



**HAL**  
open science

# Lentilles stratifiées et sources réelles associées - Analyses théoriques et validations expérimentales en ondes millimétriques

Benjamin Fuchs

► **To cite this version:**

Benjamin Fuchs. Lentilles stratifiées et sources réelles associées - Analyses théoriques et validations expérimentales en ondes millimétriques. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2007. Français. NNT: . tel-00194403

**HAL Id: tel-00194403**

**<https://theses.hal.science/tel-00194403>**

Submitted on 7 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3638

**THÈSE**  
présentée devant  
L'UNIVERSITÉ DE RENNES I  
pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I**  
Mention : *Traitement du Signal et Télécommunications*  
par

**Benjamin FUCHS**

Équipe d'accueil : Institut d'Électronique et de Télécommunications de Rennes

École doctorale : Matisse

Composante universitaire : Structure et Propriété de la Matière

**Lentilles Stratifiées  
et Sources Réelles Associées -  
Analyses Théoriques et Validations  
Expérimentales en Ondes Millimétriques.**

Soutenue le 20 Novembre 2007 devant la commission d'Examen

*Composition du jury*

Roberto SORRENTINO	Professore, Universita di Perugia	Rapporteur
Serge VERDEYME	Professeur, Université de Limoges - XLIM	Rapporteur
Michel NEY	Professeur, ENST Bretagne - LEST	Examineur
Sébastien RONDINEAU	Research Assistant Professor, University of Colorado at Boulder	Co-encadrant
Olivier LAFOND	Maître de Conférences, Université de Rennes 1 - IETR	Co-encadrant
Mohamed HIMDI	Professeur, Université de Rennes 1 - IETR	Directeur de Thèse
Raphaël GILLARD	Professeur, INSA de Rennes - IETR	Membre invité



## Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein de l'Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes, UMR 6164, groupe Antennes et Hyperfréquences, à l'Université de Rennes 1.

J'adresse naturellement mes premiers remerciements à mes encadrants de thèse.

Tout d'abord je remercie chaleureusement **Mohamed Himdi** pour m'avoir, dès le début, fait confiance. Son expérience, sa générosité et son enthousiasme m'ont rassuré et motivé pendant toute la thèse.

Je remercie aussi tout particulièrement **Olivier Lafond**. Sa disponibilité et ses conseils m'ont beaucoup aidé. De plus, nous avons réussi à braver le froid finlandais, l'Ecosse et la SNCF.

Tout en me laissant une grande autonomie, ils m'ont toujours encouragé et su me guider aux bons moments. Leurs qualités humaines, soutien inconditionnel et bonne humeur permanente ont rendu ces trois années vraiment sympathiques.

Je remercie énormément **Sébastien Rondineau**. Son investissement personnel et son expertise scientifique, en modélisation analytique en particulier, ont très largement contribué à ce travail. Merci Pierrot pour l'honnêteté, la sympathie et le dynamisme qui te caractérisent. J'ai beaucoup appris et rigolé avec toi et je n'oublierai pas certaines soirées à Boulder et Honolulu... J'espère vraiment que nos chemins se croiseront à nouveau.

Je tiens à associer à ces remerciements **Laurent Le Coq**. Sa modestie et son mélange subtil de compétences scientifiques, humoristiques et anéchoïques m'ont quotidiennement aidé à l'IETR.

Je suis très reconnaissant et honoré que Messieurs les Professeurs **Michel Ney**, **Roberto Sorrentino** et **Serge Verdeyme** aient accepté d'être président et rapporteurs de ma thèse respectivement. Je les remercie pour s'être intéressé à ce travail.

Je remercie également **Raphaël Gillard** d'avoir participé au jury et surtout m'avoir initié et donné goût à l'électromagnétisme.

Je tiens à remercier sincèrement **Madame Lemoine** pour son aide systématique et très efficace ainsi que **Daniel Thouroude** pour son soutien.

J'adresse toute ma sympathie à l'ensemble du personnel de l'IETR, pour les moments que j'ai partagé avec eux et l'aide qu'ils ont pu m'apporter. Je pense en particulier à Joëlle, Eric Pottier (à qui j'essaie toujours de transmettre mon intérêt pour les US) et Sylvain, mais aussi Gilles, Franck, Noëlle, Kouroch Mahdjoubi, Laurent et Stéphane...

Merci beaucoup à tous mes collègues pour avoir créé naturellement une ambiance de travail très agréable. Je commence par mes deux voisins de bureau qui ont eu du mérite à me supporter : Stéphanie et Séb dont l'aide n'est pas étrangère à la réussite de cette thèse. Mais aussi Gaël, Oliv', Mathieu, Maxim, Franck, Ludo, Arnaud Anthony, Tinh, Mohamed, Wafa, Thomas, Gwenn, Sandrine, les thésards de la polar

team et tous les autres que j'oublie.

Enfin, je remercie tout particulièrement mes collègues de promo thésards de l'INSA (Papy, Emeric, Romain, Bich' et Marie-Anne...), de FT (Beubeu et JB), de l'IRISA (François) et les copains de Boulder : Michael, the serbian mafia (Paja, Milan, Miloš, ...) and the italian guys (Marco and Leo).

Enfin, "last but not least", un grand merci à ma "famille" de potes de Rennes, de la maternelle au CN4 de l'INSA, pour la vie hors labo. Je peux toujours compter sur eux.

Je n'oublie pas, bien sûr, ma famille, notamment ma sœur et mes parents, pour leur soutien et encouragements durant toutes ces années d'étude.

*Benjamin*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Contexte et motivations de l'étude . . . . .	1
Objectifs et contributions . . . . .	2
Organisation du document . . . . .	3
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Les lentilles . . . . .	7
1.1.1 Lentilles à contraintes de propagation . . . . .	7
1.1.2 Lentilles à base de métamatériaux . . . . .	12
1.2 Les lentilles diélectriques . . . . .	13
1.2.1 Lentilles homogènes . . . . .	13
1.2.2 Lentilles inhomogènes . . . . .	18
1.3 Les lentilles diélectriques inhomogènes à gradient d'indice . . . . .	25
1.3.1 Résultats théoriques sur les lentilles de Luneburg . . . . .	25
1.3.2 L'utilisation des lentilles de Luneburg . . . . .	36
1.4 Conclusion . . . . .	42
<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>
<b>2 Les lentilles inhomogènes à gradient d'indice</b>	<b>49</b>
2.1 Le gradient d'indice : la technique de Luneburg . . . . .	51
2.1.1 Dérivation des lois du gradient d'indice . . . . .	51
2.1.2 Particularisation aux lentilles de Luneburg et MFE . . . . .	52
2.2 Les techniques de réalisation du gradient d'indice . . . . .	55
2.2.1 Permittivité effective variable . . . . .	55
2.2.2 Assemblage de coquilles homogènes . . . . .	61
2.2.3 Application : réalisation de lentilles de type MFE . . . . .	62
2.3 Optimisation de la discrétisation du gradient d'indice . . . . .	63
2.3.1 Présentation du problème d'optimisation . . . . .	63
2.3.2 Description de l'algorithme d'optimisation . . . . .	64
2.3.3 Détails des calculs . . . . .	65
2.3.4 Validation . . . . .	68

2.4	Considération pratique : masse des lentilles . . . . .	73
2.4.1	Distribution diélectrique idéale . . . . .	73
2.4.2	Distribution diélectrique réelle . . . . .	75
2.4.3	Comparaison . . . . .	76
2.5	Conclusion . . . . .	77
<b>Bibliographie</b>		<b>79</b>
<b>3</b>	<b>Analyse de structures sphériques et hémisphériques</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	83
3.2	Présentation du problème et mise en équation . . . . .	84
3.2.1	Introduction des modes sphériques . . . . .	84
3.2.2	Détermination des caractéristiques d'antennes . . . . .	91
3.2.3	Décomposition de la source . . . . .	92
3.3	Application à l'étude des antennes lentilles stratifiées . . . . .	95
3.3.1	Diffusion introduite par une lentille stratifiée . . . . .	95
3.3.2	Résultats numériques . . . . .	100
3.3.3	Validations . . . . .	106
3.4	Perspective : prise en compte de la divergence non nulle . . . . .	111
3.4.1	Nécessité du vecteur $\vec{L}$ . . . . .	111
3.4.2	Utilisation du vecteur $\vec{L}$ . . . . .	112
3.4.3	Conclusion . . . . .	115
3.5	Conclusion . . . . .	116
<b>Bibliographie</b>		<b>117</b>
<b>4</b>	<b>Extension : analyse de structures de forme arbitraire</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	123
4.2	Les modes sphériques : extension aux structures de forme arbitraire . . . . .	124
4.2.1	Coefficients modaux associés à un champ électromagnétique . . . . .	124
4.2.2	Convergence des vecteurs et coefficients modaux sphériques . . . . .	126
4.3	Présentation du problème et mise en équation . . . . .	128
4.3.1	Géométrie de l'objet diffractant . . . . .	128
4.3.2	Application à la diffraction par un objet stratifié de forme quelconque . . . . .	129
4.4	Résolution du problème . . . . .	131
4.4.1	Maillage . . . . .	131
4.4.2	Dimensions du problème . . . . .	132
4.4.3	Résolution du système . . . . .	132
4.5	Application à l'analyse de structures à symétrie de révolution . . . . .	135
4.5.1	Description du système réduit . . . . .	136
4.5.2	Résultats numériques et discussions . . . . .	136
4.6	Contexte et perspective de la méthode présentée . . . . .	149

4.6.1	Comparaison de la méthode présentée avec trois méthodes numériques . . . . .	149
4.6.2	Perspective : la méthode analytique de régularisation . . . . .	150
4.7	Conclusion . . . . .	152
<b>Bibliographie</b>		<b>155</b>
<b>5</b>	<b>Application : focalisation, dépointage et reconfigurabilité</b>	<b>157</b>
5.1	Etude des performances des antennes lentilles HMFE en focalisation .	159
5.1.1	Influence du nombre de coquilles . . . . .	160
5.1.2	Influence du diamètre . . . . .	162
5.1.3	Influence des gaps d'air . . . . .	165
5.1.4	Influence de la position de la source . . . . .	167
5.1.5	Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W . . .	173
5.1.6	Conclusion . . . . .	179
5.2	Etude des performances des antennes lentilles HMFE en dépointage .	180
5.2.1	Introduction sur le dépointage . . . . .	180
5.2.2	Analyse en dépointage de l'antenne lentille HMFE . . . . .	181
5.2.3	Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W . . .	186
5.2.4	Conclusion . . . . .	189
5.3	Présentation d'une antenne lentille HMFE reconfigurable . . . . .	190
5.3.1	Présentation et principe de fonctionnement du système antennaire	190
5.3.2	Validation expérimentale en bande Ka . . . . .	193
5.3.3	Conclusion et perspectives . . . . .	197
5.4	Conclusion . . . . .	198
<b>Bibliographie</b>		<b>199</b>
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>201</b>
<b>Bibliographie de l'auteur</b>		<b>205</b>
<b>Annexe</b>		<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Fonctions sphériques de Bessel</b>	<b>209</b>
A.1	Définition . . . . .	209
A.2	Evolutions asymptotiques . . . . .	210
<b>B</b>	<b>Polynômes et fonctions associées de Legendre</b>	<b>211</b>
B.1	Définition . . . . .	211
B.2	Relations intégrales . . . . .	211
B.3	Harmoniques de surfaces . . . . .	212
B.4	Evolutions asymptotiques . . . . .	212
B.5	Relations d'orthogonalités . . . . .	213

---

<b>C</b>	<b>Relations d'orthogonalités</b>	<b>215</b>
C.1	Fonctions circulaires . . . . .	215
C.2	Vecteurs modaux sphériques . . . . .	216
<b>D</b>	<b>Evolutions asymptotiques</b>	<b>219</b>
D.1	Coefficients modaux . . . . .	219
D.2	Vecteurs modaux . . . . .	221
D.3	Produits entre vecteurs et coefficients modaux . . . . .	221
<b>E</b>	<b>Détails du système sur-déterminé</b>	<b>223</b>
E.1	Matrice $C$ . . . . .	224
E.2	Vecteur d'inconnues $x$ . . . . .	225
E.3	Vecteur second membre $y$ . . . . .	225
<b>F</b>	<b>Détails des matrices "d'homogénéisation"</b>	<b>227</b>
F.1	Matrice $N_x$ . . . . .	227
F.2	Matrice $N_U$ . . . . .	228
	<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>

# Introduction générale

## Contexte et motivations de l'étude

Le récent développement des applications en ondes millimétriques a donné un regain d'intérêt pour les antennes lentilles. Parmi celles-ci, les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice présentent de nombreuses propriétés intéressantes. La focalisation, le comportement large bande, ainsi que la capacité à faire du multi-faisceaux confèrent à ce type de lentille un champ d'applications diverses et variées.

D'ailleurs, de nombreux travaux ont déjà été menés sur la lentille inhomogène de Luneburg et notamment sur leur analyse électromagnétique. En effet, cette analyse peut être effectuée via des simulateurs électromagnétiques commerciaux, mais ces logiciels sont très coûteux en ressources informatiques, ce qui limite leur utilisation.

Ainsi, deux codes de calcul analytiques ont été réalisés à l'IETR (Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes) par Sébastien Rondineau. Il a soutenu sa thèse en 2002 sur la modélisation de lentilles sphériques à gradient d'indice associées à des sources conformes.

Dans la continuité de ces travaux, la lentille HMFE ("Half Maxwell Fish Eye") a fait l'objet d'investigations au sein de l'IETR. Cette lentille inhomogène à gradient d'indice a rarement été étudiée auparavant. La lentille HMFE diffère de la lentille de Luneburg par sa forme (hémisphérique et non sphérique) et sa distribution de permittivité.

Un premier prototype d'antenne lentille HMFE a été réalisé et mesuré dans le cadre du projet européen MIPA ("MEMS based Integrated Phased array Antennas"). Des études complémentaires sur cette lentille ont conduit au dépôt d'un brevet, qui s'est accompagné d'un financement de Rennes Métropole pour poursuivre les recherches sur la lentille HMFE.

Grâce à ce soutien, une étroite collaboration entre l'IETR et le "Department of Electrical and Computer Engineering" de l'Université du Colorado, à Boulder aux Etats-Unis, a été établie. Plusieurs déplacements, d'une durée totale de sept mois, ont été effectués. C'est ainsi au sein de l'Université du Colorado que les principaux développements théoriques présentés dans ce manuscrit ont été réalisés.

## Objectifs et contributions

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour but d’approfondir les connaissances sur la lentille HMFE. Ils s’articulent autour de trois principaux axes.

Le premier axe concerne la conception des lentilles inhomogènes et plus précisément l’obtention et l’approximation du gradient d’indice.

Dans ce cadre, une méthode originale d’optimisation de la discrétisation de la distribution de permittivité a été développée et appliquée aux lentilles HMFE et de Luneburg. De plus, des techniques d’estimation de la masse des lentilles à gradient d’indice, point crucial lors de la conception des lentilles, sont proposées.

Le deuxième et principal axe de travail est le développement et la mise en œuvre d’une méthode d’analyse électromagnétique des antennes lentilles. Cette méthode doit être peu coûteuse en ressources informatiques, de façon à pouvoir analyser rapidement les performances des antennes lentilles de toute taille.

Ainsi, la principale contribution de ce travail de thèse est le développement d’un outil d’analyse d’antennes lentilles stratifiées. Le code est basé sur la décomposition du champ électromagnétique en modes sphériques.

Par rapport aux travaux précédents, les principales innovations, toutes d’ordre numérique, sont les suivantes :

- la prise en compte de sources réelles,
- la forme des lentilles : sphérique, hémisphérique ou de révolution,
- la quantification de l’interaction source-lentille,
- la possibilité de prendre en compte du métal.

L’outil développé donne accès au champ en tout point de l’espace vide de charges. Ainsi, les caractéristiques des antennes lentilles (diagrammes de rayonnement en champ lointain, directivité ou cartographies de champs par exemple) peuvent rapidement être déduites.

Le troisième axe concerne l’analyse des performances en rayonnement des antennes lentilles HMFE.

Grâce à l’outil de modélisation, les performances en focalisation des antennes lentilles HMFE sont étudiées et comparées à celles de Luneburg. De plus, les performances de la lentilles HMFE en dépointage sont quantifiées et un exemple d’antenne lentille reconfigurable est présenté.

## Organisation du document

Ce mémoire s'articule autour de cinq parties principales.

Le premier chapitre situe les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice parmi les systèmes de focalisation à base de lentilles. De plus, un état de l'art sur les travaux théoriques et applications liés aux lentilles inhomogènes à gradient d'indice est présenté.

Le deuxième chapitre rappelle la technique d'obtention du gradient d'indice et expose les principales méthodes pour l'approximer. Une méthode d'optimisation de la discrétisation du gradient d'indice est proposée et détaillée. Des techniques pour estimer la masse des lentilles à gradient d'indice sont également présentées.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse des structures sphériques et hémisphériques. La technique dite de raccordement des modes ("mode matching technique" en anglais) basée sur les fonctions d'ondes sphériques est décrite et appliquée aux antennes lentilles de Luneburg et HMFÉ. Cette méthode est validée numériquement et expérimentalement.

Le quatrième chapitre présente l'extension de la technique analytique de développement modal décrite au chapitre précédent. En effet, la méthode permet désormais l'analyse numérique de structures non nécessairement sphériques ou hémisphériques. La mise en équation et les méthodes numériques de résolution du problème sont détaillées pour des structures stratifiées de forme arbitraire. La méthode est appliquée à l'étude d'objets diffractants à symétrie de révolution, ce qui ne réduit en rien la généralité du problème. Les résultats obtenus sont validés par comparaison à ceux des principaux logiciels commerciaux.

Le cinquième chapitre quantifie les performances en focalisation et dépointage des antennes lentilles HMFÉ. Ainsi, de nombreuses études, sur l'influence des paramètres physiques de la lentille et des configurations d'alimentation, sont menées en appliquant la technique de modélisation détaillée au troisième chapitre et en utilisant un logiciel commercial. Ces simulations sont validées par la caractérisation en bande Ka et W de plusieurs prototypes d'antennes lentilles.



# Chapitre 1

## Etat de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1 Les lentilles</b>	<b>7</b>
1.1.1 Lentilles à contraintes de propagation	7
1.1.1.1 La lentille de Rotman	7
1.1.1.2 La lentille discrète	9
1.1.2 Lentilles à base de métamatériaux	12
<b>1.2 Les lentilles diélectriques</b>	<b>13</b>
1.2.1 Lentilles homogènes	13
1.2.1.1 Les antennes lentilles	13
1.2.1.2 Les lentilles substrats	16
1.2.2 Lentilles inhomogènes	18
1.2.2.1 Les lentilles à diélectrique artificiel	18
1.2.2.2 Les lentilles à multi matériaux (à zones de Fresnel)	19
1.2.2.3 Les lentilles à gradient d'indice	21
<b>1.3 Les lentilles diélectriques inhomogènes à gradient d'indice</b>	<b>25</b>
1.3.1 Résultats théoriques sur les lentilles de Luneburg	25
1.3.1.1 Etude des performances en rayonnement	25
1.3.1.2 Amélioration des performances en rayonnement	29
1.3.1.3 Etude des performances de la lentille réflecteur	31
1.3.2 L'utilisation des lentilles de Luneburg	36
1.3.2.1 Utilisation effective	37
1.3.2.2 Utilisation potentielle	41
<b>1.4 Conclusion</b>	<b>42</b>

---

Les communications sans fil connaissent un important essor depuis plusieurs années. De nombreuses applications, telles que les communications de proximité ou par satellite, la sécurité automobile et plus largement les systèmes radar et modules de communications émission / réception se développent.

Cette croissance s'accompagne d'un besoin en conception d'antennes dont la contrainte principale est très souvent l'utilisation du minimum de puissance. Pour cela, une solution possible est la focalisation. Elle permet de concentrer l'énergie dans une zone donnée et accroît ainsi l'efficacité de rayonnement.

Il existe principalement trois grandes familles de structures focalisantes : les réflecteurs, les structures périodiques et les lentilles. Notre travail s'intéresse aux dispositifs focalisants à base de lentilles.

L'objectif de cet état de l'art est de situer les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice, étudiées dans cette thèse, parmi les systèmes de focalisation à base de lentilles, comme illustré sur la figure 1.1.

Ainsi, le principe de fonctionnement et les applications des différents types de lentilles sont tout d'abord présentés. L'accent est mis sur les lentilles diélectriques et, plus particulièrement, sur les lentilles inhomogènes à gradient d'indice. La dernière partie passe d'ailleurs en revue les études théoriques et les applications consacrées à ce type de lentille.

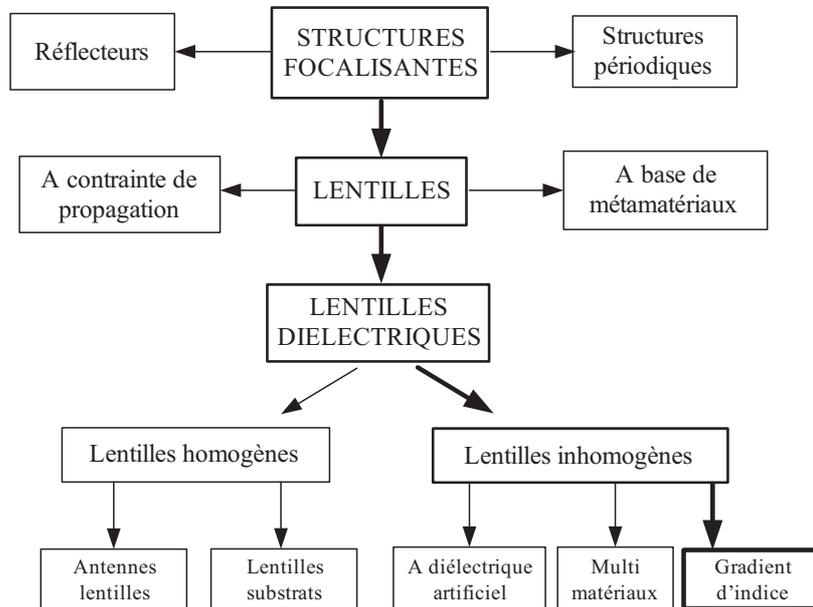


FIG. 1.1 – Les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice situées parmi les structures focalisantes.

## 1.1 Les lentilles

Dans cette partie sont présentés les principes et applications de deux types de lentille : les lentilles à contrainte de propagation et les lentilles à base de métamatériaux.

### 1.1.1 Lentilles à contraintes de propagation

Les lentilles à contraintes de propagation sont des structures en réseau où les éléments rayonnants ont leur phase, et parfois leur amplitude, corrigée afin de collimater le faisceau dans une direction donnée. Ainsi, l'onde incidente sur une face du réseau ne suit pas nécessairement la loi de Snell-Descartes en passant à travers la lentille, mais est contrainte de suivre les lignes de transmission.

#### 1.1.1.1 La lentille de Rotman

Parmi les lentilles à contrainte de propagation, la lentille de Rotman [1, 2] est certainement la plus connue.

#### Principe

En excitant un des ports d'entrée, une distribution quasi-uniforme en amplitude et quasi-linéaire en phase est obtenue au niveau des ports de sortie comme expliqué figure 1.2. A chaque entrée correspond un faisceau dans une direction donnée dont la directivité dépend du nombre d'antennes connectées en sortie de la lentille. Le balayage est alors réalisé par commutation entre les différentes voies d'entrée et il est nécessaire d'avoir autant d'entrées que de faisceaux désirés. Un état de l'art sur la conception et l'analyse de ce type de lentille est présenté dans [3].

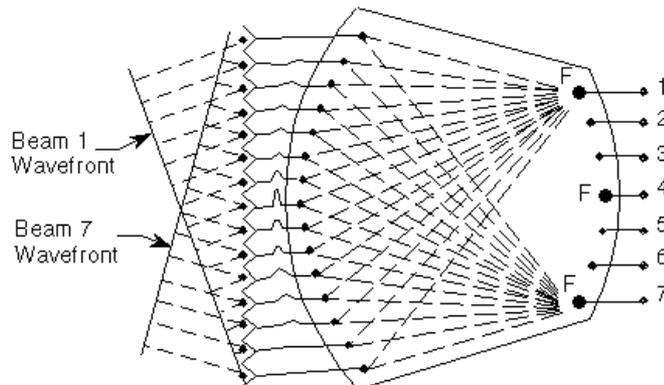


FIG. 1.2 – Schéma de principe de la lentille de Rotman [4].

### Applications

Les lentilles de Rotman peuvent être réalisées en technologie microruban [5], guide d'onde [6, 7], comme montré figure 1.3, mais également en technologie triplaque, guide d'onde NRD et onde de surface.

Dans [6], la lentille de Rotman, (figure 1.3(b)), effectue la correction en phase grâce aux guides d'onde et la correction en amplitude par la distance de propagation dans la cavité et l'utilisation de Tés magiques. Les diagrammes correspondants à ce prototype sont montrés figure 1.4. Un tel système permet d'obtenir d'excellentes performances à 36,8 GHz à la fois en focalisation et en multifaisceaux car l'ouverture couverte est d'environ  $\pm 20^\circ$ . L'inconvénient majeur de ce type de structure est son poids ainsi que la précision de l'usinage requis.

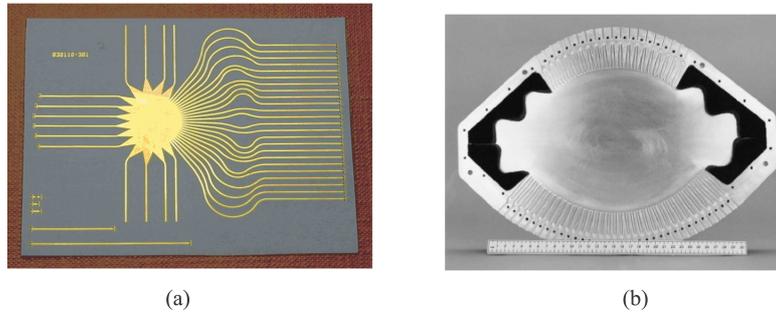


FIG. 1.3 – Photographies de prototype de lentilles de Rotman en technologie (a) microruban et (b) guide d'onde [6].

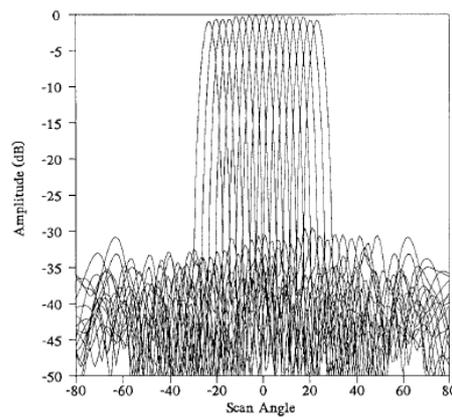


FIG. 1.4 – Diagramme de rayonnement en champ lointain à 36,8 GHz de la lentille de Rotman en guide d'onde [6].

Pour obtenir un balayage de faisceau à deux dimensions, plusieurs lentilles de Rotman peuvent être empilées. Un réseau phasé large bande à double polarisation qui rend

possible un balayage de faisceau en azimuth et en élévation est présenté dans [8] et montré figure 1.5. Un commutateur à diode PIN suivi d'un amplificateur faible bruit est utilisé pour chaque étage, ce qui permet un balayage de faisceau électronique avec un angle de vue de  $49^\circ$ . De bonnes performances en gain et adaptation sont obtenues sur la bande 34 – 40 GHz.

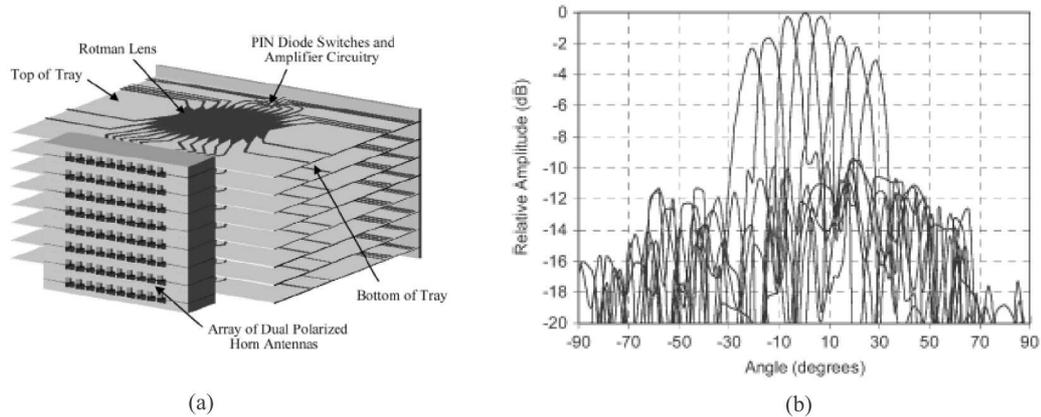


FIG. 1.5 – (a) Empilement de lentilles de Rotman avec la circuiterie active associée avec (b) les diagrammes de rayonnements mesurés correspondants à 35 GHz [8].

### 1.1.1.2 La lentille discrète

#### Principe

La lentille discrète a été développée, il y a une vingtaine d'années, par McGrath [9, 10]. Son fonctionnement est basé sur le principe de correction de phase de la lentille de Rotman. Il est schématisé à la figure 1.6.

Une lentille discrète est composée de deux réseaux d'antennes interconnectés. L'élément unitaire de la lentille est une paire d'antennes connectées par une ligne à retard. La longueur de cette ligne varie le long de la face du réseau de sorte qu'une onde plane incidente soit focalisée en un point dans le champ proche au voisinage de l'autre face du réseau. Les ondes planes incidentes de différentes directions sont ainsi focalisées en différents points sur la surface focale de la lentille, où sont placées les antennes réceptrices (appelées détecteurs) et la circuiterie pour échantillonner l'image. En d'autres termes, cette lentille peut être vue comme un dispositif qui permet de réaliser, sur l'arc focal, une transformée de Fourier discrète de l'onde plane incidente.

Il s'agit donc d'une lentille qui permet de faire du multifaisceaux. Elle est légère, plane et donc facile à réaliser en technologie imprimée.

#### Applications

Ce type de lentille a été récemment étudié à l'université du Colorado à Boulder. Ainsi,

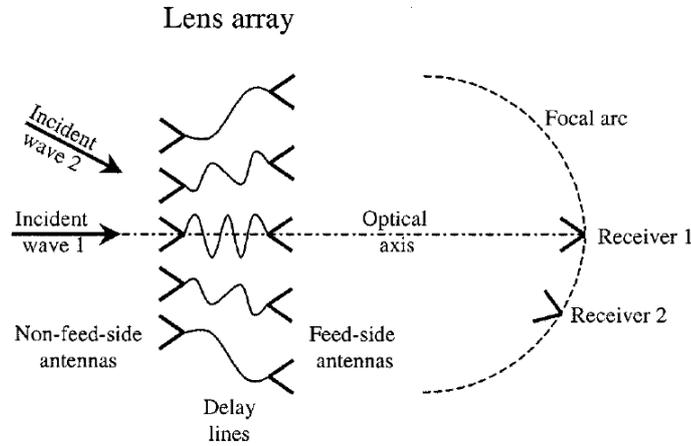


FIG. 1.6 – Schéma de principe d'une lentille discrète composée de deux réseaux d'antennes interconnectées [11].

dans [11, 12], un réseau à double polarisation fonctionnant à 10 GHz permettant de faire du multifaisceau est présenté. Le prototype et les performances obtenues sont présentées figures 1.7 et 1.8.

Une lentille discrète, montrée figure 1.9, composée d'un réseau de 952 éléments, est

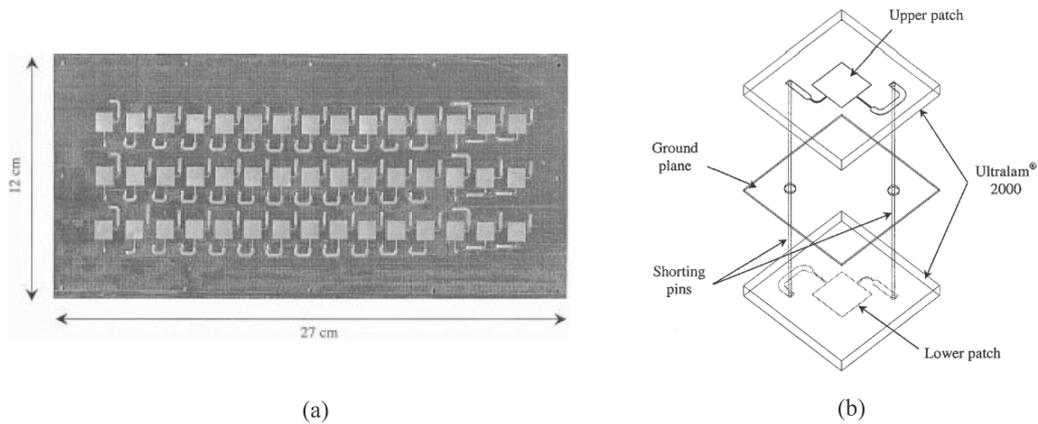


FIG. 1.7 – (a) Photographie d'une face du réseau de 45 éléments fonctionnant à 10 GHz montrant les antennes imprimées avec les lignes d'alimentation à double polarisation et (b) schéma de l'antenne élémentaire du réseau [11].

présentée dans [13]. Cette lentille est l'élément de base d'un réseau de stations terrestres destinées à accroître les transferts de données vers les satellites basses orbites.

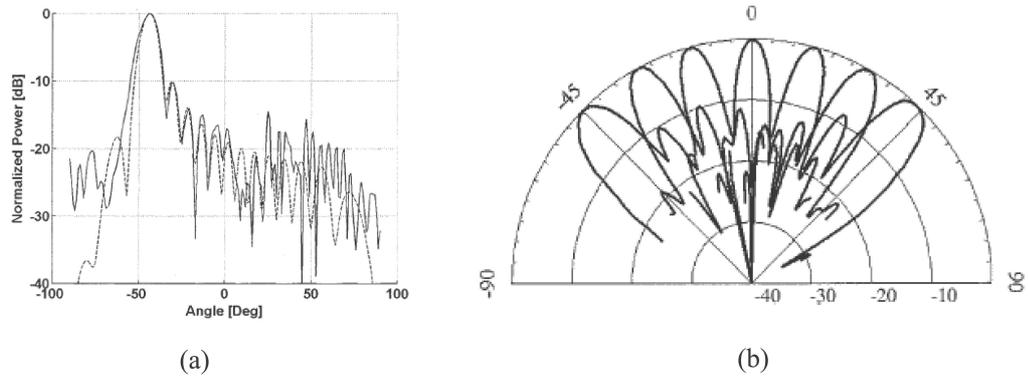


FIG. 1.8 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain à 10 GHz : (a) calculé (en pointillés) et mesuré (en continu) pour un faisceau dépointant à  $-45^\circ$  et (b) normalisés et mesurés pour différents récepteurs (ou émetteurs) positionnés le long de l'arc focal à  $-45^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $45^\circ$  [11].

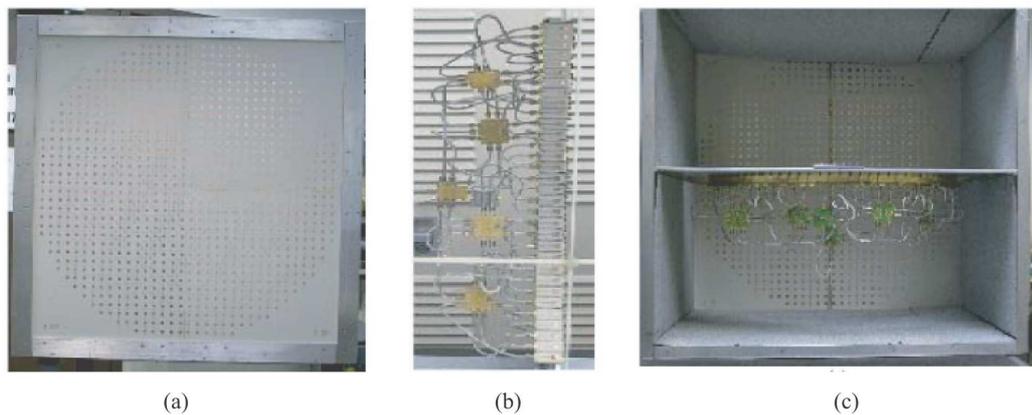


FIG. 1.9 – Photographies de la lentille discrète composée de 952 éléments sur chaque face du réseau : (a) le réseau à polarisation circulaire droite côté non alimenté, (b) le réseau de 32 détecteurs linéairement polarisés et son circuit de commutation et (c) le réseau de détecteurs et le réseau côté alimentation [13].

### 1.1.2 Lentilles à base de métamatériaux

Un nouveau type de lentilles, dites parfaites [14], émerge actuellement. Pour une fréquence donnée, leur indice de réfraction est de  $-1$ . Le secret de telles lentilles est que leur permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  et leur perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  sont toutes deux égales à  $-1$  pour au moins une fréquence. Ces propriétés font que l'indice de réfraction est aussi de  $-1$ , (figure 1.10). Dans ce cas, son impédance,  $Z = \sqrt{(\mu_r \mu_0)/(\epsilon_r \epsilon_0)}$ , est égale à celle du vide et un tel matériau est toujours adapté à l'air.

Il est montré qu'avec ce type de lentille, toute l'énergie, provenant des ondes propagatives comme des ondes évanescentes, contribue à la focalisation. Ainsi, exceptées les limitations pratiques d'ouverture et de perfection de surface de la lentille, il n'y a pas d'obstacle physique à la reconstruction parfaite de l'image, d'où le nom de lentille parfaite. D'un point de vue pratique, les matériaux les plus appropriés pour réaliser de telles lentilles aux fréquences optiques sont l'argent, l'or et le cuivre, (figure 1.11).

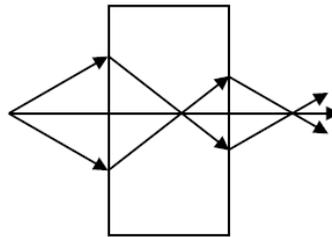


FIG. 1.10 – Schéma de principe de la lentille parfaite à indice de réfraction négatif ( $n = -1$ ). Les angles de réfraction sont inversés c'est à dire négatif par rapport à la normale [14].

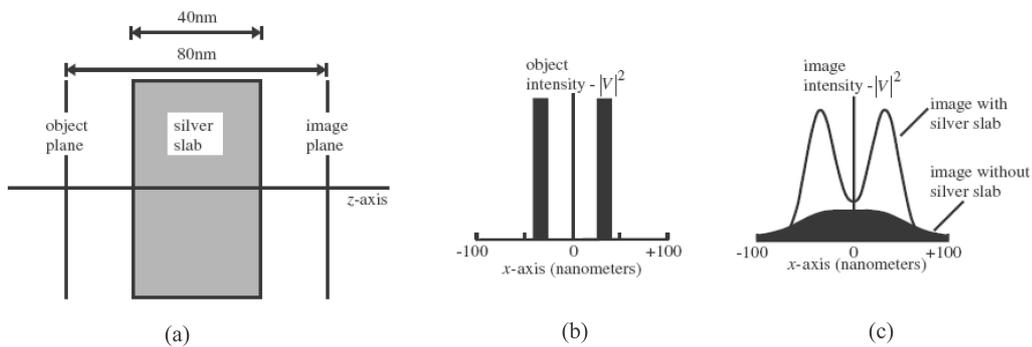


FIG. 1.11 – Lentille à base de métamatériaux. (a) Vue en coupe de la lentille. Un potentiel quasi-électrostatique dans le plan objet est reflété par l'action de la lentille en argent. (b) Champ électrostatique au niveau du plan objet. (c) Champ électrostatique au niveau du plan image avec et sans lentille en argent. La reconstruction serait parfaite si l'absorption dans l'argent était nulle [14].

## 1.2 Les lentilles diélectriques

Les dispositifs de focalisation utilisant une lentille diélectrique (figure 1.1) sont maintenant présentés.

Les antennes lentilles diélectriques sont composées d'une source d'excitation primaire (imprimée ou guidée) associée à un système de focalisation : une lentille diélectrique. Le principe de fonctionnement de ces lentilles est voisin des dispositifs de focalisation en optique. La lentille permet d'augmenter la directivité de la source primaire ou, de manière plus générale, de changer la forme de son rayonnement.

Les lentilles diélectriques utilisées sont soit homogènes, soit inhomogènes.

### 1.2.1 Lentilles homogènes

Les principes de conception des antennes lentilles homogènes sont basés sur les lois de l'optique (lois de Snell-Descartes, conservation de la puissance au sein d'un tube de rayon, longueur des trajets optiques) dont une synthèse a été rédigée par Lee [15].

Parmi ces lentilles homogènes, nous distinguons :

- les antennes lentilles pour lesquelles la lentille est séparée de la source primaire,
- les lentilles substrats, encore appelées lentilles intégrées, où la lentille est directement en contact avec la source.

#### 1.2.1.1 Les antennes lentilles

##### La lentille constante $K$

La lentille constante  $K$  est une sphère diélectrique homogène de permittivité notée  $K$ . Elle a été brevetée en 1963 par la société Emerson & Cuming, Canton, Massachusetts, [16].

Pour déterminer la constante  $K$ , il faut minimiser les aberrations (erreurs de phase) entre un rayon quelconque et celui passant par le centre de la sphère. D'après les paramètres géométriques donnés figure 1.12, nous calculons cette aberration :  $\Delta = n \cdot AD - (n \cdot AB + BC)$  où  $n = \sqrt{K}$ . Après normalisation, il vient :

$$\frac{\Delta/\lambda_0}{D/\lambda_0} = 2n\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\theta \text{ et } \frac{y}{D} = \frac{1}{2}\sin(2\theta). \quad (1.1)$$

En outre, les réflexions internes sont totales lorsque :

$$\sin\theta \geq \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (1.2)$$

Ces limitations sont reportées figure 1.13(a). Nous remarquons que le meilleur compromis en terme de constante diélectrique est  $K=3,5$ . En effet, pour ce cas, l'aberration maximale est de seulement  $\pm 0,004 D/\lambda_0$  pour une ouverture disponible réduite de 10 %.

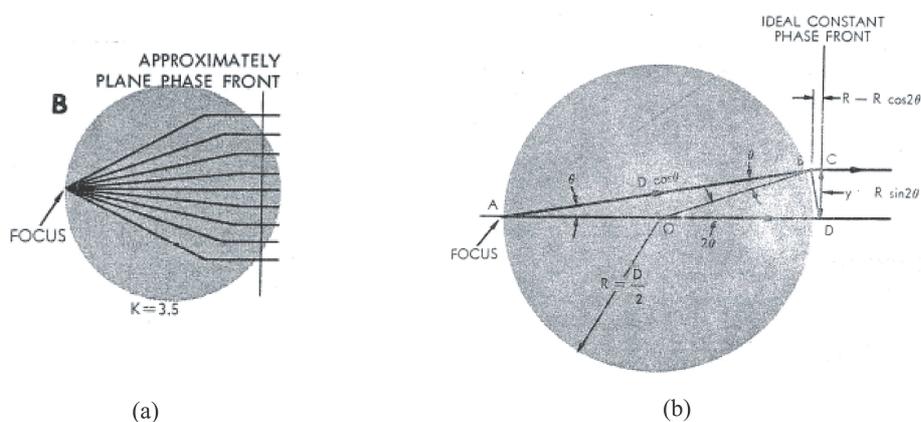


FIG. 1.12 – (a) Tracé de rayons au sein d'une lentille constante  $K$ . (b) Définition des paramètres géométriques caractérisant la lentille constante  $K$  [16].

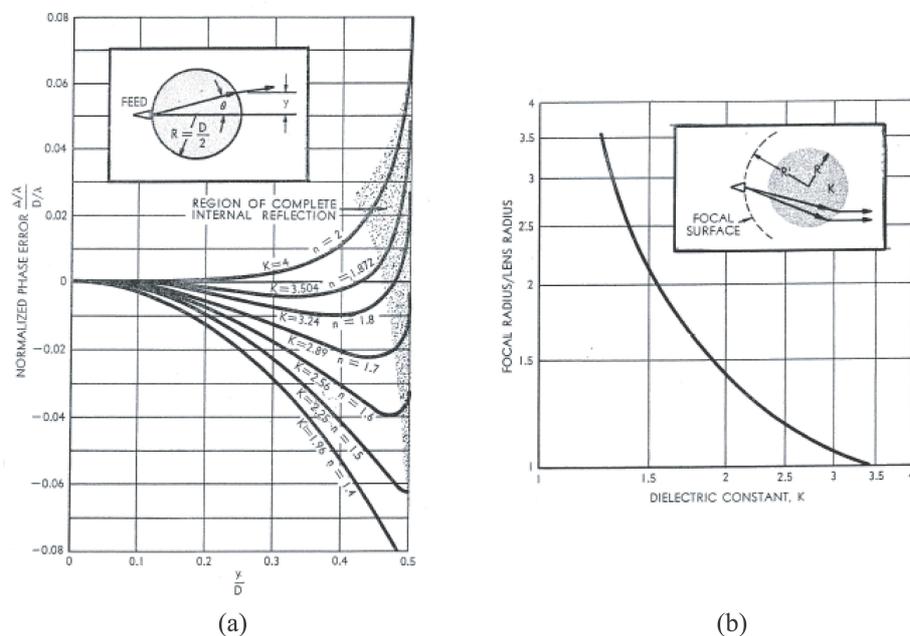


FIG. 1.13 – (a) Aberration normalisée de lentilles diélectriques de constante  $K$  pour une source à la surface de la lentille. (b) Evolution de la distance focale  $R'$  en fonction de la constante diélectrique  $K$  [16].

### Exemples d'applications

Les antennes lentilles homogènes peuvent être utilisées pour :

- Les radars d'assistance à la conduite automobile dans la bande 76–77 GHz. L'équipe du professeur G.M. Rebeiz de l'université du Michigan a proposé deux types d'antenne lentille pour cette application. Dans [17], une couronne de "Tapered Slot Antennas" (TSA) illumine une lentille en téflon de diamètre 5 cm, (figure 1.14(a)), ce qui permet de couvrir un secteur angulaire de  $180^\circ$  avec 33 faisceaux d'ouverture  $5,5^\circ$ , (figure 1.14(b)). Une structure plus compacte a été également développée [18]. Elle utilise une lentille hémisphérique et un plan réflecteur. Le schéma de principe est représenté figure 1.15(a), le prototype fabriqué figure 1.15(b) et les diagrammes mesurés figure 1.15(c).

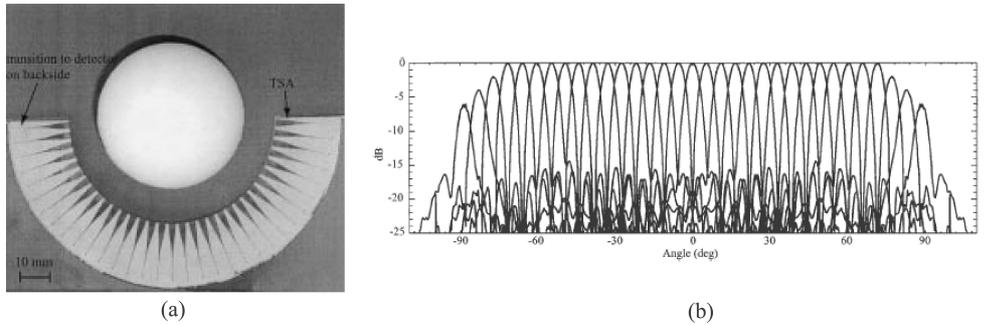


FIG. 1.14 – (a) Couronne de "Tapered Slot Antennas" illuminant une lentille sphérique en téflon. (b) Diagrammes de rayonnement correspondant mesurés dans le plan E à 77 GHz montrant les 33 faisceaux avec un recouvrement à  $-3,5$  dB [17].

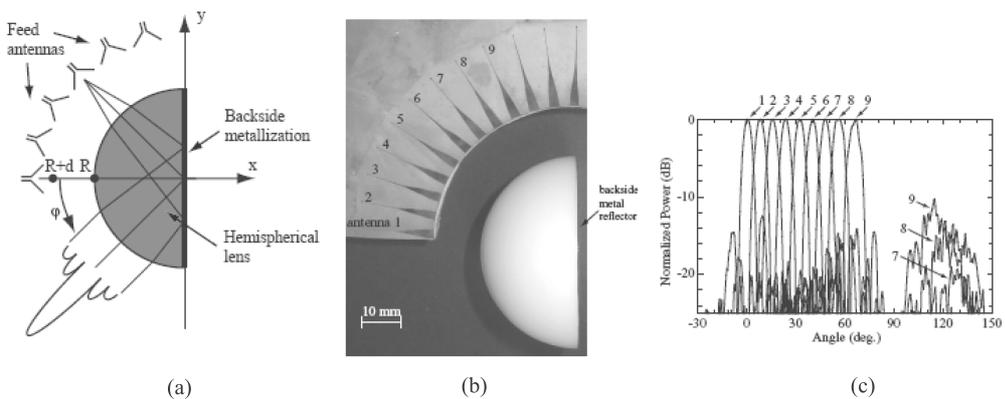


FIG. 1.15 – Antenne lentille hémisphérique multifaisceaux avec (a) le principe de fonctionnement (b) le prototype (c) les diagrammes de rayonnement mesurés à 77 GHz [18].

- Le suivi de satellites défilant en orbite basse. Une lentille homogène en mousse associée à un cornet est proposée dans [19, 20] pour cette application. Pour améliorer les performances de l'antenne lentille, un insert diélectrique est placé dans la source primaire pour corriger les aberrations de la lentille. Une photographie du prototype est montrée sur la figure 1.16.

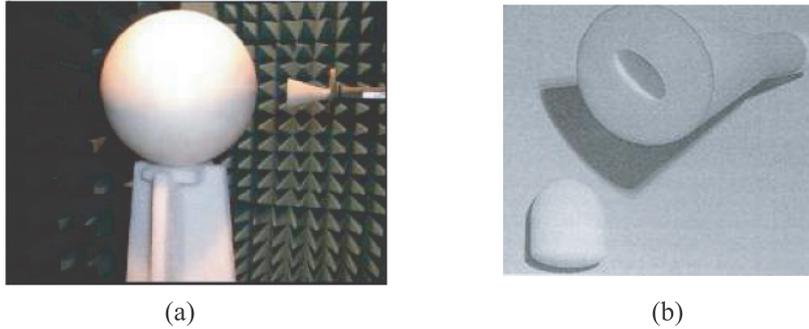


FIG. 1.16 – (a) Antenne lentille en technologie mousse. (b) Source primaire associée : cornet à insert diélectrique flottant [20].

### 1.2.1.2 Les lentilles substrats

#### Principe

En millimétrique, les substrats d'antennes deviennent guidants ce qui génère des ondes de surfaces néfastes pour certaines applications. Pour réduire ce phénomène, une solution consiste à imprimer les sources sur un substrat d'épaisseur infinie. Dans ce cas, les modes de substrat ne sont plus excités et le rayonnement se fait principalement dans le diélectrique.

Ce substrat d'épaisseur infinie peut être simulé en fabriquant les antennes sur la face plane d'un hémisphère diélectrique, (figure 1.17(a)). D'où le nom de lentille substrat. Comme tous les rayons arrivent en incidence normale sur la face sphérique de la lentille aucun piégeage n'est possible, empêchant ainsi l'apparition des ondes de surface.

Avec une telle configuration, il est possible d'intégrer des circuits hyperfréquences à l'arrière de la lentille, d'où le terme aussi utilisé d'antennes lentilles intégrées. La lentille est, en effet, en contact direct avec la source qui est très souvent imprimée.

En pratique, les lentilles utilisées ont généralement une forme hémisphérique, elliptique, hyperhémisphérique ou hémisphérique étendue, (figure 1.17).

#### Applications

Les applications des lentilles substrats sont nombreuses : systèmes de communications sans fil à 30 GHz [22, 23], au voisinage de 44 GHz [24] et 60 GHz [25], radars d'assistance à la conduite automobile [26]. Un état de l'art plus complet sur ce type

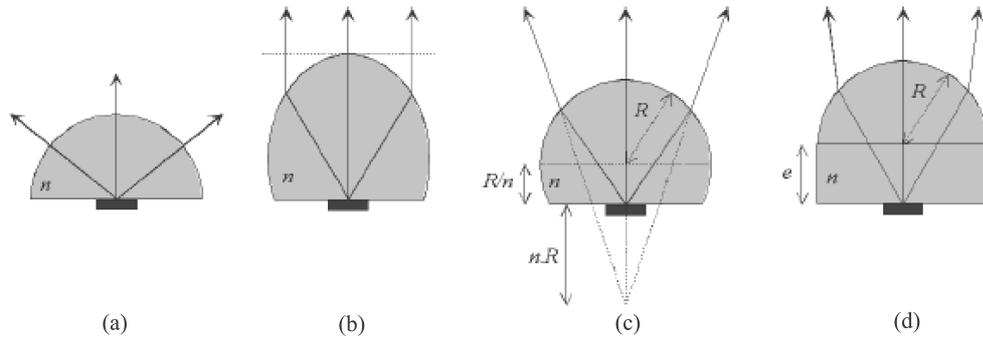


FIG. 1.17 – Configurations usuelles des lentilles substrats d'indice  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  [21]. (a) Hémisphère. (b) Ellipse. (c) Hyperhémisphère. (d) Hémisphère étendu.

de lentilles, et notamment leurs applications effectives et envisagées, est reporté au chapitre 1 des thèses [27, 28] ainsi que dans [29, 30].

Certaines applications nécessitent des diagrammes de rayonnement que les lentilles de forme canonique, montrées figure 1.17, ne peuvent pas réaliser. Pour cela, il est possible de concevoir des antennes dont la forme de la lentille est choisie pour satisfaire un diagramme de rayonnement donné.

Dans ce domaine, des travaux majeurs ont été effectués par l'IST à Lisbonne [24, 25, 31]. L'équipe de C. Fernandes a ainsi synthétisé des lentilles (simple couche, double couche et dôme diélectrique) répondant à un cahier des charges précis. Un exemple de réalisation est montré figure 1.18.

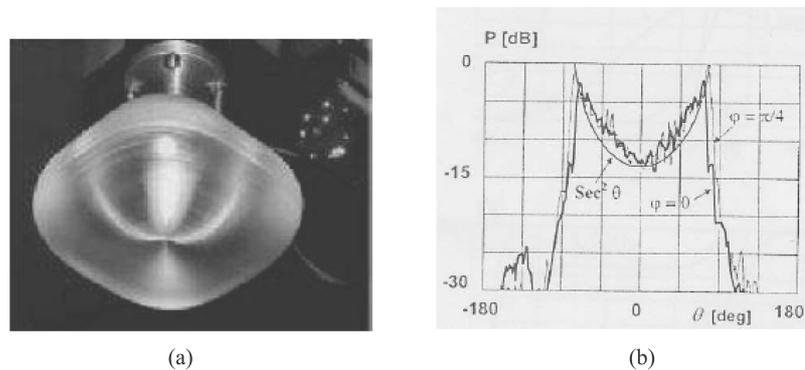


FIG. 1.18 – (a) Antenne lentille pour station de base (pièce carrée) avec les diagrammes de rayonnement théoriques et mesurés correspondant à 62,5 GHz [31].

Des structures de même type ont été étudiées à l'IETR par B. Barès [27] et G. Godi [28]. Les lentilles synthétisées ne sont plus nécessairement de révolution comme cela

était le cas auparavant. Cette avancée a permis de concevoir des antennes qui répondent à des spécifications en rayonnement encore plus complexes et variées. Un exemple de prototype réalisé, permettant d'obtenir un diagramme de rayonnement sectoriel, est montré figure 1.19.

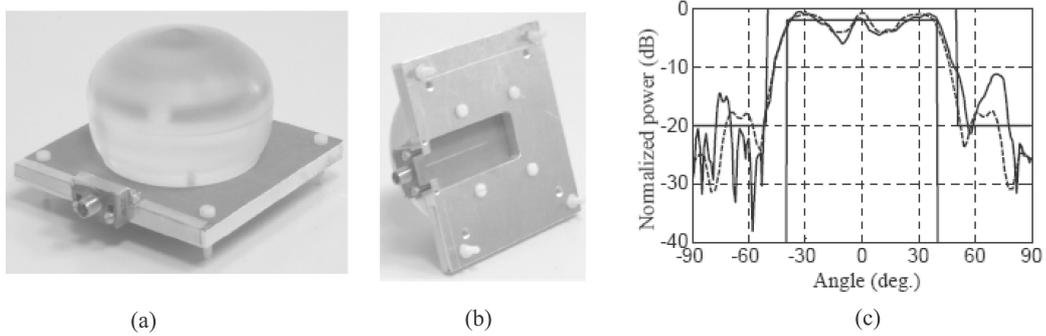


FIG. 1.19 – (a) Vue générale et (b) vue arrière du prototype de l'antenne lentille. (c) Comparaison entre la simulation et la mesure du prototype à 28 GHz [32].

## 1.2.2 Lentilles inhomogènes

Sous la dénomination "lentilles inhomogènes", nous distinguons (figure 1.1) les lentilles :

- artificielles,
- à multi-matériaux (de Fresnel) et
- à gradient d'indice.

En effet, ces trois types de lentilles n'ont pas le même principe de fonctionnement. Par ailleurs, la terminologie d'antenne lentille inhomogène est généralement utilisée car la source est, le plus souvent, séparée de la lentille.

### 1.2.2.1 Les lentilles à diélectrique artificiel

#### Principe

Les lentilles à diélectrique artificiel sont constituées d'un empilement de plaques métalliques formant un réseau de guides d'onde. Elles ont été introduites par Kock [33] et Ruze [34] dans les années 50.

La conception de ces lentilles se base sur la distance  $d$  entre les plaques et les profils de ces plaques, (figure 1.20(b)). Sur la figure 1.20(a), des lentilles à deux profils, pour obtenir une focalisation dans les deux plans, sont montrées.

La distance  $d$  entre les plaques est choisie de façon à ne laisser passer que le mode  $TE_1$ . Ainsi, la fréquence d'utilisation  $f$  est telle que  $f_c(TE_1) < f < f_c(TE_2)$ , ce qui entraîne  $\lambda_0/(2\sqrt{\epsilon_r}) < d < \lambda_0/(\sqrt{\epsilon_r})$ .

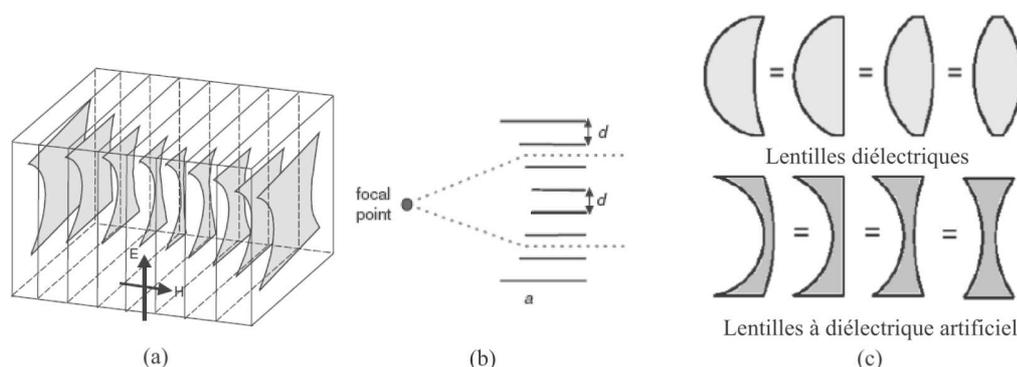


FIG. 1.20 – (a) Vue de principe tri-dimensionnelle d’une lentille à diélectrique artificiel convergente dans les plans E et H. (b) Vue de principe d’une lentille à un seul point focal avec un indice de réfraction constant et une face plane. (c) Equivalence de profil entre les lentilles diélectriques et les lentilles à diélectrique artificiel [36, 37].

Ainsi, l’indice de réfraction équivalent  $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2d\sqrt{\epsilon_r}}\right)^2}$  est inférieur à l’unité, d’où le terme de diélectrique artificiel. Contrairement aux lentilles diélectriques, la vitesse de phase est donc plus élevée dans le guide que dans l’air. Pour avoir un effet de focalisation, la largeur de la lentille est plus importante sur les bords qu’au centre. Sur la figure 1.20(c), la dualité entre les lentilles diélectriques et à diélectrique artificiel est représentée.

### Applications

Des travaux sur ce type de lentilles sont menés depuis plusieurs années par le LEST à Brest [35, 37]. L’application visée est le radar d’aide à la conduite dont la fréquence de fonctionnement est de 76 – 77 GHz.

Une solution technologique à bas coût est employée pour réaliser les lentilles. De la mousse est utilisée comme support diélectrique. Un pressage à chaud permet de contrôler son épaisseur. Le collage de feuillards de cuivre sur la mousse permet la métallisation de ses faces. Les motifs en cuivre sont alors gravés par une technologie classique imprimée.

Un exemple de mesure à 76 GHz d’une lentille à diélectrique artificiel ainsi fabriquée et alimentée par un cornet en mousse est reporté figure 1.21.

#### 1.2.2.2 Les lentilles à multi matériaux (à zones de Fresnel)

Les lentilles à zones de Fresnel focalisent l’énergie en utilisant les phénomènes d’interférences et de diffraction qui apparaissent lors de la traversée d’un plan percé ou de fentes comme représenté figure 1.22.

Les plus simples sont constituées d’une alternance d’anneaux concentriques transparents et opaques [38]. Les rendements de ces lentilles sont en général très faibles, de l’ordre de 10 à 15 %, car la moitié de l’énergie n’est pas utilisée dans la focalisation,

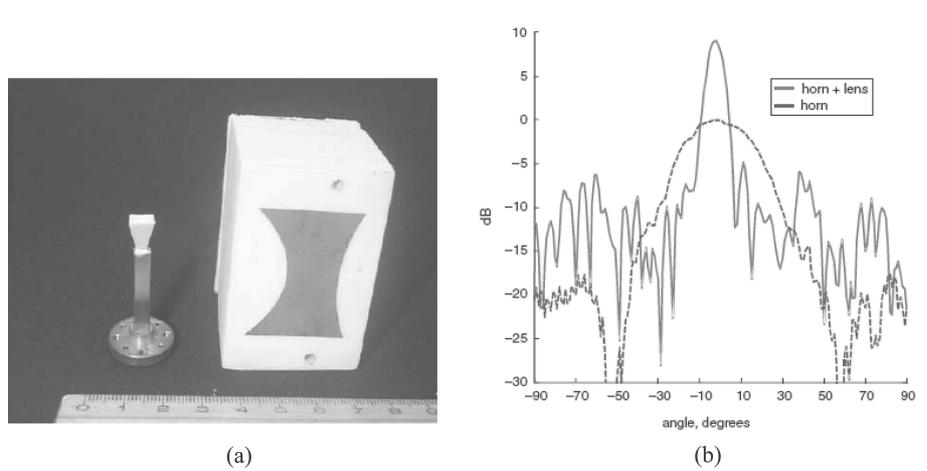


FIG. 1.21 – (a) Lentille artificielle avec sa source primaire (cornet) avec (b) les diagrammes de rayonnement correspondants mesurés dans le plan E à 76 GHz [36].

car réfléchi ou absorbé par les zones opaques, et la transformation de phase du front d'onde sphérique vers le plan est discontinue.

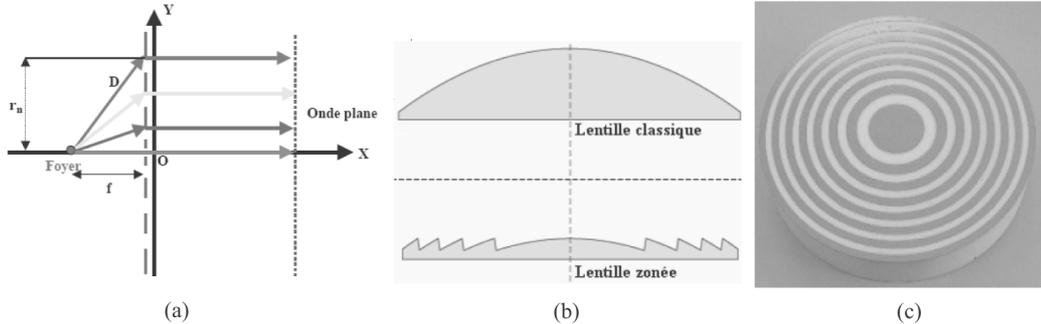


FIG. 1.22 – (a) Illustration du principe de fonctionnement de la lentille de Fresnel via le tracé de rayons. (b) Différence de profil entre une lentille classique et une lentille zonée. (c) Lentille à zones de Fresnel avec une zone centrée opaque [37].

Afin d'améliorer le transfert en énergie, [39, 40, 41] proposent d'ajouter des correcteurs de phase en jouant sur le profil de la lentille, comme montré figure 1.23(a,b,c), ou en insérant du diélectrique, figure 1.23(d). Le rendement de telles lentilles peut alors atteindre les 50 %.

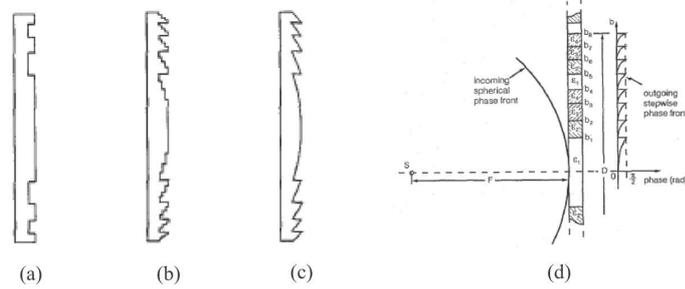


FIG. 1.23 – Différentes configurations de lentille de Fresnel : lentille rainurée (a) à plaque à inversion de phase, (b) à plaque quart d’onde, (c) de Fresnel et (d) lentille plane de Fresnel quart d’onde [39, 41].

### 1.2.2.3 Les lentilles à gradient d’indice

La focalisation peut être effectuée en utilisant des lentilles inhomogènes sphériques ou hémisphériques à gradient d’indice. Au sein de ces lentilles, l’indice de réfraction varie radialement selon une loi.

Les distributions d’indice  $n$  les plus connues, tracées figure 1.24, sont :

$$\begin{aligned}
 n(r) &= \sqrt{2 - r^2} && \text{Luneburg[42, 43, 45],} \\
 n(r) &= r && \text{Eaton[45, 47],} \\
 n(r) &= \sqrt{\frac{2}{r} - 1} && \text{Eaton-Lippmann[43, 45],} \\
 n(r) &= \frac{2}{1 + r^2} && \text{Maxwell fish-eye[43, 46].}
 \end{aligned}$$

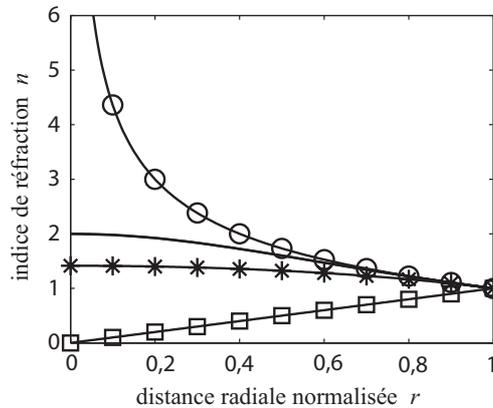


FIG. 1.24 – Distribution de l’indice de réfraction le long du rayon normalisé de la lentille pour le cas : Maxwell fish-eye (—), Eaton (□), Eaton-Lippman (○) et Luneburg (\*).

Toutes ces distributions peuvent également être utilisées dans un espace bi-dimensionnel. Les lentilles sont alors cylindriques ou hémicylindriques.

### Principe

Pour comprendre le principe de fonctionnement de ces lentilles, il est intéressant de regarder les tracés de rayons au sein des lentilles de Luneburg, Maxwell fish-eye, half Maxwell fish-eye et Eaton sur la figure 1.25.

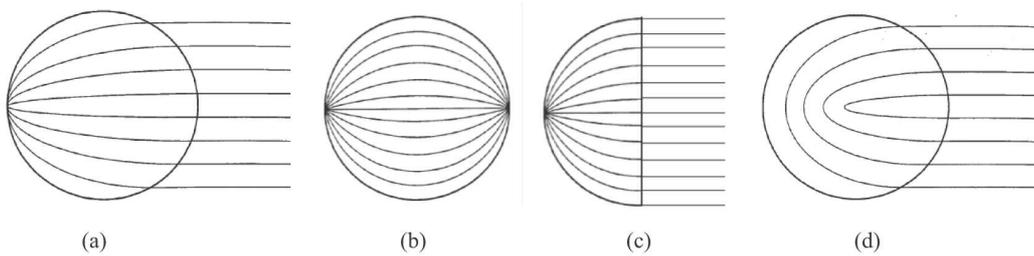


FIG. 1.25 – Tracé de rayons au sein d'une lentille (a) de Luneburg, (b) Maxwell fish-eye, (c) half Maxwell fish-eye et (d) Eaton-Lippmann [43].

- La lentille Eaton-Lippmann se comporte comme un miroir car les points objets et images sont confondus. C'est un réflecteur omnidirectionnel (figure 1.25(d)).

- La lentille Maxwell Fish-Eye (œil de poisson de Maxwell), notée MFE par la suite, a des points objets et images conjugués qui sont diamétralement opposés sur la surface de la lentille, (figure 1.25(b)).

Par symétrie, le plan médian de la lentille est équiphasé et les vecteurs d'onde sont, sur ce plan, parallèles à l'axe optique, (figure 1.25(c)). En d'autres termes, un point source placé sur un des points focaux produit, sur le plan médian, une onde localement plane.

Par conséquent, un point source placé sur le point focal d'une demi boule de même distribution génère en champ lointain un diagramme de rayonnement directif. Cette lentille est appelée Half Maxwell Fish-Eye (demi œil de poisson de Maxwell) et est notée HMFE par la suite.

- La lentille de Luneburg a une distribution d'indice telle que chaque point de sa surface est un point focal (figure 1.25(a)).

Les deux lentilles qui présentent les propriétés de focalisation les plus intéressantes sont donc les lentilles de Luneburg et HMFE.

La figure 1.26 illustre la focalisation à travers ces lentilles. Au point focal des lentilles de Luneburg et HMFE, l'onde sphérique créée par le dipôle de Hertz se "transforme" progressivement pour donner une onde plane du côté opposé de la lentille.

Cette propriété est montrée, d'une autre manière, par les diagrammes de rayonnement en champ lointain, reportés à la figure 1.27. De façon générale, pour les lentilles de Luneburg et HMFE, plus la taille électrique de la lentille est grande, meilleure est la focalisation.

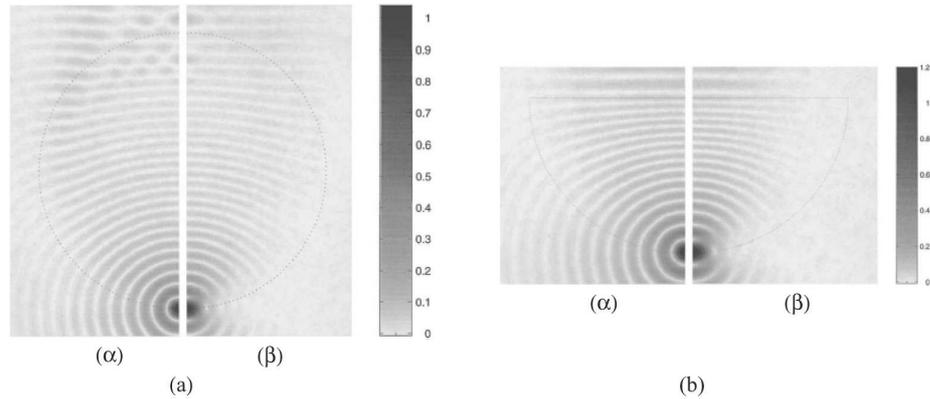


FIG. 1.26 – Distribution du champ électrique au voisinage (a) d'une lentille de Luneburg et (b) half Maxwell fish-eye en  $(\alpha)$  plan E et  $(\beta)$  plan H. Les lentilles ont un diamètre de  $10 \lambda$  et sont excitées par un dipôle de Hertz [44].

La description des lentilles de Luneburg et HMFE n'est pas plus développée ici, car elle fait l'objet d'une étude détaillée dans la partie suivante, ainsi que dans les prochains chapitres.

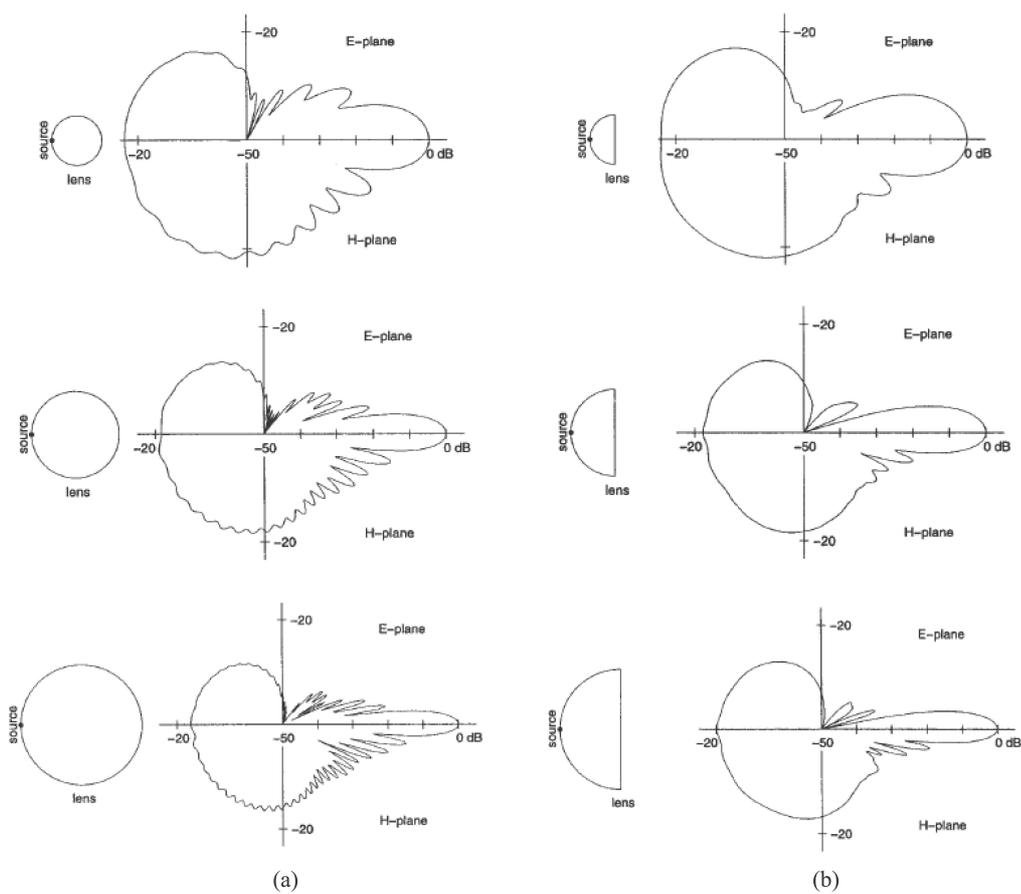


FIG. 1.27 – Diagrammes de rayonnement (a) d'une lentille sphérique de Luneburg et (b) d'une lentille half Maxwell fish-eye alimentées par un dipôle de Hertz. Du haut vers le bas, les diamètres des lentilles sont respectivement de  $4\lambda_0$ ,  $7\lambda_0$  et  $10\lambda_0$  [44].

## 1.3 Les lentilles diélectriques inhomogènes à gradient d'indice

Cette partie s'intéresse aux lentilles diélectriques inhomogènes à gradient d'indice de Luneburg et HMFÉ.

