

Analyse et optimisation de problèmes sous contraintes d'autocorrélation

Soutenance de Thèse présentée par Marc **FUENTES**

sous la direction de Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

29 Octobre 2007

Plan de l'exposé

- Contraintes d'autocorrélation
- Exemples en Traitement du Signal
- Propriétés du cône \mathcal{C}_{n+1}
- Algorithmes pour les problèmes sous contraintes d'autocorrélation
- Extension au cas de signaux bidimensionnels

Contraintes d'autocorrélation I

- **Q** : soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, en posant $H(z) = \sum_{k=0}^n h_k z^k$ peut-t-on trouver $h_0, \dots, h_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$X(z) = \sum_{k=-n}^n x_{|k|} z^k = |H(z)|^2, \quad (1)$$

pour tout $z \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?

- $H(z)$ s'appelle une **factorisation spectrale** de $X(z)$
- A priori, une telle écriture, n'existe pas pour tout x . En effet avec $z = e^{i\omega}$ l'équation (1) équivaut à

$$\sum_{l=-n}^n x_l e^{il\omega} = \left(\sum_{p=0}^n h_p e^{ip\omega} \right) \left(\sum_{q=0}^n h_q e^{-iq\omega} \right),$$

Contraintes d'autocorrélation II

ce qui donne après identification des coefficients

$$x_l = \sum_{p=0}^{n-|l|} h_p h_{p+|l|} \text{ pour } l = 0, \dots, n. \quad (2)$$

que l'on désignera comme des contraintes d'autocorrélation sur x .

- On en déduit que x doit appartenir à un certain sous-ensemble $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
- Certains auteurs ont étudié \mathcal{C}_{n+1} :
 - Krein et Nudelman (1977)
 - Dumitrescu *et. al* (2001)
 - Alkire et Vanderberghe(2002)

Synthèse de Filtre

$$x \longrightarrow \boxed{\sum_{l=0}^n h(l)x(k-l)} \longrightarrow y = h \star x$$

- **But** : imposer des contraintes sur la réponse fréquentielle

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{k=0}^n h_k e^{ik\omega} \right|,$$

par exemple du type

$$|H(\omega)| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } \omega \in [\alpha, \beta].$$

- **Solution** : on peut réécrire ce type de contraintes sous la forme

$$\varepsilon^2 \mathbf{e}_0 - \mathcal{L}_{\alpha, \beta} x \in \mathcal{C}_{n+1}$$

Estimation de Densité Spectrale

- **Problème** : estimation des coefficients d'autocorrélation \hat{r}_k d'un processus stochastique stationnaire au sens large :

$$\hat{R}(\omega) = \hat{r}_0 + 2 \sum_{k=0}^n \hat{r}_k \cos(k\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, \pi],$$

permet d'assurer la positivité de la densité spectrale d'énergie.

- **Solution** : on cherche donc la solution du problème de projection

$$(Est) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} & \|x - \hat{r}\|_2^2 \\ & x \in \mathcal{C}_{n+1}, \end{cases}$$

\mathcal{C}_{n+1} : définition par générateurs

- Soit $\text{corr}_a : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application bilinéaire de composantes

$$\text{corr}_a(x, y)_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i y_{i+k} \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Alors on définit \mathcal{C}_{n+1} comme

$$\mathcal{C}_{n+1} = \{\text{corr}_a(y, y) \mid y \in \mathbb{R}^{n+1}\} \quad (3)$$

- Soit E^k le $k^{\text{ème}}$ décalage à droite de terme général

$$(E^k)_{ij} = [i = k + j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k + j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i, j \in \{0, \dots, n\}$ et $[p(x)]$ représente le symbole d'Iverson pour le prédicat p

