



**HAL**  
open science

# APPLICATION DE METHODES ASYMPTOTIQUES A LA SIMULATION DE LA DIFFRACTION ELECTROMAGNETIQUE PAR UN CORPS REGULIER

Damien Laval

► **To cite this version:**

Damien Laval. APPLICATION DE METHODES ASYMPTOTIQUES A LA SIMULATION DE LA DIFFRACTION ELECTROMAGNETIQUE PAR UN CORPS REGULIER. Modélisation et simulation. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2006. Français. NNT: . tel-00197165

**HAL Id: tel-00197165**

**<https://theses.hal.science/tel-00197165v1>**

Submitted on 14 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 3188

**THÈSE de DOCTORAT  
de l'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I**

Spécialité :

**Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique**

présentée par

**Damien Laval**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I**

Sujet de la thèse :

**APPLICATION DE MÉTHODES  
ASYMPTOTIQUES À LA SIMULATION DE LA  
DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR  
UN CORPS RÉGULIER**

Thèse soutenue le 23 juin 2006

**Composition du jury**

MM.	<b>D. BOUCHE</b>	ENS Cachan	Rapporteur
	<b>I. ANDRONOV</b>	Université de St Petersburg	Rapporteur
MM.	<b>V. BRUNEAU</b>	Université de Bordeaux I	Directeur de thèse
	<b>H. STEVE</b>	Société Dassault-Aviation	Tuteur de thèse
	<b>F. MOLINET</b>	Société MOTHEMIM	Co-Directeur de thèse
	<b>A. BACHELOT</b>	Université de Bordeaux I	Examineur
	<b>P. FABRIE</b>	université de Bordeaux I	Examineur

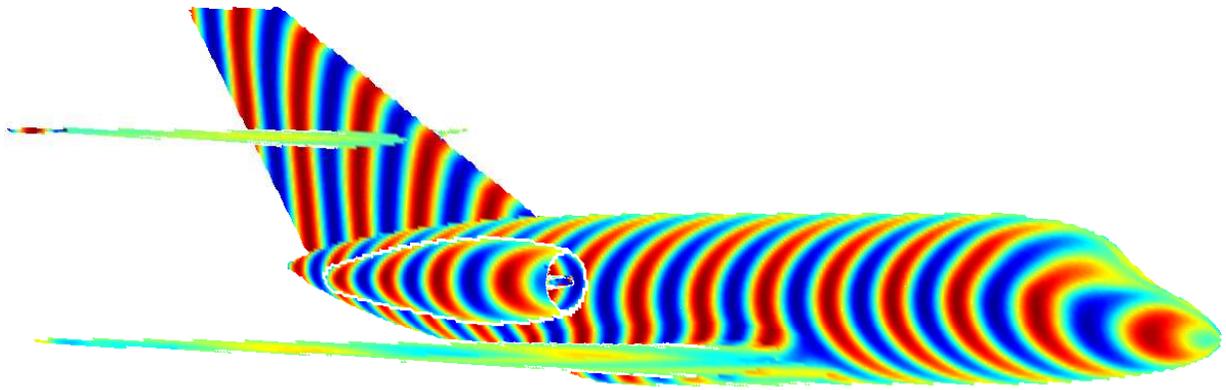


FIG. 1 – Courants électriques sur Falcon 20

# Introduction

La diffraction d'une onde électromagnétique par un corps est un phénomène couramment rencontré lors des études de conception et d'intégration d'antennes ainsi que dans les problèmes de signature radar. La constante progression des capacités informatiques a permis l'évolution des techniques de modélisation utilisées dans la simulation de ces problèmes.

L'évolution rapide des systèmes de communication par voie hertzienne nécessite aussi une très bonne connaissance de ces phénomènes afin d'optimiser les réseaux d'antennes. Ces diverses applications montrent l'intérêt de telles études.

La diffraction acoustique est elle aussi de plus en plus présente dans l'actualité. Que ce soit dans la discrétion en milieu marin ou la réduction des nuisances sonores aux abords des aéroports, ce sujet est traité dans de nombreux domaines.

En acoustique, le champ vérifie l'équation d'Helmholtz. Les équations régissant la propagation des ondes électromagnétiques sont les équations de Maxwell. Dans les deux cas ces équations sont associées aux conditions limites définies par la nature du corps diffractant. Les conditions limites utilisées sont les conditions de Dirichlet, Neumann ou d'impédance. Le champ considéré est alors la somme du champ incident et d'un champ diffracté.

L'étude et la résolution rigoureuse de ces équations, commencée par Sommerfeld au début du 20ème siècle, donne des solutions exactes. Aujourd'hui, les méthodes numériques résolvant les équations d'Helmholtz et de Maxwell sous leurs formes intégrales sont réunies sous le terme de "méthodes des moments".

La nature oscillatoire de la solution oblige une discrétisation du domaine en fonction de la longueur d'onde. Dans un domaine hautes fréquences comme pour des objets diffractants grands devant la longueur d'onde, l'assemblage et l'inversion de la matrice pleine dont le rang croît avec le carré de la fréquence devient très couteux en espace mémoire ainsi qu'en temps de calcul.

L'apparition des méthodes asymptotiques hautes fréquences dues à Keller [19, 20] dans les années 50 est un début de réponse au besoin de réduire le nombre d'opérations de la résolution de ces équations à hautes fréquences comme pour des objets de grande taille. Le principe de ces méthodes est le développement asymptotique en puissance inverse du nombre d'onde  $k$  de la solution du champ. Ce développement, appelé "Ansatz", se décompose en un terme exponentiel de phase représentant le comportement oscillant de la solution et en une amplitude lentement variable décomposée elle-même en une série de puissances décroissances entières ou fractionnaires de la longueur d'onde  $\lambda$ .

**L'OG (Optique Géométrique)** bien qu'antérieure à ces méthodes peut être retrouvée à partir de telles considérations.

La résolution de ces équations nous amène à un système.

- La première équation appelée équation "eikonale" nous donne le terme de phase ainsi que les trajets de propagation de l'énergie. Ces trajets, interprétations visuelles des phénomènes, sont les rayons de l'OG.
- La deuxième appelée "équation de transport" nous donne les amplitudes du développement.

Cette équation nous relie au principe de conservation d'énergie pour l'amplitude. L'**OG**, valide à très hautes fréquences, est retrouvée en ne prenant que le premier terme du développement de l'amplitude.

Ces méthodes de résolution sont moins lourdes que les précédentes. Les décompositions effectuées étant en puissances inverses de  $k$ , la précision de ces méthodes augmente avec la fréquence et leur domaine de validité se situe alors en hautes fréquences.

Ces méthodes, dérivant de l'**OG**, sont appelées "méthodes de rayons".

L'approche de Keller, la **GTD (Geometric Theory of Diffraction)**, amène une amélioration de l'**OG** par la prise en compte de termes diffractés. En effet, l'**OG** donne un champ nul dans la zone d'ombre.

Cette approche constitue la généralisation du principe de Fermat par la prise en compte des discontinuités ainsi que des parties régulières de l'objet diffractant. Cette prise en compte crée des rayons qui suivent la surface de l'objet et qui pénètrent dans la zone d'ombre.

Il reste cependant des zones où la solution donnée par la **GTD** est erronée. Les passages de caustiques ainsi que les zones de transition sont particulièrement propices aux changements de comportement de la solution.

Afin de pallier le problème de passage de caustique, on préfère utiliser la **Méthode des courants asymptotiques**, basée sur le principe d'équivalence qui permet de remplacer l'objet diffractant par des sources placées sur sa surface. Le champ diffracté est obtenu en faisant rayonner les courants électromagnétiques  $(\vec{J}, \vec{M})$  calculés à partir des champs tangents à la surface  $(\vec{E}^t, \vec{H}^t)$ , par les équations intégrales de Stratton-Chu.

Une première approche de ce type de méthodes, l'**OP (Optique Physique)**, utilise le champ d'**Optique Géométrique** pour obtenir les courants.

Par la suite, dans les années 60, Ufimtsev [37] étend l'**OP** par la prise en compte des discontinuités de surface. A hautes fréquences, les courants créés par les discontinuités appelés courants "non-uniformes", sont localisés au voisinage de la discontinuité. Leurs réductions asymptotiques en courants linéiques localisés sur la surface sont appelés "courants de frange". Cette extension s'appelle **PTD (Physical Theory of Diffraction)**.

En ce qui concerne les zones de transitions, l'utilisation de la méthode de la couche limite a permis l'évaluation des champs dans ces zones, notamment par Bouche et Molinet [10].

Très récemment, un certain type d'objet diffractant a été étudié par Bouche, Andronov et Molinet [5] : les corps allongés (le rayon de courbure de l'objet orthogonal au vecteur d'onde incident vérifie certaines propriétés).

Dans ce mémoire de thèse, le plan se décompose de la manière suivante :

- Dans la première partie, nous présentons la **GTD**, basée sur le principe de Fermat généralisé, fondement des études asymptotiques menées jusqu'ici. Nous expliquerons aussi les méthodes numériques utilisées ainsi que leurs limitations. Nous avons aussi développé un algorithme de lancer de rayons généralisé aux multiréflexions, aux transmissions ainsi qu'aux rampants sur la surface.
- Dans la deuxième partie, nous rappelons les règles de l'**OG** et nous montrons quelques résultats issus de ces formulations appliquées à différents problèmes canoniques. Une

fois l'OG appliquée nous procédons au calcul des courants et proposons une méthode permettant de réduire fortement le coût du calcul de l'intégrale de rayonnement.

- La troisième partie de ce rapport est consacrée à l'étude de la diffraction d'un corps convexe régulier et à l'uniformisation des formulations qui apparaissent dans la littérature notamment dans les ouvrages et articles de Bouche, Molinet et Andronov. Les développements sont effectués dans un premier temps pour l'équation de Helmholtz comportant une inconnue scalaire avant d'être appliqués aux équations de Maxwell qui contiennent, elles, deux inconnues vectorielles. En acoustique comme en électromagnétique, nous traitons la zone proche de la frontière ombre-lumière, l'ombre profonde proche de la surface et nous effectuons les raccords entre ces différentes zones. Des validations de ces formulations sur des cas canoniques sont aussi présentées en fin de partie.
- La quatrième partie contient les récents développements sur les cas particuliers de corps allongés. Nous y étudions les changements révélés par les caractéristiques de la surface de l'objet et nous proposons quelques méthodes d'utilisation des ces formulations. Les résultats présentés illustrent l'approche et la nécessité de la caractérisation de ces objets particuliers.
- Dans la cinquième partie, nous avons effectué une synthèse sur la manière générale de trouver une méthode de recherche de solutions analytique des équations de Heun acoustique et électromagnétique.

Une grande partie des formulations et algorithmes présentés dans cette thèse ont été intégrés, en Fortran 90 et Matlab, dans le code de calcul électromagnétique/acoustique SPECTRE de Dassault Aviation.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Théorie Géométrique de la Diffraction</b>	
	<b>Méthodes de Courants et Lancer de Rayons</b>	<b>8</b>
1	Description de la GTD . . . . .	10
1.1	Principe de Fermat . . . . .	10
1.2	Principe de Fermat généralisé . . . . .	12
1.3	Application à des problèmes concrets . . . . .	13
2	Lancer de Rayons . . . . .	18
2.1	Multi-Réflexion . . . . .	20
2.2	Zone de Fock et Rampants . . . . .	22
3	Méthode des Courants Asymptotiques . . . . .	23
3.1	Calcul des Courants . . . . .	24
3.2	Calcul du rayonnement (Méthode de Ludwig) . . . . .	25
<b>II</b>	<b>Optique Physique</b>	<b>33</b>
1	Espace Libre . . . . .	35
1.1	Equations de Maxwell en espace libre . . . . .	35
1.2	Résolution de l'équation eikonale . . . . .	36
1.3	Résolution de l'équation de transport . . . . .	37
2	Formulation dans la zone éclairée . . . . .	39
2.1	Réflexion et Transmission . . . . .	40
2.2	Calcul des matrices de réflexion et de transmission . . . . .	42
2.3	Impédance de surface . . . . .	44
2.4	Optique physique acoustique . . . . .	45
3	Validations de l'Optique Physique . . . . .	47
3.1	Validation d'une incidence . . . . .	47
3.2	Validation de la multi-réflexion . . . . .	49
3.3	Validation complète de l'Optique Physique . . . . .	52
<b>III</b>	<b>Formulations sur corps réguliers</b>	<b>55</b>
1	Méthode de la couche limite . . . . .	57
1.1	Analyse des champs de rayons . . . . .	57
1.2	Etude générale sur la surface . . . . .	59
2	Domaine de Fock . . . . .	60
2.1	Equation parabolique de Leontovich . . . . .	60
2.2	Helmholtz . . . . .	62

2.3	Maxwell	65
3	Ondes rampantes	68
3.1	Helmholtz	69
3.2	Maxwell	70
3.3	Conditions limites (détermination de la phase)	72
3.4	Influence géométrique	74
3.5	Détermination de l'amplitude	74
3.6	Interprétation des solutions	75
4	Raccordement des trois domaines	76
4.1	Helmholtz	76
4.2	Maxwell	78
5	Synthèse des Formulations	79
5.1	Récapitulatif des notations et des fonctions	79
5.2	Représentation des fonctions	80
5.3	Helmholtz	82
5.4	Maxwell	84
6	Validation des formulations	86
6.1	La Sphère	86

## **IV Formulations sur corps allongés 93**

1	Corps 'Modérément' allongés	95
1.1	Domaine de Fock	95
1.2	Ondes rampantes	96
1.3	Représentation des formulations de rampants pour un corps 'modérément' allongé	97
2	Corps 'Fortement' allongés	99
2.1	Domaine de Fock	99
2.2	Ondes rampantes	108
2.3	Raccordement des solutions	114
2.4	Modes de propagation des rampants	116
3	Validation des formulations	118
4	Équation Biconfluente Réduite de Heun	122
4.1	Classification des singularités des EDO	123
4.2	Sur la représentation des solutions de (IV.4.112)	125

## **V Annexe 128**

1	Géométrie Différentielle	130
1.1	Calcul de la matrice métrique ( $g$ )	130
1.2	Calcul du coefficient de divergence de géodésiques	132
1.3	Calcul de la Torsion	134
2	Développement de Luneberg-Kline	135
2.1	Helmholtz	135
2.2	Maxwell	136
2.3	Résolution de l'équation eikonale de la phase	137

3	Calcul du coefficient d'amplitude des rampants . . . . .	138
3.1	Corps non allongés . . . . .	139
3.2	Corps 'modérément' allongés . . . . .	140
4	Fonctions spéciales . . . . .	141
4.1	Fonctions d'Airy . . . . .	141
4.2	Calcul des fonctions de Fock . . . . .	143
5	Approximation de l'équation de Heun . . . . .	145
5.1	Helmholtz . . . . .	145
6	Modes de Propagation des Rampants . . . . .	148
6.1	Corps "classiques" (fonction d'Airy) . . . . .	148
6.2	Corps allongés . . . . .	150

Première partie

Théorie Géométrique de la  
Diffraction

Méthodes de Courants et Lancer de  
Rayons

# Table des Matières

1	Description de la GTD . . . . .	10
1.1	Principe de Fermat . . . . .	10
1.2	Principe de Fermat généralisé . . . . .	12
1.3	Application à des problèmes concrets . . . . .	13
2	Lancer de Rayons . . . . .	18
2.1	Multi-Réflexion . . . . .	20
2.2	Zone de Fock et Rampants . . . . .	22
3	Méthode des Courants Asymptotiques . . . . .	23
3.1	Calcul des Courants . . . . .	24
3.2	Calcul du rayonnement (Méthode de Ludwig) . . . . .	25

# 1 Description de la GTD

Keller montre dans sa théorie géométrique de la diffraction (1953-1957) que les phénomènes de diffraction peuvent être exprimés en termes géométriques par l'introduction de rayons directs, réfléchis, transmis et diffractés. Ces rayons ayant des chemins déterminés par le principe de Fermat.

Le concept de rayons diffractés est développé à partir d'une évaluation asymptotique (le nombre d'onde  $k$  tend vers l'infini) de solutions exactes de problèmes canoniques (problèmes sur des formes simples).

Il existe une relation directe entre les représentations en rayons et les développements asymptotiques solutions de l'équation d'Helmholtz

$$\Delta U + k^2 U = 0$$

avec  $k$  le nombre d'onde,

ou du système d'équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= iw\mu \vec{H} & \operatorname{rot} \vec{H} &= -iw\varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

développé dans [36], avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  les caractéristiques du milieu (perméabilité et permittivité). Ceci a débouché sur les bases d'une technique formelle appelée "méthode de rayons". Cette dernière conserve les expressions en puissances inverses de  $k$  issues de l'optique géométrique [23] pour les appliquer aux problèmes de diffraction par des objets réguliers. La construction d'une solution à haute fréquence par la méthode de rayons n'est possible que si le champ de rayons est régulier ce qui est satisfait par les limites en zone d'ombre ( fig. 2, fig. 3).

## 1.1 Principe de Fermat

Postulat énoncé en 1654 dans lequel Fermat affirme que sans se soucier des réflexions ou réfractions auxquelles il est exposé :

"Un rayon voyage d'un point à un autre par le chemin de durée minimum"

Dans un milieu d'indice  $n(\vec{r})$ , la longueur du chemin optique entre deux points  $A$  et  $B$  est

$$L(AB) = \int n(\vec{r}) ds$$

où  $AB$  est le chemin reliant les 2 points. Un rayon est défini comme étant la trajectoire satisfaisant le principe de Fermat reliant  $A$  et  $B$  et rendant l'intégrale stationnaire.

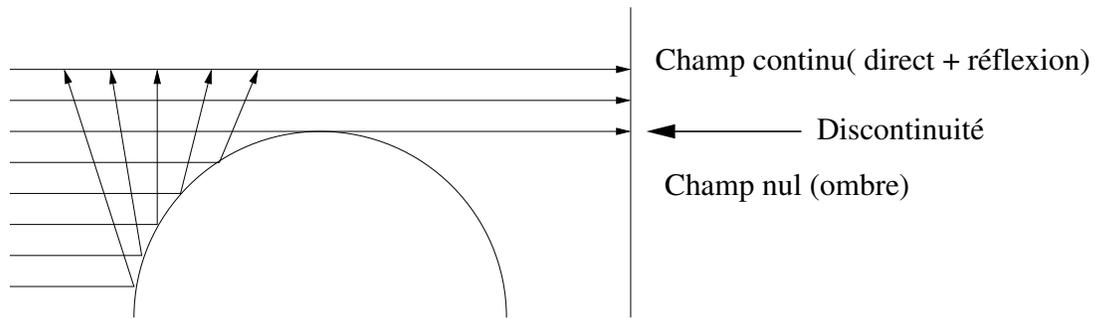


FIG. 2 – Définition du domaine par méthode d'Optique Géométrique

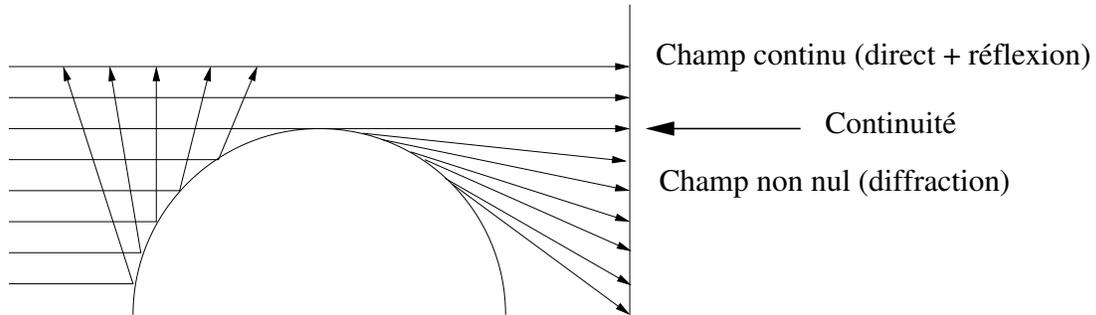


FIG. 3 – Définition du domaine par Théorie Géométrique de la Diffraction

La généralisation du principe de Fermat réside dans l'application de cet énoncé en tenant compte des contraintes de l'environnement. Pour la diffraction par une arête, on doit introduire une contrainte qui est un point de passage sur l'arête ( fig. 4). Pour la diffraction par un objet régulier, on doit introduire une contrainte qui est un arc sur l'objet ( fig. 5).

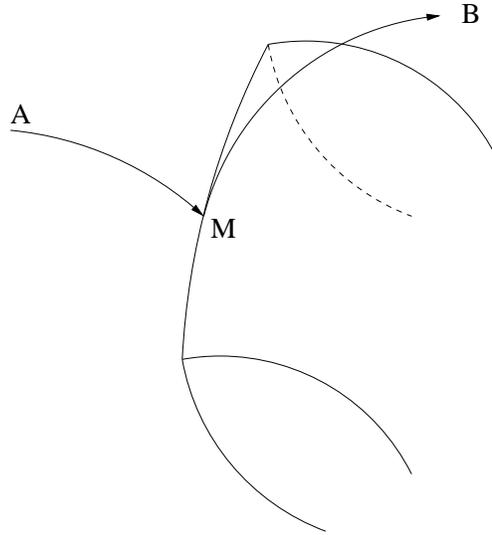


FIG. 4 – Principe de Fermat appliqué à une arête

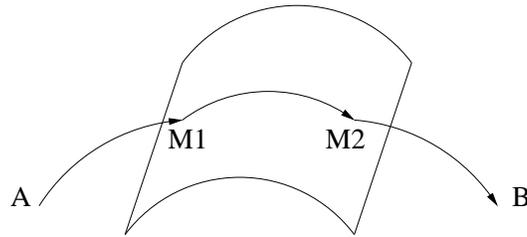


FIG. 5 – Principe de Fermat appliqué à un objet

## 1.2 Principe de Fermat généralisé

Le principe de Fermat généralisé prend en compte tous les types d'interactions possibles. On considère un chemin  $T$  comprenant  $N$  interactions en des points  $M$  situés sur des changements d'indice, des surfaces, des arêtes ou bien des pointes avec  $\vec{t}'_i, \vec{t}_i$  les tangentes en ces points ( fig. 6).

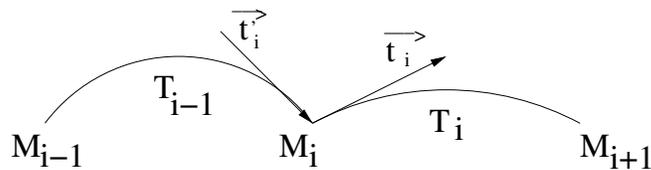


FIG. 6 – Chemin

On considère que le chemin  $T$  est un rayon si et seulement si sa longueur est stationnaire pour tous les chemins satisfaisant les connections aux points  $M_i$ .

On définit la variation

$$\delta(L(T)) = \int_T \delta(ds) = \int_T \vec{t}.d(\overrightarrow{\delta M})$$

avec  $\vec{t} = \frac{dM}{ds}$  le vecteur unitaire tangent au chemin en  $M$ .  $T$  est un chemin si  $\delta(L(T)) = 0$  pour tout  $\overrightarrow{\delta M}$  compatible avec les contraintes imposées sur les segments de rayons. Alors on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{T_i} \overrightarrow{\delta M}.d\vec{t} &= 0 \quad \forall i \in [0, N] \\ (\vec{t}'_i - \vec{t}_i).\overrightarrow{\delta M} &= 0 \quad \forall i \in [0, N] \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

### 1.3 Application à des problèmes concrets

L'application de ces équations aux problèmes de propagation et de diffraction nous donne les lois régissant le comportement des rayons.

#### En espace libre (indice du milieu constant)

Dans l'espace libre,  $\overrightarrow{\delta M}$  est arbitraire et a trois degrés de liberté. D'après la première équation, on a  $d\vec{t} = 0$  donc  $\vec{t} = \vec{t}_i = \vec{t}'_{i+1} = \text{cte}$ . Ceci nous donne la première loi d'optique géométrique qui est :

"Dans l'espace libre, les rayons sont des lignes droites."

#### Réflexion sur une surface régulière ( fig. 7)

On prend comme notation  $\vec{i} = \vec{t}_i$  et  $\vec{r} = \vec{t}_i$ . D'après la deuxième équation, on a  $\vec{i} - \vec{r} = \lambda \vec{n}$  avec  $\lambda$  un scalaire et  $\vec{n}$  la normale à la surface en  $M$ . Pour  $\vec{i} - \vec{r} = -2\cos(\theta)\vec{n}$ , on a  $\vec{r} = \vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{n}$ . Cette équation représente la loi de la réflexion :

"Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (défini par la normale à la surface et le vecteur de propagation du rayon incident) et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence."

#### Rayon de surface

Si  $T_i$  est un rayon de surface,  $\overrightarrow{\delta M}$  se trouve dans le plan tangent à la surface. On a alors  $d\vec{t}.\overrightarrow{\delta M} = 0$  et par conséquent  $\frac{d\vec{t}}{ds} = \lambda \vec{n}$ . En se rapportant à la formule de Frenet :  $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{h}}{\rho(s)}$  où  $\vec{h}$  est la normale principale au rayon de surface,  $\rho(s)$  le rayon de courbure principal en  $s$  et donc  $\vec{h}$  et  $\vec{n}$  coïncident, ce qui est la caractéristique de la géodésique sur une surface. La loi de propagation d'un rayon de surface est alors :

"Les rayons de surface suivent les géodésiques de la surface."

Dans le cas d'une surface convexe, on parle de rayons rampants.

Dans le cas d'une surface concave, on parle de rayons de galerie à écho.

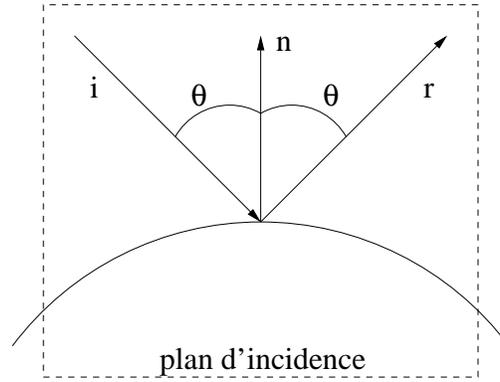


FIG. 7 – Réflexion

### Rayon rampant émis par un rayon d'espace ( fig. 8)

A l'intersection du rayon incident et du rayon rampant,  $\overrightarrow{\delta M}$  se trouve dans le plan tangent à la surface. On prend comme notation  $\vec{i} = \vec{t}_i$  et  $\vec{r} = \vec{t}_i$ . D'après la deuxième équation, on a  $\vec{i} - \vec{r} = \lambda \vec{n}$ . On a  $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$  et par conséquent  $\vec{i} = \vec{r}$  et  $\vec{i} \cdot \vec{n} = 0$ . L'angle d'incidence est donc de  $\frac{\pi}{2}$ .

Se situant en incidence rasante, le point  $M$  est sur la limite ombre / lumière.

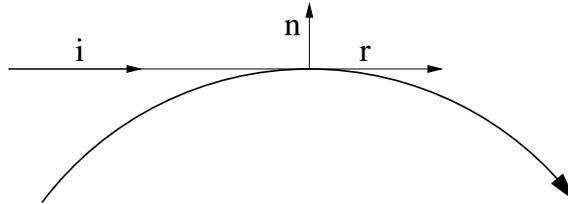


FIG. 8 – Emission d'un rayon rampant par un rayon d'espace

On a alors la loi suivante :

”Un rayon spatial lance un rayon rampant à la limite ombre/lumière et le vecteur tangent au rampant est suivant le vecteur tangent au rayon incident.”

### Rayon d'espace émis par un rayon rampant ( fig. 9)

De même que précédemment, la deuxième équation nous donne  $\vec{i} = \vec{r}$ .

La loi d'émission de rayons spatiaux par un rayon rampant peut alors s'écrire :

”Un rayon rampant lance des rayons spatiaux et les vecteurs tangents aux rayons spatiaux sont suivant le vecteur tangent au rayon rampant au point de décrochage.”

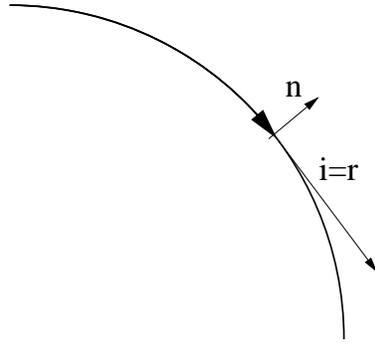


FIG. 9 – Emission d’un rayon d’espace par un rayon rampant

### Rayons d’espace émis par la diffraction sur une arête ( fig. 10)

Pour être complet, nous reprenons les lois appliquées aux géométries singulières. Ces dernières ne sont pas appliquées dans le cadre de cette thèse mais elles peuvent être traitées de la même manière que les lois sur corps réguliers que nous allons traiter.

On prend comme notation  $\vec{i} = \vec{t}'_i$  et  $\vec{d} = \vec{t}_i$ . On a  $\overline{\delta M} = \vec{s}$  selon la tangente à l’arête. La deuxième équation nous donne alors  $(\vec{i} - \vec{d}) \cdot \vec{s} = 0$ . Cette équation définit un cône, appelé cône de Keller, dont l’axe est la tangente à l’arête.

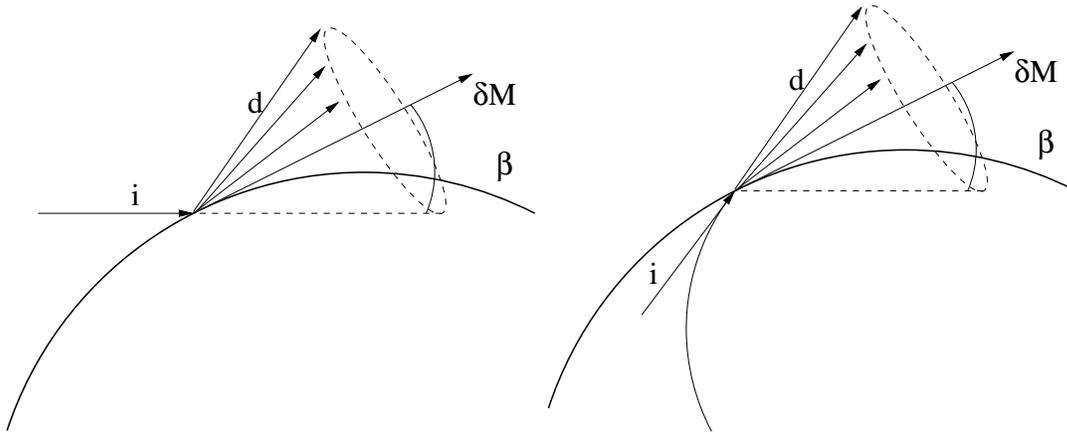


FIG. 10 – Diffraction par une arête (cône de Keller)

La loi de diffraction d’un rayon spatial par une arête peut alors s’écrire :

”Tous les rayons spatiaux diffractés par une arête doivent résider sur le cône de Keller.”

**Rayons rampants émis par la diffraction d'un rayon spatial sur une arête ( fig. 11)**

On reprend  $\overrightarrow{\delta M} = \vec{s}$  selon la tangente à l'arête. La deuxième équation nous donne alors  $(\vec{i} - \vec{d}) \cdot \vec{s} = 0$  ce qui nous redonne le cône de Keller.

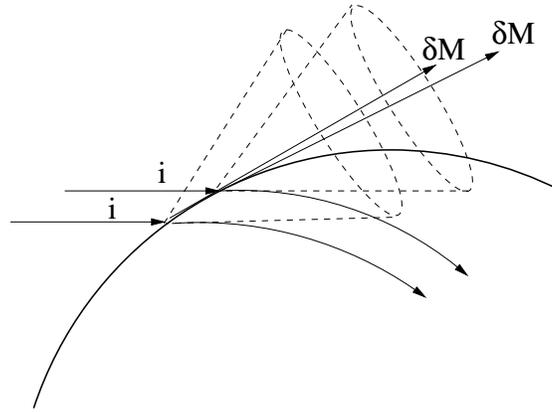


FIG. 11 – Rampant émis par une arête

La loi d'émission de rayons rampants par une arête peut alors s'écrire :

”Tous les rayons rampants originaires de la diffraction d'un rayon spatial sur une arête sont, à l'origine, tangents au cône de Keller.”

**Rayons spatiaux émis par la diffraction sur une pointe ( fig. 12)**

Etant donné la géométrie de la singularité, on a  $\overrightarrow{\delta M} = 0$ . La première équation est donc vérifiée quelque soit la direction du rayon diffracté.

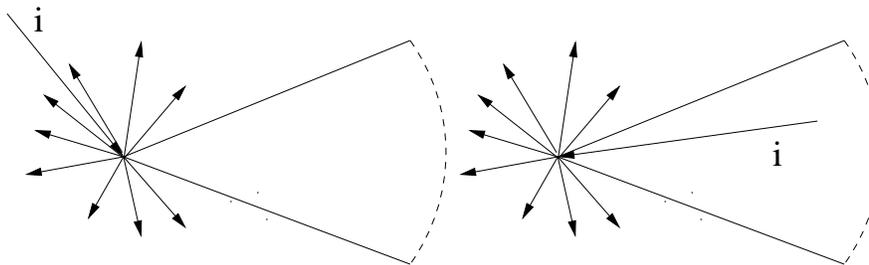


FIG. 12 – Diffraction par une pointe

La loi d'émission de rayons spatiaux par une pointe peut alors s'écrire :

”Une pointe ou un point singulier diffracte dans toutes les directions.”

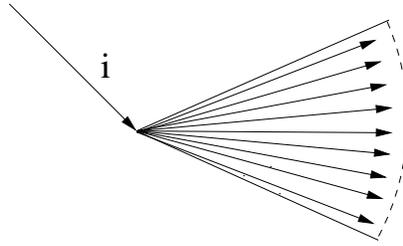


FIG. 13 – Rampants émis par une pointe

**Rayons rampants émis par la diffraction sur une pointe ( fig. 13)**

De la même façon que précédemment, la première équation est vérifiée quelque soit la direction du rayon diffracté.

La loi d'émission de rayons rampants par une pointe peut alors s'écrire :

”Tous les rayons rampants originaires de la diffraction d'un rayon spatial sur une pointe sont émis suivant les génératrices du cône tangent à la pointe.”

**Rayon suivant une arête ou un fil ( fig. 14)**

On a  $\overrightarrow{\delta M} = \vec{s}$  selon la tangente au fil (ou à l'arête).

La deuxième équation nous donne alors  $(\vec{t}'_i - \vec{t}_i) \cdot \vec{s} = 0$ .

