



HAL
open science

Contribution à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnétostatique.

Cédric Boulbe

► **To cite this version:**

Cédric Boulbe. Contribution à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnétostatique.. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2007. Français. NNT: . tel-00196421v1

HAL Id: tel-00196421

<https://theses.hal.science/tel-00196421v1>

Submitted on 12 Dec 2007 (v1), last revised 17 Dec 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

**l'UNIVERSITÉ de PAU et des PAYS de
l'ADOUR**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET DE
LEURS APPLICATIONS

par

Cédric BOULBE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**Contribution à la résolution des équations de la
magnétohydrodynamique et de la
magnétostatique**

Soutenue le 2 octobre 2007

Après avis des rapporteurs :

M. **Jacques Blum** Professeur - Université de Nice Sophia Antipolis - France
M. **Laurent Villard** Professeur - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne - Suisse

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de :

M. **Tahar Amari** Directeur de recherche CNRS - Ecole Polytechnique - Palaiseau - France
M. **Tahar Boulmezaoud** Maître de conférence - Université de Versailles Saint Quentin - France
M. **Gérard Gagneux** Professeur - Université de Pau et des Pays de l'Adour - France
M. **Patrick Joly** Directeur de recherche - INRIA - Rocquencourt - France
M. **Jean Marie Thomas** Professeur - Université de Pau et des Pays de l'Adour - France

-2007-

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord les deux Tahar : Tahar Amari et Tahar Boulmezaoud de m'avoir proposé un sujet de thèse aussi riche qu'intéressant, de leur soutien tout au long de cette thèse et de leur complémentarité. Je remercie Tahar Boulmezaoud de m'avoir guidé tout au long de ma thèse principalement sur les aspects mathématiques, et pour ses bonnes idées et ses précieux conseils tout en me laissant une grande liberté. Je remercie Tahar Amari, qui en plus d'avoir passé de longues heures au téléphone, m'a aidé à mieux comprendre quelques uns des secrets des plasmas magnétisés. J'ai également beaucoup apprécié le regard du physicien qui a rendu ce travail d'autant plus intéressant ainsi que ses remarques pertinentes et constructives.

Je remercie également Gérard Gagneux d'avoir accepté de prendre la direction de cette thèse.

Je remercie Jacques Blum et Laurent Villard qui en plus d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse ont bien voulu passer du temps dans les transports pour venir jusqu'à Pau. Merci également à Patrick Joly qui a accepté d'être membre du jury et à Jean Marie Thomas de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Un grand merci à Hinrich Lütjens pour son aide sur la partie fusion en nous fournissant des jeux de données et les explications qui vont avec.

Je remercie les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau, dirigé par Mohamed Amara, de m'avoir accueilli durant ma thèse. Un grand merci aux *informaticiens* du laboratoire pour leur disponibilité et leurs conseils techniques.

Je remercie également les différentes personnes qui m'ont accueilli dans leur bureau ou que j'ai pu rencontrer durant mes séjours parisiens que ce soit au laboratoire de mathématiques de Versailles, au laboratoire de mathématiques Jacques Louis Lions à Paris ou encore au Centre de Physique Théorique à l'X.

Je ne citerai personne de peur d'en oublier mais je remercie mes différents collègues de bureaux et tous mes collègues doctorants et docteurs matheux ou non pour leur soutien et avec qui j'ai pu partager de bons moments sur Pau au labo ou à l'extérieur, sur la côte basque ou dans les Pyrénées. Bon courage à ceux qui n'ont pas terminé.

Un grand merci à la famille Ratinaud qui m'a toujours accueilli très chaleureusement durant mes différents séjours parisiens.

Je remercie vivement ma famille et mes proches qui m'ont toujours fait confiance dans mes choix, qui m'ont toujours soutenu durant mes études et qui ont largement contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Enfin un grand merci à celle qui partage mon quotidien, Aurélie qui m'a toujours accompagné et soutenu durant cette thèse. Merci pour ses encouragements, sa bonne humeur (sauf quand je laisse trainer mes affaires... je n'ai jamais compris pourquoi!).

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	6
Table des figures	9
Liste des tableaux	12
Introduction	1
1 Introduction	1
1 Présentation du thème de recherche	1
2 Présentation du travail.	4
3 Intégration des schémas présentés dans un code.	6
2 Contexte physique et équations mathématiques.	9
1 Introduction à la fusion contrôlée	9
1.1 Bilan énergétique, conditions nécessaires aux réactions de fusion et bilan énergétique	10
1.2 Confinement magnétique	12
1.3 Autres aspects des tokamaks	15
2 Un peu de physique solaire	17
3 Equations de la magnétohydrodynamique	19
3.1 Équations régissant le fluide.	20
3.2 Équations régissant le champ électromagnétique.	22
3.3 Système complet de la MHD	23
4 Equations de la MHD idéale et quelques propriétés	26
4.1 Ecriture sous forme conservative	30
4.2 Valeurs propres et vecteurs propres du système	34
4.3 Conditions de Rankine-Hugoniot - Chocs et discontinuités	35
4.4 Equations de la MHD linéarisées autour d'un équilibre	42
5 Equations de la magnétostatique	45
3 Computing Beltrami fields.	49
1 Introduction	49
2 Notations. Mathematical statement of the problem	53
3 An iterative strategy	56

4	The finite elements discretization	58
4.1	The discretization of the potential field problem	58
4.2	The discretization of the div-curl problem	62
4.3	A streamline diffusion method for the hyperbolic problem on λ	67
5	Computational results.	69
5.1	Preliminary experiences on convergence of the finite element methods	69
5.2	The convergence of the iterative algorithm	72
5.3	Numerical properties of force-free fields	72
5.4	Cylindrical test	75
5.5	Beltrami field in toroidal geometry	76
6	Conclusion	79
4	An algorithm for solving the Magnetostatic equations.	83
1	Introduction	83
2	Notations. Statement of the problem	85
3	An iterative algorithm	86
4	Variational formulation and finite element discretization	89
4.1	The potential problem	89
4.2	The transport equation	90
4.3	The curl-div system	90
5	Computational results.	92
5.1	The convergence of the iterative algorithm	92
5.2	Test in toroidal geometry	94
5	Schémas numériques existants en MHD	101
1	Approximation des systèmes de lois de conservation	101
2	Cas multidimensionnel	110
3	Cas des équations de la MHD.	110
6	Schémas pour la MHD idéale	123
1	Les schémas proposés	123
1.1	Calcul des variables hydrodynamiques : schéma de Roe 1D	127
1.2	Maintien de la divergence de \mathbf{B} par modification du flux	129
2	Résultats numériques du code TETRAMHD	132
3	Conclusion	142
7	Conclusion	145
A	Egalité des valeurs propres	147
B	Annexe du chapitre 3	149
1	Proof of Lemma 4.1.	149
2	Proof of Lemma 4.4	150
C	Opérateur MHD linéarisé	151

D Quelques rappels sur les lois de conservation	153
1 Généralités	153
2 Notion d'entropie	155
3 Problème de Riemann	157
Bibliographie	160

Table des figures

2.1	Trajectoires de particules autour d'une ligne de champ magnétique.	12
2.2	Champ magnétique toroidal	12
2.3	Dérive d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique toroïdale. . .	13
2.4	Le champ magnétique poloïdal est induit par un courant circulant dans le plasma.	13
2.5	Les lignes de champ magnétique résultant ont une forme hélicoïdale s'enroulant autour de surfaces toriques emboîtées appelées surfaces magnétiques. 14	
2.6	Bobines servant à créer le champ magnétique. Les bobines toroïdales permettent de créer le champ magnétique du même nom. Le champ poloïdale est créé par les bobines ohmiques et les bobines poloïdales. Les bobines de champ poloïdales permettent également d'agir sur la position du plasma. . .	14
2.7	Schéma d'un réacteur.	16
2.8	Structure du soleil.	17
2.9	Taches solaires et autres phénomènes associés.	18
2.10	Protubérances.	19
2.11	Interconnexion de deux tubes de courant.	29
2.12	Chocs switch-on et switch-off	40
2.13	Chocs parallèles et perpendiculaires	41
3.1	Magnetic field lines of the exact solution (in white) and the numerical solution (in red) for the dipole test.	70
3.2	Profil of λ on $\Omega \cap \{y = 0\}$. The exact solution is presented on the left and the numerical one on the right.	77
3.3	Visualisation of field lines of the exact (left) and the numerical (right) solution colored by λ	77
3.4	Presentation of field lines enclosing an isosurface which is nothing else than a cylinder. We choose to represent the isosurface corresponding to $\lambda = -2.9$. 78	
3.5	Potential field and (on the left) and linear force-free field in the case $\lambda = 1$ (on the right).	78
3.6	Linear force-free field in the case $\lambda = 3$ (on the left) and non-linear force-free field (on the right) described before.	79
3.7	Equilibria obtained by CHEASE on the right and our code on the left. . . .	80
3.8	Field lines around a magnetic surface.	80
3.9	Cut of the stacked toric magnetic surfaces.	81
4.1	Toroidal geometry.	84

4.2	Magnetic field lines of the exact solution (on the left) and the numerical solution (on the right).	94
4.3	Cut of the pressure profile on $\Omega \cap \{x \leq 0\}$. The exact solution is present on the left and the numerical one on the right.	95
4.4	Safety factor profile versus the major radius R	96
4.5	On the left, we display the numerical and CHEASE pressure profiles at $\{z = 0\}$. On the right, a cut of the numerical pressure and the same pressure profil than on the left are presented. The pressure is read along the white line.	96
4.6	General visualisation of magnetic field lines, magnetic surfaces and pressure.	97
4.7	Safety factor of the non-circular case.	97
4.8	Pressure profile along the line $\{z = 0\}$ given by CHEASE and by our method (on the right) and cut of the pressure on our solution on the right.	98
4.9	Stacked toroidal magnetic surfaces (on the right) and field lines lying on the magnetic surface corresponding to the isobar $\{p = 0.021\}$	98
4.10	Field lines in the full torus.	99
5.1	Notations utilisées dans la cellule $C_{i,j}$	116
5.2	Positionnement du champ magnétique et du champ électrique sur un maillage décalé	116
6.1	Élément K et voisin K_f	124
6.2	Surface de \mathbb{R}^3	130
6.3	Exemple de notations sur une face de tétraèdre.	130
6.4	Test de Brio et Wu - Pression et densité	133
6.5	Test de Brio et Wu - Vitesse	133
6.6	Test de Brio et Wu : champ magnétique (B_y)	134
6.7	Test d'Orszag-Tang : pression à $t = 0.1$	135
6.8	Test d'Orszag-Tang : pression à $t = 0.48$	136
6.9	Test d'Orszag-Tang : pression magnétique à $t = 0.48$	136
6.10	Test d'Orszag-Tang : densité à $t = 0.48$	137
6.11	Test d'Orszag-Tang : isocontour de la pression cinétique et magnétique à $t = 0.48$	137
6.12	Test d'Orszag-Tang : évolution de $\text{div } \mathbf{B}$	138
6.13	Test d'advection de boucle magnétique : visualisation de $\ \mathbf{B}\ ^2$ à $t = 0$ et $t = 2$	138
6.14	Test d'advection de boucle magnétique : évolution de $\ \mathbf{B}\ ^2$ de $t = 0$ à $t = 2$	139
6.15	Test Blast Wave : pression à $t = 0.02$	140
6.16	Test Blast Wave : densité à $t = 0.02$	140
6.17	Test Blast Wave : $ \mathbf{B} ^2$ à $t = 0.02$	141
6.18	Test Blast Wave : comportement de $\text{div } \mathbf{B}$	141
6.19	Test 3D : densité et pression à $t = 0.4$	142

Liste des tableaux

3.1	L^2 relative error between the exact potential field and the numerical one obtained with the mixed hybrid finite element method.	70
3.2	The div-curl problem on \mathbf{B} : the relative L^2 and $H(\mathbf{curl})$ errors obtained with Nédelec' edge elements of degree 1.	71
3.3	The hyperbolic problem on λ : the relative L^2 and L^∞ errors obtained by the use of streamline diffusion method and P^1 conforming elements.	72
3.4	The residual difference $\ (\mathbf{B}_h^{(n+1)}, \lambda_h^{(n+1)}) - (\mathbf{B}_h^{(n)}, \lambda_h^{(n)})\ _{H(\mathbf{curl}) \times L^\infty}$ and the norm $ \mathbf{curl} \mathbf{B}_h^{(n)} \times \mathbf{B}_h^{(n)} _\infty$ versus the number of iterations n . The strong decay of the residue indicates that the iterative process is super-convergent.	73
3.5	The $H(\mathbf{curl})$ and L^2 errors on \mathbf{B} and the L^∞ error on λ versus the discretization h	73
3.6	The helicity and the energy of the linear and non-linear force-free fields \mathbf{B} and \mathbf{v}_l for several values. Notice that these quantities increase in both cases with β	76
4.1	Evolution of $\frac{\ \mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_n\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathbf{B}_n\ _{L^2(\Omega)}}$ and $\frac{\ p_{n+1} - p_n\ _{L^2(\Omega)}}{\ p_n\ _{L^2(\Omega)}}$ versus the number of iteration.	93
4.2	The $H(\mathbf{curl})$ and L^2 errors on \mathbf{B} and the L^∞ error on λ versus the discretization h	94
A.1	Recapitulatif des situations d'égalité de deux valeurs propres pour le système MHD.	148

Chapitre 1

Introduction

1 Présentation du thème de recherche

L'étude du comportement d'un plasma en présence d'un champ magnétique permet de décrire différents phénomènes physiques apparaissant par exemple en fusion magnétique (voir [70]) ou en astrophysique (voir [45] ou [57]). Les plasmas constituent environ 99% de l'univers. Ils sont par exemple présents dans l'ionosphère et la magnétosphère terrestre, dans l'atmosphère des étoiles (dont le soleil), dans le vent solaire et les vents provenant des autres étoiles, les comètes, les milieux interstellaires, les disques d'accrétion autour des étoiles... Ces milieux, souvent soumis à des champs magnétiques tels que le champ magnétique terrestre, ou le champ magnétique dominant l'atmosphère solaire, font l'objet de nombreuses attentions et recherches.

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement aux plasmas de fusion. L'objectif de la fusion contrôlée est de produire de l'énergie à partir de réactions de fusion inspirées de celles réalisées au coeur du soleil ou plus généralement des étoiles. Les conditions du coeur de soleil n'étant pas reproductibles sur terre, d'autres réactions de fusion sont envisagées. Elles nécessitent le chauffage du combustible (du Deutérium et du Tritium) à une température supérieure à un million de degrés. A ces températures, le combustible est ionisé et se trouve à l'état de plasma. Au sein d'un plasma, les trajectoires des particules sont souvent aléatoires. Celui-ci est toutefois confiné par un champ magnétique dans un volume à géométrie toroïdale, dans des réacteurs appelés tokamaks (voir [70]).

L'étude de la stabilité des plasmas (de laboratoire ou de l'espace) est l'un des aspects les plus importants dans la compréhension de leur physique. Contrairement à l'astrophysique où les études portent essentiellement sur les instabilités du système, l'objectif pour des plasmas de laboratoire tels que les plasmas de fusion, est d'obtenir des configurations stables (voir [54]).

Le plasma peut être décrit de deux manières. La première consiste à étudier le comportement de chacune des particules le constituant en utilisant une description cinétique du type Vlasov (voir par exemple [152]). La deuxième description consiste à regarder le plasma de manière macroscopique et à le décrire par des équations de type Navier-Stokes couplées avec les équations de Maxwell. C'est cette deuxième approche qui est utilisée en magnétohydrodynamique (ou MHD). Elle permet de s'intéresser à des phénomènes sur des grandes échelles de temps et d'espace. Le domaine de validité des équations de la MHD est décrit par exemple dans [146]. Plus précisément, le fluide est décrit par sa densité ρ , sa vitesse \mathbf{u} , et sa pression p , qui sont des fonctions du temps et de l'espace. Si le champ magnétique

et la densité de courant sont notés respectivement \mathbf{B} et \mathbf{j} avec $\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B}$, le système de la MHD idéale auquel nous nous intéressons dans cette thèse et dont la dérivation est détaillée dans le chapitre 2, s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned}$$

où γ est l'exposant adiabatique. Le champ magnétique doit également satisfaire l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Le système de la magnétohydrodynamique peut être réécrit sous la forme d'une loi de conservation hyperbolique. Cette loi de conservation n'est pas strictement hyperbolique, ni convexe (voir [13]).

Il est également important de s'intéresser à certains équilibres provenant des équations de la MHD. Ces configurations, dans lesquels le champ magnétique ne dépend pas du temps et le plasma est supposé avoir une vitesse nulle, sont connus sous le nom d'équilibres magnéto-statiques. Ils sont souvent utilisés comme conditions initiales pour l'étude de problèmes d'évolution magnétohydrodynamique.

Les équations de la magnéto-statique (ou MS) (voir [146], [152]) sont définies par

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.3)$$

Leur existence en géométrie toroïdale a été démontrée par Bruno et Laurence dans [111]. Dans certains cas, la pression du plasma est négligeable devant la pression exercée par le champ magnétique sur le plasma. L'équation (1.1) devient alors

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 satisfaisant (1.4) est dit de Beltrami ou force-free. L'équation (1.4) traduit le fait que le champ magnétique et le courant sont parallèles, et est souvent réécrite sous la forme

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (1.5)$$

où λ est une fonction scalaire. Si la fonction λ est constante, on parle de champ de Beltrami linéaire. Si λ dépend de la variable d'espace \mathbf{x} , le champ est dit non linéaire. Dans le cas particulier où $\lambda \equiv 0$, le champ \mathbf{B} est irrotationnel, et est appelé champ potentiel (voir [123]). Les problèmes d'existence de champs de Beltrami ont été traités par exemple dans [131, 132], [133] et [104] pour les champs linéaires, et dans [97] et [101] pour les champs non-linéaires.

Le caractère non-linéaire des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnéto-statique nécessite l'utilisation de méthodes numériques sophistiquées pour leur résolution.

Les simulations M.H.D même faiblement réalistes requierent l'utilisation des supercalculateurs les plus puissants en même temps que les méthodes les plus adéquates. Plusieurs travaux ont été et sont toujours développés à ce sujet en dimension 1, 2 et 3. En effet, les moyens de calcul actuels permettent de traiter des problèmes de plus en plus complexes. De nombreux solveurs de Riemann approchés ont été proposés en dimension 1 pour la MHD, comme par exemple celui de Brio et Wu dans [13] ou de Cargo et Gallice dans [15]. Dans [32], [50], [36] et [55] les auteurs ont développé des solveurs linéarisés de type HLL. Des solveurs non-linéaires ont également été proposés par exemple par Dai et Woodward dans [79]. Dans [74], Thorillon et Balsara adaptent les schémas de type WENO aux équations de la MHD permettant d'obtenir des schémas d'ordres élevés. En 2D et en 3D, là aussi de nombreux schémas ont été mis en oeuvre. Les calculs de flux à travers les interfaces des cellules sont généralement obtenus à partir de solveurs 1D. Toutefois, en dimension supérieure, une difficulté supplémentaire apparaît par rapport au cas 1D. En effet, pour de multiples raisons physiques, il est impératif de proposer des schémas satisfaisant numériquement exactement la condition

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.6)$$

Cette condition s'écrit $\frac{dB_x}{dx} = 0$ en dimension 1, ce qui signifie que B_x est constant. Dans [12], Brackbill et Barnes ont montré que la mise en défaut de (1.6) pouvait donner des solutions non-physiques.

Afin de satisfaire la contrainte (1.6), différentes méthodes ont été proposées. La première consiste à réécrire le champ magnétique sous la forme d'un potentiel vecteur

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Cette idée, bien que permettant de satisfaire la contrainte (1.6) automatiquement, présente d'une part l'inconvénient d'augmenter l'ordre de dérivation (voir [27]) et d'autre part de perdre le caractère conservatif des équations. Dans [60], Powell propose de réécrire les équations de la MHD en supposant que $\operatorname{div} \mathbf{B} \neq 0$. Il fait apparaître un terme source aux équations de la MHD idéale proportionnel à $\operatorname{div} \mathbf{B}$ qui brise le caractère conservatif des équations. Bien que par cette méthode (1.6) reste vérifiée au cours du temps après discrétisation, Tóth met en évidence dans [77] l'apparition de solutions non physiques en présence de chocs importants. Dans [12], Brackbill et Barnes proposent de projeter le champ magnétique calculé par un schéma de base sur l'espace des fonctions à divergence nulle. Cette méthode de projection se ramène à résoudre un problème de Poisson à chaque pas de temps. Bien qu'efficace (voir [77]), cette démarche s'avère extrêmement coûteuse. La dernière technique, proposée par Evans et Hawley dans [27] consiste à utiliser des maillages décalés. Le champ magnétique est calculé sur les interfaces des cellules d'un maillage uniforme à partir du champ électrique $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ interpolé sur les arêtes (en 3D) des cellules cubiques et de l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (1.7)$$

Cette méthode, reprise par différents auteurs (voir Chapitre 5), permet d'obtenir un champ magnétique à divergence nulle aux erreurs machines près, et s'avère peu coûteuse. Plus précisément, la divergence du champ magnétique initial est conservée au cours du temps.

Malheureusement, cette méthode nécessite l'utilisation de mailles cubiques.

En ce qui concerne les équations régissant les équilibres, leur approximation est aussi très importante. En effet, le calcul des équilibres est indispensable pour obtenir des conditions initiales nécessaires aux équations de la dynamique. Ces équilibres peuvent être potentiels, ou force-free linéaires, ou force-free non-linéaires, ou magnétostatiques non-linéaires avec pression. La manière de résoudre numériquement ces équations d'équilibre est elle-même un problème qui est loin d'être simple en raison des non-linéarités et des caractères mixtes (elliptiques ou hyperboliques) de ces équations. Nous reviendrons sur ces problèmes dans les chapitres 3 et 4.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la mise en place de méthodes numériques pour la résolution des équations de la magnétostatique et de la MHD dans des domaines tridimensionnels sur des maillages non uniformes. Nous avons écrit plusieurs codes 3D fonctionnant pour diverses géométries pour répondre à ces questions.

2 Présentation du travail.

Le travail présenté est organisé de la manière suivante :

Chapitre 2 : Contexte physique et présentation des équations de la MHD et de la MS.

Après avoir introduit le contexte physique de ce travail, nous présentons les équations de la magnétohydrodynamique dans un cadre général. Nous nous intéressons ensuite plus en détails aux équations de la magnétohydrodynamique idéale dont nous détaillons quelques propriétés (valeurs et vecteurs propres, conditions de Rankine-Hugoniot...). Nous terminons ce chapitre par une présentation plus détaillée des équations de la magnétostatique.

Chapitre 3 : Approximation des champs de Beltrami.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode itérative associée à une méthode d'éléments finis pour approcher les champs de Beltrami non-linéaires. Des algorithmes de ce type ont déjà été utilisés dans [102] et [103].

Avant de présenter cette méthode, notons qu'en prenant la divergence de l'équation (1.5), on obtient l'équation de transport

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = 0. \quad (1.8)$$

Dans ce processus itératif, l'approximation des champs de Beltrami se ramène à l'étude de trois sous-problèmes : le problème du champ potentiel, un problème de transport du type (1.8) et un problème de potentiel vecteur (1.3)+(1.5). Le champ potentiel permet de calculer le champ magnétique initial de l'algorithme. On résout ensuite successivement à chaque itération un problème sur λ du type (1.8), puis le problème rot-div (1.3)+(1.5) sur \mathbf{B} .

Dans le chapitre 3, après avoir détaillé les différents aspects de l'algorithme utilisé, nous proposons une méthode d'approximation pour chacun des trois problèmes apparaissant dans l'algorithme. Le champ potentiel est résolu par une méthode d'éléments finis mixtes

hybrides (voir [146]), le potentiel vecteur par une formulation mixte (voir [119]) et l'équation de transport par une méthode de *streamline diffusion* (voir [110]). Quelques tests, obtenus avec notre code tridimensionnel, permettent de démontrer numériquement la convergence de la méthode.

Chapitre 4 : Approximation des équations de la magnétostatique.

Dans cette partie, nous étendons la méthode utilisée pour les champs de Beltrami aux équations de la magnétostatique (1.1)+(1.3). Cette extension se ramène à étudier une équation de transport supplémentaire. L'idée principale repose sur la décomposition de la densité de courant \mathbf{j} en une somme d'une composante parallèle \mathbf{j}_{\parallel} et une composante perpendiculaire \mathbf{j}_{\perp} au champ magnétique \mathbf{B} . En écrivant \mathbf{j}_{\parallel} sous la forme $\mathbf{j}_{\parallel} = \mu\mathbf{B}$, où μ est une fonction scalaire inconnue, on peut montrer que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mu = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp}, \quad (1.9)$$

et que

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{|\mathbf{B}|^2} \nabla p \times \mathbf{B}, \quad (1.10)$$

ou encore

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{|\mathbf{B}|^2 + p} (\operatorname{rot}(p\mathbf{B}) - p\mathbf{j}_{\parallel}). \quad (1.11)$$

D'autre part, en multipliant (1.1) par \mathbf{B} , on a

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0. \quad (1.12)$$

Le processus itératif proposé pour la résolution des équations de la magnétostatique démarre d'un champ potentiel comme dans le cas des champs de Beltrami et consiste ensuite à résoudre successivement

- l'équation de transport (1.12) pour le calcul de la pression p ,
- l'équation de transport (1.9) sur μ après avoir calculé \mathbf{j}_{\perp} par (1.10) ou (1.11)
- un système rot-div

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{w}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, après avoir précisé les différents aspects de l'algorithme utilisé, nous présentons quelques résultats numériques d'applications à la fusion calculés par notre code d'équilibre.

Chapitre 5 : Schémas numériques existants en MagnétoHydrodynamique.

De nombreux schémas, généralement inspirés de ceux issus de la mécanique des fluides ont été développés pour la MHD. Dans ce chapitre, après avoir effectué quelques rappels sur l'approximation des lois de conservation, nous présentons un aperçu des schémas existant en MHD.

Chapitre 6 : Approximation des équations de la magnétohydrodynamique.

L'objectif de cette partie est de construire un schéma numérique conservatif, permettant de résoudre numériquement les équations de la MHD sur des maillages non-structurés tétraédriques.

Nous choisissons une approche de type volumes finis conçue pour satisfaire la condition sur la divergence du champ magnétique de manière exacte numériquement. Les flux à travers les faces des tétraèdres sont calculés par des solveurs de Riemann linéarisés de type Roe ([15]) ou HLL ([55]). Le calcul de ces flux se ramène à résoudre un problème de Riemann approché 1D sur chaque face. Afin de satisfaire la condition (1.6), le calcul du champ magnétique revient à résoudre une loi de conservation surfacique. Pour cela, on approche les composantes normales de \mathbf{B} sur chaque face, calculées à partir de l'équation d'induction (1.7).

Afin d'évaluer le terme

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

le champ électrique est approché dans l'espace $H(\mathbf{rot})$ par une interpolation de type éléments finis développés par Nédélec (voir [140]). Cette approximation se ramène à intégrer la composante tangentielle du champ électrique sur chaque arête. Une dualité entre les flux MHD et le champ électrique, mise en évidence par Balsara et Spicer dans [8], permet d'approcher localement les composantes tangentielles du champ électrique à partir des flux numériques obtenus par le solveur 1D utilisé sur chaque face.

L'intégrale des composantes normales du champ magnétique sont alors obtenues sur les faces grâce au théorème de circulation de Stokes. Le champ magnétique peut être reconstruit au centre des cellules soit par une interpolation de type éléments finis de Raviart-Thomas (voir par exemple [146]) de bas degrés, soit en calculant directement le rotationnel numérique du champ électrique à partir des éléments finis de Nédélec. La divergence du champ magnétique est numériquement nulle (aux erreurs machine près) à condition que le champ initial vérifie (1.6) numériquement.

Nous présentons quelques résultats numériques classiques obtenus avec notre code 3D à la fin du chapitre 6 afin de valider la méthode proposée.

3 Intégration des schémas présentés dans un code.

Au cours de cette thèse deux codes, appelés TETRAFFF et TETRAMHD, ont été développés. TETRAFFF permet de calculer toutes les configurations d'équilibres évoquées : champs potentiels, champs de Beltrami linéaires et non-linéaires, et configurations magnéto-statiques. TETRAMHD correspond à l'implantation du schéma numérique développé pour la MHD.

Ces deux codes ont été écrits en C++. Ils s'appuient sur une partie commune que nous avons également implantée. Cette base de code est constituée de classes C++ permettant de gérer des maillages tétraédriques. Elle permet de générer des maillages tétraédriques dans différentes géométries : parallélépipèdes, sphères, cylindres, tores à section circulaire, ou encore tores à section non circulaire. Elle intègre également des algorithmes de recherche de bord du domaine, d'arêtes et de faces des éléments du maillage, et permet également d'obtenir de nombreuses informations sur la connectivité des noeuds, arêtes et faces. Nous

avons également écrit différentes classes facilitant l'utilisation des éléments finis utilisés (Lagrange, Raviart Thomas, Nédélec).

Chapitre 2

Magnétohydrodynamique et Magnétostatique : contexte physique et équations mathématiques.

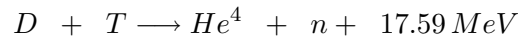
Les équations de la magnétohydrodynamique permettent de décrire le comportement d'un plasma en présence d'un champ magnétique. Ce système hyperbolique joue un rôle important dans des domaines tels que la fusion contrôlée ou encore l'astrophysique et plus particulièrement la physique solaire. Les méthodes numériques mises en oeuvre dans cette thèse ayant pour but principal d'être appliquées à la fusion contrôlée, nous en présentons dans un premier temps les grands principes. Nous évoquons également à titre indicatif la problématique générale apparaissant en physique solaire. Nous consacrons la suite de ce chapitre à la présentation des équations de la magnétohydrodynamique dans le cadre général. Nous nous limitons ensuite au système de la MHD idéale pour lequel nous détaillons un certain nombre de propriétés (forme conservative, valeurs propres et vecteurs propres, conditions de Rankine Hugoniot, chocs, discontinuités et linéarisation autour d'un équilibre). Enfin, dans une dernière partie, nous introduisons les équilibres de la magnétostatique, et le cas particulier des champs de Beltrami.

1 Introduction à la fusion contrôlée

Les besoins énergétiques des hommes ne cessent de croître depuis quelques années alors que les ressources d'énergie fossile (gaz, pétrole, charbon) qui fournissent actuellement 87% de l'énergie mondiale (sachant qu'environ un tiers de la population mondiale n'a pas accès à l'électricité) s'amenuisent. D'autre part, les rejets de gaz à effets de serre et notamment du carbone accumulé dans les réserves terrestres pendant des dizaines de millions d'années semblent avoir un impact de plus en plus important et de plus en plus clair sur notre environnement et notre climat. Il devient donc plus que nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergies propres et durables. Différentes solutions sont à l'étude (énergie solaire, énergie éolienne...). Une nouvelle source d'énergie pourrait provenir de la fusion thermonucléaire contrôlée. Inspirée des réactions qui permettent au soleil et autres étoiles de fournir de la chaleur et de la lumière, l'énergie de fusion présenterait de nombreux avantages. Les

réserves de combustible se trouvant dans l'eau de mer, cette énergie serait disponible pour tous. Seulement 300 Kg de combustible, dont la disponibilité est estimée à plusieurs millions d'années, seraient nécessaires pour fournir de l'électricité à un million de personnes pendant un an (contre un train de 400 Km avec du charbon). D'autre part, les déchets rejetés dans l'atmosphère sont inexistant. La seule source de pollution proviendrait de déchets radioactifs d'une durée de vie de seulement 100 ans (contre plusieurs millions d'année pour certains déchets issus de centrales nucléaires à fission). Enfin, c'est l'énergie de fusion serait sûre dans la mesure où les réactions s'arrêtent très facilement. Depuis les années 50, des recherches sur la fusion sont menées, en particulier après 1968 date à laquelle une équipe de chercheurs russes ouvrent la voie du tokamak.

Comme on a pu l'évoquer précédemment, l'énergie de fusion est inspirée des réactions réalisées au coeur du soleil où de l'hydrogène est transformé en hélium. Il n'est malheureusement pas possible de reproduire ce type de réactions sur terre particulièrement à cause des conditions de pressions extrêmes nécessaires à ce processus. Cependant, de nombreux autres types de réactions de fusion existent et notamment la réaction entre le deutérium et le tritium appelée réaction D-T



convertissant deux isotopes de l'hydrogène en hélium, neutron et énergie ($1 eV = 1.6 \cdot 10^{-9} J$). La réaction de fusion est donc un processus dans lequel deux noyaux légers s'assemblent pour former un élément plus lourd. Une différence de masse apparaît au cours de la réaction et se traduit par une création d'énergie.

Afin que deux noyaux chargés positivement puissent fusionner, ils doivent avoir une énergie cinétique suffisamment grande leur permettant de vaincre les forces de répulsion électrostatique s'exerçant entre eux. Cette énergie cinétique est obtenue en chauffant le combustible à très haute température. Pour la réaction D-T, la température requise doit être de l'ordre de 100 à 150 millions de Kelvin. Le plasma ainsi obtenu est un fluide électriquement conducteur dans lequel les trajectoires des particules le composant (ions et électrons) sont complètement aléatoires. Un moyen de contrôler ce plasma consiste à le confiner à l'aide d'un champ magnétique permettant de le maintenir dans un volume limité.

1.1 Bilan énergétique, conditions nécessaires aux réactions de fusion et bilan énergétique

Le plasma, lors d'une réaction de fusion, est soumis à des sources d'énergie et à des pertes d'énergies. Les réactions de fusion fournissent des particules alpha (l'hélium) et des neutrons. Les particules alpha transportent 20% de l'énergie restituée par la réaction alors que les neutrons en emportent 80%. Les particules alpha, étant chargées, sont confinées par le champ magnétique et cèdent cette énergie au plasma par collisions. Ce processus interviendra dans le chauffage du plasma. Les neutrons électriquement neutres ne sont pas soumis au champ magnétique. Ils quittent rapidement le plasma et partent bombarder les parois du tokamak (leur énergie sera récupérée et réutilisée pour produire du tritium à partir de lithium et pour fabriquer de l'électricité).

Dans la mesure où les réactions de fusion ne suffisent pas à l'auto-entretien du plasma, une puissance extérieure peut être fournie par des systèmes de chauffage.

Le plasma est également soumis à des pertes énergétiques dues principalement à des phénomènes de convection et de conduction ou encore par des processus de rayonnement.

D'autre part, des pollutions du plasma provenant d'impuretés émises par la paroi peuvent être sources de pertes d'énergie, pouvant même aller jusqu'à la perte du confinement du plasma : c'est la disruption.

On note P_f la puissance de fusion qui s'écrit sous la forme

$$P_f = P_a + P_n \quad (2.1)$$

où P_a est la puissance portée par les particules alpha et P_n celle qui est portée par les neutrons. On définit respectivement P_e et P_p la puissance extérieure apportée par le chauffage et la puissance des pertes. On peut faire un bilan énergétique et dire que la variation de l'énergie du plasma est définie par

$$\frac{dW}{dt} = P_a + P_e - P_p$$

la puissance portée par les neutrons n'étant pas cédée au plasma.

On définit τ_ϵ , appelé **temps de confinement**, le temps que met le plasma à se vider de son contenu énergétique si on coupe de façon brutale les sources énergétiques qui l'alimentent :

$$\frac{W}{\tau_\epsilon} = P_p.$$

On appelle, et on note Q , **facteur d'amplification** de l'énergie le rapport entre la puissance de fusion produite et la puissance extérieure fournie au plasma

$$Q = \frac{P_f}{P_e}.$$

Lorsque $Q = 1$, on parle de *breack-even*. Dans ce cas, la quantité d'énergie provenant de la réaction de fusion et celle apportée de l'extérieur au plasma sont égales. Cet état est approché par les machines expérimentales actuelles.

Lorsque $Q = \infty$, c'est l'*ignition*. La puissance apportée au plasma est nulle. Il s'auto-entretient. Le critère de Lawson donne les conditions nécessaires à remplir pour que la fusion soit énergétiquement rentable. Les pertes d'énergies doivent être compensées par l'énergie de fusion.

Le critère de Lawson impose une borne inférieure au produit de la densité ρ par le temps de confinement τ_ϵ

$$\rho\tau_\epsilon > g(T) \cdot f(Q)$$

où g est la fonction établissant une relation entre le taux de réactions et la température. En pratique, il faut

$$\rho\tau_\epsilon > 10^{21} \text{ (Vm}^{-3}\text{s)}$$

à une température de 10 à 20 KeV ($1\text{KeV} = 11,6 \cdot 10^6$ Kelvin).

Deux possibilités apparaissent :

La première consiste à porter à très haute pression et à haute température un petit volume de matière pendant des temps très courts : c'est la fusion inertielle. La seconde consiste à essayer d'avoir des temps de confinement long permettant d'avoir des densités plus faibles. C'est la fusion magnétique. Le plasma est confiné par un champ magnétique. Dans ce cas la densité du plasma doit être faible, car les températures étant très élevées, la pression du plasma devient vite importante. Cette pression ne doit pas dépasser la pression exercée par le champ magnétique sur le plasma.

FIG. 2.1 – Trajectoires de particules autour d'une ligne de champ magnétique.

FIG. 2.2 – Champ magnétique toroidal

1.2 Confinement magnétique

Afin de contrôler le mouvement des particules, le plasma est confiné par un champ magnétique. Les ions et les électrons constituant le plasma suivent alors des trajectoires en forme d'hélices (hélicoïdales) autour des lignes de champ magnétique. Elles sont soumises à la force de Lorentz (Figure 2.1).

Dans un premier temps, des topologies cylindriques ont été étudiées ayant comme principal inconvénient la perte de particules aux extrémités du cylindre. En refermant le cylindre sur lui même (géométrie toroïdale), les lignes de champ magnétique deviennent circulaires (Figure 2.2). Il n'y a plus de pertes de particules. Le champ magnétique est toroïdal. Sa courbure (force centrifuge) et son inhomogénéité (apparition d'un gradient magnétique) qui plus élevé sur l'intérieur du tore que sur l'extérieur engendre une légère dérive des particules (Figure 2.3). Au bout d'un certain temps les particules quittent le piège magnétique.

Le fait de rajouter une composante poloïdale au champ magnétique (Figure 2.4) permet de compenser cette dérive. Les lignes de champ ont alors des formes hélicoïdales (Figure 2.5) qui s'enroulent autour des surfaces toriques emboîtées appelées surfaces magnétiques. Lors de leurs déplacements autour des lignes de champ magnétique, les particules se rapprochent et s'éloignent alternativement de celles-ci en fonction de l'endroit où elles se trouvent

FIG. 2.3 – Dérive d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique toroïdale.

FIG. 2.4 – Le champ magnétique poloïdal est induit par un courant circulant dans le plasma.

dans le tore. La dérive est compensée lorsqu'une particule parcourt un tour poloïdal. La composante poloïdale du champ magnétique est induit par un courant circulant dans le plasma lui même induit par les bobines ohmiques agissant comme un transformateur dont le secondaire est le plasma et par les bobines poloïdales.

Instabilités et MagnétoHydroDynamique

Le confinement d'un plasma par un champ magnétique est possible. Pour cela, il suffit d'avoir un champ magnétique suffisamment intense capable de compenser la pression du plasma. Cependant, un plasma est soumis à des instabilités pouvant conduire à une disruption suivie des conséquences qui l'accompagne (altération des parois, efforts mécaniques de la structure, redémarrage du tokamak long...). Il est donc important de pouvoir contrôler la stabilité du plasma. C'est essentiellement dans le cadre de l'étude de ces instabilités qu'intervient la magnétohydrodynamique.

Deux grandeurs caractéristiques apparaissent en MHD pour les tokamaks. Le premier, appelé facteur de sécurité, et noté q correspond au nombre de tours toroïdaux nécessaires à une ligne de champ magnétique pour effectuer un tour poloïdal. Si on note m le nombre de tours par une ligne de champ dans la direction toroïdale et n le nombre de tours effectué

FIG. 2.5 – Les lignes de champ magnétique résultant ont une forme hélicoïdale s'enroulant autour de surfaces toriques emboîtées appelées surfaces magnétiques.

FIG. 2.6 – Bobines servant à créer le champ magnétique. Les bobines toroïdales permettent de créer le champ magnétique du même nom. Le champ poloïdale est créé par les bobines ohmiques et les bobines poloïdales. Les bobines de champ poloïdales permettent également d'agir sur la position du plasma.

dans la direction polôïdale, le facteur de sécurité est défini par

$$q = \frac{m}{n}.$$

En pratique le paramètre de sécurité est de l'ordre de 1 au centre du plasma à quelques unités au bord du plasma. Une ligne de champ magnétique décrit une surface magnétique autour de laquelle elle s'enroule. La variation de q d'une surface magnétique à l'autre crée alors un cisaillement du plasma. Des instabilités peuvent apparaître lorsque q est un nombre rationnel, c'est à dire lorsque q est égal au rapport de deux entiers. Dans ce cas une particule passe toujours au même endroit et une ligne de champ ne décrit pas toute la surface magnétique.

Le second paramètre caractéristique apparaissant en MHD est le nombre β du plasma. β est égal au rapport entre la pression cinétique p du plasma et la pression magnétique

$$\beta = \frac{p}{\mathbf{B}^2/2\mu}.$$

Pour pouvoir confiner un plasma, on voit facilement que β doit être inférieur à 1. En pratique, β doit être bien plus petit. En effet, s'il est supérieur à 10% des instabilités tourbillonnaires se développent. Cette contrainte se traduit par des restrictions sur la densité du plasma à laquelle est liée la pression cinétique.

1.3 Autres aspects des tokamaks

Chauffage

Le plasma est chauffé par différentes techniques. Le courant qui circule dans le plasma permet de chauffer celui-ci par effet Joule. Les performances de chauffage sont proportionnelles à la résistance du plasma qui diminue lorsque la température augmente. Cette technique permet d'atteindre les 10 millions de Kelvin.

Une méthode de chauffage additionnel consiste à injecter des particules énergétiques neutres dans le plasma. Le chauffage du plasma est alors la conséquence des collisions entre les particules du plasma et celles injectées. Les particules injectées doivent nécessairement être neutres afin de pouvoir pénétrer suffisamment loin vers le coeur du plasma. Des particules chargées seraient immédiatement piégées par le champ magnétique.

Le plasma peut également être chauffé à l'aide d'ondes électromagnétiques de fréquences bien choisies en fonction des espèces à chauffer. L'énergie de ses ondes est transférée sous forme de chaleur au plasma. Cette méthode permet de plus de générer du courant.

Enfin, la dernière source de chauffage est le produit des réactions de fusion dont les particules alpha cèdent leur énergie au plasma. Ce moyen de chauffage devra représenter 90% du chauffage dans un réacteur.

Interactions plasma-paroi

La première paroi (la première face au plasma) est soumise à de nombreux bombardements de neutrons et de particules chargées. Les particules chargées redeviennent neutres. Leur trajectoire n'est plus contrôlée par le champ magnétique jusqu'à ce qu'elle redeviennent chargées au contact du plasma. La paroi doit être capable de supporter de forts

FIG. 2.7 – Schéma d'un réacteur.

flux de chaleur. Il est important de trouver des matériaux suffisamment résistants à ces flux de chaleur, capables de d'évacuer la chaleur pour la transformer en énergie et ne libérant pas d'impuretés qui peuvent affecter le confinement.

Fonctionnement d'un réacteur

La figure 2.7 présente un schéma de ce que pourrait être un réacteur de fusion. Le confinement magnétique est réalisé comme ce qui a été décrit précédemment. Les bobines sont construites dans des matériaux supraconducteurs afin de limiter la consommation d'énergie. Les moyens de chauffage restent également les mêmes. En 1, on injecte le mélange Deutérium-Tritium au coeur du tokamak où le mélange est chauffé et amené à l'état de plasma dans une chambre à vide (en 2). Les produits du plasma (particules alpha et rayonnement) ainsi que des particules chargées cèdent leur énergie à la première paroi suite a des collisions (en 3). L'énergie des neutrons est convertie en chaleur dans la couverture tritigène. Cette couverture, située elle aussi dans la chambre à vide, joue un rôle très important (en 4). C'est tout d'abord elle qui récupère l'énergie à l'aide d'un fluide caloporteur. Ce fluide emmène la chaleur vers un générateur de vapeur destiné à faire tourner une turbine pour fournir de l'électricité à l'aide d'un alternateur (en 5). Le second rôle de la couverture est de protéger tous les composants extérieurs (chambre à vide, bobines magnétiques...) des flux neutroniques en réduisant leur énergie cinétique. Enfin, le tritium, rare sur terre, est produit dans la couverture contenant du lithium à l'aide les bombardements neutroniques. En effet, en faisant réagir du lithium avec un neutron on obtient du tritium, de l'hélium et dans certains cas de l'énergie qui pourrait fournir 20% du rendement du réacteur.

Un système de pompage permet d'évacuer les déchets (particules alpha). Ce système de

pompage ne pouvant sélectionner uniquement les particules alpha, le Deutérium et Tritium pompés sont réinjectés dans le plasma.

Toutes les interventions sur le réacteur sont robotisées.

Plus de précisions concernant les différents aspects présentés dans cette section d'introduction aux problèmes liés à la fusion peuvent être trouvés par exemple dans [70].

2 Un peu de physique solaire

Le soleil est une étoile de notre galaxie parmi des millions d'autres. Cette étoile naine est semblable à beaucoup d'autres. Cependant elle a suscité et suscite toujours un grand intérêt notamment des astronomes et des astrophysiciens. En effet, cette proximité permet une observation dans tous les détails de son atmosphère. Ainsi son rayonnement suffisamment intense permet une analyse spectrale à toutes les longueurs d'onde, l'observation des taches solaires a mis en évidence l'existence d'un champ magnétique intense,...

Le soleil constitue ainsi un véritable laboratoire permettant l'étude de phénomènes physiques de base dans des conditions non reproductibles sur Terre. De plus le soleil est la seule étoile pour laquelle on peut mesurer directement sa masse, son rayon, et sa luminosité. L'observation des autres étoiles a aussi donné des informations sur son histoire et son avenir.

Agé de 4,6 milliards d'années, le soleil est une boule de gaz qui se maintient grâce à

FIG. 2.8 – Structure du soleil.

sa propre gravitation. Sa partie interne (Figure Fig.2.8) est constituée de trois zones. Au centre, dans le noyau d'un rayon de 250 000 Km, ayant une température de l'ordre de 15 millions de degrés celsius, l'hydrogène est transformé en hélium par une réaction thermonucléaire libérant de la quasi totalité de son énergie. Cette énergie est transportée vers l'extérieur du soleil. Elle doit pour cela traverser la couche radiative très dense, d'une épaisseur de 244 160 Km entourant le noyau, puis la couche convective située à 494 160 Km du centre de l'étoile, et d'une épaisseur de 199 752 Km.