- Soit $A^{(k)} = \frac{1}{2}(E^k + (E^k)^\top)$ la “symétrisée” de E^k

$$A^{(k)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

alors en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ Q &\mapsto \begin{pmatrix} \langle\langle A^{(0)}, Q \rangle\rangle \\ \vdots \\ \langle\langle A^{(n)}, Q \rangle\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\langle\langle A, B \rangle\rangle = \text{Tr}(A^\top B)$, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{A}(\{yy^\top \mid y \in \mathbb{R}^{n+1}\}) = \mathcal{A}(P_1).}$$

\mathcal{C}_{n+1} : définition par contraintes

- Si on impose la positivité de la densité spectrale d'énergie,

$$\mathcal{C}_{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall \omega \in [0, \pi] x_0 + 2 \sum_{k=1}^n x_k \cos k\omega \geq 0 \right\}. \quad (4)$$

- Les deux définitions (3) et (4) sont équivalentes en vertu du **Théorème 1 (Riesz-Féjer)** *Un polynôme trigonométrique pair $R(\omega)$ de degré $\leq n$ peut s'écrire*

$$\left| \sum_{l=0}^n h_l e^{il\omega} \right|^2$$

avec h_0, \dots, h_n réels si et seulement si $R(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in [0, \pi]$.

Quelques Propriétés de \mathcal{C}_{n+1}

- En posant $v(\omega) = (1, 2 \cos \omega, \dots, 2 \cos n\omega) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $H_\omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v(\omega), x \rangle \geq 0\}$, alors

$$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcap_{\omega \in [0, \pi]} H_\omega^+$$

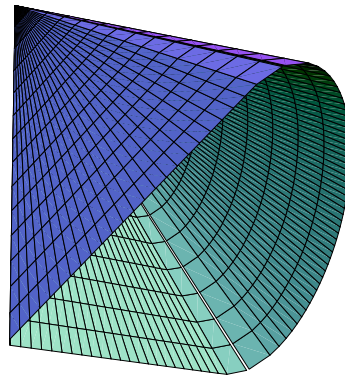
- On voit directement que \mathcal{C}_{n+1} est un cône **convexe, fermé**,
- On peut démontrer très facilement qu'il est d'intérieur non-vide, et saillant
- \mathcal{C}_{n+1} est un cône **aigu** :

$$\langle x, y \rangle \geq 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathcal{C}_{n+1}^2.$$

Preuve : utiliser Fourier en complétant avec des zéros, puis l'identité de Parseval-Plancherel.

Faces de \mathcal{C}_{n+1}

- $\partial\mathcal{C}_{n+1}$ lisse/non-lisse (considerer des points particuliers)



- **Conjecture** : si $F(s)$ est une face de dimension k de \mathcal{C}_{n+1} exposée par s alors

$$\text{rang}(\mathcal{A}^*(s)) \leq n + 1 - k$$

- **Facettes** : \mathcal{C}_{n+1} a (au moins) deux facettes exposées respectivement par $s_1 = (1, 2, \dots, 2)$ et $s_2 = (1, -2, \dots, 2(-1)^n)$.

Base compacte de \mathcal{C}_{n+1}

- \mathcal{C}_{n+1} est saillant, il est donc engendré par une base compacte

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{A}(\{yy^\top \mid y \in \mathbb{S}_n\})$$

- Comme $\max_{x \in \mathcal{U}_n} x_i = \max_{x \in \mathbb{S}_n} \langle A^{(i)}x, x \rangle = \lambda_1(A^{(i)})$, on peut trouver le parallépipède minimal englobant \mathcal{C}_{n+1} .
- Nous avons trouvé une diagonalisation des $A^{(i)} : i \in \{1, \dots, n\}$ et p, m_1 ainsi que m_2 définis par

$$p = \left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor, m_1 = i - n - 1 + ip, m_2 = n + 1 - ip = i - m_1.$$

$$\text{spec}(A^{(i)}) = \begin{cases} \cos\left(\frac{l\pi}{p+1}\right) & l = 1, \dots, p \text{ de multiplicité } m_1 \\ \cos\left(\frac{l\pi}{p+2}\right) & l = 1, \dots, p+1 \text{ de multiplicité } m_2 \end{cases}$$

