$$G(x, x) = -\frac{1}{nk} \frac{1}{1 - rr'e^{2inkL}} \sin nkx (e^{inkx} - rr'e^{2inkL}e^{-inkx})$$

Après intégration, les termes dépendants de x sont pondérés par un facteur $1/k^2$ contrairement aux termes constants en $1/k$. A la limite semi-classique ($k \rightarrow \infty$), ils peuvent donc être négligés :

$$\int_0^L G(x, x) dx \simeq \frac{L}{2ink} \frac{1 + rr'e^{2inkL}}{1 - rr'e^{2inkL}} \equiv \frac{L}{2ink} f(k) \quad (4.10)$$

G - et donc f - possède des pôles pour $rr'e^{2inkL} = 1$. En écrivant $r = |r|e^{i\delta}$ et $r' = |r'|e^{i\delta'}$, ils vérifient³

$$\text{Im } k_m = \frac{\ln |rr'|}{2nL} \quad \text{et} \quad \text{Re } k_m = \frac{2\pi m + \delta + \delta'}{2nL} \quad m \in \mathbb{N}$$

On décompose alors f comme une somme sur ces pôles :

$$f(k) = \sum_m \frac{\alpha_m}{k - k_m}$$

Les coefficients α_m sont déterminés par les résidus de f :

$$\lim_{k \rightarrow k_{m_0}} (k - k_{m_0}) f(k) = \alpha_{m_0} = \frac{i}{nL}$$

³Ici $|r| = \frac{n-1}{n+1}$, $|r'| = 1$, $\delta = 0$ et $\delta' = \pi$

Nous avons donc obtenu

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^L G(x, x) dx = -\frac{1}{2n^2 k \pi} \sum_m \frac{1}{k - \operatorname{Re}(k_m) - i \operatorname{Im}(k_m)}$$

Pour retrouver les lorentziennes de l'expression (4.6), il faut ajouter les pôles complexes conjugués des k_m , qui correspondent au choix de convention e^{-ikx} pour une onde se propageant vers les x positifs. C'est l'utilité de la prescription "Im" dans la définition (4.8). Au final

$$d(E) = -\frac{1}{2n^2 k \pi} \sum_m \frac{\operatorname{Im}(k_m)}{(k - \operatorname{Re}(k_m))^2 + \operatorname{Im}(k_m)^2} \quad (4.11)$$

Au facteur $1/n^2$ près, on retrouve bien l'expression (4.6). Les k_m correspondent bien aux nombres d'onde attendus pour un résonateur Fabry-Perot. Sur cet exemple, on constate que pour obtenir l'expression (4.6) à partir de la définition (4.8), il suffit que tous les pôles de G correspondent aux résonances du système avec des résidus égaux.

Maintenant, repartons de cette même définition (4.8) pour retrouver la forme (4.5) de la densité d'états comme une somme sur les orbites périodiques. Après avoir intégré $G(x, x)$ sur l'intervalle $[0, L]$, puis utilisé l'approximation semi-classique, on obtient à nouveau l'expression (4.10). Elle est de la forme $A/(1 - X)$ avec $|X| < 1$. On peut donc l'écrire comme $A \sum X^p$, ce qui conduit à

$$\int_0^L G(x, x) dx = \frac{L}{nk} \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (rr')^p e^{2imkLp} \right)$$

Une fois pris en compte l'ensemble de la définition (4.8), il apparaît

$$\int_0^L \operatorname{Im} G(x, x) dx = \frac{L}{nk} \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} |rr'|^p \cos(nkl_p + \delta + \delta' - \pi/2) \right)$$

où $l_p = 2pL$ correspond à p aller-retours dans le barreau. On retrouve bien la somme sur les orbites périodiques (ici les répétitions de l'unique orbite), pondérées par leurs coefficients de réflexion. Le facteur 2 devant la somme prend en compte les deux sens de parcours possibles.

En fait ce résultat dérive de la définition même de la fonction de Green. $G(x, y)$ correspond à une particule qui part de x pour aller vers y , donc $G(x, x)$ représente toutes les trajectoires qui partent et aboutissent en x . L'approximation semi-classique sélectionne parmi ces trajectoires celles dont les impulsions initiales et finales sont égales, c'est à dire les orbites périodiques⁴. L'intégration sur toute la surface du système (ici $\int_0^L dx$) permet de prendre en compte toutes les orbites périodiques. Le lien entre les expressions (4.8) et (4.5) semble donc clair.

En revanche, la relation entre (4.8) et (4.6) s'avère beaucoup moins évidente. En effet, dans les cas standard comme celui du barreau, il faut montrer l'équivalence entre les pôles de G et les résonances du système. En fait il s'agit d'un problème équivalent à celui de la diffusion d'une particule par un potentiel localisé. Dans les années soixante, Krein propose

⁴Comme le barreau est un système unidimensionnel, cette étape est triviale

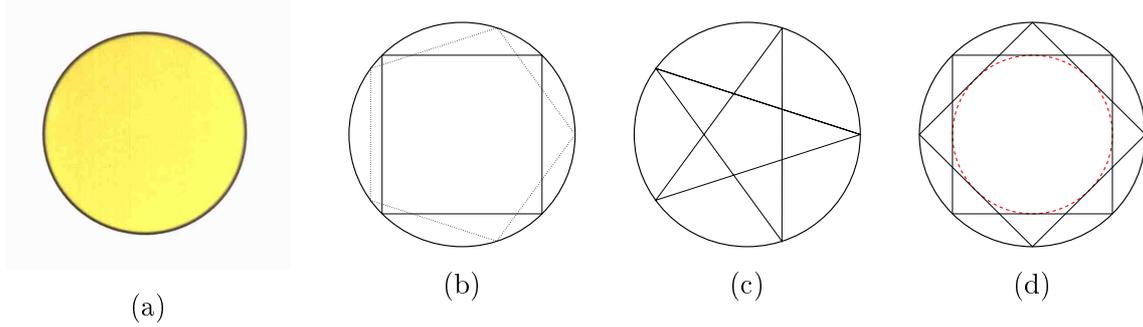


FIG. 4.5 – (a) Photographie au microscope optique d'un disque à 200 côtés. (b) Une représentation de la famille d'orbites périodiques en carré ($P = 4, M = 1$) et en pentagone ($P = 5, M = 1$). (c) Une représentation de la famille d'orbites périodiques en étoile à 5 branches ($P = 5, M = 2$). (d) Deux représentations de l'orbite périodique en carré avec sa caustique en pointillés rouges.

une formule⁵ qui sera développée par la suite. Elle relie la fonction de Green à la matrice S à travers l'expression (4.8) de la densité d'états :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det S \quad (4.12)$$

$d(E)$ et $d_0(E)$ correspondent aux densités d'états respectivement avec et sans le potentiel. Quant à la matrice S , elle représente l'amplitude de l'onde diffusée par le potentiel. Pour un système unidimensionnel, elle se réduit à un scalaire et il faut alors comprendre $\det S \equiv S$. Dans l'exemple du barreau, elle dérive de la résolution du système diélectrique standard avec une fonction d'onde en $x > L$ de la forme $e^{-ikx} + S(k)e^{ikx}$. D'après la discussion de la partie 2.2.1, les pôles de S sont situés sur les résonances puisqu'alors seule l'onde sortante en e^{ikr} apparaît. La formule de Krein (4.12) relie donc la fonction de Green G aux résonances du système à travers les pôles de S . L'annexe B propose sa vérification pour le barreau diélectrique et montre qu'il apparaît alors un facteur supplémentaire n^2 dans l'égalité (4.12). En fait l'analogie entre un résonateur diélectrique et un puits de potentiel quantique n'est pas complète car le potentiel diélectrique équivalent dépend de l'énergie ($\epsilon \equiv k^2$). Nous comptons explorer les conséquences génériques de ce type de potentiel original qui renouvelle le problème de la diffusion standard.

Cas du disque diélectrique

Le cas du disque diélectrique présente un intérêt majeur à plusieurs titres. Tout d'abord, il s'agit du seul cas connu de système diélectrique plan intégrable. La connaissance des résonances permet de dériver la formule de trace de manière analytique et de proposer une forme générale pour les formules de trace diélectriques. Ensuite il est possible d'identifier un coefficient de réflexion qui tient compte de la courbure pour l'appliquer par la suite à d'autres types de cavité. Enfin le disque possède des orbites marginales confinées par réflexion totale et nous verrons leur influence sur les spectres expérimentaux et numériques.

La dérivation des résonances $k_{m,p} = x_{m,p} + iy_{m,p}$ pour un disque diélectrique de rayon $R = 1$ et d'indice n a été présentée à la partie 2.2.2. Nous allons nous intéresser aux états

⁵cf. l'article original de Krein [60] et une thèse soutenue dernièrement sur le sujet qui contient de nombreuses références [22]. En fait Krein a publié une série d'articles sur le sujet, le plus ancien remontant vraisemblablement aux années quarante.

quasi-stationnaires, c'est à dire ceux compris dans la barrière de potentielle : $\frac{m}{n} < x < m$. A la limite semi-classique, la partie imaginaire du nombre d'onde y reste faible et la partie réelle x vérifie alors

$$n \frac{J'_m}{J_m}(nx) = \text{Re}\left[\frac{H'_m}{H_m}(x)\right] \quad (4.13)$$

Pour obtenir une expression plus explicite de x , nous allons utiliser les développements asymptotiques des fonctions de Bessel pour m grand et donc pour x grand [8] qui permettent de passer de (4.13) à

$$\tan\left[\sqrt{(nx)^2 - m^2} - m \text{Atan}\left(\sqrt{\frac{(nx)^2}{m^2} - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2x^2 - m^2}} \quad (4.14)$$

Pour alléger l'écriture, on introduit le déphasage $\Phi_m(x)$ défini comme l'argument de la fonction tangente dans (4.14) et qui vérifie donc

$$\tan(\Phi_m(x)) = \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2x^2 - m^2}}$$

Si le disque était fermé, $\Phi_m(x)$ se présenterait sous la même forme et vérifierait l'égalité $\tan(\Phi_m(x) - \pi/2) = 0$ qui correspond à l'annulation de la fonction d'onde sur la frontière. Ici, il apparaît un déphasage représenté par le membre de droite de (4.14). La partie réelle du nombre d'onde $x_{m,p}$ est donc définie par l'égalité

$$\Phi_m(x) = \delta(x) + p\pi \quad p \in \mathbb{Z} \quad (4.15)$$

avec $\delta(x)$ défini comme

$$\tan(\delta) = \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{n^2x^2 - m^2}}$$

D'après la formulation (4.6), la densité d'états à un facteur près $\tilde{d}(k)$ s'écrit comme une somme de lorentziennes :

$$\tilde{d}(k) = \sum_{m,p} \frac{2y}{(k - x_{m,p})^2 + y_{m,p}^2} = i \sum_{m,p} \frac{1}{k - (x_{m,p} - iy_{m,p})} - \frac{1}{k - (x_{m,p} + iy_{m,p})}$$

Nous souhaitons transformer cette expression en une somme sur les orbites périodiques du disque. Pour ce faire nous allons employer les techniques standard [17] : formule de Poisson puis point col à la limite semi-classique.

La formule de Poisson relie une fonction f à ses coefficients de Fourier via une somme⁶ :

$$\sum_m f(m) = \sum_M \int f(m) e^{2i\pi Mm} dm$$

Pour nous, elle permet de passer des indices (m,p) des résonances aux indices (M,P) des orbites périodiques.

$$\tilde{d}(k) = i \sum_{M,P} \int \left[\frac{1}{k - (x_{m,p} - iy_{m,p})} - \frac{1}{k - (x_{m,p} + iy_{m,p})} \right] e^{2i\pi(Mm+Pp)} dm dp$$

⁶ cf. par exemple <http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=. /p/poissonsomme.html>

Avec cette formulation, l'intégration sur p n'est pas aisée⁷. Nous allons donc introduire artificiellement $\int \delta(t - x_{m,p}) dt = 1$ pour nous ramener formellement au cas du disque fermé où la densité d'états s'écrit $\sum \delta(t - x_{m,p})$.

$$\tilde{d}(k) = i \sum_{M,P} \int \left[\frac{1}{k - (t - iy(t))} - \frac{1}{k - (t + iy(t))} \right] e^{2i\pi(Mm+Pp)} \delta(t - x_{m,p}) dt \, dm \, dp$$

Pour intégrer sur la variable p , on utilise le changement de variable dans la fonction delta : $\delta(t - x_{m,p}) = |f'_m(t)| \delta(f_{m,p}(t))$ avec $f_{m,p}(t) = \Phi_m(t) - \delta_m(t) - p\pi$ d'après la définition de $x_{m,p}$ en (4.15). Soit

$$\tilde{d}(k) = \frac{i}{\pi} \sum_{M,P} \int \left[\frac{1}{k - (t - iy(t))} - \frac{1}{k - (t + iy(t))} \right] e^{2i\pi(Mm + \frac{P}{\pi}(\Phi_m(t) - \delta_m(t)))} |f'_m(t)| dt \, dm$$

Ensuite il faut effectuer l'intégration sur m . Comme nous nous plaçons dans la limite m et t grands (limite semi-classique), nous allons utiliser la méthode du col⁸. A priori la fonction à minimiser est $g(m) = Mm + P(\Phi_m - \delta_m)/\pi$. Or $\delta = \arctan \sqrt{\frac{m^2 - t^2}{n^2 t^2 - m^2}}$ est d'ordre 0 en m et t . Il ne contribue donc pas au choix du point col. La fonction $g(m) = Mm + P\Phi_m(t)/\pi$ est minimale pour le point col

$$m_0 = \pm nt \cos\left(\frac{M\pi}{P}\right) \quad t \geq 0$$

Des considérations sur les divers signes indiquent que $|P| > 2|M|$ et que M et P sont de même signe pour $m_0 > 0$ et de signe opposé sinon. L'angle $M\pi/P$ apparaît naturellement. Il représente la moitié de l'angle au centre de l'orbite périodique à P rebonds et M enroulements. Les figures 4.5 (b) et (c) en proposent quelques illustrations. L'angle d'incidence vaut alors $\chi = \pi/2 - M\pi/P$ et permet d'évaluer le déphasage à la réflexion δ_{m_0} .

L'étape suivante consiste à injecter le point col m_0 dans l'intégrale :

$$\tilde{d}(k) = ie^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sum_{(M,P) \in I} \int \epsilon \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[\frac{1}{k - (t - iy(t))} - \frac{1}{k - (t + iy(t))} \right] \frac{(n \sin(\frac{M\pi}{P}))^{3/2}}{\sqrt{P}} e^{\mp 2iP\delta} e^{int2(\pm P)|\sin(\frac{M\pi}{P}) - i\frac{\pm P\pi}{2}} dt$$

où P reste positif. Les cas $m_0 < 0$ et $m_0 > 0$ sont équivalents et donc pris en compte par le facteur ϵ global qui vaut alors 2. $\epsilon = 1$ correspond à $m_0 = 0$, cas identifié au diamètre ($\chi = 0$). Le choix final de signe \pm est dicté par les intégrales sur t , dernière variable restante. Ces intégrales sont de la forme

$$A_+ = \int_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\sqrt{t}}{k - (t - iy(t))} e^{i\alpha t} dt \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dans le plan complexe, l'intégrande présente un pôle en $t = k + iy(t)$. Comme $y \ll t$, alors $k \simeq t$ et on peut écrire que le pôle se trouve en $t = k + iy(k)$. Comme $y < 0$, il faut fermer le contour par le bas (sens de parcours négatif) et on impose $\alpha < 0$.

$$A_+ = - \int_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\sqrt{t}}{t - (k + iy(k))} e^{i\alpha t} dt = +2i\pi \sqrt{k} e^{-|\alpha y(k)|} e^{i\alpha k} \quad \alpha < 0$$

⁷Le cas $P = 0$ correspond au terme lisse (densité moyenne d'états). Nous nous concentrons sur la partie oscillante.

⁸cf. par exemple http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_steepest_descent

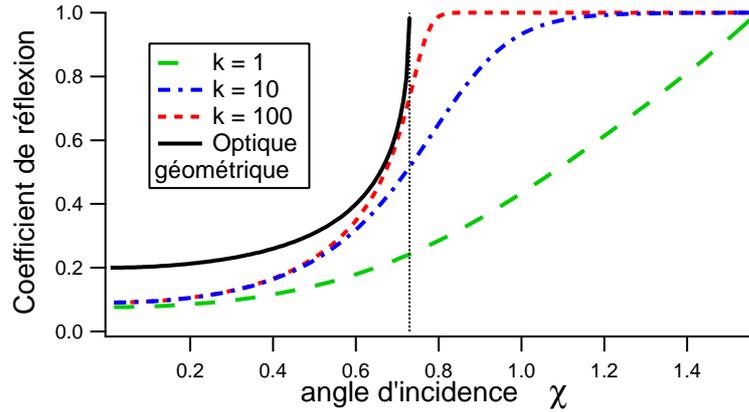


FIG. 4.6 – Coefficient de réflexion sur une interface de rayon de courbure $R = 1$ d'un milieu d'indice n vers un milieu d'indice 1 en fonction de l'angle d'incidence (en radian) pour différents nombres d'onde. La droite verticale en pointillés noirs indique l'angle critique $\chi_c = \arcsin(1/n)$.

Plus la partie imaginaire du vecteur d'onde $y(k)$ est grande (en valeur absolue), plus l'atténuation est importante. L'intégrale A_- s'obtient de façon identique. Et au final

$$\tilde{d}(k) = -4\sqrt{k\pi} \sum_{(M,P) \in I} \epsilon \frac{(n \sin(\frac{M\pi}{P}))^{3/2}}{\sqrt{P}} e^{-2nP \sin(\frac{M\pi}{P})|y(k)|} \cos(2nP \sin(\frac{M\pi}{P})k - P(2\delta + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}) \quad (4.16)$$

avec I l'ensemble des orbites à P rebonds et M enroulements tels que $P > 2M \geq 2$. Sa structure très générale apparaît plus nettement lorsqu'on introduit les paramètres des orbites : leur longueur géométrique $L_{M,P} = 2P \sin(M\pi/P)$ et leur surface $A_{M,P} = \pi \sin^2(M\pi/P)$. Cette surface correspond à l'aire comprise entre la frontière du disque et la caustique (exemple de caustique en rouge sur la figure 4.5 (d)). La densité d'états se réécrit alors comme une somme sur les orbites périodiques indicées maintenant par p pour alléger les notations :

$$d(k) \propto \sum_p \epsilon \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} r_c(k) \cos(nL_p k - P(2\delta_p + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4})$$

avec $r_c(k) = e^{-nL_p |y(k)|}$. On retrouve la pondération globale de la forme $A_p/\sqrt{L_p}$ générique pour les billards plans [17, 23]. L'argument du cosinus tient compte du milieu diélectrique. D'une part la longueur géométrique L_p est multipliée par l'indice n . D'autre part il s'y ajoute des déphasages $2\delta_p$ à chaque rebond sur la frontière, exactement comme s'il s'agissait d'une interface plane. De même pour le terme en $P\pi/2$ correspondant aux réflexions sur la caustique. La correction introduite par la courbure de la frontière est prise en compte par le facteur $e^{-nL_p |y(k)|}$. D'après la partie 2.2.2, la partie imaginaire s'écrit

$$y(k) = \frac{1}{1-n^2} \frac{2}{\pi k} \frac{1}{J_m^2(k) + Y_m^2(k)} \quad (4.17)$$

et tend de manière exponentielle vers zéro à la limite semi-classique. On obtient alors la correction de courbure pour le coefficient de réflexion :

$$r_c = e^{-2n \cos(\chi)|y(k)|}$$

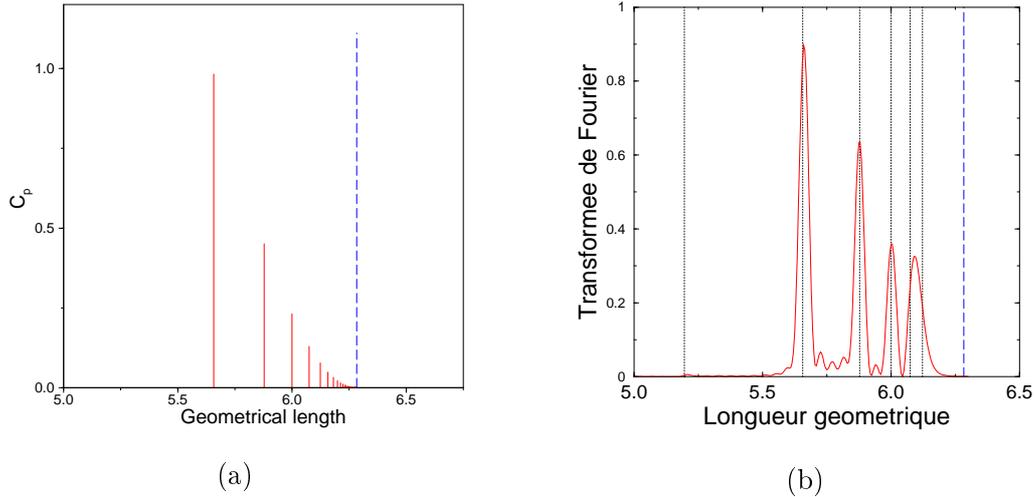


FIG. 4.7 – (a) Coefficients $C_p = A_p/\sqrt{L_p}$ en fonction de L_p pour le disque. Orbites polygonales ($M = 1$), à partir de $P = 4$ (carré). La position du périmètre est indiquée par une barre verticale en tirets bleus. (b) Transformée de Fourier du spectre numérique d’après l’expression (4.18) pour les résonances vérifiant $\text{Re } kr < 100$ et $\text{Im } kr > -0.52$, soit 3063 résonances. Les barres verticales en pointillés noirs indiquent les positions attendues des orbites polygonales. De gauche à droite : triangle, carré, pentagone, hexagone, heptagone et octogone. La barre verticale en tirets bleus marque le périmètre.

où $\chi = \pi/2 - M\pi/P$ est l’angle d’incidence. Ce coefficient de réflexion est tracé sur la figure 4.6 en fonction de l’angle d’incidence pour différentes valeurs de k . A la limite semi-classique, il devrait tendre vers le coefficient de Fresnel pour une interface plane représenté en noir. Pour $\chi \simeq 0$, on constate un écart franc, très prévisible car l’expression (4.17) n’est valable que pour $y \ll 1$, condition non vérifiée en incidence normale⁹. De toute façon, ce terme exponentiel n’est pas cohérent avec l’approximation semi-classique car celle-ci néglige d’autres termes qui décroissent moins vite en k . Dans les conditions expérimentales, ie. pour $k \gg 1$, on s’attend à retrouver le coefficient de Fresnel sur une interface plane.

En fait cette expression de la densité d’états n’est valable que pour les modes quasi-stationnaires vérifiant $m/n < x < m$. C’est à dire que le point col $m_0 = nx \cos(M\pi/P)$ doit vérifier $x < nx \cos(M\pi/P)$. On retrouve alors la condition $\chi_p > \chi_c = \arcsin(1/n)$. Au final, nous avons donc dérivé la formule de trace pour les états quasi-stationnaires et montré qu’elle correspond à une somme sur les orbites périodiques confinées par réflexion totale. En plus de la contribution standard en $A_p/\sqrt{L_p}$, chacune d’elles est pondérée par une correction au coefficient de réflexion due à la courbure qui tend vers 1 à la limite semi-classique. On en déduit que l’orbite périodique dominante est la plus courte confinée par réflexion totale. Il s’agit du carré. On peut aussi vérifier qu’elle possède une aire supérieure à celle des autres orbites confinées par réflexion totale. Pour illustration, les coefficients $C_p = A_p/\sqrt{L_p}$ des polygones confinés par réflexion totale sont tracés sur la figure 4.7 (a) où le carré domine nettement.

Ces orbites apparaissent aussi dans la transformée de Fourier du spectre, définie d’une

⁹Dans [82] page 189, Nöckel propose une sorte de régularisation formellement correcte pour $n \gg 1$. Malheureusement elle ne nous apprend rien pour un n quelconque.

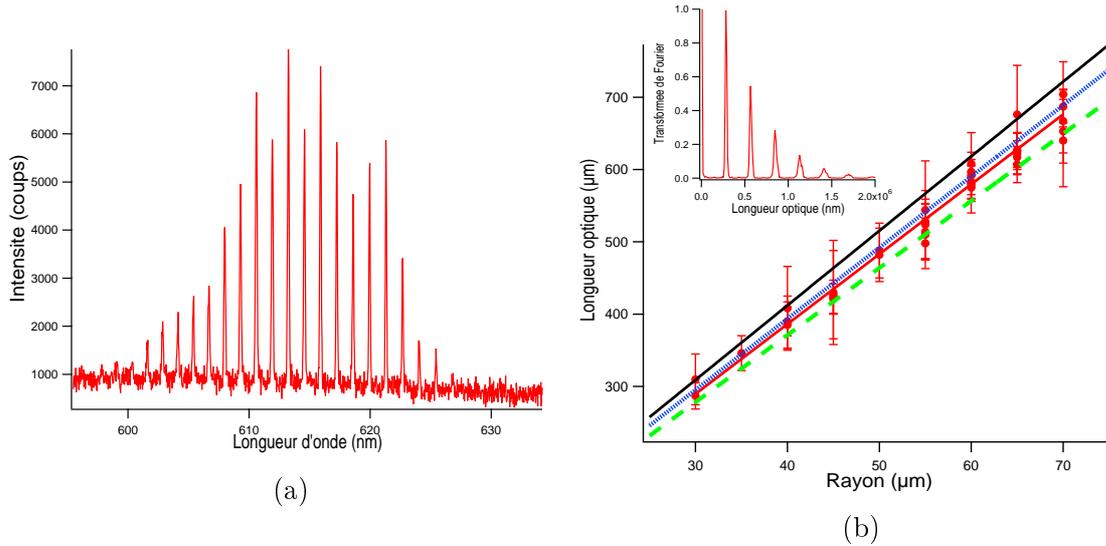


FIG. 4.8 – (a) Spectre expérimental d'un disque de rayon $r = 30 \mu\text{m}$. (b) Longueur optique en fonction du rayon des disques. Les points expérimentaux sont indiqués par des ronds rouges et leur ajustement linéaire en trait continu rouge. Les autres lignes correspondent aux longueurs optiques théoriques calculées avec un indice $n_{\text{tot}} = 1.64$, sans paramètre ajusté, pour le carré (tirets verts), l'hexagone (pointillés bleus) et le périmètre (continu noir). Encart : transformée de Fourier du spectre (a) exprimé comme l'intensité en fonction du nombre d'onde k .

manière simplifiée par

$$\hat{d}(nL) = \int dk e^{-inLk} \sum_{m,p} \delta(k - k_{m,p}) = \sum_{m,p} e^{-inLx_{m,p}} e^{-nL|y_{m,p}|} \quad (4.18)$$

où $k_{m,p} = x_{m,p} + iy_{m,p}$ ont été calculés numériquement à partir de l'équation (2.11). Cette quantité \hat{d} est représentée sur la figure 4.7 (b) en fonction de L pour les 3063 résonances vérifiant $\text{Re } kr < 100$ et $\text{Im } kr > -0.52$. De manière équivalente, il s'agit aussi de la transformée de Fourier de (4.16), donc on s'attend à retrouver des pics aux positions L correspondant aux orbites périodiques. On constate effectivement un bon accord, même le triangle apparaît légèrement (premier pic en partant de la gauche). À partir de l'heptagone les raies sont confondues car le nombre de niveaux considérés ne permet pas d'atteindre la résolution nécessaire pour les séparer. Comme prévu, le carré domine nettement.

Pour tester ces prédictions, nous avons utilisé le protocole expérimental décrit en 4.1.1. Un spectre typique est présenté sur la figure 4.8 (a) et sa transformée de Fourier dans l'encart de la figure 4.8 (b). Plusieurs harmoniques apparaissent. Le premier est situé à la longueur optique de l'orbite périodique dominante. Le graphe de la figure 4.8 (b) résume les longueurs optiques mesurées pour une vingtaine de cavités. Les droites verte, bleu et noire indiquent les longueurs optiques attendues pour différentes orbites. L'ajustement linéaire en rouge se situe entre le carré et l'hexagone. Ce résultat est conforme aux prédictions qui annoncent certes une contribution dominante pour le carré, mais aussi la présence des autres orbites. Toutefois la précision expérimentale ne permet pas de conclure de manière formelle puisque les barres d'erreur recouvrent même le périmètre.

Ces observations sont en contradiction avec certaines assertions communément admises (eg. [90]). Elles affirment en effet que les modes dominants présentent les pertes minimales, donc se trouvent près du bord et correspondent alors au périmètre. Pour de faibles valeurs de kR , cette approche semble correcte, mais à la limite semi-classique, la plupart des modes quasi-stationnaires sont très bien confinés et pas seulement les modes de galerie périphériques. Toutes les orbites périodiques confinées par réflexion totale sont alors susceptibles d'apparaître puisque leurs pertes par courbure sont négligeables. L'argument tombe et les poids respectifs de chaque orbite en $C_p = A_p/\sqrt{L_p}$ dérivent de la formule de trace. Toutefois il faut rester conscient que les modes sont observables parce qu'ils émettent. Si les cavités étaient parfaites, presque aucune lumière ne pourrait être détectée ($|y| \sim 10^{-8} - 10^{-9}$). Heureusement il existe des pertes supplémentaires dues à la rugosité et aux effets tridimensionnels. Les expériences de la figure 4.8 (b) ont été réalisées sur des disques à rugosité importante car dessinés comme des polygones à 32 côtés. Les mêmes expériences avec des disques à 200 côtés ont donné des résultats comparables, mais à taille de cavité égale, l'intensité collectée est plus faible¹⁰. Par ailleurs, pour évaluer l'influence des pertes 3D, nous avons fabriqué un échantillon avec des disques à 200 côtés deux fois plus épais que celui testé en 4.8 (b) tout en conservant une épaisseur inférieure au seuil d'apparition de la deuxième excitation verticale. Dans ce cas, nous n'avons détecté aucune lumière.

Les propriétés spectrales du disque diélectrique s'avèrent intéressantes pour plusieurs raisons. D'une part ce système intégrable autorise la dérivation analytique d'une formule de trace et permet d'évaluer les différences avec une cavité fermée. D'autre part ce cas simple montre les limites de notre approche, notamment pour les effets tridimensionnels. Toutefois, compte-tenu de la précision expérimentale, les mesures restent en très bon accord avec les prédictions théoriques dérivées de la formule de trace.

4.1.3 Compétition entre orbites

Le paragraphe précédent a montré que des prédictions théoriques peuvent être déduites de la formule de trace. D'après le paragraphe 4.1.1, il est possible de mesurer la longueur géométrique d'une orbite périodique et donc de vérifier ces prédictions théoriques. Lorsqu'ils existent deux orbites en compétition, on s'attend à ce que l'effet laser sélectionne l'orbite dont les pertes sont les plus faibles. Or nous avons constaté que cet adage n'est pas toujours vérifié et certains comportements génériques ont été identifiés¹¹.

Tout d'abord l'épaisseur des cavités joue un rôle comme en atteste la figure 4.9. Elle présente les longueurs optiques d'orbites périodiques mesurées sur deux échantillons d'épaisseurs différentes (ronds pleins et carrés évidés). Il faut préciser que dans chacun des cas, cette épaisseur reste comprise entre les bornes inférieure ($\sim 0.35 \mu\text{m}$) et supérieure ($\sim 0.7 \mu\text{m}$) où il n'existe qu'une seule excitation verticale pour chaque polarisation. La forme de cavité testée est l'octogone, donc il existe deux familles d'orbites courtes confinées par réflexion totale, le carré et l'octogone inscrits. Nous verrons à la partie 4.2.1 qu'elles

¹⁰Les expériences de la figures 4.8 ont été réalisées sur des disques à 32 côtés d'épaisseur $0.6 \mu\text{m}$. Pour un disque de rayon $r = 65 \mu\text{m}$, l'intensité collectée est de l'ordre de 8000 coups. Pour un disque de même rayon, à 200 côtés et d'épaisseur $0.6 \mu\text{m}$, le signal ne sort pas du bruit alors que pour un disque de même rayon avec aussi 200 côtés mais d'épaisseur $0.4 \mu\text{m}$, l'intensité collectée est de l'ordre de 200 coups.

¹¹Pour simplifier, les spectres présentés ici ont été enregistrés dans la direction du maximum d'émission. Depuis la rédaction de cette partie, nous avons mis en évidence que le type d'orbite observé dépend aussi de la direction de détection.

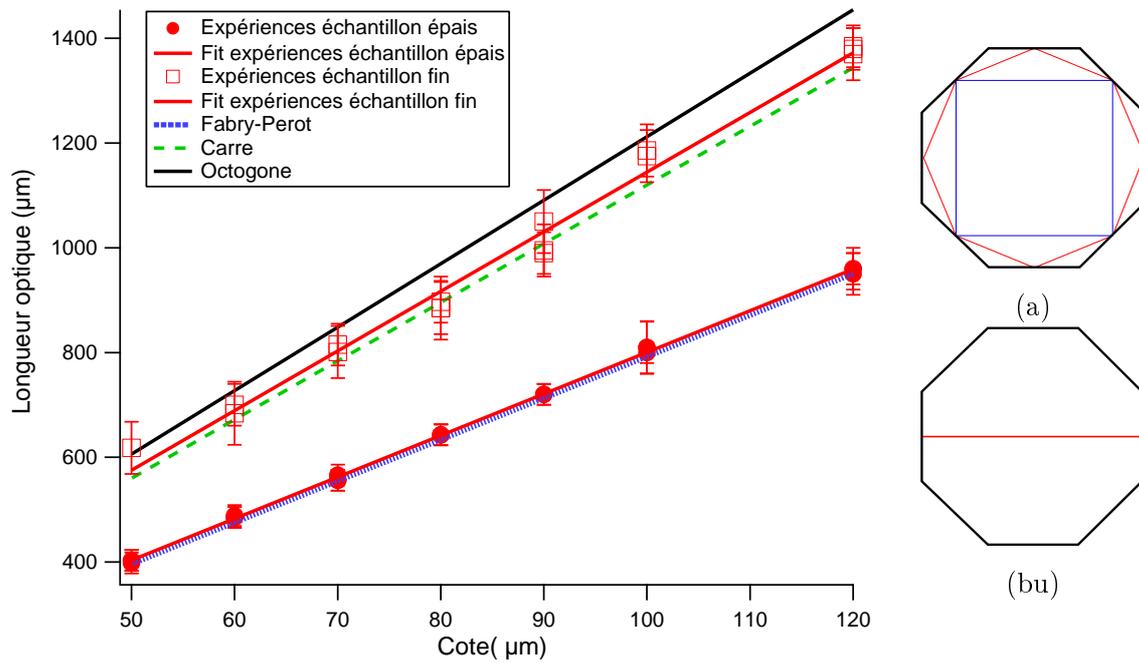


FIG. 4.9 – Longueur optique en fonction du côté des octogones *a*. Les points expérimentaux sont indiqués en rouge et leur ajustement linéaire en trait continu rouge. Les mesures réalisées sur un échantillon fin (resp. épais) sont représentées par des carrés évidés (resp. ronds pleins). La droite en trait continu noir correspond à la longueur optique attendue pour l'octogone inscrit, celle en tirets verts pour le carré inscrit et celle en pointillés bleus pour le Fabry-Perot connectant deux faces opposées.

sont censées dominer le spectre dans le cas du résonateur passif. Pour un échantillon fin (carrés évidés), ces orbites sont bien observées : les points expérimentaux sont compris entre les droites correspondant au carré (tirets verts) et à l'octogone (ligne noire). Mais lorsque l'épaisseur devient plus importante, le comportement change radicalement. Cette fois les mesures (ronds pleins) s'alignent sur une droite de pente $n_{tot} \times \sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})^2}$ tracée en pointillés bleus. Il s'agit d'une orbite de type Fabry-Perot joignant deux faces parallèles de l'octogone. L'incidence normale sur chacune des faces rend les pertes d'autant plus importantes que notre indice de réfraction est faible ($n = 1.5$). Dans un octogone plan idéal, les orbites en carré et octogones inscrits ne présentent des pertes que par diffraction sur les coins, et, a priori, ces pertes de nature diffractive sont plus faibles que des pertes réfractives.

Quelques éléments ont été avancés pour comprendre ce phénomène qui s'affirme avec évidence sur la figure 4.9. Le gain accumulé par une orbite est proportionnel au volume qu'elle couvre, alors que ses pertes devraient diminuer avec l'épaisseur grâce à l'amélioration du confinement 3D (cf. fin du § 4.1.2). Il est donc vraisemblable que pour l'échantillon fin, l'orbite de type Fabry-Perot n'ait pas obtenu suffisamment de gain pour compenser ses pertes et permettre l'émission laser, à la différence du carré et de l'octogone inscrits.

Lorsque l'échantillon est plus épais, le gain est suffisant pour autoriser l'effet laser de l'orbite Fabry-Perot. Un modèle en pompage stationnaire prédirait que seule peut laser l'orbite aux pertes les plus faibles, ce qui exclurait le Fabry-Perot. Mais dans nos expériences, la durée du pompage est comparable aux temps de vie des modes, le régime stationnaire n'a donc peut être pas le temps d'être atteint et de favoriser les modes les mieux confinés. De plus, l'émission réfractive étant plus efficace que celle par diffraction, l'orbite Fabry-Perot est plus aisément détectable que le carré et l'octogone inscrits.

En résumé, cette explication implique que le poids de chaque orbite dans le spectre expérimental varie selon les contributions du gain, des pertes et de l'efficacité d'émission. Jouer sur l'intensité de pompe permet de ne modifier qu'un seul paramètre. Toutefois les premiers tests n'ont fourni que des résultats mitigés et n'ont pas permis de confirmer une tendance générale.

En revanche il est clair que la taille de la cavité pondère l'importance de chaque orbite. La figure 4.10 rapproche les spectres de deux octogones épais où l'orbite Fabry-Perot domine. Les longueurs des côtés sont dans un rapport 2, donc les gains a priori aussi. Sur le graphe (d) issu du petit octogone, on voit apparaître un petit pic correspondant à l'orbite en octogone inscrit alors que cette orbite n'est pas du tout visible sur le graphe (c). Ce phénomène est décelable directement sur les spectres : le graphe (a) présente des raies nettes alors que sur le (b) on distingue des doubles pics. On retrouve cet effet inversé pour les octogones fins où ce sont les orbites bien confinées qui dominent. Sur la figure 4.11 (a), le grand pic est positionné entre les longueurs optiques du carré et de l'octogone inscrits et on distingue un petit pic à l'endroit du Fabry-Perot. Ce dernier disparaît lorsque la taille de la cavité diminue.

Ce comportement n'est pas spécifique aux octogones ; on le retrouve par exemple chez le pentagone. Pour cette forme, il est prédit que l'orbite bien confinée dominante appartient à la famille de l'étoile à cinq branches (cf. § 4.2.3). Mais pour les grandes cavités (côté $\sim 120 \mu\text{m}$), son pic est noyé dans les harmoniques d'une orbite à sortie réfractive (cf. figure 4.11 (b)). Il faut descendre jusqu'à des longueurs de côtés presque deux fois inférieures pour qu'apparaisse nettement l'orbite prévue par la théorie passive.

Comme une variation de la taille modifie à la fois le gain via le volume et les pertes

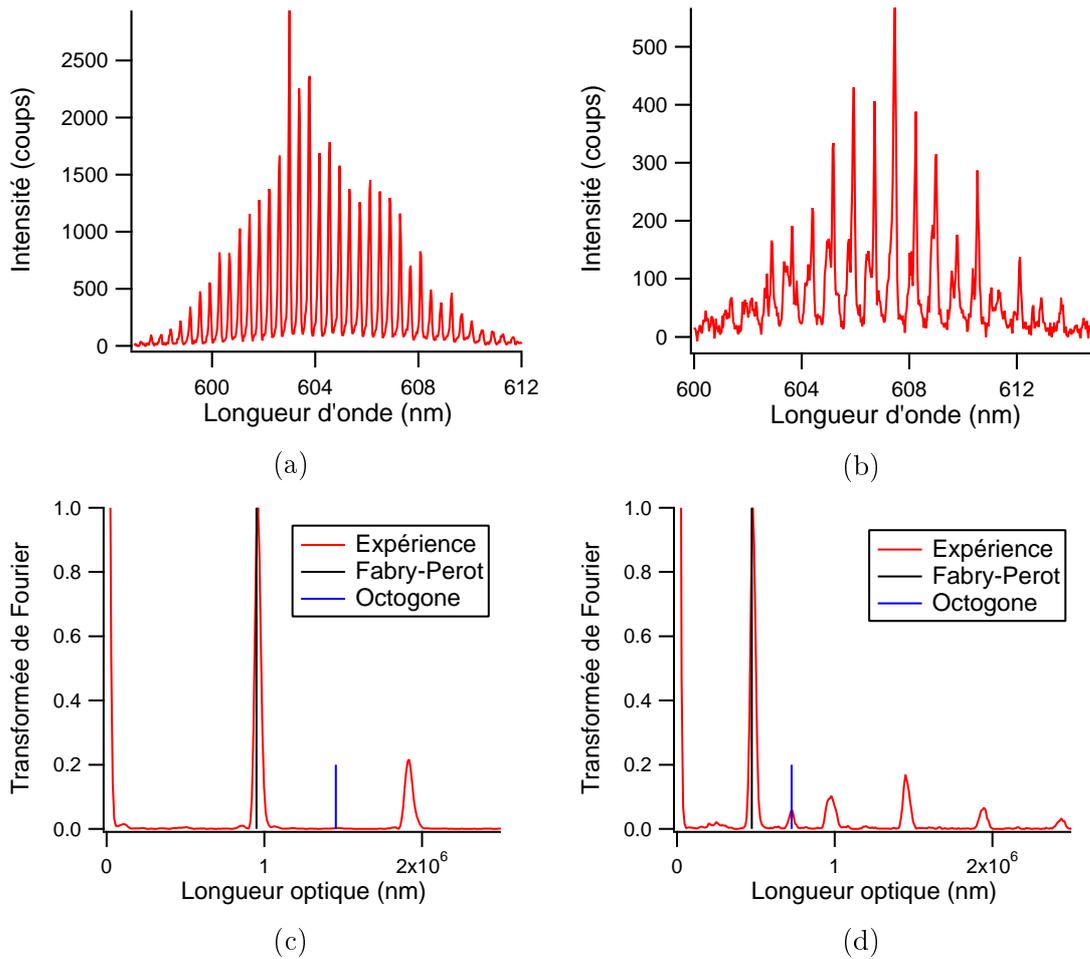


FIG. 4.10 – Octogones d'épaisseur $0.65 \mu\text{m}$. Spectre d'un octogone de côté $a = 120 \mu\text{m}$ en (a) et $a = 60 \mu\text{m}$ en (b). (c) Transformée de Fourier du spectre en (a). (d) Transformée de Fourier du spectre en (b). Les premiers pics des transformées de Fourier sont normalisés à 1. Les barres verticales indiquent les longueurs optiques théoriques du Fabry-Perot (en noir) et de l'octogone inscrit (en bleu).