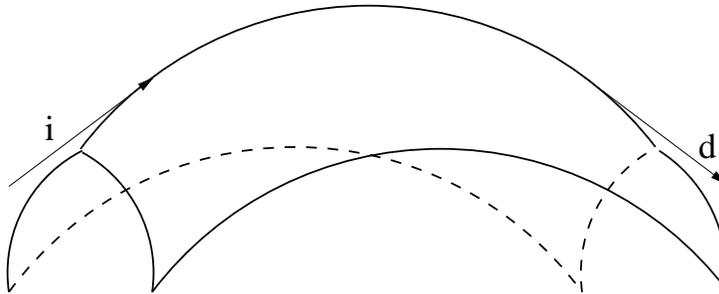


FIG. 14 – Rayons se propageant le long d'une arête

La loi d'émission de rayons rampants par une pointe peut alors s'écrire :

”Les rayons d'arête s'attachent et se détachent tangentiellement au fil.”

## 2 Lancer de Rayons

L'utilisation d'une méthode de rayons consiste à considérer, pour toute source, le champ à propager comme une famille de points  $\{M_i\}_i$  auxquels on associe une famille de vecteurs d'onde  $\{\vec{k}_i\}_i$ , de champs  $\{U_i\}_i$ ,  $\{\vec{E}_i\}_i$ ,  $\{\vec{H}_i\}_i$  et de phase  $\{\varphi_i\}_i$ . Ces champs étant exprimés sous forme de développements asymptotiques de Luneberg-Kline :

$$U(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(\vec{r})}{(ik)^j} \quad (\text{I.2.2})$$

pour Helmholtz.

$$\vec{U}(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{u}_j(\vec{r})}{(ik)^j} \quad (\text{I.2.3})$$

avec  $\vec{U}$  désignant soit le champ  $\vec{E}$  soit le champ  $\vec{H}$  pour Maxwell.

Nous représentons le front d'onde par un maillage portant les champs et phases ( fig. 15).

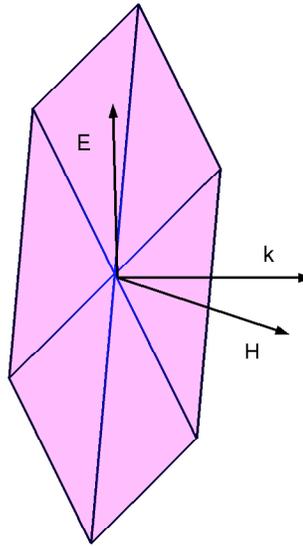
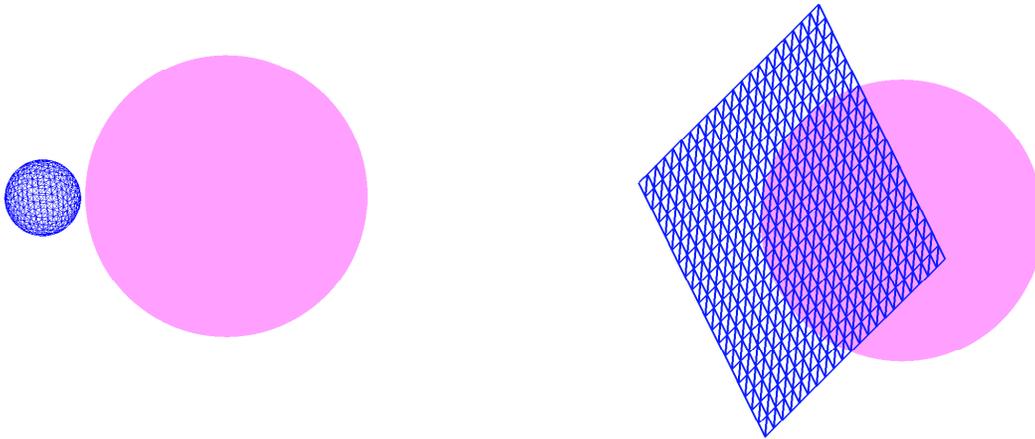


FIG. 15 – Modélisation des champs

Nous créons donc un maillage autour de la source ( fig. 16).



Une sphère pour une source ponctuelle

Un plan pour une onde plane

FIG. 16 – Maillages de front d'onde

Le champ est alors exprimé en tout point de ce maillage par une simple interpolation suivant sa position dans l'un ou l'autre des éléments de ce maillage.

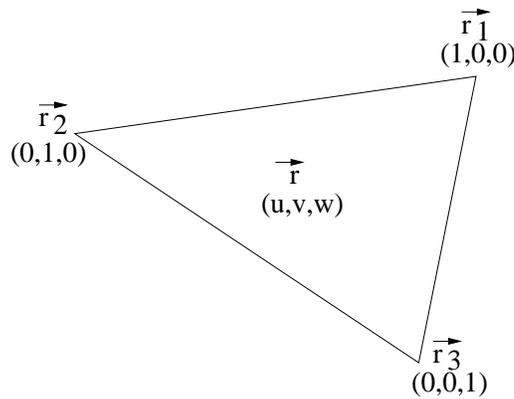


FIG. 17 – Interpolation des champs

On a alors :

$$\varphi(\vec{r}) = u\varphi(\vec{r}_1) + v\varphi(\vec{r}_2) + w\varphi(\vec{r}_3) \quad (\text{I.2.4})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = u\vec{E}(\vec{r}_1) + v\vec{E}(\vec{r}_2) + w\vec{E}(\vec{r}_3) \quad (\text{I.2.5})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = u\vec{H}(\vec{r}_1) + v\vec{H}(\vec{r}_2) + w\vec{H}(\vec{r}_3) \quad (\text{I.2.6})$$

avec  $u + v + w = 1$ .

La propagation des rayons dans la direction  $\vec{k}_i$  est donnée par la résolution de l'équation eikonale II.1.8, l'amplitude est calculée par le principe de conservation de l'énergie donné par la résolution de l'équation de transport (II.1.9).

A chaque intersection entre un rayon et une surface, les amplitudes des ondes réfléchies et transmises sont données par les équations (II.2.17) et (II.2.19) prenant en compte les caractéristiques géométriques et physiques de la surface intersectée (normale, courbures, caractéristiques du matériau, ...).

On a alors les résultats d'optique géométrique qui sont les résultats du premier ordre (en  $k$ ).

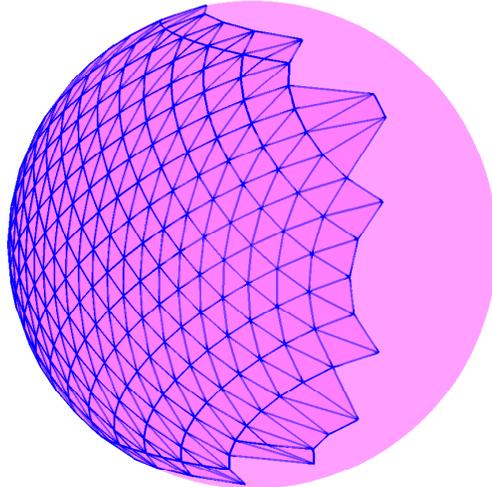


FIG. 18 – Maillage d'optique géométrique

## 2.1 Multi-Réflexion

Lorsqu'on traite de la multi-réflexion, on doit créer une nappe réfléchie et une nappe transmise (si il y a lieu...). Le calcul des vecteurs d'onde transmis se fait alors en fonction des lois de Schnell-Descartes prenant en compte les indices des milieux ( fig. 19).

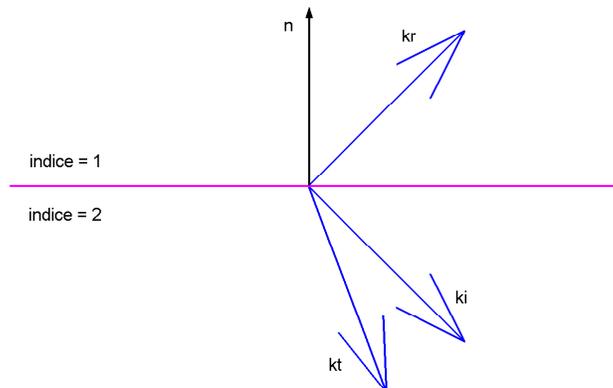


FIG. 19 – Vecteurs d'onde réfléchis et transmis

Pour un trièdre, le maillage portant les champs évolue réflexion après réflexion ( fig. 20).

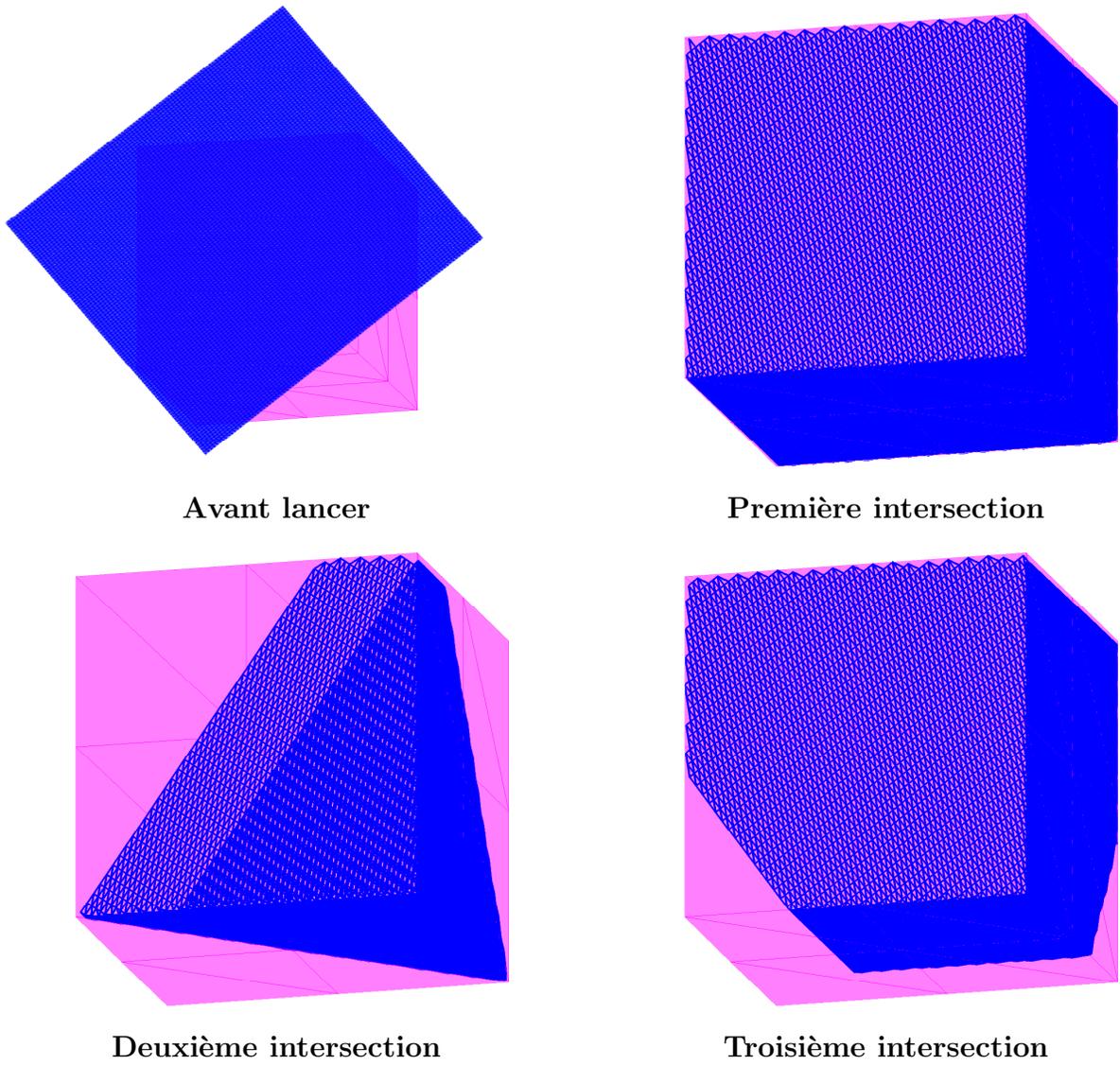


FIG. 20 – Interactions sur le trièdre

## 2.2 Zone de Fock et Rampants

La Théorie Géométrique de la Diffraction nous amène la présence de rayons diffractés au niveau de la frontière ombre-lumière et de rayons rampants partant de cette même frontière. L'intérêt géométrique suivant est alors la recherche de la frontière ombre-lumière. Cette recherche se fait par un lancer de géodésiques partant des rayons intersectés les plus proches de la frontière, c'est-à-dire ceux dont le produit scalaire  $\vec{k} \cdot \vec{n}$  est le plus petit.

On recherche alors les points de ces géodésiques pour lesquels  $\vec{k} \cdot \vec{n}$  est nul. Ces points sont sur la frontière ombre-lumière.

On a alors les résultats tirés des formulations de la zone de Fock provenant d'une géométrie de champs de la zone éclairée ( fig. 21).

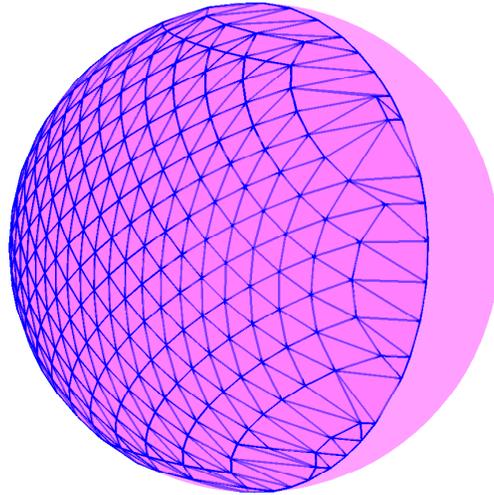


FIG. 21 – Maillage de la partie éclairée

Le calcul dans la zone d'ombre se fait ensuite par un lancer de géodésiques suivant le vecteur d'onde incident.

L'utilisation des formulations de rampants nous amène alors des résultats améliorés ayant pour support la géométrie de l'objet de la figure ( fig. 22).

Le coût des méthodes de rayons est difficile à déterminer. Le nombre de rayons lancés est de loin le paramètre le plus important dans le coût du calcul. On peut lancer assez de rayons afin d'obtenir une discrétisation de la surface éclairée du même ordre que dans le cadre d'un calcul en méthode intégrale. Lors de calculs par lancer de rayons, nous connaissons le vecteur d'onde incident en chaque point. Dans (3.2) nous expliquons une méthode de calcul de l'intégrale de réaction utilisant cet avantage et permettant de lancer moins de rayons et donc de réduire le coût des calculs.

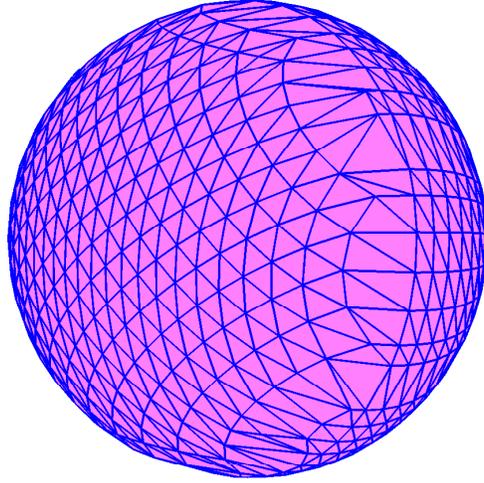


FIG. 22 – Maillage sur toute la sphère

### 3 Méthode des Courants Asymptotiques

L'expression des champs en termes de rayons (Développement de Luneberg-Kline) n'est pas valable dans des zones telles que la couche limite. On exprime alors le champ sous forme intégrale. La représentation intégrale des champs est le fondement même de la méthode étudiée ici.

Le principe d'équivalence en surface nous donne que le corps de l'objet diffractant de volume  $V$  et de surface extérieure  $S$  peut être remplacé par des sources de courant fictives électriques  $\vec{J}$  et magnétiques  $\vec{M}$  disposées sur la surface ( fig. 23).

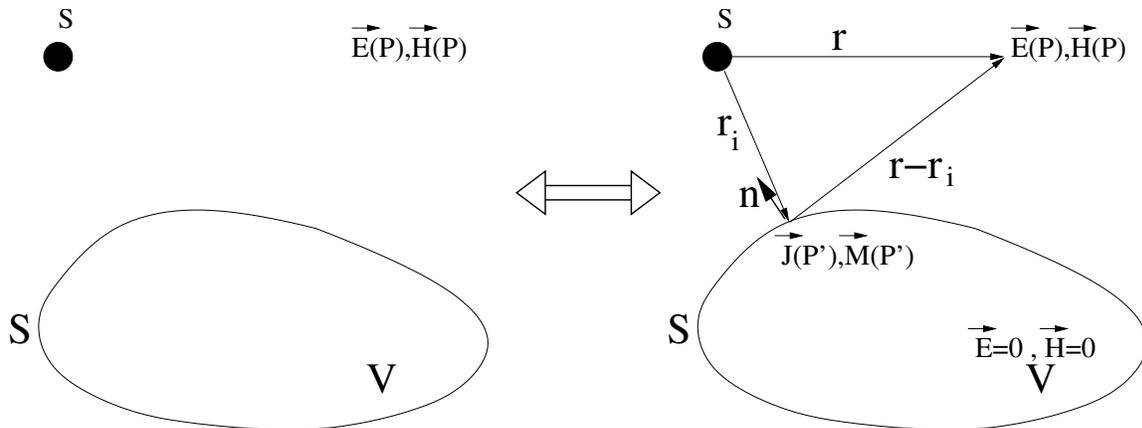


FIG. 23 – Principe d'équivalence en surface

### 3.1 Calcul des Courants

On décompose les champs en amplitude (le développement asymptotique est réduit à son premier ordre) et phase.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-j\varphi(\vec{r})} \quad (\text{I.3.7})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r})e^{-j\varphi(\vec{r})} \quad (\text{I.3.8})$$

Les courants surfaciques s'expriment en fonction des champs totaux sur la surface par les relations :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{n} \wedge \vec{H}_0(\vec{r}) \quad (\text{I.3.9})$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \wedge \vec{n} \quad (\text{I.3.10})$$

avec  $\vec{n}$  unitaire normale à la surface et dirigé vers l'extérieur.

On décompose alors les courants de la même façon que les champs.

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_0(\vec{r})e^{-j\varphi(\vec{r})} \quad (\text{I.3.11})$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0(\vec{r})e^{-j\varphi(\vec{r})} \quad (\text{I.3.12})$$

Les relations (I.3.9) et (I.3.10) étant linéaires, l'interpolation des courants est la même que pour les champs, c'est à dire linéaire.

Les expressions des champs re-rayonnés par les courants surfaciques sont alors :

$$\vec{E}_0(P) = \int_{\Sigma} -jk\eta_0 \vec{J}\Psi - \vec{M} \wedge \vec{\nabla}_i \Psi + \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{\nabla}_i \Psi dS \quad (\text{I.3.13})$$

$$\vec{H}_0(P) = \int_{\Sigma} -\frac{jk}{\eta_0} \vec{M}\Psi + \vec{J} \wedge \vec{\nabla}_i \Psi + \frac{\tau_s}{\mu_0} \vec{\nabla}_i \Psi dS \quad (\text{I.3.14})$$

avec

$$\Psi(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad (\text{I.3.15})$$

la fonction de Green en espace libre et  $\vec{\nabla}_i$  le gradient par rapport à  $\vec{r}_i$ .

Les valeurs  $\rho_s$  et  $\tau_s$ , densités surfaciques de charges électriques et magnétiques sur la surface, s'expriment par :

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} = -jw\rho_s \quad (\text{I.3.16})$$

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{M} = -jw\tau_s \quad (\text{I.3.17})$$

avec  $\vec{\nabla}_s$  le gradient surfacique.

Le but des calculs effectués est de connaître le champ au point d'observation.

Nous pourrions continuer la méthode de rayons jusqu'à l'observateur. Ce procédé contient certaines limites telles que la présence potentielle de caustiques lors du trajet de la surface jusqu'à l'observateur.

En utilisant une méthode de courants, l'intégrale étant calculée par équivalence, ce problème est éliminé.

### 3.2 Calcul du rayonnement (Méthode de Ludwig)

Le calcul du rayonnement consiste à calculer l'intégrale de réaction suivante :

$$I = \int_{\Sigma} \left( \vec{J}^i(\vec{r}) \cdot \vec{E}^o(\vec{r}) - \vec{M}^i(\vec{r}) \cdot \vec{H}^o(\vec{r}) \right) e^{-j\varphi^i(\vec{r})} e^{-j\varphi^o(\vec{r})} ds(\vec{r}) \quad (\text{I.3.18})$$

avec  $\vec{J}^i$  et  $\vec{M}^i$  les courants électriques et magnétiques de surface calculés précédemment,  $\varphi^i$  la phase associée et  $\vec{E}^o$  et  $\vec{H}^o$  les champs électriques et magnétiques de l'observateur calculés par réciprocité ainsi que  $\varphi^o$  la phase associée.

Ce calcul par réciprocité revient à considérer l'observateur comme une source et à en calculer les champs rayonnés sur la surface.

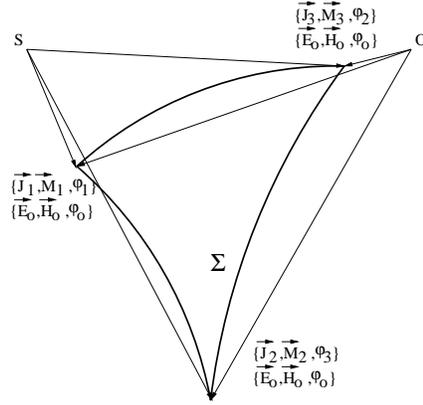


FIG. 24 – Quantités sur la surface

En prenant :

$$\begin{aligned} A(\vec{r}) &= \vec{J}^i(\vec{r}) \cdot \vec{E}^o(\vec{r}) - \vec{M}^i(\vec{r}) \cdot \vec{H}^o(\vec{r}) \\ \varphi(\vec{r}) &= \varphi^i(\vec{r}) + \varphi^o(\vec{r}) \end{aligned}$$

on doit donc calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\Sigma} A(\vec{r}) e^{-j\varphi(\vec{r})} ds(\vec{r}) = \int_{\Sigma} A(\vec{r}) e^{-jkl(\vec{r})} ds(\vec{r}) \quad (\text{I.3.19})$$

On développe alors l'amplitude et la phase au premier ordre :

$$A(\vec{r}) \approx A(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r \quad (\text{I.3.20})$$

$$l(\vec{r}) \approx l(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r \quad (\text{I.3.21})$$

Avec  $\vec{A}_r$  et  $\vec{l}_r$  calculées par une approximation facette plane sur le triangle */left*( $P_1, P_2, P_3$ /*right*) :

$$\begin{aligned} \vec{A}_r &= (A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)) \frac{P_1 P_3^2 \vec{P}_1 \vec{P}_2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3) \vec{P}_1 \vec{P}_3}{P_1 P_2^2 P_1 P_3^2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3)^2} + (A(\vec{r}_3) - A(\vec{r}_1)) \frac{P_1 P_2^2 \vec{P}_1 \vec{P}_3 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3) \vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_1 P_2^2 P_1 P_3^2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3)^2} \\ \vec{l}_r &= (l(\vec{r}_2) - l(\vec{r}_1)) \frac{P_1 P_3^2 \vec{P}_1 \vec{P}_2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3) \vec{P}_1 \vec{P}_3}{P_1 P_2^2 P_1 P_3^2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3)^2} + (l(\vec{r}_3) - l(\vec{r}_1)) \frac{P_1 P_2^2 \vec{P}_1 \vec{P}_3 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3) \vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_1 P_2^2 P_1 P_3^2 - (\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 \vec{P}_3)^2} \end{aligned}$$

On a donc, au premier ordre :

$$\begin{aligned}
I &\approx \int_{\Sigma} \left( A(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r \right) e^{-jk(l(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r)} dS(\vec{r}) \\
&\approx A(\vec{r}_0) e^{-jk l(\vec{r}_0)} \int_{\Sigma} \left( 1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{A}_r}{A(\vec{r}_0)} \right) e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} dS(\vec{r}) \quad (\text{I.3.22})
\end{aligned}$$

La formule de Stokes nous donne :

$$\int_{\Sigma} (\vec{n} \wedge \nabla_{\Sigma} f) d\Sigma = \int_C f \vec{u} dC \quad (\text{I.3.23})$$

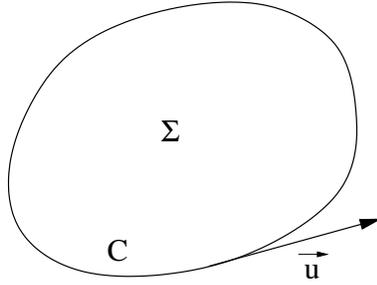


FIG. 25 – Quantités de la formule de Stokes

donc pour  $f = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{A}_r}{A(\vec{r}_0)} e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r}$  on a :

$$\int_{\Sigma} \left[ \left( \vec{n} \wedge \vec{A}_r - jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r (\vec{n} \wedge \vec{l}_r) \right) \right] e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} d\Sigma = \int_C (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} \vec{u} dC \quad (\text{I.3.24})$$

On calcule le coefficient de Knott  $Q = |\vec{n} \wedge \vec{l}_r|$ .

En multipliant l'équation précédente par  $\vec{q} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{l}_r}{Q}$ , on a :

$$\begin{aligned}
-jkQ \int_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} d\Sigma &= -\vec{q} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{A}_r) \int_{\Sigma} e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} d\Sigma \\
&+ \int_C (\vec{q} \cdot \vec{u}) (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r e^{-jk(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} dC \quad (\text{I.3.25})
\end{aligned}$$

La formule de Gordon nous amène :

$$\int_{\Sigma} e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}_0).\vec{l}_r} d\Sigma = \frac{j}{kQ} \sum_{m=1}^M (\vec{q} \cdot \vec{a}_m) e^{-jk(r_m-\vec{r}_0).\vec{l}_r} \sin_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \quad (\text{I.3.26})$$

$$= S e^{-jk r_0 \cdot \vec{l}_r} \text{ si } Q = 0 \quad (\text{I.3.27})$$

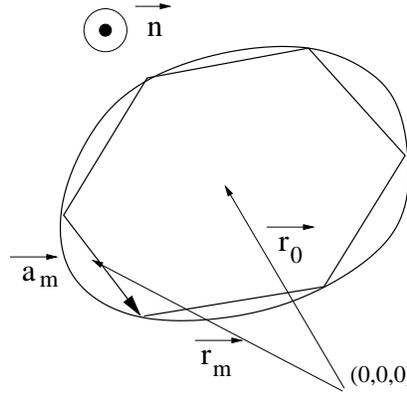


FIG. 26 – Quantités de la formule de Gordon

et on a aussi :

$$\begin{aligned} & \int_C (\vec{q} \cdot \vec{u}) (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}_0).\vec{l}_r} dC \\ &= \sum_{m=1}^M (\vec{q} \cdot \vec{a}_m) e^{-jk(r_m-\vec{r}_0).\vec{l}_r} \left[ (r_m - r_0) \cdot \vec{A}_r \sin_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{j}{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m} (\vec{a}_m \cdot \vec{A}_r) \left( \cos \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) - \sin_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \right) \right] \quad (\text{I.3.28}) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= A(\vec{r}_0) e^{-jkl(\vec{r}_0)} \int_{\Sigma} \left( 1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{A}_r}{A(\vec{r}_0)} \right) e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}_0).\vec{l}_r} ds(\vec{r}) \\ &= e^{-jkl(\vec{r}_0)} \sum_{m=1}^M \frac{j}{kQ} (\vec{q} \cdot \vec{a}_m) e^{-jk(r_m-\vec{r}_0).\vec{l}_r} \left[ \left( A(\vec{r}_0) - \frac{j}{kQ} (\vec{n} \wedge \vec{A}_r) \right) \sin_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{j}{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m} (\vec{a}_m \cdot \vec{A}_r) \left( \cos \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) - \sin_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \right) \right] \quad (\text{I.3.29}) \end{aligned}$$

Il existe des cas particuliers pour lesquels on peut réduire l'expression :

1.  $\vec{l}_r \cdot \vec{a}_m \rightarrow 0$

Cette condition implique :

$$\frac{j}{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m} (\vec{a}_m \cdot \vec{A}_r) \left( \cos \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) - \text{sin}_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) \right) \rightarrow -\frac{j k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{12} (\vec{a}_m \cdot \vec{A}_r)$$

ce qui amène :

$$I = e^{-jkl(\vec{r}_0)} \sum_{m=1}^M \frac{j}{kQ} (\vec{q} \cdot \vec{a}_m) e^{-jk(\vec{r}_m - \vec{r}_0) \cdot \vec{l}_r} \left[ \left( A(\vec{r}_0) - \frac{j}{kQ} (\vec{n} \wedge \vec{A}_r) \right) \text{sin}_c \left( \frac{k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{2} \right) - \frac{j k \vec{l}_r \cdot \vec{a}_m}{12} (\vec{a}_m \cdot \vec{A}_r) \right]$$

2.  $Q \rightarrow 0$

On a alors :

$$I = S \left( A(\vec{r}_0) + (\vec{r}_b - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_r \right)$$

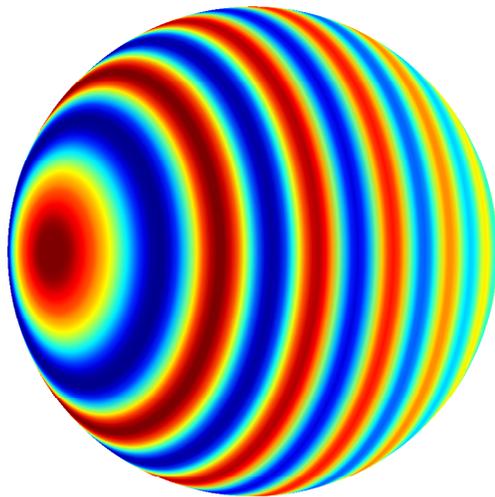
avec  $\vec{r}_b$  le barycentre de la facette.

## Validation de la méthode de Ludwig

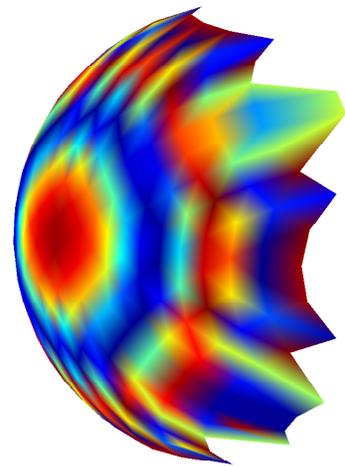
Après avoir détaillé la méthode de Ludwig, nous allons maintenant donner des exemples de validations dans lesquels nous verrons les apports d'une telle méthode.

Nous prenons le cas de la sphère acoustique à  $10kHz$ . Nous effectuons un calcul en méthode asymptotique et un calcul par une méthode intégrale.

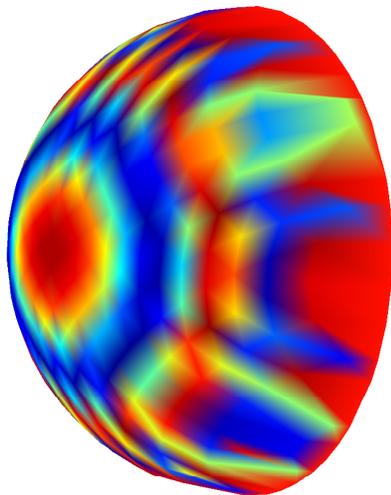
Les résultats de la méthode intégrale et des lancers de rayons de la méthode asymptotique se présentent sous la forme :



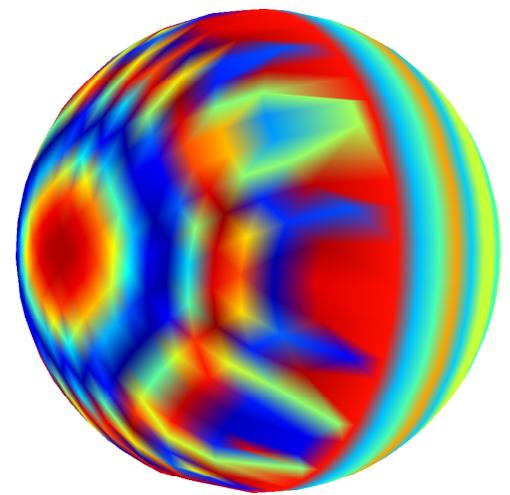
Méthode Intégrale



Optique Géométrique



Formulations de Fock



Formulations de Rampants

FIG. 27 – Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à  $10kHz$

On remarque que sur les résultats de la méthode asymptotique, il est impossible de discerner les extrema de phase de l'onde.