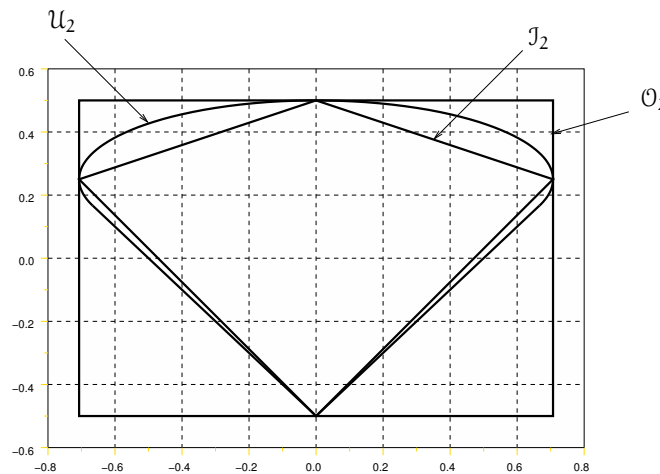
Diagonalisation des $A^{(i)}$

- Quand $n + 1 = ip$ alors en posant $c \in \mathbb{R}^p$ et $V \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ tels que

$$c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \text{ et } V_{kl} = \sin\left(\frac{kl\pi}{p+1}\right) \text{ pour } k, l \in \{1, \dots, p\},$$

alors

$$A^{(i)} = \frac{2}{p+1} (V \otimes I_i) (\text{diag}(c) \otimes I_i) (V \otimes I_i)^\top$$



Re-paramétrisation de \mathcal{C}_{n+1}

- Comme $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{A}(P_1)$ remarquons que

$$P_1 = \{yy^\top \mid y \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \{M \in \mathcal{S}_{n+1}^+(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(M) \leq 1\}$$

et relaçons alors la contrainte de rang, alors

$$\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{A}(\mathcal{S}_{n+1}^+(\mathbb{R})) \tag{5}$$

- (5) est une Inégalité Linéaire Matricielle (LMI) :
 - **Avantage** : codes existants (SeDuMi, SDPT3)
 - **Inconvénient** : $n(n+1)/2$ variables! au lieu de n .

Dualité

- Soit l'adjoint de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}^*(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & 2x_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_n & \cdots & x_1 & 2x_0 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n x_i A^{(i)}.$$

- Le cône polaire \mathcal{C}_{n+1}° défini par

$$\mathcal{C}_{n+1}^\circ = \{x \in E \mid \forall y \in \mathcal{C}_{n+1} \langle x, y \rangle_E \leq 0\}$$

est caractérisé par

$$\mathcal{C}_{n+1}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathcal{A}^*(x) \preceq 0\}$$

et donc le cône normal à \mathcal{C}_{n+1} en \bar{x} est simplement

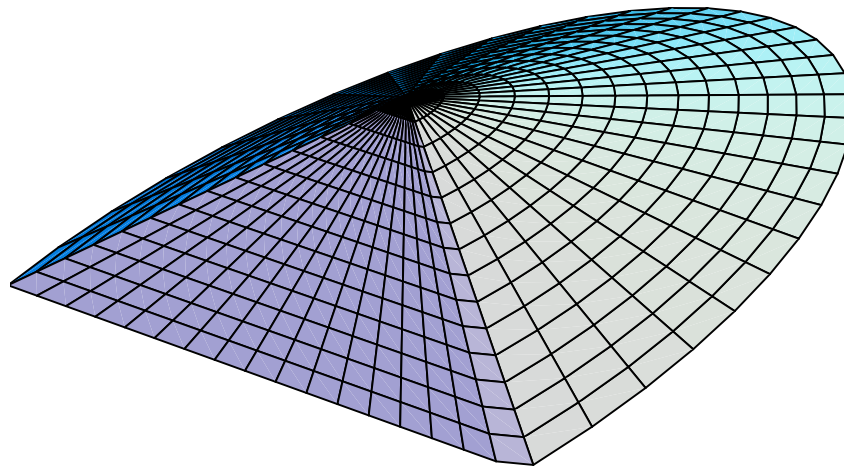
$$\mathcal{N}(\mathcal{C}_{n+1}, \bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathcal{A}^*(x) \preceq 0, \langle \bar{x}, x \rangle = 0\}$$