L'atmosphère qui entoure la partie interne du soleil est constituée elle aussi de trois couches : la photosphère, la chromosphère et la couronne. La photosphère, couche très brillante qui représente la partie visible du soleil a une épaisseur de 500 Km, et une température de l'ordre de 6000 degrés. Entourant la photosphère, la chromosphère atteint une épaisseur de 10 000 Km et sa température varie de 10 000 degrés à l'interface avec la photosphère à un million de degrés dans sa partie haute. Enfin la couche extérieure du soleil, appelée couronne solaire, est une zone très peu dense dont la température varie entre un et deux millions de degrés, et envahie un grand espace pouvant aller au delà de l'orbite terrestre.

La champ magnétique solaire est essentiellement généré dans la zone de convection. En effet, c'est au delà de cette zone qu'apparaît la rotation différentielle du soleil. Les régions polaires du soleil ont une vitesse de rotation moins importante que les régions proches de l'équateur créant un fort cisaillement qui semble jouer un rôle fondamental dans la formation du champ magnétique. Il émerge ensuite à sa surface pour occuper progressivement toute l'atmosphère extérieure remplie d'un plasma. Ce champ magnétique semble être à l'origine de toutes les structures et phénomènes de la couche la couronne : protubérances (Figure Fig.2.10), éruptions, taches solaires, température anormalement élevée de la couronne (deux millions de Kelvin, alors que la surface n'est qu'à 6000 Kelvin).

Les taches solaires (Figure Fig.2.9) apparaissent de manière plus sombre que les zones qui les entourent. Leur présence semble s'expliquer par la forte activité magnétique qui empêcherait les remontées de matière chaude depuis la zone de convection. La quantité de ces taches permet de mesurer l'activité magnétique du soleil.

FIG. 2.9 – Taches solaires et autres phénomènes associés.

Les protubérances (voir Figure Fig.2.10) sont des poches de plasma dense et froid formant des arches. De la matière est éjectée lorsque les forces magnétiques sont suffisamment fortes pour vaincre les forces gravitationnelles : on parle d'éruptions solaires ou d'éjections de masse coronale.

Des émissions permanentes de flux de particules chargées transportées essentiellement

FIG. 2.10 – Protubérances.

par le champ magnétique ont lieu vers l'extérieur du soleil, et notamment vers la terre. Ces émissions ont de nombreuses conséquences sur notre planète et sur les activités de l'homme : perturbations des ondes de télécommunications, source d'erreurs sur le calcul des orbites des satellites, risque d'irradiation (faible) des personnes embarquées dans les avions, ou sur les astronautes, perturbations des dispositifs électroniques, création de courant induit dans les réseaux de distribution d'électricité ou des câbles téléphoniques... Les effets que peut avoir le champ magnétique solaire sur la terre ont motivé les surveillances de l'activité solaire et l'élaboration de modèles, tels que la magnétohydrodynamique, qui permettraient de mieux comprendre ces phénomènes.

3 Equations de la magnétohydrodynamique

Nous allons maintenant décrire les équations de la MHD. On considère un ensemble de particules chargées, c'est-à-dire un plasma, en interaction avec son propre champ électromagnétique, et soumis éventuellement à une force de gravitation. Le comportement d'un tel plasma, vu comme un fluide chargé en mouvement, peut être décrit par des équations macroscopiques. Bien qu'un tel fluide contienne en général au moins deux espèces de particules chargées, les équations régissant le mouvement de chacune de ces espèces peuvent être combinées sous certaines hypothèses (neutralité électrique du fluide par exemple) et ramenées à des équations régissant le mouvement d'une seule espèce fictive. C'est le modèle 1-fluide. Si de plus on suppose que le fluide se comporte comme un milieu conducteur, et qu'il est régi, d'un point de vue thermodynamique, par une équation d'état, alors on obtient un système fermé d'équations régissant à la fois le mouvement du fluide et l'évolution du champ électromagnétique. Ce sont les équations de la magnétohydrodynamique d'un modèle 1-fluide que nous allons détailler par la suite.

On suppose dans tout le chapitre qu'un tel ensemble de particules occupe un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . On note ρ la densité de masse du fluide, \mathbf{u} sa vitesse, p la pression exercée au sein du fluide, \mathbf{E} le champ électrique dans le fluide, \mathbf{B} le champ magnétique, \mathbf{j} la densité de

courant électrique dans le fluide, et ε l'énergie interne par unité de masse. Les équations de la MHD régissant toutes ces quantités se décomposent essentiellement en deux familles couplées entre elles : les équations régissant le mouvement du plasma et les équations régissant le champ électromagnétique.

3.1 Équations régissant le fluide.

Le fluide est décrit par les équations suivantes.

Équation de conservation de la masse.

Elle s'écrit

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

Équation du mouvement de fluide.

Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \nabla \Phi + \nu \rho \Delta \mathbf{u} \quad (2.3)$$

où $\nabla \Phi$ désigne ici le champ de gravitation, tandis que $\nu \geq 0$ est la viscosité cinématique du fluide. On note la présence du terme $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ qui est dû à la force de Lorentz exercée par le champ magnétique sur les particules. Ce dernier terme va être à l'origine du couplage avec les équations de Maxwell présentées par la suite.

Équation d'énergie

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + H \quad (2.4)$$

où $H = Q_r - Q_\mu + \operatorname{div}(\kappa \nabla T)$ avec

- K : tenseur de conductivité thermique,
- Q_μ : l'échauffement par dissipation par viscosité,
- Q_r : la perte d'énergie radiative. Dans de nombreuses applications, ce dernier terme est de la forme $Q_r = \rho^2 Q(T)$.

Équation d'état et entropie

L'équation d'état s'écrit en général sous la forme :

$$p = p(\rho, \varepsilon), \quad (2.5)$$

avec les deux hypothèses physiques suivantes (voir [38])

$$(G1) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \varepsilon) > 0,$$

$$(G2) \quad \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}(\rho, \varepsilon) > 0.$$

On considère maintenant le volume massique noté τ et défini par

$$\tau = \frac{1}{\rho}.$$

Le deuxième principe de la thermodynamique nous apprend l'existence d'une fonction $S(\tau, \varepsilon)$, appelée l'entropie, de classe \mathcal{C}^2 et strictement concave, et une fonction $T(\tau, \varepsilon)$ strictement positive, telles que

$$Tds = d\varepsilon + pd\tau$$

où $S = \rho s$, et où s est l'entropie spécifique. L'entropie est une quantité thermodynamique fondamentale qui, intuitivement, mesure le désordre dans le système.

Notons alors que parmi les quatre variables thermodynamiques ρ (ou τ), S , ε , et p , on peut en choisir deux comme variables fondamentales, et exprimer les deux autres en fonction des premières. Ainsi, on peut écrire par exemple $p = p(\rho, \varepsilon)$, $S = S(\rho, \varepsilon)$ si on choisit ε et ρ comme variables fondamentales. On peut aussi considérer S et τ comme variables fondamentales et écrire $p = p(\tau, S)$ et $\varepsilon = \varepsilon(\tau, S)$. Dans ce dernier cas, on rajoute les hypothèses physiques (voir [38])

$$(G3) \quad \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, S) > 0,$$

$$(G4) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}(\tau, S) > 0.$$

On note $\rho\varepsilon$ l'énergie interne, ε l'énergie spécifique, et E l'énergie totale définie par

$$E = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2.$$

où $\rho\varepsilon$ est l'énergie interne, ε l'énergie spécifique interne. On suppose que le plasma est dans un état d'équilibre chimique et thermodynamique interne. L'équation d'état peut alors s'écrire sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho).$$

Quand l'énergie interne est tout simplement proportionnelle à la température, on a

$$\varepsilon = C_v T$$

où C_v est la capacité calorifique à volume constant.

Par ailleurs,

$$d\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) = C_p dT$$

où C_p est la capacité calorifique à pression constante (constante pour un gaz polytropique). Dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie interne est fonction de la température uniquement, $\varepsilon = \varepsilon(T)$, et

$$p = R\rho T.$$

On a donc,

$$R = C_p - C_v$$

On considère maintenant le cas d'un gaz polytropique. On introduit l'exposant adiabatique γ défini par

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

On obtient

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

et

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2.$$

Dans le cas d'un gaz monoatomique, $\gamma = \frac{5}{3}$ et dans la cas d'un gaz diatomique $\gamma = \frac{7}{5}$. L'entropie spécifique est donnée par

$$s = C_v \log\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + cte$$

donc

$$p = c \exp\left(\frac{s}{C_v}\right)\rho^\gamma.$$

et on vérifie que les hypothèses (G1) à (G4) sont satisfaites.

3.2 Équations régissant le champ électromagnétique.

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont régis par les équations de Maxwell et la loi d'Ohm.

Équations de Maxwell.

Il s'agit des équations

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \text{ (loi de Gauss),} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} \text{ (loi de Faraday),} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \text{ (loi d'Ampère-Maxwell),} \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \text{ (conservation de charge),} \end{aligned}$$

avec

- ρ_e : densité de charge totale,
- μ : perméabilité magnétique,
- ε_0 : perméabilité électrique.

Loi d'Ohm.

Elle s'écrit

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{2.6}$$

où σ est la conductivité électrique.

Dans le cas des équations de la MHD, les équations de Maxwell peuvent être simplifiées car des arguments physiques (voir [21]) montrent que la densité de charges électriques ρ_e ne joue pas un rôle significatif sauf dans la loi de Gauss. Il en est de même pour le courant

de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ qui peut être négligé par rapport à la densité de courant \mathbf{j} . En omettant la loi de Gauss, on obtient les équations d'électromagnétisme utilisées en MHD :

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot} \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.10)$$

L'équation $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ résulte de la loi d'Ampère (2.7). En éliminant le champ électrique et la densité de courant dans ces équations, on obtient l'équation d'advection-diffusion régissant le champ magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta^2 \mathbf{B} \quad (2.11)$$

où $\eta = \frac{1}{\sigma \mu}$ est appelé diffusivité (ou viscosité) magnétique. Cette équation est souvent appelée *équation d'induction*. On remarque qu'elle est analogue à l'équation classique régissant la vorticité en mécanique des fluides incompressibles

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \mu \Delta^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.12)$$

Toutefois, cette analogie n'est pas parfaite, car en mécanique des fluides $\boldsymbol{\omega}$ et \mathbf{u} sont reliés par la relation $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$, ce qui n'est pas le cas pour \mathbf{u} et \mathbf{B} ici (observons par ailleurs que l'équation qui régit la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$ dans le cas de la MHD n'est pas exactement (2.12) car il manque des termes dus à la force de Lorentz et à la compressibilité). Cependant, cette analogie a plusieurs intérêts, notamment au niveau de deux théorèmes : le 1^{er} théorème d'Helmholtz et le théorème de Kelvin (ou deuxième théorème d'Helmholtz), quand on néglige la viscosité magnétique. L'analogie avec le théorème de Kelvin est la suivante :

Le flux du champ magnétique à travers une "boucle" en mouvement avec le fluide est constant.

L'analogie avec le premier théorème d'Helmholtz affirme que :

Les éléments du fluide qui sont sur une ligne du champ magnétique à un instant donné resteront gelés sur cette ligne pour toute la suite.

3.3 Système complet de la MHD

Le système complet de la magnétohydrodynamique s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \nabla \Phi + \nu \rho \Delta \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta^2 \mathbf{B}, \quad (2.15)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = -p(\rho, \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

avec \mathbf{B} vérifiant $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Remark 3.1. Une autre remarque concernant l'équation d'induction dans le cas idéal ($\eta = 0$), est que si Φ et Ψ sont deux solutions de l'équation

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla r = 0$$

alors $\mathbf{H} = \nabla \Phi \times \nabla \Psi$ est d'une part à divergence nulle et d'autre part vérifie

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}).$$

Adimensionnement et validité des équations de la MHD

L'adimensionnement des équations de la MHD fait apparaître les nombres suivants :

- Nombre de Reynolds hydrodynamique

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu},$$

où u_0 et L sont la vitesse et l'échelle de longueurs caractéristiques. Ce nombre est représentatif du rapport entre les forces d'inertie $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ et le terme de viscosité $\nu \Delta \mathbf{u}$.

- Nombre de Reynolds magnétique :

$$R_m = \mu \sigma u_0 L = \frac{u_0 L}{\eta} = \frac{u_0 \sigma}{\lambda}.$$

Ce nombre représente la relation entre le terme d'advection et le terme de diffusion dans l'équation d'induction (2.11). Ici λ désigne $\lambda = \frac{1}{\mu L}$.

- Le nombre de Hartmann :

$$H_a = B_0 L \left(\frac{\sigma}{\rho_0 \mu} \right)^{1/2}.$$

Il représente clairement le rapport de la force de Lorentz et des forces de viscosité magnétique.

- Le nombre β du plasma :

$$\beta = \frac{p_0}{B_0^2 / 2\mu},$$

qui représente le rapport entre la pression du plasma p_0 et la pression magnétique $\frac{B_0^2}{2\mu}$.

- La vitesse d'Alfvén :

$$v_a^2 = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0}$$

La quantité $\frac{u_0^2}{v_a^2}$ donne alors le rapport entre la force d'inertie $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ et la force de Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

Le modèle de la MHD est valide sous certaines conditions. Une première hypothèse consiste à supposer que le milieu est continu c'est à dire

$$L \gg R_g$$

où R_g est le rayon gyromagnétique. Par exemple, dans le cas d'une tache solaire $L \simeq 10^6 m$ et $R_g = 10^{-4} m$.

De plus, le plasma doit être en équilibre thermodynamique, ce qui se traduit par

$$\tau \gg \tau_c \text{ et } L \gg \ell$$

où τ est le temps caractéristique, τ_c le temps de collision, et ℓ le libre parcours moyen. D'autre part, le régime doit être non relativiste

$$\frac{V}{C} \ll R_m^{1/2}$$

où on note V la vitesse caractéristique, C la vitesse de la lumière. Pour la photosphère du soleil, $\frac{V}{C} = 10^{-5}$ et $R_m^{1/2} = 10^{2.5}$.

Dans le vent solaire, la diffusivité magnétique η est de l'ordre de $\eta \simeq 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et le nombre de Reynolds magnétique vaut $R_m \simeq 3 \cdot 10^8$.

Dans le cas de la fusion, R_m est de l'ordre de 10^7 . Le nombre β au coeur du plasma d'ITER devrait être de l'ordre de 10^{-2} .

Les nombres σ et μ sont isotropes et le référentiel choisi est inertiel. Pour les phénomènes à grandes échelles, il faut rajouter le terme de Coriolis (par exemple pour le champ magnétique terrestre). Enfin, à cause des collisions, les comportements des différentes espèces ne sont pas séparées : le modèle est supposé 1-fluide.

Introduisons maintenant quelques nombres caractéristiques dans le cas du soleil

	Zone convective	Photosphère	Chromosphère	Couronne
$M = \frac{V}{c_s}$	10^{-2}	10^{-1}	1	10^2
$R_m = \frac{c_s L}{\eta}$	1	10^5	10^6	10^{12}
$\beta = \frac{2\mu p}{ B ^2}$	10^3	1	10^{-3}	10^{-4}

où c_s est la vitesse du son. Dans la photosphère $\beta \simeq 1$ et on est dans le cadre de la dynamo MHD alors que dans la zone convective $\beta \gg 1$: la dynamo cinématique est plus appropriée. Dans la couronne, comme $\beta \ll 1$, on peut supposer la pression cinétique négligeable. Dans ce cas, les équilibres peuvent être approchés par des champs sans-force introduits dans la suite (voir Chapitre 3). De plus, on a $H_a \simeq 10^{25} \gg 1$.

Le système de la MHD permet également de modéliser le champ magnétique terrestre. L'atmosphère terrestre est composée de cinq couches

- la troposphère : de 0 à 12 km (température décroissante),
- la stratosphère : de 12 à 50 km (isotherme $\simeq 280 K$),
- la mésosphère : de 50 à 90 km,
- la thermosphère : de 90 à 600 km,
- l'exosphère : de 600 km à $10 R_t$ (rayon terrestre).

D'autre part, on a la superposition de deux autres couches : l'ionosphère et la magnétosphère. L'ionosphère va de 60 à 800 km d'altitude. Elle est constituée de gaz fortement ionisés à très faible pression et à haute température. La densité électronique y est de l'ordre de 10^9 m^{-3} et $\sigma \simeq 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. La magnétosphère est l'ensemble des lignes de champ magnétique terrestre situées au-delà de l'ionosphère, au dessus de 800 à 1000 km d'altitude.

4 Equations de la MHD idéale et quelques propriétés

Dans cette partie, nous nous intéressons aux équations de la magnétohydrodynamique idéale et à certaines de leurs propriétés. Dans toute la suite, on suppose que μ la constante perméabilité magnétique vaut 1.

Les équations de la MHD idéale correspondent au cas où les viscosités cinématiques et magnétiques sont nulles : $\eta = \nu = 0$, autrement dit $R_m = Re = +\infty$. En négligeant le terme de chauffage dans l'équation d'énergie et le terme de gravitation dans l'équation du mouvement, les équations de la MHD idéale s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = -p \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (2.20)$$

avec $p = p(\varepsilon, \rho)$ (équation d'état).

En plus de ces équations, le champ magnétique \mathbf{B} doit vérifier l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.21)$$

Cette dernière équation sur \mathbf{B} va jouer un rôle particulier et va être souvent considérée séparément. Notons tout de même que la troisième équation (2.19) implique

$$\frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Cela signifie, indépendamment de (2.21) que $\operatorname{div} \mathbf{B}$ est constant par rapport temps, ce qui explique partiellement pourquoi la condition (2.21) est considérée à part. En effet, le fait de la rajouter au système (2.17)-(2.20) conduit à une surdétermination. Notons par ailleurs que le champ électrique \mathbf{E} et le courant \mathbf{j} se calculent à partir de \mathbf{u} et \mathbf{B} à partir des relations

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{j} &= \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

On vérifie aussi que, pour une solution régulière de (2.17)-(2.20) et sans tenir compte de la relation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, on a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0 \quad (2.22)$$

ce qui signifie que la dérivée particulaire de S est nulle. En d'autres termes, les solutions régulières du système de la MHD idéale conservent l'entropie le long des lignes de courant. Notons que si on choisit ε et ρ comme variables fondamentales, l'équation régissant la pression s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \left(\frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) (\rho, \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.23)$$

et peut être obtenue à partir de (2.17) et (2.20). Dans le cas où on choisit ρ et S comme variables fondamentales, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.24)$$

Dans toute la suite, on note v_T la *vitesse du son* définie par

$$v_T^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \varepsilon) + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}(\rho, \varepsilon). \quad (2.25)$$

Il est aussi habituel de réécrire l'équation d'énergie (2.20) en terme de l'énergie volumique définie par

$$E = \rho \left(\varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}. \quad (2.26)$$

On montre facilement que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{u}) = -\operatorname{div}(P\mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}) \quad (2.27)$$

où $P = p + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ est la *pression totale*.

En conclusion, les systèmes d'équations de la MHD idéale sont souvent formés des équations (2.17), (2.18), (2.19) et de l'une des équations (2.20), (2.22) ou (2.27) (la densité ρ est souvent considérée comme une variable fondamentale). Ce système est complété par les relations donnant les deux variables thermodynamiques manquantes et de l'équation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ sur le champ magnétique. En résumé, on peut écrire les équations de la MHD idéale sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 C_i(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

où $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p)^T$ est le vecteur des variables primitives. On montre facilement que

$$C_1 = \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & -\frac{B_1}{\rho} & \frac{B_2}{\rho} & \frac{B_3}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -\frac{B_2}{\rho} & -\frac{B_1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & -\frac{B_3}{\rho} & 0 & -\frac{B_1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -B_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 & -B_1 & -u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & \theta & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & -\frac{B_2}{\rho} & -\frac{B_1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{B_1}{\rho} & -\frac{B_2}{\rho} & -\frac{B_3}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & -\frac{B_3}{\rho} & -\frac{B_2}{\rho} & 0 \\ 0 & -B_2 & B_1 & 0 & u_2 & -u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & -B_2 & 0 & -u_3 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 & 0 & \theta & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

et

$$C_3 = \begin{pmatrix} u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 & -\frac{B_3}{\rho} & 0 & -\frac{B_1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 & -\frac{B_3}{\rho} & -\frac{B_2}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & \frac{B_1}{\rho} & \frac{B_2}{\rho} & -\frac{B_3}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & -B_3 & 0 & B_1 & u_3 & 0 & -u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -B_3 & B_2 & 0 & u_3 & -u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 & 0 & \theta & u_3 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, $\chi = \frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \rho) + \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}(\varepsilon, \rho)$ et $\theta = \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$.

Observons tout de suite que les équations MHD idéale peuvent être mises sous la forme conservative

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

Nous reviendrons sur cette écriture et son étude dans le paragraphe (4.1) ci-dessous.

Nous allons considérer maintenant quelques quantités invariantes pour les solutions régulières des équations de la MHD.

Parmi les propriétés des équations de la MHD idéale, nous pouvons citer la conservation de l'hélicité.

Conservation de l'hélicité magnétique :

Soit Ω un domaine connexe de \mathbb{R}^3 , et \mathbf{B} un champ magnétique définie sur Ω , suffisamment régulier tel que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Soit \mathbf{A} un potentiel vecteur de \mathbf{B} , c'est à dire un champ de vecteur tel que : $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. On appelle hélicité de \mathbf{B} , et on note $H(\mathbf{B})$, l'intégrale

$$H(\mathbf{B}) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx$$

Cette intégrale ne dépend pas du choix du potentiel vecteur \mathbf{A} de \mathbf{B} car si \mathbf{A}' est un autre potentiel vecteur de \mathbf{v} , alors $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{B}$, ce qui signifie formellement que $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\theta$, où θ est une fonction définie sur Ω , et donc

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} (\mathbf{A} + \nabla\theta) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \int_{\Omega} \theta \operatorname{div} \mathbf{B} + \int_{\partial\Omega} \theta \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

FIG. 2.11 – Interconnexion de deux tubes de courant.

L'hélicité est une quantité globale qui décrit la complexité topologique des lignes de champs de \mathbf{B} , et plus particulièrement l'interconnexion des lignes fermées. Ainsi, si on suppose que le domaine \mathbf{B} est confiné dans deux tubes de courant comme dans la figure alors on peut montrer par un simple argument que $H(\mathbf{B}) \neq 0$ dans le cas A tandis que $H(\mathbf{B}) = 0$ dans le second cas.

Montrons que dans le cas de la MHD idéale, l'hélicité du champ magnétique est un invariant qui reste conservé. Soit $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p)$ solution régulière de (2.17)-(2.20) et soit \mathbf{A} un vecteur potentiel de \mathbf{B} . On peut déduire facilement qu'il existe une fonction $\Phi(\mathbf{x}, t)$ telle que :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \nabla \Phi.$$

En conséquence, si on pose

$$h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} \\ &= \nabla \Phi \cdot \mathbf{B} + \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \\ &= \operatorname{div}(\Phi \mathbf{B}) + \operatorname{div}[(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}] \\ &= \operatorname{div}[(\Phi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} - h \mathbf{u}] \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{rot} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Il en résulte que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h \mathbf{u}) + \operatorname{div}[(\Phi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}] = 0.$$

En supposant que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le bord du domaine, ce qui signifie que le fluide est confiné à l'intérieur de Ω , on obtient après une simple intégration que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{B}) = 0,$$

et donc $H(\mathbf{B})$ reste constante au cours du temps.

On peut aussi considérer l'hélicité dite "croisée"

$$H_c = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} dx.$$

En posant

$$h_c(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t),$$

on montre alors que

$$\frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(h_c \mathbf{u}) = \operatorname{div}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{B}\right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p \mathbf{B}).$$

Il en résulte que dans le cas de la MHD idéale et incompressible, on a aussi une conservation de cette hélicité croisée quand $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

On établit maintenant la propriété suivante :

Remark 4.1. *Les équations de la MHD vérifie la curieuse propriété suivante : soit $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p)$ une solution de classe \mathcal{C}^1 du système (2.17)-(2.19)+(2.23) avec $\rho > 0$. Si χ une fonction régulière vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = 0 \quad (2.29)$$

alors la fonction $\frac{1}{\rho} \nabla \chi \cdot \mathbf{B}$ est aussi solution de (2.29).

4.1 Ecriture sous forme conservative

Notre objectif ici est de montrer que les équations de la MHD s'écrivent sous la forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

On commence par rappeler les notations

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_2 B_1 & A_3 B_1 \\ A_1 B_2 & A_2 B_2 & A_3 B_2 \\ A_1 B_3 & A_2 B_3 & A_3 B_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \nabla B_1 \\ \mathbf{A} \cdot \nabla B_2 \\ \mathbf{A} \cdot \nabla B_3 \end{pmatrix}.$$

On a les relations

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \operatorname{div}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} - \nabla \frac{|\mathbf{a}|^2}{2} = \operatorname{div}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - \frac{|\mathbf{a}|^2}{2} \mathbf{I}] - (\operatorname{div} \mathbf{a}) \mathbf{a}.$$

En utilisant toutes les relations précédentes et la relation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, on peut réécrire les équations de mouvement du fluide (2.18) et d'induction (2.19) sous la forme

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + (\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + p) \mathbf{I}] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) = 0. \quad (2.30)$$

Le système d'équations (2.17), (2.18), (2.19) et (2.27) peut donc être écrit sous la forme conservative

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + p\right)I \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} \\ \left(E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}\right)\mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Inversement, si $(\rho, \rho \mathbf{u}, \mathbf{B}, E)$ est solution régulière du système conservatif (2.31), et si on ne tient pas compte de l'équation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, on peut montrer facilement que l'énergie interne

$$\varepsilon = \rho^{-1} \left(E - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

satisfait

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{B}.$$

Par conséquent, l'entropie satisfait

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S \right) = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) (\operatorname{div} \mathbf{B}),$$

ce qui signifie que le système conservatif (2.31) ne conserve pas l'entropie si on ne tient pas compte de la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Cette remarque aura une importance particulière quand il s'agira de discrétiser les équations de la MHD idéale car il est difficile d'obtenir numériquement $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ exactement et, en conséquence de construire des schémas dits entropiques.

Une manière d'éviter ce problème consiste à considérer le problème non-conservatif suggéré par Powell [60]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}\right)I - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} \\ \left(E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}\right)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{B},$$

qui ne diffère du système (2.17), (2.18), (2.19) et (2.27) que par l'équation d'induction. On montre alors que l'entropie associée à ce système est conservée (sans tenir compte de la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$). Toutefois, cette affirmation ne constitue pas la raison essentielle de son introduction. En effet, ce système a été introduit afin d'avoir un système hyperbolique, en éliminant en particulier une valeur propre non physique de la matrice associée. Bien évidemment, l'inconvénient majeur du système est qu'il n'est pas conservatif.

Revenons maintenant au système conservatif (2.31). Soit $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{w}, \mathbf{B}, E)^T$ le vecteur des variables conservatives où $\mathbf{w} = \rho \mathbf{u}$. Le système (2.31) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

où

$$F_1(U) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho w_1 \\ w_1^2 - \rho B_1^2 + \rho \left[\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + p^* \right] \\ w_1 w_2 - \rho B_1 B_2 \\ w_1 w_3 - \rho B_1 B_3 \\ 0 \\ w_1 B_2 - B_1 w_2 \\ w_1 B_3 - B_1 w_3 \\ (E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}) w_1 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) B_1 \end{pmatrix},$$

$$F_2(U) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho w_2 \\ w_2 w_1 - \rho B_2 B_1 \\ w_2^2 - \rho B_2^2 + \rho \left[\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + p^* \right] \\ w_2 w_3 - \rho B_2 B_3 \\ w_2 B_1 - B_2 w_1 \\ 0 \\ w_2 B_3 - B_2 w_3 \\ (E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}) w_2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) B_2 \end{pmatrix},$$

$$F_3(U) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho w_3 \\ w_3 w_1 - \rho B_3 B_1 \\ w_3 w_2 - \rho B_3 B_2 \\ w_3^2 - \rho B_3^2 + \rho \left[\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + p^* \right] \\ w_3 B_1 - B_3 w_1 \\ w_3 B_2 - B_3 w_2 \\ 0 \\ (E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}) w_3 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) B_3 \end{pmatrix},$$

où $p^*(\rho, \mathbf{w}, \mathbf{B}, E) = p(\varepsilon(\rho, \mathbf{w}, \mathbf{B}, E), \rho)$ avec $\varepsilon = \frac{1}{\rho} (E - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{w}|^2}{\rho} - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2})$

On peut également réécrire (2.31) sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 A_i(U) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

où les $(A_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont les matrices jacobiniennes de $(F_i)_{1 \leq i \leq 3}$ données par

$$A_1 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_1^2}{\rho} + \delta & (2 - \frac{\alpha}{\rho})w_1 & -\frac{\alpha}{\rho}w_2 & -\frac{\alpha}{\rho}w_3 & -(\rho + \alpha)B_1 & (\rho - \alpha)B_2 & (\rho - \alpha)B_3 & \alpha \\ -\frac{\rho}{w_1 w_2} & w_2 & w_1 & 0 & -\rho B_2 & -\rho B_1 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{w_1 w_3} & w_3 & 0 & w_1 & -\rho B_3 & 0 & -\rho B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_1 B_2 - w_2 B_1}{\rho} & B_2 & -B_1 & 0 & -w_2 & w_1 & 0 & 0 \\ -\frac{w_1 B_3 - w_3 B_1}{\rho} & B_3 & 0 & -B_1 & -w_3 & 0 & w_1 & 0 \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} & h_{17} & h_{18} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_2 w_1}{\rho} & w_2 & w_1 & 0 & -\rho B_2 & -\rho B_1 & 0 & 0 \\ -\frac{w_2^2}{\rho} + \delta & -\frac{\alpha}{\rho}w_1 & (2 - \frac{\alpha}{\rho})w_2 & -\frac{\alpha}{\rho}w_3 & (\rho - \alpha)B_1 & -(\rho + \alpha)B_2 & (\rho - \alpha)B_3 & \alpha \\ -\frac{\rho}{w_2 w_3} & 0 & w_3 & w_2 & 0 & -\rho B_3 & -\rho B_2 & 0 \\ -\frac{\rho}{w_2 B_1 - w_1 B_2} & -B_2 & B_1 & 0 & w_2 & -w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_3 B_2 - B_3 w_2}{\rho} & 0 & B_3 & -B_2 & 0 & -w_3 & w_2 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} & h_{27} & h_{28} \end{pmatrix},$$

et

$$A_3 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_3 w_1}{\rho} & w_3 & 0 & w_1 & -\rho B_3 & 0 & -\rho B_1 & 0 \\ -\frac{\rho}{w_3 w_2} & 0 & w_3 & w_2 & 0 & -\rho B_3 & -\rho B_2 & 0 \\ -\frac{w_3^2}{\rho} + \delta & -\frac{\alpha}{\rho}w_1 & -\frac{\alpha}{\rho}w_2 & (2 - \frac{\alpha}{\rho})w_3 & (\rho - \alpha)B_1 & (\rho - \alpha)B_2 & -(\rho + \alpha)B_3 & \alpha \\ -\frac{\rho}{w_3 B_1 - B_3 w_1} & -B_3 & 0 & B_1 & w_3 & 0 & -w_1 & 0 \\ -\frac{\rho}{w_3 B_2 - B_3 w_2} & 0 & -B_3 & B_2 & 0 & w_3 & -w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} & h_{37} & h_{38} \end{pmatrix},$$

où on note $\alpha = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$, $\beta = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, $\delta = (\rho\beta - \alpha\varepsilon) + \frac{\alpha}{2\rho^2}|\mathbf{w}|^2$. Les h_{ij} , $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 8$ sont défini par

$$\begin{aligned} - h_{i1} &= -\frac{1}{\rho}[E + p^* + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}]w_i + \delta w_i - \frac{1}{\rho}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{w})B_i, \\ - \text{pour } 2 \leq j \leq 4, h_{ij} &= (E + p^* + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2})\delta_{i,j-1} - \frac{\alpha}{\rho}w_i^2 - B_i B_{j-1}, \end{aligned}$$

- pour $5 \leq j \leq 7$, $h_{ij} = -B_i w_{j-4} \delta_{i,j-4} + [B_{j-4} w_i - B_i w_{j-4}] (1 - \delta_{i,j-4}) - \frac{\alpha}{\rho} B_{j-4} w_i$,
- $h_{i8} = (1 + \frac{\alpha}{\rho}) w_i$.

En considérant le vecteur des variables primitives $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p)^T$, on peut montrer que les matrices C_1 , C_2 , et C_3 définies pour le système (2.28) sont reliées aux matrices A_1 , A_2 , et A_3 par la relation

$$C_i(\mathbf{V}) = M(\mathbf{V})^{-1} A_i(\mathbf{U}(\mathbf{V})) M(\mathbf{V}), \quad (2.34)$$

où $M(\mathbf{V})$ est la matrice jacobienne

$$M(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{U}(\mathbf{V}). \quad (2.35)$$

4.2 Valeurs propres et vecteurs propres du système

On s'intéresse dans cette partie au calcul des valeurs propres et vecteurs propres du système MHD. Soit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$, on considère la matrice

$$C = C(\boldsymbol{\omega}) = \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \omega_3 C_3$$

où les matrices C_1 , C_2 et C_3 ont été introduites en même temps que le système (2.28). $C(\boldsymbol{\omega})$ est définie par

$$C(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & \rho \omega_1 & \rho \omega_2 & \rho \omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\rho} & -\beta_3 & \beta_2 & \frac{\omega_1}{\rho} \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & 0 & \beta_3 & -\frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\rho} & -\beta_1 & \frac{\omega_2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} & -\beta_2 & \beta_1 & -\frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\rho} & \frac{\omega_3}{\rho} \\ 0 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + B_1 \omega_1 & B_1 \omega_2 & B_1 \omega_3 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - u_1 \omega_1 & -u_1 \omega_2 & -u_1 \omega_3 & 0 \\ 0 & B_2 \omega_1 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + B_2 \omega_2 & B_2 \omega_3 & -u_2 \omega_1 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - u_2 \omega_2 & -u_2 \omega_3 & 0 \\ 0 & B_3 \omega_1 & B_3 \omega_2 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + B_3 \omega_3 & -u_3 \omega_1 & -u_3 \omega_2 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - u_3 \omega_3 & 0 \\ 0 & \chi \omega_1 & \chi \omega_2 & \chi \omega_3 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}$.

On note que si $\mathbf{V} = (\rho_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{B}_*, p_*)^T$ est un vecteur quelconque de \mathbb{R}^8 alors

$$C(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho_* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{u}_* \cdot \boldsymbol{\omega} \\ (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_* - \frac{1}{\rho} (\mathbf{B}_* \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_*) + \frac{p_* \boldsymbol{\omega}}{\rho} \\ -(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_* + (\mathbf{u}_* \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{B} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{B}_* - (\mathbf{B}_* \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} \\ \chi \mathbf{u}_* \cdot \boldsymbol{\omega} + p_* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}.$$

Soient $v_A^2 = \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho}$ la vitesse d'Alfvén et $v_T^2 = \frac{\chi}{\rho}$ la vitesse du son. On pose $c_A(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{\rho} |\boldsymbol{\omega}|}$.

On a

$$c_A^2(\boldsymbol{\omega}) \leq v_A^2.$$

Le polynôme caractéristique de $C(\boldsymbol{\omega})$ est :

$$P(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda I) = |\boldsymbol{\omega}|^2 \lambda c_\lambda (c_\lambda^2 - c_A^2) \{c_\lambda^4 - (v_T^2 + v_A^2)c_\lambda^2 + c_A^2 v_T^2\}$$

$$\text{où } c_\lambda = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - \lambda)$$

Les valeurs propres de C sont :

- $\lambda_0 = 0$
- $\lambda_1 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$
- $\lambda_{2,i} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \varepsilon_i c_A |\boldsymbol{\omega}|$, $i = 1, 2$,
- $\lambda_{3,i} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \varepsilon_i c_F |\boldsymbol{\omega}|$, $i = 1, 2$,
- $\lambda_{4,i} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \varepsilon_i c_S |\boldsymbol{\omega}|$, $i = 1, 2$,

où $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$ et c_S^2, c_F^2 ($c_S^2 \leq c_F^2$) sont les deux racines de l'équation du second degré

$$X^2 - (v_A^2 + v_T^2)X + c_A^2 v_T^2 = 0.$$

Ainsi, on a

$$c_F^2 = \frac{v_T^2 + v_A^2 + \sqrt{(v_T^2 + v_A^2)^2 - 4c_A^2 v_T^2}}{2}$$

et

$$c_S^2 = \frac{v_T^2 + v_A^2 - \sqrt{(v_T^2 + v_A^2)^2 - 4c_A^2 v_T^2}}{2}$$

Puisque $c_A(\boldsymbol{\omega}) \leq v_A$, on a

- $c_S^2 \leq c_A^2 \leq c_F^2$
- $c_S^2 \leq \min(v_A^2, v_T^2) \leq \max(v_A^2, v_T^2) \leq c_F^2$.

Si on cherche des vecteurs propres associés à ces valeurs quand $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ et $\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ quand toutes ces valeurs propres sont différentes, on trouve

- $\mathbf{V}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ associé à la valeur propre $\lambda = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$.
- $\mathbf{V}_{2,i} = (0, \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}, -\varepsilon_i \sqrt{\rho} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}, 0)^T$ associé à la valeur propre $\lambda_{2,i}$, $i = 1, 2$ (on remarque que ces deux vecteurs propres sont nuls si $\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et ils correspondent à la même valeur propre si $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$).
- $\mathbf{V}_{\ell,i} = \left(-\frac{\rho}{k_{\ell,i}} |\boldsymbol{\omega}|^2 \left(1 - \frac{c_A^2 |\boldsymbol{\omega}|^2}{k_{\ell,i}^2}\right), \boldsymbol{\omega} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) |\boldsymbol{\omega}|^2}{\rho k_{\ell,i}^2} \mathbf{B}, k_{\ell,i} ((\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{B}), \frac{\rho |\boldsymbol{\omega}|^2 v_A^2}{k_{\ell,i}} - \rho k_{\ell,i}\right)$
avec $k_{\ell,i} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - \lambda_{\ell,i}$, $\ell = 3, 4$ et $i = 1, 2$.

Dans certains cas, deux valeurs propres peuvent être égales. Par conséquent, le système de la MHD n'est pas strictement hyperbolique. Dans le tableau de l'annexe A, nous résumons les cas pour lesquelles l'égalité apparaît. Dans [13], Brio et Wu montrent que les équations de la MHD ne sont pas convexe en prouvant que dans certains cas les champs caractéristiques peuvent être ni vraiment non linéaire ni linéairement dégénéré.

4.3 Conditions de Rankine-Hugoniot - Chocs et discontinuités

Soit Σ une surface de discontinuité. Soit \mathbf{n} la normale unitaire à cette surface et σ la vitesse de propagation de la discontinuité.

Dans toute la suite, les quantités à droite et à gauche de la discontinuité seront indexées par 1 et 2 respectivement. Si A désigne une quantité valant A_1 d'un côté de Σ et A_2 de l'autre, on note

$$[A] = \frac{1}{2}(A_2 - A_1),$$

et

$$\{A\} = \frac{1}{2}(A_1 + A_2).$$

Ainsi, $\{A\}$ désigne la moyenne des valeurs des deux cotés de Σ tandis que $[A]$ désigne la moitié du saut. On a

$$A_2 = [A] + \{A\},$$

$$A_1 = \{A\} - [A]$$

et de façon générale

$$[AB] = \{A\}[B] + [A]\{B\},$$

$$\{AB\} = \{A\}\{B\} + [A][B],$$

et

$$\left\{\frac{A}{B}\right\} = \frac{\{A\}\{B\} - [A][B]}{\{B\}^2 - [B]^2}.$$

Les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent :

$$\begin{cases} -\sigma[\rho] + [\rho\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0, \\ -\sigma[\rho\mathbf{u}] + [\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + (\frac{|\mathbf{B}^2|}{2} + p)I] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ -\sigma[\mathbf{B}] + [\mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ -\sigma[E] + [(E + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2})\mathbf{u} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

On pose $v = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma$, le système (2.36) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} [\rho v] = 0, \\ [\rho v \mathbf{u} + (\frac{\mathbf{B}^2}{2} + p)\mathbf{n} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}] = \mathbf{0}, \\ [v\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \\ [vE + (p + \frac{\mathbf{B}^2}{2})\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

A ces conditions s'ajoute celle sur la continuité de la composante normale du champ magnétique :

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad (2.38)$$

provenant de (2.21).

Afin d'étudier plus précisément les différents chocs (et discontinuités) intervenant en MHD, on se place maintenant dans un référentiel où le choc est stationnaire. L'axe des x est choisi tel qu'il soit aligné avec la normale du choc. Ainsi le plan du choc est parallèle au plan $y - z$. Sachant que

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2},$$

les conditions (2.37) et (2.38) deviennent alors :

$$[B_x] = 0, \quad (2.39)$$

$$[\rho u_x] = 0, \quad (2.40)$$

$$[\rho u_x^2 + p + \frac{|\mathbf{B}_t|^2}{2}] = 0, \quad (2.41)$$

$$[\rho u_x \mathbf{u}_t - B_x \mathbf{B}_t] = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

$$[\mathbf{u}_t B_x - u_x \mathbf{B}_t] = 0, \quad (2.43)$$

$$[\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 u_x + (\rho \varepsilon + p) u_x + |\mathbf{B}|^2 u_x - \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} B_x] = 0, \quad (2.44)$$

où \mathbf{B}_t et \mathbf{u}_t sont les composantes tangentielles respectives du champ magnétique \mathbf{B} et de la vitesse \mathbf{v} .

D'après (2.40) et (2.39), il est évident que ρu_x et B_x sont constants à travers la discontinuité. On pose $m = \rho u_x$ et on convient par la suite que la direction de l'axe des x est tel que $m \geq 0$. Pour toute quantité A , les valeurs A_1 et A_2 désignent respectivement sa valeur avant et après la discontinuité. Les équations (2.40) à (2.44) se réécrivent

$$[u_x] = m[\tau], \quad (2.45)$$

$$m[u_x] + [p] + \{\mathbf{B}_t\}[\mathbf{B}_t] = 0, \quad (2.46)$$

$$m[\mathbf{u}_t] - B_x[\mathbf{B}_t] = \mathbf{0}, \quad (2.47)$$

$$B_x[\mathbf{u}_t] - \{u_x\}[\mathbf{B}_t] - [u_x]\{\mathbf{B}_t\} = 0, \quad (2.48)$$

$$m([e] + (\{p\} + [\mathbf{B}_t]^2)[\tau]) = 0, \quad (2.49)$$

où la dernière équation (2.49) est obtenue à partir de (2.44) après des simplifications dues aux équations (2.46)- (2.48). A ces équations, il faut rajouter la condition sur l'entropie

$$[S] \geq 0. \quad (2.50)$$

Contrairement à la dynamique des fluides où les solutions entropiques sont considérées comme étant des solutions physiques, en MHD les solutions satisfaisant la condition (2.50) sont admissibles mais pas nécessairement physiques. Afin d'obtenir des solutions physiques il semble nécessaire de rajouter des conditions supplémentaires sur les discontinuités. Ces conditions sont souvent appelées *les conditions d'évolution*. Le lecteur peut consulter le livre de Jeffrey et Taniuti ([38]) où figure une façon de les introduire.

On peut distinguer essentiellement trois types de discontinuités

Les discontinuités de contact et tangentielles pour lesquelles $m = 0$ (le flux de masse à travers la discontinuité est nulle).

Les chocs non compressifs pour lesquels $m > 0$ et $[\tau] = 0$,

Les chocs compressifs pour lesquels $m > 0$ et $[\tau] \neq 0$ (on verra que nécessairement $[\tau] > 0$).

Dans le cas de chocs (compressifs ou pas), on a $m \neq 0$ et par conséquent l'équation (2.49) se réduit à

$$[e] + (\{p\} + [\mathbf{B}_t]^2)[\tau] = 0. \quad (2.51)$$

On a le lemme suivant démontré dans [38].

Lemme 1. *Sous les hypothèses (G1), (G2), (G3) et (G4) (voir chapitre 2), on a*

- Si $[\tau] < 0$ alors $[S] > 0$,
- Si $[\tau] = 0$ alors $[S] = 0$,
- Si $[\tau] > 0$ alors $[S] < 0$.

En d'autres termes, l'entropie S croit à travers un choc si et seulement si ρ croit à travers le choc, c'est à dire si et seulement si le choc est compressif. Cette affirmation reste vraie si ρ est remplacé par p ou ε .

Discontinuité de contact et discontinuité tangentielle

Dans ce cas $m = 0$ et $[\tau] = 0$. Il en résulte que $[S] = 0$. Les équations ci-dessus se réduisent à

$$\begin{aligned} [u_x] = \{u_x\} &= 0, \\ [p] + \{\mathbf{B}_t\}[\mathbf{B}_t] &= 0, \\ B_x[\mathbf{B}_t] &= \mathbf{0}, \\ B_x[\mathbf{u}_t] &= 0. \end{aligned}$$

Contrairement au cas de la dynamique des gaz, une discontinuité dans la composante tangentielle de la vitesse \mathbf{u} n'est pas possible si $B_x \neq 0$. On a donc deux cas

- Si $B_x \neq 0$, on obtient

$$[p] = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{u}_t] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{B}] = \mathbf{0}.$$

Le saut de la densité $[\rho]$ à travers Σ est arbitraire dans ce cas. On parle de *discontinuité de contact*.

- Si $B_x = 0$, les composantes transverses de \mathbf{u} et \mathbf{B} peuvent avoir des sauts arbitraires tandis que le saut de la pression est soumis à la condition

$$\left[p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right] = 0.$$

Il s'agit d'une *discontinuité tangentielle*. Dans ce cas les sauts à travers Σ de ρ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t$ sont arbitraires ainsi que la répartition entre la pression du fluide et la pression magnétique.

On montre que dans les deux cas, la discontinuité vérifie les conditions d'évolution (voir Jeffrey et Taniuti [38]).