Cette représentation est directement issue du lancer de rayons et du calcul des potentiels de simple et double couche sur la surface. Pour obtenir une représentation plus fine des résultats de la méthode asymptotique, on peut projeter ces résultats sur un maillage de sphère plus fin (discrétisation en  $\frac{\lambda}{10}$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde). On a alors :

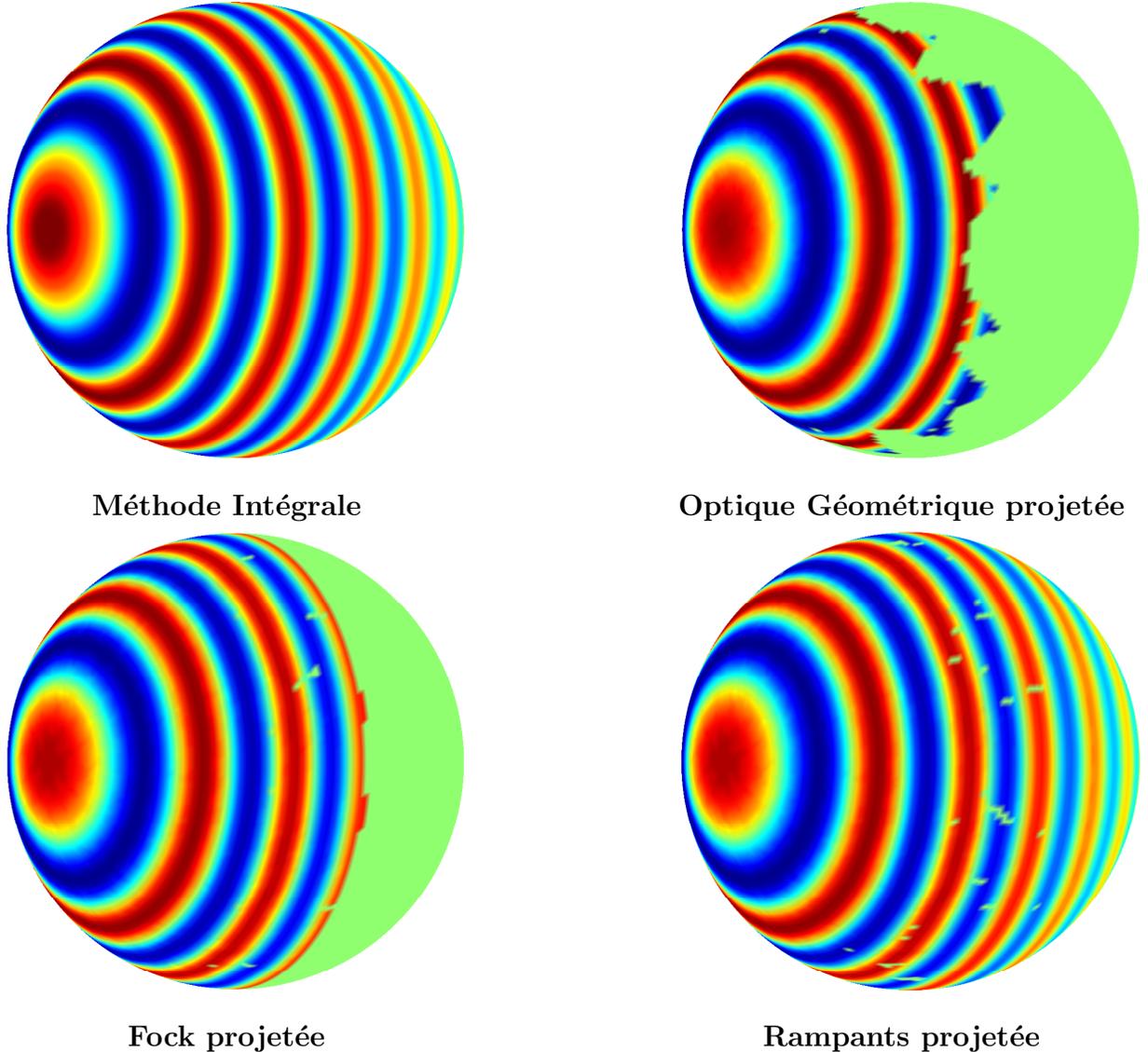


FIG. 28 – Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à  $10kHz$  (avec projection)

On remarque que la projection des résultats des lancers de rayons correspond au résultat de la méthode intégrale. L'avantage apporté par le lancer de rayons est alors de pouvoir obtenir une représentation similaire à la méthode intégrale à partir d'un résultat avec très peu d'éléments. Lors de tels calculs, on cherche souvent à obtenir la valeur du rayonnement des courants (potentiels en acoustique). A cette fin, nous utilisons le calcul de l'intégrale vu dans (3.2).

On calcule la pression lointaine autour de cette sphère par différentes méthodes.

- Le résultat de la méthode intégrale est discrétisé en  $\frac{\lambda}{10}$ . On calcule l'intégrale (I.3.18) par une méthode classique :

$$\int_S f(P(x)) dx \approx \sum_i S_i f(P(x_i)) \quad (\text{I.3.30})$$

avec  $S_i$  la surface du domaine de control lié au point  $P(x_i)$ .

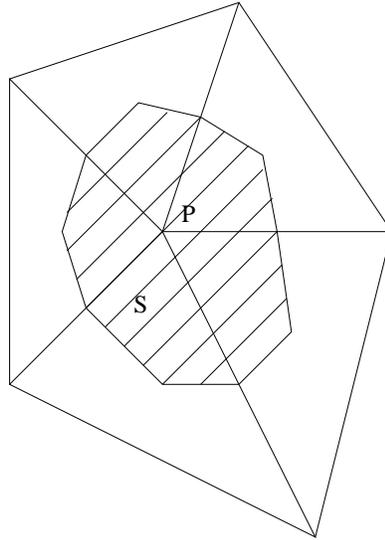
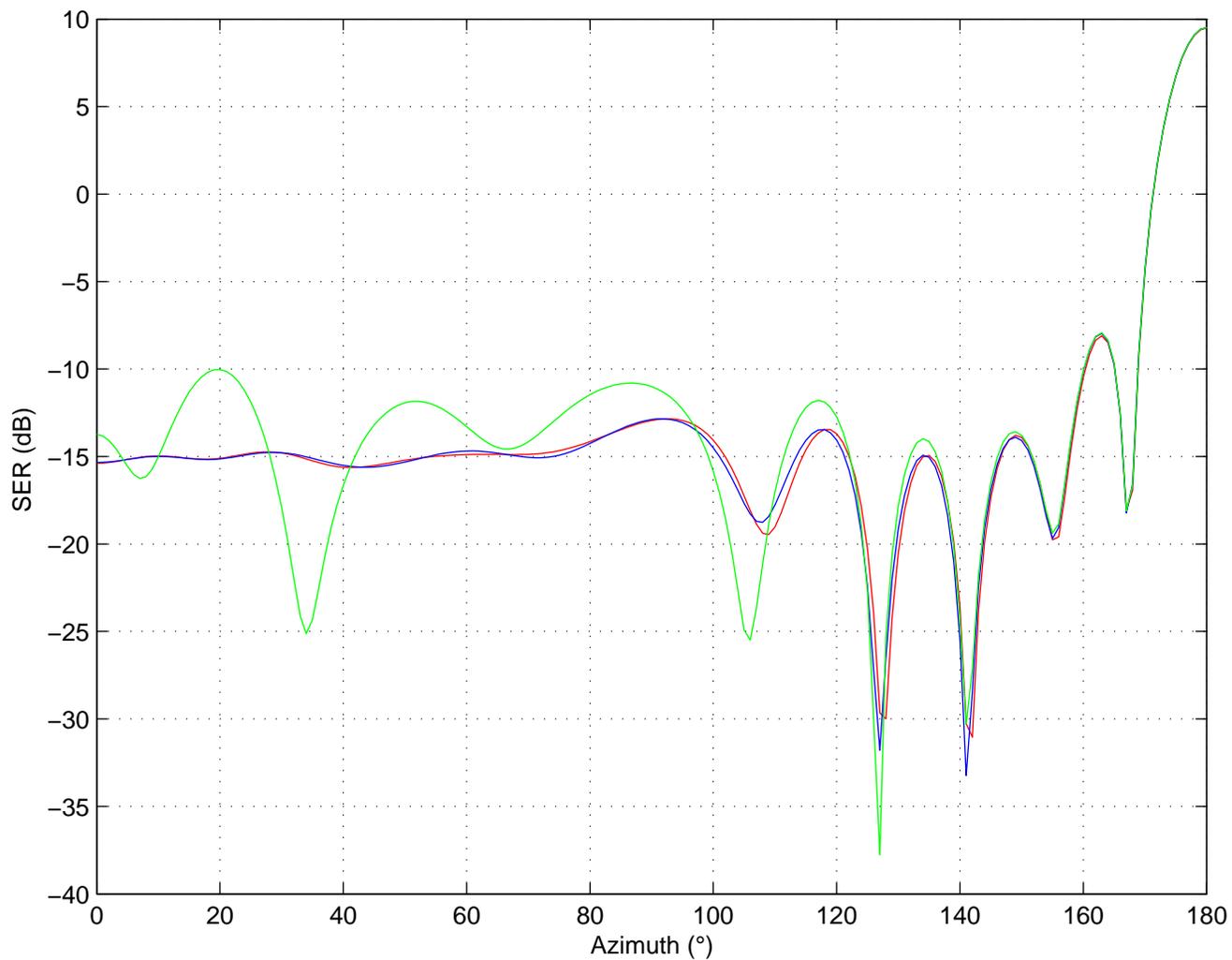


FIG. 29 – **Domaine de control du nœud  $P$**

- Les résultats de la méthode asymptotique sont calculés par une méthode de Ludwig et par une méthode d'intégration classique décrite précédemment.

On a alors les comparaisons de ( fig. 30) pour le résultat d'optique physique dont l'intégrale a été calculée de trois façons différentes.

1. On intègre de façon classique le résultat projeté sur un maillage raffiné en  $\frac{\lambda}{10}$ .
2. On intègre le maillage d'optique physique (grossier) par la méthode de Ludwig
3. On intègre le maillage d'optique physique de façon classique



**Optique Physique**

FIG. 30 – Pression lointaine en  $dB.m^2$

L'intégration par la méthode de Ludwig (en bleu) donne un résultat très proche de la méthode classique associée à un maillage raffiné en  $\frac{\lambda}{10}$  (en rouge), ce qui n'est pas le cas lorsqu'elle est associée à un maillage d'optique physique (en vert).

Deuxième partie  
Optique Physique

# Table des Matières

1	Espace Libre . . . . .	35
1.1	Equations de Maxwell en espace libre . . . . .	35
1.2	Résolution de l'équation eikonale . . . . .	36
1.3	Résolution de l'équation de transport . . . . .	37
2	Formulation dans la zone éclairée . . . . .	39
2.1	Réflexion et Transmission . . . . .	40
2.2	Calcul des matrices de réflexion et de transmission . . . . .	42
2.3	Impédance de surface . . . . .	44
2.4	Optique physique acoustique . . . . .	45
3	Validations de l'Optique Physique . . . . .	47
3.1	Validation d'une incidence . . . . .	47
3.2	Validation de la multi-réflexion . . . . .	49
3.3	Validation complète de l'Optique Physique . . . . .	52

# 1 Espace Libre

Avant de traiter les problèmes de diffraction, nous rappelons l'approximation de la propagation de l'onde en espace libre (Méthode BKW).

Pour plus de détails dans les développements, on pourra se reporter à [10].

## 1.1 Equations de Maxwell en espace libre

Considérons les équations de Maxwell en absence de sources :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= iw\mu\vec{H} & \operatorname{rot} \vec{H} &= -iw\varepsilon\vec{E} \end{aligned} \quad (\text{II.1.1})$$

On peut réécrire les deux équations rotationnelles :

$$\operatorname{rot} \sqrt{\varepsilon}\vec{E} = iw\sqrt{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H} \quad \operatorname{rot} \sqrt{\mu}\vec{H} = -iw\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E} \quad (\text{II.1.2})$$

On prend alors comme notation pour toute la suite du rapport la notation de l'ouvrage de Fock [16] :

$$\sqrt{\varepsilon}\vec{E} \rightarrow \vec{E} \quad \text{et} \quad \sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H} \rightarrow \vec{H}$$

de plus,  $w\sqrt{\varepsilon\mu} = k$ , ce qui nous amène :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= ik\vec{H} & \operatorname{rot} \vec{H} &= -ik\vec{E} \end{aligned} \quad (\text{II.1.3})$$

En appliquant le fait que  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \nabla(\operatorname{div}) - \Delta$ , on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= ik\eta \operatorname{rot}(\vec{H}) = k^2\vec{E} \end{aligned}$$

On a alors pour équivalent de (II.1.3) :

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad \text{l'équation d'Helmholtz vectorielle} \quad (\text{II.1.4})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{la loi de Gauss (absence de sources)} \quad (\text{II.1.5})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = ik\vec{H} \quad \left( \text{ou} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -ik\vec{E} \right) \quad (\text{II.1.6})$$

Considérons alors l'équation d'Helmholtz scalaire dans l'espace libre :

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad (\text{II.1.7})$$

En la mettant sous la forme  $(\frac{\Delta}{k^2} + 1)U = 0$  et pour  $k$  grand (hautes fréquences) le terme  $\frac{\Delta}{k^2}U$  apparaît comme une perturbation.

On prend  $U$  sous la forme :

$$U = e^{ikS(\vec{r})}u$$

On obtient alors :

$$(1 - (\overrightarrow{\nabla S})^2)u + \frac{i}{k}(u\Delta S + 2\overrightarrow{\nabla S} \cdot \overrightarrow{\nabla} u) + \frac{1}{k^2}\Delta u = 0$$

qui en négligeant le terme d'ordre 2 nous donne l'équation eikonale :

$$|\overrightarrow{\nabla S}|^2 = 1 \text{ (ordre 0)} \quad (\text{II.1.8})$$

à l'ordre 0 et l'équation de transport :

$$u\Delta S + 2\overrightarrow{\nabla S} \cdot \overrightarrow{\nabla} u = 0 \text{ (ordre 1)} \quad (\text{II.1.9})$$

à l'ordre 1. On cherche une solution sous la forme d'un Ansatz :

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \overrightarrow{e}_n(\vec{r}) + o(k^{-N})$$

$$\overrightarrow{H}(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \overrightarrow{h}_n(\vec{r}) + o(k^{-N})$$

En utilisant ces développements et après identification des termes de chaque ordre, on retrouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\nabla S}|^2 &= 1 \\ (\Delta S + 2\overrightarrow{\nabla S} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{e}_n &= -\Delta \overrightarrow{e}_{n-1} \\ \overrightarrow{\nabla S} \cdot \overrightarrow{e}_n &= -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{e}_{n-1} \\ \overrightarrow{h}_n &= \frac{1}{\eta} [\overrightarrow{\nabla S} \wedge \overrightarrow{e}_n + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{e}_{n-1}] \end{aligned} \quad (\text{II.1.10})$$

On contrôle que  $\overrightarrow{e}_0$  vérifie l'équation eikonale et l'équation de transport.

On a en plus les équations :

$$\overrightarrow{\nabla S} \cdot \overrightarrow{e}_0 = 0 \text{ et } \overrightarrow{h}_0 = \frac{1}{\eta} \overrightarrow{\nabla S} \wedge \overrightarrow{e}_0$$

On remarque qu'à l'ordre 0,  $(\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{h}_0, \overrightarrow{\nabla S})$  forme un trièdre direct.

## 1.2 Résolution de l'équation eikonale

Dans un système de coordonnées cartésien  $(x_1, x_2, x_3)$ , un point de l'espace est repéré par

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$$

et on peut écrire l'équation eikonale sous la forme :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \text{ soit } F(x_i, \xi_i) = |\xi|^2 - 1 = 0 \text{ avec } \xi_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (\text{II.1.11})$$

Une équation de ce type est généralement résolue par la méthode des caractéristiques.

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} d\xi_i = 0$$

nous donne

$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ et } \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}$$

qui sont les équations paramétriques des courbes caractéristiques.

Dans un milieu homogène, on a  $\frac{dx_i}{ds} = 2\xi_i$  et  $\frac{d\xi_i}{ds} = 0$ .

La première équation nous montre que la tangente à la courbe (ici au rayon) est dirigée selon le gradient de phase  $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} = 2\vec{\nabla}S\right)$  et la deuxième nous montre qu'elle est constante le long de cette courbe  $\left(\frac{d\vec{\nabla}S}{ds} = 0\right)$

Les courbes caractéristiques (rayons) sont donc des lignes droites dirigées selon le gradient de phase.

### 1.3 Résolution de l'équation de transport

Afin de résoudre l'équation de transport, on résout l'équation en  $\vec{e}_0$  :

$$\left(\Delta S + 2\vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{e}_0 = 0 \quad (\text{II.1.12})$$

Pour  $u$ , une composante cartésienne de cette équation, on a à résoudre  $u\Delta S + 2\vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla}u = 0$ .

En multipliant cette équation par  $u$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (u^2 \vec{\nabla}S) = 0$  nous indique qu'il y a conservation du flux dans un tube de rayon ( fig. 31).

En effet, on obtient

$$u^2(\sigma) d\sum(\sigma) = u^2(0) d\sum(0)$$

et donc en vectoriel

$$|\vec{e}_0(\sigma)|^2 d\sum(\sigma) = |\vec{e}_0(0)|^2 d\sum(0)$$

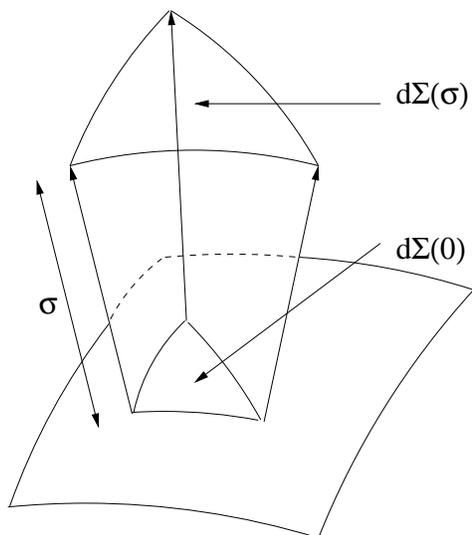


FIG. 31 – Conservation du flux

Ce résultat ne donne cependant aucune indication sur la direction du champ.  
En coordonnées courbes, on a

$$\Delta S = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma} + \frac{1}{\sigma_2 + \sigma} \text{ et } \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} u = \frac{du}{d\sigma}$$

pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les rayons de courbures principaux et transverses du front d'onde, d'où :

$$\vec{e}_0(\sigma) = \sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma)(\sigma_2 + \sigma)}} \vec{e}_0(0) \quad (\text{II.1.13})$$

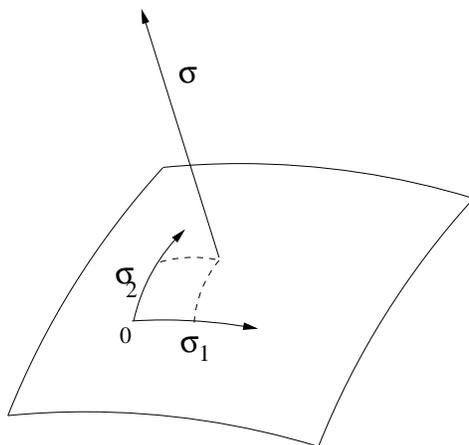


FIG. 32 – Courbures du front d'onde

La direction du champ est donc invariante le long du rayon.

En combinant les différentes propriétés, on a :

Le champ d'optique géométrique est le premier terme du développement asymptotique, appelé développement de Luneberg-Kline.

Pour les termes d'ordre supérieur, les lois de l'optique géométrique ne s'appliquent pas car le second membre de l'équation de transport est non nul. On réécrit alors l'équation en introduisant la fonction

$$J(\sigma) = \frac{(\sigma_1 + \sigma)(\sigma_2 + \sigma)}{\sigma_1 \sigma_2} J(0)$$

On obtient l'équation :

$$2 \frac{du_n}{d\sigma} + \frac{u_n}{J} \frac{dJ}{d\sigma} = -\Delta u_{n-1}$$

Par intégration, on a :

$$\vec{e}_n(\sigma) = \left| \frac{J(0)}{J(\sigma)} \right|^{\frac{1}{2}} \vec{e}_n(0) - \frac{1}{2} \int_0^\sigma \left| \frac{J(\sigma')}{J(0)} \right|^{\frac{1}{2}} \Delta \vec{e}_{n-1}(\sigma') d\sigma' \quad (\text{II.1.14})$$

$|J(\sigma)|$  est le Jacobien le long du rayon.

Il est donné par  $d\Sigma(\sigma) = |J(\sigma)| d\sigma_1 d\sigma_2$ .

## 2 Formulation dans la zone éclairée

L'optique physique est la combinaison de la méthode des courants asymptotiques et de l'optique géométrique, qui ne prend en compte que les contributions dans la zone éclairée de l'objet diffractant ( cf. part 1).

On considère le champ incident sous la forme d'une onde plane avec développement asymptotique de l'amplitude de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}^i(\vec{r}) &= e^{ikS^i(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{e}_n^i(\vec{r}) + o(k^{-N}) \\ \vec{H}^i(\vec{r}) &= e^{ikS^i(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{h}_n^i(\vec{r}) + o(k^{-N}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

où la phase  $S^i(\vec{r})$  vérifie l'équation eikonale (II.1.8) et les amplitudes  $\vec{e}_n^i(\vec{r})$  et  $\vec{h}_n^i(\vec{r})$  vérifient respectivement l'équation de transport (II.1.9) et la relation vectorielle (II.1.6) liant les deux champs.

Sous cette forme (développée), le champ est un champ de rayons. Si le développement est limité à son premier ordre, c'est un champ d'optique géométrique donnant lieu à l'optique physique.

Dans un milieu homogène, les rayons sont des lignes droites dirigées selon le gradient de la phase. Certains de ces rayons intersectent la surface de l'objet et divisent l'espace en une région éclairée et une région dans l'ombre séparée par la surface  $\Sigma_0$  appelée limite d'ombre du champ incident ou frontière ombre-lumière. La limite de la zone d'ombre est tangente à la surface  $S$  le long d'une courbe  $\Gamma$  séparant la surface en  $S_E$  et  $S_O$  ( fig. 33). Dans le cadre d'études monostatiques (source et observateur confondus) à hautes fréquences, l'optique physique est une bonne approximation car les contributions calculées dans la zone éclairée sont largement prépondérantes.

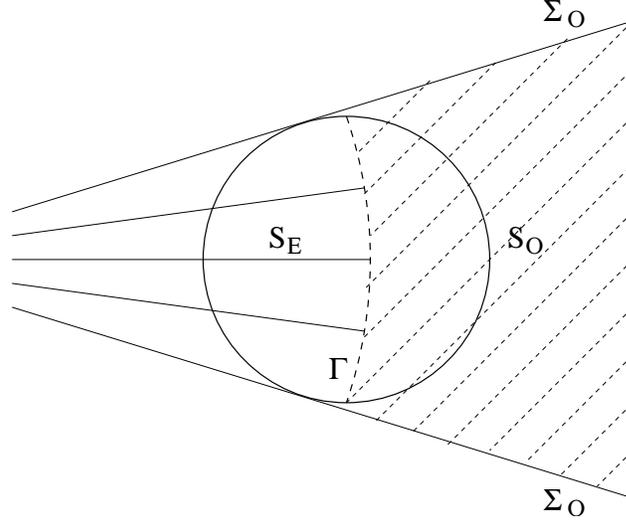


FIG. 33 – Zone éclairée, Zone d'ombre, Limite Ombre-Lumière

## 2.1 Réflexion et Transmission

Les objets étudiés sont généralement de forme assez complexe et ont des revêtements ayant des caractéristiques particulières. Ces propriétés se révèlent nécessaires dans la prise en compte des réflexions et transmissions des champs sur la surface.

### Réflexion

Le problème canonique permettant de trouver les valeurs des champs lors de la réflexion nous apporte que la structure du champ réfléchi est la même que celle du champ incident. Dans la partie éclairée, le champ incident donne lieu à un champ réfléchi  $(\vec{E}^R(\vec{r}), \vec{H}^R(\vec{r}))$  qui respecte les équations de Maxwell et qui s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}^R(\vec{r}) &= e^{ikS^R(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{e}_n^R(\vec{r}) + o(k^{-N}) \\ \vec{H}^R(\vec{r}) &= e^{ikS^R(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{h}_n^R(\vec{r}) + o(k^{-N})\end{aligned}\quad (\text{II.2.16})$$

où les amplitudes et les phases respectent les mêmes équations que pour le champ incident. Comme pour les rayons incidents, les rayons réfléchis sont orthogonaux au front d'onde ( $S(\vec{r}) = \text{cste}$ ).

Ces développements asymptotiques sont valables dans la région éclairée à condition de ne pas être trop proche de la frontière ombre/lumière. On verra par la suite, dans III.2.12, l'explication de cette limite.

L'onde incidente étant quelconque, elle se décompose sur 2 modes.

Une matrice de réflexion notée  $\overline{\overline{\mathcal{R}}}$  contient les 4 coefficients reliant les modes incidents et réfléchis.

On a alors sur la surface :

$$\begin{aligned}\vec{E}^R &= \overline{\overline{\mathcal{R}}}_E \vec{E}^i \\ \vec{H}^R &= \overline{\overline{\mathcal{R}}}_H \vec{H}^i\end{aligned}\quad (\text{II.2.17})$$

avec  $\overline{\overline{\mathcal{R}_E}}$  et  $\overline{\overline{\mathcal{R}_H}}$  les matrices de réflexion électrique et magnétique.  $\overline{\overline{\mathcal{R}_i}}$  sont des matrices  $3 \times 3$  car elles prennent en compte le changement de direction de propagation entre le champ incident et le champ réfléchi.

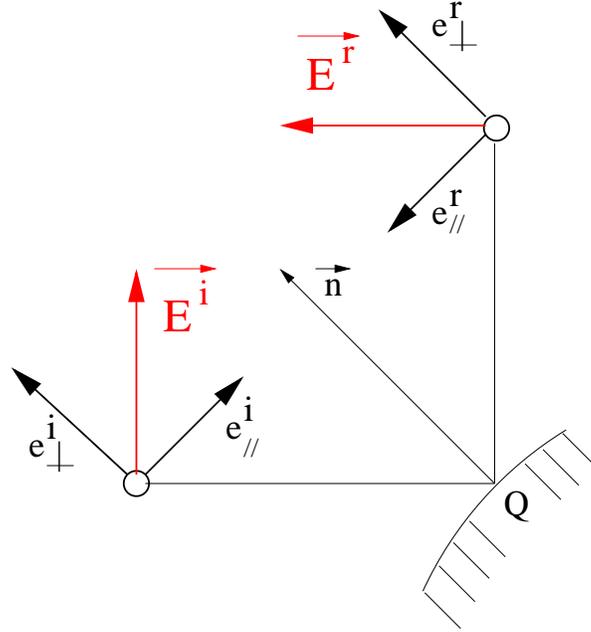


FIG. 34 – Réflexion

### Transmission

De la même manière, on a le champ transmis  $(\vec{E}^T(\vec{r}), \vec{H}^T(\vec{r}))$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}^T(\vec{r}) &= e^{ikS^T(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{e}_n^T(\vec{r}) + o(k^{-N}) \\ \vec{H}^T(\vec{r}) &= e^{ikS^T(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} \vec{h}_n^T(\vec{r}) + o(k^{-N}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.18})$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{E}^T &= \overline{\overline{\mathcal{T}_E}} \vec{E}^i \\ \vec{H}^T &= \overline{\overline{\mathcal{T}_H}} \vec{H}^i \end{aligned} \quad (\text{II.2.19})$$

avec  $\overline{\overline{\mathcal{T}_E}}$  et  $\overline{\overline{\mathcal{T}_H}}$  les matrices de transmission électrique et magnétique.

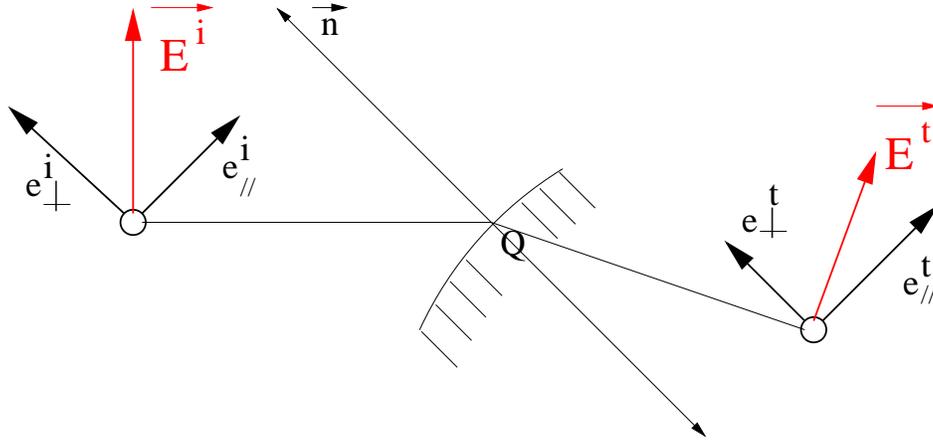


FIG. 35 – Transmission

## 2.2 Calcul des matrices de réflexion et de transmission

Le calcul des coefficients de réflexion et de transmission se fait par résolution des équations de Maxwell à une interface entre deux milieux 1 et 2 ( fig. 36)

On place ces coefficients dans une matrice appelée matrice  $S$ , de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} R_{11TETE} & R_{11TETM} & T_{12TETE} & T_{12TETM} \\ R_{11TMTE} & R_{11TMTM} & T_{12TMTE} & T_{12TMTM} \\ T_{21TETE} & T_{21TETM} & R_{22TETE} & R_{22TETM} \\ T_{21TMTE} & T_{21TMTM} & R_{22TMTE} & R_{22TMTM} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.20})$$

Les coefficients de réflexion de  $S$  sont de la forme  $R_{iiaab}$  avec  $i$  le milieu de propagation et  $a$  et  $b$  les modes transverses électrique et magnétique.

Les coefficients de transmission de  $S$  sont de la forme  $T_{jiaab}$  avec  $i$  le milieu de propagation de l'onde incidente et  $j$  le milieu de propagation de l'onde transmise et  $a$  et  $b$  les modes transverses électrique et magnétique.

Les modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) sont définis par :

– Une composante nulle du champ électrique suivant la normale (TE).

On l'appelle aussi horizontal électrique (H).

– Une composante nulle du champ magnétique suivant la normale (TM).

On l'appelle aussi vertical électrique (V).

Afin de déterminer les coefficients de  $S$ , on détermine les modes de propagation des deux milieux considérés. Dans chaque milieu, on détermine des modes montant(U) et descendant(D) transverse électrique et transverse magnétique normés suivant l'impédance du milieu.

On écrit la relation liant ces modes :

$$\begin{pmatrix} d1_{TE} \\ d1_{TM} \\ u2_{TE} \\ u2_{TM} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u1_{TE} \\ u1_{TM} \\ d2_{TE} \\ d2_{TM} \end{pmatrix}$$

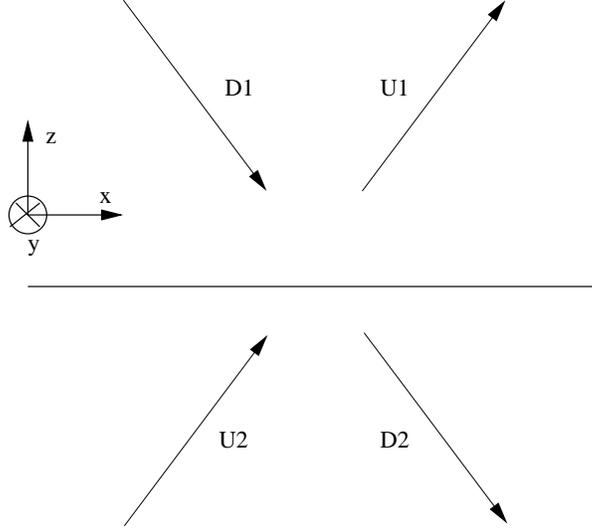


FIG. 36 – Description des modes montants et descendants

avec  $(di, ui)$ , les coefficients liant l'onde et les modes  $(Di, Ui)$ .

En écrivant les relations de passage du champ à une interface (continuité du champ tangent), on obtient les coefficients de  $S$ .

Pour pouvoir utiliser cette formulation, on décompose l'onde électromagnétique incidente sur les modes TE et TM dans le repère lié à la surface puis on reconstitue l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Par exemple, pour une onde incidente en domaine 1 (d'impédance  $Z_1$ ), on écrit :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^i \\ Z_1 \vec{H}^i \end{pmatrix} = \lambda_{TE}^i D_{1TE} + \lambda_{TM}^i D_{1TM}$$

Ensuite, on calcule les coefficients réfléchis et transmis :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{TE}^R \\ \lambda_{TM}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11TE TE} & R_{11TE TM} \\ R_{11TM TE} & R_{11TM TM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{TE}^i \\ \lambda_{TM}^i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{TE}^T \\ \lambda_{TM}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{21TE TE} & T_{21TE TM} \\ T_{21TM TE} & T_{21TM TM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{TE}^i \\ \lambda_{TM}^i \end{pmatrix}$$

Puis on reconstitue les champs réfléchis et transmis :

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^R \\ Z_1 \vec{H}^R \end{pmatrix} = \lambda_{TE}^R U_{1TE} + \lambda_{TM}^R U_{1TM}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^T \\ Z_2 \vec{H}^T \end{pmatrix} = \lambda_{TE}^T D_{2TE} + \lambda_{TM}^T D_{2TM}$$

## 2.3 Impédance de surface

Comme nous le verrons par la suite, la notion d'impédance est nécessaire aux formulations dès lors que les formulations utilisées ne sont plus celles de l'optique physique. Après avoir caractérisé les matériaux par leurs coefficients de réflexion et de transmission, nous devons passer à une caractérisation sous forme d'impédance de surface.

Cette notion n'ayant pas été développée dans le cadre de la thèse, nous nous contentons dans cette partie de reprendre l'explication fournie par D. Bouche, F. Molinet et R. Mittra [10] dans le cadre de surfaces régulières à hautes fréquences en zone d'ombre.

La notion d'impédance de surface a été introduite par Rytov [33] et Léontovitch [27]. Dans ces travaux, Rytov et Léontovitch utilisent un développement asymptotique en  $n^{-1} = |\varepsilon\mu|^{-\frac{1}{2}}$ .

Cette approche a été améliorée par Artola, Cessenat et Cluchat [6] [15]. Nous nous plaçons à haute fréquence, lors d'incidence sur des matériaux à pertes.

L'impédance  $Z$  dépend du phénomène physique pris en compte. Nous nous considérons en zone d'ombre où les ondes rampantes dominent.

Nous considérons alors le cas canonique du cylindre de rayon  $b$  revêtu d'une ou plusieurs couches de diélectrique ( fig. 37).

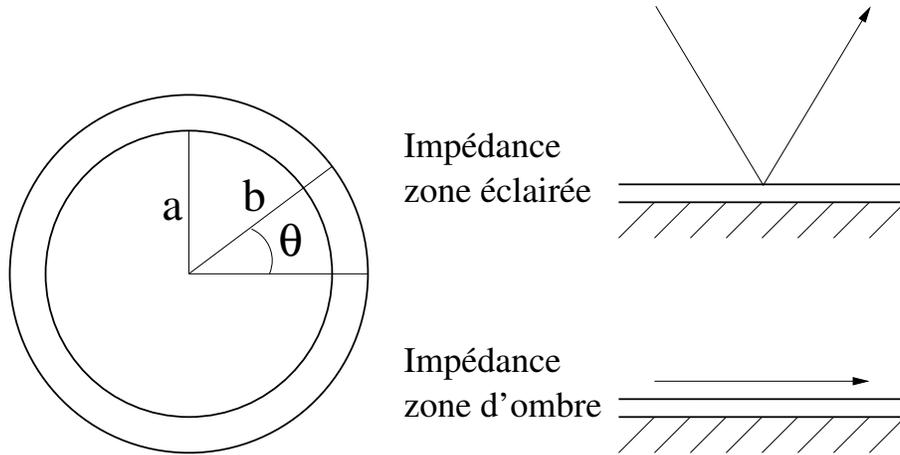


FIG. 37 – Cylindre recouvert éclairé par une onde plane

Le champ total au point  $M(\rho, \theta)$  pour le cylindre éclairé par une onde plane TE est exprimé sous forme intégrale :

$$H(M) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( J_\nu(k\rho) - \frac{J'_\nu(k\rho) + iZ_\nu J_\nu(k\rho)}{H'_\nu(k\rho) + iZ_\nu H_\nu(k\rho)} H_\nu(k\rho) \right) e^{i\nu\phi_m} d\nu \quad (\text{II.2.21})$$

avec

$$\phi_m = |\theta + 2m\pi| - \frac{\pi}{2}$$

et  $Z_\nu$  est l'impédance relative par rapport au vide du mode en  $e^{i\nu\tau}$ .