La lentille de Luneburg a déjà fait l'objet d'une quantité importante d'études théoriques. De plus, elle est utilisée dans de nombreuses applications, comme nous allons le voir maintenant.

La lentille HMFÉ, qui est beaucoup moins connue, est rarement rapportée dans la littérature. Elle est étudiée dans les chapitres suivants.

### 1.3.1 Résultats théoriques sur les lentilles de Luneburg

De nombreux travaux théoriques ont été menés sur les lentilles de Luneburg ces dernières années.

Ainsi, leurs performances (en directivité et rendement d'ouverture notamment) en fonction des paramètres de la lentille (nombre de coquilles, diamètre de la lentille, gaps d'air...) ont été largement étudiées. Des solutions pour les améliorer ont également été proposées. Par ailleurs, la lentille de Luneburg utilisée en réflecteur présente d'intéressantes propriétés, qui ont été exhaustivement rapportées dans la littérature.

Dans cette partie sont présentées les publications jugées les plus pertinentes sur ces thèmes.

#### 1.3.1.1 Etude des performances en rayonnement

Les techniques d'approximation du gradient d'indice sont au cœur du chapitre suivant, mais la technique des coquilles nécessite d'être introduite dès maintenant pour comprendre les études qui suivent.

Pour approcher le gradient d'indice de lentilles, il est possible d'assembler un nombre fini de coquilles homogènes concentriques. Une lentille ainsi fabriquée peut être appelée lentille stratifiée.

- Dans [48], Kim s'intéresse tout d'abord aux performances des lentilles de Luneburg stratifiées en fonction du nombre de coquilles.

Logiquement, en augmentant le nombre de coquilles, la lentille stratifiée se rapproche de la lentille idéale et ses performances s'améliorent comme montré figure 1.28. Cependant une sorte d'effet de seuil apparaît, car au delà de 15-20 coquilles l'amélioration des performances n'est plus vraiment significative.

Les diagrammes de rayonnement d'une lentille de diamètre  $60 \lambda_0$  sont montrés figure 1.29. Il ressort que les lobes secondaires de la lentille à 5 coquilles augmentent dès  $4^\circ$ , ceux de celle à 10 coquilles à  $12^\circ$ . Enfin, ils deviennent similaires pour les trois lentilles à partir de  $32^\circ$ .

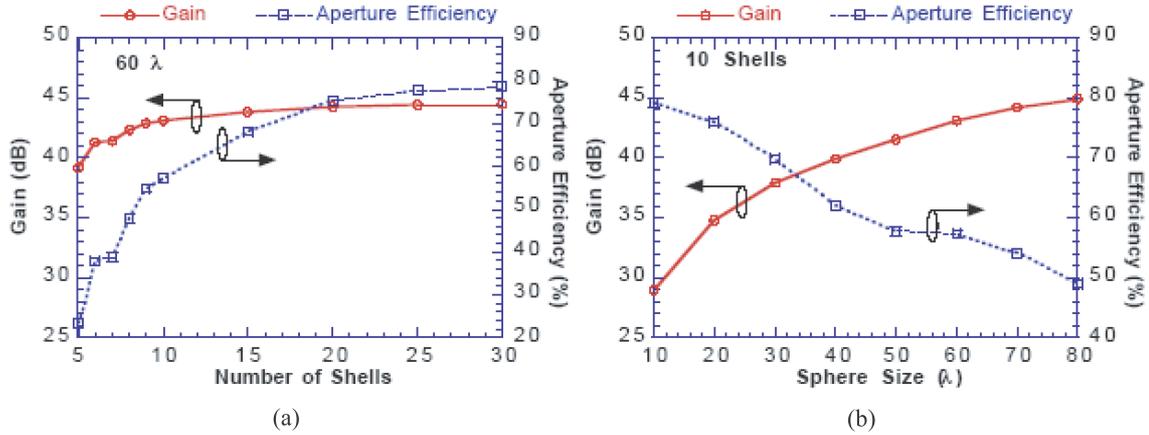


FIG. 1.28 – Gain et efficacité d’ouverture (a) en fonction du nombre de coquilles d’une lentille de Luneburg de diamètre  $60 \lambda_0$  et (b) en fonction du diamètre de la lentille pour 10 coquilles [48].

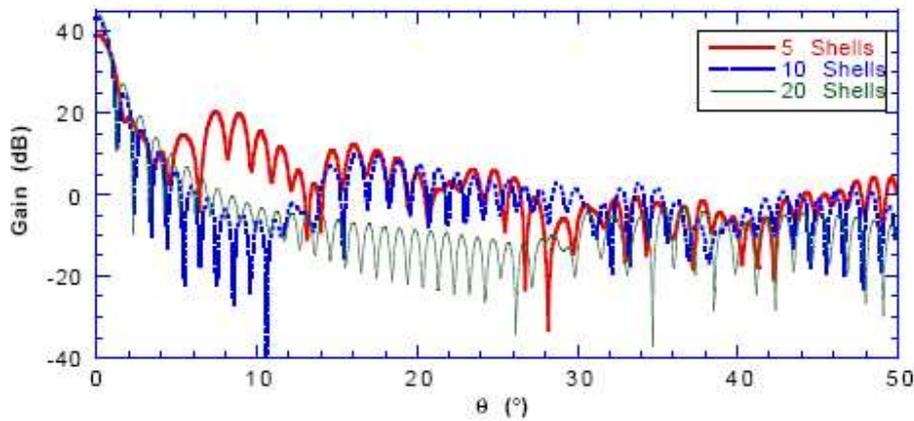


FIG. 1.29 – Diagramme de rayonnement d’une lentille de Luneburg de diamètre  $60 \lambda_0$  avec différents nombre de coquilles [48].

Par ailleurs, le problème inhérent à la fabrication de lentilles stratifiées est l’apparition de gaps d’air entre les coquilles. La dégradation des performances, entraînée par la présence de ces espaces d’air entre chaque coquille, est étudiée dans [48].

Ainsi, l’influence de la taille des gaps d’air sur les performances (gain et efficacité d’ouverture) d’une lentille de Luneburg de diamètre  $60 \lambda_0$ , pour un nombre différent de coquilles, est montrée figure 1.30. Il apparaît que les gaps d’air détériorent rapidement et de façon importante les performances de l’antenne lentille.

Logiquement, plus le nombre de coquilles est important, plus la dégradation des performances est rapide. Ainsi, si les gaps d’air sont supérieurs à  $0,3 \lambda_0$ , une lentille à 10

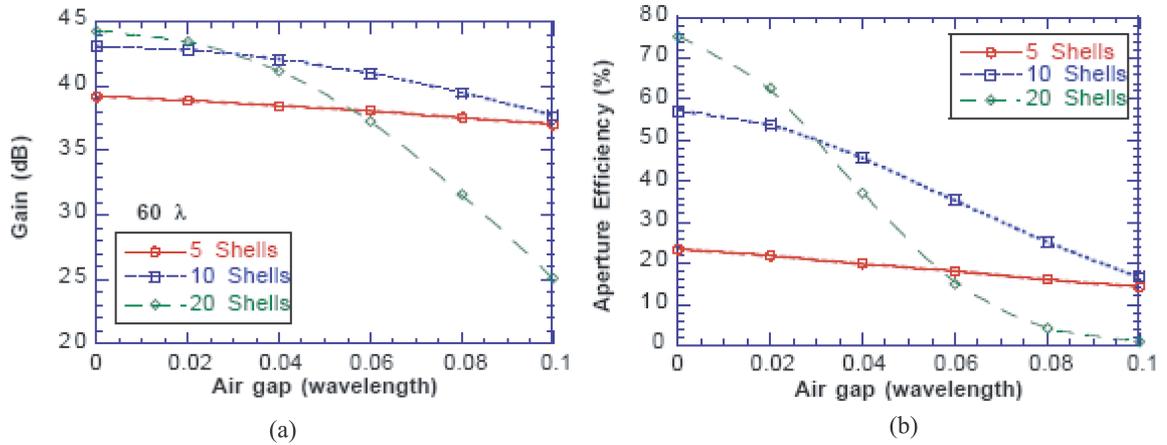


FIG. 1.30 – Influence des gaps d'air sur (a) le gain et (b) l'efficacité d'ouverture d'une lentille de Luneburg de diamètre  $60 \lambda_0$  à 5, 10 et 20 coquilles [48].

coquilles offre de meilleures performances qu'une lentille à 20 coquilles.

- Ingerson s'est également penché, dans [49, 50], sur la relation entre le nombre de coquilles et l'efficacité d'ouverture, ainsi que sur les effets négatifs des gaps d'air entre les couches sur le gain de l'antenne lentille stratifiée.

Pour cela, il étudie les niveaux de perte d'une lentille de Luneburg en fonction de son rayon et de son nombre de coquilles. Il apparaît que l'utilisation de coquilles d'épaisseur  $1 \lambda_0$  entraîne des pertes inférieures à 0,2 dB, tandis qu'une épaisseur de  $2 \lambda_0$  cause environ 1 dB de pertes. Pour éviter l'apparition de phénomènes de résonance consommant de l'énergie au sein même des coquilles, l'épaisseur de celles-ci ne doit pas dépasser  $1 \lambda_0$ . Compte tenu des tolérances de fabrication, cela rend possible la réalisation de lentilles pouvant fonctionner jusqu'à 200 GHz.

L'influence des gaps d'air sur les performances des lentilles discrètes de Luneburg est reportée figures 1.31 et 1.32. Il ressort à nouveau que les performances des lentilles se dégradent d'autant plus rapidement que le nombre de coquilles est important. Ainsi, pour une lentille à 35 coquilles de diamètre  $70 \lambda_0$ , des gaps d'air de 0,15 % du rayon de la lentille provoquent jusqu'à 4 dB de pertes sur le gain. Cela correspond, pour une lentille de rayon 152,4 mm, à des gaps d'air de 0,23 mm.

Il ressort de ces études sur les lentilles stratifiées qu'un compromis entre le nombre de coquilles et les performances de l'antenne lentille est à trouver. En effet, théoriquement, plus la lentille est fortement discrétisée, meilleures sont ses performances. Mais en pratique, ces performances sont dégradées par la présence de gaps d'air dont le nombre augmente avec le nombre de coquilles.

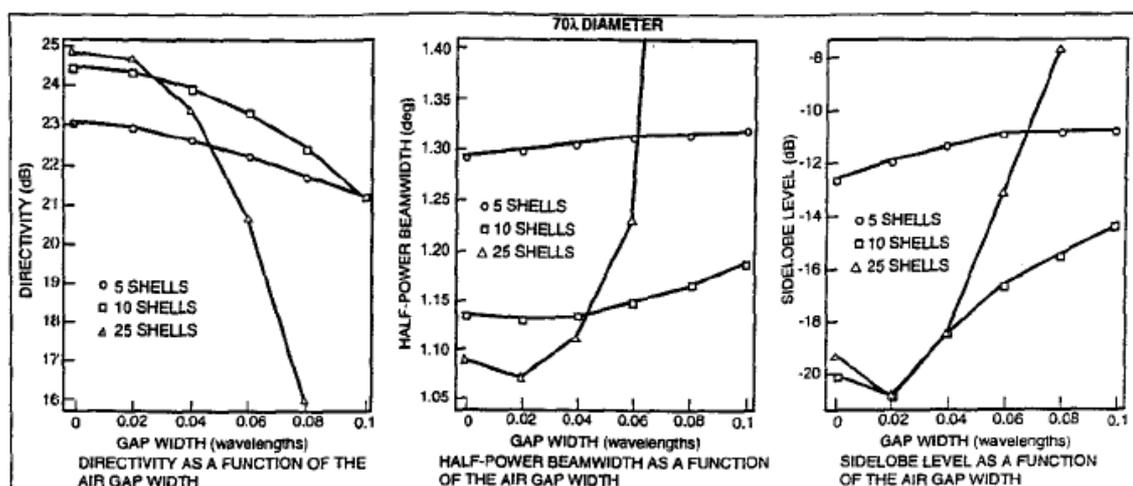


FIG. 1.31 – Influence des gaps d'air sur la directivité, l'ouverture à mi-puissance et les niveaux des lobes secondaires d'une lentille plate de Luneburg discrète [49].

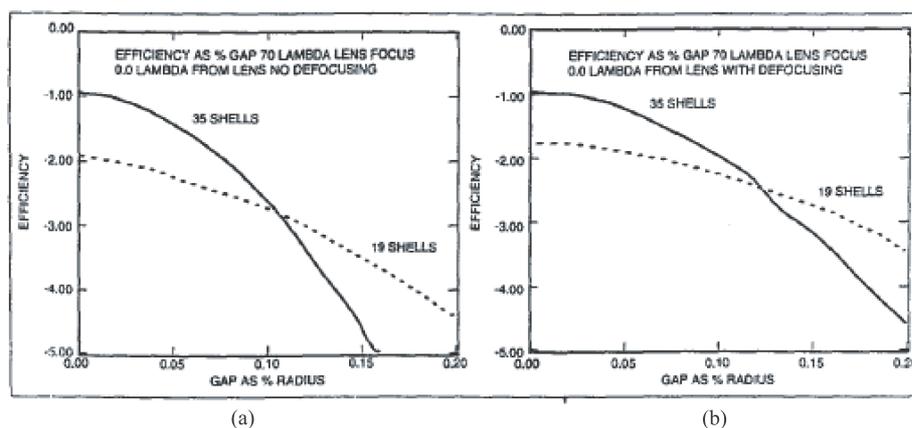


FIG. 1.32 – Influence des gaps d'air sur l'efficacité d'une lentille discrète de Luneburg de diamètre  $70\lambda_0$  avec (a) et sans (b) défocalisation [49].

### 1.3.1.2 Amélioration des performances en rayonnement

Deux publications originales, visant à améliorer les performances en rayonnement de l'antenne lentille, sont maintenant présentées en détails.

- Le professeur Rahmat-Samii et son équipe de l'université de Californie à Los Angeles ont cherché à concevoir une antenne lentille de Luneburg en utilisant le plus petit nombre de coquilles, tout en conservant un gain et des niveaux de lobes secondaires acceptables.

Pour cela, dans [51], il propose de synthétiser des antennes lentilles non uniformes, où la permittivité  $\epsilon_i$  et l'épaisseur  $t_i$  de chaque coquille est optimisée. En effet, un algorithme génétique [52, 53] est utilisé pour contrôler le gain ainsi que les niveaux des lobes secondaires.

La géométrie de l'antenne lentille et la procédure menée sont schématisées figure 1.33.

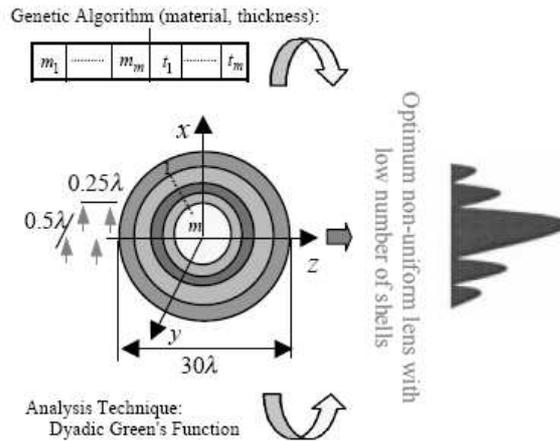


FIG. 1.33 – Algorithme génétique intégré avec une solution modale des équations de Maxwell pour synthétiser des lentilles non uniformes [51].

La source utilisée est un réseau de quatre dipôles formant une antenne appelée "end-fire". Cette technique a pour avantage de modéliser un cornet de façon peu coûteuse en temps de calcul. L'analyse électromagnétique utilise les fonctions de Green dyadiques appliquées aux géométries multi-couches sphériques.

La fonction de coût  $F$  prend en compte le gain maximum  $G_0$ , le diagramme en gain de l'antenne lentille  $G(\theta)$  et l'enveloppe des lobes secondaires  $f(\theta)$  :

$$F(\epsilon_{r1}, t_1, \dots, \epsilon_{rm}, t_m) = \alpha \cdot G_0 + \beta \cdot \min [f(\theta) - G(\theta)]_{\text{lobes secondaires}} \quad (1.3)$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  servent à pondérer la fonction de coût selon l'importance à accorder au gain maximum ou aux niveaux des lobes secondaires. La fonction  $f$  des lobes secondaires a la forme suivante :

$$f(\theta) = 12 - 38 \log(\theta^\circ / 5,8^\circ) \quad [\text{dB}] \quad (1.4)$$

Le diamètre de la lentille considéré est  $30 \lambda_0$ . Les caractéristiques des lentilles uniformes et optimisées pour  $(\alpha = 1, \beta = 0)$  et  $(\alpha = 1, \beta = 0,5)$  sont données figure 1.34.

Lentille uniforme			Lentille optimisée ( $\alpha=1, \beta=0$ )			Lentille optimisée ( $\alpha=1, \beta=0,5$ )		
i	$\epsilon_{ri}$	$t_i / \lambda_0$	i	$\epsilon_{ri}$	$t_i / \lambda_0$	i	$\epsilon_{ri}$	$t_i / \lambda_0$
1	1,18	3	1	1,203	2,798	1	1,075	1,819
2	1,50	3	2	1,469	2,047	2	1,191	1,232
3	1,74	3	3	1,642	2,030	3	1,725	3,710
4	1,90	3	4	1,797	2,464	4	1,815	1,615
5	1,98	3	5	1,942	5,661	5	1,948	6,624

FIG. 1.34 – Paramètres (permittivité  $\epsilon_{ri}$  et épaisseur  $t_i$ ) des lentilles de Luneburg à 5 coquilles, uniforme et optimisées avec  $(\alpha = 1, \beta = 0)$  et  $(\alpha = 1, \beta = 0,5)$ .

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain d'une lentille uniforme et optimisée pour le cas où la directivité est privilégiée ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ) sont comparés figure 1.35(a). Il ressort que l'optimisation permet d'augmenter la directivité de 1 dB tout en abaissant les lobes secondaires de 6,5 dB. D'autres comparaisons menées avec un nombre de coquilles différent montrent l'intérêt de la méthode proposée. De plus, l'influence des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  est mise en évidence à la figure 1.35(b), où l'on observe que leur application simultanée dans la fonction de coût conduit aux meilleurs diagrammes.

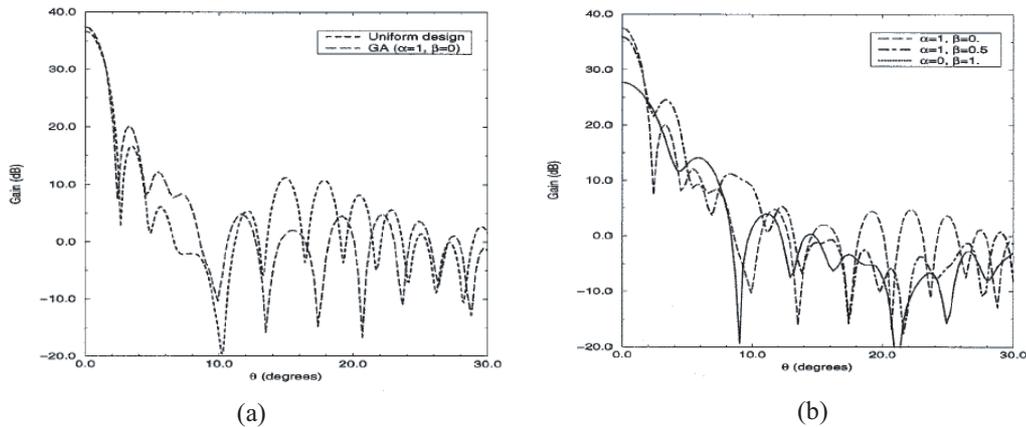


FIG. 1.35 – Diagrammes en gain de lentilles de Luneburg à 5 coquilles de diamètre  $30 \lambda_0$  : (a) uniforme et optimisée ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ) et (b) optimisées pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  [51].

Pour résumer, il est montré dans ce papier que la synthèse d'antennes lentilles optimisées non uniformes permet d'améliorer les performances en rayonnement (directivité et niveau des lobes secondaires) par rapport aux lentilles uniformes.

- J. Sanford et Z. Sipus proposent d'illuminer les lentilles de Luneburg et constante K par un réseau de sources pour diminuer les lobes secondaires [55]. La source élémentaire, un cornet corrugé circulaire, est d'abord étudiée.

Son avantage est de présenter un centre de phase stable et des lobes secondaires bas. L'influence de l'ouverture du cornet sur les diagrammes de rayonnement des antennes lentilles est reportée figure 1.36. Il apparaît que les niveaux des lobes secondaires diminuent quand l'ouverture du cornet augmente. L'encombrement lors de la mise en réseau impose toutefois une limitation quant au diamètre de l'élément rayonnant.

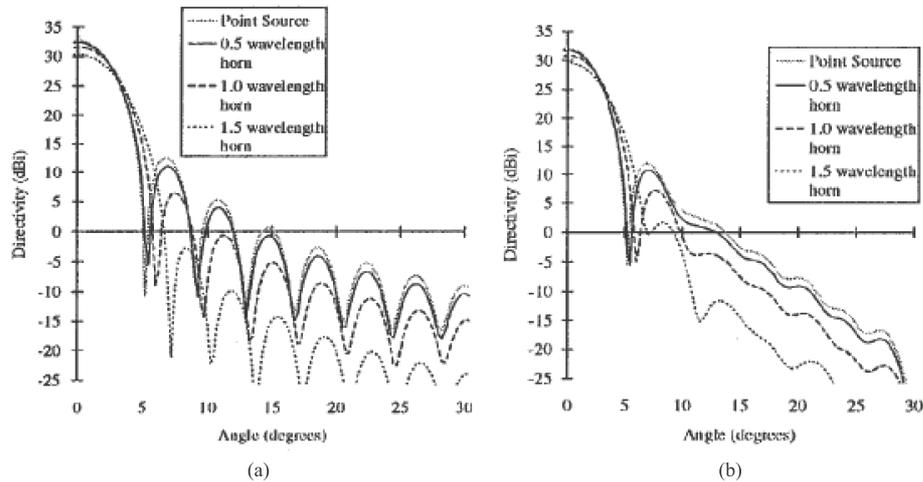


FIG. 1.36 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain de lentilles de Luneburg (a) et constante K (b) de diamètre  $15 \lambda_0$  illuminées par un point source et des cornets circulaires corrugés d'ouverture  $0,5 \lambda_0$ ,  $1 \lambda_0$  et  $1,5 \lambda_0$  [55].

Les cornets sont ensuite mis en réseau comme représenté figure 1.37. L'amplitude et la phase de chaque élément est optimisée de façon à obtenir les lobes secondaires les plus bas possibles. Une baisse significative du niveau des lobes secondaires, montrée figure 1.38, est obtenue pour un réseau de sept sources illuminant des lentilles de diamètre  $15 \lambda_0$ .

Il est possible d'améliorer les performances des antennes lentilles inhomogènes de façon non négligeable en jouant sur les caractéristiques de la lentille (épaisseurs et permittivités des coquilles) et celles de la source.

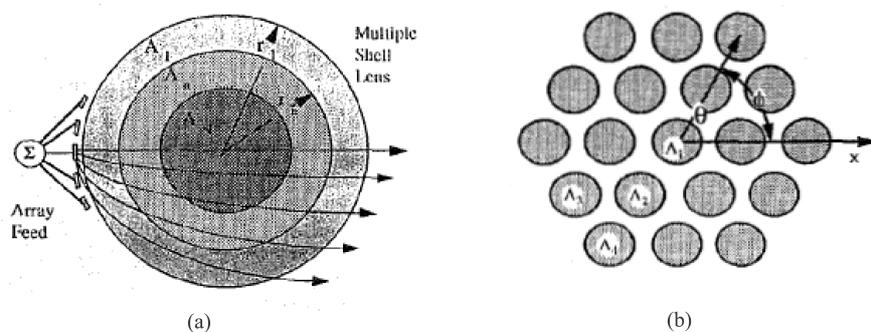


FIG. 1.37 – (a) Réseau de sources alimentant une lentille de Luneburg avec (b) le réseau seul [55].

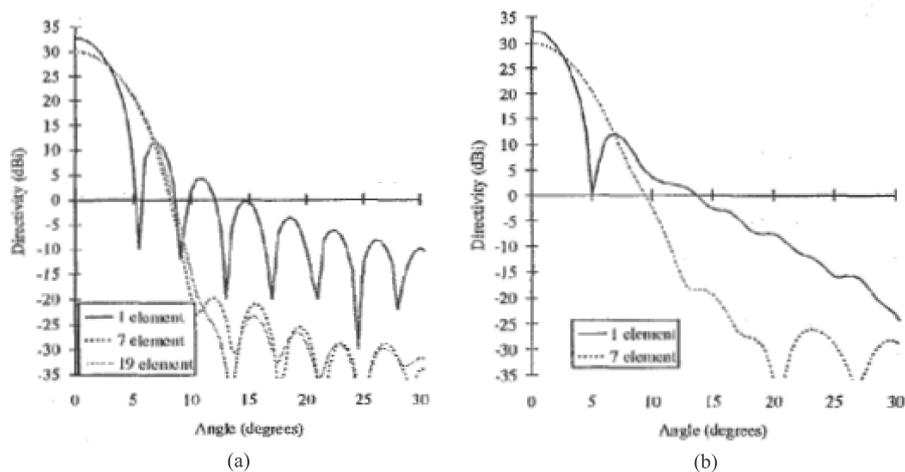


FIG. 1.38 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain de lentilles de Luneburg (a) et constante  $K$  (b) de diamètre  $15 \lambda_0$  illuminées par une source et un réseau de sources [55].

### 1.3.1.3 Etude des performances de la lentille réflecteur

En plaçant une calotte métallique sphérique sur une partie de la lentille, comme montré figure 1.39, l'énergie reçue est renvoyée dans la direction d'incidence. La lentille de Luneburg ainsi utilisée est un parfait réflecteur passif.

Divers travaux théoriques menés sur la lentille réflecteur (limitations pour la calibration radar, étude de réflectivité, méthodes de modélisation) sont présentés.

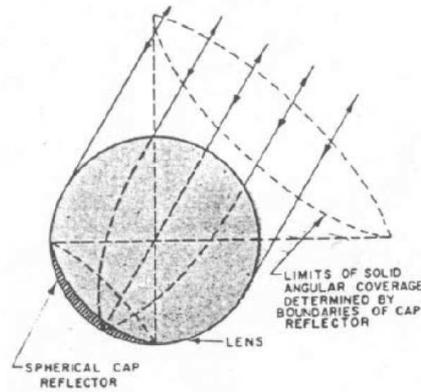


FIG. 1.39 – Réflecteur passif constitué d'une lentille de Luneburg associée à une calotte métallique.

- La lentille réflecteur peut être utilisée pour la calibration des radars, comme schématisé à la figure 1.40(a). Dans [56], sont mises en évidence les limitations de cette technique de calibration : l'angle de séparation entre l'émetteur et le récepteur, l'angle bi-statique, doit être faible par rapport à l'ouverture à mi-puissance du champ rétro-diffusé par le réflecteur de Luneburg. Si ce n'est pas le cas, des erreurs de plusieurs décibels peuvent apparaître.

Une approximation de l'angle d'ouverture à mi-puissance du champ rétro-diffusé,  $\theta_{-3dB}$ , lorsque la moitié de la surface de la lentille est couverte par une calotte métallique, est proposée par [56] :

$$\theta_{-3dB} = \frac{29,2^\circ}{a/\lambda_0}, \quad (1.5)$$

où  $a$  est le rayon de la lentille de Luneburg. Cette formule est validée par comparaison avec la mesure sur la figure 1.40(b).

- Une étude de la réflectivité de réflecteurs à lentilles sphériques est menée dans [57]. L'analyse est effectuée par la méthode de régularisation basée sur les séries de Mie, ce qui permet de considérer toute taille de lentille.

Dans un premier temps, la distribution du champ dans la zone focale pour différentes tailles et permittivités de lentilles est étudiée (figure 1.41(a)). Au maximum d'intensité, l'allure du champ dans un plan transverse est relevée, (figure 1.41(b)), ce qui

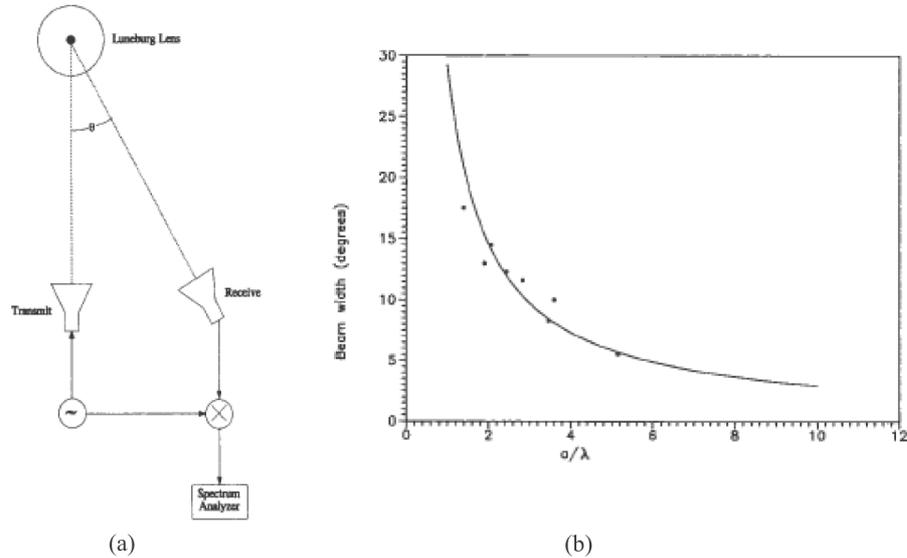


FIG. 1.40 – (a) Schéma de principe de la calibration bi-statique d'un radar à l'aide d'un réflecteur de Luneburg. (b) Ouverture à mi-puissance du champ rediffusé par le réflecteur de Luneburg : comparaison entre la formule (1.5) (—) et la mesure (···) [56].

permet de déduire les tailles des réflecteurs à utiliser. Enfin, les Surfaces Equivalentes Radar (SER) de lentilles de Luneburg sont comparées à celles d'une lentille homogène de permittivité 3,7 pour différentes tailles électriques de lentilles (figure 1.42). Il apparaît que les valeurs de SER sont plus élevées et la dépendance spectrale est moindre pour la lentille homogène, montrant ainsi l'intérêt d'un tel réflecteur.

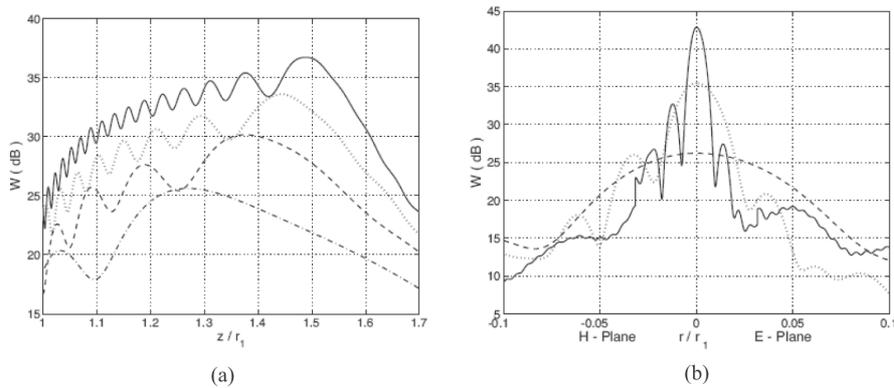


FIG. 1.41 – (a) Distribution de la densité d'énergie électromagnétique le long de l'axe optique d'une lentille sphérique homogène ( $\epsilon_r = 2,1$ ) pour  $2r_1/\lambda_0 = 20$  (·-), 50 (- -), 100 (···) et 200 (—). (b) Allure de la tâche focale dans les plans E et H d'une lentille sphérique homogène ( $\epsilon_r = 3,7$ ) pour  $2r_1/\lambda_0 = 10$  (- -), 50 (···) et 200 (—) [57].

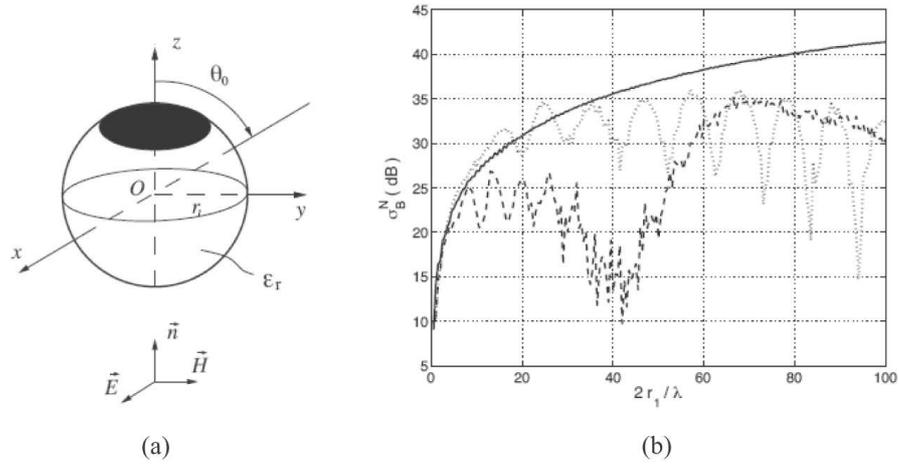


FIG. 1.42 – (a) Schéma d'une onde plane incidente sur une lentille sphérique avec une calotte métallique. (b) Analyse comparative de la dépendance spectrale de réflecteurs ( $\theta_0 = 60^\circ$ ) basés sur une lentille sphérique homogène ( $\epsilon_r = 3,7$ ) (—), une lentille de Luneburg à 3 (---) et 5 (···) coquilles [57].

- Les japonais de l'université de Gunma se sont également intéressés à la réflectivité du réflecteur de Luneburg [58, 59, 60, 61]. Une de leurs études [58] consiste à modéliser le champ proche de la lentille en utilisant une décomposition modale et la méthode de raccordement des points ("Point Matching Method" en anglais) pour prendre en compte le métal.

La théorie est confrontée avec la simulation pour le cas d'une lentille de Luneburg à 6 coquilles et de taille électrique  $15,2 \lambda_0$ . L'onde provenant du cornet arrive en incidence normale sur la lentille dont la moitié de la surface est couverte de métal. Le détecteur est un monopôle  $\lambda_0/4$  et la mesure est effectuée à 10 GHz.

Le schéma de principe du dispositif et la comparaison entre la mesure et la théorie sont montrés figure 1.43 (a) et (b) respectivement.

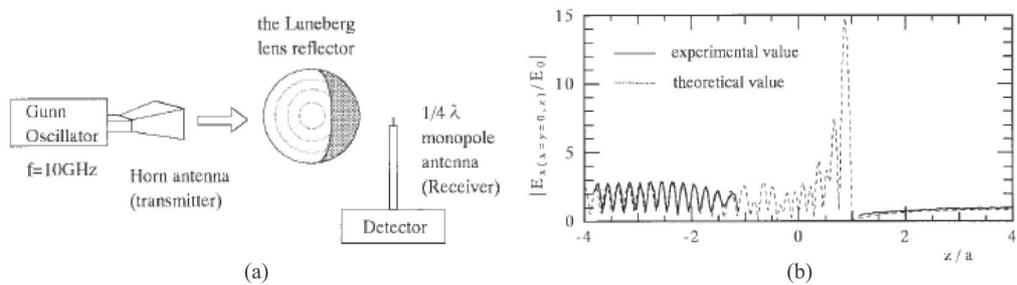


FIG. 1.43 – (a) Schéma de principe de la mesure de réflectométrie. (b) Comparaison entre la théorie et la mesure de la réflectométrie du réflecteur de Luneburg [58].

- J. Sanford a aussi modélisé les réflecteurs sphériques passifs [62, 63]. La méthode d'analyse présentée nécessite deux étapes.

Tout d'abord, la diffraction d'une onde plane par une lentille sphérique stratifiée et sans métal est effectuée en utilisant la décomposition sur les fonctions d'onde sphériques. Ensuite, la calotte métallique est prise en compte en utilisant le principe d'équivalence de Love pour remplacer la surface conductrice par ses courants équivalents. De bons accords entre la théorie et la mesure à 10 GHz sont obtenus avec une lentille sphérique de diamètre 30 cm.

- Dans [64] sont analysés des réflecteurs de Luneburg à l'aide d'une méthode numérique rigoureuse ("full wave"). Le code utilisé est basé sur une méthode hybride FE-BI ("Finite Element - Boundary Integral") prenant en compte des objets à symétrie de révolution.

Il est appliqué pour étudier le champ rétro-diffusé par un réflecteur de Luneburg à 3 coquilles (RA-2850 de Rozendal Associate) de diamètre 15 cm. Les résultats obtenus, figure 1.44 (a) et (b), sont en excellents accord avec les mesures.

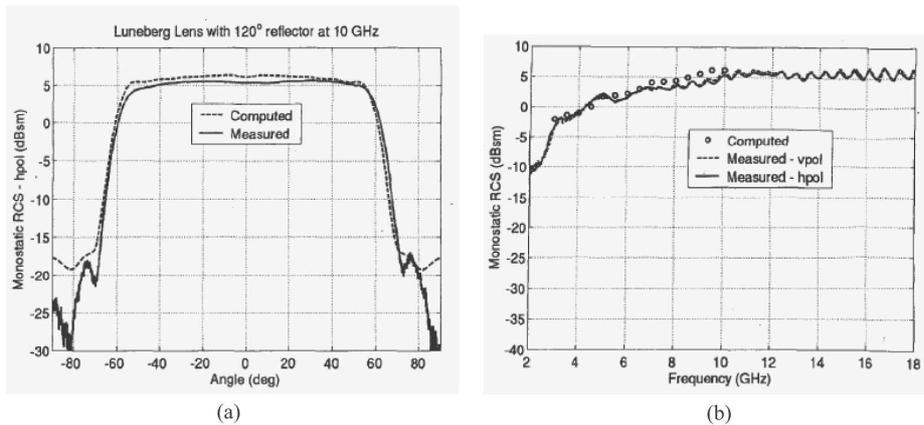


FIG. 1.44 – Comparaison entre la théorie et la mesure de la SER d'un réflecteur de Luneburg à 3 coquilles avec une calotte métallique d'angle  $120^\circ$  en fonction (a) de l'angle et (b) de la fréquence [64].

### 1.3.2 L'utilisation des lentilles de Luneburg

La lentille de Luneburg, avec ses propriétés de focalisation, son infinité de points focaux et son indépendance en fréquence, est adaptée à de nombreuses applications. Cette lentille est utilisée sous diverses formes : sphérique associée ou non à un réflecteur conformé, hémisphérique sur un plan de masse ou encore cylindrique.

Dans cette partie sont présentées les applications effectives et potentielles des lentilles de Luneburg.

### 1.3.2.1 Utilisation effective

#### Lentille sphérique

Konkur Ltd [65] est une entreprise basée à Moscou qui produit, entre autres, des lentilles de Luneburg. Ces lentilles sont conçues pour la réception de signaux de satellites géostationnaires européens en bande C et Ku. Ainsi, la lentille Multisat 1M, montrée figure 1.45, est destinée à ce marché. Les paramètres de cette lentille sont donnés tableau 1.1.



FIG. 1.45 – Photographie de l'antenne lentille de Luneburg de l'entreprise Konkur Multisat 1M.

TAB. 1.1 – Paramètres de la lentille Multisat 1M

Diamètre	$2r=0,9$ m
Fréquence de fonctionnement	12 GHz
Gain (à 12 GHz)	$39 \pm 0,5$ dB
Efficacité d'ouverture	$> 50\%$
Niveau des lobes secondaires (alimentation cornet)	$< -17$ dB
Distance focale	$1,2r$
Masse	90 kg
Température de fonctionnement	$-50$ à $+50$ °C

### La lentille réflecteur

La qualité d'une lentille utilisée en tant que réflecteur est quantifiée par sa SER, notée  $\sigma$ , dont la valeur théorique est :

$$\sigma = \frac{4\pi^3 r^4}{\lambda_0^2}, \quad (1.6)$$

où  $r$  est le rayon de la lentille.

Il est intéressant d'utiliser le réflecteur de Luneburg plutôt que le réflecteur en coin car sa SER théorique est environ trois fois supérieure, à rayon égal.

De plus, l'angle solide couvert par la lentille est beaucoup plus important que celui du réflecteur en coin. Cependant, le poids de la lentille peut être un handicap important pour certaines applications.

En France, la société Lun'tech basée près de Montpellier [66] développe, entre autre, des réflecteurs de Luneburg. Ceux-ci sont utilisés dans les domaines suivants : équipements de cibles aéroportées ou marines, aide à la navigation maritime (figure 1.46), terrestre ou aérienne, ou encore calibration radar.

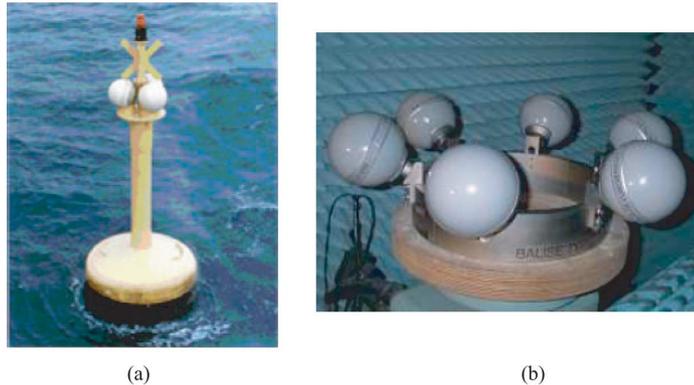


FIG. 1.46 – Exemples de prototype de la société Lun'tech : (a) assemblage de trois réflecteurs de Luneburg, fixés sur une bouée, permettant une réponse homogène sur  $360^\circ$  en azimut et  $120^\circ$  en élévation et (b) couronne de réflecteurs de Luneburg permettant d'obtenir un réflecteur omnidirectionnel.

### Demi-lentille sur un plan de masse

- L'US air force, via la société Datron, utilise quatre lentilles hémisphériques de Luneburg en réseau placées sur un plan réflecteur. Le prototype réalisé est montré figure 1.47(b). Cette utilisation, dont le principe est schématisé figure 1.47(a), a pour intérêt de fortement réduire l'encombrement. Toutefois, alors qu'une lentille complète illumine tout l'espace, le système (figure 1.47(b)), ne permet de couvrir en élévation que le demi espace contenant les demi lentilles dans un secteur angulaire de  $\pm 80^\circ$  par rapport au zénith.

Ces lentilles sont conçues et ont été testées en configuration aéroportée pour recevoir des communications GBS (Global Broadcast Service) de signaux allant de 19,2 à

21,2 GHz. Le diamètre du plan de masse et des lentilles est respectivement de 76,2 cm et 15,9 cm. Le gain du réseau est presque uniforme, environ 33 dB, sur tout le secteur angulaire. De plus, ce système est facilement transposable en taille et fréquence.

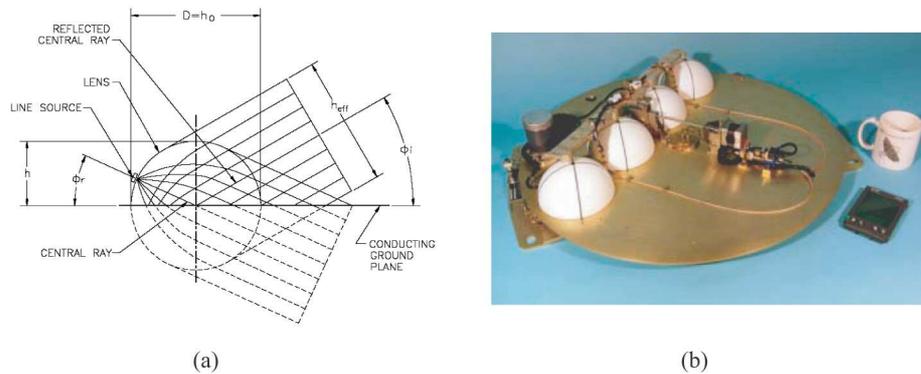


FIG. 1.47 – (a) Schéma de principe (tracé de rayons) pour une lentille hémisphérique placée sur un plan réflecteur. (b) Photographie du système antennaire de la société Daltron composé de quatre lentilles hémisphériques de Luneburg utilisées en bande Ku (US patent 5-781-163) [67].

- La société japonaise NHK a développée un système antennaire utilisant une lentille hémisphérique de Luneburg pour des transmissions HDTV par satellite. Une photographie du prototype et son principe de fonctionnement sont montrés figure 1.48.

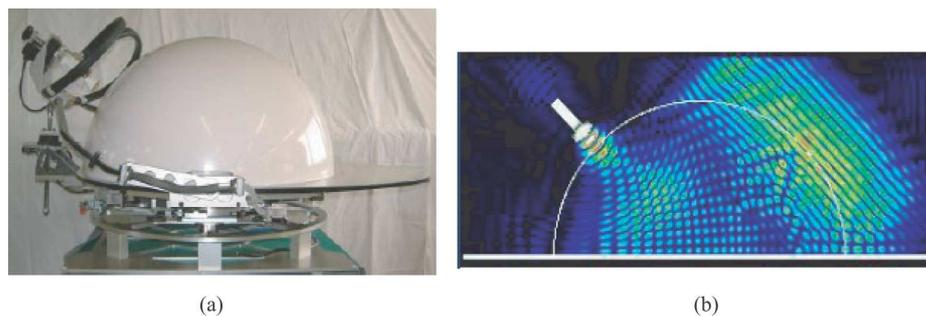


FIG. 1.48 – (a) Photographie du système antennaire composé d'une demi-lentille de Luneburg, de sa source associée et du réflecteur. (b) Distribution du champ électromagnétique, calculée par la méthode des différences finies dans le domaine temporel, illustrant comment l'onde sphérique est convertie en onde plane en passant à travers la lentille.

Ce système antennaire proposé présente de nombreux avantages par rapport aux antennes paraboliques conventionnelles généralement installées sur les véhicules. Il est compact (38 dB pour une lentille de diamètre 800 mm), léger (la lentille pèse 25 kg)

et consomme peu de puissance car il nécessite de ne bouger que la source. De plus, le contact avec le satellite est plus rapide car l'antenne lentille n'a pas besoin d'être déplacée pour être opérationnelle, contrairement à la parabole. Enfin, son profil hémisphérique lui confère une bonne résistance au vent.

- L'entreprise japonaise Sumitomo Electric Industries (SEI) s'intéresse aux lentilles de Luneburg en vue de remplacer les antennes paraboliques conventionnelles. Actuellement, celles-ci ne permettent de recevoir les services provenant uniquement d'un, voire deux, satellites s'ils ne sont pas trop éloignés angulairement. Or, le ciel japonais compte une douzaine de satellites de diffusion / communication et la constante augmentation du nombre de données échangées fait qu'il devient essentiel de pouvoir capter plusieurs satellites à la fois. Ainsi, la lentille de Luneburg qui permet de recevoir des signaux provenant de toutes les directions avec un niveau de gain égal est une solution très intéressante.

Pour cela, une lentille de Luneburg hémisphérique sur un plan réflecteur, (figure 1.49(a)), a été développée. Elle a un diamètre de 450 mm, une masse de 9,6 kg, présente un gain de 33,3 dBi à 12 GHz et est capable de recevoir les services de tous les satellites fournissant des services au Japon, soient les satellites d'orbites comprises entre  $110^\circ$  et  $162^\circ$ . Cette antenne présente en outre l'avantage de pouvoir fonctionner aussi bien verticalement qu'horizontalement et est donc très flexible en terme d'installation, comme illustré figure 1.49(b).

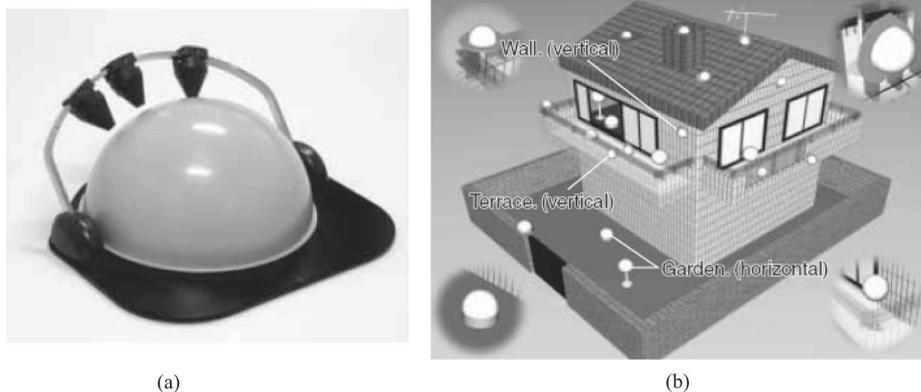


FIG. 1.49 – (a) Prototype de l'antenne multifaisceau développé par la société SEI. (b) Illustration d'exemples d'installation de l'antenne lentille.

### Cylindrique

Les radars automobiles d'aide à la conduite nécessitent une antenne capable de balayer un large secteur angulaire dans le plan azimutal pour pouvoir détecter les obstacles même quand il y a un changement de direction et / ou une courbure de la route. Le niveau des lobes secondaires doit être bas et l'ouverture dans le plan de l'élévation suffisamment faible afin d'éviter les fausses alarmes.

La lentille de Luneburg cylindrique permet d'obtenir de multiples faisceaux dans un plan. Pour qu'elle soit suffisamment directive dans le plan orthogonal, elle est associée dans [69] à un réflecteur parabolique cylindrique et une extension corrugée est ajoutée. Un schéma et une photographie du dispositif ainsi que ses performances mesurées à 76,5 GHz sont montrés figure 1.50.

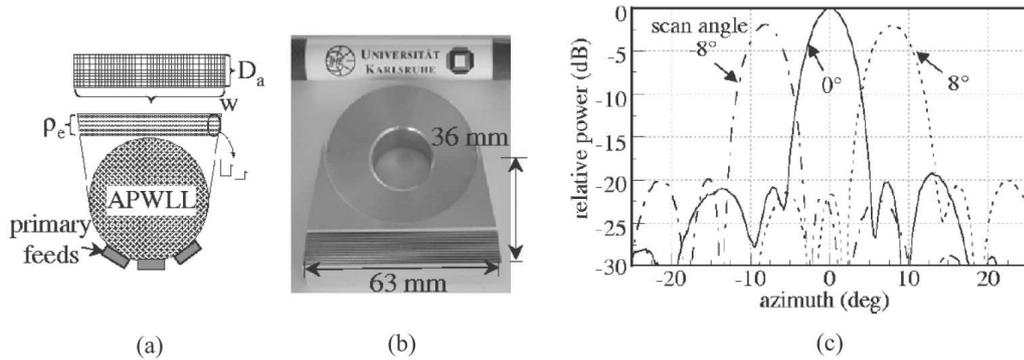


FIG. 1.50 – (a) Schéma et (b) photographie de la lentille de Luneburg cylindrique (APWLL : "Asymmetric Parallel-plate Waveguide Luneburg Lens") associée à un réflecteur parabolique cylindrique et (c) ses diagrammes de rayonnement en champ lointain mesurés à 76,5 GHz dans le plan azimutal [69].

### 1.3.2.2 Utilisation potentielle

Des investigations sont menées depuis peu par le CSIRO en Australie pour concevoir la prochaine génération de radio télescopes, en vue d'étudier l'hydrogène interstellaire aux premiers âges de l'univers. Pour cela, la surface couverte par le réseau de télescopes doit être de  $1 \text{ km}^2$  d'où le nom de "Square Kilometer Array" (SKA). Les télescopes doivent pouvoir capter des signaux de très faibles puissances sur une très large bande de fréquence, de 200 MHz à 2 GHz, et dans n'importe quelle direction du ciel. De plus, ils doivent pouvoir former de multiples faisceaux simultanément dans le ciel pour optimiser le nombre d'utilisateurs et étudier les sources éloignées angulairement et distribuées de façon inhomogène.

Pour répondre à ces spécifications, Parfitt [70] s'intéresse aux candidats qui pourraient constituer les éléments de ce réseau : antenne réflecteur conventionnel, réflecteur cylindrique avec une alimentation rectiligne et réseau phasé. Il conclut que le réseau de lentilles de Luneburg est la solution la plus adaptée. Ainsi, le radio télescope pourrait être constitué d'un réseau de grandes lentilles hémisphériques de 16 m de diamètre, (figure 1.51(a)), ou de lentilles sphériques plus petites de 5 m, (figure 1.51(b)).

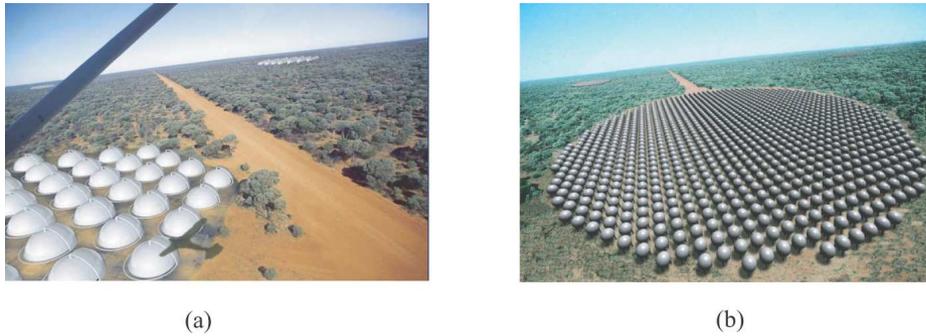


FIG. 1.51 – Vue (a) du réseau de lentilles hémisphériques et (b) du réseau de lentilles sphériques composant le radio télescope SKA [70].

## 1.4 Conclusion

De cet état de l'art, il ressort qu'il existe de nombreuses structures focalisantes à base de lentilles. Leurs techniques de construction (guide d'onde, imprimé, matériaux diélectriques de permittivités différentes et/ou de forme exotiques...) ainsi que leurs principes de fonctionnement (propagation guidée, principes de l'optique, utilisation de propriétés physiques spéciales...) sont très variés.

Parmi celles-ci, les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice sont généralement composées d'une antenne dont le rayonnement est focalisé par une lentille diélectrique, de forme sphérique ou hémisphérique, dont la permittivité varie radialement.

Comme le montrent les publications présentées, ces lentilles ont largement été étudiées et utilisées depuis plus d'une cinquantaine d'années. Dans ce chapitre, de nombreux résultats théoriques sur la lentille de Luneburg ont été présentés : leurs performances en rayonnement et certaines techniques pour les améliorer ainsi que les performances de la lentille réflecteur. De plus, des applications effectives et potentielles des lentilles de Luneburg ont été détaillées. En effet, les analyses théoriques et applications sur les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice existantes dans la littérature concernent très majoritairement les lentilles de Luneburg.

Dans la suite de cette thèse, les lentilles HMFÉ, très peu analysées par le passé, ainsi que les lentilles de Luneburg sont étudiées.

Le chapitre suivant rappelle, tout d'abord, la technique de Luneburg pour obtenir le gradient d'indice et passe en revue les techniques existants pour l'approcher. Une méthode d'optimisation, pour choisir les paramètres intrinsèques des lentilles, est ensuite proposée. Enfin, des techniques pour calculer la masse des lentilles sont présentées.

# Bibliographie

## Lentilles de Rotman

- [1] W. Rotman et R.F. Turner, "Wide-angle microwave lens for line source applications," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 11, no. 6, pp. 623-632, Nov. 1963.
- [2] R.C. Hansen, "Design trades for Rotman lenses," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, no. 4, pp. 464-472, Avr. 1991.
- [3] P.K. Singhal, P.C. Sharma, R.D. Gupta, "An overview of design and analysis techniques of Rotman type multiple beam forming lens and some performance results," *Technical journals : electronics and telecom engineering*, vol. 84, Jan 2004.
- [4] D. Archer, "Lens fed multiple-beam arrays," *Microwave journal*, vol. 18, pp. 37-42, Oct. 1975.
- [5] L. Hall, H. Hansen, D. Abbott, "Design and simulation of a high efficiency Rotman lens for mm-wave collision avoidance sensor," *Microelectronics journal*, Août 2001.
- [6] A.F. Peterson et E.O. Rausch, "Scattering matrix integral equation analysis for the design of a waveguide Rotman lens," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 5, pp. 870-878, Mai 1999.
- [7] H.H. Fuchs et D. Nüssler, "Design of Rotman lens for beamsteering of 94 GHz antenna array," *Electronics letters*, vol. 35, no. 11, Mai 1999.
- [8] L. Schulwitz et A. Mortazawi, "A compact dual-polarized multibeam phased-array architecture for millimeter-wave radar," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, no. 11, pp. 3588-3594, Nov. 2005.

## Lentilles discrètes

- [9] D.T. McGrath, "A three-dimensional beamformer with planar front and back faces," *IEEE Antennas and Propag. Symposium*, vol. 23, pp.463-465, Juin 1985.
- [10] D.T. McGrath, "Planar three-dimensional constrained lenses," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 1, pp. 46-50, Jan. 1986.

- [11] D. Popovic et Z. Popovic, "Multibeam antennas with polarization and angle diversity," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 50, no. 5, pp. 651-657, Mai 2002.
- [12] D. Popovic, "Constrained lens arrays for communications systems with polarization and angle diversity," Ph.D. Thesis, University of Colorado at Boulder, 2002.
- [13] S. Rondineau, C. Dietlein, Z. Popovic, R.Q. Lee, F.A. Miranda, R.R. Romanofsky, M.A. Ingram, W.C. Barott, J. Langley, D. Mandl, "Ground stations of arrays to increase the LEO download capacity," *36<sup>th</sup> European Microwave Conference*, Manchester, pp. 874-877, 10-15 Sept. 2006.

## Lentilles à base de métamatériaux

- [14] J.B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Physical review letters*, vol. 85, no. 18, Oct. 2000.

## Lentilles diélectriques homogènes

### Antennes lentilles

- [15] K. Chang, "handbook of microwave and optical components," vol. 1 Microwave passive and antenna components, Wiley, New York, Chapitre 11, 1989.
- [16] T.C. Cheston et E.J. Luoma, "Constant-K lenses," Emerson & Cuming, APL Technical Digest, Mars-Avr. 1963.
- [17] B. Schoenlinner, X. Wu, J.P. Ebling, G.V. Eleftheriades, et G.M. Rebeiz, "Wide-scan spherical-lens antennas for automotive radars," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 9, pp. 2166-2175, Sept. 2002.
- [18] B. Schoenlinner et G.M. Rebeiz, "Compact multibeam imaging antenna for automotive radars," *IEEE Microwave Theory Tech. Symposium*, Seattle, WA, pp. 1373-1376, Juin 2002.
- [19] F. Averty, "Antenne source pour lentille homogène en technologie mousse," Thèse de doctorat, université de Bretagne Occidentale, Mars 2004.
- [20] F. Averty, A. Louzir, J.-F. Pintos, P. Chambelin, C. Person, G. Landrac et J.-P. Coupez, "Cost effective antenna for LEO satellites communication system using a homogeneous lens," *IEEE Antennas and Propag. Symposium*, Monterey, CA., vol. 1, pp. 671-674, 20-26 Juin 2004.

### Lentilles substrats

- [21] R. Sauleau, "Etude de résonateurs de Pérot-Fabry et d'antennes imprimées en ondes millimétriques. Conception d'antennes à faisceau gaussien," Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, Déc. 1999.

- 
- [22] X. Wu et G.V. Eleftheriades, "Two-lens and lens-fed reflector antenna systems for mm-wave wireless communications," *IEEE Antennas and Propag. Symposium*, Salt Lake City, UT., vol. 1, pp. 660-663, 16-21 Juil. 2000.
- [23] X. Wu, G.V. Eleftheriades, et T.E. van Deventer-Perkins, "Design and characterization of a single- and multiple-beam mm-Wave circularly polarized substrate lens antennas for wireless communications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 6, pp. 732-737, Juin 1999.
- [24] C.A. Fernandes, "Shaped dielectric lenses for wireless millimeter-wave communications," *IEEE Antennas and Propag. Magazine*, vol. 41, no. 5, pp. 141-150, Oct 1999.
- [25] C.A. Fernandes, "Performance of lens antennas un wireless indoor millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 6, pp. 732-737, Juin 1999.
- [26] I. Gresham, N. Jain, T. Budka, A. Alexanian, N. Kinayman, B. Ziegner, S. Brown et P. Staecker, "A compact manufacturable 76 – 77 GHz radar module for commercial ACC applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 1, pp. 44-58, Jan. 2001.
- [27] B. Chantraine Barès, "Synthèse et optimisation d'antennes lentilles substrats à applications en ondes millimétriques," *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, France, Nov. 2004.
- [28] G. Godi, "Conception et optimisation d'antennes lentilles multicouches et de dômes diélectriques, applications en ondes millimétriques," *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, France, Nov. 2006.
- [29] R. Sauleau, C. A. Fernandes, et J. R. Costa, "Review of lens antenna design and technologies for mm-wave shaped-beam applications," *papier invité à la 11th Int. Symp. Antenna Technology and Applied Electromagnetics*, Saint Malo, France, 15-17 Juin, 2005.
- [30] G. Godi, R. Sauleau et D. Thouroude, "Performance of reduced size substrate lens antennas for millimeter-wave communications," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 4, pp. 1278-1286, Avr. 2005.
- [31] C.A. Fernandes et L.M. Anunciada, "Constant flux illumination of square cells for millimetre-wave wireless communications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 11, pp. 2137-2141, Nov. 2001.
- [32] G. Godi, R. Sauleau et L. Le Coq, "A shaping technique of substrate lens antennas with genetic algorithm," *11<sup>th</sup> Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics*, St Malo, France, pp. 162-163, 15-17 Juin 2005.

## Lentilles diélectriques inhomogènes

### Lentilles à diélectrique artificiel

- [33] W.E. Kock, "Metal-lens antennas," Proceedings of the IRE, vol. 34, no. 11, pp. 828-836, Nov. 1946.
- [34] J. Ruze, "Wide-angle metal-plate optics," Proceedings of the IRE, vol. 38, no. 1, pp. 53-59, Jan. 1950.
- [35] F. Gallée, "Conception d'antennes pour radar automobile détecteur d'obstacles à 76 GHz. Réalisation à base de réflecteurs et lentilles artificielles sur substrats faibles coût," Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Fév. 2001.
- [36] F. Gallée, G. Landrac et M. Ney, "Artificial lens for third generation automotive radar antenna at millimeter-wave frequencies," IEE Proc. Microwaves, Antennas, vol. 150, no.6, pp. 470-476, Déc. 2003.
- [37] E. Jéhamy, "Contributions à la synthèse d'antennes focalisantes pour applications en bande millimétrique," Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Nov. 2005.

### Lentilles de Fresnel

- [38] M.A. Gouker et G.S. Smith, "A millimeter wave integrated circuit antenna based on the Fresnel zone plate," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 40, no. 5, pp. 968-977, Mai 1992.
- [39] D.N. Black et J.C. Wiltse, "Millimeter wave characteristics of phase correcting Fresnel zone plates," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 35, no. 12, pp. 1122-1129, Déc. 1987.
- [40] H.D. Hristov et M.H.A.J Herben, "Quarter wave Fresnel zone planar lens and antenna," IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 5, no. 8, pp. 249-251, Août 1995.
- [41] H.D. Hristov et M.H.A.J Herben, "Millimeter wave Fresnel zone plate lens and antenna," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 43, no. 12, pp. 2779-2785, Déc. 1995.

### Lentilles à gradient d'indice

- [42] R.K. Luneburg, Mathematical theory of optics, Providence, Rhode Island, Brown University Press, 1944.
- [43] A.D. Greenwood et J.-M. Jian-Ming, "A field picture of wave propagation in inhomogeneous dielectric lenses," IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 41, no. 5, pp. 9-18, Oct. 1999.

- [44] A.D. Greenwood et J.-M. Jin, "Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1260-1266, Août 1999.
- [45] P. Rozenfeld, "The electromagnetic theory of three-dimensional inhomogeneous lenses," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 24, no. 3, pp. 365-370, Mai 1976.
- [46] H. Rosu et M. Reyes, "Electromagnetic modes of the Maxwell fisheye lens," *Atomic, molecular and optical physics*, Avr. 1996.
- [47] J.E. Eaton, "On spherically symmetric lenses," *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. 4, pp. 66-71, Déc. 1952.
- [48] K.W. Kim and Y. Rahmat-Samii, "Spherical Luneburg lens antennas : engineering characterizations including air gap effects," in *Proc. IEEE AP-S URSI Meet.*, Atlanta, GA, 1998, pp. 2062-2065.
- [49] P.G. Ingerson, "Luneburg lenses performance limitations due to fabrication process," in *IEEE Int. Symp. Antennas and Propag.*, vol. 2, Montreal, Que, Juil. 13-18, 1997, pp.862-865.
- [50] P.G. Ingerson, "The feasibility of Luneburg lenses for 20-30 GHz applications," in *IEEE Int. Symp. Antennas and Propag.*, vol. 1, Atlanta, GA, Juin 21-26, 1998, pp.11-14.
- [51] H. Mosallaei and Y. Rahmat-Samii, "Non-uniform luneburg and 2-shell lens antennas : Radiation characteristics and design optimization," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, no. 1, pp. 60-69, Jan. 2001.
- [52] J.M. Johnson and Y. Rahmat-Samii, "Genetic algorithms in engineering electromagnetics," *IEEE Antennas and Propag. Mag.* vol. 39, pp. 7-21, Août 1997.
- [53] H. Mosallaei, Y. Rahmat-Samii, "Non-uniform Luneburg lens antennas : a design approach based on genetic algorithms," in *IEEE Int. Symp. Antennas and Propag.*, vol. 1, , Juil. 11-16, 1998, pp.434-437.
- [54] Y. Rahmat-Samii, H. Mosallaei and Z. Li, "Luneburg lens antennas revisited : Design, optimization, and measurements," *IEEE Millennium Conference on Antennas and Propag.*, Davos, Switzerland, Avr. 9-14, 2000.
- [55] J. Sanford and Z. Sipus, "Sidelobe reduction with array fed spherical lenses," *IEEE AP-S Digest*, vol. 1, pp. 670-673, Juin 1995.

### **Performances de la lentille réflecteur**

- [56] P.E. Racette, R.R. Forster, R.K. Moore, "Limitations of the Luneburg lens as a calibration target for a dual-antenna radar system", *IEEE Trans. geoscience and remote sensing*, vol. 29, no. 1, pp. 179-180, Jan. 1991.
- [57] S.S. Vinogradov, P.D. Smith, J.S. Kot, N. Nikolic, "Radar cross-section studies of spherical lens reflectors", *Progress in Electromagnetic Research, PIER* 72, pp. 325-337, 2007.

- [58] H. Sakurai, T. Hashidate, M. Ohki, K. Motojima, S. Kozaki, "Electromagnetic scattering by the Luneberg lens with reflecting cap", IEEE Trans. Electromagnetic compatibility, vol. 40, no. 2, pp. 94-96, Mai 1998.
- [59] H. Sakurai, T. Hashidate, M. Ohki, K. Motojima, S. Kozaki, "Electromagnetic scattering by the Luneberg lens reflector", International Journal of Electron., vol. 84, no. 6, pp. 635-645, 1998.
- [60] H. Sakurai, M. Ohki, S. Kozaki, "Analysis of modified Luneberg lens using exact solutions", IEICE trans. electron., vol. E82-C, no. 10, pp. 1846-1852, Oct. 1999.
- [61] H. Sakurai, M. Ohki, K. Motojima, S. Kozaki, "Scattering and focusing effect of stepped index Luneberg lens", International Journal of Infrared and Millimeter Waves, vol. 21, no. 10, pp. 1639-1652, 2000.
- [62] J.R. Sanford, "Modal analysis of spherical passive reflectors", in IEEE Int. Symp. Antennas and Propag., vol. 2, Ann Arbor, MI, Juin 28 - Jul. 2, 1993, pp.754-757.
- [63] J.R. Sanford, "Analysis of spherical radar cross-section enhancers", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 43, no. 6, pp. 1400-1403, Juin 1995.
- [64] C.S. Liang, D.A. Streater, J.-M. Jin, E. Dunn, T. Rozendal, "A quantitative study of Luneberg-lens reflectors", IEEE Antennas and Propag. Magazine, vol. 47, no. 2, pp. 30-41, Avr. 2005.

### Applications

- [65] [http : //www.com2com.ru/konkur/homep\\_e.htm](http://www.com2com.ru/konkur/homep_e.htm)
- [66] [http : //www.luneberg.com](http://www.luneberg.com)
- [67] "Use of Luneburg Lens for Low Profile Applications," Datron/Transco Inc. originally published in Microwave Product Digest, Déc 1999.
- [68] C.S. Liang, D.A. Streater, J.-M. Jin, E. Dunn, T. Rozendal, "Ground-plane-backed hemispherical Luneberg-lens reflector", IEEE Antennas and Propag. Magazine, vol. 48, no. 1, pp. 37-49, Fév. 2006.
- [69] Y.-J. Park, W. Wiesbeck, "Offset cylindrical reflector antenna fed by a parallel-plate Luneburg lens for automotive radar applications in millimeter-wave," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 51, no. 9, pp. 2481-2493, Sept. 2003.
- [70] A.J. Parfitt, J.S. Kot, G.L. James, " The Luneburg lens as a radio telescope element," in IEEE Int. Symp. Antennas and Propag., vol. 1, 2000, pp.170-173.

# Chapitre 2

## Les lentilles inhomogènes à gradient d'indice

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Le gradient d'indice : la technique de Luneburg . . . . .</b>	<b>51</b>
2.1.1	Dérivation des lois du gradient d'indice . . . . .	51
2.1.2	Particularisation aux lentilles de Luneburg et MFE . . . . .	52
<b>2.2</b>	<b>Les techniques de réalisation du gradient d'indice . . . . .</b>	<b>55</b>
2.2.1	Permittivité effective variable . . . . .	55
2.2.2	Assemblage de coquilles homogènes . . . . .	61
2.2.3	Application : réalisation de lentilles de type MFE . . . . .	62
<b>2.3</b>	<b>Optimisation de la discrétisation du gradient d'indice . . . . .</b>	<b>63</b>
2.3.1	Présentation du problème d'optimisation . . . . .	63
2.3.2	Description de l'algorithme d'optimisation . . . . .	64
2.3.3	Détails des calculs . . . . .	65
2.3.3.1	Cas $q = 1$ . . . . .	66
2.3.3.2	Cas $q = 2$ . . . . .	66
2.3.3.3	Cas $q = \infty$ . . . . .	67
2.3.3.4	Cas $q = \infty$ avec les permittivités fixées . . . . .	68
2.3.4	Validation . . . . .	68
2.3.4.1	Géométrie des antennes lentilles et stratégie de modélisation . . . . .	68
2.3.4.2	Comparaisons entre méthodes pour choisir les paramètres de la lentille . . . . .	70
2.3.4.3	Conclusion . . . . .	72
<b>2.4</b>	<b>Considération pratique : masse des lentilles . . . . .</b>	<b>73</b>
2.4.1	Distribution diélectrique idéale . . . . .	73
2.4.2	Distribution diélectrique réelle . . . . .	75
2.4.2.1	Formulation . . . . .	75
2.4.2.2	Application . . . . .	75

2.4.3	Comparaison . . . . .	76
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>77</b>

---

Parmi les nombreux systèmes de focalisation, nous nous concentrons désormais sur les lentilles inhomogènes à gradient d'indice et, plus particulièrement, les lentilles de Luneburg et HMFE.

Pour cela, il est important de commencer par rappeler le travail majeur effectué par Rudolf Karl Luneburg en 1944 [1] conduisant à la distribution qui porte son nom. Ensuite, les différentes techniques de réalisation des lentilles à gradient d'indice sont revues et discutées. La technique des coquilles, pour approcher le gradient d'indice, est retenue. Une méthode d'optimisation pour choisir les paramètres de lentilles ainsi fabriquées est alors proposée. Enfin, une considération pratique, à savoir l'estimation de la masse des lentilles, est présentée.

## 2.1 Le gradient d'indice : la technique de Luneburg

### 2.1.1 Dérivation des lois du gradient d'indice

Nous retraçons ici les grandes lignes de la technique proposée par Luneburg qui permet, à partir de deux points focaux conjugués quelconques, d'obtenir la distribution du gradient d'indice au sein d'une lentille sphérique. Ce cheminement est détaillé au chapitre III du livre de Luneburg "Mathematical theory of optics" [1].

Tout d'abord, Luneburg part des équations de Maxwell pour obtenir l'équation du front d'onde  $\Psi$  (ou équation eikonale) :

$$\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2 = n^2 \text{ où } \Psi_u = \frac{\partial \Psi}{\partial u}. \quad (2.1)$$

Les rayons lumineux se propagent dans un milieu de distribution d'indice  $n$  continue et radiale :  $n = n(r)$ . Ce sont donc des courbes planaires et nous pouvons, sans perte de généralité, limiter l'étude aux rayons contenus dans le plan  $(0,x,y)$  par exemple. L'équation (2.1) devient alors :

$$\Psi_x^2 + \Psi_y^2 = n^2(r). \quad (2.2)$$

Les solutions retenues s'écrivent sous la forme  $\Psi(x, y, K)$  où  $K$  est un paramètre arbitraire. Ainsi, tous les rayons lumineux vérifient le théorème de Jacobi :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial K} = \text{constante}. \quad (2.3)$$

La géométrie du problème et les notations utilisées par Luneburg sont représentées figure 2.1. Par passage en coordonnées polaires, une solution de l'équation (2.2) est :

$$\Psi(r, \theta) = K\theta \pm \int_{r_0}^r \sqrt{n^2 - \frac{K^2}{r'^2}} dr'. \quad (2.4)$$

Soit une sphère, de rayon  $r$  normalisé à 1 et d'indice  $n$  tel que :

$$\begin{cases} n = n(r), & \text{pour } r < 1 \\ n = 1, & \text{pour } r \geq 1. \end{cases}$$

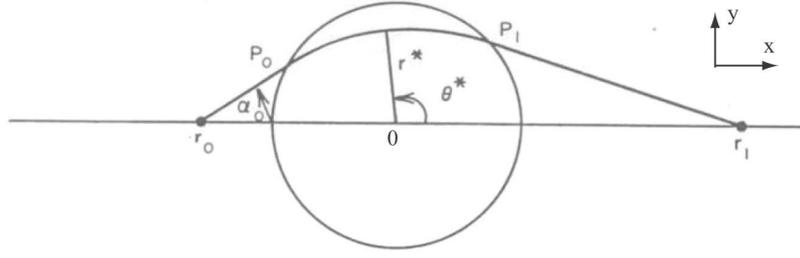


FIG. 2.1 – Géométrie et notations utilisées par Luneburg [1].

Nous imposons au rayon lumineux de passer par les points  $(x_0 = -r_0, y_0 = 0)$  et  $(x_1 = r_1, y_0 = 0)$  et introduisons la notation :  $\rho = rn(r)$ , où  $\rho$  est une fonction monotone.

Luneburg montre alors que  $r(\theta)$  atteint un unique minimum  $r^*$  pour l'angle  $\theta = \theta^*$ . De plus, l'équation du rayon lumineux pour  $\theta < \theta^*$  est :

$$\theta = \theta^* - K \int_{r^*}^r \frac{dr'}{r' \sqrt{\rho^2 - K^2}} \text{ avec } \theta^* = \pi + K \int_{r_0}^{r^*} \frac{dr'}{r' \sqrt{\rho^2 - K^2}}. \quad (2.5)$$

Le changement de variable  $\tau = \ln(r)$  permet de réécrire (2.5) :

$$K \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{\sqrt{\rho^2(\tau) - K^2}} = \frac{1}{2} \left( \pi + \sin^{-1} \left( \frac{K}{r_1} \right) + \sin^{-1} \left( \frac{K}{r_0} \right) - 2 \sin^{-1} (K) \right). \quad (2.6)$$

Quelques développements mathématiques mènent à une relation plus facilement utilisable :

$$\ln(n) = \ln \left( \frac{\rho}{r} \right) = \omega(\rho, r_0) + \omega(\rho, r_1) \text{ avec } \omega(\rho, a) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt. \quad (2.7)$$

La distribution radiale de l'indice au sein d'une lentille sphérique donnant deux points focaux aux distances  $r_0$  et  $r_1$  sur l'axe optique de la lentille se déduit donc directement de l'équation (2.7).