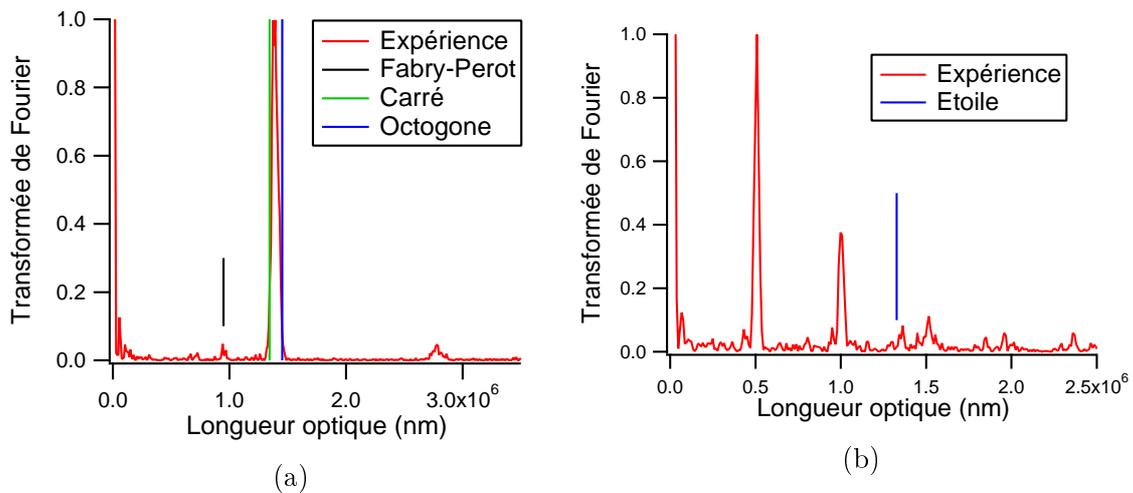


FIG. 4.11 – (a) Transformée de Fourier du spectre d'un octogone d'épaisseur $0.4 \mu\text{m}$ et de côté $a = 120 \mu\text{m}$. Les barres verticales indiquent les longueurs optiques du Fabry-Perot (en noir), du carré (en vert) et de l'octogone (en bleu). (b) Transformée de Fourier du spectre d'un pentagone d'épaisseur $0.65 \mu\text{m}$ et de côté $a = 100 \mu\text{m}$. La barre verticale indique la longueur de l'étoile à cinq branches, orbite périodique attendue pour cette forme de cavité (cf. partie 4.2.3).

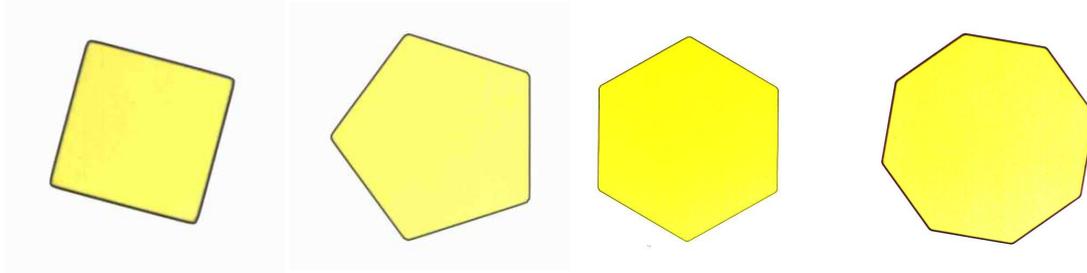


FIG. 4.12 – Photographies de polygones au microscope optique. Dimension typique $100\ \mu\text{m}$.

via la rugosité de surface (notamment sur les faces parallèles horizontales), il est difficile de tirer une conclusion définitive. En l'absence d'un modèle comprenant à la fois les non-linéarités lasers et les phénomènes tridimensionnels, seules des explications heuristiques peuvent être proposées. Des essais de pompage avec un laser femto-seconde permettront peut être de déterminer l'influence de la dynamique temporelle.

Quoi qu'il en soit, il a été montré que certaines orbites non confinées par réflexion totale peuvent apparaître et supplanter celles à faibles pertes prédites par la théorie. En général, diminuer l'épaisseur et la taille des cavités permet de les supprimer.

Conclusion Notre dispositif expérimental permet de *mesurer* la longueur géométrique des orbites périodiques dominantes apparaissant dans le spectre des micro-lasers. Parfois il faut tenir compte des effets non-linéaires liés à la dynamique laser, mais en général les contributions de chacune des orbites périodiques peuvent être prévues par la formule de trace et une théorie passive.

4.2 Polygones et superscars

4.2.1 Systèmes intégrables et pseudo-intégrables

Puisque nous possédons un outil pour identifier les orbites périodiques, il faut choisir des formes de résonateur où l'appliquer. Les polygones réguliers (cf. figure 4.12) forment un sujet de choix de par leur définition simple et la richesse de la physique sous-jacente.

En effet, même pour des cavités fermées traitées au sens classique (eg. pas de diffraction), la notion d'intégrabilité se heurte au problème des coins. Dans un article resté célèbre [94], M. Berry et P. Richens ont introduit la notion de *système pseudo-intégrable*. En général, on considère qu'un système est intégrable s'il possède autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté. Les billards comptent deux degrés de liberté de propagation dans le plan et l'énergie est conservée. Pour les polygones réguliers, on pourrait croire qu'il existe une relation entre les angles d'incidence d'une même trajectoire qui ferait office de deuxième constante du mouvement. En fait il faut surtout s'assurer que les trajectoires vivent réellement sur des tores (surface de genre 1, un seul trou, cf. par exemple [71]). Parmi les polygones réguliers, seuls le triangle et le carré le permettent.

Pour expliquer l'origine de ce problème, utilisons la visualisation "dépliée". Le schéma 4.13 (a) en explique le principe. Plutôt que de dessiner un rayon réfléchi dans la cavité, celle-ci est représentée en miroir et la trajectoire se poursuit en ligne droite. Un rayon est alors représentée par une droite. Avec cette approche, les polygones réguliers se séparent en deux catégories : ceux qui pavent le plan et ceux qui laissent des trous. Par exemple

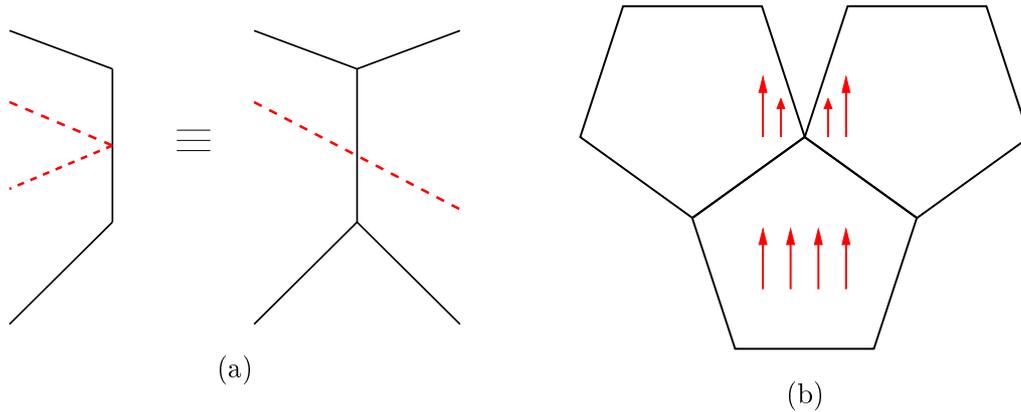


FIG. 4.13 – (a) Principe du dépliage : le rayon est indiqué en pointillés rouges et la frontière de la cavité en traits continus noirs. (b) Dépliage du pentagone. Exemple de séparation d’une famille d’orbites à cause d’un mauvais pavage du plan.

le pentagone se trouve dans le deuxième cas. Sur la figure 4.13 (b), une famille de rayons est représentée par des flèches rouges. La présence du trou - donc du coin - l’oblige à se séparer en deux alors que les constantes du mouvement restent identiques. Elle ne vit donc pas sur une surface de genre 1 et conduit à une dynamique saccadée qui ressemble à celle de systèmes chaotiques (cf. par exemple l’expérience de Galton¹²).

Parmi les polygones réguliers qui pavent le plan, l’hexagone non plus ne correspond pas à un système intégrable, contrairement au triangle et au carré. Pour s’en convaincre, comparons le dépliage du carré (figure 4.14 (a)) avec celui de l’hexagone (figure 4.14 (b)) et identifions les côtés avec les lettres *a* et *b*. La flèche courbe indique le sens du dépliage. Alors que pour le carré, on aboutit au même côté au bout d’un tour, l’hexagone ne retrouve pas sa position initiale. La famille de rayons qui arrivent sur ce coin (flèches rouges) ne voit plus alors un pavage régulier et la séparation intervient.

Pour résumer, parmi les polygones réguliers, seuls le triangle et le carré conduisent à une dynamique intégrable. Les autres systèmes sont dits pseudo-intégrables¹³.

Ces comportements classiques assez particuliers se retrouvent aussi dans le traitement ondulatoire [18, 94]. A priori nos cavités ouvertes n’échappent pas à ses règles établies pour des systèmes fermés. Il s’y ajoute de surcroît le problème de la diffraction par les coins diélectriques (cf. partie 3.2). Même le carré n’est plus intégrable! Finalement le comportement des micro-lasers en forme de polygones devrait être bien complexe.

En fait il n’en est rien. Les spectres expérimentaux tels que celui de la figure 4.16 (a) présente un intervalle spectral libre régulier qui permet d’identifier une orbite dominante. Le spectre s’avère une quantité robuste qui, dans une certaine mesure, dépend peu de la précision de gravure des coins. L’influence de la diffraction semble négligeable. Suivant les principes décrits à la partie 4.1.2, il est possible de décrire le spectre à l’aide de la formule de trace :

$$d(k) \propto \sum_p \left(b_p \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} + d_p \right) \cos(nkL_p + \phi_p) \quad (4.19)$$

Ici l’indice *p* identifie une famille d’orbites périodiques. En effet les billards polygonaux ne

¹²Voici l’adresse d’un des nombreux sites internet qui illustrent cette expérience http://www.recreomath.qc.ca/dict_galton_planche.htm

¹³Une classification systématique plus générale est établie dans [94]. Il y est montré qu’un angle induit un comportement régulier si et seulement si il est de la forme π/n avec $n \in \mathbb{N}$.

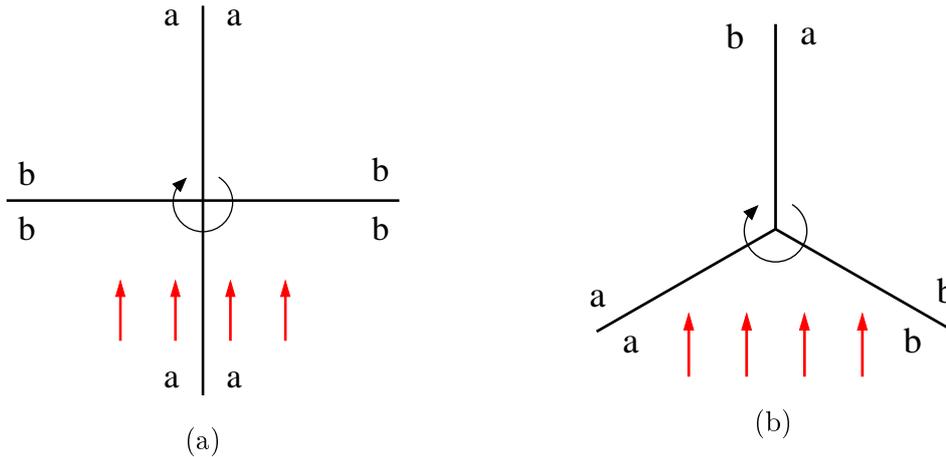


FIG. 4.14 – (a) Dépliage autour du coin d'un carré. (b) Dépliage autour du coin d'un hexagone. Les lettres *a* et *b* identifient les côtés. Le sens du dépliage est indiqué par la flèche arrondie. Les flèches rectilignes rouges représentent les rayons d'une famille d'orbites.

comptent qu'un nombre fini d'orbites isolées et leur contribution en $1/\sqrt{k}$ par rapport aux orbites en famille [23] les rend négligeables à la limite semi-classique.

La contribution des orbites en famille se sépare en deux termes : $b_p A_p / \sqrt{L_p}$ et d_p . Le coefficient d_p tient compte des contributions diffractives dues aux rayons à la frontière de la famille qui passent sur les coins. Pour les billards pseudo-intégrables fermés, il peut être calculé à partir du coefficient de diffraction [15]. Comme ce dernier reste inconnu pour le coin diélectrique, nous supposons que ce coefficient d_p est semblable à son analogue métallique. En général, il change légèrement la contribution de chaque orbite. Nous supposons qu'il ne modifie toutefois pas leur hiérarchie et le négligerons.

L'influence de chaque famille d'orbites est donc pondérée par $b_p A_p / \sqrt{L_p}$. Le coefficient $b_p \leq 1$ tient compte des pertes dues à l'ouverture de la cavité. Pour une gravure idéale (coins parfaits et rugosité nulle), il comprend les pertes par réfraction le long des côtés. A la limite semi-classique - situation proche de nos expériences - ces pertes sont négligeables pour les orbites confinées par réflexion totale et $b_p = 1$. Celles-ci sont donc favorisées. Parmi elles, la sélection s'effectue suivant l'aire recouverte A_p et la longueur parcourue L_p . La famille domine d'autant plus qu'elle recouvre une aire A_p importante¹⁴. L'effet laser amplifie ce comportement puisque le gain est proportionnel à la surface. Par ailleurs, les orbites courtes sont privilégiées grâce au facteur $1/\sqrt{L}$.

Pour résumer, l'orbite périodique dominante est courte, confinée par réflexion totale et vit en famille. Suivant les prescriptions du paragraphe précédent, chaque famille est contenue dans un canal delimité par les coins, sauf pour le carré et le triangle qui sont intégrables. L'orbite dominante correspond à la famille qui occupe le canal le plus large et dont les angles d'incidence sur chaque face restent supérieurs à l'angle critique. Pour l'identifier, le recours au dépliage se révèle très utile. Considérons par exemple le cas du pentagone représenté sur la figure 4.15. Le canal est identifié par des hachures sur la figure 4.15. Après repliage, il correspond à l'étoile à cinq branches de la figure 4.21 (b). Nous y reviendrons à la partie 4.2.3.

¹⁴Cette aire A_p est calculée par $A_p = \int_{\mathcal{D}} dx$ où \mathcal{D} comprend l'ensemble des points qui peuvent être choisis comme départ de l'orbite.

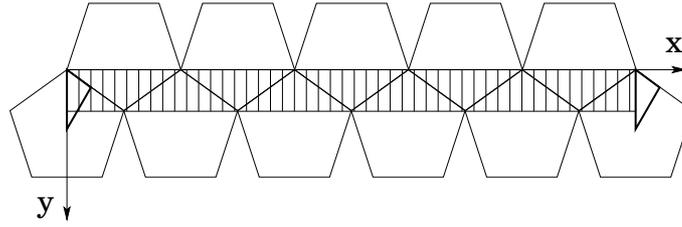


FIG. 4.15 – *Dépliage pour le pentagone. Le canal retenu est hachuré.*

Décrire le spectre de manière plus précise qu'en termes d'orbites s'avère plus délicat car il faut disposer d'une approche théorique pour ces systèmes non intégrables. Dans [15], E. Bogomolny et C. Schmit ont proposé un modèle appelé "superscar" pour les billards fermés pseudo-intégrables. A la limite semi-classique, une onde de la forme $\psi(\kappa_y y) e^{i\kappa_x x}$ se propage dans le canal¹⁵. L'exponentielle rend compte de la propagation le long du canal et $\psi(\kappa_y y)$ décrit l'aspect transverse. Pour déterminer le spectre et les fonctions d'onde, il faut imposer des conditions aux bords. Dans la direction x , il est naturel d'imposer une périodicité correspondant à la longueur de l'orbite :

$$\kappa_x L_p + \delta = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.20)$$

où δ comprend l'ensemble des déphasages accumulés lors des réflexions.

Pour établir la condition selon y , ils ont considéré dans [16] le problème similaire où une onde plane arrive sur une ligne constituée des extrémités de demi-plans métalliques. Cette ligne correspond à la frontière du canal, les extrémités aux coins du polygone et les demi-plans à ses côtés. Ils ont alors montré que l'onde se réfléchit sur la ligne comme si elle était complètement métallique. Dans le cadre des systèmes fermés, il est alors cohérent d'imposer l'annulation de la fonction d'onde sur les bords du canal. Pour nos cavités diélectriques, cette hypothèse n'est peut être pas exacte, mais comme elle reste raisonnable, nous l'utiliserons. En effet il est vraisemblable que les modes les mieux confinés cherchent à minimiser leurs pertes par diffraction, donc que leur amplitude tendent vers zéro au voisinage des coins. La partie transverse est donc de la forme $\psi(\kappa_y y) = \sin(\kappa_y y)$ avec

$$\kappa_y l_p = q\pi \quad q \in \mathbb{N}^* \quad (4.21)$$

où l_p représente la largeur du canal. Au final, le nombre d'onde de cette superscar s'écrit

$$n_{eff} \text{Re } k = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi m - \delta}{L_p}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{l_p}\right)^2} \quad (4.22)$$

où k représente le nombre d'onde à l'extérieur de la cavité. Suivant [16], on peut supposer que les modes les mieux confinés présentent peu d'excitations transverses, donc q reste de l'ordre de quelques unités, tandis qu'à la limite semi-classique m peut atteindre plusieurs centaines. On retrouve alors la condition standard de quantification du nombre d'onde

$$\boxed{\text{Re } k = \frac{2\pi}{n_{eff} L_p} m}$$

Cette étude est reprise plus en détails pour le carré (§ 4.2.2) et le pentagone (§ 4.2.3).

¹⁵Les notations des axes sont celles de la figure 4.15

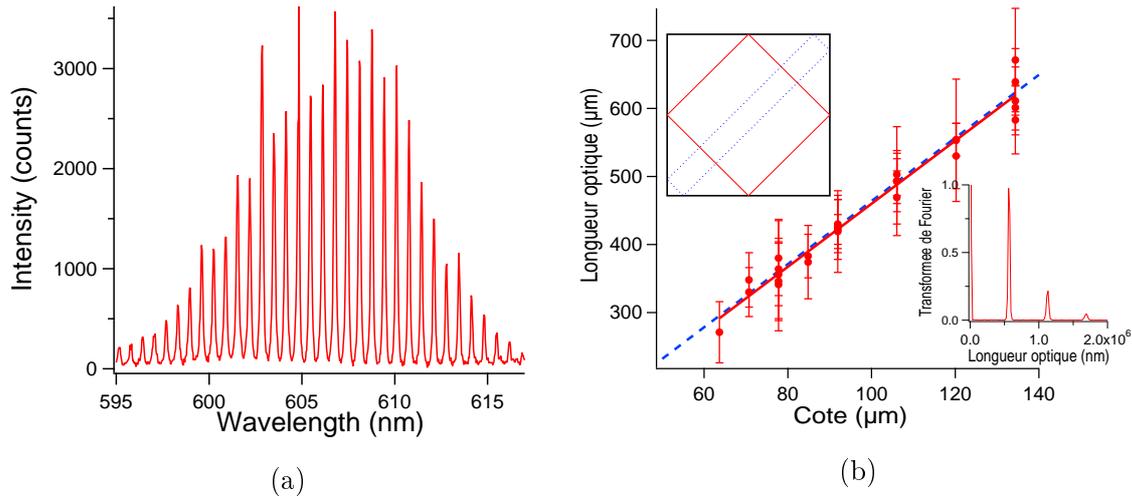


FIG. 4.16 – (a) Spectre expérimental d'un carré de côté $a = 135 \mu\text{m}$. (b) Longueur optique en fonction de la longueur du côté a . La ligne continue rouge correspond à l'ajustement linéaire des points expérimentaux (ronds rouges) et la ligne pointillée bleue à la prédiction théorique pour l'orbite périodique en diamant. Aucun paramètre ajusté. Encart : Transformée de Fourier normalisée du spectre en (a) exprimé comme l'intensité en fonction du nombre d'onde k .

4.2.2 Carré : superscar or not superscar ?

Le billard métallique en forme de carré est intégrable. Son homologue diélectrique ne l'est pas à cause de la diffraction sur les coins dont l'influence reste inconnue. Pour prévoir son spectre et les fonctions d'onde associées, nous allons utiliser les préceptes détaillés au paragraphe précédent.

Le diamant est la plus courte orbite périodique confinée par réflexion totale. Elle vit dans une famille dont deux représentants sont dessinés dans l'encart supérieur de la figure 4.16 (b). L'aire de cette famille est maximale puisqu'elle recouvre la totalité du carré. D'après la formule de trace (4.19), elle a donc toutes les chances de dominer le spectre. Les expériences confirment cette prédiction. Le spectre de la figure 4.16 (a) présente un intervalle spectral libre régulier, révélateur d'une orbite périodique. D'après la méthode décrite à la partie 4.1.1, sa longueur optique correspond à l'abscisse du premier pic de la transformée de Fourier (cf. encart inférieur de la figure 4.16 (b)). La figure 4.16 (a) rassemble les données expérimentales (ronds rouges) pour une vingtaine de micro-lasers de tailles différentes. Les points de mesure s'alignent suivant une droite (ajustement linéaire en rouge), ce qui atteste d'un comportement semblable quelle que soit la taille de la cavité (limite semi-classique). Pour l'orbite en diamant, on s'attend à une droite de pente $n_{tot} \times 2\sqrt{2}$ et passant par l'origine. Elle est tracée en pointillés bleus et on constate un très bon accord avec l'expérience.

Puisque la prédiction issue de la formule de trace (4.19) est vérifiée, essayons d'appliquer le modèle de superscar sur la famille du diamant. La canal correspondant est représenté par des hachures sur la figure 4.17.

La fonction d'onde "superscar" dépliée s'écrit $\Psi_{deplie}(x, y) = \psi(\kappa_y y) e^{i\kappa_x x}$. En plus des conditions "superscar" décrites au paragraphe 4.2.1, elle doit vérifier les propriétés de

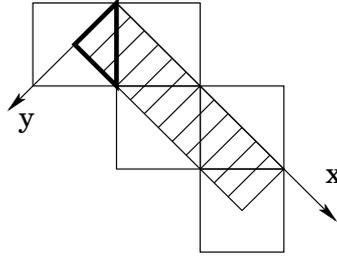


FIG. 4.17 – Dépliage pour le carré. Le canal correspondant à la famille du diamant est hachuré. Les bords du triangle fondamental sont surlignés.

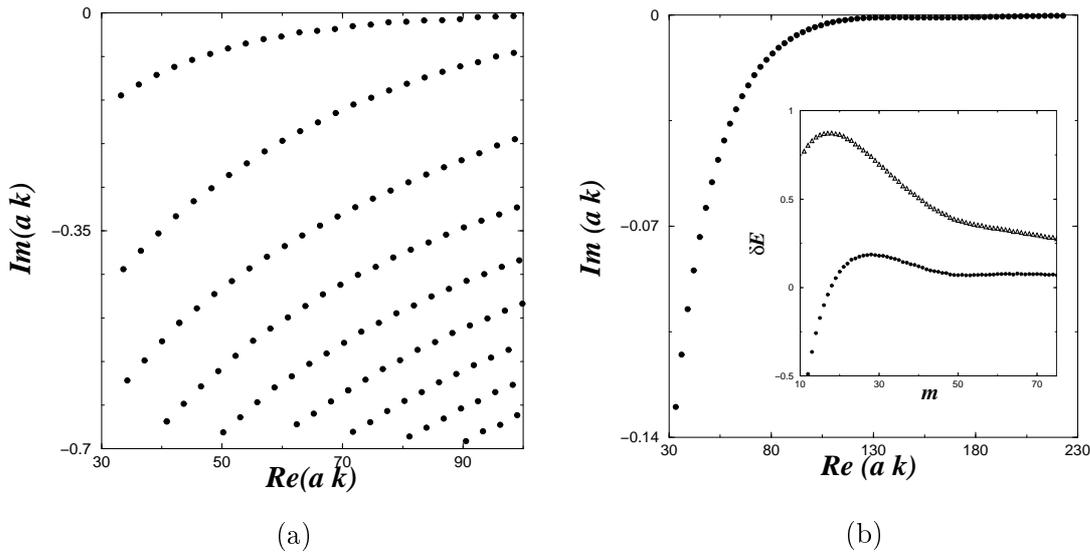


FIG. 4.18 – (a) Spectre d’un carré diélectrique de côté a obtenu par simulations numériques pour $n_{eff} = 1.5$ à l’intérieur et $n_{eff} = 1$ à l’extérieur. Classe de symétrie $(-, -)$ et polarisation TM. (b) Idem à (a) mais seulement pour la branche supérieure représentée sur une plus grande plage de nombre d’onde. Encart : différence δE définie par (4.24) en triangles évidés et $\delta E - 6.9/m$ en ronds pleins.

symétrie du système. La carré possède quatre classes de symétrie suivant le type de parité imposé par rapport aux diagonales. La fonction d’onde peut être impaire par rapport aux deux diagonales (notation $(-, -)$) ou bien paire (notation $(+, +)$), ou même paire par rapport à l’une et impaire par rapport à l’autre (notation $(-, +)$ et $(+, -)$). Il suffit donc d’étudier le domaine fondamental en forme de triangle représenté en traits gras sur la figure 4.17 et d’imposer les conditions de Dirichlet $(-)$ ou de Neuman $(+)$ sur les bords correspondant aux diagonales (cf. partie 2.2.4). Lorsque ce triangle est déplié, il faut reporter ces conditions.

A l’heure actuelle, seules les simulations numériques de type $(-, -)$ en polarisation TM ont été réalisées. Pour cette classe de symétrie, le dépliage du domaine fondamentale conduit à un double effet. D’une part il réduit la périodicité de L_p à $L_p/2 = a\sqrt{2}$. D’après l’équation (4.20)

$$\kappa_x \frac{L_p}{2} + 2\delta = 2\pi m$$

où δ correspond au déphasage introduit par la réflexion d’angle $\pi/4$ pour la polarisation TM : $r = e^{i\delta}$. D’autre part le dépliage impose l’annulation de la fonction d’onde sur la

frontière du canal, donc

$$\Psi_{deplie}(x, y) = \sin\left(\frac{q\pi}{l_p}y\right) e^{i\kappa_x x}$$

où $l_p = a/\sqrt{2}$ représente la largeur du canal. Pour cette classe de symétrie, il n'est pas nécessaire de supposer un certain comportement diffractif lié au coin comme détaillé au paragraphe précédent 4.2.1. L'annulation sur la frontière découle naturellement du dépliage. D'après (4.22),

$$\begin{aligned} (n_{eff}k)^2 &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \left(\frac{2\pi m - 2\delta}{L_p/2}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{l_p}\right)^2 \\ &= \frac{2\pi^2}{a^2} \left[\left(m - \frac{\delta}{\pi}\right)^2 + q^2\right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Il faut maintenant comparer cette prédiction "superscar" avec les simulations numériques. Le spectre présenté sur la figure 4.18 (a) a été calculé pour la classe de symétrie $(-, -)$ en polarisation TM. Il comprend plusieurs branches que, par analogie avec notre modèle, nous numérotions $q = 1, 2, \dots$ du haut vers le bas. En effet, on peut supposer que les pertes sont d'autant plus importantes que l'excitation transverse est grande. Sur la figure 4.18 (b), la première branche a été tracée sur une plus grande plage de nombre d'onde, ce qui permet de la comparer à la prédiction (4.23) pour $q = 1$. Dans l'encart de la figure 4.18 (b), on a représenté par des triangles évidés la différence

$$\delta E = \left(\frac{n_{eff}}{\sqrt{2}\pi} \operatorname{Re}(ka)_{num}\right)^2 - \left[\left(m - \frac{\delta}{\pi}\right)^2 + q^2\right] \quad (4.24)$$

Elle est d'ordre 1 alors que le terme en $(n_{eff} \operatorname{Re}(ka)_{num}/\sqrt{2}\pi)^2$ varie entre 100 et 2000. Cette écart δE tend vers zéro quand m augmente, ce qui est cohérent avec notre modèle de superscar valide à la limite semi-classique (ici m est de l'ordre de quelques dizaines). Un ajustement de δE de la forme c/m donne $c = -6.9$ et un bon accord. La différence $\delta E - c/m$ est tracée en ronds pleins dans l'encart de la figure 4.18 (b).

Après cette prédiction du spectre, nous pouvons aussi appliquer le modèle superscar pour les fonctions d'onde, la famille d'orbites périodiques étant toujours celle du diamant. D'après ce qui précède, nous connaissons la fonction d'onde dépliée $\Psi_{deplie}(x, y) = \sin(\kappa_y y) e^{i\kappa_x x}$. Elle se propage dans le sens des x positifs. Il faut lui ajouter son homologue en $e^{-i\kappa_x x}$ se propageant en sens inverse. La condition de Dirichlet en $x = 0$ impose alors

$$\Psi_{deplie}(x, y) = \sin(\kappa_y y) \sin(\kappa_x x)$$

La fonction d'onde repliée est composée de Ψ_{deplie} sur le domaine fondamental à laquelle s'ajoute Ψ_{deplie} sur le triangle voisin qui se superpose après repliage :

$$\Psi(x, y) \simeq \Psi_{deplie}(x, y) + \Psi_{deplie}(x', y')$$

Le point de coordonnées (x', y') correspond au symétrique de (x, y) par rapport au côté du carré initial surligné sur la figure 4.17. Ici la transformation est simple puisque $x' = y$ et $y' = x$. Il faut aussi tenir compte du déphasage supplémentaire de δ à la traversée de la paroi du carré. La fonction d'onde sur le domaine fondamentale s'écrit donc

$$\Psi(x, y) = \sin(\kappa_y y) \sin(\kappa_x x) + \sin(\kappa_y y') \sin(\kappa_x x' + \delta) \quad (4.25)$$

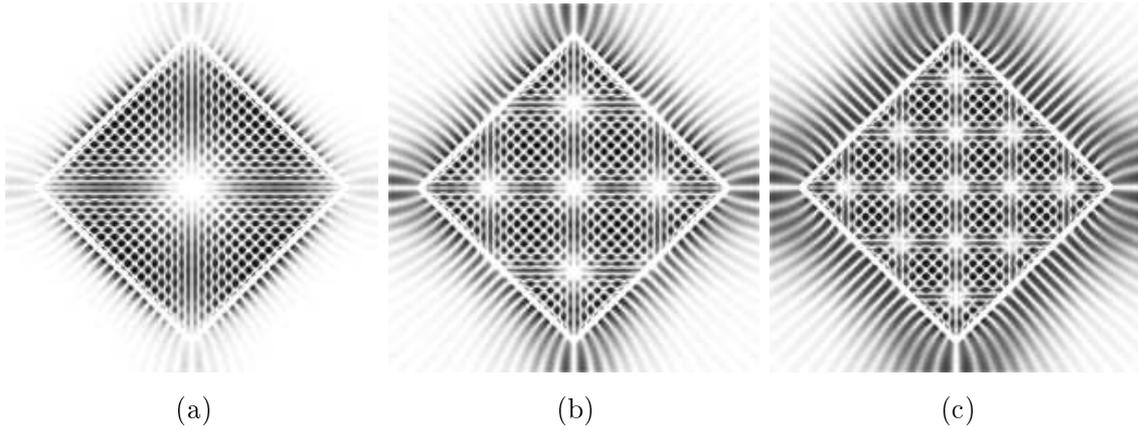


FIG. 4.19 – Simulations numériques : Module au carré de la fonction d'onde pour la polarisation TM et la classe de symétrie $(-, -)$ codé selon une échelle de gris. Le blanc correspond aux zones d'intensité minimale. (a) $ka = 68.74 - 0.026 i$ (b) $ka = 68.84 - 0.16 i$ (c) $ka = 69.18 - 0.33 i$.

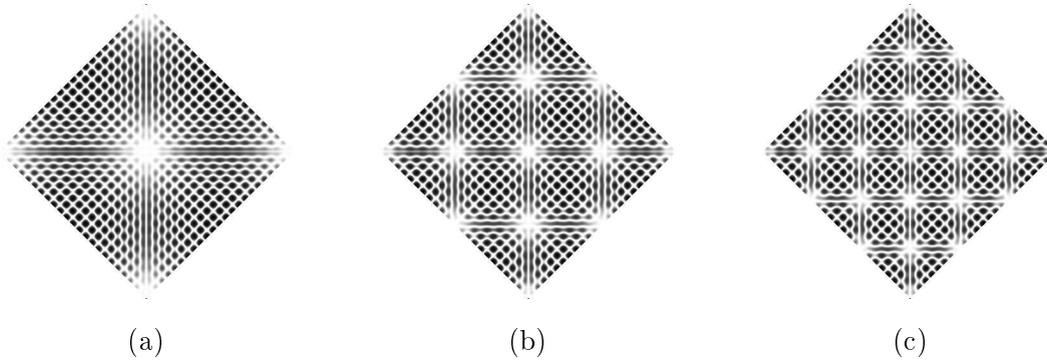


FIG. 4.20 – Modèle superscar : Module au carré de la fonction d'onde définie d'après (4.25) pour les paramètres m et q correspondant à ceux de la figure 4.19 : $m = 23$ et (a) $q = 1$ (b) $q = 2$ (c) $q = 3$. Codage selon une échelle de gris où le blanc indique les zones d'intensité minimale.

Ensuite elle est dupliquée sur tout le carré d'après la classe de symétrie choisie, ici $(-, -)$, tracée sur les figures 4.20 puis comparée aux simulations numériques de la figure 4.19. Les images de la figure 4.19 représentent le module au carré de fonctions d'onde aux nombres d'onde équivalents appartenant à chacune des trois branches supérieures de la figure 4.18 (a). On constate que la proportion de lumière à l'extérieur augmente avec les pertes $|\text{Im}(ka)|^2$. Pour comparaison, nous avons tracé les fonctions d'onde superscar calculées à partir de l'expression (4.25) pour les nombres m et q correspondant à celles de la figure 4.19. La répartition d'intensité à l'intérieur est très bien reproduite.

Dans cette partie sur le carré diélectrique, nous avons présenté un exemple d'application de la théorie plus générale développée en 4.2.1. Le modèle superscar permet de reproduire avec une précision convaincante le spectre et les fonctions d'onde, tout au moins les parties réelles du nombre d'onde et la répartition d'intensité à l'intérieur de la cavité. Toutefois seule la classe de symétrie $(-, -)$ a été étudiée numériquement et les conditions au bord qui en découlent suffisent à imposer l'annulation de la fonction d'onde sur la frontière du canal. Pour espérer mettre en défaut le modèle superscar dans le carré, il faut donc s'intéresser aux autres classes de symétrie du carré ou à d'autres polygones plus complexes.



FIG. 4.21 – Orbites les plus simples confinées par réflexion totale. (a) La ligne continue bleue correspond au pentagone inscrit qui est une orbite isolée. L’orbite périodique dans son voisinage est tracée en pointillés rouges. Elle se présente sous la forme d’un double pentagone et appartient à la famille de l’étoile à cinq branches. (b) Orbite périodique en forme d’étoile à cinq branches. Elle correspond à la frontière du canal représenté par des hachures sur la figure 4.15

4.2.3 Superscars pour le pentagone

Dans le cadre de notre étude, une cavité pentagonale présente un double intérêt. D’une part ses symétries n’induisent pas un masquage de l’effet superscar comme pour le carré. D’autre part l’orbite confinée la plus courte est isolée. Comme nous le verrons au cours de cette partie, ces deux effets rendent les conséquences du modèle superscar non triviales et permettent donc de le tester.

Tout d’abord il faut trouver la famille d’orbites périodiques dominantes. D’après les principes énoncés à la partie 4.2.1, elle doit être courte et confinée par réflexion totale. L’orbite en pentagone inscrit représentée en trait continu bleu sur la figure 4.21 (a) vérifie ces critères. Toutefois elle est isolée à cause du nombre impair de côtés. En effet si on choisit un point de départ dans son voisinage, il n’est pas possible de boucler après un seul tour. Avec deux tours, on obtient l’orbite périodique en pointillés rouges de la figure 4.21 (a). Comme une orbite isolée contribue de manière négligeable à la formule de trace comparée à celles vivant en famille [23], nous retiendrons plutôt l’orbite en double pentagone pour construire les états superscars. En effet cette dernière vit en famille, est confinée par réflexion totale et nous n’en avons pas trouvé de plus courte. Le canal correspondant est représenté sur la figure 4.15 par des hachures. Sa frontière est constituée de l’orbite périodique qui connecte un coin sur deux. Il s’agit de l’étoile à cinq branches dessinées sur la figure 4.21 (b). La longueur de cette famille d’orbites périodiques vaut

$$L_p = 10 a \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

où a représente la longueur d’un côté de la cavité pentagonale. Cette longueur L_p est deux fois plus grande que celle du pentagone inscrit. Sa mesure permet donc d’identifier nettement si l’orbite doit vivre en famille.

Les expériences sur nos micro-lasers ont fourni un résultat sans appel. Pour une cavité de côté $a = 80 \mu\text{m}$, le spectre 4.22 présente un intervalle libre régulier indiquant la présence d’un seul type d’orbite périodique. Le premier pic de sa transformée de Fourier (cf. encart de la figure 4.22) est localisé à la longueur optique $L_{exp} = 1040 \pm 30 \mu\text{m}$. Or celle prévue pour l’étoile à cinq branches vaut $L_{th} = n_{tot} \times L_p = 1060 \mu\text{m}$. L’accord est donc on ne peut plus exact compte-tenu des incertitudes expérimentales intrinsèques à notre expérience (cf. partie 4.1.1). Sur la transformée de Fourier, aucun pic n’apparaît à la longueur optique

$L/2$ correspondant au simple pentagone inscrit. Cette observation expérimentale confirme donc la nécessité qu'une orbite vive en famille pour être visible dans le spectre. Il s'agit d'un des principes du modèle superscar.

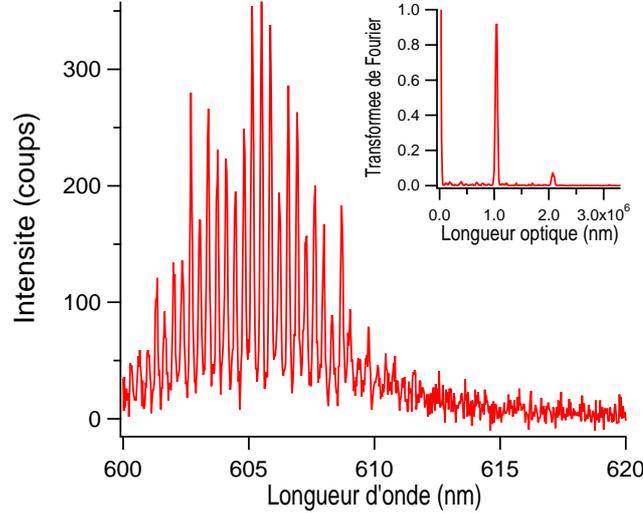


FIG. 4.22 – Spectre expérimental d'un micro-laser en forme de pentagone régulier de côté $a = 80 \mu\text{m}$. Encart : Transformée de Fourier normalisée du spectre exprimé comme l'intensité en fonction du nombre d'onde.

Grâce au modèle superscar nous allons proposer une prédiction sur la répartition d'intensité à l'intérieur de la cavité. Le pentagone régulier possède 10 classes de symétrie résumées dans la notation C_{5v} : les rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et l'inversion par rapport à chaque axe de symétrie. Comme pour le carré, nous nous intéressons à la classe de symétrie où la fonction d'onde s'annule sur les frontières internes d'un triangle initial. Ce dernier est représenté en traits gras sur la figure 4.15. A la différence du carré, le report par dépliage de cette condition de symétrie n'implique pas l'annulation sur la frontière du canal. Pourtant nous l'imposons dans le cadre du modèle superscar. Il s'en suit que la fonction d'onde superscar reste confinée dans le canal et ne peut pas pénétrer au centre de la cavité (cf. figure 4.15). Le modèle superscar prévoit donc la formation d'une caustique qui se retrouve effectivement sur les fonctions d'onde calculées par simulations numériques (cf. figure 4.23). Cette caustique qui découle directement du modèle superscar et du type de pavage est aussi visible sur les fonctions d'onde de l'hexagone. Elle n'apparaît pas pour le carré et le triangle car le canal passe par le centre de la cavité. L'existence ou non d'une caustique est une prédiction forte du modèle superscar qui est confirmée par les simulations numériques.