Les chocs non compressifs

Il s'agit du cas où $m > 0$ et $[\tau] = 0$. Dans ce cas on a $[S] = [e] = [p] = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t \cdot [\mathbf{B}_t] &= 0, \\ m[\mathbf{u}_t] - B_x[\mathbf{B}_t] &= 0, \\ B_x[\mathbf{u}_t] - m\tau[\mathbf{B}_t] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A partir des deux dernières équations, on déduit que le discontinuité existe si

$$m^2 = \frac{B_x^2}{\tau}. \quad (2.52)$$

A partir de la première équation, on a

$$[|\mathbf{B}|^2] = 0, \quad (2.53)$$

ce qui signifie que le champ magnétique tourne d'un angle quelconque dans le plan tangentiel sans changer de magnitude. C'est pourquoi ce type de choc est souvent appelé *discontinuité rotationnelle* ou choc transverse (ou perpendiculaire). Si $\{\mathbf{B}_t\} \neq \mathbf{0}$, l'angle de rotation est différent de 180° et d'après (2.53) on peut écrire

$$[\mathbf{B}_t] = \alpha\{\mathbf{B}\} \times \mathbf{n} \text{ et } \mathbf{u}_t = \alpha \operatorname{sgn}(B_x)\{\mathbf{B}_t\} \times \mathbf{n},$$

où α est un facteur réel de proportionnalité. Dans ce cas, le choc satisfait les conditions d'évolution (voir Jeffrey et Taniuti [38]). Ce n'est pas le cas si l'angle de rotation est de 180° .

Chocs compressifs

On suppose désormais que $m \neq 0$ et $[\tau] \neq 0$. D'après le lemme 1 et la condition d'entropie (2.50) on a

$$[\tau] < 0, \quad (2.54)$$

Pour l'étude de ces chocs compressifs, on introduit le rapport de compression :

$$r = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{u_{x,1}}{u_{x,2}}, \quad (2.55)$$

et on pose

$$m_1^2 = \frac{B_x^2}{\tau_1}, \quad m_2^2 = \frac{B_x^2}{\tau_2} = r m_1^2. \quad (2.56)$$

Les deux équations (2.42) et (2.43) donnent

$$[\mathbf{u}_t] = \frac{B_x}{m}[\mathbf{B}_t], \quad (2.57)$$

$$(m^2 - m_2^2)\mathbf{B}_{t,2} = r(m^2 - m_1^2)\mathbf{B}_{t,1}. \quad (2.58)$$

Les deux équations restantes (2.46) et (2.49) s'écrivent respectivement (après de simples manipulations)

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{r-1}{r}M_1^2 - \frac{[|\mathbf{B}_t|^2]}{p_1}, \quad (2.59)$$

$$(r+1-\gamma(r-1))\frac{p_2}{p_1} - (r+1+\gamma(r-1)) - (\gamma-1)\frac{r-1}{p_1}[\mathbf{B}_t]^2 = 0, \quad (2.60)$$

où on a posé

$$M_1^2 = \frac{m^2}{\rho_1 p_1}.$$

On distingue plusieurs cas

Cas 1 : $\mathbf{B}_{t,1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_{t,2} = \mathbf{0}$: puisque B_x est continu, le champ magnétique \mathbf{B} reste inchangée au cours du choc. Il y a une compression dans le plasma, mais pas dans le champ magnétique. Le choc est identique à un choc de fluide ordinaire. On parle de *choc parallèle*.

Cas 2 : $\mathbf{B}_{t,1} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_{t,2} = \mathbf{0}$: Nécessairement $u_{x,1} = v_{a,1}$. Ce choc est connu sous le nom de "switch-off shock". Il se propage à la vitesse d'Alfvén et le champ magnétique tangentiel aval disparaît. C'est un choc lent.

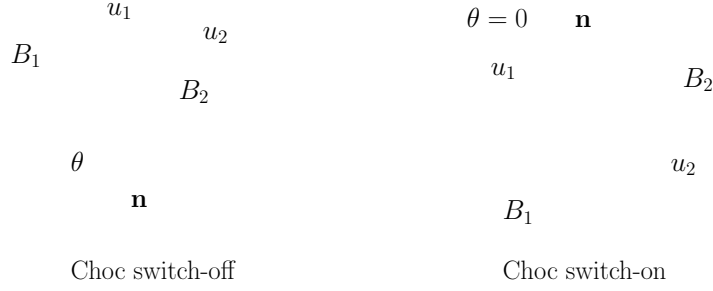


FIG. 2.12 – Chocs switch-on et switch-off

Cas 3 : $\mathbf{B}_{t,1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_{t,2} \neq \mathbf{0}$: Nécessairement $u_{x,1} = v_{a,1}$. Ce choc est connu sous le nom de “switch-on shock”.

Cas 4 : $\mathbf{B}_{t,1} \neq \mathbf{0}$ et $B_x = 0$ Dans ce, le choc est dit perpendiculaire car le champ magnétique \mathbf{B} est orthogonal à la normale du choc.

La condition (2.57) implique que la vitesse tangentielle \mathbf{u}_t est continue à travers le choc.

La condition (2.58) donne

$$\mathbf{B}_{t,2} = r\mathbf{B}_{t,1}. \quad (2.61)$$

Le champ magnétique est donc compressé avec le même rapport que la densité tout en gardant sa direction.

En éliminant le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ des deux équations (2.59) et (2.60) on obtient l'équation du second degré en r

$$2(2 - \gamma)r^2 + (2\gamma\beta_1 + 2\gamma + (\gamma - 1)\beta_1 M_1^2)r - (\gamma + 1)\beta_1 M_1^2 = 0, \quad (2.62)$$

où

$$\beta_1 = \frac{2p_1}{|\mathbf{B}_1|^2}. \quad (2.63)$$

Si $\gamma < 2$, cette équation n'admet qu'une seule racine positive $r = r_0$. Or, comme $r \geq 1$, on en déduit la condition suivante sur le nombre de Mach

$$M_s^2 = \gamma^{-1} M_1^2 \geq 1 + \frac{2}{\gamma\beta_1}.$$

Autrement dit

$$u_{x,1}^2 \geq c_s^2 + v_A^2.$$

Le choc perpendiculaire est donc un choc magnéto-sonique rapide si $\gamma < 2$.

Cas général : $\mathbf{B}_{t,1} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_{t,2} \neq \mathbf{0}$ et $B_x \neq 0$

Dans ce cas la condition (2.58) conduit au lemme suivant

Lemme 2 (Lemme de coplanarité). *Les champs magnétiques \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 et le vecteur normal au choc sont coplanaires. Les composantes tangentielles $\mathbf{B}_{t,1}$ et $\mathbf{B}_{t,2}$ sont colinéaires.*

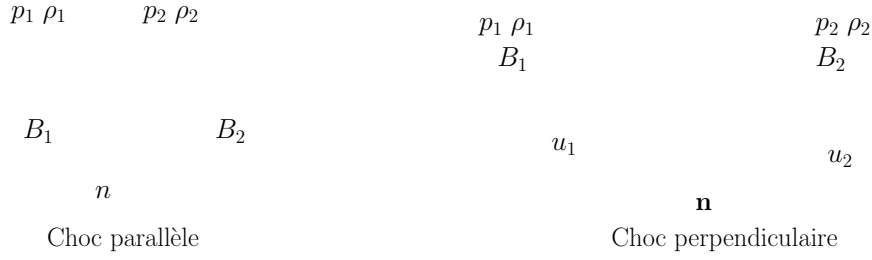


FIG. 2.13 – Chocs parallèles et perpendiculaires

En effet, on ne peut avoir les égalités $m_1^2 - m_2^2 = m^2 - m_2^2 = 0$ car $m_1^2 \neq m_2^2$. De plus, puisque $\mathbf{B}_{t,1} \neq \mathbf{0}$, on a forcément $m^2 \neq m_2^2$ et

$$\mathbf{B}_{t,2} = r \frac{u_{x,1}^2 - v_{a,1}^2}{u_{x,1}^2 - rv_{a,1}^2} \mathbf{B}_{t,1} = \frac{1}{r} \frac{u_{x,1}^2 - v_{a,1}^2}{u_{x,2}^2 - v_{a,2}^2} \mathbf{B}_{t,1}, \quad (2.64)$$

où $v_{a,1}$ et $v_{a,2}$ sont les vitesses d'Alfven avant et après le choc :

$$v_{a,1}^2 = \frac{B_x^2}{\rho_1}, \quad v_{a,2}^2 = \frac{B_x^2}{\rho_2} = \frac{1}{r} v_{a,1}^2. \quad (2.65)$$

On peut alors choisir, sans perdre de généralité, un système de coordonnées tel que le champ magnétique soit dans le plan $x - y$ et $B_{y,1} > 0$. On a alors

$$\frac{B_{y,2}}{B_{y,1}} = r \frac{u_{x,1}^2 - v_{a,1}^2}{u_{x,1}^2 - rv_{a,1}^2}, \quad [B_y] = (r - 1) \frac{u_{x,1}^2}{u_{x,1}^2 - rv_{a,1}^2} B_{y,1}. \quad (2.66)$$

Il en résulte qu'on a deux types de chocs

- Si $u_{x,1}^2 < v_{a,1}^2$, alors $[B_y] \geq 0$: c'est un choc lent.
- Si $u_{x,1}^2 > rv_{a,1}^2$, alors $[B_y] \leq 0$: c'est un choc rapide.

Nous allons montrer que les quantités après le choc (ρ_2 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{B}_2 , p_2) et la vitesse du choc s'expriment en fonction des quantités avant le choc (ρ_1 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{B}_1 , p_1) et du saut de l'une d'elles.

En éliminant le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ des deux équations (2.59) et (2.60) on obtient l'équation en r

$$[r + 1 - \gamma(r - 1)]\beta_1 M_1^2 - 2\gamma\beta_1 r - 2[r + 1 - \gamma(r - 1)]a(r) - 2(\gamma - 1)b(r) = 0, \quad (2.67)$$

où

$$a(r) = \frac{1}{2} \left[r^2 \left(\frac{M - 1}{M - r} \right)^2 - 1 \right] \frac{|\mathbf{B}_{t,1}|^2}{|\mathbf{B}_1|^2}, \quad b(r) = \frac{1}{4} \left(r \frac{M - 1}{M - r} - 1 \right)^2 \frac{|\mathbf{B}_{t,1}|^2}{|\mathbf{B}_1|^2}, \quad \text{avec } M = \frac{m^2}{m_1^2}.$$

D'après Jeffrey et Taniuti ([38]), les conditions dites d'évolution impliquent que

$$B_{y,2} \geq 0. \quad (2.68)$$

4.4 Equations de la MHD linéarisées autour d'un équilibre

On considère la loi de conservation

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (F_j(\mathbf{U})) = 0, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m.$$

On linéarise le système autour d'un équilibre \mathbf{U}_0 , et on pose $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{W}$. L'équation linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla_{\mathbf{U}} F_j(\mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{W}). \quad (2.69)$$

On suppose que les matrices $\nabla_{\mathbf{U}} F_j(\mathbf{U}_0)$ sont toutes de la forme

$$\nabla_{\mathbf{U}} F_j(\mathbf{U}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & K_j \\ \hline L_j & 0 \end{array} \right) \quad (2.70)$$

où K_j et L_j sont des matrices de taille $p \times (m-p)$ et $(m-p) \times p$ respectivement. Soit

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right)$$

On a

$$P \nabla_{\mathbf{U}} F_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & K_j \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

et

$$\nabla_{\mathbf{U}} F_j P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline L_j & 0 \end{array} \right)$$

Donc

$$P \cdot \nabla_{\mathbf{U}} F_j + \nabla_{\mathbf{U}} F_j \cdot P = \nabla_{\mathbf{U}} F_j.$$

P est la matrice de projection sur l'espace

$$E_1 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_{p+1} = 0, \dots, \alpha_m = 0\}$$

\mathbf{W} se décompose de façon unique sous la forme

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2, \quad \mathbf{W}_1 \in E_1, \quad \mathbf{W}_2 \in E_2 = E_1^\perp$$

$$\mathbf{W}_1 = P\mathbf{W}, \quad \mathbf{W}_2 = (I - P)\mathbf{W}.$$

On projette (2.69) sur E_1

$$\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (P \nabla_{\mathbf{U}} F_j(\mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{W}) = 0$$

Or

$$P\nabla_{\mathbf{U}}F_j(\mathbf{U}_0) = \nabla_{\mathbf{U}}F_j(\mathbf{U}_0)(I - P)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla_{\mathbf{U}}F_j(\mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{W}_2) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (K_j(\mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{W}_2) &= 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial \mathbf{W}_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (L_j(\mathbf{U}_0) \cdot \mathbf{W}_1) = 0.$$

En dérivant par rapport au temps, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (K_j(\mathbf{U}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_2}{\partial t}) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (K_j(\mathbf{U}_0) \cdot (-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (L_i(\mathbf{U}_0) \mathbf{W}_1))) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (K_j(\mathbf{U}_0) \frac{\partial}{\partial x_i} (L_i(\mathbf{U}_0) \mathbf{W}_1)) &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}_2}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (L_j(\mathbf{U}_0) \frac{\partial}{\partial x_i} (K_i(\mathbf{U}_0) \mathbf{W}_2)) = 0.$$

On s'intéresse maintenant au cas de la MHD idéale. On considère une configuration d'équilibres statiques qui sont des solutions des équations de la MHD pour lesquelles la vitesse est nulle et qui ne dépendent pas du temps. Les variables à l'équilibre sont identifiées par un indice 0. En utilisant (2.17)-(2.18) et (2.21), on obtient facilement

$$\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_0 \quad (2.71)$$

et

$$\mathbf{div} \mathbf{B}_0 = 0. \quad (2.72)$$

Les équations (2.17), (2.18) et (2.20) sont automatiquement vérifiées à l'équilibre. On considère maintenant un petit déplacement autour de l'équilibre. On note par l'indice 1 ce déplacement. On définit $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}_1$, $E = E_0 + E_1$ et $p = p_0 + p_1$. On peut linéariser le système MHD (2.33) autour de l'équilibre $(\rho_0, \mathbf{0}, \mathbf{B}_0, E_0)$, en se ramenant au cadre général du système (2.69). Les matrices jacobiennes du système peuvent être écrites sous la forme (2.70) à condition de modifier l'ordre des variables conservatives des équations de la MHD par rapport à celle utilisée dans (2.33). En choisissant comme ordre de variable $\mathbf{W} = (\rho \mathbf{u}, \rho, \mathbf{B}, E)$ on peut montrer que \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_2 sont définis par

$$\mathbf{W}_1 = \rho \mathbf{u}$$

et

$$\mathbf{W}_2 = (\rho, \mathbf{B}, E)^T.$$

Les matrices L_j , et K_j , $1 \leq j \leq 3$ sont respectivement de tailles 5×3 et 3×5 . On ommet les indices 0 dans les matrices afin d'alléger les notations, et on utilise les mêmes notations que dans les matrices jacobiennes du système (2.33). Les L_j , $1 \leq j \leq 3$ sont alors définies par

$$L_1 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_2 & -B_1 & 0 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ h_{12} & h_{13} & h_{14} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ -B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & -B_2 \\ h_{22} & h_{23} & h_{24} \end{pmatrix}, \quad \text{et } L_3 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ 0 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \end{pmatrix}.$$

Les matrices K_j , $1 \leq j \leq 3$ sont

$$K_1 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \delta & -(\rho + \alpha)B_1 & (\rho - \alpha)B_2 & (\rho - \alpha)B_3 & \alpha \\ 0 & -\rho B_2 & -\rho B_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho B_3 & 0 & -\rho B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -\rho B_2 & -\rho B_1 & 0 & 0 \\ \delta & (\rho - \alpha)B_1 & -(\rho + \alpha)B_2 & (\rho - \alpha)B_3 & \alpha \\ 0 & 0 & -\rho B_3 & -\rho B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$K_3 = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -\rho B_3 & 0 & -\rho B_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho B_3 & -\rho B_2 & 0 \\ \delta & (\rho - \alpha)B_1 & (\rho - \alpha)B_2 & -(\rho + \alpha)B_3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

On pose $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\rho_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0}{\rho_0}$. Après calculs, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho_0} \left\{ \delta \operatorname{div} (\rho_1 \mathbf{u}_1) + \alpha \operatorname{div} \left((E_0 + p_0 + \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{2}) \frac{\rho_1 \mathbf{u}_1}{\rho_0} - (\frac{\rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{B}_0}{\rho_0}) \mathbf{B}_0 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (\rho_0 - \alpha) \mathbf{B}_0 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} \right\} I \right] \\ + \operatorname{div} (\mathbf{B}_0 \otimes \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} \otimes \mathbf{B}_0). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un gaz polytropique, la pression est définie par

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

A l'équilibre, $\delta = 0$ et $\alpha = (\gamma - 1)\rho_0$. L'opérateur $\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2}$ devient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left[\left\{ (\gamma - 1) \operatorname{div} \left((E_0 + p_0 + \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{2}) \frac{\rho_1 \mathbf{u}_1}{\rho_0} - (\frac{\rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{B}_0}{\rho_0}) \mathbf{B}_0 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (2 - \gamma) \mathbf{B}_0 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} \right\} I \right] \\ + \operatorname{div} (\mathbf{B}_0 \otimes \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} \otimes \mathbf{B}_0). \end{aligned}$$

L'opérateur $\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial t^2}$ agit sur la variable conservative $\rho \mathbf{u}$. Dans la littérature (voir par exemple [1], [46] ou [46]), un opérateur équivalent noté L agissant sur la variable non conservative \mathbf{u} est utilisé dans les mêmes conditions d'équilibre. Il est défini par

$$L\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \left\{ -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \right\} \quad (2.73)$$

Dans le cas d'un gaz polytropique, la pression vérifie

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

L'équation linéarisée correspondante s'écrit

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_1$$

et l'opérateur L devient

$$\begin{aligned} L\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho_0} \{ \nabla(\mathbf{v} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ &+ \mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \} \end{aligned} \quad (2.74)$$

On montre que l'opérateur L est auto-adjoint (voir Annexe C).

Cette opérateur joue un rôle important dans la discrétisation en temps de schémas numériques MHD. En effet, pour les problèmes étudiés, il faut pouvoir décrire une évolution très lente pendant des temps très longs de l'ordre de plusieurs centaines voir du millier de temps d'Alfven avant d'arriver à la phase intéressante physique de l'évolution. Les schémas de types explicites pour l'équation d'impulsion déterminent la vitesse à un instant $n+1$ comme solution de $(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n)/\Delta t = \mathbf{F}(\mathbf{v}^n, \mathbf{b}^n, p^n, \rho^n)$ en fonction des valeurs de la vitesse et des autres champs, magnétique, de pression et de densité, à l'instant n . Ces schémas sont généralement conditionnellement stables. Le pas de temps Δt doit être tel qu'une onde se propageant à la vitesse c ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps. Cette condition dite CFL (Courant-Friedrichs-Levy) impose, dans le cas MHD où la vitesse des ondes les plus rapides est celles des modes magnétoacoustiques rapides, des pas de temps très petits et ne semble donc pas adéquat pour la description de l'évolution lente caractéristique de ce type de problème.

Dans [33], Harned et Kerner ont introduit une classe de schémas dits semi-implicites. Dans ces schémas, L est utilisé comme un opérateur de stabilisation numérique. Il permet d'augmenter les pas de temps du schéma.

5 Equations de la magnétostatique

Les équations de la MHD décrivent l'évolution d'un plasma. Dans les situations d'équilibres auxquels on s'intéresse la vitesse hydrodynamique du fluide est souvent négligeable face aux termes magnétiques. Les équations se réduisent à

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (2.75)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.76)$$

Les équations de la magnétostatique (2.75)-(2.76) ainsi obtenues traduisent le fait qu'à l'équilibre la pression cinétique compense les forces magnétiques. Ces équilibres jouent un rôle important en fusion magnétique et peuvent être réécrits sous la forme

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad (2.77)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.78)$$

où $\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B}$.

D'après (2.75) et (2.77), on montre facilement que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0,$$

et que

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0,$$

ce qui signifie que les lignes de champ magnétique et les lignes de courant sont inscrites sur des surfaces isobares (ie des surfaces sur lesquels la pression cinétique est constante). Les surfaces générées par les lignes de champ magnétique sont des surfaces magnétiques. On se place ici dans des situations où la densité d'énergie magnétique domine largement l'énergie cinétique et l'énergie interne du système, c'est-à-dire lorsque le nombre $\beta \ll 1$. Dans ce cas, la pression p devient négligeable devant la force de Lorentz. Le système (2.75)-(2.76) se réduit alors à

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.79)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.80)$$

Un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 satisfaisant le système non-linéaire (2.79)-(2.80) est appelé champ de Beltrami ou champ sans force. D'après l'équation (2.79), \mathbf{B} et $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ sont partout parallèles. Ils modélisent les équilibres d'un plasma parfaitement conducteur, en présence d'un champ magnétique important, dans lequel la pression est négligeable. Les champs de Beltrami apparaissent dans différents domaines. Ils interviennent notamment en physique des plasmas. Ils jouent un rôle particulièrement important en physique solaire où ils permettent de reconstruire le champ magnétique de la couronne à partir de données satellites. En effet, les mesures les plus précises du champ magnétique solaire effectuées par des satellites tels que SOHO sont prises sur la photosphère. Le champ magnétique coronal reste lui très difficile à mesurer. Il est considéré comme force-free. Sa reconstruction à partir des données satellites prises comme conditions de bord apparaît donc comme un enjeu important dans la connaissance du soleil.

On trouve également les champs de Beltrami en mécanique des fluides où ils sont solutions des équations d'Euler stationnaires, en théorie du chaos, et en électromagnétisme.

D'un point de vue mathématiques, l'équation (2.79) est souvent réécrite sous la forme

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (2.81)$$

où λ est une fonction scalaire inconnue. Cette écriture traduit le fait que \mathbf{B} et son rotationnel sont colinéaires. On distingue alors deux cas :

- λ est une fonction constante ne dépendant pas de la variable \mathbf{x} . On parle de champ de Beltrami (ou de champ sans-force) *linéaire* par analogie au caractère linéaire de l'équation (2.81). Dans le cas particulier où $\lambda = 0$, le système (2.81)-(2.80) s'écrit

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = 0, \quad (2.82)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.83)$$

Le champ vectoriel \mathbf{B} est appelé champ potentiel. Ce cas correspond à la situation où le courant $\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B}$ est nul. Enfin, en prenant le rotationnel de l'équation (2.81), on obtient $\Delta \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{B} = 0$. Les champs de Beltrami sont des solutions particulières de l'équation d'Helmholtz.

- λ est une fonction inconnue dépendant de la variable \mathbf{x} . Le problème est alors dit *non-linéaire*.

Sous certaines hypothèses d'invariance, il peut s'avérer intéressant de réécrire le système (2.75)-(2.76) sous une forme simplifiée. Différents types d'invariances peuvent être considérées : invariance par translation dans une direction donnée, invariance hélicoïdale, invariance rotationnelle. Dans la suite, nous détaillerons le cas de l'invariance rotationnelle. La dérivation d'un système axisymétrique est particulièrement intéressante dans le cas de la fusion.

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , dont la base usuelle est notée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, l'hypothèse d'axisymétrie consiste à supposer que les composantes (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique sont indépendante de l'angle θ . On suppose donc dans la suite $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. La condition (2.76) s'écrit alors

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (2.84)$$

On peut donc introduire une fonction $\Psi(r, z)$, ne dépendant pas de θ , telle que

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \text{ et } B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Le champ magnétique s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \nabla \Psi + B_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (2.85)$$

On voit facilement que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0.$$

Comme $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, on a d'après (2.85)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

d'où p peut s'écrire sous la forme

$$p = F(\Psi(r, z)).$$

On a alors que

$$\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B} \quad (2.86)$$

$$= -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_r - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) \mathbf{e}_z. \quad (2.87)$$

Après calcul de $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\theta$, et en utilisant (2.77), et le fait que $\nabla p = \frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi$, on peut établir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial rB_\theta}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{1}{r} \mathbf{B} \cdot \nabla (rB_\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

la composante θ de $\nabla \Psi$ étant nulle. On note $\xi(r, z) = rB_\theta(r, z)$. Comme pour la pression p , on peut montrer que ξ dépend de Ψ et peut s'écrire sous la forme

$$\xi(r, z) = G(\Psi(r, z)).$$

En exprimant les composantes en coordonnées cylindriques de l'équation (2.77), on montre que

$$-\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] \nabla \Psi - \frac{1}{r^2} \xi \frac{d\xi}{d\Psi} \nabla \Psi = \frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi,$$

d'où

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \nabla \Psi \right) = \frac{dp}{d\Psi} + \frac{1}{r^2} \xi \frac{d\xi}{d\Psi}.$$

Cette équation ramène le système de la magnétostatique à la résolution d'un problème elliptique. La pression p et la fonction ξ sont dans ce cas supposées connues. Pour plus de détails sur les systèmes axisymétriques de la magnétostatique, le lecteur pourra lire [146, 141, 128, 150, 99].

Chapitre 3

Computing Beltrami fields.

Soumis à SIAM

Summary. For solving the non-linear equations governing force-free fields, an iterative methodology based on the splitting of the problem is described. On the basis of this splitting, three families of subproblems have to be solved numerically. The first problem consists to find a potential field. A mixed hybrid method is used to solve it. The second problem, which is a curl-div system, is solved by means of a mixed method. The last problem is a transport equation which is approximated using a streamline diffusion technique. Numerical 3D experiences and results are given to illustrate the efficiency of the method. **Keywords:** Beltrami flows, force-free fields, magnetostatics, steady Euler's equations.

1 Introduction

A three-dimensional vector field \mathbf{B} is said *Beltrami* if

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

and

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.2)$$

The non-linear equation (3.1) means that \mathbf{B} and its curl are everywhere colinear. In astrophysics and in plasma fusion Beltrami fields are known as *force-free* fields. They describe the equilibrium of a perfectly conducting pressureless plasma in the presence of a strong magnetic field. In that case, \mathbf{B} corresponds to the magnetic field, while $\mathbf{j} = \mathbf{curl} \mathbf{B}$ is nothing but the current density. Equation (3.1) means that the only significant force acting on the plasma, say the Lorentz force, vanishes in equilibrium. It corresponds to the pressureless ($p = 0$) case of the magnetostatic equations

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \nabla p, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{curl} \mathbf{B}, \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

The magnetostatic equations appears for example in magnetized thermonuclear fusion in toroidal geometries. They describe the balance between the magnetic pressure and the kinetic pressure of a magnetized confined plasma.

In the astrophysical context, such Beltrami fields are often encountered to describe magnetic models of outer atmospheres above accretion disks or the low solar corona. It is indeed well known that a large part of the solar atmosphere (low corona below three solar radius) is dominated by the magnetic field which is created inside the sun by a dynamo process, and then emerges in the above atmosphere. This magnetic field is responsible for most of the structures and phenomena observed in various wavelengths in the corona such as : prominences, small scale and large scale eruptive events which may release large amount of energy and whose consequences may propagate up to the earth environment, as well as probably heating of the solar corona. Unfortunately, the magnetic field is difficult to measure locally in the hot and tenuous corona, whereas it is important to understand its three dimensional properties to elaborate models of such structures and phenomena, at the basis of any theoretical model. However, the magnetic field is measurable in the cooler and denser plasma that represent the "surface" of the sun (called the photosphere). Therefore astrophysicists have developed an approach which consists in *Reconstructing* the three-dimensional coronal magnetic field above the photosphere, from boundary data given on the photosphere. The problem then consists in solving equations (3.1-3.2) for given boundary conditions. As we will discuss later, although the three components of the magnetic fields are known on the sun surface, in order to have a well set problem for the mixed elliptic-hyperbolic problem above, only part of this information can be imposed on the boundary. The reader can refer to [83, 104] and references therein for more details about Beltrami fields in solar physics.

In fluid dynamics, experience shows that flows in which vorticity is roughly aligned to velocity, as the case of a Beltrami fields, could develop some instabilities. Moreover, Beltrami flows are solutions of the steady Euler equations describing a 3D steady inviscid and incompressible flows

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega. \quad (3.3)$$

Indeed, the last system can be written as

$$\mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \nabla \left(p + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega.$$

Hence, if \mathbf{B} satisfies (3.1)+ (3.2), then the pair (\mathbf{u}, p) with $p(x) = -\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ is obviously solution to (3.3). Here $\mathbf{curl} \mathbf{u}$ is nothing but the vorticity.

It is worth noting that Beltrami 3D fields are also linked to *two dimensional* steady Euler' equations in a different and surprising manner. More precisely, to each solution

$$((u_1(x, y), u_2(x, y)), p(x, y))$$

of the 2D Euler's equations (3.3), one can associate a 3D Beltrami field $\mathbf{B} = (v_1, v_2, v_3)$ defined as

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= u_1(x, y) \\ v_2(x, y) &= u_2(x, y) \\ v_3(x, y) &= \psi(x, y), \end{aligned} \quad (3.4)$$

where $\psi(x, y)$ is chosen such as

$$\psi^2(x, y) + 2p(x, y) + u_1^2(x, y) + u_2^2(x, y) = \text{constant}.$$

In that case, we have

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} = \frac{\omega(x, y)}{\psi(x, y)} \mathbf{B},$$

where $\omega(x, y)$ is the 2D vorticity defined by

$$\omega(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

The reader can refer to Bruno and Laurence [111] and Alber [82] for the proof of existence of smooth solutions to 3D steady Euler's equations (see also Glass [120] for some consideration concerning the two dimensional case).

From a mathematical viewpoint, equation (3.1) can be roughly rewritten in the form

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} = \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{B}, \quad (3.5)$$

where $\lambda(\mathbf{x})$ is a scalar function which varies in general with position. It turned out to be more convenient to work with (3.5) than (3.1). A common way to study (3.5) is to distinguish three categories of Beltrami' flows.

- *Potential fields.* It corresponds to $\lambda \equiv 0$. In that case, \mathbf{B} is irrotational and derives from a potential. Namely, \mathbf{B} is of the form $\mathbf{B} = \nabla\varphi$ with $\Delta\varphi = 0$ (when Ω is simply-connected). This is the simpler and the more popular model.
- *Linear Beltrami fields* for which λ is a *constant* function. The existence of linear force-free fields when λ and $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ are prescribed was treated in the literature in several geometries (simply or multiply connected bounded or unbounded domains). The reader can refer to [131, 132], [133], [104] and references therein.
- *Non-linear Beltrami fields* for which $\lambda(\mathbf{x})$ is a variable function. It is much less obvious whether non-linear Beltrami field with prescribed data on the boundary of Ω exists. Bineau [97] gives a proof of the existence of non-linear force-free fields under some restrictive assumptions including the requirements that the vector field is regular and has a simple topology and that λ is small. In [101] Boulmezaoud and Amari have proven under few assumptions the existence of H^1 Beltrami fields with $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ and in bounded but not necessarily simply-connected domains (see also [100] and Section 2 hereafter).

There are several explicit examples in the literature of linear Beltrami fields. Among these examples, let us quote the celebrated ABC flows (after V. Arnold, E. Beltrami and S. Childress) and for which Arnold [87], and independently Childress [112], conjectured the existence of chaotic paths. ABC flows were studied by Dombre *et al.* [115] and are today a classical example of 3D chaotic phenomena and lagrangian turbulence (see also Hénon [124]). They are defined in the cartesian coordinates as follows

$$\begin{aligned} u_1 &= A \sin z + C \cos y, \\ u_2 &= B \sin x + A \cos z, \\ u_3 &= C \sin y + B \cos x. \end{aligned} \quad (3.6)$$

On the contrary, there are few analytical examples of Beltrami fields available in the litterature with non-constant proportionality factor λ . Examples of Beltrami fields in cylindrical

geometry can be found in [143, 144]. In spherical geometry, the reader can refer to Low (1982-1988) for an explicit Beltrami flow. Without breaking down the corresponding calculus, we give here two great families of non-linear Beltrami fields.

Example 1 (spherical force-free fields). Let $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ be an holomorphic function and let $\chi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ be a real function of class \mathcal{C}^1 . Let $(r = |\mathbf{x}|, \theta, \varphi)$ be the classical spherical coordinates and set

$$\xi = \ln \tan \frac{\theta}{2} + i\varphi, \quad \Psi(\mathbf{x}) = \operatorname{Re} \left(f(\xi) e^{i\chi(|\mathbf{x}|)} \right)$$

Then, the vector field

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \nabla \Psi, \quad (3.7)$$

is Beltrami and satisfies

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = -\chi'(|\mathbf{x}|) \mathbf{B}.$$

We call these fields "spherical force-free fields" since their fieldlines are inscribed on the sphere $|\mathbf{x}| = \text{constant}$. Indeed, since

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Notice that the well known solution due to Low [137] corresponds to particular case $f(z) = -iz$.

Example 2 (cylindrical force-free fields). Let (ρ, θ, z) be the cylindrical coordinates and let η a positive real functions such that $0 \leq \eta'(t) \leq 1$ for each $t \in \mathbb{R}$. Then, the vector field

$$\mathbf{B} = A e^{-\eta(\ln \rho)} \left(\sqrt{\eta'(\ln \rho)} \mathbf{e}_\theta \pm \sqrt{1 - \eta'(\ln \rho)} \mathbf{e}_z \right),$$

is Beltrami and satisfies

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \pm \frac{1}{\rho} \frac{2\eta'(\ln \rho) + \eta''(\ln \rho) - 2\eta'(\ln \rho)^2}{2\sqrt{\eta'(\ln \rho)}\sqrt{1 - \eta'(\ln \rho)}} \mathbf{B}.$$

The fieldlines of such cylindrical force-free fields are inscribed on cylinders $\rho = \text{constant}$.

In general, the computation of non-linear Beltrami fields is more difficult since the equation (3.5) is nonlinear. Existing methods proposed for solving the problem (3.5)+(3.2) can be distinguished mainly into four kinds: MHD or CFD relaxation methods, vertical integration methods and iterative methods. The idea of MHD relaxation approaches consists to start with an adequate vector field and to relax it into a force-free state by means of magnetohydrodynamic equations (see, e.g., Priest [144] and Friedberg [118]). Among CFD relaxation methods one can notice the artificial compression method which was proposed by Chorin [114] and improved by some other authors (see [135] for its use in computing Beltrami fields). Vertical integration methods consists to rewrite the problem (3.5)+(3.2) as an evolution problem in the z -direction and then integrating in the direction of increasing z (see [84]). Iteratives method are often based on a fixed point scheme.

The purpose of this paper is to propose an iterative algorithm and a finite element method for computing Beltrami flows. The emphasis is put on the accuracy of the approximation and also on some properties of beltrami fields, like their energy and their helicity.

The paper is organized as follows

- Section 2 is devoted to a review of the functional framework we use here. We recall some results concerning the existence of linear and non-linear Beltrami flows.
- In Section 3 we expose a fixed-point strategy for computing Beltrami flows in bounded domains.
- In Section 4, we deal with discretization of the three subproblems involved in the fixed point algorithm. An appropriate finite element method is used for solving each one of these problems. After exposing the features of the method, we analyze carefully its convergence.
- In Section 5, we present some 3D computational results obtained by a 3D code based on the iterative algorithm exposed in Section 2 and on the discretization methods developed in Section 4. Some global properties (energy, helicity,...etc) are emphasized by the way.

2 Notations. Mathematical statement of the problem

Let Ω be a bounded open set of \mathbb{R}^3 , simply connected, with a lipschitzian boundary. We use bold characters for vector functions or distributions. For any $k \in \mathbb{N}$, \mathbb{P}_k stands for the space of polynomial of degree lower than k , and \mathbb{H}_k is the space of the homogeneous polynomials of degree equal to k . If k is a non positive integer, we set by convention $\mathbb{P}_k = \mathbb{H}_k = \{0\}$. Let $\mathcal{D}(\Omega)$ be the well-known space of \mathcal{C}^∞ functions with a compact support on Ω , and let $\mathcal{D}'(\Omega)$ be its dual space, namely the space of distributions. We denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the duality. For $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ stands for the space of (equivalence classes of) all measurable functions that are p^{th} power integrable on Ω . This space is equipped with the norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

(with the usual modification when $p = +\infty$). We denote by $L_0^2(\Omega)$ the subspace of $L^2(\Omega)$ composed of those functions $v \in L^2(\Omega)$ satisfying

$$\int_{\Omega} v dx = 0.$$

Given an integer $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ refers to classical Sobolev space of all the functions u whose generalized derivatives satisfy

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^3; D^\mu u \in L^2(\Omega).$$

This space is equipped with the norm $\|v\|_m = \left(\sum_{|\mu| \leq m} \|D^\mu u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$. We define also the spaces

$$\begin{aligned} H(\mathbf{curl}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{curl} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \}, \\ H(\mathbf{div}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}, \end{aligned}$$

equipped respectively with the norms

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega)} = (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = (\|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2)^{1/2}.$$

Finally, consider the space

$$U = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

equipped with the norm :

$$\|\mathbf{u}\|_U = (\|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2)^{1/2}.$$

It is well known that

$$U \hookrightarrow H^1(\Omega)^3$$

provided that Ω has a smooth boundary or is a convex polyhedron (see, e. g., [119] and references therein). In that case, the semi-norm

$$\mathbf{u} \rightarrow |\mathbf{u}|_U = (\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2)^{1/2}$$

is a norm on U , equivalent to the norm $\|\cdot\|_U$.

In the sequel, we set

$$\mu_0(\Omega) = \inf_{\mathbf{u} \in U, \mathbf{u} \neq 0} \frac{|\mathbf{u}|_U}{\|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}}.$$

We have the following estimate (see [104])

$$\mu_0^2 \leq \lambda_{1, N}, \quad (3.8)$$

where $\lambda_{1, N}$ is the first eigenvalue of $-\Delta$ with an homogeneous Neumann condition.

Now, let us consider the system

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} = \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{B}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.9)$$

This system of equations must be completed with some boundary conditions on the vector field \mathbf{B} and on the scalar function $\lambda(\mathbf{x})$. To see what these boundary conditions should be, observe that applying the divergence operator to (3.9) yields

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = 0. \quad (3.10)$$

Equation (3.10) can be viewed as a first order hyperbolic equation the characteristics of which are the field lines of \mathbf{B} (see Section 3 hereafter). In other words, (3.10) means that λ is constant along those field lines. Hence, it is a natural idea to prescribe λ on the inflow boundary, namely

$$\lambda = \alpha_0 \text{ on } \Gamma^-, \quad (3.11)$$

where

$$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}.$$

We prescribe also the normal component of \mathbf{B} on whole the boundary $\partial\Omega$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega.$$

Here, g satisfies the compatibility condition

$$\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0 \quad (3.12)$$

since \mathbf{B} is divergence free in Ω .

In the sequel, \mathbf{B}_0 will be the irrotational field whose normal component on $\partial\Omega$ is g . This field is the unique solution of the system

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{B}_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

At this stage, two situations are distinguished

1. Potential fields or linear Beltrami fields

In this case, λ is a known constant. The boundary condition (3.11) is dropped since λ is given and one can consider the typical problem:

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{B} \text{ such as} \\ \mathbf{curl} \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

This problem was completely treated in [104] in more general geometries. The following result is stated

Theorem 2.1. *There exists a countable sequence of reals $(\mu_i)_{i \geq \mathbb{N}}$ satisfying*

- $|\mu_i| \geq \mu_0$ for each $i \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{i \rightarrow +\infty} |\mu_i| = +\infty$,

and such that

- If $\lambda \notin \{\mu_0, \mu_1, \dots\}$, then the problem (3.14) admits one and only one solution $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$ for each $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ satisfying (3.12).
- If $\lambda \in \{\mu_0, \mu_1, \dots\}$, the problem (3.14) has at least one solution if and only if g satisfies some additional compatibility conditions (see [104]). In that case, the solution is unique, up to elements of a finite dimensional space.

Moreover, if $|\lambda| < \mu_0$, then

$$\|\mathbf{B}_0\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\mathbf{B}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 - \lambda^2} \|\mathbf{B}_0\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.15)$$

2. Non-linear Beltrami fields

This is the most general case and the problem we consider is the following :

$$\begin{cases} \text{Find the pair } (\mathbf{B}, \lambda) \text{ such as:} \\ \mathbf{curl} \mathbf{B} = \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{B} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega, \\ \lambda = \alpha_0 & \text{on } \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.16)$$

In [101] and [100] the authors proved the following existence results

Theorem 2.2. *Assume that g is of class \mathcal{C}^1 , and that $\alpha_0 \in L^\infty(\Gamma^-)$ with*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Gamma^-} |\alpha_0(\mathbf{x})| = \|\alpha_0\|_{\infty, \Gamma^-} < \mu_0. \quad (3.17)$$

Then the problem (3.16) has at least one solution $(\mathbf{B}, \lambda) \in H^1(\Omega)^3 \times L^\infty(\Omega)$. This solution satisfies the estimate

$$\|\lambda\|_\infty \leq \|\alpha_0\|_{\infty, \Gamma^-}, \quad (3.18)$$

$$E_0 \leq \|\mathbf{B}\|_{0, \Omega}^2 \leq \tau E_0. \quad (3.19)$$

where $E_0 = \|\mathbf{B}_0\|_{0, \Omega}^2$ and $\tau = 1 + \frac{\|\alpha_0\|_{\infty, \Gamma^-}^2}{(\mu_0 - \|\alpha_0\|_{\infty, \Gamma^-})^2}$.

Theorem 2.3. *Let $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ and $\alpha_0 \in H^{3/2}(\Gamma^-) \cap L^\infty(\Gamma^-)$ with α_0 satisfying (3.17). Then, the problem (3.16) has at least one solution $(\mathbf{B}, \lambda) \in H^1(\Omega)^3 \times L^\infty(\Omega)$. Moreover, this solution satisfies also the estimates (3.18) and (3.19).*

In the remaining paper of this paper, we will be mainly concerned by the numerical solving of equation (3.16).

3 An iterative strategy

Our aim in this section is to propose a fixed point strategy for computing solutions of the equations (3.16). The main idea consists to split the problem into two subproblems: a first order hyperbolic equation on λ and a first order elliptic problem on \mathbf{B} . Let $(\mathbf{B}, \lambda(\mathbf{x}))$ be solution of (3.16) and set $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{curl} \mathbf{B}$. Suppose that \mathbf{B} is well known and is force-free. Then, another manner for computing $\boldsymbol{\omega}$ consists to set $\boldsymbol{\omega} = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{B}$ and then to calculate $\lambda(\mathbf{x})$ by solving the transport equation

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \lambda = \alpha_0(\mathbf{x}) \text{ on } \Gamma^-. \quad (3.20)$$

Conversely, if $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ is given and satisfies $\text{div} \boldsymbol{\omega} = 0$, then \mathbf{B} can be obtained by solving the curl-div system

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \text{ in } \Omega, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \Gamma^-. \quad (3.21)$$

Combining these remarks one is lead to consider the fixed point scheme: we start from an initial guess \mathbf{B}_0 and we construct the sequence $(\mathbf{B}_n, \lambda_n)$ as follows

- For $n \geq 0$, λ_n is solution to the transport equation

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla \lambda_n = 0 & \text{in } \Omega, \\ \lambda_n = \alpha_0 & \text{on } \Gamma^- \end{cases} \quad (3.22)$$

- For $n \geq 0$, \mathbf{B}_{n+1} is solution of the curl-div vectorial system

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{B}_{n+1} = \lambda_n \mathbf{B}_n & \text{in } \Omega, \\ \text{div} \mathbf{B}_{n+1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

At each iteration of this process, one should therefore solve a usual vector potential problem (3.23) and a hyperbolic first order problem (3.22). The initial guess \mathbf{B}_0 can be taken as the irrotational vector field associated to g . In other words, \mathbf{B}_0 satisfies

$$\mathbf{curl} \mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \text{ div } \mathbf{B}_0 = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega. \quad (3.24)$$

A more general algorithm can be obtained. This algorithm is based on a perturbation of the transport equation (3.22) by adding an artificial reaction term in the iterative process. More precisely, we consider the singularly perturbed algorithm: starting from \mathbf{B}_0 , we construct a sequence $(\mathbf{B}_n, \lambda_n)$ as follows

- For $n \geq 0$, λ_n is solution of the system

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla \lambda_n + \sigma_n \lambda_n = f_{n-1} & \text{in } \Omega, \\ \lambda_n = \alpha_0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

where $f_{n-1} = \sigma_n \lambda_{n-1}$ if $n \geq 1$ and $f_{-1} = 0$. Here $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ is a sequence of parameters chosen such that, $\sigma_n > 0$, for all n .

- For $n \geq 1$, \mathbf{B}_n is solution of the curl-div problem

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{B}_n = \mathbf{j}_{n-1}^* & \text{in } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{B}_n = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.26)$$

where $\mathbf{j}_{n-1}^* = \lambda_{n-1} \mathbf{B}_{n-1} + \nabla q_{n-1}$. Here q_{n-1} is chosen such that the right hand side is divergence free. Namely, q is solution of the Poisson problem

$$-\Delta q_{n-1} = \text{div}(\lambda_{n-1} \mathbf{B}_{n-1}) \text{ in } \Omega, \text{ and } q_{n-1} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (3.27)$$

In this modified algorithm, the starting guess \mathbf{B}_0 is chosen as the irrotational field associated to g defined by the system (3.24).

Moreover, setting $\mathbf{b}_n = \mathbf{B}_n - \mathbf{B}_0$, the system (3.26) is reduced to the div-curl system

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{b}_n = \lambda_{n-1} \mathbf{B}_{n-1} + \nabla q_{n-1} & \text{in } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{b}_n = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.28)$$

In summary, this iterative process needs the solving of three problems. At each iteration of the algorithm one should solve two problems:

- (a) A reaction-convection problem of the form: *find λ solution of*

$$\begin{cases} \text{div}(\lambda \mathbf{B}) + \sigma \lambda = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda = h & \text{on } \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.29)$$

- (b) A vector potential problem: *find the pair (\mathbf{b}, q) satisfying*

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{b} - \nabla q = \mathbf{j} & \text{in } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{b} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ q = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.30)$$

The system (3.29) is a first order hyperbolic system. A general approach to that kind of problems can be found in Bardos [92] where the author proved, among other results, the existence of a solution to (3.29) when $\sigma > 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ and λ sufficiently small.

The convergence of this iterative process is not an easy matter. We conjecture that it converges if $|\alpha_0|_\infty < \mu_0$. Nevertheless, in the case of linear Beltrami flows (α is fixed and known), Boulmezaoud and Amari [102] proved that this process is super-convergent: the distance between $\mathbf{B}^{(n)}$ and the solution \mathbf{B} is exponentially decreasing with n . It is worth noting that the convergence could be lost if $|\alpha_0|_\infty \geq \mu_0$.

4 The finite elements discretization

The computation of the force free fields needs the solving of the problem (3.24), and, at each iteration, the hyperbolic problem (3.22) and the elliptic problem (3.23). Our task here is to discuss the approximation of the systems (3.22) and (3.23) respectively.