Cône polaire de \mathcal{C}_{n+1}

- Formulation par générateurs du cône polaire

$$\mathcal{C}_{n+1}^\circ = \text{cone}(\{(-1, -2 \cos \omega, \dots, -2 \cos n\omega) : \omega \in [0, \pi]\}),$$

où $\text{cone}(A)$ est l'enveloppe convexe conique de A .



Algorithmes numériques \mathcal{C}_{n+1}

- Optimisation Semi-Infinie : discrétisation de $\omega \in [0, \pi]$ puis Optimisation sous contraintes affines.
- Algorithme de suivi de chemin dual : $\phi(x) = -\ln \det \mathcal{A}^*(-x)$ est une $n + 1$ BALC pour \mathcal{C}_{n+1}° (Alkire, 2002)
- Projections alternées : on projette successivement sur $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ (matrices Toeplitz symétriques) et sur le convexe $\mathcal{S}_{n+1}^-(\mathbb{R})$.
- Relaxation Non-Convexe : en utilisant la paramétrisation $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{A}(\{xx^\top \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}\})$, et une méthode Quasi-Newton sur la fonction norme au carré.

Suivi de Chemin

- Soit à résoudre

$$(Est) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} & \|x - \widehat{\gamma}\|_2^2 \\ & x \in \mathcal{C}_{n+1}, \end{cases}$$

- En calculant la projection sur le cône polaire (Théorème de Moreau)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} \begin{cases} \|x - r\|_2^2 \\ x \in \mathcal{C}_{n+1}^o \end{cases} \Leftrightarrow \min_{x,t} \begin{matrix} t \\ \begin{pmatrix} x - r \\ t \\ x \end{pmatrix} \succeq_{L_{n+2}} 0 \\ x \succeq_{\mathcal{C}_{n+1}^o} 0 \end{matrix} .$$

à l'aide de la barrière $\psi(u) = -\log \det \mathcal{A}^*(-u)$.

- coût d'évaluation naïf de $\nabla^2 \psi$: $\mathcal{O}(n^4)$ pour tout $h, k \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\nabla^2 \psi(x)[h, k] = \langle \langle \mathcal{A}^*(x)^{-1} \mathcal{A}^*(h) \mathcal{A}^*(x)^{-1}, \mathcal{A}^*(k) \rangle \rangle$$

Suivi de Chemin II

- **Astuce** : on utilise la FFT pour ramener le coût à $\Rightarrow \mathcal{O}(n^3)$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x) = & \frac{2}{N^2} W^* \left(\sum_{k=0}^n r_k r_k^\top \right) \circ \left(\sum_{l=0}^n r_l r_l^\top \right) \overline{W} \\ & + \frac{2}{N^2} W^* \left(\sum_{k=0}^n r_k r_k^* \right) \circ \left(\sum_{l=0}^n r_l r_l^* \right) \overline{W} \end{aligned}$$

- Tests numériques : code C++/BLAS/FFTW (Biprosesseur à 3.06Ghz)

n	tps CPU/lt	tps CPU
10	8e-4s	0.01s
100	8.8e-2s	1.4s
400	2.87s	57.4s
1000	133s	46m51s
2000	-	>1,5 J

avec $\mu = 2, \varepsilon = 1e - 3$ paramètres de l'algorithme.