Avec les notations du schéma 4.15, la fonction d'onde superscar dépliée s'écrit

$$\Psi_{deplie}(x, y) = e^{i\kappa_x x} \sin\left(\frac{q\pi}{l_p} y\right) \Theta(y)\Theta(l_p - y)$$

où $l_p = a \sin(\pi/5)$ représente la largeur du canal. Les fonctions d'Heaviside Θ assurent que Ψ s'annule bien à l'extérieur du canal et $\kappa_y = q\pi/l_p$ impose l'annulation sur sa frontière. Comme pour le carré, la classe de symétrie choisie va contraindre le moment longitudinal. La fonction d'onde repliée comprend la partie de Ψ_{deplie} vivant sur le domaine fondamental

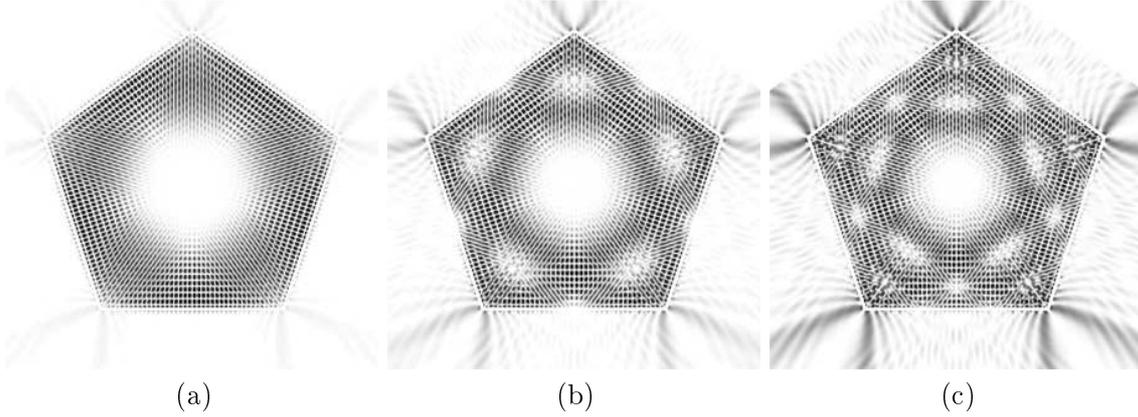


FIG. 4.23 – *Simulations numériques : Module au carré de la fonction d’onde pour la polarisation TM et la classe de symétrie indiquée dans le texte. Codage selon une échelle de gris où le blanc correspond aux zones d’intensité minimale. (a) $ak = 104.7 - 0.017 i$, (b) $ak = 102.2 - 0.05 i$, (c) $ak = 105.0 - 0.12 i$.*

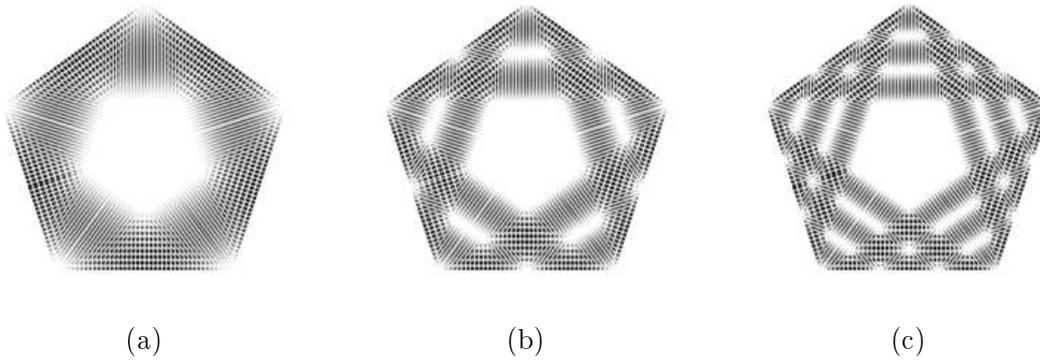


FIG. 4.24 – *Modèle superscar : Module au carré de la fonction d’onde définie d’après (4.26) pour les paramètres m et q correspondant à ceux de la figure 4.23 : (a) $m = 40$ et $q = 1$ (b) $m = 39$ et $q = 2$ (c) $m = 40$ et $q = 3$. Codage selon une échelle de gris où le blanc indique les zones d’intensité minimale.*

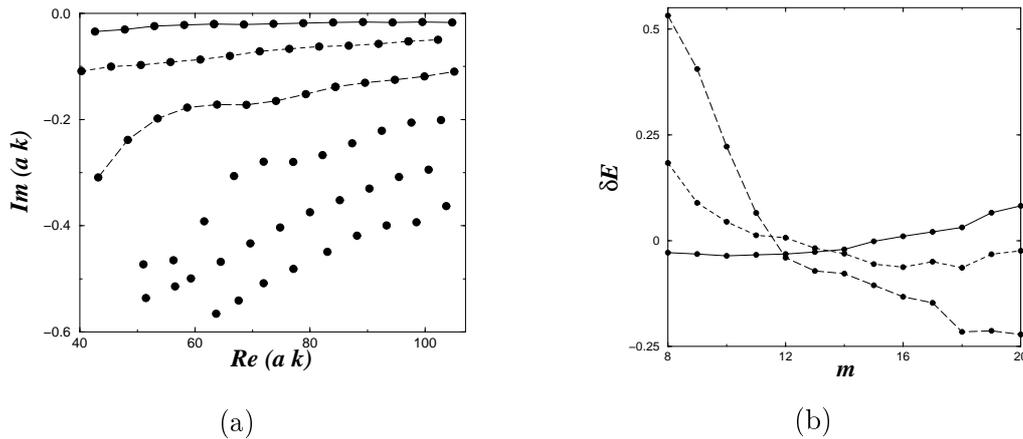


FIG. 4.25 – (a) *Spectre obtenu par les simulations numériques décrites à la partie 2.2.4 pour une cavité pentagonale de côté a . Polarisation TM et classe de symétrie $(-, -)$ pour le domaine fondamental en forme de triangle représenté en traits gras sur la figure 4.15. (b) *Tracés de la quantité (4.27) pour les trois familles les mieux confinées représentées en (a). Les codes des lignes sont identiques.**

à laquelle il faut ajouter le domaine symétrique par rapport au côté du pentagone :

$$\Psi(x, y) = \sin(\kappa_x x) \sin\left(\frac{q\pi}{l_p} y\right) \Theta(y) \Theta(l_p - y) + \sin(\kappa_x x' + \delta) \sin\left(\frac{q\pi}{l_p} y'\right) \Theta(y') \Theta(l_p - y') \quad (4.26)$$

où (x', y') est le point symétrique de (x, y) par rapport au côté du pentagone :

$$x' = x \cos 2\phi + y \sin 2\phi, \quad y' = x \sin 2\phi - y \cos 2\phi$$

avec $\phi = \pi/5$ est l'angle d'inclinaison du côté du pentagone par rapport à l'axe des abscisses (cf. figure 4.15). Pour la symétrie $(-, -)$, cette fonction d'onde doit s'annuler sur les deux côtés internes du triangle fondamental. Le choix d'une fonction sinus, assure l'annulation selon l'axe $y = 0$. En imposant l'annulation sur le deuxième côté d'équation $y = \frac{a}{2 \sin \phi} - \frac{\cos \phi}{\sin \phi} x$, on obtient une condition de quantification qui dépend de q :

$$\begin{aligned} \kappa_x \frac{L_p}{10} &= 2\pi m - \delta && \text{si } q \text{ impair} \\ \kappa_x \frac{L_p}{10} &= 2\pi m - \pi - \delta && \text{si } q \text{ pair} \end{aligned}$$

Les fonctions d'onde de la figure 4.24 ont été tracées avec ces formules pour les nombres quantiques m et q déduits des fonctions d'onde numériques de la figure 4.23.

Pour évaluer la pertinence de ce modèle, nous avons comparé les parties réelles des résonances calculées numériquement (cf. figure 4.25 (a)) avec les prédictions du modèle superscar. La quantité

$$\delta E = \left(\frac{\cos(\pi/5)n_{eff} \text{Re}k_{a_{num}}}{2\pi} \right)^2 - \left[\left(m - \frac{1}{2\pi} \delta - \xi \right)^2 + \left(\frac{1}{2 \tan(\pi/5)} \right)^2 \zeta \right] \quad (4.27)$$

est tracée sur la figure 4.25 (b) pour les trois branches supérieures de la figure 4.25 (a). Comme on s'attend à ce que les modes les mieux confinés possèdent un faible nombre d'excitations radiales, on attribue les nombres $q = 1, 2$ et 3 en partant de la branche supérieure. L'ajout d'un déphasage de π suivant la parité de q est pris en compte par ξ qui vaut 0 si q est impair et 1 s'il est pair. D'après notre modèle, $\zeta = q^2$ à la limite semi-classique (m grand). Ici on l'ajuste par une constante, ce qui conduit à $\zeta \simeq 0.44, 2.33$ et 5.51 . On s'attendrait à $\zeta = 1, 4$ et 9 . Alors que $\frac{\cos(\pi/5)n_{eff} \text{Re}k_{a_{num}}}{2\pi}$ est de l'ordre de 100 sur le domaine exploré, la différence δE reste inférieure à 0.5 .

Nous avons obtenu une bonne prédiction de la partie réelle des résonances ainsi que de la répartition spatiale des fonctions d'onde, notamment pour les excitations transverses. Cette concordance même dans cette configuration non triviale dictée par le pentagone accredit le modèle superscar.

Conclusion Grâce à l'étude conjointe des fonctions d'onde et des spectres expérimentaux et numériques, nous avons montré la pertinence du modèle superscar. Il permet d'obtenir les caractéristiques des résonances les mieux confinées une fois déterminée la famille d'orbites périodiques dominante d'après les critères établis en 4.2.1. L'essentiel des résultats présentés dans cette partie a été rapporté dans l'article [65].

4.3 Systèmes chaotiques

Dans le cadre de cette thèse sur le chaos quantique et les micro-lasers, il était naturel d'étudier les propriétés spectrales de cavités complètement chaotiques. Dans cette partie qui leur est consacrée, nous nous intéressons au stade (§ 4.3.2) où il existe des orbites confinées par réflexion totale, et au disque coupé (§ 4.3.3) où ce n'est pas toujours le cas. Mais avant d'étudier ces deux exemples, le premier paragraphe (§ 4.3.1) revient sur les propriétés générales de ces systèmes ouverts chaotiques.

4.3.1 Caractéristiques génériques

Les propriétés spectrales des systèmes fermés chaotiques ont été très largement étudiées depuis plusieurs décennies. Il semble que les fluctuations des niveaux d'énergie reproduisent celles de matrices aléatoires. Cette conjecture proposée en 1984 par O. Bohigas, M.-J. Gianconi et C. Schmit [19] a été dûment vérifiée sur une grande variété de systèmes (cf. par exemple [110] page 91).

La particularité de nos cavités ouvertes, c'est que leurs propriétés spectrales s'avèrent très différentes de celles des systèmes fermés. Par exemple, les raies du spectre 4.26 (b) semblent régulièrement espacées et ne suivent pas du tout la distribution des valeurs propres de matrices aléatoires (cf. la comparaison figure 1.2). Ces résonateurs ouverts renouvellent donc l'intérêt pour les systèmes chaotiques dans le cadre du chaos quantique.

L'intérêt pour des cavités lasers chaotiques ne se restreint pas à la recherche fondamentale. Leur usage s'est répandu très rapidement aux lasers commerciaux dès que les avantages inhérents ont été identifiés. A. Siegman, l'un des pionniers, a cherché à les promouvoir en insistant sur trois points essentiels [104] : un volume de mode très large qui permet d'obtenir un maximum de gain du milieu amplificateur, un couplage réfractif vers l'extérieur qui rend l'extraction de puissance très efficace et une séparation effective des modes transverses. Nous avons déjà discuté des propriétés du couplage réfractif à la partie 3.3. En ce qui concerne les modes transverses et leur extension spatiale, nous verrons par la suite que ces conclusions validées à l'époque pour certains types de cavités instables (cf. [104] et références incluses), peuvent être généralisées à tout type de cavité chaotique.

Toute première question relative au spectre : quelle est la densité moyenne d'états ? La loi de Weyl fournit la réponse pour un système générique fermé [23]. Appliquée au cas des billards, elle nous apprend que cette densité moyenne est proportionnelle à l'aire en première approximation. Pour un système ouvert, la question se comprend autrement car les résonances ne se trouvent plus sur l'axe réel, mais explorent le demi-plan inférieur $\text{Im}(k_m) < 0$. Une conjecture a été proposée en 2003 par Zworski et ses collaborateurs [73] appelée loi de Weyl fractale. Elle donne une estimation du nombre de résonances $N(k, C)$ comprises dans une fenêtre telle que $\text{Re } k_m < k$ et $|\text{Im} k_m| < C$ et stipule que

$$N(k, C) \sim k^d$$

où d est la dimension fractale du repousseur étrange. Cette formule a été vérifiée numériquement pour quelques types de systèmes et des bornes supérieures ont été démontrées dans certains cas (cf. [83] et références incluses). Nous avons essayé de la tester pour le stade diélectrique, mais le nombre de résonances calculées était trop faible pour une évaluation statistique. Elle a été tentée par Wiersig et ses collaborateurs à partir du repousseur étrange de la figure 2.16 et d'un spectre semblable à celui de la figure 4.26 (a) mais plus

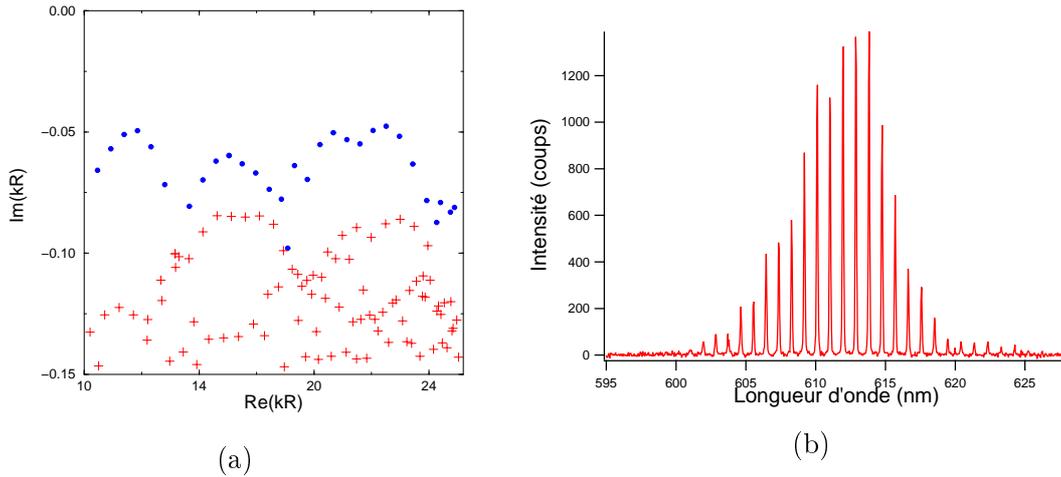


FIG. 4.26 – (a) Spectre numérique pour un stade diélectrique de forme $l/r = 2$ et d'indice $n = 1.5$. La branche isolée des modes à faible perte est représentée en disques bleus et le reste des solutions en croix rouges. (b) Spectre expérimental d'un stade de forme $l/r = 4$ et de rayon $r = 12.5 \mu\text{m}$.

étendu en $\text{Re } kr$.

Le spectre représenté figure 4.26 (a) possède une caractéristique typique des cavités instables : il existe un trou dans la distribution des parties imaginaires de k . Une série de résonances à faibles pertes reste isolée des autres. Ce phénomène de séparation de modes a été abondamment étudié pour des cavités linéaires ou apparentées, notamment dans [104]. A la différence de nos micro-lasers, ces résonateurs sont constitués de miroirs de réflectivité presque idéale. La lumière sort de part et d'autre du plus petit miroir. Dans [13, 14], M. Berry et ses collaborateurs montrent que, dans cette configuration, les modes à faibles pertes présentent une distribution d'intensité fractale. Une structure fractale a aussi été identifiée sur des applications quantiques ouvertes telle que l'"open baker's map" [58, 83] où les fonctions d'onde sont localisées sur le repousseur étrange du système classique. Les paragraphes suivants sur le stade et le disque coupé diélectriques traitent de systèmes différents puisque le couplage vers extérieur s'effectue par réfraction, mais nous retrouverons ces caractéristiques génériques et tâcherons de les expliquer. D'une part les résonances à faibles pertes restent isolées des autres, ce qui permet d'observer des spectres aux raies très marquées (cf. figure 4.26 (b)). D'autre part ces modes bien confinés sont localisés sur l'orbite périodique dominante qui peut être déterminée grâce à la formule de trace.

4.3.2 Le stade : orbites confinées

Comme premier exemple, considérons le stade diélectrique. Il s'agit d'un système complètement chaotique. Toutes les orbites périodiques sont instables et isolées. Il existe une seule orbite de stabilité marginale. Elle est de type Fabry-Perot et oscille entre les deux segments de droite. Comme elle présente beaucoup de pertes par réfraction, nous négligerons son influence. Mais à l'instar d'autres formes de micro-lasers, cette orbite a été observée dans de grandes cavités où le gain est important (cf. partie 4.1.3).

La formule de trace adaptée à un système complètement chaotique est appelée formule de Gutzwiller [23]. Après modifications pour tenir compte du milieu diélectrique suivant

les préceptes décrits en 4.1.2, elle s'écrit

$$d(k) - \bar{d}(k) \propto \sum_p L_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_p^m}{|\det(M_p^m - 1)|^{1/2}} \cos[m(nkL_p + \varphi_p)]$$

La densité d'états correspond à une somme sur toutes les orbites périodiques primitives, indicées par p , et leurs m répétitions. Chacune d'elles est pondérée par sa longueur primitive L_p , son coefficient total¹⁶ de réflexion r_p^m , et son instabilité $r_\lambda = |\det(M_p^m - 1)|^{-1/2}$. Ici, M_p représente la matrice de monodromie de l'orbite primitive (cf. partie 2.2.3). Ses valeurs propres sont de la forme $e^{\lambda_p L_p}$ et $e^{-\lambda_p L_p}$ où λ_p est le coefficient de Lyapounov. Le terme de pondération se réécrit donc

$$r_\lambda = \frac{1}{|\det(M_p^m - 1)|^{1/2}} = \frac{1}{((e^{m\lambda_p L_p} - 1)(e^{-m\lambda_p L_p} - 1))^{1/2}} = \frac{1}{2 \sinh(m\lambda_p L_p/2)} \simeq e^{-m \frac{\lambda_p L_p}{2}}$$

L'apparition du m dans l'exponentielle indique que les répétitions sont défavorisées au profit de l'orbite primitive. De même l'orbite périodique dominante possède un produit $\lambda_p L_p$ faible. Donc de manière générale, elle doit être courte et peu instable.

Pour résumer, voici les critères retenus pour déterminer l'orbite dominante :

- Si possible, elle doit être confinée par réflexion totale.
- Elle doit minimiser le produit $\lambda_p L_p$.

Quelle que soit la forme du stade l/r , il existe des orbites confinées par réflexion totale, par exemple les polygones allongés (cf. figure 2.14 (a)). Pour $l/r < 1$, ils forment la classe d'orbites les plus courtes. Comme leurs longueurs sont à peu près équivalentes, la hiérarchie s'effectue sur le coefficient de Lyapounov. D'après la partie 2.2.3, il augmente avec le nombre de rebonds sur les parties circulaires. Le rectangle est donc privilégié.

Pour $l/r > 1$, il apparaît une autre classe d'orbites périodiques, les orbites en huit. Le graphe 2.13 (b) nous apprend que celle à 3×2 rebonds possède un coefficient de Lyapounov plus faible que celui du rectangle. Lorsque l/r devient supérieur à 1, on s'attend donc à un changement d'orbite dominante qui passe alors du rectangle au huit à 3×2 rebonds. Si on poursuivait l'étude du graphe 2.13 (b) au-delà, on verrait qu'une autre bifurcation de ce type apparaît autour de $l/r = 3$ avec passage vers des orbites comme celles de la figure 2.14 (c).

L'approche par la formule de trace permet donc de prévoir des bifurcations entre des classes d'orbites périodiques. Comme elles sont dissemblables, on peut espérer les distinguer sur les simulations géométriques. Les figures 4.27 (a) et (b) correspondent à la superposition de quinze trajectoires choisies de manière aléatoire parmi celles ayant parcouru plus de cinq fois le périmètre avant de sortir par réflexion. En (a), le stade est de forme $l/r = 0.5$. En accord avec la prédominance d'orbites de type polygone, les rayons restent concentrés à la périphérie de la cavité. Par contre en (b), le stade est plus allongé, $l/r = 2$, et les rayons occupent le centre de la cavité. On retrouve bien la forme des orbites en huit¹⁷. Cette approche géométrique confirme l'analyse quantitative des instabilités par les coefficients de Lyapounov. La partie plus originale car non prédictible par ce modèle de physique classique concerne le régime ondulatoire, en particulier les fonctions d'onde des figures 4.27 (c) et (d) calculées par simulations numériques grâce à la méthode décrite en

¹⁶Par coefficient total de réflexion, on entend le produit des coefficients de réflexion à chaque rebond.

¹⁷Cet effet avait été mentionné dans [67], sans explication. Nous n'avions pas connaissance de cet article à l'époque où nous avons réalisé cette étude.

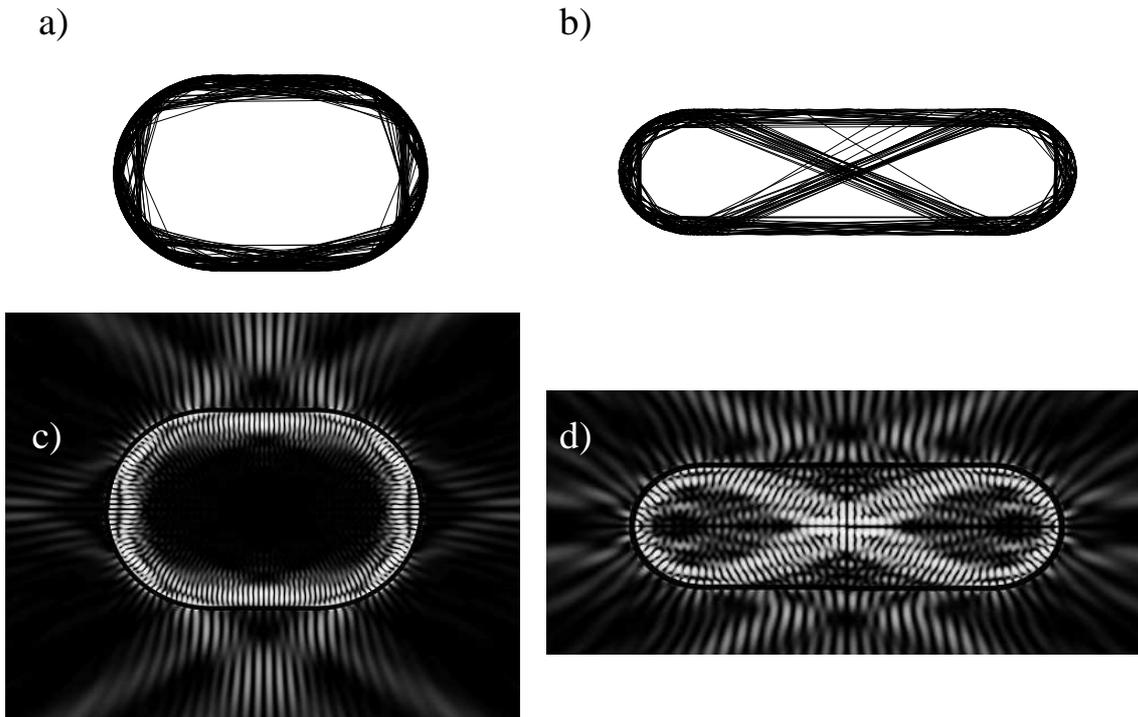


FIG. 4.27 – *Comparaison entre les approches géométriques et ondulatoires pour des stades diélectriques d'indice $n = 1.5$ avec $l/r = 0.5$ ((a) et (c)) et $l/r = 2$ ((b) et (d)). Les représentations géométriques (a) et (b) ont été réalisées en superposant quinze trajectoires choisies au hasard parmi celles ayant parcouru plus de cinq fois le périmètre. (c) et (d) correspondent au module au carré de fonctions d'onde représentatives des résonances bien confinées pour ces valeurs de l/r . Dans cette échelle de gris, les régions de plus forte intensité sont représentées en blanc.*

2.2.4. En effet elles révèlent deux aspects très importants. D'une part l'intensité maximale est localisée au voisinage d'orbites périodiques. Il s'agit de structures appelées "scars" dans la terminologie du chaos quantique. Alors que ces scars apparaissent très occasionnellement parmi les modes propres de billards fermés, elles forment l'essentiel des résonances à faibles pertes des cavités diélectriques. D'autre part, les orbites périodiques suivies par ces scars sont justement celles prédites par notre approche semi-classique. Pour $l/r = 2$ en (d), il existe une forte concentration d'intensité au centre de la cavité, tandis que pour $l/r = 0.5$ en (c), celle-ci reste localisée près de la paroi.

L'accord entre les prédictions semi-classiques et les simulations ondulatoires ne se limite pas à la distribution des fonctions d'onde. Il s'affiche aussi dans le spectre. Dans celui des figures 4.26 (a) et 4.28 (a), on distingue une branche isolée qui regroupe les résonances les mieux confinées. Elle est indiquée en bleu sur le spectre 4.28 (a). Le long de cette branche, les parties imaginaires du nombre d'onde oscille, en revanche les parties réelles sont régulièrement espacées. Pour s'en convaincre, nous les avons tracées sur le graphe 4.28 (b) en fonction de l'ordre d'apparition des résonances. De manière arbitraire, la numérotation commence à zéro pour le premier rond bleu à gauche du spectre 4.28 (a). On constate que les points s'alignent sur une droite. La pente indique la distance entre les parties réelles de deux résonances bleues adjacentes. On retrouve donc un comportement similaire

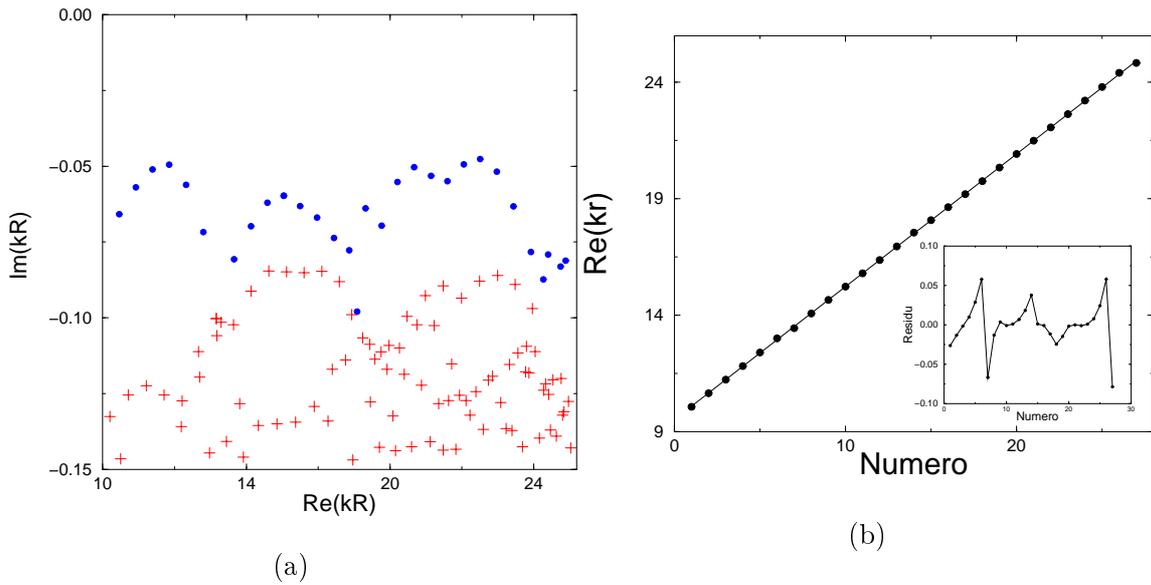


FIG. 4.28 – (a) Spectre numérique pour un stade diélectrique de forme $l/r = 2$ et d'indice $n = 1.5$. Les modes à faibles pertes sont indiqués par des ronds bleus et les autres par des croix rouges. (b) Tracé de la partie réelle de kr pour les résonances indiquées par des ronds bleus en (a). La numérotation en abscisse correspond à l'ordre d'apparition des modes lorsque $Re\ kr$ augmente en partant de zéro à l'extrémité gauche de la fenêtre. La ligne continue représente un ajustement linéaire des points. Encart : Différence entre l'ajustement linéaire et les points de (b). La ligne permet de guider le regard.

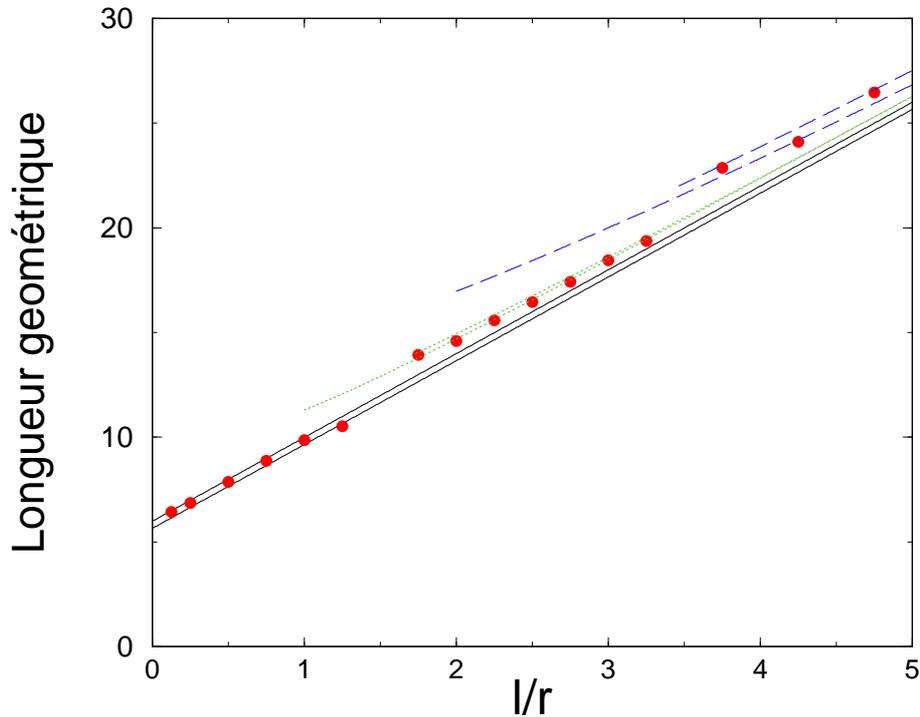


FIG. 4.29 – Longueur géométrique en unité de rayon en fonction de la forme du stade l/r . Les points rouges correspondent aux longueurs déduites des spectres numériques à partir de la formule (4.28). Les courbes indiquent les longueurs géométriques attendues de différentes orbites périodiques : ligne continue noire pour le rectangle et l'hexagone allongé, pointillés verts pour les orbites en huit à 4 et 6 rebonds et les tirets verts pour les orbites avec double passage au centre et 4 ou 6 rebonds.

à l'expérience (cf. figure 4.26 (b)) où l'intervalle spectral libre constant révèle la longueur de l'orbite périodique dominante :

$$\frac{L}{r} = \frac{2\pi}{n_{eff} \text{pente}} \quad (4.28)$$

Pour les simulations numériques, l'indice effectif n_{eff} vaut 1.5 et ne présente pas de dispersion. La formule (4.28) fournit donc une estimation de la longueur de l'orbite dominante exprimée en unité de rayon. Par commodité, la figure 4.28 reprend seulement les résultats relatifs à $l/r = 2$. Mais ces propriétés génériques se retrouvent pour toutes les valeurs de l/r qui m'ont été fournies par Charles Schmit.

Les points rouges du graphe 4.29 rassemblent les longueurs des orbites déduites des spectres numériques grâce à la formule (4.28). Les barres d'erreur seraient liées à la précision sur la pente de l'ajustement linéaire. Or sur l'encart de la figure 4.28 (b), on constate que le résidu est de deux ordres de grandeur inférieur aux quantités testées. Les barres d'erreur n'apparaissent donc pas sur le graphe 4.29. Les courbes correspondent aux longueurs des orbites prédites par notre approche semi-classique. Pour $l/r < 1$, seuls les polygones allongés restent confinés par réflexion totale et les points rouges sont effectivement disposés entre le rectangle et l'hexagone allongé. Pour l/r compris entre environ 2 et 3.5, les orbites dominantes deviennent les orbites en huit, puis, à partir de $l/r \simeq 4$ les orbites avec double passage prennent le relais. La succession des classes d'orbites périodiques dominantes suit donc les prédictions de l'approche semi-classique.

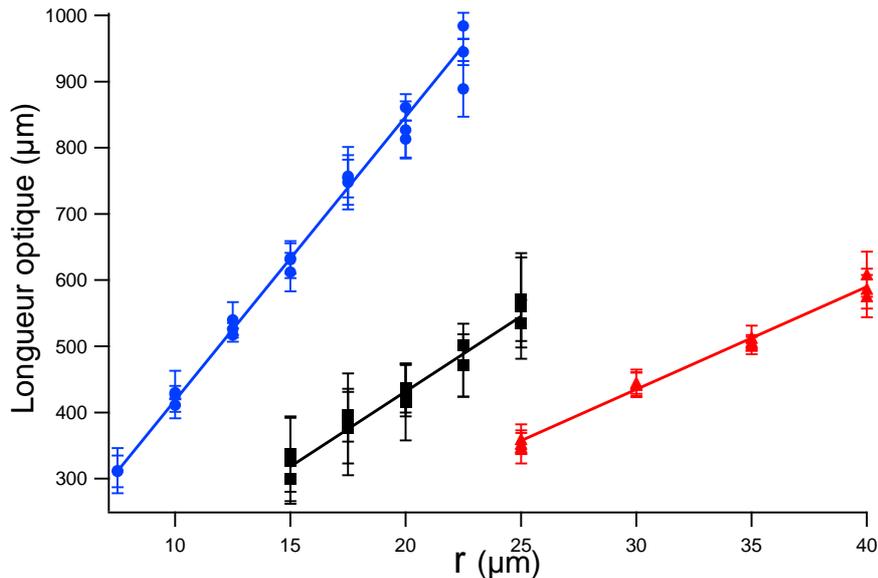


FIG. 4.30 – Longueur optique en fonction du rayon pour trois valeurs de l/r . Les mesures expérimentales sont représentées par des symboles et les lignes continues correspondent aux ajustements linéaires : triangles rouges $l/r = 0.75$, carrés noirs $l/r = 2$ et ronds bleus $l/r = 5$.

Cet accord remarquable de quantités purement ondulatoires avec un modèle d'optique géométrique devrait se retrouver dans les expériences. La figure 4.30 résume les résultats expérimentaux pour trois valeurs de l/r . Pour chaque micro-laser, la longueur optique de l'orbite dominante a été déduite du spectre par la méthode décrite en 4.1.1. On constate

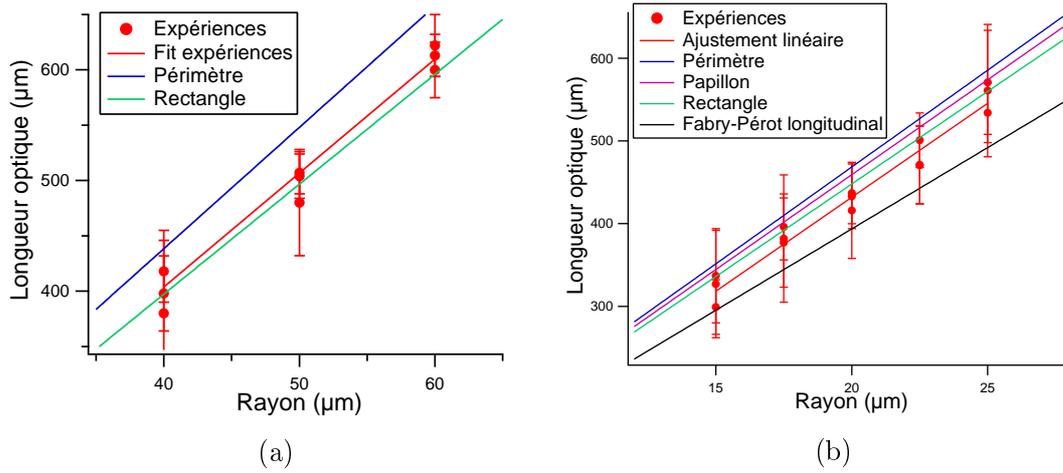


FIG. 4.31 – Longueur optique en fonction du rayon pour des stades de formes (a) $l/r = 0.1$ (b) $l/r = 2$. Les mesures expérimentales sont représentées par des ronds rouges et les lignes rouges correspondent aux ajustements linéaires. Les longueurs optiques attendues sont calculées avec $n_{tot} = 1.64$. En bleu le périmètre, en violet le papillon (orbite en huit symétrique avec quatre rebonds au total), en vert le rectangle et en noir le Fabry-Pérot longitudinal (orbite de type Fabry-Pérot qui passe par les centres des deux demi-cercles).

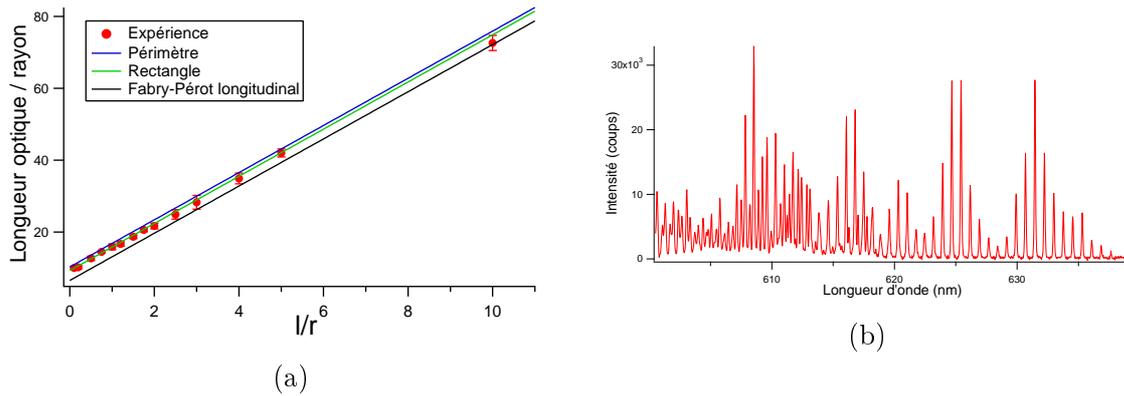


FIG. 4.32 – (a) Longueur optique normalisée au rayon du stade en fonction de l/r . Les ronds rouges correspondent à la moyenne sur les points expérimentaux et les barres d'erreur à l'écart type. Les courbes indiquent les valeurs attendues pour différentes orbites : en bleu le périmètre, en vert le rectangle et en noir le Fabry-Pérot longitudinal. (b) Spectre expérimental d'un stade de forme $l/r = 1.5$ et de rayon $r = 27.5 \mu\text{m}$ montrant un mélange d'orbites .

qu'à l/r fixé les symboles s'alignent sur une droite avec une assez bonne précision ce qui indique un comportement homogène indépendant de la taille. Par soucis de lisibilité, seuls trois valeurs de l/r ont été représentées sur la figure 4.30 mais cette dépendance linéaire se retrouve pour les 14 formes de stade testées.

En utilisant l'indice complet n_{tot} comme démontré dans la partie 4.1.1, il est possible de comparer ces longueurs optiques expérimentales à celles des orbites périodiques prédites par l'approche semi-classique. La figure 4.31 présente les résultats de cette comparaison pour deux valeurs de l/r . Pour $l/r = 0.1$ en (a), comme prévu les points expérimentaux restent proches par valeur supérieure de la longueur optique du rectangle. En revanche, pour $l/r = 2$ en (b), on obtient une disposition inversée alors qu'au contraire on s'attend

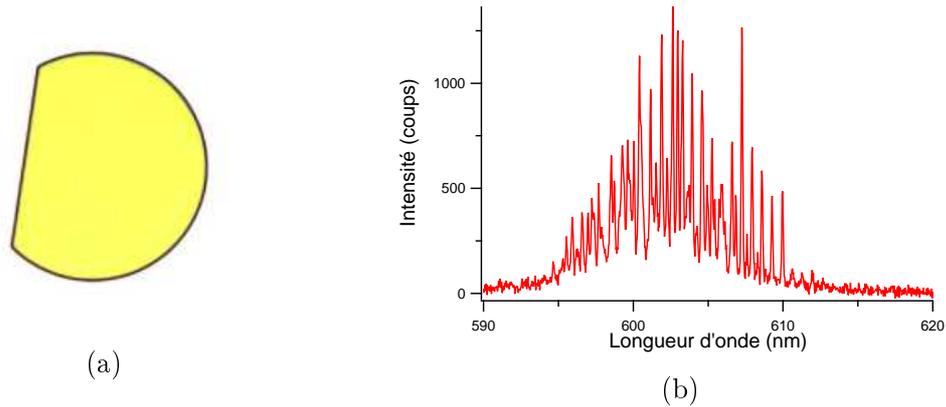


FIG. 4.33 – (a) Photographie au microscope optique d'un disque coupé. Dimension typique $100 \mu\text{m}$. (b) Spectre expérimental d'un disque coupé de forme $d = 0.8$ et de rayon $r = 50 \mu\text{m}$.

à une plus grande longueur optique expérimentale liée au passage au centre des orbites en huit.

Ce comportement anormal apparaît pour $l/r > 1$. La figure 4.32 (a) fournit un résumé des résultats expérimentaux. Les ronds rouges correspondent à la moyenne à l/r fixé de la longueur optique divisée par le rayon du stade. Les barres d'erreur rendent compte de l'écart type. Tout d'abord on constate une dispersion assez faible, ce qui est équivalent au bon alignement des points sur la figure 4.30. Ensuite on note une tendance globale non pas vers une orbite plus longue que le rectangle, mais au contraire vers un rapprochement du Fabry-Perot longitudinal, orbite qui connecte les centres des deux demi-cercles et n'est pas du tout confinée par réflexion totale. Manifestement il apparaît une compétition entre orbites comme décrit à la partie 4.1.3. Nous y sommes d'autant plus sensibles que les spectres ont été enregistrés dans la direction du maximum d'émission. Or d'après la partie 3.3.3, pour $l/r \gtrsim 2$, il existe une deuxième voie de sortie moins intense qui correspond justement à des trajectoires semblables aux orbites en huit. A l'heure actuelle nous n'avons pas réussi à détecter ces orbites en jouant sur la direction d'émission. Mais sur certains spectres comme celui de la figure 4.32 (b), il apparaît une deuxième série de pics qui révèle un autre type d'orbites. L'analyse par transformée de Fourier ne permet malheureusement pas de l'identifier car la résolution reste insuffisante pour distinguer ces longueurs trop proches. Une meilleure compréhension des mécanismes régissant la compétition entre orbites devrait toutefois permettre de déterminer les orbites périodiques dominantes du régime passif.