Throughout this paragraph, we assume that Ω is a bounded polyhedron in \mathbb{R}^3 . We consider a family of triangulations (\mathcal{T}_h) where each (\mathcal{T}_h) is a set of tetrahedron $K \subset \Omega$ such that

- (a) $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$.
- (b) The intersection of two different tetrahedra is either empty or a corner or a face or an edge of both of them.

Here h stands for the usual discretization parameter defined as the largest diameter of all the tetrahedra $K \in \mathcal{T}_h$. We assume in addition that all the triangulations (\mathcal{T}_h) satisfies the usual regularity assumptions (see [113]).

4.1 The discretization of the potential field problem

This section is devoted to the approximation of the potential field problem (3.13). Of course, rewriting \mathbf{B}_0 into the form $\mathbf{B}_0 = \nabla\Phi$ (if Ω is simply connected) one is lead to solve the Laplace equation

$$-\Delta\Phi = f \text{ in } \Omega \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = g \text{ on } \partial\Omega \quad (3.31)$$

with $f = 0$ in our case. Of course, literature concerning the equation (3.31) is flourishing. In our context, several constraints must be taken into account. For example, we need an accurate approximation of $\Delta\Phi$ since it represents the divergence of \mathbf{B}_0 . In particular, the normal traces of the discretized potential field $\mathbf{B}_{0h} = \nabla\Phi_h$ must be continuous at the interfaces between any two adjoining elements. In summary, emphasis must be put not only on the approximation of Φ , but also on the approximation of $\mathbf{B}_0 = \nabla\Phi$. We also need to keep the boundary condition $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = g$ after discretisation: in other word, we would like to have

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_{0h} = 0 \text{ in } \Omega \text{ and } \mathbf{B}_{0h} \cdot \mathbf{n} = g_h \text{ on } \partial\Omega$$

where g_h is the interpolated boundary function g . Lastly, one must keep in mind that the used method has to be efficient and practical, since we are dealing with a 3D problem. For all these reasons, the used standard finite element approximation of problem (3.31) (called the primal formulation) is not adequate, unless that high order methods, with

a huger number of degrees of freedom are used. At the contrary, mixed methods could be preferred precisely because their emphasis on the approximation of both of Φ and its gradient.

Define

$$W^g(\Omega) = \{\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = g \text{ in } H^{-1/2}(\partial\Omega)\},$$

Then,

$$W^0(\Omega) = H_0(\operatorname{div}, \Omega).$$

We set $\mathbf{p} = \nabla\Phi$. Since the map

$$\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

is onto, we can find $\mathbf{p}_g \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ such that $\mathbf{p}_g \cdot \mathbf{n} = g$ in $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. We can write \mathbf{p} in the form $\mathbf{p} = \mathbf{p}_g + \mathbf{p}_0$ with $\mathbf{p}_0 \in W^0(\Omega)$. we can write the problem (3.31) in to the mixed form

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{p}_0 \in W^0, \text{ and } \Phi \in L_0^2(\Omega) \text{ such that} \\ \forall \mathbf{q} \in W^0, \int_{\Omega} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q} + \int_{\Omega} \Phi \operatorname{div} \mathbf{q} = - \int_{\Omega} \mathbf{p}_g \cdot \mathbf{q}, \\ \forall v \in L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p}_0 = - \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p}_g. \end{cases} \quad (3.32)$$

We have the following lemma

Lemma 4.1. *The problem (3.32) has one and only one solution $(\mathbf{p}_0, \Phi) \in W^0 \times L_0^2(\Omega)$ and $\mathbf{p} = \nabla\phi$.*

The proof can be found in [147] or in Appendix B

Now, we interest in the discretization of the problem (3.32). Consider W_h^0 and L_h^0 two finite-dimensional subspace of $W^0(\Omega)$ and $L_0^2(\Omega)$ respectively, and RT_k the polynomial space defined for each integer $k \geq 0$ by

$$RT_k = \mathbb{P}_k^n \oplus \mathbf{x}\mathbb{P}_k,$$

where \mathbb{P}_k is the space of homogeneous polynomial space function. Define

$$W_h^0 = \{q \in W^0(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in RT_k(K)\},$$

et

$$L_h^0 = \{v \in L_0^2(\Omega), v|_K \in \mathbb{P}_k(K)\}.$$

The discrete form of (3.32) writes

$$\begin{cases} \text{Find } (\mathbf{p}_{0h}, \Phi_h) \in W_h^0 \times L_h^0 \text{ such that} \\ \forall \mathbf{q}_h \in W_h^0, \int_{\Omega} \mathbf{p}_{0h} \cdot \mathbf{q}_h + \int_{\Omega} \Phi_h \operatorname{div} \mathbf{q}_h = - \int_{\Omega} \mathbf{p}_g \cdot \mathbf{q}_h, \\ \forall v_h \in L_h^0, \int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_{0h} = \int_{\Omega} f v_h - \int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_g. \end{cases} \quad (3.33)$$

In [147], Roberts and Thomas prove that the discret inf-sup condition is uniformly satisfied and that the problem (3.33) has one and only one solution. However, the matrix arising from (3.33) is not positive definite although it is invertible.

Here, we propose to use the mixed hybrid finite element method (see [147], [107]). The main idea in this method is to remove the stress on the inter-element continuity by introducing a Lagrange multiplier. Denote by $\partial\mathcal{T}_h$ the set of all faces of the mesh, and consider the spaces

$$W_h^* = \{\mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^3, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in RT_k(K)\},$$

$$L_h^* = \{v_h \in L_0^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K)\},$$

and

$$\Lambda_h^* = \{v_h \in L^2(\partial\mathcal{T}_h), \forall T \in \partial\mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T)\},$$

where $k \geq 0$ is an integer. We note by $T' \in K$ the four faces of a tetrahedron K . Consider the problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\mathbf{p}_h^*, \Phi_h^*, \lambda_h^*) \in W_h^* \times L_h^* \times \Lambda_h^* \text{ such that} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall \mathbf{q} \in RT_k(K), \int_K \mathbf{p}_h^* \mathbf{q} dK + \int_K \Phi_h^* \operatorname{div} \mathbf{q} - \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \lambda_h^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dT' = 0, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in \mathbb{P}_k(K), \int_K \operatorname{div} \mathbf{p}_h^* v dK = - \int_K f v dK, \\ \forall \mu_h \in \Lambda_h, \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \mu_h \mathbf{p}_h^* \cdot \mathbf{n} dT' = G_K(\mu_h), \end{array} \right. \quad (3.34)$$

where G_K is defined for each $K \in \mathcal{T}_h$ by

$$G_K(\mu_h) = \begin{cases} 0 & \text{if } K \cap \partial\Omega = \emptyset, \\ \sum_{T' \in K \cap \partial\Omega} \int_{T'} g \mu_h dT' & \text{else.} \end{cases}$$

The inter-element stress is imposed by the last equation of (3.34), and we have the following lemma

Lemma 4.2. *The problem (3.34) has one and only one solution $(\mathbf{p}_h^*, \Phi_h^*, \lambda_h^*) \in W_h^* \times M_h^* \times \Lambda_h^*$. Moreover, the solution $(\mathbf{p}_h^*, \Phi_h^*)$ of the problem (3.34) is the same as the solution $(\mathbf{p}_h = \mathbf{p}_{0h} + \mathbf{p}_g, \Phi_h)$ of (3.33).*

Proof. If we choose $f = 0$ and $g = 0$ in the square system (3.34), and we take the test function in the space $W_h^0 \subset \widetilde{W}_h$, we get the problem (3.33). As (3.33) has one and only one solution, we get that $\mathbf{p}_h = \mathbf{0}$ and $\Phi_h = 0$, and with the first equation of (3.34) we have $\lambda_h = 0$. \square

From a practical point of view, we follow the ideas proposed in [94]. The authors prove that

$$RT_k = \{\mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k)^3; \operatorname{div} \mathbf{p} = 0\} \oplus \mathbf{x} \mathbb{P}_k.$$

Consider the space

$$RT_k^0 = \{\mathbf{p} \in RT_k(K); \operatorname{div} \mathbf{p} = 0\}.$$

According to [140], we have

$$RT_k^0 = \{\mathbf{v} \in (\mathbb{P}_k)^3, \operatorname{div} \mathbf{p} = 0\}.$$

We consider now the particular case where $k = 0$. Choosing the test functions in $RT_0^0(K)$, the system (3.34) writes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\mathbf{p}_h, \lambda_h) \in W_h^* \times \Lambda_h^* \text{ such that} \\ \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \int_K \mathbf{p}_h \mathbf{q} dK - \sum_{T' \subset K} \int_{T'} \lambda_h \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dT' = 0, \\ \int_K \operatorname{div} \mathbf{p}_h dK = \int_K f dK, \\ \forall \mu_h \in \Lambda_h, \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \mu_h \mathbf{p}_h \cdot \mathbf{n} dT' = G_K(\mu_h), \end{array} \right. \quad (3.35)$$

for all $K \in \mathcal{T}_h$.

Taking $\mathbf{p}_h|_K = \alpha_K \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}_K$, and using the equality $\int_K \operatorname{div} \mathbf{p} = - \int_K f$, one gets

$$\alpha_K = -\frac{1}{3|K|} \int_K f dK.$$

The first equation of (3.35) becomes

$$\int_K (\alpha_K \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}_K) \mathbf{q} dK - \sum_{T' \subset K} \int_{T'} \lambda_h \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dT' = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in RT_0^0. \quad (3.36)$$

Denote by \mathbf{q}_K , $\boldsymbol{\lambda}_K$ and $\boldsymbol{\mu}_K$ the vector column corresponding to $\mathbf{q} \in RT_0^0(K)$, $\{\lambda_h|_{T'}\}_{T' \subset \partial K}$, and $\{\mu_h|_{T'}\}_{T' \subset \partial K}$ respectively. The equation (3.36) writes

$$|K| \mathbf{q}_K^T \boldsymbol{\beta}_K - \mathbf{q}_K^T C_K \boldsymbol{\lambda}_K = -\mathbf{q}_K^T \{f_K^{(1)}\}$$

where C_K is the matrix of size 3×4 defined by

$$C_K = \begin{pmatrix} n_{11}|T_1| & n_{21}|T_2| & n_{31}|T_3| & n_{41}|T_4| \\ n_{12}|T_1| & n_{22}|T_2| & n_{32}|T_3| & n_{42}|T_4| \\ n_{13}|T_1| & n_{23}|T_2| & n_{33}|T_3| & n_{43}|T_4| \end{pmatrix}$$

where n_{ij} is the j^{th} component of the unit exterior normal to the i^{th} face of the tetrahedron K (where the four faces of K are denoted by $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$). The term $\mathbf{q}_K^T \{f_K^{(1)}\}$ satisfy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_K^T \{f_K^{(1)}\} &= \alpha_K \int_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{x} dK \\ &= \alpha_K \mathbf{q}_K^T \cdot \mathbf{x}_{G_K} |K| \end{aligned}$$

where \mathbf{x}_{G_K} is the center of gravity of K .

We deduce that

$$|K| \boldsymbol{\beta}_K - C_K \boldsymbol{\lambda}_K = -\mathbf{q}_K^T \{f_K^{(1)}\}. \quad (3.37)$$

The last equation of (3.35) writes

$$\text{For any } \boldsymbol{\mu} \in \Lambda_h^*, \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \boldsymbol{\mu}_K^T C_K^T \boldsymbol{\beta}_K = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \boldsymbol{\mu}_K^T \{f_K^{(2)}\} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \boldsymbol{\mu}_K^T G_K$$

where

$$\boldsymbol{\mu}_K^T \{f_K^{(2)}\} = \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \alpha_K \mu_h \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dT',$$

and

$$\boldsymbol{\mu}_K^T G_K = \begin{cases} 0 & \text{if } K \cap \partial\Omega = \emptyset \\ \sum_{T' \in K \cap \partial\Omega} \int_{T'} g \mu_h dT' & \text{else.} \end{cases}$$

Multiplying (3.37) by $\boldsymbol{\mu}_K^T C_K^T$, and summing on each element K of \mathcal{T}_h gives

$$\forall \mu_h \in \Lambda_h, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} C_K^T C_K \{\boldsymbol{\lambda}_K\} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} f_K \quad (3.38)$$

where

$$f_K = \frac{1}{|K|} C_K^T \{f_K^{(1)}\} - \{f_K^{(2)}\} + \{G_K\}.$$

The problem (3.34) reduce solving a square system (3.38), which solution enable to construct solution of (3.34). Particularly, with $f = 0$, we get an approximation of the problem (3.13).

4.2 The discretization of the div-curl problem

Our purpose here is to discuss in details the finite elements discretization of the vector-potential problem (3.30). We start with the following properties which assert that the problem (3.30) can be broken down into two decoupled subproblems: a variational problem (\mathcal{Q}) in terms of \mathbf{b} and a fictitious unknown $\theta = 0$, and a Poisson like equation (3.39) in terms of q . The remaining M denotes the space of functions give by $M = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

Proposition 1. *The pair (\mathbf{b}, q) is solution of (3.30) if and only if the pair $(\mathbf{b}, 0)$ is solution in $H(\mathbf{curl}; \Omega) \times M$ of the problem*

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} \forall \mathbf{w} \in H(\mathbf{curl}; \Omega), \int_{\Omega} \mathbf{curl} \mathbf{b} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w} dx + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \theta dx = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w} dx \\ \forall \mu \in M, \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mu dx = 0, \end{cases}$$

while $q \in H_0^1(\Omega)$ is solution of

$$-\Delta q = \operatorname{div} \mathbf{j} \text{ in } H^{-1}(\Omega). \quad (3.39)$$

Moreover, the problem (\mathcal{Q}) admits one and only one solution $(\mathbf{b}, \theta = 0) \in H(\mathbf{curl}; \Omega) \times M$, with $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ and

$$\|\mathbf{b}\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega)} \leq c_1 \|\mathbf{j}\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.40)$$

Here c_1 is a constant depending only on Ω .

Proof. (of Proposition 1)

- Let (\mathbf{b}, q) be solution of (3.30). Multiplying the first equation of (3.30) by $\mathbf{curl} \mathbf{w}$ with $\mathbf{w} \in H(\mathbf{curl}; \Omega)$, the second by $\mu \in M$ gives the identities of (\mathcal{Q}) . To get the equation on q , we multiply the first equation of (3.30) by $\nabla \phi$, ϕ being an arbitrary function in $H_0^1(\Omega)$, and we integrate by parts.

- Conversely, let (\mathbf{b}, θ) be solution of (\mathcal{Q}) and q solution of (3.39). Obviously $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$. Next, consider the space

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

For each $\varphi \in \mathcal{V}$, there exists a vector potential \mathbf{A} in $H^1(\Omega)^3$ (see [119]) such that $\varphi = \operatorname{curl} \mathbf{A}$. Replacing \mathbf{w} by \mathbf{A} in (\mathcal{Q}) gives

$$(\operatorname{curl} \mathbf{b} - \mathbf{j}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Hence, there exists a unique function $q_1 \in L_0^2(\Omega)$ such that $\nabla q_1 = \operatorname{curl} \mathbf{b} - \mathbf{j}$. Moreover, q_1 is in $H^1(\Omega)$ since $\operatorname{curl} \mathbf{b} - \mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$. The first equation of (\mathcal{Q}) (see [119]) gives

$$\forall \mathbf{w} \in H(\operatorname{curl}; \Omega), \quad (\nabla q_1, \operatorname{curl} \mathbf{w}) = 0.$$

According to the Green's formula, we get

$$\forall \mathbf{w} \in H(\operatorname{curl}; \Omega), \quad \langle \operatorname{curl} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, q_1 \rangle_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.41)$$

Let $\mathbf{z} = \nabla \chi$, with χ solution to the Neumann problem

$$\Delta \chi = 0 \text{ in } \Omega \text{ and } \frac{\partial \chi}{\partial n} = q_1 \text{ on } \partial\Omega.$$

Since $\operatorname{div} \mathbf{z} = \mathbf{0}$, there exists a vector function \mathbf{w} in $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ such that $\operatorname{curl} \mathbf{w} = \mathbf{z}$. Replacing in (3.41) implies that $q_1 = 0$ on $\partial\Omega$. Since $-\Delta q_1 = \operatorname{div} \mathbf{j}$, we deduce that $q_1 = q$.

- It remains to prove that the system (\mathcal{Q}) has a single solution. We set

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} dx \text{ for } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{curl}; \Omega), \\ c(\mathbf{v}, \theta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta dx \text{ for } \mathbf{v} \in H(\operatorname{curl}; \Omega) \text{ and } \theta \in M. \end{aligned}$$

On one hand, notice that $a(\cdot, \cdot)$ is a positive nondefinite, symmetric and continuous bilinear form on $H(\operatorname{curl}; \Omega) \times H(\operatorname{curl}; \Omega)$. Notice also that the bilinear form $c(\cdot, \cdot)$ is continuous on $H(\operatorname{curl}; \Omega) \times M$. On the other hand, consider the space

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{curl}; \Omega), c(\mathbf{v}, \theta) = 0, \forall \theta \in M\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{curl}; \Omega), \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta dx = 0, \forall \theta \in M \right\}. \end{aligned}$$

According to Green's formula

$$\forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \forall \theta \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \theta \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \mathbf{v} dx = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \theta \rangle_{\partial\Omega},$$

one can prove easily that

$$V = \{\mathbf{v} \in U, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}. \quad (3.42)$$

Next, we have

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in V, a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \\ &= |\mathbf{v}|_U^2 \\ &\geq C \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega)}^2. \end{aligned}$$

Thus, $a(\cdot, \cdot)$ is V -elliptic. Moreover, taking $\mathbf{v} = \nabla \mu$ gives

$$\begin{aligned} \forall \mu \in M, \sup_{\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}; \Omega)} \frac{(\mathbf{v}, \nabla \mu)}{\|\mathbf{v}\|_V} &\geq \frac{(\nabla \mu, \nabla \mu)}{\|\nabla \mu\|_V} \\ &= \|\nabla \mu\|_{0,\Omega}^2 \\ &= |\mu|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Thus, according to the celebrated Babuska-Brezzi theorem (see [90] and [105]). See also [119]), the problem (\mathcal{Q}) has a single solution (\mathbf{b}, θ) , and we know that $\theta = 0$.

□

The solving of the latter is completely useless for the unrolling of the algorithm. Hence, we only deal with the approximation of the former. The statement of problem (\mathcal{Q}) suggests clearly the use of an $H(\mathbf{curl}; \Omega)$ approximation.

Let X_h be a finite-dimensional subspace of $H(\mathbf{curl}; \Omega)$, M_h a finite-dimensional subspace of M and define the space

$$V_h = \{\mathbf{w}_h \in X_h, (\mathbf{w}_h, \nabla \mu_h) = 0, \forall \mu_h \in M_h\}.$$

Assume that

$$(\mathcal{H}_1) \quad \{\nabla \mu_h, \mu_h \in M_h\} \subset X_h.$$

Assume also that there exists a constant $C > 0$, independent of h such as :

$$(\mathcal{H}_2) \quad \|\mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{curl} \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}, \forall \mathbf{w}_h \in V_h.$$

Next, consider the problem

$$(\mathcal{Q}_h) \begin{cases} \text{Find } (\mathbf{b}_h, \theta_h) \in X_h \times M_h \text{ such as} \\ \forall \mathbf{w}_h \in X_h, \int_{\Omega} \mathbf{curl} \mathbf{b}_h \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \nabla \theta_h dx = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w}_h dx, \\ \forall \mu_h \in M_h, \int_{\Omega} \mathbf{b}_h \cdot \nabla \mu_h = 0. \end{cases}$$

The reader can refer to Amrouche and *al.* [86] for a proof of the following assertion.

Proposition 2. *The problem (\mathcal{Q}_h) has a single solution (\mathbf{b}_h, θ_h) . Furthermore, $\theta_h = 0$ and,*

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_h\|_V \leq C \inf_{\mathbf{w}_h \in X_h} \|\mathbf{b} - \mathbf{w}_h\|_V. \quad (3.43)$$

where the constant C does not depend on h .

A simple manner for constructing the finite-dimensional spaces X_h and M_h satisfying the assumptions (\mathcal{H}_1) and (\mathcal{H}_2) is the use of $H(\mathbf{curl})$ conforming elements developed by Nédelec [140] (see, e. g., [119]). More precisely, let $\ell \geq 1$ be an integer and consider the subspace of $(\mathbb{P}_\ell)^3$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\ell &= \{p \in \mathbb{H}_\ell^3, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \equiv 0, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\} \\ \mathcal{R}_\ell &= \mathbb{P}_{\ell-1} \oplus \mathcal{S}_\ell \end{cases}$$

Then, the spaces X_h and M_h can be defined as

$$\begin{aligned} X_h &= \{\mathbf{w}_h \in H(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_h|_K \in \mathcal{R}_\ell, \forall K \in \tau_h\}, \\ M_h &= \{\mu_h \in H^1(\Omega), \mu_h|_K \in \mathbb{P}_\ell, \forall K \in \tau_h, \text{ and } \int_\Omega \mu_h = 0\}. \end{aligned}$$

In that case, the following estimate on the upper bound of the interpolation error holds

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_h\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega)} \leq Ch^\ell \{|\mathbf{v}|_{\ell, \Omega} + |\mathbf{v}|_{\ell+1, \Omega}\}, \text{ for all } \mathbf{v} \in H^{\ell+1}(\Omega).$$

Combining the latter with (3.43) yields an estimate of the error between \mathbf{b} and \mathbf{b}_h

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_h\|_V \leq Ch^\ell \{|\mathbf{u}|_{\ell, \Omega} + |\mathbf{u}|_{\ell+1, \Omega}\}, \quad (3.44)$$

which is valid if $\mathbf{b} \in H^{\ell+1}(\Omega)$.

An important feature of the discrete system (\mathcal{Q}_h) is that only the discrete vector field \mathbf{b}_h is really unknown. Actually, the discrete function θ_h is *a priori* known since $\theta_h = 0$. As we will see hereafter, this property can be exploited from a practical viewpoint; we will prove that the linear system obtained from (\mathcal{Q}_h) can be reduced to a smaller definite, positive and symmetric linear system in which θ_h is eliminated.

Let $N_1 = \dim X_h$ and $N_2 = \dim M_h$. Consider a basis $(\boldsymbol{\omega}_i)_{1 \leq i \leq N_1}$ of X_h and a basis $(\chi_i)_{1 \leq i \leq N_2}$ of M_h . Let (\mathbf{b}_h, θ_h) be solution of the problem (\mathcal{Q}_h) . Setting $\mathbf{b}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x})$ and $\theta_h = \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i \chi_i(\mathbf{x})$, one can rewrite (\mathcal{Q}_h) into the form

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

where $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_1}$ and $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq N_2, 1 \leq j \leq N_1}$ are the matrices defined as

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_\Omega \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_j dx, \quad 1 \leq i, j \leq N_1, \\ b_{ij} &= \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_i \cdot \nabla \chi_j dx, \quad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2, \end{aligned}$$

$C = (c_1, \dots, c_{N_1})^T$ is the vector whose components are

$$c_i = \int_\Omega \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_i dx, \quad 1 \leq i \leq N_1.$$

and $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1})^T$ and $Y = (\beta_1, \dots, \beta_{N_2})^T$ are the unknowns.

Lemma 4.3. *Let Λ be a square positive, definite and symmetric of size $N_2 \times N_2$. Then, the pair (X, Y) is solution of the system (3.45) if and only if $Y = 0$ and X is solution of symmetric, definite and positive system*

$$(A + B^T \Lambda B)X = C. \quad (3.46)$$

It is worth nothing that the matrix A is symmetric, positive but Λ is not definite neither invertible.

Proof. Firstly, let us prove that the matrix $A + B^T \Lambda B$ is invertible. Let $Z \in \mathbb{R}^{N_1}$ such that $Z^T (A + B^T \Lambda B)Z = 0$. Then, necessarily $Z^T AZ + (BZ)^T \Lambda (BZ) = 0$. Since both the terms in the last identity are positive, we deduce that $Z^T AZ = 0$ and $(BZ)^T \Lambda (BZ) = 0$. Thus $BZ = 0$ since Λ is positive and definite, and necessarily $AZ = 0$. Namely, Z is solution of (3.45) with $C = 0$. Thus $Z = 0$.

Now, observe that if (X, Y) is the unique solution of (3.45), then $Y = 0$ thanks to Proposition 2 and therefore $AX = C$ and $BX = 0$. Hence, X is also the unique solution to (3.46). \square

The first advantage of the new system (3.46) is that number of unknowns is reduced. On the other hand, replacing Λ by $\rho \Lambda$ in (3.46), $\rho > 0$ being a real, one can notice that the larger the coefficient ρ the faster is the convergence. However, it must be noticed also that the larger coefficient ρ the larger is the spectral condition number of the matrix $A + \rho B^T \Lambda B$.

Remark 4.1. *Now, let us break up the composition of the matrices A , B and C as follows. Let L_h be a finite dimensional subspace of $L^2(\Omega)^3$ such that $X_h \subset L_h$ and $\mathbf{curl} \mathbf{w}_h \in L_h$ for all $\mathbf{w}_h \in X_h$. Let $(\mathbf{z}_i)_{1 \leq i \leq \ell_h}$ be a basis of L_h and consider the matrix $K = (k_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \ell_h}$ where $k_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_j dx$. Let R and G be the matrices of the operators $\mathbf{curl} : X_h \rightarrow L_h$ and $\nabla : M_h \rightarrow X_h$ respectively. We have $RG = 0$, thanks to assumption (\mathcal{H}_1) . Let I_* be the matrix of the injection $X_h \hookrightarrow L_h$. One can easily prove that $A = R^T K R$, $B = G^T I_*^T K I_*$, $C = R^T K J$ where J is the coordinate vector of $\mathbf{j}_h \in L_h$. Notice that $G^T A = 0$, $AG = 0$ and $G^T C = 0$.*

Remark 4.2. *Notice that $\text{div} \mathbf{b}_h \neq 0$ in general since we use an $H(\mathbf{curl}; \Omega)$ approximation. However, it is possible to construct a divergence-free approximation of \mathbf{b} by projecting \mathbf{b}_h on the space $H_{00}(\text{div}; \omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \text{div} \mathbf{v} = 0\}$. This projection can be constructed as follows; let T be the operator which associates to each function $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$ the function $\mathbf{b} \in H(\mathbf{curl}; \Omega)$ solution of (\mathcal{Q}) . Consider also the operator*

$$\begin{aligned} \Pi : L^2(\Omega)^3 &\longrightarrow H_{00}(\text{div}; \omega), \\ \mathbf{j} &\longmapsto \mathbf{curl}(T\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Notice that $\Pi \mathbf{j} = \mathbf{j}$ if $\mathbf{j} \in H_{00}(\text{div}; \omega)$, thanks to Proposition 1. Moreover, for all $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$ and all $\mathbf{v} \in H_{00}(\text{div}; \omega)$ one has

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{curl}(T\mathbf{j}) \cdot \mathbf{curl}(T\mathbf{v}) dx, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl}(T\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

Thus,

$$\int_{\Omega} (\Pi \mathbf{j} - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} dx = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in H_{00}(\text{div}; \omega).$$

It follows that Π is the projection operator from $L^2(\Omega)^3$ into $H_{00}(\text{div}; \omega)$. Moreover, according to Proposition 1, there exists a function $\theta \in H_0^1(\Omega)$ such that $\Pi \mathbf{j} = \mathbf{j} - \nabla \theta$ and

$$\Delta \theta = \text{div } \mathbf{j}. \quad (3.47)$$

An approximation of the projector Π can be deduced easily from the discretization of the operator T exposed above. From a practical viewpoint the matrix of the projection Π_h which approximates Π is given by

$$P = R(A + B^T \Lambda B)^{-1} R^T K.$$

Here R and K are the matrices introduced in Remark 4.1, while Λ is an arbitrary square, positive, definite and symmetric matrix. It is worth noting that P does not depend on Λ , thanks to Lemma 4.3. Another method for approximating the projector Π consists to solve equation (3.47).

4.3 A streamline diffusion method for the hyperbolic problem on λ

Our task in this paragraph is to approximate the first order hyperbolic system

$$\begin{cases} \mathbf{B} \cdot \nabla \lambda + \sigma \lambda = f & \text{in } \Omega \\ \lambda = \alpha_0 & \text{on } \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.48)$$

When $\sigma = 0$, equation (3.48) means that the stream derivative of λ vanishes, and λ is constant along the field lines of \mathbf{B} . Such an equation could be solved by using the method of characteristics. Namely, suppose that \mathbf{B} is sufficiently smooth, and let \mathbf{x} an arbitrary point in Ω . Define the field line $(\mathbf{X}(s, \mathbf{x}))_{s \geq 0}$ by

$$\frac{d\mathbf{X}(s, \mathbf{x})}{ds} = -\mathbf{B}(\mathbf{X}(s, \mathbf{x})), \quad \mathbf{X}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Let $s_0(\mathbf{x})$ be the maximum time of existence of $\mathbf{X}(s, \mathbf{x})$ in $\bar{\Omega}$. If $s_0(\mathbf{x})$ is finite, i. e. if the field line $(\mathbf{X}(s, \mathbf{x}))_{s \geq 0}$ is not confined in Ω but encounters the boundary, then necessarily $\mathbf{X}(s_0(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ belongs to Γ^- and one can write

$$\lambda(\mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{X}(s_0(\mathbf{x}), \mathbf{x})).$$

In other words, $\lambda(\mathbf{x})$ is computed by going back the fieldlines of \mathbf{B} originating from \mathbf{x} until the boundary. In [83, 85], Amari and *al.* used the method of characteristics for solving the problem on $\lambda(\mathbf{x})$ and finite difference method for solving (3.20).. Since the fact that the obtained numerical results are quite accurate, this algorithm has drawbacks. The first drawback is the high cost of computation which is mainly due to the integration of the field lines at all the nodes of the mesh and at each iteration of the algorithm. Secondly, the method of characteristics rests on the assumption that the vector field \mathbf{B} is sufficiently smooth (unless the concept of field lines is meaningless) and that all its fields lines encounter the boundary; namely $s_0(\mathbf{x}) < +\infty$ for all $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. From a theoretical viewpoint, the last assumption is not always valid since lines of force may have be never ending, or close on themselves or have a finite length and point to a neutral point where $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Remark 4.3. *If a vector field \mathbf{B} satisfies a condition of the form*

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa} \geq \beta > 0 \text{ for each } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.49)$$

where $\boldsymbol{\kappa}$ is constant vector and β is a real, then necessarily almost its field lines encounter the boundary. Indeed, in that case, one can prove that the set $\{\mathbf{x} \in \Omega; s_0(\mathbf{x}) = +\infty\}$ is a null set (see, e. g., [89]).

It is well known that the direct application of a Galerkin finite elements method to the singularly perturbed problem (3.48) may lead to the appearance of spurious oscillations and instabilities. In the two last decades, several methods were proposed to remove this drawback (especially when a diffusion term $-\varepsilon \Delta \lambda$ is added). Most of the proposed methods concern the 2D case and are based on adding a stabilization term to the discrete problem. Among these methods, one can recall the SUPG method (Streamline Upwind Galerkin Stabilization), called also the *streamline diffusion* method (see Brookes and Hughes [110]), the discontinuous Galerkin method (see Lesaint [134]) and the finite elements methods enriched with so-called *bubble* functions (see, e. g., Brezzi et al. [106]).

Here we shall use the method of streamline diffusion due to Brookes and Hughes [110] (see also, e. g., Johnson et al. [130]) which is based on a modification of the usual Galerkin. The discrete problem we consider is

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \text{Find } \lambda_h \in W_h \text{ such that} \\ a_h(\lambda_h, w_h) = \ell_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} a_h(u_h, w_h) &= \int_{\Omega} (\mathbf{B} \cdot \nabla u_h + \sigma u_h) \cdot (w_h + \delta_h \mathbf{B} \cdot \nabla w_h) dx - \int_{\Gamma^-} u_h w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dx, \\ \ell_h(w_h) &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) (\delta_h \mathbf{B} \cdot \nabla w_h + w_h) - \int_{\Gamma^-} \alpha_0 w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dx. \end{aligned}$$

Here W_h stands for the finite elements space

$$W_h = \{v_h \in H^1(\Omega); v|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

where for each $K \in \mathcal{T}_h$, $\mathbb{P}_k(K)$ denotes the space of polynomials of degree less or equal k . After few calculation, one can prove that

$$\begin{aligned} a_h(u_h, w_h) &= \delta_h \int_{\Omega} (\mathbf{B} \cdot \nabla u_h) (\mathbf{B} \cdot \nabla w_h) dx + \sigma \int_{\Omega} u_h w_h dx \\ &\quad + \frac{1 - \sigma \delta_h}{2} \int_{\Omega} [w_h \mathbf{B} \cdot \nabla u_h - u_h \mathbf{B} \cdot \nabla w_h] dx \\ &\quad + \frac{1 + \sigma \delta_h}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma^-} u_h w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \sigma \delta_h}{2} \int_{\Gamma^-} u_h w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dx. \end{aligned}$$

We have clearly

$$a_h(w_h, w_h) \geq \delta_h \|\mathbf{B} \cdot \nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(1 - \delta_h \sigma)}{2} \|w_h\|_{L_*^2(\partial\Omega)}^2,$$

where

$$\|w_h\|_{L_*^2(\partial\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} |\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}| w_h^2 dx.$$

Hence,

$$a_h(w_h, w_h) \geq \frac{1 - \sigma\delta_h}{2} \|w_h\|_{\Omega}^2, \quad (3.50)$$

if $\sigma\delta_h < 1$. Here

$$\|w_h\|_{\Omega}^2 = \delta_h \|\mathbf{B} \cdot \nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_h\|_{L^2_*(\partial\Omega)}^2.$$

The reader can refer to Appendix B for the proof of the following lemma:

Lemma 4.4. *Assume that if $\delta_h\sigma < 1$. Then, the problem (\mathcal{P}_h) has a single solution $\lambda_h \in V_h$. Moreover, if $\delta_h = ch$ for some constant c , $\mathbf{B} \in L^\infty(\Omega)^3 \cap H(\text{div}; \Omega)$ and $\lambda \in H^{\ell+1}(\Omega)$ for some $\ell \geq 1$, then*

$$(1 - \delta_h\sigma) \|\lambda - \lambda_h\| \leq Ch^{\ell+1/2} \|\lambda\|_{H^{\ell+1}(\Omega)}. \quad (3.51)$$

5 Computational results.

Our task in this section is to display some three-dimensional computational results, obtained with a three-dimensional code containing a force-free fields solver. This solver uses the iterative algorithm of Section 3 and the finite elements method exposed in Sections 4.2 and Section 4.3 respectively. Nédelec' edge elements of degree $\ell = 1$ are used for solving the div-curl problem on \mathbf{B} . The hyperbolic problem on λ is solved by means of P^1 conforming elements (see, e. g., Ciarlet [113]). The tests we made are divided into four categories. The objective of the first experiences is to check separately the convergence of the finite elements methods used for solving the vector-potential problem on \mathbf{B} and the hyperbolic problem on λ . The second family of tests concerns the convergence of the iterative fixed-point algorithm. In the third tests, the emphasis is put on some particular properties of Beltrami flows. More precisely, we investigate the behavior of the *the energy* and the *relative helicity* of a Beltrami flow when it moves away from the irrotational one. In the fourth tests, we propose to compute force-free fields in a cylindrical geometry, and to compare the non-linear solution with linear and irrotational solutions computed with the same boundary data. In the last tests, we compare results obtained with our 3D code with the one obtained with the 2D axisymmetric code for toroidal magnetohydrodynamic equilibria (CHEASE) (see [139]) in toroidal geometry.

5.1 Preliminary experiences on convergence of the finite element methods

Here we test separately the convergence of the three problems involved in our algorithm : the mixed hybrid finite element method for solving the potential field problem, the $H(\mathbf{curl})$ elements method used to solve the div-curl problem solutions (3.30) and the streamline diffusion method used to approximate the hyperbolic problem (3.48).

Preliminary test 1: Computation of the potential field

In the first test, we consider the potential field created by a dipole situated under the surface $\{z = 0\}$ in $z = L_0$. The magnetic field \mathbf{B}_0 , introduced by Jackson (see [129]), is

defined by

$$\begin{aligned} B_{0,x} &= 3b_0 \frac{x_1 z_1}{R^5}, \\ B_{0,y} &= 3b_0 \frac{y_1 z_1}{R^5}, \\ B_{0,z} &= b_0 \frac{3z_1^2 - R^2}{R^5}, \end{aligned}$$

where $x_1 = x - \frac{L_x}{2}$, $y_1 = y - \frac{L_y}{2}$, $z_1 = z + L_0$ and $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. We chose $L_x = L_y = 5L_0$. The domain Ω is defined by $\Omega = [-1, 2] \times [-1, 2] \times [0, 1]$. We compute numerically the field \mathbf{B}_0 using $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}$ as boundary condition on $\partial\Omega$. In Table 3.1, we display the L^2 relative error between the exact and the numerical solution. The errors decrease as $h^{0.96}$. The convergence is linear.

h	DOF (faces)	$\frac{\ \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_{0h}\ _{0,\Omega}}{\ \mathbf{B}_0\ _{0,\Omega}}$
0.1563	16500	0.0871
0.1172	390400	0.0671
0.0938	760000	0.0543
0.0781	1310400	0.0457

Table 3.1: L^2 relative error between the exact potential field and the numerical one obtained with the mixed hybrid finite element method.

In figure Fig.3.1, we display on the same figure some field lines of the magnetic field for the exact and a numerical solution obtained for $h = 0.0866025$. The two solutions are in good agreement.

Figure 3.1: Magnetic field lines of the exact solution (in white) and the numerical solution (in red) for the dipole test.

Preliminary test 2: the discretized curl-div system.

In all this second experience, $\Omega = B_2 - \bar{B}_1$, where is B_2 (resp. B_1) is the 3D sphere of radius 2 (resp. 1). In Table 3.2, we display L^2 and $H(\mathbf{curl})$ errors between a known exact solution \mathbf{B} of (3.30) and the approximated one. The exact solution is given by

$$\mathbf{B} = \frac{\psi'(r)}{r} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) - 2\psi(r)\mathbf{a}, \quad (3.52)$$

and corresponds to the current density

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{r^2}(r^2\psi'(r))'(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) - 2\frac{\psi'(r)}{r}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}).$$

Here $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ and

$$\psi(r) = (r - 1)(r - 2).$$

One can observe that the L^2 -error on the $\mathbf{curl} \mathbf{B}$ decreases linearly with h , while the L^2 error on \mathbf{B} decreases as $h^{1.8}$.

h	DOF (edges)	$\ \mathbf{curl} \mathbf{b} - \mathbf{curl} \mathbf{b}_h\ _{0,\Omega}$	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{L^2}$
		$\ \mathbf{curl} \mathbf{b}\ _{0,\Omega}$	$\ \mathbf{v}\ _{L^2}$
0.5076	15012	0.0727	0.0707
0.4108	29802	0.0580	0.0489
0.3454	52032	0.0482	0.0360
0.2622	124860	0.0361	0.0217
0.2116	245592	0.0289	0.0149

Table 3.2: The div-curl problem on \mathbf{B} : the relative L^2 and $H(\mathbf{curl})$ errors obtained with Nédelec' edge elements of degree 1.

Preliminary test 3: the transport equation on λ .

In this test, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. In Table 3.3 we display the L^∞ and the L^2 errors between the exact solution of the hyperbolic problem (3.48) and the approximated one. The former is given by

$$\lambda(\mathbf{x}) = xyz,$$

Observe that λ is solution to (3.48) with

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \text{ and } f = 0.$$

We choose in this test $\sigma = 0.0001$ and $\delta_h = 0.1h$.

Notice that both the errors are decreasing with h . Nevertheless, a simple investigation of these numerical results shows that L^2 error decreases as $h^{2.06}$ while the L^∞ error is decreasing as $h^{1.5}$.

h	DOF (nodes)	$\ \lambda - \lambda_h\ _\infty$	$\ \lambda - \lambda_h\ _{L^2}$
		$\ \lambda\ _\infty$	$\ \lambda\ _{L^2}$
0.34641	216	0.03116	0.01994
0.17322	1331	0.01163	0.00459
0.08660	9261	0.00407	0.00109
0.05773	29791	0.00175	0.00048
0.04330	68921	0.00088	0.00027

Table 3.3: The hyperbolic problem on λ : the relative L^2 and L^∞ errors obtained by the use of streamline diffusion method and P^1 conforming elements.

5.2 The convergence of the iterative algorithm

Our task now is to check convergence of the iterative algorithm exposed in Section 3. The experience is realized in the domain $\Omega = B_2 - \bar{B}_1$. We also compare the approximated pair $(\mathbf{B}_h, \lambda_h)$ obtained after convergence of the process with the exact Beltrami (\mathbf{B}, λ) . The latter is given by:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z), \quad \lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\rho}.$$

This is a cylindrical Beltrami flow obtained by choosing $\eta(t) = t/2$ (see Example 2 in the introduction). Here (r, θ, z) denote the cylindrical coordinates with respect to the point $(-3, -2, 0)$. The initial guess \mathbf{B}_0 is obtained by solving a Neumann problem using P^1 elements.

Table 3.4 shows the rates of convergence of the sequence $(\mathbf{B}_h^{(n)}, \lambda_h^{(n)})$ and the L^∞ norm of $\mathbf{curl} \mathbf{B}_h^{(n)} \times \mathbf{B}_h^{(n)}$ versus n , the number of iterations. In Table 3.5, the error between the computed Beltrami flow $(\mathbf{B}_h, \lambda_h)$, obtained after convergence of the process, and the exact one is displayed. Observe the following points. On one hand, the iterative algorithm seems to be super-convergent since the sequence $(\mathbf{curl} \mathbf{B}_h^{(n)}, \lambda_h^{(n)})$ reaches the approximated solution $(\mathbf{B}_h, \lambda_h)$ after few iterations. Let us remark that the proof of this super-convergence is not an easy matter unless the flow is linear (see Boulmezaoud and Amari [102]). On the other hand, the error between the approximated pair $(\mathbf{B}_h, \lambda_h)$ and the exact one decreases strongly with h . Indeed, Table 3.5 shows that the errors $\|\mathbf{B}_h - \mathbf{B}\|_{H(\mathbf{curl})}$, $\|\mathbf{B}_h - \mathbf{B}\|_{L^2}$ and $\|\lambda - \lambda_h\|_\infty$ decrease as h , h^2 and $h^{1.5}$ respectively. All these observations indicate the efficiency of the method and its actual performance.

5.3 Numerical properties of force-free fields

In this paragraph, the emphasis is on some properties of non linear Beltrami flows. Ω is again chosen as the domain $\Omega = B_2 - B_1$. We are in particular interested in the behavior of *the energy* and the *relative helicity* when the flow moves away from the irrotational one. Both of these quantities are computed numerically. Recall that the energy of a vector field \mathbf{B} is defined as

$$E(\mathbf{B}) = \int_{\Omega} |\mathbf{B}|^2 dx.$$

We have

$$E(\mathbf{B}) = E_0 + E(\mathbf{b}), \tag{3.53}$$

Iteration (n)	$\ \mathbf{B}_h^{(n+1)} - \mathbf{B}_h^{(n)}\ _{H(\mathbf{curl})}$	$\ \lambda_h^{(n+1)} - \lambda_h^{(n)}\ _\infty$	$ \mathbf{curl} \mathbf{B}_h^{(n)} \times \mathbf{B}_h^{(n)} _\infty$
	$\ \mathbf{B}_h^{(n)}\ _{H(\mathbf{curl})}$	$\ \lambda_h^{(n)}\ _\infty$	
1	0.13695	-	1.3e-14
2	0.00764	0.02490	0.01217
3	0.00022	0.00026	0.00677
4	8.13e-06	6.0e-05	0.00676
5	1.42e-06	0.	0.00676

Table 3.4: The residual difference $\|(\mathbf{B}_h^{(n+1)}, \lambda_h^{(n+1)}) - (\mathbf{B}_h^{(n)}, \lambda_h^{(n)})\|_{H(\mathbf{curl}) \times L^\infty}$ and the norm $|\mathbf{curl} \mathbf{B}_h^{(n)} \times \mathbf{B}_h^{(n)}|_\infty$ versus the number of iterations n . The strong decay of the residue indicates that the iterative process is super-convergent.

h	$\ \mathbf{curl} \mathbf{v} - \mathbf{curl} \mathbf{v}_h\ _{0,\Omega}$	$\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\ _{L^2}$	$\ \lambda - \lambda_h\ _\infty$
	$\ \mathbf{curl} \mathbf{v}\ _{0,\Omega}$	$\ \mathbf{v}\ _{L^2}$	$\ \lambda\ _\infty$
0.5459	0.0461	0.00988	0.00543
0.3732	0.0297	0.00426	0.00356
0.2839	0.0219	0.00237	0.00197
0.2536	0.0194	0.00187	0.00162
0.2293	0.0174	0.00150	0.00134

Table 3.5: The $H(\mathbf{curl})$ and L^2 errors on \mathbf{B} and the L^∞ error on λ versus the discretization h .

Here $E_0 = E(\mathbf{B}_0)$ and $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ where \mathbf{B}_0 stands for the irrotational vector field corresponding to g , given by $\mathbf{B}_0 = \nabla\chi$ with

$$\Delta\chi = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial\chi}{\partial n} = g.$$

The *relative helicity* of \mathbf{B} is defined as

$$H(\mathbf{B}) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx - \int_{\Omega} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 dx,$$

where \mathbf{A} is a vector potential of \mathbf{v} (i. e., $\mathbf{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B}$), \mathbf{B}_0 is the potential field associated to \mathbf{B} (i. e. $\mathbf{curl} \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$, $\text{div} \mathbf{B}_0 = 0$ and $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ on $\partial\Omega$) and \mathbf{A}_0^* is solution to the system

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{A}_0 = 0 \text{ in } \Omega, \text{ div } \mathbf{A}_0 = 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{A}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{A} \times \mathbf{n} \text{ on } \partial\Omega, \\ \int_{\Gamma_i} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \text{ for all } i = 0, \dots, p, \end{cases}$$

where $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$ are the connected components of $\partial\Omega$. The relative helicity H is gauge invariant and describes the linkage of the field lines of \mathbf{B} with one another (see [96]). It is also an invariant of any perfect MHD motion of the plasma (see, e. g., [153] and [151]). Observe that the relative helicity of an irrotational field is zero.