### 2.1.2 Particularisation aux lentilles de Luneburg et MFE

L'équation (2.7) est maintenant particularisée aux distributions de Luneburg, MFE et MFE modifiée. Nous appelons lentille MFE modifiée, une lentille MFE dont la distribution d'indice est modifiée afin d'avoir deux points focaux conjugués à une distance  $a$  quelconque et non nécessairement à la surface de la lentille.

Les tracés de rayons au sein de ces trois lentilles sont représentés figure 2.2. Il faut aussi préciser que :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \omega(\rho, a) = 0 \text{ et } \omega(\rho, 1) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \right). \quad (2.8)$$

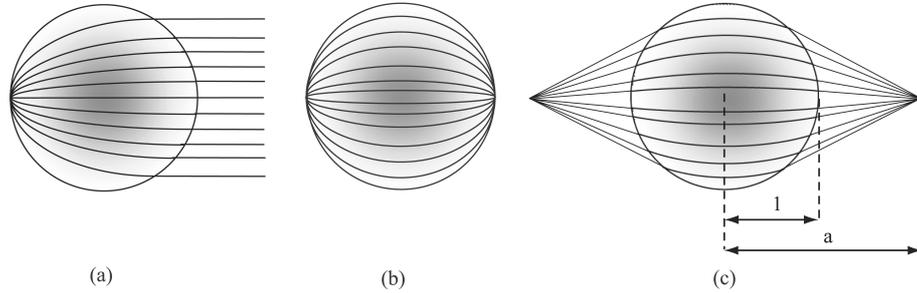


FIG. 2.2 – Tracé de rayons pour une lentille de (a) Luneburg, (b) MFE et (c) MFE modifiée où les deux points focaux conjugués sont à une distance  $a$  de la surface de la lentille.

- Pour la distribution de Luneburg, nous avons  $r_0 = 1$  et  $r_1 \rightarrow \infty$ , il vient alors :

$$n(r) = \sqrt{2 - r^2}. \quad (2.9)$$

- Pour la distribution MFE,  $r_0$  et  $r_1$  sont égaux à 1, d'où :

$$n(r) = \frac{2}{1 + r^2}. \quad (2.10)$$

- Pour la distribution MFE modifiée, nous avons  $r_0 = r_1 = a$ . L'équation (2.7) devient :

$$\begin{aligned} \ln(n) &= 2 \omega(\rho, a) & (2.11) \\ &= 2 \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \\ &= 2 \left( \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^a \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_1^a \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \sqrt{1 - (\rho/a)^2} \right) - \frac{1}{\pi} \int_1^a \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right), \end{aligned}$$

et il vient :

$$n = \left( \sqrt{1 + \sqrt{1 - (\rho/a)^2}} \exp \left( -\frac{1}{\pi} \int_1^a \frac{\sin^{-1}(t/a)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right) \right)^2. \quad (2.12)$$

Notons qu'il n'y a pas de discontinuité à la surface de la lentille, comme  $r = 1$  et  $n(1) = 1$  satisfait l'équation (2.12). Par ailleurs, l'intégrale dans l'exposant de (2.12) n'a pas de forme analytique connue. Elle a été calculée numériquement et est donnée dans [2]. Un raisonnement similaire appliqué à la distribution de Luneburg modifiée est présenté dans [3].

En pratique, illuminer une lentille par un point source à sa surface est difficilement réalisable. En effet, un cornet, par exemple, n'a pas son centre de phase au niveau de l'ouverture, mais à l'intérieur. Modifier la loi de distribution d'indice de la lentille, afin d'avoir un point focal à l'extérieur de la lentille, présente donc un réel intérêt. Ainsi, à titre illustratif, nous appliquons la relation (2.12) de façon à obtenir un point focal à la distance  $a=1,25$  normalisée par rapport au rayon de la lentille. La loi correspondante est tracée figure 2.3.

Pour vérifier le bien fondé des développements précédents, l'amplitude de la puissance, calculée par le logiciel CST Microwave Studio<sup>®</sup>, le long de l'axe d'une lentille HMFE de diamètre  $10 \lambda_0$  illuminée par une onde plane, est reportée figure 2.4. La position du maximum de puissance correspond au point focal de la lentille. Les points focaux correspondants à ces deux lois sont bien situés à la surface de la lentille et à une distance normalisée  $a \sim 1,25$ .

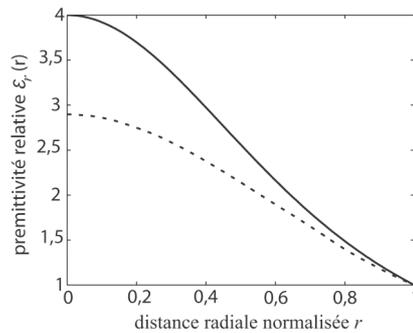


FIG. 2.3 – (a) Distribution de la permittivité de la loi de Maxwell fish-eye pour  $a = 1$  (—) et  $a=1,25$  (···), où  $a$  est la distance théorique du point focal de la lentille ( $a$  est normalisée par rapport au rayon de la lentille).

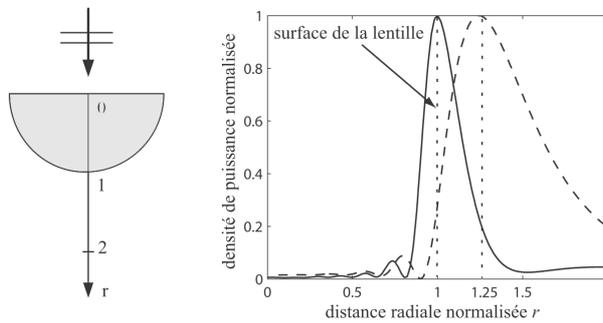


FIG. 2.4 – Densité de puissance normalisée le long de l'axe d'une lentille HMFE illuminée par une onde plane pour le cas  $a = 1$  (—) et  $a = 1,25$  (— —), où  $a$  est la distance théorique du point focal de la lentille ( $a$  est normalisée par rapport au rayon de la lentille).

## 2.2 Les techniques de réalisation du gradient d'indice

La fabrication des lentilles à gradient d'indice pose un certain nombre de problèmes d'ordre pratique tels que l'obtention de la distribution continue de l'indice. Il n'existe pas de procédé permettant de créer parfaitement un gradient d'indice continu. De nombreuses techniques ont été développées pour l'approcher : utilisation de matériaux à permittivité diélectrique effective ou assemblage de coquilles homogènes pour discrétiser la loi continue.

Il est important de noter que toutes les techniques proposées jusqu'ici semblent avoir été appliquées uniquement à la loi de Luneburg, car nous n'avons pas trouvé de prototype de lentille de type MFE / HMFE dans la littérature. Nous verrons donc, parmi les techniques d'approximation du gradient d'indice existantes, lesquelles sont également applicables à la réalisation de lentilles de type MFE.

### 2.2.1 Permittivité effective variable

- Une technique originale a été brevetée par Zimmerman [4] en 1995. L'idée est de faire des trous radiaux de section variable pour recréer de façon artificielle la distribution d'indice comme montrée figure 2.5.

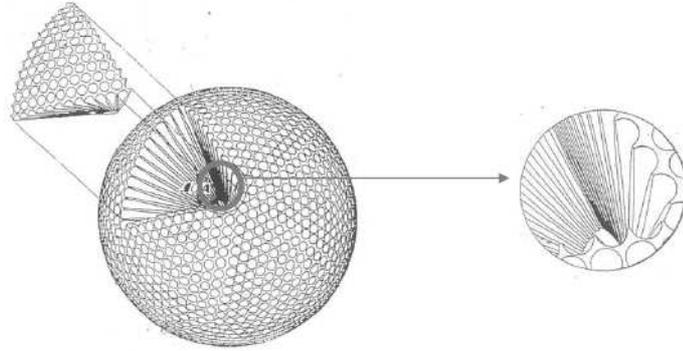


FIG. 2.5 – Lentille de Luneburg réalisée en utilisant la technique des trous (1692 au total) radiaux à section variable [4].

Zimmerman suppose que la permittivité effective  $\epsilon_r$  d'un matériau de constante diélectrique  $\epsilon_m$  est linéairement dépendante de sa densité de trous :

$$\epsilon_r(r) = \frac{A_{sphère} - A_{trou}}{A_{sphère}} \epsilon_m + \frac{A_{trou}}{A_{sphère}}, \quad (2.13)$$

où  $A_{sphère}$  est la surface de la sphère de rayon  $r$  et  $A_{trou}$  la surface occupée par les trous sur cette même sphère. Le rayon  $y$  des  $N$  trous suit la loi parabolique  $y = ar^2$ .

Pour une lentille de Luneburg idéale, la relation (2.13) devient :

$$\epsilon_r(r) = 2 - \frac{A_{\text{trou}}}{A_{\text{sphère}}} = 2 - \frac{N\pi y^2}{4\pi r^2} = 2 - \frac{Na^2 r^2}{4}. \quad (2.14)$$

Pour une lentille de Luneburg idéale de rayon  $R$ ,  $\epsilon_r(R) = 1$ , ce qui entraîne  $R^2 = \frac{4}{Na^2}$  et  $y = \frac{2r^2}{R\sqrt{N}}$ . En pratique,  $N$  est choisi de sorte que  $y(R)$ , le diamètre maximum d'un trou, soit inférieur à un dixième de la longueur d'onde afin d'éviter les phénomènes de dispersion.

Cette technique nécessite un outillage qui permet de percer en 3D et de réaliser des trous coniques et n'est donc pas très facile à mettre en oeuvre.

- Une autre solution, montrée figure 2.6, est proposée par Strickland [5]. Il s'agit de diviser la lentille en tranches ayant la forme de quartiers d'orange. Dans ces tranches sont percées des trous avec une densité variable de façon à créer le gradient d'indice. Bien que l'usinage soit assez compliqué, toutes les tranches sont identiques ce qui réduit le coût de fabrication.

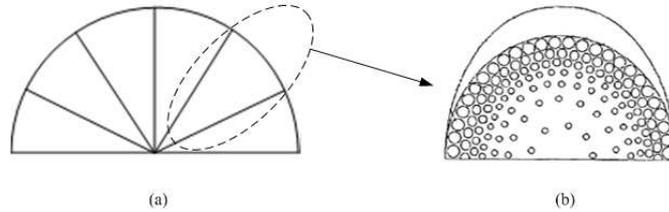


FIG. 2.6 – (a) Vue de coupe de la lentille découpée en tranches avec (b) une tranche à densité de trous variables [5].

- Les japonais Sato et Ujiie travaillent sur les lentilles plates de Luneburg [6]. Ils proposent deux méthodes, présentées figure 2.7, pour approcher la distribution de permittivité de la lentille. Des photographies de prototype de lentilles ainsi fabriquées par [7] sont présentées figure 2.8.

- Approximation de la distribution de permittivité par variation de l'épaisseur du diélectrique :

En faisant varier l'épaisseur  $t$  du disque diélectrique de permittivité  $\epsilon_m$ , il est possible de contrôler la permittivité. Ainsi, la permittivité effective  $\epsilon_r$  sur un cercle de rayon  $r$  est :

$$\epsilon_r(r) = \frac{d - t(r) + \epsilon_m t(r)}{d}, \quad (2.15)$$

où  $d$  est l'espace entre les plaques parallèles.

- Approximation de la distribution de permittivité par variation de la densité de trous :

Quand  $N$  trous de rayon  $b$  sont percés sur un cercle de rayon  $r$ , la permittivité relative effective  $\epsilon_r$  sur ce cercle est :

$$\epsilon_r(r) = \frac{1 \cdot \text{volume trous} + \epsilon_m \cdot \text{volume diélectrique}}{\text{volume total}} \quad (2.16)$$

$$= \frac{Nb^2 + \epsilon_m ((r+b)^2 - (r-b)^2 - Nb^2)}{(r+b)^2 - (r-b)^2}. \quad (2.17)$$

Pour minimiser les phénomènes de dispersion, le diamètre des trous doit rester inférieur à  $0,1 \lambda_0$ . Par ailleurs, la permittivité de la lentille Luneburg approche 1 au bord de la lentille, ce qui entraîne une augmentation du nombre de trous qui finissent par se toucher et même se chevaucher. Pour éviter cela, en périphérie de la lentille, la permittivité est contrôlée par l'épaisseur du diélectrique.

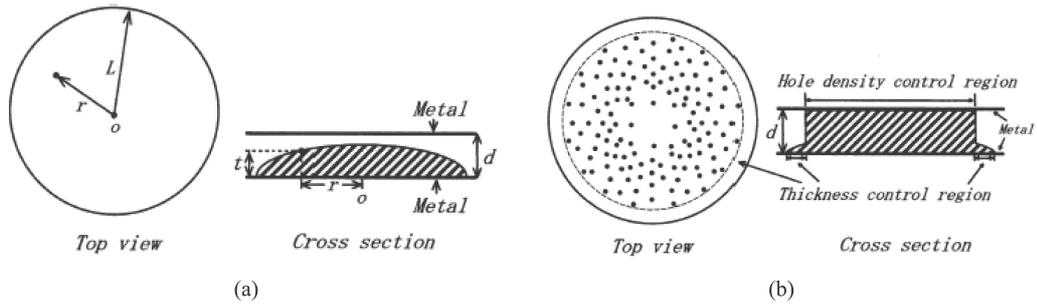


FIG. 2.7 – Lentille plate de Luneburg avec la variation de permittivité contrôlée par (a) l'épaisseur et (b) la densité de trous [6].

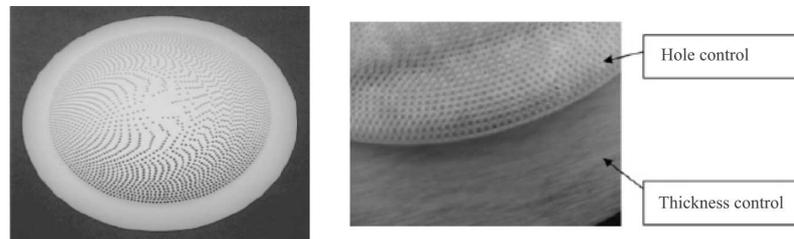


FIG. 2.8 – Photographies de prototypes de lentilles plates de Luneburg réalisées par l'hybridation de deux techniques : la variation de la densité de trous et de l'épaisseur [7].

- L'idée proposée par S. Rondineau dans [8] combine le travail de Sato [6] avec les lentilles plates et celui de Zimmerman [4] avec les lentilles sphériques pour aboutir à une façon plus facile de réaliser des lentilles sphériques de Luneburg. Il s'agit d'abord

de discrétiser la sphère par un empilement de cylindres, puis de faire varier la densité de trous pour changer la permittivité. Une photographie du prototype réalisé est montrée figure 2.9.

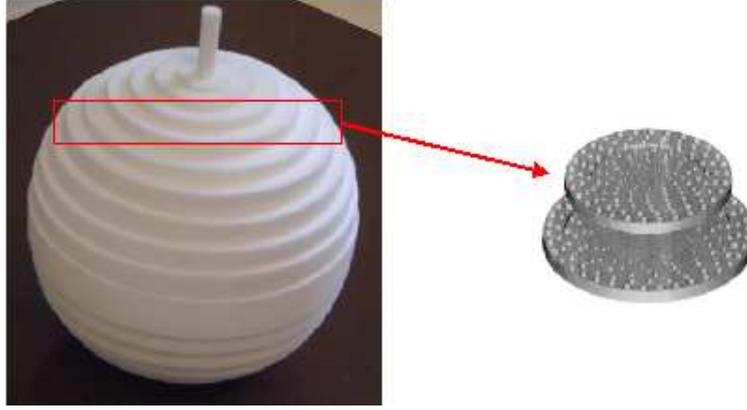


FIG. 2.9 – Photographie du prototype d'une lentille de Luneburg de diamètre 300 mm approximée par des cylindres dont la permittivité est contrôlée par la densité de trous (23047 au total)[8].

– Discrétisation de la sphère par des cylindres :

La figure 2.10(a) présente la géométrie et les notations du problème. Pour  $R$ ,  $h$  et  $b$  fixés nous cherchons la valeur de  $d$  qui minimise le volume  $\Delta V$  grisé sur la figure. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_2 - V_1 & (2.18) \\ &= \pi (R^2 - (b + d)^2) (h - d) - \left( \pi R^2 (h - d) - \frac{\pi}{3} ((b + h)^3 - (b + d)^3) \right) \\ &\quad + \pi R^2 d - \frac{\pi}{3} ((b + d)^3 - b^3) - \pi (R^2 - (b + d)^2) d \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial d} = 4\pi d^2 + 4\pi b d - 2\pi h(b + d) \quad (2.19)$$

avec

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial d} \Big|_{d=\frac{h}{2}} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2(\Delta V)}{\partial^2 d} \Big|_{d=\frac{h}{2}} = 4\pi b > 0. \quad (2.20)$$

Pour approcher au mieux une sphère avec des cylindres, ceux-ci doivent être choisis tels qu'à mi-hauteur, ils coïncident avec la sphère :  $d = \frac{h}{2}$ . Selon le nombre de cylindres fixés, il en découle immédiatement les rayons et épaisseurs de chacun.

- Approximation de la distribution de permittivité par variation de la densité de trous :

Considérons la tranche  $i$ , son diamètre est  $D_i$ , son épaisseur  $d_i$  et la position de son centre  $h_i$ , comme indiqué figure 2.10(b).

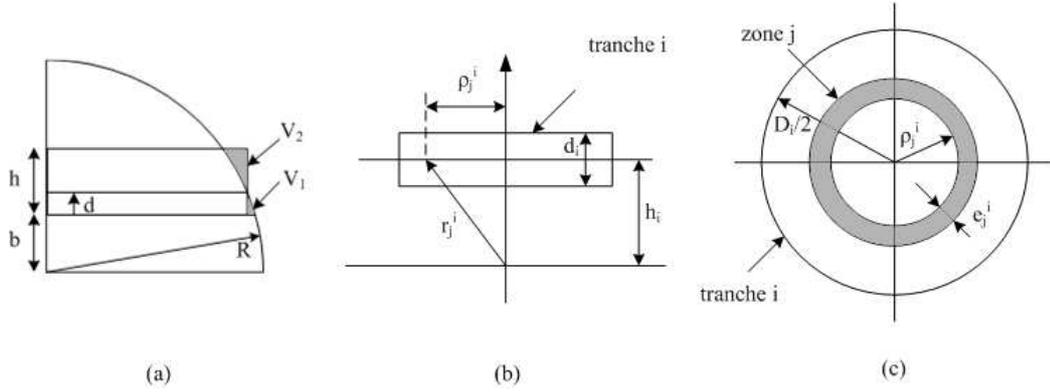


FIG. 2.10 – Définition des notations et paramètres géométriques : (a) vue de coupe d'un quart de la lentille pour l'approximation par des cylindres, (b) vue de côté et (c) vue de dessus de la tranche  $i$  pour la densité de trous [8].

Cette tranche, représentée figure 2.10(c), est découpée en  $N_i$  cylindres creux de rayon intérieur  $\rho_j^i$  et d'épaisseur  $e_j^i$ . Ainsi, sur le cercle au milieu du cylindre creux  $(i,j)$ , la permittivité effective a la valeur de la distribution de Luneburg :

$$\epsilon_r(r_j^i) = 2 - \frac{h_i^2 + \rho_j^{i2}}{R^2}. \quad (2.21)$$

Ensuite, nous utilisons l'approximation linéaire pour calculer la permittivité effective  $\epsilon_{r\text{ eff}}$  d'un mélange entre deux matériaux diélectriques homogènes,  $\epsilon_{r1}$  et  $\epsilon_{r2}$  de volume  $\nu_1$  et  $\nu_2$  :

$$\epsilon_{r\text{ eff}} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \epsilon_{r1} + \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \epsilon_{r2}. \quad (2.22)$$

Ainsi, si  $n_j^i$  trous de diamètre  $\delta_j^i$  sont percés dans la zone  $j$  de la tranche  $i$ , la permittivité effective de cette région est :

$$\epsilon_r(r_j^i) = n_j^i \frac{\delta_j^{i2}}{4e_j^i(2\rho_j^i + e_j^i)} (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}) + \epsilon_{r2}. \quad (2.23)$$

Finalement, en égalant (2.21) et (2.23), le nombre de trous  $n_j^i$  pour chaque anneau peut être déduit :

$$n_j^i = E \left[ 4e_j^i \frac{2\rho_j^i + e_j^i}{\delta_j^{i2} (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})} \left( (2 - \epsilon_{r2}) - \frac{h_i^2 + \rho_j^{i2}}{R^2} \right) \right]. \quad (2.24)$$

## – Validation

Des mesures de la lentille ainsi réalisée ont été effectuées dans la bande 26,5 - 40,0 GHz. Les bonnes performances obtenues en terme de diagrammes de rayonnement en champ lointain, gain, adaptation et ouverture à mi-puissance sur toute la bande montre que la loi est bien approchée. De plus, la lentille a bien un comportement indépendant de la fréquence.

Cette technique permet donc de fabriquer des lentilles de Luneburg de manière plus facile et moins coûteuse que les méthodes précédemment décrites. Toutefois, le temps d'usinage reste très important pour percer notamment plus de 20000 trous.

- Plus récemment, le professeur Wiesbeck de l'université de Karlsruhe en Allemagne a réalisé une lentille de Luneburg appelée *APWLL* pour "Asymmetric Parallel-Plate Waveguide Luneburg Lens" [9].

La variation de permittivité est créée par des obstacles en colonnes métalliques disposés en réseau et confinés entre deux plaques métalliques. Cette technique est illustrée figure 2.11. La hauteur variable  $t$  de ces colonnes permet de constituer un milieu d'indice variable, comme initialement présenté dans [10]. Les dimensions des obstacles doivent être faibles devant la longueur d'onde pour éviter les phénomènes de dispersion.

Avec la condition de résonance transverse, la relation entre les dimensions des obstacles métalliques et l'indice  $n$  de réfraction souhaité est :

$$\sqrt{n(r')^2 - 1} \tanh(k_0 \sqrt{n(r')^2 - 1} (h - t)) = 1 - (\pi D / 4P) \tan(k_0 t), \quad (2.25)$$

où  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  et  $r'$  est le rayon normalisé. Les grandeurs géométriques sont représentées sur la figure 2.11(b).

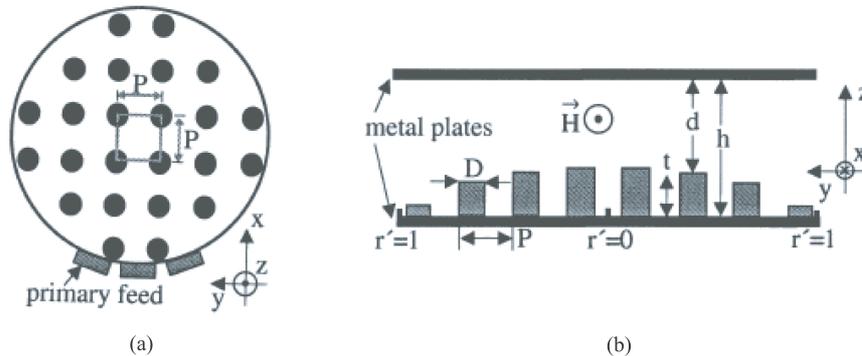


FIG. 2.11 – (a) Vue du dessus d'une lentille de Luneburg constituée d'un guide d'onde à plaques métalliques parallèles avec des colonnes circulaires et (b) la vue de coupe de cette lentille [9].

Cette technique, qui reste limitée aux lentilles de Luneburg plates, a pour avantage de

ne pas utiliser de matériau diélectrique, mais seulement du métal et de l'air. Malgré tout, la réalisation mécanique d'une telle lentille est longue et nécessite l'utilisation d'une machine à commande numérique. En effet, le prototype présenté dans [9] compte plus de 3000 colonnes métalliques.

En outre, une lentille ainsi réalisée présente une faible bande de fonctionnement en fréquence. En effet, l'indice de réfraction, comme le montre l'équation (2.25), est une fonction de la fréquence car il s'agit d'un guide d'onde avec toutes les contraintes liées à ce type de structure : fréquence de coupure et apparition de modes supérieurs notamment.

### 2.2.2 Assemblage de coquilles homogènes

Pour approcher le gradient d'indice, la technique la plus répandue est celle des coquilles. Cette idée a été exploitée pour la première fois par la société Emerson&Cuming en 1960 [11].

Il s'agit d'assembler un nombre fini de coquilles hémisphériques homogènes concentriques discrétisant la loi continue. Les deux demi-boules ainsi obtenues sont ensuite collées pour former la lentille sphérique. La figure 2.12 montre des photographies des coquilles composant la lentille de Luneburg.

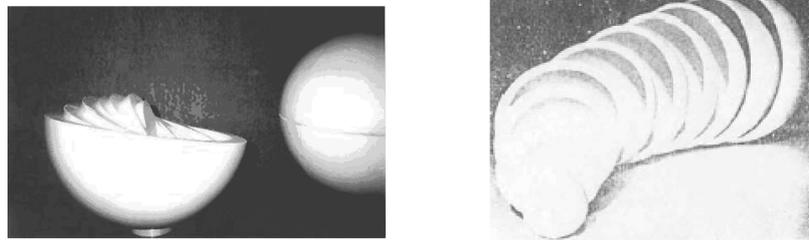


FIG. 2.12 – Photographies des coquilles hémisphériques composant la lentille de Luneburg discrète [11].

L'inconvénient majeur de cette technique est dans la difficulté d'usinage des coquilles. Même avec une bonne précision, il est difficile d'obtenir des dimensions de coquilles exactes ainsi que de garantir une concentricité parfaite entre les couches. Cela a pour conséquence la création de gaps d'air entre les coquilles qui altèrent les performances de la lentille en défocalisant et diffusant légèrement l'énergie.

La technique suivante peut, dans certains cas, être employée pour minimiser la présence de gaps d'air. A partir d'une demi-boule pleine de diélectrique, une demi-boule plus petite est creusée à l'intérieur. Dans cette demi-boule est versée le nouveau matériau qui doit donc être relativement liquide et ainsi de suite. L'inconvénient majeur de cette technique vient du surcoût généré par le creusage dans des matériaux de plus en plus dur de demi boules de plus en plus petites.

Par ailleurs, les coquilles peuvent être réalisées par moulage. Cette technique permet d'avoir une grande précision et répétabilité quant aux dimensions des coquilles obtenues. En revanche, elle limite le choix des matériaux utilisables car tous ne peuvent pas être moulés. Enfin, cette technique n'est intéressante financièrement que si le nombre de coquilles à produire est conséquent. Il faut aussi noter qu'il est difficile d'obtenir des informations précises relatives au moulage, par exemple la composition précise des matériaux utilisés ou le détail des étapes nécessaires à la réalisation des coquilles, car les industriels tiennent à conserver leurs secrets de fabrication.

Pour réaliser les coquilles, il est possible d'utiliser des matériaux expansés de type polystyrène et / ou polyéthylène [12]. Afin de synthétiser de tels matériaux, la formule suivante peut être utilisée :

$$\epsilon_r = \alpha(\epsilon_{r1}^\nu \cdot \epsilon_{r2}^{1-\nu}) + (1 - \alpha)(\epsilon_{r1}\nu + \epsilon_{r2}(1 - \nu)), \quad (2.26)$$

où  $\alpha$  est un coefficient qui dépend du type de matériau expansé et  $\nu = \rho/\rho_0$  est le rapport entre la densité du matériau expansé ( $\rho$ ) et du gaz utilisé ( $\rho_0$ ). Dans le cas du polystyrène et du polyéthylène expansés dans l'air, Sanford [12] conseille de prendre  $\alpha = 40\%$ .

### 2.2.3 Application : réalisation de lentilles de type MFE

Tout d'abord, la permittivité relative au sein de lentilles de type MFE varie de 4 à 1, alors que pour les lentilles de Luneburg, les valeurs restent comprises entre 2 et 1.

Par ailleurs, le rapport  $\nu$  de l'équation (2.26), qui n'est autre que le rapport entre le volume des trous et le volume total dans le cas de la technique par densité de trous, admet un seuil qui dépend de la précision de l'usinage et du type de matériau utilisé. Lorsque cette valeur de seuil est atteinte, il est possible de changer le profil de la lentille, comme proposé par [6].

Une hybridation de plusieurs techniques est donc possible mais ajoute un surcoût. Ainsi, pour appliquer cette technique à des lentilles de type HMFE, deux matériaux, au minimum, doivent être utilisés. Le gradient d'indice, pour la permittivité variant de  $\epsilon_r = 4$  à 2, peut être approché en utilisant un matériau de permittivité voisine de 4. Pour approcher la distribution de permittivité de  $\epsilon_r = 2$  à 1, nous retrouvons le cas de la lentille de Luneburg, où des matériaux de permittivité environ égale à 2, comme du Téflon<sup>®</sup>, conviennent.

De ces considérations, il ressort que la technique la plus adaptée pour réaliser des lentilles de type MFE est celle des coquilles. C'est celle qui a été retenue pour réaliser nos prototypes. Une lentille ainsi fabriquée peut être appelée : lentille stratifiée, discrète, multi-couches ou multi-coquilles.

## 2.3 Optimisation de la discrétisation du gradient d'indice

Cette section s'intéresse au choix des paramètres de lentilles stratifiées. Trois méthodes d'optimisation appartenant à la même famille sont ainsi proposées pour choisir l'épaisseur et la permittivité de chaque coquille.

### 2.3.1 Présentation du problème d'optimisation

Nous rappelons que les lois idéales de Luneburg et de MFE suivent la distribution de permittivité relative donnée par Luneburg [1] :

$$\varepsilon_r^{th}(r) = 2 - r^2 \text{ et } \varepsilon_r^{th}(r) = 4 / (1 + r^2)^2 \quad (2.27)$$

respectivement, où  $r$  est la distance radiale normalisée.

Avec une lentille à  $N$  coquilles, la distribution continue (2.27) est approchée par une fonction constante par morceaux prenant  $N$  valeurs distinctes correspondant aux  $N$  coquilles diélectriques homogènes. En réalité, comme la lentille est dans l'air, nous considérerons une coquille fictive supplémentaire constituée d'air et ainsi de permittivité connue mais d'épaisseur inconnue. Dans la suite, cette approximation par morceaux est notée  $\varepsilon_r^{rec}$  pour permittivité relative reconstruite.

La géométrie du problème est représentée figure 2.13. Les variables  $r_i$  et  $\varepsilon_i$  sont respectivement le rayon extérieur normalisé et la permittivité de la  $i^{ème}$  coquille. Il faut noter que  $r_0 = 0$ ,  $r_{N+1} = 1$  et  $\varepsilon_{N+1} = 1$ . Le nombre de degrés de liberté est alors  $2N$ , à savoir les permittivités relatives et les rayons extérieurs normalisés des  $N$  coquilles réelles, c'est à dire  $\{\varepsilon_i, r_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ .

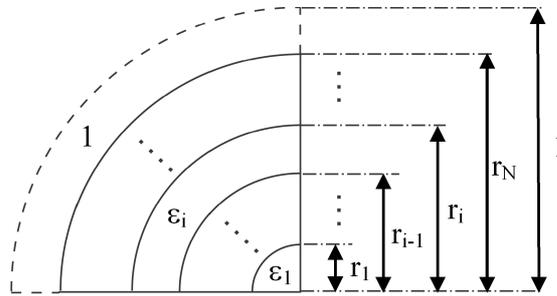


FIG. 2.13 – Vue de coupe d'un quart de la lentille à  $N$  coquilles avec les  $2N$  paramètres à trouver et la coquille d'air fictive.

Nous proposons de minimiser la fonction de coût  $C$  qui mesure la différence  $\delta\varepsilon$  entre  $\varepsilon_r^{th}(r)$  et  $\varepsilon_r^{rec}(r)$  sur le volume de la lentille normalisée :

$$C = \int_{V_{lens}} |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_r^{rec}(r)|^q dV. \quad (2.28)$$

où il reste à définir  $|\delta\varepsilon|^q$ .

Etant donnée la symétrie sphérique des lentilles étudiées,  $dV$  devient  $4\pi r^2 dr$ . Comme  $\varepsilon_r^{rec}$  est une fonction de  $r$  constante par morceaux, plus précisément  $\varepsilon_r^{rec} = \varepsilon_i$  pour  $r_{i-1} \leq r < r_i$  où  $i = 1$  à  $N + 1$ ,  $C$  dans (2.28) peut être réécrite pour le cas de la lentille de Luneburg et MFE :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i|^q r^2 dr. \quad (2.29)$$

Dans (2.28) et (2.29), nous considérerons trois valeurs pour l'exposant  $q$ , à savoir  $q = 1, 2$  et  $\infty$  :

- Pour  $q = 1$  :  $|\delta\varepsilon|^1 = |\delta\varepsilon|$  représente la valeur absolue de  $\delta\varepsilon$ .
- Pour  $q = 2$  :  $|\delta\varepsilon|^2 = (\delta\varepsilon)^2$  représente le carré de  $\delta\varepsilon$ .
- Pour  $q = \infty$  : nous définissons  $|\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i|^\infty \triangleq \max_{r_{i-1} \leq r < r_i} |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i|$ , i.e. pour chaque intervalle nous minimisons le maximum de la différence. Ce dernier cas correspond à une optimisation connue sous le nom de minmax [17].

Il est important de remarquer que, pour  $r \in [r_{i-1}, r_i]$ ,  $|\delta\varepsilon|^q$  est une fonction de  $r$  pour  $q = 1$  et  $2$ , mais est constante pour  $q = \infty$ .

### 2.3.2 Description de l'algorithme d'optimisation

L'algorithme utilisé pour minimiser  $C$ , résumé figure 2.14, est décrit maintenant.

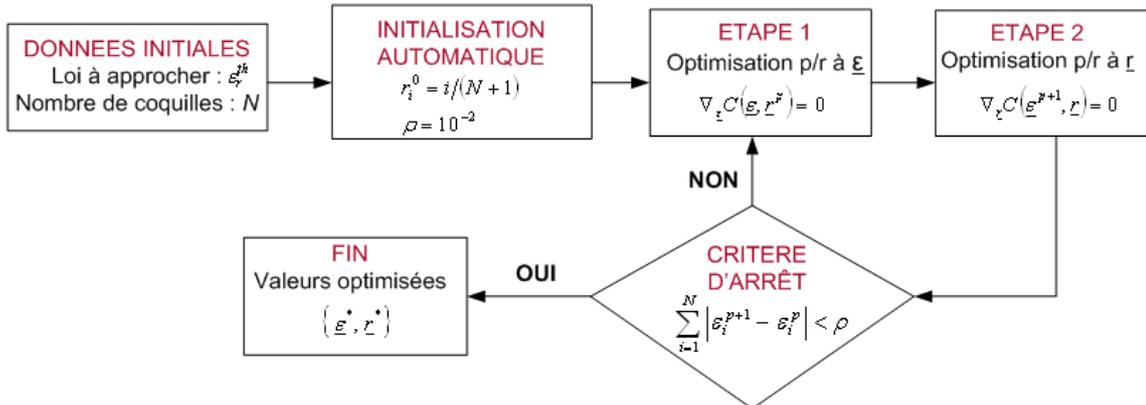


FIG. 2.14 – Diagramme de l'algorithme d'optimisation.

Il s'agit d'une procédure itérative où  $p$  est le pas d'itération. Les seules données initiales de l'algorithme sont la loi théorique de permittivité relative  $\varepsilon_r^{th}$  et le nombre de coquilles  $N$ .

A l'initialisation ( $p = 0$ ), la procédure impose aux épaisseurs des coquilles d'être égales ( $r_i^p = r_i^0 = i/(N+1)$  pour  $i = 1, \dots, N$ ) et fixe le seuil  $\rho$  du critère d'arrêt. Il faut noter que toute autre initialisation raisonnable convient également. Comme les permittivités relatives des matériaux sont habituellement données avec une précision de l'ordre de 1%, nous stoppons les itérations quand  $\sum_{i=1}^N |\varepsilon_i^{p+1} - \varepsilon_i^p| < \rho$ , où le seuil  $\rho$  est égal à  $10^{-2}$ .

Nous séparons ensuite les  $2N$  inconnues en  $\underline{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  et  $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}$  et commençons l'optimisation en prenant le minimum de  $C(\underline{\varepsilon}, \underline{r}^0)$  par rapport à  $\underline{\varepsilon}$  pour obtenir  $\underline{\varepsilon}^1$ . Nous minimisons alors  $C(\underline{\varepsilon}^1, \underline{r})$  par rapport à  $\underline{r}$  pour donner  $\underline{r}^1$  et procédons en minimisant  $C$  alternativement par rapport à  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{r}$  jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

L'algorithme converge rapidement et l'optimum est indépendant de l'initialisation. Cela peut être établi théoriquement. Le critère est convexe, car  $\varepsilon_r^{th}$  est une fonction monotone décroissante, et les deux applications ( $\varepsilon$  et  $r$ ) sont strictement contractantes.

### 2.3.3 Détails des calculs

Dans cette partie sont donnés les détails analytiques pour les trois valeurs de  $q$ . Nous omettons l'indice d'itération  $p$  pour simplifier les notations et indiquons comment obtenir le  $\underline{\varepsilon}$  optimal (suivant) pour un  $\underline{r}$  fixé (courant) et vice versa. Les notations utilisées sont celles définies figure 2.15.

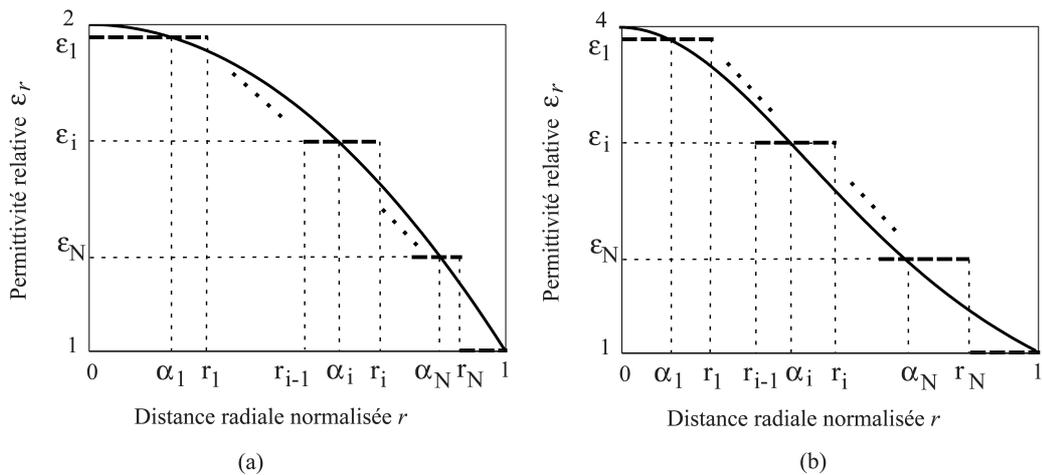


FIG. 2.15 – Représentation de la loi de permittivité théorique (—) et reconstruite (---) pour la lentille de Luneburg (a) et HMFÉ (b) avec les notations utilisées pour les distances radiales normalisées et les permittivités relatives.

### 2.3.3.1 Cas $q = 1$

La relation (2.29) devient :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i| r^2 dr. \quad (2.30)$$

Pour s'affranchir des valeurs absolues et ainsi faciliter les calculs, nous introduisons les variables intermédiaires  $\alpha_i$  qui sont telles que  $\varepsilon_r^{th}(\alpha_i) = \varepsilon_i$ . Comme  $\varepsilon_r^{th}$  est une fonction monotone,  $\alpha_i$  existe toujours et est unique. En effet, cette bijection entre  $\varepsilon_i$  et  $\alpha_i$  est utilisée ci-dessous pour réaliser une sorte de changement de variable.

La relation (2.30) peut alors être réécrite :

$$\begin{aligned} C = & 4\pi \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{\alpha_i} (\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i) r^2 dr \\ & + 4\pi \sum_{i=1}^N \int_{\alpha_i}^{r_i} (\varepsilon_i - \varepsilon_r^{th}(r)) r^2 dr \\ & + 4\pi \int_{r_N}^1 (\varepsilon_r^{th}(r) - 1) r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.31)$$

#### Etape 1 :

L'optimisation de  $C$  par rapport à  $\underline{\varepsilon}$  est réalisée en annulant toutes les dérivées partielles  $\partial C / \partial \varepsilon_i$ . Après quelques calculs, cela entraîne  $\alpha_i^* = [(r_i^3 + r_{i-1}^3) / 2]^{1/3}$  pour  $i=1$  à  $N$ , où les  $\varepsilon_i$  ont disparu. De ces valeurs optimales de  $\alpha_i$ , nous déduisons les nouvelles permittivités optimales  $\varepsilon_i^* : \varepsilon_i^* = \varepsilon_r^{th}(\alpha_i^*)$ .

#### Etape 2 :

Pour optimiser par rapport à  $\underline{r}$ , nous annulons les dérivés partielles  $\partial C / \partial r_i$ . Le système d'équations correspondant conduit à  $\varepsilon_r^{th}(r_i) = (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) / 2$  pour  $i=1$  à  $N$ , qui définit les nouveaux  $r_i^*$  optimaux par la bijection existant entre  $\varepsilon_r^{th}$  et  $r$ .

- Pour la loi de Luneburg,  $\varepsilon_r^{th}$  admet un inverse analytique :  $(\varepsilon_r^{th})^{-1}(\varepsilon) = r(\varepsilon) = \sqrt{2 - \varepsilon}$ , et ainsi,  $r_i^* = [2 - (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) / 2]^{1/2}$ .
- Pour la loi de MFE,  $\varepsilon_r^{th}$  n'admet pas d'inverse analytique, l'évaluation des  $r_i^*$  nécessite donc l'utilisation d'un algorithme trivial de recherche locale.

### 2.3.3.2 Cas $q = 2$

La relation (2.29) devient :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i)^2 r^2 dr. \quad (2.32)$$

#### Etape 1 :

Pour optimiser  $C$  par rapport à  $\underline{\varepsilon}$  nous annulons les dérivés par rapport aux  $\varepsilon_i$ . Nous obtenons  $\varepsilon_i^* = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \varepsilon_r^{th}(r) r^2 dr / \int_{r_{i-1}}^{r_i} r^2 dr$  pour tout  $i$ , où les intégrales sont triviales à évaluer et mènent à des expressions analytiques pour les  $\varepsilon_i$  optimaux.

**Etape 2 :**

L'optimisation par rapport aux  $r_i$  est assez simple et entraîne  $\varepsilon_r^{th}(r_i) = (\varepsilon_{i+1}^2 - \varepsilon_i^2) / (2(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i))$  pour tout  $i$ , à partir desquels nous déduisons les nouveaux  $r_i$  optimaux en utilisant l'inverse  $(\varepsilon_r^{th})^{-1}(\varepsilon)$  comme expliqué ci-dessus.

**2.3.3.3 Cas  $q = \infty$** 

$C$  dans (2.29) devient :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \max_r |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i| r^2 dr. \quad (2.33)$$

**Etape 1 :**

Les  $r_i$  sont fixés et nous cherchons les  $\varepsilon_i$  optimaux. Considérons le  $i^{\text{ème}}$  terme de la sommation. Nous cherchons  $\varepsilon_i$  qui réalise  $\min_{\varepsilon_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \max_r |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i| 4\pi r^2 dr$ , i.e. le  $\varepsilon_i$  qui est tel que l'erreur maximale d'approximation soit la plus petite possible. Comme  $\varepsilon_r^{th}(r)$  est monotone,  $M_i$  le maximum de la différence, qui reste constant sur tout l'intervalle, est atteint en  $r_{i-1}$  ou en  $r_i$ .

Le  $M_i$  minimum est atteint pour le  $\varepsilon_i$  qui entraîne la même différence aux deux extrémités :

$$M_i = |\varepsilon_r^{th}(r_i) - \varepsilon_i| = |\varepsilon_r^{th}(r_{i-1}) - \varepsilon_i|. \quad (2.34)$$

Cela donne :  $\varepsilon_i = (\varepsilon_r^{th}(r_i) + \varepsilon_r^{th}(r_{i-1})) / 2$ . A la fin de l'étape 1, nous avons ainsi :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^N M_i \int_{r_{i-1}}^{r_i} r^2 dr + 4\pi M_{N+1} \int_{r_N}^1 r^2 dr. \quad (2.35)$$

**Etape 2 :**

Nous minimisons par rapport à  $\underline{r}$  qui apparaît seulement aux bornes des intégrales. Nous obtenons un système d'équations :

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{r}} C(\underline{\varepsilon}^1, \underline{r}) = 0 &\Leftrightarrow \partial C / \partial r_i(\varepsilon_i^0, r_i) = 0, \forall i \\ &\Leftrightarrow M_i = M_{i+1}, \forall i. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Le minimum pour  $\underline{\varepsilon}$  fixé, i.e. pour  $M_i$  fixé, est atteint quand les  $M_i$  sont tels qu'ils ont tous la même valeur :  $M_i = M$ .

Il s'ensuit immédiatement que les permittivités optimales  $\varepsilon_i^*$  sont :  $\varepsilon_i^* = \varepsilon_r^{th}(0) - (2i - 1)M$  où  $M = (\varepsilon_r^{th}(0) - \varepsilon_r^{th}(1)) / (2N + 1)$ , i.e. elles décroissent régulièrement, et les rayons optimaux correspondant  $r_i^*$  sont tels que  $\varepsilon_r^{th}(r_i^*) = \varepsilon_i^* - M$ . Ce résultat reste vrai quand le but est d'approcher une permittivité  $\varepsilon_r^{th}(r)$ , fonction monotone décroissante en  $r$ .

Nous avons  $M = 1/(2N + 1)$  et  $M = 3/(2N + 1)$  pour la loi de Luneburg et de MFE respectivement.

Pour le critère du minmax, les paramètres optimaux sont ainsi triviaux à trouver et ne nécessitent pas d'itération.

### 2.3.3.4 Cas $q = \infty$ avec les permittivités fixées

En pratique, le problème le plus fréquemment rencontré est le suivant : pour des matériaux donnés, i.e. ceux disponibles pour fabriquer la lentille, quelles sont les épaisseurs des coquilles qui permettent d'approcher au mieux la permittivité de la lentille idéale ?

La méthode d'optimisation du minmax est maintenant décrite pour des permittivités fixées.  $C$  dans (2.29) est désormais :

$$C = 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \max_r |\varepsilon_r^{th}(r) - \varepsilon_i^a| r^2 dr. \quad (2.37)$$

où  $\{\varepsilon_1^a, \varepsilon_2^a, \dots, \varepsilon_N^a\}$  sont les  $N$  permittivités disponibles et  $r_i$  les  $N$  rayons qui doivent être optimisés. En menant le raisonnement présenté ci-dessus, nous déduisons que les rayons  $r_i$  doivent être choisis tels que :

$$|\varepsilon_r^{th}(r_i) - \varepsilon_i^a| = |\varepsilon_r^{th}(r_i) - \varepsilon_{i+1}^a|. \quad (2.38)$$

Cela conduit immédiatement aux rayons optimaux :  $r_i^* = (\varepsilon_r^{th})^{-1}((\varepsilon_i^a + \varepsilon_{i+1}^a)/2)$ .

## 2.3.4 Validation

Pour valider la méthode d'optimisation, nous considérons des antennes lentilles de Luneburg et HMFE à trois coquilles. Les performances en directivité des lentilles optimisées sont comparées à celles de lentilles de paramètres choisis par des méthodes proposées dans la littérature.

### 2.3.4.1 Géométrie des antennes lentilles et stratégie de modélisation

La géométrie des antennes lentilles simulées est représentée à la figure 2.16.

La distance entre la source et la lentille physique est notée  $h$ .  $r_i$  et  $\varepsilon_i$  sont le rayon extérieur et la permittivité relative de la  $i^{\text{ème}}$  coquille respectivement. Le diamètre de la lentille est noté  $\Phi$ .

Les lentilles de Luneburg, de diamètre  $\Phi = 4 \lambda_0$ , sont illuminées par un guide d'onde ouvert fonctionnant à 6 GHz, montré figure 2.16(a,b).

Les lentilles HMFE sont excitées par une antenne imprimée alimentée par fente fonctionnant à 50 GHz, montré figure 2.16(c,d). Le diamètre des lentilles est, à cette fréquence, égal à  $4 \lambda_0$ .

Pour analyser ce type de structure, nous avons comparé les résultats obtenus par trois logiciels commerciaux à notre disposition : CST Microwave Studio<sup>®</sup>, Ansoft HFSS<sup>®</sup> et FEKO<sup>®</sup>. Dans l'étude qui suit, la directivité est la grandeur qui nous intéresse, c'est pourquoi nous comparons uniquement les diagrammes de rayonnement en champ lointain. La figure 2.17 montrent que les diagrammes trouvés par ces trois logiciels sont très proches.

Le logiciel FEKO<sup>®</sup> aurait été un bon outil de comparaison car, comme la méthode développée au chapitre suivant, ce logiciel traite uniquement les surfaces et présente donc des temps de calcul intéressants. Malheureusement, il n'était disponible que ponctuellement au laboratoire.

Ainsi, CST Microwave Studio<sup>®</sup> est le logiciel retenu.

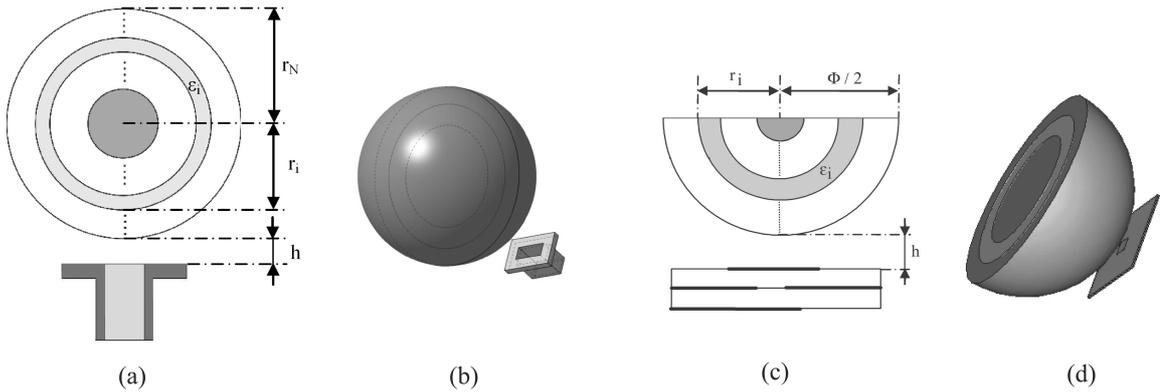


FIG. 2.16 – (a) vue de coupe de l'antenne lentille de Luneburg à  $N$  coquilles alimentée par un guide d'onde ouvert et (b) vue 3D de l'antenne lentille à trois coquilles correspondante. (c) Vue de coupe de l'antenne lentille HMFE à  $N$  coquilles alimentée par une antenne imprimée avec (d) la vue 3D correspondante.

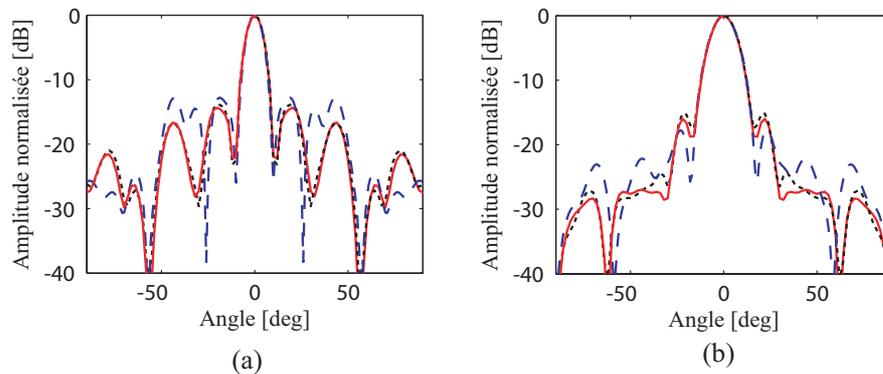


FIG. 2.17 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain [(a) plan E et (b) plan H] d'une lentille HMFE de diamètre  $6,15 \lambda_0$  alimentée par un guide d'onde. Ils sont obtenus par différents logiciels commerciaux : CST Microwave Studio<sup>®</sup> (—), FEKO<sup>®</sup> (···) et Ansoft HFSS<sup>®</sup> (— —).

### 2.3.4.2 Comparaisons entre méthodes pour choisir les paramètres de la lentille

#### Méthodes existantes dans la littérature

Plusieurs méthodes ont déjà été proposées pour choisir les paramètres des lentilles de Luneburg multi-coquilles.

Parmi ces méthodes, certaines prennent en compte le rayonnement de la source primaire. Ainsi, des lentilles de Luneburg non uniformes ont été synthétisées par algorithme génétique afin que les lobes secondaires restent inférieurs à une enveloppe donnée [13, 14, 15].

D'autres méthodes, qui nous intéressent ici, déterminent les paramètres de la lentille indépendamment de la source primaire :

- Peeler and Coleman [16] suggèrent de choisir des incréments d'indice (ou de permittivité) égaux et de choisir les rayons correspondant à l'indice (ou à la permittivité) moyenne dans la lentille idéale. Ces lentilles seront appelées lentille à indice égal (EI) et à permittivité égale (EP). Pour les lentilles EI, nous avons :  $n_{i+1} - n_i = (\sqrt{2} - 1) / N$  avec  $n_1 = \sqrt{2}$  et  $r_i = (\varepsilon_r^{th})^{-1} ((n_i^2 + n_{i+1}^2) / 2)$  pour  $i = 1$  to  $N - 1$ , tandis que pour les lentilles EP :  $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = (2 - 1) / N$  avec  $\varepsilon_1 = 2$  et  $r_i = (\varepsilon_r^{th})^{-1} ((\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) / 2)$  pour  $i = 1$  à  $N - 1$ .
- Schrank et Sanford [12] proposent de prendre les rayons des coquilles tels que l'aire projetée de chaque coquille soit égale et choisissent les diélectriques pour optimiser la focalisation de chaque coquille. Les lentilles dites à aire égale (EA) sont alors telles que :  $\pi r_1^2 = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)$  et  $\varepsilon_i = \varepsilon_r^{th} ((r_{i+1} + r_i) / 2)$  pour  $i = 1$  à  $N - 1$ .
- Enfin, nous considérons les lentilles uniformes (U) où chaque coquille a la même épaisseur et la permittivité est égale à la permittivité du rayon moyen de la lentille idéale. Ainsi, pour les lentilles U, nous avons :  $r_{i+1} - r_i = 1/N$  et  $\varepsilon_i = \varepsilon_r^{th} ((r_{i+1} + r_i) / 2)$  pour  $i = 1$  à  $N - 1$ .

#### Comparaison avec les lentilles de Luneburg optimisées

Nous voulons ici savoir quelle méthode conduit aux antennes lentilles de Luneburg les plus directives. Pour cela, nous considérons des lentilles de Luneburg à trois coquilles dont les paramètres sont choisis par sept méthodes différentes : les quatre présentées ci-dessus qui ont été trouvées dans la littérature (EP, EI, EA et U) et les trois lentilles optimisées (avec  $q = 1, 2$  et  $\infty$ ).

Les paramètres de ces lentilles à trois coquilles sont détaillés dans le tableau 2.1. Il faut se souvenir qu'avec notre méthode d'optimisation, nous proposons de prendre en compte une coquille d'air extérieure, ce qui explique pourquoi  $r_3$  est plus petit que 1 pour les trois dernières lentilles du tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Caractéristiques des lentilles de Luneburg à 3 coquilles simulées

type de lentille	rayons extérieurs des coquilles $r_i$	permittivités des coquilles $\varepsilon_i$
indice égal (EI)	0,44 ; 0,74 ; 1	2 ; 1,63 ; 1,30
permittivité égale (EP)	0,41 ; 0,71 ; 1	2 ; 1,67 ; 1,33
aire égale (EA)	0,58 ; 0,82 ; 1	1,83 ; 1,5 ; 1,16
uniforme (U)	0,33 ; 0,67 ; 1	1,95 ; 1,72 ; 1,28
optimisée avec $q = 1$	0,62 ; 0,81 ; 0,85	1,75 ; 1,47 ; 1,18
optimisée avec $q = 2$	0,60 ; 0,79 ; 0,94	1,79 ; 1,50 ; 1,24
optimisée avec $q = \infty$	0,53 ; 0,75 ; 0,93	1,86 ; 1,57 ; 1,28

Pour les simulations présentées ici, les sept lentilles ont cependant le même volume de diélectrique et la distance  $h$  entre le guide d'onde et la lentille est mesurée par rapport à la coquille physique extérieure, (cf. Fig. 2.16(a)).

Les directivités en fonction de  $h$  pour les sept lentilles de Luneburg sont comparées figure 2.18. La lentille optimisée selon la technique du minmax ( $q = \infty$ ) est celle qui a la directivité la plus élevée. Elle est obtenue pour  $h = 0,1\lambda_0$  qui est la plus petite valeur simulée. Pour cette valeur de  $h$ , l'amélioration de la directivité est supérieure à 1 dB comparée aux méthodes proposées jusqu'ici dans la littérature. Pour cette lentille, la coquille d'air extérieure est plus grande que  $0,1\lambda_0$ , ce qui signifie que le guide d'onde ouvert est en fait à l'intérieur de la coquille fictive. Il en est ainsi, car la source primaire a une longueur électrique non infinitésimale.

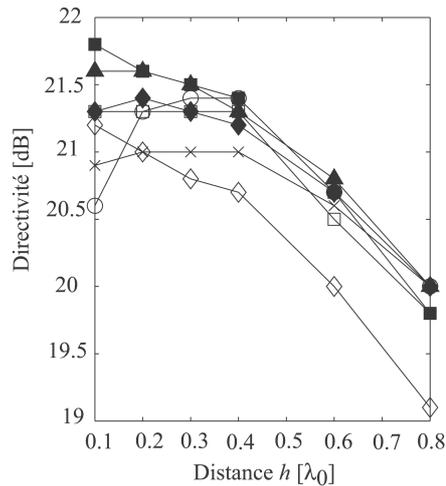


FIG. 2.18 – Comparaison de la directivité en fonction de la distance  $h$  pour sept lentilles de Luneburg à trois coquilles : EP (○), EI (□), EA (◇), U (×) et les lentilles optimisées avec  $q = 1$  (◆), avec  $q = 2$  (▲), avec  $q = \infty$  (■).

### Comparaison avec les lentilles HMFE optimisées

Pour déterminer l'antenne lentille HMFE la plus directive, nous comparons les performances de cinq lentilles à trois coquilles de caractéristiques données tableau 2.2 en fonction de  $h$ .

TAB. 2.2 – Caractéristiques des lentilles HMFE à 3 coquilles simulées

type de lentille	rayons extérieurs des coquilles $r_i$	permittivités des coquilles $\varepsilon_i$
uniforme (U)	0,33 ; 0,67 ; 1	3,62 ; 2,58 ; 1,46
aire égale (EA)	0,58 ; 0,82 ; 1	3,13 ; 1,85 ; 1,22
optimisée avec $q = 1$	0,55 ; 0,75 ; 0,94	2,84 ; 1,92 ; 1,25
optimisée avec $q = 2$	0,48 ; 0,68 ; 0,88	3,12 ; 2,21 ; 1,51
optimisée avec $q = \infty$	0,36 ; 0,57 ; 0,82	3,57 ; 2,72 ; 1,86

Nous remarquons sur la figure 2.19 que la lentille optimisée selon le critère du minmax ( $q = \infty$ ) est à nouveau la plus directive.

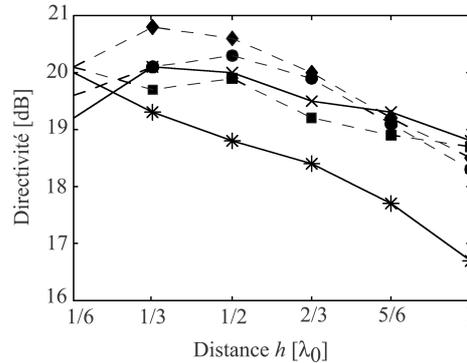


FIG. 2.19 – Comparaison de la directivité en fonction de la distance  $h$  pour cinq lentilles HMFE de diamètre  $4 \lambda_0$  à trois coquilles : optimisée avec  $q = \infty$  ( $\blacklozenge$ ), avec  $q = 2$  ( $\bullet$ ), avec  $q = 1$  ( $\blacksquare$ ), U ( $\times$ ) et EA ( $\ast$ ).

#### 2.3.4.3 Conclusion

Des méthodes d'optimisation permettant de choisir les paramètres de lentilles stratifiées ont été proposées. Appliquées aux antennes lentilles de Luneburg et HMFE, il ressort que la méthode correspondant au problème d'optimisation du minmax conduit aux antennes lentilles les plus directives. Les paramètres ainsi optimisés sont donnés tableaux 2.3 et 2.4 pour les lentilles HMFE et de Luneburg respectivement.

Par ailleurs, il est important de noter que l'optimisation est réalisée indépendamment de la source primaire. Pour une lentille à nombre de coquilles fixé, les paramètres optimisés sont donc les mêmes quelle que soit la source excitatrice.

TAB. 2.3 – Caractéristiques des lentilles HMFE à  $N$  coquilles optimisées par minmax

nombre de coquilles $N$	rayons extérieurs des coquilles $r_i$	permittivités des coquilles $\varepsilon_i$
2	0,44 ; 0,76	3,41 ; 2,20
3	0,36 ; 0,57 ; 0,82	3,57 ; 2,72 ; 1,86
4	0,30 ; 0,47 ; 0,64 ; 0,86	3,67 ; 3,00 ; 2,33 ; 1,67
5	0,28 ; 0,42 ; 0,54 ; 0,70 ; 0,88	3,73 ; 3,18 ; 2,64 ; 2,09 ; 1,55
6	0,25 ; 0,38 ; 0,49 ; 0,60 ; 0,73 ; 0,90	3,77 ; 3,31 ; 2,85 ; 2,38 ; 1,92 ; 1,46

TAB. 2.4 – Caractéristiques des lentilles de Luneburg à  $N$  coquilles optimisées par minmax

nombre de coquilles $N$	rayons extérieurs des coquilles $r_i$	permittivités des coquilles $\varepsilon_i$
2	0,63 ; 0,89	1,80 ; 1,40
3	0,53 ; 0,75 ; 0,93	1,86 ; 1,57 ; 1,28
4	0,47 ; 0,67 ; 0,82 ; 0,94	1,88 ; 1,67 ; 1,44 ; 1,22
5	0,43 ; 0,60 ; 0,74 ; 0,85 ; 0,95	1,91 ; 1,73 ; 1,55 ; 1,36 ; 1,18
6	0,39 ; 0,56 ; 0,68 ; 0,78 ; 0,88 ; 0,96	1,93 ; 1,77 ; 1,61 ; 1,46 ; 1,31 ; 1,16

## 2.4 Considération pratique : masse des lentilles

La masse des lentilles est un paramètre important à considérer, surtout si les applications visées sont des applications embarquées.

Pour réaliser les lentilles, il est possible d'utiliser des matériaux de type mousse expansée, dopés, ou des matériaux dit hybrides (par exemple à densité de trous variable). Comparer la masse des lentilles réalisées par ces différentes techniques peut alors aider à choisir une technologie plutôt qu'une autre.

### 2.4.1 Distribution diélectrique idéale

Pour approcher la permittivité de matériaux expansés, comme vu équation (2.26), nous rappelons qu'il est possible d'utiliser une pondération d'une loi exponentielle et d'une loi linéaire :

$$\epsilon_r = \alpha(\epsilon_{r1}^\nu \cdot \epsilon_{r2}^{1-\nu}) + (1 - \alpha)(\epsilon_{r1}\nu + \epsilon_{r2}(1 - \nu)), \quad (2.39)$$

où  $\alpha$  est un coefficient qui dépend du type de matériau expansé et  $\nu = \rho/\rho_0$  est le rapport entre ( $\rho$ ) la densité du matériau expansé et ( $\rho_0$ ) celle du matériau de permittivité  $\epsilon_{r1}$ .

Pour des matériaux de type mousse expansée, une approximation au premier ordre est acceptable pour estimer la masse du matériau. Par conséquent,  $\alpha = 0$  et si le gaz

utilisé est de l'air ( $\epsilon_{r2} = 1$ ), l'équation (2.39) devient :

$$\epsilon_r = 1 + \nu(\epsilon_{r1} - 1), \quad (2.40)$$

d'où  $\nu = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_{r1} - 1}$  ce qui entraîne  $\rho = \rho_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_{r1} - 1}$ .

Sachant que la masse d'une lentille de volume  $V$  de densité  $\rho$  est :  $m = \int_V \rho \, dv$ , nous obtenons pour une lentille sphérique de rayon  $R$  et de permittivité radiale  $\epsilon_r(r)$  :

$$\begin{aligned} m &= \int_V \rho(\epsilon_r(r)) \, dv(r) \\ &= 4\pi \int_0^R \rho(\epsilon_r(r)) \, r^2 \, dr \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1} \int_0^R (\epsilon_r(r) - 1) \, r^2 \, dr. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} m_{Luneburg} &= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \, r^2 \, dr \\ &= \frac{8}{15}\pi R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} m_{MFE} &= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1} \int_0^R \left( \frac{4}{\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2} - 1 \right) \, r^2 \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3}(3\pi - 8)R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$m_{HMFE} = \frac{m_{MFE}}{2} = \frac{\pi}{3}(3\pi - 8)R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_{r1} - 1}. \quad (2.44)$$

Faisons quelques comparaisons en appliquant les formules (2.42) et (2.44) et en supposant que les lentilles sont fabriquées à partir du même matériau (ie.  $\rho_0$  et  $\epsilon_{r1}$  sont identiques).

Si les lentilles de Luneburg et HMFE ont le même rayon, alors le rapport entre leur masse est :  $\frac{m_{HMFE}}{m_{Luneburg}} = 89\%$ .

Par ailleurs, toujours sous les mêmes conditions, des lentilles de Luneburg et HMFE de masse égale ont un rayon tel que :  $\frac{R_{HMFE}}{R_{Luneburg}} = 104\%$ .

En réalité, les matériaux ne sont pas uniquement fabriqués à partir de mousses. En effet, un dopage en céramique, ou autre, peut être utilisé pour obtenir des matériaux de permittivité plus élevée. Un modèle plus précis peut alors être employé pour calculer la masse des lentilles.

## 2.4.2 Distribution diélectrique réelle

### 2.4.2.1 Formulation

La masse d'une lentille de volume  $V$  et de rayon  $R$  est donnée par la formule suivante :

$$m(R) = \int_0^R \rho(r) dv(r). \quad (2.45)$$

Nous approchons la densité qui varie radialement,  $\rho(r)$ , par un polynôme de degré  $N_\rho$  :

$$\rho(\epsilon_r) = \sum_{n=0}^{N_\rho} p_n \epsilon_r^n, \quad (2.46)$$

avec  $\epsilon_r$  fonction ici à distribution radiale.

La masse devient alors :

$$m(R) = \sum_{n=0}^{N_\rho} p_n \int_0^R \epsilon_r(r)^n dv(r). \quad (2.47)$$

### 2.4.2.2 Application

En utilisant les données reliant la densité à la permittivité relative fournies par la société Emerson & Cuming, nous obtenons, par interpolation, les polynômes correspondants à la relation (2.46) :

$$\begin{aligned} \rho_1(\epsilon_r) &= 0,562 \epsilon_r - 0,441, \\ \rho_2(\epsilon_r) &= -0,035 \epsilon_r^2 + 0,731 \epsilon_r - 0,614, \\ \rho_3(\epsilon_r) &= -0,056 \epsilon_r^3 + 0,365 \epsilon_r^2 - 0,125 \epsilon_r - 0,065. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ces polynômes sont tracés figure 2.20. L'application de la formule (2.47) à la lentille de Luneburg est une simple intégration de polynômes. Dans le cas de la HMFE, la fraction rationnelle fait apparaître des fonctions hypergéométriques  ${}_2F_1$  peu pratiques à utiliser. Pour y remédier, nous approchons la fraction rationnelle par le polynôme  $\epsilon_r^P$  suivant :

$$\epsilon_{r \text{ HMFE}}^P(r) = \sum_{m=0}^{N_\epsilon} \epsilon_m r^m = 4,36 r^3 - 6,69 r^2 - 0,66 r + 4,04; \text{ pour } 0 \leq r \leq 1. \quad (2.49)$$

Nous avons vérifié que l'erreur d'approximation entre la loi théorique et le polynôme d'ordre trois  $\epsilon_{r \text{ HMFE}}^P(r)$  est au plus de 1,1 %.

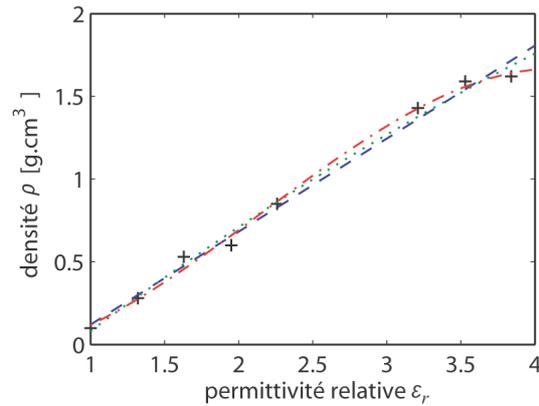


FIG. 2.20 – Densité en fonction de la permittivité relative avec (+) les données provenant d’Emerson & Cuming interpolées par des polynômes de degré 1, 2 et 3 respectivement :  $\rho_1$  (—),  $\rho_2$  (···) et  $\rho_3$  (---).

### 2.4.3 Comparaison

Pour vérifier des formules (2.42), (2.44) et (2.47) permettant de calculer les masses des lentilles, nous comparons, au tableau 2.5, les masses des cinq lentilles à notre disposition. Il faut noter que la balance utilisée ne permet pas d’avoir une précision supérieure au gramme.

TAB. 2.5 – Comparaison des masses mesurées et obtenues par les formules (2.42), (2.44) et (2.47) de cinq lentilles : une Luneburg et quatre HMFE.

Lentille		Masse [g]				
Type	Rayon [mm]	Mesurée	Idéale	Réelle ( $\rho_1$ )	Réelle ( $\rho_2$ )	Réelle ( $\rho_3$ )
Luneburg	200	10 000	9 042	12 593	11 340	11 068
HMFE	9	1	0,62	0,8	0,8	0,8
HMFE	12	2	1,55	1,9	1,9	1,9
HMFE	30	32	24,17	29,4	29,4	29,6
HMFE	45	108	81,58	99,4	99,1	100

Des différences relativement importantes sont obtenues entre les masses mesurées et celles dites idéales. En effet, les masses idéales sont déduites de la formule (2.40) qui suppose que tous les matériaux sont de type mousse expansée. Or cela n’est pas le cas pour toutes les coquilles constituant la lentille, surtout pour les lentilles de type HMFE. Ainsi, alors que l’erreur relative sur la masse est inférieure à 10 % pour le cas de la lentille de Luneburg, elle est légèrement supérieure à 20 % pour les lentilles HMFE.

La masse des lentilles est mieux approchée par la formule dite réelle (2.47) basée sur les données d'Emerson & Cuming. D'ailleurs, plus l'ordre du polynôme approchant la permittivité est élevé, meilleure est l'approximation de la masse des lentilles. L'écart relatif entre les masses mesurées et celles réelles est inférieur à 10% pour les lentilles HMFÉ et voisin de 10% pour la lentille de Luneburg. Ceci est dû au fait que la loi de permittivité de la lentille considérée pour la formule (2.47) est théorique, i.e. continue, et non constante par morceaux comme c'est le cas pour ces lentilles discrètes.

## 2.5 Conclusion

Dans cette partie a été rappelé le cheminement, présenté par Luneburg, permettant d'obtenir les lois du gradient d'indice des lentilles et plus particulièrement celles de Luneburg et HMFÉ.

Puis, les techniques de réalisation du gradient d'indice permettant de discrétiser la loi continue sont passées en revue. Elles ont jusqu'ici été uniquement appliquées aux lentilles de Luneburg. Une discussion est alors menée pour savoir quelle technique est la plus adaptée à la réalisation de lentilles de type MFE. La technique de l'assemblage de coquilles homogènes est retenue. Les lentilles ainsi construites sont donc des lentilles stratifiées.

Une famille de méthodes d'optimisation, qui permet de choisir les permittivités et épaisseurs de chaque coquille d'une lentille stratifiée indépendamment de la source, est ensuite décrite. Il s'agit d'approcher, aussi bien que possible, la permittivité de la lentille idéale. Le problème le plus fréquemment rencontré, à savoir l'optimisation pour des matériaux disponibles, de l'épaisseur de chaque coquille est également traité. Les simulations effectuées avec les lentilles de Luneburg et HMFÉ ont montré que la méthode menant aux antennes lentilles les plus directives correspond au problème d'optimisation du minmax. Les rayons et permittivités sont alors choisis de façon à ce que, en tout point de la lentille, la différence entre la permittivité théorique et approchée soit la plus petite possible. Les paramètres optimaux sont, pour ce cas, déterminés analytiquement et ne nécessitent donc pas d'algorithme itératif.

Enfin, deux méthodes pour estimer la masse des lentilles de Luneburg et HMFÉ sont proposées et comparées à la mesure.



# Bibliographie

## Le gradient d'indice

- [1] R.K. Luneburg, *Mathematical theory of optics*, Providence, Rhode Island, Brown University Press, 1944.
- [2] S.P. Morgan, "General solution of the Luneburg lens problem," *J. Appl. Phys.*, vol. 29, pp. 1358-1368, 1958.
- [3] D.K. Cheng, "Modified Luneberg lens for defocused source," *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. 8, no. 1, pp. 110-111, Jan. 1960.

## Techniques de réalisation du gradient d'indice

- [4] Zimmerman et al., "Luneberg lens and method of constructing same," U.S. Patent 5 677 796, Oct. 14, 1997.
- [5] Strickland, "Method for fabricating Luneburg lenses," U.S. Patent 6 721 103, Sept. 30, 2002.
- [6] K. Sato and H. Ujiie, "A plate Luneberg lens with the permittivity distribution controlled by hole density," in *Proc. Int. Symp. Antennas and Propagation*, p. 975-978, Fukuoka, Japan, 2000.
- [7] L. Xue, V.F. Fusco, "24 GHz automotive radar planar Luneburg lens," *IET Microwaves, Antennas and Propag.*, vol. 1, no. 3, pp.624-628, Juin 2007.
- [8] S. Rondineau, M. Himdi, and J. Sorieux, "A sliced spherical Luneburg lens," *IEEE Antennas and Wireless Propag. Letters*, vol. 2, pp. 163-166, 2003.
- [9] Y.-J. Park and W. Wiesbeck, "Angular independency of parallel-plate Luneburg lens with hexagonal lattice and circular meta posts," *IEEE Antennas and Wireless Propag. letters.*, vol. 1, no. 1, pp. 128-130, Jan. 2002.
- [10] C. Walter, "Surface-wave Luneberg lens antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 8, no. 5, pp. 508-515, Sept. 1960.
- [11] Emerson and Cuming, "Stepped-index Luneberg lenses : Antennas and reflective devices," *Electronic Design*, 1960.
- [12] H. Schrank and J. Sanford, "A Luneberg-lens update," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 37, no. 1, pp. 76-79, Feb. 1995.