En résumé, la formule de trace adaptée à ces billards diélectriques permet d'établir l'orbite périodique dominante. Cette approche semi-classique prédit des passages d'une classe d'orbites à une autre suivant la forme du stade qui ont été très bien observés en simulations ondulatoires. La confirmation expérimentale s'avère plus délicate à cause des propriétés non-linéaires de l'effet laser.

4.3.3 Le disque coupé : orbites non-confinées

Le disque coupé (cf. photo figure 4.33 (a)) est un système complètement chaotique au même titre que le stade. Suivant la position de la coupure, il peut exister des orbites marginales. Leur influence sur les propriétés d'émission a été discutée à la partie 3.1.2 mais il est

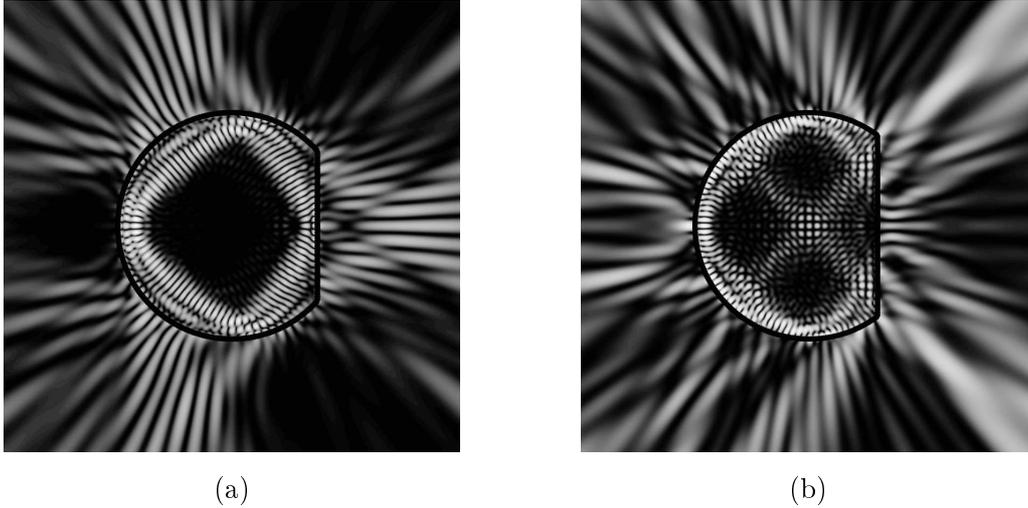


FIG. 4.34 – Module au carré de fonctions d’onde pour le disque coupé obtenues par simulations numériques. Echelle de gris, le blanc correspond aux régions de plus forte intensité. (a) Pour $d = 0.75$, $kr = 40.79 - 0.06 i$. (b) Pour $d = 0.6$, $kr = 42.30 - 0.08 i$.



FIG. 4.35 – (a) Orbite en diamant. (b) Orbite croisée ouverte. Le point bleu marque le centre du disque. On peut y voir une analogie avec le modèle de lentille développé à la partie 3.3.3.

difficile de l’estimer sur les spectres. En tout cas, le spectre expérimental de la figure 4.33 (b) montre que certaines résonances sont sélectionnées et il est donc tentant de proposer des prédictions.

L’étude de ce système reste encore à l’état d’ébauche, mais il m’a semblé intéressant de présenter ces quelques résultats préliminaires car, pour certaines valeurs de d (cf. notations figure 3.5 (a)), il n’existe pas d’orbites périodiques confinées par réflexion totale, à la différence du stade où il est toujours possible d’en trouver.

Les fonctions d’onde de la figure 4.34 correspondent à des résonances bien confinées pour deux valeurs différentes de d . Elles présentent toutes deux une structure de scar. La figure 4.35 propose une identification des orbites périodiques sous-jacentes qui sont très différentes. L’originalité de l’orbite croisée en 4.35 (b) réside dans sa position dominante alors qu’elle subit beaucoup de pertes par réfraction dues à son arrivée en incidence normale sur l’arc de cercle. Pour hiérarchiser les orbites périodiques, il faut donc tenir compte à la fois des pertes par instabilité et par réfraction. Dans la formule de trace, le coefficient qui pondère l’importance relative des orbites est de la forme $r_p \times r_\lambda$. Par analogie avec l’étude

sur le disque à la partie 4.1.2, les pertes par réfraction peuvent s'écrire comme

$$r_p = e^{-n \operatorname{Im}(kR)_{ref} L_p} \quad (4.29)$$

ainsi que les pertes par instabilité

$$r_\lambda = e^{-\operatorname{Im}(kR)_{lyap} L_p} \quad (4.30)$$

Pour normaliser la quantité $r_p \times r_\lambda$ à la longueur de l'orbite, nous allons donc considérer la fonction

$$f(d) = -\frac{\ln(r_p \times r_\lambda)}{L_p} \quad (4.31)$$

Les caractéristiques de chacune des deux orbites sont détaillées à l'annexe C. Elles permettent de calculer $f(d)$ tracée sur le graphe 4.36. Nous n'avons pas tenu compte de la correction de courbure sur le coefficient de réfraction r_p car il s'agit d'une correction négligeable pour les $|kr|$ considérés. Le graphe 4.36 s'interprète comme suit. Pour $d > 0.8$ le diamant est confiné par réflexion totale¹⁸ contrairement à l'orbite croisée. Ses pertes sont donc considérablement plus faibles. Le diamant domine sans conteste. Pour $d < 0.8$ il présente des pertes par réfraction et il est globalement plus instable que l'orbite croisée car il possède le même nombre de rebonds sur l'arc de cercle pour une longueur plus courte. Aux environs de $d = 0.65 - 0.7$, la tendance s'inverse et l'orbite croisée domine. Il existe un deuxième croisement autour de $d = 0.5$, mais comme le diamant disparaît lorsque $d < 0.5$, notre pronostic ne s'applique vraisemblablement pas. On retrouve bien les observations réalisées sur les fonctions d'onde de la figure 4.34 : le diamant domine en $d = 0.75$ et l'orbite croisée en $d = 0.6$. Nous avons donc mis en évidence et justifié une bifurcation d'un type semblable à celle du stade. Son observation devrait se révéler plus aisée car les longueurs des orbites mises en jeu sont très différentes.

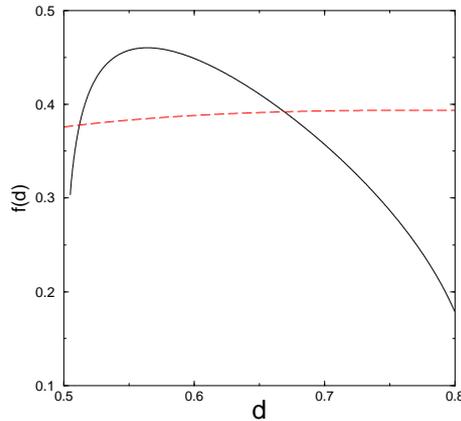
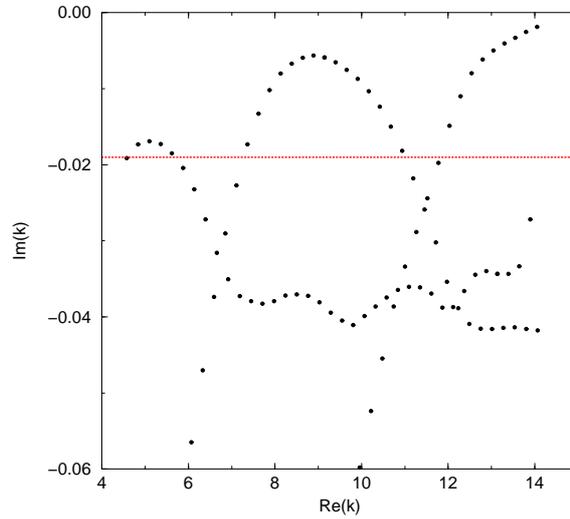


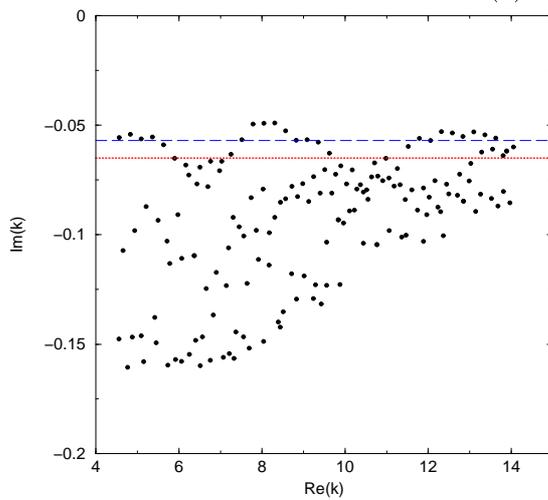
FIG. 4.36 – Tracé de $f(d)$ définie par l'expression (4.31) : orbite en diamant en noir et orbite croisée ouverte en pointillés rouges.

Les spectres numériques présentent des caractéristiques similaires à celles du stade. Toutefois on note une plus grande richesse de comportement. Les trois spectres de la figure 4.37 possèdent un groupe de résonances bien confinées distinct des autres. Alors que pour $d = 0.9$, cette branche est nettement séparée et constituée de la juxtaposition d'arches,

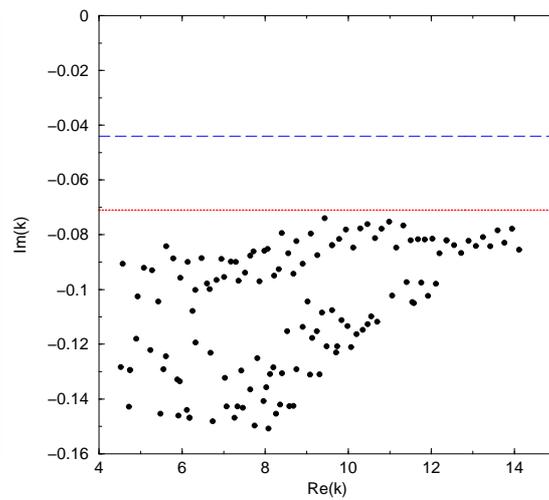
¹⁸Cette limite dépend de l'indice. Ici $n = 1.5$.



(a) $d = 0.9$



(b) $d = 0.75$



(c) $d = 0.4$

FIG. 4.37 – Spectres numériques pour différentes formes de disques coupés : (a) $d = 0.9$, (b) $d = 0.75$ et (c) $d = 0.4$. Les droites horizontales représentent les prédictions des pertes par réfraction (en tiretés bleus) auxquelles s'ajoutent les pertes par instabilité (en pointillés rouges).

pour $d = 0.4$, il est difficile d'isoler réellement une série de résonances. Il s'agit plutôt d'un groupement sans structure évidente. Le cas intermédiaire $d = 0.75$ se rapproche davantage des spectres numériques des stades (cf. figure 4.28 (a)). Pour information, nous avons indiqué sur les graphes 4.37 les parties imaginaires équivalentes provenant des équations (4.29) et (4.30). Pour $d = 0.75$, les pertes réfractives du diamant sont représentées en bleu. Si on ajoute les pertes par instabilité, on obtient la droite rouge qui reproduit plutôt bien la valeur moyenne des oscillations. Pour $d = 0.4$, il faut vraiment ajouter les pertes par instabilité de l'orbite croisée (en rouge) à ces pertes par réfraction (en bleu) pour retrouver les parties imaginaires des résonances. Pour $d = 0.9$, le diamant ne présente pas de pertes réfractives et les prédictions de l'instabilité rendent bien compte du comportement pour les faibles valeurs de $|kr|$. Ces estimations donnent un sens aux ordres de grandeurs des simulations numériques et permettent de vérifier la pertinence de telle ou telle orbite périodique dominante.

Conclusion Les cavités chaotiques ouvertes possèdent en général une orbite périodique dominante qui modèle les propriétés spectrales : les résonances bien confinées sont régulièrement espacées et leur intervalle spectral libre est lié à la longueur de cette orbite. La formule de trace de Gutzwiller adaptée au cas diélectrique indique d'éventuelles bifurcations d'orbites. Ces diverses caractéristiques ont été confirmées par les expériences et les simulations numériques sur le stade et le disque coupé.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que les spectres d'émission de nos microlasers organiques révèlent l'orbite dominante du résonateur passif. L'étude préalable d'une cavité Fabry-Perot a permis de vérifier la précision expérimentale de nos mesures et la pertinence d'introduire un indice effectif modifié. La formule de trace donne un cadre général à ses études spectrales et quantifie la pondération de chaque orbite périodique. Cette hiérarchie s'inverse parfois sous l'effet des non-linéarités lasers.

Cette approche a été testée sur deux formes de cavités très différentes : des polygones réguliers et des billards chaotiques. Les premiers, archétypes des systèmes pseudo-intégrables, ont mis en évidence la pertinence du modèle superscar où les fonctions d'onde les mieux confinées sont construites à partir d'une famille d'orbites périodiques. L'essentiel de ces résultats ainsi que ceux relatifs à l'indice effectif modifié ont été rapportés dans [65]. Par ailleurs, le stade et le disque coupé ont été choisis comme représentants de systèmes complètement chaotiques. L'approche semi-classique s'y est révélée très fructueuse.

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons décrit tour à tour différents aspects des microlasers organiques. Après avoir rappelé le contexte scientifique de cette thèse, le chapitre 1 a explicité les avantages à étudier ces objets dans le cadre du chaos quantique en insistant sur l'originalité de ces systèmes ouverts. L'état de l'art au début de ces trois années a été résumé au chapitre 2. Il comprend les procédés de fabrication ainsi que la modélisation standard pour ces résonateurs diélectriques. Les différentes méthodes d'investigation sont détaillées qu'il s'agisse de tests optiques ou de simulations numériques. L'article [63] valide notre savoir-faire expérimental.

Les deux chapitres suivants reprennent l'essentiel des résultats obtenus durant cette thèse, le premier sur les propriétés d'émission des cavités et le second sur leurs caractéristiques spectrales. Ces deux aspects apportent des points de vue originaux et complémentaires sur la physique de ces résonateurs diélectriques. Ils ont donné lieu à la publication de deux articles. [64] reprend le travail des parties 3.3.1 et 3.3.3 relatif aux directions d'émission d'un billard chaotique. Et [65] précise comment mesurer la longueur de l'orbite périodique dominante et applique cette méthode aux polygones (§ 4.1.1 et 4.2). La rédaction de deux articles est en cours, l'un porte sur la méthode perturbative développée pour le disque coupé (§ 3.2.2) et l'autre sur la compétition entre orbites liée à l'effet laser (§ 2.3 et 4.1.3). D'autres résultats nouveaux demandent des approfondissements tels que l'effet des coins sur les directions d'émission (§ 3.2.1), l'influence d'une orbite stable (§ 3.2.1), les conséquences d'un potentiel dépendant de l'énergie (§ 4.1.2), les prédictions sur les pertes des résonances (§ 3.3.2 et 4.3.3) ou la bifurcation d'orbites (§ 4.3).

D'un point de vue pratique, nous avons montré la viabilité de ces microlasers en matériaux organiques. En effet il s'agit de véritables lasers dont les propriétés restent stables au cours du temps. Cette technologie bas-coût et très modulable augure d'autres applications comme capteurs ou composants opto-électroniques. Le faible indice de réfraction s'est en effet révélé très efficace pour coupler la lumière vers l'extérieur et épurer les caractéristiques physiques.

Suivant la forme de la cavité, nous avons proposé des mécanismes d'émission adaptés. Le modèle de lentille notamment s'est avéré très performant pour prédire les directions d'émission de résonateurs complètement chaotiques.

Les spectres de ces microlasers se présentent sous forme de raies régulièrement espacées. Nous avons montré que la formule de trace permet de prédire l'intervalle spectral libre suivant la taille et la forme de la cavité. Pour ce faire, une correction de vitesse de groupe doit être prise en compte dans l'indice effectif.

Du point de vue de la physique fondamentale, ces micro-lasers organiques se sont révélés d'excellents outils d'investigation. En effet de nombreuses formes et tailles de cavités peuvent être fabriquées aisément et testées par des méthodes optiques standard. L'étude

des directions d'émission a fourni des informations sur la dynamique interne de la cavité et les spectres permettent d'identifier l'orbite périodique dominante. Nous avons ainsi pu corroborer certaines prédictions de la formule de trace et proposer un modèle superscar pour les cavités polygonales.

Au-delà du cadre standard du chaos quantique, ces résonateurs diélectriques forment une classe de systèmes ouverts originaux puisque leur potentiel équivalent dépend de l'énergie. Ils ne possèdent pas d'état lié et mis à part le disque et le guide plan, ils ne sont pas intégrables. Bien que la diffraction d'une onde électromagnétique par un coin diélectrique demeure un problème insoluble, nous avons proposé une méthode de calcul du spectre et des fonctions d'onde pour les perturbations continues du disque.

Ces micro-cavités peuvent aussi être considérées comme l'analogie d'un système quantique en couplage cohérent avec l'extérieur. A ce titre, nous avons constaté que les propriétés ondulatoires reproduisent les schémas dictés par l'optique géométrique lorsqu'il existe un mécanisme de sortie classique. De même, les résonances les mieux confinées restent localisées au voisinage de l'orbite périodique dominante.

Dans un avenir proche, l'étude de nouvelles formes de cavités telles que le disque troué ou le fer à cheval donnera accès à d'autres types de dynamiques et permettra de vérifier nos modèles. Comme la gravure par faisceau électronique réalisée au LPN améliore considérablement la qualité des détails et des parois, le couplage de cavités devient accessible et dévoile de vastes perspectives en multipliant les combinaisons. Par ailleurs différents matériaux actifs sont en cours de test. Ils devraient ouvrir de nouvelles fenêtres spectrales (eg. $1.5 \mu\text{m}$) et présenter une meilleure résistance au pompage. De plus, certains semblent adaptés pour un contrôle de la polarisation. Pour modifier l'indice de réfraction, nous comptons bénéficier des techniques micro-fluidiques développées dans le but de transformer ces micro-lasers en capteurs. Ainsi les cavités pourront-elles être plongées dans des liquides d'indices variés.

L'aspect théorique de ces systèmes ouverts demandent à être approfondi, notamment l'influence de ce potentiel qui dépend de l'énergie et l'adaptation de la formule de trace aux états quasi-stationnaires. Les conséquences de la diffraction et de la réduction à deux dimensions restent encore mal comprises. L'observation en champ proche que nous comptons développer prochainement devrait orienter ces études et leur apporter un soutien expérimental.

A plus long terme, il serait intéressant d'ouvrir la problématique "système ouvert" à d'autres types de couplage vers l'extérieur comme les cristaux photoniques.

Annexe A

Pertes et courants pour le disque diélectrique

D'après la discussion de la partie 2.2.1, la partie imaginaire du nombre d'onde $k = x + iy$ correspond aux pertes de la résonance. Dans le cas du disque diélectrique, nous allons montrer comment retrouver l'expression (4.17) pour y à partir de la conservation du courant entre le pourtour de la cavité et un disque fictif à l'infini. Cette méthode sera utilisée pour le calcul des pertes du disque coupé à la partie 3.2.2. De l'équation de Helmholtz vérifiée par une certaine fonction d'onde ψ , on dérive l'expression du courant :

$$J = n^2(k^2 - (k^*)^2) \int_V |\psi|^2 d\tau = \int_S (\psi \partial_\nu \psi^* - \psi^* \partial_\nu \psi) ds$$

où S est la surface englobant le volume V et ν est la composante normale à cette surface.

Suffisamment loin de la cavité, on peut utiliser le développement asymptotique des fonctions de Hankel. La fonction d'onde s'écrit alors

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\varphi_m} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

où φ_m est un déphasage constant indépendant de r . On cherche à calculer $\psi \partial_r \psi^* - \psi^* \partial_r \psi$. À l'ordre dominant, ce terme (le courant) est d'ordre 0 en y , donc on peut supposer $k = x$. L'intégrale conduit à

$$J = -8i |d_m|^2 = -8i \frac{J_m^2(nxR)}{H_m^2(xR)}. \quad (\text{A.1})$$

Quant au courant à la surface du disque, il s'écrit

$$J = n^2(k^2 - (k^*)^2) \int_0^{2\pi} \int_0^R |J_m(nkr)|^2 r dr d\varphi$$

Le terme $k^2 - (k^*)^2$ introduit y à l'ordre 1, donc pour rester à cet ordre, on considère $k \equiv x$ comme argument de la fonction de Bessel. L'intégrale sur r se calcule grâce à l'identité suivante

$$\int^r u J_m(u)^2 du = \frac{r^2 - m^2}{2} J_m(r)^2 + \frac{r^2}{2} J_m'(r)^2$$

La constante en 0 vaut $\frac{m^2}{2} J_m(0)^2$. Elle est donc nulle quel que soit m . Ensuite on simplifie l'expression grâce à l'équation suivante qui relie x à J' et J :

$$n^2 x^2 R^2 J_m'(nxR)^2 = (m^2 - x^2 R^2) J_m(nxR)^2$$

Finalement

$$J = 4i\pi\gamma x R^2 (n^2 - 1) J_m^2(nxR) \quad (\text{A.2})$$

Lorsqu'on égalise les contributions intérieure (A.2) et extérieure (A.1), on retrouve bien l'expression (4.17) pour la partie imaginaire du nombre d'onde.

Annexe B

Formule de trace et formule de Krein

La formule de Krein relie les densités d'états d'un système avec perturbation $d(E)$ à celle du même système non perturbé $d_0(E)$ via la matrice de diffusion S [60] :

$$d(E) - d_0(E) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial E} \ln \det S \quad (\text{B.1})$$

Sa validité a été démontrée dans le cas où la perturbation décroît suffisamment vite à l'infini [22]. Dans le cas de nos résonateurs diélectriques, la situation non perturbée correspond au plan vide et la perturbation à l'ajout de la cavité. La perturbation reste bien localisée.

Nous allons calculer successivement les trois grandeurs qui interviennent dans la formule (B.1) pour le cas du barreau diélectrique antisymétrique : la densité d'états non perturbée (barreau vide), la densité d'état perturbée (barreau plein) et la matrice de diffusion. Les notations sont celles des figures 4.4. Nous verrons que la formule de Krein est *presque* vérifiée.

Barreau vide

La forme de $G(x, y)$ est

$$\begin{aligned} G(x, y) &= B \sin(kx) & 0 < x < y \\ &= C e^{ikx} & y < x \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes complexes à déterminer grâce aux conditions de continuité suivantes

$$\begin{aligned} G(x=0, y) &= 0 & (\text{B.2}) \\ G(x=y^-, y) &= G(x=y^+, y) \\ \frac{d}{dx} G(x=y^-, y) &= \frac{d}{dx} G(x=y^+, y) - 1 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$G(x, y) = -\frac{1}{2ik} \begin{aligned} &(e^{ik(y+x)} - e^{ik(y-x)}) & 0 < x < y \\ &(e^{ik(x+y)} - e^{ik(x-y)}) & y < x \end{aligned}$$

A l'ordre dominant en $1/k$, la densité d'états vaut

$$d_0(k) = -\frac{1}{\pi} \int_0^A \operatorname{Im} G(x, x) dx = \frac{A}{2k\pi}$$

où A est plus grand que L et devrait tendre vers l'infini. Cette expression est bien conforme à la loi de Weyl [23].

Barreau diélectrique

Comme à la partie 4.1.2, nous allons distinguer deux cas suivant que la variable libre y se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du barreau.

$$0 < x = y < L$$

Le principe du calcul a été mentionné à la partie 4.1.2. L'intégrale de la fonction de Green vaut :

$$\int_0^L G(x, x) dx = \frac{L}{2ink} \frac{1 - re^{2inkL}}{1 + re^{2inkL}}$$

ce qui conduit à la densité d'états

$$d_{int}(E) = -\frac{1}{\pi} \int_0^L \operatorname{Im} G(x, x) dx = \frac{L}{2nk\pi} \frac{1 - r^2}{|1 + re^{2inkL}|^2}$$

$$L < y$$

Dans ce cas, il faut reprendre le calcul de la fonction de Green.

$$\begin{aligned} G(x, y) &= A \sin(nkx) & 0 < x < L \\ &= B e^{ikx} + C e^{-ikx} & L < x < y \\ &= D e^{ikx} & y < x \end{aligned}$$

Les conditions de continuité pour la fonction de Green sont les suivantes

$$\begin{aligned} G(x = 0, y) &= 0 \\ G(x = L^-, y) &= G(x = L^+, y) \\ \frac{d}{dx} G(x = L^-, y) &= \frac{d}{dx} G(x = L^+, y) \\ G(x = y^-, y) &= G(x = y^+, y) \\ \frac{d}{dx} G(x = y^-, y) &= \frac{d}{dx} G(x = y^+, y) - 1 \end{aligned}$$

Après un peu d'algèbre,

$$G(x, x) = \frac{1}{2ik} \left(1 + \frac{1}{S} e^{2ikx} \right)$$

où S est la matrice de diffusion définie juste après. A l'ordre dominant en $1/k$,

$$d_{ext}(E) = -\frac{1}{\pi} \int_L^A \operatorname{Im} G(x, x) dx = \frac{A - L}{2k\pi}$$

Matrice de diffusion S

Pour trouver la matrice de diffusion, on cherche les conditions vérifiées par la fonction d'onde ψ telle que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A \sin(nkx) & 0 < x < L \\ &= e^{-ikx} + S e^{ikx} & L < x\end{aligned}$$

et on impose les conditions de continuité au bord, soit

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 0 \\ \psi(L^-) &= \psi(L^+) \\ \frac{d}{dx} \psi(L^-) &= \frac{d}{dx} \psi(L^+)\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$S = -e^{2ikL(n-1)} \frac{1 + r e^{-2inkL}}{1 + r e^{2inkL}}$$

Il faut souligner que la matrice S se présente bien sous la forme d'un déphasage pur comme attendu pour un processus de diffusion élastique [62]. De cette expression, on dérive la quantité qui intervient dans la formule de Krein (B.1) :

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \ln S}{\partial E} = \frac{1}{4ik\pi} \frac{\partial \ln S}{\partial k} = -\frac{L}{2k\pi} + \frac{nL}{2k\pi} \frac{1 - r^2}{|1 + r e^{2inkL}|^2}}$$

Bilan

La formule de Krein stipule que

$$d_{int}(E) + d_{ext}(E) - d_0(E) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \ln S}{\partial E}$$

Le membre de gauche conduit à

$$d_{ext}(E) + d_{int}(E) - d_0(E) = -\frac{L}{2k\pi} + \frac{L}{2nk\pi} \frac{1 - r^2}{|1 + r e^{2inkL}|^2}$$

et le membre de droite à

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \ln S}{\partial E} = -\frac{L}{2k\pi} + \frac{nL}{2k\pi} \frac{1 - r^2}{|1 + r e^{2inkL}|^2}$$

La formule de Krein est donc bien vérifiée à un facteur n^2 près. Il est directement lié au facteur $n^2 k^2$ de l'équation de Helmholtz et révèle la particularité des résonateurs diélectriques : il s'agit de systèmes ouverts dont le potentiel équivalent dépend de l'énergie et les fonctions d'onde vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int n^2(x) \psi_i^*(x) \psi_j(x) dx = \delta_{ij}$$

Annexe C

Caractéristiques de quelques orbites périodiques

Dans cette annexe sont rapportées les caractéristiques des orbites périodiques instables du stade et du disque coupé. On choisit $r = 1$. Les valeurs numériques relatives aux angles de réfraction ont été calculées pour un indice de réfraction $n = 1.5$.

C.1 Stade de Bunimovich

Les types d'orbites étudiés sont représentés à la figure 2.14. L'angle d'incidence sur la partie circulaire est noté α .

Orbites en polygones allongés

Deux orbites périodiques de type polygone allongé sont représentées sur la figure 2.14 (a). Elles possèdent n rebonds sur le demi-cercle de droite avec un angle d'incidence α et m rebonds sur celui de gauche avec un angle d'incidence β .

Cas symétrique : $m = n$ Alors l'angle α vaut

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

La longueur totale de l'orbite s'écrit

$$L = 4 \left(l + n \cos(\alpha)\right) = 4 \left(l + n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)$$

et la trace de la matrice de monodromie

$$\text{tr}\mathcal{M} = 2 + \frac{16}{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \frac{m}{r} \frac{l}{r} + \frac{16}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

Cas non symétrique : $m \neq n$ Les angles d'incidence sur les demi-cercles α et β sont reliés par

$$\beta(m+1) + \alpha(n+1) = (n+m) \frac{\pi}{2}$$

En introduisant

$$L_1 = \frac{2l + \cos n\alpha + \cos m\beta}{\sin[(n+1)\alpha]}$$

La longueur totale de l'orbite s'écrit

$$L = 2(n \cos \alpha + m \cos \beta + L_1)$$

et la trace de la matrice de monodromie

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{M} = 2(2n + 1)(2m + 1) &+ 4 \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} n(m + 1) + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} m(n + 1) \right) \\ &- 4 L_1 \left(\frac{(n + 1)(2m + 1)}{\cos \alpha} + \frac{(m + 1)(2n + 1)}{\cos \beta} \right) \\ &+ 4 \frac{L_1^2}{\cos \alpha \cos \beta} (n + 1)(m + 1) \end{aligned}$$

Orbites croisées

Pour simplifier, on ne s'intéresse qu'aux orbites symétriques par rapport au petit axe du stade, c'est à dire qu'elles possèdent n rebonds sur le demi-disque de droite et autant sur celui de gauche. On note A l'angle complémentaire de α : $A = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ci-dessous sont rapportées les longueurs des orbites périodiques ainsi que la trace de leur matrice de monodromie. Ces quantités dépendent de A . En faisant varier ce paramètre sur son domaine d'existence, on obtient les courbes de la figure 2.13.

Orbites avec un seul croisement au centre et aucun rebond sur les parties droites Un exemple de ce type d'orbite est représenté en rouge sur la figure 2.14 (b). La longueur de l'orbite vaut

$$L = 4 \left((n - 1) \sin A - \frac{\sin((n - 1)A)}{\cos(nA)} \right)$$

et la trace de la matrice de monodromie pour une demi-trajectoire

$$\text{tr} \sqrt{\mathcal{M}} = -3 - 2n - 4n \frac{\sin((n - 1)A)}{\sin(A) \cos(nA)}$$

Orbites avec un seul croisement au centre et des rebonds sur les parties droites Un exemple de ce type d'orbite est représenté en bleu sur la figure 2.14 (b). La longueur de l'orbite vaut

$$L = 4 \left(\frac{2 + \sin((n - 1)A)}{\cos(nA)} - (n - 1) \sin A \right)$$

et la trace de la matrice de monodromie pour une demi-trajectoire

$$\text{tr} \sqrt{\mathcal{M}} = 2 - 4n - \frac{2}{\sin A} \left(2n - 1 + \frac{2 + \sin((n - 1)A)}{\cos(nA)} \right)$$

Orbites avec deux croisements au centre et des rebonds sur les parties droites Un exemple de ce type d'orbite est représenté sur la figure 2.14 (c). La longueur de l'orbite vaut

$$L = 4 \left(\frac{3 + \sin((n - 1)A)}{\cos(nA)} - (n - 1) \sin A \right)$$

et la trace de la matrice de monodromie pour une demi-trajectoire

$$\text{tr} \sqrt{\mathcal{M}} = 2 - 4n - \frac{2}{\sin A} \left(2n - 1 + \frac{3 + \sin((n - 1)A)}{\cos(nA)} \right)$$

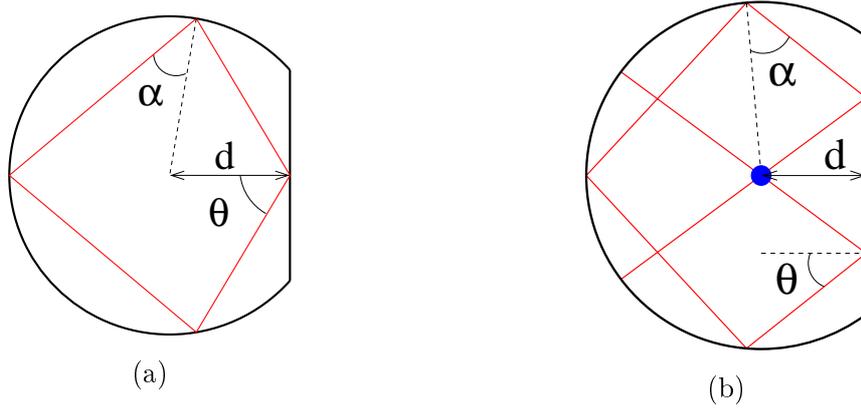


FIG. C.1 – (a) *Orbite en diamant.* (b) *Orbite croisée ouverte.* Le point bleu marque le centre du disque.

C.2 Disque coupé

Les deux types d'orbite périodique étudiés sont représentés sur les figures C.1 avec les notations utilisées.

Orbite en diamant

Equations vérifiées par les angles

$$\theta = \pi - 3\alpha \quad d \sin(\theta) = \sin(\alpha)$$

Ce qui conduit à la contrainte de définition de α : $\sin(\alpha) = d \sin(3\alpha)$. En utilisant $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$, on obtient

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3d-1}{4d}}$$

Contraintes géométriques On veut que α soit défini, ce qui impose $d > 1/3$. Il faut aussi que θ reste inférieur à $\pi/2$, ce qui revient à imposer $\alpha > \pi/6$, soit $d > 1/2$. Cette trajectoire existe jusqu'à $d = 1$. Son domaine d'existence vérifie donc

$$\frac{1}{2} \leq d \leq 1$$

Contraintes de réfraction Pour $d = 1$, $\theta = \pi/4$ est confiné. θ croît lorsque d diminue, donc il n'est jamais le siège d'une réfraction. α est une fonction croissante de d . Pour $d > \frac{1}{3-4/n^2} = 0.82$, cet angle ne présente plus de réfraction.

Longueurs Entre les intersections sur le disque, les longueurs sont de $2 \cos(\alpha)$ et sinon de $2d \cos(\alpha)$. La longueur totale de la trajectoire vaut donc

$$L = 2(1 + d) \cos(\alpha)$$

Instabilité La trace de la matrice de monodromie sur un tour s'écrit

$$\text{tr}(M) = 24d - 10$$

Variations Les orbites de type "diamant" avec davantage de rebonds sur le disque présentent moins de pertes par réfraction mais sont plus instables.

Orbite croisée

Equations vérifiées par les angles

$$\theta = \pi - 3\alpha \qquad 2d \sin(\theta) = \sin(\alpha)$$

En procédant comme pour le diamant, on obtient

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{6d-1}{8d}}$$

Contraintes géométriques On veut que α soit défini, ce qui impose $d > 1/6$. Il faut aussi que θ reste inférieur à $\pi/2$, ce qui revient à imposer $\alpha > \pi/6$, soit $d > 1/4$. Il faut aussi qu'il existe une intersection avec la partie droite, soit $\cos(\theta) > d$, ce qui conduit à $d < 0.90$. Le domaine d'existence vérifie donc

$$\frac{1}{4} \leq d \leq 0.90$$

Contraintes de réfraction θ décroît quand d augmente et en $d = 0.9$, $\theta = 0.45 > \chi_c$, donc θ n'est jamais le siège d'une réfraction. α est une fonction croissante de d . Pour $d > \frac{1}{6-8/n^2} = 0.41$, cet angle ne présente plus de réfraction.

Longueurs Entre les intersections sur le disque, les longueurs sont toujours de $2 \cos(\alpha)$. Entre le disque et la partie droite, la distance parcourue est de $\sin(5\alpha)/\sin(6\alpha)$; et entre la partie droite et la sortie directe de $1 - d/\cos(3\alpha)$. Soit une longueur totale de

$$L = 4\left[1 - \frac{d}{\cos(3\alpha)} + \frac{\sin(5\alpha)}{\sin(6\alpha)} + 2 \cos(\alpha)\right]$$

Lyapounov Pour alléger les calculs, on s'intéresse à la moitié de la trajectoire (propagation dans un seul sens). La trace de la matrice de monodromie s'écrit

$$tr(\sqrt{M}) = 24 \frac{L'^2}{l} - \left(20 + \frac{24}{l}\right) L' + 4l + 10$$

Avec $l = 2 \cos(\alpha)$ et $L' = L - l$.

Variations De même que pour le diamant, l'augmentation du nombre de rebonds sur le disque diminue les pertes par réfraction, mais augmente l'instabilité.

Annexe D

Protocole de fabrication

Dans cette annexe, nous détaillons le protocole de fabrication des micro-lasers organiques abordé à la partie 2.1.2.

La plupart des échantillons a été réalisée avec des couches de SOG¹ pour assurer le confinement vertical. Dans cette configuration, nous utilisons des substrats de silicium de 2 pouces ($\varnothing \sim 51$ mm) vendus par ITME². La solution de SOG doit être conservée au réfrigérateur mais il faut attendre qu'elle ait atteint la température ambiante avant de la déposer. Il est préférable d'essuyer le haut du flacon pour éviter que la solution ne sèche. En effet des résidus sont susceptibles de se mélanger à la solution. Ils nuisent fortement à la qualité de la couche. Réglage standard de la tournette (RC8 Süss microtech) : vitesse 1000 tours/minute, accélération 1000 tours/(minute.seconde), durée 20 secondes, capot ouvert. Si la couche ne convient pas (présence de poussière ou d'irrégularités), un lavage à l'acétone permet de la retirer. Ensuite passage à l'étuve³ pendant 2 heures à 220 degrés avec une ventilation sur 1. La couche doit mesurer 0.9 micron. En utilisant les mêmes paramètres de tournette mais avec un capot (GR7), la couche est deux fois plus fine. Il est conseillé de laisser la première couche reposer 24 heures avant de déposer la deuxième suivant le même protocole. Avec deux couches, l'épaisseur totale est de 1.8 μm . Pour obtenir une épaisseur plus importante, il est possible de déposer une troisième couche de SOG. Dans ce cas, prendre garde aux risques d'instabilité décrits à l'annexe F.

A partir de septembre 2006, nous avons utilisé des substrats de 3 pouces ($\varnothing \sim 76$ mm) de silicium recouverts de 2 μm de silice (ITME). Le confinement vertical est alors assuré par la silice. Avec ce type de substrat, l'échantillon est plus difficile à couper.

La solution de PMMA-DCM est réalisée à partir d'une solution commerciale (Micro-Chem) de PMMA⁴ à 6 % en masse dans l'anisole⁵. Le DCM⁶ est acheté sous forme de poudre chez Exciton et mélangé à la solution de PMMA dans l'anisole à raison de 5 % en masse par rapport au PMMA. Il est possible d'utiliser cette solution directement après fabrication, mais il est préférable de la laisser agiter pendant 24 heures pour assurer une meilleure dissolution. Elle doit être rouge et translucide, sans aucun agrégat. Par prudence,

¹SOG : Spin-On Glass, produit 512B commercialisé par Accuglass Honeywell. Il s'agit de siloxanes.

²ITME : Institute of Electronic Material Technology.

³Etuve Memmert modell 100. L'information pourrait se révéler importante, notamment pour l'étude des instabilités de couches décrites à l'annexe F.

⁴PMMA : polyméthacrylate de méthyle ($C_5O_2H_8$)_n, poids moléculaire 495 000

⁵Anisole : Methoxybenzene $C_6H_5OCH_3$

⁶DCM : [2-[2-[4-(diméthylamino)phényl]éthényl]-6-méthyl-4H-pyran-4-ylidène]-propanedinitrile, $C_{19}H_{17}N_3O$, poids moléculaire 303

le flacon est recouvert de papier d'aluminium pour éviter une dégradation photoinduite. En revanche il est très important de fermer hermétiquement le flacon car l'anisole est un solvant très volatil.

Réglage standard de la tournette : vitesse 500 tours/minute, accélération 500 tours/(minute.seconde), durée 5 secondes, capot ouvert puis vitesse 1000 tours/minute, accélération 1000 tours/(minute.seconde), durée 18 secondes, capot fermé (avec GR7). Ensuite passage à l'étuve pendant 2 heures à 120 degrés avec une ventilation sur 1. La couche doit mesurer 0.7 micron. Modifier les paramètres de dépôt ne permet pas d'augmenter considérablement l'épaisseur de la couche. La méthode la plus efficace consiste à utiliser une solution de PMMA à 11 % dans l'anisole. Dans ce cas, la dissolution du DCM devient plus difficile et il est préférable de chauffer la solution autour de 60°.

Sur la silice, la couche de PMMA-DCM adhère sans problème. Sur SOG, il faut avoir recours à une activation de surface par plasma d'oxygène (RIE : Reactive-Ion Etching, Plasmalab 80 μ P) RF⁷ 22 pendant 3 minutes, juste avant de déposer la couche.

Comme résine photo-sensible, nous utilisons de la S1805⁸ de chez Rohmer and Hass. Pour qu'elle ne se mélange pas au PMMA-DCM, il est absolument indispensable de déposer la couche *capot ouvert*. Réglage standard de la tournette : vitesse 1000 tours/minute, accélération 1000 tours/(minute.seconde), durée 20 secondes, capot ouvert. Puis cuisson 2 minutes à 95° sur plaque chauffante. La couche doit mesurer environ 1 μ m. Il est possible de la travailler dès qu'elle a refroidi.

Le transfert de masque est effectué avec un aligneur Karlsuss MJB3. Le masque est constitué d'une plaque de quartz ponctuée des motifs en chrome. Nous avons utilisé trois masques fabriqués chez Photronics. Le premier a été dessiné par Tahar Ben Messaoud et contient des lignes de formes (disque, anneaux, stades, entre autres) séparées par des guides. Les suivants ont été dessinés par mes soins avec le logiciel Wavemaker (Barnardmicrosystem). L'exposition sous une lampe à décharge HBO 350 W (Osram) dure 6 secondes, ensuite l'échantillon trempe une minute dans une solution de développeur⁹ en proportion 1/6 dans de l'eau, puis il est rincé sous un filet d'eau déminéralisée et séché avec un jet d'azote. Les cavités gravées dans la résine mesure environ 0.9 μ m.