Another point worth noting is that $\mathbf{curl} \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$ since

$$\mathbf{curl} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} = \text{div}_T(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}) = \mathbf{curl} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}.$$

Moreover, choosing \mathbf{A} such that $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$ and introducing the vector function \mathbf{A}_0^* defined as the unique element of U satisfying $\mathbf{curl} \mathbf{A}_0^* = \mathbf{B}_0$ and $\text{div} \mathbf{A}_0^* = 0$, we get

$$H(\mathbf{B}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0^*) dx. \quad (3.54)$$

Actually,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{B}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} + \int_{\Omega} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{b} dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} + \int_{\Omega} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{curl}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{curl}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0^*) dx, \end{aligned}$$

and (3.54) is easily obtained. Now, using the inequalities

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu_0^{-1} \|\mathbf{curl} \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\|\alpha\|_{\infty}}{\mu_0} \|\mathbf{B}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{A}_0^*\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu_0^{-1} \|\mathbf{B} + \mathbf{B}_0\|_{L^2(\Omega)},$$

identities (3.53) and (3.54) we get the estimates

$$E_{pot} \leq E(\mathbf{B}) \leq E_{max}, \quad (3.55)$$

$$|H(\mathbf{v})| \leq H_{max}, \quad (3.56)$$

with

$$E_{\max} = \tau E_0, \quad H_{\max} = (\tau + 3)^{1/2}(\tau - 1)^{1/2} \frac{E_0}{\mu_0^2}, \quad (3.57)$$

with

$$\tau = \left(1 - \frac{\|\alpha\|_{\infty}^2}{\mu_0^2}\right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Estimates (3.56) suggests that energy and relative helicity of a Beltrami field \mathbf{B} increase with λ . This fact will be confirmed by the forthcoming numerical results.

In the all the tests, the normal component $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g$ is fixed and is given by $g = \mathbf{B}_{dip} \cdot \mathbf{n}$, where \mathbf{B}_{dip} is the *dipolar field* defined as

$$\mathbf{B}_{dip} = \frac{B_0}{r^3} (2 \cos(\theta) \mathbf{e}_r + \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta).$$

Here (r, θ, ϕ) denotes the spherical coordinates.

The function $\alpha_0(\mathbf{x})$ is taken into the form

$$\alpha_0(\mathbf{x}) = \beta \lambda_{00}(\mathbf{x}),$$

where $\beta \in \mathbb{R}$ is a free parameter which describes the strength of $\lambda(\mathbf{x})$, and $\lambda_{00}(\mathbf{x})$ is such that

$$|\lambda_{00}|_{L^\infty(\Gamma^-)} = 1.$$

More precisely, we choose

$$\lambda_{00}(\mathbf{x}) = \exp^{-(\theta - \frac{\pi}{2})^2}.$$

Note that α_0 is equal to β on the equator of the interior sphere and is minimal at the poles.

We are also interested in comparing the non-linear Beltrami field \mathbf{B} with the *linear* force-free field \mathbf{v}_l solution of

$$\mathbf{curl} \mathbf{v}_l = \beta \mathbf{v}_l \text{ in } \Omega, \quad \text{div} \mathbf{v}_l = 0 \text{ in } \Omega; \quad \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega.$$

This problem is also solved using the iterative algorithm of Section 3 and $H(\mathbf{curl})$ elements. The reaction-convection problem on λ is dropped since λ is known in this last case. Table 3.6 contains the values of the quantities $H(\mathbf{B})$, $E(\mathbf{B})$, $H(\mathbf{v}_l)$, $E(\mathbf{v}_l)$ for several values of β .

5.4 Cylindrical test

Here we propose to compute force free fields in cylindrical geometries. Denote (ρ, θ, z) the cylindrical coordinates (relative to the origin). We consider the force free field \mathbf{B} defined by

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_\rho \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\eta_0(\rho)\rho}{1 + \rho^2\eta_0(\rho)^2} c(\rho) \\ \frac{1}{1 + \eta_0(\rho)^2\rho^2} c(\rho) \end{pmatrix},$$

where $\eta_0(\rho)$ is a given function depending only on ρ , and $c(\rho)$ is defined by

$$c(\rho) = C_0 \exp\left(\int \frac{\rho^2 \eta_0(\rho) \eta_0'(\rho)}{1 + \rho^2 \eta_0(\rho)^2}\right)$$

β	$H(\mathbf{B})$	$H(\mathbf{v}_l)$	$\frac{E(\mathbf{B})}{E_{pot}}$	$\frac{E(\mathbf{v}_l)}{E_{pot}}$
0	0	0	1	1
1	2.21	10.30	1.006	1.088
2	4.60	30.51	1.025	1.611
2.5	5.90	60.77	1.041	2.744
3	7.33	210.08	1.063	9.660

Table 3.6: The helicity and the energy of the linear and non-linear force-free fields \mathbf{B} and \mathbf{v}_l for several values. Notice that these quantities increase in both cases with β .

with $C_0 \in \mathbb{R}$. λ is defined by

$$\lambda = -\frac{2\eta_0(\rho) + \eta_0'(\rho)\rho}{1 + \rho^2\eta_0(\rho)^2}.$$

Magnetic field lines live on isosurfaces of λ which are nothing else than cylinders. Here, we choose $\eta_0(\rho)$ of the form

$$\eta_0(\rho) = \rho^r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

In that case,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho^{r+1}}{(1 + \rho^{2r+2})^{\frac{r+2}{2r+2}}} \\ 1 \\ \frac{1}{(1 + \rho^{2r+2})^{\frac{r+2}{2r+2}}} \end{pmatrix}$$

and

$$\lambda = -\frac{(2+r)\rho^r}{1 + \rho^{r+2}}.$$

We show numerical solution obtained in the cylinder of diameter equal to $\rho_{\max} = 1.6$ and of height $Z_{\max} = 4$. The size of the mesh is $h = 0.120343$ with 124416 elements. The relative error in norm L^2 on \mathbf{B} between the exact solution and the numerical one is equal to 0.01623. For λ the relative error is equal to $7.43 \cdot 10^{-3}$. In Figures 3.2 we display a cut at $y = 0$ of the profile of λ for the exact and the numerical solutions. The field lines are shown in Figures 3.3. In Figures 3.4, we visualize field lines enclosing the cylindrical isosurface on which $\lambda = -2.9$. Now, we propose to compare linear and non-linear force-free field using the same boundary values than ones used before in this section. In Fig 3.5, we display a potential field (or a linear force-free field with $\lambda = 0$) and a linear force-free field with $\lambda = 1$. In Fig 3.6, we present an other linear force-free field with $\lambda = 3$ and the non-linear force-free field studied in this section. We can see the influence of the value of λ on the topology of magnetic field lines comparing the cases $\lambda = 0, 1, 3$. The complexity of topology of field lines increase with lambda.

5.5 Beltrami field in toroidal geometry

In termonuclear fusion, equilibrium are described by the full magnetostatic system. The β number referring to the ratio of the plasma pressure over the magnetic pressure is generally

Figure 3.2: Profil of λ on $\Omega \cap \{y = 0\}$. The exact solution is presented on the left and the numerical one on the right.

Figure 3.3: Visualisation of field lines of the exact (left) and the numerical (right) solution colored by λ

Figure 3.4: Presentation of field lines enclosing an isosurface which is nothing else than a cylinder. We choose to represent the isosurface corresponding to $\lambda = -2.9$.

Figure 3.5: Potential field and (on the left) and linear force-free field in the case $\lambda = 1$ (on the right).

Figure 3.6: Linear force-free field in the case $\lambda = 3$ (on the left) and non-linear force-free field (on the right) described before.

small. In order to show the efficiency of the method on more complicated cases and in view to extend our method to the full magnetostatic system, we propose to test our 3D code on force-free configurations comparing our results with pressureless solutions obtained by the 2D axysymmetric code CHEASE developed by H. Lutjens. and *al* (see [139]). In this test, we choose to compute the solution in a half torus. The mesh size is equal to $h=0.0389541$ with 428064 elements. The relative difference on \mathbf{B} between the CHEASE solution and our numerical solution in norm L^2 is equal to 0.00918812.

In Figure 3.3 we display field lines obtained with the CHEASE code on the left and with our code on the right. Figure 3.8 shows an isosurface ($\lambda = 1.25$) on which lie magnetic field lines. In Tokamak, those surfaces are called magnetic surfaces. In 3.9, we present a cut magnetic surfaces corresponding to constant values of λ . This illustrate the well known property of Tokamak plasmas which magnetic surfaces form stacked toric surfaces.

6 Conclusion

From a mathematical view point, we have shown numerically the convergence of our method. The theoretical convergence has not been proved and remains an open question. However, as conjectured in section 3, we can verify numerically that convergence can be lost for boundary data on λ too large. In spite of these limits, the algorithm allows to test a very great number of interesting cases.

The method proposed has been tested in several geometries, on several more or less complicated cases. Now, the goal is to apply this method in domain such as astrophysics to reconstruct the coronal magnetic field. An other perspective of this work is to extend this method to solve the full magnetostatic equations in order to apply the algorithm in fusion domain, and particularly in tokamaks. This will be done in a forthcoming paper.

Figure 3.7: Equilibria obtained by CHEASE on the right and our code on the left.

Figure 3.8: Field lines around a magnetic surface.

Figure 3.9: Cut of the stacked toric magnetic surfaces.

Chapitre 4

An algorithm for solving the Magnetostatic equations.

A soumettre

Summary We present an iterative method for the solution of magnetostatic equations. Our approach is based on splitting the mixed elliptic-hyperbolic magnetostatic equations into three boundary value problems. We propose an adequate finite element method for solving each one of these problems. Numerical results are presented in several geometries to illustrate the efficiency and the potential advantages of our approach.

Keywords: magnetostatic, mhd equilibria

1 Introduction

The magnetohydrostatic equations describing the equilibrium of a plasma of an infinite conductivity are

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \nabla p - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

and

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.2)$$

where \mathbf{B} is the magnetic field, p is a plasma pressure, ρ is the density and \mathbf{g} is the gravity acceleration. When the gravity term is neglected, these equations are reduced to the so-called magnetostatic equations

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \nabla p = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.3)$$

and

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

This type of equations is encountered in Plasma physics laboratory and Astrophysical as well as in fluid dynamics. In the latter case, \mathbf{B} denotes the magnetic field, and $\mathbf{curl} \mathbf{B}$ is nothing else than the current density.

Confining a plasma by an external magnetic field in cylindrical or toroidal geometry has received a great attention since decades. In fact, the computation of the equilibrium solution and its stability are important issues for the next generation of Tokamaks, as well



Figure 4.1: Toroidal geometry.

as for other geometries such as Spheromaks (see [91, 118]). In general for the Tokamak configurations the magnetic pressure exceeds the kinetic one and we talk of low β plasma (referring to the ratio of the plasma pressure over the magnetic pressure) which is very small compared to 1.

In Tokamaks, a plasma is confined by a strong magnetic field in a toroidal geometry. The magnetic field is produced by coils surrounding the torus and by an intense current flow in the plasma. The resulting field lines are helicoidal turning around toroidal isosurfaces called magnetic surfaces (see [98]). In axisymmetric configurations \mathbf{B} is often represented in the form

$$\mathbf{B} = \mathbf{curl}(\Psi\nabla\Phi) + G(\Psi)\nabla\Phi, \quad (4.5)$$

and the 3D problem (4.3) reduces to the 2D Grad-Shafranov problem (see [149]).

$$\nabla \cdot \frac{1}{R^2} \nabla \Psi = \frac{j_{\Phi}}{R} = -p'(\Psi) - \frac{1}{R^2} G G'(\psi)$$

where Φ is the ignorable toroidal angle and R the major radius of the torus (see figure Fig.4.1). The unknown Ψ called poloidal magnetic flux function is highly related to the magnetic surfaces. The pressure p and the poloidal flux current function G are functions depending only on Ψ and are the two degrees of freedom of a plasma equilibrium in a tokamak. Different methods have been developed to solve the Grad-Shafranov equation. One of the most used Grad-Schafranov solver code, named CHEASE, developed by Lütjens and *al*, is based on bicubic Hermite finite element method (see [139]). The interested reader can refer to the review paper of Takeda and Tokuda (see [150]).

The purpose of this paper is to compute the full 3D magnetostatic system (4.3-4.4) without any assumption of the axial symmetry. The non linearity of equation (4.3) is one of the main difficulties to solve the magnetostatic system. In toroidal geometries,

several code, based on spectral methods have been developed by Hirshman and *al* (see [125], [126], [127]). To compute such solutions, iterative process have also been use. For example, Reiman and *al* have proposed a Picard method in [145], extended to a Newton method (see [142]) in a more recent paper.

The particular case of zero pressure solution corresponds to the well known class of Beltrami field. In [109], we have proposed an iterative method to compute this type of flows. The main idea of this paper was to decouple the equations governing Beltrami fields into three problems and to solve the three problems using an adequate finite element method. In this paper, we propose an extension of this algorithm to solve the full 3D magnetostatic equations working in several geometries.

The remaining of this paper is organized as follows. In Section 2, we present the functional framework and results concerning the existence of magnetostatic fields. The Section 3 is devoted to describe the iterative method we propose to use to compute magnetostatic configurations. In section 4, we briefly recall the finite elements method used to solve the involved problems of the algorithm. Finally, in Section 5 numerical test are presented in order to show the convergence of the method. The method is applied to fusion equilibrium in Tokamak configurations.

2 Notations. Statement of the problem

As in [109], consider Ω a bounded open set of \mathbb{R}^3 , simply connected, with a lipschitzian boundary. For any $k \in \mathbb{N}$, \mathbb{P}_k stands for the space of polynomial of degree lower than k , and \mathbb{H}_k is the space of the homogeneous polynomials of degree equal to k . If k is a non positive integer, by convention $\mathbb{P}_k = \mathbb{H}_k = \{0\}$. For $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ stands for the space of (equivalence classes of) all measurable functions that are p^{th} power integrable on Ω (with the usual modification when $p = +\infty$). This space is equipped with the norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Given an integer $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ refers to Sobolev space of all the functions u whose generalized derivatives satisfy

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^3; D^\mu u \in L^2(\Omega).$$

equipped with the usual norms. We consider $L_0^2(\Omega)$ the subspace of $L^2(\Omega)$ defined by

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v dx = 0\}.$$

We define also the spaces

$$\begin{aligned} H(\mathbf{rot}; \Omega) &= \{v \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{curl} v \in L^2(\Omega)^3\}, \\ H(\mathbf{div}; \Omega) &= \{v \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{div} v \in L^2(\Omega)\}, \end{aligned}$$

equipped respectively with the norms

$$\begin{aligned} \|v\|_{H(\mathbf{rot}; \Omega)} &= (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{curl} v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \\ \|v\|_{H(\mathbf{div}; \Omega)} &= (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{div} v\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

In order to study the problem (4.3-4.4), we have to complete the system with boundary conditions on the magnetic field \mathbf{B} , the current density $\mathbf{j} = \mathbf{curl} \mathbf{B}$ and the pressure p . Following [82], we propose the boundary conditions hereafter. As in the case of Beltrami fields, we prescribe the normal component of \mathbf{B} on $\partial\Omega$,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega, \quad (4.6)$$

where \mathbf{n} is the unit exterior normal to $\partial\Omega$. As a consequence of the equation (4.4), g have to satisfy the compatibility condition

$$\int_{\partial\Omega} g = 0. \quad (4.7)$$

Multiplying (4.3) by \mathbf{B} , we get

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0. \quad (4.8)$$

The transport equation (4.8) means that p is constant along the field lines of \mathbf{B} . So, it is natural to impose p on the inflow boundary

$$p = p_0 \text{ on } \Gamma^-, \quad (4.9)$$

where

$$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}.$$

We prescribe also the normal component of the current density on Γ^-

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = h \text{ on } \Gamma^-. \quad (4.10)$$

From a theoretical viewpoint, existence results have been proved in [82] or in [133].

The particular case of Beltrami fields, where the pressure is negligible, has been treated in [104] and [101].

3 An iterative algorithm

The purpose of this section is to propose an iterative algorithm to compute numerically magnetostatic configurations. The idea is to split the problem (4.3-4.4) into four problems. In the case of Beltrami fields, the equation

$$\mathbf{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0,$$

is rewritten in the form

$$\mathbf{curl} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

where λ is a function depending or not on the position \mathbf{x} . In that case, the current density is completely parallel to the magnetic field. Here, we propose to rewrite \mathbf{j} in a more general manner. The current density is split into the sum

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad (4.11)$$

where \mathbf{j}_{\parallel} and \mathbf{j}_{\perp} are respectively colinear and perpendicular to \mathbf{B} . The component $\mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{x})$ is written into the form

$$\mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

where μ is an unknown scalar function. The same decomposition of \mathbf{j} has been used in [142]. Formally, the divergence of the equation (4.11) give us

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mu = -\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp \quad (4.12)$$

because $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ and $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Moreover, using (4.11), the equation (4.3) becomes

$$\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{B} = \nabla p. \quad (4.13)$$

It is clear that \mathbf{j}_\perp satisfy

$$\mathbf{j}_\perp(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{B}(\mathbf{x})|^2} \nabla p(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Note that $|\mathbf{B}(\mathbf{x})|$ have to be nonzero. We can also prove that \mathbf{j}_\perp satisfy

$$\mathbf{j}_\perp(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{B}(\mathbf{x})|^2 + p(\mathbf{x})} (\operatorname{curl} (p(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})) - p(\mathbf{x})\mathbf{j}_\parallel(\mathbf{x})), \quad (4.15)$$

if $p(\mathbf{x}) + |\mathbf{B}(\mathbf{x})|^2 \neq 0$. In view of these remarks, and using (4.8), we are able to propose an iterative process to solve the non-linear system (4.3-4.4) completed with the boundary conditions (4.7), (4.9) and (4.10). Thus, we construct the sequence (\mathbf{B}_n, p_n) in the iterative process

- For $n = 0$, $p_0 = 0$, and B_0 solution of

$$\operatorname{curl} \mathbf{B}_0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = g \text{ on } \partial\Omega. \quad (4.16)$$

This problem can be reduced to a Neumann problem in a simply-connected domain (see [119]).

- For $n \geq 0$,

– p_n solution of

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla p_n = 0 & \text{in } \Omega, \\ p_n = p^0 & \text{on } \Gamma^-. \end{cases} \quad (4.17)$$

– $\mathbf{j}_{\perp,n} = \frac{1}{|\mathbf{B}_n|^2} \nabla p_n \times \mathbf{B}_n$.

– μ_n solution of

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla \mu_n = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp,n} & \text{in } \Omega, \\ \mu_n = \mu^0 & \text{on } \Gamma^-, \end{cases} \quad (4.18)$$

where μ^0 satisfy $\mu^0 g = h - \mathbf{j}_{\perp,n}$ on Γ^- .

– $\mathbf{j}_n = \mu_n \mathbf{B}_n + \mathbf{j}_{\perp,n}$.

– \mathbf{B}_n solution of

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{j}_n & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.19)$$

In that algorithm, at each step, we have to solve two first order hyperbolic system (4.17) and (4.18) which are of the form

$$\begin{cases} \mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda = \lambda_0 & \text{on } \Gamma^-, \end{cases} \quad (4.20)$$

and the *curl - div* system (4.19). In practice, we perturb the problem (4.20) by adding an artificial reaction term. Moreover, setting $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_n$, the system (4.19) reduce to a problem on \mathbf{b}_n .

Thus, we get the algorithm

- For $n \geq 0$,

- Find p_n solution of

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla p_n + \sigma_n p_n = \sigma_n p_{n-1} & \text{in } \Omega, \\ p_n = p^0 & \text{on } \Gamma^-, \end{cases} \quad (4.21)$$

where σ_n is a small positive parameter.

- $\mathbf{j}_{\perp, n} = \frac{1}{|\mathbf{B}_n|^2} \nabla p_n \times \mathbf{B}_n$.

- Find μ_n solution of

$$\begin{cases} \mathbf{B}_n \cdot \nabla \mu_n + \varepsilon_n \mu_n = \varepsilon_n \mu_{n-1} - \operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp, n} & \text{in } \Omega, \\ \mu_n = \mu^0 & \text{on } \Gamma^-, \end{cases} \quad (4.22)$$

where μ^0 satisfy $\mu^0 g = h - \mathbf{j}_{\perp, n}$ on Γ^- and ε_n is a small positive parameter.

- $\mathbf{j}_n = \mu_n \mathbf{B}_n + \mathbf{j}_{\perp, n}$.

- Find \mathbf{b}_n solution of

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{j}_n + \nabla q_n & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{b}_{n+1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{b}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.23)$$

where q_n appears due to the fact that $\operatorname{div} \mathbf{j}_n$ is not exactly zero in general. The term q_n is solution to the Laplace problem

$$-\Delta q_n = \operatorname{div}(\mathbf{j}_n) \text{ in } \Omega, \quad \text{and } q_n = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (4.24)$$

In this algorithm, the computation of the magnetic field can be viewed as a perturbation of the potential field \mathbf{B}_0 . We have to solve numerically three types of problem : a first order hyperbolic system of the form

Find λ satisfying

$$\begin{cases} \mathbf{B} \cdot \nabla \lambda + \sigma \lambda = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda = \lambda_0 & \text{on } \Gamma^-, \end{cases} \quad (4.25)$$

and a potential vector system

Find the pair (\mathbf{b}, q) satisfying

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{b} - \nabla q = \mathbf{j} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{b} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ q = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.26)$$

and the potential field problem (4.16). The proof of the convergence of the algorithm is not an easy matter and remains an open question. Only numerical convergence can be shown (see Section 5).

4 Variational formulation and finite element discretization

The aim of this section is to recall the finite element discretisation used to solve problems (4.16), (4.25) and (4.26) and recall the most important results obtained in our recent paper (see [109]).

Assume that Ω is a bounded polyhedron in \mathbb{R}^3 . Consider a family of triangulations (\mathcal{T}_h) satisfying the usual regularity assumptions. Here h stands for the usual discretization parameter defined as the largest diameter of all the tetrahedra $K \in \mathcal{T}_h$.

4.1 The potential problem

In this part, we interest in the approximation of the potential field problem (4.16). Setting $\mathbf{B}_0 = \nabla\Phi$, when Ω is simply connected, (4.16) reduce to solve

$$-\Delta\Phi = f \text{ in } \Omega \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = g \text{ on } \partial\Omega. \quad (4.27)$$

We use mixed hybrid finite element method to approximate solutions of (4.27) (see [147]). One of our motivations is that this method enable to approximate \mathbf{B}_0 in $H(\text{div}; \Omega)$. In this method the stress on the inter-element continuity is realized by introducing a Lagranger multiplier. Define $\partial\mathcal{T}_h$ the set of all faces of the mesh, and introduce the spaces

$$W_h^* = \{\mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^3, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in RT_k(K)\},$$

$$L_h^* = \{v_h \in L_0^2(\Omega), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K)\},$$

and

$$\Lambda_h^* = \{v_h \in L^2(\partial\mathcal{T}_h), \quad \forall T \in \partial\mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T)\},$$

where $k \geq 0$ in an integer and

$$RT_k = \mathbb{P}_k^n \oplus \mathbf{x}\mathbb{P}_k,$$

. Denote by $T' \in K$ the four faces of a tetrahedron K . We can prove (see [109]) that the problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\mathbf{B}_{0,h}^*, \Phi_h^*, \lambda_h^*) \in W_h^* \times L_h^* \times \Lambda_h^* \text{ such that} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall \mathbf{q} \in RT_k(K), \quad \int_K \mathbf{B}_{0,h}^* \mathbf{q} dK + \int_K \Phi_h^* \text{div } \mathbf{q} - \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \lambda_h^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dT' = 0, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in \mathbb{P}_k(K), \quad \int_K \text{div } \mathbf{B}_{0,h}^* v dK = - \int_K f v dK, \\ \forall \mu_h \in \Lambda_h, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \subset \partial K} \int_{T'} \mu_h \mathbf{B}_{0,h}^* \cdot \mathbf{n} dT' = G_K(\mu_h), \end{array} \right. \quad (4.28)$$

where G_K is defined for each $K \in \mathcal{T}_h$ by

$$G_K(\mu_h) = \begin{cases} 0 & \text{if } K \cap \partial\Omega = \emptyset, \\ \sum_{T' \in K \cap \partial\Omega} \int_{T'} g \mu_h dT' & \text{else.} \end{cases}$$

has one and only one solution $(\mathbf{B}_{0,h}^*, \Phi_h^*, \lambda_h^*) \in W_h^* \times M_h^* \times \Lambda_h^*$ and that $\mathbf{B}_{0,h}^*$ is an approximation of the solution of the problem (4.16). Moreover, the problem (4.28) reduce to invert a square linear system. The size of the system is equal to the number of faces (see [109]).

4.2 The transport equation

The problem first hyperbolic system (4.25) has been studied by Bardos in [92] where he proved the existence of a solution when $\sigma > 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ and λ is sufficiently small. Consider the finite dimensional space

$$W_h = \{v_h \in H^1(\Omega); v|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

To approach solution to (4.25), we propose to use the streamline method and the variational fomulation

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \text{Find } \lambda_h \in W_h \text{ such that} \\ a_h(\lambda_h, w_h) = \ell_h(w_h), \forall w_h \in W_h, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} a_h(u_h, w_h) &= \delta_h \int_{\Omega} (\mathbf{B} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{B} \cdot \nabla w_h) dx + \sigma \int_{\Omega} u_h w_h dx \\ &\quad + \frac{1 - \sigma \delta_h}{2} \int_{\Omega} [w_h \mathbf{B} \cdot \nabla u_h - u_h \mathbf{B} \cdot \nabla w_h] dx \\ &\quad + \frac{1 + \sigma \delta_h}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma^-} u_h w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1 - \sigma \delta_h}{2} \int_{\Gamma^-} u_h w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dx. \\ \ell_h(w_h) &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x})(\delta_h \mathbf{B} \cdot \nabla w_h + w_h) - \int_{\Gamma^-} \alpha_0 w_h (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dx. \end{aligned}$$

Here, δ_h is a small positive parameter. One can prove (see [109]) that the problem (\mathcal{P}_h) has a unique solution $u_h \in W_h$ when $\delta_h \sigma < 1$. Moreover, if $\delta_h = ch$ for some constant c and if $\vec{B} \in L^\infty(\Omega)^3 \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$ and $u \in H^{\ell+1}(\Omega)$ for some $\ell \geq 1$, then

$$(1 - \delta_h \sigma) \| \|u - u_h\| \| \leq Ch^{\ell+1/2} \|u\|_{H^{\ell+1}(\Omega)}, \quad (4.29)$$

where $\| \|w\| \|_{\Omega}^2 = \delta_h \| \vec{B} \cdot \nabla w \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \| |\vec{B} \cdot \vec{n}|^{1/2} w \|_{L^2(\partial\Omega)}^2$.

4.3 The curl-div system

Now, we interest in the approximation of (4.26). In [109], we have proved that (4.26) can be dispatched into a variational problem on \mathbf{b} and a fictuous unknown $\theta = 0$ and a Laplace problem of the form (4.24) on q . Let us interest in the discretization of the *curl* – *div* system. Let X_h be a finite-dimensional subspace of $H(\mathbf{rot}; \Omega)$, M_h a finite-dimensional subspace of M defined by

$$M = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v dx = 0 \right\}.$$

Introduce the space

$$V_h = \{\mathbf{w}_h \in X_h, (\mathbf{w}_h, \nabla \mu_h) = 0, \forall \mu_h \in M_h\}.$$

Assume that

$$(\mathcal{H}_1) \quad \{\nabla \mu_h, \mu_h \in M_h\} \subset X_h,$$

and that there exists a constant $C > 0$, independent of h such as :

$$(\mathcal{H}_2) \quad \|\mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{curl} \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega}, \forall \mathbf{w}_h \in V_h.$$

Consider the problem

$$(\mathcal{Q}_h) \quad \begin{cases} \text{Find } (\mathbf{b}_h, \theta_h) \in X_h \times M_h \text{ such as} \\ \forall \mathbf{w}_h \in X_h, \int_{\Omega} \mathbf{curl} \mathbf{b}_h \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w}_h dx + \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \nabla \theta_h dx = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{w}_h dx, \\ \forall \mu_h \in M_h, \int_{\Omega} \mathbf{b}_h \cdot \nabla \mu_h = 0 \end{cases}$$

It can be proved (see Amrouche and *al.* [86]) the following assertion.

Proposition 3. *The problem (\mathcal{Q}_h) has a single solution (\mathbf{b}_h, θ_h) . Furthermore, $\theta_h = 0$ and,*

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_h\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} \leq C \inf_{\mathbf{w}_h \in X_h} \|\mathbf{b} - \mathbf{w}_h\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)}. \quad (4.30)$$

where the constant C does not depend on h .

To construct X_h and M_h , we choose to use the usual $H(\mathbf{curl})$ finite element introduced by Nédelec (see [140]) and

$$M_h = \{\mu_h \in H^1(\Omega), \mu_h|_K \in \mathbb{P}_\ell, \forall K \in \tau_h, \text{ and } \int_{\Omega} \mu_h = 0\}.$$

which satisfy the two assumptions (\mathcal{H}_1) and (\mathcal{H}_2) (see, e. g., [119]). We get the following error estimation

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_h\|_{H(\mathbf{rot}; \Omega)} \leq Ch^\ell \{|\mathbf{v}|_{\ell, \Omega} + |\mathbf{v}|_{\ell+1, \Omega}\}, \text{ for all } \mathbf{v} \in H^{\ell+1}(\Omega).$$

We can also prove

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_h\|_V \leq Ch^\ell \{|\mathbf{u}|_{\ell, \Omega} + |\mathbf{u}|_{\ell+1, \Omega}\}, \quad (4.31)$$

for $\mathbf{b} \in H^{\ell+1}(\Omega)$.

An important remark enables us to reduce the size of the matricial system. Let $N_1 = \dim X_h$ and $N_2 = \dim M_h$. Consider a basis $(\boldsymbol{\omega}_i)_{1 \leq i \leq N_1}$ of X_h and a basis $(\chi_i)_{1 \leq i \leq N_2}$ of M_h . Let (\mathbf{b}_h, θ_h) be solution of the problem (\mathcal{Q}_h) . Setting $\mathbf{b}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x})$ and

$\theta_h = \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i \chi_i(\mathbf{x})$, the matricial form of (\mathcal{Q}_h) can be written into the form

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

where $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_1}$ and $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq N_2, 1 \leq j \leq N_1}$ are the matrices defined as

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_j dx, \quad 1 \leq i, j \leq N_1, \\ b_{ij} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \nabla \chi_j dx, \quad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2, \end{aligned}$$

$C = (c_1, \dots, c_{N_1})^T$ is the vector whose components are

$$c_i = \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_i dx, \quad 1 \leq i \leq N_1.$$

and $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1})^T$ and $Y = (\beta_1, \dots, \beta_{N_2})^T$ are the unknowns. As θ_h is *a priori* known to be zero, only the vector field \mathbf{b}_h is unknown. This yields to the following lemma

Lemma 4.1. *Let Λ be a square positive, definite and symmetric of size $N_2 \times N_2$. Then, the pair (X, Y) is solution of the system (4.32) if and only if $Y = 0$ and X is solution of symmetric, definite and positive system*

$$(A + B^T \Lambda B)X = C. \quad (4.33)$$

The proof of this theorem can be found in [109].

Remark 4.1. *Note that this lemma is only true in the particular case of the problem (4.26). We can not affirm in general that solving a system of the form (4.32) can resume to find X solution of (4.33).*

5 Computational results.

In this section, we display some three-dimensional results obtained with our three-dimensional code. The magnetostatic solver contained in this code has been implemented following the iterative method and the finite element methods proposed respectively in Section 3 and Section 4. First tests are used to show the convergence of the method and its efficiency by comparing an exact and the numerical solution obtained in cylindrical geometries. In second tests, we compare solutions obtained by our code and by the CHEASE code on toroidal equilibria. Results concerning the convergence of the finite elements method, the interested reader can refer to [109]. Nédelec' edge elements of degree $\ell = 1$ are used for solving the div-curl problem on \mathbf{B} . The hyperbolic problems on p and μ are solved by means of P^1 conforming elements (see, e. g., Ciarlet [113]).

5.1 The convergence of the iterative algorithm

Denote by (ρ, θ, z) the usual cylindrical coordinates. Consider the cylindrical tube of height $Z_{\max} = 3.5$, and of radius $\rho_{\max} = a$ of conducting fluid.

Let \mathbf{j} be the current circulating in the fluid defined by

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B'_z(\rho) \\ B'_\theta(\rho) + \frac{1}{\rho} \mathbf{B}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \rho < a.$$

where B_θ and B_z are two functions depending on ρ . This current induces a magnetic field in the plasma. This magnetic field writes

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\theta(\rho) \\ B_z(\rho) \end{pmatrix}, \quad \rho < a.$$

Then,

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -B'_z B_z - B'_\theta B_\theta - \frac{1}{\rho} B_\theta^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho < a.$$

Choosing

$$p = p_0 - \frac{1}{2} B_\theta^2 - \frac{1}{2} B_z^2 - \int_0^\rho \frac{B_\theta^2}{2},$$

where p_0 is constant, (\mathbf{B}, p) is solution of the system (4.3-4.4) (see [146]). In the sequel, we take B_θ of the form $B_\theta = \rho^r$, $r \in \mathbb{N}$, and $B_z = c + \rho^2$ where c is constant. Magnetic field lines form helixes and live on isosurfaces which are nothing else than stacked cylinders. In this tests, we choose $a = 0.5$, $p_0 = 1.5$ and $c = 1$.

Table 5.1 present the rates of convergence of (p_n, \mathbf{B}_n) versus the number of iterations in norm L^2 . The residual difference used is defined by

$$\frac{\|(\mathbf{B}_{n+1}, p_{n+1}) - (\mathbf{B}_n, p_n)\|_{L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)}}{\|(\mathbf{B}_n, p_n)\|_{L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)}}.$$

n	$\frac{\ \mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_n\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathbf{B}_n\ _{L^2(\Omega)}}$	$\frac{\ p_{n+1} - p_n\ _{L^2(\Omega)}}{\ p_n\ _{L^2(\Omega)}}$
1	0.184553	.
2	0.030994	0.026036
3	0.007020	0.012767
4	0.001745	0.002332
5	0.000697	0.001182
6	0.000501	0.001357
7	0.000299	0.000511
8	0.000181	0.000490
9	9.050e-05	0.000165
10	4.475e-05	0.000116
11	1.947e-05	3.820e-05
12	9.311e-06	2.075e-05
13	3.259e-06	6.695e-06

Table 4.1: Evolution of $\frac{\|\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{B}_n\|_{L^2(\Omega)}}$ and $\frac{\|p_{n+1} - p_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|p_n\|_{L^2(\Omega)}}$ versus the number of iteration.

In Table 4.2, we display the relative errors between the exact solution (\mathbf{B}, p) and the numerical solution (\mathbf{B}_h, p_h) in several norms. Table 4.2 shows the decrease of the relative errors $\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_h\|_{L^2(\Omega)}$, $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ and $\|p - p_h\|_{L^\infty(\Omega)}$ as h , $h^{1.9}$ and $h^{1.8}$ respectively.

h	$\ \mathbf{B} - \mathbf{B}_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _\infty$
	$\ \mathbf{B}\ _{L^2}$	$\ p\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p\ _\infty$
0.145403	0.015375	0.003183	0.0153765
0.089667	0.009456	0.001119	0.005806
0.064768	0.006812	0.000647	0.003471
0.050668	0.005321	0.000425	0.002381

Table 4.2: The $H(\mathbf{curl})$ and L^2 errors on \mathbf{B} and the L^∞ error on λ versus the discretization h .

In figure Fig.4.2 and 4.3, we present some visualisations of the exact and the numerical solutions in the case $c = 0.6$. It shows the quite good agreements of the results.

Figure 4.2: Magnetic field lines of the exact solution (on the left) and the numerical solution (on the right).

5.2 Test in toroidal geometry

Our aim in that section is to test our method on toroidal MHD equilibria. This is done by comparing our results with the ones obtained with the CHEASE code (see [139]) including a Grad-Shafranov solver.

We propose two tests. The first one is done in a torus with circular section whereas in the second one the section is not circular. We solve the magnetostatic system on an half torus to have a simply-connected domain. The magnetic field normal component is everywhere equal to zero except on the two sections of the torus where the magnetic field normal component is given by CHEASE. The pressure and the current density normal component are given on the section corresponding to Γ^- .

In figures Fig.4.4, we display the safety factor profile in the first case at $z = 0$ versus the radius R . The safety factor, generally noted q , is a function depending on the flux function presented in the introduction. This factor, related to the plasma stability and to

Figure 4.3: Cut of the pressure profile on $\Omega \cap \{x \leq 0\}$. The exact solution is present on the left and the numerical one on the right.

the field lines topology, measures the ratio between the lap number done by a field line in the toroidal and poloidal directions. q is defined has follow

$$q(\Psi) = \frac{G(\Psi)}{2\pi} \oint_{\Psi=const} \frac{dl}{R|\nabla R|}.$$

The mesh used for this test was composed of 428064 tetraedra, with a mesh size $h = 0.039$. The relative errors between the CHEASE solution and ours are equal to 0.009 for the magnetic field and 0.005 for the pressure in norm L^2 . Figure Fig.4.5 represents the pressure profile given by CHEASE and the one obtained with our method versus the radius R at $z = 0$.

In figures Fig.4.6, we present a general plot of the solution obtain with our code. We plot three isobars on which lie magnetic field lines. Isobars, whic are magnetic surfaces, form stacked torus. We do not present visualisations of CHEASE solution because the plot would be exactly the same as the one shown in figure Fig.4.6.

As in the last case, in figure Fig.4.7 displays the safety factor for the non-circular case. Here, the solution is computed on a domain with 428064 with a mesh size $h = 0.0606$. The relative difference between our solution and CHEASE one is equal to 0.011 for \mathbf{B} and 0.006 for p . The pressure profil of the CHEASE solution and ours are plotted in figure Fig.4.8 on the left. On the right of the same figure, we show a cut of the pressure at $\Phi = constant$. The pressure profile presente on the left has be readed along the whitth line of the left figure.

In figure Fig.4.9, on the right we show some stacked magnetic surfaces corresponding to different values of p . On the left, we present field lines coiling up the magnetic surface associated to the isobar $p = 0.021$. In this case, the solution is computed in part of torus for which the angle Φ (see figure Fig.4.1) varies from 0 to $2\pi - \varepsilon$ where ε is a small real positive parameter ($\varepsilon = 1e - 9$). A visualisation to the field lines in the “full” torus is presented in figure Fig.4.10.

Figure 4.4: Safety factor profile versus the major radius R .

Figure 4.5: On the left, we display the numerical and CHEASE pressure profiles at $\{z = 0\}$. On the right, a cut of the numerical pressure and the same pressure profile than on the left are presented. The pressure is read along the white line.

Figure 4.6: General visualisation of magnetic field lines, magnetic surfaces and pressure.

Figure 4.7: Safety factor of the non-circular case.

Figure 4.8: Pressure profile along the line $\{z = 0\}$ given by CHEASE and by our method (on the right) and cut of the pressure on our solution on the right.

Figure 4.9: Stacked toroidal magnetic surfaces (on the right) and field lines lying on the magnetic surface corresponding to the isobar $\{p = 0.021\}$

Figure 4.10: Field lines in the full torus.

Chapitre 5

Schémas numériques existants en MHD

Dans ce chapitre, nous proposons quelques rappels sur l'approximation des lois de conservation et sur les schémas existants en magnétohydrodynamique.

1 Approximation des systèmes de lois de conservation

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^p , on s'intéresse dans cette partie, à l'approximation numérique des lois de conservation de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (5.1)$$

où $t > 0$, et $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\rightarrow \Omega$. Les fonctions de flux f_j , $1 \leq j \leq p$, sont régulières de Ω dans \mathbb{R}^p . On note

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Le système (5.1) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.2)$$

où $f_j(\mathbf{u}) = (f_{1j}(\mathbf{u}), \dots, f_{pj}(\mathbf{u}))^T$ appartient à \mathbb{R}^p .

On considère une fonction $\mathbf{u}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$ donnée et on pose

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (5.3)$$

On cherche à résoudre numériquement un problème du type (5.1)+(5.3). Différentes méthodes de résolution existent comme la méthode des différences finies par exemple ou encore la méthode des volumes finis à laquelle nous nous intéressons dans cette partie. La méthode des volumes finis permet d'obtenir des schémas conservatifs permettant d'obtenir

des solutions physiques. On se donne un ensemble de cellules (intervalles, triangles, carrés, tétraèdres, cubes...) notées Ω_i sur lesquels on intègre l'équation (5.1). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i = 0, \quad (5.4)$$

où Γ_i la frontière de la cellule Ω_i et \mathbf{n}_i est la normale unitaire extérieure à Γ_i .

On pose

$$\mathbf{u}_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

En remplaçant $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x})$ par $|\Omega_i| \frac{\partial \mathbf{u}_i(t)}{\partial t}$, (5.4) devient

$$|\Omega_i| \frac{\partial \mathbf{u}_i(t)}{\partial t} + \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0. \quad (5.5)$$

La principale difficulté de cette méthode réside dans l'évaluation des flux numériques donnés par

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_i d\sigma = \sum_{j \text{ voisin de } i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}_{ij} d\sigma. \quad (5.6)$$

où Γ_{ij} est la frontière commune (un noeud en 1D, une arête en 2D et une face en 3D) aux deux éléments voisins Ω_i et Ω_j , et \mathbf{n}_{ij} est la normale unitaire à Γ_{ij} dirigée de Ω_i vers Ω_j . Lorsque le flux numérique, noté $\mathbf{f}^{(num)}$, à travers chacune des faces Γ_{ij} dépend uniquement de états moyens $\mathbf{u}_i(t)$ et $\mathbf{u}_j(t)$, cela donne une approximation du type

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{ij} d\sigma \cong |\Gamma_{ij}| \mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_i(t), \mathbf{u}_j(t), \mathbf{n}_{ij}). \quad (5.7)$$

Le calcul du flux numérique peut faire intervenir un stencil plus grand c'est à dire un plus grand nombre de valeurs \mathbf{u}_i . Il doit vérifier certaines conditions :

– *Conservation* :

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}_{ij}) = -\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i, -\mathbf{n}_{ij})$$

qui traduit le fait que le flux approché à travers la frontière séparant deux cellules Ω_i et Ω_j est le même que celui séparant Ω_j et Ω_i .

– *Consistance* :

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}.$$

D'après le théorème de Lax-Wendroff (voir [31]), dans le cas scalaire, si un schéma de type *volumes finis* conservatif avec un flux numérique $\mathbf{f}^{(num)}$ consistant est associé à une condition initiale

$$u_i^0 = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et une suite δ_k qui tend vers 0 telle que

- $\|u_{\delta_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty])} \leq C$,
- u_{δ_k} converge dans $\mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times [0, \infty])$ partout vers une fonction u ,

alors u est une solution faible de (5.1).

On s'intéresse maintenant au cas de la dimension 1. L'équation (5.1) s'écrit en dimension 1

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.8)$$

On considère les intervalles $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On peut alors écrire le schéma volumes finis sous la forme conservative

$$\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n + \frac{\Delta t}{h_i} (\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n) = 0 \quad (5.9)$$

avec $\mathbf{f}_{i+1/2}^n$ est un flux numérique de la forme $\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$ ou $\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+2})$ par exemple. Le flux $\mathbf{f}^{(num)}$ doit satisfaire la propriété de consistence

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

En 1D, $\mathbf{u}_i(t)$ peut approcher $\mathbf{u}(x_i, t)$ ou $\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t) dx$.

Avant de présenter les principaux schémas existants, on rappelle brièvement quelques résultats concernant la notion d'entropie discrète. Pour plus de détails sur cette notion peuvent être trouvés dans [68], [30] ou [31].

On suppose qu'il existe une fonction d'entropie convexe $U(\mathbf{u})$. On définit les variables entropiques

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} U(\mathbf{u}).$$

On peut écrire le système (5.8) sous la forme symétrique

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{g}(\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{v}))$$

où les matrices Jacobiennes H et G de $\mathbf{u}(\mathbf{v})$ et de $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ vérifient

$$H(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = H^T(\mathbf{v}) \text{ et } G(\mathbf{v}) = \mathbf{g}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = G^T(\mathbf{v}).$$

La fonction d'entropie $U(\mathbf{u})$ vérifie

$$U_{\mathbf{u}\mathbf{u}} A(\mathbf{u}) = ((U_{\mathbf{u}\mathbf{u}})A(\mathbf{u}))^T, \text{ où } A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$$

si et seulement s'il existe un flux d'entropie $F = F(\mathbf{u})$ tel que

$$U_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = F_{\mathbf{u}}^T.$$

D'un point de vue discret, on considère le schéma conservatif semi-discret de la forme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_i(t) = -\frac{1}{h_i} [\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}], \quad (5.10)$$

où $\mathbf{u}_i(t)$ représente la solution discrète sur le maillage (x_i, t) et $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$ est un flux numérique consistant qui s'écrit sous la forme

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{u}_{i+p}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

On considère une paire d'entropie (U, F) . On dit que le schéma (5.10) est entropiquement stable respectivement à cette paire s'il satisfait l'inégalité

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{u}_i(t)) + \frac{1}{h_i}[F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}] \leq 0. \quad (5.11)$$

$F_{i+\frac{1}{2}}$ est le flux numérique entropique consistant associé à F

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(\mathbf{u}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{u}_{i+p}), \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = F(\mathbf{u}).$$

Si on a l'égalité dans (5.11), le schéma conserve l'entropie.

Lorsqu'on passe à l'étude de schémas discrets (et non plus semi-discrets), l'entropie n'est généralement pas conservée (hormis dans le cas des schémas en temps de Crank-Nicolson). Le schéma d'Euler implicite, responsable d'une augmentation de la dissipation d'entropie est entropiquement stable. Le schéma d'Euler explicite produit de l'entropie ce qui a pour conséquence l'obligation de trouver un équilibre entre la production d'entropie temporelle et la dissipation entropique due à la discrétisation spatiale. Pour plus de détails et de propriétés sur la notion d'entropie discrète, le lecteur intéressé pour lire [68].

On distingue en général deux types de schémas : les schémas centrés et décentrés. On note h le pas d'espace, Δt le pas de temps, et on pose $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$.

Schémas centrés type différences finies

On s'intéresse aux schémas de type centrés, simples à implémenter.