Projections Alternées

- On constate que

$$\mathcal{C}_{n+1}^\circ = (\mathcal{A}^*)^{-1} (\mathcal{S}_{n+1}^-(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1}))$$

et on peut “identifier” \mathcal{C}_{n+1}° comme l’intersection de deux convexes

- Projection sur $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$: les $A^{(i)}$ forment une famille **orthogonale** pour $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.
- Projection sur $\mathcal{S}_{n+1}^-(\mathbb{R})$: diagonalisation, puis élimination des valeurs propres positives.
- **Problème** : $(\mathcal{A}^*)^{-1}$ n’est pas une isométrie produit scalaire de $(\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1}), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ sur $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- Cet algorithme n’est efficace que pour minimiser par rapport à la norme

$$\|x\|_w = \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i}{n+1-i} \right)^2}.$$

Relaxation non-convexe

- Si on considère le problème *non-convexe* équivalent à (*Est*)

$$(NC) \left\{ \min_{y \in \mathbb{R}^{n+1}} \|\mathcal{A}(yy^\top) - c\|_2^2, \right.$$

on peut en chercher des **bons minima locaux**.

- **Avantages** : calcul rapide la fonction-objectif f_c et de son gradient (coût $\in \mathcal{O}(n \log n)$)

$$\nabla f_c(y) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(yy^\top) - c)y,$$

peut être interprété comme deux corrélations imbriquées.

- On relaxe alors la condition d'optimalité

$$\underbrace{\mathcal{A}^*(\bar{x} - c) \succeq 0}_{\text{cond. d'optimalité}} \quad \text{devient} \quad \underbrace{\mathcal{V}(\bar{y})\mathcal{V}(\bar{y})^\top}_{\text{opérateur positif}} + \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(\bar{y}\bar{y}^\top) - c) \succeq 0$$

Relaxation non-convexe II

- Utilisation d'un code Quasi-Newton code à Mémoire Limitée (M1QN3)
- **avantages** : minimisation sans contraintes pour des grandes tailles ($n \approx 10^4$, tps CPU 1mn.), la solution est toujours primal réalisable
- **inconvénient** : aucune garantie sur la convergence vers le minimum global

n	err_{ipm}	err_{qn}	$\lambda_{max}(\mathcal{A}^*(c - x_{qn}))$	$T_{ipm}(s)$	$T_{qn}(s)$
10	2.14e-10	4.07e-09	-1.88e-07	0.23	0.01
50	7.6e-11	5.33e-09	-1.13e-06	1.88	0.05
100	5.99e-11	5.77e-06	-0.001	9.95	0.06
200	6.37e-11	2.31e-07	2.90e-05	65.55	0.07
300	5.55e-11	0.0042	-2.21	440.32	0.12

Signaux Bidimensionnels

Pas de Théorème de Riesz-Féjér en plusieurs variables! \Rightarrow

Trois cônes différents

- matrices autocorrélées

$$\mathcal{C}_{m,n} = \{\text{corr}_a(Y, Y) \mid Y \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\}.$$

- sommes de carrés de degré borné (SOSBD)

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}))$$

- polynômes trigonométriques positifs

$$\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{mn} \mid \sum_{k=(-m+1, -n+1)}^{(m-1, n-1)} x_{|k|} z^k \geq 0, \forall z \in \mathbb{T}^2 \right\}$$

Matrices autocorrélées

- La corrélation de deux matrices est

$$\text{corr}_a(X, Y)_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1-i} \sum_{l=0}^{n-1-j} X_{kl} Y_{(k+i)(l+j)} \text{ for } \begin{cases} i = 0, \dots, m-1 \\ j = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

que l'on peut réécrire en

$$\text{corr}_a(X, Y)_{ij} = \langle\langle (E^{n,j} \otimes E^{m,i})^\top, \text{vec}(X)\text{vec}(Y)^\top \rangle\rangle$$