Il est préférable d'enchaîner directement l'attaque RIE (RF¹⁰ 18). La durée du bombardement d'oxygène dépend de l'épaisseur de résine et de celle de PMMA-DCM. Dans les conditions standard, une durée de 22 minutes permet de retirer toute la résine, le PMMA-DCM autour des cavités, ainsi que le haut des cavités en PMMA-DCM. Suivant l'épaisseur finale souhaitée, il peut être nécessaire d'effectuer une deuxième attaque. Il faut toutefois être très prudent car le PMMA-DCM s'attaque très rapidement dès qu'il n'est plus protégé par la résine. De plus il est difficile de jauger la durée supplémentaire d'attaque (typiquement 3 minutes) car il faut tenir compte du temps de chauffage de la RIE (environ 2 minutes).

Après chaque étape, les épaisseurs sont contrôlées avec un profilomètre Dektat³ST Veeco. Il s'agit d'une pointe qui se déplace au contact¹¹ à la surface de l'échantillon. Pour

⁷Il s'agit d'un code. RF 22 correspond à une puissance de 68 W et un DC bias de 290 V.

⁸Le nom générique est S1800, les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur obtenue pour un dépôt sur substrat standard avec les paramètres de tournette indiqués par le constructeur. Il s'agit en gros d'esters, N. O. S. (1-methoxy-2-propylacetate).

⁹Développeur 351 de chez Shiplay.

¹⁰RF 18 : puissance 55 W, DC bias 300 V.

¹¹Force du stylet : 5 mg.

évaluer l'épaisseur d'une couche uniforme, il faut la rayer légèrement. Il est préférable d'éviter les bords de l'échantillon où la couche n'est pas homogène (bourlets ou trous). On obtient aussi le profil des cavités (cf. figure 2.5 (a)). Toutefois il est délicat d'estimer la qualité des flancs par cette méthode à cause du diamètre de la pointe ($25 \mu\text{m}$).

Annexe E

Tests d'autres matériaux

L'optimisation des matériaux et des procédés de fabrication ne faisait pas partie des objectifs de ma thèse. Cependant quelques études en ce sens ont été entreprises. Le DCM n'est pas le colorant laser le mieux adapté à des applications micro-lasers. En effet il est optiquement isomérisable et passe alors dans l'état cis qui ne permet pas de cycles de fluorescence [70]. D'autres colorants lasers tels que la rhodamine ou le Nile red sont pressentis pour le remplacer. De l'émission laser a été observée pour des stades fabriqués avec un colorant styril LDS 722 dans du PMMA, travail réalisé en collaboration avec Anh Quoc Le Quang doctorant au LPQM. La figure E.1 présente le spectre d'une couche non gravée (plutôt de l'émission ASE) et celui d'un stade. Quelques essais ont par ailleurs été tentés avec des matériaux actifs inorganiques, donc capables de soutenir des énergies de pompe plus importantes. Le premier concernait des perovskites mises en micro-cavités par Radoslav Parashkov. Les tests avec un pompage à 355 nm¹ semblaient indiquer la possibilité d'un effet laser. Le second essai reposait sur des nanocristaux de CdTe fournis par Maya Brummer (groupe de Efrat Lipshitz, Technion, Israel). La difficulté principale réside dans la nature du solvant qui doit être compatible à la fois pour le PMMA et les nanocristaux et qui doit aussi répondre aux critères d'un étalement par tournette (évaporation suffisamment rapide, mais pas trop non plus). Le chlorobenzène s'est révélé conforme à ces critères, mais le temps d'effectuer plusieurs tentatives, les nanocristaux se sont détériorés. Pour résumer, les matériaux actifs inorganiques sont plus difficiles à utiliser parce qu'ils ont tendance à s'agréger, ce qui nuit considérablement à leur propriété émissive. Une matrice polymère en PMMA convient parfaitement à un usage micro-laser. Nous n'avons senti le besoin d'en tester une autre que pour un projet micro-fluidique géré par Carole Arnaud (ATER au LPQM), en partenariat avec Jacques Delaire (PPSM²) et Yong Chen (LPN³). En effet le PMMA ne forme pas une matrice poreuse, condition nécessaire pour ce type d'applications. Des essais de fabrication de cavités plutôt concluant ont été réalisés avec une résine époxy SU8, mais sa porosité s'est trouvée décevante compte-tenu des critères du projet. Actuellement d'autres études sont en cours avec des polymères de type PDMS⁴ et PVC⁵.

¹Nous avons utilisé le tripleur de notre laser de pompe.

²Laboratoire de Photophysique et Photochimie Supramoléculaire et Macromoléculaire, ENS de Cachan.

³Laboratoire de Physique des Nanostructures, Marcoussis.

⁴Poly(diméthylsiloxane), $(C_2H_6OSi)_n$.

⁵Polychlorure de vinyle, $(C_2H_3Cl)_n$

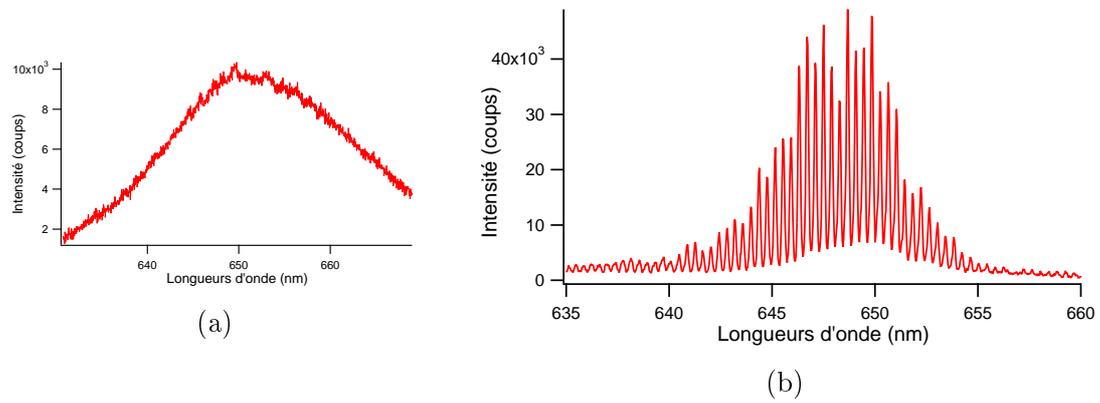


FIG. E.1 – *Echantillon fabriqué avec du colorant styryl LDS 722 dans du PMMA. Dispositif expérimental standard (cf. figure 2.8) (a) Couche non gravée. (b) Stade $l/r = 10$.*

Annexe F

Instabilités de couches

La couche comprise entre le milieu à gain et le silicium joue un rôle crucial puisqu'elle assure le confinement vertical. Nous avons cherché à quantifier l'influence de son épaisseur sur le seuil laser et les propriétés d'émission. Comme décrit en 2.1.1, nous avons utilisé du SOG, un polymère commercial fourni en solution. Compte-tenu de différentes contraintes (vitesse minimale d'étalement, faible viscosité), une couche ne dépasse pas un micron d'épaisseur. Pour augmenter l'épaisseur, il faut donc superposer plusieurs couches, deux pour un échantillon standard. Après chaque dépôt, l'échantillon séjourne dans une étuve réglée pour deux heures à 220 degrés et repose ensuite 24 heures.

Après superposition d'une troisième couche, l'échantillon s'est retrouvé zébré par de grandes rayures (cf. figure F.1 (b)). En fait l'étuve avait été ouverte en cours de refroidissement peu avant d'avoir atteint la température ambiante. Les agrandissements au microscope optique de ces rayures font apparaître les structures oscillantes très régulières de la figure F.2 qui se propagent en ligne droite sur près d'un centimètre. Un profil longitudinal de la structure figure F.2 (a) est présenté en F.3 (a). Les deux pics sont espacés d'environ 150 μm . Sur cet enregistrement réalisé à peu près aux trois-quarts de la largeur de la structure, les pics s'élèvent à 0.6 microns. Ils atteignent une hauteur de deux microns à leur extrémité. Une analyse plus approfondie a montré qu'il s'agit d'une structure en relief décollée de la surface à la manière de deux peignes qui s'inter-pénètrent.

La régularité¹ de ces jolies structures m'a semblé tellement surprenante que j'ai pris contact avec Benoît Roman (PMMH, ESPCI) et ses collaborateurs, spécialistes en déchirures, fractures et instabilités, qui ont manifesté leur enthousiasme pour ce phénomène. Ils ont notamment proposé le modèle du double peigne et précisé que les jonctions à angle droit comme celle de la figure F.2 (b) sont typiques des fractures.

Une étude systématique serait nécessaire, mais après des essais préliminaires, il est possible de distinguer quelques tendances générales. Comme la couche présente un aspect uniforme après étalement, on en déduit que les structures apparaissent lors de la cuisson et certainement au cours du refroidissement. La forme des structures change suivant les échantillons et la température d'ouverture de l'étuve. Par exemple les oscillations peuvent présenter une amplitude double ou s'enrouler comme sur la figure F.3 (b). Le dépôt d'une troisième couche de SOG favorise leur apparition, mais il est possible d'en voir aussi aux bords d'un échantillon possédant seulement deux couches. En fait il semble

¹Ces structures s'avèrent aussi très stables dans le temps. Après deux ans en salle blanche, les échantillons présentent un aspect similaire.



FIG. F.1 – (a) Photographie d'un substrat de 2 pouces de silicium sur laquelle une couche de PMMA-DCM n'a pas tenu. (b) Photographie d'un substrat de 2 pouces de silicium recouvert par trois couches de SOG.

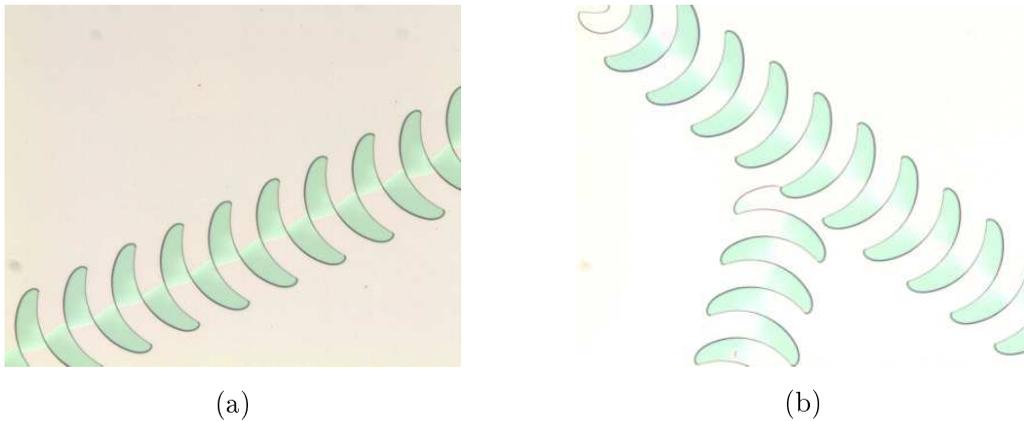


FIG. F.2 – Photographies au microscope optique des instabilités sur le substrat de silicium recouvert par trois couches de SOG présenté en F.1 (b). L'étuve a été ouverte en cours de refroidissement autour de 40° .

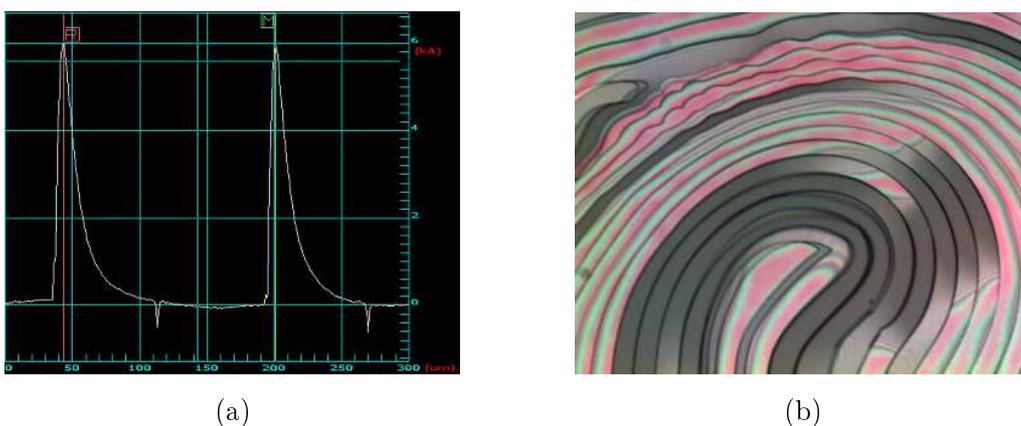


FIG. F.3 – (a) Epaisseur de deux lobes de l'instabilité en F.2 (a) enregistrée au profilomètre. Les deux lobes sont espacés de $150 \mu\text{m}$. (b) Photographie au microscope optique d'une instabilité sur un substrat de silicium recouvert par trois couches de SOG. Le rendu des couleurs a été faussé. L'étuve avait été ouverte en cours de refroidissement autour de 80° .



FIG. F.4 – (a) Photographie au microscope optique du bord d'un substrat de silicium recouvert par deux couches de SOG fabriquées en conditions standard. (b) Idem à (a) mais avec trois couches de SOG.

que les structures prennent leur origine d'un défaut qui peut être soit le bord de l'échantillon, soit une poussière comme sur la figure F.4 (a). Suivant un paramètre qui n'a pas été identifié, les structures peuvent dégénérées en oscillations (cf. figure F.4 (a)) ou en fractures rectilignes (cf. figure F.4 (b)).

Il reste beaucoup de points à éclaircir et ces structures étranges pourraient faire l'objet d'une recherche à part entière. En ce qui concerne la fabrication de couches uniformes de bonne qualité, nous avons montré qu'un refroidissement lent et régulier permet de limiter les risques d'instabilité. Par exemple, l'adhérence d'une couche de PMMA-DCM sur du silicium s'avère délicate mais a été réalisée. Lorsque le refroidissement n'est pas surveillé, la couche se rétracte comme sur la photographie de la figure F.1 (a).

Annexe G

Imagerie du flanc des cavités

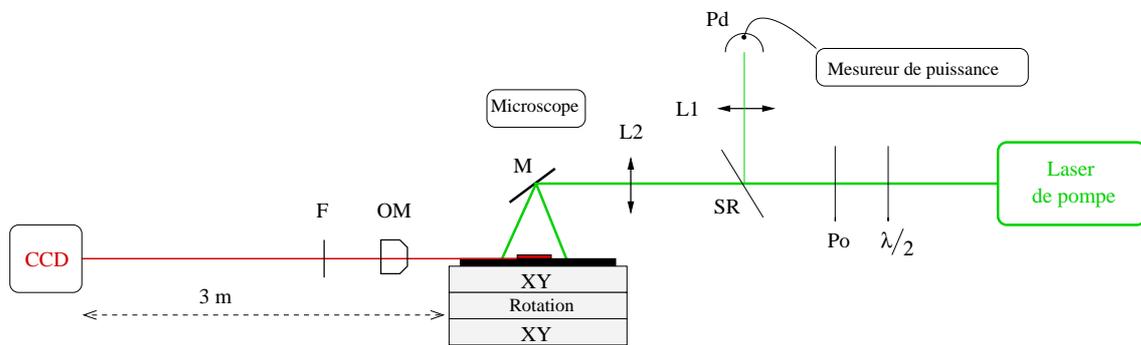


FIG. G.1 – *Dispositif expérimental en configuration "imagerie". Notations : lentilles L1, L2 et L3, miroir M, lame semi-réfléchissante SR, photodiode Pd, polariseur Po, lame demi-onde $\lambda/2$, platines de translation horizontale XY, objectif de microscope OM, filtre F, caméra refroidie CCD.*

Avant le début de ma thèse, Daniel Wright avait adapté le montage décrit en 2.1.3 suivant un schéma dû à l'équipe du Professeur R. K. Chang (Université de Yale, USA), dans le but d'imager le flanc d'une micro-cavité. Ce dispositif permet d'identifier les "points chauds", parties de la cavité d'où la lumière est émise. Il est représenté à la figure G.1. La partie pompage reste identique à celle du montage standard figure 2.8. Seule change la partie détection : un objectif de microscope projète l'image agrandie de la microcavité à 3 mètres sur la matrice de détecteurs d'une caméra refroidie¹. L'alignement, assez délicat, s'effectue au préalable sur une poussière qui diffuse le faisceau de pompe. Ensuite, le filtre F permet de couper la lumière de pompe.

Ce dispositif nous a permis d'acquérir des images du flanc de micro-stades. La figure G.2 en présente deux exemples pour une même cavité suivant l'angle de détection θ (cf. notations figure 2.15 (a)). En accord avec le modèle développé à la partie 3.3, il existe des points chauds localisés sur les parties circulaires du stade qui émettent chacun dans une direction particulière. La figure G.3 regroupe les informations collectées sur 360° grâce aux images telles que G.2 (a) et (b). Pour chaque direction θ d'observation indiquée en ordonnée, les intensités de chaque pixel sont sommées verticalement. Il s'agit donc d'une intégration sur l'épaisseur de la cavité. L'abscisse indique la correspondance des pixels horizontaux avec la frontière de la cavité. Par exemple les deux "points chauds" au centre de la

¹Celle-là même qui, par la suite, a été couplée au spectromètre.

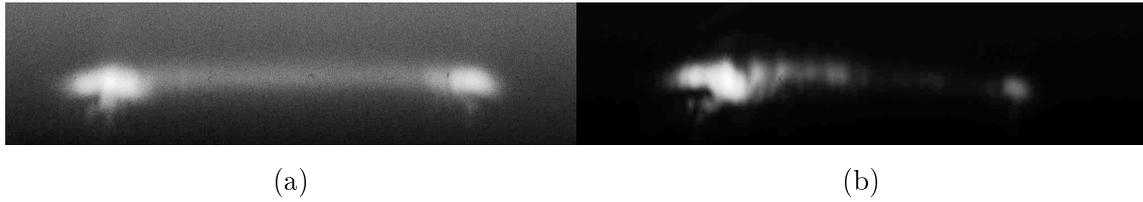


FIG. G.2 – Image du flanc d'un stade enregistrée en champ lointain (a) dans la direction du petit axe, (b) dans la direction d'émission maximale. Les régions de forte intensité sont représentées en blanc. L'intensité maximale en (b) est environ 15 fois plus importante que celle en (a).

figure G.3 signifient que l'émission s'effectue pour $\phi = 160^\circ$ et $\phi = 200^\circ$ qui correspondent à la partie circulaire puisque $l/r = 1$.

En fait ce dispositif présente l'inconvénient inhérent qu'il image en champ lointain. Il ne donne accès qu'à des informations de type optique géométrique. Il n'est donc pas possible d'étudier les mécanismes d'émission de type ondulatoire. Par exemple, les simulations numériques montrent que les fonctions d'onde bien confinées du stade sont très différentes les unes des autres en champ proche, alors qu'elles se comportent de manière identique en champ lointain. Les observations selon ϕ ne semblent donc pas primordiales. D'ailleurs dans l'article [98] où les expériences ont été réalisées avec ce type de dispositif, seule la partie en θ est comparée aux simulations numériques. C'est pourquoi il nous a semblé judicieux d'opter pour le montage figure 2.8 : la variable ϕ est sacrifiée au profit de l'analyse spectrale, tout en conservant l'information θ sur les directions d'émission.

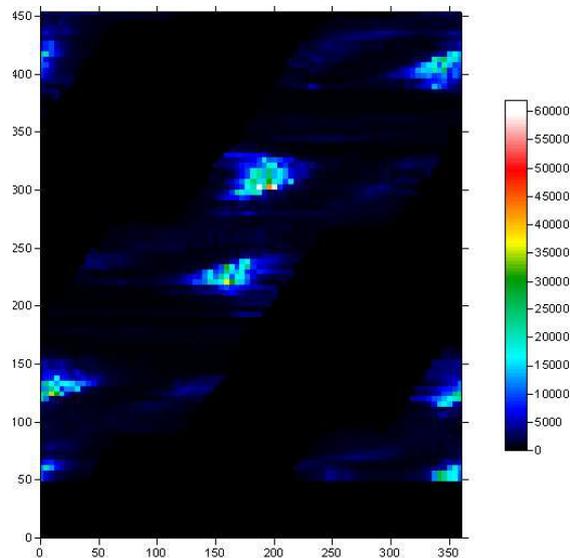


FIG. G.3 – Diagramme complet d'émission pour un stade $l/r = 1$ et $r = 30 \mu\text{m}$. L'intensité est codée par une échelle de couleurs. L'abscisse indique la position sur la frontière, repérée par l'angle au centre ϕ . L'ordonnée correspond à la direction d'émission en champ lointain θ (cf. notation figure 2.15 (a)).

Annexe H

Imagerie par au-dessus

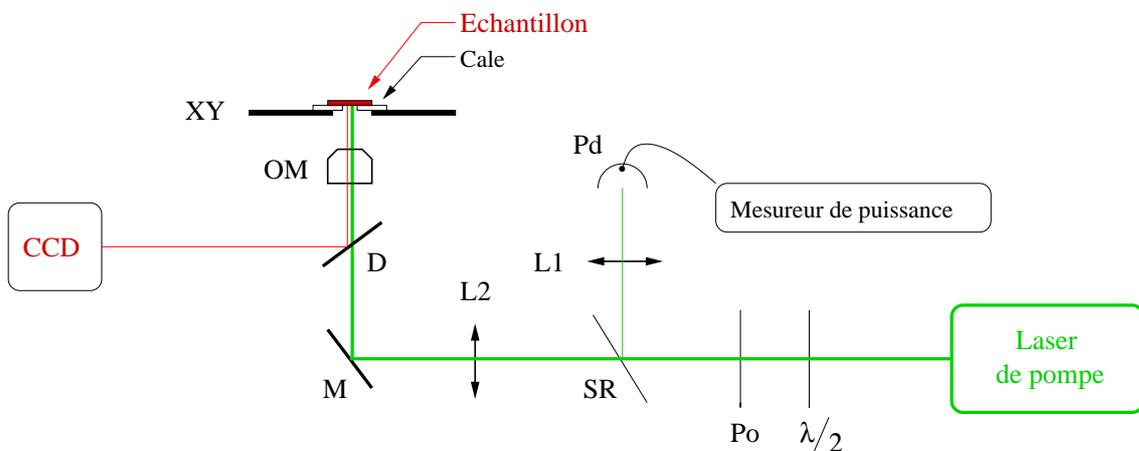


FIG. H.1 – *Dispositif expérimental le plus utilisé. Notations : lentilles $L1$ et $L2$, miroir M , lame semi-réfléchissante SR , photodiode Pd , polariseur Po , lame demi-onde $\lambda/2$, filtre dichroïque D , objectif de microscope OM , platine de translation horizontale XY .*

L'observation par la tranche selon le schéma standard de la figure 2.8 n'apporte que des informations indirectes sur la structure de champ à l'intérieur de la cavité. L'imagerie par le dessus de la cavité permettrait de remonter au profil spatial des résonances. Les modes qui nous intéressent sont confinés verticalement. Pour les détecter, il faut donc sonder leur partie évanescente au voisinage de la surface, soit par des méthodes de type SNOM (Scanning Near-Optical Microscope), soit par des techniques indirectes [85]. En attendant de disposer de ces outils, nous avons réalisé des expériences préliminaires d'observation en champ lointain avec un bâti de microscope prêté par Sophie Brasselet. Par la même occasion, nous avons effectué quelques essais en pompage ponctuel.

Le dispositif est schématisé à la figure H.1. La partie pompage reste identique à la configuration standard décrite à la partie 2.1.3 à la différence que la taille du faisceau de pompe peut être considérablement réduite grâce à un objectif de microscope OM . Avec un objectif $\times 20$, le pompage reste à peu près uniforme à l'échelle d'une cavité. Alors qu'avec un objectif $\times 40$, il est focalisé sur un disque de diamètre d'environ $10 \mu\text{m}$. Sa trace apparaît via la fluorescence sur les images H.2 et H.3.

L'organisation du bâti est telle que le faisceau de pompe arrive par en-dessous, l'échantillon est retourné (silicium vers le haut et cavités vers le bas) et repose sur des cales. L'émission

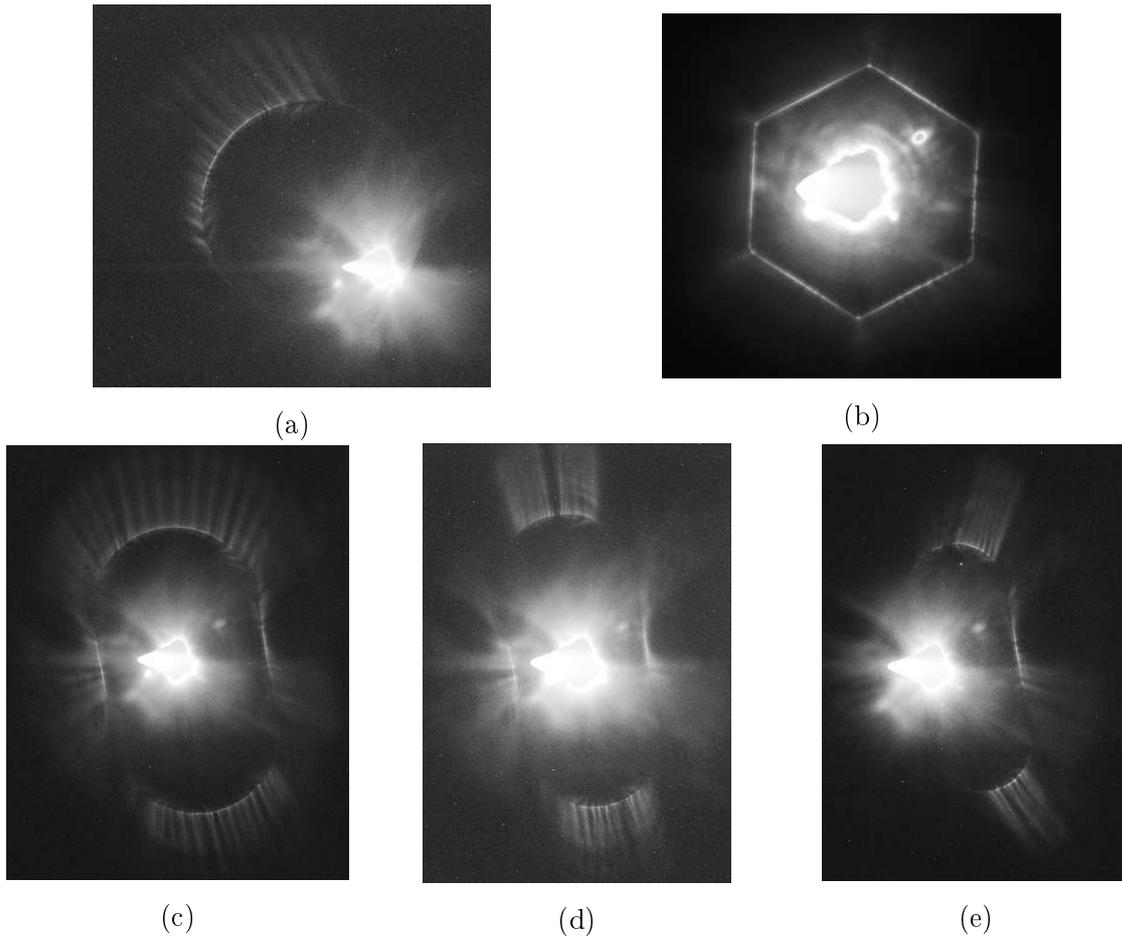


FIG. H.2 – *Vue par au-dessus sans lame de microscope. Pompage ponctuel et filtrage par OG 550. (a) Pompage au bord d'un disque. (b) Pompage au centre d'un hexagone. (c) Pompage au centre d'un stade $l/r \sim 0.5$. (d) Pompage au centre d'un stade $l/r \sim 1$. (e) Pompage au bord d'un stade $l/r \sim 1$.*

est collectée par un objectif de microscope et renvoyée sur une caméra CCD. Une lame dichroïque D sélectionne le rouge au dépens du vert. Mais comme la lumière de pompe reste beaucoup plus intense que celle de la cavité, il s'est avéré nécessaire d'ajouter un filtre supplémentaire (OG550) devant la caméra. Toutefois, dès que la pompe est portée à des énergies suffisantes pour générer l'effet laser, la caméra sature à cause de l'émission de la cavité, mais vraisemblablement aussi à cause des reliquats de pompe. Les travaux présentés ici ont donc été réalisés, en-dessous du seuil laser et nous admettrons que seule l'émission de fluorescence est détectable.

Dans cette configuration, seul est observable un champ qui se propage dans la direction verticale. Deux types de processus peuvent le générer :

- (a) La lumière de pompe s'est propagée dans le plan de la cavité. Sur son passage, elle a excité un ensemble de molécules qui ensuite fluorescent de manière isotrope. Une partie de cette émission est collectée par l'objectif de microscope.
- (b) Une partie de la fluorescence créée localement par le faisceau de pompe se propage dans la cavité. Elle est détectée grâce à la diffraction et aux diffusions qui surviennent essentiellement sur les parois.

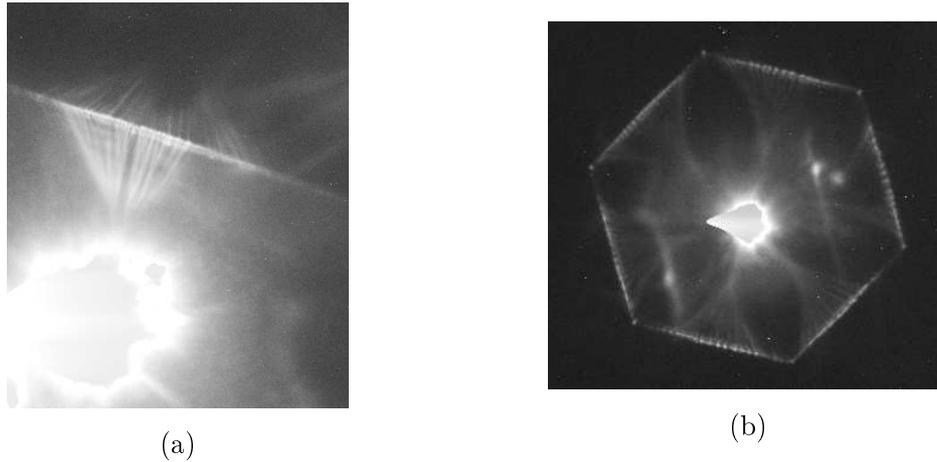


FIG. H.3 – Vue par au-dessus via une lame de microscope. Pompage ponctuel. Filtre OG 550 pour couper la pompe. (a) Pompage au bord d'une couche de PMMA-DCM. (b) Pompage dans un hexagone.

Une étude spectrale permettrait de distinguer ces deux processus. Nous espérons la mettre en œuvre lors de la prochaine série d'expériences de ce type. Quoiqu'il en soit, l'émission détectée révèle les trajets suivis par la lumière et permet donc d'avoir accès à la dynamique classique via l'optique géométrique.

Les figures H.2 illustrent les différents comportements observés. La lumière visible à l'extérieur des cavités provient vraisemblablement de rayons diffractés par le bord qui sont ensuite réfléchis par le substrat. Globalement on peut constater que les lois de l'optique géométrique sont bien respectées. Les stades et disques utilisés ici ayant été dessinés avec 32 côtés, la lumière se sépare en pinceaux, notamment sur les images (a) et (c). Maintenant que nous disposons de formes plus compliquées telles que le fer à cheval ou la cardioïde, il serait intéressant d'observer ainsi le comportement classique.

En annexe de cette annexe, je tiens à signaler un artefact élégant dont nous avons été victimes dans les premiers temps. Comme la configuration du bâti requiert un échantillon retourné, nous l'avons déposé sur une lame couvre-objet (lame de verre de quelques centaines de micromètres d'épaisseur). Des phénomènes étranges sont alors apparus. Par exemple sur la figure H.3 (a), il s'agit d'une simple couche de PMMA-DCM non gravée et pompée localement au voisinage du bord. Les rayons semblent se refocaliser à l'extérieur. Sur la figure H.3 (b), ce phénomène engendre une rosace. Tous ces signes disparaissent lorsque la lame de verre est retirée.

Annexe I

Lasers aléatoires

A la rentrée 2006, nous nous interrogeons sur l'origine des modulations qui apparaissent sur les spectres comme ceux de la figure 2.26. D'après [28, 100], il est possible de déplacer le maximum du pic d'ASE en jouant sur l'épaisseur de la couche. Nous avons donc testé des couches de PMMA-DCM non gravées de différentes épaisseurs sous pompage pulsé. En augmentant l'énergie de pompe, nous comptons quantifier le déplacement du pic d'ASE vers les grandes longueurs d'onde, comme discuté en 2.3.2. Sur l'une de ces couches, le spectre présentait des raies très marquées qui bougeaient d'un pulse de pompe à l'autre. La figure I.1 (a) illustre ce phénomène pour deux impulsions de pompe consécutives. On retrouvait un effet similaire en tournant l'échantillon ou en déplaçant la tache de pompe. Pour certifier l'apparition d'un effet laser, nous avons alors tracé la courbe de seuil présentée en I.1 (b). Pour chaque énergie de pompe, un spectre est enregistré avec 3 secondes d'intégration et fente ouverte. Pour l'énergie de pompe maximale, on a identifié la position en longueur d'onde du pic d'intensité maximale et reporté son évolution en fonction de l'énergie de pompe.

Il s'agit vraisemblablement d'un effet de type laser aléatoire, mais l'origine de ce phénomène reste incertaine. Les couches ne sont pas exemptes de poussières qui ont pu jouer le rôle de diffuseurs. Il faut préciser qu'à cette époque, notre dispositif expérimental se trouvait dans une salle réservée aux chimistes. Et nous avons constaté qu'un des échantillons avait été endommagé par un séjour prolongé à cet endroit.

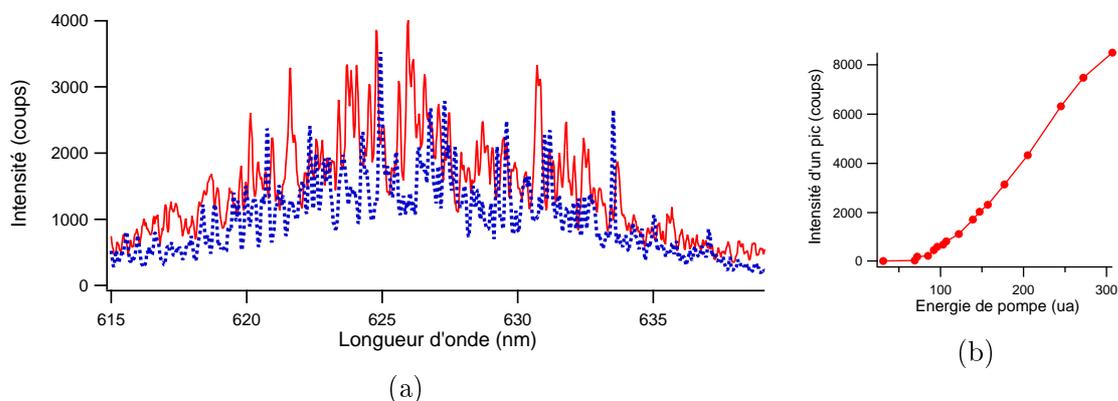


FIG. I.1 – (a) Spectres expérimentaux d'une couche de PMMA-DCM pour deux impulsions de pompe successives. (b) Courbe de seuil enregistrée sur cette même couche (cf. texte).

Manifestement il est possible de fabriquer un laser aléatoire avec une couche standard de PMMA-DCM. L'influence d'un agent chimique reste une hypothèse en suspens¹.

¹Un phénomène similaire a été rapporté dans [90]

Annexe J

Écriture de singularités

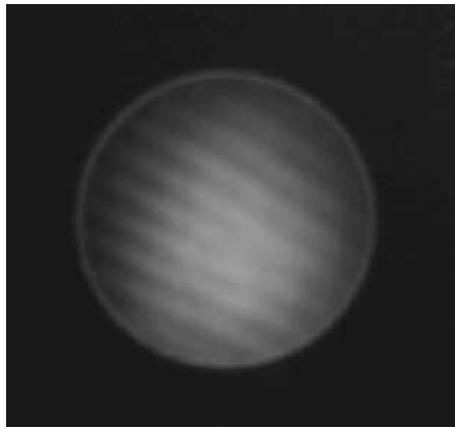


FIG. J.1 – Cavity circulaire de rayon $70\ \mu\text{m}$ en PMMA-DCM pompée en continu. La lumière de pompe est coupée, seule la fluorescence est visible. Echelle de gris, le blanc correspond aux régions de plus forte intensité.

Dans le cadre d'un projet franco-ukrainien, nous avons collaboré avec deux chercheurs de l'université de Kiev (Ukraine), Marat Soskin et Vladimir Denitsenko, sur l'écriture de singularités dans des cavités organiques. Ce travail s'inscrit dans la continuité des études sur la diffraction développées au chapitre 3. Nous nous interrogeons en effet sur l'influence d'une singularité sur les propriétés des micro-lasers. Ce projet a pour objectif d'écrire un motif dans le matériau lui-même grâce au savoir-faire du LPQM, l'aspect projection et analyse des singularités relevant des compétences de nos collègues ukrainiens.

Tout d'abord nous avons essayé de rendre le matériau localement anisotrope en utilisant l'effet Weigert [70]. Les expériences ont été réalisées sur des couches PMMA-DCM semblables à celles décrites à la partie 2.1.2 éclairées en incidence normale par un laser continu à $473\ \text{nm}$ de puissance réglable ($42\ \text{mW}$ au maximum). Les premiers essais étaient plutôt encourageants, mais il était difficile d'obtenir plus de quelques pourcents d'anisotropie à cause de la forte concentration en DCM qui annule l'effet Weigert par transfert d'excitations (FRET) (cf. [70] pour une étude détaillée de ce phénomène).

Nous nous sommes alors tournés vers le blanchiment photo-induit : les molécules soumises à un fort champ sont détruites. Cette méthode induit deux effets. D'une part l'indice de réfraction isotrope est modifié. Une couche de PMMA dopée DCM à 5 % de $0.3\ \mu\text{m}$ d'épaisseur sur silicium est éclairée pendant 30 minutes avec le laser bleu de puissance $42\ \text{mW}$ sur

une tache circulaire d'environ 1 cm de diamètre. Par ellipsométrie, l'indice mesuré à 630 nm vaut alors 1.51 ± 0.01 alors que l'échantillon témoin donne 1.53 ± 0.01 . D'autre part les molécules détruites ne fluoresencent plus. En projetant un motif sur une couche, il est alors possible de le reproduire en contraste de fluorescence. L'image J.1 a été réalisée par cette méthode. Un réseau présentant une fourche a été projeté par l'intermédiaire d'un microscope sur une microcavité circulaire. Après une heure d'exposition à puissance maximale, on retire le masque et on observe l'émission de fluorescence du disque à faible puissance. Sur la figure J.1, le faisceau de pompe a été coupé par un filtre et seule la fluorescence reste visible. La bifurcation en fourche apparaît nettement contrastée. Nous avons donc montré qu'il est possible de reproduire un motif et ce même sur des cavités de taille micrométrique.

Après cette démonstration de faisabilité, l'étape suivante consiste à tester différents motifs et leur influence sur les propriétés des micro-lasers.

Annexe K

Notations

- *Billard* : Système dynamique bidimensionnel où le potentiel est nul à l'intérieur d'une frontière et infini à l'extérieur. D'un point de vue classique, il se comporte comme un billard au sens usuel du terme.
- *Système chaotique* : Toutes les orbites périodiques sont instables, sauf éventuellement quelques unes marginales qui constituent un ensemble de mesure nulle.
- *Coefficient de Lyapounov* : Paramètre qui permet de quantifier l'instabilité d'une orbite périodique (§ 2.2.3).
- *Coups* : Unité de mesure pour la caméra CCD. Il s'agit d'une quantification des photons détectés par chaque pixel.
- *DCM* : Colorant laser utilisé dans nos microlasers (§ 2.1.1).
- *FRET* : Transfert d'énergie entre molécules cf. par exemple http://en.wikipedia.org/wiki/F%C3%B6rster_resonance_energy_transfer
- *Système intégrable classique* : Système qui possède autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté.
- *Intervalle Spectral Libre (ISL)* : Distance entre deux pics adjacents dans un spectre. En général ils appartiennent à la même famille de modes.
- *Largeur de gain homogène* : chaque dipôle excité est susceptible de réémettre dans toute la plage en fréquence de la courbe de gain.
- k : sauf mention contraire, il s'agit du nombre d'onde dans le vide.
- l : nombre d'excitations verticales pour le modèle d'indice effectif (§ 2.2.1. En général demi-longueur du rectangle dans le stade (fig. 1.1 (a)).
- *Limite semi-classique* : correspond à la limite $kr \rightarrow \infty$ où r est une dimension caractéristique du système.
- *Méthode du col* : aussi appelée méthode de la phase stationnaire. Approxime l'intégrale d'une fonction de la forme $e^{ik\varphi(x)}$ pour $k \rightarrow \infty$ par celle de son développement autour de $\varphi(x) = 0$.
- *Système mixte* : Système dynamique qui n'est ni complètement chaotique, ni complètement intégrable.
- *Orbite périodique primitive* : orbite périodique qui ne peut pas être décomposée en répétition d'une même orbite périodique.
- r : rayon du demi-disque du stade ou coordonnée radiale utilisée pour les calculs analytiques.
- n, n_{eff}, n_{tot} : indice de réfraction, indice effectif (§ 2.2.1) et indice effectif total utilisé pour l'étude de l'intervalle spectral libre qui prend en compte les corrections de vitesse de groupe (§ 4.1.1).
- p, p' : nombres d'onde dans le plan (x,y) des couches.

- *PMMA* : Polymère utilisé comme matrice hôte pour nos microlasers (§ 2.1.1).
- q, q' : nombres d'onde selon la direction normale au plan (x,y) des couches.
- *Repousseur étrange* : ensemble des points fixes instables d'un système dynamique.
- *RIE* : Reactive Ion Etching, soit en français, gravure par plasma.
- s : En général il s'agit de l'abscisse curviligne le long de la frontière du billard.
- *SOG* : Matériau utilisé comme couche de confinement inférieur pour nos microlasers (§ 2.1.1).
- *Scar* : Fonctions d'onde d'un billard chaotique balafée par la trace d'une orbite périodique.
- *Superscar* : Orbite marginale qui domine le spectre et permet de construire les modes les mieux confinés.
- TE : Etat de polarisation du champ électromagnétique où le champ \vec{E} se trouve dans le plan de la cavité et le champ \vec{B} lui est normal.
- TM : Etat de polarisation du champ électromagnétique où le champ \vec{B} se trouve dans le plan de la cavité et le champ \vec{E} lui est normal.
- χ : Angle d'incidence d'un rayon sur une interface. Il est compté entre la normale et le rayon et toujours positivement.