Schéma de Lax-Friedrichs

Ce schéma est donné par

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i+1}^n + \mathbf{u}_{i-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)).$$

Dans ce cas le flux numérique $g^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})) - \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$. Ce schéma est d'ordre 1. Ce schéma est stable sous la condition de stabilité, appelé condition CFL,

$$\lambda \max_u |\mathbf{f}'(\mathbf{u})| \leq 1.$$

Schéma de Lax-Wendroff

Basé sur un développement de Taylor en temps à l'ordre 2, le schéma de Lax-Wendroff s'écrit

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)) + \frac{\lambda^2}{2}[\mathbf{A}_{i+1/2}^n(\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)) - \mathbf{A}_{i-1/2}^n(\mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n))]$$

où $\mathbf{A}_{j+1/2}^n$ est la matrice Jacobienne de \mathbf{f} évaluée à un état moyen

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^n = \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1}^n + \mathbf{u}_i^n}{2}\right).$$

Dans ce cas le flux numérique $g^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est donné par

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})) - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right)(\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})).$$

La matrice $\mathbf{A}_{j+1/2}^n$ peut être définie par $\mathbf{A}_{j+1/2}^n = \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1}^n, \mathbf{u}_i^n)$ où la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de taille $p \times p$ satisfait

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}). \end{cases}$$

Le flux numérique est alors donné par

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})) - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Le schéma de Lax-Wendroff est d'ordre 2 en espace et en temps.

Une façon d'éviter l'utilisation de la matrice \mathbf{A} a été proposée par Richtmyer et consiste à utiliser un schéma de type prédicteur-correcteur

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n) - \frac{\lambda}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)], \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^n - \lambda[\mathbf{f}(\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1/2})]. \end{aligned}$$

Une autre méthode du même type a été proposée par MacCormack. Le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^n - \lambda[\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)] \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^*) - \frac{\lambda}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_i^*) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^*)]. \end{aligned}$$

Les schémas de type Lax-Friedrichs et Lax-Wendroff sont simples, robustes, mais à forte dissipation se traduisant par un étalement de discontinuités. Le schéma de Lax-wendroff peut également osciller à proximité des discontinuités (voir par exemple [47]).

Méthodes décentrées ou upwind

L'utilisation d'un flux centré du type

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}))$$

ou

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right)$$

donne des solutions oscillantes et parfois des résultats inacceptables.

Une idée pour remédier à ce problème consiste à décentrer le schéma en utilisant le sens de propagation de ondes. Ceci est relativement simple à faire lorsque les vitesses de propagations sont toutes de mêmes signes. Lorsque les sens de propagations sont différents, il est plus difficile de construire un tel schéma. Les flux recherchés s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})}{2} + \mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (5.12)$$

où $\mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est un terme de décentrage ou de viscosité numérique qui doit satisfaire $\mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Parmi les schémas *upwind* les plus célèbres, on peut citer les schémas suivants.

Schéma de Godunov

Le schéma de Godunov consiste à résoudre à chaque interface un problème de Riemann sur un intervalle de temps suffisamment court. Soit $(\mathbf{u}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ une approximation de $\mathbf{u}(\cdot, t^n)$. Le schéma est constitué de 3 étapes :

1. On associe à $(\mathbf{u}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ une fonction constante par morceaux $\mathbf{u}_\Delta(\cdot, t^n)$ telle que

$$\mathbf{u}_\Delta(\cdot, t^n) = \mathbf{u}_i^n \text{ si } x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}.$$

2. On résout le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{u}_\Delta(\cdot, t^n). \end{cases} \quad (5.13)$$

3. On projette la solution $\mathbf{w}(\cdot, \Delta t)$ sur l'espace des fonctions constantes par morceaux, c'est à dire

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x, \Delta t) dx. \quad (5.14)$$

La résolution du problème (5.13) se ramène à la résolution d'une juxtaposition de problème de Riemann à chaque interface $x_{i+1/2}$ sous réserve que la condition CFL

$$\lambda \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda_k(\mathbf{u}_i^n)| \leq \frac{1}{2}$$

soit satisfaite afin que les ondes issues des points $x_{i+1/2}$ et $x_{i-1/2}$ n'interagissent pas. La solution \mathbf{w} est donnée par

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_R\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n\right), \quad (5.15)$$

où \mathbf{w}_R est la solution du problème de Riemann dont les états constants sont \mathbf{u}_j^n et \mathbf{u}_{j+1}^n . On peut montrer facilement que le schéma de Godunov s'écrit

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \lambda [\mathbf{f}(\mathbf{w}_R(0, \mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_R(0, \mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n))],$$

et que son flux numérique est donné par

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_R(0, \mathbf{u}, \mathbf{v})).$$

Le schéma de Godunov est d'ordre 1 et il est particulièrement efficace et robuste pour des problèmes de chocs. Il est à la base de nombreux schémas en hydrodynamique ou en magnétohydrodynamique comme on pourra le voir dans la suite. Le principal inconvénient du schéma de Godunov est qu'il utilise les solutions exactes des problèmes de Riemann qui peuvent s'avérer difficiles et coûteux à résoudre. Par exemple en MHD, sous certaines conditions, il n'y a pas unicité de la solution du problème de Riemann (voir [72]). Afin de simplifier cette étape, de nombreux solveurs de Riemann approchés ont été développés comme par exemple le schéma de Roe ([62]), le schéma HLL ([36]), le schéma de Van Leer ([78]) peut être vu comme une généralisation du schéma de Godunov à l'ordre 2.

Schéma de Roe

La méthode de Roe consiste à linéariser localement le flux en résolvant à chaque pas de temps un problème de Riemann approché du type

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_{i+1/2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (5.16)$$

et

$$\mathbf{u}(x, t_n) = \begin{cases} \mathbf{u}_i^n, & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ \mathbf{u}_{i+1}^n, & \text{si } x > x_{i+1/2}, \end{cases} \quad (5.17)$$

de façon à ce que les différences de flux soient conservées dans chaque cellule. On pose $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i)$. La matrice de Roe $\mathbf{A}_{i+1/2}$ doit vérifier

1. $\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i = \mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)$ pour tout \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_{i+1} dans \mathbb{R}^p ,
2. Les valeurs propres de $\mathbf{A}_{i+1/2}$ sont toutes réels et $\mathbf{A}_{i+1/2}$ a un ensemble complet de vecteurs propres,
3. $\mathbf{A}_{i+1/2}(\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_i) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_0)$ lorsque $\mathbf{u}_{i+1} \rightarrow \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_0$.

Chaque problème (5.16)-(5.17) est résolu par un schéma de la forme (5.9) où les flux $\mathbf{f}_{i+1/2}^{(num)}$ sont donnés par

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^{(num)} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1/2}) - \frac{1}{2} \sum_k |\lambda_{i+1/2}^k| \eta_{i+1/2}^k \mathbf{R}_{i+1/2}^k$$

où $\lambda_{i+1/2}^k$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}_{i+1/2}$, $\eta_{i+1/2}^k = \mathbf{L}_{i+1/2}^k \cdot \Delta \mathbf{u}$ et $\mathbf{R}_{i+1/2}^k$ et $\mathbf{L}_{i+1/2}^k$ sont respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice de Roe.

Le principal défaut de la méthode de Roe est qu'elle peut donner des solutions numériques qui sont des solutions faibles non entropiques (voir [68], [31]) lorsque une valeur propre s'approche de 0 (points soniques). Des corrections d'entropie ont été proposées. Par exemple, dans [34], Harten propose de rajouter de la viscosité numérique dans le flux du schéma de Roe en modifiant les valeurs propres de la matrice au voisinage des points soniques. Il n'est pas toujours facile de calculer une matrice de Roe. De coutume, on cherche une matrice égale à la jacobienne du système calculée en un état moyen, de façon à garder les mêmes valeurs propres et vecteurs propres, mais cela n'est pas toujours possible.

Schéma HLL

Le schéma HLL, introduit par Lax, Harten et van Leer dans [36], consiste à approcher les solutions des problèmes de Riemann du schéma de Godunov par des solutions composées de seulement un état intermédiaire constant. Si on note V_L et V_R les vitesses d'ondes les plus rapides à gauche et à droite, la solution approchée du problème de Riemann est donnée par

$$\mathbf{u}_{HLL} = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } V_L > 0, \\ \mathbf{u}_m & \text{si } V_L \leq 0 \leq V_R, \\ \mathbf{u}_R & \text{si } V_R < 0. \end{cases}$$

où \mathbf{u}_m est l'état intermédiaire donné par

$$\mathbf{u}_m = \frac{V_R \mathbf{u}_R - V_L \mathbf{u}_L - (\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L)}{V_R - V_L},$$

où $\mathbf{f}_L = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L)$ et $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)$. Le flux numérique est donné par

$$\mathbf{f}^{(num)} = \begin{cases} \mathbf{f}_L & \text{si } V_L > 0, \\ \mathbf{f}_m & \text{si } V_L \leq 0 \leq V_R, \\ \mathbf{f}_R & \text{si } V_R < 0. \end{cases}$$

avec $\mathbf{f}_m = \frac{V_R \mathbf{f}_L - V_L \mathbf{f}_R - V_L V_R (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)}{V_R - V_L}$. Différentes manières de calculer V_L et V_R ont été proposées dans la littérature (voir par exemple [22, 26, 55]). Le schéma est robuste et entropique.

Schéma de Van Leer

Le schéma de Van Leer est une généralisation du schéma de Godunov à l'ordre 2 qui se décompose en 3 étapes

1. Reconstruction :

Cette étape consiste à construire une fonction $\tilde{\mathbf{u}}$ linéaire par morceaux à partir des solutions \mathbf{u}_i^n moyennisées sur chaque cellules.

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_i^n + \frac{\mathbf{s}_i^n}{h} (x - x_i), \quad x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$$

où \mathbf{s}_i^n est la pente de la droite pouvant être calculée de différentes manières (voir [31]).

2. On résout le problème de Riemann généralisé (la donnée initiale n'est plus constituée de deux états constants mais de deux états linéaires)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}(x, 0) = \tilde{\mathbf{u}}^n(x), \end{cases}$$

dont la solution est notée $\mathbf{w}(\cdot, \Delta t)$.

3. On calcule la solution au temps t^{n+1} par

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x, \Delta t).$$

En utilisant un schéma prédicteur-correcteur, il est possible de remplacer la résolution d'un problème de Riemann généralisé par celle d'un problème de Riemann classique (voir [31]). Le correcteur s'écrit sous la forme d'un schéma de Godunov.

Schémas TVD

Certains schémas d'ordres élevés peuvent conduire à l'apparition d'oscillations de la solution au niveau des discontinuités. Afin de limiter ces oscillations, Harten (voir [34]) introduit la notion de schémas à *variation totale décroissante* ou TVD (Total Variation Diminishing) dans le cas des équations non linéaires scalaires. Cette notion est en pratique utilisée dans le cadre des systèmes de loi de conservation.

Définition 1.1. Dans le cas scalaire, la variation totale décroissante de u solution de (5.1) au temps t , notée $TV(u, t)$ est définie par

$$TV(u, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + \tau, t) - u(x, t)| dx.$$

On dit que u vérifie la propriété TVD si pour $t_2 \leq t_1$,

$$TV(u, t_2) \leq TV(u, t_1).$$

On peut définir cette notion d'un point de vue discret.

Définition 1.2. La variation totale discrète de la solution discrète (u_i^n) au temps t_n , notée $TV(u^n)$, est définie par

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

La solution discrète (u_i^n) vérifie la propriété TVD discrète si

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),$$

pour deux instants t^n et t^{n+1} .

Définition 1.3. Un schéma est dit TVD si la solution obtenue vérifie la propriété TVD.

Définition 1.4. Un schéma est dit monotone si pour deux suites $u^n = (u_j^n)$ et $v^n = (v_j^n)$ au temps t_n

$$u^n \geq v^n \Rightarrow u^{n+1} \geq v^{n+1}$$

où $u \geq v$ signifie que pour tout j , $u_j \geq v_j$.

La propriété TVD d'un schéma assure sa monotonie dans le sens où il transforme une suite monotone en une suite monotone. Le schéma ne produit pas d'oscillations, et peut être d'ordre élevé. Cette notion s'étend mal aux dimensions supérieures.

Schémas ENO et WENO

Dans le but des schémas d'ordres élevés même au niveau des discontinuités, Harten et al dans [35], ont introduit les schémas ENO (*Essentially Non-Oscillatory*). La principale idée de ce type de schémas est d'utiliser le stencil le plus régulier parmi plusieurs afin d'approcher les flux par une interpolation polynomiale au bord des cellules à un ordre élevé et en même temps d'éviter les oscillations au niveau des discontinuités.

Alors que les schémas ENO sélectionnent un stencil particulier dans le calcul du flux, les schémas WENO calculent le flux comme une moyenne pondérée des flux calculés aux différents stencils possibles. Les poids sont ajustés en fonction de la régularité de la solution de façon que les stencils pour lesquelles la solution n'est pas régulière aient un poids nul. Les schémas WENO se comporte alors comme les schémas ENO au niveau des discontinuités (voir [51],[40]).

2 Cas multidimensionnel

Certains schémas permettant de résoudre le système (5.1) peuvent être étendus au cas multidimensionnel ($d \geq 2$). C'est notamment le cas du schéma de Lax Friedrich ou de Lax Wendroff.

Une autre façon de résoudre un problème de lois de conservation en dimension multiple sur des maillages cartésiens consiste à décomposer le problème dans chacune des directions x , y , et z en 3D et se ramener ainsi à la résolution de problèmes 1D. La solution multidimensionnelle est alors reconstruite à l'aide d'un opérateur dit de *splitting*.

Enfin, d'autres schémas du type schéma de Roe peuvent être étendus au cas multidimensionnel via la méthode des volumes finis.

Comme dans le cas 1D, il est également intéressant de pouvoir construire des schémas d'ordres élevés (au moins 2). Une façon d'obtenir de tels schémas consiste à utiliser la méthode MUSCL (*monotonic upstream schemes for conservation laws*) introduite par Van Leer. On a vu que dans le cas des volumes finis, le flux s'écrit sous la forme

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{n}_{ij})$$

où \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_j sont des états constants de part et d'autre de la frontière Γ_{ij} commune aux cellules C_i et C_j . Dans l'approche MUSCL, le flux est remplacé par un flux du type

$$\mathbf{f}^{(num)}(\mathbf{u}_{ij}, \mathbf{u}_{ji}, \mathbf{n}_{ij})$$

où \mathbf{u}_{ij} et \mathbf{u}_{ji} sont des approximations d'ordres 2 de la solution de chaque côté de la frontière Γ_{ij} . Ces approximations d'ordre 2 sont calculées en suivant les 3 étapes suivantes

1. Prédiction du gradient $\nabla \mathbf{u}_i = (\nabla_x \mathbf{u}_i, \nabla_y \mathbf{u}_i)$ en 2D.
2. Extrapolation linéaire définissant les valeurs \mathbf{u}_{ij} et \mathbf{u}_{ji} de chaque côté de Γ_{ij} .
3. Procédure de limitation. Cette étape a pour but de limiter la pente du gradient qui, si elle est trop importante, peut créer des oscillations dans le schéma. Cette procédure qui consiste à multiplier le gradient par une matrice diagonale corrige l'extrapolation obtenue à l'étape précédente.

Les schémas ENO et WENO peuvent également être étendus au cas multidimensionnel.

Nous n'avons présenté qu'une partie infime des schémas existants. Tous les décrire serait trop long, voir impossible. En effet, un grand travail de développement de schémas robustes donnant des solutions entropiques et d'ordre au moins égale à 2 a été réalisé durant ces dernières années aussi bien en hydrodynamique qu'en magnétohydrodynamique, en 1D ou en multiD.

3 Cas des équations de la MHD.

Durant ces dernières années les équations de la magnétohydrodynamique ont suscité un grand intérêt. De nombreux travaux portant sur l'approximation numérique de ces équations ont débuté notamment dans les années 80 aussi bien dans le cas de la dimension 1 que dans des domaines multidimensionnels (2D et 3D).

On rappelle que le système de la magnétohydrodynamique idéale s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mu^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} + p \right) I \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} \\ \left(E + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mu^{-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

Ce système est complété avec l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.19)$$

En dimension 1, le système (5.18) se réduit à

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (5.20)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ E \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p^* - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \\ (E + p) v_x - B_x (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

où p^* et E^* sont la pression totale et l'énergie totale définies par

$$p^* = p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2$$

et

$$E = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2.$$

Notons qu'en dimension 1, l'égalité (5.19) en dimension 1 s'écrit $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ c'est à dire que $B_x = \text{constante}$. B_x est considéré comme connu et n'apparaît pas dans le vecteur des inconnues (5.21).

Les équations de la MHD sont bien plus compliquées que les équations de l'hydrodynamique. Elles forment un système non-strictement hyperbolique (dans certains cas, certaines valeurs propres peuvent être égales), non-convexe (certains champs caractéristiques pouvant être ni vraiment non linéaire, ni linéairement non dégénéré) (voir [13], [38], [63]).

Cette complexité a pour conséquence l'existence d'ondes et de chocs (appelés chocs intermédiaires) non-réguliers. Il donne également des critères que doit vérifier la conditions initiale du problème de Riemann afin d'avoir unicité de la solution. Ces critères permettent d'éviter l'apparition de solutions non-régulières. Dans [71], Torrilhon étudie le comportement de différents schémas numériques sur des problèmes de Riemann avec des conditions initiales proches de celles pour lesquelles il n'y a pas unicité. Il met en évidence que tous les schémas convergent vers une mauvaise solution sauf pour des maillages très fin. Ce phénomène, appelé convergence non-uniforme, peut être limité, selon l'auteur, en minimisant la diffusion numérique. Dans [74], Torrilhon et *al* utilisent des schémas d'ordres élevés (de type WENO d'ordres 5 et 9). Ils observent le même type de comportement des solutions numériques. Cependant, la convergence vers la bonne solution numérique est obtenue avec un maillage moins fin que dans le cas des schémas d'ordre 2.

De nombreux schémas mono et multi-dimensionnels ont été développés afin de tenter de résoudre numériquement les équations de la magnétohydrodynamique. Dans le cas 1D, de nombreux solveurs de Riemann approchés ont été écrits dans le but de concevoir des schémas de type Godunov robustes, et adaptés à la résolution de problèmes faisant intervenir des chocs. Dai et Woodward ont proposé plusieurs schémas 1D et multiD, basés sur des solveurs de Riemann approchés dans [79], [17], [18], [20], [19]. Les solveurs utilisés sont essentiellement basés sur des décompositions de caractéristiques. Dans [17], [20] et [19], les auteurs utilisent une méthode de splitting, conçue pour des maillage cartésiens, pour passer d'un schéma 1D à un schéma multidimensionnel. Cette méthode consiste à décomposer le problème multidimensionnel en plusieurs problèmes 1D. Chaque problème 1D est associé à une direction et les dérivées dans les autres directions sont supposées nulles. Cette technique s'écrit sous la forme

$$\mathbf{U}_{i,j,k}(2\Delta t) = L_{\Delta t}^x L_{\Delta t}^y L_{\Delta t}^z L_{\Delta t}^z L_{\Delta t}^y L_{\Delta t}^x \mathbf{U}_{i,j,k}(0).$$

$L_{\Delta t}^x$ est un opérateur 1D dans la direction x avec le pas de temps Δt . Les flux à travers les interfaces pour les problèmes 1D sont calculés à l'aide d'un solveur de Riemann approché proposé par les mêmes auteurs dans [18] et dans [20]. Dans [64], les auteurs proposent un solveur de Riemann non linéaire proche de celui proposé par Dai et Woodward dans [17]. L'idée du solveur est de reconstruire la solution du problème de Riemann à partir des états constants initiaux et des conditions de sauts à travers un processus itératif.

Dans [13], Brio et Wu proposent un schéma de Roe d'ordre 2. Ils construisent une matrice de Roe dans le cas d'un gaz polytropique avec $\gamma = 2$. La matrice de Roe proposée est la jacobienne du système MHD calculée à un état moyen dépendant de deux états constants $\mathbf{V}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ où les $\mathbf{V}_{i+1/2}$ vérifient

1. $\mathbf{V}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_i) = \mathbf{V}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$,
2. $\mathbf{V}_{i+1/2}$ continue et $\mathbf{V}_{i+1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{U}$,
3. $\mathbf{V}_{i+1/2}$ est tel que les valeurs propres de $\mathbf{A}(\mathbf{V}_{i+1/2})$ soient réelles.

et tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{A}(\mathbf{V}_{i+1/2})(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i). \quad (5.23)$$

Dans le cas $\gamma = 2$, Brio et Wu obtiennent

$$\mathbf{V}_{i+1/2}(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = (\underline{\rho}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{B}_y, \underline{B}_z, \overline{H}^*)$$

où $H^* = \frac{(E + p^*)}{\rho}$, $p^* = p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2$, $\mathbf{U}_l = \mathbf{U}_i$, $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_{i+1}$, $\bar{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_l}\xi_l + \sqrt{\rho_r}\xi_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}$ et $\xi = \frac{\sqrt{\rho_l}\xi_r + \sqrt{\rho_r}\xi_l}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}$.

Dans le cas $\gamma \neq 2$, la matrice $\mathbf{A}_{i+1/2}$ est égale à la jacobienne calculée à un état moyen satisfaisant les propriétés de $\mathbf{V}_{i+1/2}$ mais ne vérifiant pas forcément la condition

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{A}(\mathbf{V}_{i+1/2})(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i).$$

Le schéma ainsi construit permet d'obtenir une bonne résolution des discontinuités. Les auteurs mettent aussi en évidence la non-convexité des équations de la MHD en montrant que certains champs caractéristiques ne peuvent être ni linéairement dégénérés, ni vraiment non-linéaires. Ceci a pour conséquence la complexité des ondes MHD. Brio et Wu illustrent leur propos par la mise en évidence de l'existence d'une onde composée constituée d'un choc rattaché à une onde de raréfaction de la même famille. Ils proposent également une renormalisation des vecteurs propres à droite de la jacobienne du système, ceux-ci n'étant pas bien définis dans certains cas (voir aussi [63]). Dans [15], Cargo et Gallice proposent de calculer une matrice de Roe pour la MHD, valable pour n'importe quelle valeur de γ , égale à celle obtenue par Brio et Wu dans le cas $\gamma = 2$. Ils écrivent que le saut de la pression magnétique entre deux états ne dépend pas uniquement de la moyenne sur \mathbf{B} mais aussi des variations de chacune des composantes conservatives. Ils montrent que le saut de la pression magnétique s'écrit sous la forme

$$\frac{\Delta|\mathbf{B}|^2}{2} = X\Delta\rho + \underline{\mathbf{B}}.\Delta\mathbf{B}$$

où $\Delta\xi = \xi_l - \xi_r$, ξ_l et ξ_r représentant un état à gauche et ξ_l un état à droite. La scalaire X est défini par $X = \frac{(\Delta\mathbf{B})^2}{2(\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r})^2}$. Dans [58], les auteurs utilisent la matrice de Roe de Cargo et Gallice afin de construire un schéma en dimension 2. Ils utilisent la méthode MUSCL et un schéma explicite du type Runge-Kutta afin d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps et en espace, ainsi que la correction d'entropie d'Harten ([34]) permettant d'écartier les chocs violant les conditions d'entropie pouvant apparaître dans schémas de Roe. Dans [59], les auteurs proposent une famille de problèmes de Riemann approchés linéarisés afin de construire des schémas de Roe. Cette famille dépend de plusieurs paramètres et conserve les relations de discontinuités. D'autres auteurs ont aussi utilisé des schémas de Roe (voir [60], [61], [63], [65], [5], [53]...).

Dans [49] et [32], les auteurs utilisent un schéma de type HLL. Plus précisément, ils utilisent un schéma connu sous le nom de HLLC, dans lequel le problème de Riemann approché ne contient pas un état intermédiaire mais 2. Il permet de capturer les discontinuités de contact. Le schéma est adapté à la MHD. Les schémas de type HLL, bien qu'un peu moins précis et plus diffusifs que le schéma de Roe, présentent l'avantage de ne pas nécessiter de décomposition de valeurs et vecteurs propres, et d'être positifs. Janhunen ([37]) utilise un solveur de Roe qu'il remplace par un solveur HLL lorsque la décomposition de Roe est en passe de violer les conditions d'entropie. La méthode utilise un schéma de Roe dans les parties où il ne risque pas de donner une pression négative. Un schéma HLL est également utilisé dans [53]. Un schéma contenant 4 états constants, capable de capturer toutes les discontinuités est proposé dans [55]. La précision du schéma est proche de celle d'un schéma de Roe avec l'avantage d'être positif.

Dans [9], Barmin et *al* proposent un schéma 1D prédictor correcteur, vérifiant la propriété TVD, de type Lax-Friedrichs d'ordre 2. Le schéma ne nécessite que le calcul du

rayon spectral de la matrice Jacobienne du flux. L'étape de reconstruction de la solution aux interfaces des cellules utilise les limiteurs de pente permettant d'empêcher le schéma d'osciller à proximité des discontinuités. Les auteurs proposent aussi une discussion sur les ondes non évolutives. Ils émettent l'idée que l'apparition de telles ondes peut être liée à la réduction de la dimension du problème changeant les caractéristiques du problème. Ryu et *al* proposent dans [64] un schéma 1D d'ordre 2 basé sur le schéma TVD introduit par Harten dans [34]. Ce schéma est étendu au cas multidimensionnel dans [65] et [66]. Dans [65], l'extension se fait par une méthode *splitting* et la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ est maintenue par une procédure de projection effectuée après chaque pas de temps (voir Section 3). Dans [66], les variables hydrodynamiques sont calculées par une méthode de *splitting*. Le champ magnétique est obtenu par une méthode appelée *constrained transport* présentée dans la Section 3. Un autre schéma de type TVD est également testé par Tóth dans [76] où il est comparé au schéma de Lax-Friedrichs et à deux schémas de type FCT. Dans les méthodes FCT, dont le but était principalement de construire un schéma maintenant la positivité de l'énergie dans les équations de l'hydrodynamique, une diffusion numérique importante est ajoutée au schéma, garantissant la positivité de la solution. Cette diffusion excessive est corrigée par un flux anti-diffusif dans un schéma prédicteur-correcteur (voir [11], et [25] pour la MHD). Les schémas testés ont des performances similaires chacun ayant ses avantages et ses inconvénients en fonction des tests effectués.

Dans [42], les auteurs utilisent un schéma du type WENO d'ordre 5 avec un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4 en temps. Les auteurs mettent également en avant la nécessité de maintenir la condition (5.19) numériquement.

La procédure du schéma WENO de reconstruction d'une solution constante par morceau en une solution polynomiale par morceau est utilisée par différents auteurs ([14], [2], [4], [3], [81]) dans des schémas centrés d'ordres r élevés. Ce type de schémas, ne nécessitant pas de résoudre un problème de Riemann, se décompose en deux étapes. La première consiste à reconstruire une solution polynomiale par morceaux non oscillante, d'ordre r , conservant la valeur moyenne sur chaque cellule, en utilisant la procédure des schémas WENO. La solution est alors calculée au pas de temps suivant en utilisant un maillage décalé. Les flux ne font intervenir que des intégrations régulières et peuvent être approchés par des formules de quadrature. Ce schéma s'étend au cas multidimensionnel (voir [41], [56] par exemple).

Dans le cas multidimensionnel, plusieurs schémas de type Godunov, n'utilisant pas de méthode de *splitting* ont été proposés, comme le schéma d'ordre 2 développé par Crockett et *al* dans [16]. Le schéma est de type prédicteur-correcteur. Il utilise des solveurs de Riemann afin de calculer les flux aux interfaces des cellules. On peut également citer les travaux de Gardiner et *al.* dans [29], ou encore de Londrillo et *al.* [52]...

Maintien de la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

Dans l'étude multidimensionnelle des équations de la MHD l'équation (5.19) apparaît comme une contrainte supplémentaire. Si on réécrit l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) = 0$$

sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (5.24)$$

on voit immédiatement que

$$\frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{B})}{\partial t} = 0$$

et donc $\operatorname{div} \mathbf{B}$ est constant en temps. Le maintien de cette contrainte au cours du temps d'un point de vue numérique n'est généralement pas satisfait par un schéma de type *volumes finis* ou bien *différences finies* même si le schéma utilisé est conservatif. Dans la littérature actuelle, une des principales préoccupations est de construire des schémas multidimensionnels satisfaisant (5.19) numériquement le plus précisément possible. En effet, la violation de cette contrainte peut mener à des solutions non-physiques comme cela a pu être montré par Brackbill et Barnes dans [12]. Les auteurs ont mis en évidence que dans le cas où $\operatorname{div} \mathbf{B} \neq 0$, la force de Lorentz et le champ magnétique ne sont pas orthogonaux. Plusieurs approches ont été proposées afin de maintenir une divergence nulle au moins aux erreurs machines près. La première consiste à écrire le champ magnétique sous la forme d'un potentiel vecteur \mathbf{A} (voir [27])

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

et d'utiliser le potentiel vecteur à la place du champ magnétique. Avec cette écriture, l'ordre des dérivées spatiales est augmenté d'une unité, et l'ordre de précision diminué d'autant. De plus le système ne s'écrit plus sous forme conservative, comme il l'était avec \mathbf{B} . Ainsi cette approche n'est pas ou que très peu utilisée. Une autre approche consiste à projeter la solution sur l'espace des fonctions à divergence nulle après chaque pas de temps (voir par exemple [4],[16],[69] ou [65]). Pour cela, on décompose le champ magnétique \mathbf{B}^* obtenu par un schéma quelconque à un pas donné

$$\mathbf{B}^* = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \nabla \Psi.$$

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation ci-dessus, on obtient

$$\Delta \Psi = \operatorname{div} \mathbf{B}^*.$$

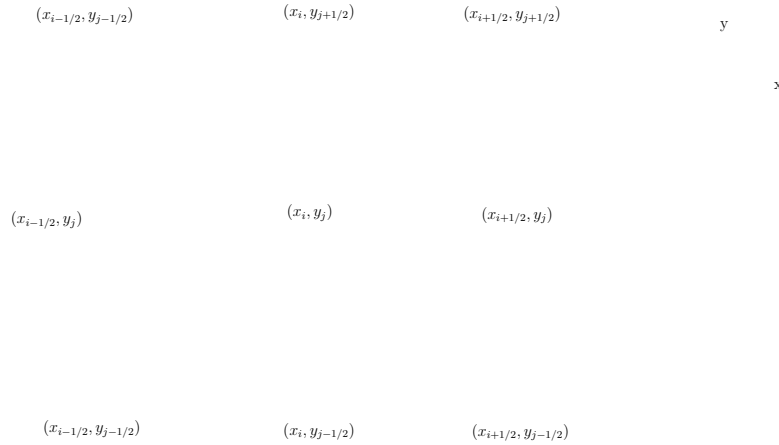
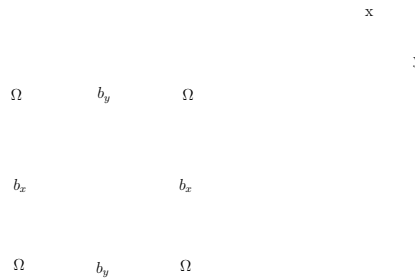
Le champ magnétique est ensuite calculé en rajoutant une correction

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla \Psi.$$

Le champ \mathbf{B}^{n+1} vérifie bien la condition (5.19). Le fait de devoir résoudre un problème de Poisson à chaque pas de temps apparaît comme un inconvénient car cette méthode proposée augmente considérablement le temps de calcul. La divergence du champ magnétique est corrigée à une précision égale à celle du solveur de Poisson d'après [77]. Le schéma est plus robuste que le schéma de base.

Un autre approche proposée par Powell dans [60] consiste réécrire les équations de la MHD sans tenir compte de la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Il modifie en réalité le système MHD écrit en utilisant les variables primitives $\mathbf{W} = (\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}, p)$ et propose une façon de supprimer la valeur propre égale à 0. Il obtient alors le système non-conservatif

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}) \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u} \\ (E + p + \frac{B^2}{2}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{B}$$

FIG. 5.1 – Notations utilisées dans la cellule $C_{i,j}$.FIG. 5.2 – Placement du champ magnétique \mathbf{b} et de la composante z du champ électrique Ω en 2D.

ayant huit valeurs propres, la huitième étant associée à la propagation de $\text{div } \mathbf{B}$. Le système associé est appelé '8-wave formulation' en anglais. Le solveur de Riemann associé à cette formulation s'avère être robuste, la divergence de champ magnétique reste petite et la conservation des quantités n'est pas trop détériorée d'après l'article comparatif de Tóth [77]. Cependant, Tóth montre également que lorsque le problème étudié contient des chocs importants, la nouvelle formulation peut fournir des solutions contenant des conditions de sauts incorrects.

Une autre méthode, appelée '*Constrained Method (CT)*', introduite par Evans et Hawley dans [27] utilise un maillage décalé cartésien (voir Figure 5.1) afin de maintenir la condition (5.19) en différences finies. Cette méthode a suscité un véritable engouement et a été reprise dans un très grand nombre de schémas (par exemple [53], [29], [8], [6], [7], [20], [19], [2], [77], [49], [23]...)

Contrairement aux schémas s'inspirant de l'hydrodynamique, le champ magnétique est calculé aux interfaces des cellules et non au centre comme c'est le cas pour les autres va-

riables ρ , $\rho \mathbf{u}$ et E .

Nous détailler un peu ce schéma car il est assez proche de celui que nous allons proposer. Pour éviter toute confusion dans la suite, on notera par \mathbf{b} le champ magnétique décalé (calculé aux interfaces de cellules) et \mathbf{B} le champ magnétique centré. \mathbf{B} peut aussi représenter la valeur moyenne du champ magnétique sur la cellule et \mathbf{b} la valeur moyenne du champ magnétique sur l'interface (voir Figure 5.2). Dans un premier temps on se restreint au cas 2D pour plus de clarté dans les notations. Cette méthode s'étend immédiatement à la 3D en rajoutant la direction z . La composante b^x du champ magnétique dans la direction x est placée au point $(x_{i+1/2}, y_j)$ et la composante dans la direction y notée b^y est placée au point $(x_i, y_{j+1/2})$. En 3D, les composantes du champ magnétiques seront placées aux centres des faces. On note Ω la composante dans la direction z du champ électrique $E = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Ω est calculé aux sommets des cellules $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ (en 3D, on calcule la composante appropriée du champ électrique sur chaque arête des cellules). L'équation d'induction (5.24) est discrétisée en différences finies par

$$b_{i+1/2,j}^{x,n+1} = b_{i+1/2,j}^{x,n} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (5.25)$$

$$b_{i,j+1/2}^{y,n+1} = b_{i,j+1/2}^{y,n} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} \quad (5.26)$$

où $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$, et Δt est le pas de temps. On discrétise l'opérateur divergence par

$$(\mathbf{div} \mathbf{b})_{i,j} = \frac{b_{i+1/2,j}^x - b_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} + \frac{b_{i,j+1/2}^y - b_{i,j-1/2}^y}{\Delta y} \quad (5.27)$$

Il est facile de montrer que si $\mathbf{div} \mathbf{b}^n = 0$ alors $\mathbf{div} \mathbf{b}^{n+1} = 0$. La divergence est conservée à chaque pas de temps.

La méthode CT est reprise notamment par Dai et Woodward dans [20] et [19]. Les auteurs calculent tout d'abord les différentes variables MHD au centre des mailles grâce à un opérateur de splitting (voir Section 3). Les solutions aux centres des mailles respectent le caractère conservatif de la MHD mais malheureusement le champ magnétique n'est pas à divergence nulle. Pour cela, les auteurs proposent un moyen de calculer le champ magnétique aux interfaces des cellules afin de maintenir la condition (5.19) en reprenant la méthode CT. Dans le cas 3D, le champ magnétique aux interfaces est obtenu en intégrant les équations de B_x , B_y , et B_z respectivement sur les interfaces $x = x_{i-1/2}$, $y = y_{j-1/2}$ et $z = z_{k-1/2}$ sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$ et est donné par

$$\begin{aligned} b_{i-1/2,j,k}^x(\Delta t) &= b_{i-1/2,j,k}^x(0) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta y} [\bar{E}_{z_{k-1/2}}(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}) - \bar{E}_{z_{k-1/2}}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})] \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta z} [\bar{E}_{y_{j-1/2}}(x_{i-1/2}, z_{j+1/2}) - \bar{E}_{y_{j-1/2}}(x_{i-1/2}, z_{j-1/2})], \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} b_{i,j-1/2,k}^y(\Delta t) &= b_{i,j-1/2,k}^y(0) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta z} [\bar{E}_{x_{i-1/2}}(y_{i-1/2}, z_{j+1/2}) - \bar{E}_{x_{i-1/2}}(y_{i-1/2}, z_{j-1/2})] \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{E}_{z_{k-1/2}}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}) - \bar{E}_{z_{k-1/2}}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})], \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
b_{i,j,k-1/2}^z(\Delta t) &= b_{i,j,k-1/2}^z(0) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{E}_{x_{i-1/2}}(x_{i+1/2}, z_{j-1/2}) - \bar{E}_{x_{i-1/2}}(x_{i-1/2}, z_{j-1/2})] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta z} [\bar{E}_{y_{j-1/2}}(y_{i+1/2}, z_{j-1/2}) - \bar{E}_{y_{j-1/2}}(y_{i-1/2}, z_{j-1/2})],
\end{aligned} \tag{5.30}$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{x_{i-1/2}}(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}) &= \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} E_x(x, y_{j-1/2}, z_{k-1/2}) dx dt, \\
\bar{E}_{y_{j-1/2}}(x_{i-1/2}, z_{k-1/2}) &= \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_0^{\Delta t} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} E_y(x_{i-1/2}, y, z_{k-1/2}) dy dt, \\
\bar{E}_{z_{k-1/2}}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}) &= \frac{1}{\Delta t \Delta z} \int_0^{\Delta t} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} E_z(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z) dz dt,
\end{aligned}$$

(On rappelle que $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.)

On note \mathbf{u} le vecteur contenant les variables hydrodynamiques $(\rho, \rho \mathbf{v}, e)$. En pratique, les formules \bar{E}_{xi} , \bar{E}_{yj} , et \bar{E}_{zk} sont approchées par

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{x_{i-1/2}} &\approx E_x[\tilde{\mathbf{u}}_{i-1/2}^*(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}), \tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}^*(y_{j-1/2}, z_{k-1/2})] \\
\bar{E}_{y_{i-1/2}} &\approx E_y[\tilde{\mathbf{u}}_{j-1/2}^*(x_{i-1/2}, z_{k-1/2}), \tilde{\mathbf{B}}_{j-1/2}^*(x_{i-1/2}, z_{k-1/2})] \\
\bar{E}_{z_{i-1/2}} &\approx E_z[\tilde{\mathbf{u}}_{k-1/2}^*(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}), \tilde{\mathbf{B}}_{k-1/2}^*(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})]
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}^*(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}) &= \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}, \Delta t) + \tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}, 0)], \\
\tilde{\mathbf{B}}_{j-1/2}^*(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}) &= \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{B}}_{j-1/2}(x_{i-1/2}, z_{k-1/2}, \Delta t) + \tilde{\mathbf{B}}_{j-1/2}(x_{i-1/2}, z_{k-1/2}, 0)], \\
\tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}^*(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}) &= \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, \Delta t) + \tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, 0)],
\end{aligned}$$

et où $\tilde{\mathbf{B}}_{i-1/2}(y_{j-1/2}, z_{k-1/2}, \Delta t)$ est la moyenne de $\mathbf{B}(\Delta t)$ le long de l'intervalle $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$, $y = y_{j-1/2}$, $z = z_{k-1/2}$. Les valeurs de $\tilde{\mathbf{u}}^*$ sont calculées de façon similaire. Ce schéma conserve bien la divergence discrète (5.27) étendue à la dimension 3. La moyenne du champ magnétique sur la cellule est recalculée par la formule d'interpolation

$$\begin{aligned}
B_{xi,j,k} &= \frac{1}{2} (b_{x_{i+1/2},j,k} + b_{x_{i-1/2},j,k}) \\
B_{yi,j,k} &= \frac{1}{2} (b_{y_{i,j+1/2},k} + b_{y_{i,j-1/2},k}) \\
B_{zi,j,k} &= \frac{1}{2} (b_{z_{i,j,k+1/2}} + b_{z_{i,j,k-1/2}})
\end{aligned}$$

En dimension 2, le schéma de Dai et Woodward se ramène à calculer le champ électrique aux sommets des cellules. Ce calcul est effectué en interpolant les valeurs du champ magnétique au centre des 4 cellules ayant le sommet en question en commun au pas de temps

t_n et les valeurs du champ magnétique toujours dans ces 4 cellules au pas de temps t_{n+1} calculées à l'aide du solveur de Riemann évoqué précédemment.

Dans [8], Balsara et Spicer reprennent aussi une méthode de type CT. L'idée principale de leur méthode est que les variations du champ \mathbf{B} sur une face de cube n'est rien d'autre que la circulation du champ électrique. La divergence est maintenue nulle aux erreurs machine près. Dans [7], Balsara propose un nouveau schéma légèrement modifié pour des maillage carthésien mais extensible pour des mailles tétraédriques. Une comparaison de la méthode de Balsara et Spicer [8] et celle de Balsara [7] effectuée par Li dans [49] montre que la différence en terme de précision entre les deux méthodes n'est pas significative.

Dans [77], Tóth propose une interprétation en terme de volumes finis de la méthode CT. Il montre qu'il est possible de se débarrasser des variables \mathbf{b} aux interfaces et de ne se servir que \mathbf{B} le champ magnétique moyen sur la cellule en augmentant le stencil du schéma afin de maintenir une divergence nulle discrétisée aux sommets des carrés (en 2D). Tóth propose également un nouveau schéma consistant à calculer le champ électrique au centre des mailles. Si le champ électrique au centre d'une maille est noté $\mathbf{E}_{i,j}$, il utilise la discrétisation

$$\mathbf{B}_{i,j}^{x,n+1} = \mathbf{B}_{i,j}^{x,n} - \Delta t \frac{\mathbf{E}_{i,j+1} - \mathbf{E}_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\mathbf{B}_{i,j}^{y,n+1} = \mathbf{B}_{i,j}^{y,n} + \Delta t \frac{\mathbf{E}_{i+1,j} - \mathbf{E}_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

pour calculer le champ magnétique. En définissant la divergence discrète par

$$(\operatorname{div} \mathbf{B})_{i,j} = \frac{\mathbf{B}_{i+1,j}^x - \mathbf{B}_{i-1,j}^x}{2\Delta x} + \frac{\mathbf{B}_{i,j+1}^y - \mathbf{B}_{i,j-1}^y}{2\Delta y}$$

alors la contrainte (5.19) est conservée au cours du temps. Dans les schémas présentés, pour des plasmas à β faible, il arrive que l'énergie devienne négative. Balsara et Spicer proposent dans [8] de résoudre ce problème en corrigeant l'énergie en lui ajoutant la différence entre la pression magnétique obtenu sur le maillage décallé et celle obtenu par le schéma de base. Dans [77], Tóth présente un comparatif de différentes méthodes permettant de maintenir la divergence nulle. Il compare la méthode de Powell, la méthode de projection et la méthode CT sur une série de tests 2D. Il en tire les conclusions suivantes :

- La formulation à 8 ondes de Powell est non-conservative et peut dans certain cas donner des solutions avec des sauts incorrects.
- Le schéma de projection est consistant et a le même ordre que le schéma de base même pour les discontinuités.
- Toutes les méthodes peuvent être vues comme des modifications d'un schéma de base.
- Tous les schémas sont d'ordre 2 sur des solutions régulières.
- Le schéma de Powell détériore la conservation alors que les autres restent conservatifs.
- Le schéma de projection conserve la divergence du champ magnétique avec la même précision que celle du solveur de Poisson. La méthode CT et la méthode de Tóth maintiennent la divergence à l'erreur machine.
- Les schémas de base sont moins robustes que les schémas modifiés.
- Le schéma de Dai et Woodward peut produire des oscillations dans certains cas et ainsi dégrader la précision de la solution.
- Le schéma de projection, le schéma de Balsara et Spicer et le schéma de Tóth sont les plus précis pour les tests présentés.

Plus récemment, De Sterck a proposé dans [23] une extension de la méthode CT pour des maillages non-structurés et notamment pour des mailles tétraédriques.

Une autre méthode pour tenter de résoudre le problème du maintien de la contrainte (5.19) a été développée par Dedner et *al.* dans [24]. Ici, les auteurs modifient le système en couplant la contrainte (5.19) aux lois de conservation en introduisant un multiplicateur de Lagrange généralisé. Ils introduisent pour cela une nouvelle variable Φ qui est couplé au système MHD par

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \nabla \Phi = 0 \quad (5.31)$$

$$\mathcal{D}\Phi + \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.32)$$

où \mathcal{D} est un opérateur linéaire. Les auteurs présentent plusieurs choix de \mathcal{D} dont celui correspondant au schéma de projection.

Enfin, toujours pour maintenir un champ magnétique à divergence nulle Torrilhon et *al.* ont proposé dans [75], [73] et [39] une autre manière d'imposer directement la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ dans le flux. Contrairement aux autres travaux dans lesquels le champ magnétique est modifié pour obtenir une divergence nulle, ils proposent de redistribuer les flux afin de maintenir cette condition.

Récemment, dans le but d'utiliser d'effectuer des raffinements de maillage, des méthodes de reconstruction ont été proposées notamment dans [6], [7], [53], [49]. Le but de ces méthodes est de reconstruire des solutions polynomiales par maille et conservant la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ numériquement sur des maillages cartésiens. Dans [7], Balsara donne des détails pour reconstruire le champ magnétique dans le cas de maillages tétraédriques. De plus, avec cette méthode de reconstruction, Balsara propose d'utiliser des schémas en temps d'ordre 2, 3 ou supérieur du type Runge-Kutta tout en maintenant la condition sur la divergence du champ magnétique.