En imposant de vérifier les conditions de transmission aux interfaces ainsi que l'annulation de la dérivée normale sur le noyau conducteur nous obtenons le facteur  $Z_\nu$ .

Dans le cas d'une couche diélectrique  $(\varepsilon_1, \mu_1)$  d'épaisseur  $b - a$  sur un cylindre de rayon intérieur  $a$ , on obtient :

$$Z_\nu = i \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \frac{J'_\nu(k_1 a) N'_\nu(k_1 b) - J'_\nu(k_1 b) N'_\nu(k_1 a)}{J'_\nu(k_1 a) N_\nu(k_1 b) - J_\nu(k_1 b) N'_\nu(k_1 a)}} \quad (\text{II.2.22})$$

Kim et Wang [22] ont calculé le développement asymptotique de l'intégrale (II.2.21) dans le cas d'une couche. Dans la zone d'ombre, le champ est obtenu comme une série de modes rampants.

- Dans le cas d'une couche fine de matériau à pertes, ces modes ont des constantes de propagation  $\nu$  proches de  $kb$ .
- Si les indices des matériaux sont suffisamment différents, nous pouvons remplacer les fonctions de Bessel par leur développement asymptotique de Debye.

Ceci nous amène :

$$Z_k = -i \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k_1^2 b^2}} \tan \left( k_1 e \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k_1^2 b^2}} \right) \quad (\text{II.2.23})$$

or  $\nu = kb$  donc  $\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k_1^2 b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \cos \tau_1$  avec  $\tau_1$  est l'angle dans la couche de matériau.

On reconnaît l'impédance sur un plan revêtu de la même couche éclairé en incidence rasante.

L'impédance est donc, en première approximation et pour un matériau d'indice pas trop proche de 1, celle de la plaque plane en incidence rasante.

## 2.4 Optique physique acoustique

Etant donné que nous allons présenter des résultats en acoustique et que les développements en zone de Fock et zone d'ombre seront aussi effectués pour l'équation d'Helmholtz, nous relierons les développements d'optique physique en électromagnétique avec l'acoustique. Le champ recherché est alors la pression  $P$ .

Des études plus approfondies sur l'application des méthodes asymptotiques en acoustique sont développées dans [30].

### Espace libre

On considère le champ incident sous la forme d'une onde plane avec développement asymptotique de l'amplitude de la forme :

$$P^i(\vec{r}) = e^{ikS^i(\vec{r})} \sum_{n=0}^N (ik)^{-n} p_n^i(\vec{r}) + o(k^{-N}) \quad (\text{II.2.24})$$

où la phase  $S^i(\vec{r})$  vérifie l'équation eikonale (II.1.8) et les amplitudes  $p_n^i(\vec{r})$  vérifient l'équation de transport (II.1.9).

## Réflexion et Transmission

Les formulations de réflexion et de transmission sont les mêmes qu'en életromagnétisme à ceci près que les matrices  $\overline{\mathcal{R}}_i$  et  $\overline{\mathcal{T}}_i$  deviennent des scalaires  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$ . En effet, le champ recherche n'étant plus vectoriel, il n'y a plus de changement de base.

On a alors :

$$P^R = \mathcal{R}P^i \quad (\text{II.2.25})$$

$$P^T = \mathcal{T}P^i \quad (\text{II.2.26})$$

## Potentiels et calcul de rayonnement

La méthodologie de calcul utilisée est la même qu'en électromagnétisme. On recherche donc un équivalent aux courants.

Les potentiels de simple et double couche jouent alors le même rôle que les courants. Ces potentiels sont définis à une interface entre un domaine 1 et un domaine 2 par :

$$\varphi_s = \frac{\partial P_2}{\partial n} - \frac{\partial P_1}{\partial n} = \left( \vec{\nabla} P_2 - \vec{\nabla} P_1 \right) \cdot \vec{n} \quad (\text{II.2.27})$$

$$\varphi_d = P_2 - P_1 \quad (\text{II.2.28})$$

avec  $P_i$  la pression à l'interface dans le domaine  $i$  et  $n$  la coordonnée normale à la surface. Le calcul du rayonnement donné par l'intégrale (I.3.18) est alors adapté à l'acoustique. Le rayonnement calculé n'est plus le champ électromagnétique observé mais la pression observée.

$$I = \int_{\Sigma} \left( \varphi_d(\vec{r}) \cdot U^o(\vec{r}) + \varphi_s(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} U^o \cdot \frac{\vec{k}^o}{|k^o|}(\vec{r}) \right) e^{-j\varphi^i(\vec{r})} e^{-j\varphi^o(\vec{r})} ds(\vec{r}) \quad (\text{II.2.29})$$

### 3 Validations de l'Optique Physique

Nous appliquons maintenant les développements précédents à des cas concrets. On compare les résultats aux résultats obtenus par une méthode de moments résolvant exactement l'équation d'Helmholtz en acoustique et les équations de Maxwell en électromagnétisme sous forme intégrale.

#### 3.1 Validation d'une incidence

Pour 'valider' l'Optique Physique, nous réalisons un calcul acoustique. Nous calculons la pression lointaine créée par une source disposée à la sortie de la nacelle (réacteur).

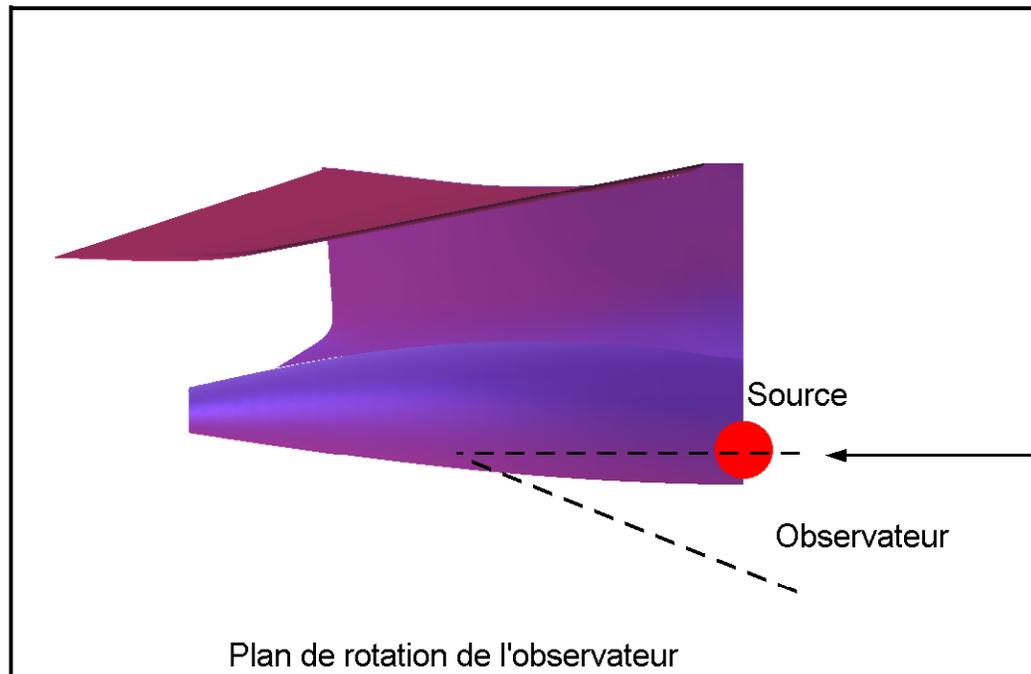


FIG. 38 – Cas de calcul acoustique sur un ensemble corps, dérive et empennage d'un Falcon à  $3kHz$

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats d'une méthode de moments ( fig. 39).

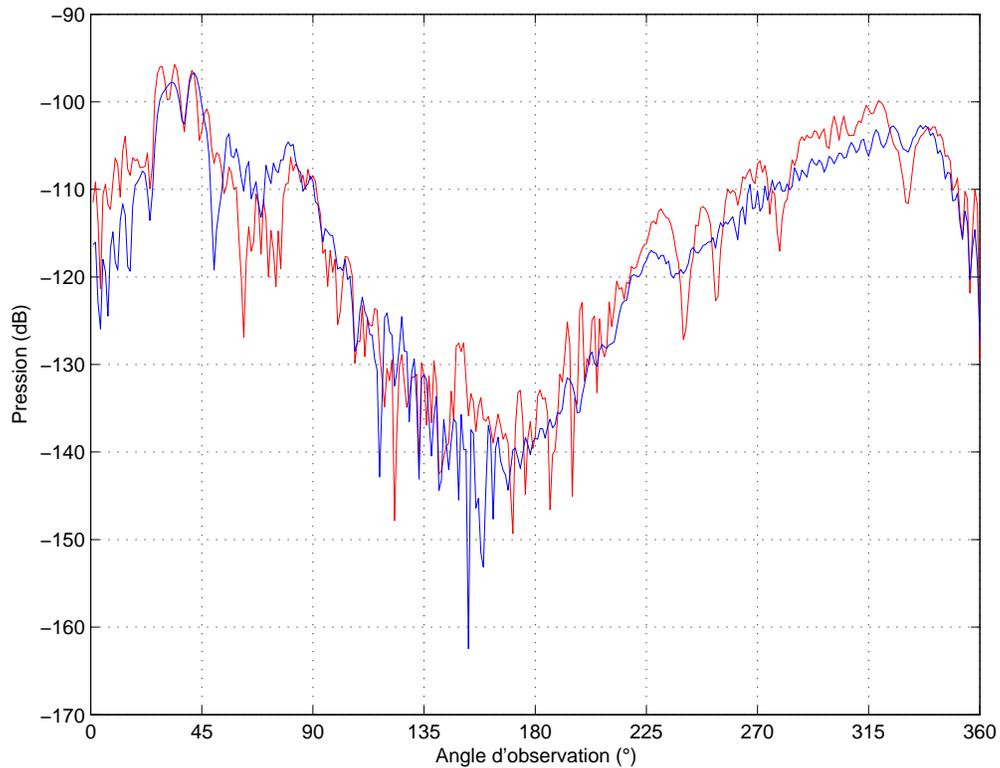


FIG. 39 – Comparaison avec un résultat issu d'une méthode intégrale 3D

La première incidence (en bleu) nous donne un résultat très proche de la solution en méthode intégrale (en rouge). Une multiréflexion peut cependant améliorer le résultat. Ce cas est traité de façon plus complète dans [30].

## 3.2 Validation de la multi-réflexion

### Le dièdre Parfaitement Electrique Conducteur

Le cas de validation du dièdre est intéressant car il permet de se comparer à une solution analytique de l'optique physique. En effet, la SER d'un dièdre en monostatique constitué de 2 plaques de surface  $S$  éclairé avec un angle de 45 degrés est équivalente à la SER d'une plaque de surface  $2S$  éclairée en spéculaire ( fig. 40). Nous appliquons cette validation à un dièdre de  $100mm$  de côté.

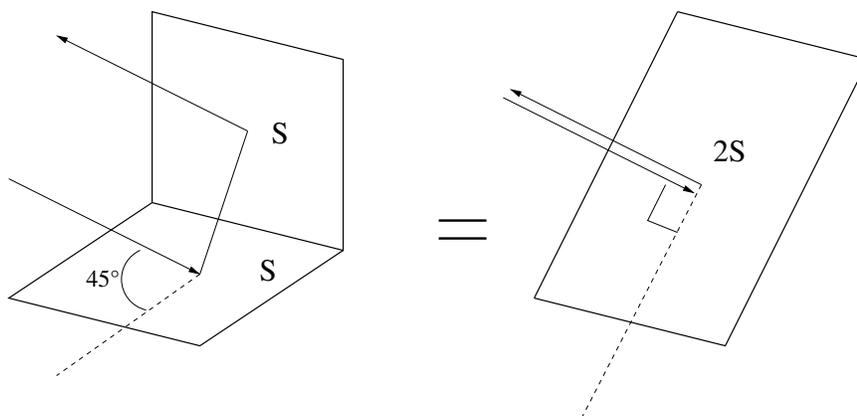


FIG. 40 – Cas de calcul sur dièdre

Nous obtenons les résultats après 2 réflexions ( fig. 41).

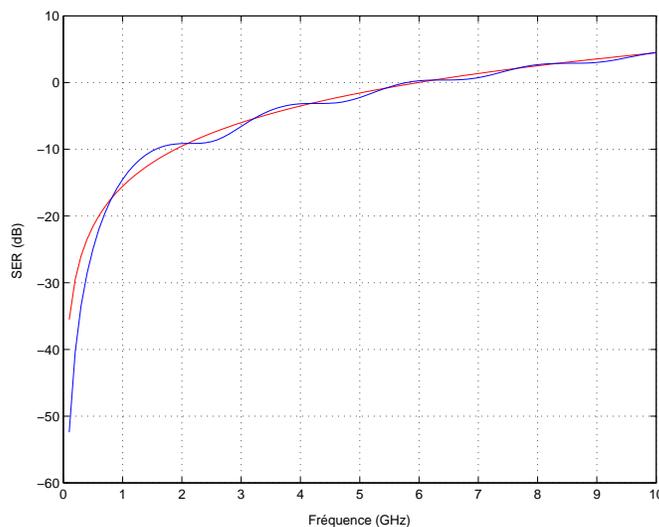


FIG. 41 – Comparaison dièdre monostatique avec balayage fréquentiel

Le résultat donné par le dièdre (en bleu) est assez proche du résultat analytique (en rouge). On remarque que plus la fréquence monte, plus les résultats sont proches. L'optique physique tend donc bien à être exacte à hautes fréquences dans ce genre de cas.

## Le trièdre Parfaitement Electrique Conducteur

Le cas du trièdre nous permet de valider une troisième réflexion, et surtout nous autorise un balayage monostatique suivant 2 angles, le site et l'azimut ( fig. 42). Le trièdre considéré pour le cas de validation est de  $100mm$  de côté.

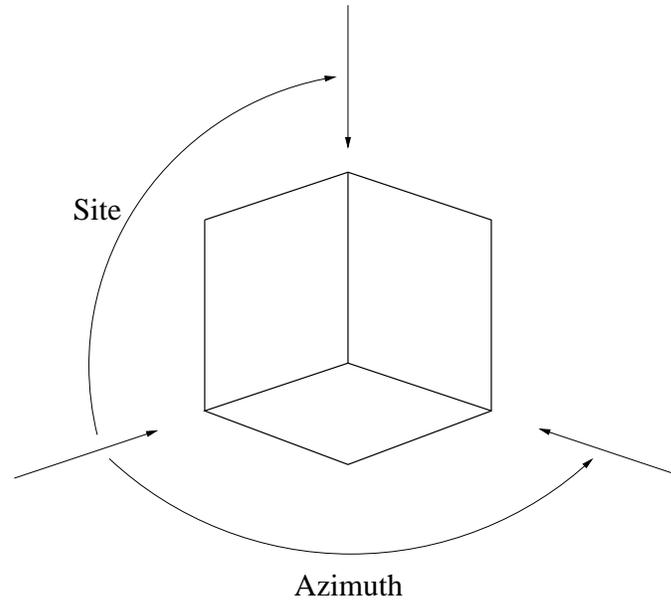


FIG. 42 – Cas de calcul sur trièdre

Nous relevons alors une cartographie de la SER sur une portion d'espace. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats obtenus par une méthode intégrale  $3D$  ( fig. 43).

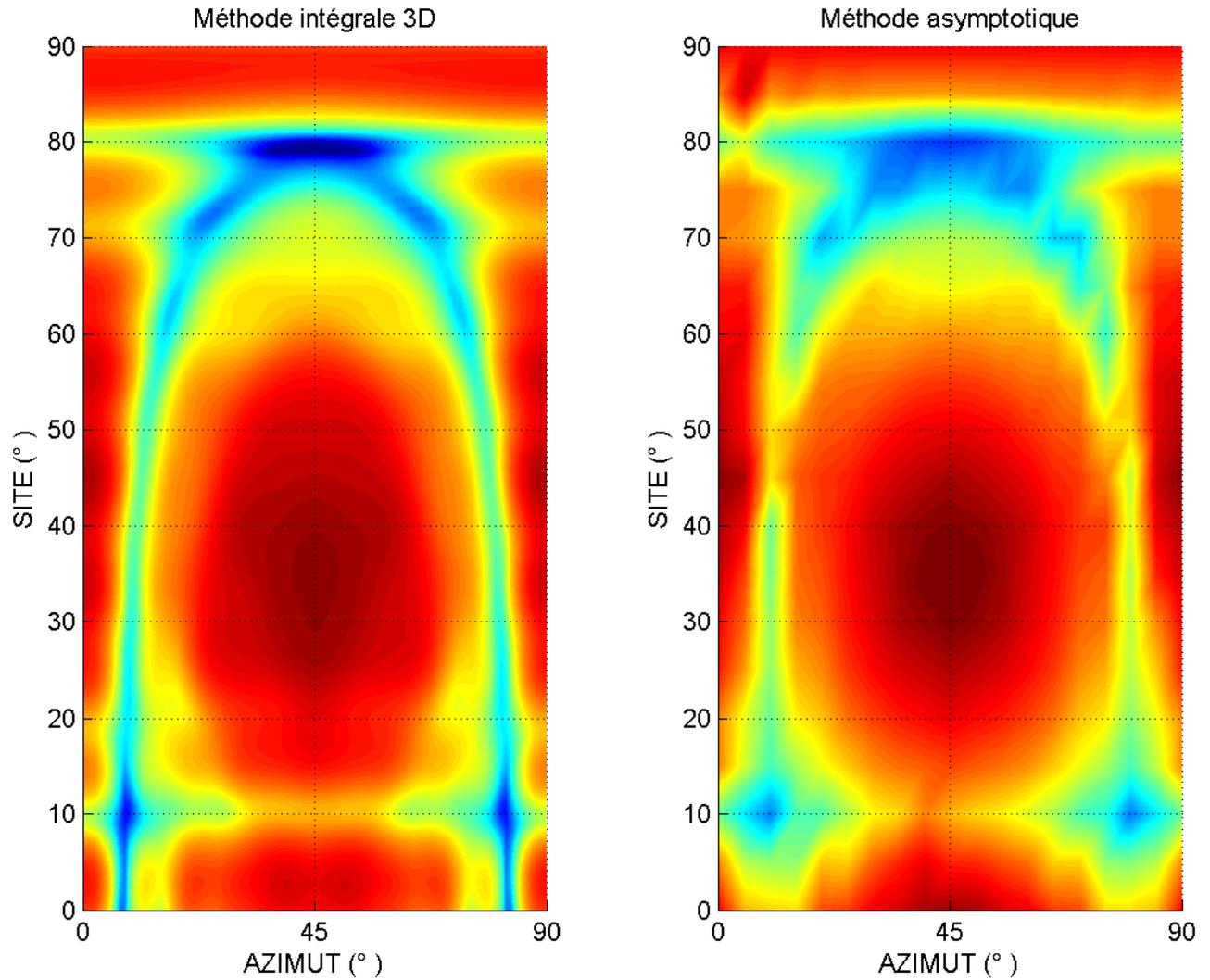


FIG. 43 – Comparaison trièdre monostatique avec balayage angulaire à  $10GHz$

Les résultats obtenus par l'optique physique sont assez satisfaisants d'autant plus que l'on utilise une méthode de lancer de rayons et que pour celle-ci les angles d'incidence rasante sont difficiles à calculer. Le second problème apporté par une méthode de rayons dans ce type de calculs est qu'il faut faire autant de lancer de rayons qu'il y a de visées soit 882 dans ce cas de trièdre ce qui devient rapidement coûteux. Le coût de la méthode de moments dépend, elle, beaucoup plus de la fréquence de calcul que du nombre de visées incidente et donc est beaucoup plus avantageuse sur ce genre de cas de validation.

### 3.3 Validation complète de l'Optique Physique

#### La plaque multi-domaines

Dans ce cas complexe de validation de la réflexion et de la transmission, nous allons valider la multi-réflexion ( fig. 44) mais aussi une approche couche mince ( fig. 45), c'est-à-dire le remplacement de la multiréflexion par des coefficients de réflexion et de transmission rendant compte de la structure du matériau.

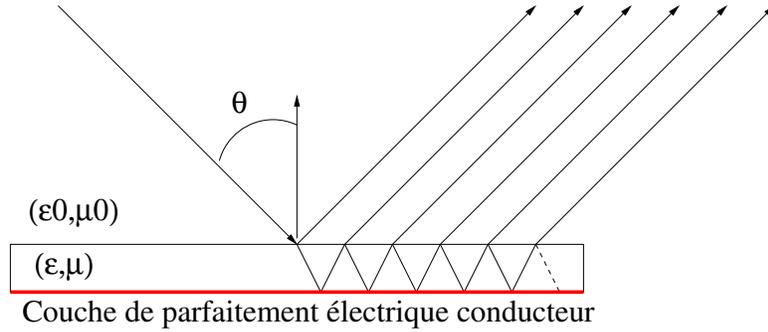


FIG. 44 – Problème de multi-réflexion dans un matériau multi-domaines

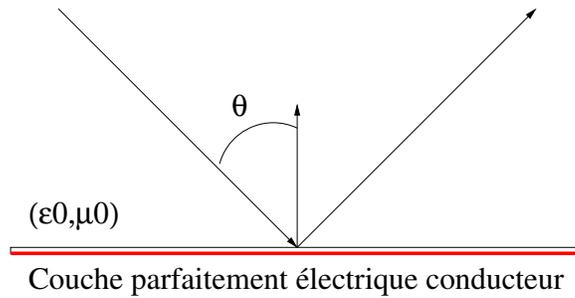


FIG. 45 – Problème équivalent en approximation couche mince

Le calcul consiste à obtenir le même résultat pour la méthode multi-domaines et l'approche couche mince tout en comparant les résultats avec une méthode intégrale.

Le matériau utilisé a pour caractéristiques :

$$\epsilon = 1 - i \text{ et } \mu = 1$$

On observe la convergence de l'approche multi-couches suivant les interactions effectuées au sein du matériau ( fig. 46).

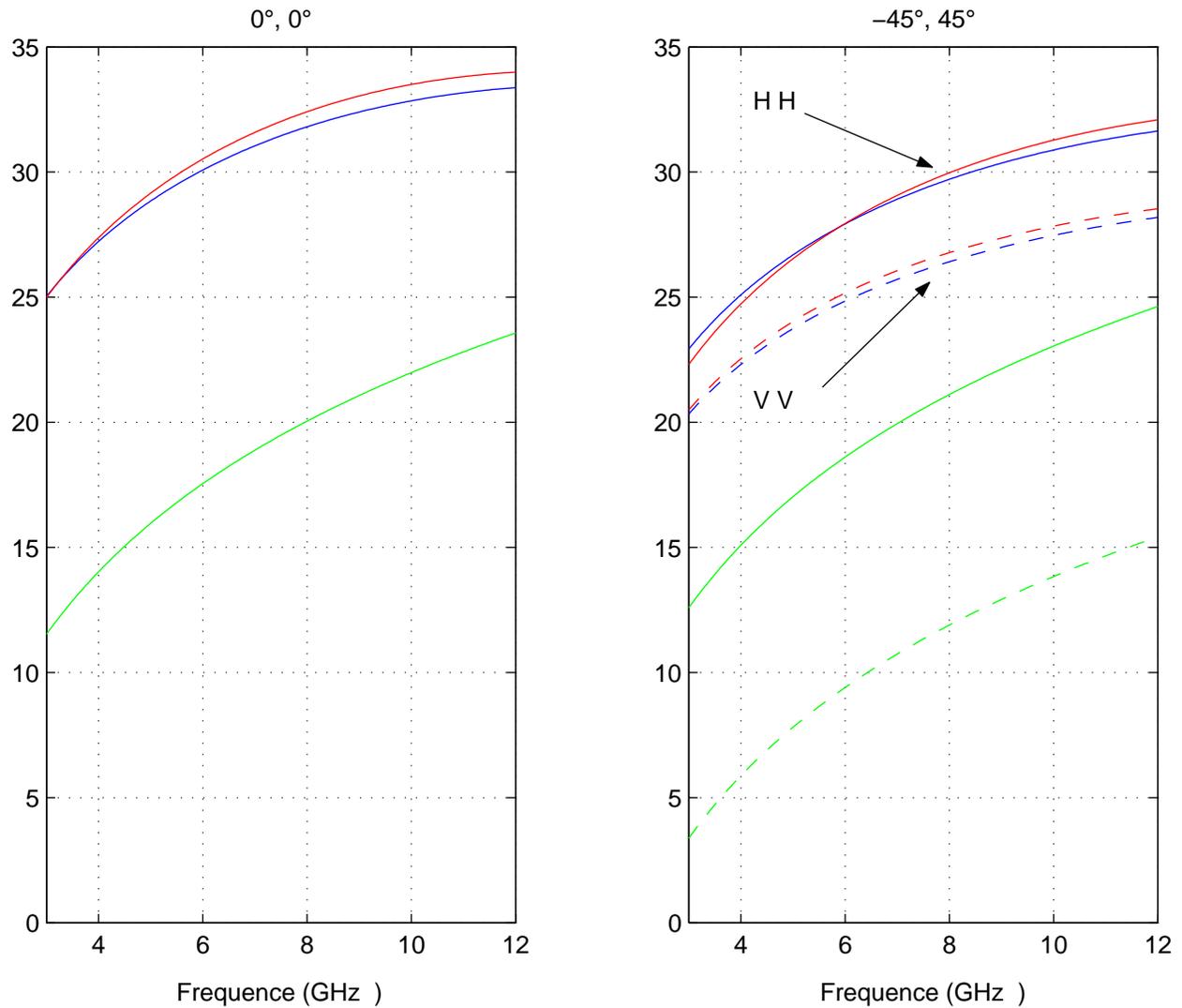


FIG. 46 – Itérations successives

Les courbes vertes correspondent à la première interaction, c'est-à-dire l'incidence de l'onde sur le matériau et la prise en compte de la réflexion. Les courbes bleues ajoutent la première transmission ainsi que la réflexion sur la surface parfaitement électrique conducteur et la transmission vers le milieu extérieur. Les courbes rouges prennent en compte une interaction supplémentaire. Après 3 interactions, les résultats ne varient pratiquement plus.

On compare maintenant les calculs multi-couches et les calculs couche mince ( fig. 47).

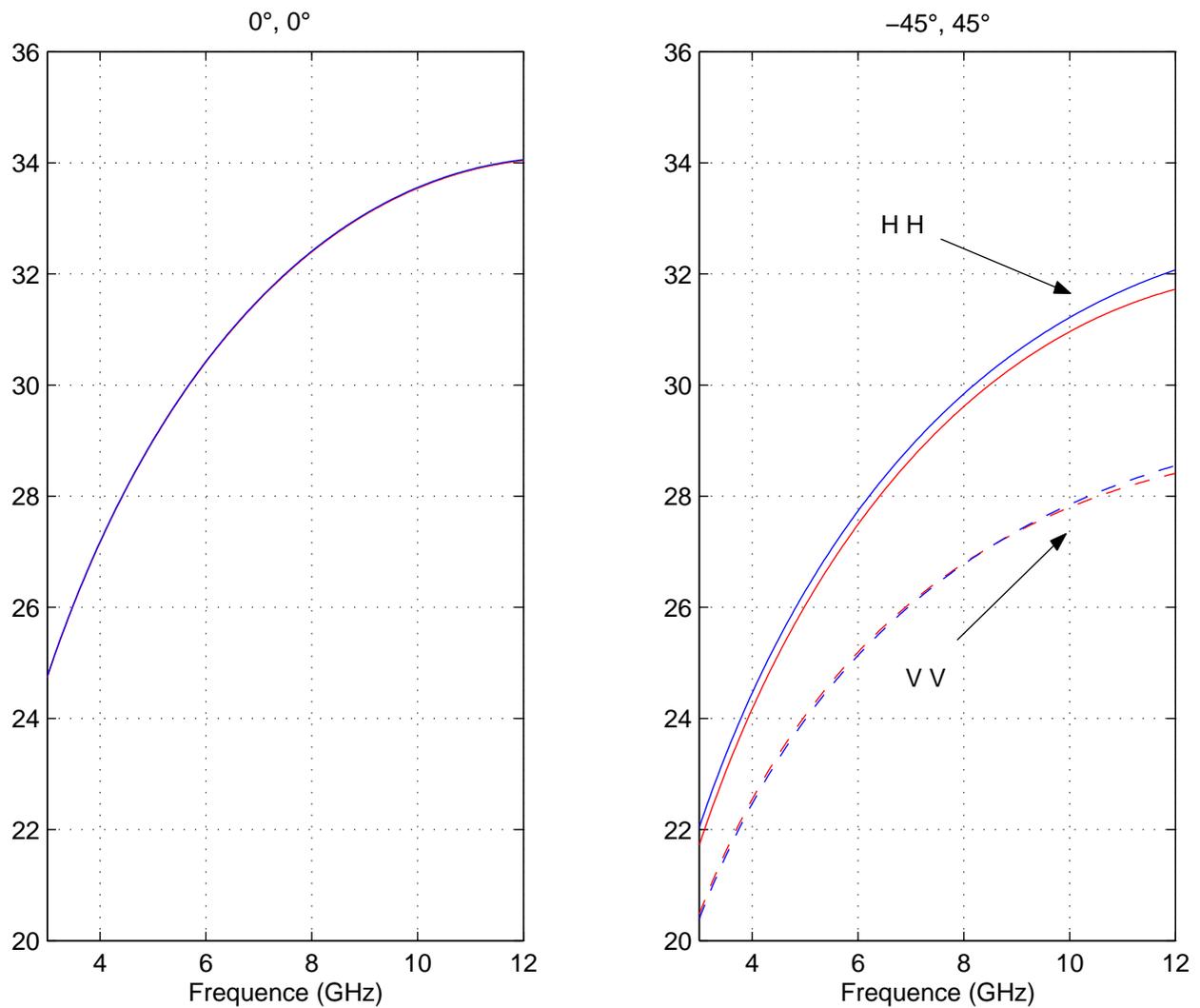


FIG. 47 – Comparaison des résultats

On remarque une assez bonne cohérence des résultats ce qui nous valide l'approximation couche mince (en rouge) par rapport à l'approche en multi-couches (en bleue) pour ce genre de calculs.

La validation de ce cas est effectuée pour 2 incidences.

- A l'incidence  $\theta = 0$  (observation à  $\theta = 0$ ), les résultats  $HH$  et  $VV$  sont confondus. Les résultats des différentes méthodes sont superposés.
- A l'incidence  $\theta = -45$  (observation à  $\theta = 45$ ), il y a séparation des résultats  $HH$  et  $VV$ .

Les résultats fournis par l'approche multi-couches sont moins précis que ceux de l'approche couches-minces mais restent cependant corrects même après peu d'interactions.

**Troisième partie**  
**Formulations sur corps réguliers**

# Table des Matières

1	Méthode de la couche limite . . . . .	57
1.1	Analyse des champs de rayons . . . . .	57
1.2	Etude générale sur la surface . . . . .	59
2	Domaine de Fock . . . . .	60
2.1	Equation parabolique de Leontovich . . . . .	60
2.2	Helmholtz . . . . .	62
2.3	Maxwell . . . . .	65
3	Ondes rampantes . . . . .	68
3.1	Helmholtz . . . . .	69
3.2	Maxwell . . . . .	70
3.3	Conditions limites (détermination de la phase) . . . . .	72
3.4	Influence géométrique . . . . .	74
3.5	Détermination de l'amplitude . . . . .	74
3.6	Interprétation des solutions . . . . .	75
4	Raccordement des trois domaines . . . . .	76
4.1	Helmholtz . . . . .	76
4.2	Maxwell . . . . .	78
5	Synthèse des Formulations . . . . .	79
5.1	Récapitulatif des notations et des fonctions . . . . .	79
5.2	Représentation des fonctions . . . . .	80
5.3	Helmholtz . . . . .	82
5.4	Maxwell . . . . .	84
6	Validation des formulations . . . . .	86
6.1	La Sphère . . . . .	86

# 1 Méthode de la couche limite

Les méthodes de rayons, bien que performantes en zone éclairée, ne sont pas valables dans certaines régions. On utilise alors une méthode dite 'de la couche limite'.

Les domaines de non-validité des formules générales sont généralement les domaines de petites dimensions. L'idée principale de la méthode est alors d'étendre les coordonnées par des puissances fractionnelles de  $k$  (nombre d'onde) afin que les coordonnées étendues soient du même ordre.

Cette extension détermine alors une 'couche limite' pour laquelle on impose une forme de solution correspondant au problème. La forme analytique de la solution ainsi imposée est appelée "Ansatz". Lors de l'intégration de l'Ansatz dans les équations (Helmholtz ou Maxwell) et dans les conditions limites ou de radiation, on voit apparaître une succession de problèmes en identifiant les termes de chaque ordre.

Si l'Ansatz choisi est correct, ces problèmes se résolvent ordre par ordre. On a alors un nombre fini de coefficients (ou fonctions) constant(e)s indéterminé(e)s résolus lors de l'assortiment des développements asymptotiques locaux. L'application de la méthode de la couche limite n'est pas triviale, en particulier sur des surfaces non régulières. De plus il faut que chaque développement asymptotique local soit compatible avec les développements voisins.

L'assortiment des développements devient donc un problème supplémentaire à résoudre.

## 1.1 Analyse des champs de rayons

Considérons un corps convexe régulier de surface  $S$  éclairé par un champ de rayons donné par son développement asymptotique.

On a la coupe du champ de rayons suivante :

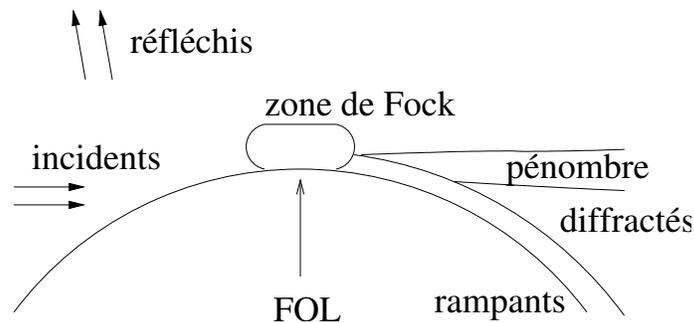


FIG. 48 – Champ de rayons

Tout point du domaine éclairé est atteint par deux rayons (incident et réfléchi par la surface).