Posons

$$A^{ij} = \frac{1}{2} \left((E^{n,j} \otimes E^{m,i})^\top + E^{n,j} \otimes E^{m,i} \right),$$

et $\mathcal{A} : \mathcal{S}_{mn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{A}(M)_{ij} = \langle\langle A^{ij}, M \rangle\rangle$ donc,

$$\mathcal{C}_{m,n} = \mathcal{A}(\{xx^\top \mid x \in \mathbb{R}^{mn}\}). \quad (6)$$

- $\mathcal{C}_{m,n}$ est fermé, d'intérieur non vide, saillant, et *a priori* **non-convexe**

Sommes de carrés de degré borné

- Si on remplace xx^\top par $M \succeq 0$ dans (6) on obtient le cône

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R})).$$

- Appelé SOSBD du fait que $x \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}))$ est équivalent à pouvoir réécrire

$$P_x(z) := \sum_{k=(-m+1, -n+1)}^{m-1, n-1} x_{|k|} z^k$$

en une somme de carrés

$$P_x(z) = \sum_{k=1}^r |F_k(z)|^2 \text{ où } F_k(z) = \sum_{p=0}^{m-1, n-1} f_p^k z^p, \text{ pour } k = 1, \dots, r.$$

- $\mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}))$ est un cône fermé, d'intérieur non vide, saillant et évidemment **convexe**.

Polynômes Trigonométriques Positifs

- En posant $z = \exp(i\omega)$ avec $\omega \in [0, 2\pi]^2$,

$$\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{mn} \mid \sum_{k=(-m+1, -n+1)}^{m-1, n-1} x_{|k|} e^{i\langle k, \omega \rangle} \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi]^2 \right\}$$

Si dans cette expression, on regroupe les exponentielles complexes conjuguées, alors

$$\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T}) = \{ x \in \mathbb{R}^{mn} \mid \langle x, v(\omega) \rangle \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi]^2 \}$$

où

$$v(\omega) = (1, 2 \cos \omega_1, \dots, 2 \cos(m-1)\omega_1, 2 \cos \omega_2, \dots, 2 \cos((m-1)\omega_1 + (n-1)\omega_2)).$$

- $\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T})$ est donc un cône **convexe** fermé, saillant et d'intérieur non vide.

Relations entre ces cônes

- (SOSBD) est l'enveloppe convexe de $\mathcal{C}_{m,n}$

$$\text{cone}(\mathcal{C}_{m,n}) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R})).$$

- (Dritschel, 2004) a prouvé que :

“Un polynôme strictement positif est toujours une somme de carrés, mais le degré maximum dans la décomposition peut être arbitrairement grand.”

- Donc il vient que

$$\mathcal{C}_{m,n} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T})$$

Adjoint de \mathcal{A}

Pour $x = [x^0, \dots, x^{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{A}^*(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{B}(x^0) & \mathcal{T}(x^1) & \cdots & \mathcal{T}(x^{n-1}) \\ \mathcal{T}(x^1)^\top & \mathcal{B}(x^0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathcal{T}(x^1) \\ \mathcal{T}(x^{n-1})^\top & \cdots & \mathcal{T}(x^1)^\top & \mathcal{B}(x^0) \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{T} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ construit une matrice Toeplitz à partir du vecteurs y

$$\mathcal{T}(y) = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{m-1} \\ 0 & y_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_1 \\ 0 & \cdots & 0 & y_0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B} = \mathcal{T} + \mathcal{T}^\top$$

$\Rightarrow \mathcal{A}^*(x)$ est donc une matrice Toeplitz par blocs eux-mêmes Toeplitz.