Discrétisation temporelle

Dans ce qui précède les schémas cités s'intéressaient particulièrement à la discrétisation spatiale des équations et au maintien de la contrainte (5.19). La discrétisation en temps doit également être prise en compte dans la conception d'un schéma. En effet, les phénomènes physiques décrits par les équations de la MHD sont soumis à une évolution lente sur des échelles de temps longues. Avant d'arriver à des phases physiquement intéressante, il est généralement nécessaire d'atteindre des temps de l'ordre de 100 voir 1000 temps d'Alfvén. L'utilisation de schémas explicites semble peu adaptée à l'étude de tels phénomènes lents. En effet, ces types de schémas sont soumis à la contraignante condition CFL sur les pas de temps imposée par les modes rapides (ondes magnétoacoustiques rapides). Harned et Kerner (voir [33]) ont introduit une classe de schémas semi-implicites plus appropriée. L'équation d'évolution discrétisée pour la vitesse est écrite sous la forme

$$(I - L)(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n)/\Delta t = \mathbf{F}(\mathbf{v}^n, \mathbf{b}^n, p^n, \rho^n)$$

. L'opérateur L est introduit comme opérateur de stabilisation numérique et permet l'accès à des pas de temps plus grands. De façon générale Lerbinger et Luciani (voir [46]) (dans le cadre de la fusion contrôlée) et Amari et *al.* (voir [1]) choisissent l'opérateur elliptique anisotrope $L = c_\Delta \Delta + c_{L_0} L_0$ où Δ est le laplacien et L_0 est l'opérateur MHD linéarisé

autour d'un équilibre introduit au chapitre 2. La conséquence est que dans la phase linéaire le schéma est purement implicite (donc inconditionnellement stable) et semi-implicite au cours de la phase non linéaire entraînant alors une stabilité conditionnelle. Un point essentiel est le critère de choix de c_Δ qui est étroitement lié à la résolution spatiale. Tous les auteurs cités précédemment qui utilisent un schéma semi-implicite choisissent le schéma correspondant au cas $L = c_\Delta \Delta$, opérateur complètement isotrope dont le rôle peu sélectif est d'amortir tous les modes de façon "isotrope", les modes rapides gênant (car correspondant à des oscillations rapides mais stables) mais aussi les autres modes utiles. Ainsi, pour permettre une avance avec des pas de temps élevés ces auteurs utilisent des valeurs importantes de c_Δ qui représente un obstacle à l'obtention d'une bonne résolution spatiale dans la phase non linéaire. Avec le choix plus général de L dans Lerbinger et Luciani (voir [46]) et Amari et al (voir [1]), c_Δ est choisi dès le départ pour donner une bonne résolution spatiale. Un effort considérable doit cependant être réalisé du point de vue de l'algèbre linéaire pour obtenir un gain implicite/explicite en temps calcul machine, considérable. Cette approche est développée tant pour les cas $2D + 1/2$ que $3D$.

Chapitre 6

De nouveaux schémas tridimensionnels pour les équations de la MHD idéale

Dans les parties précédentes, nous avons présenté quelques propriétés des équations de la magnétohydrodynamique, quelques aspects théoriques de l'approximation des lois de conservation hyperboliques, ainsi qu'un récapitulatif de schémas déjà développés en MHD. La plupart des schémas MHD existant dans la littérature ont été écrits sur des maillages structurés. Bien qu'attractifs par leur simplicité d'utilisation, ce type de maillage a pour principal inconvénient de ne pas permettre de mailler facilement des géométries de type sphère, tore, cylindre, ou des géométries plus complexes. De plus la quasi totalité de codes disponibles sont mono ou bidimensionnels et rarement tridimensionnels. En MHD, les maillages non structurés semblent être peu utilisés. Ici, nous proposons et nous implantons un nouveau schéma conduisant à une divergence exactement nulle numériquement. Son idée principale repose sur la modification du flux obtenu avec un schéma de type Roe, et cela afin de maintenir exactement la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Ce schéma est mis en oeuvre dans un code 3D appelé TETRAMHD. Nous montrons l'efficacité et la performance numérique de notre code à travers divers tests.

Deux autres méthodes reposant sur une correction du champ magnétique à chaque pas de temps sont aussi proposées ici. Toutefois, elles ne sont pas implantées numériquement.

1 Les schémas proposés

Soit Ω un polyèdre de \mathbb{R}^3 borné et (\mathcal{T}_h) une famille de triangulations vérifiant les hypothèses classiques de régularité. Les approches *volumes finis* proposées ici consistent à utiliser un solveur de Riemann 1D approché pour calculer les flux numériques à travers chaque face du maillage. Notons que la possibilité d'utiliser un tel solveur 1D est due au fait que les équations de la MHD sont invariantes par rotation. Ainsi, le flux à travers chaque face se ramène au calcul d'une solution d'un problème de Riemann approché obtenu par projection des équations MHD dans la direction normale \mathbf{n} à la face. Plus précisément, soit K un élément quelconque du maillage et ∂K le bord de K . On note K_f le voisin de K à travers la face f et $\mathbf{n}_{K,f}$ la normale à la face f dirigée de K vers K_f (voir figure Fig 6.1). On considère le repère orthonormé direct $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ où $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ sont deux tangentes

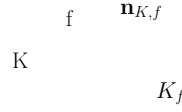


FIG. 6.1 – Représentation d'un élément K et de son voisin K_f ayant en commun la face f .

à la face vérifiant $\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_1$. En supposant U constant dans chacun des éléments K , le système à résoudre à chaque face s'écrit

$$\frac{\partial U_{\mathbf{n}}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\mathbf{n}}(U_{\mathbf{n}})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (6.1)$$

où

$$U_{\mathbf{n}} = (\rho, \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_2, E)^T, \quad (6.2)$$

et

$$F_{\mathbf{n}}(U_{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})^2 \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \\ (E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Dans ce cas, la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ s'écrit

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0.$$

On pose

$$U_K^n = \frac{1}{|K|} \int_K U_h(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}$$

où $|K|$ est la mesure de l'élément K , $U_h(\mathbf{x}, t^n)$ est la solution approchée du système MHD au temps t^n et

$$U_K^n = (\rho_K^n, \rho u_K^n, \rho v_K^n, \rho w_K^n, B_{x,K}^n, B_{y,K}^n, B_{z,K}^n, E_K^n)^T.$$

Dans l'approche volumes finis, la solution au temps t^{n+1} est donnée par

$$U_K^{n+1} = U_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{f \in \partial K} \Phi(U_K^n, U_{K_f^n}, \mathbf{n}_{K,f}) |f| \quad (6.4)$$

où Φ est le flux numérique dans la direction de la normale $\mathbf{n}_{K,f}$.

Montrons maintenant comment effectuer la rotation pour se ramener aux composantes multidimensionnelles. On note respectivement R la matrice orthogonale de rotation transformant le repère $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ en la base canonique du repère cartésien usuel de \mathbb{R}^3 . Les

lignes de R sont données par vecteurs lignes $\mathbf{n}_{K,f}^T$, $\boldsymbol{\tau}_1^T$ et $\boldsymbol{\tau}_2^T$. Les colonnes de R^{-1} sont les vecteurs colonnes $\mathbf{n}_{K,f}$, $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$.

Afin d'expliciter les flux calculés à travers chaque face, on introduit l'application

$$\Psi_f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$$

agissant sur les variables conservatives MHD qui exprime les variables MHD dans le repère local $(\mathbf{n}_1, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ et qui place la composante normale de \mathbf{B} en dernière position. L'application Ψ_f est définie par

$$\Psi_f(U) = \Psi_f \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \\ \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \\ \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \\ \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \\ E \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note S la projection canonique de \mathbb{R}^8 dans \mathbb{R}^7 . Le système (6.4) s'écrit alors

$$U_K^{n+1} = U_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{f \in \partial K} \Psi_f^{-1}[\Phi(S \circ \Psi_f(\mathbf{U}_K^n), S \circ \Psi_f(\mathbf{U}_{K_f}^n))] |f| \quad (6.5)$$

Les flux sont donc calculés à partir de flux 1D. En pratique, nous proposons d'utiliser un solveur de Roe dont nous rappelons brièvement les principaux aspects dans la section suivante. Un schéma de type HLL proposé par Miyoshi et Kusano dans [55] a également été testé.

Les deux premières méthodes que nous proposons ici consistent à corriger le champ magnétique obtenu à chaque pas de temps, après calcul des flux, et cela afin qu'il soit exactement à divergence nulle. Autrement dit, il s'agit de méthodes de type prédicteur-correcteur. L'avancement de toutes les variables MHD se résume dans les trois cas aux étapes suivantes à chaque pas de temps.

1. **Étape 1 :** Avancement des variables hydrodynamiques et calcul du champ magnétique intermédiaire.

Dans cette première étape, l'objectif est d'avancer en temps les variables hydrodynamiques par le solveur de Roe, expliqué dans un paragraphe ci-dessous. Ainsi, partant du vecteur initial U_K^n au pas de temps n , on calcule tout d'abord un état intermédiaire

$$U_K^{n+1/2} = U_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{f \in \partial K} \Phi(U_K^n, U_{K_f}^n, \mathbf{n}_{K,f}) |f| \quad (6.6)$$

Les variables hydrodynamiques au pas de temps $n+1$ sont alors extraites directement de $U_K^{n+1/2}$. Uniquement le champ magnétique $\mathbf{B}^{n+1/2}$ nécessite une correction afin qu'il devienne à divergence nulle.

2. **Étape 2 :** Avancement du champ magnétique.

Soit L_h un sous espace de dimension finie de $L^2(\Omega)$. Dans deux des trois méthodes

proposées ici \mathbf{B}^{n+1} est calculé en corrigeant $\mathbf{B}^{n+1/2}$ directement. Ainsi, le champ \mathbf{B}_h^{n+1} s'écrit sous la forme

$$\mathbf{B}^{n+1} = C_h \mathbf{B}^{n+1/2},$$

où C_h est un opérateur discret de $(L_h)^3$ dans $W_h^0 = (L_h)^3 \cap H(\text{div}; \Omega)$. Notons que W_h^0 n'est rien d'autre que l'espace des fonctions vectorielles constantes par morceaux dont les composantes normales à travers les faces entre les éléments sont continues (les éléments de W_h^0 sont donc à divergence nulle exactement).

La différence entre les deux méthodes se situe au niveau de la façon de construire l'opérateur discret C_h . Détaillons un peu plus cette construction.

Méthode 1 : projection par utilisation du potentiel vecteur. Notons par C l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)^3$ dans $H_{00}(\text{div}; \omega)$. Dans le chapitre 3, on a montré que

$$\forall \mathbf{w} \in L^2(\Omega), C\mathbf{w} = \text{rot}(T\mathbf{w}),$$

où T est l'opérateur qui associe à chaque champ $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^3$ l'unique champ \mathbf{v} de $H(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$ solution vérifiant

$$\forall \mathbf{z} \in H(\text{rot}; \Omega), \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{z} dx = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{z}.$$

Quand \mathbf{w} est à divergence nulle, $\mathbf{v} = T\mathbf{w}$ n'est autre que le potentiel vecteur associé à \mathbf{w} et vérifiant

$$\text{curl } \mathbf{v} = \mathbf{w}, \text{ div } \mathbf{v} = 0 \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Dans le chapitre 3, on a proposé aussi une approximation de l'opérateur T_h en utilisant les éléments H(rot) de Nédélec qui sont affines par morceaux. L'approximation C_h correspondante de l'opérateur C s'écrit

$$C_h \mathbf{w}_h = \text{rot}(T_h \mathbf{w}_h),$$

pour toute fonction $\mathbf{w}_h \in L_h$. Il est évident que $C_h \mathbf{w}_h \in W_h^0$ pour tout $\mathbf{w}_h \in (L_h)^3$. On renvoie au chapitre 3 pour tous les détails de cette approximation.

Méthode 2 : Projection par une formulation mixte hybride. Soit W_h l'espace de dimension finie des fonctions vectorielles affines par morceaux et appartenant à $H(\text{div}; \Omega)$. Cet espace est construit avec les éléments de Raviart-Thomas de plus bas degré

$$W_h = \{q \in W^0(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in RT_0(K)\}.$$

L'idée principale de cette deuxième technique consiste à construire l'opérateur discret de correction C_h en utilisant une approximation mixte hybride comme celle utilisée dans le chapitre 3 pour approcher le champ potentiel.

Soit donc \mathbf{w}_h de $(L_h)^3$. On souhaite ajouter une correction au champ \mathbf{w}_h afin d'obtenir un champ \mathbf{z}_h dans W_h^0 . Par analogie avec l'approximation du champ potentiel dans le chapitre 3, \mathbf{z}_h est solution d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{z}_h, \Phi_h) \in W_h^0 \times L_h^0 \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{q}_h \in W_h^0, \int_{\Omega} \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{q}_h + \int_{\Omega} \Phi_h \text{div } \mathbf{q}_h = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{q}_h, \\ \forall u_h \in L_h^0, \int_{\Omega} u_h \text{div } \mathbf{z}_h = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

où Φ_h est une inconnue discrète appartenant à L_h^0 . Autrement dit, la différence $\mathbf{z}_h - \mathbf{w}_h$ est obtenue à partir de \mathbf{w}_h en résolvant le problème de Poisson $\Delta u = \text{div } \mathbf{w}_h$ discretisé par une méthode mixte. D'un point de vue numérique, ce problème se simplifie énormément une fois réécrit avec une formulation mixte hybride en introduisant des multiplicateurs de Lagrange. Tous les détails concernant cette question ont été présentés dans le chapitre 3. Notons que le champ \mathbf{z}_h ainsi obtenu est à divergence exactement nulle et appartient à l'espace W_h^0 . On montre facilement que $\mathbf{z}_h = \mathbf{w}_h$ si $\text{div } \mathbf{w}_h = 0$.

L'opérateur de correction C_h est celui qui associe à \mathbf{w}_h le champ \mathbf{z}_h . Cette méthode est utilisable uniquement pour des choix de conditions aux limites adéquates sur le champ magnétique.

Dans le code TETRAMHD que nous avons écrit, ces deux méthodes ne sont pas encore implantées en raison des temps de calcul qu'elles nécessitent. En effet, à chaque pas de temps, il est nécessaire d'inverser un grand système linéaire de taille égale au nombre des faces. Toutefois, nous envisageons d'intégrer ces deux méthodes dans ce code très prochainement, après un travail sur le préconditionnement des matrices associés.

Nous privilégierons l'implantation dans TETRAMHD d'une troisième méthode qui ne repose pas sur une correction du champ magnétique, mais plutôt sur celle du flux sur les faces. Son idée principale consiste à modifier le flux correspondant au champ magnétique afin que ce dernier soit à divergence numérique nulle. Nous détaillerons par la suite le calcul de ce flux dans les deux paragraphes qui suivent. A chaque pas de temps, il se décompose en deux étapes : une étape de calcul des flux par un schéma de type Roe permettant d'avancer les variables hydrodynamiques. La deuxième étape consiste à modifier la partie du flux surfacique correspondant au champ magnétique.

1.1 Calcul des variables hydrodynamiques : schéma de Roe 1D

Le principe des schémas de type Roe pour les lois de conservation a été exposé au chapitre 5. Rappelons brièvement les caractéristiques principales de ce type de méthodes. Dans les schémas de Godunov, les flux sont calculés à travers chaque face par la résolution de problème de Riemann, la solution sur la face étant utilisée pour calculer les flux. Les solveurs de Riemann exact sont généralement coûteux. D'autre part, en MHD, le problème de Riemann n'est pas encore bien résolu. L'idée proposée par Roe (voir par exemple [31]) consiste à linéariser le flux se ramenant ainsi à un problème de Riemann. Ceci se ramène à construire une matrice $A(U_L, U_R)$ calculée en un état intermédiaire dépendant des deux états constants U_L et U_R du problème de Riemann. Cette matrice doit être consistante avec la jacobienne du système, posséder des valeurs propres et des vecteurs propres réels, et vérifier la relation

$$F(U_R) - F(U_L) = A(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Dans [13], Brio et Wu proposent une linéarisation de Roe pour les équations de la MHD dans le cas particulier $\gamma = 2$. Dans les cas $\gamma \neq 2$, les auteurs suggèrent de remplacer la matrice de Roe par une jacobienne calculée en un état moyen. Dans Cargo et Gallice, [15], les auteurs construisent une matrice de Roe sans contraintes sur γ qui dépend des deux états. La construction de cette matrice est basée sur l'idée originale consistant à établir une relation entre les sauts de pression magnétique et les sauts de densité. Enfin, dans [59], Pogorelov et Semenov proposent une famille de matrices de Roe dépendant de plusieurs

paramètres. Dans la suite nous rappelons la matrice de Roe construite par Cargo et Gallice que nous utiliserons dans notre schéma.

On introduit les notations

$$\bar{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_l}\xi_l + \sqrt{\rho_r}\xi_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \quad (6.8)$$

et

$$\underline{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_r}\xi_l + \sqrt{\rho_l}\xi_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}. \quad (6.9)$$

On note H l'enthalpie

$$H = \frac{1}{\rho}(E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}),$$

et p^* la pression totale

$$p^* = p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}.$$

On pose

$$X = \frac{(\Delta\mathbf{B})^2}{2(\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r})^2},$$

où

$$\Delta\xi = \xi_r - \xi_l.$$

La matrice de Roe de Cargo et Gallice, que nous choisissons d'utiliser ici, est alors donnée par

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} & \delta_{27} & \\ -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 & -B_x & 0 & 0 & \\ -\bar{u}\bar{w} & \bar{w} & 0 & \bar{u} & 0 & -B_x & 0 & \\ -\frac{B_y}{\bar{u}} + \frac{B_x}{\bar{v}} & \frac{B_y}{\bar{v}} & -\frac{B_x}{\bar{u}} & 0 & \bar{u} & 0 & 0 & \\ -\frac{\rho}{B_z}\bar{u} + \frac{\rho}{B_x}\bar{w} & \frac{\rho}{B_z} & \frac{\rho}{B_x} & -\frac{B_x}{\bar{u}} & 0 & \bar{u} & 0 & \\ \frac{\rho}{\bar{u}} & \frac{\rho}{\bar{v}} & \frac{\rho}{\bar{w}} & \frac{\rho}{\bar{u}} & \frac{\rho}{\bar{u}} & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} \\ \delta_{71} & \delta_{72} & \delta_{73} & \delta_{74} & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} & \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_{21} &= -\bar{u}^2 + (2 - \gamma)X + \frac{\gamma - 1}{2}|\mathbf{u}|^2, \\ \delta_{22} &= 2\bar{u} - (\gamma - 1)\bar{u}, \\ \delta_{23} &= -(\gamma - 1)\bar{v}, \\ \delta_{24} &= -(\gamma - 1)\bar{w}, \\ \delta_{25} &= (2 - \gamma)B_y, \\ \delta_{26} &= (2 - \gamma)B_z, \\ \delta_{27} &= \gamma - 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\delta_{71} &= -\bar{u}\bar{H} + \bar{u}(\delta_{21} + \bar{u}^2) + \frac{B_x}{\rho}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot (\underline{\mathbf{B}}) \\
\delta_{72} &= \bar{H} + \bar{u}(\delta_{22} - 2\bar{u}) - \frac{B_x^2}{\rho} \\
\delta_{73} &= \bar{u}\delta_{23} - \frac{B_x}{\rho}B_y, \\
\delta_{74} &= \bar{u}\delta_{24} - \frac{B_x}{\rho}B_z, \\
\delta_{75} &= \bar{u}\delta_{25} - B_x\bar{v}, \\
\delta_{76} &= \bar{u}\delta_{26} - B_x\bar{w}, \\
\delta_{77} &= \bar{u} + \bar{u}\delta_{27}.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ sont détaillés dans [15].

Les schémas de Roe ont comme principal défaut de pouvoir produire des chocs non entropiques au voisinage des points soniques. Dans [34], Harten propose d'introduire une correction d'entropie qui consiste à ajouter de la viscosité artificielle aux valeurs propres s'approchant de 0. En pratique, si λ est une telle valeur propre, $|\lambda|$ est remplacé par la fonction Ψ vérifiant

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & \text{si } |\lambda| \geq \delta \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{si } |\lambda| < \delta. \end{cases}$$

où $\delta > 0$ est un paramètre ajustant l'amplitude de la viscosité ajoutée. δ est généralement déterminé de manière empirique.

1.2 Maintien de la divergence de \mathbf{B} par modification du flux

Le schéma que nous proposons a pour ambition de satisfaire

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{6.11}$$

Expliquons le calcul de flux dans ce schéma et cela pour un maillage tétraédrique non uniforme. Pour cela, considérons une surface plane S quelconque de normale extérieure notée \mathbf{n} (voir Fig.6.2). En multipliant l'équation d'induction (2.19) par \mathbf{n} , on a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} &= \operatorname{div}_T[(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{n}] \\
&= \operatorname{div}_T[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathbf{u}]
\end{aligned}$$

où div_T est l'opérateur de divergence tangentielle à la face.

En conséquence, on a

$$\frac{\partial \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}}{\partial t} + \operatorname{div}_T[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B}] = 0. \tag{6.12}$$

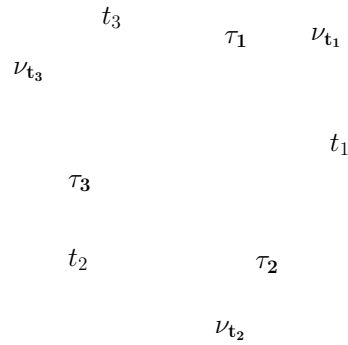
ν_S \mathbf{n} FIG. 6.2 – Surface de \mathbb{R}^3 .

FIG. 6.3 – Exemple de notations sur une face de tétraèdre.

L'équation (6.12) peut ainsi être vue comme une loi de conservation surfacique. En intégrant sur S , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + \int_{\partial S} ((\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\nu}_S = 0, \quad (6.13)$$

où $\boldsymbol{\nu}_S$ est la normale (tangentielle à S) extérieure à ∂S .

Supposons désormais que S est la face d'un tétraèdre T dont les arêtes sont notées t_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors (6.13) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \sum_{t_i \in \partial S, i \in \{1, \dots, 6\}} \int_{t_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{S, t_i} \quad (6.14)$$

où $\boldsymbol{\nu}_{S, t_i}$ est la normale à t_i tangentielle à S (voir Fig.6.3).

Soit $\boldsymbol{\tau}$ un vecteur tangent à l'arête t . On a

$$\boldsymbol{\nu}_{S, t} = \varepsilon_{S, t} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$$

où $\varepsilon_{S, t} \in \{-1, 1\}$. L'équation (6.13) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \sum_{t_i \in \partial S, i \in \{1, \dots, 6\}} \Phi_{t_i}^S \quad (6.15)$$

où

$$\begin{aligned}\Phi_t^S &= \int_t [(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{n}] \cdot \boldsymbol{\nu}_{S,t} dl \\ &= \int_t (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}_{S,t}) dl\end{aligned}$$

Or $\boldsymbol{\nu}_{S,t} \times \mathbf{n} = \varepsilon_{S,t} \boldsymbol{\tau}$, donc

$$\Phi_t^S = \varepsilon_{S,\tau} \int_t [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \cdot \boldsymbol{\tau} dl \quad (6.16)$$

$$= \varepsilon_{S,\tau} \int_t \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} dl. \quad (6.17)$$

Ainsi, le calcul des flux Φ_t^S se ramène au calcul de l'intégrale de la composante tangentielle du champ électrique sur chaque arête.

Soient deux vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 de \mathbb{R}^3 tels que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, alors (6.16) se réécrit

$$\begin{aligned}\Phi_t^S &= \int_t [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) dl \\ &= \left(\int_t u_{n_1} B_{n_2} - u_{n_2} B_{n_1} \right) dl\end{aligned} \quad (6.18)$$

Ainsi le calcul de Φ_t^S ne dépend que des composantes de \mathbf{B} et \mathbf{u} dans les directions \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 . En particulier, si on considère deux faces S et S' du tétraèdre T telles que $S \cap S' = t$, le calcul de Φ_t^S dépend uniquement des composantes normales de \mathbf{B} et \mathbf{u} sur les faces S et S' .

Dans [8], les auteurs mettent en évidence une dualité entre les flux MHD et le champ électrique. Dans notre approche, nous proposons de reprendre cette idée sur des maillages tétraédriques. En intégrant le système (2.32) sur un élément K , on obtient que le flux calculé à travers chaque face S s'écrit

$$\int_S \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{n} = \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}. \quad (6.19)$$

pour les composantes du champ magnétique. Numériquement, au temps n , si on pose $\mathbf{n}_\tau = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, et si on multiplie (6.19) par \mathbf{n}_τ , en vertu de (6.18), comme $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_\tau$ on obtient la composante tangentielle du champ électrique $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}$ définie par

$$\frac{|t|}{|S|} \int_S (\mathbf{F}_{B^n} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_\tau = \frac{|t|}{|S|} \int_S (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}^n \cdot \mathbf{n}_\tau - (\mathbf{B}^n \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}_\tau = - \int_t \mathbf{E}^n \cdot \boldsymbol{\tau} dl.$$

où $|t|$ et $|S|$ représentent respectivement la mesure de l'arête t et de la face S . Il est ainsi possible de calculer une approximation de l'intégrale de la composante tangentielle du champ électrique à partir des flux numériques sur les faces. En pratique, pour une arête t donnée, la composante tangentielle du champ électrique est calculée sur chacune des faces contenant l'arête, puis moyennisée.

La méthode proposée ici permet d'avancer les composantes normales du champ magnétique sur chaque face. Il est nécessaire de connaître le champ magnétique au centre des mailles. Deux approches équivalentes sont possibles. D'après (6.15), les termes $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ calculés sur chaque face du maillage peuvent être vus comme les composantes normales de

la variation par rapport au temps du champ magnétique, qui ne sont rien d'autre que les degrés de liberté des éléments de Raviart-Thomas de bas degrés. Provenant d'un rotationnel, ce champ appartenant à l'espace $H(\text{div}; \Omega)$, est à divergence numériquement nulle. Il peut être ainsi calculé directement au centre de chaque élément. Le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ calculé au centre est alors constant par maille à composantes normales continues à travers les faces des éléments. Le schéma proposé conserve ainsi la divergence du champ magnétique initial. La deuxième approche consiste à voir les composantes tangentielles du champ électrique comme les degrés de liberté des éléments de Nédélec de bas degrés dans $H(\mathbf{rot}; \Omega)$. Il est alors possible d'avancer directement le champ magnétique en temps au centre des mailles en calculant le rotationnel discret de \mathbf{E} . Le champ ainsi obtenu est également à divergence nulle, constant par maille et à composante normale continue à travers les faces des éléments.

2 Résultats numériques du code TETRAMHD

En résumé, le schéma proposé ne nécessite que quelques modifications du schéma de base (ici un schéma de Roe), et l'ajout d'une étape supplémentaire. Cette modification est peu coûteuse en terme de temps de calcul, et elle est relativement simple à mettre en oeuvre. Cette méthode est très facilement adaptable à d'autres discrétisations temporelles et laisse également une grande liberté du choix des solveurs servant à calculer les flux à travers les faces. Le code tridimensionnel TETRAMHD, écrit en C++, permet de traiter différentes géométries.

Dans cette partie, différents tests numériques issus de la littérature sont présentés. Ces résultats ont été obtenus à l'aide de notre code 3D TETRAMHD associé au schéma proposé.

Test 1 : Tube monodimensionnel à choc de Brio et Wu

Ce test standard en MHD, proposé par Brio et Wu ([13]) permet de démontrer la capacité d'un code MHD à capturer des chocs et des discontinuités. On considère l'intervalle 1D $I = [0, 800]$. Ce test consiste à résoudre un problème de Riemann sur I . La condition initiale est donnée par les deux états constants,

$$\begin{cases} U_L = (\rho_L, \rho \mathbf{u}_L, B_{yL}, p_L) = (1, \mathbf{0}, 1, 1) \\ U_R = (\rho_R, \rho \mathbf{u}_R, B_{yR}, p_R) = (0.125, \mathbf{0}, -1, 0.1) \end{cases}$$

avec $B_x = 0.75$, et $B_z = 0$. L'indice γ est choisit égal à 2. Une solution 1D servant de référence est calculée avec le solveur de Roe 1D de Cargo et Gallice (voir [15]). Une solution obtenue avec notre code 3D dans le domaine $[0, 800] \times [0, 4] \times [0, 4]$ est comparée à cette solution de référence. Des conditions aux limites périodiques sont utilisées sur les parois $\{y = 0\}$, $\{y = 4\}$, $\{z = 0\}$ et $\{z = 4\}$.

Dans les figures Fig.6.4 à 6.6, la solution de référence (trait continu rouge) et la solution obtenue par le code 3D (croix bleus) sont concordantes. De la gauche vers la droite, la solution est composée d'une onde de raréfaction rapide, d'une onde composée lente, d'une discontinuité de contact, d'un choc lent et d'une onde de raréfaction rapide. L'onde composée, conséquence de la non-convexité du système MHD idéale (voir [13]) est relativement bien capturée par le schéma proposé.

FIG. 6.4 – Comparaison de la solution 1D de référence avec la solution calculée par le code 3D pour la pression à gauche et la densité à droite en fonction de x à $t = 80$.

FIG. 6.5 – Comparaison de la solution 1D de référence avec la solution calculée par le code 3D pour la première (à gauche) et la deuxième (à droite) composante de la vitesse en fonction de x à $t = 80$.

FIG. 6.6 – Comparaison de la solution 1D de référence avec la solution calculée par le code 3D pour la deuxième composante du champ magnétique en fonction de x à $t = 80$.

Test2 : Problème d'Orszag-Tang

Ce test 2D a été étudié par de nombreux auteurs (voir par exemple [77, 42, 48, 65, 52]) aux échelles de temps et d'espace près. Il permet d'évaluer le comportement d'un code MHD face à la formation de chocs et à leurs interactions. Les conditions initiales du test présenté ici sont

$$\begin{aligned} \rho_0(x, y, z) &= \frac{25}{36\pi}, & u_0(x, y, z) &= \sin(2\pi y), & v_0(x, y, z) &= \sin(2\pi x) \\ p_0(x, y, z) &= \frac{5}{12\pi}, & B_{x0}(x, y, z) &= -\sin(2\pi y), & B_{y0}(x, y, z) &= \sin(4\pi x), \end{aligned}$$

et $\gamma = 5/3$. La solution est calculée dans le domaine $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.06]$ avec une condition CFL de 0.1. Nous utilisons des conditions aux limites périodiques dans toutes les directions.

Dans la figure Fig. 6.7, nous présentons la solution obtenue pour la pression au temps $t = 0.1$ avec un maillage contenant respectivement 64, 64 et 4 noeuds dans les directions e_x , e_y et e_z . Cette solution est comparée à la solution 2D obtenue par Gardiner et Stone ([28]) sur un maillage 2D contenant 512 noeuds dans les directions e_x et e_y par un schéma d'ordre 3. Dans les figures Fig. 6.8 et Fig. 6.9 nous comparons la pression et la pression magnétique obtenues par notre code 3D au temps $t = 0.48$ avec la solution proposée par Ryu et *al* dans [66] qui sert ici de solution de référence. La solution est présentée en noir et blanc afin de faciliter la comparaison. Les profils de pression et de pression magnétique sont représentés le long de la droite $y = 0.4277$. Les profils obtenus par notre code sont globalement concordant avec ceux de Ryu et *al*. Le maillage utilisé pour le calcul de notre solution étant moins fin (90 points en x et en y et 4 en z) que celui de Ryu et *al* (257 points en x et en y), certaines discontinuités ou certains chocs sont un peu atténués par rapport à la solution de référence. Cependant, les solutions obtenues sont également en accord avec les résultats obtenus dans [28] pour des tailles de maillage similaires aux nôtres. Les figures Fig.6.10 et Fig.6.11 représentent des coupes dans le plan $\{z = 0.03\}$ du profil de densité

ainsi que des isocontours de la densité, de la pression et de la pression magnétique. Afin de valider la capacité de notre code à satisfaire numériquement la condition (6.11), nous avons tracé dans la figure Fig.6.12 l'évolution de $\|\text{div } \mathbf{B}\|_{0,\Omega}$ en fonction du temps jusqu'à $t = 0.5$. Bien que la divergence du champ magnétique augmente au cours du temps, elle reste très petite, montrant l'efficacité de la méthode utilisée.

FIG. 6.7 – Pression à $t = 0.1$ obtenue par Gardiner et Stone (source de l'image : <http://www.astro.princeton.edu/~jstone/tests/index.html>) à gauche et par notre code à droite visualisée sur le plan $\{z = 0.03\}$.

Test 3 : advection d'une boucle magnétique

Dans ce problème décrit dans [28], une boucle magnétique est advectée pendant un certain temps, permettant de faire apparaître d'éventuelles oscillations ou un excès de diffusion. Le test est effectué dans le domaine $[-1, 1] \times [-\frac{1}{2 \cos(\pi/6)}, \frac{1}{2 \cos(\pi/6)}]$ avec une condition CFL égale à 0.1. La densité et la pression sont égales à 1, avec $\gamma = 5/3$. La vitesse est donnée par $u = \sin(\pi/3)$ et $v = \cos(\pi/3)$. et $w = 0$. Le champ magnétique est initialisé par un potentiel vecteur \mathbf{A} où \mathbf{A} est défini par

$$\mathbf{A} = \max(C(R_0 - r), 0) \mathbf{e}_z.$$

C est une constante égale à $1e^{-3}$, R_0 est un réel égal à 0.3 et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les figures Fig.6.13 représentent les valeurs de $|\mathbf{B}|^2$ au temps $t = 0$ à gauche et au temps $t = 2$ à droite. Au temps $t = 2$, on peut observer une légère déformation des contours de $|\mathbf{B}|^2$, alors qu'ils devraient rester circulaires. Ceci peut s'expliquer par le fait que le schéma proposé n'étant que d'ordre 1 en temps et en espace, il est diffusif. D'autre part, d'après le graphique de la figure Fig.6.14, il semblerait que la perte l'énergie magnétique décroisse un peu plus rapidement que dans [28]. Entre $t = 0.8$ et $t = 1.4$, deux oscillations apparaissent. Ces oscillations ne correspondent pas à un mauvais comportement de notre code. Elles apparaissent au moment où les boucles magnétiques atteignent le bord et sont la conséquence de la façon dont ont été implémentées les conditions de bord périodiques.

FIG. 6.8 – Pression à $t = 0.48$ obtenue par Ryu et al (source de l'image : <http://www.journals.uchicago.edu>) à gauche et par notre code à droite visualisée sur le plan $\{z = 0.03\}$. Les abscisses de la coupe de p représentent le nombre de points utilisés dans la représentation de la solution.

FIG. 6.9 – Pression magnétique à $t = 0.48$ obtenue par Ryu et al (source de l'image : <http://www.journals.uchicago.edu>) à gauche et par notre code à droite visualisée dans le plan $\{z = 0.03\}$. Les abscisses de la coupe de $\frac{|\mathbf{B}|^2}{2}$ représentent le nombre de points utilisés dans la représentation de la solution.

FIG. 6.10 – Visualisation de la densité et des contours de la densité dans le plan $\{z = 0.03\}$ à $t = 0.48$

FIG. 6.11 – Visualisation des contours de la pression (à gauche) et de la pression magnétique (à droite) dans le plan $\{z = 0.03\}$ à $t = 0.48$.

FIG. 6.12 – Variation de $\|\operatorname{div} \mathbf{B}\|_{0,\Omega}$ en fonction du temps t .

FIG. 6.13 – Visualisation de $|\mathbf{B}|^2$ à $t = 0$ à gauche et à $t = 2$ à droite.

FIG. 6.14 – Variation de $\|\mathbf{B}\|^2$ en fonction du temps t .**Test 4 : Blast Wave Test**

Dans cet exemple étudié par différents auteurs ([8, 28, 52, 80]), on considère une zone circulaire à pression élevée d'un plasma plongé dans un champ magnétique uniforme faisant naître une explosion. Nous utilisons ici les mêmes conditions que Londrillo et Del Zanna ([52]). L'explosion est ici étudiée dans un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1, d'axe l'axe z . La densité est égale à 1 dans tout le domaine. La vitesse est nulle. Le champ magnétique est uniforme, de norme (euclidienne) égale à 10. On choisit $B_x = B_y = \frac{10}{\sqrt{2}}$, et $B_z = 0$. La pression est égale à 1 dans tout le domaine sauf à l'intérieur d'un cylindre de rayon $r = 0.125$ d'axe z où $p = 100$. La solution est avancée au temps $t = 0.02$ avec une condition CFL de 0.1. Des conditions de bord périodiques sont utilisées pour les deux sections du cylindre. Les parois latérales du cylindre ne sont pas atteintes par les ondes durant la simulation. Les résultats obtenus sont comparables à ceux proposés dans [52]. Dans les figures Fig. 6.15-6.17, nous présentons une vue en coupe suivant le plan $\{z = 0.5\}$ de la pression, la densité, et $|\mathbf{B}|^2$ sur la partie gauche, et 40 isocontours de chacune de ces quantités sur les parties droites. Ce test fait apparaître des discontinuités et des chocs MHD forts démontrant la robustesse de notre code face à ce type de problèmes représentatif de certains cas d'astrophysique, dominés par une énergie magnétique. La symétrie par rapport au champ magnétique initial est également bien préservée traduisant l'absence d'effet de maillage sur la solution.

Dans la figure Fig.6.18, nous présentons à gauche une visualisation de la divergence sur le demi-cylindre inférieur, et à droite l'évolution de la norme L^2 de la divergence en fonction du temps. Bien que la divergence augmente au cours du temps, celle-ci reste relativement petite, étant de l'ordre de $1e^{-12}$.

Test 5 : test 3D

Dans la littérature, les tests MHD tridimensionnels sont rares. La plupart des cas sont traités en 2D. Dans [44], Keppens et al proposent un test MHD dans le cube $\Omega =$

FIG. 6.15 – Visualisation de la pression à $t = 0.02$.

FIG. 6.16 – Visualisation de la densité à $t = 0.02$.

FIG. 6.17 – Visualisation de $|\mathbf{B}|^2$ à $t = 0.02$.

FIG. 6.18 – A gauche, visualisation de $\operatorname{div} \mathbf{B}$ au temps $t = 0.085$ et à droite évolution de $\|\operatorname{div} \mathbf{B}\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction du temps t .

$[-0.5, 0.5]^3$ afin de tester leur méthode de raffinement de maillages. Nous proposons de reproduire ce test bien qu'il n'ait pas été testé à notre connaissance dans d'autres travaux. Le magnétique initial est donné par

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{3/5}\mathbf{e}_y.$$

La pression et la densité sont définies par

$$p_0 = \begin{cases} 0.06 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 < 0.04, \\ 0.6 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\rho_0 = \begin{cases} 10 & \text{si } (x + 0.1)^2 + y^2 + z^2 < 0.0016, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La vitesse initiale est nulle. Les conditions aux limites sont périodiques dans les trois directions de l'espace. Dans la figure Fig 6.19, nous présentons un profil de pression et de densité au temps $t = 0.4$ dans le plan $\{x = 0\}$ pour une solution calculée avec un maillage constitué de 90 points dans chacune des directions. La solution obtenue et les échelles de grandeur sont similaires à celles proposées par Keppens et *al.* Deux *pics*, que nous ne retrouvons pas dans notre solution, apparaissent dans la solution de Keppens et *al.* Ceci pourrait être expliqué par le fait que la résolution que nous utilisons ici est bien moins importante que celle utilisée par Keppens et *al.* qui réalisent ce test utilisant des méthodes de raffinement de maillage adaptatif.

FIG. 6.19 – Profils de densité (à gauche) et de pression (à droite) au temps $t = 0.4$ dans le plan $\{x = 0\}$.

3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de type volumes finis permettant d'approcher numériquement les solutions des équations de la magnétohydrodynamique. Cette méthode, basée sur des solveurs de Riemann 1D et construite pour des maillages

tétraédriques, est associée à une approximation par éléments finis du champ magnétique. Le champ magnétique est maintenu à divergence nulle par une approche de type *transport constraints* intensivement utilisée sur des maillages uniformes. Les composantes normales du champ magnétique calculées sur les faces des tétraèdres permettent d'obtenir une approximation au centre des maillages de manière naturelle. Même au centre, le champ magnétique est composante normale continue et à divergence nulle (aux erreurs machines près) contrairement à ce que l'on peut généralement obtenir dans le cas de maillages uniformes.

Les différents tests numériques issus de la littérature démontrent la capacité de notre méthode à résoudre différents problèmes faisant intervenir des chocs ou des discontinuités. Les résultats obtenus sont satisfaisants bien que le schéma ne soit, pour le moment, que d'ordre 1 en temps et en espace.

Un des objectifs finaux de ce travail est d'appliquer la méthode présentée à des études de stabilité MHD dans les tokamaks. Dans ce cas, les conditions initiales sont des équilibres magnétostatiques. Les premiers calculs font apparaître un certain nombre de difficultés à résoudre avant d'aboutir à cet objectif. En effet, au bout de quelques pas de temps, la pression croît assez rapidement et vraisemblablement de manière anormale sur le bord intérieur du tore. Deux sources de problèmes sont pour le moment envisagées. Le nombre β du plasma dans ce type de problème est relativement faible (de l'ordre de $10e^{-5}$ pour le cas étudié) nécessitant une correction d'énergie pour maintenir une pression positive et assurer le bon déroulement du calcul. Il s'agit de vérifier ici si cette correction peut être suffisamment importante pour pouvoir modifier de manière significative la pression. La deuxième source de problème pourrait résider dans le choix de conditions aux limites adéquates pour ce type de problème. En effet, sur le bord du tore, les conditions imposées sont $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Or, les schémas de type Godunov nécessitent le calcul de flux sur le bord. En pratique, cela se fait par l'utilisation de cellules fictives sur le bord dans lesquels les variables conservatives sont imposées afin de satisfaire les conditions aux limites imposées. Dans notre cas, la seule équation MHD pour laquelle nous devons calculer un flux est l'équation du mouvement faisant apparaître un terme dépendant de la pression magnétique. Cette pression nécessite d'avoir une information sur le champ magnétique tangentiel sur le bord. Les données des conditions initiales proviennent du code axisymétrique CHEASE (voir [139]). Les équilibres magnétostatiques sont exactement vérifiés, notamment sur le bord du domaine. Une comparaison des résultats doit être effectuée avec les résultats fournis par le code XTOR. Ce code non-conservatif présente l'avantage de traiter les conditions aux limites de manière naturelle.

Il reste donc dans ce travail à identifier la principale source d'erreur et essayer de trouver une solution efficace à la résolution de ce problème.

Chapitre 7

Conclusion

Nous avons proposé une méthode permettant de calculer des champs de Beltrami et des configurations d'équilibres magnétostatiques. L'efficacité de la méthode a été démontrée à travers les différents tests numériques présentés. Les résultats obtenus avec notre code 3D sont en accord avec les résultats attendus, aussi bien sur des solutions analytiques que pour les applications en fusion. Cependant, quelques améliorations destinées à diminuer le temps de calcul peuvent être apportées à la méthode proposée. En effet, le système rot-div et l'équation de transport sont résolus plusieurs fois dans l'algorithme. Un préconditionnement des systèmes matriciels associés à ces deux problèmes pourrait s'avérer très bénéfique à l'amélioration de la rapidité du code TETRAFFF.

Le schéma conservatif mis en oeuvre pour la résolution des équations de la magnétohydrodynamique permet de maintenir un champ magnétique à divergence numériquement nulle. Le champ magnétique calculé au centre dans notre méthode est naturellement à divergence nulle et à composantes normales continues. Les tests présentés démontrent bien la capacité de notre code à capturer des chocs et des discontinuités. Les premiers résultats présentés ici sont par conséquent très encourageants. Différentes améliorations peuvent également être apportées à notre code. Il pourrait être intéressant d'améliorer le calcul du champ électrique sur les arêtes du maillage par des méthodes plus élaborées faisant intervenir moins d'interpolation ou une interpolation pondérée. Une fois réglée les problèmes liés aux applications en fusion évoqués au chapitre 6, il serait également intéressant d'augmenter l'ordre du schéma en temps et en espace. Un autre aspect important à prendre en compte dans ce type de problèmes est la discrétisation en temps. Les phénomènes étudiés sont lents et les pas de temps sont soumis à la contraignante condition CFL. L'adaptation des méthodes semi-implicites proposées dans [1] ou [46] à notre schéma permettrait de diminuer les contraintes imposées sur les pas de temps par la condition CFL.

Annexe A

Egalité des valeurs propres

Dans le tableau Tab.A.1, nous présentons un récapitulatif des cas pour lesquels deux valeurs propres peuvent être égales.

	λ_0	λ_1	$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{2,2}$	$\lambda_{3,1}$	$\lambda_{3,2}$	$\lambda_{4,1}$	$\lambda_{4,2}$
λ_0	=	$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$						
λ_1		=	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$			$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$
$\lambda_{2,1}$			=	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $\chi \leq \mathbf{B} ^2$		$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ou ($\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $ \mathbf{B} ^2 \leq \chi$)	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$
$\lambda_{2,2}$				=		$\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $\chi \leq \mathbf{B} ^2$	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ou ($\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $ \mathbf{B} ^2 \leq \chi$)
$\lambda_{3,1}$					=		$\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $ \mathbf{B} ^2 = \chi$	
$\lambda_{3,2}$						=		$\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ et $ \mathbf{B} ^2 = \chi$
$\lambda_{4,1}$							=	$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$
$\lambda_{4,2}$								=

TAB. A.1 – Recapitulatif des situations d'égalité de deux valeurs propres pour le système MHD.

Annexe B

Annexe du chapitre 3

1 Proof of Lemma 4.1.

The existence and the unicity of a solution to the problem (3.32) can be proved by mean of Babuska-Brezzi theorem. Consider the subspace V of W^0 defined as

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{p} \in W^0(\Omega), \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p} dx = 0, \forall v \in L_0^2(\Omega) \}, \\ &= \{ \mathbf{p} \in W^0(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{p} = cte \}, \\ &= \{ \mathbf{p} \in W^0(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{p} = 0 \}. \end{aligned}$$

It is quite clear that the continuous bilinear form defined on $W^0(\Omega) \times W^0(\Omega)$ by

$$a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in W^0(\Omega) \times W^0(\Omega)$$

is V-elliptic.

Consider the continuous bilinear form defined on $W^0(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ by

$$b(\mathbf{q}, u) = \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{q}$$

with $\mathbf{q} \in W^0$ and $u \in L_0^2(\Omega)$.