A une distance convenable de la limite ombre/lumière et des rayons limites, on peut appliquer l'optique géométrique ( cf. part 2)

Pour un corps régulier, il existe quatre domaines où les formulations d'optique géométrique ne sont plus valables.

- Voisinage proche de la limite ombre/lumière (Domaine de Fock)
- Région d'ombre profonde proche de la surface (Ondes rampantes)
- Région d'ombre profonde loin de la surface (Rayons diffractés)
- Région de pénombre (Champs de Fresnel).

Les développements limités utilisés dans ces quatre domaines peuvent être construits par la méthode de la couche limite comme nous le verrons dans (2), (3), puis dans le cadre de corps allongés ( cf. part IV). Suivant le domaine considéré, on se place dans un système de coordonnées particulier.

Par souci de généralisation des problèmes posés, nous développerons toutes les équations en trois dimensions.

Dans chacun des domaines traités, nous utiliserons les équations (II.1.6) et (II.1.7). Il est donc nécessaire d'exprimer les opérateurs Laplacien ( $\Delta$ ) et Rotationnel ( rot ) dans les systèmes de coordonnées tridimensionnels associés.

Pour un système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , les formulations générales sont :

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{x_i, x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{g} (g^{-1})_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \quad (\text{III.1.1})$$

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{x_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial V_{x_2}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_{x_1}}{\partial x_3} - \frac{\partial V_{x_3}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{x_1}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.2})$$

avec  $(g)$  la matrice métrique du système de coordonnées choisi,  $g$  son déterminant,  $(i, j) \in (1, 2, 3)^2$  et

$$\begin{pmatrix} V_s \\ V_\alpha \\ V_n \end{pmatrix} = (g) \begin{pmatrix} V^s \\ V^\alpha \\ V^n \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas que nous allons traiter, la même procédure sera suivie :

- Choix d'un Ansatz (forme de la solution)
- Expression des équations dans le système de coordonnées choisi
- Introduction de l' Ansatz dans ces équations
- Résolution des équations qui en découlent

Le champ que nous recherchons est le champ total, la condition limite est homogène.

- Pour Helmholtz

$$\begin{aligned} U &= 0 && \text{pour la condition de Dirichlet (parfaitement absorbant)} \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 && \text{pour la condition de Neumann (parfaitement réfléchissant)} \\ \frac{\partial U}{\partial n} + ikZU &= 0 && \text{pour la condition d'impédance (cas le plus général)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.3})$$

- Pour Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tg} &= \vec{0} && \text{pour le parfaitement conducteur électrique} \\ \vec{H}_{tg} &= \vec{0} && \text{pour le parfaitement conducteur magnétique} \\ \vec{E}_{tg} &= Z\vec{n} \wedge \vec{H}_{tg} && \text{pour la condition d'impédance (cas le plus général)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

avec  $Z$  l'impédance relative de l'objet diffractant et  $n$  la coordonnée normale à la surface.

## 1.2 Etude générale sur la surface

Les études des domaines de Fock et de propagation de rampants utilisent le même système de coordonnées : le système géodésique  $(s, \alpha, n)$  avec  $s$  l'abscisse curviligne sur la géodésique,  $n$  la coordonnée normale et  $\alpha$  suivant la binormale.

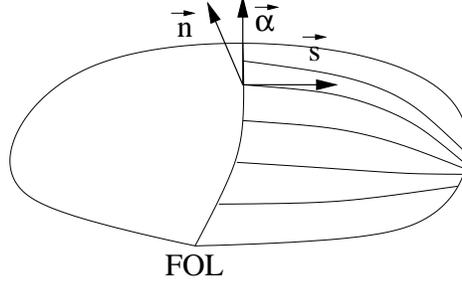


FIG. 49 – Système de coordonnées  $(s, \alpha, n)$

Pour un corps convexe  $\mathcal{C}^\infty$  régulier, la matrice métrique s'écrit :

$$(g) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^2 + n^2\tau^2 & -h\tau \left(2n + \frac{n^2}{\rho} + \frac{n^2}{\rho_t}\right) & 0 \\ -h\tau \left(2n + \frac{n^2}{\rho} + \frac{n^2}{\rho_t}\right) & h^2 \left(\left(1 + \frac{n}{\rho_t}\right)^2 + n^2\tau^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + o(n^2) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + o(n^2) \quad (\text{III.1.5})$$

avec  $\rho$  et  $\rho_t$  les rayons de courbure dans les directions  $\vec{s}$  et  $\vec{\alpha}$  et avec  $h(s)$  la divergence (ou convergence) des géodésiques et  $\tau$  la torsion de la géodésique telle que :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = \frac{\vec{s}}{\rho} + \tau \vec{\alpha}$$

avec  $(\vec{s}, -\vec{n}, \vec{\alpha})$  le trièdre de Frénet de la géodésique.

### Helmholtz

Par souci de simplicité, nous étudions en premier l'équation d'Helmholtz. On verra par la suite que l'on trouve des résultats similaires dans le cas vectoriel.

La matrice  $(g)$  et la formulation (III.1.1) nous donnent le Laplacien :

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{c}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{b}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{b}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{a}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left( \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial n} \right) \right] \quad (\text{III.1.6})$$

avec  $g = ac - b^2$ .

En considérant que les variations transverses des variables  $\rho, \rho_t$  et  $\tau$  sont faibles, les dérivées par rapport à  $\alpha$  deviennent négligeables face aux autres termes, ce qui nous donne l'équation d'Helmholtz sous la forme :

$$\Delta U + k^2 U = \frac{c}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \left( \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{c}{2g^2} \frac{\partial g}{\partial s} \right) \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (\text{III.1.7})$$

## Maxwell

Pour les champs en coordonnées  $(s, \alpha, n)$  :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E^s \\ E^\alpha \\ E^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H^s \\ H^\alpha \\ H^n \end{pmatrix}$$

en utilisant (III.1.2),  $ik\vec{H} = \text{rot } \vec{E}$  nous donne :

$$\begin{aligned} ikH^s &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial b}{\partial n} E^s - \frac{\partial c}{\partial n} E^\alpha + b \frac{\partial E^s}{\partial n} - c \frac{\partial E^\alpha}{\partial n} \right) \\ ikH^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial a}{\partial n} E^s - \frac{\partial b}{\partial n} E^\alpha + a \frac{\partial E^s}{\partial n} - b \frac{\partial E^\alpha}{\partial n} - \frac{\partial E^n}{\partial s} \right) \\ ikH^n &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -\frac{\partial b}{\partial s} E^s + \frac{\partial c}{\partial s} E^\alpha - b \frac{\partial E^s}{\partial s} + c \frac{\partial E^\alpha}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.1.8})$$

ainsi que le système 'dual' obtenu par  $E \rightarrow H$  et  $H \rightarrow -E$ .

## 2 Domaine de Fock

On commence par l'analyse de la région proche de la limite ombre/lumière à la surface d'un corps convexe régulier. Cette région appelée région de Fock se trouve être le berceau d'ondes rampantes partant en direction de la zone d'ombre et dans la zone de pénombre. L'analyse des solutions dans le domaine de Fock donne un Ansatz de départ des rampants. Comme dans la partie précédente nous effectuerons les développements dans le cas scalaire dans (2.2), le cas vectoriel lui sera relié dans (2.3).

### 2.1 Equation parabolique de Leontovich

Dans une étude préalable de ce domaine, on utilise le fait que les champs électrique et magnétique vérifiant les équations de Maxwell vérifient aussi l'équation d'Helmholtz.

Afin de ne conserver que les termes dominants de l'équation (III.1.7), on effectue une extension des variables  $s$  et  $n$  par les facteurs  $k^\alpha$  et  $k^\beta$  avec  $(\alpha < 1)$  pour que  $u$  varie moins vite suivant  $s$  que le terme exponentiel de (III.2.13).

- $\alpha$  étant inférieur à 1, on peut considérer les termes en  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$  comme corrections du terme en  $\frac{\partial u}{\partial s}$ .
- La condition de radiation à l'infini et les conditions limites sur la surface nous obligent à conserver les termes de dérivation par rapport à  $n$ , ce qui nous amène  $\beta > 0$ . Les termes en  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sont alors plus petits que le terme en  $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ .
- De même, les termes en  $n^2$  sont plus petits que le terme en  $n$ .

Dans ce domaine, nous recherchons une solution de la forme :

$$U(s, \alpha, n) = e^{iks} u(s, \alpha, n) \quad (\text{III.2.9})$$

En utilisant les considérations précédentes, on peut alors réduire la matrice métrique à une expression plus simple.

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2n}{\rho} & -2nh\tau & 0 \\ -2nh\tau & h^2 \left(1 + \frac{2n}{\rho_t}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + o(n) \quad (\text{III.2.10})$$

L'équation (III.1.7) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{4n}{\rho} + \frac{4n}{\rho_t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \\ & \left[ \left(1 + \frac{2n}{\rho} + \frac{4n}{\rho_t}\right) \left(2ik + \frac{h'}{h}\right) + n \left(\frac{\rho'}{\rho^2} - \frac{\rho'_t}{\rho_t^2}\right) \right] \frac{\partial u}{\partial s} + \\ & \left[ \frac{2n}{\rho} k^2 + ik \frac{h'}{h} \left(1 + \frac{2n}{\rho} + \frac{4n}{\rho_t}\right) + ikn \left(\frac{\rho'}{\rho^2} - \frac{\rho'_t}{\rho_t^2}\right) \right] u = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

Les trois termes dominants nous donnent alors :

$$2ik \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + 2k^2 \frac{n}{\rho} u = 0 \quad (\text{III.2.12})$$

Afin que les termes dominants soient du même ordre, on a  $1 + \alpha = 2 - \beta = 2\beta$ , ce qui nous donne facilement :

$$\alpha = 1/3 \text{ et } \beta = 2/3$$

Ces extensions  $\alpha$  et  $\beta$  des coordonnées  $s$  et  $n$  données par l'équation parabolique (III.2.12) donnent les dimensions du domaine de Fock ( fig. 50).

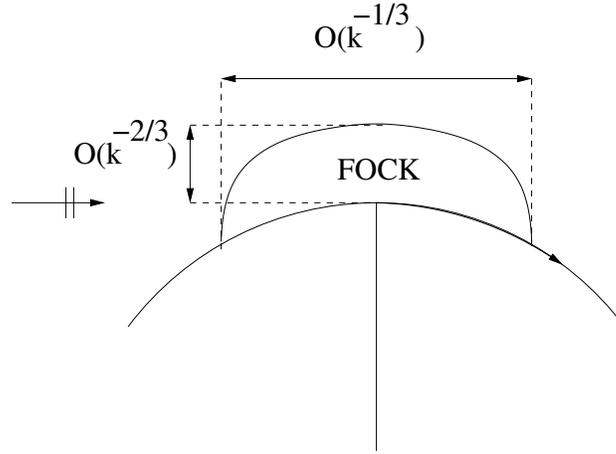


FIG. 50 – Dimensions du domaine de Fock

## 2.2 Helmholtz

Dans ce domaine, on peut effectuer un développement de Taylor du rayon de courbure  $\rho(s) \approx \rho_0 + \rho_1 s + \dots$

Dans l'équation parabolique, on remplace alors  $\rho$  par  $\rho_0$ .

On pose un nouveau système de coordonnées appelé système semi-géodésique étiré :

$$\left(\sigma = \frac{ms}{\rho_0}, \nu = 2m^2 \frac{n}{\rho_0}\right) \text{ avec } m = \left(\frac{k\rho_0}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ayant étiré le paramètre  $k$  par les puissances  $1/3$  et  $2/3$ , il est naturel de prendre l'Ansatz du domaine de Fock comme :

$$U(s, \alpha, n) = e^{iks} u(\sigma, \alpha, \nu) = e^{iks} \sum_{j=0}^N u_j(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{III.2.13})$$

c'est-à-dire en série de puissances de  $k^{-\frac{1}{3}}$ .

On a alors dans le nouveau système de coordonnées :

$$2ik \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial \nu}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + k^2 \frac{\nu}{m^2} u = 0 \quad (\text{III.2.14})$$

puis, en insérant l'Ansatz dans l'équation d'Helmholtz (III.2.11) et en ordonnant suivant les puissances de  $k^{\frac{1}{3}}$  on obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_0 u_0 & = 0 \quad (k^{\frac{4}{3}}) \\ L_0 u_1 + L_1 u_0 & = 0 \quad (k) \\ \vdots & \\ L_0 u_N + \dots + L_j u_{N-j} + \dots + L_N u_0 & = 0 \quad (k^{\frac{4-N}{3}}) \end{array} \right. \quad (\text{III.2.15})$$

### Equation d'Airy

Au premier ordre on retrouve l'équation parabolique de Fock :

$$L_0 u_0 = i \frac{\partial u_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu^2} + \nu u_0 = 0 \quad (\text{III.2.16})$$

et les autres opérateurs  $L_j$  au maximum du second ordre.

Le champ recherché est la somme d'un champ incident  $u^i$  et d'un champ diffracté  $u^d$ , le champ incident étant pris sous la forme d'une onde plane en  $e^{ikx}$ .

En effectuant la transformée de Fourier par rapport à  $\sigma$  de l'opérateur  $L_0$ , on retrouve l'équation d'Airy :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_0^d}{\partial \nu^2} + (\nu - \xi) \tilde{u}_0^d = 0 \quad (\text{III.2.17})$$

On a alors la solution  $\tilde{u}_0^d(s, \nu)$  de la forme :

$$\tilde{u}_0^d(s, \nu) = A(s) w_1(\xi - \nu) + B(s) w_2(\xi - \nu) \quad (\text{III.2.18})$$

avec  $w_1$  et  $w_2$  les fonctions de Fock-Airy ( cf. annexe 4).

On impose à  $\tilde{u}_0^d(s, \nu)$  la condition de radiation en faisant tendre  $\nu$  vers  $+\infty$  pour un milieu à pertes, or on a :

$$\begin{aligned} w_1(t) &\rightarrow 0 && \text{lorsque } |t| \rightarrow +\infty \\ w_2(t) &\rightarrow +\infty && \text{lorsque } |t| \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

donc seule  $w_1$  permet de satisfaire la condition de radiation ce qui nous donne :

$$\tilde{u}_0^d(s, \alpha, \nu) = A(s)w_1(\xi - \nu)$$

### Condition limite de surface

Maintenant,  $\tilde{u}_0^d(s, \nu)$  doit vérifier la condition limite de surface (III.1.3)

Les développements sont effectués dans le cas d'une condition d'impédance car les cas Neumann ( $Z = +\infty$ ) et Dirichlet ( $Z = 0$ ) en découlent facilement.

Cette condition limite du champ total s'écrit :

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu} + imZu_j = 0 \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{III.2.19})$$

et donc

$$\frac{\partial u_j^d}{\partial \nu} + imZu_j^d = - \left( \frac{\partial u_j^i}{\partial \nu} + imZu_j^i \right) \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{III.2.20})$$

ce qui découple les conditions aux limites des  $u_j$ .

Considérons le développement asymptotique du champ incident  $u^i = \sum_{j=0}^N u_j^i k^{-\frac{j}{3}}$ .

On se ramène au premier ordre et on effectue une transformée de Fourier en  $\sigma$  sur la condition limite :

$$\frac{\partial \tilde{u}_j^d}{\partial \nu} + imZ\tilde{u}_j^d = - \left( \frac{\partial \tilde{u}_j^i}{\partial \nu} + imZ\tilde{u}_j^i \right) \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{III.2.21})$$

Afin de relier  $u_0^i$  et  $u_0^d$ , on exprime le champ incident dans le système de coordonnées semi-géodésique ( cf. annexe 2). Le calcul est effectué en passant par un développement de Luneberg-Kline du champ incident :

$$x = s + \frac{ns}{\rho} - \frac{s^3}{6\rho^2} + O\left(k^{-\frac{4}{3}}\right) \quad (\text{III.2.22})$$

On a alors

$$U_0^i \approx e^{ik\left(s + \frac{ns}{\rho_0} - \frac{s^3}{6\rho_0^2}\right)}$$

et donc :

$$u_0^i = e^{ik\left(\frac{ns}{\rho_0} - \frac{s^3}{6\rho_0^2}\right)} \quad (\text{III.2.23})$$

or on a

$$\sigma = \frac{ms}{\rho_0} \text{ et } nu = \frac{2m^2n}{\rho_0}$$

donc

$$\sigma\nu = k\frac{ns}{\rho_0} \text{ et } \frac{\sigma^3}{3} = k\frac{s^3}{6\rho_0^2}$$

ce qui nous donne

$$u_0^i = e^{i(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3})} \quad (\text{III.2.24})$$

La transformée de Fourier du champ incident est alors de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0^i &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i((\xi-\nu)t + \frac{t^3}{3})} dt \\ &= 2\sqrt{\pi} Ai(\xi - \nu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} v(\xi - \nu) \end{aligned} \quad (\text{III.2.25})$$

avec  $Ai$  la fonction d'Airy et  $v$  la fonction de Fock-Airy ( cf. annexe 4)

L'application de cette expression à (III.1.3) nous donne :

$$-A(s) (-\dot{w}_1(\xi) + imZw_1(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-\dot{v}(\xi) + imZv(\xi))$$

et donc

$$A(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\dot{v}(\xi) - imZv(\xi)}{\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)} \quad (\text{III.2.26})$$

On a donc une expression du champ total en intégrales de Fourier :

$$\begin{aligned} u_0(\sigma, \alpha, \nu) &= u_0^i(\sigma, \nu) + u_0^d(\sigma, \nu) \\ &= \frac{u_0^i(0, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( v(\xi - \nu) - \frac{\dot{v}(\xi) - imZv(\xi)}{\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)} w_1(\xi - \nu) \right) e^{i\sigma\xi} d\xi \end{aligned} \quad (\text{III.2.27})$$

La solution (III.2.27) n'est autre que la 'fonction universelle de Fock'  $V(\sigma, \nu, mZ)$ .

On remarque que l'intégrale est écrite de façon formelle. Afin de la calculer, on utilisera le théorème des résidus ( cf. annexe 6)

Pour les valeurs de  $\xi$  négatives, on remplace la fonction d'Airy  $v(\xi)$  dans l'expression du champ réfléchi par  $\frac{w_1(\xi) - w_2(\xi)}{2i}$  ( cf. annexe 4)

La valeur du champ sur la surface ( $\nu = 0$ ) est

$$\begin{aligned} u_0(\sigma, \alpha, 0) &= \frac{u_0^i(0, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\xi)\dot{w}_1(\xi) - \dot{v}(\xi)w_1(\xi)}{\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)} e^{i\sigma\xi} d\xi \\ &= \frac{u_0^i(0, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)} e^{i\sigma\xi} d\xi \end{aligned} \quad (\text{III.2.28})$$

étant donné que le Wronskien est  $W(v, w_1) = 1$ .

On a donc au premier ordre

$$U(s, \alpha, n) = u_0^i(0, 0) e^{iks} F_Z(\sigma) \quad (\text{III.2.29})$$

avec  $F_Z(\sigma)$  la 'fonction de courant de Fock' (III.2.28).

## 2.3 Maxwell

### Equation d'Airy

De la même façon que nous avons obtenu (III.2.11), on a :

$$\begin{aligned}
ikh \left(1 + \frac{n}{\rho} + \frac{n}{\rho_t}\right) h^s &= 2h\tau e^s - 2\frac{h^2}{\rho_t} e^\alpha + 2nh\tau \frac{\partial e^s}{\partial n} - h^2 \left(1 + \frac{2n}{\rho_t}\right) \frac{\partial e^\alpha}{\partial n} \\
ikh \left(1 + \frac{n}{\rho} + \frac{n}{\rho_t}\right) h^\alpha &= \frac{2}{\rho} e^s - 2h\tau e^\alpha - ike^n + \left(1 + \frac{2n}{\rho}\right) \frac{\partial e^s}{\partial n} - 2nh\tau \frac{\partial e^\alpha}{\partial n} - \frac{\partial e^n}{\partial s} \\
ikh \left(1 + \frac{n}{\rho} + \frac{n}{\rho_t}\right) h^n &= -2n\tau \left(ikh + \frac{\partial h}{\partial s}\right) e^s - 2nh\tau \frac{\partial e^s}{\partial s} + h^2 \left(1 + \frac{2n}{\rho_t}\right) \frac{\partial e^\alpha}{\partial s} \\
&\quad + h^2 \left( \left(ik + \frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial s}\right) \left(1 + \frac{2n}{\rho_t}\right) - \frac{2n}{\rho_t} \frac{\partial \rho_t}{\partial s} \right) e^\alpha \quad (\text{III.2.30})
\end{aligned}$$

ainsi que son 'dual' correspondant aux mêmes équations avec l'inversion  $e \rightarrow h$  et  $h \rightarrow -e$ .  
On étire les variables  $s$  et  $n$  en  $\sigma_1 = sk^{\frac{1}{3}}$  et  $\nu_1 = nk^{\frac{2}{3}}$ .

On prend les Ansatz du domaine de Fock pour Maxwell :

$$\vec{E}(\sigma_1, \alpha, \nu_1) = e^{iks} \vec{e}(\sigma_1, \alpha, \nu_1) = e^{iks} \sum_{j=0}^N \vec{e}_j(\sigma_1, \alpha, \nu_1) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{III.2.31})$$

$$\vec{H}(\sigma_1, \alpha, \nu_1) = e^{iks} \vec{h}(\sigma_1, \alpha, \nu_1) = e^{iks} \sum_{j=0}^N \vec{h}_j(\sigma_1, \alpha, \nu_1) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{III.2.32})$$

On substitue le développement des champs dans les équations de Maxwell (III.2.30).

On a alors le système d'équations suivant :

$$h_0^s = 0 \quad (\text{III.2.33})$$

$$e_0^n = -hh_0^\alpha \quad (\text{III.2.34})$$

$$h_0^n = he_0^\alpha \quad (\text{III.2.35})$$

$$h_1^s = ih \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu_1} \quad (\text{III.2.36})$$

$$e_1^n = -hh_1^\alpha \quad (\text{III.2.37})$$

$$h_1^n = he_1^\alpha \quad (\text{III.2.38})$$

$$h_2^s = ih \frac{\partial e_1^\alpha}{\partial \nu_1} \quad (\text{III.2.39})$$

$$e_2^n + hh_2^\alpha = -\nu_1 h \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) h_0^\alpha - h \frac{\partial^2 h_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} - ih \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \sigma_1} \quad (\text{III.2.40})$$

$$h_2^n - he_2^\alpha = -\nu_1 h \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) e_0^\alpha - ih \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \sigma_1} \quad (\text{III.2.41})$$

ainsi que le 'dual' obtenu par les changements  $e \rightarrow h$  et  $h \rightarrow -e$ .

On remarque qu'on peut écrire toutes les composantes des champs à l'ordre 0 par la simple connaissance de la composante suivant la binormale. Nous allons alors exprimer cette composante et nous obtiendrons donc une expression complète du champ à l'ordre 0.

En utilisant (III.2.40) ainsi que le dual de (III.2.41) on obtient :

$$\frac{\partial^2 e_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + 2\nu_1 \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) e_0^\alpha + 2i \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \sigma_1} = 0 \quad (\text{III.2.42})$$

$$\frac{\partial^2 h_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + 2\nu_1 \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) h_0^\alpha + 2i \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \sigma_1} = 0 \quad (\text{III.2.43})$$

On introduit le système de coordonnées géodésique  $(\sigma, \alpha, \nu)$  comme dans le cas acoustique :

$$\left( \sigma = \frac{ms}{\rho_0}, \nu = 2m^2 \frac{n}{\rho_0} \right) \text{ avec } m = \left( \frac{k\rho_0}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Les équations (III.2.43) et (III.2.45) deviennent alors les équations paraboliques de Fock :

$$i \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 e_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + \nu_1 e_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.2.44})$$

$$i \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 h_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + \nu_1 h_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.2.45})$$

En prenant les développements précédents, on en déduit que  $e_0^\alpha$  et  $h_0^\alpha$  s'écrivent :

$$e_0^\alpha(\sigma, \alpha, \nu) = B(s)w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.2.46})$$

$$h_0^\alpha(\sigma, \alpha, \nu) = A(s)w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.2.47})$$

Les champs recherchés vérifient la condition limite :

$$\vec{E}_{tg} = Z\vec{n} \wedge \vec{H}_{tg} \quad (\text{III.2.48})$$

qui devient rapidement :

$$\frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu} + i \frac{m}{Z} e_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.2.49})$$

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \nu} + imZ h_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.2.50})$$

Comme dans le cas acoustique, en prenant une onde plane incidente, on retrouve le résultat (III.2.27) et (III.2.28) sur la surface pour les composantes  $\alpha$  de  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ .

$$e_0^\alpha(\sigma, 0) = \frac{e_0^{i\alpha}(0, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\dot{w}_1(\xi) - i \frac{m}{Z} w_1(\xi)} e^{i\sigma\xi} d\xi = e_0^{i\alpha}(0, 0) F_{\frac{1}{2}}(\sigma) \quad (\text{III.2.51})$$

$$h_0^\alpha(\sigma, 0) = \frac{h_0^{i\alpha}(0, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\dot{w}_1(\xi) - imZ w_1(\xi)} e^{i\sigma\xi} d\xi = h_0^{i\alpha}(0, 0) F_Z(\sigma) \quad (\text{III.2.52})$$

On peut améliorer le résultat et l'amener rapidement à prendre en compte un terme d'ordre 1 grâce à l'équation (III.2.36) et à son équation duale.

Le premier terme non nul suivant  $s$  est le terme d'ordre 1. La condition limite à la surface nous donne un lien entre les champs tangents (III.3.78) :

$$\vec{E}_{tg} = Z \left( \vec{n} \wedge \vec{H}_{tg} \right) \quad (\text{III.2.53})$$

avec

$$\vec{E}_{tg} = E^s \vec{e}_s + E^\alpha \vec{e}_\alpha \text{ et } \vec{H}_{tg} = H^s \vec{e}_s + H^\alpha \vec{e}_\alpha$$

On a alors :

$$e_1^s = -Z h_0^\alpha \quad (\text{III.2.54})$$

$$h_1^s = \frac{1}{Z} e_0^\alpha \quad (\text{III.2.55})$$

Les formulations (III.2.51) et (III.2.52) deviennent alors :

$$\vec{E}(\sigma, 0) = e^{iks} \left[ \left( \vec{E}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{\alpha} \right) F_{\frac{1}{Z}}(\sigma) \vec{\alpha} + Z \left( \vec{E}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{n} \right) F_Z(\sigma) \vec{t} \right] \quad (\text{III.2.56})$$

$$\vec{H}(\sigma, 0) = e^{iks} \left[ \left( \vec{H}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{\alpha} \right) F_Z(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{1}{Z} \left( \vec{H}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{n} \right) F_{\frac{1}{Z}}(\sigma) \vec{t} \right] \quad (\text{III.2.57})$$

Le cas du conducteur parfait est particulier car nous avons  $\vec{E}_t = \vec{0}$ .

L'équation (III.2.36) nous donne :

$$h_1^1 = e^{iks} \frac{i}{m} \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu} \quad (\text{III.2.58})$$

ce qui nous amène pour le parfaitement conducteur :

$$\vec{H}(\sigma, 0) = e^{iks} \left[ \left( \vec{H}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{\alpha} \right) g(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{i}{Z} \left( \vec{H}^i(\sigma, 0) \cdot \vec{n} \right) f(\sigma) \vec{t} \right] \quad (\text{III.2.59})$$

### 3 Ondes rampantes

Une grande valeur positive de  $\sigma$  dans l'expression asymptotique (III.2.27) nous permet de remplacer l'intégrale par une expression en somme de résidus due aux pôles  $\xi_j$  situés dans le demi-plan supérieur de plan complexe. Ces pôles sont les racines de  $w_1(\xi) - imZw_1(\xi)$ . On étudie dans ( cf. annexe 6) les valeurs de ces pôles et leur emplacement dans le plan complexe.

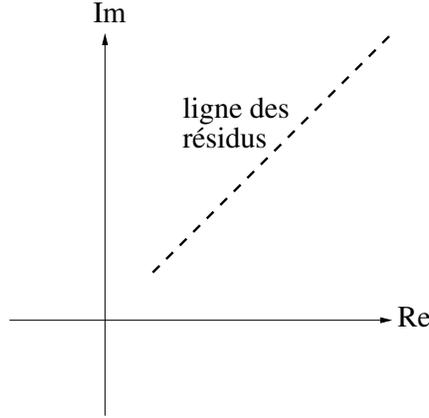


FIG. 51 – Racines de  $w_1(\xi) - imZw_1(\xi)$

Chacun de ces résidus est caractérisé par un facteur d'atténuation  $e^{i\sigma\xi_j}$ . On réduit cette somme de résidus à son premier terme. L'expression de ces résidus et de  $\sigma$  incite à rechercher une expression des solutions de la forme :

$$U(s, \alpha, \nu) = e^{iks + ik\frac{1}{3}\varphi(s)} \sum_{j=0}^N u_j(s, \alpha, \nu_1) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{III.3.60})$$

pour Helmholtz et :

$$\begin{aligned} \vec{E}(s, \alpha, \nu) &= e^{iks + ik\frac{1}{3}\varphi_E(s)} \sum_{j=0}^N \vec{e}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \\ \vec{H}(s, \alpha, \nu) &= e^{iks + ik\frac{1}{3}\varphi_H(s)} \sum_{j=0}^N \vec{h}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \end{aligned} \quad (\text{III.3.61})$$

pour Maxwell.

### 3.1 Helmholtz

Après insertion de l'Ansatz (III.3.60) dans (III.1.7) et en ordonnant suivant les puissances de  $k^{\frac{1}{3}}$ , on obtient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 u_0 = 0 \quad (k^{\frac{4}{3}}) \\ L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0 \quad (k) \\ \vdots \\ L_0 u_N + \dots + L_j u_{N-j} + \dots + L_N u_0 = 0 \quad (k^{\frac{4-N}{3}}) \end{array} \right. \quad (\text{III.3.62})$$

avec

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + \left( \nu_1 - 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \varphi'(s) \right) \text{ pour } \nu_1 = nk^{\frac{2}{3}} \quad (\text{III.3.63})$$

$$L_1 = 2i \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{h'}{h} \quad (\text{III.3.64})$$

$$(\text{III.3.65})$$

En utilisant le même principe que pour le domaine de Fock, on utilise l'équation de premier ordre  $L_0 u_0 = 0$  et on modifie  $\nu_1$  et  $\nu = \frac{kn}{m}$  avec  $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . On a alors :

$$\frac{\partial^2 u_0(s, \nu)}{\partial \nu^2} + \left( \nu - 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \varphi'(s) \right) u_0(s, \nu) = 0 \quad (\text{III.3.66})$$

En prenant  $\xi = 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \varphi'(s)$  et pour la variable  $(\xi - \nu)$ , on retrouve l'équation d'Airy et on obtient :

$$u_0(s, \nu) = A(s) w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.3.67})$$

En posant  $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ , la condition d'impédance devient :

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu} + imZu_j = 0 \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{III.3.68})$$

Au premier ordre on a donc  $w_1'(\xi) - imZ(s)w_1(\xi) = 0$ .

Cette équation admet une infinité de solutions  $\xi_p$ . On prend simplement  $\xi = \xi_p$  la racine de partie réelle la plus faible (elle détermine le premier mode de propagation) de ces racines qui est fonction de  $s$ .

On a alors  $\varphi(s) = 2^{-\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(s)}{\rho(s)^{\frac{2}{3}}} ds$  avec  $\varphi(0)$  une constante considérée nulle.

Afin de définir  $A(s)$ , on utilise l'équation  $L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0$  donnée par l'annulation du terme en  $k$  ( cf. annexe 3)

On obtient finalement :

$$U(s, \nu) = A(0) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi(s)} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.3.69})$$

où  $Q(s) = (\xi(s) + m^2 Z^2) w_1^2(\xi(s))$  et  $h(s)$  l'écartement du pinceau géodésique sur la surface au point d'abscisse curviligne  $s$ .

Les termes d'ordre supérieur se calculent en résolvant les autres équations ordre après ordre ce qui nous remène à la résolution à chaque ordre d'un problème de Sturm-Liouville.

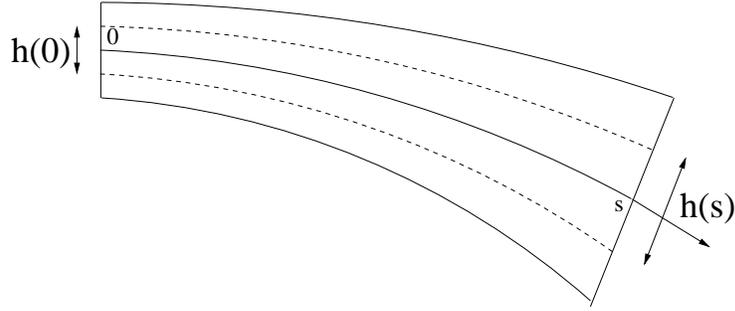


FIG. 52 – Ecartement du pinceau géodésique

### 3.2 Maxwell

En prenant la forme de l'Ansatz (III.3.61), ainsi que le système (III.1.8), on obtient les systèmes en  $k$ ,  $k^{\frac{2}{3}}$ ,  $k^{\frac{1}{3}}$  et  $k^0$  suivants (à vérifier) :

$$\vec{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{h}e_0^n \\ he_0^\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.70})$$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} ih \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu_1} \\ -\frac{1}{h}e_1^n \\ he_1^\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.71})$$

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} ih \frac{\partial e_1^\alpha}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{1}{h} e_0^n \\ -\frac{1}{h}e_2^n - \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{1}{h} - \nu_1 \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) \right) 0^n \\ he_2^\alpha + h \left( \nu_1 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) e_0^\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.72})$$

$$\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} ih \frac{\partial e_2^\alpha}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{1}{h} \vec{e}_1^n + ih \left( \frac{2}{\rho_t} - \nu_1 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_t} \right) \frac{\partial}{\partial \nu_1} \right) e_0^\alpha \\ -\frac{1}{h}e_3^n - \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \nu_1 \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) \right) e_1^n \\ + 2i\tau \left( 1 + \left( \nu_1 + \frac{1}{2\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \nu_1} \right) e_0^\alpha + i \frac{\partial e_0^n}{\partial s} \\ he_3^\alpha + h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \nu_1 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_t} \right) \right) e_1^\alpha - \frac{i}{h} \frac{\partial h^2 e_0^\alpha}{\partial s} - i (1 + 2\nu_1 h \tau) \frac{\partial e_0^n}{\partial \nu_1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.73})$$

On peut compléter ce système par son 'dual' issu de l'équation  $\text{rot } \vec{H} = -ik\vec{E}$  en remplaçant  $e$  par  $h$  et  $h$  par  $-e$ .