Annexe L

Articles

Cette annexe rassemble les articles acceptés pendant ma thèse. Ils sont présentés par ordre chronologique. Le premier [63] dresse l'état l'art à l'été 2005 pour notre fabrication de microlasers organiques et décrit les tests optiques standard sur l'exemple du stade. Il s'agit donc en quelque sorte d'un résumé de la partie 2.1. Le deuxième article [64] décrit nos observations sur les directions d'émission du stade et propose un modèle de lentille pour les prédire. Il insiste notamment sur la similitude entre les propriétés ondulatoires et géométriques. Il couvre ainsi les contenus des parties 3.3.1 et 3.3.3. Quant à [65], il montre que notre méthode spectrale permet bien de *mesurer* la longueur géométrique d'orbites périodiques. Son utilisation à des cavités polygonales montre la pertinence du modèle superscar. Cet article reprend donc les études développées aux parties 4.1.1 et 4.2.

Highly directional stadium-shaped polymer microlasers

M. Lebental^{a)}

Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France and Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université Paris-Sud bâtiment 100 Centre Scientifique d'Orsay 15 rue Georges Clémenceau 91405 Orsay Cedex, France

J. S. Lauret, R. Hierle, and J. Zyss

Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France

(Received 1 August 2005; accepted 3 November 2005; published online 19 January 2006)

The far-field emission of two-dimensional stadium-shaped microlasers is investigated. Stadium-shaped microcavities based on a laser dye embedded in a polymer matrix have been elaborated. Such stadium-shaped microresonators, made by lithography and reactive ion etching have displayed quality factors greater than 6000 and a high output power. The highly directional far-field pattern of the emitted beam (full width at half maximum $\sim 15^\circ$) reflects the symmetries of the stadium shape. © 2006 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.2159099]

For more than a decade two-dimensional (2D) microresonators have been broadly studied both for fundamental physics and for applications towards integrated optics. Different shapes of microresonators have been investigated such as disks,¹⁻⁴ rings,⁵ spirals,⁶⁻⁸ polygons,⁹ asymmetric resonant cavities,¹⁰ stadiums,¹⁰⁻¹³ quasistadiums,¹¹ and others. In that perspective, different technological avenues have been implemented. Two major families can be singled out: inorganic semiconductors^{6,11,12} and organic materials.^{7,10,14} Inorganic semiconductors present the advantages of electrical injection and of a well known, controlled, however, difficult multistep technology. Even though the electrical injection has not been achieved so far in organic materials, the potential low cost and simplicity of this technology are attractive features for future applications. Moreover, most of polymer have a lower refractive index than classical semiconductors ($n \sim 1.5$ vs $n \sim 3$), which may lead to different physical behaviors, light being then subject to less restricted out-coupling conditions.

The study of the 2D confinement of light is a key prerequisite towards microlasers applications. Whereby microdisks have focused a lot of attentions. Due to the symmetry, the light is highly confined in the microresonator by total internal reflection, entailing potentially very high quality factor. However, microdisks present a low output power and no emission directionality.¹⁻⁴ Therefore, deformed disk such as asymmetric disks¹⁴ or spirals^{6,10} have been proposed in order to enhance both output power and emission directionality. In this framework, stadium-shaped microresonators appear as relevant candidates.¹⁰

In this letter, we focus on 2D stadium-shaped microlasers. A stadium is composed of two half circles (with radius r) and a rectangle (with length L), with a global form factor defined as $F=L/2r$ (Fig. 1). Stadium-shaped lasers studied here are organic components to be optically pumped. Their quality factor is greater than 6000 and the laser emission is highly directional.

The organic “guest-host” material used is composed of poly(methylmethacrylate) (PMMA) for the passive host and

of 4-dicyanomethylene-2-methyl-6-(4-dimethylaminostyryl)-4H-pyran (DCM) for the active guest. DCM is a laser dye with a fluorescence spectrum centered around 600 nm. Besides relatively low cost availability, the main assets of DCM are a good fluorescence quantum yield and large Stokes shift (~ 100 nm) which prevents from reabsorption of the emitted light.¹⁵ The PMMA-DCM suspension is fabricated by adding 5% in weight of DCM in PMMA which is in solution in anisole (6% in weight). The active layer of PMMA-DCM is obtained by spin coating the solution over spin on glass layers deposited on a Si substrate. The active layer is then covered with a photoresist polymer which is UV exposed through an optical mask. A final step of reactive ion etching leads to stadium-shaped microcavities with length varying between 50 and 100 μm (Fig. 2). Atomic force microscopy measurements performed throughout a wafer reveal an homogeneous thickness (± 10 nm). This average thickness can be monitored between 400 and 800 nm. Effective refractive index calculations show that only one vertical electrical mode is excited for a thickness between 0.2 and 0.8 μm .

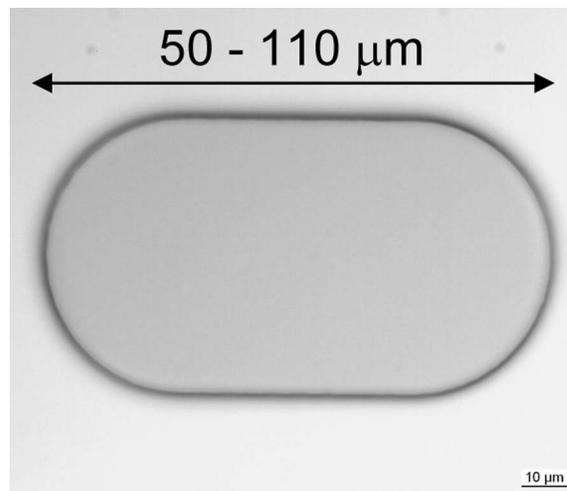


FIG. 1. Optical microscope image of a stadium-shaped microlaser made by photolithography of a PMMA-DCM layer.

^{a)}Electronic mail: lebental@lqpm.ens-cachan.fr

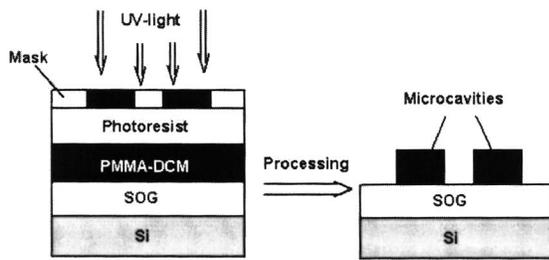


FIG. 2. Diagram of the photolithography process.

Thus allowing to consider these microcavities as 2D resonators.

Figure 1 is an optical microscope image of a stadium-shaped microcavity fabricated by this method. One can observe that the process leads to straight sides which accounts for the high quality factors (Q) of these microresonators. The cavity is shaped by the PMMA host whereas the dye imparts the active properties. The experimental setup is displayed in Fig. 3(a). Stadium-shaped microlasers are optically pumped at 532 nm in a direction perpendicular to the stadium plane, the whole cavity being uniformly illuminated by the pump spot (in air at room temperature). The pump-laser setup is composed of an extracavity doubled Nd:yttrium-aluminum-garnet laser with a repetition rate of 10 Hz and a pulse duration of about 10 ps. The energy per pulse after attenuation is typically $6 \mu\text{J}$. The emitted light coming out of the cavity is then collected in the stadium plane and spectrally analyzed with a 500 mm focal spectrometer (Acton-research 2500i) containing a 1200 lines/mm grating blazed at 500 nm. The light detection is achieved with a multichannel detector (Andor CCD-DV420-BU). The expected spectral resolution of the setup is of the order of 0.1 nm.

The emitted light intensity in function of the pump power is displayed in Fig. 3(b). One can observe a typical threshold behavior. The threshold is estimated at $100 \text{ pJ}/\mu\text{m}^2$. A typical fingertipped stadium-shaped microla-

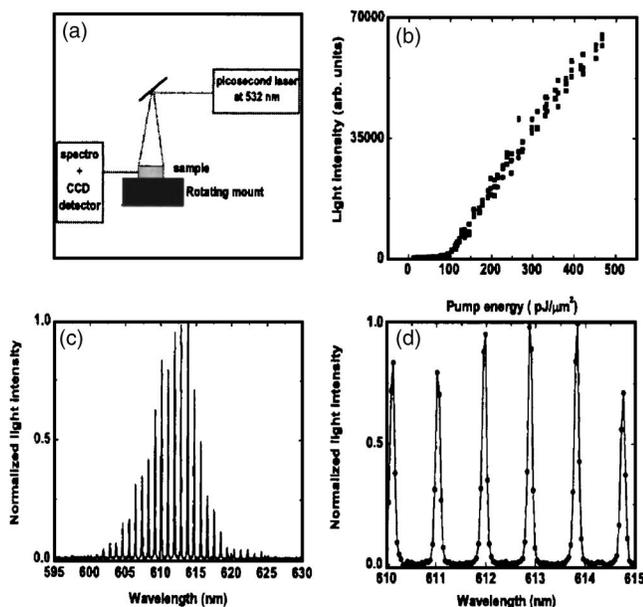


FIG. 3. (a) Experimental setup; 2D PMMA-DCM stadium-shaped microlaser; (b) threshold curve; (c) typical far-field spectrum in the stadium plane just above the laser threshold ($F=4$, $r=12.5 \mu\text{m}$, exposure time=3 s); and (d) zoom in the far-field spectrum displayed in (c).

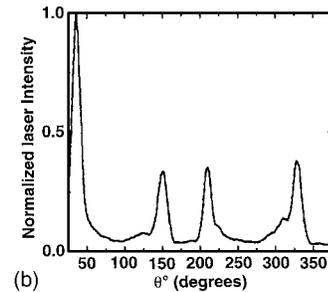
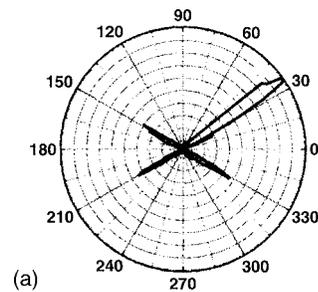


FIG. 4. Far-field emission in the plane of a 2D PMMA-DCM stadium-shaped microlaser, in function of the angle just above the laser threshold ($F=0.8$, $r=30 \mu\text{m}$, exposure time=1 s): (a) in polar coordinates, (b) in linear coordinates.

ser spectrum is displayed in Fig. 3(c) and 3(d). One can observe a line spectrum with an envelope centered around 610 nm. This spectrum has been performed just above lasing threshold. The high intensity (signal to noise ratio ~ 1500) reflects the high efficiency of these microlasers. Figure 3(d) presents a zoom of the previous spectrum. The full width at half maximum (FWHM) of each fingertip is estimated to 0.1 nm which is close to the resolution of the spectrometer. In theory, the quality factor ($Q=\lambda/\Delta\lambda$) should be measured in an empty cavity, but in practice results are very similar.⁵ The Q factor of these microcavities is then of the order of 6000 or over, which is remarkably high for a polymer based microresonator,^{2,5,14,16} reflecting the relevance of our fabrication process.

2D stadium-shaped cavities are considered to be fully chaotic,^{17,18} meaning that no stable orbit exists in the cavity. In spite of that, these PMMA-DCM stadium-shaped microcavities appear to be “well-behaved” lasers (high efficiency, clear laser threshold). Some calculations on the optical modes living in the cavity are under progress in order to explore which modes contribute to the laser emission.

Moreover the directions of emission have been also studied. The sample is fixed on a rotating mount. Far-field spectra are performed over 360° by 2° steps. For each angle the intensity of the whole spectrum is summed. The intensity of the laser emission in function of the angle is displayed in Fig. 4. The 0° line corresponds to the larger axis of the stadium. The emission presents a high directionality along four directions. The angle of emission is around 30° and the emission directions are symmetrical about the 0° and 90° axis according to the obvious symmetries of the stadium shape. In Fig. 4(b), the FWHM of the emission peaks are of the order of 15° which evidences the high directionality of these stadium-shaped microlasers.^{1,6,7,10-12,14} One can note that the intensity of the peak at 35° is three times greater than the intensity of the three other peaks. The acquisition in function of angle starts at the 35° peak. The intensities of the three other peaks are weaker due to photobleaching of the DCM

molecules, which limits the life time of the microlasers. Nevertheless it is long enough to endure at least 2000 pulses above the laser threshold allowing present measurements. Longer experiments could be performed under nitrogen flow, which is known to enhance the life time of the laser dye.

In conclusion, we have shown results on stadium-shaped polymer microlasers. The polymer technology used here leads to high efficient microlasers and resonator quality factors greater than 6000. Stadium-shaped microlasers present a high directionality with a FWHM of only 15 degree in the far-field pattern. Studies of the different properties of the emission in function of the form factor are under progress. In order to extend the microlaser life time, studies of different active media are also under progress. Finally, although stadium-shaped resonators are fully chaotic, these microcavities appear to be well-behaved lasers. Calculations are under progress to get insight into the coherence properties of these cavities.

The authors are grateful to D. Wright and A. Vella for support in the optical setup and to E. Bogomolny and C. Schmit for helpful discussions. “Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire” is a “Unité mixte de recherche associée au CNRS” (UMR8537). “Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques” is a “Unité mixte de recherche associée au CNRS” (UMR8626).

¹C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone,

J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Science* **280**, 1556 (1998).

²M. Kuwata-Gonokami, R. H. Jordan, A. Dodabalapur, H. E. Katz, M. L. Schilling, R. E. Slusher, and S. Ozawa, *Opt. Lett.* **20**, 2093 (1995).

³S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton, and R. A. Logan, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 289 (1992).

⁴R. A. Mair, K. C. Zeng, J. Y. Lin, H. X. Jiang, B. Zhang, L. Dai, A. Botchkarev, W. Kim, H. Morkoç, and M. A. Khan, *Appl. Phys. Lett.* **72**, 1530 (1998).

⁵R. C. Polson, G. Levina, and Z. V. Vardeny, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3858 (2000).

⁶M. Kneissl, M. Teepe, N. Miyashita, N. M. Johnson, G. D. Chern, and R. K. Chang, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 2485 (2004).

⁷T. Ben-Messaoud and J. Zyss, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 241110 (2005).

⁸F. Courvoisier, V. Boutou, J. P. Wolf, R. K. Chang, and J. Zyss, *Opt. Lett.* **30**, 738 (2005).

⁹G. D. Chern, A. W. Poon, R. K. Chang, T. Ben-Messaoud, O. Alloschery, E. Toussaere, J. Zyss, and S. Y. Kuo, *Opt. Lett.* **29**, 1674 (2004).

¹⁰H. G. L. Schwefel, N. B. Rex, H. E. Tureci, R. K. Chang, A. D. Stone, T. Ben-Messaoud, and J. Zyss, *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 923 (2004).

¹¹T. Fukushima and T. Harayama, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **10**, 1039 (2004).

¹²T. Harayama, T. Fukushima, P. Davis, P. O. Vaccaro, T. Miyasaka, T. Nishimura, and T. Aida, *Phys. Rev. B* **67**, 015207 (2003).

¹³T. Harayama, P. Davis, and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 063901 (2003).

¹⁴R. C. Polson and Z. Vardeny, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 1892 (2004).

¹⁵G. Kranzelbinder, E. Toussaere, D. Josse, and J. Zyss, *Synth. Met.* **121**, 1617 (2001).

¹⁶S. V. Frolov, A. Fujii, D. Chinn, Z. V. Vardeny, K. Yoshino, and R. V. Gregory, *Appl. Phys. Lett.* **72**, 2811 (1998).

¹⁷L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).

¹⁸S. W. McDonald and A. N. Kaufman, *Phys. Rev. A* **37**, 3067 (1988).

Directional emission of stadium-shaped microlasers

M. Lebental,^{1,2,*} J. S. Lauret,¹ J. Zyss,¹ C. Schmit,^{2,†} and E. Bogomolny²

¹Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, CNRS, École Normale Supérieure de Cachan, UMR 8537, 94235 Cachan, France

²Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, CNRS, Université Paris Sud, UMR 8626, 91405 Orsay, France

(Received 4 September 2006; revised manuscript received 25 October 2006; published 13 March 2007)

The far-field emission of two-dimensional stadium-shaped dielectric cavities is investigated. Microlasers with such shape present a highly directional emission. We provide experimental evidence of the dependence of the emission directionality on the shape of the stadium, in good agreement with ray numerical simulations. We develop an analytical geometrical optics model which permits to account for the main observed features. Wave numerical calculations confirm the results.

DOI: [10.1103/PhysRevA.75.033806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.033806)

PACS number(s): 42.55.Sa, 03.65.Yz, 05.45.Mt

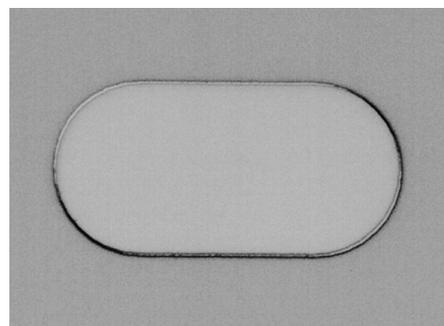
The field of quantum chaos has widely broadened over the past two decades [1]. Generally, it relates the quantum behavior of a broad diversity of systems with their classical features. In this context, lossless billiards are models of great interest, providing a broad variety of dynamical systems by changing the shape of the boundary. Moreover, they are accessible to experimental studies [2,3]. At the same time, the influence of loss or noise on open quantum systems is also being investigated [4], with emphasis on the behavior of open quantum systems with chaotic classical dynamics [5–7]. Flat microlasers exhibiting different boundary shapes are relevant examples of open billiards with a coherent output coupling [8–10].

Here we focus on polymer microlasers with a Bunimovich stadium shape. Such billiard is the archetype of chaotic systems [11]. Stadium billiards are made up of a rectangle of length $2l$ between two half-circles of diameter $2r$, accounted as the form ratio l/r (see Fig. 1). Though all periodic orbits are unstable (except bouncing ball orbits which are neutral), dielectric microcavities with this shape are well-behaved lasers with highly directional emission in the far-field pattern [12]. Aside from quantum chaos studies, such microresonators are also being considered for applications in integrated optics and biological sensors [13].

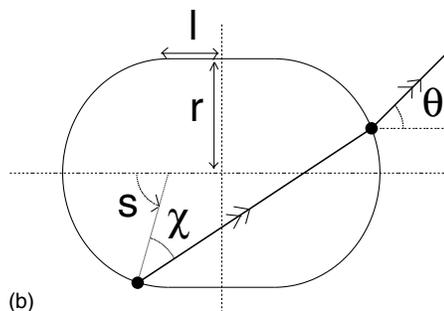
This paper is devoted to the investigation of the relation between the directional emission and the form ratio as a way to infer general behavior for such dynamical systems. First we present experimental results and show a good agreement with ray numerical simulations. Then we develop a simple ray model which permits to describe analytically the main observed features. All these results are finally confirmed by electromagnetic numerical calculations.

The microlaser cavities are etched in a thin layer of a passive polymer matrix (PMMA: *polymethylmethacrylate*), doped with a guest laser dye [DCM: *4-dicyanomethylene-2-methyl-6-(4-dimethylaminostyryl)-4H-pyran*]. Our versatile fabrication process ensures broad variations in size ($r=10\ \mu\text{m}$ to $50\ \mu\text{m}$), shape ($l/r=0$ to $l/r=5$), and thickness (between $0.4\ \mu\text{m}$ and $0.7\ \mu\text{m}$ to avoid vertical multi-

mode behavior) with quality factor Q greater than 6000 [12]. The microlasers are pumped uniformly from above at $532\ \text{nm}$ with a frequency doubled picosecond Nd:YAG laser and emit from their sides at $\lambda \approx 600\ \text{nm}$. Such 2D dielectric billiards present an effective refractive index n of 1.5 and are operating in the semiclassical regime (r/λ varying typically from 20 up to 100). The emitted light is collected in the far field and coupled to a multichannel detector via a spectrometer. A typical experimental spectrum is shown in Fig. 2 (b). The sample is fixed on a rotating mount and the intensity emitted in a given direction is obtained by summing over all pixels of the spectrum. Far-field spectra are generated over 360° by 5° steps with the aperture angle of about 15° .



(a)



(b)

FIG. 1. (a) Optical microscope image of a stadium-shaped microlaser with $l/r=1$ and $r=30\ \mu\text{m}$. (b) Notations. l is the half-length of the rectangle and r the radius of the half-circles. s is the curvilinear coordinate along the boundary, χ the incident angle, and θ the outgoing angle measured from the main axis of the stadium.

*Electronic address: lebental@lpqm.ens-cachan.fr

†Deceased.

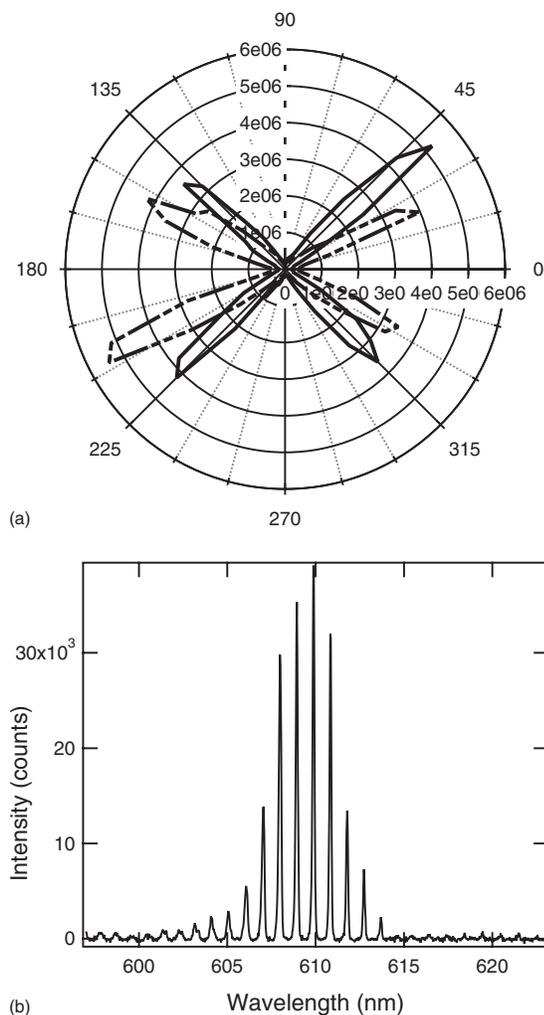


FIG. 2. (a) Experimental far-field emission in the plane of a 2D stadium-shaped microlaser as a function of the polar angle for $l/r = 0.5$ (solid line) and $l/r = 1$ (dashed line). (b) Experimental far-field spectrum for $l/r = 2$ and $r = 17.5 \mu\text{m}$.

The intensity of the laser emission versus the θ angle [see Fig. 1 (b) for notations] is displayed in Fig. 2 (a). The emission exhibits high directionality along four directions, symmetrical with respect to the 0° and 90° axis, according to the obvious symmetries of the stadium. The direction of maximal emission depends on the l/r form ratio. Experimental results are summarized in Fig. 3 for form ratios ranging from $l/r = 0.5$ to $l/r = 3$. They represent an optimum for reproducibility according to our 5° precision interval.

Even if stadium-shaped billiards are fully chaotic systems, these microlasers experimentally evidence a highly directional emission pattern in the far field. The direction of maximal emission depends on the l/r form ratio and a variation of more than 30° has been measured between $l/r = 0.5$ and $l/r = 3$ (Fig. 3) which can be of great interest for applications in integrated optics.

To account for these experimental results, we first perform the usual ray numerical simulations consisting of probing a large number of randomly defined rays ($\sim 10^7$) with starting points and initial directions uniformly distributed over the entire phase space. Each ray propagates along a straight line

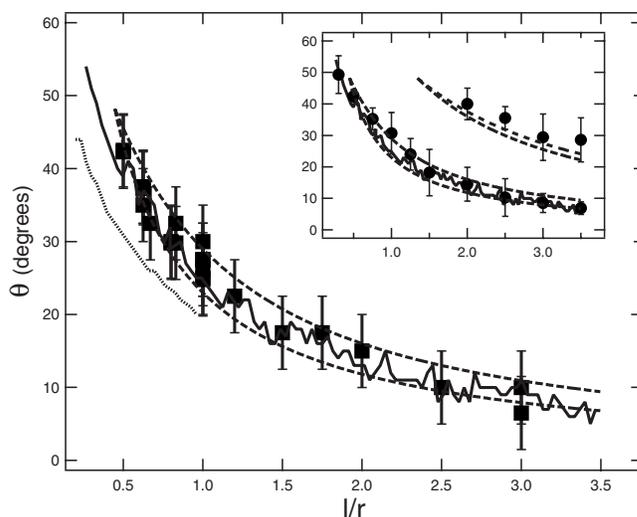


FIG. 3. Direction of maximal emission θ versus form ratio l/r . Squares represent experimental results. Solid line indicates dominant contribution of ray numerical simulations and the dotted line is the position of the largest satellite peak. Dashed lines are lens model predictions (2) with $m = 0$ (lower line) and $m = -1$ (upper line). *Inset*: Comparison of ray (solid line) and wave numerical simulations (circles). Dashed lines are lens model predictions (from bottom to top) $m = 0, -1, 1,$ and -2 .

and is totally reflected at the boundary until the incident angle χ becomes smaller than the critical angle, $\chi_c = \arcsin(1/n)$, thus allowing the ray to escape by refraction [16]. The stadium-shaped billiard is fully chaotic, so almost each ray escapes after propagating over a finite distance. Typical histograms of the outgoing angles are plotted in Fig. 4. To remove the background, only those rays which propagate over more than a finite threshold distance (twice

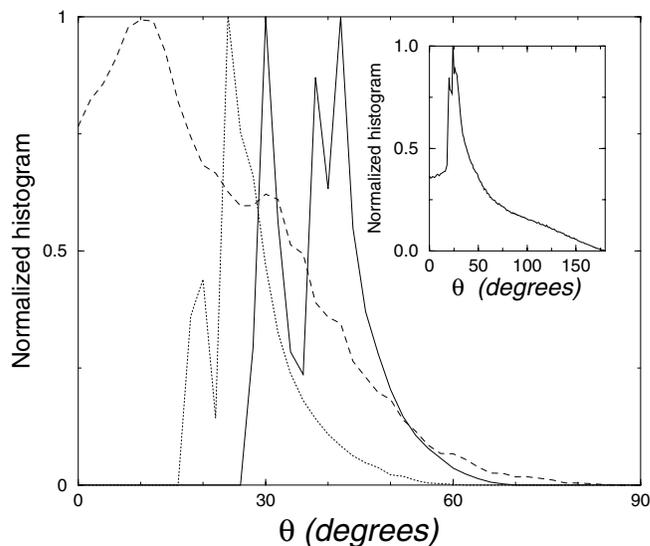


FIG. 4. Histograms of outgoing angles obtained by ray numerical simulations with threshold equal to twice the billiard perimeter for $l/r = 0.5$ (solid line), $l/r = 1$ (dotted line), and $l/r = 2.5$ (dashed line). Pictures normalized to unit maximum. *Inset*: The same for $l/r = 0.5$ but without cutoff.

the billiard perimeter in Fig. 4) are taken into account. Histograms are indented by peaks which reveal the structure of underlying unstable manifolds [10,14]. A histogram is calculated for each form ratio value and the position of its maximum is plotted versus l/r in Fig. 3 (solid lines). The plot is in excellent agreement with real experimental results as seen from Fig. 3.

For some l/r values ray simulations reveal the existence of a few peaks with comparable amplitudes (cf. Fig. 4). The dotted line branch in Fig. 3 indicates the most prominent satellite peak. Nevertheless dominant experiment contribution is assumed to correspond to the upper branch because its associated intensity (integral below the peak) is larger than the other one (cf. solid line curve in Fig. 4).

To explain the main features of experiments and ray simulations, we develop a simple model based on geometrical optics. To minimize refraction loss, rays propagating near the boundary are privileged. So we focus on rays which, after being totally reflected on the left half-circle, come to bounce on the right one (see Fig. 1). Long-lived trajectories can be characterized by their density on the Poincaré surface of section with coordinates s and $\sin \chi$. Our main assumption is that this density is uniform in the allowed part of phase space

$$P(s, \sin \chi) \sim \Theta\left(\frac{\pi}{2}r - |s|\right)\Theta(|\sin \chi| - 1/n), \quad (1)$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside step function.

Long-lived trajectories in open chaotic systems are concentrated near unstable manifolds of confined periodic orbits [6,14]. So the true density is a fractal whose correct determination requires the knowledge of a large number of periodic orbits. However, finite experimental resolution and quantum effects will smooth out small details, making our assumption (1) quite natural at first approximation. Below we show that it leads to simple analytical formulas in good agreement with direct ray simulations.

Let us consider point sources on the left half-circle emitting light according to Eq. (1). Among these, some rays escape by refraction on the right half-circle and one can deduce the histogram of outgoing angles. The dependence of the histogram maximum on l/r reproduces well experiments and ray simulations, validating the assumptions. As the resulting curves are closed to the lens model predictions (see below) we did not present them.

To further simplify this approach, we consider the right half-circle as an ideal lens. In this approximation all rays emitted from a point source are focused exactly as rays close to the line connecting the source and the center of the right half-circle (i.e., spherical aberrations are ignored). So the direction of emission θ corresponds mainly to this line and can be calculated analytically from purely geometrical considerations. It depends on the emission angle χ and on the number $|m|$ of rebounds on straight boundaries [$m > 0$ ($m < 0$) means first bounce on the upper (lower) straight boundary]:

$$\theta(\chi) = \left| \arcsin \frac{m}{\sqrt{m^2 + (l/r)^2}} + \arcsin \frac{\sin \chi}{2\sqrt{m^2 + (l/r)^2}} \right|.$$

This line exists provided $x_1 < \sin \chi < x_2$ where $x_1 = 1/n$ and $x_2 = 2l/\sqrt{4l^2 + (2m+1)^2 r^2}$. Formally the channel with given m

is open when $x_1 < x_2$ or $l/r > |2m+1|/2\sqrt{n^2-1}$ but it may exist for smaller l/r as well. For a given l/r , the mean emission angle, $\tilde{\theta}$, is deduced by averaging over the above interval

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \theta(\chi) d(\sin \chi). \quad (2)$$

Within the lens model the emission intensity is proportional to the angle with which the right half-circle is visible from a source point. Direct geometrical calculations show that the dominant contribution for $l/r < 3.5$ corresponds to the $m=0$ channel. The channel with $m=-1$ has smaller but comparable intensity. Considering experimental precision, other channels can be ignored but they are visible in ray simulations (cf. a small peak around 30° in the histogram for $l/r=2.5$ in Fig. 4). The directional emission predictions for channels with $m=0$ and $m=-1$ are indicated by dashed lines in Fig. 3. The excellent agreement between these curves, experiments, and direct ray simulations confirms that the assumption (1) is relevant to interpret analytically the emission of the stadium-shaped cavity in the geometrical optics regime.

For completeness we perform also numerical calculations in the wave domain. In the simplest approximation, the electromagnetic field is evolving in a passive cavity with a defined polarization. In this case, the electric field (TM polarization) or its magnetic counterpart (TE polarization) is represented by a scalar wave function ψ obeying the two-dimensional Helmholtz equation $[(\Delta + n_i^2 k^2) \psi = 0$ with refractive index $n_i = n$ inside and $n_e = 1$ outside the cavity] with specific boundary conditions (see, e.g. [13]). To find eigenvalues $\{k_m\}$ and eigenfunctions $\{\psi_m\}$ of quasistationary states we use the standard boundary element method [15]. In this approach the wave functions inside and outside the cavity $\psi_{i,e}$ are expressed in terms of single layer potentials $\mu_{i,e}$:

$$\psi_{i,e}(\vec{r}) = \oint ds \mu_{i,e}(s) H_0^{(1)}(kn_{i,e}|\vec{r} - \vec{r}_s|), \quad (3)$$

where s is the curvilinear coordinate along the boundary. Here $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind. The choice of this Hankel function outside the cavity is dictated by outgoing conditions to infinity

$$\psi_e(r, \theta) \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} f(\theta) \quad (4)$$

and inside the cavity by stability of the numerical algorithm.

Following natural filtering by the lasing effect, only modes with small losses are considered, i.e., modes with an imaginary part of the wave number close to zero. Most of the well-confined wave functions present a clear directional emission in the far-field pattern, even for low $|kr|$ [see Fig. 5 (b)]. Then it is possible to find positions of directional dominant peaks for each l/r and different eigenvalues which are plotted in Fig. 3 (inset). Each point at fixed l/r corresponds to the averaging of maximal emission angles over a representative set of well-confined eigenfunctions. The error bars correspond to the mean standard deviation. As was pre-

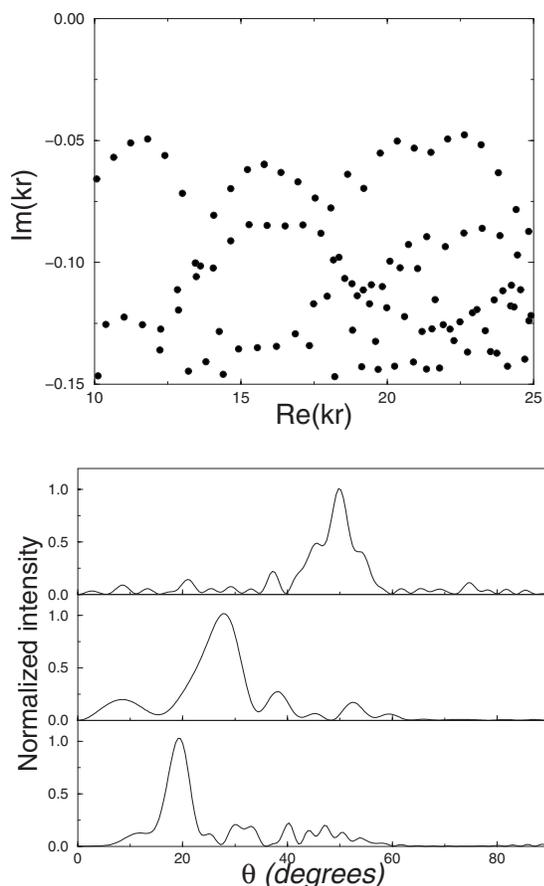


FIG. 5. (a) Imaginary part of quasistationary eigenvalues vs their real part. These eigenvalues correspond to solutions of the Helmholtz equation with TM boundary conditions for dielectric stadium with $l/r=2$ and refractive index $n=1.5$ antisymmetric with respect to both axes. (b) Far-field emission pattern of eigenfunctions: $|f(\theta)|^2$ in Eq. (4) normalized to unit maximum. From (a) to (b): $[l/r=0.3, \text{Re}(kr)=39.31]$; $[l/r=1, \text{Re}(kr)=13.88]$; $[l/r=2, \text{Re}(kr)=23.29]$.

dicted, dominant emission direction corresponds to $m=0$ and -1 channels of the lens model. Notice that channels with $m=1$ and -2 are also well visible.

So good agreement between geometrical and wave optics does not usually appear for closed chaotic systems. The

emission directions of these quantum dielectric billiards behave largely as if they were classical ones, governed by geometrical optics rules. However, there is no loss of coherence as in open systems generally studied in the field of decoherence [4]: Experimental spectra present clear peaks [see Fig. 2 (b)] and no noise is introduced to couple light with the outside of the cavity.

The lens model shows that it is mostly connected with the existence of only a small number of well defined open emission channels. Under higher precision calculations and experiments, each channel should split into many narrow peaks and quantum phenomena should be more important.

Such conclusions are, strictly speaking, applicable only for passive cavities. True lasing modes in active cavities correspond usually to a complex superposition of many cavity modes. Nevertheless in [10] it was demonstrated that within the Schrödinger-Bloch model dominant lasing modes for the stadium cavity with $l/r=6/7$ are mostly made up of low-loss passive cavity modes and each of these modes emit in approximately the same direction. Our lens model provides a simple geometrical explanation of this phenomenon. It is then quite natural to assume that the emission directions in active stadium cavities with different factor ratio are also close to predictions of passive cavities which explains the good agreement of experimental results in Fig. 3 with geometrical optics.

In summary, we have presented experimental results about directional emission of stadium-shaped microlasers of different aspects and demonstrate that their behavior is well accounted for by simple geometrical optics approaches. We develop a lens model which predicts analytically the main features of directional emission. Moreover, we point out that well-confined wave functions show good agreement with these classical predictions while coherent properties are not destroyed.

These types of predictions seem to be applicable to a more general class of chaotic dielectric billiards. Experiments and calculations are thus under progress to explore other microcavity shapes such as cut disks and cardioids.

The authors are grateful to R. Hierle, D. Wright, and S. Brasselet for experimental and technological support and to O. Bohigas and C.T. Nguyen for helpful discussions.

- [1] *Chaos and Quantum Physics*, Proceedings of the 1989 Les Houches Summer School, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1991); *New Directions in Quantum Chaos*, Proceedings of the 1999 Varenna Summer School, edited by G. Casati, I. Guarneri, and U. Smilansky (IOS Press, Italy, 2000).
- [2] J. Stein, H.-J. Stöckmann, and U. Stoffregen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 53 (1995); H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and C. Schmit, *Phys. Rev. E* **60**, 2851 (1999).
- [3] M. F. Andersen, A. Kaplan, and N. Davidson, *Phys. Rev. Lett.*

- 90**, 023001 (2003).
- [4] S. Habib, K. Shizume, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4361 (1998).
- [5] P. Cvitanovic and B. Eckhardt, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 823 (1989); K. Pance, W. Lu, and S. Sridhar, *ibid.* **85**, 2737 (2000).
- [6] J. P. Keating, M. Novaes, S. D. Prado, and M. Sieber, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150406 (2006); S. Nonnenmacher and M. Rubin, e-print n-lin/0608069.
- [7] X. Jiang, S. Feng, C. M. Soukoulis, J. D. Joannopoulos, and H. Cao, *Phys. Rev. B* **69**, 104202 (2004).

- [8] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Science* **280**, 1556 (1998); T. Harayama, P. Davis, and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 063901 (2003).
- [9] S.-B. Lee, J.-H. Lee, J.-S. Chang, H. J. Moon, S. W. Kim, and K. An, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 033903 (2002); S.-Y. Lee, S. Rim, J.-W. Ryu, T. Y. Kwon, M. Choi, and C.-M. Kim, *ibid.* **93**, 164102 (2004); J.-W. Ryu, S.-Y. Lee, C.-M. Kim, and Y.-J. Park, *Phys. Rev. A* **74**, 013804 (2006); W. Fang, G. S. Solomon, and H. Cao, e-print physics/0607233.
- [10] S. Shinohara, T. Harayama, H. E. Tureci, and A. D. Stone, *Phys. Rev. A* **74**, 033820 (2006).
- [11] L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [12] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle, and J. Zyss, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 031108 (2006).
- [13] *Proceedings of the International School of Quantum Electronics*, edited by F. Michelotti, A. Driessen, and M. Bertolotti, AIP Conf. Proc. No. 709 (AIP, Melville, NY, 2004).
- [14] H. G. L. Schwefel, N. B. Rex, H. E. Tureci, R. K. Chang, A. D. Stone, T. Ben-Messaoud, and J. Zyss, *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 923 (2004).
- [15] J. Wiersig, *Phys. Rev. A* **67**, 023807 (2003).
- [16] The final result remains essentially unchanged if a part of the ray, proportional to the squared modulus of the Fresnel reflection coefficient, is reflected into the cavity and keeps propagating.

Inferring periodic orbits from spectra of simply shaped microlasers

M. Lebental,^{1,2,*} N. Djellali,¹ C. Arnaud,¹ J.-S. Lauret,¹ J. Zyss,¹ R. Dubertrand,² C. Schmit,^{2,†} and E. Bogomolny²
¹CNRS, Ecole Normale Supérieure de Cachan, UMR 8537, Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire, 94235 Cachan, France

²CNRS, Université Paris Sud, UMR 8626, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, 91405 Orsay, France
 (Received 3 April 2007; published 31 August 2007)

Dielectric microcavities are widely used as laser resonators and characterizations of their spectra are of interest for various applications. We experimentally investigate microlasers of simple shapes (Fabry-Perot, square, pentagon, and disk). Their lasing spectra consist mainly of almost equidistant peaks and the distance between peaks reveals the length of a quantized periodic orbit. To measure this length with a good precision, it is necessary to take into account different sources of refractive index dispersion. Our experimental and numerical results agree with the superscar model describing the formation of long-lived states in polygonal cavities. The limitations of the two-dimensional approximation are briefly discussed in connection with microdisks.

DOI: [10.1103/PhysRevA.76.023830](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.023830)

PACS number(s): 42.55.Sa, 05.45.Mt, 03.65.Sq, 42.60.Da

I. INTRODUCTION

Two-dimensional microresonators and microlasers are being developed as building blocks for optical telecommunications [1,2]. Furthermore, they are of interest as sensors for chemical or biological applications [2–4] as well as billiard toy models for quantum chaos [5,6]. Towards fundamental and applied considerations, their spectrum is one of the main features. It was used, for instance, to experimentally recover some information about the refractive index [7] or geometrical parameters [8].

In this paper we focus on cavities much larger than the wavelength and propose to account for spectra in terms of periodic orbit families. Cavities of the simplest and most currently used shapes were investigated: the Fabry-Perot resonator, polygonal cavities such as square and pentagon, and circular cavities.

Our experiments are based on quasi-two-dimensional organic microlasers [9]. The relatively straightforward fabrication process ensures good quality and reproducibility as well as versatility in shapes and sizes (see Fig. 1). The experimental and theoretical approaches developed in this paper can be easily extended to more complicated boundary shapes. Moreover, this method is useful towards other kinds of microresonators, as it depends only on cavity shape and refractive index.

The paper is organized as follows. In Sec. II a description of the two-dimensional model is provided together with its advantages and limitations. In Sec. III microlasers in the form of a long stripe are investigated as Fabry-Perot resonators to test the method and evaluate its experimental precision. This protocol is then further applied to polygonal cavities. In Sec. IV the case of square cavities is discussed whereas in Sec. V dielectric pentagonal cavities are investigated. The theoretical predictions based on a superscar model are compared to experiments as well as numerical

simulations and a good agreement is found. Finally, in Sec. VI the case of several coexisting orbits is briefly dealt with on the example of circular cavities.