## Optimisation de la discrétisation du gradient d'indice

- [13] H. Mosallaei and Y. Rahmat-Samii, "Non-uniform Luneburg lens antennas : a design approach based on genetic algorithms," in IEEE Int. Symp. Antennas and Propag., vol. 1, , Juil. 11-16, 1998, pp.434-437.
- [14] Y. Rahmat-Samii, H. Mosallaei and Z. Li, "Luneburg lens antennas revisited : Design, optimization, and measurements," IEEE Millennium Conference on Antennas and Propag., Davos, Switzerland, Avr. 9-14, 2000.
- [15] H. Mosallaei and Y. Rahmat-Samii, "Non-uniform luneburg and 2-shell lens antennas : Radiation characteristics and design optimization," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 49, no. 1, pp. 60-69, Jan. 2001.
- [16] G. Peeler and H. Coleman, "Microwave stepped-index Luneberg lenses," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 6, no. 2, pp. 202-207, Avr. 1958.
- [17] M.J.D. Powell, Approximation theory and methods, Cambridge University Press, 1981, chapitre 7.

# Chapitre 3

## Analyse de structures sphériques et hémisphériques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>83</b>
<b>3.2</b>	<b>Présentation du problème et mise en équation</b>	<b>84</b>
3.2.1	Introduction des modes sphériques	84
3.2.1.1	Expression du champ électromagnétique	84
3.2.1.2	Coefficients d'onde associés à un champ électromagnétique	87
3.2.2	Détermination des caractéristiques d'antennes	91
3.2.2.1	Champ lointain	91
3.2.2.2	Puissance rayonnée	91
3.2.2.3	Directivité	92
3.2.3	Décomposition de la source	92
3.2.3.1	Dipôles électrique et magnétique élémentaires	93
3.2.3.2	Source complexe de Huygens	94
3.2.3.3	Onde plane	94
3.2.3.4	Autres sources	94
3.2.3.5	Source réelle	94
<b>3.3</b>	<b>Application à l'étude des antennes lentilles stratifiées</b>	<b>95</b>
3.3.1	Diffusion introduite par une lentille stratifiée	95
3.3.1.1	De forme sphérique	97
3.3.1.2	De forme hémisphérique	98
3.3.1.3	Prise en compte des effets de couplage entre la source et la lentille	99
3.3.2	Résultats numériques	100
3.3.2.1	Ordre de troncature	100
3.3.2.2	Réaction de la lentille sur la source	102
3.3.2.3	Cartographies de champs	103

3.3.2.4	Considérations de temps et charge de calcul . . . .	105
3.3.3	Validations . . . . .	106
3.3.3.1	Modélisation de la source . . . . .	106
3.3.3.2	Diffusion par une lentille stratifiée . . . . .	107
<b>3.4</b>	<b>Perspective : prise en compte de la divergence non nulle .</b>	<b>111</b>
3.4.1	Nécessité du vecteur $\vec{L}$ . . . . .	111
3.4.2	Utilisation du vecteur $\vec{L}$ . . . . .	112
3.4.2.1	Obtention des coefficients modaux incidents . . . .	112
3.4.2.2	Application de la MMT . . . . .	115
3.4.3	Conclusion . . . . .	115
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>116</b>

---

## 3.1 Introduction

Les lentilles inhomogènes ont d'abord été conçues et analysées en utilisant la technique du tracé de rayons bien connue en optique [1, 2, 3, 4]. Cependant, l'application directe de cette méthode asymptotique suppose que toutes les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde.

Pour s'affranchir de cette limitation, l'optique géométrique a plus récemment été combinée avec des méthodes de diffraction [5], mais aussi couplée avec l'optique physique [6, 7, 8, 9], pour analyser, entre autre, des lentilles à deux coquilles de forme quelconque. Ce type de méthode ne permet toutefois pas une prise en compte efficace des réflexions dans la lentille, surtout si le nombre de coquilles est important.

Pour obtenir des résultats plus précis, les méthodes numériques classiques peuvent être employées pour analyser ce type de structures. Ainsi, nous pouvons citer : la méthode des différences finies dans le domaine temporel [10], la méthode des éléments finis [11] ou les équations intégrales et la méthode des moments [12, 13]. Malheureusement ce type de méthodes permet de traiter uniquement des lentilles de tailles réduites, typiquement de dimensions inférieures à  $20 \lambda_0$ , et sont très coûteuses en temps de calcul et en mémoire.

Pour des structures sphériques, la solution de l'équation homogène de Helmholtz est analytique. Il est possible de représenter le champ électromagnétique en série de fonctions propres vectorielles sphériques. Cette décomposition, introduite par Hansen [14] en 1935, a été ensuite exhaustivement utilisée et rapportée dans la littérature. Les études menées se sont d'abord portées sur la diffraction par une onde plane d'une sphère métallique puis diélectrique [15, 16]. La diffraction d'un champ incident divergent par une lentille diélectrique stratifiée a, par la suite, été résolue en utilisant des formulations différentes : séries de Mie [17, 18], potentiel scalaire [19], fonctions de Green dyadiques [20, 21, 22], ou technique de raccordement des modes (notée MMT pour "Mode Matching Technique") basée sur les fonctions d'ondes sphériques [23]. La prise en compte de sources plus réalistes, telles que des antennes imprimées circulaires conformées, associés à des lentilles sphériques, a aussi été précisément étudiée en utilisant la méthode analytique de régularisation [24, 25].

Ce chapitre présente la MMT basée sur les fonctions d'ondes sphériques pour étudier l'interaction entre une lentille sphérique / hémisphérique stratifiée et une source quelconque.

La décomposition du champ électromagnétique sur les modes sphériques est tout d'abord rappelée. La détermination des caractéristiques d'antennes à partir des coefficients modaux est alors détaillée puis la décomposition de sources, idéales ou réelles, sur la base des vecteurs modaux sphériques est décrite.

La MMT est ensuite appliquée pour étudier les antennes lentilles sphériques et hémisphériques stratifiées. Les effets de couplage entre la source et la lentille sont aussi

considérés.

La théorie développée est alors appliquée pour mettre en valeur certains résultats numériques, tels que l'ordre de troncature des séries, les cartographies de champs et les charges et temps de calcul.

Des validations expérimentales et des comparaisons avec des logiciels commerciaux de la méthode proposée sont montrées.

Enfin, la prise en compte d'une autre famille de vecteurs de base pour la décomposition du champ électromagnétique est introduite.

## 3.2 Présentation du problème et mise en équation

### 3.2.1 Introduction des modes sphériques

L'objectif de cette partie est de rappeler brièvement les étapes permettant d'exprimer le champ électromagnétique dans un milieu vide de charge à partir des modes sphériques. Ces développements, avec des notations similaires, sont davantage détaillés au chapitre VII de [15] ainsi que dans [24].

#### 3.2.1.1 Expression du champ électromagnétique

##### Equation d'onde

En régime harmonique à la pulsation  $w$ , dans un espace vide de sources, homogène, isotrope et linéaire, le champ électromagnétique vérifie l'équation d'onde vectorielle :

$$\Delta \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \vec{0}, \quad (3.1)$$

où la convention d'évolution temporelle est  $e^{+jwt}$ ,  $k$  représente le nombre d'onde et  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien. Pour notre étude, les milieux sont supposés sans perte donc  $k$  est réel.

##### Résolution de l'équation d'onde scalaire de Helmholtz

L'équation d'onde scalaire de Helmholtz est donnée par la relation :

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0 \quad (3.2)$$

où  $\Psi$  est la fonction d'onde scalaire.

Pour résoudre cette équation, il est naturel de l'exprimer dans le système de coordonnées sphériques, étant donné la géométrie de la structure étudiée.

En appliquant la méthode de séparation des variables :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi[, \quad (3.3)$$

nous trouvons la fonction d'onde scalaire  $\Psi$ , solution de (3.2) :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m,\sigma,s} \alpha_{mn}^{\sigma s} \Psi_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi), \text{ où } \sum_{n,m,\sigma,s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=1,4} \sum_{\sigma=e,o}, \quad (3.4)$$

$$\text{et avec } \Psi_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi) = Z_n^s(kr) P_n^m(\cos(\theta)) f_m^\sigma(\varphi),$$

$$f_m^\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sin(m\varphi) & \text{si } \sigma = e \\ \cos(m\varphi) & \text{si } \sigma = o \end{cases},$$

où :  $Z_n^1$  fonction sphérique de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$ ,  
 $Z_n^4$  fonction sphérique de Hankel de seconde espèce et d'ordre  $n$ ,  
 $P_n^m$  polynôme associé de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

Les définitions et propriétés utiles des fonctions sphériques de Bessel et polynômes associés de Legendre sont données en annexe A et B respectivement.

Le repère sphérique utilisé est défini figure 3.1.

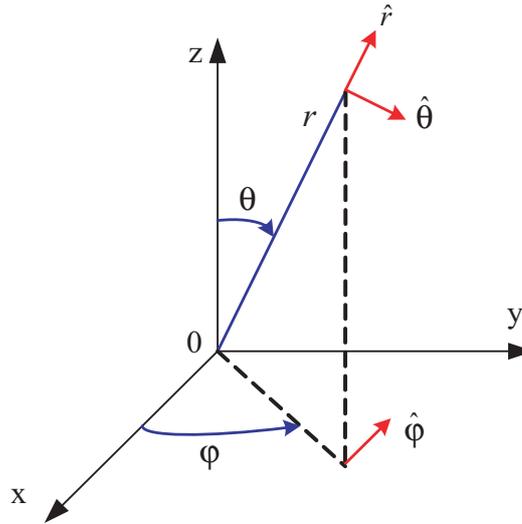


FIG. 3.1 – Définition du repère sphérique.

Afin d'expliquer le choix des fonctions de Bessel, il est nécessaire d'introduire les sphères dites de Wilcox [28]. Elles sont définies de manière à ce que l'espace soit divisé en 3 régions concentriques, comme indiqué figure 3.2(a) :

- La zone extérieure ( $r > r_{ext}$ ), délimitée par la sphère  $S_{ext}$ , qui est la plus petite sphère contenant toutes les charges.
- La zone intérieure ( $r < r_{int}$ ), délimitée par la sphère  $S_{int}$ , qui possède au moins un point de contact avec les charges mais n'en contient aucune.
- La zone intermédiaire ( $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$ ) qui contient toutes les charges.

Ces zones correspondent aux domaines d'analyticité de la série  $\Psi$ .

Par ailleurs, en présence de plusieurs sources, une sphère intérieure et extérieure de

Wilcox doit être associée à chaque source, comme représenté sur la figure 3.2(b) pour le cas particulier de deux sources. En effet, les équations de Maxwell sont linéaires ce qui permet de traiter la contribution de plusieurs sources comme la superposition de la contribution de chacune d'entre elles.

Le choix de  $s \in \{1, 4\}$ , i.e. du type de fonction de Bessel à utiliser, dépend alors de la position de l'observateur  $r_{obs}$  par rapport aux sphères de Wilcox :

- Si  $r_{obs} < r_{int}$ , le champ doit être fini à l'origine donc seule la fonction sphérique de Bessel de première espèce  $Z_n^1$ , représentative d'une onde non progressive, existe ( $s = 1$ ).
- Si  $r_{obs} > r_{ext}$ , seule la fonction sphérique de Hankel de seconde espèce  $Z_n^4$ , qui se comporte comme une onde progressive, est utile pour représenter le champ électromagnétique ( $s = 4$ ).
- Dans une zone vide de source, limitée par une sphère intérieure et une sphère extérieure de Wilcox, soit si  $r_{ext}^1 < r_{obs} < r_{int}^2$  d'après les notations de la figure 3.2(b), les deux types d'onde, progressive et non progressive, coexistent ( $s = 1$  et  $s = 4$ ).

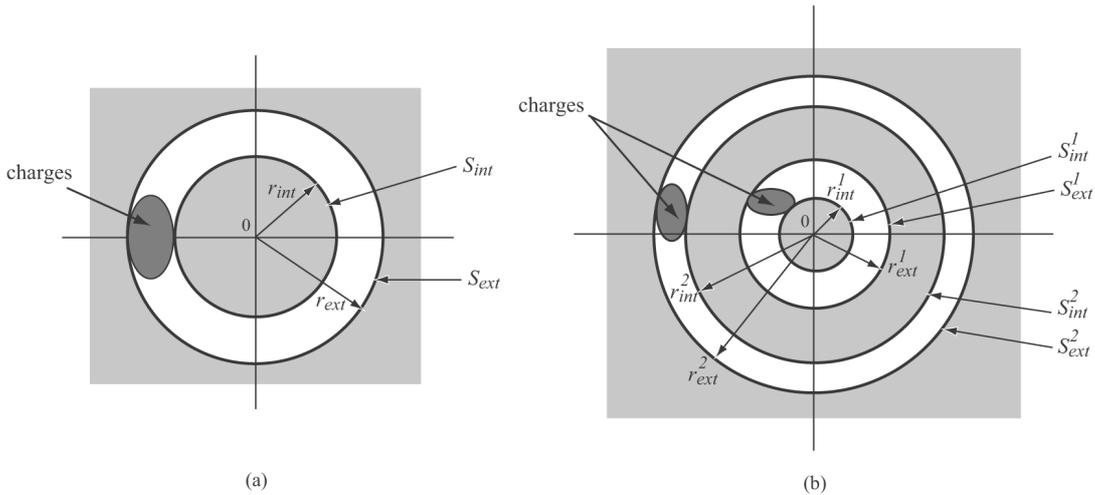


FIG. 3.2 – Définition des sphères de Wilcox : (a) intérieure ( $S_{int}$  de rayon  $r_{int}$ ) et extérieure ( $S_{ext}$  de rayon  $r_{ext}$ ) pour le cas d'une seule source et (b) intérieures ( $S_{int}^{1,2}$  de rayon  $r_{int}^{1,2}$ ) et extérieures ( $S_{ext}^{1,2}$  de rayon  $r_{ext}^{1,2}$ ) pour le cas de deux sources.

### Résolution de l'équation d'onde vectorielle de Helmholtz

L'extension de la solution scalaire au problème vectoriel s'effectue par l'introduction des vecteurs suivants, pour  $n = 1, 2, \dots +\infty, m = 0, 1, \dots n, \sigma \in \{e, o\}$  et  $s \in \{1, 4\}$  :

$$\vec{M}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r}), \quad \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r}) \quad \text{et} \quad \vec{L}_{mn}^{\sigma s} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}. \quad (3.5)$$

La famille des vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}, \vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  forme une base de solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz, comme montré dans [38]. Ces vecteurs de base sont appe-

lés vecteurs modaux sphériques. L'ensemble des solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz peut ainsi être projeté sur cette base de vecteurs modaux.

Il est important de remarquer que les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  dérivent d'un rotationnel et sont par conséquent à divergence nulle :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_{mn}^{\sigma s} = 0$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = 0$ . Quant à  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$ , c'est un vecteur à divergence non nulle mais à rotationnel nul.

Un certain nombre de relations d'orthogonalité utiles entre ces vecteurs sont données en annexe C.2.

### Résolution de l'équation d'onde associée au champ électromagnétique

Etant données les définitions des sphères de Wilcox quant aux domaines d'analyticité des développements sur les modes sphériques, chaque domaine étudié est vide de charges. Ainsi, le champ électromagnétique est tel que :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ . Or, les vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  ne sont pas à divergence nulle. Ils servent à caractériser les charges. Par conséquent, le développement du champ électromagnétique au sein des sphères de convergence, en espace vide de charges et dans un milieu d'impédance intrinsèque  $\eta$ , est le suivant :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j/\eta \end{Bmatrix} \sum_{n,m,\sigma,s} a_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} + b_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma} s} \\ \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Selon le théorème de Wilcox basé sur l'analyse de la convergence des séries de Bessel, la décomposition sur la base  $\{\vec{M}, \vec{N}\}$ , à l'intérieur de  $S_{int}$  et à l'extérieur de  $S_{ext}$ , converge uniformément vers le champ électromagnétique.

Les expressions des vecteurs d'ondes sphériques  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont, au point  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\begin{cases} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} = -t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) Z_n^s(z) f_m^\sigma(\varphi) \hat{\theta} + t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) Z_n^s(z) f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \hat{\varphi} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) Z_n^s(z)/z f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \hat{r} - t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) K_n^s(z) f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \hat{\theta} - t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) K_n^s(z) f_m^\sigma(\varphi) \hat{\varphi} \end{cases} \quad (3.7)$$

$z = kr$ , où  $k$  est le nombre d'onde,

$$t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) = \bar{\sigma}(-1)m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta},$$

$$t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta),$$

$$t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) = n(n+1)P_n^m(\cos \theta),$$

avec :  $K_n^s(z) = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z Z_n^s(z)) = Z_{n-1}^s(z) - \frac{n Z_n^s(z)}{z},$

$$\sigma(-1) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma = o \\ -1 & \text{si } \sigma = e \end{cases},$$

$\bar{\sigma}$  est le complémentaire de  $\sigma$  dans  $\{e, o\}$ .

$a_{mn}^{\sigma s}$  et  $b_{mn}^{\sigma s}$  sont les coefficients d'onde sphériques. Leur détermination fait l'objet de la partie suivante.

#### 3.2.1.2 Coefficients d'onde associés à un champ électromagnétique

Un certain nombre de méthodes permettant de calculer les coefficients d'onde associés à tout type de champ électromagnétique sont présentées. La première méthode est

basée sur l'utilisation des courants électriques et magnétiques équivalents. La seconde concerne l'utilisation des moments dipolaires et la troisième s'appuie sur la discrétisation de la source. Enfin, l'obtention des coefficients modaux à partir des courants électriques et magnétiques sur une sphère est détaillée. En outre, la modification des coefficients d'onde par translation et rotation est abordée.

### Courants électrique et magnétique

Soient des sources d'étendus finies contenues dans le volume  $V_0$  fermé par la surface  $S_0$ . Nous cherchons les coefficients d'onde  $a$  et  $b$  qui caractérisent la source hors de  $V_0$ .

L'obtention de ces coefficients à partir des courants électriques et magnétiques volumiques caractérisant la source, respectivement  $J_v^e$  et  $J_v^m$ , est détaillée p. 73 - 76 de [24]. Ainsi, il est montré que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} \bar{s}} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{V_0} \left[ \vec{J}_v^e(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_v^m(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \right] dv(\vec{r}), \quad (3.8)$$

$$\text{avec } c_{mn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, e_m = \begin{cases} 2 & \text{si } m=0 \\ 1 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{et où } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} \\ \bar{s} \end{array} \right\} \text{ est le complémentaire de } \left\{ \begin{array}{l} \sigma \\ s \end{array} \right\}.$$

Il découle alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} \bar{s}} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{V_0} \left[ \vec{J}_v^e(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_v^m(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \right] dS(r) dr. \quad (3.9)$$

Pour le cas particulier où toutes les sources sont concentrées sur la surface  $S_0$ , nous pouvons écrire :

$$\vec{J}_v^e = \vec{J}_s^e \cdot \delta(r(\theta, \varphi) \in S_0) \text{ et } \vec{J}_v^m = \vec{J}_s^m \cdot \delta(r(\theta, \varphi) \in S_0) \quad (3.10)$$

où  $J_s^e$  et  $J_s^m$  sont les courants électrique et magnétique surfaciques.

Nous en déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} \bar{s}} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{V_0} \left[ \vec{J}_s^e(\vec{r}) \delta(r \in S_0) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \dots \right. \quad (3.11) \\ \left. - \frac{j}{\eta} \vec{J}_s^m(\vec{r}) \delta(r \in S_0) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \right] dS(r) dr,$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} \bar{s}} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{S_0} \left[ \vec{J}_s^e(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_s^m(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \right] dS(r). \quad (3.12)$$

### Moments dipolaires

Il est souvent possible de caractériser une source primaire par ses moments dipolaires électromagnétiques  $(\vec{p}^e, \vec{p}^m)$ .

Ceux-ci sont liés aux éléments de courants électromagnétiques infinitésimaux placés en  $\vec{r}_0$ , vecteur défini dans le système de coordonnées sphériques par les trois composantes  $r_0$ ,  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  de la manière suivante :

$$\vec{J}^e(\vec{r}) = \vec{p}^e \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.13)$$

$$\vec{J}^m(\vec{r}) = \vec{p}^m \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.14)$$

$$\text{avec } \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

En insérant les relations (3.13) et (3.14) dans (3.8), nous obtenons directement les coefficients modaux :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \left[ \vec{p}^e \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \end{array} \right\} - \frac{j}{\eta} \vec{p}^m \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \end{array} \right\} \right]. \quad (3.15)$$

### Sources étendues

Physiquement, une source électromagnétique réelle est étendue et de dimension finie.

Il est alors nécessaire d'utiliser les formes intégrales (3.12) des expressions des coefficients sphériques. Les contraintes imposées par Wilcox sur les fonctions de Bessel rendent cette intégrale uniformément convergente.

Celle-ci peut ainsi s'exprimer sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} = \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^P \left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{p\sigma s} \\ b_{mn}^{p\bar{\sigma} s} \end{array} \right\}, \quad (3.16)$$

où la surface  $S_0$  contenant les sources est découpée en  $P$  éléments de surface.

Les coefficients globaux correspondent à la superposition des coefficients de chacune des sources électromagnétiques composant la source globale.

### Courants électriques ou magnétiques sur une sphère

Il est également possible de déterminer les coefficients d'onde caractérisant la source à partir uniquement des courants électriques ou magnétiques sur une sphère entourant la source en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes sphériques détaillées en annexe C.2.

Rappelons que, dans un milieu vide de source :

$$\vec{E} = \sum_{n,m,\sigma,s} a_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma} s}. \quad (3.17)$$

Après quelques calculs, il vient :

$$\vec{E}_{\perp r} = \hat{r} \times \vec{E} = \sum_{n,m,\sigma,s} a_{mn}^{\sigma s} \chi_n^s \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} - \frac{b_{mn}^{\sigma s}}{\chi_n^s} \vec{M}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s}, \quad (3.18)$$

avec  $\chi_n^s = \frac{Z_n^s}{K_n^s}$  et où  $\vec{a}_{\parallel}$  est la partie tangentielle de  $\vec{a}$  :  $\vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{r})\hat{r}$ .

• La projection du champ électrique orthogonal à  $\hat{r}$  ( $\vec{E}_{\perp r}$ ) sur  $\vec{M}$  conduit alors à :

$$\left\langle \vec{E}_{\perp r} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = - \sum_{n,m,\sigma,s} \frac{b_{mn}^{\sigma s}}{\chi_n^s} \left\langle \vec{M}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2, \quad (3.19)$$

car  $\left\langle \vec{M}_{mn\parallel}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \left\langle \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = 0$ .

Comme  $\left\langle \vec{M}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{\pi e_m^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}} \left[ Z_n^s \bar{Z}_n^{s'} \right] \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\bar{\sigma},\sigma'}$ , nous obtenons :

$$b_{mn}^{\sigma s} = - \frac{c_{mn}}{\pi e_m^{\sigma}} \frac{\chi_n^s}{Z_n^s \bar{Z}_n^{s'}} \left\langle \vec{E}_{\perp r} | \vec{M}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s} \right\rangle_2. \quad (3.20)$$

• De manière analogue, la projection de  $\vec{E}_{\perp r}$  sur  $\vec{N}$  permet d'obtenir les coefficients  $a_{mn}^{\sigma s}$ . Ainsi,

$$\left\langle \vec{E}_{\perp r} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \sum_{n,m,\sigma,s} a_{mn}^{\sigma s} \chi_n^s \left\langle \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 \quad (3.21)$$

car  $\left\langle \vec{M}_{mn\parallel}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = 0$ .

Or,  $\left\langle \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{\pi e_m^{\sigma}}{c_{mn}} |K_n^s|^2 \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'}$ , d'où :

$$a_{mn}^{\sigma s} = \frac{c_{mn}}{\pi e_m^{\sigma}} \frac{1}{\chi_n^s |K_n^s(z)|^2} \left\langle \vec{E}_{\perp r} | \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} \right\rangle_2. \quad (3.22)$$

Un développement similaire permet de déduire les coefficients modaux à partir des champs magnétiques uniquement.

### Transformation des coefficients d'onde par translation et rotation

Une étude exhaustive sur la transformation des coefficients d'onde engendrée par rotations et translations est reportée dans [35] avec des notations différentes.

Ces transformations nécessitent des sommes discrètes triples, dont le coût de calcul est du même ordre de grandeur que celui produit par la technique proposée paragraphe 3.2.1.2, où ces coefficients sont directement calculés à partir des courants équivalents de la source.

### 3.2.2 Détermination des caractéristiques d'antennes

Les coefficients modaux sphériques,  $a_{mn}^{\sigma s}$  et  $b_{mn}^{\sigma s}$  dans (3.6), contiennent toute l'information décrivant l'antenne. La manière dont sont extraits de ces coefficients le champ lointain, la puissance rayonnée et la directivité, est ici détaillée.

#### 3.2.2.1 Champ lointain

Considérons une sphère de rayon suffisamment grand pour se placer dans le cas d'un problème extérieur ( $s = 4$ ).

De la forme générale du champ électromagnétique donnée à la relation (3.6), nous obtenons les composantes du champ électrique sur cette sphère à la position  $(\theta, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_{n,m,\sigma} b_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 3}(\theta) \frac{Z_n^4(kr)}{kr} f_m^\sigma(\varphi), \\ E_\theta &= - \sum_{n,m,\sigma} [a_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta) Z_n^4(kr) + b_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta) K_n^4(kr)] f_m^\sigma(\varphi), \\ E_\varphi &= \sum_{n,m,\sigma} [a_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta) Z_n^4(kr) - b_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta) K_n^4(kr)] f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les fonctions sphériques de Bessel ont le comportement asymptotique suivant, donné dans [29], quand  $|z| \rightarrow \infty$  :

$$\left\{ \begin{array}{c} Z_n^4(z) \\ K_n^4(z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} j \\ 1 \end{array} \right\} j^n \frac{e^{-jz}}{z} + O(1/|z|^2). \quad (3.24)$$

En insérant la relation (3.24) dans (3.23), nous obtenons les composantes du champ électrique en champ lointain (quand  $|kr| \rightarrow \infty$ ) en  $(\theta, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} E_r &= O(1/|kr|^2), \\ E_\theta &= -\frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{n,m,\sigma} j^n [ja_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) + b_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta)] f_m^\sigma(\varphi) + O(1/|kr|^2), \\ E_\varphi &= \frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{n,m,\sigma} j^n [ja_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) - b_{mn}^{\sigma 4} t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta)] f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) + O(1/|kr|^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

#### 3.2.2.2 Puissance rayonnée

La puissance rayonnée par une source électromagnétique est égale au flux du vecteur de Poynting à travers une surface fictive contenant l'ensemble des sources. Soit une sphère  $S_r$  de rayon  $r$  supérieur à  $r_{ext}$  (le rayon de la sphère du problème extérieur de Wilcox). La puissance rayonnée  $P_r$  est :

$$P_r = Re \{P\} = \frac{1}{2} Re \left\{ \oint_{S_r} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right\} \quad (3.26)$$

où  $P$  est la puissance complexe sur  $S_r$ .

Grâce aux relations d'orthogonalité entre les vecteurs modaux, reportées en annexe C.2, nous trouvons :

$$P = -\frac{r^2}{2\eta} \sum_{n,m,\sigma} \left[ |a_{mn}^{\sigma 4}|^2 \lambda_{mn}^{\sigma} j Z_n^4(kr) \overline{K_n^4(kr)} + |b_{mn}^{\sigma 4}|^2 \lambda_{mn}^{\bar{\sigma}} j Z_n^4(kr) \overline{K_n^4(kr)} \right], \quad (3.27)$$

$$\text{avec } \lambda_{mn}^{\sigma} = \pi \frac{e_m^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}}, \quad c_{mn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!},$$

$$e_m^{\sigma} = 1 + \sigma(-1)\delta_m \text{ et } \sigma(-1) = \begin{cases} +1, & \text{si } \sigma = o \\ -1, & \text{si } \sigma = e \end{cases}.$$

En utilisant (3.26) et (3.27) ainsi que les formes asymptotiques des fonctions de Bessel (3.24), la puissance rayonnée  $P_r$  en champ lointain est :

$$P_r = \frac{1}{2\eta k^2} \sum_{n,m,\sigma} \lambda_{mn}^{\sigma} [|a_{mn}^{\sigma 4}|^2 + |b_{mn}^{\bar{\sigma} 4}|^2]. \quad (3.28)$$

### 3.2.2.3 Directivité

La directivité  $D$  associée à une antenne est le rapport entre l'intensité  $U$  rayonnée à grande distance dans une direction  $(\theta, \varphi)$  et l'intensité moyenne  $U_m$  rayonnée à grande distance [30] :

$$D(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_m}. \quad (3.29)$$

En utilisant les relations (3.6) et (3.25), nous obtenons l'intensité  $U$  rayonnée à grande distance, sachant que :

$$U(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{r}. \quad (3.30)$$

De l'équation (3.28), il vient l'expression de l'intensité moyenne  $U_m$  :

$$U_m = \frac{P_r}{4\pi} = \frac{1}{8\pi\eta k^2} \sum_{n,m,\sigma} \lambda_{mn}^{\sigma} [|a_{mn}^{\sigma 4}|^2 + |b_{mn}^{\bar{\sigma} 4}|^2]. \quad (3.31)$$

## 3.2.3 Décomposition de la source

Pour prendre en compte la diffusion par des lentilles stratifiées, il faut d'abord décomposer le rayonnement de la source en espace libre sur les fonctions d'ondes sphériques, comme expliqué figure 3.3.

Les travaux précédents considéraient soit des sources idéales telles que les ondes planes [15], des dipôles "end-fire" [22] et des sources complexes de Huygens [18, 26]

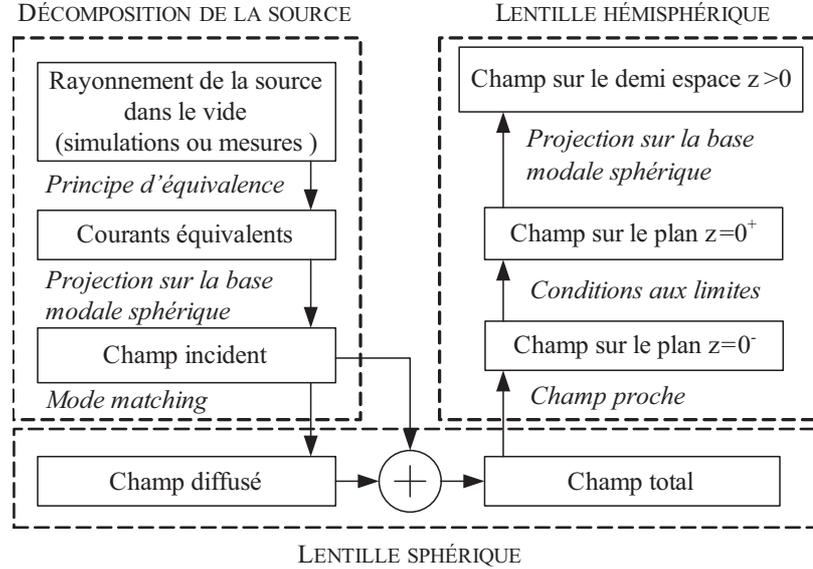


FIG. 3.3 – Schéma résumant les étapes de la décomposition de la source sur la base modale sphérique. Cette décomposition permet l'analyse d'antenne lentilles sphériques à partir de laquelle est déduite l'étude de lentille hémisphérique.

soit des approximations de sources étendues [23, 27]. Dans [36], Wood propose d'interpoler les données provenant du champ lointain d'antennes pour prendre en compte des sources réelles à symétrie de révolution azimutale.

Dans un premier temps, nous rappelons comment déterminer les coefficients modaux de sources idéales classiques : dipôles électrique et magnétique, source complexe de Huygens, onde plane, antenne "end-fire". Puis, pour améliorer la représentation de la source, nous détaillons les étapes permettant de considérer n'importe quelle source réelle sans faire d'approximations.

### 3.2.3.1 Dipôles électrique et magnétique élémentaires

Un dipôle électrique élémentaire est un fil électrique de longueur  $l$  négligeable devant la longueur d'onde qui est parcouru par un courant électrique  $I^e$ . Son moment dipolaire électrique et magnétique est donc  $\vec{p}^e = I^e \vec{l}$  et  $\vec{p}^m = \vec{0}$  respectivement.

Bien que physiquement irréalisable, le dipôle magnétique élémentaire correspond à une boucle, en fil électrique de section infinitésimale, de rayon  $a$  négligeable devant la longueur d'onde. Son moment dipolaire est ainsi  $\vec{p}^e = \vec{0}$  et  $\vec{p}^m = I^e \eta 2\pi \vec{a}$ .

La distribution de courant de ces dipôles est obtenue en utilisant les relations (3.13), (3.14) et les coefficients modaux de l'équation (3.15).

### 3.2.3.2 Source complexe de Huygens

La source complexe de Huygens est une source imaginaire qui est solution des équations de Maxwell. Il s'agit du croisement d'une source électrique et d'une source magnétique qui permet, selon une direction, l'addition des champs dans un sens et l'annulation dans le sens opposé.

Une source de Huygens est donc réalisée en choisissant un couple de moments dipolaires  $(\vec{p}^e, \vec{p}^m)$ , tel que  $\vec{p}^e$  et  $\vec{p}^m$  soient orthogonaux entre eux et que leur norme vérifie  $|\vec{p}^m| = \eta |\vec{p}^e|$ . Pour obtenir une source complexe de Huygens, une position complexe  $\vec{r} = r \cdot \hat{r} + jb \cdot \vec{d}$  est ajoutée.

Celle-ci a été proposée dans la forme scalaire par [18, 26] et vectorielle par [24]. L'avantage est de pouvoir contrôler l'ouverture à mi-puissance du diagramme de rayonnement de la source en jouant sur le vecteur  $\vec{d}$ , qui donne la direction de modification, et sur le scalaire  $b$ , qui influe sur la modification du lobe principal.

L'intérêt de ce type de source est de permettre d'approcher de façon réaliste différents types de diagrammes sans entraîner de longs temps de calculs.

### 3.2.3.3 Onde plane

La décomposition d'une onde plane sur la base des vecteurs modaux sphériques est donnée par Stratton [15]. Il montre que le champ électrique pour une onde plane s'écrit :

$$\vec{E} = (E_x \cdot \hat{x} + E_y \cdot \hat{y}) \cdot e^{jkz} = \sum_{n,\sigma} a_{1n}^{\sigma 1} \vec{M}_{1n}^{\sigma 1} + b_{1n}^{\sigma 1} \vec{N}_{1n}^{\sigma 1}, \quad (3.32)$$

$$\text{avec } a_{1n}^{o1} = j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} E_x = j \cdot b_{1n}^{o1} \text{ et } a_{1n}^{e1} = -j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} E_y = j \cdot b_{1n}^{e1}.$$

### 3.2.3.4 Autres sources

D'autres sources réalistes peuvent être approchées à partir de sources idéales. Ainsi, le rayonnement en champ lointain d'un cornet rectangulaire peut être simplement approché en mettant en réseau 4 dipôles électriques formant ainsi une antenne de type "end-fire".

Par ailleurs, les antennes classiques, dont la forme analytique du champ électromagnétique à l'ouverture est connue, par exemple le cornet pyramidal [24], peuvent aussi être modélisées. En effet, il suffit de discrétiser ce champ au niveau de l'ouverture puis d'utiliser les relations données au paragraphe 3.2.1.2.

### 3.2.3.5 Source réelle

Toute source, pourvue qu'elle soit d'étendue finie, peut être prise en compte. Les étapes, permettant la décomposition modale sur la base d'ondes sphériques d'une

source quelconque, sont résumées figure 3.4 :

(a) La source contenue dans le volume  $V_0$  rayonne un champ  $(\vec{E}, \vec{H})$ .

(b) A partir de données provenant de mesures ou de simulations de cette source, celle-ci est remplacée par ses courants équivalents électrique et magnétique  $(\vec{J}^e, \vec{J}^m)$ .

(c) Ces courants volumiques ou surfaciques sont alors décomposés sur la base d'ondes sphériques d'après les relations (3.8) ou (3.12) respectivement.

En respectant les critères de convergence imposés par les sphères de Wilcox, (cf. paragraphe 3.2.1.1), nous obtenons les coefficients  $\{a, b\}_{int}$  et  $\{a, b\}_{ext}$  à l'intérieur de  $S_{int}$  et à l'extérieur de  $S_{ext}$  respectivement.

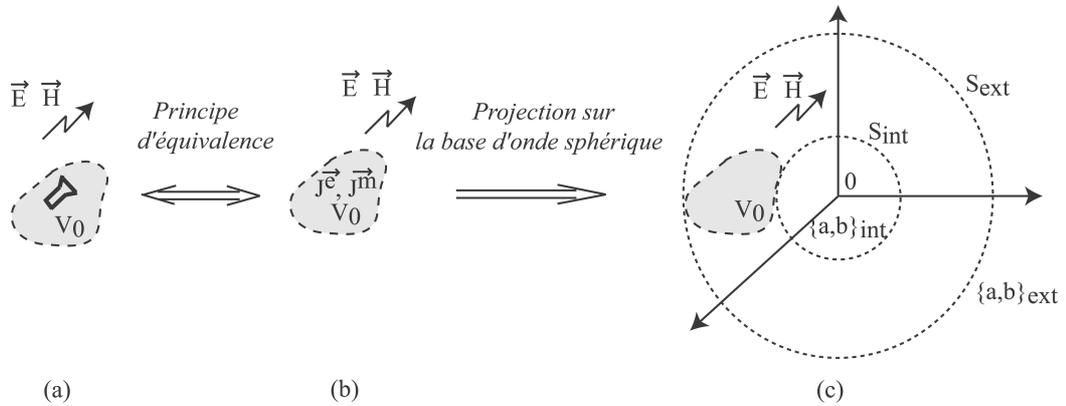


FIG. 3.4 – Schéma résumant les étapes permettant la projection sur la base d'ondes sphériques d'une source quelconque.

## 3.3 Application à l'étude des antennes lentilles stratifiées

### 3.3.1 Diffusion introduite par une lentille stratifiée

La technique de raccordement ou d'identification des modes (notée MMT pour "Mode Matching Technique"), basée sur les fonctions d'ondes sphériques est ici décrite pour analyser les antennes lentilles sphériques et hémisphériques stratifiées. Cette méthode a été initialement introduite par [15], puis appliquée à l'analyse des lentilles de Luneburg par [23, 27]. Elle est plus rigoureusement détaillée dans [24] et est à nouveau expliquée ici de façon à présenter son extension aux lentilles hémisphériques. Ces différentes étapes sont résumées à la figure 3.3.

La géométrie du problème étudié est décrite figure 3.5.  $p$  est le numéro de la coquille,  $r_q$  le rayon extérieur de la  $q^{ème}$  coquille.  $k_q$  est son nombre d'onde et  $\eta_q$  l'impédance intrinsèque.

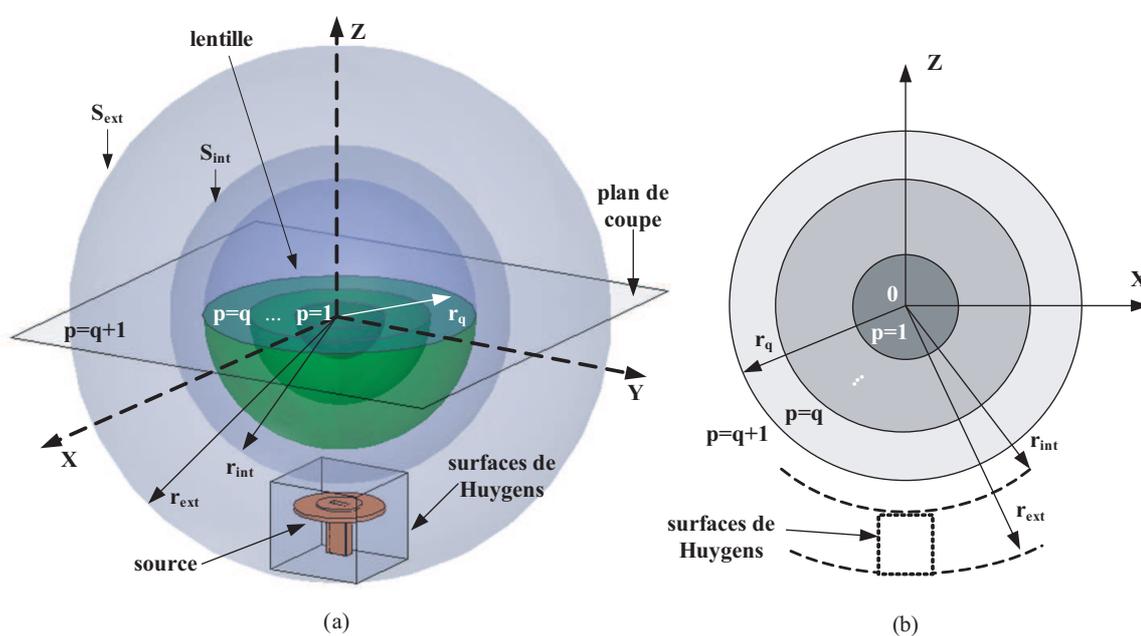


FIG. 3.5 – (a) Représentation tri-dimensionnelle de la lentille sphérique / hémisphérique multi-coquilles alimentée par un guide d'onde ouvert. Les notations utilisées pour la structure à  $q$  couches sont reportées :  $p$  le numéro de la coquille et les sphères  $S_{int}$  et  $S_{ext}$  de Wilcox de rayon  $r_{int}$  et  $r_{ext}$ . Le plan de coupe ( $xOy$ ) montre comment la lentille HMFE est déduite de la lentille sphérique. (b) Coupe bi-dimensionnelle de la représentation (a) avec les notations associées.

### 3.3.1.1 De forme sphérique

Commençons par appliquer les conditions aux limites, à savoir la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique à chaque interface entre deux diélectriques. Ainsi, pour  $p = 1, \dots, q$ , nous pouvons écrire :

$$\hat{r} \times \left\{ \begin{array}{c} \vec{E}(r_p^-) \\ \vec{H}(r_p^-) \end{array} \right\} = \hat{r} \times \left\{ \begin{array}{c} \vec{E}(r_p^+) \\ \vec{H}(r_p^+) \end{array} \right\} \text{ avec } r_p^\pm = r_p \pm 0. \quad (3.33)$$

Or, à partir de la relation (3.6), nous trouvons :

$$\hat{r} \times \left\{ \begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{H} \end{array} \right\} = \pm \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ j/\eta \end{array} \right\} \sum_{n,m,\sigma,s} \left[ a_{mn}^{\sigma s} \left\{ \begin{array}{c} \chi_n^s \\ 1/\chi_n^s \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{mn\parallel}^{\sigma s} \\ \vec{M}_{mn\parallel}^{\sigma s} \end{array} \right\} \dots \right. \quad (3.34)$$

$$\left. -b_{mn}^{\sigma s} \left\{ \begin{array}{c} 1/\chi_n^s \\ \chi_n^s \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s} \\ \vec{N}_{mn\parallel}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} \right], \quad (3.35)$$

avec  $\chi_n^s = Z_n^s / K_n^s$ .

Les modes sphériques sont découplés, chacun étant orthogonal aux autres. En utilisant les relations d'orthogonalité des fonctions angulaires, détaillées en annexe C.2, nous obtenons les relations matricielles pour chaque frontière  $p = 1, \dots, q$  :

$$X_{mn}^{x\sigma,p+1} = M_n^{x,p} \cdot X_{mn}^{x\sigma,p} \text{ où } X^x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^4 \end{bmatrix}, \quad x \in \{a, b\} \text{ et } M_n^{x,p} = [Z_n^{x,p+1}]^{-1} \cdot Z_n^{x,p}, \quad (3.36)$$

$$Z_n^{a,p+1} = \begin{bmatrix} Z_n^1(z_p^+) & Z_n^4(z_p^+) \\ K_n^1(z_p^+) & K_n^4(z_p^+) \end{bmatrix}, \quad Z_n^{b,p+1} = \begin{bmatrix} K_n^1(z_p^+) & K_n^4(z_p^+) \\ Z_n^1(z_p^+) & Z_n^4(z_p^+) \end{bmatrix},$$

$$Z_n^{a,p} = \begin{bmatrix} Z_n^1(z_p^-) & Z_n^4(z_p^-) \\ \tau_p K_n^1(z_p^-) & \tau_p K_n^4(z_p^-) \end{bmatrix}, \quad Z_n^{b,p} = \begin{bmatrix} K_n^1(z_p^-) & K_n^4(z_p^-) \\ \tau_p Z_n^1(z_p^-) & \tau_p Z_n^4(z_p^-) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \tau_p = \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p}, \quad z_p^+ = k_{p+1}r_p \text{ et } z_p^- = k_p r_p.$$

Le lien entre les coefficients de la coquille de coeur ( $p = 1$ ) et ceux d'une quelconque autre coquille ( $p$ ) est obtenu en cascadeant les relations (3.36).

Ainsi, pour  $p = 2, \dots, q + 1$  :

$$X_{mn}^{x\sigma,p} = T_n^{x,p} \cdot X_{mn}^{x\sigma,1} \text{ où } T_n^{x,q} = \prod_{i=q}^1 M_n^{x,i}. \quad (3.37)$$

La condition de finitude du champ à l'origine est alors fixée et connaissant l'onde incidente  $x_i$ , nous avons :

$$x_{mn}^{1\sigma 4} = 0 \text{ et } x_{mn}^{q+1\sigma 1} = x_{mn}^{i\sigma 1}. \quad (3.38)$$

De (3.37) et (3.38), nous obtenons les coefficients de coeur  $x^1$  et extérieur  $x^{q+1}$  à partir de ceux incidents  $x^i$  par une inversion de matrice :

$$\begin{bmatrix} x^{i\sigma^1}_{mn} \\ x^{q+1\sigma^4}_{mn} \end{bmatrix} = T_n^{x,q} \cdot \begin{bmatrix} x^{1\sigma^1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

De (3.37), nous tirons les coefficients modaux pour chaque coquille :

$$\begin{bmatrix} x^{p\sigma^1}_{mn} \\ x^{p\sigma^4}_{mn} \end{bmatrix} = T_n^{x,p-1} \cdot \begin{bmatrix} x^{1\sigma^1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Les déterminants des matrices de transfert  $T_n^{x,p-1}$  ne s'annulent jamais, ce qui assure à la fois l'existence et l'unicité de ces coefficients :

$$|T_n^{x,p-1}| = \left(\frac{k_p}{k_1}\right)^2 \left(\frac{\eta_p}{\eta_1}\right) \neq 0. \quad (3.41)$$

Le champ électromagnétique total est alors simplement la superposition des champs incidents et diffusés. Nous connaissons maintenant le champ électromagnétique proche et lointain dans toute région vide de charges.

### 3.3.1.2 De forme hémisphérique

Plusieurs étapes sont nécessaires pour l'analyse de lentilles hémisphériques. Comme indiqué figure 3.3, nous commençons par calculer le champ électromagnétique sur le plan (xOy) correspondant au plan de coupe de la figure 3.5.

L'expression du champ électromagnétique ( $\vec{E}_p, \vec{H}_p$ ) au sein de la  $p^{\text{ème}}$  coquille est, pour  $r \in ]r_{p-1}, r_p[_{p \in \{1, \dots, q+1\}}$  avec  $r_0 = 0$  et  $r_{q+1} \rightarrow \infty$ ,  $\theta = \pi/2^+$  et pour tout  $\varphi$  :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}_p \\ \vec{H}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j/\eta_p \end{Bmatrix} \sum_{n,m,\sigma,s} a^{p\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} + b^{p\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

La discontinuité entre le diélectrique et l'air au niveau du côté plat de la lentille est considérée en appliquant la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique.

Cela entraîne l'expression suivante des courants électriques et magnétiques équivalents qui rayonnent dans l'air, pour  $r \in ]r_{p-1}, r_p[_{p \in \{1, \dots, q+1\}}$ ,  $\theta = \pi/2^-$  et pour tout  $\varphi$  :

$$\begin{Bmatrix} \vec{J}^e \\ \vec{J}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j/\eta_p \\ -1 \end{Bmatrix} \sum_{n,m,\sigma,s} f_m^\sigma(\varphi) \left( \begin{Bmatrix} b^{p\sigma s}_{mn} \\ a^{p\sigma s}_{mn} \end{Bmatrix} Z_n^s(kr) t_{mn}^{\sigma 2}(\pi/2) \hat{r} - \dots \right. \\ \left. \begin{Bmatrix} a^{p\sigma s}_{mn} \\ b^{p\sigma s}_{mn} \end{Bmatrix} \left[ n(n+1) \frac{Z_n^s(kr)}{kr} \hat{\varphi} + \bar{\sigma}(-1) m K_n^s(kr) \hat{r} \right] P_n^m(0) \right), \quad (3.43)$$

avec  $\begin{cases} t_{mn}^{\sigma 2}(\pi/2) = -\frac{2^m}{\pi} (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} (1 + (-1)^{m+n-1}) \Gamma(\frac{1}{2}(m+n+1)) \frac{(\frac{n-m+1}{2})!}{(n-m+1)!} \\ P_n^m(0) = 2^m (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{1+(-1)^{m+n}}{2^{\frac{m+n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-m}{2}+1)} \frac{(m+n)!}{(\frac{m+n}{2})!}, \text{ (p. 334 de [29])} \\ \text{où } \Gamma \text{ est la fonction Gamma, (p. 255 de [29]).} \end{cases}$

A présent, des courants existent sur tout le plan de coupe (xOy). Extraire le champ électromagnétique devrait nécessiter une intégration bi-dimensionnelle sur cette surface infinie. Dans ce cas, la surface extérieure de Wilcox est étendue à l'infini et tous les développements précédents sont non utilisables.

Cependant, la majeure partie de la puissance rayonnée par la source sur le plan (xOy) se trouve concentrée sur le disque limité par la sphère intérieure de Wilcox. Cela revient à restreindre  $r_{q+1}$  à  $r_{int}$  au lieu de l'infini dans l'expression (3.43). Cette restriction est désormais appliquée. Il est donc maintenant possible de définir une sphère extérieure de Wilcox de rayon fini.

Les courants électromagnétiques, obtenus équation (3.43), sont alors projetés sur la base  $\{\vec{M}, \vec{N}\}$  comme détaillé relation (3.12).

Cela conduit aux coefficients modaux sphériques suivants :

$$\begin{aligned}
a_{mn}^{\sigma s} = & jk^2 c_{mn} \frac{e_m^\sigma}{e_m} \times \dots \\
& \left\{ -t_{mn}^{\sigma 2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} n'(n'+1) P_{n'}^m(0) \sum_{p=1}^{q+1} a_{mn'}^{p\sigma s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \frac{Z_{n'}^{s'}(k_p r)}{k_p r} Z_n^{\bar{s}}(kr) dr + \dots \right. \\
& t_{mn}^{\sigma 3} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} t_{mn'}^{\sigma 2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{p=1}^{q+1} a_{mn'}^{p\bar{\sigma} s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} Z_{n'}^{s'}(k_p r) \frac{Z_n^{\bar{s}}(kr)}{kr} dr + \dots \\
& m\bar{\sigma}(-1) t_{mn}^{\sigma 3} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} P_{n'}^m(0) \sum_{p=1}^{q+1} b_{mn'}^{p\bar{\sigma} s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} K_{n'}^{s'}(k_p r) \frac{Z_n^{\bar{s}}(kr)}{kr} dr - \dots \\
& \left. t_{mn}^{\sigma 1} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} n'(n'+1) P_{n'}^m(0) \sum_{p=1}^{q+1} b_{mn'}^{p\sigma s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \frac{Z_{n'}^{s'}(k_p r)}{k_p r} K_n^{\bar{s}}(kr) dr \right\}, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{mn}^{\bar{\sigma} s} = & jk^2 c_{mn} \frac{e_m^\sigma}{e_m} \times \dots \\
& \left\{ t_{mn}^{\sigma 3} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} t_{mn'}^{\sigma 2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{p=1}^{q+1} b_{mn'}^{p\sigma s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} Z_{n'}^{s'}(k_p r) \frac{Z_n^{\bar{s}}(kr)}{kr} dr - \dots \right. \\
& t_{mn}^{\sigma 3} \left(\frac{\pi}{2}\right) m\bar{\sigma}(-1) \sum_{n's'} P_{n'}^m(0) \sum_{p=1}^{q+1} a_{mn'}^{p\sigma s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} K_{n'}^{s'}(k_p r) \frac{Z_n^{\bar{s}}(kr)}{kr} dr + \dots \\
& t_{mn}^{\sigma 1} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n's'} n'(n'+1) P_{n'}^m(0) \sum_{p=1}^{q+1} a_{mn'}^{p\sigma s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \frac{Z_{n'}^{s'}(k_p r)}{k_p r} K_n^{\bar{s}}(kr) dr + \dots \\
& \left. t_{mn}^{\sigma 2} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n's'} P_{n'}^m(0) n'(n'+1) \sum_{p=1}^{q+1} b_{mn'}^{p\bar{\sigma} s'} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \frac{Z_{n'}^{s'}(k_p r)}{k_p r} Z_n^{\bar{s}}(kr) dr \right\}. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Les diagrammes en champs lointain et directivité peuvent être déduit en utilisant les relations (3.25) à (3.31).

### 3.3.1.3 Prise en compte des effets de couplage entre la source et la lentille

Jusqu'ici, nous avons supposé que la lentille ne perturbe pas la source. Nous n'avons pas trouvé, dans la littérature, de justification ou de quantification numérique de cette approximation.

Pour remédier à cela, une procédure itérative, inspirée de la théorie dite "des petites réflexions" [31], est décrite à la figure 3.6. Ses étapes sont les suivantes :

- La source seule est d'abord analysée en utilisant un logiciel de simulation électromagnétique basée sur une méthode rigoureuse ("full wave"). Une partie de

son excitation est réfléchi à cause de la désadaptation et l'autre partie rayonne le champ incident.

- Les courants électromagnétiques équivalents sont calculés sur une boîte virtuelle entourant l'antenne de façon à ce que, à l'extérieur de cette boîte contenant du vide, le même champ incident soit rayonné.
- Nous introduisons alors l'objet diffractant (dans notre cas la lentille). Celui-ci génère, comme réaction au champ incident, un champ diffusé en tout point de l'espace  $y$  compris à l'intérieur de la boîte virtuelle.
- Le champ diffusé à l'intérieur de la boîte est alors remplacé par ses courants équivalents sur cette même boîte.
- Finalement, l'antenne est replacée dans la boîte. Comme réaction, un champ est généré, ce qui crée des ondes progressives et rétrogrades à l'intérieur de l'antenne. Ce champ corrige l'excitation initiale et ferme ainsi la boucle.

En théorie, l'état d'équilibre est atteint après un nombre infini d'itérations. Cependant, en pratique, les corrections effectuées après un certain nombre d'itérations deviennent insignifiantes.

Il est important de souligner que cette procédure itérative n'est pas limitée aux lentilles, mais est suffisamment générale pour être appliquée à tout type d'objet diffractant (diélectrique, magnétique et / ou métallique) de forme quelconque.

### 3.3.2 Résultats numériques

La théorie précédemment développée est appliquée de façon à mettre en valeur des résultats numériques significatifs tels que l'ordre de troncature des séries, des cartographies de champ proche, la réaction de la lentille sur la source et les temps et charge de calculs.

#### 3.3.2.1 Ordre de troncature

Lors de la mise en œuvre numérique, toutes les séries  $\sum_n$  requièrent un ordre de troncature  $N_t$ . Cet entier est toujours lié à la longueur électrique  $ka$  de la structure étudiée, où  $k$  est le nombre d'onde du milieu sans pertes et  $a$  le rayon de la plus petite sphère centrée sur l'origine entourant l'antenne.

Ainsi, Lo [32] propose de fixer  $N_t = E[ka]$ , où  $E[x]$  est la partie entière du réel  $x$ . Cependant, Bruning et Hanson [33, 34] montrent que pour certains cas, un ordre de troncature plus grand doit être considéré :

$$N_t = E[ka + 3(ka)^{1/3}]. \quad (3.46)$$

Dans ces références, le critère entraînant l'obtention de l'ordre de troncature n'est jamais mentionné.

Pour tous les résultats présentés par la suite, l'ordre de troncature de l'équation (3.46), i.e. le plus grand des deux proposés, est appliqué et a été vérifié.

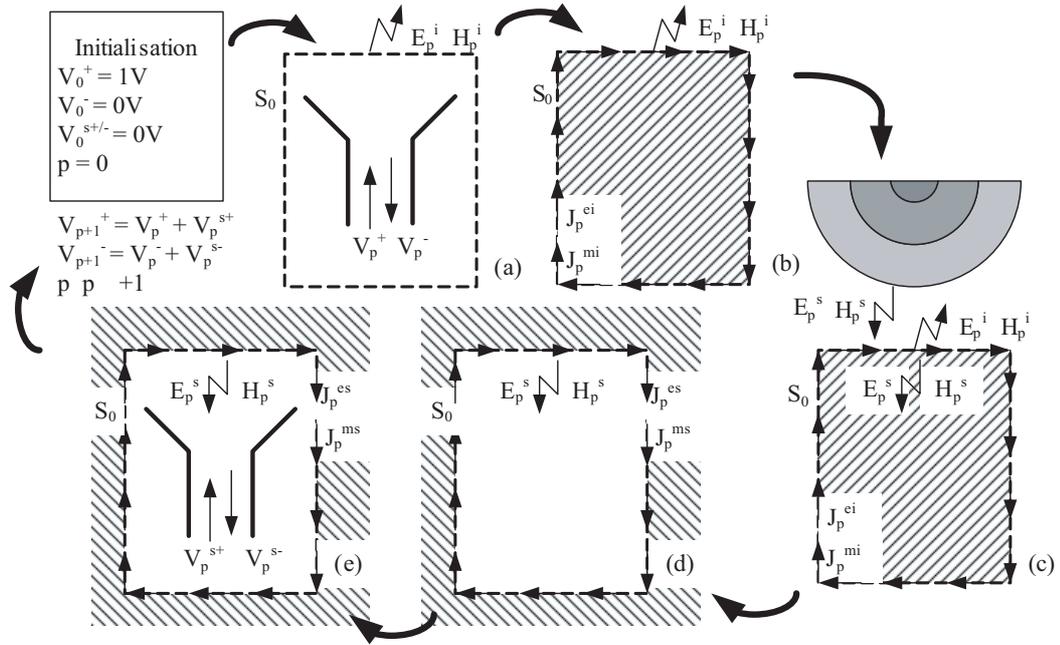


FIG. 3.6 – Procédure itérative pour atteindre l'état d'équilibre d'un système objet diffractant - source. (a) Initialement ( $p = 1$ ), l'antenne, avec une excitation  $V_p^+$  est analysée en espace libre avec un logiciel commercial basé sur une méthode rigoureuse. Des réflexions ( $V_p^-$ ) sont produites ainsi qu'un champ électromagnétique ( $E_p^i, H_p^i$ ) dans l'espace. (b) Des courants équivalents ( $J_p^{ei}, J_p^{mi}$ ) pour le problème extérieur sont alors calculés sur une surface virtuelle  $S_0$  entourant la source. Les hachures à l'intérieur de  $S_0$  représentent le problème extérieur. Ces courants sont choisis de façon à ce qu'en leur présence, la boîte ne contienne que du vide. (c) L'ajout d'un objet diffractant (ici une lentille) génère, comme réaction à l'excitation, un champ diffusé partout y compris à l'intérieur de  $S_0$ . (d) Maintenant, les courants équivalents ( $J_p^{es}, J_p^{ms}$ ), associés au champ diffusé pour le problème interne, d'où les hachures à l'extérieur de  $S_0$ , sont calculés sur  $S_0$ . (e) L'antenne est replacée dans  $S_0$ . En réaction, cela génère un champ ( $E_p^r, H_p^r$ ) représenté par des ondes progressives et rétrogrades ( $V_p^{s+}, V_p^{s-}$ ). Elles corrigent alors l'excitation initiale pour recommencer la boucle afin d'atteindre l'état d'équilibre après, en théorie, un nombre infini d'itérations.

### 3.3.2.2 Réaction de la lentille sur la source

Pour atteindre l'état d'équilibre d'un système source-objet diffractant, la procédure itérative, détaillée à la figure 3.6, est appliquée pour le cas d'une lentille HMFE à 3 coquilles alimentée par un guide d'onde ouvert WR10.

Les diagrammes de rayonnement de l'antenne lentille, calculés avec et sans correction de l'excitation, sont superposés comme montré figure 3.7.

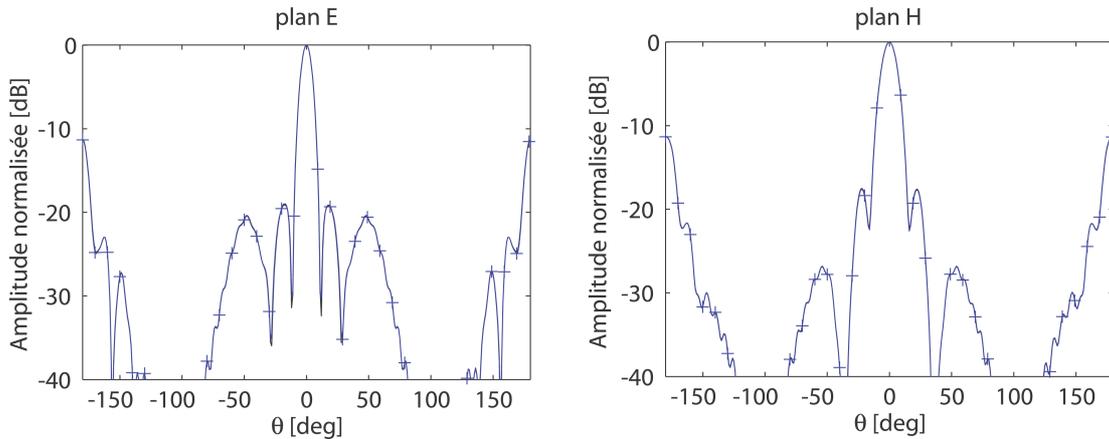


FIG. 3.7 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus lors de la première itération de la procédure présentée figure 3.6 (—) et après correction de l'excitation (+).

Cela signifie que la distribution du champ au voisinage de l'ouverture de la source n'est pas modifiée de manière significative. En effet, les conditions aux limites dues au métal imposées par la source sont dominantes, dans cette zone réduite, par rapport aux conditions aux limites imposées par la présence de la lentille.

Même si la distribution spatiale du champ n'est pas modifiée de manière significative lorsque la lentille est ajoutée, la puissance du champ rétro-diffusé corrige son niveau. Pour une source placée entre  $\lambda_0/4$  et  $\lambda_0$  de la lentille, la puissance du champ rétro-diffusé est quatre cent fois plus faible que celle du champ incident (Table 3.1). La correction du niveau de champ de l'excitation est par conséquent négligeable.

L'état d'équilibre du système source-lentille est atteint dès la première itération.

TAB. 3.1 – Quantification de la réaction source-lentille

source-lentille	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
distance [ $\lambda_0$ ]							
$\frac{P_{\text{excitation}}}{P_{\text{rétro-diffusée}}}$	500	420	400	450	620	800	950

Cette constatation s'explique en considérant la coquille de coeur comme la lentille, et

les autres coquilles comme des couches d'adaptation qui limitent les réflexions sur la source.

### 3.3.2.3 Cartographies de champs

Pour mettre en valeur la focalisation par les lentilles inhomogènes, des cartographies en champ proche de lentilles stratifiées sont présentées.

#### Lentille de Luneburg

La distribution du champ électrique, au voisinage d'une lentille de Luneburg à 5 coquilles de diamètre  $10 \lambda_0$  illuminée par une onde plane, est montrée à la figure. 3.8. L'énergie de l'onde plane incidente est progressivement concentrée vers le point focal localisé sur l'axe du côté opposé de la lentille. Nous pouvons alors distinguer trois zones :

- La zone focale,  $\theta \in [160^\circ, 180^\circ]$ , qui concentre la plupart de l'énergie provenant de la lentille. C'est là que doit être placée l'antenne pour optimiser la réception.
- La zone de découplage,  $\theta \in [50^\circ, 160^\circ]$ , dans laquelle la présence d'une antenne ne modifie pas significativement le champ dans la région focale. C'est ici que doivent être ajoutées d'autres antennes pour obtenir de multiples faisceaux découplés.
- La zone de blocage,  $\theta \in [0^\circ, 50^\circ]$ , où la présence d'une antenne masque une partie de l'énergie.

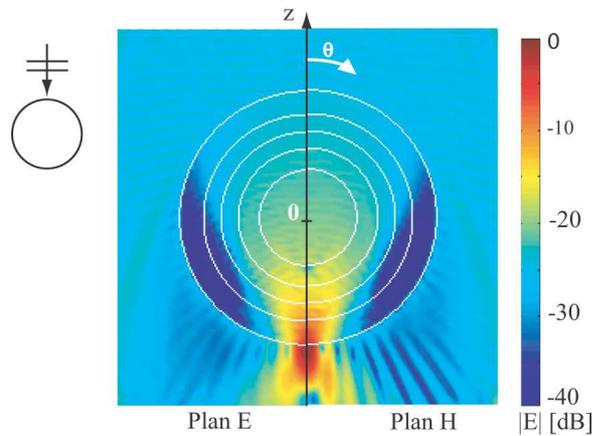


FIG. 3.8 – Distribution du module du champ électrique total normalisé au voisinage d'une lentille de Luneburg à 5 coquilles et de diamètre  $10 \lambda_0$  illuminée par une onde plane arrivant de  $+z$ .

#### Lentille HMFE

Le champ électrique au dessus du côté plat d'une lentille HMFE à 3 coquilles de diamètre  $6.15 \lambda_0$  alimentée par un guide d'onde WR10 est cartographié à la figure. 3.9(a) :

- L'uniformité de l'amplitude et de la phase de la co-polarisation traduisent le comportement local de l'onde plane au dessus de la lentille. La propagation sphérique de l'onde est clairement visible en dehors de  $S_{ext}$ . La chute de l'amplitude et le changement de phase pour la co-polarisation sont dus à la diffraction sur la bride du guide qui est aussi visible sur les diagrammes de la figure 3.10. Les régions blanches correspondent aux zones non convergentes de Wilcox.
- A partir de cette cartographie, nous avons calculé que 86,8% de la densité de courant générée par la source est concentrée sur la portion de la surface ( $xOy$ ) délimitée par la sphère intérieure de Wilcox de rayon  $r_{int}$  sur la figure 3.9(a). La figure 3.9(b) représente l'amplitude du champ électrique extrait de la figure 3.9(a). Nous remarquons qu'une grande partie de l'énergie est concentrée à l'intérieur de la lentille. De plus, la lentille ne change pas la polarisation étant donné que pour les plans  $E$  et  $H$ , la polarisation croisée reste au moins 20 dB en dessous de celle principale.

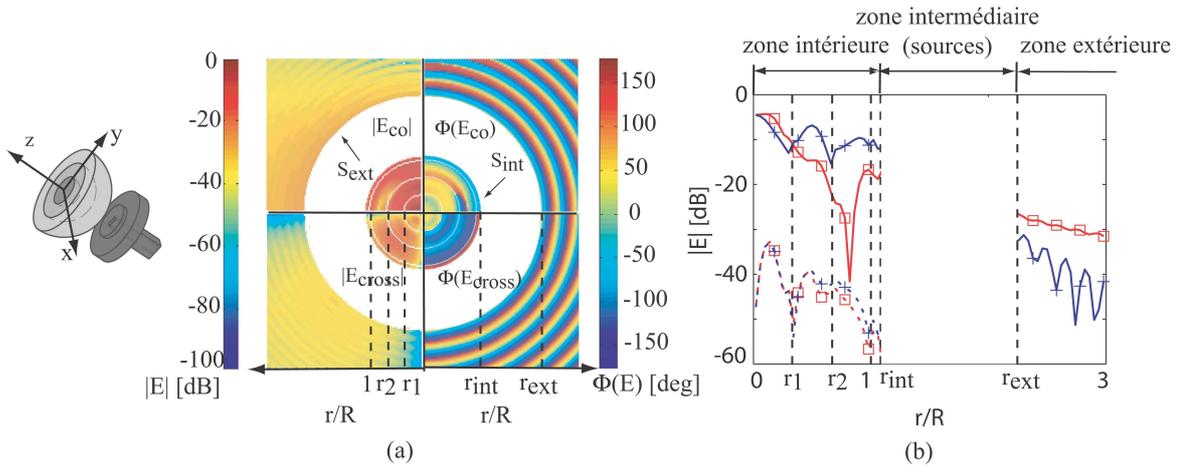


FIG. 3.9 – Analyse de cartographie du champ proche à 77 GHz d'une lentille HMFE à 3 coquilles à diamètre  $6.15 \lambda_0$  alimentée par un guide d'onde WR10. (a) Cartographie bi-dimensionnelle de l'amplitude et phase de la co- et cross-polarisation du champ électrique normalisé sur le plan  $s = 0^+$ . (b) Courbes de l'amplitude du champ électrique extraite de la cartographie bi-dimensionnelle pour la co- (—) et cross- (---) polarisation et pour deux angles :  $\varphi = 0^\circ$  (+) et  $90^\circ$  (□).

L'amplitude du champ électrique total pour les plans  $E$  et  $H$  de la même antenne lentille est cartographiée à la figure 3.10 :

- Sur la partie supérieure, des directions privilégiées de rayonnement sont visibles. Elles correspondent aux lobes secondaires visibles en champ lointain sur la figure 3.14(e,f). Par ailleurs, les niveaux de débordement de champ de la source sont faibles.
- Sur la partie inférieure, la focalisation à l'intérieur de la lentille, le faible niveau du champ rétro-diffusé ainsi que les effets de diffraction dus à la bride de guide

sont visibles. En outre, la zone réactive de l'antenne lentille, pour laquelle les champs ont une forte dépendance radiale, apparaît sur la cartographie.

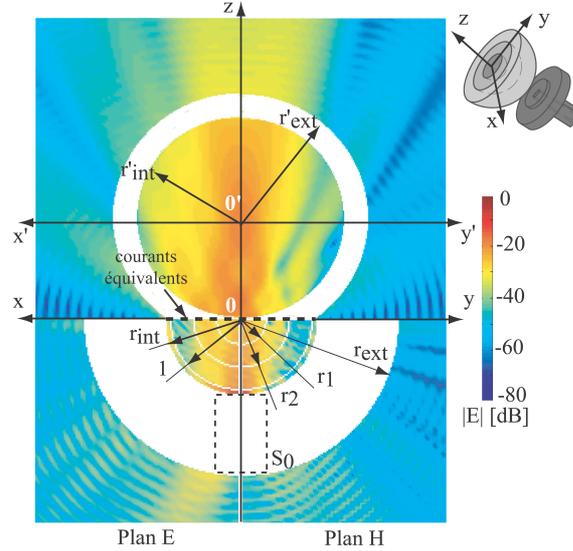


FIG. 3.10 – Cartographie bi-dimensionnelle de l'amplitude du champ électrique normalisé au voisinage de l'antenne lentille de la figure 3.9. Pour le plan  $z < 0$ , la source est représentée par la boîte virtuelle  $S_0$  correspondant aux surfaces de Huygens. Cela impose deux sphères de convergence de Wilcox (délimitées par  $r_{int}$  et  $r_{ext}$ ) entre lesquelles le champ ne peut être décomposé (zones blanches). Pour le plan  $z > 0$ , les sources sont représentées par leurs courants équivalents en  $z = 0$ . Un changement de système de coordonnées (translation  $O\vec{O}'$ ) est réalisé pour réduire la zone d'indétermination. Il en résulte de nouvelles sphères de Wilcox ( $r'_{int}$  et  $r'_{ext}$ ).

### 3.3.2.4 Considérations de temps et charge de calcul

Les temps de calcul pour analyser les antennes lentilles, en utilisant CST Microwave Studio<sup>®</sup>, Ansoft HFSS<sup>®</sup> et notre code scalaire et non optimisé basé sur la MMT, sont étudiés.

Pour cela, des lentilles de Luneburg et HMFÉ à 3 coquilles, alimentées par un guide d'onde ouvert, ont été simulées et le rapport des temps de calculs entre les logiciels commerciaux et la MMT,  $r_{CST}$  et  $r_{HFSS}$ , sont reportés tableau 3.2.

Ainsi, pour des lentilles de diamètres  $6 \lambda_0$ , le gain en temps de calcul est déjà intéressant. Par ailleurs, avec notre ordinateur, nous ne pouvons pas simuler de lentilles dont le diamètre excède,  $16 \lambda_0$  avec CST Microwave Studio<sup>®</sup> 2006B et  $10 \lambda_0$  avec Ansoft HFSS v.10.1, alors que la MMT n'a pas de limitations en terme de taille électrique de lentille.

De plus, pour donner un ordre de grandeur des charges de calcul, le nombre de coefficients modaux inconnus pour notre code,  $N_{MMT}$ , le nombre de nœuds de maille

pour CST Microwave Studio<sup>®</sup>,  $N_{CST}$ , et le nombre de tétraèdres pour Ansoft HFSS<sup>®</sup>,  $N_{HFSS}$ , pour analyser les mêmes antennes lentilles, sont donnés tableau 3.3.

Ces deux comparaisons justifient l'intérêt de la MMT.

TAB. 3.2 – Comparaison de temps de calcul

diamètre de la lentille	lentille de Luneburg		lentille HMFE	
	$r_{CST}$	$r_{HFSS}$	$r_{CST}$	$r_{HFSS}$
$6 \lambda_0$	3,8	23,9	2,9	4,6
$10 \lambda_0$	9,8	$\infty$	3,9	29,1
$14 \lambda_0$	10,7	$\infty$	2,1	$\infty$

Calculs réalisés sur un 2.79GHz-CPU 3.99GHz-RAM Xeon x64.

$r_{CST} = t_{CST}/t_{MMT}$ , avec CST Microwave Studio 2006B<sup>®</sup>.

$r_{HFSS} = t_{HFSS}/t_{MMT}$ , avec Ansoft HFSS v.10.1<sup>®</sup>.

TAB. 3.3 – Comparaison de charge de calcul

diamètre de la lentille	lentille de Luneburg			lentille HMFE	
	$N_{MMT}$	$N_{CST}$	$N_{HFSS}$	$N_{CST}$	$N_{HFSS}$
$6 \lambda_0$	4860	$1,47 \cdot 10^6$	$1,08 \cdot 10^5$	$1,44 \cdot 10^6$	83907
$10 \lambda_0$	10824	$4,19 \cdot 10^6$	<i>NC</i>	$3,31 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^5$
$14 \lambda_0$	19140	$8,87 \cdot 10^6$	<i>NC</i>	$7,45 \cdot 10^6$	<i>NC</i>

$N_{MMT}$  : nombre de coefficients modaux inconnus.

$N_{CST}$  : nombre de nœuds de maille.

$N_{HFSS}$  : nombre de tétraèdres.

*NC* : non convergence.

### 3.3.3 Validations

Dans cette partie, des vérifications expérimentales ainsi que des comparaisons avec des logiciels commerciaux des résultats obtenus par la MMT sont réalisés pour la modélisation de la source et la diffusion par des lentilles stratifiées.

#### 3.3.3.1 Modélisation de la source

A partir d'un logiciel électromagnétique "full wave", les courants sont extraits sur une boîte entourant l'antenne selon un maillage cartésien uniforme de taille  $\lambda_0/10$ . Ces courants sont alors décomposés sur les fonctions d'ondes sphériques, selon la formule donnée équation (3.12).