On examine ces systèmes ordre par ordre.

### Système d'ordre $k$

Le système d'ordre  $k$  est composé de (III.3.70) et de son "dual".

Ce système nous amène que les composantes suivant  $s$  de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont nulles au premier ordre et que les autres composantes son liées entre elles. Ceci s'explique par le fait qu'il existe 2 types de rayons rampants :

#### 1. Rampant Electrique

$\vec{e}$  et  $\vec{h}$  s'expriment en fonction de  $e_0^\alpha$ .

$$\begin{aligned} e_0^\alpha & \\ h_0^n &= h e_0^\alpha \\ h_0^s &= e_0^s = 0 \\ h_0^\alpha &= e_0^n = 0 \end{aligned}$$

Le repère d'évolution des rampants n'étant pas normé, la deuxième équation nous indique seulement l'égalité des longueurs de  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$ . Les composantes dominantes étant  $E_0^\alpha$  et  $h_0^n$ , le rampant électrique se propage comme une onde plane.

#### 2. Rampant Magnétique

$\vec{e}$  et  $\vec{h}$  s'expriment en fonction de  $e_0^\alpha$ .

$$\begin{aligned} h_0^\alpha & \\ e_0^n &= -h h_0^\alpha \\ e_0^s &= h_0^s = 0 \\ e_0^\alpha &= h_0^n = 0 \end{aligned}$$

De ces équations découlent les mêmes conclusions que celles vues précédemment.

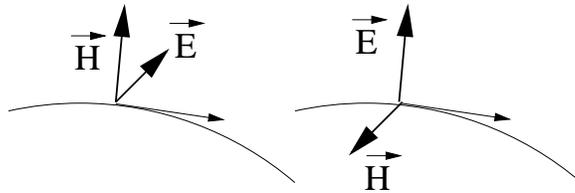


FIG. 53 – Rampants électrique et magnétique

### Système d'ordre $k^{\frac{2}{3}}$

Ce système composé de (III.3.71) et de son "dual" fait apparaître une composante suivant  $s$  non nulle, contrairement à l'onde plane.

$$\begin{aligned} h_1^s &= ih \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu_1} \neq 0 \\ e_1^s &= -ih \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \nu_1} \neq 0 \end{aligned}$$

A l'ordre 1, on exprime toutes les composantes de  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  en fonction de  $e_0^\alpha, h_0^\alpha, e_1^\alpha$  et  $h_1^\alpha$ , on prend alors  $e^\alpha$  et  $h^\alpha$  comme des potentiels.

Pour calculer ces potentiels, le système d'équations en  $k^{\frac{1}{3}}$  nous amène le système suivant :

$$\frac{\partial^2 h_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + 2 \left( \frac{\nu_1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) h_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.3.74})$$

$$\frac{\partial^2 e_0^\alpha}{\partial \nu_1^2} + 2 \left( \frac{\nu_1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) e_0^\alpha = 0 \quad (\text{III.3.75})$$

Pour chaque composante  $e_0^\alpha$  et  $h_0^\alpha$ , on retrouve l'opérateur  $L_0$  pour lequel l'étude a été faite en (III.3.63).

Comme pour Helmholtz, en changeant  $\nu_1$  en  $\nu$ , on retrouve alors :

$$h_0^\alpha = A(s)w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.3.76})$$

$$e_0^\alpha = B(s)w_1(\xi - \nu) \quad (\text{III.3.77})$$

avec  $\xi = 2^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}\varphi'(s)$

### 3.3 Conditions limites (détermination de la phase)

Comme dans le cas scalaire, on considère que les cas de Dirichlet et Neumann découlent facilement du cas avec impédance.

Cette condition s'écrit :

$$\vec{E}_{tg} = Z \left( \vec{n} \wedge \vec{h}_{tg} \right) \quad (\text{III.3.78})$$

avec

$$\vec{E}_{tg} = E^s \vec{e}_s + E^\alpha \vec{e}_\alpha \text{ et } \vec{h}_{tg} = h^s \vec{e}_s + h^\alpha \vec{e}_\alpha$$

On peut réécrire (III.3.78) comme :

$$e^s = -Zh h^\alpha \quad (\text{III.3.79})$$

$$h^s = -\frac{h}{Z} E^\alpha \quad (\text{III.3.80})$$

Afin d'obtenir une solution uniforme en  $Z \rightarrow \infty$ , nous étirons l'impédance.

$$Z = k^{-\frac{1}{3}} Z_H \quad \text{dans (III.3.79)}$$

$$Z = k^{\frac{1}{3}} Z_E \quad \text{dans (III.3.80)}$$

avec  $Z_E$  et  $Z_H$  supposés d'ordre 1.

Les équations (III.3.79) et (III.3.80) donnent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu} + \frac{im}{Z} e_0^\alpha &= 0 \quad \text{pour } \nu = 0 \\ \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \nu} + imZ h_0^\alpha &= 0 \quad \text{pour } \nu = 0 \end{aligned}$$

avec  $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

On retrouve alors (III.2.19) pour  $h_0^\alpha$  et  $E_0^\alpha$ .

On a alors :

$$e_0^\alpha \text{ proportionnel à } w_1(\xi_E - \nu) \quad \text{avec } w_1'(\xi_E) = \frac{im}{Z} w_1(\xi_E) \quad \text{(III.3.81)}$$

$$h_0^\alpha \text{ proportionnel à } w_1(\xi_H - \nu) \quad \text{avec } w_1'(\xi_H) = imZ w_1(\xi_H) \quad \text{(III.3.82)}$$

$\xi_E$  et  $\xi_H$  ne peuvent être égaux que dans le cas où  $Z = 1$  car  $w_1$  et  $w_1'$  ne s'annulent pas simultanément.

Il y a donc 2 modes :

1. Le mode rampant électrique  $e_0^\alpha \neq 0$  et  $h_0^\alpha = 0$

$$\varphi_E(s, \alpha) = 2^{-\frac{1}{3}} \int \xi_E \frac{ds}{\rho^{\frac{2}{3}}} \quad \text{(III.3.83)}$$

$$e_0^\alpha(s, \alpha, \nu) = \frac{A(s, \alpha)}{h} w_1(\xi_E - \nu) \quad \text{(III.3.84)}$$

$\xi_E$  dépend de  $Z$  car il est la solution de  $w_1'(\xi_E) - \frac{im}{Z} w_1(\xi_E) = 0$ .

2. Le mode rampant magnétique  $h_0^\alpha \neq 0$  et  $E_0^\alpha = 0$

$$\varphi_H(s, \alpha) = 2^{-\frac{1}{3}} \int \xi_H \frac{ds}{\rho^{\frac{2}{3}}} \quad \text{(III.3.85)}$$

$$h_0^\alpha(s, \alpha, \nu) = \frac{B(s, \alpha)}{h} w_1(\xi_H - \nu) \quad \text{(III.3.86)}$$

$\xi_H$  dépend de  $Z$  car il est la solution de  $w_1'(\xi_H) - imZ w_1(\xi_H) = 0$ .

Lorsqu'on fait tendre  $Z$  vers l'infini, on retrouve bien les formulations d'un conducteur magnétique (conditions limites de Dirichlet pour  $h_0^\alpha$ ). De même pour  $Z = 0$ , on retrouve bien le cas du conducteur électrique.

### 3.4 Influence géométrique

On s'intéresse aux opérateurs  $L_0$  et  $L_1$  ainsi qu'à l'influence des termes en  $\rho_t$ .  
Les termes dominants sont :

$$k^{\frac{4}{3}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + 2 \left( \nu \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) u \right] + k \left[ 2i \frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{h'}{h} u \right] + k^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial u}{\partial \nu} - k^{\frac{1}{3}} \frac{i \rho'_t \nu}{\rho_t^2} u + O \left( k^{\frac{1}{3}} \right) = 0 \quad (\text{III.3.87})$$

On peut alors distinguer 3 cas en fonction de l'ordre de  $k$  des termes contenant le rayon de courbure transverse.

1.  $\frac{1}{\rho_t} \ll k^{\frac{1}{3}}$

le rayon de courbure transverse n'apparaît que dans les équations d'ordre  $k^{\frac{2}{3}}$ . On a le cas d'un corps convexe 'classique' que l'on vient de traiter en (3).

2.  $k^{\frac{1}{3}} \ll \frac{1}{\rho_t} \ll k^{\frac{2}{3}}$

le rayon de courbure transverse apparaît dans les équations d'ordre  $k^1$  et modifie le facteur d'amplitude dans les rampants.

On appellera ce cas corps 'modérément' allongés qui seront traités en (1.2).

3.  $k^{\frac{2}{3}} \ll \frac{1}{\rho_t}$

dans ce cas de corps 'fortement' allongés qui seront traités en (2.2) , le rayon de courbure transverse apparaît dans l'équation principale d'ordre  $k^{\frac{4}{3}}$ .

### 3.5 Détermination de l'amplitude

On cherche ici à calculer les amplitudes  $A(s, \alpha)$  et  $B(s, \alpha)$ . Ajouté aux résultats précédents, le système (III.3.73) et son "dual" nous permettent d'obtenir toutes les composantes des champs en fonction des compsoantes en  $\alpha$ .

On obtient comme équations de compatibilité :

$$i \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}} L_0 H_1^\alpha = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\partial \sqrt{h} H_0^\alpha}{\partial s} - 2\tau E_0^\alpha \quad (\text{III.3.88})$$

$$i \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}} L_0 E_1^\alpha = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\partial \sqrt{h} E_0^\alpha}{\partial s} + 2\tau H_0^\alpha \quad (\text{III.3.89})$$

#### Cas rampant magnétique

Dans ce cas  $E_0 = 0$  et (III.3.88) devient alors :

$$i \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}} L_0 H_1^\alpha = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\partial \sqrt{h} H_0^\alpha}{\partial s} - 2\tau E_0^\alpha$$

avec les conditions limites :

$$\frac{\partial H_0^\alpha}{\partial \nu} + imZH_0^\alpha = 0 \text{ et } \frac{\partial H_1^\alpha}{\partial \nu} + imZH_1^\alpha = 0$$

La condition limite sur le terme d'ordre 1 se trouve de manière identique au terme d'ordre 0.

De la même façon que pour (III.3.63), on obtient une solution identique à (III.3.69) :

$$H(s, \alpha, \nu) = B(0)e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi_H(s,\alpha)} \left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{Q_H(0)}{Q_H(s)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h(0)}{h(s)}\right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_H - \nu) \quad (\text{III.3.90})$$

avec  $\varphi_H(s, \alpha) = 2^{-\frac{1}{3}} \int_{p(\alpha)}^s \xi_H \frac{ds}{\rho^{\frac{2}{3}}}$  et où  $Q_H(s) = (\xi_H(s) + m^2 Z^2) w_1^2(\xi_H(s))$  pour  $h(s)$  l'écartement du pinceau géodésique sur la surface au point d'abscisse curviligne  $s$  et  $p(\alpha)$  la borne inférieure de l'intégration de la phase.

### Cas rampant électrique

On obtient de la même façon :

$$E(s, \alpha, \nu) = A(0)e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi_E(s,\alpha)} \left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{Q_E(0)}{Q_E(s)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h(0)}{h(s)}\right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_E - \nu) \quad (\text{III.3.91})$$

avec  $\varphi_E(s, \alpha) = 2^{-\frac{1}{3}} \int_{p(\alpha)}^s \xi_H \frac{ds}{\rho^{\frac{2}{3}}}$  et où  $Q_E(s) = (\xi_H(s) + m^2 Z^2) w_1^2(\xi_E(s))$  et  $p(\alpha)$  est la borne inférieure de l'intégration de la phase.

## 3.6 Interprétation des solutions

Pour justifier physiquement les termes des solutions, nous reprenons l'expression (III.3.91).

$$E(s, \alpha, \nu) = A(\alpha)e^{iks+i\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_{p(\alpha)}^s \xi_H \frac{ds}{\rho^{\frac{2}{3}}}}_1} \underbrace{\left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{Q_E(0)}{Q_E(s)}\right)^{\frac{1}{2}}}_2 \underbrace{\left(\frac{h(0)}{h(s)}\right)^{\frac{1}{2}}}_3 w_1(\xi_E - \nu)$$

1. la borne inférieure  $p(\alpha)$

Cette borne fixe l'origine de l'atténuation du rampant. Nous verrons par la suite qu'il correspond à l'intersection du rampant avec la frontière ombre-lumière.

2. le facteur  $\left(\frac{Q(0)}{Q(s)}\right)^{\frac{1}{2}}$

Dans [10], ce facteur est interprété comme faisant l'effet d'un indice de réfraction. En effet, on peut constater l'analogie entre l'amplitude d'un rayon spatial en  $n^{-\frac{1}{2}}$  ( $n$  étant l'indice du milieu) avec l'amplitude d'un rampant en  $Q(s)^{-\frac{1}{2}}$ . On peut alors assimiler  $Q(s)^{-\frac{1}{2}}$  à un indice équivalent.

3. le facteur  $\left(\frac{h(0)}{h(s)}\right)^{\frac{1}{2}}$

En **GTD**, l'interprétation vient du fait que la section d'un rayon de surface est proportionnelle à  $h(s)$  et que la puissance se conserve dans un tube de rayon de surface ce qui nous donne :  $E_0^2 h = H_0^2 h = cste$ .

Toujours dans [10], une interprétation plus globale est énoncée.

On utilise encore la conservation de la puissance mais cette fois-ci dans un tube de rayon de largeur  $h$  et d'épaisseur celle de la couche limite ( $k^{-\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}$ ). On a alors

$E_0^2 h \rho^{\frac{1}{3}} = H_0^2 h \rho^{\frac{1}{3}} = cste$  ce qui nous donne aussi le facteur  $\left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{6}}$ .

## 4 Raccordement des trois domaines

Comme on l'a spécifié au début de (1), l'assortiment des solutions trouvées par la méthode de la couche limite est un problème supplémentaire. Après avoir donné les formulations en zone éclairée, dans le domaine de Fock et en zone d'ombre proche de la surface, il nous faut donc les relier entre elles.

Nous avons 3 domaines donc 2 zones de raccord traités en (4.1) et (4.1) pour Helmholtz et en (4.2) et (4.2) pour Maxwell.

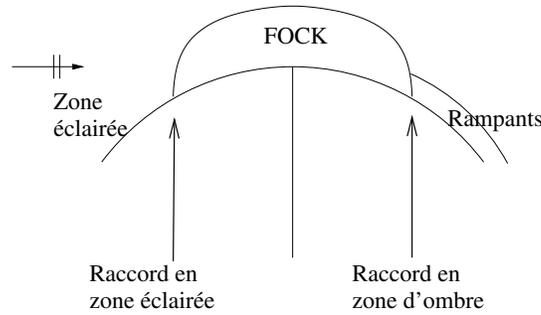


FIG. 54 – Zones de raccord avec le domaine de Fock

### 4.1 Helmholtz

Les trois formulations au premier ordre sont les suivantes :

$$U = (1 + R)e^{ikx} \quad \text{en zone éclairée ( cf. part 2)}$$

$$U = e^{iks} F_Z(\sigma) \quad \text{dans la région de Fock (2)}$$

$$U = e^{iks} A(0) e^{ik^{\frac{1}{3}} \varphi(s)} \left(\frac{\rho(0)}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{h(0)}{h(s)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Q(0)}{Q(s)}\right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi - \nu) \quad \text{dans la zone d'ombre (3)}$$

#### Raccordement en zone éclairée

L'intégrale de la solution en zone de Fock admet un point stationnaire et peut donc être évaluée par la méthode du col.

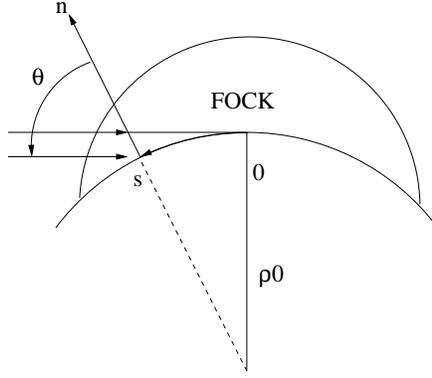


FIG. 55 – Lien entre Fock et zone éclairée

Considérons l'intégrale oscillante :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\xi} \frac{d\sigma}{w_1'(\xi) - imZw_1(\xi)} \quad (\text{III.4.92})$$

Les expressions de  $w_1'(\xi)$  et  $w_1(\xi)$  pour  $\xi$  grand sont :

$$w_1(\xi) \approx \xi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III.4.93})$$

$$w_1'(\xi) \approx \xi^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III.4.94})$$

ce qui amène :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\xi - \frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} \frac{\xi^{\frac{1}{4}}}{\xi^{\frac{1}{2}} - imZ} d\xi \quad (\text{III.4.95})$$

En prenant la phase :

$$q(\xi) = i\sigma\xi - \frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}$$

on a :

$$q'(\xi) = i\sigma - \xi^{\frac{1}{2}}$$

$$q''(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}$$

Le point stationnaire est alors :

$$\sqrt{\xi_s} = i\sigma, \quad \xi_s = -\sigma^2 \quad (\text{III.4.96})$$

La méthode du col nous donne alors :

$$I(\sigma) = 2\sqrt{\pi} \frac{i\sigma}{i\sigma - imZ} e^{-i\frac{\sigma^3}{3}} \quad (\text{III.4.97})$$

Dans la zone de Fock, on a  $\sigma = m\frac{s}{\rho} = O(1)$ , or  $\frac{s}{\rho}$  est le développement au premier ordre de  $-\cos\theta$ .

Ceci nous donne alors dans la région de Fock éclairée :

$$\sigma = -m \cos \theta \quad (\text{III.4.98})$$

et donc :

$$U_0 = e^{iks} e^{i \frac{(-m \cos \theta)^3}{3}} F_Z(-m \cos \theta) = e^{iks} e^{i \frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \quad (\text{III.4.99})$$

### Raccordement en zone d'ombre

Les travaux de Logan sur les fonctions de Fock nous amènent :

$$U(\sigma, \xi, \nu) \approx e^{iks} \sum_p \frac{2i\sqrt{\pi}}{(\xi^p + m^2 Z^2) w_1^2(\xi^p)} e^{i\sigma \xi^p} w_1(\xi^p - \nu) \quad (\text{III.4.100})$$

En écrivant la solution de rampants sous forme de résidus, on a :

$$U(s, \xi, \nu) \approx e^{iks} \sum_p A^p(0) \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \left( \frac{k}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi^p(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} w_1(\xi^p - \nu) \quad (\text{III.4.101})$$

pour  $s$  petit et exprimé en fonction de  $\sigma$ , on a :

$$U(\sigma, \xi, \nu) \approx e^{iks} \sum_p A^p(0) e^{i\sigma \xi^p} w_1(\xi^p - \nu) \quad (\text{III.4.102})$$

ce qui nous donne :

$$A^p(0) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{(\xi^p + m^2 Z^2) w_1^2(\xi^p)} = \frac{2i\sqrt{\pi}}{Q^p(0)} \quad (\text{III.4.103})$$

La formulation au premier ordre devient alors :

$$U_0 = e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2i\sqrt{\pi}}{(Q(0))^{\frac{1}{2}} (Q(s))^{\frac{1}{2}} w_1(\xi(0))} e^{i \left( \frac{k}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(t)}{\rho(t)^{\frac{2}{3}}} dt} \quad (\text{III.4.104})$$

## 4.2 Maxwell

Les formulations dans les différentes zones sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left( \vec{E}^i + \overline{\overline{\mathcal{R}_E}} \vec{E}^i \right) = \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \frac{2Z \sin \theta}{1+Z \sin \theta} \vec{\alpha} + \left( \vec{E}^i \cdot \vec{t} \right) \frac{2Z}{Z+\sin \theta} \vec{t} && \text{en zone éclairée ( cf. part 2)} \\ \vec{H} &= \left( \vec{H}^i + \overline{\overline{\mathcal{R}_H}} \vec{H}^i \right) = \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \frac{2 \sin \theta}{Z+\sin \theta} \vec{\alpha} + \left( \vec{H}^i \cdot \vec{t} \right) \frac{2}{1+Z \sin \theta} \vec{t} \\ \vec{E}_t &= \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) F_Z(\sigma) \vec{\alpha} + Z \left( \vec{E}^i \cdot \vec{n}' \right) F_{\frac{1}{2}}(\sigma) \vec{t} && \text{dans la région de Fock (2)} \\ \vec{H}_t &= \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) F_{\frac{1}{2}}(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{1}{Z} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{n}' \right) F_Z(\sigma) \vec{t} \\ \vec{E}_t &= A(\alpha) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_E(s, \alpha)} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q_E(0)}{Q_E(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_E - \nu) && \text{dans la zone d'ombre (3)} \\ \vec{H}_t &= B(\alpha) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_H(s, \alpha)} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q_H(0)}{Q_H(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_H - \nu) \end{aligned}$$

## Raccordement en zone éclairée

En reprenant les développements effectués pour Helmholtz, on a :

$$\vec{E}_t = e^{iks} \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_{\frac{1}{2}}(\sigma) \vec{\alpha} + Z \left( \vec{E}^i \cdot \vec{n}' \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \vec{t} \quad (\text{III.4.105})$$

$$\vec{H}_t = e^{iks} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{1}{Z} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{n}' \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_{\frac{1}{2}}(\sigma) \vec{t} \quad (\text{III.4.106})$$

## Raccordement en zone d'ombre

Comme pour le premier raccordement, les développements pour Helmholtz nous amènent :

$$\vec{E}_t = \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2i\sqrt{\pi} e^{iks} e^{i\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(t)}{\rho(t)^{\frac{2}{3}}} dt}}{\sqrt{Q_E(0)Q_E(s)} w_1(\xi(0))} \vec{\alpha} \quad (\text{III.4.107})$$

$$\vec{H}_t = \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2i\sqrt{\pi} e^{iks} e^{i\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(t)}{\rho(t)^{\frac{2}{3}}} dt}}{\sqrt{Q_H(0)Q_H(s)} w_1(\xi(0))} \vec{\alpha} \quad (\text{III.4.108})$$

# 5 Synthèse des Formulations

## 5.1 Récapitulatif des notations et des fonctions

Afin de bien comprendre les extensions de variables nécessaires à l'application de la méthode de la couche limite, nous faisons un rapide rappel des notations utilisées.

### Notations

- $\theta$  : angle entre le vecteur d'onde incident et la normale à la surface
- $Z$  : impédance relative du matériau
- $k$  : nombre d'onde
- $(\rho, \rho_t)$  : les rayons de courbure (dans le sens de la géodésique, transverse à la géodésique)
- $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  : coefficient d'extension
- $h$  : coefficient de divergence (ou convergence) des géodésiques
- $Q(s) = (\xi(s) + m^2 Z^2) w_1^2(\xi(s))$

### Fonctions

Pour plus de lisibilité des formulations, nous faisons un rappel des fonctions introduites dans les chapitres précédents.

- La fonction courant de Fock  $F_Z$  :

$$F_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w_1(\xi) - imZw_1(\xi)} e^{ix\xi} d\xi$$

– La fonction 'soft' ou 'électrique'  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w_1(\xi)} e^{ix\xi} d\xi$$

– La fonction 'hard' ou 'magnétique'  $g(x)$  :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\dot{w}_1(\xi)} e^{ix\xi} d\xi$$

## 5.2 Représentation des fonctions

Après avoir donné les formulations des fonctions utilisées, nous montrons maintenant leur comportement.

On compare les amplitudes des champs de pression tangents à la surface après une incidence en onde plane entre l'optique physique et la formulation de Fock et de rampants  $g$  pour un matériau parfaitement électrique conducteur ( fig. 56).

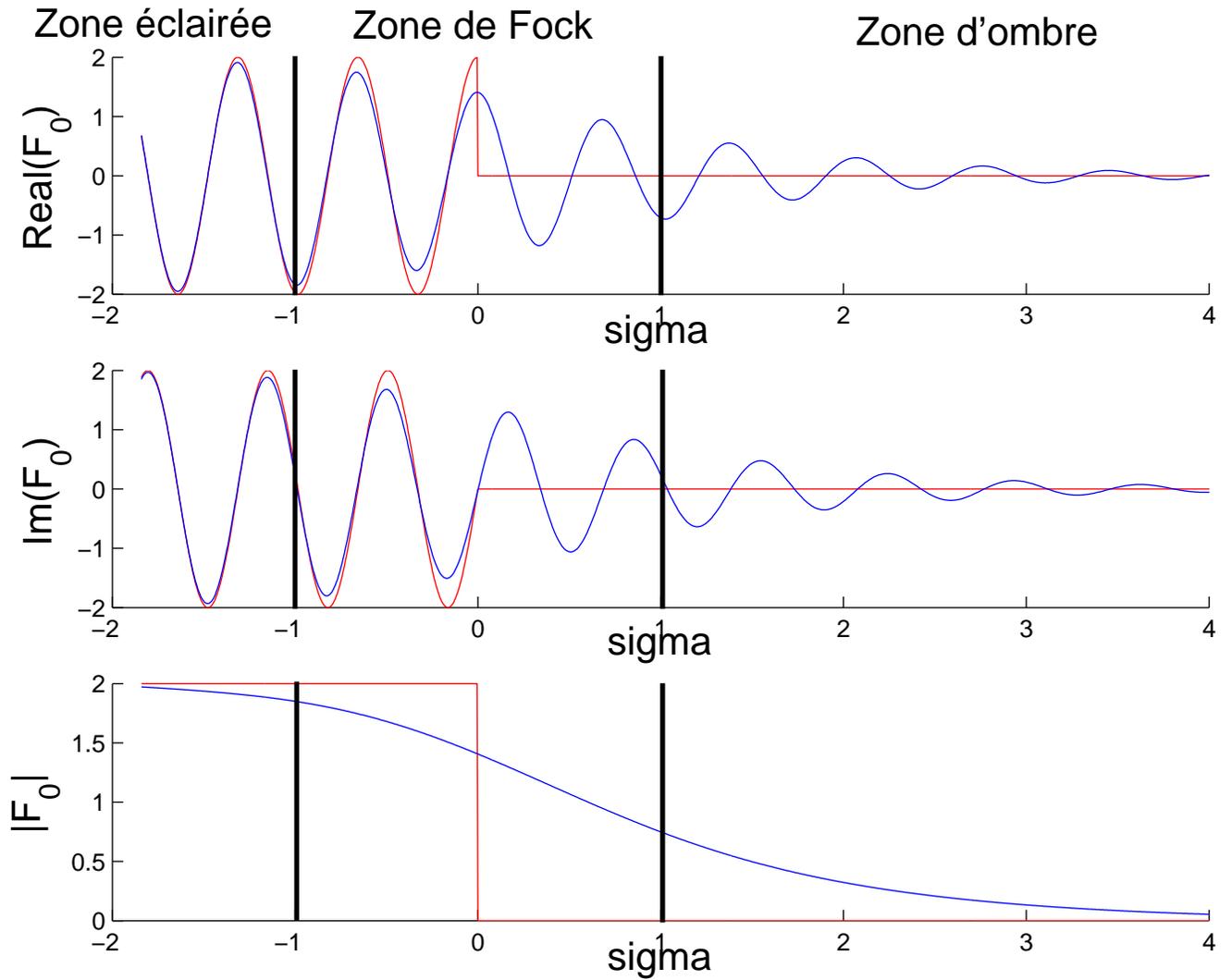


FIG. 56 – Comparaison entre l'Optique Géométrique et la formulation de rayons en parfaitement électrique conducteur

On montre l'évolution des parties réelles et imaginaires et des modules des champs tangents en fonction de la variable  $\sigma$ , la variable étirée (fig. 56). On remarque que pour de grandes valeurs négatives de  $\sigma$  les deux comportements se rejoignent.

On effectue les mêmes comparaisons concernant la fonction  $F_Z$  pour un matériau d'impédance  $Z = 1$  ( fig. 57).

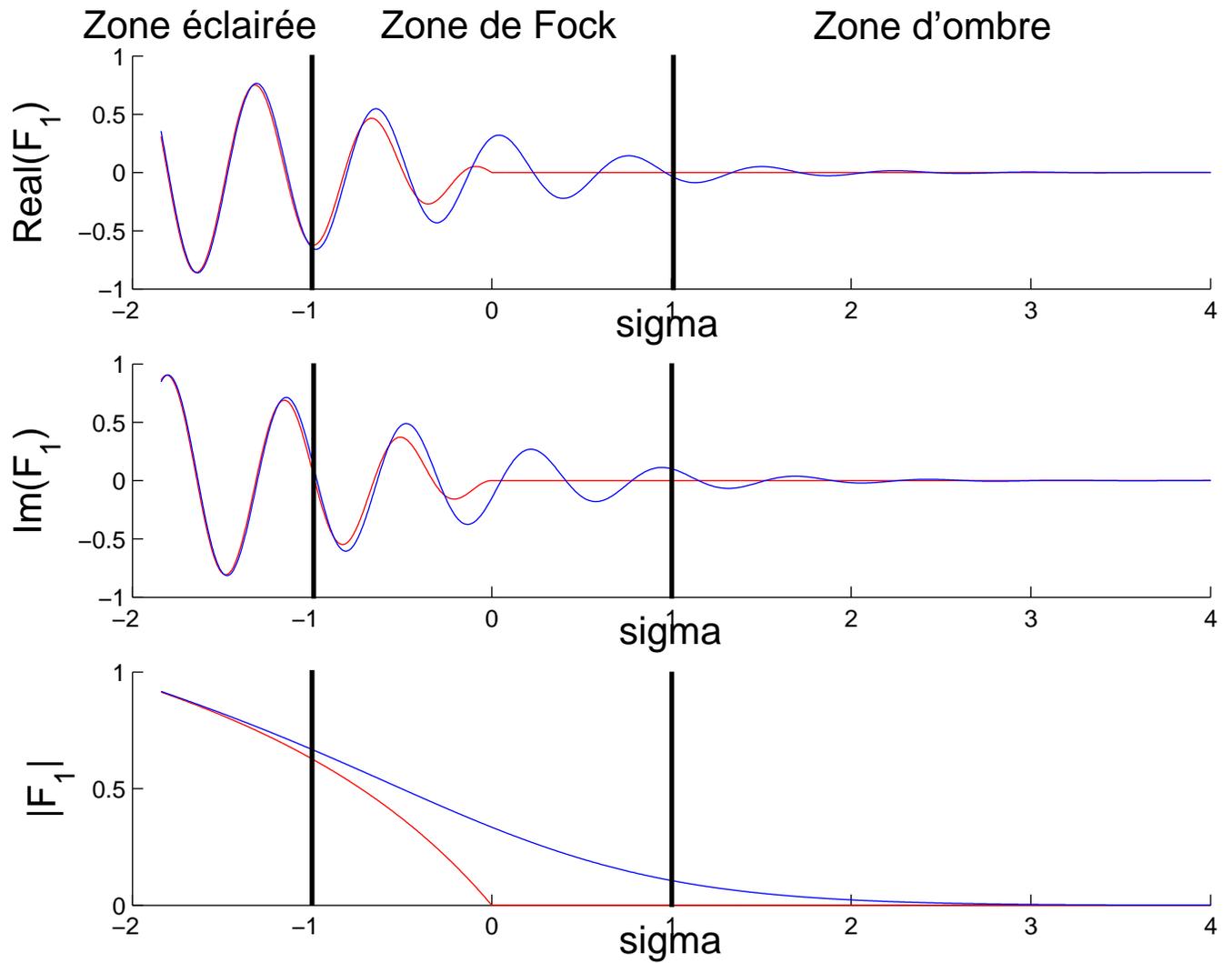


FIG. 57 – Comparaison entre l'Optique Géométrique et la formulation de rayons en parfaitement absorbant

### 5.3 Helmholtz

Pour l'équation d'Helmholtz, utilisée en acoustique, nous faisons un bilan des formulations sur la surface dans le cadre d'une incidence en onde plane unitaire sur un corps régulier. Nous donnons les formulations dans le cas d'un objet parfaitement réfléchissant et absorbant.

1. Zone Eclairée
  - Parfaitement Réfléchissant

$$U(s, 0) = 2$$

- Absorbant

$$U(s, 0) = \frac{2\sin(\theta)}{Z + \sin(\theta)}$$

2. Zone de Fock Eclairée ( $\sigma = -m\sin(\theta) < 0$ )
  - Parfaitement Réfléchissant

$$U(\sigma, 0) = \frac{e^{-i\frac{\sigma^3}{3}}}{\sqrt{\pi}}g(\sigma)$$

- Absorbant

$$u_0(\sigma, 0) = \frac{e^{-i\frac{\sigma^3}{3}}}{\sqrt{\pi}}F_Z(\sigma)$$

3. Zone de Fock Ombre ( $\sigma = \frac{ms}{\rho} > 0$ )
  - Parfaitement Réfléchissant

$$U(\sigma, 0) = \frac{e^{iks}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} g(\sigma)$$

- Absorbant

$$U(\sigma, 0) = \frac{e^{iks}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} F_Z(\sigma)$$

4. Zone d'ombre proche de la surface
  - Parfaitement Réfléchissant

$$U(s, 0) = \frac{2i\sqrt{\pi}e^{iks}}{\sqrt{\xi(0)}\sqrt{\xi(s)}w_1(\xi)} e^{i\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'}$$

- Absorbant

$$U(s, 0) = \frac{2i\sqrt{\pi}e^{iks}}{\sqrt{Q(0)}\sqrt{Q(s)}w_1(\xi)} e^{i\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^s \frac{\xi(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'}$$

Dans la zone de Fock, on calcule l'intégrale contenue dans  $g$  ou  $F_Z$  par une méthode d'intégration numérique.

Dans la zone d'ombre profonde proche de la surface, on calcule cette intégrale par la méthode des résidus.

## 5.4 Maxwell

Pour les équations de Maxwell, utilisées en électromagnétique, nous faisons un bilan des formulations sur la surface dans le cadre d'une incidence en onde plane TE ou TM sur un corps régulier. Nous donnons les formulations dans le cas d'un objet parfaitement conducteur ou avec impédance.