II. PRELIMINARIES

Dielectric microcavities are quasi-two-dimensional objects whose thickness is of the order of the wavelength but

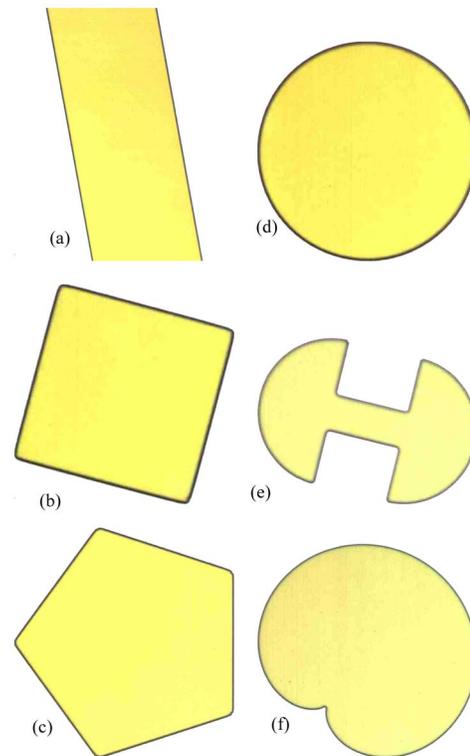


FIG. 1. (Color online) Optical microscope photographs of some organic microlasers: stripe (partial view, used as Fabry-Perot resonator), square, pentagon, disk, quasistadium, and cardioid. Typical dimension: 100 μm .

*Electronic address: lebental@lpqm.ens-cachan.fr

†Deceased.

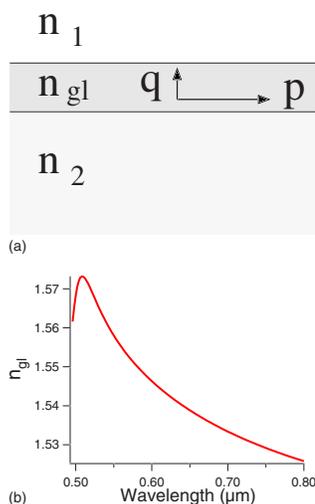


FIG. 2. (Color online) (a) Notations for refractive indexes and propagation wave numbers. From top to bottom, the layers of our samples [9] are the air ($n_1=1$), a polymer (PMMA) doped with a laser dye (DCM) ($n_{gl}=1.54$), and another polymer (SOG) ($n_2=1.42$) or silica ($n_2=1.45$). (b) Refractive index of the gain layer vs the wavelength inferred from ellipsometric measurements.

with much bigger plane dimensions (see Fig. 1). Although such cavities have been investigated for a long time both with and without lasing, their theoretical description is not quite satisfactory. In particular, the authors are not aware of true three-dimensional studies of high-excited electromagnetic fields even for passive cavities. Usually one uses a two-dimensional approximation but its validity is not under control.

Within such approximation fields inside the cavity and close to its two-dimensional boundary are treated differently. In the bulk, one considers electromagnetic fields as propagating inside an infinite dielectric slab (gain layer) with refractive index n_{gl} surrounded by medias with refractive indices n_1 and n_2 smaller than n_{gl} . In our experiments, the gain layer is made of a polymer (PMMA) doped with a laser dye (DCM) and sandwiched between the air and a polymer (SOG) layer [see Fig. 2(a) and [9]]. It is well known (see, e.g., [10] or [11]) that in such geometry there exist a finite number of propagating modes confined inside the slab by total internal reflection. The allowed values of transverse momentum inside the slab, q , are determined from the standard relation

$$e^{2ihq} r_1 r_2 = 1, \quad (1)$$

where h is the slab thickness and $r_{1,2}$ are the Fresnel reflection coefficients on the two horizontal interfaces. For total internal reflection

$$r_i = \exp(-2i\delta_i), \quad (2)$$

where

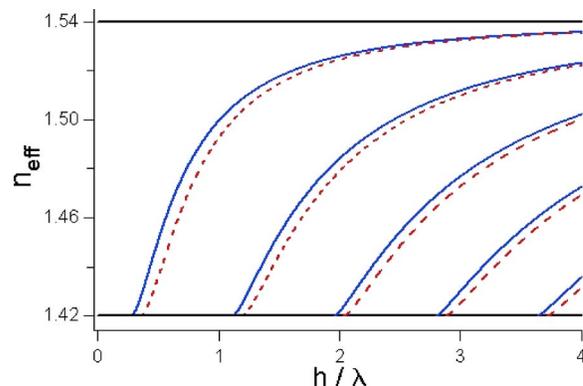


FIG. 3. (Color online) Effective refractive index vs the thickness over wavelength variable calculated from Eq. (4). The refractive indices are assumed to be constant: 1 for air, 1.42 for SOG, and 1.54 for the gain layer (horizontal black lines). The TE polarization is plotted with solid blue lines and TM polarization with dotted red lines. Integer l [see Eq. (4)] increases from left to right starting from $l=0$.

$$\delta_i = \arctan\left(\nu_i \frac{\sqrt{n_{gl}^2 \sin^2 \theta - n_i^2}}{n_{gl} \cos \theta}\right). \quad (3)$$

Here θ is the angle between the direction of wave propagation inside the slab and the normal to the interface. The ν_i parameter is 1 [respectively $(n_{gl}/n_i)^2$] when the magnetic field (respectively the electric field) is perpendicular to the slab plane. The first and second cases correspond respectively to TE and TM polarizations.

Denoting the longitudinal momentum, $p = n_{gl} k \sin \theta$, as $p = n_{eff} k$, the effective refractive index n_{eff} is determined from the following dispersion relation:

$$2\pi \frac{h}{\lambda} \sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2} = \arctan\left(\nu_1 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}}\right) + \arctan\left(\nu_2 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_2^2}}{\sqrt{n_{gl}^2 - n_{eff}^2}}\right) + l\pi, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

This equation has only a finite number of propagating solutions which can easily be obtained numerically. Figure 3 presents possible propagating modes for our experimental setting $n_1=1$ (air), $n_2=1.42$ (SOG) [12], and $n_{gl}=1.54$ deduced from ellipsometric measurements [see Fig. 2(b)] in the observation range.

The Maxwell equations for waves propagating inside the slab are thus reduced to the two-dimensional scalar Helmholtz equation:

$$(\Delta + n_{eff}^2 k^2) \Psi_{in}(x, y) = 0. \quad (5)$$

Ψ represents the field perpendicular to the slab, i.e., the electric field for TM and the magnetic field for TE polarization [13].

This equation adequately describes the wave propagation inside the cavity. But when one of these propagating modes hits the cavity boundary, it can partially escape from the

cavity and partially be reflected inside it. To describe correctly different components of electromagnetic fields near the boundary, the full solution of the three-dimensional vectorial Maxwell equations is required, which to the authors knowledge has not yet been addressed in this context. Even the much simpler case of scalar scattering by a half plane plate with a small but finite thickness is reduced only to numerical solution of the Wiener-Hopf-type equation [14].

To avoid these complications, one usually considers that the fields can be separated into TE and TM polarization and obey the scalar Helmholtz equations (5),

$$(\Delta + n_{in,out}^2 k^2) \Psi_{in,out}(x,y) = 0, \quad (6)$$

where n_{in} is the n_{eff} effective index inferred from Eq. (4) and n_{out} is the refractive index of the surrounding media, usually air so $n_{out}=1$. This system of two-dimensional equations is closed by imposing the following boundary conditions:

$$\Psi_{in}|_B = \Psi_{out}|_B, \quad \nu_{in} \frac{\partial \Psi_{in}}{\partial \vec{\tau}} \Big|_B = \nu_{out} \frac{\partial \Psi_{out}}{\partial \vec{\tau}} \Big|_B. \quad (7)$$

Here $\vec{\tau}$ indicates the direction normal to the boundary and ν depends on the polarization. When the electric (respectively magnetic) field is perpendicular to the cavity plane, called TM polarization (respectively TE polarization), $\nu_{in,out}=1$ (respectively $\nu_{in,out}=1/n_{in,out}^2$). Notice that these definitions of ν are not the same for horizontal and vertical interfaces.

We consider this standard two-dimensional approach keeping in mind that waves propagating close to the boundary (whispering gallery modes) may deviate significantly from two-dimensional predictions. In particular leakage through the third dimension could modify the lifetime estimation of quasistationary states.

Our polymer cavities are doped with a laser dye and uniformly pumped one by one from above [9], so that the pumping process induces no mode selection. The complete description of such lasing cavities requires the solution of the nonlinear Maxwell-Bloch equations (see, e.g., [15–17] and references therein). For clarity, we accept here a simplified point of view (see, e.g., [1], Sec. 24) according to which true lasing modes can be represented as a linear combination of the passive modes which may lase (i.e., for which gain exceeds losses),

$$\Psi_{lasing} = \sum_m C_m \Psi_m. \quad (8)$$

From physical considerations, it is natural to consider the Ψ_m modes as the quasistationary states of the passive cavity. Though this choice leads to well-known difficulties (see, e.g., [1]) it is widely noticed and accepted at least for modes with small losses (cf. [16–18]).

For each individual lasing mode, the C_m coefficients could be determined only after the solution of the full Maxwell-Bloch equations. But due to the statistical nature of fluorescence the lasing effect starts randomly and independently during each pump pulse. So it is quite natural to average over many pump pulses. Then the mean spectrum exhibits peaks at frequencies of all possible lasing modes. The experimental

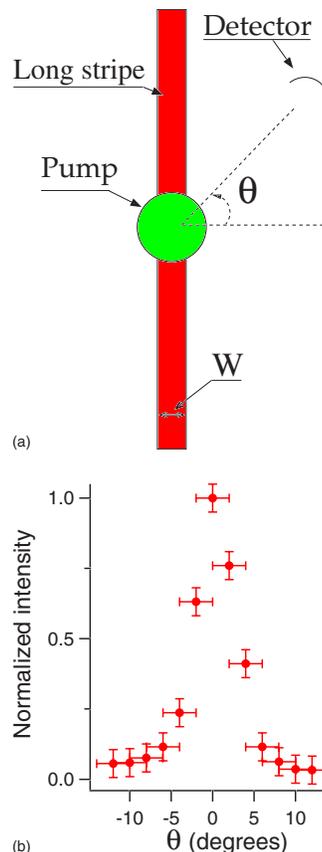


FIG. 4. (Color online) (a) Diagram summarizing the main features of the Fabry-Perot experiment. (b) Detected intensity vs θ angle for a Fabry-Perot experiment.

data studied in this paper are recorded after integration over 30 pump pulses and agree with this simple statistical model. More refined verifications are in progress.

III. FABRY-PEROT RESONATOR

The Fabry-Perot configuration is useful for the calibration control of further spectral experiments due to the nonambiguous single periodic orbit family which sustains the laser effect.

A long stripe can be considered to a good approximation as a Fabry-Perot resonator. In fact, the pumping area is very small compared to the length [see Fig. 4(a)] and the material is slightly absorbing, so that reflections at far extremities can be neglected. Moreover, the pumping area is larger than the width of the stripe, thus the gain is uniformly distributed over the section. For a Fabry-Perot cavity, the emission is expected along both $\theta=0$ and $\theta=\pi$ directions [see Fig. 4(a) for notations]. Figure 4(b) shows that this directional emission is observed experimentally which confirms the validity of our setup.

The experimental spectrum averaged over 30 pump pulses is made up of almost regularly spaced peaks [see Fig. 5(a)] which is typically expected for a Fabry-Perot resonator. In fact, due to coherent effects, the k wave numbers of quasi-bound states of a passive Fabry-Perot cavity are determined

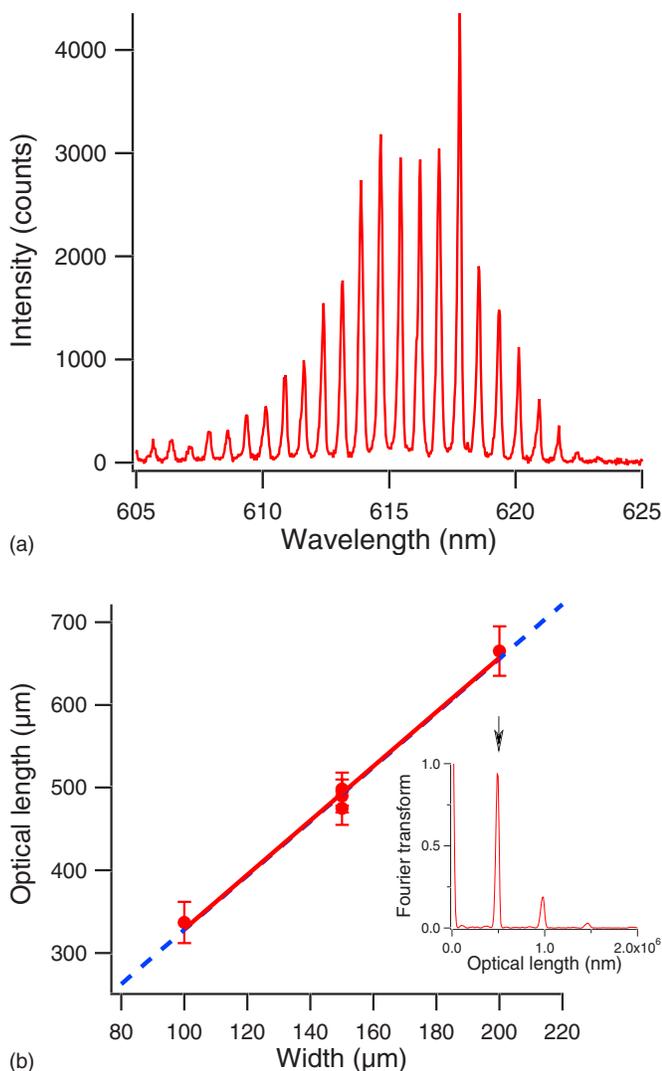


FIG. 5. (Color online) (a) Experimental spectrum of a Fabry-Perot resonator with $W=150 \mu\text{m}$. (b) Optical length vs Fabry-Perot width W . The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The dashed blue line corresponds to the theoretical prediction without any adjusted parameter. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs wave number.

from the quantization condition along the only periodic orbit of $L=2W$ length as for Eq. (1):

$$r^2 e^{iLk n_{eff}(k)} = 1, \quad (9)$$

where r is the Fresnel reflection coefficient and n_{eff} is the effective refractive index (4). The solutions of this equation are complex numbers: the imaginary part corresponds to the width of the resonance and the real part (called k_m afterwards) gives the position of a peak in the spectrum and verifies

$$Lk_m n_{eff}(k_m) = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

With $\delta k_m = k_{m+1} - k_m$ assumed to be small, the distance between adjacent peaks is constrained by

$$\delta k_m \left(n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m) \right) L = 2\pi. \quad (11)$$

We call

$$n_{full} = n_{eff}(k_m) + k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m) \quad (12)$$

the full effective refractive index. It is a sum over two terms: one corresponding to the phase velocity, $n_{eff}(k_m)$, and the other one to the group velocity, $k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m)$. If n_{full} is considered as a constant over the observation range, which is true with a good accuracy, δk can be retrieved from the experimental spectrum. For instance, the Fourier transform of the spectrum (intensity vs k) is made up of regularly spaced peaks [Fig. 5(b) inset], with the first one (indicated with an arrow) centered at the optical length ($L n_{full}$) and the others at its harmonics. So the geometrical length of the periodic orbit can be experimentally inferred from the knowledge of n_{full} which is independently determined as described below. For the Fabry-Perot resonator, the geometrical length is known to be $2W$, thus allowing us to check the experimental precision. The relative statistical errors on the W width is estimated to be less than 3%. The error bars in Fig. 5(b) are related to the first peak width of the Fourier transform and are less than 5% of the optical length.

The full effective refractive index n_{full} is independently inferred from ellipsometric measurement [Fig. 2(b)] and standard effective index derivation described in the previous section. Depending on the parameter h/λ (thickness over wavelength), one or several modes are allowed to propagate. Our samples are designed such as only one TE and TM modes exist with n_{eff} effective refractive index according to Eq. (4).

In Fig. 3 the refractive index of the gain layer, n_{gl} , is assumed to be constant: $n_{gl}=1.54$ in the middle of the experimental window, λ varying from 0.58 to $0.65 \mu\text{m}$. From Eq. (4) a $n_{eff}=1.50$ is obtained in the observation range with a $h=0.6\text{-}\mu\text{m}$ thickness, and corresponds to the phase velocity term. The group velocity term $k_m \frac{\partial n_{eff}}{\partial k}(k_m)$ is made up of two dispersion contributions: one from the effective index (about 4%) and the other from the gain medium (about 7%). The dependance of n_{gl} with the wavelength is determined with the GES 5 SOPRA ellipsometer from a regression with the WINELLI II software (correlation coefficient: 0.9988) and plotted in Fig. 2(b). Taking into account all contributions (that means calculating the effective refractive index with a dispersed n_{gl}), the n_{full} full effective refractive index is evaluated to be 1.645 ± 0.008 in the observation range. So the group velocity term made up of the two types of refractive index dispersion contribute for 10% to the full effective index, which is significant compared to our experimental precision. The n_{full} index depends only smoothly on polarization (TE or TM), and on the h thickness, which is measured with a surface profilometer Veeco (Dektak³ST). Thus the samples are designed with thickness $0.6 \mu\text{m}$ and the precision is reported on the full effective index which is assumed to be 1.64 with a relative precision of about 1% throughout this work.

Considering all of these parameters, we obtain a satisfactory agreement between measured and calculated optical lengths, which further improves when taking into account several Fabry-Perot cavities with different widths as shown on Fig. 5(b). The excellent reproducibility (time to time and sample to sample) is an additional confirmation of accuracy and validity. With these Fabry-Perot resonators, we have demonstrated a spectral method to recover the geometrical length of a periodic orbit which can now be confidently applied to different shapes of microcavities.

IV. SQUARE MICROCAVITY

In the context of this paper square-shaped microcavities present a double advantage. First, they are increasingly used in optical telecommunications [2,19]. Second, the precision and validity of the parameters used above can be tested independently since there is only one totally confined periodic orbit family. In fact the refractive index is quite low (about 1.5), so the diamond [see Fig. 6(b), top inset] is the only short-period orbit without refraction loss [i.e., all reflection angles at the boundary are larger than the critical angle $\chi_c = \arcsin(1/n) \approx 42^\circ$].

In a square-shaped cavity light escapes mainly at the corners due to diffraction. Thus the quality design of corners is critical for the directionality of emission but not for the spectrum. Indeed for a reasonably well designed squared microcavity (see Fig. 1), no displacement of the spectrum peaks is detectable by changing the θ observation angle. The spectra used in this paper are thus recorded in the direction of maximal intensity.

Figure 6(a) presents a typical spectrum of a square-shaped microcavity. The peaks are narrower than in the Fabry-Perot resonator spectrum, indicating a better confinement, as well as regularly spaced, revealing a single periodic orbit. Data processing is performed exactly as presented in the previous section: for each cavity the Fourier transform of the spectrum is calculated [Fig. 6(b), bottom inset] and the position of its first peak is located at the optical length. Figure 6(b) summarizes the results for about 20 different microsquares, namely the optical length inferred from the Fourier transform vs the a square side width. These experimental results are fitted by the solid red line. The dotted blue line corresponds to an *a priori* slope given by n_{full} (1.64) times the geometrical length of the diamond periodic orbit ($L=2\sqrt{2}a$). The excellent agreement confirms that the diamond periodic orbit family provides a dominant contribution to the quantization of dielectric square resonator.

This result is far from obvious as square dielectric cavities are not integrable. At first glance the observed dominance of one short-period orbit can be understood from general considerations based on trace formulas which are a standard tool in semiclassical quantization of closed multidimensional systems (see, e.g., [20,21] and references therein). In general, trace formulas express the density of states (and other quantities as well) as a sum over classical periodic orbits. For two-dimensional closed cavities

$$d(k) \equiv \sum_n \delta(k - k_n) \approx \sum_p c_p e^{ikL_p - i\mu_p} + \text{c.c.}, \quad (13)$$

where k is the wave number and k_n are the eigenvalues of a closed cavity. The summation on the right part is performed

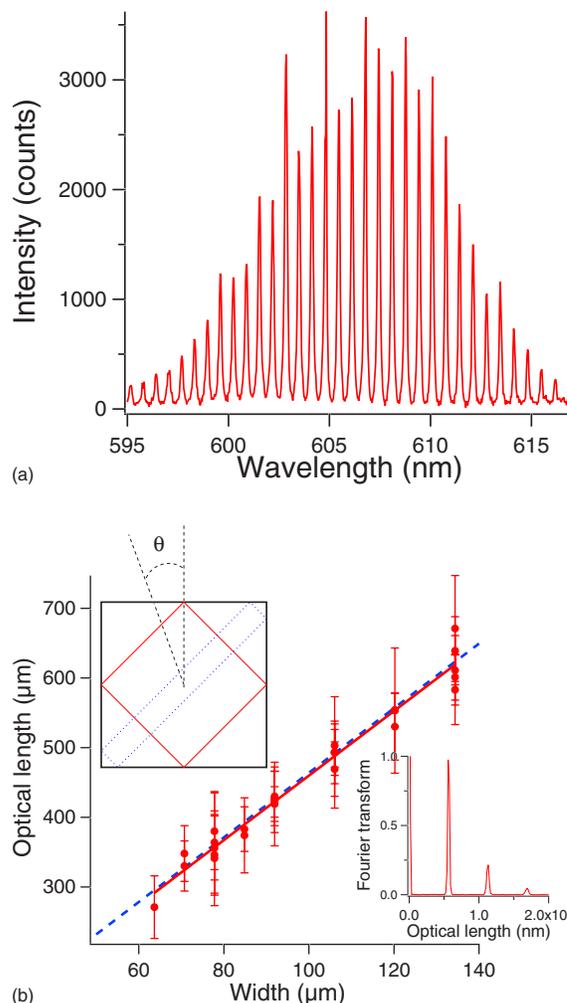


FIG. 6. (Color online) (a) Experimental spectrum of a square-shaped microlaser of 135- μm side width. (b) Optical length vs a square side width. The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The dashed blue line corresponds to the theoretical prediction (diamond periodic orbit) without any adjusted parameter. Top inset: Two representations of the diamond periodic orbit. Bottom inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs wave number.

over all periodic orbits labeled by p . L_p is the length of the p periodic orbit, μ_p is a certain phase accumulated from reflection on boundaries and caustics, and amplitude c_p can be computed from classical mechanics. In general, for integrable and pseudointegrable systems (e.g., polygonal billiards) classical periodic orbits form continuous periodic orbit families and in two dimensions

$$c_p \sim \frac{A_p}{\sqrt{L_p}}, \quad (14)$$

where A_p is the geometrical area covered by a periodic orbit family (see the example of circular cavities in Sec. VI).

Nonclassical contributions from diffractive orbits and different types of creeping waves (in particular, lateral waves [21]) are individually smaller by a certain power of $1/k$ and

are negligible in the semiclassical limit $k \rightarrow \infty$ compared to periodic orbits.

There exist no true bound states for open systems. One can only compute the spectrum of complex eigenfrequencies of quasistationary states. The real parts of such eigenvalues give the positions of resonances and their imaginary parts measure the losses due to the leakage from the cavity.

For such systems it is quite natural to assume that the density of quasistationary states

$$d(k) \equiv \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\text{Im}(k_n)}{[k - \text{Re}(k_n)]^2 + \text{Im}(k_n)^2} \quad (15)$$

can be written in a form similar to Eq. (13) but the contribution of each periodic orbit has to be multiplied by the product of all reflection coefficients along this orbit (as it was done in a slightly different problem in [21]),

$$d(k) \approx \sum_p c_p \left[\prod_{j=1}^{N_p} r_p^{(j)} \right] e^{ikL_p - i\mu_p} + \text{c.c.} \quad (16)$$

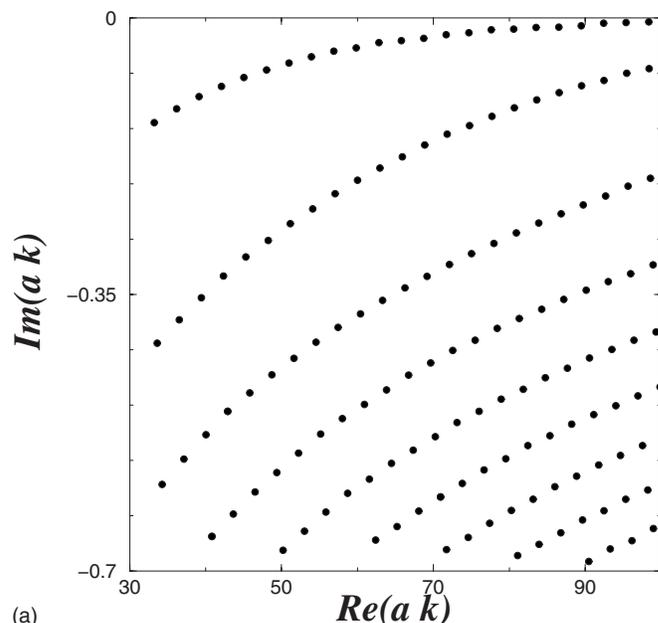
Here N_p is the number of reflections at the boundary and $r_p^{(j)}$ is the value of reflection coefficient corresponding to the j th reflection for the p periodic orbit.

When the incident angle is larger than the critical angle the modulus of the reflection coefficient equals 1 [see Eq. (2)], but if a periodic orbit hits a piece of boundary with an angle smaller than the critical angle, then $|r_p| < 1$ thus reducing the contribution of this orbit. Therefore the dominant contribution to the trace formula for open dielectric cavities is given by short-period orbits ($c_p \propto 1/\sqrt{L_p}$) which are confined by total internal reflection. For a square cavity with $n=1.5$ the diamond orbit is the only confined short-period orbit which explains our experimental observation of its dominance.

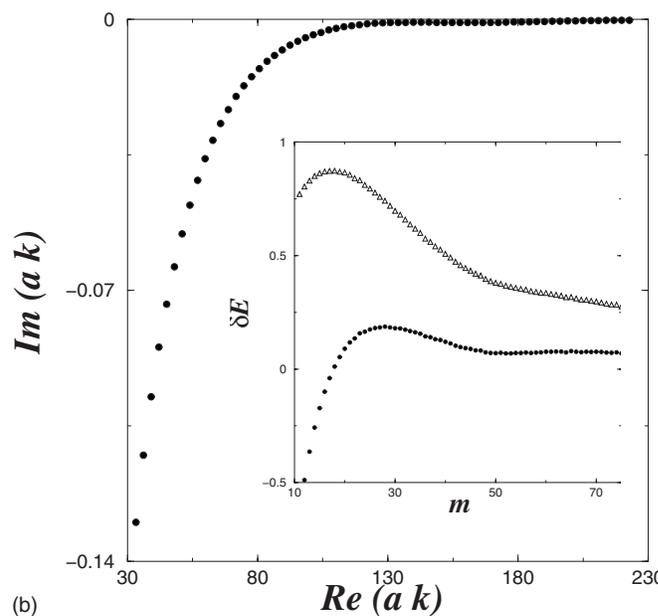
Nevertheless, this reasoning is incomplete because the summation of contributions of one periodic orbit and its repetitions in polygonal cavities does not produce a complex pole which is the characteristic of quasistationary states.

In order to better understand the situation, we have performed numerical simulations for passive square cavities in a two-dimensional approximation with TM polarization (see Sec. II and [22]). Due to symmetries, the quasistationary eigenstates can be classified according to different parities with respect to the square diagonals. In Fig. 7(a), the imaginary parts of wave numbers are plotted vs their real part for states antisymmetric according to the diagonals (that means obeying the Dirichlet boundary conditions along the diagonals) and called here (- -) states.

These quasistationary states are clearly organized in families. This effect is more pronounced when wave functions corresponding to each family are calculated. For instance, wave functions for the three lowest families with (- -) symmetry are presented in the top of Fig. 8. The other members of these families have similar patterns. The existence of such families was first noted in [23] for hexagonal dielectric cavities, then further detailed in [22].



(a)



(b)

FIG. 7. (a) Imaginary parts vs real parts of the wave numbers of quasistationary states with (- -) symmetry for a dielectric square resonator with $n_{eff}=1.5$ surrounded by air with $n=1$. (b) The same as in (a) but for the states with the smallest modulus of the imaginary part (the most confined states). Inset. Empty triangles: the difference (20) between the real part of these wave numbers and the asymptotic expression. Filled circles: the same but when the correction term (21) is taken into account.

One can argue that the origin of such families is analogous to the formation of superscar states in pseudointegrable billiards discussed in [24] and observed experimentally in microwave experiments in [25]. In general, periodic orbits of polygonal cavities form continuous families which can be considered as propagating inside straight channels obtained by unfolding classical motion. These channels (hatched area Fig. 9) are restricted by straight lines passing through cavity

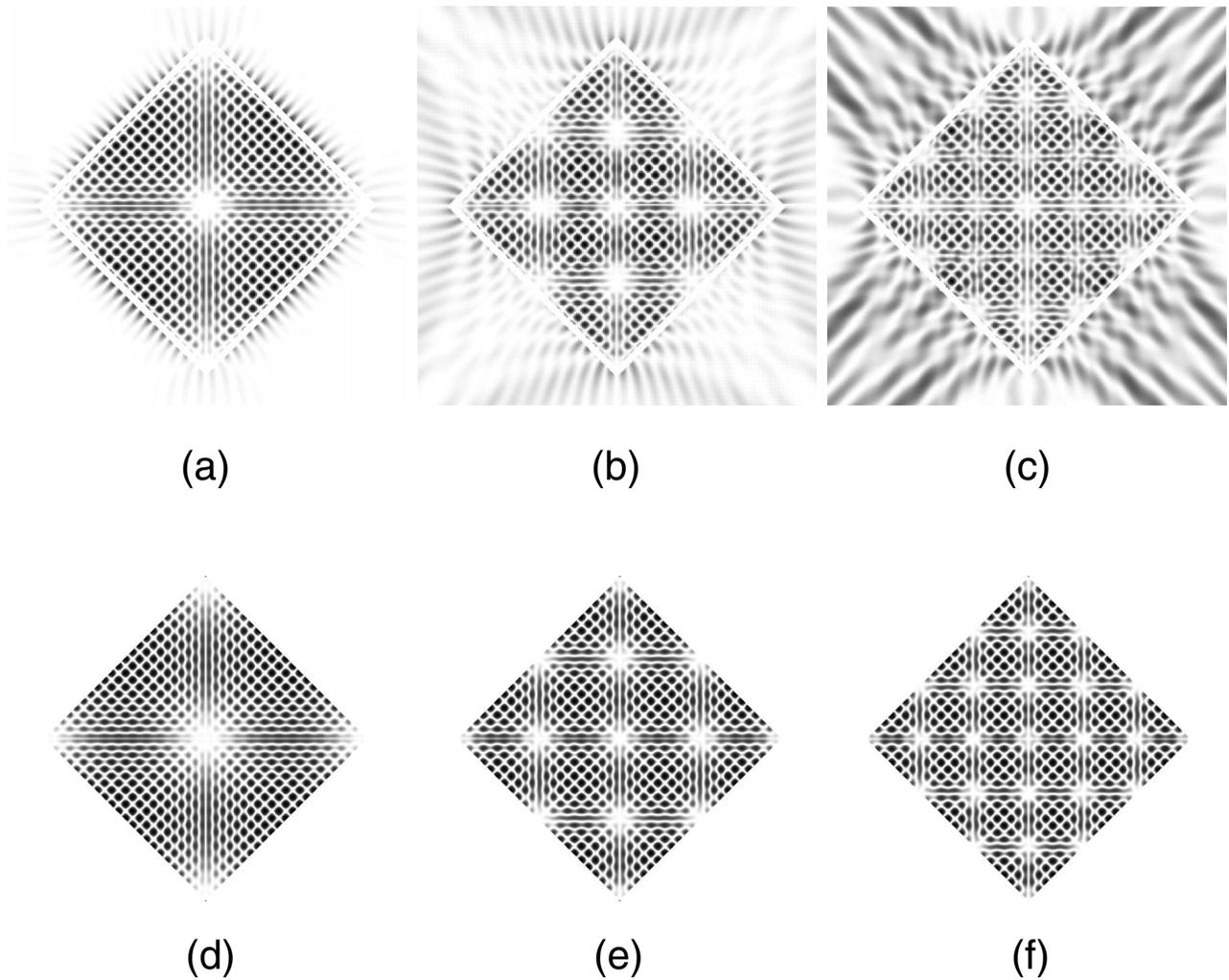


FIG. 8. (Top) Squared modulus of wave functions with $-$ symmetry calculated with numerical simulations. (a) $ak=68.74-0.026i$, (b) $ak=68.84-0.16i$, (c) $ak=69.18-0.33i$. (Bottom) Squared modulus of wave functions calculated with the superscar model (—) and corresponding to the parameters of the top pictures.

corners. In [24] it was demonstrated that strong quantum-mechanical diffraction on these singular corners forces wave functions in the semiclassical limit to obey simple boundary conditions on these (fictitious) channel boundaries. More precisely it was shown that for billiard problems Ψ on these boundaries take values of the order of $\mathcal{O}(1/\sqrt{k}) \rightarrow 0$ when

$k \rightarrow \infty$. This result was obtained by using the exact solution for the scattering on periodic array of half planes. No such results are known for dielectric problems. Nevertheless, it seems natural from semiclassical considerations that a similar phenomenon should appear for dielectric polygonal cavities as well.

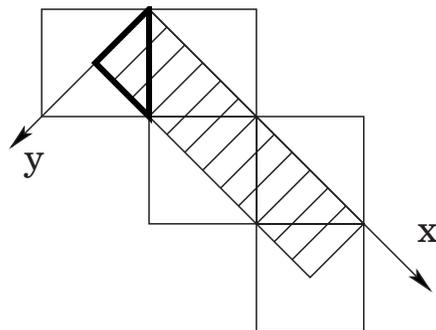


FIG. 9. Unfolding of the diamond periodic orbit. Thick lines indicate the initial triangle.

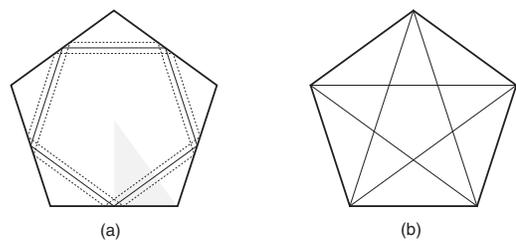


FIG. 10. (a) Wave numbers for a pentagonal cavity. a is the side length of the cavity. The three most confined families are indicated by solid, dashed, and long-dashed lines. (b) The difference (28) between the real part of quasienergies and superscar expression (25) for the three indicated families in (a).

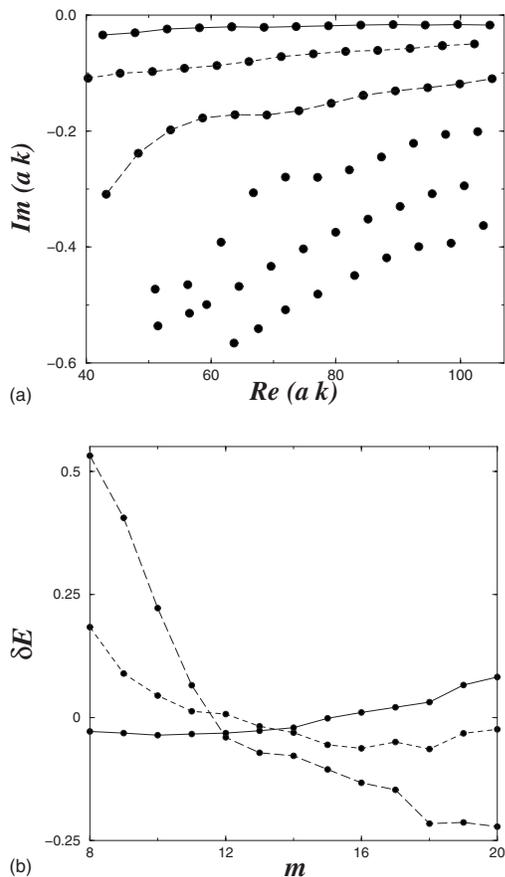


FIG. 11. (a) Wave numbers for a pentagonal cavity. a is the side length of the cavity. The three most confined families are indicated by solid, dashed, and long-dashed lines. (b) The difference between the real part of quasi-energies and superscar expression for the three indicated families in (a).

Within such framework, a superscar state can be constructed explicitly as follows. After unfolding (see Fig. 9), a periodic orbit channel has the form of a rectangle. Its length equals the periodic orbit length and its width is determined by the positions of the closest singular corners. The unfolded superscar state corresponds to a simple plane wave propagating inside the rectangle taking into account all phase changes. It cancels at the fictitious boundaries parallel to the x direction and is periodic along this direction with a periodicity imposed by the chosen symmetry class. This procedure sets the wave number of the state and the true wave function is obtained by folding back this superscar state.

Superscar wave functions with $(- -)$ symmetry associated with the diamond orbit (see Fig. 9) are expressed as follows:

$$\Psi_{m,p}^{(- -)}(x,y) = \sin(\kappa_m^{(-)} x) \sin\left(\frac{2\pi}{l} p y\right) + \sin(\kappa_m^{(-)} x' - 2\delta) \sin\left(\frac{2\pi}{l} p y'\right), \quad (17)$$

where x' and y' are coordinates symmetric with respect to the square side. In coordinates as in Fig. 9,

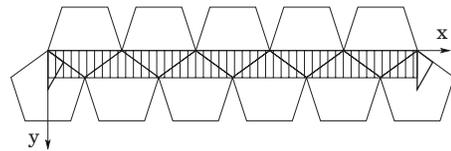


FIG. 12. Unfolding of the five-star periodic orbit for a pentagonal cavity. Thick lines indicate the initial triangle.

$$x' = y, \quad y' = x.$$

In Eq. (17) m and p are integers with $p=1,2,\dots$, and $m \gg 1$. $l = \sqrt{2}a$ is half of the diamond periodic orbit length [26], δ is the phase of the reflection coefficient defined by $r = \exp(-2i\delta)$. For simplicity, we ignore slight changes of the reflection coefficient for different plane waves in the functions above. So δ is given by Eq. (3) with $\nu=1$ for TM polarization and $\theta = \pi/4$, and $\kappa_m^{(-)}$ is the momentum defined by

$$\kappa_m^{(-)} l - 4\delta = 2\pi m. \quad (18)$$

This construction conducts to the following expression for the real part of the wave numbers [27]:

$$\begin{aligned} n_{eff} l \operatorname{Re}(k_{m,p}) &= 2\pi \sqrt{\left(m + \frac{2}{\pi} \delta\right)^2 + p^2} \\ &= 2\pi \left(m + \frac{2}{\pi} \delta\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

To check the accuracy of the above formulas we plot in the bottom of Fig. 8 scar wave functions (17) with the same parameters as those in the top of Fig. 8. The latter were computed numerically by direct solving the Helmholtz equations (6) but the former looks very similar which supports the validity of the superscar model.

The real part of the wave numbers is tested too. In Fig. 7(b) the lowest loss states (with the smallest modulus of the imaginary part) with $(- -)$ symmetry are presented over a larger interval than in Fig. 7(a). The real parts of these states are compared to superscar predictions (19) with $p=1$, leading to a good agreement. To detect small deviations from the theoretical formula, we plot in the inset of Fig. 7(b) the difference between a quantity inferred from numerical simulations and its superscar prediction from Eq. (19),

$$\delta E = \left(\frac{nl}{2\pi} \operatorname{Re} k\right)^2 - \left[\left(m + \frac{2}{\pi} \delta\right)^2 + p^2\right]. \quad (20)$$

From this curve it follows that this difference tends to zero with m increasing, thus confirming the existence of the term proportional to p^2 . By fitting this difference with the simplest expression

$$\delta E = \frac{c}{m} \quad (21)$$

we find that $c \approx -6.9$. By subtracting this correction term from the difference (20), one gets the curve indicated with filled circles in the inset of Fig. 7(b). The result is one order of magnitude smaller than the difference itself.

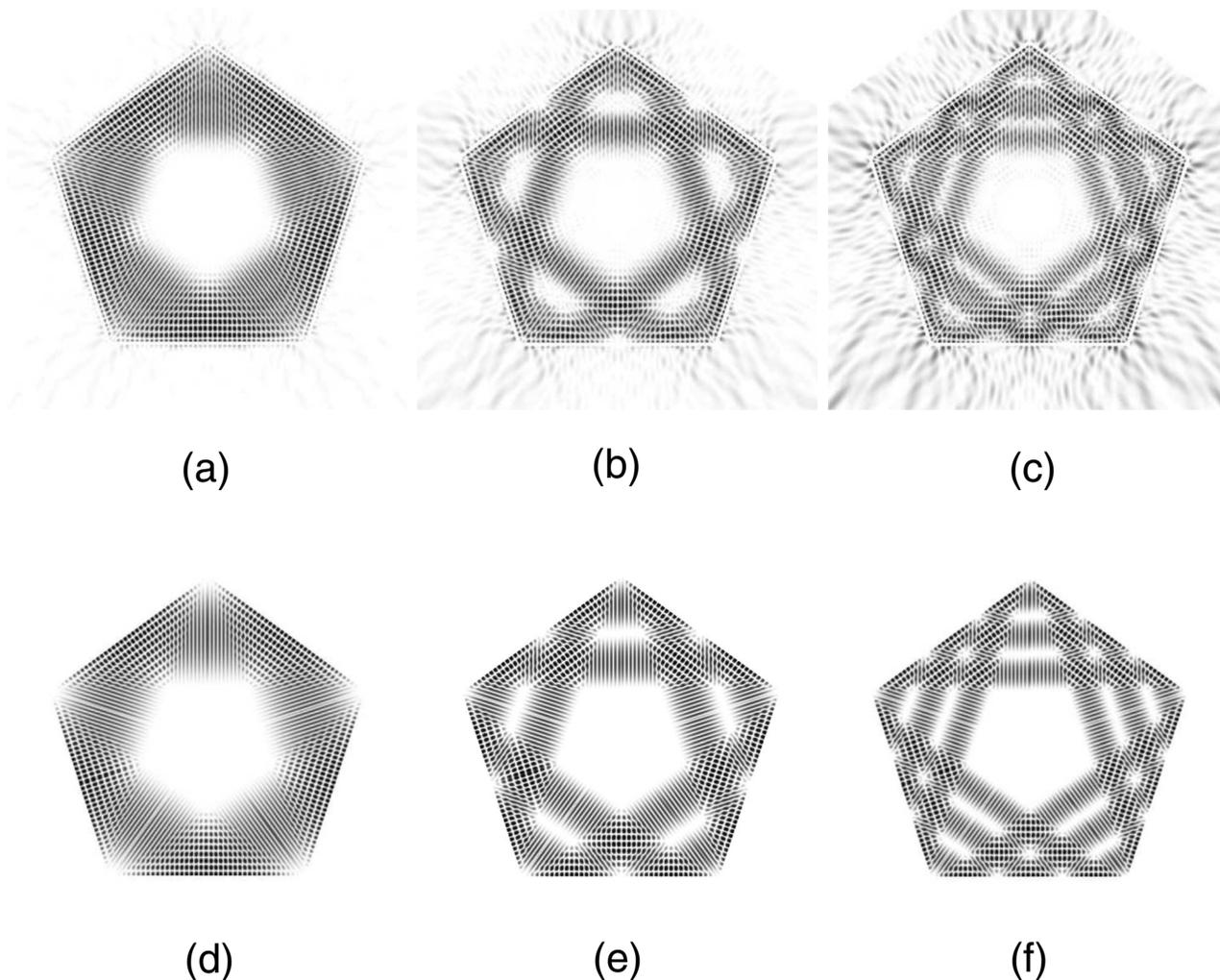


FIG. 13. (Top) Squared modulus of wave functions for pentagonal cavity with $(- -)$ symmetry calculated with numerical simulations. (a) $ak=104.7-0.017i$, (b) $ak=102.2-0.05i$, (c) $ak=105.0-0.12i$. (Bottom) Squared modulus of wave functions calculated within the superscar model and corresponding to the parameters of the top pictures.