### Guide d'onde ouvert à 77 GHz

Pour le cas du guide d'onde ouvert WR10, (figure 3.11(a)), les diagrammes de rayonnement, tracés figures 3.11(b,c), obtenus par MMT et CST Microwave Studio<sup>®</sup>, sont en excellent accord. Il est alors logique que les directivités trouvées soient très proches : 10,13 dB et 10,06 dB pour CST Microwave Studio<sup>®</sup> et MMT respectivement. Les faibles différences de niveaux autour de  $\pm 130^\circ$  sur la figure 3.11(c) sont d'ordre numérique. Elles peuvent être réduites en discrétisant plus finement les courants sur la surface de Huygens entourant la source.

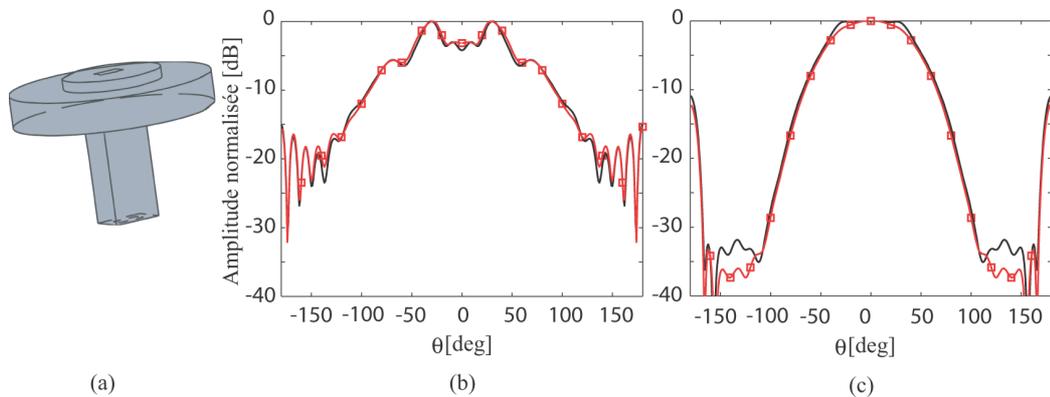


FIG. 3.11 – (a) Vue tri-dimensionnelle du guide d'ouvert WR10. Comparaisons de ses diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan E et (c) plan H) obtenus par MMT (—) et simulés avec CST Microwave Studio<sup>®</sup> (□) à 77 GHz.

### Réseau de quatre antennes imprimées à 50 GHz

La même décomposition est appliquée à un réseau de quatre antennes imprimées, (figure 3.12(a)), et l'accord entre les diagrammes de rayonnement, montré figures 3.12(b,c), est à nouveau bon. Les directivités sont de 8,62 dB et 8,68 dB pour CST Microwave Studio<sup>®</sup> et MMT respectivement.

Les différences de niveau à  $\pm 150^\circ$  sur la figure 3.12(b) sont du même type que celles figure 3.11(c).

#### 3.3.3.2 Diffusion par une lentille stratifiée

##### Cas d'une lentille de Luneburg (sphérique)

Une lentille de Luneburg alimentée par un guide d'onde ouvert, photographiée dans la chambre anéchoïde figure 3.13(a), est mesurée à 6 GHz. A cette fréquence, son diamètre est de  $8 \lambda_0$ . Elle a six coquilles et ses paramètres, reportés au tableau 2.2, ont été optimisés selon la méthode du minmax. La modélisation de la source seule n'a pas été présentée précédemment car elle n'apporte pas de nouveauté par rapport à celle du guide d'onde WR10.

Les diagrammes de rayonnement, mesurés en champ lointain, sont comparés à ceux obtenus par MMT et CST Microwave Studio<sup>®</sup>. Ils sont superposés dans les deux

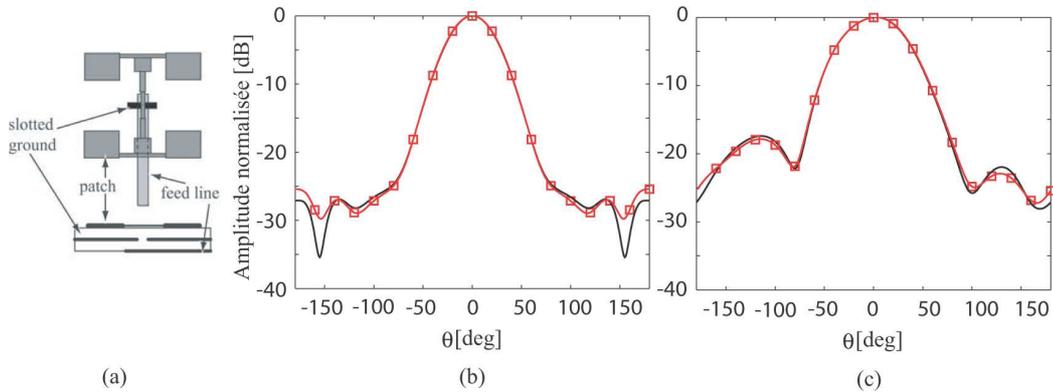


FIG. 3.12 – (a) Vue de dessus et de coupe du réseau de quatre antennes imprimées alimenté par fente. Comparaisons de ses diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan  $E$  et (c) plan  $H$ ) obtenus par MMT (—) et simulés avec CST Microwave Studio<sup>®</sup> (□) à 48,7 GHz.

plans, comme montré figure 3.13(b,c). D'autres logiciels commerciaux, tels que Ansoft HFSS<sup>®</sup> et FEKO<sup>®</sup>, ont également été utilisés pour analyser ces lentilles. Leurs résultats sont très proches de ceux trouvés par CST Microwave Studio<sup>®</sup>.

La directivité déterminée par la MMT est égale à 27,3 dB alors que 27,5 dB sont calculés par les trois logiciels commerciaux.

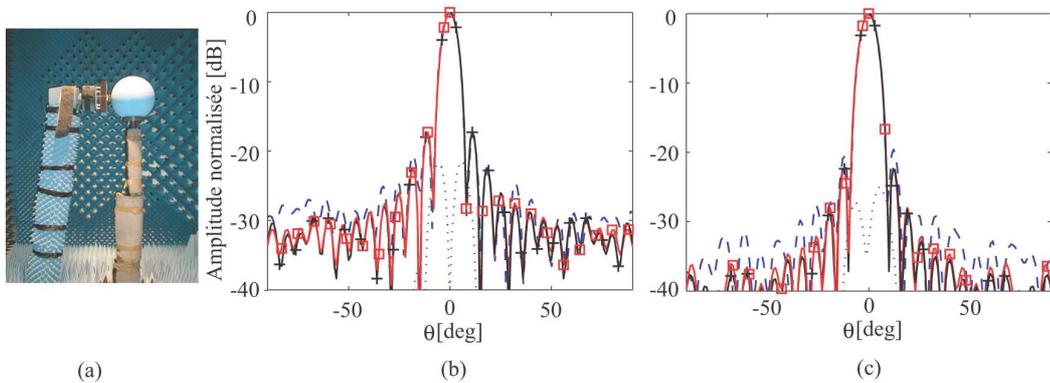


FIG. 3.13 – (a) Photographie d'une vue de côté de la lentille de Luneburg à 6 coquilles, de diamètre  $8 \lambda_0$  à 6 GHz, alimentée par un guide d'onde ouvert dans la chambre anéchoïde. Comparaison des diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan  $E$  et (c) plan  $H$ ) de l'antenne lentille obtenus par MMT (+), simulés par CST Microwave Studio<sup>®</sup> (□) et mesurés [co-pol (— — —) et cross-pol (...)].

### Cas d'une lentille HMFE (hémisphérique)

- Une lentille HMFE alimentée par un guide d'onde ouvert WR10, voir vue tridimensionnelle à la figure 3.14(a), est mesurée à 77 GHz. A cette fréquence, cette lentille a un diamètre de  $6,15 \lambda_0$ . Elle a trois coquilles de même épaisseur, 4 mm,

ayant pour permittivité relative :  $\varepsilon_r=1,5, 2,5$  et  $4$ .

Les diagrammes de rayonnement mesurés en champ lointain sont comparés, sur la figure 3.14(b,c), à ceux obtenus par MMT et CST Microwave Studio<sup>®</sup>. Ils sont en bon accord dans les deux plans. Les différences entre les logiciels commerciaux et la MMT sur les lobes secondaires viennent de la perte d'information sur les courants du plan (xOy) due à la restriction  $r_{q+1} = r_{int}$  à la relation (3.43).

La directivité obtenue par MMT est égale à 21,9 dB alors que 21,4 dB, 21,6 dB et 22,3 dB sont calculés par Ansoft HFSS<sup>®</sup>, FEKO<sup>®</sup> et CST Microwave Studio<sup>®</sup> respectivement. Les différences entre MMT, ainsi que les trois logiciels commerciaux, et les mesures sont les conséquences de l'incertitude sur la distance et l'alignement entre la lentille et la source. Ces paramètres sont en effet très sensibles en bande W.

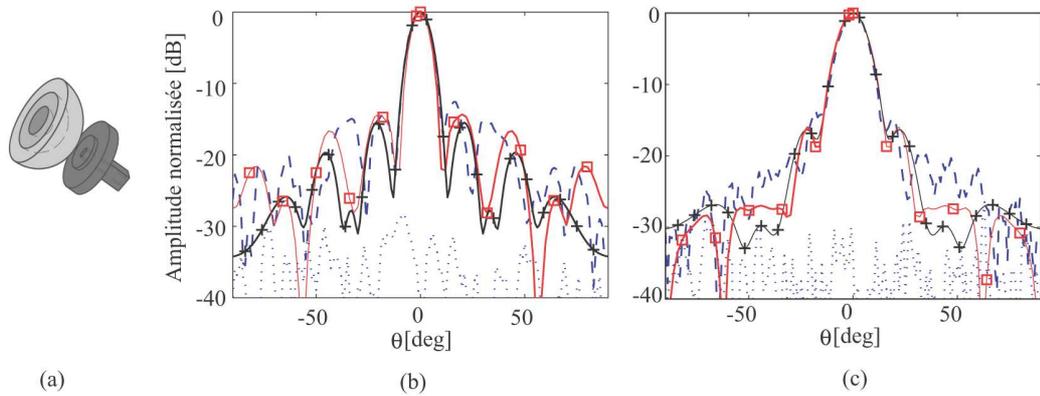


FIG. 3.14 – (a) Vue tri-dimensionnelle de l'antenne lentille HMFE à 3 coquilles, de diamètre  $6,15 \lambda_0$  à 77 GHz, alimentée par un guide d'onde ouvert WR10. Comparaison des diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan  $E$  et (c) plan  $H$ ) de l'antenne lentille obtenus par MMT (+), simulés par CST Microwave Studio<sup>®</sup> (□) et mesurés [co-pol (— — —) et cross-pol (...)].

- Cette même lentille est maintenant alimentée par un réseau d'antennes imprimées, voir vue tri-dimensionnelle à la figure 3.15(a). Le réseau, étudié seul au paragraphe 3.3.3.1, est simulé à 48,7 GHz. Les diagrammes de rayonnement en champ lointain prévu par le logiciel commercial et la MMT sont en bon accord. Les directivités trouvées par CST Microwave Studio<sup>®</sup> et la MMT sont de 19,6 dB et 18,5 dB .
- Une lentille HMFE alimentée par un guide d'onde WR10 sans bride, voir vue tri-dimensionnelle à la figure 3.16(a), est mesurée à 77 GHz. A cette fréquence, son diamètre est de  $15 \lambda_0$ . Elle a neuf coquilles et ses paramètres, reportés tableau 3.4, ont été optimisés selon la méthode du minmax.

L'accord des diagrammes en champ lointain, simulés par le logiciel commercial et calculé via la MMT, est excellent dans les deux plans, (voir figure 3.16(b,c)). CST Microwave Studio<sup>®</sup> et la MMT trouvent une même directivité égale à 31,1 dB.

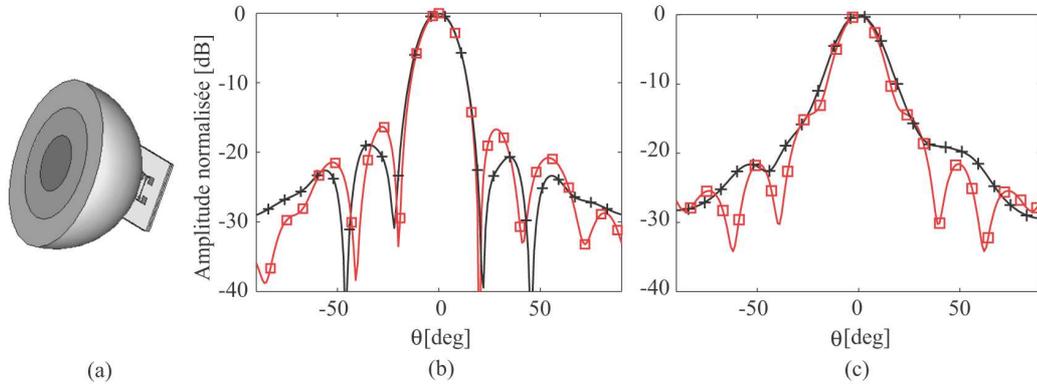


FIG. 3.15 – (a) Vue tri-dimensionnelle du réseau de quatre antennes imprimées alimentant la lentille HMFE à 3 coquilles de diamètre  $4 \lambda_0$  à 50 GHz. Comparaison des diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan  $E$  et (c) plan  $H$ ) de l'antenne lentille obtenus par MMT (+) et simulés par CST Microwave Studio® ( $\square$ ).

TAB. 3.4 – Caractéristiques de la lentille optimisée HMFE à 9 coquilles

permittivités	3,84	3,53	3,21	2,89	2,58	2,26	1,95	1,63	1,32
rayons extérieurs [mm]	6,63	9,71	12,3	14,79	17,28	19,90	22,78	26,02	30,00

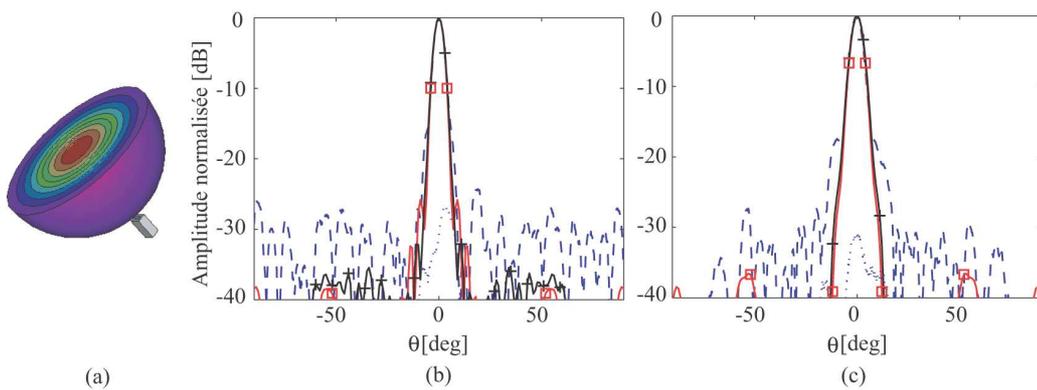


FIG. 3.16 – (a) Vue tri-dimensionnelle de l'antenne lentille HMFE à 9 coquilles, de diamètre  $15 \lambda_0$  à 77 GHz, alimentée par un guide d'onde ouvert WR10. Comparaison des diagrammes de rayonnement en champ lointain ((b) plan  $E$  et (c) plan  $H$ ) de l'antenne lentille obtenus par MMT (+), simulés par CST Microwave Studio® ( $\square$ ) et mesurés [co-pol (— — —) et cross-pol ( $\cdots$ )].

### Adaptation

Comme évoqué au paragraphe 3.3.2.2, l'adaptation de la lentille est très peu modifiée quand la lentille est ajoutée. Pour le cas de la lentille de Luneburg, ce changement est inférieur à la sensibilité des moyens de mesures. Pour la lentille HMFE, la modification de l'adaptation est inférieure à 1 dB sur la bande de fréquence 76 – 81 GHz comme montré figure 3.17.

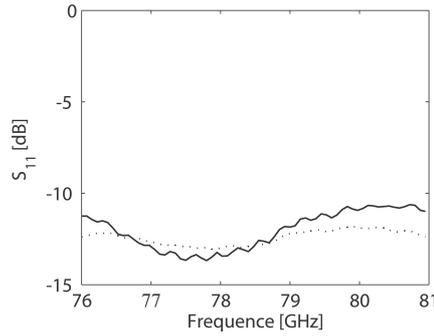


FIG. 3.17 – Adaptation mesurée ( $S_{11}$ ) du guide WR10 seul ( $\cdots$ ) et avec la lentille HMFE à 3 coquilles ( $—$ ) sur la bande 76 – 81 GHz.

## 3.4 Perspective : prise en compte de la divergence non nulle

### 3.4.1 Nécessité du vecteur $\vec{L}$

Comme expliqué au paragraphe 3.2.1.1, la décomposition sur la base  $\{\vec{M}, \vec{N}\}$ , composée de vecteurs à divergence nulle, permet de représenter le champ électromagnétique uniquement dans les zones vides de charges. En d'autres termes et plus précisément, entre les sphères intérieure ( $S_{int}$ ) et extérieure ( $S_{ext}$ ) de Wilcox, représentées figure 3.2, le champ électromagnétique ne peut pas être uniquement projeté sur des vecteurs à divergence nulle.

L'ajout d'une troisième famille de vecteurs de base, à divergence non nulle, est indispensable pour décomposer le champ. Ainsi, le vecteur  $\vec{L}$  est tel que :

$$\vec{L}_{mn}^{\sigma s} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}, \quad (3.47)$$

et son expression est :

$$\vec{L}_{mn}^{\sigma s} = \frac{dZ_n^s(z)}{dz} \frac{t_{mn}^{\sigma 3}(\theta)}{n(n+1)} f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \hat{r} - \frac{Z_n^s(z)}{z} t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \hat{\theta} - \frac{Z_n^s(z)}{z} t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) f_m^{\sigma}(\varphi) \hat{\varphi}. \quad (3.48)$$

Il est à rotationnel nul et à divergence non nulle.

Comme montré par D. Sarkar dans [37, 38], la famille  $\{\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}\}$  forme une base complète de solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz.

Pour modéliser le champ dans un milieu linéaire homogène isotrope en présence de charges, l'utilisation du vecteur  $\vec{L}$  est donc nécessaire. Elle l'est également si le milieu est anisotrope [39, 40].

### 3.4.2 Utilisation du vecteur $\vec{L}$

Pour prendre en compte la diffusion par un objet diffractant, il faut d'abord obtenir les coefficients modaux incidents pour pouvoir appliquer la MMT.

Ces étapes, résumées figure 3.18, permettent d'obtenir, en tout point de l'espace, le champ diffracté par un objet illuminé par une source réelle.

#### 3.4.2.1 Obtention des coefficients modaux incidents

Pour obtenir les coefficients modaux incidents, il est possible de procéder de deux façons schématisées figure 3.18.

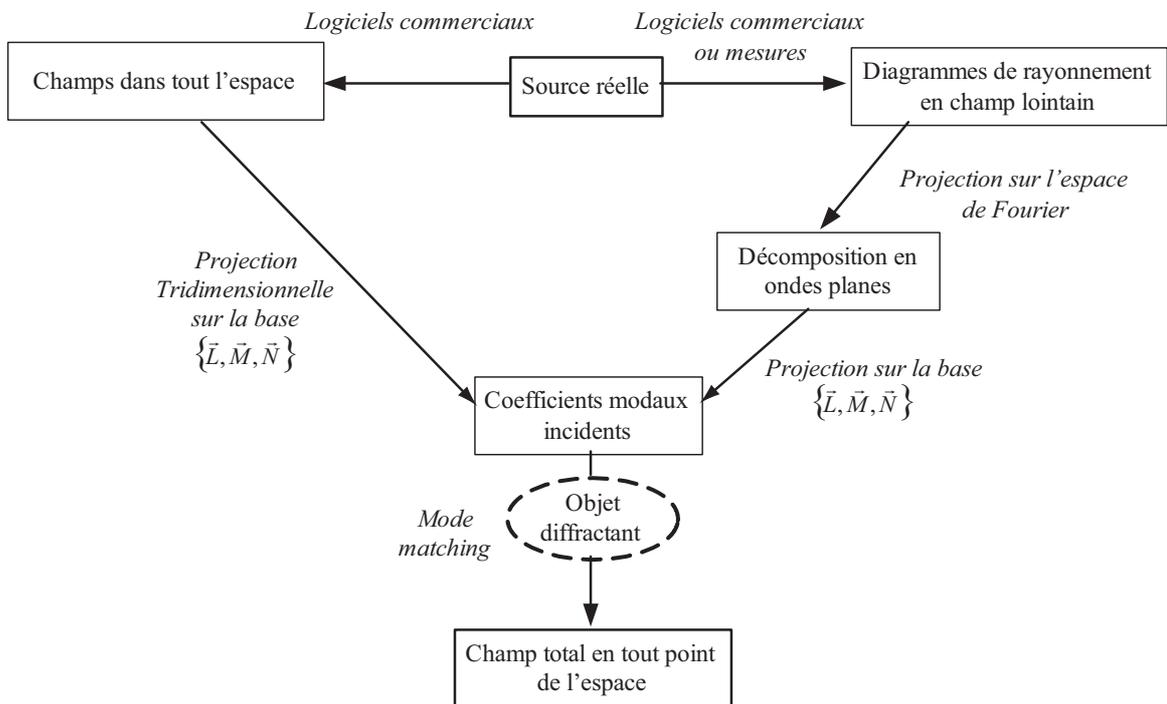


FIG. 3.18 – Schéma résumant les étapes permettant d'obtenir, en tout point de l'espace, le champ diffracté par un objet illuminé par une source réelle.

### **La projection directe**

Cette technique est très coûteuse en mémoire et temps de calcul. Elle nécessite une connaissance du champ en tout point de l'espace afin d'effectuer une intégration tridimensionnelle sur un domaine théoriquement infini.

Pour s'en affranchir, il est possible de procéder d'une manière plus subtile.

### Le passage par la décomposition en ondes planes

- Projection sur l'espace de Fourier

Dans un milieu homogène, le rayonnement de toute source d'étendue finie ( $\vec{E}_i$ ) peut être décomposé sur une base d'ondes planes :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \int_{\Omega^2} \vec{\tilde{E}}_i(k_x, k_y, k_z) e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} d\Omega_k^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{\tilde{E}}_i(k, \alpha, \beta) e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} r^2 \sin \beta d\beta d\alpha,\end{aligned}\quad (3.49)$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . A une fréquence donnée, le vecteur d'onde  $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$  est fonction de la direction  $(\alpha, \beta)$  des ondes planes et est ainsi  $\vec{k}(k, \alpha, \beta)$ . Notons que  $\vec{r}(r, \theta, \varphi)$  est le vecteur position.

En échantillonnant les directions  $(\alpha, \beta)$  des ondes planes, l'équation (3.49) peut s'écrire :

$$\vec{E}_i \cong \sum_{u,v} \vec{\tilde{E}}_i(k, \alpha_u, \beta_v) e^{j\vec{k}(k, \alpha_u, \beta_v)\cdot\vec{r}}. \quad (3.50)$$

Cette approximation peut être exacte avec le bon choix des positions d'échantillonnage, comme montré dans [41].

- Projection sur la base  $\{\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}\}$

La base  $\{\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}\}$  est complète, ce qui rend possible la décomposition suivante :

$$\hat{u} e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{m,n} a_{mn}^u \vec{M}_{mn} + b_{mn}^u \vec{N}_{mn} + c_{mn}^u \vec{L}_{mn}, \quad \text{où } u \in \{x, y, z\}, \quad (3.51)$$

en précisant que  $s = 1$  uniquement dans la sommation. En effet, les ondes planes peuvent être vues comme le rayonnement de sources placées à l'infini. Cette interprétation physique revient à se situer dans le problème intérieur de Wilcox ( $r_{int} \rightarrow \infty$ ).

De (3.50) et (3.51), il vient la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{E}}_i e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \sum_{m,n} \left\{ \left( \vec{E}_x a_{mn}^x + \vec{E}_y a_{mn}^y + \vec{E}_z a_{mn}^z \right) \vec{M}_{mn} + \dots \right. \\ &\quad \left( \vec{E}_x b_{mn}^x + \vec{E}_y b_{mn}^y + \vec{E}_z b_{mn}^z \right) \vec{N}_{mn} + \dots \\ &\quad \left. \left( \vec{E}_x c_{mn}^x + \vec{E}_y c_{m,n}^y + \vec{E}_z c_{mn}^z \right) \vec{L}_{mn} \right\}.\end{aligned}\quad (3.52)$$

Introduisons le produit scalaire tridimensionnel :

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle_3 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{A} \cdot \vec{B} \sin \theta d\varphi d\theta dr, \quad (3.53)$$

où  $\overline{\vec{X}}$  est le vecteur complexe conjugué de  $\vec{X}$ .

Les relations d'orthogonalités entre les vecteurs  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ , détaillées en annexe C, permettent d'obtenir les relations conduisant aux coefficients modaux :

$$a_{mn}^u = \frac{\langle \vec{E}_u | \vec{M}_{mn} \rangle_3}{\langle \vec{M}_{mn} | \vec{M}_{mn} \rangle_3}, \quad (3.54)$$

$$b_{mn}^u = \frac{\langle \vec{E}_u | \vec{L}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3 - \langle \vec{E}_u | \vec{N}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3}{\langle \vec{N}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3 - \langle \vec{N}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3}, \quad (3.55)$$

$$c_{mn}^u = \frac{\langle \vec{E}_u | \vec{N}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{N}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3 - \langle \vec{E}_u | \vec{L}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{N}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3}{\langle \vec{N}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3 - \langle \vec{N}_{mn} | \vec{N}_{mn} \rangle_3 \langle \vec{L}_{mn} | \vec{L}_{mn} \rangle_3}. \quad (3.56)$$

- Obtention des coefficients modaux

L'équation (3.52) peut être mise sous la forme :

$$\vec{E}_i e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{m,n} \{ A_{mn} \vec{M}_{mn} + B_{mn} \vec{N}_{mn} + C_{mn} \vec{L}_{mn} \}, \quad (3.57)$$

où  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  et  $C_{mn}$  sont les coefficients modaux sphériques recherchés.

Ces coefficients sont alors obtenus via la décomposition spectrale de la source et les coefficients modaux  $a_{mn}^u$ ,  $b_{mn}^u$  et  $c_{mn}^u$ .

### 3.4.2.2 Application de la MMT

Connaissant les coefficients modaux incidents, la MMT peut être utilisée. Pour cela, les conditions aux limites du champ électromagnétique sur l'objet diffractant sont appliquées. Le champ diffracté est alors calculé, ce qui donne accès au champ total en tout point de l'espace.

### 3.4.3 Conclusion

Nous avons débuté la décomposition d'une onde plane quelconque sur la base des vecteurs modaux sphériques  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ . Compléter ce travail déjà conséquent est une tâche considérable. A notre connaissance, seul D. Sarkar [37, 38] propose, avec d'autres notations, une décomposition similaire qui n'a été ni appliquée, ni validée.

Cette thèse a pour but l'étude et l'analyse d'antennes lentilles. Comme nous n'avons pas besoin du vecteur  $\vec{L}$  pour extraire les caractéristiques d'antennes qui nous intéressent, les développements précédemment introduits ne sont pas poursuivis dans le cadre de cette thèse.

### 3.5 Conclusion

La "Mode Matching Technique" (MMT) basée sur les fonctions d'onde sphériques a été présentée pour analyser la diffusion de lentilles sphériques et hémisphériques stratifiées alimentées par une source quelconque.

Chaque étape (la décomposition de la source, la diffusion par des lentilles sphériques (Luneburg) et l'extension aux lentilles hémisphériques (HMFE)) a été numériquement vérifiée et expérimentalement validée.

En plus d'assurer une précision contrôlée, la méthode présentée est rapide et nécessite peu de ressources mémoires comparées aux logiciels commerciaux.

Cependant, pour analyser la diffusion par des lentilles hémisphériques stratifiées, le débordement de la source doit être suffisamment faible pour garantir des résultats précis. Ce n'est pas le cas, par exemple, si la source n'est pas centrée sous la lentille.

Le chapitre suivant est consacré à l'analyse de structures de forme arbitraire et présente ainsi une solution pour tenter de remédier à ce problème.

# Bibliographie

- [1] R.K. Luneburg, *Mathematical theory of optics*, Providence, Rhode Island, Brown University Press, 1944.
- [2] E. Braun, "Radiation characteristics of the spherical Luneberg lens," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 4, no. 2, pp. 132-138, Avr. 1956.
- [3] S.P. Morgan, "Generalizations of spherically symmetric lenses," *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. 7, no. 4, pp. 342-345, Oct. 1959.
- [4] T.L. Ap Rhys, "The design of radially symmetric lenses," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 18, no. 5, pp. 497-506, Juil. 1970.
- [5] B. Schoenlinner, X. Wu, J.P. Ebling, G.V. Eleftheriades, and G.M. Rebeiz, "Wide-scan spherical-lens antennas for automotive radars," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 9, pp. 2166-2175, Sep. 2002.
- [6] C.A. Fernandes, J.G. Fernandes, "Performance of lens antennas in wireless indoor millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 6, pp. 806-811, June 1999.
- [7] C.A. Fernandes, "Shaped dielectric lenses for wireless millimeter-wave communications," *IEEE Antennas and Propag. Magazine*, Vol. 41, no. 5, pp. 141-150, Oct. 1999.
- [8] B. Chantraine Barès, "Synthèse et optimisation d'antennes lentilles substrats à applications en ondes millimétriques," *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, France, Nov. 2004.
- [9] G. Godi, "Conception et optimisation d'antennes lentilles multicouches et de dômes diélectriques, applications en ondes millimétriques," *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, France, Nov. 2006.
- [10] G. Godi, R. Sauleau and D. Thouroude, "Performance of reduced size substrate lens antennas for millimeter-wave communications," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 4, pp. 1278-1286, Apr. 2005.
- [11] A.D. Greenwood and J.-M. Jin, "Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1260-1266, Aout. 1999.
- [12] Z. Sipus, N. Burum and J. Bartolic, "Analysis of rectangular microstrip patch antennas on spherical structures," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 36, pp. 276-280, 2003.

- [13] Z. Sipus, M. Bosiljevac and N. Herscovici, "Performance analysis of spherical patch arrays," IEEE AP-S Int. Symp., Albuquerque, NM, USA, Jul. 2006, pp. 1591-1594.
- [14] W.W. Hansen, "A new type of expansion in radiation problem," Physical review, vol. 47, pp. 139-143, Jan. 1935.
- [15] J.A. Stratton, Electromagnetic Theory, New York, New York, McGraw Hill, 1941.
- [16] R.F. Harrington, Time Harmonic Electromagnetic Fields, New York, New York, McGraw Hill, 1961.
- [17] J.J. Mikulski and E.L. Murphy, "The Computation of Electromagnetic Scattering from Concentric Spherical Structures," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 11, pp. 169-177, Mars 1963.
- [18] H. Mieras, "Radiation Pattern Computation of a Spherical Lens Using Mie Series," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 30, no. 6, pp. 1221-1224, Nov. 1982.
- [19] S.S. Vinogradov, E.D. Vinogradova and P.D. Smith, "Accurate modelling of a scanning Luneberg lens antenna Mie series approach," Proc. International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, Turin, Italy, pp. 277-280. Sept. 1999.
- [20] W.C. Chew, Waves and Fields in Inhomogeneous Media, New York, New York, Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [21] L-W. Li, P.-S. Kooi, M.-S. Leong and T.-S. Yeo "Electromagnetic dyadic Green's functions in spherically multilayered media," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 42, no. 12, pp. 2302-2310, Dec. 1994.
- [22] H. Mosallaei and Y. Rahmat-Samii, "Non-uniform Luneburg and 2-shell lens antennas : Radiation characteristics and design optimization," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 49, no. 1, pp. 60-69, Jan. 2001.
- [23] J. Sanford, "Scattering by spherically stratified microwave lens antennas," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 42, no. 5, pp. 690-698, Mai 1994.
- [24] S. Rondineau, "Modélisation de lentilles sphériques à gradient d'indice et sources conformes associées," Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, 13 Dec. 2002.
- [25] S. Rondineau, A.I. Nosich, J.-P. Daniel, M. Himdi and S.S. Vinogradov, "MAR analysis of a spherical-circular printed antenna with finite ground excited by an axially symmetric probe," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no. 5, pp. 1270-1280, Mai 2004.
- [26] S.S. Vinogradov, P.D. Smith, E.D. Vinogradova and A.I. Nosich, "Accurate simulation of a spherical reflector front-fed by a complex Huygens source-point beam - A dual series approach," International Nice Symposium on Antennas, Nice, France, 17-19 Nov. 1998. pp. 153-156.
- [27] J. Sanford, "Spherically stratified microwave lenses," Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1992.

- 
- [28] C.H. Wilcox, "An Expansion theorem for Electromagnetic Fields," *Comm. on pure and applied mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 115-134, Mai. 1956.
- [29] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York : Dover, 1970, p. 437.
- [30] C.A. Balanis, *Antenna Theory-Analysis and Design*, 2<sup>nd</sup> ed., New York : Wiley, 1996, p. 39.
- [31] R.E. Collin, *Foundation for Microwave Engineering*, 2<sup>nd</sup> ed., New York : McGraw-Hill, 1992, p.347-348.
- [32] Y.T. Lo and S.W. Lee, *Antenna Handbook, Theory, Applications and design*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1988.
- [33] J.H. Bruning and Y.T. Lo (1971), "Multiple scattering of EM waves by spheres part II—Numerical and experimental results," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 19, no. 3, pp. 391-400, Mai 1971.
- [34] J.E. Hanson, *Spherical Near-Field Antenna Measurements*, Peter Peregrinus Ltd., London,1988.
- [35] B.C. Brock, "Using vector spherical harmonics to compute antenna mutual impedance from measured or computed fields," *Sandia Report SAND2000-2217*, Sandia National Laboratories, Sept. 2000. (<http://www.prod.sandia.gov/cgi-bin/techlib/accesscontrol.pl/2000/002217r.pdf>)
- [36] P.J. Wood, *Reflector antenna analysis and design*, Peter Peregrinus LTD, Institution of Electrical Engineers, 1980, Chapitre 5.
- [37] D. Sarkar, "Vector basis function solution of Maxwell's equations," *Thèse de Doctorat*, Rice University, Houston, USA, 1996.
- [38] D. Sarkar, N.J. Halas, "General vector basis function solution of Maxwell's equations," *Physical review E*, vol. 56, no. 1, pp. 1102-1112, Juil. 1997.
- [39] Y.-L. Geng, X.-B. Wu, L.-R. Guan, "Mie scattering by a uniaxial anisotropic sphere," *Physical review E*, vol. 70, no. 5, Nov. 2004.
- [40] Y.-L. Geng, X.-B. Wu, L.-R. Guan, "Electromagnetic scattering from an uniaxial-coated conducting sphere," *Progress in Electromagnetics Research Symp.*, pp. 403-407, Hangzhou, Chine, Août 2005.
- [41] B. Rafaely, "Analysis and design of spherical microphone arrays," *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 13, no. 1, pp. 135-143, Jan. 2005



# Chapitre 4

## Extension : analyse de structures de forme arbitraire

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>4.2</b>	<b>Les modes sphériques : extension aux structures de forme arbitraire</b>	<b>124</b>
4.2.1	Coefficients modaux associés à un champ électromagnétique	124
4.2.1.1	Expression des coefficients modaux sphériques après un changement de repère	124
4.2.1.2	Coefficients modaux sphériques au sein d'un volume de forme quelconque	125
4.2.2	Convergence des vecteurs et coefficients modaux sphériques	126
<b>4.3</b>	<b>Présentation du problème et mise en équation</b>	<b>128</b>
4.3.1	Géométrie de l'objet diffractant	128
4.3.2	Application à la diffraction par un objet stratifié de forme quelconque	129
4.3.2.1	Conditions aux limites	129
4.3.2.2	Description du système linéaire	129
<b>4.4</b>	<b>Résolution du problème</b>	<b>131</b>
4.4.1	Maillage	131
4.4.2	Dimensions du problème	132
4.4.3	Résolution du système	132
4.4.3.1	Méthodes de résolution du système	132
4.4.3.2	Amélioration du conditionnement	133
<b>4.5</b>	<b>Application à l'analyse de structures à symétrie de révolution</b>	<b>135</b>
4.5.1	Description du système réduit	136
4.5.2	Résultats numériques et discussions	136
4.5.2.1	Géométrie et caractéristiques des objets diffractants étudiés	136

4.5.2.2	Considérations sur les techniques de résolution . . .	139
4.5.2.3	Diagrammes de rayonnement en champ lointain . .	142
4.5.2.4	Cartographies de champs . . . . .	147
4.5.2.5	Considérations de temps et charge de calcul . . . .	148
<b>4.6</b>	<b>Contexte et perspective de la méthode présentée . . . . .</b>	<b>149</b>
4.6.1	Comparaison de la méthode présentée avec trois méthodes numériques . . . . .	149
4.6.2	Perspective : la méthode analytique de régularisation . . . .	150
4.6.2.1	Principe . . . . .	151
4.6.2.2	Application . . . . .	151
<b>4.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>152</b>

---

## 4.1 Introduction

Un certain nombre de méthodes analytiques sont applicables pour analyser la diffraction des ondes électromagnétiques. Ces méthodes s'appliquent facilement lorsque les frontières de l'objet diffractant s'expriment simplement dans un système de coordonnées. En effet, l'équation d'onde vectorielle peut être résolue, dans certains cas, par la méthode de séparation des variables et l'application des conditions aux limites est simple à mettre en œuvre, comme cela a été détaillé au chapitre précédent pour le cas d'une structure sphérique stratifiée. L'utilisation directe de telles méthodes est donc restreinte à l'étude d'un nombre limité d'objets diffractants de forme canonique.

Ainsi, l'utilisation de la MMT basée sur les fonctions d'ondes sphériques, pour analyser des structures dont les frontières ne sont pas sphériques, n'est pas triviale. Une discrétisation de ses interfaces s'impose.

Dans [1, 2], D. Sarkar utilise la décomposition en modes sphériques pour analyser la diffraction d'une onde plane par une "pilule" diélectrique. Nous n'avons pas trouvé d'autres exemples de ce type, ni de validation tant numérique qu'expérimentale de cette méthode ainsi appliquée dans la littérature.

Ce chapitre présente l'extension de la technique analytique de développement modal détaillée au chapitre 3, pour analyser la diffraction d'une source quelconque par un objet stratifié de forme arbitraire.

Tout d'abord, l'utilisation du développement du champ électromagnétique en modes sphériques est étendue aux structures de forme arbitraire. Le comportement asymptotique et la convergence des coefficients et vecteurs modaux sphériques sont aussi présentés.

Le problème de diffraction est ensuite mis en équation. Cela conduit à un système linéaire, de grandes dimensions, sur-déterminé et mal conditionné. Les problèmes liés à la résolution de ce système sont alors traités. Ainsi, des techniques d'amélioration du conditionnement sont proposées.

Sans perte de généralité, l'application de la MMT est restreinte à l'étude de structures ayant une symétrie azimutale. De nombreux résultats numériques sont présentés afin de valider la méthode proposée, d'évaluer ses performances par rapport aux logiciels commerciaux et d'estimer ses limitations.

Enfin, pour rendre plus robuste la résolution du problème de diffraction, une des perspectives envisagées est l'utilisation de la Méthode Analytique de Régularisation (MAR) [3, 4, 5].

## 4.2 Les modes sphériques : extension aux structures de forme arbitraire

Dans cette partie, le développement du champ électromagnétique en modes sphériques est étendu aux structures de forme arbitraire. De plus, la convergence des coefficients et vecteurs modaux sphériques est étudiée.

### 4.2.1 Coefficients modaux associés à un champ électromagnétique

La décomposition en modes sphériques est, en général, utilisée pour représenter le champ au sein de structures de forme sphérique. Dans ce cas, il est depuis longtemps établi que les coefficients modaux au sein d'une coquille sphérique contenant un milieu Linéaire, Homogène et Isotrope (LHI) sont constants et uniques.

Nous cherchons dans cette partie à savoir si cette conclusion reste valable au sein d'un volume non sphérique. Pour cela, nous nous intéressons à l'évolution des coefficients modaux sphériques après un changement de repère afin d'en déduire comment les utiliser au sein d'un volume de forme quelconque.

#### 4.2.1.1 Expression des coefficients modaux sphériques après un changement de repère

Soit  $P$  une partition de l'espace composée d'une coquille sphérique centrée sur le repère  $R_1$ , comme représenté figure 4.1.  $P$  contient un milieu LHI.

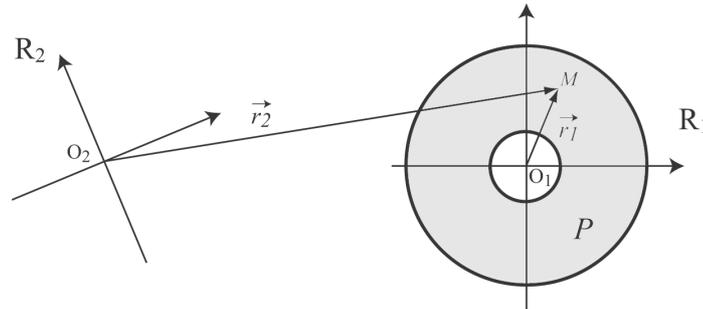


FIG. 4.1 – Schéma d'une coquille  $P$  centrée sur le repère  $R_1$  d'origine  $O_1$ .  $M$  est un point de  $P$  à la position  $\vec{r}_1$  dans  $R_1$  et  $\vec{r}_2$  dans le repère  $R_2$  d'origine  $O_2$ .

Pour tout point  $M$  de la partition  $P$ , nous pouvons écrire :

$$\vec{E}(M) = \sum_I a_{R_1}^I \vec{M}_{R_1}^I(\vec{r}_1) + b_{R_1}^I \vec{N}_{R_1}^I(\vec{r}_1), \text{ avec } I = \{m, n, \sigma, s\}. \quad (4.1)$$

Les coefficients modaux  $a_{R_1}$  et  $b_{R_1}$  sont constants et uniques quelque soit  $r_1 \in P$ .  
Après un changement de repère, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{R_1}^I(r_1) \\ \vec{N}_{R_1}^I(r_1) \end{array} \right\} = \sum_{I'} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{R_{1,2}}^{I'M} \\ \alpha_{R_{1,2}}^{I'N} \end{array} \right\} \vec{M}_{R_2}^{I'}(r_2) + \left\{ \begin{array}{c} \beta_{R_{1,2}}^{I'M} \\ \beta_{R_{1,2}}^{I'N} \end{array} \right\} \vec{N}_{R_2}^{I'}(r_2), \text{ avec } I' = \{m', n', \sigma', s'\}, \quad (4.2)$$

et où  $\alpha_{R_{1,2}}$  et  $\beta_{R_{1,2}}$  sont les coefficients provenant du changement de repère  $R_1$  vers  $R_2$ . Cette transformation est unique.

$\vec{E}(M)$  peut alors être écrit dans le repère  $R_2$ , montré figure 4.1, comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) = \sum_I a_{R_1}^I \sum_{I'} \alpha_{R_{1,2}}^{I'M} \vec{M}_{R_2}^{I'}(r_2) + \beta_{R_{1,2}}^{I'M} \vec{N}_{R_2}^{I'}(r_2) \\ + b_{R_1}^I \sum_{I'} \alpha_{R_{1,2}}^{I'N} \vec{M}_{R_2}^{I'}(r_2) + \beta_{R_{1,2}}^{I'N} \vec{N}_{R_2}^{I'}(r_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

et devient en effectuant des regroupements :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) = \sum_{I'} a_{R_2}^{I'} \vec{M}_{R_2}^{I'}(r_2) + b_{R_2}^{I'} \vec{N}_{R_2}^{I'}(r_2), \quad (4.4) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{c} a_{R_2}^{I'} \\ b_{R_2}^{I'} \end{array} \right\} = \sum_I a_{R_1}^I \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{R_{1,2}}^{I'M} \\ \alpha_{R_{1,2}}^{I'N} \end{array} \right\} + b_{R_1}^I \left\{ \begin{array}{c} \beta_{R_{1,2}}^{I'M} \\ \beta_{R_{1,2}}^{I'N} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Au sein d'une coquille sphérique contenant un milieu LHI, les coefficients modaux sphériques sont uniques et constants.

Nous avons montré que ces coefficients restent constants après un changement quelconque de repère (translation et/ou rotation). Le théorème d'unicité nous permet d'affirmer que cette distribution modale est unique.

#### 4.2.1.2 Coefficients modaux sphériques au sein d'un volume de forme quelconque

Les étapes du raisonnement suivant sont illustrées figure 4.2. Considérons un volume intérieur  $V_0$ , i.e. sans sa frontière, de forme arbitraire mais connexe et constitué d'un milieu LHI.

Soit  $B$  la plus grande boule contenue dans  $V_0$ . Du lemme précédent, la famille des coefficients modaux  $(a, b)$  sont uniques et constants dans  $B$ . Soit  $B'$  une seconde boule contenue dans  $V_0$ , dont l'intersection avec  $B$  est non vide et ne se réduit pas à un singleton. Du lemme précédent, les coefficients modaux  $(a', b')$  sont uniques et constants dans  $B'$  et valent  $(a, b)$  dans l'intersection  $B \cap B' \neq \emptyset$ . Par conséquent,  $(a', b') = (a, b)$  dans le volume  $B \cup B'$ . Nous considérons ensuite une troisième boule  $B''$  et poursuivons le raisonnement par récurrence, jusqu'à ce que l'intégralité du volume intérieur  $V_0$  ait été décrit.

Nous avons montré qu'au sein d'un volume de forme arbitraire contenant un milieu LHI, les coefficients modaux sphériques sont uniques et constants.

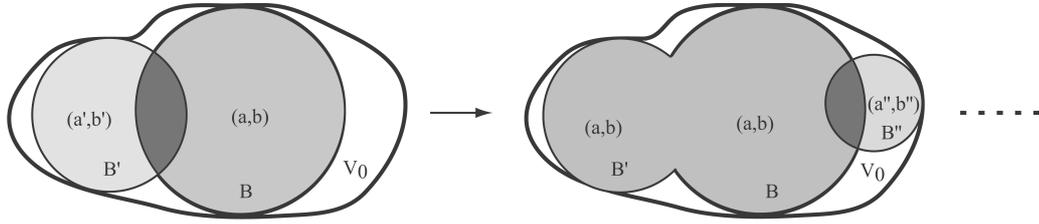


FIG. 4.2 – Illustration des étapes permettant de montrer, qu’au sein d’un volume arbitraire  $V_0$  contenant un milieu LHI, les coefficients modaux sphériques sont constants et uniques. Pour cela, trois boules ( $B, B'$  et  $B''$ ) et leur coefficients modaux sphériques associés ( $(a, b)$ ,  $(a', b')$  et  $(a'', b'')$ ) sont définis.

#### 4.2.2 Convergence des vecteurs et coefficients modaux sphériques

Nous rappelons la formule qui permet d’obtenir les coefficients modaux sphériques à partir des sources électromagnétiques  $\vec{J}_v^e$  et  $\vec{J}_v^m$  contenues dans un volume  $V_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{V_0} \left[ \vec{J}_v^e(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_v^m(\vec{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}) \end{array} \right\} \right] dv(\vec{r}). \quad (4.5)$$

La linéarité des équations de Maxwell permet de traiter  $\vec{J}_v^e$  et  $\vec{J}_v^m$  séparément. En effet, la contribution de l’ensemble des courants est la superposition des contributions de  $\vec{J}_v^e$  et de  $\vec{J}_v^m$ . De plus, l’influence de  $\vec{J}_v^m$  se déduit de celle de  $\vec{J}_v^e$  par simple dualité. Par conséquent, les développements suivants sont limités à  $\vec{J}_v^e$  ce qui ne réduit pas la généralité de l’étude.

D’après le théorème de la moyenne, il existe deux points  $P_a$  et  $P_b$  dans le volume  $V_0$  contenant l’ensemble des sources considérées, ici  $\vec{J}_v^e$  uniquement, tels que l’intégrale (4.5) s’écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} V_0 \left[ \vec{J}_v^e(P_{a,b}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_a) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_b) \end{array} \right\} \right]. \quad (4.6)$$

De cette expression, nous obtenons pour  $m$  fixé, après quelques développements, les équivalents suivants pour les coefficients modaux :

$$|a_{mn}^{\sigma 1}| \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{n^{m+\frac{3}{2}}} \left( \frac{2n}{z_a e} \right)^n [J_{\theta_a}^e + n J_{\varphi_a}^e], \quad (4.7)$$

$$|a_{mn}^{\sigma 4}| \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{n^{m+\frac{5}{2}}} \left( \frac{z_a e}{2n} \right)^n [J_{\theta_a}^e + n J_{\varphi_a}^e], \quad (4.8)$$

$$|b_{mn}^{\sigma 1}| \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}} \left( \frac{2n}{z_b e} \right)^n [J_{r_b}^e + J_{\theta_b}^e + \frac{1}{n} J_{\varphi_b}^e], \quad (4.9)$$

$$|b_{mn}^{\sigma 4}| \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}} \left( \frac{z_b e}{2n} \right)^n [J_{r_b}^e + J_{\theta_b}^e + \frac{1}{n} J_{\varphi_b}^e], \quad (4.10)$$

où  $z_{a,b}$  sont les longueurs électriques et  $(J_{r_{a,b}}^e, J_{\theta_{a,b}}^e, J_{\varphi_{a,b}}^e)$  sont les composantes du courant électrique dans le repère sphériques aux positions  $P_{a,b}$  respectivement.

Par ailleurs, les vecteurs modaux et les produits entre les vecteurs et coefficients modaux ont le comportement asymptotique suivant pour  $m$  fixé :

$$\left\| \vec{M}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n [f_m^\sigma n^{m-3/2} + f_m^{\bar{\sigma}} n^{m-1/2}], \quad (4.11)$$

$$\left\| \vec{M}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n [f_m^\sigma n^{m-1/2} + f_m^{\bar{\sigma}} n^{m+1/2}], \quad (4.12)$$

$$\left\| \vec{N}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n [n^{m+1/2} f_m^{\bar{\sigma}} + n^{m-1/2} f_m^\sigma], \quad (4.13)$$

$$\left\| \vec{N}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n [f_m^\sigma n^{m+3/2} + f_m^{\bar{\sigma}} n^{m+1/2}], \quad (4.14)$$

$$\left\| a_{mn}^{\sigma 4} \vec{M}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{n^2} \left( \frac{z_4^1}{z_a} \right)^{\pm n} [J_{\theta_a}^e + n J_{\varphi_a}^e], \quad (4.15)$$

$$\left\| b_{mn}^{\sigma 4} \vec{N}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} n \left( \frac{z_4^1}{z_b} \right)^{\pm n} [J_{r_b}^e + J_{\theta_b}^e + \frac{1}{n} J_{\varphi_b}^e], \quad (4.16)$$

où  $z_4^1 = k^4 r^4$ .  $k^4$  est le nombre d'onde du milieu en  $r^4$  avec  $r^1 < r_{int}$  et  $r^4 > r_{ext}$ .

Les expressions exactes de toutes ces évolutions asymptotiques sont données en annexe D.

Un exemple de ces évolutions asymptotiques est illustré figure 4.3.

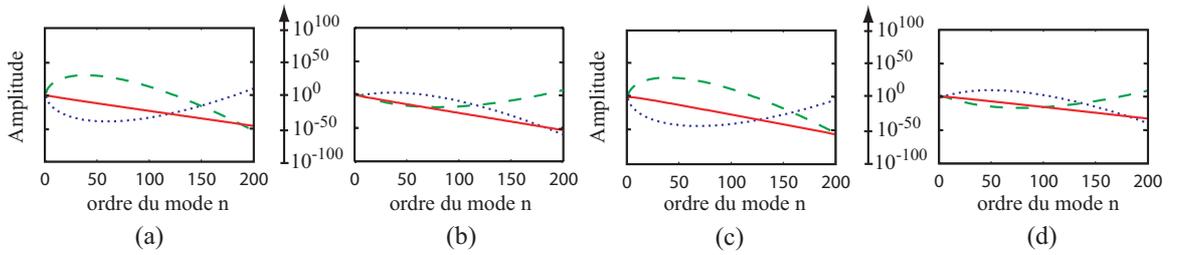


FIG. 4.3 – Evolution de l'amplitude des coefficients modaux sphériques ( $\cdots$ ), des vecteurs modaux  $\left\| \vec{X}_{mn}^{\sigma s} \right\|_2$  ( $- -$ ) et produits  $\left\| x_{mn}^{\sigma s} \cdot \vec{X}_{mn}^{\sigma s} \right\|_2$  ( $-$ ) en fonction de l'ordre du mode  $n$  pour : (a)  $x = a$ ,  $\vec{X} = \vec{M}$  et  $s = 1$ , (b)  $x = a$ ,  $\vec{X} = \vec{M}$  et  $s = 4$ , (c)  $x = b$ ,  $\vec{X} = \vec{N}$  et  $s = 1$  et (d)  $x = b$ ,  $\vec{X} = \vec{N}$  et  $s = 4$ . Pour ces courbes, les paramètres utilisés sont :  $m = 10$ ,  $z_a = 100$ ,  $z_b = 120$ ,  $z_1 = 60$  et  $z_4 = 180$ .

Plusieurs remarques en découlent :

- La dynamique des valeurs prises par les coefficients et vecteurs modaux sphériques est très importante (de  $10^{-40}$  à  $10^{30}$  pour cet exemple).
- Les produits  $a_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^s$  et  $b_{mn}^{\sigma s} \vec{N}_{mn}^s$  convergent normalement quand l'ordre  $n$  augmente. Non seulement cela confirme les conclusions de Wilcox [6] mais en plus cela

donne des informations supplémentaires sur les vitesses de convergence.

- Les coefficients modaux, et a fortiori les produits entre coefficients et vecteurs modaux, convergent plus rapidement lorsque l'excitation, ici les courants électriques  $\vec{J}^e$ , est selon  $\varphi$  uniquement.

### 4.3 Présentation du problème et mise en équation

L'objectif est d'étudier, en utilisant la MMT basée sur les fonctions d'ondes sphériques, l'interaction entre une structure de forme stratifiée diélectrique de forme arbitraire et une source quelconque.

La prise en compte d'une source quelconque a été présentée dans le paragraphe 3.2.3. Dans cette partie est décrite l'application à la diffraction par un objet stratifié de forme quelconque. Pour cela, la géométrie de l'objet diffractant est d'abord précisée puis l'application des conditions aux limites conduisant au système linéaire à résoudre est détaillée.

#### 4.3.1 Géométrie de l'objet diffractant

La géométrie de l'objet diffractant étudié est représenté sur la figure 4.4. L'objet est composé d'un nombre fini de couches diélectriques homogènes, la couche  $p$  étant entourée par la couche  $p + 1$ . L'origine  $O$  du repère est fixée au sein de la couche centrale. De plus, nous imposons qu'aucune des tangentes aux interfaces ne passe par l'origine, de façon à assurer l'unicité de l'intersection entre les interfaces diélectriques et un rayon venant de  $O$ .

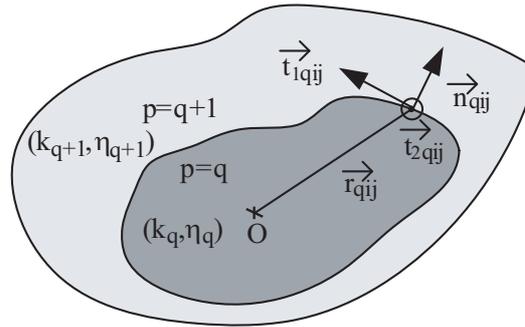


FIG. 4.4 – Vue de coupe de l'objet diffractant multicouche de forme arbitraire. Deux couches,  $p = \{q, q + 1\}$ , sont représentées avec leur nombre d'onde  $k_p$  et impédance intrinsèque associés. A l'intersection entre l'interface de ces couches et la direction  $(\theta_i, \varphi_j)$ , i.e. à la position  $\vec{r}_{qij}$ , la normale à la surface est  $\vec{n}_{qij}$  et les deux tangentes sont  $\vec{t}_{1qij}$  and  $\vec{t}_{2qij}$ .

### 4.3.2 Application à la diffraction par un objet stratifié de forme quelconque

#### 4.3.2.1 Conditions aux limites

A l'interface  $p$  entre deux diélectriques, nous appliquons la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique  $(\vec{E}_t, \vec{H}_t)$  :

$$\vec{E}_{t_{1,2}}^{p+1} = \vec{E}_{t_{1,2}}^p, \quad \vec{H}_{t_{1,2}}^{p+1} = \vec{H}_{t_{1,2}}^p \quad (4.17)$$

ainsi que la continuité des composantes normales du flux électromagnétique  $(\vec{D}_n, \vec{B}_n)$  :

$$\vec{D}_n^{p+1} = \vec{D}_n^p, \quad \vec{B}_n^{p+1} = \vec{B}_n^p. \quad (4.18)$$

Quand un conducteur électrique parfait d'épaisseur infinitésimale est placé entre ces deux diélectriques, les équations (4.17) et (4.18) deviennent :

$$\vec{E}_{t_{1,2}}^{p+1} = \vec{E}_{t_{1,2}}^p = \vec{0}, \quad \vec{D}_n^{p+1} = \vec{D}_n^p \text{ et } \vec{B}_n^{p+1} = \vec{B}_n^p. \quad (4.19)$$

La dernière condition à imposer est la finitude du champ à l'origine. Pour cela, les coefficients modaux (pour  $s = 4$ ) sont tels que :

$$a_{mn}^{\sigma 4} = 0, \quad b_{mn}^{\sigma 4} = 0 \quad (4.20)$$

au sein de la couche centrale.

#### 4.3.2.2 Description du système linéaire

Les équations des conditions aux limites (4.17) à (4.20) peuvent être groupées dans le système linéaire suivant :

$$Cx = y, \quad (4.21)$$

où :

- Le vecteur  $x$  contient tous les coefficients modaux inconnus pour chaque couche.
- La matrice rectangulaire complexe  $C$  est remplie par les composantes des vecteurs modaux sphériques, ordonnées selon  $x$ , et évaluée à chaque nœud du maillage décrivant toutes les interfaces.
- Le champ incident connu est dans le vecteur  $y$ .

La structure matricielle correspondant au système (4.21) est représentée figure 4.5. Les détails sur sa composition sont donnés en annexe E.

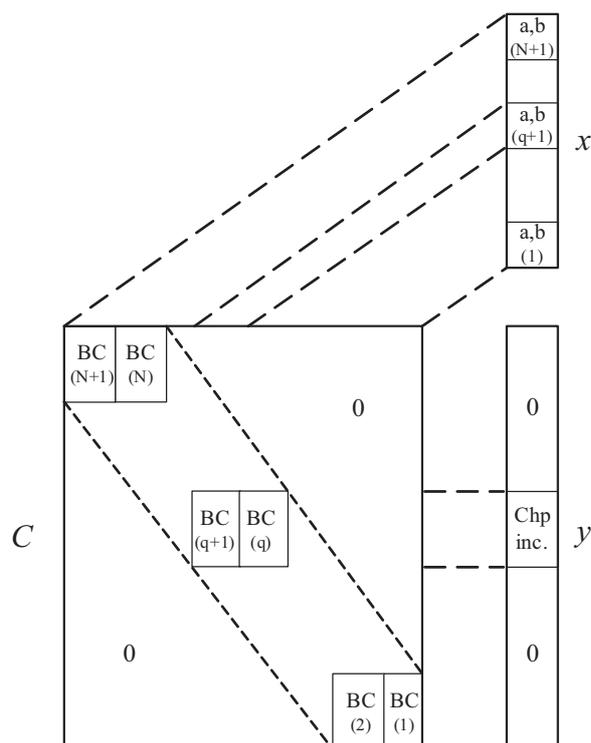


FIG. 4.5 – Structure du système linéaire sur-déterminé dérivé de l'application des équations aux limites. Le vecteur  $x$  contient les coefficients modaux inconnus  $(a,b)$  pour chaque couche  $p = 1$  à  $N + 1$ . La matrice rectangulaire complexe  $C$  est une matrice diagonale bande. Dans les sous-matrices  $BC(p)$  sont rangées les équations aux limites évaluées à chaque nœud de maille de l'interface  $p$ . Le vecteur second membre  $y$  contient le champ incident noté "Chp inc.". Il est non nul dans la couche où se trouve la source (ici  $p = q$ ) et est aussi évalué à chaque nœud de maille.

## 4.4 Résolution du problème

La description d'un objet stratifié de forme arbitraire dans le système de coordonnées sphériques nécessite la discrétisation de toutes ses interfaces. L'application des équations des conditions aux limites à chaque nœud de maille conduit à un grand système linéaire.

Ainsi, le maillage, les dimensions et la résolution du système linéaire sont présentés dans cette partie.

### 4.4.1 Maillage

Les interfaces des objets diffractants sont décrites par leur équation paramétrique qui est de la forme :  $S(r, \theta, \varphi) = 0$ . La surface est alors discrétisée à différentes positions angulaires. Les pas angulaires sont notés  $\Delta\varphi$  et  $\Delta\theta$ . Les nombres de discrétisation en  $\varphi$  et  $\theta$  sont  $nb_\varphi$  et  $nb_\theta$  respectivement.

Deux types de maillage sont implémentés :

- Le maillage à Pas Angulaire Egal (PAE),  $\Delta\varphi = \Delta\theta$ , qui entraîne une discrétisation se densifiant près des pôles  $\theta = \{0, \pi\}$ .
- Le maillage à surface égales, aussi connu sous le nom de maillage "igloo" [8], pour lequel  $\Delta\varphi = \frac{\Delta\theta}{\sin\theta}$ .

Le maillage PAE et le maillage "igloo" sont illustrés sur le cas canonique de la sphère figure 4.6.

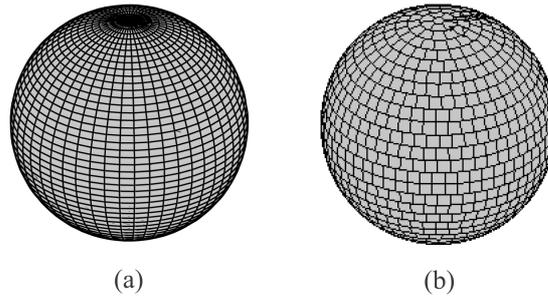


FIG. 4.6 – Sphères maillées selon (a) un Pas Angulaire Egal (PAE) et (b) la technique "igloo".

Toute étude plus poussée sur les techniques de maillage est un travail à part entière qui n'est pas l'objectif de cette thèse, c'est pourquoi nous nous sommes limités à ces deux types de discrétisation.

## 4.4.2 Dimensions du problème

La matrice  $C$  est une matrice complexe qui a :

- un nombre de lignes égal à :  $6.N.nb_\theta.nb_\varphi$ ,
- un nombre de colonnes égal à :  $2.N.N_t.(Nt + 3).(N + 1)$ ,

où  $N$  est le nombre de couches et  $N_t$  est l'ordre de troncature.

Pour illustrer la complexité numérique du problème, considérons l'exemple d'une lentille de taille électrique  $kr = 10$  qui a  $N = 2$  couches. D'après la formule (3.46), l'ordre de troncature est  $N_t = 17$ . Un maillage grossier est choisi où les pas angulaires sont :  $\Delta\theta = 5^\circ$  et  $\Delta\varphi = 10^\circ$ , ce qui entraîne :  $nb_\theta = nb_\varphi = 36$ .

Cette application numérique conduit à une matrice  $C$  contenant plus de 31 millions de coefficients et un vecteur  $x$  de 2040 coefficients modaux inconnus à déterminer.

## 4.4.3 Résolution du système

Pour résoudre un système linéaire sur-déterminé, de nombreuses techniques existent. Un certain nombre d'entre elles ont été testées et sont présentées. Il ressort que le problème inhérent à la résolution de ce système est son mauvais conditionnement. Des techniques pour l'améliorer sont ainsi proposées.

### 4.4.3.1 Méthodes de résolution du système

#### Présentation et mise en forme du système

Le système à résoudre (4.21) est sur-déterminé car le nombre de lignes de  $C$  est supérieur au nombre de colonnes. Comme expliqué sur la figure 4.5, le nombre :

- de colonnes de  $C$  est lié au nombre de modes considéré et est donc fixe pour une structure donnée,
- de lignes de  $C$  dépend du nombre de points de discrétisation des interfaces (un point de discrétisation supplémentaire ajoute six lignes à  $C$ ).

Pour éviter que la taille du système à résoudre n'augmente avec la finesse du maillage utilisé, le système (4.21) est remplacé par le système linéaire carré suivant :

$$Ax = b \text{ avec } \begin{cases} A = C^*C \\ b = C^*y \end{cases}, \quad (4.22)$$

où  $X^*$  est la matrice transposée conjuguée de  $X$ .

D'ailleurs, comme le nombre de lignes est très largement supérieur au nombre de colonnes (pour l'exemple qui sera traité au paragraphe 4.5.1 le nombre de lignes de  $C$  est 150 fois supérieur au nombre de colonnes), cette transformation est indispensable même si la dynamique des valeurs propres de  $A$  est le carré de la dynamique des valeurs singulières de  $C$ .

Le système (4.22) est donc désormais considéré.

### Présentation des méthodes de résolution

Pour résoudre ce système linéaire, deux grandes familles de méthodes existent : les méthodes directes et les méthodes itératives [7].

- Les méthodes directes sont des méthodes qui après un nombre fini d'étapes donnent la solution exacte aux erreurs d'arrondi près. La principale méthode directe est la méthode d'élimination de Gauss. L'idée est d'éliminer les inconnues d'une manière systématique afin de se ramener à un système triangulaire plus facile à résoudre. Les méthodes directes sont généralement plus efficaces lorsque la matrice à inverser est dense.
- Les méthodes itératives sont initialisées par une première approximation qui est successivement améliorée jusqu'à ce qu'une solution suffisamment précise soit obtenue. Leur domaine de prédilection est la résolution de systèmes creux, mais ce type de méthode manque généralement de robustesse car leur convergence (existence et vitesse) est souvent liée au conditionnement de la matrice à inverser.

### Evaluation des méthodes de résolution

Plusieurs méthodes directes (des variantes de l'élimination de Gauss : factorisations  $LU$  et de Cholesky) et itératives (le gradient bi-conjugué, les moindres carrés et le minimum résiduel) ont été testées, avec le logiciel Matlab<sup>®</sup>, pour résoudre notre problème.

A priori, les méthodes itératives sont les plus adaptées, car la structure de la matrice  $C$  (figure 4.5) montre que la matrice  $A$  est creuse.

Cependant, aucune de ces méthodes ne permet une résolution correcte systématique du système, car la dynamique des valeurs propres de  $A$  est souvent très importante ( $>10^{30}$ ).

Pour pouvoir résoudre le système (4.22), il convient donc, avant d'utiliser une des méthodes d'inversion évoquées ci-dessus, d'améliorer son conditionnement. Pour cela, des techniques adaptées à notre problème sont proposées.

#### 4.4.3.2 Amélioration du conditionnement

Le conditionnement d'une matrice n'est pas directement lié à la dynamique de ses composantes. Cependant, homogénéiser les composantes d'une matrice améliore, en général, son conditionnement.

#### Raisons de l'importante dynamique des composantes de $A$

Regardons la composition de la matrice  $C$  pour comprendre ce qui entraîne une dispersion importante des valeurs des composantes de  $A$ .

La matrice  $C$  a pour composantes les vecteurs modaux sphériques. Les éléments de la matrice  $A$  sont donc les produits entre ces vecteurs. Ainsi, elle est composée de produits entre les fonctions trigonométriques  $f_m^\sigma$ , les polynômes et fonctions associées de Legendre  $P_n^m$  et les fonctions sphériques de Bessel  $Z_n^s$ .

Les valeurs prises par  $f_m^\sigma$  et  $P_n^m$  sont comprises entre -1 et 1. En revanche, les fonctions sphériques de Bessel, et plus précisément la partie imaginaire des fonctions de Hankel de seconde espèce  $Z^4$  (ainsi que la fonction modifiée  $K^4$ ), prennent des valeurs très importantes quand l'ordre  $n$  est supérieur à l'argument  $z$ , comme le montre les équivalents suivants :

$$Z_n^4(z) = j \frac{\sqrt{2}}{z} \left( \frac{2n}{ze} \right)^n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n \rightarrow \infty) \quad (4.23)$$

$$K_n^4(z) = -j \frac{n\sqrt{2}}{z^2} \left( \frac{2n}{ze} \right)^n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n \rightarrow \infty) . \quad (4.24)$$

### Réduction de la dynamique des composantes de $A$

- Une première technique permet de minimiser la plage de valeurs prises par les fonctions de Bessel. Il s'agit de faire correspondre l'origine 0 du repère avec le barycentre  $G$  de l'objet diffractant afin de minimiser la dynamique des longueurs électriques de l'objet. Ainsi, le barycentre  $G$  est calculé par rapport aux longueurs électriques  $\vec{r}k(\vec{r})$  de l'objet sur son volume  $V_0$  :

$$\vec{OG} = \frac{\int_{V_0} \vec{r} k(\vec{r}) dv(\vec{r})}{\int_{V_0} k(\vec{r}) dv(\vec{r})} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\int_{V_0} \vec{r} \sqrt{\epsilon(\vec{r})} dv(\vec{r})}{\int_{V_0} \sqrt{\epsilon(\vec{r})} dv(\vec{r})}, \text{ pour un objet diélectrique.} \quad (4.26)$$

- Pour obtenir un système mieux conditionné, nous introduisons une matrice diagonale  $S$  et effectuons un changement de variable :

$$AS^{-1}Sx = b, \quad (4.27)$$

$$\text{soit } Bz = b \text{ avec } \begin{cases} B = AS^{-1} \\ z = Sx \end{cases} .$$

Cette méthode est appliquée de deux manières :

1.  $S$  est utilisé pour "normaliser" les colonnes de  $A$ ,
2.  $S$  est utilisé pour réduire la dynamique des composantes de  $x$  et  $A$ .

Ces deux techniques sont maintenant détaillées.

1.  $S$  est une matrice diagonale dont les composantes sont, à une constante  $\alpha$  près, les normes euclidiennes des colonnes de  $A$ .  $B$  est alors une matrice de même dimension que  $A$  dont les colonnes sont de mêmes normes :  $1/\alpha$ . La constante  $\alpha$  est alors choisie pour "équilibrer" la dynamique de  $z$  (autour de  $1/\alpha$ ) qui est généralement plus importante que celle du  $x$  initial.

2.  $S$  est une matrice diagonale égale au produit de deux matrices :  $S = N_U N_x^{-1}$ .  $N_x$  est une matrice diagonale telle que  $\tilde{x} = N_x^{-1}x$ , où les composantes de  $\tilde{x}$  sont de l'ordre de 1. Les composantes de  $N_x$  sont calculées à partir des évolutions asymptotiques des coefficients modaux. La composition de cette matrice est détaillée en annexe F.

Ainsi, en introduisant  $N_x$  dans (4.21) nous obtenons :

$$CN_x N_x^{-1}x = y, \text{ soit } CN_x \tilde{x} = y. \quad (4.28)$$

ce qui conduit à :

$$N_x^* C^* CN_x \tilde{x} = N_x^* C^* y. \quad (4.29)$$

(4.29) peut se réécrire, avec le  $A$  et  $b$  de (4.22) :

$$N_x^* AN_x \tilde{x} = N_x^* b, \quad (4.30)$$

$$\text{soit } U\tilde{x} = v \text{ avec } \begin{cases} U = N_x^* AN_x \\ v = N_x^* b \end{cases} .$$

La matrice diagonale  $N_U$ , qui joue le rôle de  $S$  dans (4.27), est introduite pour réduire la dynamique des composantes de  $U$  :

$$UN_U^{-1}N_U \tilde{x} = v \quad (4.31)$$

$N_U$  est une matrice diagonale qui permet d'homogénéiser les valeurs de  $U$ . Ses composantes sont déduites des évolutions asymptotiques des produits entre coefficients modaux et vecteurs modaux comme détaillé en annexe F.

## 4.5 Application à l'analyse de structures à symétrie de révolution

Sans perte de généralité, le problème de diffraction est restreint à l'étude de structures ayant une symétrie azimutale de façon à pouvoir être résolu avec un ordinateur standard. En effet, le système à résoudre est alors réduit.

La diffraction du rayonnement d'un dipôle par cinq objets de révolution est ainsi étudiée. Des résultats numériques sont présentés : l'influence sur la résolution du système du maillage et des techniques d'amélioration du conditionnement, les temps et charge de calcul, des cartographies en champ proche et les comparaisons de diagrammes de rayonnement en champ lointain avec ceux des principaux logiciels commerciaux.

### 4.5.1 Description du système réduit

La structure a un axe  $z$  de symétrie et donc une périodicité de  $2\pi$  en  $\varphi$ . Par conséquent, par projection sur l'espace de Fourier, les modes sphériques sont totalement découplés en  $\sigma$  et  $m$ , comme détaillé en annexe C.1.

Ainsi, au lieu d'avoir une seule matrice  $A$  de dimension importante à inverser, nous avons  $2(N_t + 1)$  systèmes plus petits de différentes tailles à résoudre :

$$A_m^\sigma x_m^\sigma = b_m^\sigma, \quad (4.32)$$

où  $\sigma = \{e, o\}$  et  $m = \{0, \dots, N_t\}$ .

En effet, la taille de la plus grande matrice  $A_m^\sigma$  à inverser est  $(N_t + 3)$  fois plus petite que la taille de la matrice  $A$ .

Reprenons les chiffres de l'application numérique effectuée au paragraphe 4.4.2 pour illustrer cette réduction de taille. Ainsi, au lieu d'avoir une seule matrice  $A$  de plus de 31 millions de coefficients à inverser, nous avons 20 matrices  $A_m^\sigma$  de taille au plus égale à 1,6 millions de coefficients.

### 4.5.2 Résultats numériques et discussions

#### 4.5.2.1 Géométrie et caractéristiques des objets diffractants étudiés

Plusieurs objets diffractants sont étudiés. Leurs paramètres caractéristiques sont donnés sur la figure 4.7.

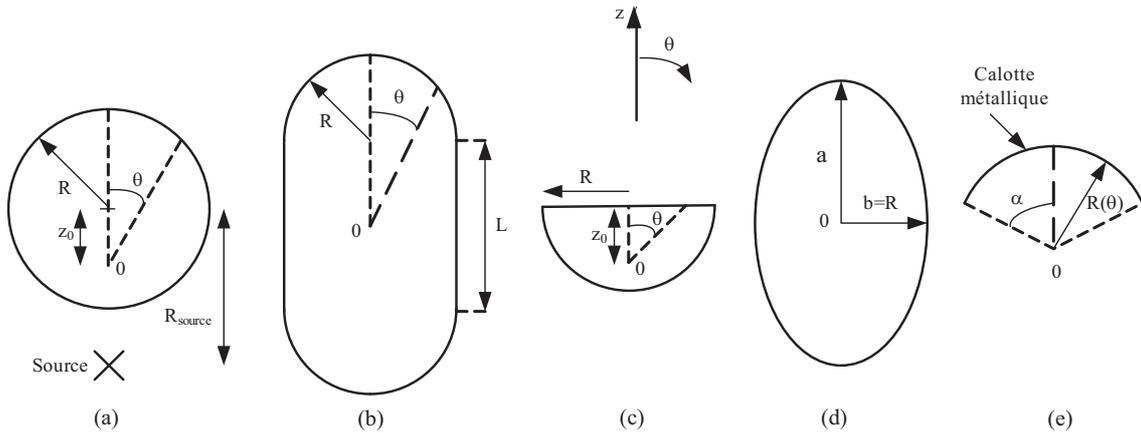


FIG. 4.7 – Géométrie et caractéristiques des objets diffractants étudiés : (a) une sphère de rayon  $R$  décalée de  $z_0$  par rapport à l'origine du repère  $0$ , (b) une "pilule" composée de deux hémisphères de rayon  $R$  mises au bout d'un cylindre de longueur  $L$ , (c) une hémisphère de rayon  $R$  décalée de  $z_0$  par rapport à  $0$ , (d) une superellipse avec  $a$  et  $b$  les grand et petit axes respectivement et (e) une calotte métallique d'équation paramétrique  $r(\theta)$  et de demi largeur angulaire  $\alpha$ .  $R_{source}$  est la distance entre l'origine  $0$  du repère et la position de la source.