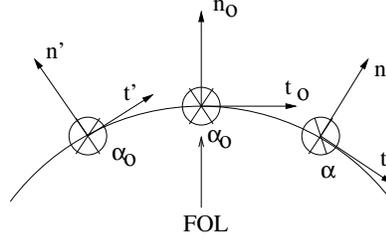


FIG. 58 – Zones de formulations différentes

### 1. Zone Eclairée

– Parfaitement Réflectissant

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= 0 \\ \vec{H}_t &= 2H_t^i\end{aligned}$$

– Absorbant

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \frac{2Z \sin(\theta)}{1+Z \sin(\theta)} \vec{\alpha} + \left( \vec{E}^i \cdot \vec{t} \right) \frac{2Z}{Z+\sin(\theta)} \vec{t} \\ \vec{H}_t &= \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) \frac{2 \sin(\theta)}{Z+\sin(\theta)} \vec{\alpha} + \left( \vec{H}^i \cdot \vec{t} \right) \frac{2}{1+Z \sin(\theta)} \vec{t}\end{aligned}$$

### 2. Zone de Fock Eclairée ( $\sigma = -m \sin(\theta) < 0$ )

– Parfaitement Conducteur

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= 0 \\ \vec{H}_t &= \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} g(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{i}{m} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{t} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} f(\sigma) \vec{t}\end{aligned}$$

– Absorbant

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \vec{\alpha} + Z \left( \vec{E}^i \cdot \vec{n} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_{\frac{1}{Z}}(\sigma) \vec{t} \\ \vec{H}_t &= \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_{\frac{1}{Z}}(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{1}{Z} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{t} \right) e^{i\frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \vec{t}\end{aligned}$$

### 3. Zone de Fock Ombre ( $\sigma = \frac{ms}{\rho} > 0$ )

– Parfaitement Conducteur

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= 0 \\ \vec{H}_t &= e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha}_0 \right) g(\sigma) \vec{\alpha} + \frac{i}{m} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{n}_0 \right) f(\sigma) \vec{t} \right]\end{aligned}$$

– Absorbant

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \vec{E}^i \cdot \vec{\alpha}_0 \right) \left( \frac{Q_E(0)}{Q_E(s)} \right)^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\sigma_E) \vec{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{m} Z \left( \vec{E}^i \cdot \vec{n}_0 \right) \left( \frac{Q_M(0)}{Q_M(s)} \right)^{\frac{1}{2}} F_Z(\sigma_M) \vec{t} \right] \\ \vec{H}_t &= e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \vec{H}^i \cdot \vec{\alpha}_0 \right) \left( \frac{Q_M(0)}{Q_M(s)} \right)^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\sigma_M) \vec{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{m} \frac{1}{Z} \left( \vec{H}^i \cdot \vec{n}_0 \right) \left( \frac{Q_E(0)}{Q_E(s)} \right)^{\frac{1}{2}} F_Z(\sigma_E) \vec{t} \right]\end{aligned}$$

4. Zone d'ombre proche de la surface

– Parfaitement Conducteur

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= 0 \\ \vec{H}_t &= 2i\sqrt{\pi}e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(\vec{H}^i \cdot \vec{\alpha}_0)}{\sqrt{Q_M(0)Q_M(s)w_1(\xi_M(0))}} e^{i(\frac{1}{3}) \int_0^s \frac{\xi_M(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} \vec{\alpha} \right]\end{aligned}$$

– Absorbant

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= 2i\sqrt{\pi}e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \frac{(\vec{E}^i \cdot \vec{\alpha}_0)}{\sqrt{Q_E(0)Q_E(s)w_1(\xi_E(0))}} e^{ik\frac{1}{3} \int_0^s \frac{\xi_E(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} \vec{\alpha} + \frac{Z(\vec{E}^i \cdot \vec{n}_0)}{\sqrt{Q_M(0)Q_M(s)w_1(\xi_M(0))}} e^{ik\frac{1}{3} \int_0^s \frac{\xi_M(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} \vec{t} \right] \\ \vec{H}_t &= 2i\sqrt{\pi}e^{iks} \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \frac{(\vec{H}^i \cdot \vec{\alpha}_0)}{\sqrt{Q_M(0)Q_M(s)w_1(\xi_M(0))}} e^{ik\frac{1}{3} \int_0^s \frac{\xi_M(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} \vec{\alpha} + \frac{(\vec{H}^i \cdot \vec{n}_0)}{Z\sqrt{Q_E(0)Q_E(s)w_1(\xi_E(0))}} e^{ik\frac{1}{3} \int_0^s \frac{\xi_E(s')}{(\rho(s'))^{\frac{2}{3}}} ds'} \vec{t} \right]\end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale de  $g$ ,  $f$  et  $F_Z$  s'effectue de la même façon que dans le cas Hemholtz.

## 6 Validation des formulations

Contrairement aux cas de validation de l'Optique Physique, l'utilité des formulations d'ondes rampantes se remarque surtout dans le cadre de cas bistatiques.

### 6.1 La Sphère

La sphère est le premier cas de validation 3D des formulations de Fock et de rampants. Pour valider les résultats théoriques, nous prenons une sphère de  $100\text{ mm}$  de rayon.

#### Acoustique

Le cas acoustique est effectué en méthode asymptotique et comparé aux résultats d'une méthode intégrale 3D à une fréquence de  $10\text{kHz}$ .

Les résultats obtenus sont alors les suivants :

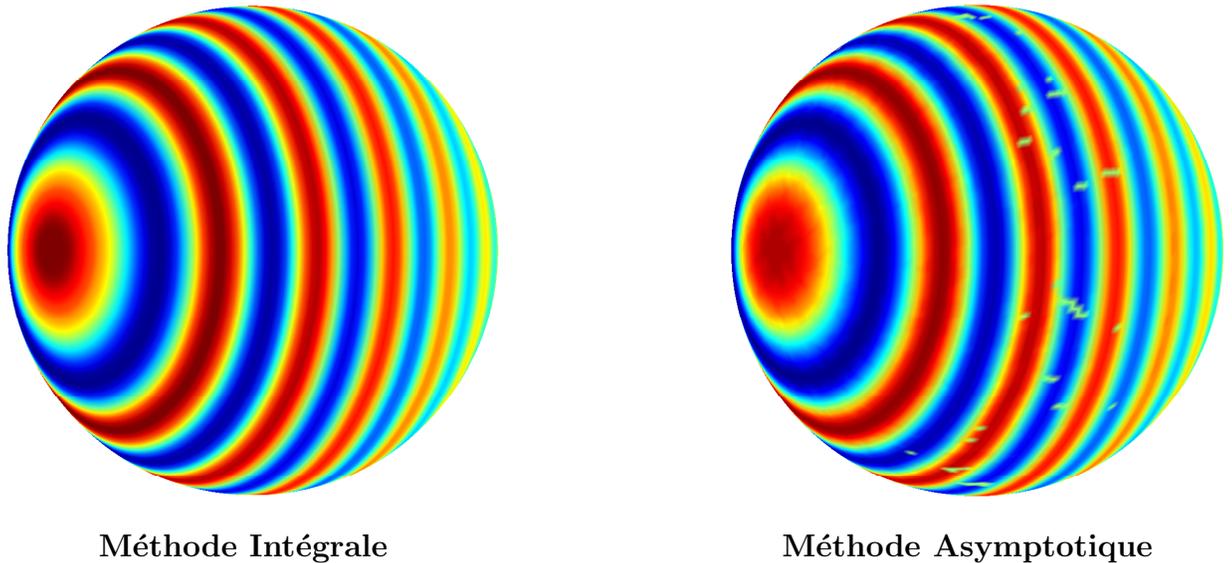


FIG. 59 – Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à  $10\text{kHz}$

Pour une meilleure visibilité, le résultat de la méthode asymptotique a été projeté sur une sphère maillée de la même façon que celle utilisée pour le calcul en méthode intégrale. Les petites inperfections visibles sur la sphère en méthode asymptotique sont dues à la projection et n'ont donc aucune influence sur le calcul de rayonnement.

On compare les potentiels double couche à la surface de la sphère ( fig. 60).

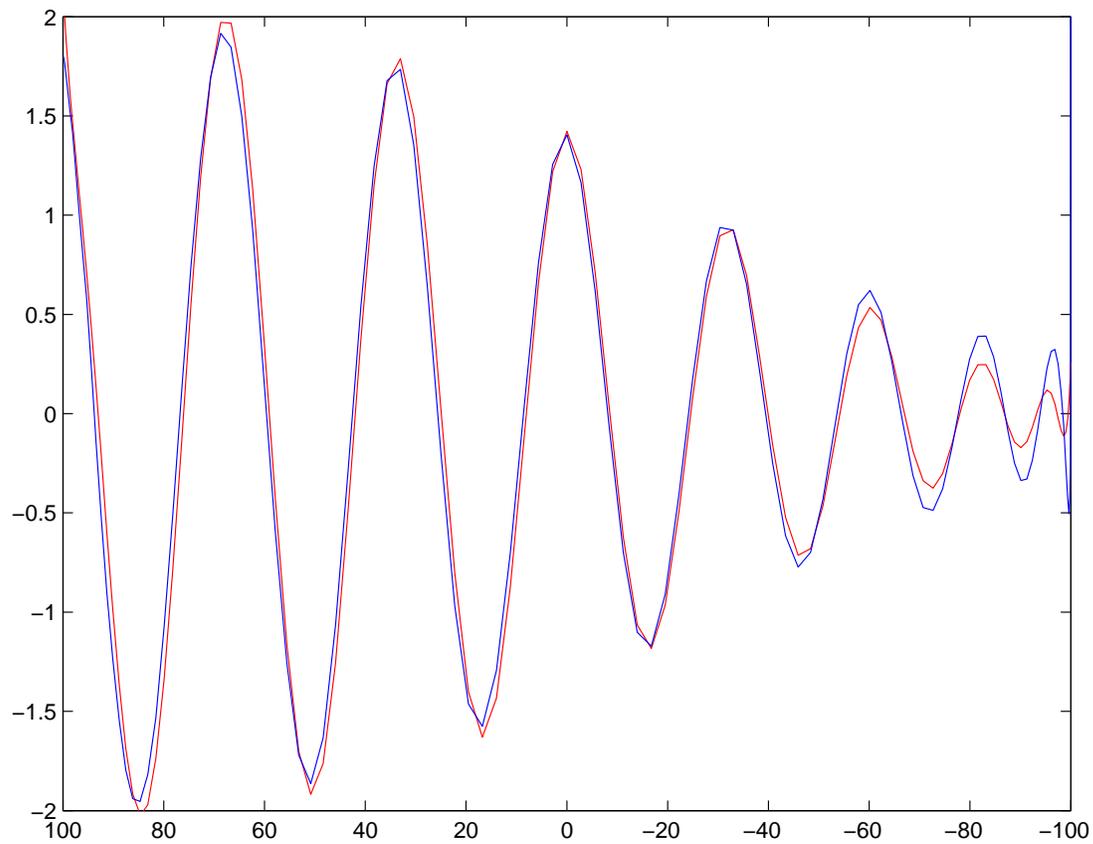


FIG. 60 – Comparaison des potentiels de double couche

On remarque que les deux résultats sont très proches. Seule la zone proche du pôle de la sphère opposé à la source connaît quelques différences. N'ayant pas fait dépasser le pôle aux rayons rampants lancés lors du calcul, on peut affecter ce manque d'amplitude au fait que les rampants pris en compte ne soient pas allés assez loin. En effet, lorsque les ondes rampantes passent le pôle opposé à l'incidence, ils passent une caustique (phénomène étudié par Bouche, Molinet). Le passage de cette caustique induisant un déphasage de l'onde rampante, des interférences destructrices peuvent apparaître.

## Electromagnétique

Pour ce cas de validation nous faisons varier l'impédance  $Z$  et la fréquence de calcul.

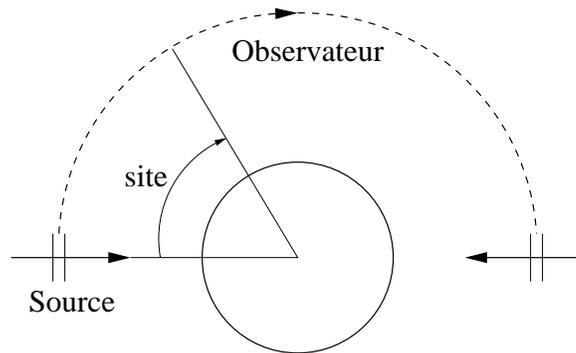


FIG. 61 – Cas de calcul sur une sphère

On peut comparer le module des courants  $\vec{J}$  sur la surface de la sphère PEC aux fréquences de  $1\text{ GHz}$  et  $10\text{ GHz}$  ( fig. 62).

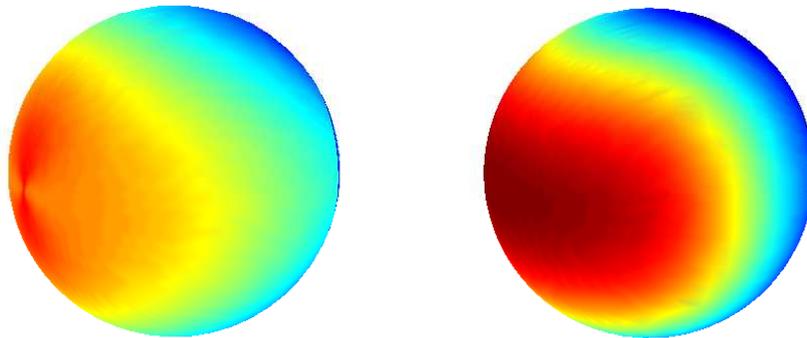


FIG. 62 – Module des courants électriques pour la sphère PEC

On remarque que suivant la fréquence de calcul, la répartition de l'énergie est différente. A  $10\text{ GHz}$  l'amplitude des courants de la zone d'ombre est moindre qu'à  $1\text{ GHz}$ . Cette observation appuie le fait que l'optique physique tend à être exacte à très hautes fréquences.

A 10 GHz, on compare les composantes selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  des courants  $\vec{J}$  à la surface de la sphère ( fig. 63).

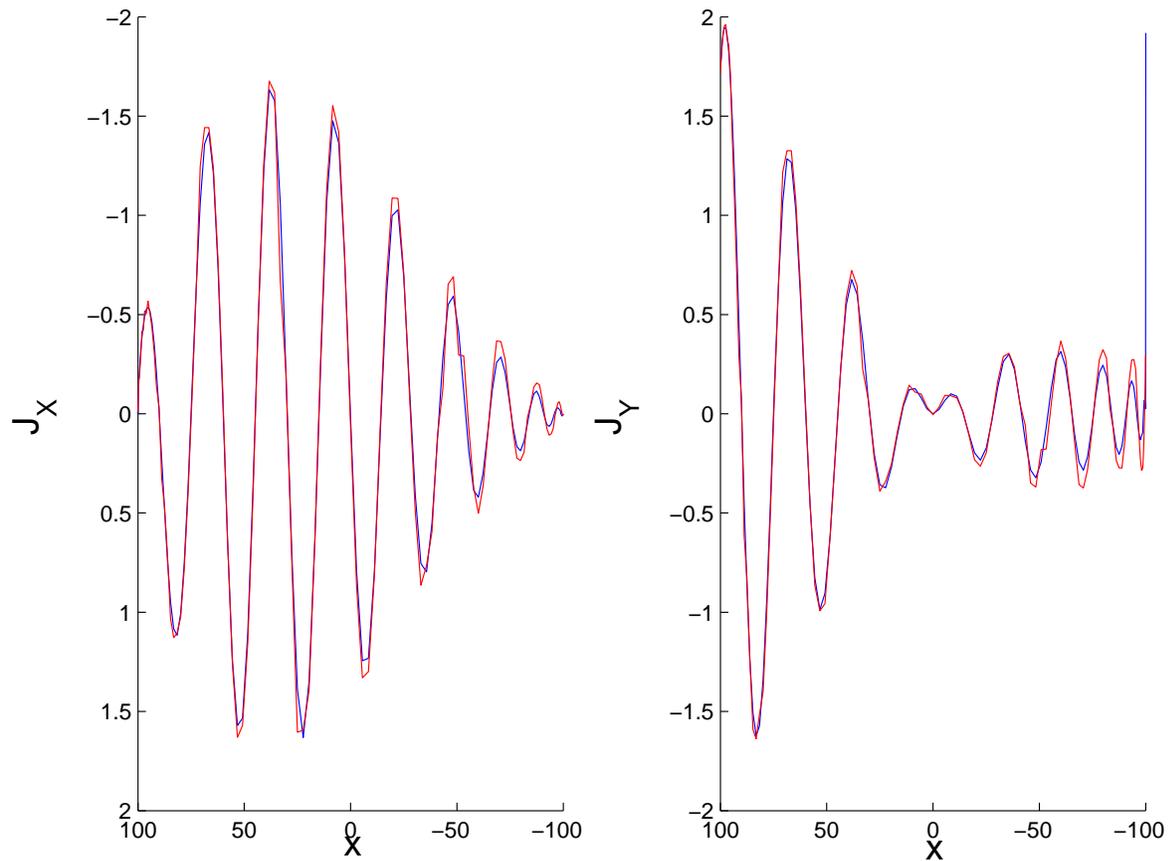


FIG. 63 – Comparaison des composantes des courants électriques

On remarque que, comme en acoustique, les résultats sont très proches. Seule la zone proche du pôle de la sphère opposé à la source connaît quelques différences pour la composante suivant  $\vec{y}$  et une explosion au pôle due au passage de la caustique.

On compare ensuite les résultats de la méthode asymptotique avec ceux d'une méthode intégrale. Nous comparons les résultats en polarisation  $HH$  et  $VV$  (polarisation électrique horizontale et verticale) ( fig. 64).

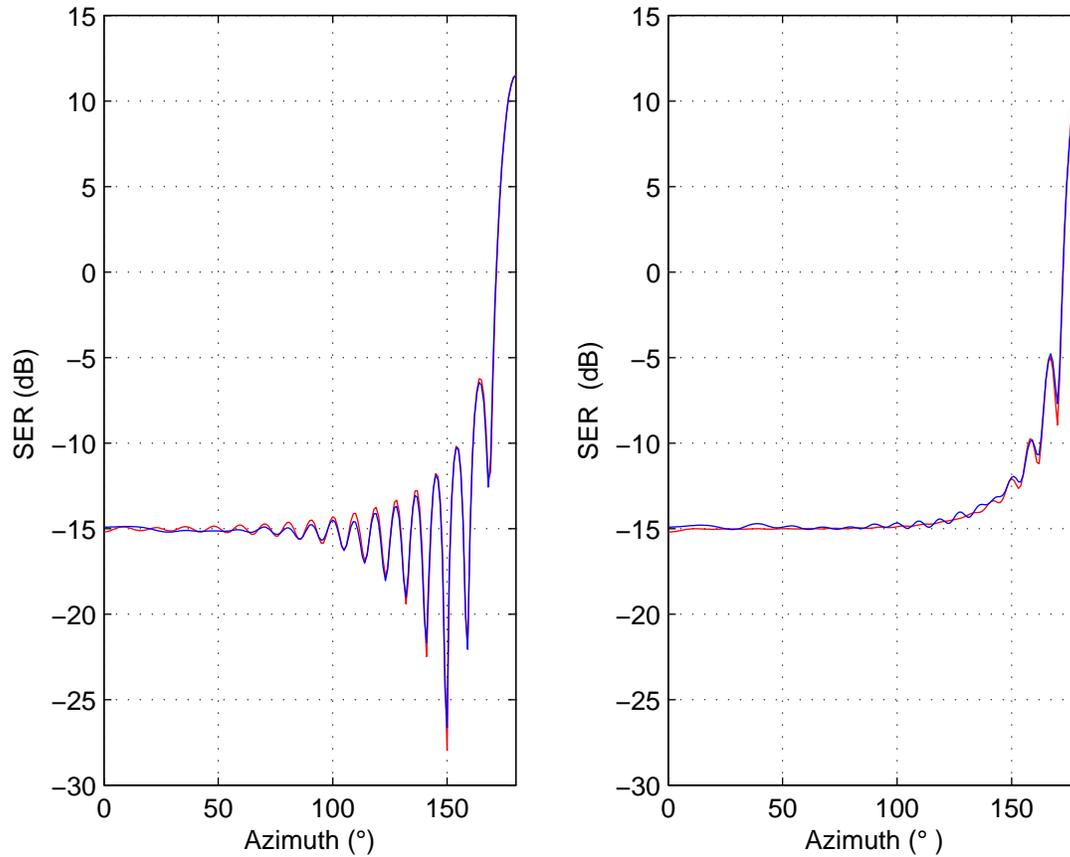


FIG. 64 – Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale 3D sur la sphère PEC

La comparaison des résultats nous montre un très bon accord entre la méthode asymptotique et la méthode intégrale 3D.

On compare de même les résultats pour une sphère recouverte d'un matériau d'impédance  $Z = 0.1$  ( fig. 65).

Les résultats sont encore très proches ce qui valide les formulations données précédemment dans le cas de la sphère recouverte.

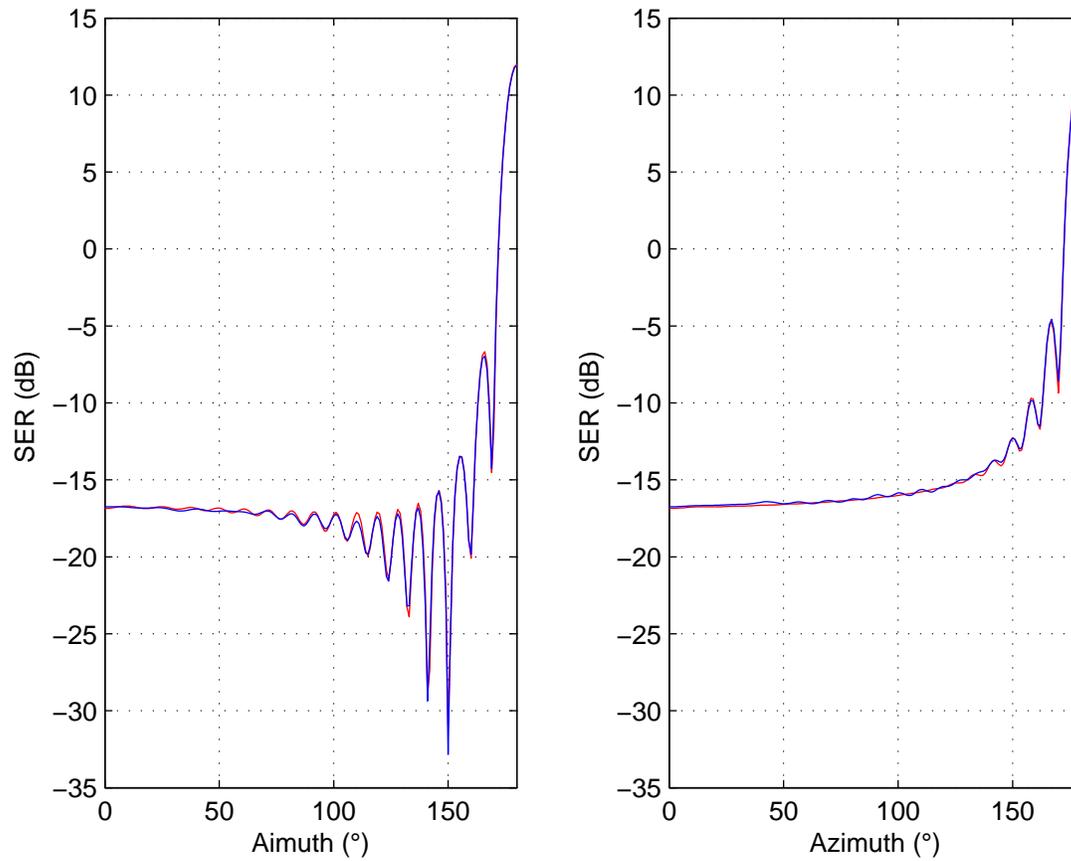


FIG. 65 – Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale 3D sur la sphère  $Z = 0.1$

On compare aussi les résultats obtenus pour le cas  $Z = 1$  ( fig. 66).  
Ce cas correspond à un matériau parfaitement absorbant.

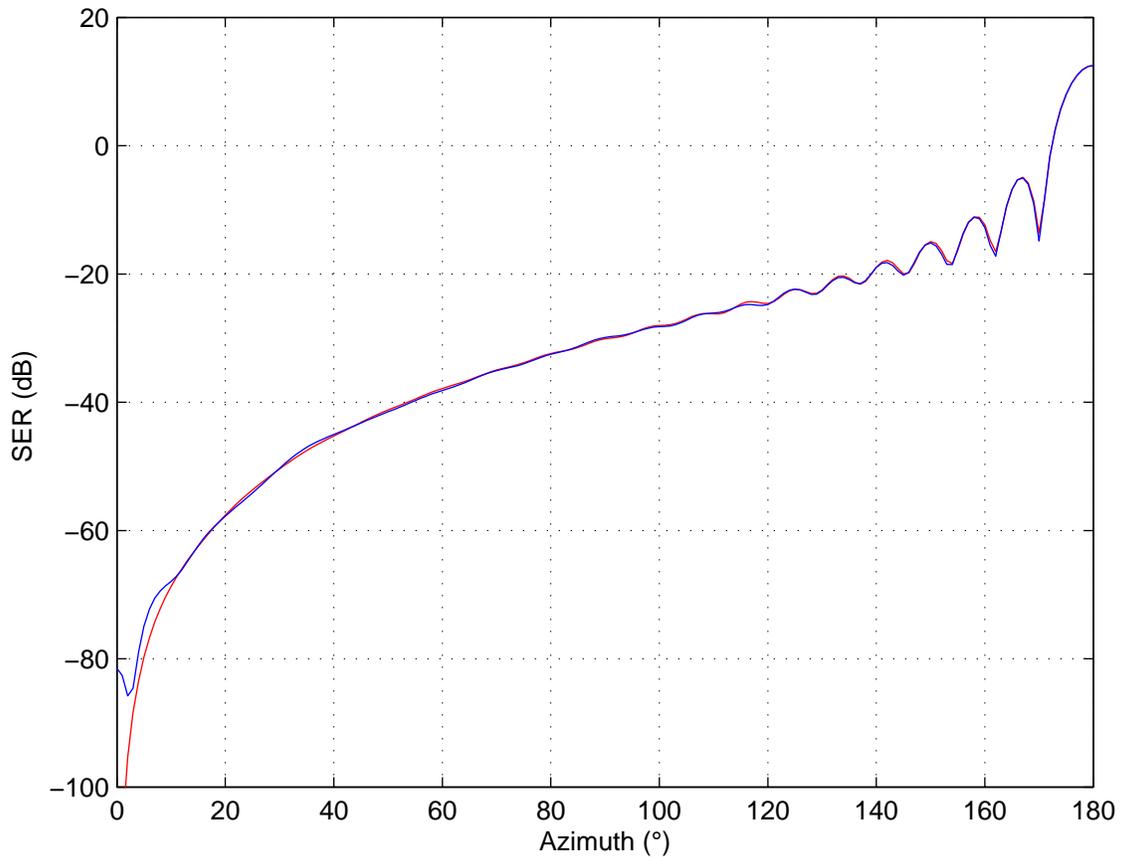


FIG. 66 – Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale 3D sur la sphère  $Z = 1$

Cette comparaison nous apporte des résultats très proches sauf lorsque l'observateur est proche de l'émetteur. Pour de tels angles, le champ rayonné devrait quasiment être nul. La SER devrait donc être égale à  $-\infty$  pour un angle de 0. La méthode asymptotique trouve une SER proche de  $-90dB$ . Ce cas est très intéressant car il nous renseigne aussi sur la précision des évaluations numériques des formulations.  $-90dB$  est un niveau très faible que l'on peut assimiler à un niveau nul lors de simulations.

**Quatrième partie**  
**Formulations sur corps allongés**

# Table des Matières

1	Corps 'Modérément' allongés . . . . .	95
1.1	Domaine de Fock . . . . .	95
1.2	Ondes rampantes . . . . .	96
1.3	Représentation des formulations de rampants pour un corps 'modérément' allongé . . . . .	97
2	Corps 'Fortement' allongés . . . . .	99
2.1	Domaine de Fock . . . . .	99
2.2	Ondes rampantes . . . . .	108
2.3	Raccordement des solutions . . . . .	114
2.4	Modes de propagation des rampants . . . . .	116
3	Validation des formulations . . . . .	118
4	Équation Biconfluente Réduite de Heun . . . . .	122
4.1	Classification des singularités des EDO . . . . .	123
4.2	Sur la représentation des solutions de (IV.4.112) . . . . .	125

Afin d'étudier le phénomène de diffraction sur les corps allongés, nous allons suivre la même démarche que dans le cas de corps 'classiques' ( cf. part III).

Nous appliquons en premier cette méthodologie aux corps 'modérément' allongés puis aux corps 'fortement' allongés.

## 1 Corps 'Modérément' allongés

Nous parlons de corps 'Modérément' allongés lorsque nous avons la condition :

$$k^{\frac{1}{3}} \ll \frac{1}{\rho_t} \ll k^{\frac{2}{3}} \quad (\text{IV.1.1})$$

sur le rayon de courbure transverse de la géodésique.

Nous allons d'abord étudier les phénomènes dans la zone de Fock pour ensuite travailler dans la zone d'ombre et enfin effectuer les raccordements nécessaires à la compatibilité des formulations.

### 1.1 Domaine de Fock

Le procédé d'analyse de la surface est le même que dans (III.2).

Les termes dominants que nous conservons dans  $g_{ij}$  sont maintenant différents étant donné que nous allons étirer les variables suivant  $\alpha$ .

Afin que les grandeurs concernées soient toutes d'ordre 1, nous effectuons un développement de  $\rho_t$  en  $\kappa = \rho_t k^{\frac{1}{3}}$ .

La matrice métrique se réduit alors à :

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2n}{\rho} & -2nh\tau & 0 \\ -2nh\tau & h^2 \left(1 + \frac{n}{\rho_t}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(n^2) \quad (\text{IV.1.2})$$

Comme dans le cas des corps 'classiques', nous étudions d'abord le cas acoustique que nous étendrons par la suite aux équations de Maxwell.

#### Helmholtz

En prenant l'équation (III.1.7) et en y modifiant les termes contenant  $\rho_t$ , on obtient de nouveau l'équation parabolique de Fock car les termes contenant  $\rho_t$  qui ont été modifiés n'apparaissent pas en tant que termes dominants.

On suit donc la même procédure que dans le cas de corps 'classiques'.

#### Maxwell

Comme pour Helmholtz, les formulations sont les mêmes que dans le cas de corps 'non allongés'.

## 1.2 Ondes rampantes

### Helmholtz

L'Ansatz posé est toujours de la forme :

$$U(s, \alpha, \nu) = e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi(s)} \sum_{j=0}^N u_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.1.3})$$

avec  $\nu_1 = nk^{\frac{2}{3}}$ .

En insérant l'Ansatz précédent dans l'équation d'Helmholtz pour les corps moyennement allongés et en identifiant les ordres de  $k$ , on a le système :

$$\begin{cases} L_0 u_0 = 0 \\ L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0 \\ \vdots \\ L_0 u_N + \dots + L_j u_{N-j} + \dots + L_N u_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1.4})$$

avec

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + 2 \left( \frac{\nu_1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \\ L_1 &= 2i \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \nu_1} \end{aligned}$$

Nous allons résoudre le système constitué par les opérateurs  $L_0$  et  $L_1$ .

L'opérateur  $L_0$  étant le même que dans (III.3), la forme de la solution est la même soit :

$$U(s, \nu) = A(s) e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi(s)} w_1(\xi - \nu) \quad (\text{IV.1.5})$$

avec  $\nu = \nu_1 \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

Nous allons donc nous intéresser au calcul de l'amplitude  $A(s)$  venant de la seconde équation  $L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0$ .

Le calcul de l'amplitude se fait comme pour le cas 'classique' et d'après ( cf. annexe 3), on obtient la solution :

$$\begin{aligned} U(s, \nu) &= A(0) e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi(s)} \exp \left( -2^{-\frac{5}{3}} i \int_0^s \rho^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-1} (\xi + m^2 Z^2)^{-1} ds \right) \\ &\quad \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi - \nu) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

### Maxwell

Comme pour Helmholtz, on reprend les Ansatz de rampants :

$$\begin{aligned} \vec{E}(s, \alpha, \nu) &= e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi(s)} \sum_{j=0}^N \vec{e}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \\ \vec{H}(s, \alpha, \nu) &= e^{iks+ik\frac{1}{3}\varphi(s)} \sum_{j=0}^N \vec{h}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \end{aligned} \quad (\text{IV.1.7})$$

avec  $\nu_1 = nk^{\frac{2}{3}}$ .

On étire la variable  $\rho_t$  en  $\kappa = \rho_t k^{\frac{1}{3}}$  afin que  $\kappa$  soit d'ordre 1.

En insérant les Ansatz précédents dans les équations de Maxwell pour les corps moyennement allongés et en identifiant les ordres de  $k$  on a le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 u_0 = 0 \quad (k^{\frac{4}{3}}) \\ L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0 \quad (k) \\ \vdots \\ L_0 u_N + \dots + L_j u_{N-j} + \dots + L_N u_0 = 0 \quad (k^{\frac{4-N}{3}}) \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.8})$$

Nous allons résoudre le système constitué par les opérateurs  $L_0$  et  $L_1$ .

L'opérateur  $L_0$  étant le même que dans (III.3), la forme de la solution est la même soit :

$$\begin{aligned} H^\alpha(s, \nu) &= A(s) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_H(s)} w_1(\xi_H - \nu) \\ E^\alpha(s, \nu) &= B(s) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_E(s)} w_1(\xi_E - \nu) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.9})$$

Le calcul de l'amplitude se passe comme pour Helmholtz et nous donne donc :

$$\begin{aligned} H^\alpha(s, \nu) &= A(0) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_H(s)} \exp \left( -2^{-\frac{5}{3}} i \int_0^s \rho^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-1} (\xi_H + m^2 Z^2)^{-1} ds \right) \\ &\quad \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_H - \nu) \\ E^\alpha(s, \nu) &= A(0) e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_E(s)} \exp \left( -2^{-\frac{5}{3}} i \int_0^s \rho^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-1} (\xi_E + m^2 Z^2)^{-1} ds \right) \\ &\quad \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} w_1(\xi_E - \nu) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.10})$$

### 1.3 Représentation des formulations de rampants pour un corps 'modérément' allongé

Dans la formulation des corps 'modérément' allongés, seul le terme exponentiel est ajouté. Nous allons montrer l'influence de ce terme exponentiel sur la forme de la solution.