Cône polaire de $\mathcal{C}_{m,n}$

- Grâce à l'adjoint,

$$\mathcal{C}_{m,n}^\circ = [\mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}))]^\circ = \{X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid \mathcal{A}^*(X) \preceq 0\}.$$

- \mathcal{A}^* est **bien structurée**, $\mathcal{A}^*(X) \preceq 0$ est donc une LMI pour laquelle nous pouvons concevoir un algorithme sur-mesure afin de projeter sur $\mathcal{C}_{m,n}^\circ$ (et donc aussi sur $\mathcal{A}(\mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}))$) grâce à la barrière

$$\psi(x) = -\log \det \mathcal{A}^*(-x);$$

- Avec une FFT 2D, on peut calculer $\nabla^2 \psi$ en $\mathcal{O}((mn)^3)$ au lieu $\mathcal{O}((mn)^4)$.

Polaire de $\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T})$

- Expression par générateurs

$$\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T})^\circ = \text{cone}(\{-v(\omega) \mid \omega \in [0, 2\pi]^2\}).$$

- Avec le théorème de Bochner (cf. Megretski, 2003), on peut obtenir une expression sous forme d'inégalités

$$\mathcal{P}_{m,n}^+(\mathbb{T})^\circ = \{x \in \mathbb{R}^{m,n} \mid T_r(x) \preceq 0, \forall r \in \mathbb{N}\}.$$

où

$$[T_r(x)]_{ij} = y_{\varphi(i)-\varphi(j)}$$

est une matrice doublement Toeplitz et $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}^2$ une énumération de \mathbb{Z}^2 et y dépend linéairement de x

Projection sur $\mathcal{C}_{m,n}$

- **Problème** : $\mathcal{C}_{m,n}$ est *a priori* non-convexe \Rightarrow Unicité ?
Problème NP-difficile ?

- **Heuristique** :

- Résoudre par Quasi-Newton (e.g. M1QN3) avec une évaluation rapide (i.e. $\mathcal{O}(mn \log(mn))$) du gradient

$$(\mathcal{NC}) \left\{ \bar{y} \in \arg \min_{y \in \mathbb{R}^{mn}} \|\mathcal{A}(yy^\top) - c\|_2^2 \right.$$

- et résoudre par suivi de chemin le problème dual

$$(\mathcal{D}) \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \in \arg \min_{X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \|X - C\|_2^2 \\ X \in \mathcal{C}_{m,n}^\circ \end{array} \right. .$$

- Alors on peut encadrer la solution par

$$\|\bar{X}\|^2 \leq \|C - p_{\mathcal{C}_{m,n}}(C)\|^2 \leq \|\mathcal{A}(\bar{y}\bar{y}^\top) - C\|^2.$$

Tests Numériques

- Des tests en petite dimension :

m	n	$val(\mathcal{NC}, x_0)$	$val(\mathcal{R})$	$T_{qn}(s)$	$T_{IPM}(s)$
5	2	0.839551	0.839644	0.01	0
5	5	0.910695	0.910783	0.02	2
10	5	3.281424	3.281727	0.03	14
10	10	5.350762	5.349270	0.05	118
15	7	5.442012	5.433882	0.05	39
15	15	14.236943	14.180545	0.13	352
20	10	11.984636	11.981227	0.11	1163
20	20	23.515661	23.311975	0.39	12297

avec $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\mu = 2$ pour le suivi de chemin.

- La résolution par suivi de chemin est très limitée ; avec $m = n = 20$, on commence à manipuler des matrices d'ordre 4096.

Conclusions et Perspectives

- Conclusions
 - Géométrie de \mathcal{C}_{n+1} (Faces, acuité, Encadrement)
 - Développement d'Algorithmes pour le problème de projection
 - Généralisation au cas bidimensionnel.
- Pistes de Recherches
 - Prouver ou infirmer la conjecture à propos des *faces*
 - Trouver les éléments propres des A^{ij}
 - Etudier le cas infini $x_t = \int_{\mathbb{R}} y(u+t)y(u) du$
 - Trouver une alternative intéressante aux points intérieurs en grande dimension pour résoudre le problème dual (pour $\mathcal{C}_{m,n}^\circ$ et \mathcal{C}_{n+1}°).

Merci de votre Attention!