Leurs profils sont décrits par une équation paramétrique de la forme :  $r = S(\theta)$ . La normale et les tangentes à la surface sont alors :

$$\vec{n} = \vec{\nabla}S, \vec{t}_1 = \hat{\varphi} \text{ et } \vec{t}_2 = \vec{n} \times \vec{t}_1, \quad (4.33)$$

soit en coordonnées sphériques et sans normalisation :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \end{pmatrix}, \vec{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial S}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Par ailleurs, la distance normalisée  $r_{source}$  entre le centre du repère 0 et la source localisée à distance  $R_{source}$  est :  $r_{source} = R_{source}/R$ , où  $R$  est défini selon les cas sur la figure 4.7.

Les détails de chaque objet diffractant analysé, à savoir :

- les paramètres caractéristiques : le diamètre ( $\phi = 2R$ ), la position de la source  $r_{source}$ , le nombre de couches et la permittivité de chaque couche  $\epsilon_r$ ,
- l'équation paramétrique du profil  $r(\theta)$ ,
- la normale  $\vec{n}$ , de laquelle les tangentes  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  sont facilement déduites via l'équation (4.34),
- les rayons de courbures  $\rho$ ,
- la classe du profil de l'objet.

sont maintenant donnés.

### Sphère décentrée

La sphère a un diamètre  $\phi = 2 \lambda_0$ , son décalage par rapport à l'origine est  $z_0 = \lambda_0/2$ , la position de la source est  $r_{source}=2,5$  et sa permittivité  $\epsilon_r$  est égale à 2,5.

$$r(\theta) = z_0 \cos \theta + \sqrt{R^2 - z_0^2 \sin^2 \theta}, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.35)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} r(\theta) - z_0 \cos \theta \\ z_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\rho = R. \quad (4.37)$$

### "Pilule"

Une "pilule" est composée de deux hémisphères de rayon  $R$  séparés par un cylindre de même rayon et de longueur  $L$ . Deux types de "pilule", pour lesquelles  $r_{source} = 1,47$ , sont étudiés.

L'une est homogène et ses caractéristiques sont :  $L=0,3 \lambda_0$ ,  $R=0,5 \lambda_0$  et  $\epsilon_r = 2,5$ .

L'autre a deux couches : celle de cœur avec  $L=0,75 \lambda_0$ ,  $R=1,25 \lambda_0$  et  $\epsilon_r = 2,5$  et celle extérieure avec  $L=1,5 \lambda_0$ ,  $R=2,5 \lambda_0$  et  $\epsilon_r = 1,5$ , à partir de laquelle  $r_{source}$  est calculé.

Pour les parties hémisphériques de la "pilule", l'équation paramétrique et la normale

sont les mêmes que pour la sphère décentrée. Pour la partie cylindrique, nous avons :

$$r(\theta) = \frac{R}{\sin \theta}, \quad \forall \theta \in \left[ -\tan^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right), \tan^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right) \right], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.38)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \infty & \text{si } \theta \in \left[ -\tan^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right), \tan^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right) \right] \\ R \sin \theta & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.40)$$

$$\text{Profil de classe } \mathcal{C}^2. \quad (4.41)$$

### Hémisphère

L'hémisphère étudiée a un rayon  $R = 0,5 \lambda_0$ , une permittivité  $\epsilon_r$  de 2,5 et une source à la position  $r_{source} = 1,67$ . Pour la partie "plate", nous avons :

$$r(\theta) = \frac{z_0}{\cos \theta}, \quad \forall \theta \in \left[ 0, \tan^{-1}\left(\frac{R}{z_0}\right) \right], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.42)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \infty & \text{si } \theta \in \left[ 0, \tan^{-1}\left(\frac{R}{z_0}\right) \right] \\ R \sin \theta & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.44)$$

$$\text{Profil de classe } \mathcal{C}^0. \quad (4.45)$$

### Superellipse

La superellipse, aussi appelée courbe de Lamé, a une équation généralement donnée sous la forme :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2\nu} + \left(\frac{z}{b}\right)^{2\nu} = 1, \quad (4.46)$$

où  $a, b \neq 0$  et la restriction  $\nu \in \mathbb{N}^*$  est appliquée.

Cette équation est celle : d'une ellipse si  $a \neq b$  et  $\nu = 1$  (devient un cercle quand  $a = b$ ) et d'un rectangle si  $a \neq b$  et  $\nu \rightarrow \infty$  (qui devient un carré quand  $a = b$ ). l'illustration de l'influence du paramètre  $\nu$  est montré sur la figure 4.8.

La superellipse étudiée a un grand axe  $2a = 2R = 2 \lambda_0$  et un petit axe  $2b = 1,6 \lambda_0$ . Sa permittivité  $\epsilon_r$  est égale à 2,5 et la source est placée à  $r_{source} = 1,67$ . L'équation

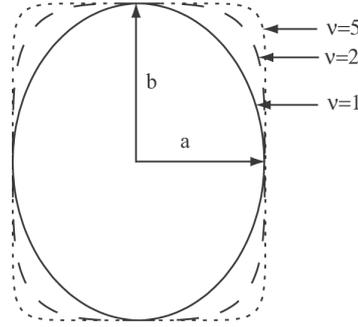


FIG. 4.8 – Superellipses, de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ , tracées pour des valeurs de  $\nu$  égales à 1, 2 et 5.

paramétrique et la normale de cette superellipse sont :

$$r(\theta) = \frac{b}{|\cos \theta|} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{b}{a} \tan \theta\right)^{2\nu}\right]^{\frac{1}{2\nu}}}, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.47)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b \tan \theta}{r \cos \theta} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{b}{a} \tan \theta\right)^{2\nu}\right]^{\frac{1}{2\nu}}} \left[1 - \frac{1 + \cotan^2 \theta}{1 + \left(\frac{a}{b} \cotan \theta\right)^{2\nu}}\right] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\rho(x) = \frac{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^{4\nu-2} + \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2\nu}\right)^{2-\frac{1}{\nu}}\right]^{\frac{3}{2}}}{(2\nu - 1) \frac{b}{a^2} \left(\frac{x}{a}\right)^{2\nu-2}} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}, \quad x \in [0, a], \quad (4.49)$$

$$\text{Profil de classe } \mathcal{C}^\infty. \quad (4.50)$$

### Calotte métallique hémisphérique

La calotte métallique est hémisphérique. Son profil est  $R(\theta) = R = 1 \lambda_0$  et la source est située à  $r_{source}=1,67$ . Cet objet diffractant est discontinu.

#### 4.5.2.2 Considérations sur les techniques de résolution

Pour le cas de la sphère décentrée, la solution exacte est connue par une simple translation, comme montré au paragraphe 4.2.1.1. Il est donc intéressant d'évaluer, sur ce cas, les techniques exposées au paragraphe 4.4 pour la résolution du problème. Ainsi, l'influence sur le conditionnement du système, du maillage et des techniques de réduction de la dynamique des composantes du système est présenté.

Dans la suite, nous notons CN le nombre de conditionnement d'une matrice carré. CN est ici défini comme le rapport entre la valeur propre la plus petite  $\lambda_{min}$  et la plus grande  $\lambda_{max}$  :  $CN = \lambda_{min} / \lambda_{max}$ .

### Maillage

Pour le même nombre de nœuds de maille,  $N_{noeuds} = 625$ , échantillonnant la surface

de la sphère, le pire CN, des matrices  $A_m^\sigma$  est de l'ordre de  $10^{-41}$  pour le maillage PAE et  $10^{-31}$  pour le maillage "igloo". Cela signifie que les équations aux limites correspondant au maillage "igloo" sont plus indépendantes que celles provenant du maillage PAE.

D'ailleurs, pour le maillage PAE, la densité de nœuds de maille augmente en se rapprochant des pôles. Par conséquent, à ces endroits, les conditions aux limites sont plus nombreuses qu'à l'équateur. En revanche, le maillage "igloo" ne privilégie aucun endroit de l'objet diffractant. Le poids des conditions aux limites est donc distribué spatialement de façon "plus uniforme".

Il en résulte que, pour une précision donnée, la représentation du champ électromagnétique en termes de coefficients modaux sphériques nécessite moins de points d'échantillonnage pour le cas du maillage "igloo" que pour celui du maillage PAE.

Illustrons ce propos pour le cas de la sphère décentrée. Pour obtenir des diagrammes de rayonnement en champ lointain similaires,  $N_{noeuds} = 570$  sont au moins nécessaire avec le maillage "igloo" tandis qu'il faut au minimum  $N_{noeuds} = 625$  pour le maillage PAE.

La maillage "igloo" est désormais utilisé. A titre illustratif, le maillage "igloo" appliqué à l'hémisphère, la "pilule" et la superellipse est représenté à la figure 4.9.

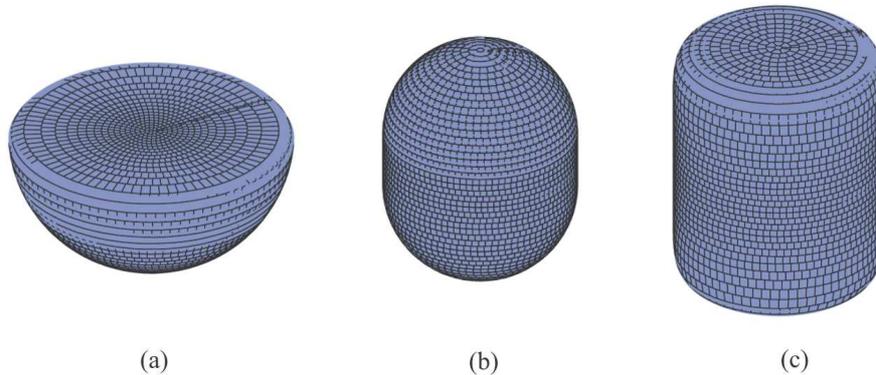


FIG. 4.9 – Maillage "igloo" appliqué à (a) une hémisphère, (b) une "pilule" et (c) une superellipse avec  $\nu = 5$ .

### Techniques de réduction de la dynamique des composantes du système

– Influence de la position du barycentre de l'objet :

Pour réduire la dynamique des valeurs prises par les fonctions de Bessel, il faut faire correspondre le barycentre  $G$  de l'objet diffractant, dont l'expression est donnée équation (4.25), avec l'origine 0 du repère.

Lorsque 0 et  $G$  sont confondus, le système à résoudre est mieux conditionné. En effet, pour le cas de la sphère et de l'hémisphère, le CN est plus proche de 1 quand 0 coïncide avec  $G$ , comme montré sur la figure 4.10.

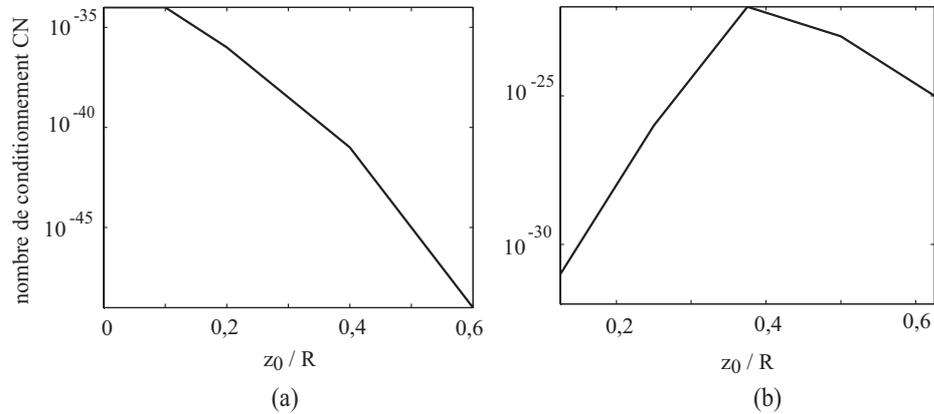


FIG. 4.10 – Influence de la distance normalisée  $z_0/R$  sur le pire nombre de conditionnement CN des matrices  $A_m^\sigma$  pour le cas (a) de la sphère décentrée et (b) de l'hémisphère. Les matrices  $A_m^\sigma$  sont mieux conditionnées lorsque l'origine du repère coïncide avec le barycentre de la structure, soit quand (a)  $z_0/R = 0$  et (b)  $z_0/R = 0,38$ .

– Influence de la "normalisation" des colonnes de  $A$  :

Les matrices  $A_m^\sigma$  des sous systèmes (4.32) ont un nombre de conditionnement CN qui, au pire, est d'environ  $10^{-46}$ . Après la "normalisation" des colonnes de  $A_m^\sigma$  (cf. méthode présentée au paragraphe 4.4.3.2), nous obtenons un CN d'environ  $10^{-30}$ . Cette technique permet d'améliorer de façon non négligeable le conditionnement des matrices.

– Influence de la réduction de la dynamique des composantes de  $A$  et  $x$  :

La méthode, présentée au paragraphe 4.4.3.2, pour réduire la dynamique des composantes de  $A$  et  $x$  s'avère peu efficace pour améliorer le CN. En effet, cette technique ne permet pas une bonne homogénéisation de toutes les composantes de la matrice  $U$  pour plusieurs raisons :

- La structure de la matrice diagonale  $N_U$  permet d'homogénéiser correctement uniquement la diagonale de  $U$ .
- Cette méthode ne permet pas de réduire simultanément la dynamique des composantes de  $A$  et  $x$ . En effet, lors de l'homogénéisation des composantes de  $U$ , équation (4.31), le produit entre la matrice  $N_U$  et  $\tilde{x}$  augmente la dynamique des composantes

de  $\tilde{x}$ .

Par ailleurs, coupler cette technique avec la "normalisation" des colonnes de  $A$  ne permet pas d'obtenir un meilleur conditionnement que lorsque la "normalisation" est appliquée seule.

De ces remarques, il ressort que cette régularisation approchée moyenne est trop imprécise pour être intéressante. Une régularisation exacte point à point est indispensable pour pouvoir inverser le système correctement. Cette méthode sera introduite en perspective dans le paragraphe 4.6.2.

### **Autre technique pour améliorer le conditionnement**

Certaines équations des conditions aux limites sont linéairement dépendantes à cause de l'axe de symétrie de l'objet diffractant. Pour réduire leur nombre, une contribution angulaire aléatoire de distribution uniforme entre  $0^\circ$  et la valeur du pas angulaire, est ajoutée aux positions angulaires des points de discrétisation.

Cette technique permet d'améliorer légèrement le CN et est donc appliquée.

### **Conclusion**

Pour résumer, lors de la résolution des exemples traités ci-dessous, les paramètres suivants sont appliqués :

- le maillage est de type "igloo",
- le barycentre de l'objet diffractant est placé au centre du repère,
- les colonnes de la matrice  $A$  sont "normalisées",
- une contribution angulaire aléatoire est ajoutée aux positions des points de discrétisation.

#### **4.5.2.3 Diagrammes de rayonnement en champ lointain**

Les objets diffractants, décrits au paragraphe 4.5.2.1, sont alimentés par un dipôle électrique radial ou tangentiel. Se limiter à ces deux sources triviales est suffisant. En effet, d'après la linéarité des équations de Maxwell, nous pouvons appliquer le principe de superposition des sources. Ainsi, un dipôle électrique quelconque peut être exprimé comme une combinaison linéaire d'un dipôle électrique tangentiel et d'un dipôle électrique radial. De plus, la contribution du dipôle magnétique se déduit de celle du dipôle électrique par dualité des équations. Enfin, toute source d'étendue limitée peut être représentée par la superposition des contributions de dipôles électromagnétiques comme expliqué équation (3.16).

Les diagrammes de rayonnement de l'association source - objet diffractant sont calculés avec la MMT, CST Microwave Studio<sup>®</sup> et Ansoft HFSS<sup>®</sup>. Ils sont comparés pour chaque configuration sur les figures 4.11 à 4.17. Les résultats obtenus sont discutés ci-dessous.

### **Sphère décentrée**

Sur la figure 4.11, un bon accord est obtenu entre la MMT et la méthode analytique,

ce qui valide le code de calcul présenté. Cependant, de petites différences existent lorsque le dipôle est tangentiel. Cette constat est à rapprocher de l'étude des vitesses de convergence des coefficients modaux. En effet, un dipôle tangentiel a des composantes selon  $\theta$  et/ou  $\varphi$ . Dans ce cas, les coefficients modaux (inconnues à déterminer) convergent plus lentement comme montré équations (1.7) à (1.10).

### "Pilule"

Un excellent accord est obtenu figure 4.12 entre la MMT, CST Microwave Studio® et Ansoft HFSS®. En effet, les diagrammes sont superposés lorsque le dipôle est radial et très proches lorsqu'il est tangentiel. Les vitesses de convergence des coefficients modaux justifient à nouveau ces résultats.

### Hémisphère

Les diagrammes obtenus par la MMT et les logiciels commerciaux sont en bon accord lorsque la source est radiale (figure 4.13(a)). Quand le dipôle est tangentiel, les résultats trouvés par la MMT ne sont pas précis (figure 4.13(b,c)).

Les vitesses de convergence des coefficients modaux n'expliquent pas à eux seul ces mauvais résultats. Ceux-ci sont, en effet, très vraisemblablement dûs au profil de classe  $\mathcal{C}^0$  de l'objet diffractant. Un maillage plus dense au niveau des discontinuités des normales à la surface de l'objet diffractant est nécessaire pour mieux le décrire.

Pour vérifier cette remarque, la superellipse, dont l'équation de la forme est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , est étudiée.

### Superellipse

Lorsque le dipôle est radial, les diagrammes obtenus par la MMT et les logiciels commerciaux sont très proches pour les trois cas (figure 4.14(a), 4.15(a) et 4.16(a)).

En revanche, lorsque le dipôle est tangentiel, la MMT, en bon accord avec les logiciels commerciaux pour  $\nu = 1$  (figure 4.14(b,c)), l'est de moins en moins lorsque  $\nu$  augmente (figure 4.15(b,c) et 4.16(b,c)).

Ainsi, plus la structure analysée a une forme éloignée de celle de la sphère (soit ici plus  $\nu$  augmente), plus les résultats sont sensibles aux paramètres numériques (ordre de troncature et maillage décrivant la surface).

### Calotte métallique hémisphérique

Cette structure est étudiée, afin de vérifier qu'il est bien possible de prendre en compte du métal. Notons qu'il s'agit d'une structure dont la forme est définie par une fonction discontinue.

L'accord entre les logiciels commerciaux et la MMT (figure 4.17) est, ici aussi, meilleur lorsque le dipôle est radial pour les raisons évoquées précédemment (vitesse de convergence et régularité de l'objet diffractant).

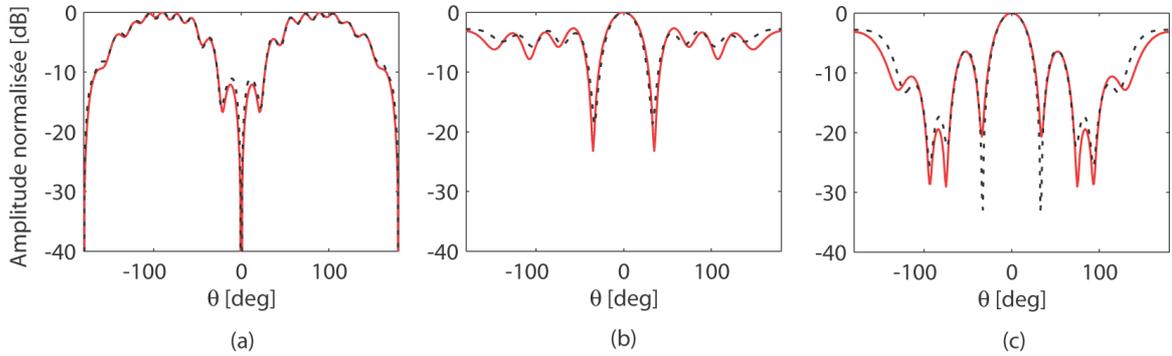


FIG. 4.11 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT et ( $\cdots$ ) la méthode analytique, pour le cas d'une sphère décentrée excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangential dans les plans E et H respectivement.

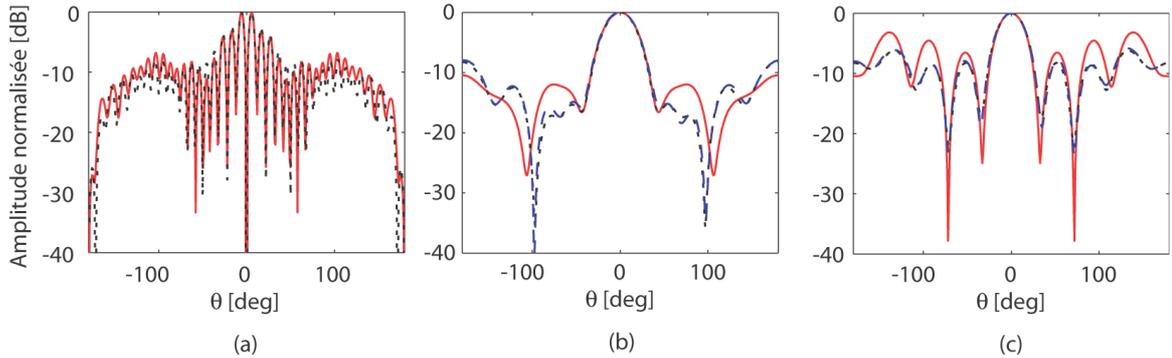


FIG. 4.12 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (— —) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas (a) d'une "pilule" à deux couches excitée par un dipôle radial et (b,c) une "pilule" homogène excitée par un dipôle tangential dans les plans E et H respectivement.

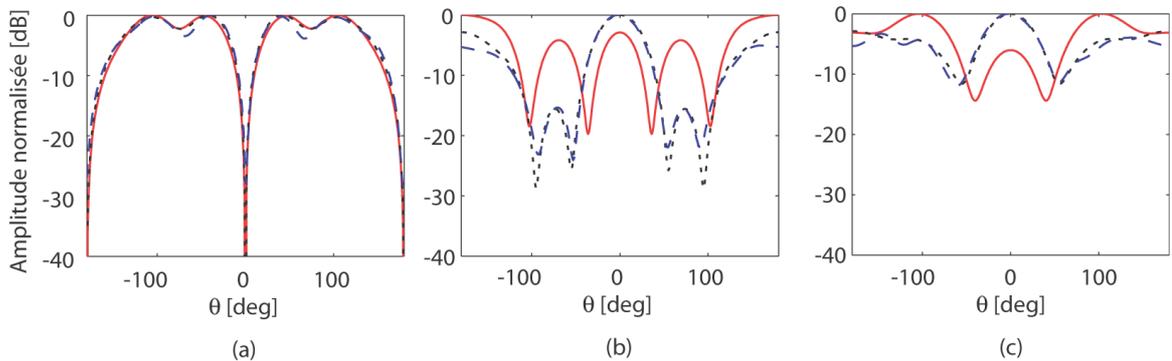


FIG. 4.13 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (— —) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas d'une hémisphère excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangential dans les plans E et H respectivement.

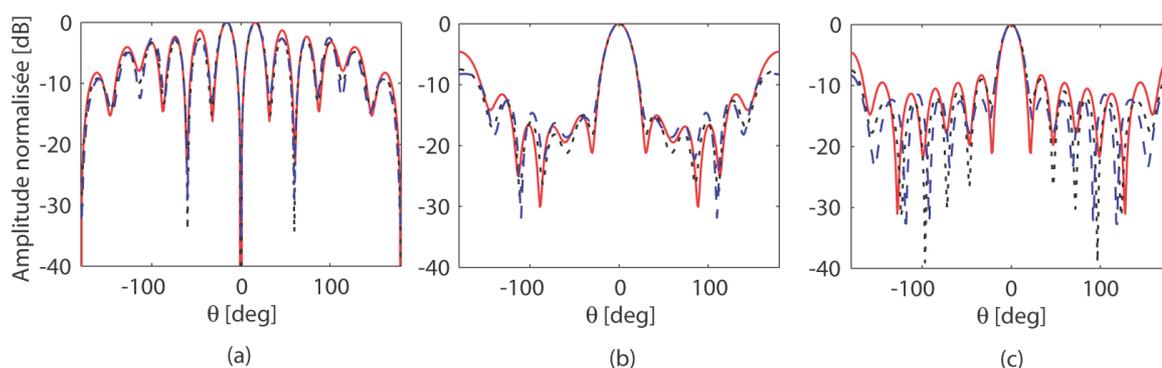


FIG. 4.14 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (---) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas d'une ellipse excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangential dans les plans E et H respectivement.

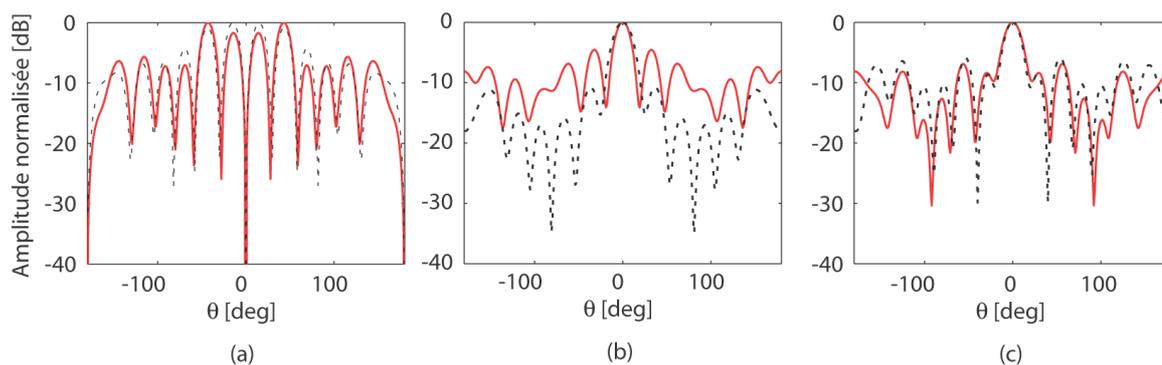


FIG. 4.15 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (---) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas d'une superellipse avec  $\nu = 2$  excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangential dans les plans E et H respectivement.

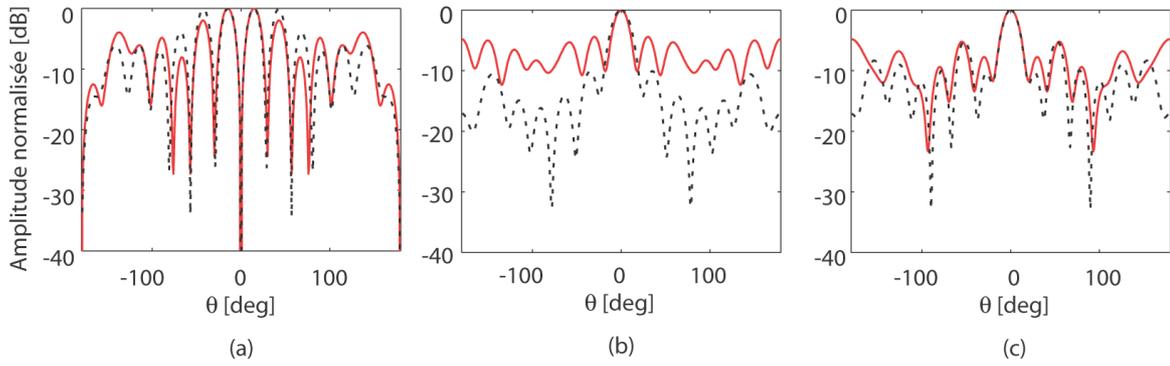


FIG. 4.16 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (---) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas d’une superellipse avec  $\nu = 5$  excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangentiel dans les plans E et H respectivement.

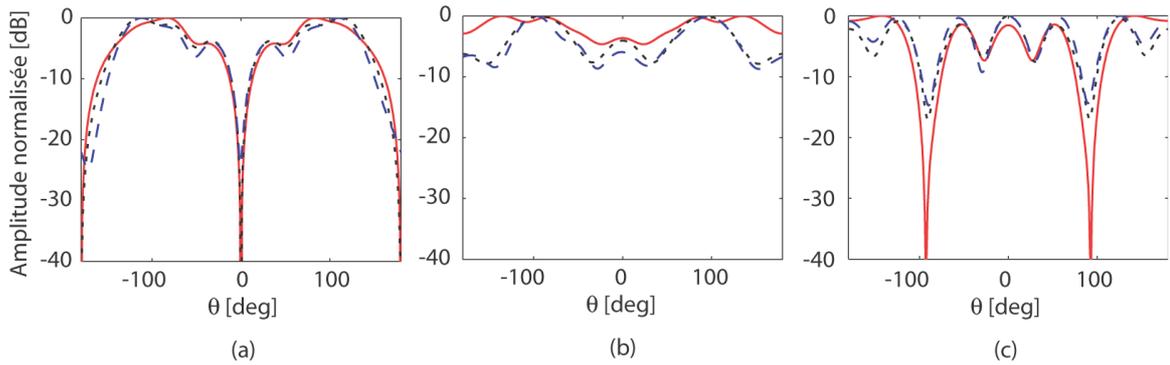


FIG. 4.17 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par (—) la MMT, ( $\cdots$ ) CST Microwave Studio<sup>®</sup> et (---) Ansoft HFSS<sup>®</sup>, pour le cas d’une calotte métallique hémisphérique excitée par (a) un dipôle radial et (b,c) un dipôle tangentiel dans les plans E et H respectivement.

## Conclusion

Les comparaisons des diagrammes de rayonnement ont permis d'évaluer la précision de la MMT pour différentes configurations source-objet diffractant.

Il ressort que la qualité des résultats obtenus par la MMT dépend :

- De la vitesse de convergence des coefficients modaux qui est imposée par les composantes de la source. En effet, une source purement radiale entraîne des coefficients modaux qui convergent plus vite.
- De la classe de la fonction qui décrit l'objet diffractant. Ainsi, pour décrire correctement une structure de forme non "régulière", un maillage plus dense doit être appliqué au niveau des discontinuités des dérivées successives.
- De la forme de l'objet, car plus celui-ci est éloigné de la sphère (i.e. plus la dynamique de ses rayons de courbure est importante), plus les paramètres numériques (ordre de troncature et maillage décrivant la surface) influent sur le résultat.

### 4.5.2.4 Cartographies de champs

Pour montrer les effets de focalisation, des cartographies en champ proche de l'ellipse illuminée par une onde plane sont présentées sur la figure 4.18. La distribution du champ électrique, au voisinage de la lentille dans les plans E et H, est représentée figure 4.18(a). L'énergie de l'onde plane incidente est progressivement concentrée vers la région focale localisée du côté opposé de la lentille.

Le champ électromagnétique sur le grand axe, i.e. l'axe  $z$ , de l'ellipse est tracé sur la figure 4.18(b,c) et comparé à celui obtenu par CST Microwave Studio<sup>®</sup>.

Le bon accord valide la technique proposée.

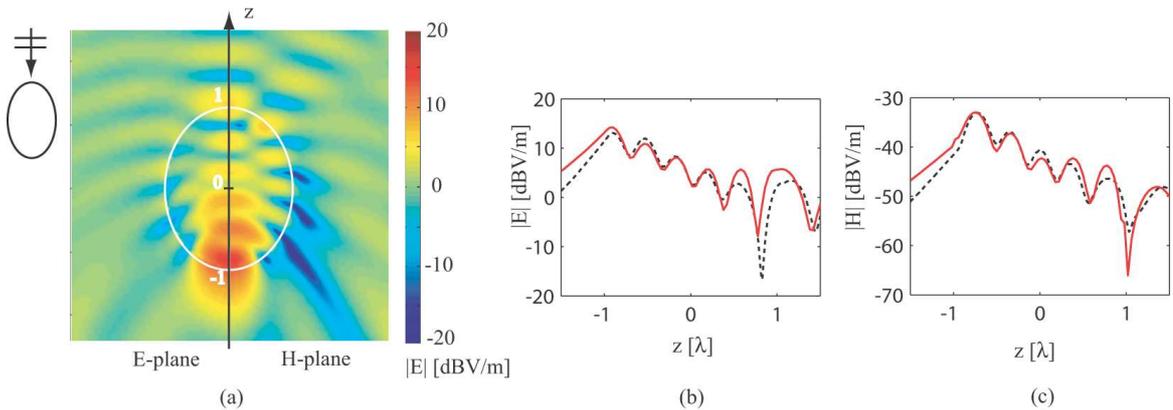


FIG. 4.18 – Analyse de cartographie en champ proche d'une ellipse ( $\epsilon_r=2,5$ , grand axe  $2a = 2 \lambda_0$  et petit axe  $2b=1,6 \lambda_0$ ) illuminée par une onde plane. (a) Cartographie bi-dimensionnelle de l'amplitude du champ électrique total, pour les plans E et H, au voisinage d'une ellipse excitée par une onde plane de 0 dBV/m arrivant de  $+z$ . Champ (b) électrique et (c) magnétique total sur l'axe  $z$  de l'ellipse obtenu par (—) la méthode proposée et (· · ·) CST Microwave Studio<sup>®</sup>.

#### 4.5.2.5 Considérations de temps et charge de calcul

La structure et les notations du paragraphe 3.3.2.4 sont reprises ici.

Les temps de calcul pour analyser les objets diffractants, en utilisant CST Microwave Studio<sup>®</sup>, Ansoft HFSS<sup>®</sup> et notre code scalaire non optimisé, sont étudiés. Pour cela, le rapport des temps de calcul entre les logiciels commerciaux et la MMT,  $r_{CST}$  et  $r_{HFSS}$ , sont reportés au tableau 4.1 pour chaque configuration objet diffractant - source. Les gains en temps de calcul varient de 1,6 à 20,6 selon la structure analysée. Notons qu'avec notre ordinateur, le logiciel Ansoft HFSS<sup>®</sup> n'a pas convergé pour analyser la "pilule" à deux couches ainsi que les superellipses pour lesquelles  $\nu=2$  et 5.

Le nombre de coefficients modaux inconnus pour notre code,  $N_{MMT}$ , le nombre de nœuds de maille pour CST Microwave Studio<sup>®</sup>,  $N_{CST}$ , et le nombre de tétraèdres pour Ansoft HFSS<sup>®</sup>,  $N_{HFSS}$ , pour analyser les mêmes antennes lentilles, sont donnés tableau 4.2, pour donner un ordre de grandeur des charges de calcul.

Le code présenté basé sur la MMT est intéressant, car il permet, pour ces structures ouvertes de révolution, une réduction importante du temps de calcul et de la charge mémoire requise.

TAB. 4.1 – Comparaison de temps de calcul

objet diffractant	dipôle	$r_{CST}$	$r_{HFSS}$
"pilule" homogène	tan.	15,9	4,9
"pilule" à 2 couches	rad.	5,3	$\infty$
hémisphère	tan.	5,6	1,6
hémisphère	rad.	17,9	5,9
ellipse	tan.	16,6	10,3
ellipse	rad.	19,3	9,4
superellipse ( $\nu = 2$ )	tan.	13,2	$\infty$
superellipse ( $\nu = 2$ )	rad.	20,4	$\infty$
superellipse ( $\nu = 5$ )	tan.	15,6	$\infty$
superellipse ( $\nu = 5$ )	rad.	14,2	$\infty$
calotte métallique hémisphérique	tan.	13,2	2,0
calotte métallique hémisphérique	rad.	20,6	2,6

Calculs réalisés sur un 3.40GHz-CPU 2.00GHz-RAM Pentium 4<sup>®</sup>.

tan. : tangentiel.

rad. : radial.

$r_{CST} = t_{CST}/t_{MMT}$ , avec CST Microwave Studio SUITE 2006<sup>®</sup>.

$r_{HFSS} = t_{HFSS}/t_{MMT}$ , avec Ansoft HFSS v.10.1<sup>®</sup>.

TAB. 4.2 – Comparaison de charge de calcul

objet diffractant	dipôle	$N_{MMT}$	$N_{CST}$	$N_{HFSS}$
"pilule" homogène	tan.	616	$4,38 \cdot 10^5$	14514
"pilule" à 2 couches	rad.	8400	$5,55 \cdot 10^6$	<i>NC</i>
hemisphère	tan.	1080	$2,78 \cdot 10^5$	7462
hemisphère	rad.	260	$3,05 \cdot 10^5$	8518
ellipse	tan.	520	$1,21 \cdot 10^6$	33246
ellipse	rad.	1080	$1,12 \cdot 10^6$	31116
superellipse ( $\nu = 2$ )	tan.	3472	$5,61 \cdot 10^6$	<i>NC</i>
superellipse ( $\nu = 2$ )	rad.	1080	$5,62 \cdot 10^6$	<i>NC</i>
superellipse ( $\nu = 5$ )	tan.	2800	$3,76 \cdot 10^6$	<i>NC</i>
superellipse ( $\nu = 5$ )	rad.	2200	$3,77 \cdot 10^6$	<i>NC</i>
calotte métallique hémisphérique	tan.	1080	$2,68 \cdot 10^6$	9824
calotte métallique hémisphérique	rad.	520	$3,32 \cdot 10^6$	9709

$N_{MMT}$  : nombre de coefficients modaux inconnus.

$N_{CST}$  : nombre de nœud de maille.

$N_{HFSS}$  : nombre de tétraèdres.

*NC* : pas de convergence.

## 4.6 Contexte et perspective de la méthode présentée

Après avoir évalué les performances de la MMT, il est intéressant de comparer les caractéristiques de cette méthode à celles trois méthodes numériques classiques (la FDTD, la FEM et la MoM/BEM).

Une perspective permettant d'améliorer l'efficacité de la MMT, la Méthode Analytique de Régularisation (MAR), est ensuite présentée.

### 4.6.1 Comparaison de la méthode présentée avec trois méthodes numériques

Il serait trop ambitieux de tenter de situer la MMT, basée sur les fonctions d'ondes sphériques, par rapport à toutes les méthodes d'analyse électromagnétique existantes. Nous nous limiterons donc à comparer la MMT à trois méthodes principales :

- la méthode des différences finies dans le domaine temporel (notée FDTD pour "Finite Difference Time-Domain") qui est une méthode temporelle,
- la méthode des éléments finis (notée FEM pour "Finite Element Method") qui est une méthode fréquentielle,
- la méthode des moments (notée MoM pour "MOment Method") et plus précisément la méthode des éléments frontières (notée BEM pour "Boundary Element Method") qui sont des méthodes fréquentielles.

Nous précisons que les comparaisons effectuées ci-dessous sont très loin d'être exhaustives. De plus, elles considèrent les méthodes (FDTD, FEM et MoM / BEM) dans leur formulation de base et ne tiennent pas compte des nombreuses versions améliorées existantes.

La MMT est une méthode fréquentielle. Comme la BEM, elle ne nécessite pas le maillage de tout l'espace de solution, mais seulement des interfaces. Ainsi, ces deux méthodes ont un coût de calcul relativement limité par rapport à la FDTD et la FEM. De plus, la condition d'espace libre est contenue dans la formulation de la MMT et de la BEM, ce qui n'est pas le cas pour la FDTD et la FEM. Ces deux méthodes nécessitent, en effet, l'introduction de conditions absorbantes pour simuler la troncature spatiale.

Il ressort, de ces simples comparaisons, que la méthode la plus proche de la MMT est la MoM et plus précisément la BEM.

L'avantage majeur de la MMT par rapport à la BEM est l'utilisation de fonctions de base globales pour décrire le champ électromagnétique. En effet, la MMT a pour inconnues les coefficients modaux qui sont identiques au sein d'un milieu Linéaire Homogène (LH). De plus, la taille de la matrice à inverser, qui est généralement creuse, est uniquement liée à l'ordre de troncature des séries. La finesse de la discrétisation des interfaces étudiées n'influe donc pas sur la taille des matrices à inverser.

La BEM nécessite aussi uniquement l'échantillonnage des interfaces. Cependant, les fonctions de base sur ces surfaces sont locales. Toutes ces fonctions contribuent donc à exprimer le champ dans un milieu LH. La matrice à inverser est alors remplie et sa taille est directement liée à la discrétisation de la surface analysée.

Le principal inconvénient de la méthode présentée est évidemment sa limitation quant à la forme des structures qu'elle peut analyser. Cependant, il faut noter que le développement du code est loin d'être optimal (scalaire et non optimisé). Ainsi, il ne permet pas, pour l'instant, d'étudier des structures qui ne sont pas de révolution. Un travail important reste à faire au niveau du mailleur et de la parallélisation du code pour le rendre plus efficace. Ces tâches relèvent plutôt du génie informatique, que de l'électromagnétisme.

Par ailleurs, l'analyse des structures de révolution, dont la forme présente des discontinuités ou une dynamique des rayons de courbure importante, pose un certain nombre de problèmes numériques (cf. paragraphe 4.5.2.2). Le problème majeur est l'inversion de systèmes linéaires mal conditionnés. Pour y remédier, une solution potentielle est présentée dans la partie qui suit.

#### 4.6.2 Perspective : la méthode analytique de régularisation

Pour pouvoir analyser, avec la MMT, une plus grande variété de structures en terme de forme, il est indispensable d'améliorer la résolution du système linéaire. Ainsi,

il semble intéressant d'appliquer la Méthode Analytique de Régularisation (MAR) à notre problème. Au lieu de réaliser une régularisation approchée moyenne comme décrite au paragraphe 4.4.3.2, son principe est d'effectuer une régularisation point à point, i.e. à chaque nœud du maillage.

Le principe de la MAR est rappelé et l'application de cette méthode à notre problème est discutée.

#### 4.6.2.1 Principe

La MAR est décrite en détail dans [3, 4, 5]. Elle consiste à déterminer le préconditionneur idéal du système  $Ax = b$ . En effet, dans la plupart des cas, une inversion directe de  $A$  est impossible. Même si une inversion numérique est ici possible, rien ne peut en garantir la convergence.

Pour remédier à cela,  $A$  est scindé en deux parties :  $A = A_1 + A_2$ , avec  $A_1^{-1}$  un opérateur connu. De cette manière, le problème de première espèce se trouve converti en un problème de seconde espèce :  $x + Px = q$ , où  $P = A_1^{-1}A_2$  et  $q = A_1^{-1}b$ . De plus, en imposant à  $A_1$  de posséder la principale singularité de l'opérateur  $A$ , l'équation devient du type de Fredholm de seconde espèce, c'est à dire que la matrice  $P$  est compacte sur un certain espace  $H$ , ce qui signifie que sa norme est bornée :  $\|P\|_H < \infty$ . Lorsque le vecteur  $q$  est compact sur le même espace, les théorèmes de Fredholm assurent qu'il existe une unique solution de la forme  $x = (I + P)^{-1}q$ , où  $I$  est l'opérateur identité.

De plus, ces théorèmes garantissent une convergence numérique de la solution. En effet, la mise en œuvre numérique de ces équations nécessite une troncature à un ordre  $N$  :  $x^N + P^N x^N = q^N$ , où l'opérateur matriciel  $P^N$  est tel que son noyau contienne tous les modes supérieurs à  $N$ .

Dans ces conditions, l'erreur relative associée à la troncature  $e(N)$  se comporte comme suit :

$$e(N) = \frac{\|x - x^N\|_H}{\|x\|_H} \leq \|(I + P)^{-1}\|_H \|P - P^N\|_H. \quad (4.51)$$

Comme l'opérateur  $(I + P)^{-1}$  est borné et  $P^N \rightarrow P$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ , il vient :  $e(N) \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Plus l'ordre de troncature est grand et plus la précision se rapproche de la précision machine.

#### 4.6.2.2 Application

Etant donné la structure de la matrice  $C$  (cf. annexe E), il est possible de la décomposer en produit de matrices décrivant d'une partie l'évolution radiale et de l'autre l'évolution angulaire. Les fonctions angulaires étant bornées, elles ne sont pas problématiques dans la résolution du système. En revanche, les composantes de la matrice à dépendance radiale ont, à cause des fonctions de Bessel, une dynamique qui augmente de façon exponentielle avec l'ordre de troncature des séries.

Il est alors possible de faire une régularisation point à point, afin de déduire le pré-conditionneur idéal nécessaire pour assurer la stabilité numérique de l'inversion du système.

Une fois la MAR appliquée à notre problème, les perspectives sont très prometteuses. Il sera, en effet, possible de modéliser de façon semi-analytique, l'interaction entre une structure stratifiée de forme arbitraire et une source quelconque.

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'extension d'une technique analytique généralement limitée à l'analyse de structures sphériques stratifiées. La MMT basée sur les fonctions d'ondes sphériques a, en effet, été décrite pour traiter la diffraction d'une source quelconque par des objets diffractants de forme non nécessairement sphérique.

Chaque étape de la formulation et la mise en équation du problème (la décomposition du champ en termes de modes sphériques au sein d'un volume de forme arbitraire, l'application des conditions aux limites et la description du système linéaire) a d'abord été détaillée.

Ensuite, le maillage des interfaces de l'objet diffractant, les méthodes d'inversion du système linéaire et des techniques pour améliorer son conditionnement sont présentées et appliquées à l'analyse d'objets diffractants de forme arbitraire.

Cinq objets diffractants de révolution illuminés par un dipôle électrique radial ou tangentiel sont alors étudiés. Des résultats numériques sont montrés pour discuter des techniques de résolution du problème et valider la méthode proposée.

Par ailleurs, pour les structures ouvertes de révolution considérées, la MMT est plus rapide que les principaux logiciels commerciaux. De plus, cette méthode requiert peu de ressource mémoire lorsque l'objet analysé est de révolution. Enfin, l'avantage majeur de la méthode présentée est que la taille des matrices à inverser ne dépend pas de la finesse de la discrétisation des surfaces analysées.

Cependant, pour certaines configurations source - objet diffractant, les résultats obtenus ne sont pas précis. C'est le cas, lorsque, de façon générale, la forme de l'objet est "trop éloignée" de la sphère (dynamique des rayons de courbure importante). En effet, le système linéaire à résoudre est alors très mal conditionné malgré les techniques employées pour l'améliorer.

Dès lors, il apparaît indispensable de trouver une méthode de résolution du système linéaire qui soit plus robuste. Pour cela, il semble intéressant d'appliquer la MAR à ce type de problème afin de garantir la convergence numérique de l'inversion du système. Par ailleurs, il apparaît intéressant d'optimiser le code développé ie. de le vectoriser et le paralléliser. Ainsi des structures de forme arbitraire devrait pouvoir être traité avec un ordinateur standard. De plus, il apparaît indispensable d'améliorer le maillage afin de mieux décrire les discontinuités des objets étudiés.

Une fois mise en œuvre, ces améliorations devrait permettre la modélisation semi-

analytique de l'interaction entre une structure stratifiée de nature quelconque (diélectrique, magnétique et/ou métallique) de forme arbitraire et une source quelconque.



# Bibliographie

- [1] D. Sarkar, "Vector basis function solution of Maxwell's equations," Thèse de Doctorat, Rice University, Houston, USA, 1996.
- [2] D. Sarkar, N.J. Halas, "General vector basis function solution of Maxwell's equations," *Physical review E*, vol. 56, no. 1, pp. 1102-1112, Juil. 1997.
- [3] A.I. Nosich, "Method of Analytical Regularization in wave-scattering and eigenvalue problems : foundations and review of solutions", *IEEE Antennas and Propag. Magazine*, vol. 42, no. 3, pp. 34-49, 1999.
- [4] S. Rondineau, A.I. Nosich, J.-P. Daniel, M. Himdi and S.S. Vinogradov, " MAR analysis of a spherical-circular printed antenna with finite ground excited by an axially symmetric probe," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 5, pp. 1270-1280, May 2004.
- [5] S. Rondineau, "Modélisation de lentilles sphériques à gradient d'indice et sources conformes associées," Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, 13 Déc. 2002.
- [6] C.H. Wilcox, "An Expansion theorem for Electromagnetic Fields," *Comm. on pure and applied mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 115-134, Mai. 1956.
- [7] G. Dahlquist, A. Björk, N. Anderson, *Numerical methods*, Englewood cliffs, New Jersey, Prentice-Hall series in automatic computation, 1974, chapitre 5.
- [8] G. Godi, "Conception et optimisation d'antennes lentilles multicouches et de dômes diélectriques, applications en ondes millimétriques," Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, Nov. 2006.



# Chapitre 5

## Application : focalisation, dépointage et reconfigurabilité

### Sommaire

---

<b>5.1 Etude des performances des antennes lentilles HMFE en focalisation</b>	<b>159</b>
5.1.1 Influence du nombre de coquilles	160
5.1.1.1 Sur la directivité et le rendement d'ouverture	160
5.1.1.2 Sur l'adaptation	161
5.1.2 Influence du diamètre	162
5.1.3 Influence des gaps d'air	165
5.1.4 Influence de la position de la source	167
5.1.4.1 Etude de la focalisation des lentilles HMFE	168
5.1.4.2 Position optimale de la source	170
5.1.4.3 Perspectives : l'optimisation de la source	172
5.1.5 Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W	173
5.1.5.1 Lentille HMFE à 3 coquilles	173
5.1.5.2 Lentille HMFE optimisée à 9 coquilles	176
5.1.5.3 Synthèse des résultats	178
5.1.6 Conclusion	179
<b>5.2 Etude des performances des antennes lentilles HMFE en dépointage</b>	<b>180</b>
5.2.1 Introduction sur le dépointage	180
5.2.2 Analyse en dépointage de l'antenne lentille HMFE	181
5.2.2.1 Configuration de l'antenne lentille et méthode d'analyse	181
5.2.2.2 Influence du type de déplacement de la source autour de la lentille	182
5.2.2.3 Influence du nombre de coquilles de la lentille	185
5.2.3 Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W	186

5.2.3.1	Lentille HMFE à 3 coquilles . . . . .	186
5.2.3.2	Lentille HMFE optimisée à 9 coquilles . . . . .	187
5.2.3.3	Synthèse . . . . .	188
5.2.4	Conclusion . . . . .	189
<b>5.3</b>	<b>Présentation d'une antenne lentille HMFE reconfigurable</b>	<b>190</b>
5.3.1	Présentation et principe de fonctionnement du système antennaire . . . . .	190
5.3.2	Validation expérimentale en bande Ka . . . . .	193
5.3.2.1	Présentation du prototype . . . . .	193
5.3.2.2	Résultats de simulations et de mesures . . . . .	194
5.3.3	Conclusion et perspectives . . . . .	197
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>198</b>

---

Dans ce chapitre, de nombreuses études paramétriques sont effectuées pour quantifier les performances électromagnétiques, jusqu'alors non reportées dans la littérature, des antennes lentilles HMFE. Pour cela, le code de calcul, présenté au chapitre 3, est utilisé. Toutefois, certaines configurations nécessitent l'emploi du logiciel CST Microwave Studio®.

Par ailleurs, le choix de la fréquence 77 GHz (pour les mesures notamment) a été fixé par une application potentielle : le radar d'aide à la conduite. Cependant, le but est ici de présenter une étude générale en bande W non restreinte à cette application.

Tout d'abord, les performances en focalisation des antennes lentilles HMFE sont analysées et comparées à celles des lentilles de Luneburg. Dans ce cas, la lentille HMFE est associée à une source axée. L'influence des paramètres physiques de la lentille (nombre de coquilles, diamètre de la lentille, gaps d'air) et de la position de la source est étudiée. Les mesures de deux prototypes d'antennes lentilles HMFE en bande W sont présentées.

Ensuite, les capacités en dépointage des lentilles HMFE sont considérées. La lentille est alors associée à une source désaxée. L'influence du type de déplacement de la source et du nombre de coquilles de la lentille est reportée. Des validations expérimentales sont montrées.

Enfin, la lentille HMFE est associée à un réseau de sources actives. Par une simple commutation des sources, le diagramme de rayonnement de l'antenne lentille peut être sectoriel, directif ou sectoriel dépointé. La mesure en bande Ka d'un prototype valide le principe de reconfigurabilité du système antenne.

## 5.1 Etude des performances des antennes lentilles HMFE en focalisation

Dans cette partie, les performances en focalisation des antennes lentilles HMFE sont quantifiées et comparées à celles des lentilles de Luneburg. Dans ce cas, la lentille HMFE est illuminée par une source axée.

L'influence, sur la directivité et le rendement d'ouverture notamment, des paramètres physiques de la lentille (nombre de coquilles et diamètre), des gaps d'air et de la position de la source est étudiée. Enfin, les résultats de mesures en bande W de lentilles HMFE alimentées par un guide d'onde ouvert sont reportés.

Pour les études présentées dans cette partie, les paramètres des lentilles à  $N$  coquilles sont choisis, pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , comme suit :

- $r_i = i/N$ , les coquilles ont la même épaisseur,
- $\epsilon_i = 4/(1 + ((2i - 1)/(2N))^2)^2$ , pour les permittivités des lentilles HMFE,
- $\epsilon_i = 2 - (2i - 1)/(2N)$ , pour les permittivités des lentilles de Luneburg.

Un tel choix est fait afin de faciliter la mise en œuvre dans le code de calcul. Par ailleurs, le rendement d'ouverture, noté  $\eta_{ap}$ , est égal à :

$$\eta_{ap} = \frac{D}{D_{unif}}, \quad (5.1)$$

où  $D$  est la directivité maximale de l'antenne, et  $D_{unif} = ((2\pi R)/\lambda)^2$  est la directivité théorique d'une ouverture circulaire uniforme de même diamètre que la lentille [1].

### 5.1.1 Influence du nombre de coquilles

#### 5.1.1.1 Sur la directivité et le rendement d'ouverture

De façon générale, à diamètre fixé, plus le nombre de coquilles d'une lentille inhomogène stratifiée augmente, plus la loi continue idéale est bien approchée. Par conséquent, les performances de l'antenne lentille se rapprochent des performances théoriques. Pour vérifier cela, nous considérons des antennes lentilles HMFE et de Luneburg de diamètre  $10 \lambda_0$  excitées par un guide d'onde ouvert fonctionnant à 77 GHz. Les résultats sont obtenus par la "Mode Matching Technique" (MMT) présentée au chapitre 3. L'influence du nombre de coquilles des lentilles sur la directivité et le rendement d'ouverture des antennes lentilles est reportée figure 5.1.

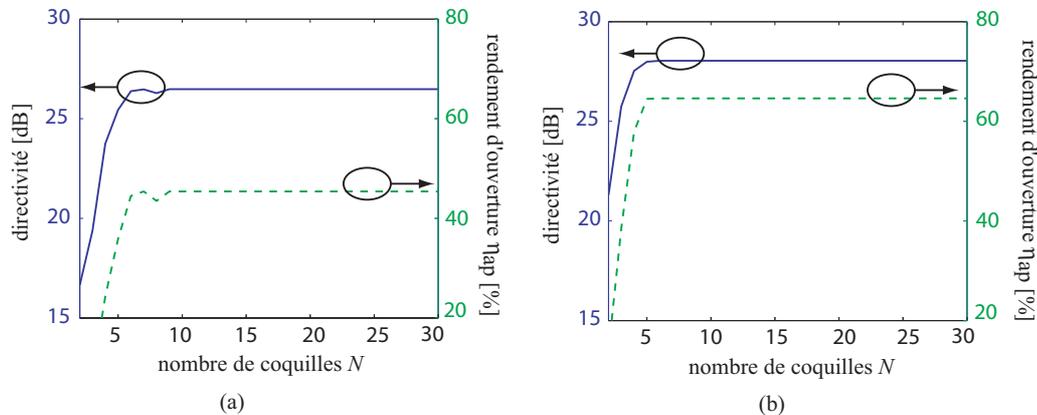


FIG. 5.1 – Influence du nombre de coquilles sur la directivité et le rendement d'ouverture  $\eta_{ap}$  d'une lentille (a) HMFE et (b) Luneburg de diamètre  $10 \lambda_0$  illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert.

Il ressort que la directivité et le rendement d'ouverture de l'antenne lentille n'augmentent plus, lorsque le nombre de coquilles dépasse 6 pour la lentille HMFE et 5 pour la lentille de Luneburg. Ce constat est très intéressant d'un point de vue pratique, car il montre que réaliser des lentilles avec un nombre très important de coquilles :

- n'améliore pas forcément les performances de l'antenne lentille,
- rend la fabrication plus difficile,

- favorise l'apparition de gaps d'air qui dégradent les performances des antennes lentilles comme nous le verrons au paragraphe 5.1.3.

Par ailleurs, cela signifie qu'une antenne lentille de diamètre donné a un seuil en directivité.

Enfin, à nombre de coquilles égal et pour un même diamètre ( $10 \lambda_0$ ), les lentilles de Luneburg présentent un rendement de surface supérieur d'environ 20 % par rapport aux lentilles HMFE (figure 5.1).

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain, pour des lentilles HMFE et de Luneburg à 5, 10 et 20 coquilles de diamètre  $20 \lambda_0$  sont tracés figure 5.2. Au fur et à mesure que le nombre de coquilles diminue, le gradient d'indice est moins bien approché. Cela se traduit sur les diagrammes de rayonnement par une remontée des lobes secondaires. Ce constat est particulièrement visible pour les antennes lentilles HMFE. En effet, rappelons que la permittivité d'une lentille HMFE varie de 4 à 1 et seulement de 2 à 1 pour une lentille de Luneburg. Avec un même nombre de coquilles, le gradient d'indice de la lentille HMFE est donc moins bien approché que celui de Luneburg.

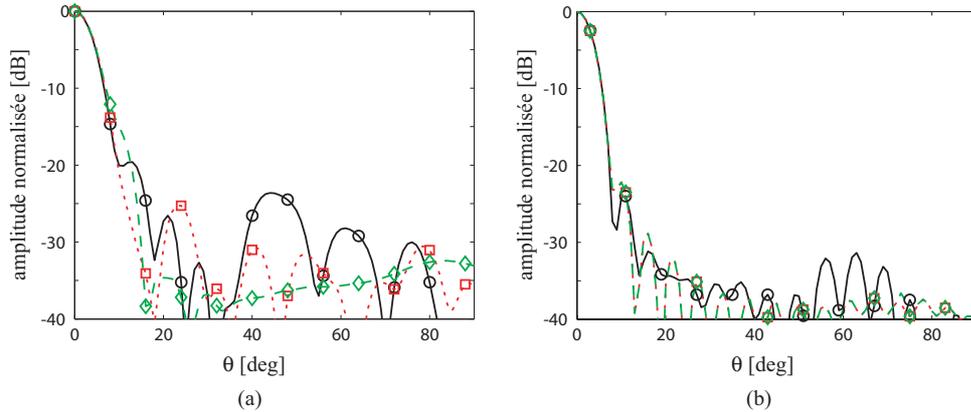


FIG. 5.2 – Influence du nombre de coquilles (5 (○), 10 (□) et 20 (◇)) sur le diagramme de rayonnement en champ lointain dans le plan E pour une lentille (a) HMFE et (b) Luneburg de diamètre  $20 \lambda_0$  illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert.

### 5.1.1.2 Sur l'adaptation

L'influence du nombre de coquilles d'une lentille HMFE sur le coefficient de réflexion,  $S_{11}$ , d'une antenne imprimée (adaptée à 50 GHz) et d'un guide d'onde WR10 ouvert (fonctionnant dans la bande 75 - 110 GHz) est reportée figure 5.3. Les simulations sont effectuées avec CST Microwave Studio<sup>®</sup>, car la MMT ne permet pas le calcul de l'adaptation de la source.

Les résultats figure 5.3 montrent que la présence de la lentille ne perturbe presque pas l'adaptation de la source. De plus, l'influence du nombre de coquilles n'est pas

vraiment significative. En effet, les coquilles composant la lentille agissent comme des couches d'adaptation. Ainsi, plus il y a de coquilles et plus la transition entre l'air et le cœur de la lentille est douce, ce qui réduit les réflexions sur la source.

Les remarques concernant l'adaptation, faites pour les lentilles HMFE, sont a fortiori valables pour les lentilles de Luneburg. En effet, la variation de permittivité au sein des lentilles de Luneburg est plus faible que celle au sein des lentilles HMFE. Ainsi, la transition entre l'air et le cœur de la lentille de Luneburg est plus douce que pour la lentille HMFE.

Ainsi, pour les antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice HMFE et de Luneburg, la conception de la source peut être effectuée indépendamment de la lentille. Il est donc pertinent d'optimiser les paramètres de lentille indépendamment de la source, comme effectué au chapitre 2. Par ailleurs, étant donné le comportement très large bande de la lentille, il faut noter que la bande passante de l'antenne lentille est limitée par celle de la source.

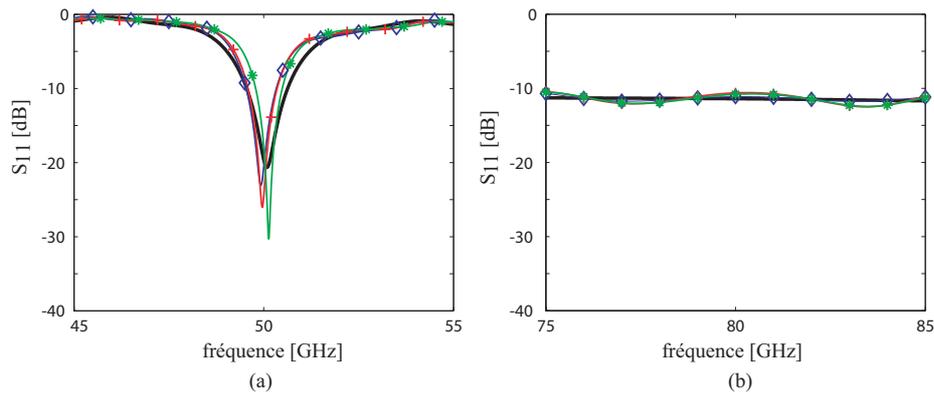


FIG. 5.3 – Influence du nombre de coquilles d'une lentille HMFE, 3 ( $\diamond$ ), 5 (+) et 10(\*), sur le  $S_{11}$  de l'antenne [(a) une antenne imprimée alimentée par fente et (b) un guide d'onde WR10 ouvert]. (–) est le  $S_{11}$  de la source seule.

### 5.1.2 Influence du diamètre

Les résultats présentés dans cette partie (cas idéal et réel) sont obtenus en appliquant la MMT.

#### Cas idéal

L'influence du diamètre  $\Phi$  de la lentille sur la directivité de l'antenne lentille est étudiée dans le cas idéal suivant : une lentille idéale (i.e. une lentille dont le gradient d'indice est continu) excitée par une source isotrope rayonnant dans le demi espace contenant la lentille.

Pour être le plus proche possible de cette configuration, une lentille très fortement discrétisée (100 coquilles) illuminée par une source complexe de Huygens placée à la surface de la lentille est considérée, comme illustré figure 5.4(a).

Cette source complexe de Huygens, dont le principe est expliqué au paragraphe 3.2.3.2, est placée à la surface de la lentille à la position complexe :  $\vec{r} = (1+0,05j)\hat{r}$ . Son diagramme de rayonnement, qui est de révolution, est montré figure 5.4(b).

Notons que cette source n'a pas un rayonnement parfaitement isotrope dans un demi plan, car son angle d'ouverture à mi-puissance est égal à  $50^\circ$ . Cependant, elle présente un bon compromis entre un faible rayonnement arrière et un rayonnement avant le plus uniforme possible.

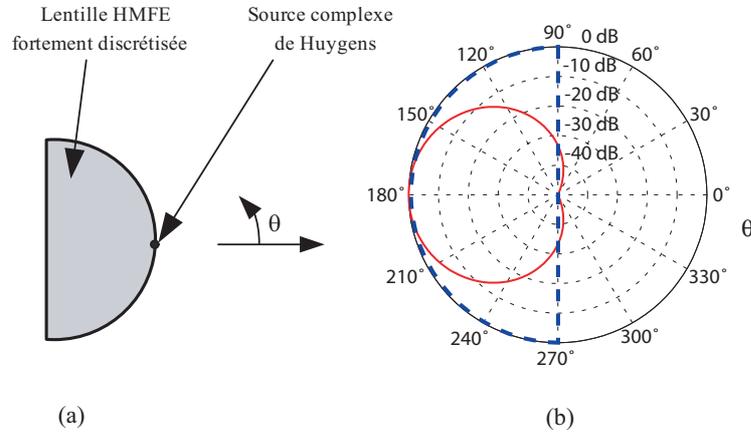


FIG. 5.4 – (a) Schéma de l'association source de Huygens - lentille HMFE. (b) (—) Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens placée à la position  $\vec{r} = (1+0,05j)\hat{r}$  et (---) diagramme de rayonnement de la source isotrope rayonnant dans un demi espace.

L'influence du diamètre sur la directivité des antennes lentilles est reporté sur la figure 5.5. Les courbes obtenues sont approchées par une loi  $D_{approx}$  du type :

$$D_{approx} = \left( \frac{2\pi r_{eff}^2}{\lambda} \right), \quad (5.2)$$

où  $r_{eff} = \alpha \frac{\Phi}{2}$  est le rayon effectif rayonnant de la lentille.

Nous obtenons  $\alpha=0,75$  pour la lentille HMFE et  $\alpha=0,95$  pour la lentille de Luneburg.

Ces lois permettent de donner un ordre de grandeur de la directivité des antennes lentilles idéales en fonction de leur diamètre. Les lois d'approximations de la directivité semblent peu précises pour des diamètres de lentilles supérieurs à  $20 \lambda_0$ . En effet, pour des diamètres de lentille importants, la source n'illumine pas uniformément la lentille. Ainsi, la directivité de l'antenne lentille obtenue par MMT est sous estimée.

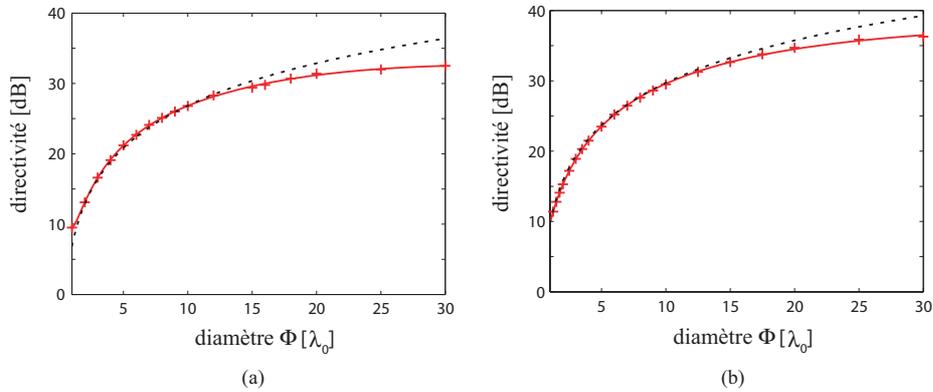


FIG. 5.5 – Directivité de lentilles idéales [(a) HMFE et (b) Luneburg] illuminées par une source complexe de Huygens en fonction du diamètre des lentilles. Ces directivités sont calculés par (+) la MMT et ( $\cdots$ ) la loi d'approximation  $D_{approx}$ .

### Cas réel

La directivité et le rendement d'ouverture pour des lentilles HMFE et de Luneburg, de diamètre variant de 2 à  $30 \lambda_0$ , alimentée par un guide d'onde WR10 ouvert sont reportés figure 5.6. Comme le diamètre de la lentille est directement lié à la longueur électrique, cette étude montre également l'influence de la fréquence sur les performances des lentilles.

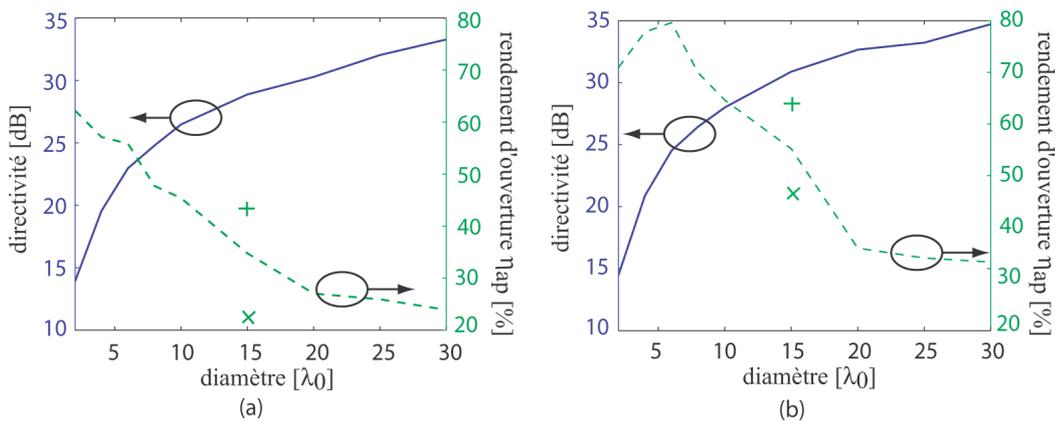


FIG. 5.6 – Influence du diamètre des lentilles (a) HMFE et (b) Luneburg à 10 coquilles illuminées par un guide d'onde WR10 ouvert sur la directivité et le rendement d'ouverture  $\eta_{ap}$  avec, pour un diamètre de  $15 \lambda_0$ , le rendement d'ouverture de lentilles à 5 ( $\times$ ) et 20 (+) coquilles.

Quand le diamètre de la lentille augmente devant la longueur d'onde, soit quand la fréquence de travail est plus élevée, la directivité de l'antenne lentille augmente. Parallèlement, l'ouverture rayonnante augmente ce qui entraîne une diminution du rendement d'ouverture. Pour retarder ce phénomène, il faut augmenter le nombre de coquilles. Ainsi, pour des lentilles de diamètre  $15 \lambda_0$ , le rendement d'ouverture est significativement augmenté si l'on considère des lentilles à 20 coquilles au lieu de 5 ou 10.

Pour des lentilles à 10 coquilles et à diamètre égal, les lentilles de Luneburg présentent une directivité et un rendement d'ouverture supérieurs d'environ 1,5 dB et 20% respectivement par rapport aux lentilles HMFE.

Cependant, à diamètre égal, le volume de diélectrique de la lentille sphérique de Luneburg est deux fois plus important que celui de la lentille hémisphérique HMFE. La directivité de ces antennes lentilles est comparée, à volume de diélectrique égal sur la figure 5.7 pour une configuration réelle et en utilisant la loi d'approximation. Il ressort que les performances en directivité de ces antennes lentilles sont alors très proches.

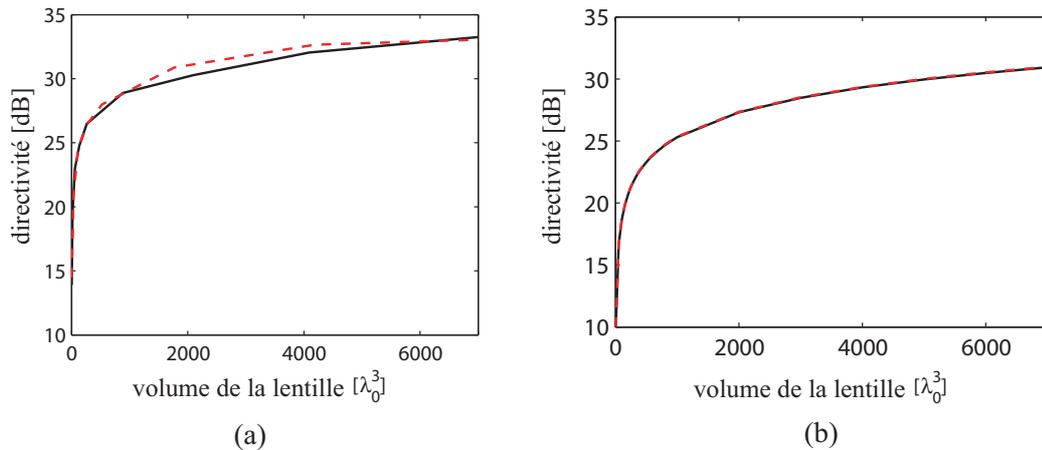


FIG. 5.7 – Directivité d'antennes lentilles (—) HMFE et (— —) de Luneburg en fonction du volume de diélectrique. (a) Ces lentilles ont 10 coquilles et sont illuminées par un guide d'onde WR10 ouvert et (b) la loi d'approximation  $D_{approx}$  est utilisée.

### 5.1.3 Influence des gaps d'air

Les effets des gaps d'air sur les performances des lentilles de Luneburg ont déjà été largement étudiés par [2, 3, 4], comme vu au chapitre 1. L'objectif est ici de regarder leur influence sur les performances des lentilles HMFE, mais aussi de Luneburg afin de faire la comparaison la plus exacte possible.

Pour cela, nous considérons des lentilles de diamètre  $10 \lambda_0$  excitées par un guide d'onde WR10 ouvert. La directivité et le rendement d'ouverture en fonction de l'épaisseur

des gaps d'air sont reportés figure 5.8. Sur cette figure, les gaps d'air, présents entre chaque coquille, sont considérés de même épaisseur et représentés en fraction de longueur d'onde, ainsi qu'en millimètres car cela est plus parlant d'un point de vue fabrication.

L'effet des gaps d'air sur ces deux types de lentilles est logiquement le même : plus leur épaisseur augmente, plus la directivité et le rendement d'ouverture diminue. En outre, plus le nombre de coquilles est important, plus les gaps d'air sont nombreux et donc plus la dégradation des performances est grande.

Ainsi, si la lentille (HMFE ou Luneburg) présente des gaps d'air supérieurs à 0,2 mm, les performances des antennes lentilles à 77 GHz sont meilleures avec 5 et 10 coquilles qu'avec 20, ce qui n'est pas le cas en l'absence de gaps d'air.

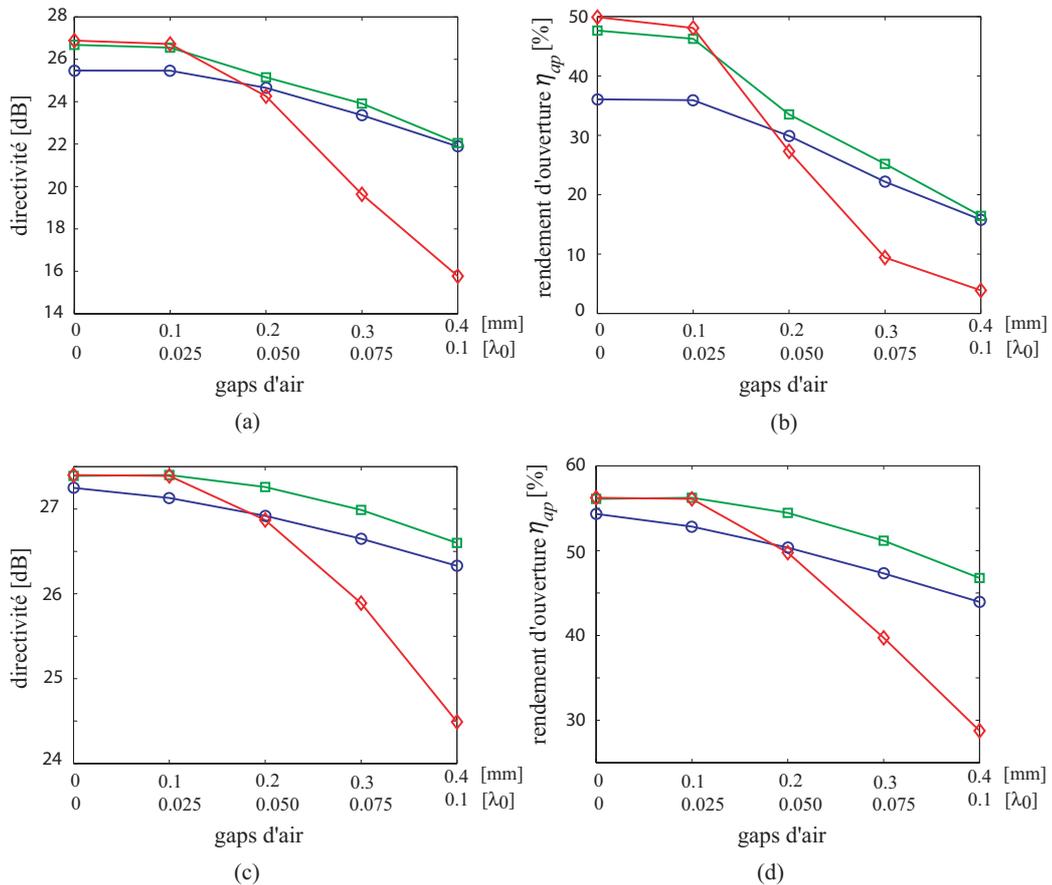


FIG. 5.8 – Influence des gaps d'air sur la directivité et le rendement d'ouverture  $\eta_{ap}$  de lentilles HMFE (a,b) et de Luneburg (c,d). Ces lentilles, de diamètre  $10 \lambda_0$ , sont alimentées par un guide d'onde WR10 ouvert. Elles ont 5 (○), 10 (□) et 20 (◇) coquilles.