All these calculations confirm that the real parts of resonance wave numbers for square dielectric cavities are well reproduced in the semiclassical limit by the above superscar formula (19) and our experimental results can be considered as an implicit experimental confirmation of this statement.

V. PENTAGONAL MICROCAVITY

The trace formula and superscar model arguments can be generalized to all polygonal cavities. The pentagonal resonator provides a new interesting test. In fact, due to the odd number of sides, the inscribed pentagonal orbit [indicated by solid line in Fig. 10(a)] is isolated. The shortest confined periodic orbit family is twice longer. It is represented with a dashed line in Fig. 10(a) and can be mapped onto the five-pointed star orbit drawn in Fig. 10(b) by continuous deformation. In this section we compare the predictions of the superscar model for this periodic orbit family with numerical simulations and experiments.

Due to the C_{5v} symmetry, pentagonal cavities sustain ten

symmetry classes corresponding to the rotations by $2\pi/5$ and the inversion with respect to one of the symmetry axis. We have studied numerically one symmetry class in which wave functions obey the Dirichlet boundary conditions along two sides of a right triangle with angle $\pi/5$ [see Fig. 10(a) in gray]. The results of these computations are presented in Fig. 11.

As for the square cavity, lowest loss states are organized in families. The wave functions of the three lowest loss families are plotted in the top of Fig. 13 and their superscar structure is obvious.

The computation of pure superscar states can be performed as in the previous section. The five-pointed star periodic orbit channel is shown in Fig. 12. In this case boundary conditions along horizontal boundaries of periodic orbit channel are not known. By analogy with superscar formation in polygonal billiards [24], we impose that wave functions tend to zero along these boundaries when $k \rightarrow \infty$.

Therefore a superscar wave function propagating inside this channel takes the form

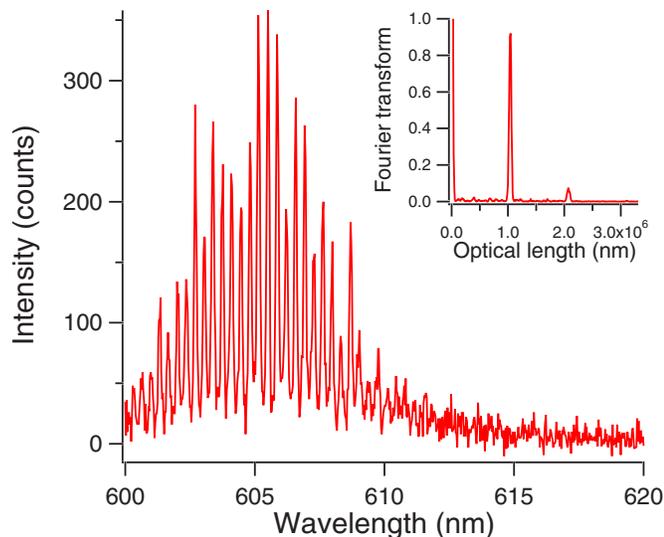


FIG. 14. (Color online) Experimental spectrum of a pentagonal microlaser of 80- μm side length. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum expressed as intensity vs wave number.

$$\Psi_{\text{scar}}(x,y) = \exp(i\kappa x) \sin\left(\frac{\pi}{w}py\right) \Theta(y) \Theta(w-y), \quad (22)$$

where w is the width of the channel [for the five-pointed star orbit $w = a \sin(\pi/5)$ where a is the length of the pentagon side]. $\Theta(x)$ is the Heavyside function introduced here to stress that superscar functions are zero (or small) outside the periodic orbit channel.

The quantized values of the longitudinal momentum κ are obtained by imposing that the function (22) is periodic along the channel when all phases due to the reflection with the cavity boundaries are taken into account

$$\kappa L = 2\pi \left(M + \frac{10}{\pi} \delta \right). \quad (23)$$

Here M is an integer and L is the total periodic orbit length. For the five-pointed star orbit (see Fig. 10)

$$L = 10a \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad (24)$$

and δ is the phase of the reflection coefficient given by Eq. (3) with $\nu=1$ (for TM polarization) and $\theta=3\pi/10$. For these states the real part of the wave number is the following:

$$nL \text{Re } k = 2\pi \left(M + \frac{10}{\pi} \delta \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right). \quad (25)$$

Wave functions inside the cavity are obtained by folding back the scar function (22) and choosing the correct representation of the chosen symmetry class. When Dirichlet boundary conditions are imposed along two sides of a right triangle passing through the center of the pentagon (see Fig. 12) $M=5(2m)$ if p is odd and $M=5(2m-1)$ if p is even. Then, the wave function inside the triangle is the sum of two terms,

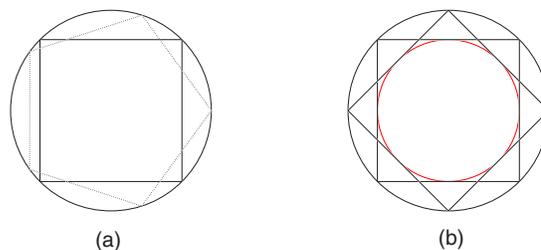


FIG. 15. (Color online) (a) Two examples of periodic orbits: the square and the pentagon. (b) Two representations of the square periodic orbit and the caustic of this family in red (inner circle).

$$\begin{aligned} \Psi_{m,p}(x,y) = & \sin(\kappa_m x) \sin\left(\frac{\pi}{w}py\right) \Theta(y) \Theta(w-y) \\ & + \sin(\kappa_m x - 2\delta) \sin\left(\frac{\pi}{w}py'\right) \Theta(y') \Theta(w-y'), \end{aligned} \quad (26)$$

where the longitudinal momentum is

$$\kappa_m \frac{L}{10} = 2\pi \left(m + \frac{1}{\pi} \delta - \xi \right) \quad (27)$$

with $\xi=0$ for odd p and $\xi=1/2$ for even p . x' and y' in Eq. (26) are coordinates of the point symmetric of (x,y) with respect to the inversion on the edge of the pentagon. In the coordinate system when the pentagon edge passes through the origin (as in Fig. 12)

$$x' = x \cos 2\phi + y \sin 2\phi, \quad y' = x \sin 2\phi - y \cos 2\phi,$$

and $\phi=\pi/5$ is the inclination angle of the pentagon side with respect to the abscissa axis. Wave functions obtained with this construction are presented in the bottom of Fig. 13. They correspond to the first, second, and third perpendicular excitations of the five-star periodic orbit family ($p=1, 2$, and 3).

To check the agreement between numerically computed real parts of the wave numbers and the superscar prediction (25) and (27), we plot in Fig. 11(b) the following difference:

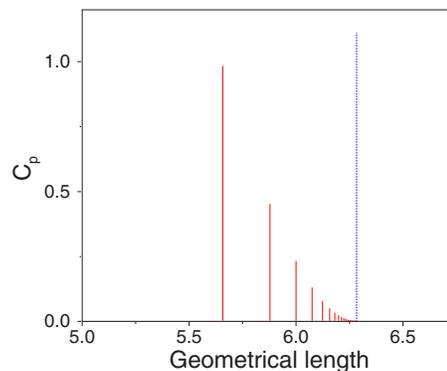


FIG. 16. (Color online) Vertical red sticks: c_p coefficient for polygons confine by total internal reflection (square, pentagon, hexagon, etc.). The dotted blue line indicates the position of the perimeter.

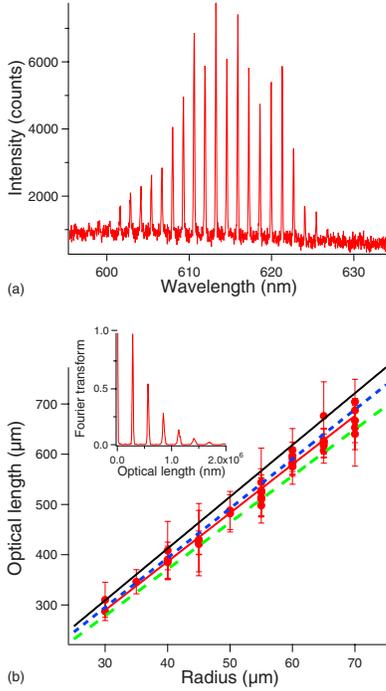


FIG. 17. (Color online) (a) Experimental spectrum of a micro-disk of 30- μm radius. (b) Optical length vs. radius. The experiments (red points) are linearly fitted by the solid red line. The other lines correspond to the theoretical predictions without any adjusted parameters: the dashed green line to the square, the dotted blue line to the hexagon, and the solid black line to the perimeter. Inset: Normalized Fourier transform of the spectrum in (a) expressed as intensity vs. wave number.

$$\delta E = \left(\frac{a \cos}{2\pi} \operatorname{Re} ka_{num} \right)^2 - \left[\left(m + \frac{1}{\pi} \delta - \xi \right)^2 + \left(\frac{l}{2 \tan \delta} \right)^2 \zeta \right]. \quad (28)$$

For pure scar states $\zeta = p^2$. As our numerical simulations have not reached the semiclassical limit (see scales in Figs. 7 and 11), we found it convenient to fit numerically the ζ constant. The best fit gives $\zeta \approx 0.44, 2.33$, and 5.51 for the three most confined families (for pure scar functions this constant is 1, 4, 9, respectively). The agreement is quite good with a relative accuracy of the order of 10^{-4} [see Fig. 11(b)]. Irrespective of the precise value of ζ the total optical length nL is given by Eq. (25) and leads to an experimental prediction twice longer than the optical length of the inscribed pentagon, which is an isolated periodic orbit and thus cannot base superscar wave functions.

Comparison with experiments confirms the superscar nature of the most confined states for pentagonal resonators. In fact, the spectrum and its Fourier transform in Fig. 14 correspond to a pentagonal microlaser with side $a = 80 \mu\text{m}$, and show a periodic orbit with optical length $1040 \pm 30 \mu\text{m}$ to be compared with the five-star optical length $n_{full} 10a \cos(\pi/5) = 1061 \mu\text{m}$. The agreement is better than 2%.

This result is reproducible for cavities with the same size. Other sizes have been tested as well. For smaller cavities, the five-pointed star orbit is not identifiable due to lack of gain,

whereas for bigger ones it is visible but mixed with nonconfined periodic orbits. This effect, not specific to pentagons, can be assigned to the contribution of different periodic orbit families which become important when the lasing gain exceeds the refractive losses. We will describe this phenomenon in a future publication [28].

The good agreement of numerical simulations and experiments with superscar predictions gives an additional credit to the validity of this approach even for nontrivial configurations.

VI. MICRODISKS

Microdisk cavities are the simplest and most widely used microresonators. In the context of this work, they are of interest because of the coexistence of several periodic orbit families with close lengths. For low index cavities ($n \sim 1.5$) each regular polygon trajectory with more than four sides is confined by total internal reflection.

In the two-dimensional approximation passive circular cavities are integrable and the spectrum of quasistationary states can be computed from an explicit quantization condition,

$$n \frac{J'_m(nkR)}{J_m(nkR)} = \nu \frac{H_m^{(1)'}(kR)}{H_m^{(1)}(kR)}. \quad (29)$$

Here R is the radius of the disk, n is the refractive index of the cavity, and $\nu = 1$ (respectively $\nu = n^2$) for the TM (respectively TE) polarization. For each angular quantum number m , an infinite sequence of solutions, $k_{m,q}$, is deduced from Eq. (29). They are labeled by the q radial quantum number.

For large $|k|$ the $k_{m,l}$ wave numbers are obtained from a semiclassical expression (see, e.g., [29]) and the density of quasistationary states Eq. (15) can be proved to be rewritten as a sum over periodic orbit families. The derivation of this trace formula assumes only the semiclassical approximation ($|k|R \gg 1$) and can be done in a way similar to that of the billiard case (see, e.g., [30]), leading to an expression closed to Eq. (16),

$$d(k) \propto \sum_p \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} |r_p|^{N_p} \cos \left[nL_p k - N_p \left(2\delta_p + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (30)$$

Here the p index specifies a periodic orbit family. This formula depends on periodic orbit parameters: the number of bounces on the boundary, N_p , the incident angle on the boundary, χ_p , the length, $L_p = 2N_p R \cos(\chi_p)$, and the area covered by periodic orbit family, $A_p = \pi R^2 \cos^2(\chi_p)$, which is the area included between the caustic and the boundary [see Fig. 15]. $2\delta_p$ is the phase of the reflection coefficient at each bounce on the boundary [see Eq. (3)] and $|r_p|$ is its modulus.

For orbits confined by total internal reflection δ_p does not depend on kR in the semiclassical limit, and r_p is exponentially close to 1 [29,31]. From Eq. (30) it follows that each periodic orbit is singled out by a weighing coefficient $c_p = \frac{A_p}{\sqrt{L_p}} |r_p|^{N_p}$. Considering the experimental values $|k|R \sim 1000$, $|r_p|$ can be approximated to unity with a good accu-

racy for confined periodic orbits, and thus $c_p = \frac{A_p}{\sqrt{L_p}}$ depends only on geometrical quantities. Figure 16 shows the evolution of c_p for polygons when the number of sides is increasing. As the critical angle is close to 45° , the diameter and triangle periodic orbits are not confined and the dominating contribution comes from the square periodic orbit. So we can reasonably conclude that the spectrum (15) of a passive two-dimensional microdisk is dominated by the square periodic orbit.

The experimental method described in the previous sections has been applied to disk-shaped microcavities. A typical experimental spectrum is shown in Fig. 17(a). The first peak of its Fourier transform has a finite width coming from the experimental conditions (discretization, noise, etc.) and the contributions of several periodic orbits. This width is represented as error bars on the graph of Fig. 17(b). The continuous red line fitting the experimental data is surrounded by the dashed green line and the dotted blue line corresponding to the optical length of the square and hexagon, respectively, calculated with $n_{full}=1.64$ as in the previous sections. The perimeter (continuous black line) overlaps with a large part of the error bars which evidences its contribution to the spectrum, but it is not close to experimental data.

These experimental results seem in good agreement with the above theoretical predictions. But actually these resonances, usually called whispering gallery modes, are living close to the boundary. Thus both roughness and three-dimensional effects must be taken into account. At this stage it is difficult to evaluate and to measure correctly such contributions for each periodic orbit. For microdisks with a small thickness (about $0.4 \mu\text{m}$) and designed with lower roughness, the results are more or less similar to those presented in Fig. 17(b).

VII. CONCLUSION

We demonstrate experimentally that the length of the dominant periodic orbit can be recovered from the spectra of microlasers with simple shapes. Taking into account different dispersion corrections to the effective refractive index, a good agreement with theoretical predictions has been evidenced first for the Fabry-Perot resonator. Then we have tested polygonal cavities both with experiments and numerical simulations, and a good agreement for the real parts of wave numbers has been obtained even for the nontrivial configuration of the pentagonal cavity.

The observed dominance of confined short-period orbits is, in general, a consequence of the trace formula and the formation of long-lived states in polygonal cavities is related to strong diffraction on cavity corners. Finally, the study of microdisks highlights the case of several orbits and the influence of roughness and three-dimensional effect.

Our study opens the way to a systematic exploration of spectral properties by varying the shape of the boundary. In increasing the experimental precision even tiny details of trace formulas will be accessible. The improvement of the etching quality will suppress the leakage due to surface roughness and lead to a measure of the diffractive mode losses which should depend on symmetry classes. From the point of view of technology, it will allow a better prediction of the resonator design depending on the applications. From a more fundamental physics viewpoint, it may contribute to a better understanding of open dielectric billiards.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to S. Brasselet, R. Hierle, J. Lau-tru, C. T. Nguyen, and J.-J. Vachon for experimental and technological support and to C.-M. Kim, O. Bohigas, N. Sandeau, J. Szeftel, and E. Richalot for fruitful discussions.

-
- [1] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, CA, 1986).
 - [2] *Optical Microcavities*, edited by K. Vahala (World Scientific, Singapore, 2005).
 - [3] E. Krioukov, D. J. W. Klunder, A. Driessen, J. Greve, and C. Otto, *Opt. Lett.* **27**, 512 (2002).
 - [4] A. M. Armani and K. J. Vahala, *Opt. Lett.* **31**, 1896 (2006).
 - [5] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Science* **280**, 1556 (1998).
 - [6] M. Lebental, J.-S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit, and E. Bogomolny, *Phys. Rev. A* **75**, 033806 (2007).
 - [7] R. C. Polson, G. Levina, and Z. V. Vardeny, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3858 (2000).
 - [8] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, *Nature (London)* **421**, 925 (2003).
 - [9] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle, and J. Zyss, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 031108 (2006).
 - [10] C. Vassallo, *Optical Waveguide Concepts* (Elsevier, Amsterdam, 1991).
 - [11] P. K. Tien, *Appl. Opt.* **10**, 2395 (1971).
 - [12] For some samples, the underlying layer is silica with refractive index $n_2=1.45$, so n_{eff} is slightly different.
 - [13] This definition is consistent all over the paper. In the literature, these names are sometimes permuted.
 - [14] D. S. Jones, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **217**, 153 (1953).
 - [15] T. Harayama, P. Davis, and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 063901 (2003).
 - [16] H. E. Türeci, A. D. Stone, and B. Collier, *Phys. Rev. A* **74**, 043822 (2006).
 - [17] H. E. Türeci, A. D. Stone, and Li Ge, e-print arXiv:cond-mat/0610229.
 - [18] S. Shinohara, T. Harayama, H. E. Türeci, and A. D. Stone, *Phys. Rev. A* **74**, 033820 (2006).
 - [19] C. Y. Fong and A. Poon, *Opt. Express* **12**, 4864 (2004).
 - [20] *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Summer School Lectures LII, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1991).
 - [21] R. Blümel, T. M. Antonsen, Jr., B. Georgeot, E. Ott, and R. E. Prange, *Phys. Rev. E* **53**, 3284 (1996).

- [22] J. Wiersig, Phys. Rev. A **67**, 023807 (2003).
- [23] I. Braun, G. Ihlein, F. Laeri, J. U. Nöckel, G. Schulz-Ekloff, F. Schüth, U. Vietze, O. Weiß, and D. Wöhrle, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **70**, 335 (2000).
- [24] E. Bogomolny and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **92**, 244102 (2004).
- [25] E. Bogomolny, B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **97**, 254102 (2006).
- [26] For a given symmetry class, the length entering the quantization condition may be a part of the total periodic orbit length.
- [27] The estimation of the imaginary parts of these states as well as the field distribution outside the cavity is beyond the scope of this paper and will be discussed elsewhere.
- [28] M. Lebental, N. Djellali, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit, and E. Bogomolny (to be published).
- [29] J. Nöckel, Ph.D. dissertation, Yale University, 1997.
- [30] M. Brack and R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley, Reading MA, 1997).
- [31] H. Schomerus and M. Hentschel, Phys. Rev. Lett. **96**, 243903 (2006).

Bibliographie

- [1] H. Alt, A. Bäcker, C. Dembowski, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, *Mode fluctuation distribution for spectra of superconducting microwave billiards*, Physical Review E, **58**, 1737 (1998).
- [2] H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Graef, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter et C. Schmit, *Experimental vs. Numerical Eigenvalues of a Bunimovich Stadium Billiard – A Comparison*, Physical Review E **60**, 2851 (1999).
- [3] T. Aoki, B. Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala et H. J. Kimble, *Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator*, Nature **442** (octobre 2006).
- [4] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane et K. J. Vahala, *Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip*, Nature **421**, 925 (2003).
- [5] A. M. Armani et K. J. Vahala, *Heavy water detection using ultra-high-Q microcavities*, Optics Letters, **31**, 1896 (2006).
- [6] C. Arnaud, *Étude de fonctions actives et/ou passives à base de micro-résonateurs à modes de galerie*, Thèse de doctorat (2004).
- [7] V. Baladi, J. P. Eckmann et D. Ruelle, *Resonances for intermittent systems*, Nonlinearity **2** 119 (1989).
- [8] H. Bateman et A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, Volume II, McGraw-Hill Book Company (1953).
- [9] W. Bauer et G.F. Bertsch, *Decay of ordered and chaotic systems*, Physical Review Letters, **65** 2213 (1990).
- [10] T. Ben Messaoud, *Effet laser en microcavités symétriques et asymétriques à base de polymère luminescent*, Thèse de doctorat, LPQM, ENS de Cachan (2003).
- [11] M. V. Berry, *Regular and irregular semi-classical wavefunctions*, Journal of Physics A, **10**, 2083 (1977).
- [12] P. J. Richens and M. V. Berry, *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica 2D **2** 495 (1980).
- [13] M. Berry, *Fractal modes of unstable lasers with polygonal and circular mirrors*, Optics communications **200**, 321 (2001).
- [14] M. Berry, C. Storm et W. van Saarloos, *Theory of unstable laser modes : edge waves and fractality*, Optics communications, **197** 393 (2001).
- [15] E. Bogomolny, N. Pavloff et C. Schmit, *Diffraction corrections in the trace formula for polygonal billiards*, Physical Review E, **61** 3689 (2000).
- [16] E. Bogomolny et C. Schmit, *Asymptotic behaviour of multiple scattering on an infinite number of parallel half-planes*, Nonlinearity **16** 2035 (2003).

- [17] E. Bogomolny, *Quantum and Arithmetical Chaos*, pre-print nlin/0312061 (2003), Cours dispensé à l'école d'été des Houches : Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry (2003).
- [18] E. Bogomolny et C. Schmit, *Structure of wave functions of pseudointegrable billiards*, Physical Review Letters, **92** 244102 (2004).
- [19] O. Bohigas, M. J. Giannoni et C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Physical Review Letters, **52**, 1 (1984).
- [20] M. Born et E. Wolf, *Principles of optics*, septième édition, Cambridge university press (1999).
- [21] S. V. Boriskina, T. M. Benson, P. Sewell et A. I. Nosich, *Spectral shift and Q change of circular and square-shaped optical microcavity modes due to periodic sidewall surface roughness*, Journal of the Optical Society of America B, **21** 1792 (2004).
- [22] J.-M. Bouclet, *Distributions spectrales pour des opérateurs perturbés*, Thèse de doctorat, Université de Nantes (2000).
- [23] M. Brack et R. K. Bhaduri, *Semiclassical physics*, Addison-Wesley publishing company (1997).
- [24] I. Braun, G. Ihlein, F. Laeri, J. U. Nöckel, G. Schulz-Ekloff, F. Schüth, U. Vietze, O. Weifet D. Wöhrle, *Hexagonal microlasers based on organic dyes in nanoporous crystals*, Applied Physics B **70**, 335 (2000).
- [25] T. A. Brun, I. C. Percival et R. Schack, *Quantum chaos in open systems : a quantum state diffusion analysis*, Journal of Physics A, **29**, 2077 (1996).
- [26] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond et S. Haroche, *Observing the progressive decoherence of the "meter" in a quantum measurement*, Physical Review Letters, **77**, 4887 (1996).
- [27] L. A. Bunimovich, *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Communications in Mathematical Physics, **65**, 295 (1979).
- [28] E. M. Calzado, J. M. Villalvilla, P. G. Boj, J. A. Quintana et M. A. Díaz-García, *Tunability of amplified spontaneous emission through control of the thickness in organic-based waveguides*, Journal of Applied Physics, **97** 093103 (2005).
- [29] H. Cao, J. Y. Xu, S.-H. Chang et S. T. Ho, *Transition from amplified spontaneous emission to laser action in strongly scattering media*, Physical Review E, **61**, 1985 (2000).
- [30] R. K. Chang et A. J. Campillo eds., *Optical processes in microcavities*, World Scientific (1996).
- [31] G. D. Chern, A. W. Poon, R. K. Chang, T. Ben-Messaoud, O. Alloschery, E. Toussaere, J. Zyss et S.-Y. Kuo, *Direct evidence of open ray orbits in a square two-dimensional resonator of dye-doped polymers*, Optics Letters, **29**, 1674 (2004).
- [32] P. A. Chinnery et V. F. Humphrey, *Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity*, Physical Review E, **53**, 272 (1996).
- [33] M. Choi, T. Tanaka, T. Fukushima et T. Harayama, *Control of directional emission in quasistadium microcavity laser diodes with two electrodes*, Applied Physics Letters, **88**, 211110 (2006).
- [34] F. Courvoisier, *Spectroscopie ultra-brève de particules d'aérosols et microcavités*, Thèse de doctorat, LASIM, Université Lyon I (2005).

- [35] F. Courvoisier, V. Boutou, J. P. Wolf, R. K. Chang et J. Zyss, *Deciphering output coupling mechanisms in spiral microcavities with femtosecond light bullets*, Optics Letters **30**, 738 (2005).
- [36] P. Cvitanović, *Invariant measurement of strange sets in terms of cycles*, Physical Review Letters, **61** 2729 (1988).
- [37] P. Cvitanović et B. Eckhardt, *Periodic-orbit quantization of chaotic systems*, **63** 823 (1989).
- [38] J.N. Demas et G. A. Crosby, *The measurement of photoluminescence quantum yields. A review.*, Journal of Physical Chemistry, **75**, 991 (1971).
- [39] S. X. Dou, E. Toussaere, T. Ben Messaoud, A. Potter, D. Josse, G. Kranzelbinder et J. Zyss, *Polymer microring lasers with longitudinal optical pumping*, Applied Physics Letters, **80**, 165 (2002).
- [40] A. Driessen, R. Dekker, M. B.J. Diemeer, D. H. Geuzebroek, H. J.W.M. Hoekstra, E. J. Klein et A. Leinse, *Microresonators as promising building blocks for VLSI photonics*, Proceedings de SPIE **5956** (2005).
- [41] A. Driessen, D. H. Geuzebroek, E. J. Klein, R. Dekker, R. Stoffer et C. Bornholdt, *Propagation of short lightpulses in microring resonators : Ballistic transport versus interference in the frequency domain*, Optics Communication, **270**, 217 (2007).
- [42] R. Dubertrand, E. Bogomolny, N. Djellali, M. Lebental et C. Schmit, *Circular dielectric cavity and its deformations*, Physical Review A, (2007).
- [43] W. Fang, A. Yamilov et H. Cao, *Analysis of high-quality modes in open chaotic microcavities*, Physical Review E, **72** 023815 (2005).
- [44] W. Fang et H. Cao, *Wave interference effect on polymer microstadium laser*, pre-print 0705.0869 (2007).
- [45] C. Y. Fong et A. Poon, *Planar corner-cut square microcavities : ray optics and FDTD analysis*, Optics express **12** 4864 (2004).
- [46] T. Fukushima, T. Harayama et J. Wiersig, *Ray-wave correspondence in an unstable quasistadium laser resonator*, Physical Review A **73** 023616 (2006).
- [47] P. Gaspard, *Chaos, scattering and statistical mechanics*, Cambridge nonlinear science series 9 (1998).
- [48] K. Geetha, M. Rajesh, V. P. N. Nampoory, C. P. G. Vallabhan et P. Radhakrishnan, *Propagation characteristics and wavelength tuning of amplified spontaneous emission from dye-doped polymer*, Journal of Applied Optics, **45**, 764 (2006).
- [49] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. Sivco et A. Y. Cho, *High-Power Directional Emission from Microlasers with Chaotic Resonators*, Science **280** 1556 (1998).
- [50] S. Habib, K. Shizume et W. H. Zurek, *Decoherence, chaos, and the correspondence principle*, Physical Review Letters, **80**, 4361 (1998).
- [51] T. Harayama, T. Fukushima, P. Davis, P. O Vaccaro, T. Miyasaka, T. Nishimura et T. Aida, *Lasing on scar modes in fully chaotic microcavities*, Physical Review E, **67**, 015207(R) (2003).
- [52] E. J. Heller, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : Scars of periodic orbits*, Physical Review Letters, **53**, 1515 (1984).
- [53] M. Hossein-Zadeh et K. J. Vahala, *Free ultra-high-Q microtoroid : a tool for designing photonic devices*, Optics Express, **15**, 166 (2007).

- [54] B. F. Howell et M. G. Kuzyk, *Amplified spontaneous emission and recoverable photodegradation in polymer doped with dispersed orange 11*, Journal of the Optical Society of America, **19**, 1790 (2002).
- [55] B. F. Howell et M. G. Kuzyk, *Lasing action and photodegradation of disperse orange 11 dye in liquid solution*, Applied Physics Letters, **85**, 1901 (2004).
- [56] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, troisième édition, Wiley & sons (1999).
- [57] L. Kaminetzky et J. Keller, *Diffraction coefficients for higher order edges and vertices*, SIAM Journal of Applied Mathematics **22**, 109 (1972).
- [58] J. P. Keating, M. Novaes, S. D. Prado et M. Sieber, *Semiclassical Structure of Chaotic Resonance Eigenfunctions*, Physical Review Letters, **97**, 150406 (2006).
- [59] T. Kottos, U. Smilansky, J. Fortuny et G. Nesti, *Chaotic scattering of microwaves*, Radio Science, **42**, 747 (1999).
- [60] M. G. Krein, *On perturbation determinants and the trace formula*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **144** 268 (1962).
- [61] E. Krioukov, D. J. W Klunder, A. Driessen, J. Greve et C. Otto, *Sensor based on an integrated optical microcavity*, Optics Letters **27** 512 (2002).
- [62] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique quantique, théorie non relativiste*, Physique théorique tome III, Editions Mir, deuxième édition (1967).
- [63] M. Lebental, J.-S. Lauret, R. Hierle et J. Zyss, *Highly directional emission of stadium-shaped polymer microlasers*, Applied Physics Letters, **88**, 031108 (2006).
- [64] M. Lebental, J. S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit et E. Bogomolny, *Directional emission of stadium-shaped microlasers*, Physical Review A, **75**, 033806 (2007).
- [65] M. Lebental, N. Djellali, C. Arnaud, J.-S. Lauret, J. Zyss, R. Dubertrand, C. Schmit et E. Bogomolny, *Inferring periodic orbits from spectra of simply shaped micro-lasers*, Physical Review A, **76**, 023830, (2007).
- [66] Y. Lee, G. Faini et D. Maily, *Quantum transport in chaotic and integrable ballistic cavities with tunable shapes*, Physical Review B **56**, 9805 (1997).
- [67] S.-Y. Lee, M. S. Kurdoglyan, S. Rim et C.-M. Kim, *Resonance patterns in a stadium-shaped microcavity*, Physical Review A, **70**, 023809 (2004).
- [68] S. B. Lee, J. H. Lee, J. S. Chang, H. J. Moon, S.W. Kim et K. An, *Observation of scarred modes in asymmetrical deformed microcylinder lasers*, Physical Review Letters, **88**, 033903 (2002).
- [69] S.-Y. Lee, S. Rim, J.-W. Ryu, T.-Y. Kwon, M. Choi et C.-M. Kim, *Quasi-Scarred Resonances in a Spiral-Shaped Microcavity*, Physical Review Letter, **93** 164102 (2004).
- [70] V. Le Floc'h, *Caractérisation de l'organisation moléculaire par microscopie non-linéaire cohérente et incohérente*, Thèse de doctorat, ENS de Cachan (2004).
- [71] A. J. Lichtenberg et M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag (1983).
- [72] Y. Lill et B. Hecht, *Single dye molecules in an oxygen-depleted environment as photostable organic triggered single-photon sources*, Applied Physics Letters, **84**, 1665 (2004).
- [73] W. T. Lu, S. Sridhar et M. Zworski, *Fractal Weyl Laws for Chaotic Open Systems*, Physical Review Letters **91** 154101 (2003).

- [74] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins et A. C. Gossard, *Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures*, Physical Review Letters, **69**, 506 (1992).
- [75] S. L. McCall, A. F. J. Levi, R.E. Slusher, S. J. Pearton et R. A. Logan, *Whispering-gallery mode microdisk lasers*, Applied Physics Letters **60**, 289 (1992).
- [76] A. Mekis, J. U. Nöckel, G. Chen, A. D. Stone et R. K. Chang, *Ray chaos and Q spoiling in lasing droplets*, Physical Review Letters, **75**, 2682 (1995).
- [77] F. Mortessagne, O. Legrand et D. Sornette, *Transient chaos in room acoustics*, Chaos : an interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, **3**, 529 (1993).
- [78] F. Mortessagne, D. Laurent, P. Sebbah, C. Vanneste et O. Legrand, *Direct Observation of localized modes in an open disordered microwave cavity*, pre-print cond-mat/0702657 (2007).
- [79] P. Nagtegaele, *Micro-résonateurs circulaires à base de polymères pour les fonctions d'insertion-extraction en télécommunications optiques*, Thèse de doctorat, LPQM, ENS de Cachan (2005).
- [80] P. Nagtegaele, J. Zyss, H. Kelderman, A. Leinse, M. Diemeer et A. Driessen, *Vers une nouvelle filière de composants et sous-systèmes à base de matériaux hybrides et de polymères pour les télécommunications optiques*, Projet européen Naïs n° 2000-28018.
- [81] T. Nobis, E. M. Kaidashev, A. Rahm, M. Lorenz et M. Grundmann, *Whispering Gallery Modes in Nanosized Dielectric Resonators with Hexagonal Cross Section*, Physical Review Letters, **93** 103903 (2004).
- [82] J. Nöckel, *Resonances in Nonintegrable Open Systems*, Thèse de doctorat, Université de Yale, USA (1997).
- [83] S. Nonnenmacher et M. Rubin, *Resonant eigenstates for a quantized chaotic system*, pre-print nlin/0608069 (2006).
- [84] A. Orszag et G. Hepner, *Les lasers et leurs applications*, chapitre IV, ed. Masson (1980).
- [85] D. B. Ostrowsky, A. M. Roy et J. Sevin, *Integrated optical waveguide examination using anti-Stokes fluorescence*, Applied Physics Letters, **24** 553 (1974).
- [86] K. Pance, W. Lu et S. Sridhar, *Quantum fingerprints of classical Ruelle-Pollicott resonances*, Physical Review Letters, **85**, 2737 (2000).
- [87] O. G. Peterson, J. P. Webb, W. C. McColgin et J. H. Eberly, *Organic dye laser threshold*, Journal of Applied Physics, **42**, 1917 (1971).
- [88] C. Pflügl, M. Austerer, S. Golka, W. Schrenk, A. M. Andrews, T. Roch et G. Strasser, *Second-harmonic generation in three-well and bound-to-continuum GaAs-based quantum-cascade lasers*, Applied Physics B **85**, 231 (2006).
- [89] V. A. Podolskiy et E.E. Narimanov, *Chaos-assisted tunneling in dielectric microcavities*, Optics Letters **30** 474 (2005).
- [90] R. C. Polson, M. E. Raikh et Z. V. Vardeny, *Universality in unintentional laser resonators*, Comptes rendus physique **3**, 509 (2002).
- [91] R. C. Polson, Z. V. Vardeny et D. A. Chinn, *Multiple resonances in microdisk lasers of π -conjugated polymers*, Applied Physics Letters, **81**, 1561 (2002).
- [92] A. W. Poon, F. Courvoisier et R. K. Chang, *Multimode resonances in square-shaped optical microcavities*, Optics Letters **26** 632 (2001).

- [93] J. K. Poon, L. Zhu, G. A. DeRose et A. Yariv, *Transmission and group delay of microring coupled-resonator optical waveguides*, Optics Letters, **31**, 456 (2006).
- [94] P. J. Richens et M. V. Berry, *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica D, **2** 495 (1981).
- [95] J.-W. Ryu, S.-Y. Lee, C.-M. Kim, Y.-J. Park, *Directional interacting whispering gallery modes in coupled dielectric microdisks*, Physical Review A **74**, 013804 (2006).
- [96] J.-W. Ryu, S.-Y. Lee, C.-M. Kim et Y.-J. Park, *Survival probability time distribution in dielectric cavities*, Physical Review E, **73** 036207 (2006).
- [97] V. Sandoghar, F. Treussart, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond et S. Haroche, *Very low threshold whispering-gallery-mode microsphere laser*, Physical Review A, **54**, R1777 (1996).
- [98] H. G. L. Schwefel, N. B. Rex, H. E. Tureci, R. K. Chang, A. D. Stone, T. Ben Messaoud et J. Zyss, *Dramatic shape sensitivity of directional emission patterns from similarly deformed cylindrical polymer lasers*, Journal of the Optical Society of America, **21**, 923 (2004).
- [99] H. G. L. Schwefel, A. D. Stone et H. E. Tureci, *Polarization properties and dispersion relations for spiral resonances of a dielectric rod*, Journal of the Optical Society of America B, **22**, 2295 (2005).
- [100] A. K. Sheridan, G. A. Turnbull, A. N. Safonov et I. D. W. Samuel, *Tuneability of amplified spontaneous emission through control of the waveguide-mode structure in conjugated polymer films*, Physical Review B, **62** R11929 (2000).
- [101] J.-B. Shim, H.-W. Lee, S.-B. Lee, J. Yang, S. Moon, J.-H. Lee, K. An et S. W. Kim, *Regular Spectra and Universal Directionality of Emitted Radiation from a Quadrupolar Deformed Microcavity* pre-print physics/0603221v1 (2006).
- [102] S. Shinohara, T. Harayama, H. E. Türeci et A. D. Stone, *Ray-wave correspondence in the nonlinear description of stadium-cavity lasers*, Physical Review A **74**, 033820 (2006).
- [103] S. Shinohara et T. Harayama, *Signature of ray chaos in quasi-bound wave functions for a stadium-shaped dielectric cavity*, Physical Review E, **75** 036216 (2007).
- [104] A. E. Siegman, *Unstable optical resonators*, Applied Optics, **13** 353 (1974).
- [105] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, California (1986).
- [106] A. Sommerfeld, *Optics*, Lectures on theoretical physics volume IV, Academic Press (1964).
- [107] P. P. Sorokin, J. R. Lankard, E. C. Hammond et V. L. Moruzzi, *Laser-pumped Stimulated Emission from Organic Dyes : Experimental Studies and Analytical Comparisons* IBM Journal of Research, **11**, 148 (1967).
- [108] P. P. Sorokin, J. R. Lankard, V. L. Moruzzi et E. C. Hammond, *Flashlamp-pumped organic-dye lasers*, Journal of Chemical Physics, **48**, 4726 (1968).
- [109] J. Stein, H.-J. Stöckmann et U. Stoffregen, *Microwave studies of billiard green functions and propagators*, Physical Review Letters **75**, 53 (1995).
- [110] H.-J. Stöckmann, *Quantum chaos, an introduction*, Cambridge university press (1999).
- [111] A. D. Stone, *Einstein's Unknown Insight and the Problem of Quantizing Chaos*, Physics Today (août 2005).

- [112] A. Tagaya, T. Kobayashi, S. Nakatsuka, E. Nihei, K. Sasaki et Y. Koike, *High Gain and High Power Organic Dye-Doped Polymer Optical Fiber Amplifiers : Absorption and Emission Cross Sections and Gain Characteristics*, Japanese Journal of Physics, **36**, 2705 (1997).
- [113] P. K. Tien, *Light waves in thin films and integrated optics*, Applied Optics **10**, 2395 (1971).
- [114] F. Treussart, *Etude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions neodymes*, Thèse de doctorat (1997).
- [115] K. J. Vahala, *Optical microcavities*, Nature, **424**, 839 (2003).
- [116] K. Vahala, *Optical microcavities*, World scientific publishing company (2005).
- [117] C. Vassallo, *Optical waveguide concepts*, ed. Eslevier (1991).
- [118] J. Wiersig, *Boundary element method for resonances in dielectric microcavities*, Journal of Applied Optics : pure and applied optics, **5**, 53 (2003).
- [119] J. Wiersig, *Hexagonal dielectric resonators and microcrystal lasers*, Physical Review A, **67**, 023807 (2003).
- [120] J. Wiersig, *Formation of long-lived, scarlike modes near avoided resonance crossings in optical microcavities*, Physical Review Letters, **97**, 253901 (2006).
- [121] Wolf von Klitzing, R. Long, V. S. Ilchenko, J. Hare et V. Lefèvre-Seguin, *Tunable whispering gallery modes for spectroscopy and CQED experiments*, New Journal of Physics **3**, 14.1 (2001).
- [122] P. Zijlstra, K. L. van der Molen et A. P. Mosk, *A spatial refractive index sensor using whispering gallery modes in an optically trapped microsphere*, pre-print physics/0612070v1 (2006).
- [123] R. Zondervan, F. Kulzer, M. A. Kol'chenko et M. Orrit, *Photobleaching of Rhodamine 6G in Poly(vinyl alcohol) at the Ensemble and Single-Molecule Levels*, Journal of Physical Chemistry A, **108** 1657 (2004).
- [124] W. H. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*, Physics Today (octobre 1991).