We can prove that the inf-sup condition is satisfied for $b(., .)$. Let us introduce the map \mathcal{R} defined on $L_0^2(\Omega)$ by

$$\mathcal{R}v = \nabla \phi_v, \quad \forall v \in L_0^2(\Omega)$$

where $\phi_v \in H^1(\Omega)$ with $\int_{\Omega} \phi_v = 0$ is solution of

$$\begin{cases} \Delta \phi_v = v \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi_v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

As $b(\mathcal{R}v, v) = \|v\|_{0,\Omega}^2$, we have

$$\begin{aligned} \inf_{\|v\|_{0,\Omega}=1} \sup_{\|q\|_{H(\text{div};\Omega)}=1} b(q, v) &= \inf_{v \neq 0} \sup_{q \neq 0} \frac{b(q, v)}{\|q\|_{H(\text{div};\Omega)}} \\ &\geq \inf_{v \neq 0} \frac{b(\mathcal{R}v, v)}{\|\mathcal{R}v\|_{H(\text{div};\Omega)}} = \inf_{v \neq 0} \frac{\|v\|_{0,\Omega}}{\|\mathcal{R}v\|_{H(\text{div};\Omega)}} \\ &\geq \frac{1}{\|\mathcal{R}\|} > 0. \end{aligned}$$

2 Proof of Lemma 4.4

Existence and uniqueness are straightforward consequences of (3.50). It remains to prove the error estimate. We set $\xi = \lambda - \lambda_h$. Then,

$$a_h(\xi, \xi) = a_h(\xi, \lambda - w_h) \text{ for all } w_h \in W_h.$$

Let $w_h \in W_h$ and set $\varphi = \lambda - w_h$. Then,

$$\begin{aligned} |a_h(\xi, \varphi)| &\leq \delta_h \|\mathbf{B} \cdot \nabla \xi\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sigma \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta_h \sigma \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{B} \cdot \nabla \xi\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\xi\|_{L_*^2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L_*^2(\partial\Omega)} \\ &\leq [\sqrt{\delta_h} \|\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\sigma} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \delta_h \sqrt{\sigma} \|\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta_h^{-1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_*^2(\partial\Omega)}] \|\xi\|_{\Omega} \\ &\leq K[(\sqrt{\delta_h} + \delta_h \sqrt{\sigma}) \|\mathbf{B}\|_{\infty} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\sigma} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \delta_h^{-1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta_h^{-1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\delta_h} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}] \|\xi\|_{\Omega}, \end{aligned}$$

where we used the inequality (see, e. g., Grisvard [122], Th. 1.5.1.10)

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq K_0(\delta_h^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta_h \|v\|_{H^1(\Omega)}^2),$$

which is valid for if $0 < \delta_h < 1$. The constant K_0 depends neither on δ_h nor on v . Thus, since $\delta_h \sigma < 1$, we get

$$(1 - \sigma \delta_h) \|\xi\|_{\Omega} \leq C(\delta_h^{1/2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \delta_h^{-1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}).$$

The proof is ended by using usual estimate on the interpolation error for conforming finite elements.

Annexe C

Opérateur MHD linéarisé

Dans cette partie, nous donnons le détails des calculs permettant de démontrer que l'opérateur MHD linéarisé L défini par (2.74) dans le chapitre 2 est autoadjoint. On rappelle la définition de L :

$$L\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \{ \nabla(\mathbf{v} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \} \quad (\text{C.1})$$

Soient $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\xi}'$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On peut montrer [10] que

$$\nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{Q} = \mathbf{B} \times \{ \operatorname{rot} (\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \} - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \nabla p. \quad (\text{C.2})$$

où $\mathbf{Q} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$.

On note $\mathbf{Q}' = \operatorname{rot} (\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{B})$. Dans la suite, on omet les indices 0 dans la définition de l'opérateur L .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}' \cdot L(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\rho} \{ \boldsymbol{\xi}' \cdot [\nabla(\gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) + \operatorname{rot} \mathbf{Q} \times \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{Q}] \\ &= \boldsymbol{\xi}' \cdot [\nabla(\gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} (\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \nabla p + \operatorname{rot} \mathbf{Q} \times \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

en utilisant l'égalité (C.2).

On a

$$\boldsymbol{\xi}' \cdot [\nabla(\gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi})] = \nabla(\boldsymbol{\xi}' \cdot \gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}' \gamma p \operatorname{div}(\boldsymbol{\xi})$$

A l'aide des égalités

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{C.4})$$

et

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (\text{C.5})$$

on montre que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}' \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{Q} \times \mathbf{B}) &= -(\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{B}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Q} \\ &= -\operatorname{div} (\mathbf{Q} \times (\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{B})) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}'. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{B} \times \{ \operatorname{rot} [\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] \} &= \operatorname{rot} \{ \boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \} \cdot (\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{B}) \\ &= \operatorname{div} ((\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \times (\boldsymbol{\xi}' \times \mathbf{B})) + (\boldsymbol{\xi} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Q}' \end{aligned}$$

Grâce aux remarques précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \xi'.L(\xi) = & \frac{1}{\rho} \{ \operatorname{div} \{ \xi' \gamma p \operatorname{div} \xi - \mathbf{Q} \times (\xi' \times \mathbf{B}) \\ & + [\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] \times [\xi' \times \mathbf{B}] \} - \gamma p \operatorname{div} \xi \operatorname{div} \xi' \\ & - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' + [\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] \cdot \mathbf{Q}' - \operatorname{div} \xi \xi' \cdot \nabla p. \} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En utilisant l'égalité

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}] \mathbf{c} - [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \mathbf{d}$$

on montre que

$$\begin{aligned} (\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \times (\xi' \times \mathbf{B}) &= [(\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}] \xi' - [(\xi \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \xi'] \mathbf{B} \\ &= \xi' [\xi \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B})] - \mathbf{B} [(\xi' \times \xi) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi'.L(\xi) = & \frac{1}{\rho} \{ \operatorname{div} \{ \xi' \gamma p \operatorname{div} \xi - \mathbf{Q} \times (\xi' \times \mathbf{B}) + \xi' \xi \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\xi' \times \xi) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \} \\ & - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' + \xi \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{Q}') - \operatorname{div} \xi (\gamma p \operatorname{div} \xi' + \xi' \cdot \nabla p) \}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait qu'à l'équilibre $\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \nabla p$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \xi'.L(\xi) = & \frac{1}{\rho} \{ \operatorname{div} \{ \xi' \gamma p \operatorname{div} \xi - \xi \gamma p \operatorname{div} \xi' - \mathbf{Q} \times (\xi' \times \mathbf{B}) \\ & + \mathbf{Q}' \times (\xi \times \mathbf{B}) + \xi' \xi \cdot \nabla p - \xi \xi' \cdot \nabla p - \mathbf{B} \xi' \times \xi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \} \\ & + \operatorname{div} \{ \xi (\gamma p \operatorname{div} \xi' + \xi' \cdot \nabla p) - \mathbf{Q}' \times (\xi \times \mathbf{B}) \} \\ & - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' + \xi \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{Q}' - \operatorname{div} (\xi) (\gamma p \operatorname{div} \xi' + \xi' \cdot \nabla p) \} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

On montre facilement que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{ \xi (\gamma p \operatorname{div} \xi' + \xi' \cdot \nabla p) - \mathbf{Q}' \times (\xi \times \mathbf{B}) \} \\ - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}' + \xi \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{Q}' - \operatorname{div} (\xi) (\gamma p \operatorname{div} \xi' + \xi' \cdot \nabla p) = \rho \xi \cdot L(\xi') \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Enfin, en utilisant la relation

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \xi' L(\xi) = & \frac{1}{\rho} \{ \rho \xi L(\xi') + \operatorname{div} (\xi' [\gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \cdot \nabla p - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}]) \\ & + \operatorname{div} (\xi [\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{B} - \gamma p \operatorname{div} \xi' - \xi' \cdot \nabla p]) \\ & + \operatorname{div} (\mathbf{B} [(\xi' \times \xi) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{Q} \cdot \xi' - \mathbf{Q}' \cdot \xi]) \} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

En intégrant sur un volume V et en supposant que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\xi' \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le bord de V on obtient

$$\int_V \rho \xi' \cdot L(\xi) - \xi \cdot L(\xi') dV = 0$$

et on établit ainsi que l'opérateur L est formellement autoadjoint.

Annexe D

Quelques rappels sur les lois de conservation

Nous rappelons quelques résultats théoriques sur l'étude des lois de conservation hyperboliques. Pour plus de détails, le lecteur pourra par exemple lire [30], [31], [47], [43], [68]...

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^p . Un système d'équations aux dérivées partielles est dit système de lois de conservation en dimension d s'il s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{D.1})$$

où $t > 0$, et $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\rightarrow \Omega$. Les fonctions f_j , $1 \leq j \leq p$, appelées flux, sont régulières de Ω dans \mathbb{R}^p . On a

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Le système (D.1) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{D.2})$$

où $f_j(\mathbf{u}) = (f_{1j}(\mathbf{u}), \dots, f_{pj}(\mathbf{u}))^T$ appartient à \mathbb{R}^p .

1 Généralités

On note $\mathbf{A}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'_j(\mathbf{u})$, la matrice jacobienne de \mathbf{f}_j . Pour tout vecteur unitaire $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \omega_j.$$

Le système (D.2) est dit hyperbolique si pour tout $\mathbf{u} \in \Omega$, et pour tout $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ admet p valeurs propres réelles $\lambda_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \lambda_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \dots, \lambda_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ et p vecteurs propres réels correspondants.

Si les valeurs propres sont toutes distinctes, le système (D.2) est dit strictement hyperbolique.

Un champ caractéristique est dit *vraiment non linéaire* s'il vérifie

$$\forall \mathbf{u}, \nabla \lambda_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \neq \mathbf{0}.$$

Un champ caractéristique est dit *linéairement dégénéré* s'il vérifie

$$\forall \mathbf{u}, \nabla \lambda_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Le système (D.2) est dit *convexe* si tous les champs sont linéairement dégénérés ou vraiment non linéaires.

Considérons maintenant le problème (D.2) associé à la condition initiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (\text{D.3})$$

où $\mathbf{u}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$ est une fonction donnée. Une fonction $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$ est une solution classique du problème de Cauchy (D.2)+(D.3) si \mathbf{u} est une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui satisfait (D.2) partout.

En générale une telle solution n'existe pas au delà d'un temps fini même si \mathbf{u}_0 est une fonction très régulière. En effet dans le cas $p = 1$ et $d = 1$, le système (D.2) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (\text{D.4})$$

qui peut de réécrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où $a(u) = f'(u)$. En introduisant les courbes caractéristiques associées à (D.4) définies comme les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(u(x(t), t)), \quad x(0) = x_0$$

on peut montrer ces courbes caractéristiques sont des droites le long desquelles u est constant (voir par exemple [31]). La vitesse de propagation des ondes est $a(u)$. Au bout d'un certain temps ces droites peuvent se couper en un point ou plusieurs points auxquels u peut prendre plusieurs valeurs. Il est donc nécessaire d'introduire une notion de solution faible.

Soit $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$ l'espace des fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^1 à support compact. On suppose que la donnée initiale \mathbf{u}_0 du problème de Cauchy (D.2)+(D.3) appartient à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)^p$. Une fonction $\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)^p$ est une solution faible du problème de Cauchy (D.2)+(D.3) si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ presque partout et satisfait

$$\forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)^p, \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 0.$$

Si la solution faible est régulière, alors c'est une solution classique.

Les solutions faibles contiennent généralement des discontinuités. Notons Σ une surface de discontinuité et $\mathbf{n} = (n_t, \mathbf{n}_x)$ un vecteur normal à Σ . A travers la discontinuité, la solution faible \mathbf{u} doit satisfaire des conditions de sauts appelées *conditions de Rankine-Hugoniot*

$$n_t[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^d [\mathbf{f}_j(\mathbf{u})]n_{x_j} = \mathbf{0}$$

où $[\mathbf{w}] = \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L$, et \mathbf{w}_R et \mathbf{w}_L représentent respectivement les valeurs \mathbf{w} à droite et à gauche de la discontinuité.

Les problèmes du type (D.2)+(D.3) admettent en général des solutions au sens faible mais malheureusement ces solutions ne sont pas uniques. Un critère permet de sélectionner une solution répondant au problème physique étudié : c'est l'entropie. On suppose que Ω est convexe. Une façon d'obtenir le critère d'entropie consiste à passer à la limite (lorsque $\nu \rightarrow 0$) sur les solutions \mathbf{u}' du problème

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\nu}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_\nu) - \nu \Delta \mathbf{u}_\nu = 0.$$

2 Notion d'entropie

Rappelons maintenant la notion d'entropie (voir par exemple [68]). On se place dans le cas 1D et on considère l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{D.5})$$

avec $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$. On appelle paire d'entropie $(U, F(U))$ toute paire de fonctions vérifiant

- $U : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ convexe
- $\frac{\partial F}{\partial u_k} = (\nabla_{u_k} U)^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial u_k}$ pour $k = 1, \dots, p$. Cela s'écrit

$$\nabla_{\mathbf{u}} F = (\nabla_{\mathbf{u}} U)^T \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}. \quad (\text{D.6})$$

On montre (voir [68]) alors que l'égalité (D.6) est équivalente, en posant $A(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}$, à

$$(\nabla_{\mathbf{u}}^2 U \cdot A(\mathbf{u}))^T = \nabla_{\mathbf{u}}^2 U \cdot A(\mathbf{u}). \quad (\text{D.7})$$

Inversement, si on (D.7), on a (D.6).

F est appelé le flux d'entropie associé à U . On a pour toute solution forte $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0. \quad (\text{D.8})$$

Pour les solutions faibles, on a

$$\frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) \leq 0. \quad (\text{D.9})$$

La perte de l'égalité d'entropie se fait au niveau des discontinuités.

Dans le cas multidimensionnel, $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe est une entropie pour le système (D.1) s'il existe $F_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq d$, les flux d'entropie, tels que

$$\frac{\partial F_j}{\partial u_k} = (\nabla_{u_k} U)^T \frac{\partial f_j}{\partial u_k}$$

pour $k = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, d$. On a, comme pour le cas 1D,

$$\frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{u}) = 0$$

pour les solutions régulières et

$$\frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{u}) \leq 0$$

pour les solutions faibles. En 1D ($p = 1$), (D.7) est automatiquement vérifiée. Toute fonction convexe peut servir d'entropie.

Si $p = 2$, (D.7) est de la forme

$$\nabla_{\mathbf{u}}^2 U A(U) = \begin{pmatrix} \times & \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \times \end{pmatrix}$$

L'hypothèse de symétrie du système nous ramène à une équation sur U qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial U}{\partial u_1 \partial u_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0.$$

Si $p \geq 3$, (D.7) est un système de $\frac{p(p-1)}{2}$ équations pour une inconnue. Le système est surdéterminé. Le système n'admet pas forcément de solution mais pour beaucoup de problèmes physiques, on a une entropie associée (ex : Euler 3D, MHD...).

Si $A(U)$ est symétrique, alors

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p u_i^2$$

satisfait (D.7) car $\nabla_{\mathbf{u}}^2 U = id$.

Lorsque $A(U)$ est symétrique, alors le système est dit symétrique. Le cas symétrique est important, car pour les solutions entropiques, on a l'inégalité traduisant la stabilité entropique

$$\int U(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) dx \leq \int U(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)) dx$$

obtenue par intégration de (D.9). Dans ce cas, avec $U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$, cette inégalité traduit la stabilité L^2 .

Revenons au cas général non symétrique. Si il existe une entropie U , alors en posant

$$\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} U(\mathbf{u}),$$

on montre que l'application

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$$

est bijective quand U est strictement convexe. L'équation (D.5) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

avec $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{v}))$ et on a

$$(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{g})^T = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{g}.$$

Un système est donc symétrisable si et seulement si il admet une entropie strictement convexe.

3 Problème de Riemann

On s'intéresse maintenant au problème de Riemann 1D

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{D.10})$$

associé à la condition initiale $\mathbf{u}_0(x)$ de la forme

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_G & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{u}_D & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

\mathbf{u}_L et \mathbf{u}_D sont deux états constants. La résolution du problème de Riemann est importante dans le sens où la connaissance de la solution de ce type de problème est nécessaire dans la construction de schémas numériques (du type Godunov par exemple).

Avant de rappeler le principal résultat concernant la résolution du problème de Riemann, détaillons les ondes simples permettant d'en construire une solution. Dans la suite, on suppose que tous les champs caractéristiques sont soit vraiment non linéaires, soit linéairement dégénérés.

Ondes de raréfactions

On considère uniquement les solutions du problème de Riemann de la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}\left(\frac{x}{t}\right),$$

dites *solutions auto-similaires*. On a

$$-\left(\frac{x}{t^2}\right) \mathbf{v}'\left(\frac{x}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right) \mathbf{A}\left(\mathbf{v}\left(\frac{x}{t}\right)\right) \mathbf{v}'\left(\frac{x}{t}\right) = \mathbf{0},$$

où \mathbf{A} est la matrice jacobienne de \mathbf{f} . En posant $\xi = \frac{x}{t}$, on a

$$(\mathbf{A}(\mathbf{v}(\xi)) - \xi \mathbf{I}) \mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0}.$$

Alors, soit $\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0}$ ou soit ξ est une valeur propre de $\mathbf{A}(\mathbf{v}(\xi))$ et $\mathbf{v}'(\xi)$ un vecteur propre associé, c'est à dire qu'il existe un indice k tel que $\lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \xi$ et $\mathbf{v}'(\xi) = \alpha_k(\xi) \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi))$. Dans le cas où $\mathbf{v}'(\xi) \neq \mathbf{0}$, on a

$$D\lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = 1$$

en différenciant l'équation portant sur λ_k . Si le k -ième champ caractéristique est vraiment non linéaire, on a donc soit

$$\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0},$$

soit

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(\xi) = \lambda_k \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)), \\ \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \xi. \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

Si le k -ième champ caractéristique est vraiment non linéaire et \mathbf{v} vérifie (D.12) avec

$$\mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{u}_L)) = \mathbf{u}_L, \quad \mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{u}_R)) = \mathbf{u}_R$$

alors

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{u}_L), \\ \mathbf{v}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{si } \lambda_k(\mathbf{u}_L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{u}_R), \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } \frac{x}{t} \geq \lambda_k(\mathbf{u}_R), \end{cases}$$

est une solution faible du problème (D.10) + (D.11). Une telle solution est appelée *k-onde de raréfaction* reliant les états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R qui doivent appartenir à la même courbe intégrale de \mathbf{r}_k , λ_k devant passer de \mathbf{u}_L à \mathbf{u}_R le long de cette courbe.

Chocs et discontinuités de contact

Etant donnés deux états constants \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R appartenant à Ω , on considère les solutions constantes par morceaux. Soit la discontinuité d'équation $x = \xi(t)$, la solution recherchée est discontinue, elle doit donc satisfaire les conditions de Rankine-Hugoniot qui s'écrivent en dimension 1

$$\sigma[u] = [\mathbf{f}(\mathbf{u})] \quad (\text{D.13})$$

où $\sigma = \xi'$ est la vitesse de propagation de la discontinuité. Une fonction de la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } x < \sigma t, \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } x > \sigma t, \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

est une solution faible du problème de Riemann si σ vérifie (D.13). Cette solution est appelée *onde de discontinuité*. Etant donné un état $\mathbf{u}_0 \in \Omega$, on souhaite connaître tous les états $\mathbf{u} \in \Omega$ pouvant être reliés à \mathbf{u}_0 par une onde de discontinuité.

Définition 3.1. *L'ensemble de Rankine-Hugoniot de \mathbf{u}_0 est l'ensemble des états $\mathbf{u} \in \Omega$ tels qu'il existe $\sigma(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ avec*

$$\sigma(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0).$$

L'ensemble de Rankine-Hugoniot est caractérisé par le théorème

Théorème 3.1. *Soit $\mathbf{u}_0 \in \Omega \in \Omega$. L'ensemble de Rankine-Hugoniot est localement composé de p courbes régulières $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_0)$, $1 \leq k \leq p$. De plus, pour chaque k , il existe une paramétrisation de $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_0) : \varepsilon \rightarrow \Psi_k(\varepsilon)$ définie pour $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, avec ε_1 suffisamment petit, telle que*

$$\Psi_k(\varepsilon) = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{r}_k(\mathbf{u}_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} D\mathbf{r}_k(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}_0) + O(\varepsilon^3),$$

et

$$\sigma(\mathbf{u}_0, \Psi_k(\varepsilon)) = \lambda_k(\mathbf{u}_0) + \frac{\varepsilon}{2} D\lambda_k(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}_0) + O(\varepsilon^2).$$

Dans le cas où le k -ième champ caractéristique est vraiment non linéaire la courbe $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_0)$ est appelée k -courbe de choc.

Si \mathbf{u}_R appartient à la k -courbe de choc de $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_L)$ ou si \mathbf{u}_L appartient à la k -courbe de choc de $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_R)$, une solution du problème de Riemann de la forme (D.14) est appelée k -onde de choc.

Dans le cas où le k -ième champ caractéristique est linéairement dégénéré, on a le théorème

Théorème 3.2. *Si le k -ième champ caractéristique est linéairement dégénéré, la courbe $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_0)$ est une courbe intégrale du vecteur \mathbf{r}_k , et*

$$\sigma(\mathbf{u}_0, \Psi(\varepsilon)) = \lambda_k(\Psi(\varepsilon)) = \lambda_k(\mathbf{u}_0).$$

Si le k -ième champ caractéristique est linéairement dégénéré et si \mathbf{u}_R appartient à la k -courbe de choc de $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_L)$ ou si \mathbf{u}_L appartient à la k -courbe de choc de $\mathcal{S}_k(\mathbf{u}_R)$, une solution faible du problème de Riemann de la forme (D.14) est appelée k -discontinuité de contact.

En utilisant les ondes simple présentées précédemment, le théorème de Lax nous donne un résultat d'existence et d'unicité au problème de Riemann (dans le cas d'un système convexe).

Théorème 3.3. *On suppose que tous les champs caractéristiques sont soit linéairement dégénérés, soit vraiment non linéaires. Alors pour tout $\mathbf{u}_L \in \Omega$, il existe un voisinage \mathcal{W} de \mathbf{u}_L dans Ω tel que si $\mathbf{u}_R \in \mathcal{W}$, le problème de Riemann (D.10)+ (D.11) admet une solution faible entropique formée d'au plus $(p+1)$ états constants et séparés par au plus p ondes simples : chocs, raréfactions, discontinuités de contact. De plus cette solution est unique. Elle est notée $\mathbf{w}_R(x/t, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$.*

On considère le problème linéaire s'écrivant sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (\text{D.15})$$

où \mathbf{A} est une matrice constante de taille $r \times r$.

On note λ_i , $1 \leq i \leq p$ les valeurs propres de A et \mathbf{r}_i un vecteur propre associé. On ordonne les valeurs propres telles que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r.$$

En décomposant les vecteurs \mathbf{u} de \mathbb{R}^p sur les vecteurs propres de A

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{r}_i,$$

les deux états constants du problème de Riemann peuvent s'écrire

$$\mathbf{u}_L = \sum_{i=1}^p \phi_i^L \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_L + \sum_{i=1}^p \delta_i \mathbf{r}_i.$$

On peut montrer que la solution entropique du problème de Riemann (D.15)+(D.11) s'écrit

$$\mathbf{w}(x/t, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1, \\ \mathbf{u}_L + \sum_{j=1}^i \delta_j \mathbf{r}_j, & \text{si } \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1}, \\ \mathbf{u}_R, & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_p. \end{cases}$$

Bibliographie

Magnétohydrodynamique

- [1] T. Amari, J.F. Luciani, and P. Joly. A preconditioned semi-implicit method for magnetohydrodynamics equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(3) :970–986 (electronic), 1999.
- [2] P. Arminjon and R. Touma. Central finite volume methods with constrained transport divergence treatment for ideal MHD. *J. Comput. Phys.*, 204(2) :737–759, 2005.
- [3] J. Balbás and E. Tadmor. Nonoscillatory central schemes for one- and two-dimensional magnetohydrodynamics equations. ii : High-order semidiscrete schemes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(2) :533–560, 2006.
- [4] J. Balbás, E. Tadmor, and C.C. Wu. Non-oscillatory central schemes for one- and two-dimensional MHD equations. I. *J. Comput. Phys.*, 201(1) :261–285, 2004.
- [5] D. Balsara. Total Variation Diminishing Scheme for Relativistic Magnetohydrodynamics. *Astrophys. J.*, 132 :83–101, January 2001.
- [6] D.S. Balsara. Divergence-free adaptive mesh refinement for magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 174 :614, 2001.
- [7] D.S. Balsara. Second-Order-accurate Schemes for Magnetohydrodynamics with Divergence-free Reconstruction. *ApJS*, 151 :149–184, March 2004.
- [8] D.S. Balsara and D.S. Spicer. Erratum : “A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations” [J. Comput. Phys. **149** (1999), no. 2, 270–292 ; MR1672743 (99j :76080)]. *J. Comput. Phys.*, 153(2) :671, 1999.
- [9] A. A. Barmin, A. G. Kulikovskiy, and N. V. Pogorelov. Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 126(1) :77–90, 1996.
- [10] I.B. Bernstein. The variational principle for problems of ideal magnetohydrodynamic stability. In A. A. Galeev and R. N. Sudan, editors, *Basic Plasma Physics : Selected Chapters, Handbook of Plasma Physics, Volume 1*, pages 199–+, 1983.
- [11] J.P. Boris and D.L. Book. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works [J. Comput. Phys. **11** (1973), no. 1, 38–69]. *J. Comput. Phys.*, 135(2) :170–186, 1997.
- [12] J. U. Brackbill and D. C. Barnes. The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *J. Comput. Phys.*, 35(3) :426–430, 1980.

-
- [13] M. Brio and C. C. Wu. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 75(2) :400–422, 1988.
- [14] L. Cai, J.H. Feng, and W.X. Xie. A CWENO-type central-upwind scheme for ideal MHD equations. *Appl. Math. Comput.*, 168(1) :600–612, 2005.
- [15] P. Cargo and G. Gallice. Roe matrices for ideal MHD and systematic construction of Roe matrices for systems of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 136(2) :446–466, 1997.
- [16] R.K. Crockett, P. Colella, R.T. Fisher, R.J. Klein, and C.I. McKee. An unsplit, cell-centered Godunov method for ideal MHD. *J. Comput. Phys.*, 203(2) :422–448, 2005.
- [17] W. Dai and P.R. Woodward. Extension of the piecewise parabolic method to multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 115(2) :485–514, 1994.
- [18] W. Dai and P.R. Woodward. A simple Riemann solver and high-order Godunov schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 121(1) :51–65, 1995.
- [19] W. Dai and P.R. Woodward. Numerical scheme for three-dimensional supersonic magnetohydrodynamical flows and implementation in a massively parallel multiprocessor environment. *Advances in Engineering Software*, 29(2) :353–358, 1998.
- [20] W. Dai and P.R. Woodward. A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations. *J. Comput. Phys.*, 142(2) :331–369, 1998.
- [21] P. A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [22] S.F. Davis. Simplified second-order godunov-type methods. *SIAM J. Sci. Statist.*, 9 :445, 1988.
- [23] H. De Sterck. Multi-dimensional Upwind Constrained Transport on Unstructured Grid for 'Shallow Water' Magnetohydrodynamics. In *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, USA*, 2001.
- [24] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. *J. Comput. Phys.*, 175(2) :645–673, 2002.
- [25] C.R. DeVore. Flux-corrected transport techniques for multidimensional compressible magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 92(1) :142–160, 1991.
- [26] B. Einfeldt, C.D. Munz, P.L. Roe, and B. Sjögreen. On godunov-type methods near low densities. *J. Comput. Phys.*, 92 :273, 1991.
- [27] C.R. Evans and J.F. Hawley. Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *Astrophys. J.*, 332 :659–677, September 1988.
- [28] T. A. Gardiner and J. M. Stone. Multidimensional MHD Algorithms in Athena. In G. P. Zank and N. V. Pogorelov, editors, *Numerical Modeling of Space Plasma Flows*, volume 359 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 143–+, December 2006.
- [29] T.A. Gardiner and J.M. Stone. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *J. Comput. Phys.*, 205(2) :509–539, 2005.

- [30] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 3/4 of *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991.
- [31] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [32] K.F. Gurski. An HLLC-type approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2165–2187 (electronic), 2004.
- [33] D.S. Harned and W. Kerner. Semi-implicit method for three-dimensional compressible magnetohydrodynamic simulation. *J. Comput. Phys.*, 60 :62–75, 1985.
- [34] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49(3) :357–393, 1983.
- [35] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. III. *J. Comput. Phys.*, 71(2) :231–303, 1987.
- [36] A. Harten, P.D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25(1) :35–61, 1983.
- [37] P. Janhunen. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods. *J. Comput. Phys.*, 160(2) :649–661, 2000.
- [38] A. Jeffrey and T. Taniuti. *Non-linear wave propagation. With applications to physics and magnetohydrodynamics*. Academic Press, New York, 1964.
- [39] R. Jeltsch and M. Torrilhon. Solenoidal discrete initialization for locally divergence-free mhd simulations. In H.G. Bock, E. Kostina, H.X. Phu, and R. Rannacher, editors, *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes, Proc. Intl. Conference on High Performance Scientific Computing in Hanoi, Vietnam 2003*. Conference Proceedings, Springer, 2003.
- [40] G.S. Jiang and C.W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 126(1) :202–228, 1996.
- [41] G.S. Jiang and E. Tadmor. Nonoscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6) :1892–1917 (electronic), 1998.
- [42] G.S. Jiang and C.C. Wu. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 150(2) :561–594, 1999.
- [43] R. Keppens. Nonlinear magnetohydrodynamics : numerical concepts. *J. Comput. Phys.*, 45 :107–114, 2004.
- [44] R. Keppens, M. Nool, G. Toth, and J. P. Goedbloed. Adaptive mesh refinement for conservative systems : multi-dimensional efficiency evaluation. *Computer Physics Communications*, 153 :317, 2003.
- [45] M. G. Kivelson and C. T. Russell. *Introduction to space physics*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1995., 1995.
- [46] K. Lerbinger and J.F. Luciani. A new semi-implicit method for mhd computations. *J. Comput. Phys.*, 97 :444–459, 1991.

- [47] R.J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [48] F. Li and C.W. Shu. Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for MHD equations. *J. Sci. Comput.*, 22/23 :413–442, 2005.
- [49] S. Li. Note on Upwinding Constrained Transport Method for Ideal Magnetohydrodynamics. Preprint of Theoretical Division, Los Alamos National Laboratory.
- [50] S. Li. An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 203(1) :344–357, 2005.
- [51] X.D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 115(1) :200–212, 1994.
- [52] P. Londrillo and L. Del Zanna. High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 530 :508–524, feb 2000.
- [53] P. Londrillo and L. Del Zanna. On the divergence-free condition in Godunov-type schemes for ideal magnetohydrodynamics : the upwind constrained transport method. *J. Comput. Phys.*, 195(1) :17–48, 2004.
- [54] K Miyamoto. *Plasma Physics And Controlled Nuclear Fusion*. Springer, 2005.
- [55] T. Miyoshi and K. Kusano. A multi-state hll approximate riemann solver for ideal magnetohydrodynamics.
- [56] H. Nessyahu and E. Tadmor. Nonoscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 87(2) :408–463, 1990.
- [57] G.K Parks. *Physics of space plasmas*. Addison Wesley, 1991.
- [58] P.F. Peyrard and P. Villedieu. A Roe scheme for ideal MHD equations on 2D adaptively refined triangular grids. *J. Comput. Phys.*, 150(2) :373–393, 1999.
- [59] N.V. Pogorelov and A.Y. Semenov. Peculiarities of numerical modeling of discontinuous mhd flows. In J.-A. Désid eris, P. Le Tallec, E. Onate, J. Periaux, and E. Stein, editors, *Numerical Methods in Engineering'96*, pages 1022–1027. John Wiley & sons, 1996.
- [60] K.G. Powell. An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension). Technical report, 1994.
- [61] K.G. Powell, P.L. Roe, T.J. Linde, T.I. Gombosi, and D.L. De Zeeuw. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 154(2) :284–309, 1999.
- [62] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43(2) :357–372, 1981.
- [63] P.L. Roe and D.S. Balsara. Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(1) :57–67, 1996.
- [64] D. Ryu and T.W. Jones. Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics : Algorithm and tests for one-dimensional flow'. *Astrophys. J.*, 442 :228–258, March 1995.
- [65] D. Ryu, T.W. Jones, and A. Frank. Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics : Algorithm and tests for multi-dimensional flow. *Astrophys. J.*, 452 :785–796, 1995.

- [66] D. Ryu, F. Miniati, T.W. Jones, and A. Frank. A divergence-free upwind code for multidimensional magnetohydrodynamic flows. *Astrophys. J.*, 509 :244–255, dec 1998.
- [67] A.G. Sitenko and Malnev. *Plasma Physics Theory*. CRC Press, 1994.
- [68] E. Tadmor. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems. pages 451–512, 2006.
- [69] T. Tanaka. Finite volume tvd scheme on an unstructured grid system for three-dimensional mhd simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields. *J. Comput. Phys.*, 111(2) :381–389, 1994.
- [70] G. Tonon. Résultats et perspectives des recherches sur la fusion par confinement magnétique.
- [71] M. Torrilhon. Non-uniform convergence of finite volume schemes for Riemann problems of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 192(1) :73–94, 2003.
- [72] M. Torrilhon. Uniqueness conditions for riemann problems of ideal magnetohydrodynamics. *J. Plasma Phys.*, 69(3) :253–276, 2003.
- [73] M. Torrilhon. Locally divergence-preserving upwind finite volume schemes for magnetohydrodynamic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(4) :1166–1191 (electronic), 2005.
- [74] M. Torrilhon and D.S. Balsara. High order WENO schemes : investigations on non-uniform convergence for MHD Riemann problems. *J. Comput. Phys.*, 201(2) :586–600, 2004.
- [75] M. Torrilhon and M. Fey. Constraint-preserving upwind methods for multidimensional advection equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(4) :1694–1728 (electronic), 2004.
- [76] G. Tóth. Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems. *J. Comput. Phys.*, 128 :82–100, 1996.
- [77] G. Tóth. The $\nabla \cdot B = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *J. Comput. Phys.*, 161(2) :605–652, 2000.
- [78] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method [J. Comput. Phys. **32** (1979), no. 1, 101–136]. *J. Comput. Phys.*, 135(2) :227–248, 1997.
- [79] W. Wenlong Dai and P.R. Woodward. An approximate riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 111(2) :354–372, 1994.
- [80] A.L. Zachary, A. Malagoli, and P. Colella. A higher-order godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(2) :263–284, 1994.
- [81] U. Ziegler. A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 196(2) :393–416, 2004.

Equilibres

- [82] H.-D. Alber, *Existence of three-dimensional, steady, inviscid, incompressible flows with nonvanishing vorticity*, Math. Ann. 292 (1992), no. 3, 493–528.

- [83] T. Amari, J. J. Aly, J. F. Luciani, T. Z. Boulmezaoud and Z. Mikic, *Reconstructing the solar coronal magnetic field as a force free magnetic field*, Solar physics, 174 (1997), p. 129–149.
- [84] T. Amari, T. Z. Boulmezaoud and Y. Maday, *A regularization method for the ill posed Cauchy problem encountered in the Extrapolation of the photospheric magnetic field*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 339 (1998), p. 252–260.
- [85] T. Amari and T. Z. Boulmezaoud and Z. Mikic, *An iterative method for the reconstruction of the solar magnetic field*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 350, 1051–1059 (1999).
- [86] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge and V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique (1996), R96001, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [87] V. Arnold, *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits*, C. R. Acad. Sci. 261 (Groupe 1) (1965), p. 17–20.
- [88] D. N. Arnold and F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 19(1) :7–32, 1985.
- [89] P. Azerad, *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport*, Ph. D. dissertation, Université de Neuchatel, Suisse (1996).
- [90] I. Babuska, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math. 20 (1972-1973), p. 179–192.
- [91] H. Baty, *Etude de l'évolution non linéaire du kink interne et de la reconnexion magnétique dans les tokamaks*, Thèse de Doctorat de l'Université xParis VII, Paris, 1992.
- [92] C. Bardos, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels*, Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup., 4ème série, T3 (1970), p. 185–233.
- [93] F. Beltrami, *Considerazioni idrodinamiche*, Rend. Reale Ist. Lombardo 22 (1889), p. 121-130.
- [94] A. Bendali and N. Raynaud and J.M. Thomas, *New decomposition of shape functions spaces of mixed finite element methods*, Appl. Math. Lett., 9 (1996), 33–38.
- [95] I. M. Benn and J. Kress, *Force-free fields from Hertz potentials*, J. Phys. A, Math. Gener. 29 (1996), p. 6295–6304.
- [96] M. A. Berger and G. B. Field, *The topological properties of magnetic helicity*, J. Fluid Mech. 147 (1984), p. 133–148.
- [97] M. Bineau, *On the existence of force-free fields*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 25, 77–84, (1972).
- [98] A.H Boozer *Physics of magnetically confined plasmas*, Rev. Mod. Phys., 76, p 1071-1141 (2004)
- [99] J. Blum. *Numerical simulation and optimal control in plasma physics*. Wiley/Gauthier-Villars Series in Modern Applied Mathematics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1989.

- [100] T. Z. Boulmezaoud, *On the existence of non-linear Beltrami fields*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, T. 328, Série I (1999), p. 437–442.
- [101] T. Z. Boulmezaoud and T. Amari, *On the existence of non-linear force-free fields in three-dimensional multiply-connected domains*, à paraître dans Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).
- [102] T. Z. Boulmezaoud and T. Amari, *Approximation of linear force-free fields in bounded 3-D domains*. Math. Comput. Modelling 31 (2000), no. 2-3, 109–129.
- [103] T. Z. Boulmezaoud Boulmezaoud and T. Amari *A finite Element Method for Computing Nonlinear Force-Free Fields* Mathematical and Computer Modelling (2001) , 34, p. 903
- [104] T. Z. Boulmezaoud, Y. Maday and T. Amari, *On the linear Beltrami fields in bounded and unbounded three-dimensional domains*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 33, No. 2 (1999), p. 359–394.
- [105] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge, 8, R-2 (1974), p. 129–151.
- [106] F. Brezzi, G. Hauke, L.D. Marini, G. Sangalli, *Link-Cutting Bubbles for the Stabilization of Convection-Diffusion-Reaction Problems*, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 13 (3) (2003), p. 445–461.
- [107] F. Brezzi and M. Fortin, *A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods* , Numer. Math., 89 (2001), 457–491.
- [108] H. M. Chang , and R.L Carovillano, *Non Linear Force Free Magnetic Fields with Chosen Symmetry* , BAAS Vol. 13 (1981), p. 909.
- [109] C. Boulbe, T.Z. Boulmezaoud and T. Amari, *Numerical simulation of non-linear force-free fields*, (2007), A soumettre.
- [110] A. Brooks and T. R. J. Hughes, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, FENOMECH '81, Part I (Stuttgart, 1981). Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32 (1982), no. 1-3, 199–259.
- [111] O. P. Bruno and P. Laurence, *Existence of three-dimensional toroidal MHD equilibria with nonconstant pressure*, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996), no. 7, p. 717–764
- [112] S. Childress, *New solutions of the kinematic dynamo problem*, J. Mathematical Phys. 11, (1970) 3063–3076.
- [113] P.-G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [114] A. J. Chorin, *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, J. Comput. Phys. 2, 12-26 (1967).
- [115] T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, M., A. Mehr, A. M. Soward *Chaotic streamlines in the ABC flows*, J. Fluid Mech. 167 (1986), 353–391.
- [116] A. Ern and J.L. Guermond, *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, 36 (2002).
- [117] R. S. Falk and G. R. Richter, *Local error estimates for a finite element method for hyperbolic and convection-diffusion equations* SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), no. 3, p. 730–754.

- [118] J. P. Friedberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, New York : Plenum, 1987
- [119] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, 1986.
- [120] O. Glass, *Existence of solutions for the two-dimensional stationary Euler system for ideal fluids with arbitrary force*, Ann. I. H. Poincaré, 6 (2003), p. 921–946.
- [121] H. Grad and H. Rubin *MHD Equilibrium in an Axisymmetric Toroid.*, Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 31 (1958), Vienna : IAEA, p.190.
- [122] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman (1985).
- [123] N. M. Günter, *Potential Theory*, Ungar Ed., 1967.
- [124] M. Hénon, *Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier*, C. R. Acad. Sci. 262 A (1966), p. 312–314.
- [125] S.P Hirshman and J.T. Hogan *ORMEC : A three-dimensional MHD spectral inverse equilibrium code*, J. Comput. Phys, Vol. 63 , p 329-352 (1986).
- [126] S.P Hirshman, W.I. van Rij and P. Merkel *Three-dimensional free boundary calculations using a spectral green's function method*, Computer Physics Communications, Vol 43, p. 143-155 (1986).
- [127] S.P Hirshman and D.K Lee *MOMCON : A spectral code for obtaining three-dimensional magnetohydrodynamic equilibria*, Comp. Phys. Commun, Vol. 39, p 161-172 (1986).
- [128] G. Huysmans and P. Maget. *Magnétohydrodynamique des plasmas de tokamak*. Technical report, CEA Cadarache.
- [129] J.D Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, 1995.
- [130] C. Johnson, U. Nävert and J. Pitkäranta, *Finite element methods for linear hyperbolic problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., Vol. 45, 285–312 (1984).
- [131] R. Kress, *The treatment of a Neumann boundary value problem for force-free fields by an integral equation method*, Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, 82A (1978), p. 71-86.
- [132] R. Kress, *A remark on a boundary value problem for force-free fields*, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP), Vol. 28 (1977), p. 715-722.
- [133] P. Laurence and M. Avellaneda, *On Woltjer's variational principle for force-free fields*, J. Math. Phys. 32, No. 5 (1991), p. 1240-1253.
- [134] P. Lesaint, *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis*, Thèse de Doctorat, UPMC, Paris (1975).
- [135] J.-Q. Li, J.-X. Wang and F.-S. Wei, *A fluid dynamics approach for the computation of non-linear force-free fields*, Chin. j. Astron. Astrophy., vol. 3, No. 3 (2003), p. 247–256.
- [136] B. C. Low and Y. Q. Lou, *Modeling solar Force-free magnetic fields*, Astrophy. J. 352 (1991), p. 343–352.
- [137] B. C. Low, *Magnetic field configurations associated with polarity intrusion in a solar active region. I. the Force-free fields*, Solar Physics 77 (1982), p. 43–61.

-
- [138] B. C. Low, *Magnetic field configurations associated with polarity intrusion in a solar active region*, Solar Physics 115 (1988), p. 269–276.
- [139] H. Lütjens, A. Bondeson, and O. Sauter, *The CHEASE code for toroidal MHD equilibria*, Comput. Phys. Commun. 97 (1996), p. 219–267
- [140] J. C. Nédélec, *Mixed finite elements in R^3* , Numer. Math. 35 (1980), no. 3, p. 315–341.
- [141] T. Neukirch. Introduction to the theory of mhd equilibria. Technical report, Solar Theory Group, School of Mathematical and Computational Sciences, University of St. Andrews.
- [142] H.J. Oliver, A.H. Reiman, D.A Monticello *Solving the 3D MHD equilibrium equations in toroidal geometry by Newton's method*, J. Comput. Phys. 211, 99-128 (2006).
- [143] E.N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields. Their origin and their Activity*, Clarendon Press : Oxford, 1979
- [144] E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics*, Reidel, Dordrecht (1982).
- [145] A.H Reiman and H.S Greenside *Calculation of three-dimensional MHD equilibria with islands and stochastic regions*, Comput. Phys. Commun, 43 (1986), p. 157.
- [146] P.H. Roberts, *An introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, 1967.
- [147] J.E. Roberts and J.M. Thomas, *Mixed and hybrid methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. II, (1991), p 523–639.
- [148] T. Sakurai, *Computational modeling of magnetic fields in solar active regions*, Space Sci. Rev., 51 (1989), p. 11–48.
- [149] V.D. Shafranov, *Plasma equilibrium in a magnetic field*, Reviews of Plasma Physics, New York : Consultants Bureau, 2 (1966), p. 103.
- [150] T. Takeda and S. Tokuda, *Computation of MHD equilibria of Tokamak Plasma*, J. Comp. Phys., 93 (1991), p. 1-107.
- [151] J. B. Taylor, *Relaxation of magnetic reconnection in plasmas*, Rev. Mod. Phys. 58 (1986), p. 741–763.
- [152] A.G. Sitenko and Malnev. *Plasma Physics Theory*. CRC Press, 1994.
- [153] L. Woltjer, *A theorem on force-free magnetic fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. 44 (1958), p.489–491.

Contribution à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnétostatique.

Resumé : L'étude des interactions entre un plasma et un champ magnétique joue un rôle important dans différents domaines tels que la fusion thermonucléaire par confinement magnétique, les plasmas astrophysiques. En évolution, ces interactions sont décrites par les équations de la magnétohydrodynamique (MHD). A l'équilibre, les équations de la MHD se réduisent à celles de la magnétostatique. Les équations de la magnétostatique forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires en dimension 3 faisant intervenir le champ magnétique et la pression cinétique du plasma. Quand on néglige la pression, le champ magnétique est alors dit de Beltrami. Nous proposons de résoudre numériquement les équations régissant les champs de Beltrami par un algorithme itératif de type point fixe associé à des méthodes d'éléments finis. Cette stratégie itérative est étendue au cas des configurations d'équilibres avec pression. On s'intéresse ensuite à l'approximation des équations de la MHD idéale instationnaires. Il s'agit d'un système de loi de conservation hyperbolique non linéaire. Nous proposons une approche de type volumes finis dans laquelle les flux sont calculés par une méthode de Roe sur un maillage tétraédrique et où les flux du champ magnétique sont modifiés afin de satisfaire la contrainte de divergence nulle qui lui est imposée. Les méthodes proposées ont été implantées dans deux nouveaux codes tridimensionnels TETRAFFF pour les équilibres, et TETRAMHD pour la MHD. Les résultats numériques obtenus par ces codes montrent la performance des méthodes employées.

Mots clés : magnétohydrodynamique, magnétostatique, champs de Beltrami, champs sans force, fusion magnétique, éléments finis, volumes finis

Contribution to the resolution of magnetohydrodynamic and magnetostatic equations.

Abstract : Interaction between a plasma and a magnetic field appears and has an important role in various domains such as thermonuclear fusion by magnetic confinement or astrophysical plasmas for example. In evolution, these interactions are described by the equations of magnetohydrodynamics (MHD). At equilibrium, the MHD equations reduce to the magnetostatic equations involving the magnetic field and the kinetic pressure of the plasma. The magnetostatic equations form a system of 3D non linear partial differential equations involving a magnetic field and a kinetic plasma pressure. When the pressure is supposed negligible, the magnetic field is known as Beltrami field. In a first time, we propose to solve numerically the Beltrami fields problem using a fixed point iterative algorithm associated with finite element methods. This iterative strategy is extended in a second time to the computation of magnetostatic configurations with pressure. In the sequel, we interest in the approximation of ideal MHD equations. This system forms a nonlinear hyperbolic conservation law. We propose to use a finite volume approach, in which fluxes are calculated by a Roe's method on a tetrahedral mesh. Fluxes of the magnetic field are modified in order to satisfy the constraint of divergence free imposed on it. The proposed methods have been implemented in two new three dimensional codes called TETRAFFF for equilibrium, and TETRAMHD for MHD. The obtained numerical results confirm the high performance of these methods.

Keywords magnetohydrodynamic, magnetostatic, Beltrami fields, force free fields, finite elements, finite volume