Les gaps d'air ont donc un effet négatif sur les performances des lentilles HMFE et de

Luneburg. Toutefois, leur impact est beaucoup plus important sur les lentilles HMFE. En effet, les conséquences de la présence de gaps d'air de  $0,1 \lambda_0$  entre les 20 coquilles sont :

- pour la lentille de Luneburg : une diminution de 3 dB de directivité et 30 % de rendement d'ouverture,
- pour la lentille HMFE : une chute 10 dB de directivité et 40 % de rendement d'ouverture.

Il en est ainsi, car la permittivité au sein de lentilles HMFE varie de 1 à 4 alors qu'elle varie seulement de 1 à 2 pour les lentilles Luneburg. Par conséquent, le saut de permittivité dû aux gaps d'air est beaucoup plus important pour les lentilles HMFE. Ce constat est particulièrement visible sur la figure 5.9, où sont tracés les diagrammes de rayonnement en champ lointain, avec et sans gaps d'air, pour ces deux lentilles. Nous remarquons, en effet, que les niveaux des lobes secondaires remontent beaucoup plus vite pour les lentilles HMFE que Luneburg.

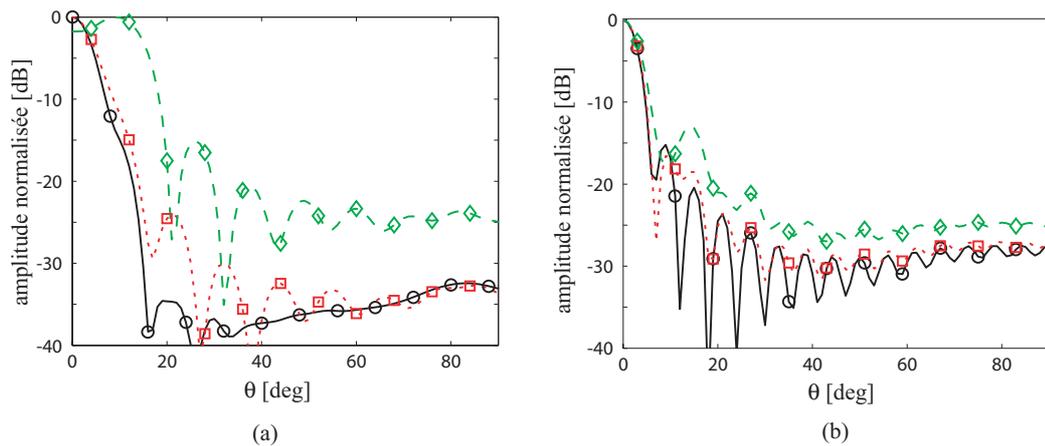


FIG. 5.9 – Influence des gaps d'air (0 mm (○) ; 0,2 mm (□) et 0,4 mm (◇)) sur le diagramme de rayonnement en champ lointain dans le plan E pour une lentille (a) HMFE et (b) Luneburg à 20 coquilles de diamètre  $10 \lambda_0$  illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert fonctionnant à 77 GHz.

Néanmoins, cet impact important des gaps d'air sur les performances des antennes lentilles est à nuancer. En effet, avoir une lentille qui présente un gap d'air de 0,4 mm entre les 20 coquilles est un cas qui est très peu réaliste mais intéressant pour mettre en valeur les différences de sensibilité de ces deux antennes lentilles vis à vis des gaps d'air. En pratique, les lentilles stratifiées présentent plutôt des gaps d'air, d'au plus 0,1 mm, entre certaines coquilles seulement.

#### 5.1.4 Influence de la position de la source

Une fois les caractéristiques de la lentille fixées, il reste un seul degré de liberté pour améliorer les performances de l'antenne lentille : la source.

Nous nous intéressons d'abord à l'influence, sur les performances de l'antenne lentille, de la position de la source par rapport à la lentille. Pour cela, nous étudions les propriétés de focalisation en réception des antennes lentilles HMFE.

Ensuite, une méthode pour déterminer la position optimale de la source est décrite. Il s'agit de trouver la distance source-lentille qui maximise la directivité de l'antenne lentille.

Enfin, le problème plus général de l'optimisation de la source est abordé en tant que perspective.

#### 5.1.4.1 Etude de la focalisation des lentilles HMFE

Les effets de focalisation des lentilles de Luneburg ont été théoriquement étudiés par Rozenfeld [15] qui s'est notamment intéressé à la distribution en champ proche de ces lentilles. Les propriétés de focalisation des lentilles de Luneburg et Luneburg modifiée ont été reportées et également mesurées par Sakurai et al. [16, 17].

Lorsqu'une lentille est illuminée par une onde plane, son point focal peut être défini par la position où la densité de puissance est maximale le long de l'axe de propagation (figure 5.10(a)). La lentille HMFE présente un unique point focal à la position normalisée  $z = 1$ . Par la discrétisation de la lentille, ce point focal devient une zone de focalisation.

Nous nous intéressons à l'influence du diamètre et du nombre de coquilles des lentilles sur l'allure (amplitude et position) de la zone focale.

Pour cela, une étude en réception des lentilles HMFE est menée en utilisant le logiciel CST Microwave Studio<sup>®</sup> car la MMT ne permet pas d'obtenir ces résultats.

Comme indiqué figure 5.10(a), les lentilles sont excitées par une onde plane. La densité de puissance  $P$  le long de l'axe  $z$  de la lentille est étudiée.  $P$  est normalisée par rapport à la densité de puissance  $P_0$  incidente sur la lentille (puissance en  $z = 0$ ). Cette densité de puissance normalisée est reportée pour plusieurs nombres de coquilles et diamètres de lentilles (figure 5.10(b,c,d)).

Il ressort que :

- L'amplitude de la densité puissance augmente avec le diamètre de la lentille. En effet, plus l'ouverture de la lentille est grande, plus la puissance captée par la lentille est importante.
- La zone focale se rapproche de la surface de la lentille au fur et à mesure que le nombre de coquilles augmente car ses performances se rapprochent de celles de la lentille idéale. Ainsi, pour une lentille à 3 coquilles, le point focal se situe à l'intérieur de la lentille, alors qu'il est très proche de sa surface lorsque la lentille présente 9 coquilles.

De plus, il faut noter que le comportement en réception des lentilles à 9 et 15 coquilles est très proche. Ainsi, pour des lentilles de diamètre inférieur à  $8\lambda_0$ , il n'est pas nécessaire de considérer plus de 9 coquilles pour améliorer les performances.

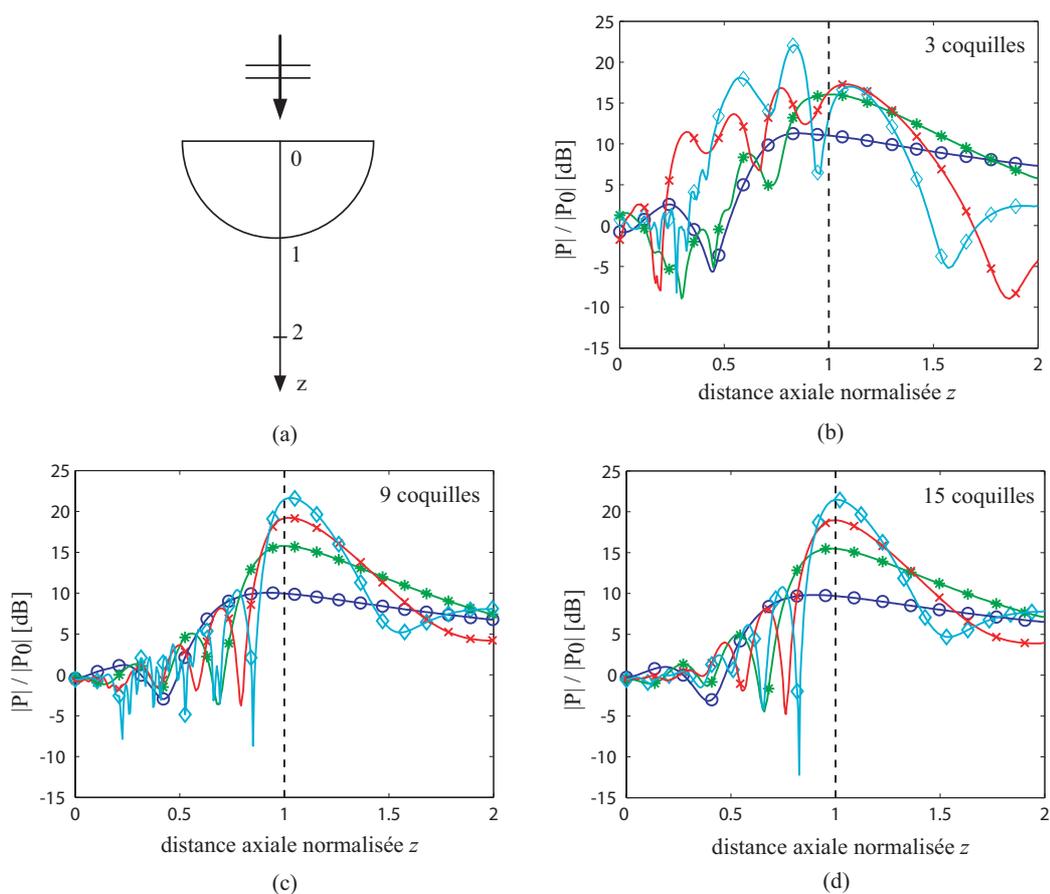


FIG. 5.10 – Distribution de la densité de puissance normalisée ( $|P|/|P_0|$ ) le long de l'axe  $z$  de lentilles HMFE à 3 (b), 9 (c), 15 (d) coquilles de diamètre  $2$  ( $\circ$ ),  $4$  ( $*$ ),  $6$  ( $\times$ ) et  $8\lambda_0$  ( $\diamond$ ) illuminées par une onde plane se propageant selon  $+\hat{z}$  comme schématisé en (a).

### 5.1.4.2 Position optimale de la source

#### Position optimale de la source par rapport à la zone focale de la lentille

Nous cherchons la position optimale de la source, i.e. la position qui maximise la directivité de l'antenne lentille. Pour cela, nous considérons différents types de source (un dipôle, un guide d'onde ouvert, un cornet et une antenne imprimée alimentée par fente) pour alimenter la lentille HMFE à 6 coquilles de diamètre  $6 \lambda_0$ . L'influence de la distance entre la source et la lentille sur la directivité de l'antenne lentille est reportée figure 5.11. La distribution de la puissance normalisée le long de l'axe de cette lentille excitée cette fois par une onde plane est également tracée.

Nous observons que la zone focale de la lentille se situe à  $z = 1,01$  tandis que la position optimale, pour les différents types de source, se situe entre  $z = 1,05$  et  $z = 1,06$ .

Cet écart s'explique par le fait que la source a une longueur électrique non nulle. Une telle étude permet toutefois d'avoir un bon ordre de grandeur quant à la position optimale de la source. Pour aller plus loin, intéressons nous au couplage entre la source et la lentille.

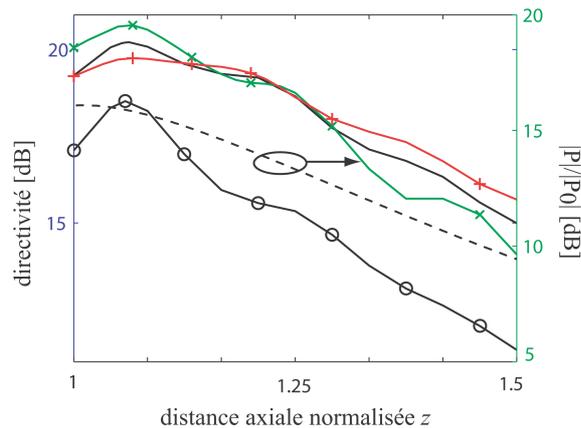


FIG. 5.11 – Directivité d'une lentille HMFE à 6 coquilles de diamètre  $6 \lambda_0$  illuminée par un dipôle (○), une antenne imprimée alimentée par fente (×), un guide d'onde ouvert (-) et un cornet (+) en fonction de la distance axiale normalisée i.e. la distance source-lentille. La distribution de la densité de puissance normalisée ( $|P|/|P_0|$ ) le long de l'axe de cette même lentille excitée par une onde plane est tracée en pointillés.

#### Couplage entre la source et la lentille

Le théorème de Robieux [11, 12] est déduit du théorème de réciprocité de Lorentz. Il permet de quantifier le couplage entre un système de focalisation et sa source primaire. Ce théorème est appliqué au système source-lentille et son principe est illustré sur la figure 5.12.

Selon le théorème de Robieux, le rendement du système source-lentille  $\eta_{SL}$  s'exprime :

$$\eta_{SL} = \frac{\left| \int_{S_S} \left( \vec{E}_S \times \vec{H}_L - \vec{E}_L \times \vec{H}_S \right) \cdot \vec{n} dS \right|^2}{16P_S P_L}, \quad (5.3)$$

avec  $P_i = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_{S_i} \left( \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \right) \cdot \vec{n}_i dS \right\}$  où  $i \in \{S, L\}$ .

Les champs  $(\vec{E}_S, \vec{H}_S)$  sont obtenus à partir de cartographies sur la surface  $S_S$  de la source seule à l'émission.  $(\vec{E}_L, \vec{H}_L)$  est la distribution du champ sur  $S_L$  de la lentille seule en réception illuminée par une onde plane. Enfin  $P_i$  correspond à la puissance traversant la surface  $S_i$  de normale  $\vec{n}_i$ .

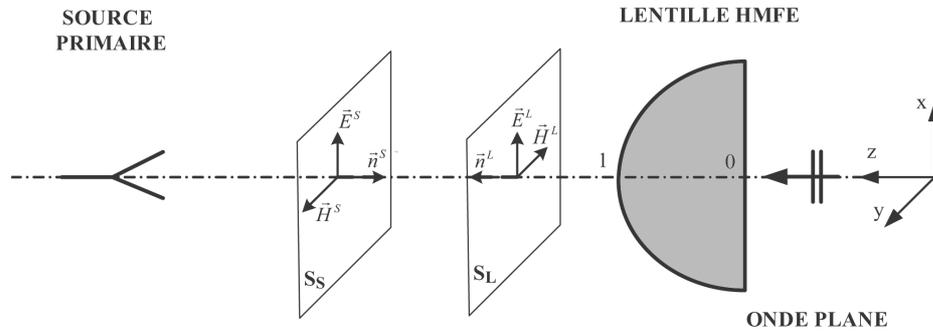


FIG. 5.12 – Illustration du théorème de Robieux.

Le rendement, défini équation 5.3, est calculé en fonction de la distance entre la source et la lentille pour deux configurations présentées à la figure 5.13 à savoir : la lentille HMFE à 6 coquilles de diamètre  $6 \lambda_0$  illuminée par un guide d'onde ouvert et un dipôle.

Ce rendement est maximal lorsque  $z=1,06$ , ce qui correspond précisément à la position où la directivité de l'antenne lentille est la plus élevée (cf. figure 5.11). De plus, nous observons que le couplage avec la lentille est meilleur avec le guide d'onde qu'avec le dipôle, ce qui est à relier avec les valeurs de directivité obtenues figure 5.11 pour ces deux antennes lentilles.

Deux méthodes ont été proposées pour déterminer la position optimale de la source, à savoir :

1. Placer la source au maximum de la zone focale,
2. Placer la source à la position qui maximise le rendement source-lentille.

La deuxième méthode, plus coûteuse en temps de calcul, est la plus précise.

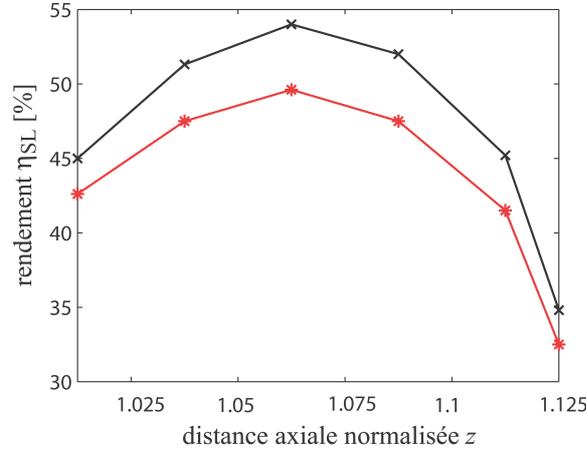


FIG. 5.13 – Rendement du système constitué d’une lentille HMFE à 6 coquilles de diamètre  $6 \lambda_0$  associée à une source [(×) un guide d’onde ouvert et (\*) un dipôle] en fonction de la distance axiale normalisée  $z$ .

### 5.1.4.3 Perspectives : l’optimisation de la source

Le rendement  $\eta_{SL}$  de l’équation 5.3 est maximal lorsque les champs  $(\vec{E}_S, \vec{H}_S)$  et  $(\vec{E}_L, \vec{H}_L)$  sont complexes conjugués entre eux. Pour maximiser ce rendement, le champ sur  $S_S$  doit donc présenter les caractéristiques suivantes :

- Une distribution en amplitude identique à celle sur  $S_L$  à un coefficient multiplicatif près,
- Une variation de phase opposée à celle sur  $S_L$ .

La source idéale est celle dont la distribution de champ sur  $S_S$  présente ces caractéristiques.

Dans cet esprit, [13] optimise la source primaire d’une lentille diélectrique homogène en ajoutant dans le cornet des inserts diélectriques de façon à contrôler la distribution en amplitude et phase de la source. [14] fait varier les paramètres d’un cornet pyramidal illuminant une lentille à diélectrique artificiel de façon à obtenir l’antenne lentille la plus efficace possible.

De telles méthodes sont tout à fait applicables pour concevoir une source optimale pour les lentilles inhomogènes.

### 5.1.5 Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W

Dans cette partie, les résultats de mesure de deux lentilles HMFE associées à un guide d'onde WR10 ouvert dans l'axe de la lentille sont montrés.

#### 5.1.5.1 Lentille HMFE à 3 coquilles

##### Présentation du prototype

Nous avons fait réaliser par la société Emerson & Cuming une première lentille HMFE à 3 coquilles de diamètre 24 mm. Les caractéristiques de cette lentille sont données tableau 5.1. Un support en mousse à faible perte et de permittivité proche de celle de l'air (voir tableau 5.1) est utilisé pour maintenir la lentille sur la source primaire. Ce support, qui apparaît imposant par rapport aux dimensions de la lentille, peut être réduit, car il ne contribue pas au rayonnement de l'antenne lentille. Des photographies de cette lentille, avec et sans son support, sont montrées figure 5.14.

TAB. 5.1 – Caractéristiques du prototype de la lentille HMFE à 3 coquilles et de son support

rayons extérieurs $r_i$ [mm]	permittivités $\epsilon_i$	matériau (Emerson & Cuming)
4	4	Eccostock <sup>®</sup> HiK500F K-4
8	2,5	Eccostock <sup>®</sup> HiK500F K-2,5
12	1,5	Eccostock <sup>®</sup> LoK K-1,5
support en mousse	1,04	Eccostock <sup>®</sup> SH-2



FIG. 5.14 – Photographies de la lentille HMFE à 3 coquilles avec et sans son support en mousse.

### Résultats de mesure

Cette lentille est illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert. Elle est mesurée dans la bande W.

L'adaptation du guide, seul et avec la lentille, dans la bande 75 – 85 GHz est reportée sur la figure 5.15(a). Cette mesure confirme que la lentille perturbe de façon négligeable l'adaptation de la source primaire.

Le gain  $G$  de l'antenne lentille sur la bande 75 – 85 GHz est tracé figure 5.15(b). Il est corrigé pour tenir compte de la désadaptation de la source.  $G$  varie de 2 dB sur cette bande car la distance optimale source-lentille dépend de la taille électrique de la lentille et donc de la fréquence.

- Sur la bande 75 – 85 GHz, la valeur moyenne du gain est de 21,7 dB tandis que la directivité moyenne  $D$  est de 22,6 dB. Le rendement de pertes  $\eta_L = G/D$  moyen est donc égal à 81 %. Ces chiffres ont été calculés en moyennant les valeurs obtenues par un balayage en fréquence entre 75 et 85 GHz avec un pas de 50 MHz.

Le rendement d'ouverture  $\eta_{ap}$  de cette antenne lentille est de 49 %. Le rendement total  $\eta_T = \eta_L \cdot \eta_{ap}$  est alors de 40 %.

- A 77 GHz, le diamètre de la lentille est de  $6,15 \lambda_0$ . Ses caractéristiques sont :  $G=21,4$  dB,  $D=22,8$  dB,  $\eta_L=72$  %,  $\eta_{ap}=51$  % et donc  $\eta_T=37$  %.

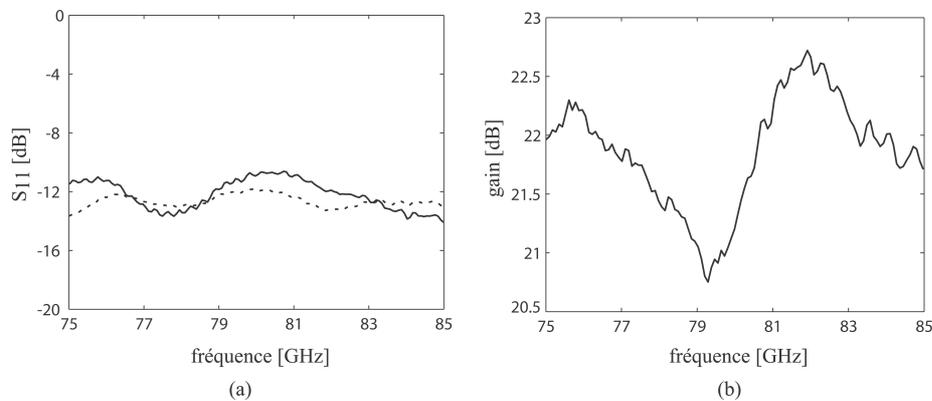


FIG. 5.15 – (a) Adaptation ( $S_{11}$ ) du guide WR10 seul (—) et avec la lentille HMFE à 3 coquilles (···) et (b) gain de l'antenne lentille correspondante dans la bande 75 – 85 GHz.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne lentille à 77 GHz et à 76, 77 et 78 GHz sont montrés figures 5.16 et 5.17 respectivement.

A 77 GHz, les lobes secondaires remontent à  $-10$  dB et la polarisation croisée reste inférieure à  $-23$  dB. La figure 5.17 illustre le caractère large bande de l'antenne lentille. En effet, les diagrammes sont peu modifiés avec la fréquence.

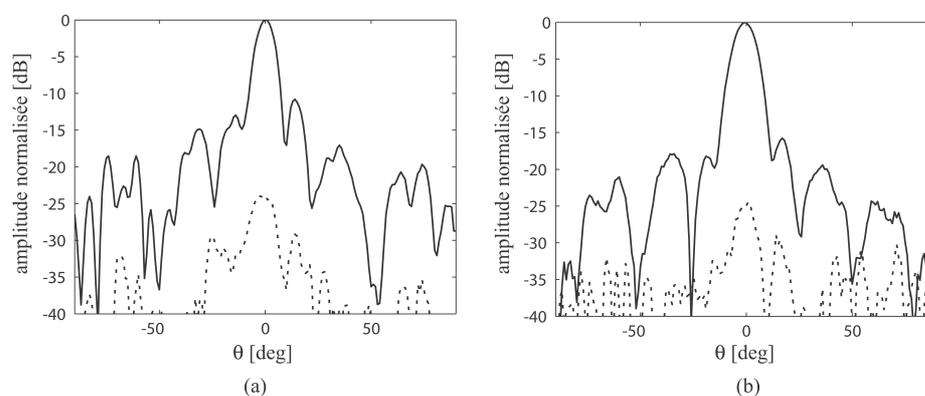


FIG. 5.16 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain (polarisation principale (—) et croisée (···)) de la lentille HMFE à 3 coquilles illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert dans le plan E (a) et H (b) à 77 GHz.

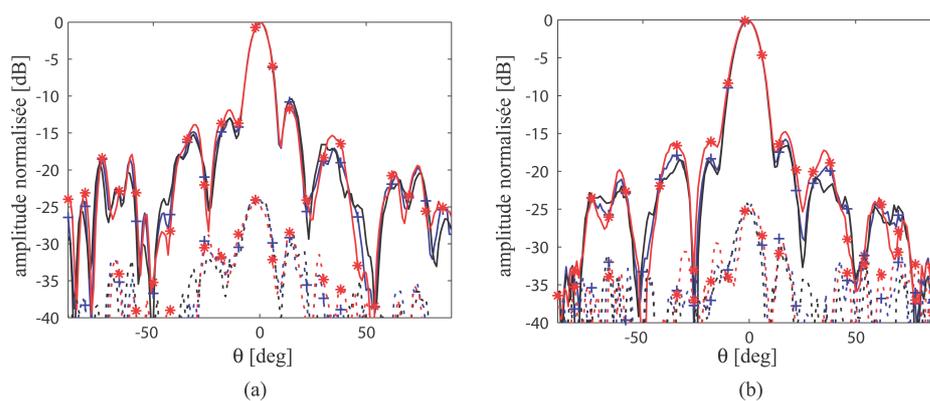


FIG. 5.17 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain (polarisation principale (—) et croisée (···)) de la lentille HMFE à 3 coquilles illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert dans le plan E (a) et H (b) à 76 (+), 77 (—) et 78 (\*) GHz.

### 5.1.5.2 Lentille HMFE optimisée à 9 coquilles

#### Présentation du prototype

Une lentille HMFE à 9 coquilles de diamètre 60 mm a été réalisée, sur mesure, par la société Emerson & Cuming. En effet, ses paramètres, les épaisseurs et permittivités des coquilles, sont le résultat de l'optimisation selon le critère du minmax présentée au chapitre 2. Ils sont donnés tableau 5.2. Des photographies de la lentille seule et associée à sa source sont montrées figure 5.18.

TAB. 5.2 – Caractéristiques du prototype de la lentille HMFE optimisée à 9 coquilles

rayons extérieurs $r_i$ [mm]	6,6	9,7	12,3	14,8	17,3	19,9	22,8	26,0	30
permittivités $\varepsilon_i$	3,84	3,53	3,21	2,89	2,58	2,26	1,95	1,63	1,32

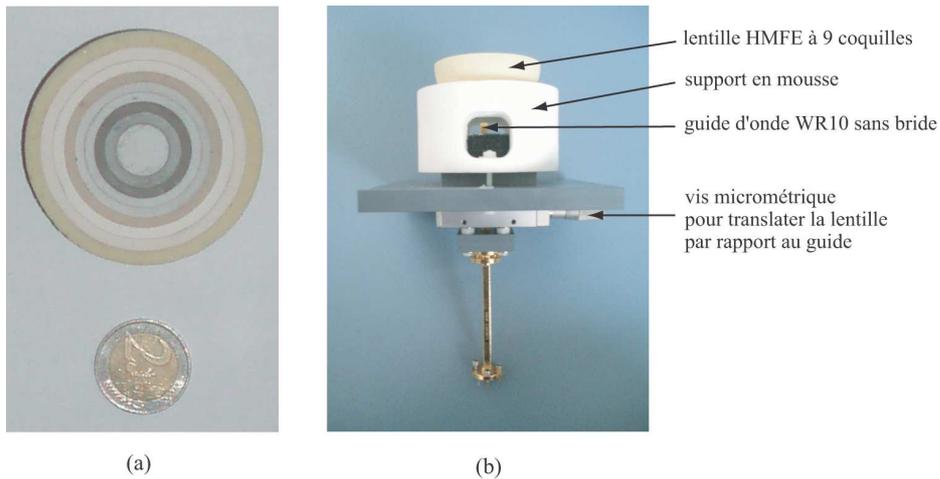


FIG. 5.18 – Photographies de : (a) la lentille HMFE à 9 coquilles et (b) l'antenne lentille composée du guide d'onde WR10 ouvert, d'une vis micrométrique, du support en mousse et de la lentille HMFE à 9 coquilles.

#### Résultats de mesure

La lentille optimisée à 9 coquilles et de diamètre 60 mm est excitée par un guide d'onde WR10 ouvert sans bride. En effet, comme montré sur la figure 5.19, la suppression de la bride permet de diminuer les ondulations dans le plan E du guide. Ces ondulations de la source sont amplifiées par la lentille, ce qui explique la remontée des lobes secondaires dans le plan E de la figure 5.16(a).

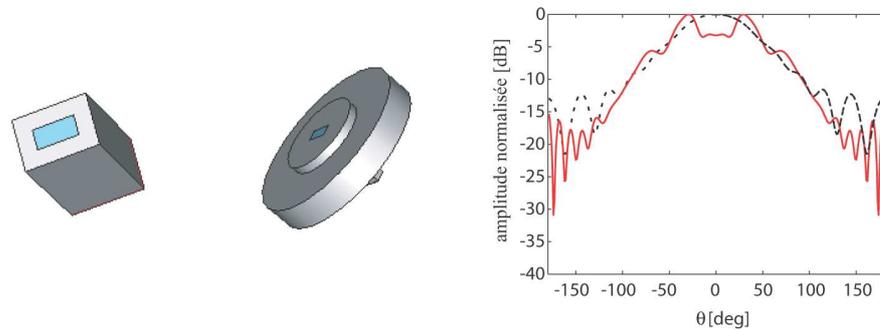


FIG. 5.19 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par la MMT à 77 GHz dans le plan E du guide WR10, (—) avec et ( $\cdots$ ) sans sa bride, et les vues 3D des guides d’onde correspondants.

L’antenne lentille a été mesurée dans la bande W.

L’adaptation de l’antenne lentille sur la bande 75-110 GHz est reportée à la figure 5.20 (a). Elle est proche de -15 dB.

Le gain de l’antenne lentille, sur la même bande de fréquence, est montré à la figure 5.20(b). Il varie de 27 à 31 dB. Le changement de taille électrique de la lentille et la modification de la distance optimale source-lentille avec la taille de la lentille expliquent cette variation non négligeable.

- Sur la bande 75-110 GHz, la directivité moyenne  $D$  est de 32,3 dB et le gain moyen  $G$  mesuré est égal à 28,8 dB, ce qui entraîne un rendement de pertes  $\eta_L=45\%$ . Sur cette bande, le rendement d’ouverture moyen est égal à 48% ce qui donne une efficacité totale :  $\eta_T=22\%$ .
- A la fréquence de 77 GHz, le diamètre de la lentille est de  $15 \lambda_0$ . Ses performances sont :  $G=28,5$  dB,  $D=31,1$ dB,  $\eta_L=55 \%$ ,  $\eta_{ap}=58 \%$  et donc  $\eta_T=32 \%$ .

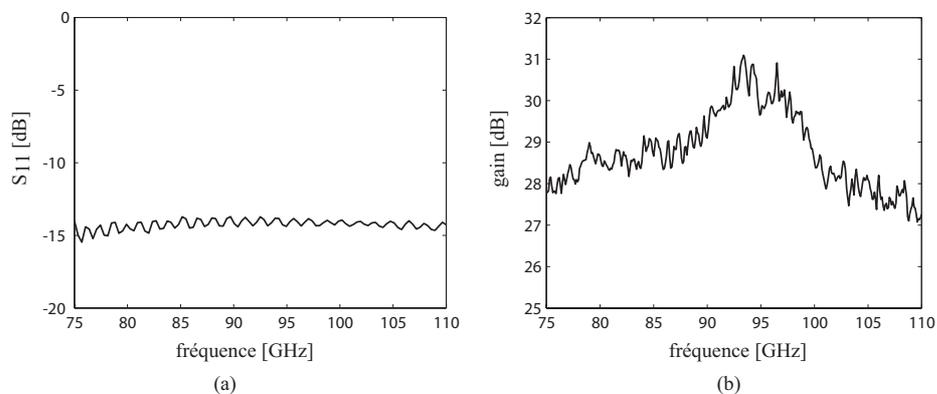


FIG. 5.20 – (a) Adaptation ( $S_{11}$ ) du guide WR10 sans bride avec la lentille HMFE à 9 coquilles et (b) gain de l’antenne lentille dans la bande 75 – 110 GHz.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne lentille à 77 GHz sont montrés figure 5.21. Le lobe secondaire à -18 dB dans le plan H, non prévu par la simulation, est dû à un défaut de fabrication de la lentille. La polarisation croisée est inférieure à -25 dB dans les deux plans.

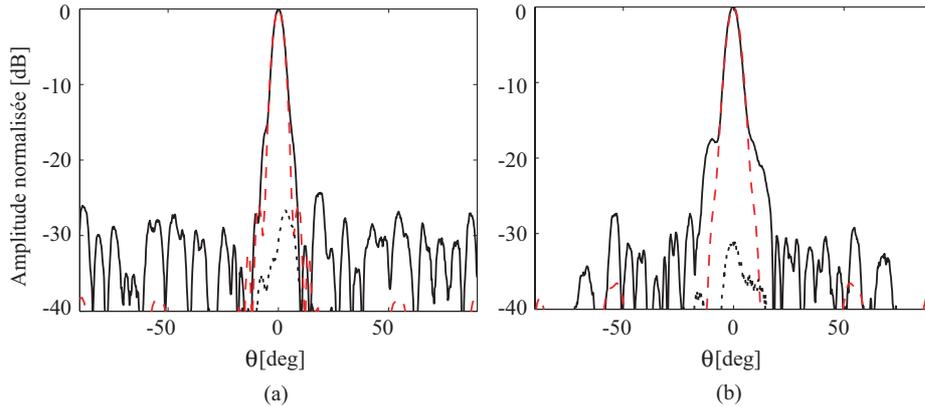


FIG. 5.21 – Diagrammes de rayonnement mesurés en champ lointain (polarisation principale (—) et croisée (···)) et obtenus par la MMT (— —) de la lentille HMFE optimisée à 9 coquilles illuminée par un guide d'onde WR10 ouvert et sans bride, dans le plan E (a) et H (b), à 77 GHz.

### 5.1.5.3 Synthèse des résultats

Les performances des antennes lentilles HMFE à 3 et 9 coquilles mesurées à 77 GHz sont résumées au tableau 5.3.

Un gain de 28,5 dB a été obtenu avec la lentille HMFE à 9 coquilles. De plus, elle présente des lobes secondaires inférieurs à -18 dB et une polarisation croisée au plus égale à -27 dB. Ces performances, et en particulier le rendement total, sont très intéressantes à 77 GHz.

Comparons maintenant les performances de l'antenne lentille HMFE à 3 coquilles avec celle à 9 coquilles.

Il ressort du tableau 5.3 que les pertes sont plus élevées pour la lentille à 9 coquilles ( $\eta_L = 55\%$ ) que celle à 3 coquilles ( $\eta_L = 72\%$ ). En effet, la lentille à 9 coquilles est plus grande, donc les pertes dans le diélectrique sont plus importantes. De plus, comme elle présente plus de coquilles, ses performances sont potentiellement plus dégradées par les gaps d'air que la lentille à 3 coquilles.

Par ailleurs, le rendement d'ouverture de la lentille à 9 coquilles ( $\eta_{ap} = 58\%$ ) est supérieur au rendement de la lentille à 3 coquilles ( $\eta_{ap} = 51\%$ ). En effet, les paramètres (épaisseurs et permittivités des coquilles) de la lentille à 9 coquilles sont optimisés contrairement à ceux de la lentille à 3 coquilles.

En résumé, optimiser les paramètres de la lentille permet d'augmenter son rendement d'ouverture et diminuer le diamètre de la lentille conduit à un rendement de pertes plus élevé.

TAB. 5.3 – Performances mesurées des antennes lentilles HMFE à 77 GHz

		HMFE 3 coquilles	HMFE 9 coquilles
diamètre	$\Phi$	$6,15 \lambda_0$	$15 \lambda_0$
angle d'ouverture à mi-puissance	$\Delta\theta_{-3 \text{ dB}}$		
plan E : mesure (MMT)		$9,8^\circ (8,8^\circ)$	$4,6^\circ (4,6^\circ)$
plan H : mesure (MMT)		$12,2^\circ (13,4^\circ)$	$5,2^\circ (5,2^\circ)$
niveau des lobes secondaires			
plan E :		-12 dB	-25 dB
plan H :		-17 dB	-18 dB
niveau de la polarisation croisée		<-23 dB	<-27 dB
directivité simulée	$D$	22,6 dB	31,1 dB
gain mesuré	$G$	21,7 dB	28,5 dB
rendement de pertes	$\eta_L$	72 %	55 %
rendement d'ouverture	$\eta_{ap}$	51 %	58 %
rendement total	$\eta_T$	37 %	32 %

### 5.1.6 Conclusion

Les performances des lentilles HMFE et de Luneburg associées à une source axée ont été présentées dans cette partie.

Globalement, les performances en focalisation des lentilles de Luneburg sont plus intéressantes que celles des lentilles HMFE, car :

- leur rendement d'ouverture est supérieur à nombre de coquilles et diamètre égal,
- leur sensibilité aux gaps d'air est moindre.

Cependant, à volume de diélectrique égal, la directivité de ces deux antennes lentilles est voisine. De plus, la forme hémisphérique de la lentille HMFE peut présenter, pour certaines applications, une alternative intéressante à la lentille sphérique de Luneburg. En effet, la surface plate de la lentille HMFE peut faciliter son intégration dans certains dispositifs.

## 5.2 Etude des performances des antennes lentilles HMFE en dépointage

Cette partie s'intéresse aux capacités de balayage du faisceau des antennes lentilles HMFE. Pour obtenir un dépointage, la lentille doit être illuminée par une source désaxée.

Des études paramétriques sur la translation et la rotation de la source par rapport à la lentille sont ainsi menées. L'influence de ces déplacements sur la directivité et l'angle de dépointage est étudié. Enfin, les résultats de mesure à 77 GHz d'un guide d'onde ouvert se translatant sous une lentille HMFE à 3 et 9 coquilles sont présentés.

### 5.2.1 Introduction sur le dépointage

Concernant les lentilles homogènes, les propriétés hors de l'axe des lentilles ellipsoïdales et à hémisphère étendu ont été étudiées dans [6, 7, 8, 9] montrant les capacités de balayage de faisceau avec des lentilles à point focal unique. Ainsi, une lentille hémisphérique alimentée par un réseau à maille hexagonale d'antennes imprimées est présentée dans [7]. Le principe de fonctionnement de cette antenne est illustré figure 5.22. Le dépointage est réalisé par commutation entre les sources décentrées.

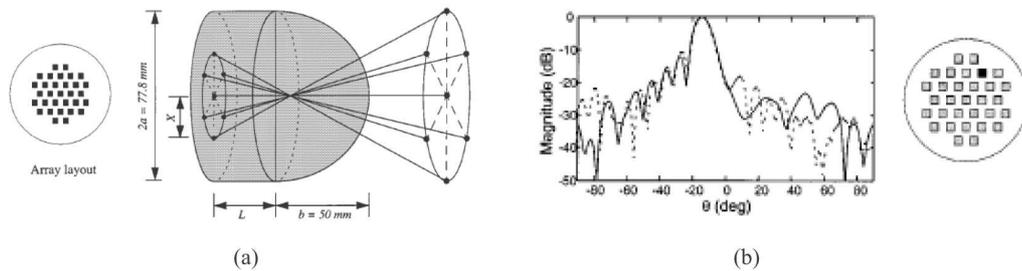


FIG. 5.22 – (a) Géométrie de l'antenne lentille excitée par un réseau de sources imprimées à 30 GHz. (b) Diagramme de rayonnement théorique et expérimental pour une position de la source alimentée [7].

Par ailleurs, des lentilles à deux points focaux ont aussi été conçues [10] pour améliorer les performances en angle de dépointage.

Pour ce qui est des lentilles inhomogènes, la plupart des études et applications relatives au multi-faisceaux ont été effectuées en utilisant la lentille de Luneburg. En effet, chaque point à la surface de cette lentille est un point focal. Par conséquent, le faisceau peut être facilement contrôlé en bougeant la source autour de la lentille sans aucune dégradation dans les diagrammes de rayonnement, puisque la position de l'antenne par rapport à la lentille ne change pas étant donnée la symétrie sphérique de celle-ci.

En revanche, la théorie de l'optique géométrique prédit que la lentille HMFE idéale n'a qu'un seul point focal et ne permet donc pas d'effectuer du multi-faisceaux. Cependant, une lentille HMFE discrète, présente, non pas un seul point focal parfait (figure 5.23(a)), mais plutôt une zone focale (figure 5.23(b)). Ainsi, par réciprocity, en bougeant légèrement la source par rapport à la lentille, nous pouvons espérer réaliser un balayage de faisceau tout en conservant d'intéressants diagrammes.

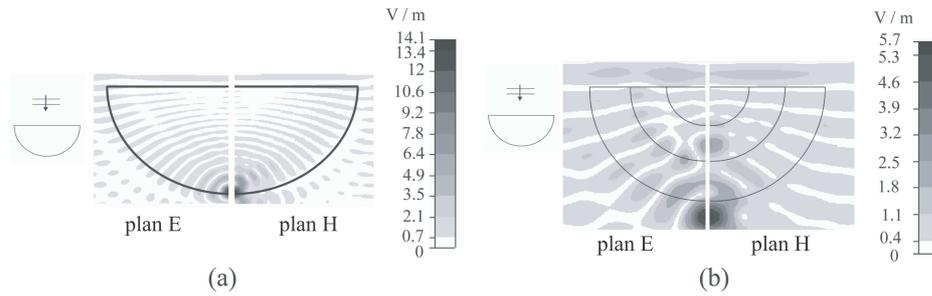


FIG. 5.23 – Cartographies de l'amplitude du champ électrique, calculé par CST Microwave Studio<sup>®</sup>, au voisinage d'une lentille HMFE excitée par une onde plane unitaire (a) quasi idéale de diamètre  $10 \lambda_0$  et (b) à trois coquilles de diamètre  $4 \lambda_0$ .

Les performances des lentilles HMFE associées à une source désaxée sont maintenant étudiées.

## 5.2.2 Analyse en dépointage de l'antenne lentille HMFE

### 5.2.2.1 Configuration de l'antenne lentille et méthode d'analyse

Un guide d'onde WR10 ouvert est utilisé pour illuminer la lentille. Les caractéristiques des lentilles simulées pour l'étude paramétrique sont reportées tableau 5.4. Il s'agit de lentilles optimisées selon le critère du minmax (d'après la méthode détaillée au chapitre 2).

TAB. 5.4 – Caractéristiques des lentilles HMFE à N coquilles simulées

nombre de coquilles	rayon extérieur normalisé $r_i$	permittivités des coquilles $\epsilon_i$
3	0,36 ; 0,57 ; 0,82	3,57 ; 2,72 ; 1,86
6	0,25 ; 0,38 ; 0,49 ; 0,6 ; 0,73 ; 0,9	3,77 ; 3,31 ; 2,85 ; 2,38 ; 1,92 ; 1,46
9	0,21 ; 0,30 ; 0,38 ; 0,46 ; 0,53 ; 0,62 ; 0,70 ; 0,80 ; 0,93	3,84 ; 3,53 ; 3,21 ; 2,89 ; 2,58 ; 2,26 ; 1,95 ; 1,63 ; 1,32

Pour bouger le faisceau, la source doit se déplacer par rapport à la lentille ou inversement. Ce déplacement peut être accompli de façon rectiligne ou circulaire comme

représenté figure 5.24 (a) et (b) respectivement.

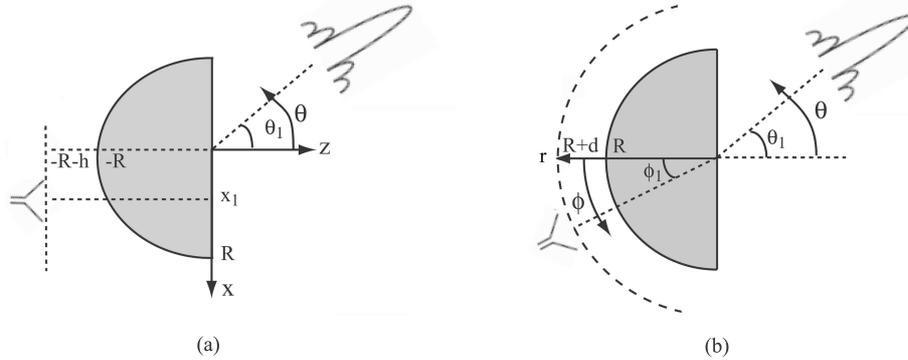


FIG. 5.24 – Dessin de principe, avec les notations utilisées pour les études paramétriques, du système antennaire à dépointage de faisceau constitué d’une source et d’une lentille hémisphérique pour le cas d’un déplacement (a) rectiligne et (b) circulaire de la source.

Pour les études suivantes, ce déplacement sera toujours effectué selon le plan H, car le diagramme du guide WR10 avec sa bride ne présente pas d’ondulations dans ce plan contrairement au plan E, comme montré figure 5.19. Le désaxage et la distance entre la lentille et la source sont :  $X$  et  $h$  pour le cas rectiligne et  $\phi$  et  $d$  pour celui circulaire.

La MMT est moins précise lorsque la source n’est pas centrée sous la lentille (cf. chapitre 3). Ainsi, le logiciel CST Microwave Studio<sup>®</sup> est ici utilisé pour calculer les diagrammes de rayonnement en champ lointain et directivité des antennes lentilles.

### 5.2.2.2 Influence du type de déplacement de la source autour de la lentille

Les performances avec une source désaxée, directivité maximale et angle de dépointage, sont comparées figure 5.25 pour le cas d’un déplacement rectiligne (translation) et circulaire (rotation) de la source par rapport à une lentille HMFE à 3 coquilles optimisée de diamètre  $6 \lambda_0$  à 77 GHz.

De façon générale, quand le désaxage s’accroît, l’angle de dépointage augmente et la directivité maximale diminue. Ce constat n’est pas vrai seulement pour le cas où la source est la plus proche de la lentille. En effet, la directivité maximale dépend de la distance entre la source et la lentille, comme cela a été vu au paragraphe 5.1.4. Il s’agit d’ailleurs du seul degré de liberté restant une fois les caractéristiques de la lentille fixées et la source choisie. Ainsi, pour une distance source-lentille ( $h/R$  et  $d/R$ ) égale à 0,10, la directivité maximale reste stable pour un important désaxage de la source. Cet avantage est pénalisé par une directivité moins élevée de 1 dB par rapport au cas optimal.

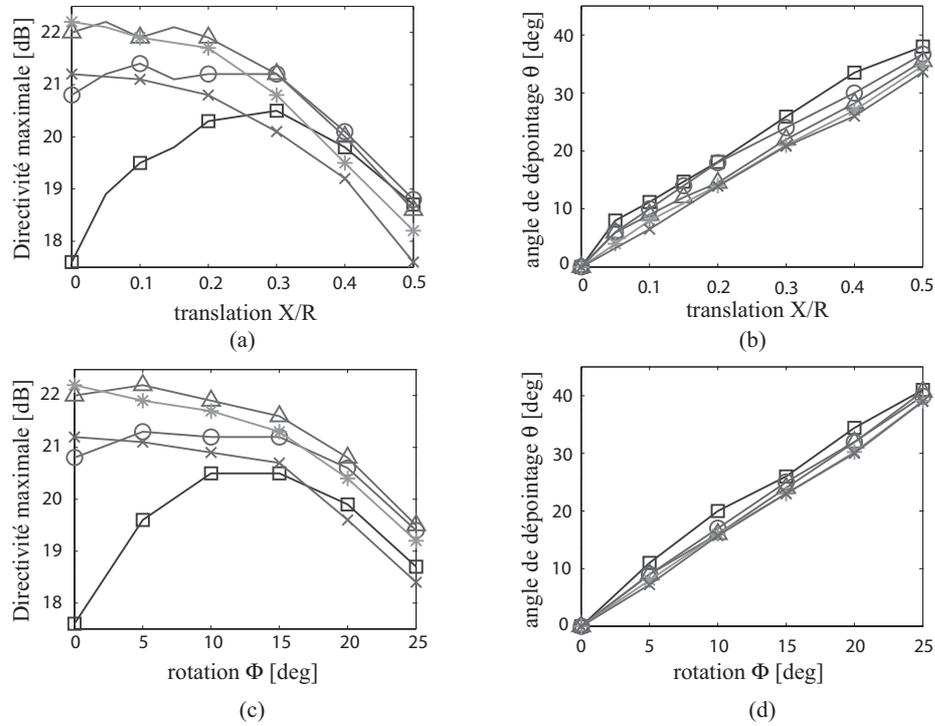


FIG. 5.25 – Directivité maximale et angle de dépointage pour la translation (a,b) et la rotation (c,d) de la source par rapport à la lentille pour différentes distances entre le guide d'onde et la lentille :  $h/R$  pour la translation et  $d/R$  pour la rotation sont égaux à 0,05 ( $\square$ ), 0,10 ( $\circ$ ), 0,15 ( $\triangle$ ), 0,20 ( $*$ ) et 0,25 ( $\times$ ).

Le comportement de l'antenne lentille dans le cas d'une translation ou une rotation de la source est très proche. Néanmoins, les performances sont légèrement meilleures pour le cas de la rotation.

Ainsi, à angle de dépointage égal, la directivité maximale obtenue est plus élevée. Par exemple, pour atteindre un angle de dépointage de  $30^\circ$  :

- $X/R = 0,4$  et la directivité maximale est de 20 dB pour la translation,
- $\phi = 18^\circ$  et la directivité maximale est de 20,8 dB pour la rotation.

En effet, tourner la source autour de la lentille permet de mieux illuminer la lentille. Le débordement du rayonnement de la source ("spillover") est réduit par rapport au cas où la source est translattée sous la lentille.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain, pour la translation et la rotation de la source, sont reportés figure 5.26. Comme attendu, les niveaux des lobes secondaires augmentent avec le désaxage de la source mais restent inférieurs à -12 dB dans les deux cas.

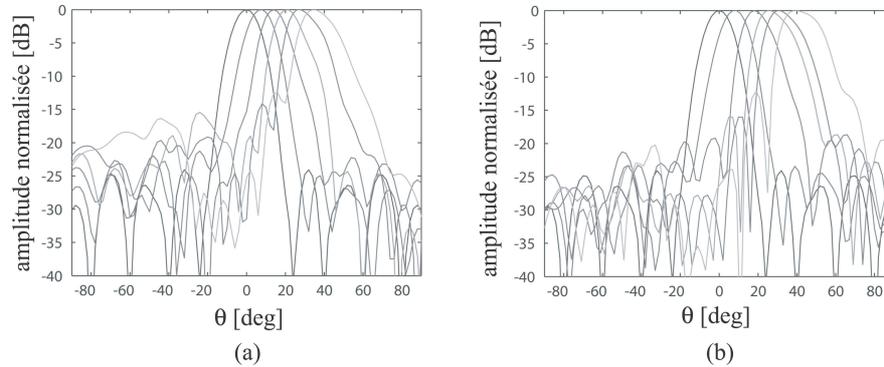


FIG. 5.26 – Diagrammes de rayonnement normalisés dans le cas (a) d’une translation de  $X/R = 0; 0,1, 0,2; 0,3; 0,4$  et  $0,5$  ainsi que (b) d’une rotation de  $\Phi = 0; 5; 10; 15; 20$  et  $25$  degrés.

Pour de nombreuses applications, bouger la source est difficile car cela implique que le système d’alimentation doit également se déplacer. Il ne faut alors plus considérer l’angle de dépointage par rapport à l’axe de la lentille, mais plutôt par rapport à l’axe de la source, comme schématisé figure 5.27.

Ainsi, l’angle de dépointage  $\theta$  reste le même pour la translation mais devient plus petit, égal à  $\theta - \phi$ , pour la rotation.

Par conséquent, si la source doit rester fixe, il est plus intéressant de translater la lentille par rapport à la source plutôt que la tourner. C’est pourquoi désormais, nous limiterons notre étude à la translation de la lentille par rapport à la source.

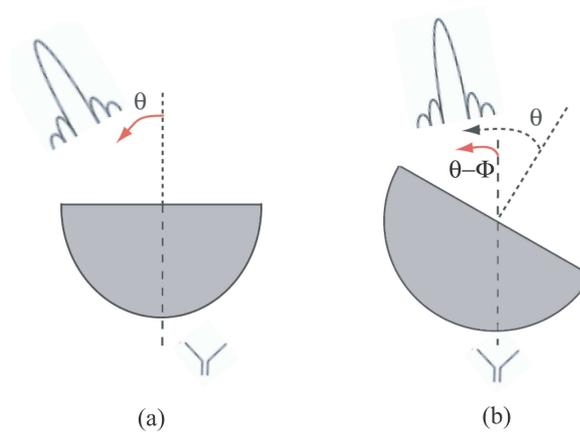


FIG. 5.27 – Schéma de principe montrant l’angle de dépointage (a)  $\theta$  pour la translation (b)  $\theta - \phi$  pour la rotation de la lentille par rapport à la source fixe.

### 5.2.2.3 Influence du nombre de coquilles de la lentille

Les performances des lentilles optimisées de diamètre  $6\lambda_0$  à 3, 6 et 9 coquilles, dont les caractéristiques sont données tableau 5.4, sont comparées figure 5.28 en fonction de la translation de la lentille par rapport à la source.

En augmentant le nombre de coquilles, la loi du gradient d'indice est mieux approchée. Les propriétés de la lentille se rapprochent donc des propriétés théoriques. Par conséquent, la zone focale de la lentille devient plus petite.

Ainsi, lorsque la source est dans l'axe, les performances de la lentille s'améliorent. La directivité maximale est plus élevée et des lobes secondaires sont plus bas quand le nombre de coquilles augmente.

Pour une source désaxée, augmenter le nombre de coquilles permet d'augmenter la directivité maximale dans une certaine mesure. En effet, la figure 5.28(a) montre que la directivité maximale pour l'antenne lentille à 6 et 9 coquilles est presque identique. De plus, les niveaux de lobes secondaires les plus élevés sont atteints quand la lentille a 9 coquilles.

Utiliser une lentille avec un nombre de coquilles trop important dégrade significativement les performances désaxées de l'antenne lentille, car son comportement devient trop proche de celui de la lentille idéale. Pour cette configuration particulière d'antenne lentille, le choix de 6 coquilles est le mieux adapté.

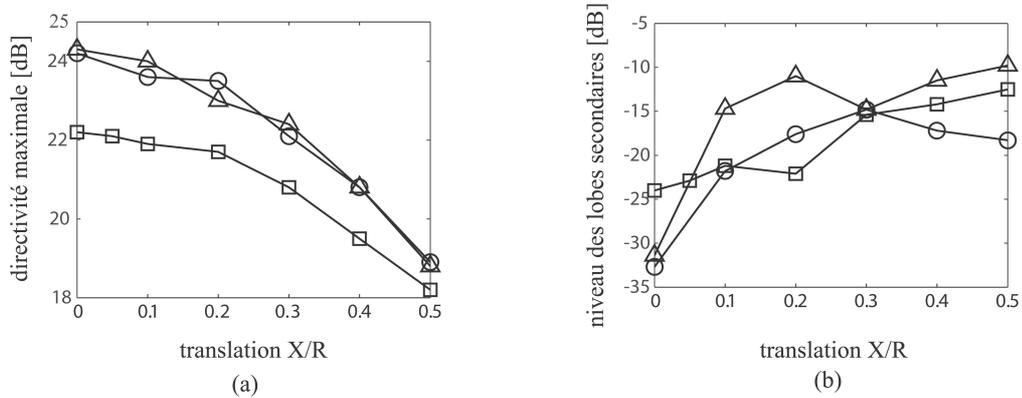


FIG. 5.28 – Directivité maximale et niveau des lobes secondaires en fonction de la translation de la source pour des lentilles HMFE optimisées de diamètre  $6\lambda_0$  à 3 (□), 6 (○) et 9 (△) coquilles.

## 5.2.3 Caractérisation de lentilles HMFE stratifiées en bande W

### 5.2.3.1 Lentille HMFE à 3 coquilles

La lentille à 3 coquilles mesurée à 77 GHz est celle présentée paragraphe 5.1.5.1.

Sur la figure 5.29 sont comparés les diagrammes de rayonnement calculés et mesurés pour la configuration dans l'axe et deux configurations désaxées ( $X=0,14R$  et  $X=0,27R$ ). Ils sont en bon accord ce qui valide l'étude paramétrique menée précédemment. Les petites différences entre la simulation et la mesure sont dues aux incertitudes apportées par le dispositif utilisé pour maintenir et bouger la lentille. En effet,  $h$  et  $X$  ne peuvent être connus qu'à 0,2 mm près.

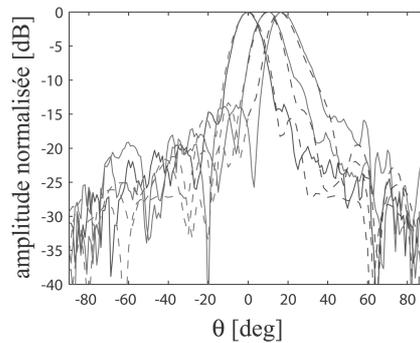


FIG. 5.29 – Comparaison entre les diagrammes de rayonnement en champ lointain simulés (---) et mesurés (—) à 77 GHz pour la configuration dans l'axe et deux configurations désaxées.

Les performances en dépointage de cette lentille sont maintenant caractérisées à 77 GHz.

Pour cela, une translation (de  $-0,6R$  à  $0,6R$ ) de la lentille par rapport à la source est appliquée. La simulation a permis de déterminer que la distance source-lentille maximisant la directivité dans l'axe est de  $h=0,13R$ .

L'angle de dépointage, le gain mesuré et la directivité calculée pour ces déplacements rectilignes sont reportés figure 5.30. L'angle de dépointage mesuré et calculé sont en excellent accord. Les différences entre le gain mesuré et la directivité calculée sont dues aux pertes dans la lentille. En effet, le rendement de perte de l'antenne lentille  $\eta_L$  dans l'axe est de 72 %.

En imposant comme limite une diminution maximale en directivité de 3 dB, le déplacement maximal de la source hors de l'axe  $X/R$  est de 0,4. Les diagrammes en champ lointain vérifiant ce critère sont tracés figure 5.31. Ces diagrammes montrent qu'un balayage de  $\pm 20^\circ$  peut être réalisé avec des lobes secondaires inférieurs à  $-12$  dB.

Par ailleurs, la translation de la lentille par rapport à la source ne perturbe pas l'adaptation de la source.

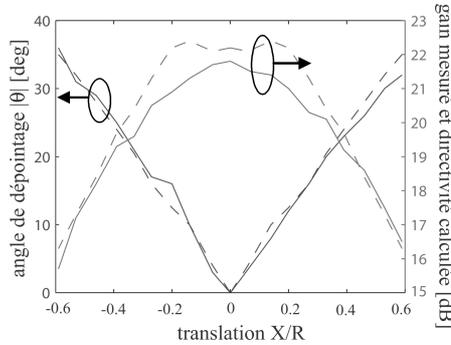


FIG. 5.30 – Angle de dépointage et directivité calculés (---) et angle de dépointage et gain mesurés (—) en fonction de la translation de la source par rapport à la lentille à 3 coquilles.

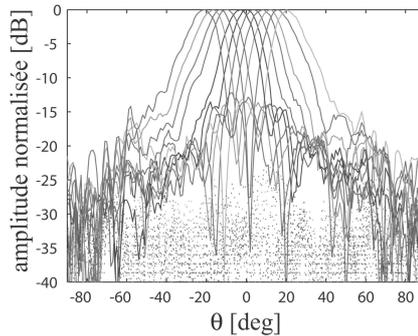


FIG. 5.31 – Diagrammes de rayonnement normalisés en champ lointain à 77 GHz [co-pol (—) et cross-pol (···)] pour la configuration dans l'axe et 10 configurations désaxées.

### 5.2.3.2 Lentille HMFE optimisée à 9 coquilles

Les performances en dépointage de la lentille optimisée à 9 coquilles sont mesurées à 77 GHz.

Pour cela, la source est translatée de 5 mm par rapport à l'axe de la lentille. Le dispositif positionnant la source par rapport à la lentille ne permet pas mécaniquement de réaliser un déplacement plus important.

Le gain mesuré et la directivité calculée sont tracés en fonction du déplacement source-lentille sur la figure 5.32(a). Comme attendu, le gain et la directivité diminuent lorsque

la lentille se déplace par rapport à la source. La chute du gain mesuré est moins importante que celle de la directivité simulée, car le gain mesuré n'est pas maximal dans l'axe mais en  $X = 1$  mm.

L'angle de dépointage mesuré et calculé en fonction de la translation source-lentille est reporté figure 5.32(b).

L'allure de la courbe obtenue en simulation est très proche de celle mesurée (un écart moyen de  $1^\circ$  est observé). Le dépointage varie linéairement avec la translation. Ainsi, une translation de 1 mm entraîne un dépointage de  $2^\circ$ . Le positionnement de la source par rapport à la lentille doit donc être minutieusement réglé. Lorsque la source est située dans l'axe de la lentille, l'angle de dépointage mesuré est égal à  $-0.8^\circ$ . Ce léger désaxage, de la source par rapport à la lentille, explique le décalage entre la simulation et la mesure.

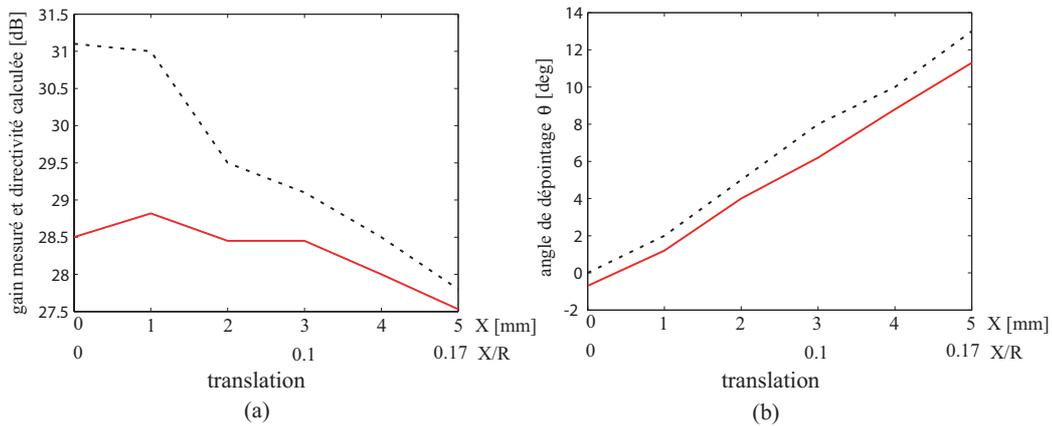


FIG. 5.32 – Influence de la translation de la source par rapport à la lentille optimisée à 9 coquilles sur (a) la directivité calculée ( $\cdots$ ), le gain mesuré ( $—$ ) et (b) l'angle de dépointage calculé ( $\cdots$ ) et mesuré ( $—$ ) à 77 GHz.

Les diagrammes normalisés en champ lointain correspondant à une translation  $X = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$  mm de la source par rapport à la lentille sont tracés figure 5.33. Ils montrent qu'un dépointage de  $\pm 11^\circ$  peut être réalisé avec des lobes secondaires inférieurs à  $-15$  dB.

### 5.2.3.3 Synthèse

Les performances en dépointage des antennes lentilles HMFE à 3 et 9 coquilles mesurées à 77 GHz sont, pour un déplacement de la source hors de l'axe de  $X/R=0,17$  reportées au tableau 5.5.

L'angle de dépointage est quasiment identique pour les deux lentilles mais la chute de gain est plus importante pour la lentille HMFE à 9 coquilles.

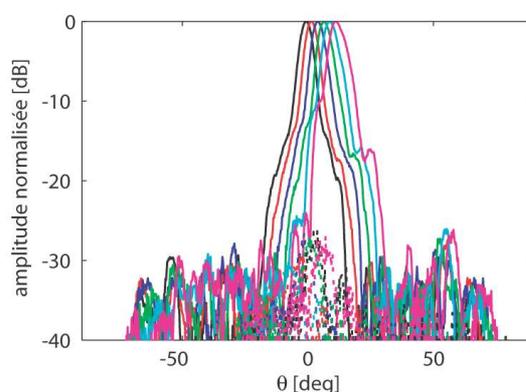


FIG. 5.33 – Diagrammes de rayonnement normalisés en champ lointain (co-pol (—) et cross-pol (···)) à 77 GHz pour la configuration dans l'axe et 4 configurations désaxées.

Cette lentille a en effet une zone focale plus petite que celle à 3 coquilles. Ses performances hors de l'axe se dégradent donc plus rapidement.

TAB. 5.5 – Performances mesurées en dépointage des antennes lentilles HMFE à 77 GHz

	HMFE à 3 coquilles	HMFE à 9 coquilles
gain ( $X/R=0$ ) - gain ( $X/R=0,17$ )	-0,6 dB	-1,3 dB
angle de dépointage ( $X/R=0,17$ )	11 °	12 °

#### 5.2.4 Conclusion

Les performances des lentilles HMFE associées à une source désaxée ont été analysées dans cette partie. En effet, les études paramétriques présentées quantifient les capacités en balayage de faisceau des antennes lentilles HMFE. Les mesures en bande W de deux prototypes d'antenne lentille HMFE valident les simulations effectuées et confirment ainsi la possibilité de réaliser du dépointage avec ce type de lentille.

## 5.3 Présentation d'une antenne lentille HMFE reconfigurable

Nous avons vu que la lentille HMFE associée à :

- une source dans l'axe permet d'obtenir un diagramme directif,
- une source désaxée permet d'obtenir un diagramme dépointé.

Par voie de conséquence, une source distribuée sur un secteur angulaire (un réseau de sources par exemple) doit produire un diagramme sectoriel.

Ainsi dans cette partie, la lentille HMFE est associée à un réseau de sources. Ces sources sont actives, ce qui permet la reconfigurabilité du diagramme de rayonnement de l'antenne lentille (directif, sectoriel ou sectoriel dépointé). Le principe de fonctionnement de ce système antennaire est expliqué, numériquement vérifié par des simulations et expérimentalement validé par des mesures en bande Ka.

### 5.3.1 Présentation et principe de fonctionnement du système antennaire

Le système antennaire proposé est constitué d'une lentille associée à plusieurs sources. Le système présenté ici utilise la lentille HMFE. Cependant, des performances similaires peuvent être obtenues avec une lentille de Luneburg ou homogène (constante K).

Concernant les sources, toute antenne qui illumine correctement la lentille, i.e. dont le débordement de champ est limité, convient. Le choix du type de source dépend alors de plusieurs paramètres dont les principaux sont les suivants : la bande de fréquence de travail, les caractéristiques privilégiées (faibles pertes, bas coût...). Par ailleurs, les sources sont mises en réseau. Celui-ci peut être surfacique ou linéaire, plan ou conformé.

Le principe de fonctionnement et les simulations effectuées sont présentées pour des lentilles HMFE associées à un réseau linéaire plan pour des raisons de simplicité de modélisation. L'extension au réseau surfacique peut facilement être déduite. La différence entre un réseau linéaire et conformé est visible au niveau des performances de l'antenne lentille. Un réseau conformé permet en effet une meilleure illumination de la lentille. Par ailleurs, les résultats de simulation présentés dans cette partie sont réalisés avec le logiciel CST Microwave Studio®.

Le principe de fonctionnement du système antennaire est schématisé sur la figure 5.34. Le diagramme de rayonnement de l'antenne lentille est :

- sectoriel, lorsque toutes les sources sont alimentées avec la même amplitude et la même phase,
- directif, lorsque seule la source centrale est alimentée.

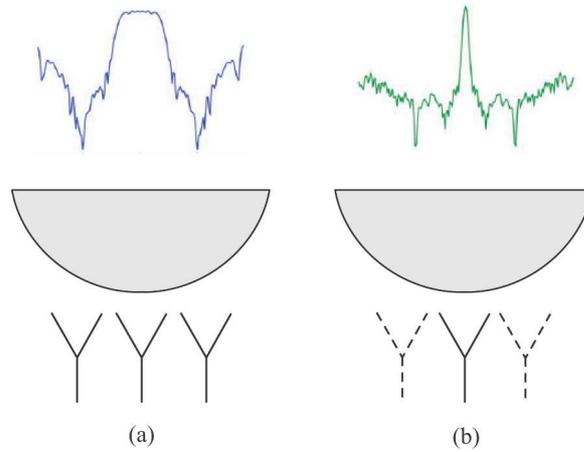


FIG. 5.34 – Principe de fonctionnement du système antenne composé de plusieurs sources et une lentille. Le diagramme de rayonnement en champ lointain est (a) sectoriel lorsque toutes les sources sont alimentées et (b) directif lorsque seule la source centrale est alimentée.

Pour illustrer le fonctionnement du système antenne, nous considérons l'antenne lentille suivante : une lentille *HMFE* optimisée à neuf coquilles, de diamètre  $15 \lambda_0$  à 77 GHz, alimentée par neuf guides d'onde WR10 ouvert sans bride alignés selon le plan H. A 77 GHz, l'écart entre deux sources consécutives est de  $0,75 \lambda_0$  et la distance entre la source centrale et la lentille est de  $0,375 \lambda_0$ .

Une cartographie au voisinage du système antenne est montrée pour deux configurations sur la figure 5.35.

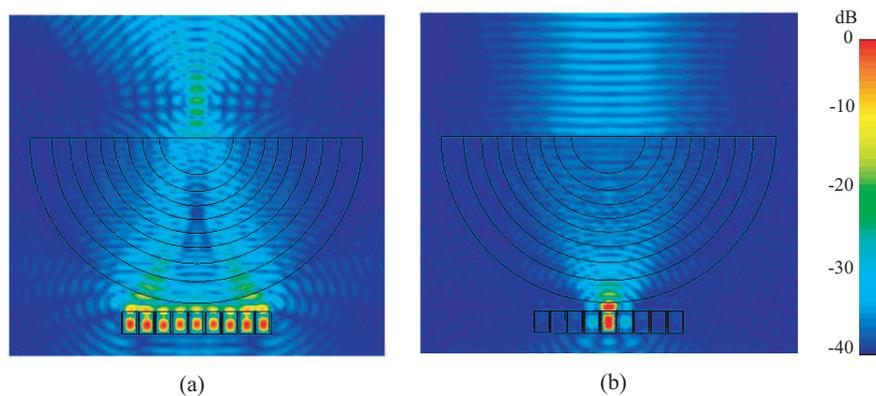


FIG. 5.35 – Cartographie de l'amplitude du champ électrique total normalisé au voisinage du système antenne composé d'une lentille à neuf coquilles associée à neuf guides d'onde, lorsque (a) les neuf sources sont alimentées en amplitude et en phase et (b) seule la source centrale est alimentée.

- Lorsque les neuf sources sont alimentées avec la même amplitude et en phase, l'onde en sortie de la lentille illumine un secteur angulaire limité. Le diagramme sectoriel obtenu est sectoriel en champ lointain.
- Quand seul le guide d'onde central est alimenté, l'onde est localement plane en sortie de la lentille. Le diagramme de rayonnement en champ lointain est alors très directif.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain, correspondant à diverses configurations d'alimentation, sont montrés figure 5.36(a). Plus le nombre de sources alimentées augmente, plus l'angle d'ouverture à mi-puissance augmente. Ce comportement, tracé sur la figure 5.36(b), montre qu'il est possible de passer de  $5^\circ$  à  $70^\circ$  d'ouverture à mi-puissance quand le nombre de sources alimentées passe de un à neuf.

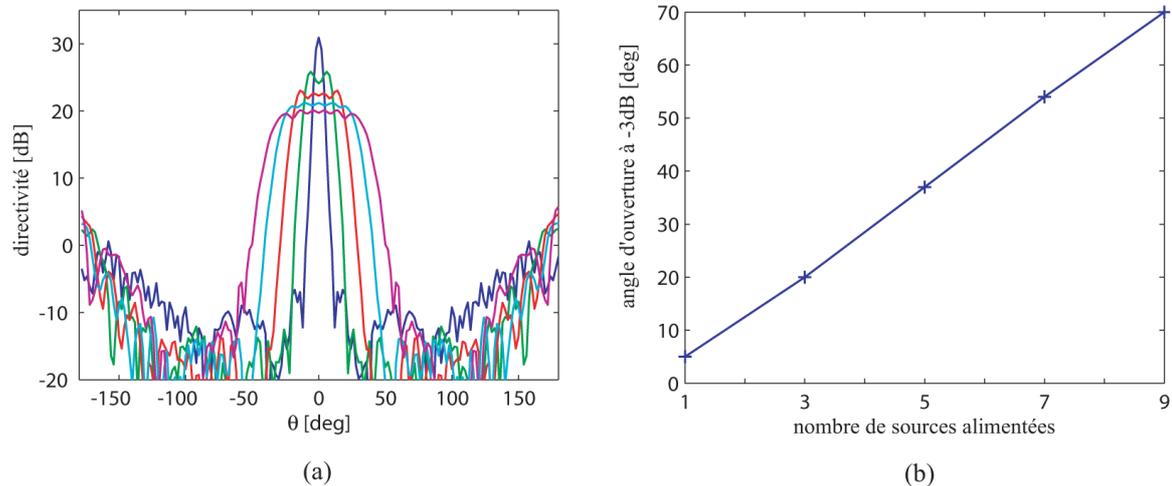


FIG. 5.36 – (a) Diagrammes de rayonnement en champ lointain d'une lentille HMFE optimisée à neuf coquilles, de diamètre  $15 \lambda_0$  à 77 GHz, alimentée par neuf guides d'onde. Le nombre de sources alimentées est de 1, 3, 5, 7 et 9 ce qui se traduit par un élargissement du faisceau. (b) Evolution de l'angle d'ouverture à -3 dB du diagramme de rayonnement en champ lointain en fonction du nombre de sources alimentées.

Ce système antennaire permet aussi de réaliser un diagramme sectoriel qui dépointe lorsqu'un certain nombre de sources voisines est alimenté. Ainsi, en alimentant trois sources voisines sur huit, un diagramme sectoriel est obtenu. Son ouverture angulaire est plus faible que si les huit sources étaient alimentées. Si le groupement de trois sources parmi huit change de position, alors le diagramme sectoriel dépointe comme montré figure 5.37.

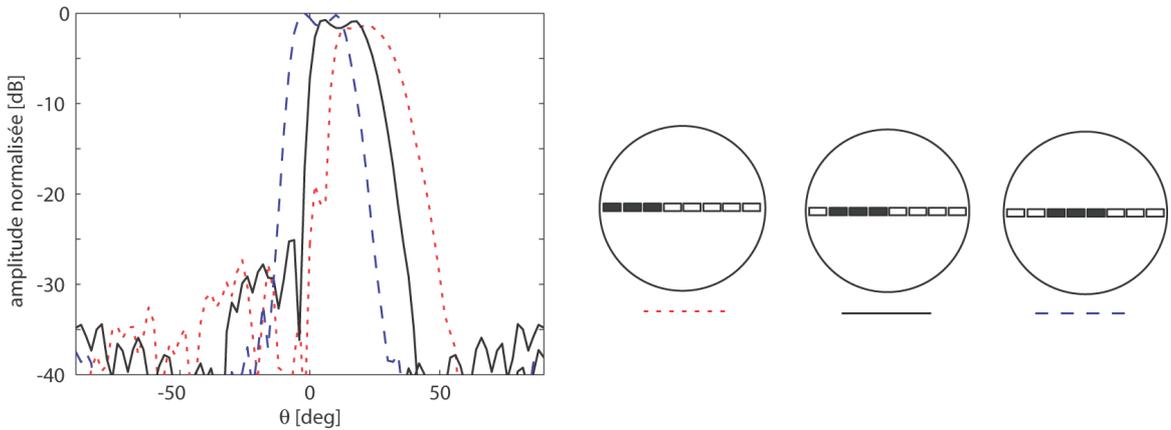


FIG. 5.37 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain à 77 GHz du système antennaire composé de huit guides d'ondes WR10, alignés dans le plan H, associés à la lentille HMFE à neuf coquilles. Un diagramme sectoriel qui dépointe est obtenu en alimentant trois sources voisines (en noir) comme expliqué sur la légende.

### 5.3.2 Validation expérimentale en bande Ka

Afin de valider expérimentalement le principe de reconfigurabilité de diagramme, une antenne active associée à la lentille HMFE à 9 coquilles est mesurée dans la bande Ka.

#### 5.3.2.1 Présentation du prototype

La lentille HMFE optimisée à neuf coquilles (présentée au paragraphe 5.1.5.2) est associée à une maquette active. Le diamètre de cette lentille est de  $4,8 \lambda_0$  à 24 GHz.

La maquette active utilisée a été développée par M. Caillet au cours de sa thèse [18] à l'IETR. Les photographies des deux faces du prototype réalisé sont montrées figure 5.38. La maquette est constituée de quatre antennes imprimées alimentées par une transition ligne-fente-ligne. Les commutateurs utilisés sont des transistors NEC NE3210s1 montés en amplificateurs. Ce montage est intéressant car il permet d'apporter un gain. En revanche, il présente l'inconvénient de ne pouvoir fonctionner que dans un sens, ici en réception. Ainsi, la topologie de l'antenne active à l'émission est différente de celle à la réception.

Pour plus de précisions sur les paramètres de cette maquette active, se référer au chapitre 5 de [18]. Il est important de noter que cette maquette active a été initialement conçue pour réaliser du changement de directivité. Elle n'est donc pas optimisée pour notre application.

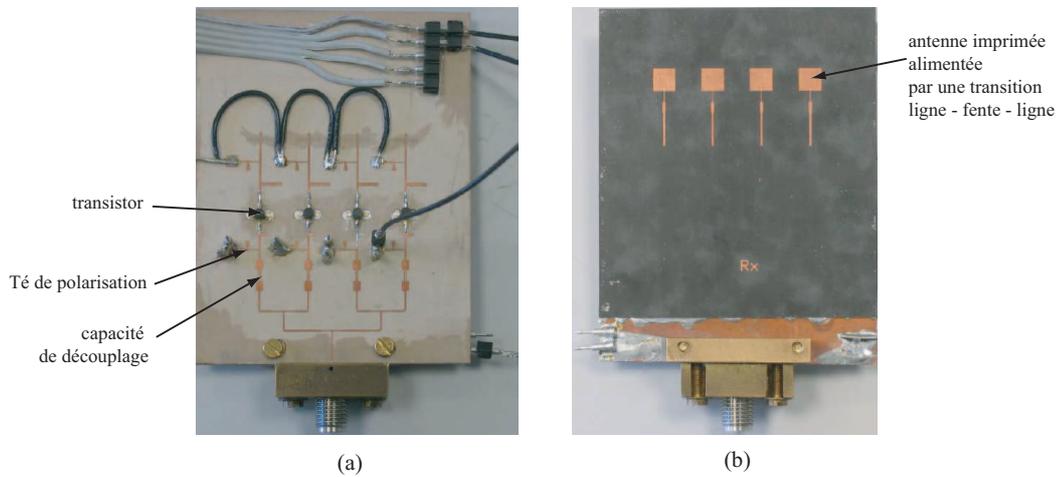


FIG. 5.38 – Maquette active constituée d’un réseau de quatre antennes imprimées fonctionnant à 23,9 GHz (hauteur : 65 mm) : (a) face circuit et (b) face rayonnante [18].

### 5.3.2.2 Résultats de simulations et de mesures

Les antennes imprimées de la maquette active (figure 5.38(b)) sont numérotés de 1 à 4 de gauche à droite.  $A_i=1 / 0$  signifie que l’antenne imprimée  $i$  est alimentée / non alimentée.

La géométrie de l’antenne lentille, simulée avec CST Microwave Studio®, est montrée figure 5.39(a). L’antenne imprimée simulée est passive et simple face. Elle ne tient donc pas compte, entre autre, des transistors et des transitions ligne-fente-ligne.

Pour être plus proche des conditions de mesure, la pondération des antennes imprimées est la suivante :

- 1 V quand ils sont alimentés,
- 0,1 V quand ils sont non alimentés, car l’isolation des commutateurs basés sur les transistors est de -20 dB.

#### Diagrammes sectoriels / directifs

Les configurations de l’antenne active pour former un diagramme :

- directif est  $A_1 A_2 A_3 A_4 = 0 1 1 0$  (seuls les deux antennes imprimées centrales sont alimentés),
- sectoriel est  $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1 1 1 1$  (toutes les antennes imprimées sont alimentées).

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus par simulation à 24 GHz de l’antenne active, seule et avec la lentille HMFE à neuf coquilles, sont tracés figure 5.39. Une étude paramétrique sur la distance source-lentille a été menée afin d’obtenir le diagramme sectoriel le plus large possible.

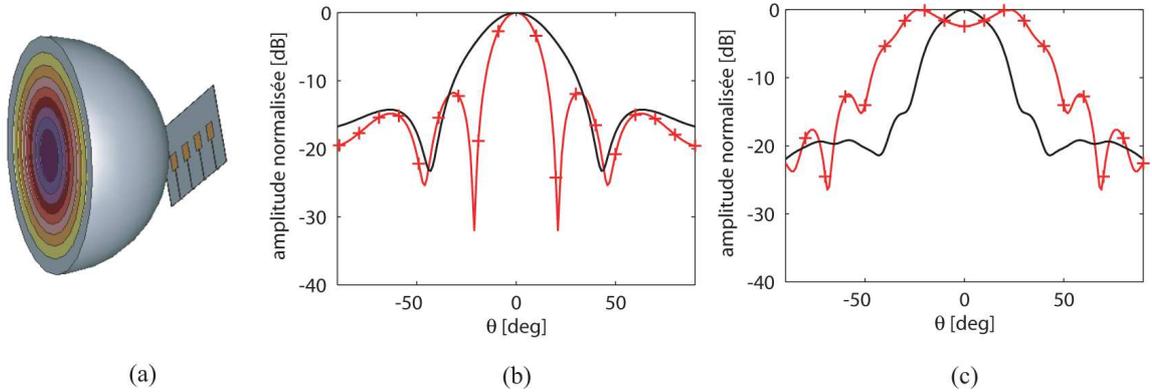


FIG. 5.39 – (a) Vue 3D des quatre antennes imprimées alimentant la lentille HMFE à 9 coquilles de diamètre  $4,8 \lambda_0$  à 24 GHz. Diagrammes de rayonnement en champ lointain à 24 GHz, obtenus avec CST Microwave Studio<sup>®</sup>, quand (+) les quatre antennes imprimées et (—) les deux antennes imprimées centrales sont alimentées : (b) de la source seule et (c) de la source avec la lentille à neuf coquilles.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain mesurés à 23,9 GHz de l'antenne active, seule et avec la lentille HMFE à neuf coquilles, sont tracés figure 5.40.

Ces diagrammes ne sont pas symétriques. En effet, tous les transistors ne sont pas exactement identiques et pas montés rigoureusement de la même façon. Ainsi, chaque antenne imprimée rayonne un champ légèrement différent en amplitude et en phase. Une étude de la sensibilité quant à ces deux paramètres permettrait de s'en assurer. De plus, en ajoutant la lentille, l'incertitude due au positionnement de la lentille par rapport au réseau est additionnée, ce qui explique que la dissymétrie soit plus importante pour le diagramme de rayonnement de l'antenne lentille que pour le diagramme de l'antenne seule.

Malgré tout, les diagrammes simulés sont proches de ceux mesurés.

L'objectif visé est la reconfigurabilité de diagramme donc l'angle d'ouverture à mi-puissance  $\Delta\theta_{-3\text{ dB}}$  est la grandeur qui nous intéresse. Elle est reportée pour l'antenne active, seule et avec la lentille, aux tableaux 5.6 et 5.7 respectivement.

TAB. 5.6 – Résultats de simulation et mesure de l'antenne seule

Configuration				Simulation à 24 GHz	Mesure à 23,9 GHz
$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\Delta\theta_{-3\text{ dB}}$	$\Delta\theta_{-3\text{ dB}}$
0	1	1	0	33°	34°
1	1	1	1	19°	18°

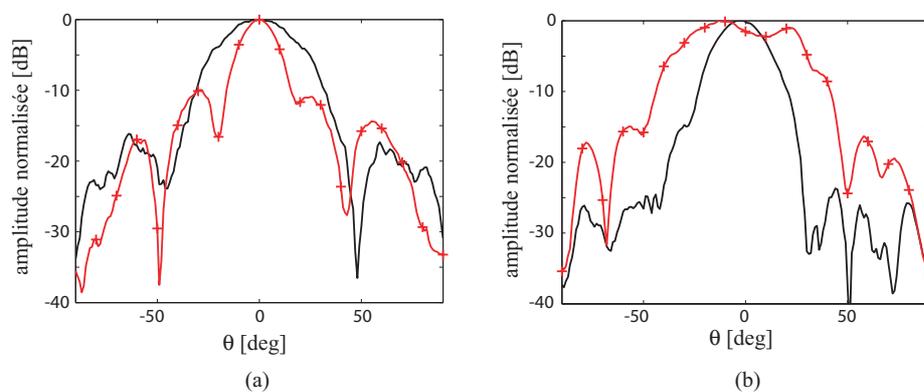


FIG. 5.40 – Diagrammes de rayonnement mesurés en champ lointain à 23,9 GHz, quand (+) les quatre antennes imprimées et (—) les deux antennes imprimées centrales sont alimentées : (a) de la source seule et (b) de la source avec la lentille HMFE à neuf coquilles.

TAB. 5.7 – Résultats de simulation et mesure de l'antenne lentille

Configuration				Simulation à 24 GHz	Mesure à 23,9 GHz
$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\Delta\theta_{-3\text{ dB}}$	$\Delta\theta_{-3\text{ dB}}$
0	1	1	0	30°	24°
1	1	1	1	66°	58°

Les angles d'ouverture à mi-puissance simulés et mesurés sont très proches pour l'antenne seule. Ils sont plus éloignés lorsque la lentille est ajoutée pour les raisons évoquées ci-dessus.

De plus, il faut noter que le gain de l'antenne lentille est de 22,6 dB pour la configuration "directive" et 19,2 dB pour la configuration "sectoriel".

### Diagrammes dépointés

Pour faire du dépointage, les configurations suivante de l'antenne active sont considérées :

- $B_1$  ( $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1 0 0 0$ ),
- $B_2$  ( $A_1 A_2 A_3 A_4 = 0 1 0 0$ ),
- $B_{12}$  ( $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1 1 0 0$ ).

Les diagrammes de rayonnement mesurés en champ lointain de l'antenne lentille correspondant à ces trois configurations d'alimentation sont tracés 5.41. Un angle de dépointage de  $29^\circ$ ,  $19^\circ$  et  $10^\circ$  est obtenu pour les configurations  $B_1$ ,  $B_{12}$  et  $B_2$  respectivement. L'antenne imprimée 1 est située à la distance  $X/R=0,44$ . Cette distance est importante lorsque la lentille est fortement discrétisée comme c'est le cas ici (cf. paragraphe 5.2.2.3). Cela explique l'augmentation de l'angle d'ouverture à mi-puissance et la remontée des lobes secondaires obtenus pour les configurations  $B_1$  et  $B_{12}$ .

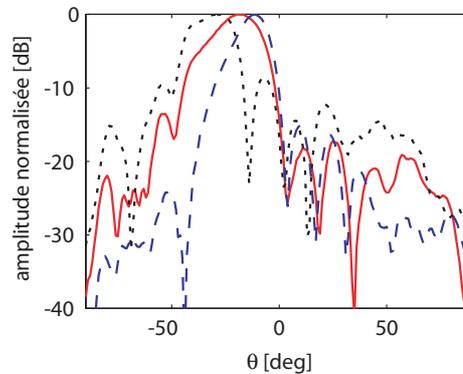


FIG. 5.41 – Diagrammes de rayonnement en champ lointain mesurés à 23,9 GHz de l'antenne lentille pour les configurations d'alimentation ( $\cdots$ )  $B_1$ , ( $-$ )  $B_{12}$  et ( $- -$ )  $B_2$ .

### 5.3.3 Conclusion et perspectives

Dans cette partie, un système antennaire, composé d'une lentille associée à plusieurs sources, a été présenté. Par une simple commutation des sources, le diagramme de rayonnement de l'antenne lentille passe de sectoriel à directif ou sectoriel dépointé.

Généralement, pour réaliser une telle reconfigurabilité de diagramme, il est nécessaire de pondérer les éléments d'un réseau en amplitude et en phase. Des atténuateurs ou

amplificateurs et déphaseurs sont ainsi nécessaires.

Le système reconfigurable proposé ici nécessite seulement des commutateurs comme composants actifs. C'est donc une solution relativement simple à mettre en œuvre et large bande.

Le principe de fonctionnement de cette antenne lentille a été présenté, vérifié par des simulations et validé expérimentalement.

Pour aller plus loin, il conviendrait d'étudier l'influence de plusieurs paramètres sur les performances de l'antenne lentille :

- les paramètres physiques de la lentille (nombre de coquilles et diamètre de la lentille),
- l'écart entre les sources.

En effet, optimiser l'écart entre les sources permet très certainement de réduire les ondulations dans le diagramme sectoriel.

De plus, le principal travail qui reste à effectuer concerne le système d'alimentation. La conception de l'arborescence et l'étude des commutateurs sont deux axes qu'il est nécessaire d'explorer pour envisager une montée en fréquence du système antennaire.

## 5.4 Conclusion

De nombreuses études paramétriques ont été effectuées afin de quantifier les performances électromagnétiques des antennes lentilles HMFE.

La lentille HMFE a d'abord été associée à une source dans l'axe pour analyser ses performances en focalisation. Globalement, la lentille HMFE est moins intéressante que la lentille de Luneburg mais à volume de diélectrique égal, la directivité de ces deux types d'antennes lentilles est très proche.

Ensuite, les performances en dépointage de la lentille HMFE ont été étudiées. Pour cela, la source est désaxée de la lentille. Bien que la lentille HMFE idéale qui n'a qu'un seul point focal, n'est théoriquement pas adaptée pour faire du dépointage, il a été montré que la lentille discrète a des capacités en balayage de faisceau intéressantes. Ces études paramétriques ont été validées expérimentalement par les mesures de prototypes d'antennes lentilles HMFE en bande W.

De plus, une autre configuration d'alimentation est étudiée : un réseau de sources actives est associé à la lentille HMFE. Ce système antennaire permet la reconfigurabilité du diagramme de rayonnement de l'antenne lentille. Le principe de fonctionnement est validé par la mesure d'un prototype fonctionnant en bande Ka.

# Bibliographie

- [1] C.A. Balanis, *Antenna Theory-Analysis and Design*, 2<sup>nd</sup> ed., New York : Wiley, 1996, pp. 609-609.
- [2] K.W. Kim and Y. Rahmat-Samii, "Spherical Luneburg lens antennas : engineering characterizations including air gap effects," in *Proc. IEEE AP-S URSI Meet.*, Atlanta, GA, 1998, pp. 2062-2065.
- [3] P.G. Ingerson, "Luneberg lenses performance limitations due to fabrication process," in *IEEE Int. Symp. Antennas and Propag.*, vol. 2, Montreal, Que, Juil. 13-18, 1997, pp.862-865.
- [4] P.G. Ingerson, "The feasibility of Luneberg lenses for 20-30 GHz applications," in *IEEE Int. Symp. Antennas and Propag.*, vol. 1, Atlanta, GA, Juin 21-26, 1998, pp.11-14.
- [5] [http ://www.eccosorb.com/catalog/eccostock/index.asp](http://www.eccosorb.com/catalog/eccostock/index.asp)
- [6] K. Uehara, K. Miyashita, K.I. Natsume, K. Hatakeyama, K. Mizuno "Lens-coupled imaging arrays for the millimeter and submillimeter wave regions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 5, pp. 806-811, Mai 1992.
- [7] X. Wu, G.V. Eleftheriades, et T.E. van Deventer-Perkins, "Design and characterization of a single- and multiple-beam mm-Wave circularly polarized substrate lens antennas for wireless communications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 6, pp. 732-737, Juin 1999.
- [8] D.F. Filipovic, G.P. Gauthier, S. Raman, G.M. Rebeiz, "Off-axis properties of Silicon and Quartz dielectric lens antennas", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 5, pp. 760-766, Mai 1997.
- [9] A.P. Pavavic, D.L. Del Rio, J.R. Mosig, G.V. Eleftheriades, "Three-Dimensional Ray-Tracing to Model Internal Reflections in Off-Axis Lens Antennas", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 2, pp. 604-612, Fev. 2006.
- [10] A.L. Peebles, "a dielectric bifocal lens for multibeam antenna applications", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, no. 5, pp. 599-606, Mai 1988.
- [11] J. Robieux, "Lois générales de la liaison entre radiateurs d'ondes," *Ann. Radioélect.*, pp. 187-229, 1959.
- [12] P.J. Wood, *Reflector antenna analysis and design*, Peter Peregrinus LTD, Institution of Electrical Engineers, 1980, Chapitre 3.

- 
- [13] F. Averty, "Antenne source pour lentille homogène en technologie mousse," Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Mars 2004.
  - [14] E. Jéhamy, "Contributions à la synthèse d'antennes focalisantes pour applications en bande millimétrique," Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Nov. 2005.
  - [15] P. Rozenfeld, "The electromagnetic theory of three-dimensional inhomogeneous lenses," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 24, no. 3, pp. 365-370, Mai 1976.
  - [16] H. Sakurai, M. Ohki, S. Kozaki, "Analysis of modified Luneberg lens using exact solutions," *IEICE Electron.*, vol.E82-C, no.10, pp. 1846-1852, Oct. 1999.
  - [17] H. Sakurai, M. Ohki, K. Motojima, S. Kozaki, "Scattering and focusing effect of stepped index Luneberg lens," *int. Journal of Infrared and Millimeter Waves.*, vol.21, no.10, pp. 1639-1651, 2000.
  - [18] M. Caillet, "Etude et conception d'un radar courte portée et d'antennes reconfigurables en bande millimétrique," Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, Nov. 2006.

# Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, les domaines de la conception, la modélisation et l'analyse des antennes lentilles inhomogènes à gradient d'indice ont été étudiés. Les contributions apportées et les perspectives dégagées sont présentées dans les parties qui suivent.

## Conception

Le problème de la fabrication des lentilles "Half Maxwell Fish-Eye" (notée HMFE) a été traité. Parmi les nombreuses techniques permettant d'approcher le gradient d'indice, il ressort que la technique des coquilles est la plus simple à mettre en œuvre. Les lentilles ainsi fabriquées sont stratifiées.

Une méthode originale a alors été proposée pour choisir les paramètres des lentilles stratifiées (épaisseur et la permittivité de chaque coquille). Cette méthode d'optimisation, indépendante de la source, a été appliquée avec succès aux lentilles de Luneburg et HMFE. Elle est généralisable à tout type de loi à dépendance radiale tant diélectrique que magnétique.

De plus, lors de la conception des antennes lentilles, la masse est souvent un critère déterminant. Des techniques pour estimer la masse des lentilles à gradient d'indice ont ainsi été proposées.

## Modélisation

Pour pouvoir analyser rapidement des antennes lentilles de toute taille, deux codes de calculs ont été développés et mis en œuvre. Le premier permet l'analyse de structures de forme sphérique et hémisphérique et le second a pour objectif l'analyse de structures de forme arbitraire. Ces deux outils de modélisation utilisent la technique de raccordement des modes (notée MMT pour "Mode Matching Technique") basée sur les fonctions d'ondes sphériques.

## Analyse de structures sphériques et hémisphériques

La MMT a déjà été appliquée pour analyser des antennes lentilles sphériques stratifiées. Une des nouveautés du travail présenté est la possibilité de prendre en compte

des sources réelles. De plus, la réaction de la lentille sur la source, généralement négligée, a été quantifiée. Enfin, la méthode de base a aussi été étendue pour pouvoir analyser des lentilles de forme hémisphérique.

La méthode ainsi développée a été appliquée pour analyser des antennes lentilles de Luneburg et HMF. Elle a été validée numériquement, par comparaison avec des logiciels commerciaux, et expérimentalement, par la mesure de prototypes.

L'intérêt majeur de cet outil de modélisation est d'être rapide et de nécessiter peu de ressources mémoires par rapport aux logiciels commerciaux. Ainsi, des antennes lentilles sphériques et hémisphériques stratifiées de très grandes dimensions devant la longueur d'onde peuvent être analysées sur un ordinateur standard, ce qui est actuellement impossible avec l'utilisation de simulateurs électromagnétiques utilisant des méthodes rigoureuses.

Le développement du champ électromagnétique en termes de modes sphériques est classiquement effectué sur une base composée de deux familles de vecteurs modaux à divergence nulle. Il permet ainsi de représenter le champ uniquement dans des zones vides de charges.

Pour combler cette lacune, une troisième famille de vecteurs de base, à divergence non nulle, doit être ajoutée. Les étapes nécessaires pour prendre en compte ce vecteur ont été introduites. Une perspective intéressante serait de développer ces étapes et de les mettre en œuvre, car les applications qui en découlent sont nombreuses : la connaissance en tout point de l'espace du champ diffracté par un objet illuminé par une source réelle, la prise de compte de milieu anisotrope, etc.

## Analyse de structures de forme arbitraire

Généralement limitée à l'analyse de structures stratifiées sphériques, la MMT a été étendue pour pouvoir prendre en compte des objets diffractants de forme arbitraire. Dans ce cas, l'application des conditions aux limites n'est pas triviale et une discrétisation des interfaces de l'objet diffractant est nécessaire.

Le problème de la diffraction d'une source quelconque par un objet stratifié de forme arbitraire a d'abord été détaillé. La mise en équation, la formulation et les méthodes de résolution sont présentés. Sans perte de généralité, cette nouvelle version de la MMT a été appliquée à l'analyse de la diffraction par des structures de révolution. Notons qu'il est désormais possible d'introduire des parties métalliques.

De nombreux résultats numériques ont été présentés afin de valider la méthode développée, d'évaluer ses performances par rapport aux logiciels commerciaux et d'estimer ses limitations.

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle nécessite seulement le maillage des interfaces (diélectriques et/ou métalliques). De plus, la finesse de cette discrétisation n'influe pas sur la taille finale du système à inverser. Ainsi, cette méthode est beaucoup moins coûteuse en temps et charge de calcul que les principaux logiciels commerciaux pour analyser des structures ouvertes de révolution.

Cependant, la MMT souffre pour l'instant d'un manque d'universalité, car les ré-

sultats obtenus sont satisfaisants seulement quand la structure analysée n'est pas "trop éloignée" de la sphère (dynamique des rayons de courbure limitée). Améliorer le maillage de la structure, paralléliser et optimiser le code développé permettrait sûrement d'obtenir de meilleurs résultats. De plus, il convient de trouver une méthode de résolution du système linéaire qui soit plus robuste. Pour cela, il semble prometteur d'appliquer la Méthode Analytique de Régularisation (MAR) afin de garantir la convergence numérique de l'inversion du système tout en contrôlant la précision des résultats obtenus. Il sera alors possible de modéliser de façon semi-analytique, l'interaction entre une structure stratifiée de forme arbitraire et une source quelconque.

## Applications

Grâce à l'outil de modélisation développé, de nombreuses études paramétriques ont été menées pour quantifier les performances électromagnétiques, jusqu'alors non reportées dans la littérature, des antennes lentilles HMFE.

Ainsi, les performances en focalisation des antennes lentilles HMFE ont été analysées et comparées à celles des lentilles de Luneburg. Globalement, la lentille HMFE est moins intéressante. Néanmoins, à volume de diélectrique égal, la directivité des ces deux types d'antennes lentilles est très proche. La forme hémisphérique de la lentille HMFE peut alors s'avérer intéressante pour certaines applications. En effet, la surface plate de cette lentille peut faciliter son intégration dans certains dispositifs.

Par ailleurs, la lentille HMFE idéale, qui n'a qu'un seul point focal, n'est théoriquement pas adaptée pour faire du dépointage. Cependant, associée à une source désaxée, la lentille HMFE discrète, dont la zone de focalisation est floue, a des capacités intéressantes en balayage de faisceau. Cela a été confirmé par les mesures de prototypes en bande W.

Enfin, en associant un réseau de sources à la lentille HMFE, un diagramme sectoriel peut être obtenu. Par une simple commutation entre ces sources, une reconfigurabilité de diagramme (directif, sectoriel ou sectoriel dépointé) peut être réalisée. La mesure en bande Ka d'un réseau d'antennes imprimées associée à une lentille HMFE a validé ce système antenne novateur.

Pour améliorer les performances de cette antenne lentille reconfigurable et la rendre plus attractive, un important travail reste à effectuer au niveau du système d'alimentation de la lentille en particulier. Les applications potentielles seront alors multiples : radars d'aide à la conduite autour de 77 GHz et systèmes de communications sans fil à 60 GHz par exemple.



# Bibliographie de l'auteur

## Revues internationales

B. Fuchs, S. Palud, L. Le Coq, O. Lafond, M. Himdi, S. Rondineau, "Scattering of spherically and hemispherically stratified lenses fed by any real source", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, accepté pour publication en 2007.

B. Fuchs, L. Le Coq, O. Lafond, S. Rondineau, M. Himdi, "Design Optimization of Multi-shell Luneburg Lenses", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 55, n°2, pp.283-289, Fév. 2007.

B. Fuchs, O. Lafond, S. Rondineau, M. Himdi, L. Le Coq, "Off-Axis Performances of Half Maxwell Fish-Eye Lens Antennas at 77 GHz", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 55, n°2, pp.479-482, Fév. 2007.

B. Fuchs, O. Lafond, S. Rondineau, M. Himdi, "Design and Characterization of Half Maxwell Fish-Eye Lens Antennas in mm-Waves", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 54, n°6, pp. 2292-2300, Juin 2006.

B. Fuchs, O. Lafond, S. Rondineau, M. Himdi, L. Le Coq, "Design and Characterization of a New Half Maxwell Fish-Eye Lens Antennas in 76-81 GHz Band", IEE Electronics Letters, vol. 42, n°5, pp. 261-262, Mars 2006.

## Brevets

Demande de brevet français, n° R13414FR, le 20 Juillet 2007.

Auteurs : B. Fuchs, S. Palud, O. Lafond, M. Himdi, L. Le Coq, S. Rondineau.

Titre : "Système antennaire dont le diagramme de rayonnement est reconfigurable parmi des diagrammes de rayonnement sectoriels et directifs, et dispositif émetteur et/ou récepteur correspondant".

Brevet français, n° 2 888 407, publié le 12 Janvier 2007.

Auteurs : O. Lafond, M. Himdi, S. Rondineau, B. Fuchs.

Titre : "Lentilles inhomogènes à gradient d'indice de type oeil de poisson de Maxwell système d'antennes et applications correspondants".

## Conférences internationales

B. Fuchs, O. Lafond, M. Himdi, S. Palud, L. Le Coq, S. Rondineau, "Modeling, design and performances of half Maxwell fish-eye lens antennas", EUCAP Nov. 2007.

S. Rondineau, B. Fuchs, O. Lafond, M. Himdi, "Scattering of stratified lenses illuminated by any real source", International Microwave and Optoelectronics Conference, Salvador, Brésil, Oct. 2007.

B. Fuchs, S. Rondineau, S. Palud, O. Lafond, M. Himdi, "Electromagnetic Modeling of Stratified Inhomogeneous Lenses fed by Real Sources", IEEE AP-S, Honolulu, USA, 10-15 Juin 2007.

B. Fuchs, O. Lafond, M. Himdi, S. Palud, L. Le Coq, S. Rondineau, "Design and characterization of half Maxwell fish-eye lens antennas in W-band ", 29th ESA antenna workshop on multiple beam and reconfigurable antenna, Noordwijk, The Netherlands, 18-20 Avril 2007.

B. Fuchs, O. Lafond, M. Himdi, S. Rondineau, L. Le Coq, "Off-Axis Properties of Half Maxwell Fish-Eye Lens Antennas at 77GHz", EUCAP Nov. 2006.

L. Le Coq, G. Godi, B. Fuchs, O. Lafond, R. Sauleau, M. Himdi, "Far field millimetric band antenna test facility : positioning procedure using phase measurements", EUCAP Nov. 2006.

B. Fuchs, O. Lafond, M. Himdi, S. Rondineau, "Design of Half-Maxwell Fish Eye Lens Antennas for automotive application in the 76-81 GHz Band", 4th ESA Workshop on Millimeter Wave Technology and Applications, Espoo, Finland, Fev. 15-17, 2006.

## Conférence nationale

B. Fuchs, S. Rondineau, O. Lafond, M. Himdi, "Modélisation électromagnétique de lentilles inhomogènes stratifiées associées à une source réelle", 15ème Journées Nationales Microondes, Toulouse, France, 23-25 Mai 2007.

# Annexe



# Annexe A

## Fonctions sphériques de Bessel

La partie radiale du problème présenté dans ce document est modulée par les fonctions sphériques de Bessel. Celles-ci ont été exhaustivement étudiées par le passé. Ainsi, nombre de leur propriétés ont déjà été mis en évidence : intégrales, récurrences, évolutions asymptotiques.

### A.1 Définition

Les fonctions sphériques de Bessel d'ordre  $n$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z \frac{dy}{dz} + [z^2 - n(n+1)] = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec  $n$  entier relatif. Les deux solutions particulières linéairement indépendantes de cette équation sont :

- les fonctions sphériques de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$ ,  $j_n(z)$ ,
- les fonctions sphériques de Bessel de seconde espèce et d'ordre  $n$ ,  $y_n(z)$ .

Toute combinaison linéaire de ces deux solutions est elle-même une solution de l'équation différentielle. Ainsi, les fonctions sphériques de troisième espèce, encore appelée fonctions sphériques de Hankel, sont définies comme les combinaisons linéaires de ces fonctions sphériques de Bessel.

Les fonctions sphériques de Hankel de première et seconde espèce d'ordre  $n$  sont :

$$h_n^{(1)} = j_n(z) + j \cdot y_n(z) \text{ et } h_n^{(2)} = j_n(z) - j \cdot y_n(z) \quad (\text{A.2})$$

Par conséquent,  $j_n(z)$ ,  $h_n(z)$ ,  $h_n^{(1)}$  et  $h_n^{(2)}$  sont solutions de l'équation différentielle et deux à deux linéairement indépendantes.

Les fonctions de Bessel qui nous intéressent sont :

$$j_n(z) = Z_n^1(z) \text{ et } h_n^{(2)} = Z_n^4(z). \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Evolutions asymptotiques

### de l'argument $z$

Ces relations sont très utiles pour l'évaluation du champ rayonné à grande distance. Pour tout entier relatif  $n$  :

$$Z_n^4(z) = j^{n+1} \frac{e^{-jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow \infty) \text{ et } K_n^4(z) = j^n \frac{e^{-jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow \infty). \quad (\text{A.4})$$

### de l'ordre $n$

Ces relations sont utilisées pour étudier la convergence des vecteurs modaux sphériques. Pour tout complexe  $z$  non nul :

$$Z_n^1(z) = \frac{n!2^n}{(2n+1)!} z^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.5})$$

$$Z_n^4(z) = j \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{1}{z^{n+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.6})$$

$$K_n^1(z) = \frac{n!2^n}{(2n+1)!} (n+1) z^{n-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.7})$$

$$K_n^4(z) = -j \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{n}{z^{n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) . \quad (\text{A.8})$$

Soit en utilisant la formule de Stirling :  $x! = \sqrt{2\pi x} x^{x+1/2} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$  [2].

$$Z_n^1(z) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.9})$$

$$Z_n^4(z) = j \frac{\sqrt{2}}{z} \left(\frac{2n}{ze}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.10})$$

$$K_n^1(z) = \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2}z} \left(\frac{ze}{2n}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.11})$$

$$K_n^4(z) = -j \frac{n\sqrt{2}}{z^2} \left(\frac{2n}{ze}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) . \quad (\text{A.12})$$

# Annexe B

## Polynômes et fonctions associées de Legendre

La théorie développée dans ce document est basée sur l'utilisation des harmoniques sphériques. Une des variations angulaires de ces harmoniques est régie par les polynômes et fonctions associées de Legendre.

### B.1 Définition

Les polynômes associés de Legendre de première espèce, d'ordre  $m$  et de degré  $n$ , notés  $P_n^m$ , sont les fonctions qui vérifient l'équation différentielle suivante :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] y = 0 \quad (\text{B.1})$$

avec  $m$  et  $n$  entiers naturels qui ne possèdent pas de singularités en  $z = \pm 1$ . Ces polynômes sont donnés par les relations :

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \text{ et } P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Relations intégrales

Les relations intégrales associées aux polynômes et fonctions associées de Legendre sont utiles pour définir des espaces orthogonaux.

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) \cdot P_\nu^m(z) dz = 0 \text{ pour } \nu \neq n, \quad \int_{-1}^1 P_n^m(z) \cdot P_n^\mu(z) \frac{dz}{1 - z^2} = 0 \text{ pour } \mu \neq m, \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(z)]^2 dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \int_{-1}^1 [P_n^m(z)]^2 \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) \cdot P_\nu^m(z) dz = \frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{n,\nu}, \quad \int_{-1}^1 z^\nu P_n(z) dz = 2^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \delta_{n,\nu}, \quad (\text{B.5})$$

où  $\delta_{p,q}$  représente le symbole de Kronecker.

### B.3 Harmoniques de surfaces

L'ensemble des variations en  $\theta$  est contenu dans les harmoniques de surfaces définies comme suit :

$$t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) = \bar{\sigma}(-1)m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \text{ avec } \sigma(-1) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma = o \\ -1 & \text{si } \sigma = e \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) = -\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{B.7})$$

$$t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) = n(n+1)P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{B.8})$$

où  $n$  décrit l'ensemble des entiers naturels et  $m$  les entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$ .

### B.4 Evolutions asymptotiques

Les relations suivantes sont extraites de la page 1018 de [1].

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+3/2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cos(\alpha_n^m) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty) \text{ et} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+3/2)} \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \theta}} \sin \alpha_n^m (n+1) \left[1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta (n+1)}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty), \quad (\text{B.10})$$

avec  $\alpha_n^m = \frac{n+1}{2}\theta + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ .

Soit en utilisant la relation p. 257 de [2] :  $\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+3/2)} = n^{m-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty)$ , il vient :

$$t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) = \bar{\sigma}(-1)m \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{\cos(\alpha_n^m)}{\sin \theta} n^{m-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty), \quad (\text{B.11})$$

$$t_{mn}^{\sigma 2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \sin \theta}} \sin \alpha_n^m n^{m-1/2} (n+1) \left[1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta (n+1)}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty), \quad (\text{B.12})$$

$$t_{mn}^{\sigma 3} = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cos(\alpha_n^m) n^{m+1/2} (n+1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty). \quad (\text{B.13})$$

## B.5 Relations d'orthogonalités

Les harmoniques de surface forment une famille génératrice d'un espace de fonctions réelles. Ces fonctions réelles sont associées à un produit scalaire : pour tout de fonctions  $f, g$  de cet espace, le produit scalaire  $f$  et  $g$  est donné par :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^\pi f(\theta) \overline{g(\theta)} \sin \theta d\theta \quad (\text{B.14})$$

où  $\bar{g}$  représente la fonction conjuguée de  $g$ . Il ressort alors un certain nombre de propriétés d'orthogonalité :

$$\langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{m\nu}^{\sigma 1} \rangle = m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,\nu}, \quad (\text{B.15})$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{m\nu}^{\sigma 2} \rangle = \left( 2n \frac{n+1}{2n+1} - m \right) \delta_{n,\nu}, \quad (\text{B.16})$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{m\nu}^{\sigma 3} \rangle = n^2 (n+1)^2 \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,\nu}, \quad (\text{B.17})$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{\mu\nu}^{\sigma 1} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{m\nu}^{\sigma 1} \rangle \cdot \delta_{m,\nu}, \quad \langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{\mu\nu}^{\sigma 2} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{m\nu}^{\sigma 2} \rangle \cdot \delta_{m,\nu}, \quad \langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{\mu\nu}^{\sigma 3} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{m\nu}^{\sigma 3} \rangle \cdot \delta_{m,\nu}. \quad (\text{B.18})$$



# Annexe C

## Relations d'orthogonalités

### C.1 Fonctions circulaires

Les fonctions trigonométriques utilisées dans cette étude sont :

$$f_m^\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sin(m\varphi) & \text{si } \sigma = e \\ \cos(m\varphi) & \text{si } \sigma = o \end{cases}, \quad (\text{C.1})$$

avec  $n \in \{1, \dots, +\infty\}$ ,  $m \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$  et  $\sigma \in \{e, o\}$ .

Le produit scalaire associé à deux fonctions  $f$  et  $g$  de l'espace engendré par ces fonctions est :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi, \quad (\text{C.2})$$

où  $\bar{g}$  représente la fonction conjuguée de  $g$ .

La norme associée est ainsi :

$$\|f\|^2 = \langle f|f \rangle = \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (\text{C.3})$$

Les relations d'orthogonalités qui en découlent sont alors :

$$\langle f_m^\sigma | f_{m'}^{\sigma'} \rangle = \int_0^{2\pi} f_m^\sigma(\varphi) \overline{f_{m'}^{\sigma'}(\varphi)} d\varphi = \|f\|^2 \delta_{m,m'} \cdot \delta_{\sigma,\sigma'} \quad \text{avec} \quad \|f\|^2 = \langle f_m^\sigma | f_m^\sigma \rangle = \pi e_m^\sigma, \quad (\text{C.4})$$

avec :

$$e_m^\sigma = \begin{cases} e_m, & \text{si } \sigma = o \\ e'_m, & \text{si } \sigma = e \end{cases} = 1 + \sigma(-1) \cdot \delta_{m,0}, \quad \sigma(-1) = \begin{cases} +1, & \text{si } \sigma = o \\ -1, & \text{si } \sigma = e \end{cases}, \quad (\text{C.5})$$

$$e_m = \begin{cases} 2, & \text{si } m = 0 \\ 1, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} = 1 + \delta_{m,0}, \quad e'_m = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 0 \\ 1, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} = 1 - \delta_{m,0}. \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Vecteurs modaux sphériques

Les expressions des vecteurs modaux sphériques  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$ ,  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  sont :

$$\vec{M}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) = -Z_n^s(z)t_{mn}^{\sigma 1}(\theta)f_m^\sigma(\varphi)\hat{\theta} + Z_n^s(z)t_{mn}^{\sigma 2}(\theta)f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi)\hat{\varphi} \quad (\text{C.7})$$

$$\vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) = \frac{Z_n^s(z)}{z}t_{mn}^{\sigma 3}(\theta)f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi)\hat{r} - K_n^s(z)t_{mn}^{\sigma 2}(\theta)f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi)\hat{\theta} - K_n^s(z)t_{mn}^{\sigma 1}(\theta)f_m^\sigma(\varphi)\hat{\varphi} \quad (\text{C.8})$$

$$\vec{L}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) = \frac{dZ_n^s(z)}{dz} \frac{t_{mn}^{\sigma 3}(\theta)}{n(n+1)}f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi)\hat{r} - \frac{Z_n^s(z)}{z}t_{mn}^{\sigma 2}(\theta)f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi)\hat{\theta} - \frac{Z_n^s(z)}{z}t_{mn}^{\sigma 1}(\theta)f_m^\sigma(\varphi)\hat{\varphi}. \quad (\text{C.9})$$

Ces vecteurs modaux forment une famille génératrice d'un espace de vecteurs. Ils sont associés à un produit scalaire : pour tout couple de vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  de cet espace, le produit scalaire entre les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est donné par :

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle_2 = \iint_{\Omega} (\vec{A} \cdot \vec{B}) d\Omega \quad \text{avec} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{C.10})$$

Les relations d'orthogonalités qui en découlent sont alors :

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma s} | \vec{L}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{2\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} e_m^{\bar{\sigma}} \left[ n Z_{n-1}^s(z) \overline{Z_{n-1}^{s'}(z)} + \dots \right. \\ \left. (n+1) Z_{n+1}^s(z) \overline{Z_{n+1}^{s'}(z)} \right]_{z=kr} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.11})$$

$$\left\langle \vec{M}_{mn}^{\sigma s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{\pi e_m^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}} \left[ Z_n^s(z) \overline{Z_n^{s'}(z)} \right]_{z=kr} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.12})$$

$$\left\langle \vec{N}_{mn}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{\pi e_m^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}} \left[ n(n+1) \frac{Z_n^s(z) \overline{Z_n^{s'}(z)}}{|z|^2} + K_n^s(z) \overline{K_n^{s'}(z)} \right]_{z=kr} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.13})$$

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\left\langle \vec{M}_{mn}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_2 = \frac{\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left\{ \left[ e_m^{\bar{\sigma}} \frac{2n(n+1)}{2n+1} \right] \times \dots \right. \\ \left[ n Z_{n-1}^s(z) \overline{Z_{n-1}^{s'}(z)} + n Z_{n-1}^s(z) \overline{Z_{n+1}^{s'}(z)} - \dots \right. \\ \left. (n+1) Z_{n+1}^s(z) \overline{Z_{n-1}^{s'}(z)} - (n+1) Z_{n+1}^s(z) \overline{Z_{n+1}^{s'}(z)} \right]_{z=kr} + \dots \\ \left[ e_m^{\bar{\sigma}} \left( \frac{2n(n+1)}{2n+1} - m \right) + m e_m^{\sigma} \right] \times \dots \\ \left[ (n+1) Z_{n-1}^s(z) \overline{Z_{n-1}^{s'}(z)} - n Z_{n-1}^s(z) \overline{Z_{n+1}^{s'}(z)} + \dots \right. \\ \left. (n+1) Z_{n+1}^s(z) \overline{Z_{n-1}^{s'}(z)} - n Z_{n+1}^s(z) \overline{Z_{n+1}^{s'}(z)} \right]_{z=kr} \left. \right\} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'}. \quad (\text{C.16})$$

Pour  $n \in \{1, \dots, \infty\}$ ,  $m \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\sigma \in \{e, o\}$  et  $s \in \{1, 4\}$ , les vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  ainsi que  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont orthogonaux entre eux.

Nous définissons le produit scalaire tridimensionnel :

$$\left\langle \vec{A} | \vec{B} \right\rangle_3 = \int_0^\infty \left\langle \vec{A} | \vec{B} \right\rangle_2(z) dz \quad (\text{C.17})$$

Les relations d'orthogonalités deviennent :

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma 1} | \vec{L}_{m'n'}^{\sigma' 1} \right\rangle_3 = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} e_m^{\bar{\sigma}} \frac{4n^2+4n-1}{(2n-1)(2n+3)} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.18})$$

$$\left\langle \vec{M}_{mn}^{\sigma 1} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' 1} \right\rangle_3 = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} e_m^{\bar{\sigma}} n(n+1) \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.19})$$

$$\left\langle \vec{N}_{mn}^{\sigma 1} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' 1} \right\rangle_3 = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} e_m^{\bar{\sigma}} \frac{n(n+1)(4n^2+4n+3)}{(2n-1)(2n+3)} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{C.20})$$

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma s} | \vec{M}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_3 = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\left\langle \vec{M}_{mn}^{\sigma s} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' s'} \right\rangle_3 = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\left\langle \vec{L}_{mn}^{\sigma 1} | \vec{N}_{m'n'}^{\sigma' 1} \right\rangle_3 = \frac{4\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} e_m^{\bar{\sigma}} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'}. \quad (\text{C.23})$$

# Annexe D

## Evolutions asymptotiques

Les expressions exactes des évolutions asymptotiques des coefficients modaux sphériques, des vecteurs modaux sphériques et des produits entre ces coefficients et vecteurs sont données dans cette annexe.

Ces relations sont utiles pour : vérifier la convergence des séries étudiées, améliorer les composantes du système linéaire étudié et expliquer certains résultats obtenus.

### D.1 Coefficients modaux

Rappelons le résultat provenant de l'application du théorème de la moyenne.

Il existe deux points  $P_a$  et  $P_b$  dans le volume  $V_0$  contenant l'ensemble des sources considérées, ici  $\vec{J}_v^e$  uniquement, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} V_0 \left[ \vec{J}_v^e(P_{a,b}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_a) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_b) \end{array} \right\} \right]. \quad (\text{D.1})$$

En utilisant les évolutions asymptotiques des fonctions de Bessel (annexe A.2) et des polynômes de Legendre (annexe B.4), il vient, après quelques développements, les

équivalents asymptotiques suivants pour  $m$  fixé :

$$\begin{aligned}
|a_{mn}^{\sigma 1}| &= \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} V_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta_a}} \frac{2n+1}{n^{m+3/2}(n+1)} \frac{1}{z_a} \left(\frac{2n}{z_a e}\right)^n \cdots \\
&\quad \left| J_{\theta_a}^e \sqrt{2} f_m^\sigma(\varphi_a) \frac{m}{\sin \theta_a} \cos \alpha_{n_a}^m \cdots \right. \\
&\quad \left. + J_{\varphi_a}^e \frac{1}{\sqrt{2}} f_m^\sigma(\varphi_a) \left(1 + \frac{\cotan \alpha_{n_a}^m}{\sin \theta_a(n+1)}\right) (n+1) \sin \alpha_{n_a}^m \right| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
|a_{mn}^{\sigma 4}| &= \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} \frac{V_0}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta_a}} \frac{1}{n^{m+3/2}(n+1)} \left(\frac{z_a e}{2n}\right)^n \cdots \\
&\quad \left| J_{\theta_a}^e \sqrt{2} f_m^\sigma(\varphi_a) \frac{m}{\sin \theta_a} \cos \alpha_{n_a}^m \cdots \right. \\
&\quad \left. + J_{\varphi_a}^e \frac{1}{\sqrt{2}} f_m^\sigma(\varphi_a) \left(1 + \frac{\cotan \alpha_{n_a}^m}{\sin \theta_a(n+1)}\right) (n+1) \sin \alpha_{n_a}^m \right| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
|b_{mn}^{\sigma 1}| &= \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} \frac{V_0}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi \sin \theta_b}} \frac{2n+1}{n^{m+3/2}(n+1)} \frac{1}{z_b^2} \left(\frac{2n}{z_b e}\right)^n \cdots \\
&\quad \left| J_{r_b}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) \cos \alpha_{n_b}^m n(n+1) + J_{\theta_b}^e f_m^\sigma(\varphi_b) \left(1 + \frac{\cotan \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b(n+1)}\right) \sin \alpha_{n_b}^m n(n+1) \cdots \right. \\
&\quad \left. + J_{\varphi_b}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) m \frac{\cos \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b} n \right| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
|b_{mn}^{\sigma 4}| &= \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} \frac{V_0}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi \sin \theta_b}} \frac{2n+1}{n^{m+3/2}(n+1)} \frac{1}{z_b^2} \left(\frac{z_b e}{2n}\right)^n \cdots \\
&\quad \left| J_{r_b}^e f_m^\sigma(\varphi_b) \cos \alpha_{n_b}^m \frac{n(n+1)}{2n+1} + J_{\theta_b}^e \frac{1}{2} f_m^\sigma(\varphi_b) \left(1 + \frac{\cotan \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b(n+1)}\right) \sin \alpha_{n_b}^m \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdots \right. \\
&\quad \left. + J_{\varphi_b}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) m \frac{\cos \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b} \frac{n+1}{2n+1} \right| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

## D.2 Vecteurs modaux

D'après les expressions des vecteurs modaux (données en annexe C.2) et en utilisant les annexes A.2 et B.4, nous obtenons les équivalents suivants pour  $m$  fixé :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{M}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta}} \frac{n^{m-1/2}}{2n+1} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n \left[ f_m^{\sigma 2} 2m^2 \left( \frac{\cos \alpha_n^m}{\sin \theta} \right)^2 \dots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\bar{\sigma} 2} \frac{1}{2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right]^2 \right]^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n})) (n \rightarrow \infty) \quad (D.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \vec{M}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 &= \frac{2}{\sqrt{\pi \sin \theta}} n^{m-1/2} \frac{1}{z} \left( \frac{2n}{ze} \right)^n \left[ f_m^{\sigma 2} 2m^2 \left( \frac{\cos \alpha_n^m}{\sin \theta} \right)^2 \dots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\bar{\sigma} 2} \frac{1}{2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right]^2 \right]^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n})) (n \rightarrow \infty) \quad (D.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \vec{N}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta}} \frac{n+1}{2n+1} n^{m-1/2} \frac{1}{z} \left( \frac{ze}{2n} \right)^n \dots \\ &\quad \left[ f_m^{\bar{\sigma} 2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ \cotan \alpha_n^m + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right) \right]^2 \dots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\sigma 2} \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 2 \cos^2 \alpha_n^m \right]^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n})) (n \rightarrow \infty) \quad (D.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \vec{N}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} n^{m-1/2} \frac{1}{z^2} \left( \frac{2n}{ze} \right)^n \dots \\ &\quad \left[ f_m^{\bar{\sigma} 2} n^2 (n+1)^2 \left[ \sqrt{2} \cos \alpha_n^m + \sin \alpha_n^m \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right) \right]^2 \dots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\sigma 2} \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 \cos^2 \alpha_n^m 2n^2 \right]^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n})) (n \rightarrow \infty) \quad (D.9) \end{aligned}$$

## D.3 Produits entre vecteurs et coefficients modaux

Avant de calculer l'équivalent asymptotique des produits entre vecteurs et coefficients modaux, il est judicieux d'effectuer la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \begin{array}{c} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\sigma s} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{array} \right\} \right\|_2 &= \frac{k^2 \eta}{\pi^2 \epsilon_m} V_0 \frac{\Gamma(n+m+1)^2}{\Gamma(n+3/2)} \frac{c_{mn}}{\sqrt{\sin \theta \sin \theta_{a,b}}} \cdot \left| \begin{array}{c} Z_n^{\bar{s}}(z_a) Z_n^s(z) \\ K_n^{\bar{s}}(z_b) K_n^s(z) \end{array} \right| \dots \\ \left| \vec{J}^e(P_{a,b}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{\pi \sin \theta_a}}{Z_n^{\bar{s}}(z_a)} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+m+1)} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_a) \\ \frac{\sqrt{\pi \sin \theta_b}}{K_n^{\bar{s}}(z_b)} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+m+1)} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(P_b) \end{array} \right\} \right| &\cdot \left\| \begin{array}{c} \frac{\sqrt{\pi \sin \theta}}{Z_n^s(z)} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+m+1)} \vec{M}_{mn}^{\sigma s}(P) \\ \frac{\sqrt{\pi \sin \theta}}{K_n^s(z)} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+m+1)} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma} s}(P) \end{array} \right\|_2 \cdot \quad (D.10) \end{aligned}$$

Il vient alors, toujours après quelques développements, les expressions suivantes pour  $m$  fixé :

$$\begin{aligned} \left\| a_{mn}^{\sigma 1} \vec{M}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 &= \frac{k^2 \eta}{2\pi^2 e_m} V_0 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta \sin \theta_a}} \frac{1}{n^2(n+1)} \frac{1}{z_a} \left( \frac{z}{z_a} \right)^n \left| J_{\theta_a}^e \sqrt{2} f_m^\sigma(\varphi_a) \frac{m}{\sin \theta_a} \cos \alpha_{n_a}^m \cdots \right. \\ &\quad + J_{\varphi_a}^e \frac{1}{\sqrt{2}} f_m^\sigma(\varphi_a) \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_{n_a}^m}{\sin \theta_a(n+1)} \right) (n+1) \sin \alpha_{n_a}^m \left| \left[ f_m^{\sigma 2} 2m^2 \left( \frac{\cos \alpha_n^m}{\sin \theta} \right)^2 \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_m^{\sigma 2} \frac{1}{2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right]^2 \right]^{1/2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n \rightarrow \infty) \right|, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} \left\| a_{mn}^{\sigma 4} \vec{M}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 &= \frac{k^2 \eta}{\pi^2 e_m} V_0 \frac{1}{\sqrt{2 \sin \theta \sin \theta_a}} \frac{1}{n^2(n+1)} \left( \frac{z_a}{z} \right)^n \left| J_{\theta_a}^e \sqrt{2} f_m^\sigma(\varphi_a) \frac{m}{\sin \theta_a} \cos \alpha_{n_a}^m \cdots \right. \\ &\quad + J_{\varphi_a}^e \frac{1}{\sqrt{2}} f_m^\sigma(\varphi_a) \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_{n_a}^m}{\sin \theta_a(n+1)} \right) (n+1) \sin \alpha_{n_a}^m \left| \left[ f_m^{\sigma 2} 2m^2 \left( \frac{\cos \alpha_n^m}{\sin \theta} \right)^2 \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_m^{\sigma 2} \frac{1}{2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right]^2 \right]^{1/2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n \rightarrow \infty) \right|, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \left\| b_{mn}^{\sigma 1} \vec{N}_{mn}^{\sigma 1} \right\|_2 &= \frac{k^2 \eta}{2\pi^2 e_m} V_0 \frac{1}{\sqrt{2 \sin \theta \sin \theta_b}} \frac{1}{n^2} \frac{1}{z_b^2} \frac{1}{z} \left( \frac{z}{z_b} \right)^n \left| J_{\theta_b}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) \cos \alpha_{n_b}^m n(n+1) \cdots \right. \\ &\quad + J_{\theta_b}^e f_m^\sigma(\varphi_b) \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b(n+1)} \right) \sin \alpha_{n_b}^m n(n+1) + J_{\varphi_a}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) m \frac{\cos \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b} n \left| \cdots \right. \\ &\quad \left[ f_m^{\sigma 2} (n+1)^2 \sin^2 \alpha_n^m \left[ \cotan \alpha_n^m + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right) \right]^2 \cdots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\sigma 2} \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 2 \cos^2 \alpha_n^m \right]^{1/2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) (n \rightarrow \infty) \right|, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \left\| b_{mn}^{\sigma 4} \vec{N}_{mn}^{\sigma 4} \right\|_2 &= \frac{k^2 \eta}{\sqrt{2} \pi^2 e_m} V_0 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta \sin \theta_b}} \frac{2n+1}{n^2(n+1)} \frac{1}{z_b^2} \frac{1}{z^2} \left( \frac{z_b}{z} \right)^n \left| J_{\theta_b}^e f_m^\sigma(\varphi_b) \cos \alpha_{n_b}^m \frac{n(n+1)}{2n+1} \cdots \right. \\ &\quad + J_{\theta_b}^e \frac{1}{2} f_m^\sigma(\varphi_b) \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b(n+1)} \right) \sin \alpha_{n_b}^m \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdots \\ &\quad + J_{\varphi_b}^e 2 f_m^\sigma(\varphi_b) m \frac{\cos \alpha_{n_b}^m}{\sin \theta_b} \frac{n+1}{2n+1} \left| \cdots \right. \\ &\quad \left[ f_m^{\sigma 2} n^2 (n+1)^2 \left[ \sqrt{2} \cos \alpha_n^m + \sin \alpha_n^m \left( 1 + \frac{\cotan \alpha_n^m}{\sin \theta(n+1)} \right) \right]^2 \cdots \right. \\ &\quad \left. + f_m^{\sigma 2} \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 \cos^2 \alpha_n^m 2n^2 \right]^{1/2} (n \rightarrow \infty) \right|. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

# Annexe E

## Détails du système sur-déterminé

La structure du système linéaire sur-déterminé  $Cx = y$  est détaillé dans cette annexe. Pour une meilleure compréhension, la géométrie de l'objet diffractant et les notations associées ainsi que la structure du système matriciel sont rappelées figure E.1 (a) et (b) respectivement.

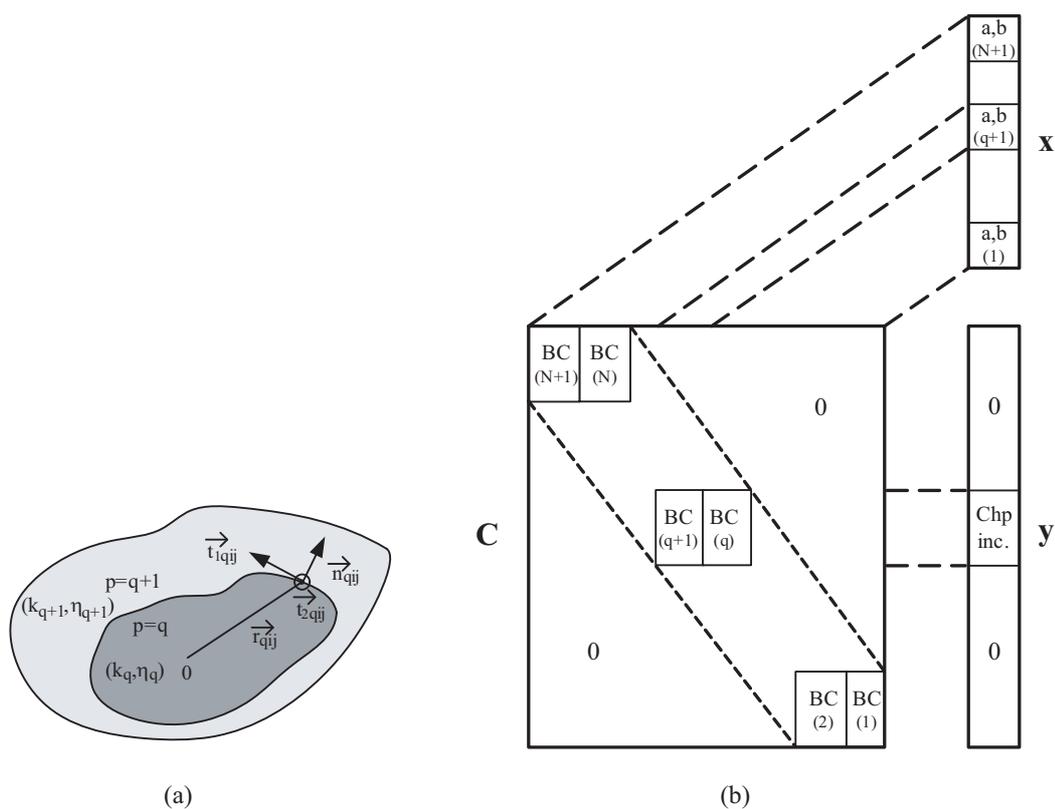


FIG. E.1 – (a) Géométrie de l'objet diffractant et notations associées et (b) structure du système matriciel.

## E.1 Matrice $C$

$C$  est une matrice rectangulaire diagonale bande complexe qui a la composition suivante :

$$C = [C^N \mid \cdots \mid C^q \mid \cdots \mid C^1]^T,$$

où  $N$  est le nombre de couches de la lentille et  $A^T$  est la matrice transposée non conjuguée de  $A$ .

$$C^q = [0_{(p-1) \times L} \mid BC^{q+1} \mid -BC^q \mid 0_{(N-q) \times L}]^T,$$

où  $BC^{q+1}$  et  $BC^q \in [1 \times L]$  et sont notés, sur la figure E.1(b),  $BC_{(q+1)}$  et  $BC_{(q)}$  pour des raisons de place.

$$BC^q = [BC_{11} \mid \cdots \mid BC_{ij} \mid \cdots \mid BC_{nb_\theta, nb_\varphi}]^T,$$

où  $(nb_\theta, nb_\varphi)$  sont les nombres de discrétisation en  $(\theta, \varphi)$ .

$$BC_{ij} = [BC_1^T \mid BC_2^T \mid \cdots \mid BC_6^T]^T,$$

pour les 6 conditions aux limites.

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} MN^\sigma(k\vec{r}) &= [\vec{M}^{\sigma 4}(k\vec{r}) \mid \vec{N}^{\sigma 4}(k\vec{r}) \mid \vec{M}^{\sigma 1}(k\vec{r}) \mid \vec{N}^{\sigma 1}(k\vec{r})] \\ NM^\sigma(k\vec{r}) &= [\vec{N}^{\sigma 4}(k\vec{r}) \mid \vec{M}^{\sigma 4}(k\vec{r}) \mid \vec{N}^{\sigma 1}(k\vec{r}) \mid \vec{M}^{\sigma 1}(k\vec{r})], \end{aligned}$$

où  $\sigma \in \{e, o\}$  et avec :

$$\vec{X}^{\sigma s}(k\vec{r}) = [\vec{X}_{01}^{\sigma s}(k\vec{r}) \cdots \vec{X}_{0N_t}^{\sigma s}(k\vec{r}) \mid \vec{X}_{11}^{\sigma s}(k\vec{r}) \cdots \vec{X}_{1N_t}^{\sigma s}(k\vec{r}) \mid \cdots \mid \vec{X}_{N_t N_t}^{\sigma s}(k\vec{r})],$$

où  $\vec{X} \in \{\vec{M}, \vec{N}\}$ . A une interface  $p$  entre deux diélectriques :

$$\begin{aligned} BC_{12} &= [\vec{t}_{1/2}(\vec{r}_{p_{ij}})] \cdot [MN^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid MN^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}})] \\ BC_{34} &= \frac{j}{\eta_{p+1}} [\vec{t}_{1/2}(\vec{r}_{p_{ij}})] \cdot [NM^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid NM^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}})] \\ BC_5 &= j \frac{k_{p+1}}{\eta_{p+1}} [\vec{n}(\vec{r}_{p_{ij}})] \cdot [MN^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid MN^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}})] \\ BC_6 &= j k_{p+1} [\vec{n}(\vec{r}_{p_{ij}})] \cdot [NM^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid NM^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}})] \end{aligned}$$

Si un conducteur électrique parfait, d'épaisseur négligeable, est placé entre ces deux diélectriques, les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{aligned} BC_{12} &= [\vec{t}_{1/2}(\vec{r}_{p_{ij}})]. \left[ MN^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid MN^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \right] \\ BC_{34} &= 0_{1 \times Q} \\ BC_5 &= j \frac{k_{p+1}}{\eta_{p+1}} [\vec{n}(\vec{r}_{p_{ij}})]. \left[ MN^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid MN^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \right] \\ BC_6 &= j k_{p+1} [\vec{n}(\vec{r}_{p_{ij}})]. \left[ NM^e(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \mid NM^o(k_{p+1}\vec{r}_{p_{ij}}) \right]. \end{aligned}$$

## E.2 Vecteur d'inconnues $x$

Avec la matrice  $C$  précédemment décrite, le vecteur  $x$  a nécessairement la structure suivante :

$$\begin{aligned} x &= [x^{N+1} \mid \dots \mid x^q \mid \dots \mid x^1]^T \\ x^q &= [x^e \mid x^o]^T \\ x^\sigma &= [a^{\sigma 4} \mid b^{\sigma 4} \mid a^{\sigma 1} \mid b^{\sigma 1}]^T \\ \gamma^{\sigma s} &= [\gamma_{01}^{\sigma s} \dots \gamma_{0N_t}^{\sigma s} \mid \gamma_{11}^{\sigma s} \dots \gamma_{1N_t}^{\sigma s} \mid \dots \mid \gamma_{N_t N_t}^{\sigma s}]^T, \text{ où } \gamma^{\sigma s} \in \{a^{\sigma s}, b^{\sigma s}\}. \end{aligned}$$

## E.3 Vecteur second membre $y$

Le vecteur  $y$  est de la forme :

$$y = [y^N \mid \dots \mid y^q \mid \dots \mid y^1]^T. \quad (\text{E.1})$$

Si la source est à l'intérieur de la couche  $p = q$ , où  $p \in \{1, \dots, N\}$ , alors seul  $y^q$  est non nul et s'écrit :

$$y^q = [y_{11} \mid \dots \mid y_{ij} \mid \dots \mid y_{nb_\theta, nb_\varphi}]^T. \quad (\text{E.2})$$

Si la source est dans l'air, i.e. dans la couche  $p = N + 1$ , le second membre est :

$$y^{N+1} = - [y_{11} \mid \dots \mid y_{ij} \mid \dots \mid y_{nb_\theta, nb_\varphi}]^T. \quad (\text{E.3})$$

Au point de discrétisation  $(i, j)$ , le sous-vecteur  $y_{ij}$  s'écrit :

$$y_{ij} = [Y_1^{inc} \mid Y_2^{inc} \mid \dots \mid Y_6^{inc}]^T. \quad (\text{E.4})$$

La  $k^{\text{ème}}$  condition aux limites appliquée au champ incident a pour valeur  $Y_k^{inc}$  et ses expressions, pour  $k \in \{1, \dots, 6\}$ , sont :

$$Y_{12}^{inc} = \sum_{m,n,\sigma,s} a_{mn}^{i\sigma s} \vec{t}_{12}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{M}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) + b_{mn}^{i\sigma s} \vec{t}_{12}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) \quad (\text{E.5})$$

$$Y_{34}^{inc} = \frac{j}{\eta_p} \sum_{m,n,\sigma,s} a_{mn}^{i\sigma s} \vec{t}_{12}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) + b_{mn}^{i\sigma s} \vec{t}_{12}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma} s}(\vec{r}_{pij}) \quad (\text{E.6})$$

$$Y_5^{inc} = j \frac{k_p}{\eta_p} \sum_{m,n,\sigma,s} a_{mn}^{i\sigma s} \vec{n}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{M}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) + b_{mn}^{i\sigma s} \vec{n}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) \quad (\text{E.7})$$

$$Y_6^{inc} = j k_p \sum_{m,n,\sigma,s} a_{mn}^{i\sigma s} \vec{n}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}_{pij}) + b_{mn}^{i\sigma s} \vec{n}(\vec{r}_{pij}) \cdot \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma} s}(\vec{r}_{pij}), \quad (\text{E.8})$$

où  $(a_{mn}^{i\sigma s}, b_{mn}^{i\sigma s})$  sont les coefficients modaux de la source.

# Annexe F

## Détails des matrices "d'homogénéisation"

La composition des matrices "d'homogénéisation"  $N_x$  et  $N_U$  est ici détaillée. Ces matrices ont pour rôle de réduire la dynamique des composantes de  $x$  et  $A$  du système à résoudre  $Ax = b$  en vue d'améliorer son conditionnement.

### F.1 Matrice $N_x$

$N_x$  est une matrice diagonale telle que  $\tilde{x} = N_x^{-1}x$  où les composantes de  $\tilde{x}$  sont de l'ordre de 1. D'après la structure du vecteur d'inconnues  $x$  (Annexe E.2), la diagonale de la matrice  $N_x$ , notée  $N_x^{diag}$ , a la composition suivante :

$$\begin{aligned} N_x^{diag} &= [\tilde{n}_x^{N+1} \mid \dots \mid \tilde{n}_x^q \mid \dots \mid \tilde{n}_x^1]^T \\ \tilde{n}_x^q &= [\tilde{n}_x^e \mid \tilde{n}_x^o]^T \\ \tilde{n}_x^\sigma &= [\tilde{a}^{\sigma 4} \mid \tilde{b}^{\sigma 4} \mid \tilde{a}^{\sigma 1} \mid \tilde{b}^{\sigma 1}]^T \\ \tilde{\gamma}^{\sigma s} &= [\tilde{\gamma}_{01}^{\sigma s} \cdots \tilde{\gamma}_{0N_t}^{\sigma s} \mid \tilde{\gamma}_{11}^{\sigma s} \cdots \tilde{\gamma}_{1N_t}^{\sigma s} \mid \cdots \mid \tilde{\gamma}_{N_t N_t}^{\sigma s}]^T, \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

où  $\tilde{\gamma}_{mn}^{\sigma s} \in \{\tilde{a}_{mn}^{\sigma s}, \tilde{b}_{mn}^{\sigma s}\}$  sont calculés à partir des équivalents asymptotiques des coefficients modaux donnés en Annexe D.1 :

$$\tilde{a}_{mn}^{\sigma 1} = \frac{1}{n^{m+1/2}} \left( \frac{2n}{z_{source} e} \right)^n, \quad (\text{F.2})$$

$$\tilde{b}_{mn}^{\sigma 1} = \frac{1}{n^{m-1/2}} \left( \frac{2n}{z_{source} e} \right)^n, \quad (\text{F.3})$$

$$\tilde{a}_{mn}^{\sigma 4} = \frac{1}{n^{m+3/2}} \left( \frac{z_{source} e}{2n} \right)^n, \quad (\text{F.4})$$

$$\tilde{b}_{mn}^{\sigma 4} = \frac{1}{n^{m+1/2}} \left( \frac{z_{source} e}{2n} \right)^n, \quad (\text{F.5})$$

où  $z_{source} = k_{source} r_{source}$ , avec  $k_{source}$  le nombre d'onde dans le milieu contenant la source et  $r_{source} \in V_0$  le volume contenant les sources.

## F.2 Matrice $N_U$

$N_U$  est une matrice diagonale qui a pour rôle de réduire la dynamique de  $U$ . Or,  $U = N_x^* A N_x$ , donc la diagonale de  $U$  a un comportement du même ordre que  $|\gamma|^2 \|\vec{\Gamma}\|_2^2$ , où  $\gamma^{\sigma s} \in \{a, b\}$  et  $\vec{\Gamma} \in \{\vec{M}, \vec{N}\}$ . Compte tenu des structures de  $N_x$  et  $C$  (Annexe E.1), la diagonale de la matrice  $N_U$ , notée  $N_U^{diag}$ , a la composition suivante :

$$\begin{aligned} N_U^{diag} &= [\tilde{n}_U^{N+1} \mid \dots \mid \tilde{n}_U^q \mid \dots \mid \tilde{n}_U^1]^T \\ \tilde{n}_U^q &= [\tilde{n}_U^e \mid \tilde{n}_U^o]^T \\ \tilde{n}_U^\sigma &= \left[ \tilde{a}^{\sigma 4} \widetilde{M}^{\sigma 4} \mid \tilde{b}^{\sigma 4} \widetilde{N}^{\sigma 4} \mid \tilde{a}^{\sigma 1} \widetilde{M}^{\sigma 1} \mid \tilde{b}^{\sigma 1} \widetilde{N}^{\sigma 1} \right]^T \\ \tilde{\gamma}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}^{\sigma s} &= \left[ \tilde{\gamma}_{01}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{01}^{\sigma s} \dots \tilde{\gamma}_{0N_t}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{0N_t}^{\sigma s} \mid \tilde{\gamma}_{11}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{11}^{\sigma s} \dots \tilde{\gamma}_{1N_t}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{1N_t}^{\sigma s} \mid \dots \mid \tilde{\gamma}_{N_t N_t}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{N_t N_t}^{\sigma s} \right]^T, \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

où  $\tilde{\gamma}_{mn}^{\sigma s} \widetilde{\Gamma}_{mn}^{\sigma s} \in \left\{ \tilde{a}^{\sigma s} \widetilde{M}^{\sigma s}, \tilde{b}^{\sigma s} \widetilde{N}^{\sigma s} \right\}$  sont calculés à partir des équivalents asymptotiques des coefficients modaux donnés en Annexe D.3 :

$$\tilde{a}_{mn}^{\sigma 1} \widetilde{M}^{\sigma 1} = \left( \frac{z_1}{z_{source}} \right)^n \frac{1}{n}, \quad (\text{F.7})$$

$$\tilde{b}_{mn}^{\sigma 1} \widetilde{N}^{\sigma 1} = \left( \frac{z_1}{z_{source}} \right)^n n, \quad (\text{F.8})$$

$$\tilde{a}_{mn}^{\sigma 4} \widetilde{M}^{\sigma 4} = \left( \frac{z_{source}}{z_4} \right)^n \frac{1}{n}, \quad (\text{F.9})$$

$$\tilde{b}_{mn}^{\sigma 4} \widetilde{N}^{\sigma 4} = \left( \frac{z_{source}}{z_4} \right)^n n, \quad (\text{F.10})$$

où  $z_4 = k_{q+1} r_{q moy}$  et  $z_1 = k_q r_{q moy}$  sont les longueurs électriques au rayon moyen  $r_{q moy}$  de la coquille  $q$ .

# Bibliographie

- [1] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 6<sup>th</sup> ed., Alan Jeffrey, 1994.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York : Dover, 1970.

## Résumé

Certaines lentilles inhomogènes à gradient d'indice présentent de nombreuses propriétés intéressantes (focalisation, dépointage, comportement large bande, etc.). Parmi celles-ci, la lentille hémisphérique "Half Maxwell Fish-Eye" (HMFE) a rarement été étudiée auparavant. Cette thèse a pour but d'approfondir les connaissances sur cette lentille. Des outils de conception et d'analyse ont ainsi été développés.

Une méthode d'optimisation de la discrétisation du gradient d'indice a été proposée et appliquée aux lentilles HMFE et de Luneburg. Elle permet de choisir les paramètres des lentilles stratifiées et est généralisable à tout type de loi à dépendance radiale tant diélectrique que magnétique.

La majeure partie de ce travail de thèse est consacrée au développement de deux codes de calcul utilisant la technique de raccordement des modes basée sur les fonctions d'ondes sphériques. Le premier code permet l'analyse rapide des lentilles stratifiées de forme sphérique et hémisphérique de toute taille associées à une source réelle. Le second est formulé pour prendre en compte des structures stratifiées de forme arbitraire avec la possibilité d'introduire du métal. Cette méthode est appliquée à l'étude d'objets diffractants de révolution.

D'un point de vue applicatif, les performances en focalisation des antennes lentilles HMFE sont analysées et comparées à celles des lentilles de Luneburg. Les capacités de dépointage de cette lentille sont aussi quantifiées et une antenne lentille HMFE reconfigurable est présentée. Ces performances sont validées par des mesures d'antennes lentilles HMFE en ondes millimétriques.

**Mots clés :** antennes millimétriques, antennes lentilles, lentilles inhomogènes, modélisation analytique, technique de raccordement des modes, fonctions modales sphériques.

## Abstract

Some gradient index lenses exhibit many interesting properties (focalization, multibeam, broadband behavior, etc.). Among these lenses, the hemispherical Half Maxwell Fish-Eye (HMFE) lens has not been investigated thoroughly. To deepen the knowledge of this lens, both conception and analysis tools have been developed in this thesis.

An optimization method of the gradient index discretization has been proposed and applied to both HMFE and Luneburg lenses. This method allows to choose the stratified lens parameters and it can be easily extended to any dielectric or magnetic radial distribution.

The main part of this thesis is dedicated to the development of two computing codes, using the so-called mode matching technique based on spherical wave functions. The first code gives access to a fast analysis of spherically and hemispherically stratified lenses of any size associated with any real source. The second one is formulated to take into account stratified structures of arbitrary shape with a possibility to add metallic structures. This method is applied to the study of axisymmetric scatterers.

From an application point of view, the focalization performances of HMFE lens antennas are investigated and compared to those of Luneburg lenses. The off-axis performances of this lens are also quantified and a reconfigurable HMFE lens antenna is presented. These performances are validated by HMFE lens antenna characterizations in millimeter wave.

**Keywords:** millimeter wave antennas, lens antennas, inhomogeneous lenses, analytical modelization, mode matching technique, spherical modal functions.