Pour cela, on calcule les fonctions de Fock ( $f, g$ ) puis ( $F_Z, F_{\frac{1}{Z}}$ ) pour  $\kappa$  variable. On compare les résultats aux formulations non allongées.

On peut comparer les formes des fonctions de Fock pour différentes valeurs de  $\kappa$  ( fig. 67) sur un matériau parfaitement réfléchissant.

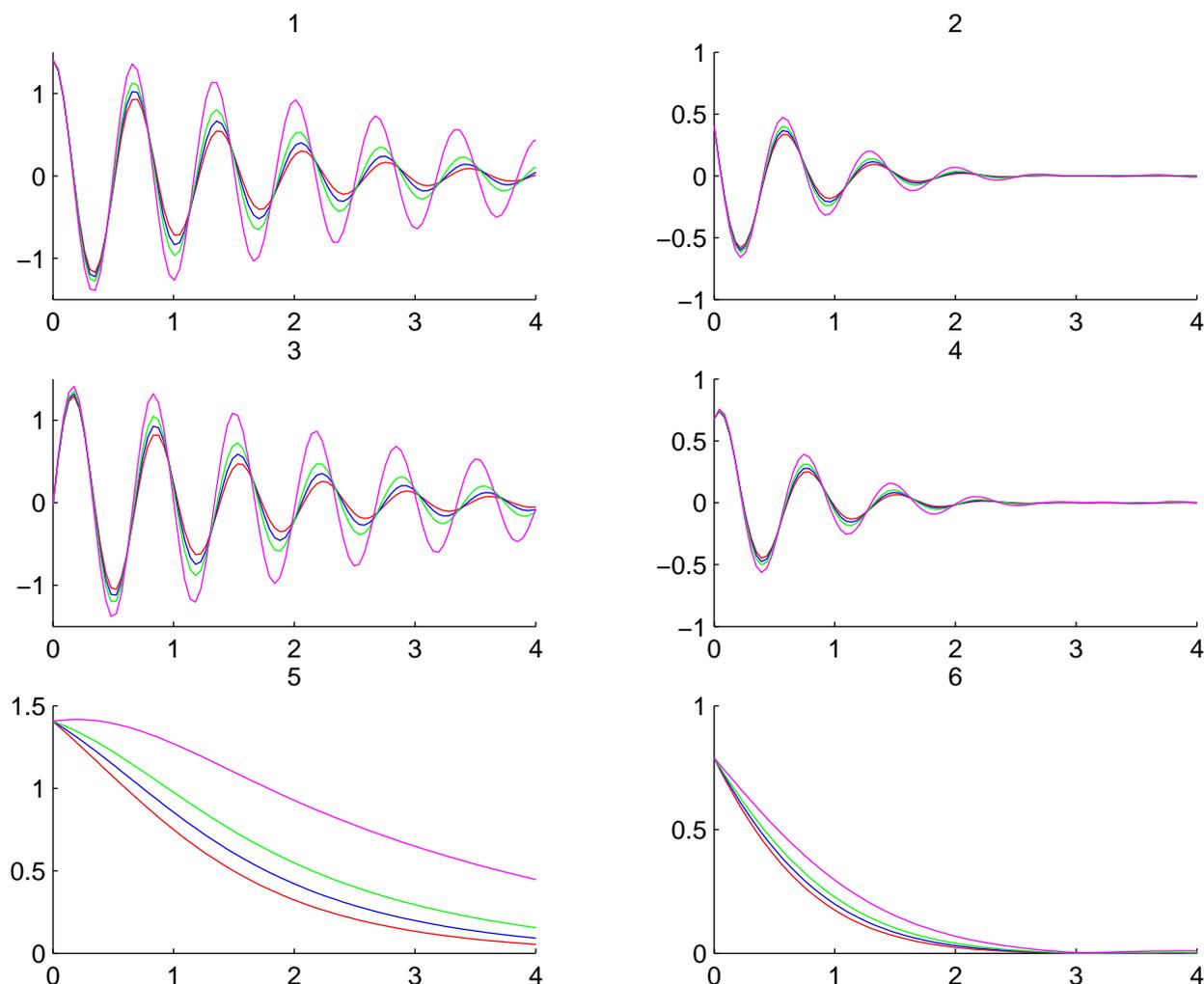


FIG. 67 – Evolution de la partie réelle, imaginaire et du module des fonctions  $g(\sigma)$  et  $f(\sigma)$  en fonction de  $\kappa$

Les courbes rouges représentent les fonctions pour  $\kappa = +\infty$ , c'est à dire en corps non allongé.

Les courbes bleues, vertes et roses représentent respectivement les fonctions pour les valeurs de  $\kappa$  de 20, 10 et 5.

On remarque bien l'évolution due au terme exponentiel. Le module du champ dans la zone d'ombre augmente quand  $\kappa$  diminue.

L'étude qui suit, sur les corps 'fortement' allongés, nous donne des résultats qui se superposent aux résultats des corps moyennement allongés pour les  $\kappa$  concernés. Nous allons donc faire les développements pour les corps 'fortement' allongés, les résultats des corps 'moyennement' allongés étant considérés comme la continuité avec les corps non allongés.

Afin d'étudier le phénomène de diffraction sur les corps 'fortement' allongés, nous allons suivre la même démarche que dans le cas de corps 'classiques' ( cf. part III) et 'modérément' allongés (1).

## 2 Corps 'Fortement' allongés

Nous parlons de corps 'fortement' allongés lorsque nous avons la condition :

$$k^{\frac{2}{3}} \ll \frac{1}{\rho_t} \quad (\text{IV.2.11})$$

Nous allons d'abord étudier les phénomènes dans la zone de Fock et ensuite dans la zone d'ombre pour ensuite faire le raccord entre les formulations des différentes zones.

### 2.1 Domaine de Fock

Le procédé d'analyse de la surface est le même que dans (III.2).

Les termes dominants que nous conservons dans  $g_{ij}$  sont différents étant donné que nous allons étirer les variables suivant  $\alpha$ .

Afin que les grandeurs concernées soient toutes d'ordre 1, nous effectuons un développement de  $\rho_t$  en  $\kappa = \rho_t k^{\frac{2}{3}}$ .

La matrice métrique se réduit alors à :

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2n}{\rho} & -h\tau \left(2n + \frac{n^2}{\rho_t}\right) & 0 \\ -h\tau \left(2n + \frac{n^2}{\rho_t}\right) & h^2 \left(1 + \frac{n}{\rho_t}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2.12})$$

Comme dans le cas des corps 'classiques', nous étudions d'abord le cas acoustique que nous étendrons par la suite aux équations de Maxwell.

### Helmholtz

On prend l'équation (III.1.7) et on y modifie les termes contenant  $\rho_t$ . On insère dans cette équation l'Ansatz de la zone de Fock pour Helmholtz (III.2.13) :

$$U(\sigma, \alpha, \nu) = e^{iks} u(\sigma, \alpha, \nu) = e^{iks} \sum_{j=0}^N u_j(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.13})$$

c'est à dire en puissances de  $k^{\frac{1}{3}}$ .

En prenant la transformée de Fourier  $\tilde{U}$  de  $U$  on a :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu + \kappa} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \nu} + (\nu - \xi) \tilde{u}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.14})$$

avec  $\nu = \frac{kn}{m}$ ,  $\kappa = \frac{k\rho_t}{m}$  pour  $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  le paramètre de Fock.

Cette équation est une équation bi-confluente réduite de Heun. Actuellement, ce type d'équation n'admet pas de solution analytique connue. Nous allons donc la modifier par

approximations afin d'en obtenir une solution qui nous convienne.

On remarque que lorsque  $\kappa \rightarrow \infty$ , on retrouve l'équation d'Airy, ce qui est normal étant donné que  $\kappa = \infty$  correspond aux corps non-allongés.

On explique dans ( cf. annexe 5) différentes manières d'approcher cette équation. Nous utilisons ici celle qui nous paraît être la plus précise. Nous allons alors mettre l'équation (IV.2.14) sous une forme proche d'une équation d'Airy par le changement de fonction :

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 \sqrt{\kappa + \nu} \quad (\text{IV.2.15})$$

On a alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.16})$$

La présence du terme en  $\left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2}$  nous empêche toujours d'obtenir une équation que nous savons résoudre. Souhaitant connaître le champ à la surface de l'objet, nous sommes donc dans une situation où  $\nu$  est proche de 0. Nous effectuons alors un développement limité à l'ordre 0 en 0 de  $\left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2}$ , ce qui nous amène :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.17})$$

Par le changement de variable :

$$\zeta = \xi - \frac{1}{4\kappa^2}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \mu^2} + (\nu - \zeta) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.18})$$

qui est une équation d'Airy.

Soit  $V$  une solution de cette équation, on a  $\tilde{u}_0$  sous la forme :

$$\tilde{u}_0 = \frac{A(\xi, \kappa)}{\sqrt{\kappa + \nu}} V(\zeta - \nu) \quad (\text{IV.2.19})$$

La condition limite de radiation nous impose de choisir  $V = w_1$ .

Afin de déterminer la solution, nous utilisons la condition limite sur la surface (III.2.19) :

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu} + imZu_j = 0 \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{IV.2.20})$$

et donc comme dans le cas de corps non-allongés :

$$\frac{\partial u_j^d}{\partial \nu} + imZu_j^d = - \left( \frac{\partial u_j^i}{\partial \nu} + imZu_j^i \right) \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{IV.2.21})$$

ce qui découple les conditions aux limites des  $u_j$ .

On considère le développement asymptotique du champ incident  $u^i = \sum_{j=0}^N u_j^i k^{-\frac{j}{3}}$ .

On se ramène au premier ordre et on effectue un développement de Fourier en  $\sigma$  sur la condition limite.

$$\frac{\partial \tilde{u}_j^d}{\partial \nu} + imZ\tilde{u}_j^d = - \left( \frac{\partial \tilde{u}_j^i}{\partial \nu} + imZ\tilde{u}_j^i \right) \text{ en } \nu = 0, \forall j \in [0, N] \quad (\text{IV.2.22})$$

Afin de relier  $u_0^i$  et  $u_0^d$ , on exprime le champ incident dans le système de coordonnées semi-géodésique ( cf. annexe 2). Le calcul est effectué en passant par un développement de Luneberg-Kline du champ incident :

$$e^{iks} = e^{iks+i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}+\frac{i\sigma^2}{2\kappa}\right)+O\left(k^{-\frac{4}{3}}\right)} \quad (\text{IV.2.23})$$

On a alors le champ incident sous la forme :

$$U(\vec{r}) = e^{iks} e^{i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}+\frac{i\sigma^2}{2\kappa}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{u}_j^i(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.24})$$

L'exponentielle  $e^{i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}+\frac{i\sigma^2}{2\kappa}\right)}$  étant indépendante de  $k$ , on l'intègre à la somme, ce qui nous donne :

$$U^i(\vec{r}) = e^{iks} \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.25})$$

avec  $u_j^i = e^{i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}+\frac{i\sigma^2}{2\kappa}\right)} \widehat{u}_j^i$ .

Les  $u_j^i$  vérifient alors le même système que les composantes  $u_j^d$ .

Pour une onde plane incidente, on a :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma\xi} e^{\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}} e^{-\frac{\sigma^2}{2\kappa}} d\sigma \quad (\text{IV.2.26})$$

Après le changement de variable  $t = \sigma - \frac{i}{2\kappa}$ , on a :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{\xi-\nu}{2\kappa}} e^{\frac{1}{8\kappa^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\left(\nu-\xi-\frac{1}{4\kappa^2}\right)-i\frac{t^3}{3}} dt \quad (\text{IV.2.27})$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\xi}{2\kappa}} e^{\frac{1}{8\kappa^3}} e^{-\frac{\nu}{2\kappa}} v\left(\xi + \frac{1}{4\kappa^2} - \nu\right) \quad (\text{IV.2.28})$$

avec  $v$  la fonction de Fock-Airy.

Dans l'expression de la condition limite sur la surface (IV.2.22), on remplace les champs incidents et diffractés par leur expression (IV.2.28) et (IV.2.19), ce qui nous donne :

$$A(\xi, \kappa) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\xi}{2\kappa} + \frac{1}{12\kappa^3}} \frac{v'\left(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}\right) - \left(imZ + \frac{1}{2\kappa}\right) v\left(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}\right)}{w_1'(\zeta) - \left(imZ + \frac{1}{2\kappa}\right) w_1(\zeta)} \quad (\text{IV.2.29})$$

On voit alors apparaître ce que l'on appellera une pseudo-impédance  $Z_\kappa = Z - \frac{i}{2m\kappa}$ .

Ceci nous donne un champ diffracté sous la forme :

$$u_0^d(\nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}} \sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\kappa + \nu}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \frac{v'(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}) - imZ_\kappa v(\xi + \frac{1}{4\kappa^2})}{w_1'(\zeta) - imZ_\kappa w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) d\xi \quad (\text{IV.2.30})$$

et donc le champ total :

$$u_0(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ e^{-\frac{\nu}{2\kappa}} v\left(\xi + \frac{1}{4\kappa^2} - \nu\right) - \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa + \nu}} \frac{v'(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}) - imZ_\kappa v(\xi + \frac{1}{4\kappa^2})}{w_1'(\zeta) - imZ_\kappa w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.31})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$u_0(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} V_\kappa(\sigma, \nu, mZ_\kappa) \quad (\text{IV.2.32})$$

avec  $V_\kappa(\sigma, \nu, mZ_\kappa)$  la fonction de Fock 'modifiée'.

Sur la surface ( $\nu = 0$ ), on a alors :

$$u_0(\sigma, 0, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v\left(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}\right) - \frac{v'(\xi + \frac{1}{4\kappa^2}) - imZ_\kappa v(\xi + \frac{1}{4\kappa^2})}{w_1'(\zeta) - imZ_\kappa w_1(\zeta)} w_1(\zeta) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.33})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$u_0(\sigma, 0, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} F_{Z,\kappa}(\sigma) \quad (\text{IV.2.34})$$

avec  $F_{Z,\kappa}$  la fonction courant de Fock 'modifiée'.

On remarque que lorsque  $\kappa \rightarrow +\infty$ , on retrouve bien la fonction courant de Fock  $F_Z$  (III.2.29).

## Maxwell

On prend l'équation (III.1.8) et on y modifie les termes contenant  $\rho_t$ . On obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \nu^2} + \frac{3}{\nu + \kappa} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \nu} + (\nu - \xi) \tilde{u}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.35})$$

avec  $\tilde{u}_0$  la composante  $\tilde{e}_0^\alpha$  ou  $\tilde{h}_0^\alpha$ .

On remarque que par rapport à Helmholtz, le coefficient devant la dérivée première est 3 et non pas 1. Cette équation est cependant toujours une équation bi-confluente réduite de Heun.

Comme dans le cas Helmholtz, nous prenons la méthode la plus précise afin de résoudre le problème. Nous allons alors mettre l'équation (IV.2.35) sous une forme proche d'une équation d'Airy par le changement de fonction :

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{IV.2.36})$$

On a alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi - \frac{9}{4\kappa^2} \left(1 + \frac{\nu}{\kappa}\right)^{-2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.37})$$

Comme dans le cas acoustique, nous effectuons un développement limité à l'ordre 0 en 0 de  $\left(1 + \frac{\nu}{\kappa}\right)^{-2}$ , ce qui nous amène :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.38})$$

Par le changement de variable :

$$\zeta = \xi - \frac{3}{4\kappa^2}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{IV.2.39})$$

qui est une équation d'Airy.

Soit  $V$  une solution de cette équation, on a  $\tilde{e}_0^\alpha$  et  $\tilde{h}_0^\alpha$  sous la forme :

$$\tilde{e}_0^\alpha = \frac{A(\xi, \kappa)}{(\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}}} V(\zeta - \nu) \quad (\text{IV.2.40})$$

$$\tilde{h}_0^\alpha = \frac{B(\xi, \kappa)}{(\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}}} V(\zeta - \nu) \quad (\text{IV.2.41})$$

La condition limite de radiation nous impose de choisir  $V = w_1$ .

On détermine  $A$  et  $B$  par application des conditions limites sur la surface (III.3.78) :

$$\left( \vec{E}_{tg}^d - Z \vec{n} \wedge \vec{H}_{tg}^d \right) = - \left( \vec{E}_{tg}^{inc} - Z \vec{n} \wedge \vec{H}_{tg}^{inc} \right)$$

qui nous donne en fonction des coordonnées réduites en  $\nu = 0$  :

$$\frac{\partial e_0^\alpha}{\partial \nu} + \left( \frac{im}{Z} + \frac{2}{\kappa} \right) e_0^\alpha = 0 \quad (\text{IV.2.42})$$

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial \nu} + \left( imZ + \frac{2}{\kappa} \right) h_0^\alpha = 0 \quad (\text{IV.2.43})$$

Cette condition limite s'applique au champ total et est aussi valable pour la transformée de Fourier du champ.

D'après les mêmes considérations que pour Hemholtz, on a :

$$\frac{\partial \tilde{e}_0^{d\alpha}}{\partial \nu} + \left( \frac{im}{Z} + \frac{2}{\kappa} \right) \tilde{e}_0^{d\alpha} = - \left( \frac{\partial \tilde{e}_0^{i\alpha}}{\partial \nu} + \left( \frac{im}{Z} + \frac{2}{\kappa} \right) \tilde{e}_0^{i\alpha} \right) \text{ en } \nu = 0 \quad (\text{IV.2.44})$$

$$\frac{\partial \tilde{h}_0^{d\alpha}}{\partial \nu} + \left( imZ + \frac{2}{\kappa} \right) \tilde{h}_0^{d\alpha} = - \left( \frac{\partial \tilde{h}_0^{i\alpha}}{\partial \nu} + \left( imZ + \frac{2}{\kappa} \right) \tilde{h}_0^{i\alpha} \right) \text{ en } \nu = 0 \quad (\text{IV.2.45})$$

On calcule alors le champ incident de la même manière que pour Helmholtz. En se reportant à l'annexe ( cf. annexe 2), on obtient :

$$S(s, \alpha, n) \approx s + \frac{1}{k} \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{3i\sigma^2}{2\kappa} \right) \quad (\text{IV.2.46})$$

On a alors le champ incident sous la forme :

$$U(\vec{r}) = e^{iks} e^{i\left(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{3i\sigma^2}{2\kappa}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j^i(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.47})$$

avec  $u = e^\alpha$  ou  $u = h^\alpha$ .

L'exponentielle  $e^{i\left(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{3i\sigma^2}{2\kappa}\right)}$  étant indépendante de  $k$ , on l'intègre à la somme, ce qui nous donne :

$$U^i(\vec{r}) = e^{iks} \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i(\sigma, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.48})$$

avec  $u_j^i = e^{i\left(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{3i\sigma^2}{2\kappa}\right)} \hat{u}_j^i$ .

Les  $u_j^i$  vérifient alors le même système que les composantes  $u_j^d$ .

Pour une onde plane incidente, on a :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma\xi} e^{\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3}} e^{-\frac{3\sigma^2}{2\kappa}} d\sigma \quad (\text{IV.2.49})$$

Après le changement de variable  $t = \sigma - \frac{3i}{2\kappa}$ , on a :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{3(\xi-\nu)}{2\kappa}} e^{\frac{9}{4\kappa^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\left(\nu - \xi - \frac{9}{4\kappa^2}\right) - i\frac{t^3}{3}} dt \quad (\text{IV.2.50})$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\tilde{u}_0^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{3\xi}{2\kappa}} e^{\frac{9}{4\kappa^3}} e^{-\frac{3\nu}{2\kappa}} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} - \nu \right) \quad (\text{IV.2.51})$$

avec  $v$  la fonction de Fock-Airy.

En reportant les solutions (IV.2.40), (IV.2.41) et (IV.2.51) dans (IV.2.42) et (IV.2.43) et sachant que  $V = w_1$ , on a :

$$A(\xi, \kappa) = \frac{e^{-\frac{3\xi}{2\kappa} + \frac{3}{2\kappa^3}} v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - \left( imZ + \frac{1}{2\kappa} \right) v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{\sqrt{\pi} w_1'(\zeta) - \left( imZ + \frac{1}{2\kappa} \right) w_1(\zeta)} \quad (\text{IV.2.52})$$

$$B(\xi, \kappa) = \frac{e^{-\frac{3\xi}{2\kappa} + \frac{9}{4\kappa^3}} v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - \left( \frac{im}{Z} + \frac{1}{2\kappa} \right) v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{\sqrt{\pi} w_1'(\zeta) - \left( \frac{im}{Z} + \frac{1}{2\kappa} \right) w_1(\zeta)} \quad (\text{IV.2.53})$$

On pose les pseudo-impédances  $Z_{H\kappa} = Z - \frac{i}{2m\kappa}$  et  $Z_{E\kappa} = \frac{1}{Z} - \frac{i}{2m\kappa}$ .  
On a alors le champ diffracté sous la forme :

$$e_0^{d\alpha}(\nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{3i}{2\kappa})\xi} \frac{v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - imZ_{E\kappa} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{E\kappa} w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) d\xi \quad (\text{IV.2.54})$$

$$h_0^{d\alpha}(\nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{3i}{2\kappa})\xi} \frac{v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - imZ_{H\kappa} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{H\kappa} w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) d\xi \quad (\text{IV.2.55})$$

et donc le champ total :

$$e_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ e^{-\frac{3\nu}{2\kappa}} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} - \nu \right) - \left( \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - imZ_{E\kappa} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{E\kappa} w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.56})$$

$$h_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ e^{-\frac{3\nu}{2\kappa}} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} - \nu \right) - \left( \frac{\kappa}{\kappa + \nu} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{v' \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) - imZ_{H\kappa} v \left( \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{H\kappa} w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.57})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$e_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} V_\kappa(\sigma, \nu, mZ_{E\kappa})$$

$$h_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} V_\kappa(\sigma, \nu, mZ_{H\kappa})$$

avec  $V_\kappa(\sigma, \nu, mZ_{i\kappa})$  la fonction de Fock 'modifiée'.  
Sur la surface ( $\nu = 0$ ), on a alors :

$$e_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right) - \frac{v'\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right) - imZ_{E\kappa}v\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{E\kappa}w_1(\zeta)} w_1(\zeta) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.58})$$

$$h_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right) - \frac{v'\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right) - imZ_{H\kappa}v\left(\xi + \frac{9}{4\kappa^2}\right)}{w_1'(\zeta) - imZ_{H\kappa}w_1(\zeta)} w_1(\zeta) \right] d\xi \quad (\text{IV.2.59})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$e_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} F_{Z_{E\kappa}, \kappa}(\sigma)$$

$$h_0^\alpha(\sigma, \nu, \kappa) = \frac{e^{\frac{9}{4\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} F_{Z_{H\kappa}, \kappa}(\sigma)$$

avec  $F_{Z_{i\kappa}, \kappa}$  la fonction courant de Fock 'modifiée'.

On remarque que lorsque  $\kappa \rightarrow +\infty$ , on retrouve bien les fonctions courant de Fock  $F_Z$  (III.2.51) et (III.2.52)

### Représentation des fonctions courant de Fock 'modifiées' pour un corps 'fortement' allongé

On a vu que les fonctions courant de Fock modifiées étaient différentes dans le cas de l'équation d'Helmholtz et pour les équations de Maxwell.

Comme dans le cas 'modérément' allongé, on compare les fonctions au résultat en corps non allongé ( fig. 68), ( fig. 69).

# HELMHOLTZ

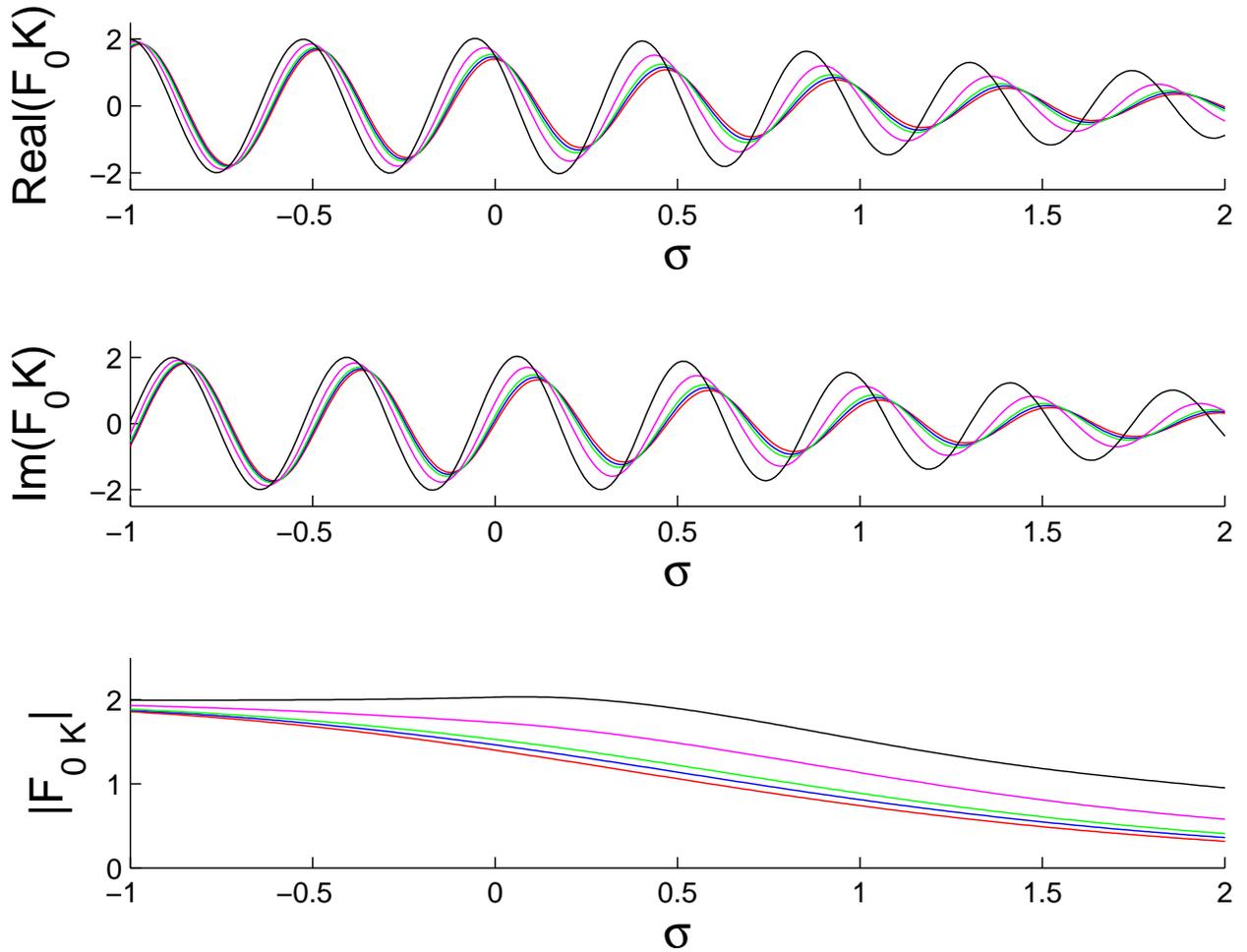


FIG. 68 – Fonction courant de Fock modifiée en fonction de  $\kappa$

Les courbes représentent les parties réelles, imaginaires et le module de la fonction courant de Fock modifiée pour différents  $\kappa$  pour l'équation de Helmholtz.

La courbe rouge représente la fonction courant de Fock non modifiée ( $\kappa = \infty$ ).

La courbe bleue représente la fonction pour  $\kappa = 10$ .

La courbe verte représente la fonction pour  $\kappa = 5$ .

La courbe rose représente la fonction pour  $\kappa = 2$ .

La courbe noire représente la fonction pour  $\kappa = 1$ .

On remarque bien une augmentation du module pour un  $\kappa$  décroissant ainsi qu'une variation de la phase.

On peut cependant voir que pour une petite valeur de  $\kappa$ , le module passe au-dessus de la valeur 2 ce qui n'est pas physique. Nous avons donc effectué une approximation trop forte lors de nos développements. Les deux approximations effectuées sont l'approximation sur le champ incident (Luneberg-Kline) et l'approximation  $\nu$  proche de zéro (développement limité à l'ordre 0 en 0).

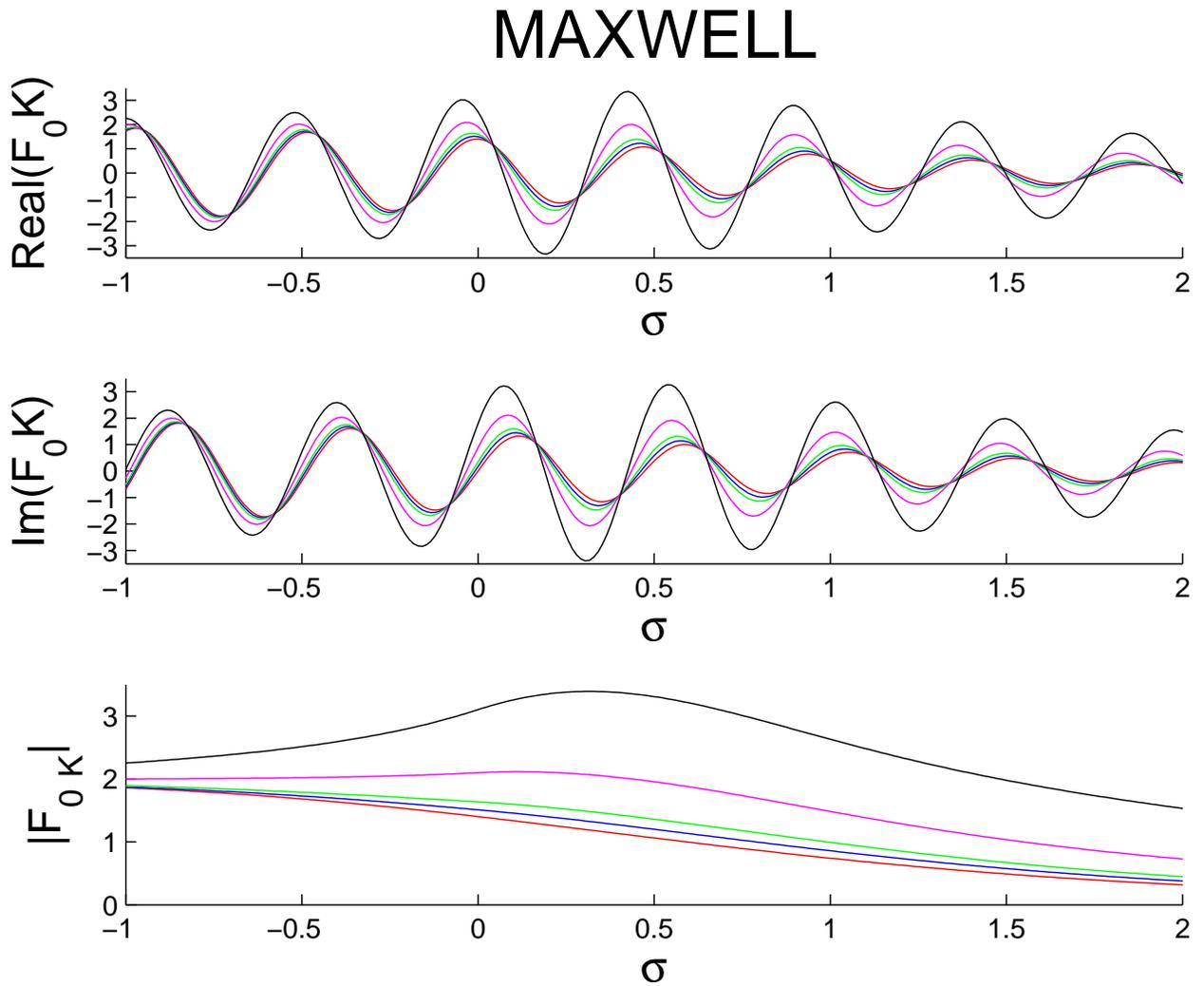


FIG. 69 – Fonction courant de Fock modifiée en fonction de  $\kappa$

Les courbes représentent les parties réelles, imaginaires et le module de la fonction courant de Fock modifiée pour différents  $\kappa$  pour l'équation de Maxwell.

Dans le cas Maxwell, nous observons le même phénomène que dans le cas Helmholtz mais amplifié.

## 2.2 Ondes rampantes

Dans le cadre des corps allongés, nous reproduisons le même processus que dans le cas des corps "classiques".

Nous allons résoudre le système constitué par les opérateurs  $L_0$  et  $L_1$  en premier lieu pour l'équation de Helmholtz et ensuite pour les équations de Maxwell.

## Helmholtz

On reprend l'Ansatz postulé pour les études dans l'ombre loin de la frontière ombre-lumière (III.3.60) :

$$U(s, \alpha, n) = e^{iks + ik^{\frac{1}{3}}\phi(s, \alpha)} \sum_{j=1}^N u_j(s, \alpha, \nu_1) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.60})$$

avec  $\nu_1 = nk^{\frac{2}{3}}$ .

On reporte cet Ansatz dans l'équation d'Helmholtz en coordonnées géodésiques pour les corps allongés.

En identifiant les termes de même ordre, on a un système identique à (III.3.62) dont les premiers opérateurs sont les suivants :

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + \frac{1}{\nu_1 + \kappa_1} \frac{\partial}{\partial \nu_1} + 2 \left( \frac{\nu_1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \quad (\text{IV.2.61})$$

$$L_1 = 2i \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial s} - i \frac{\nu_1}{\kappa_1 (\nu_1 + \kappa_1)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial s} \quad (\text{IV.2.62})$$

avec  $\kappa_1 = \rho_i k^{\frac{2}{3}}$ .

On passe l'équation (IV.2.61) dans les variables étirées  $(\nu, \kappa)$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu + \kappa} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \left( \nu - 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) u_0 = 0 \quad (\text{IV.2.63})$$

En posant  $\xi(s) = 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ , on retrouve l'équation bi-confluente réduite de Heun de l'étude dans la zone de Fock.

On effectue un changement de fonction :

$$v_0 = u_0 \sqrt{\nu + \kappa} \quad (\text{IV.2.64})$$

ce qui nous donne l'équation en  $v_0$  :

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2} \right) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.65})$$

En considérant que l'on recherche une solution très proche de la surface, on peut effectuer un développement limité de  $\left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2}$  à l'ordre 0 en 0.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.66})$$

Par le changement de variable :

$$\zeta = \xi - \frac{1}{4\kappa^2}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.67})$$

qui est une équation d'Airy.

Soit  $V$  une solution de cette équation, on a  $u_0$  sous la forme :

$$u_0 = \frac{A(s)}{\sqrt{\kappa + \nu}} V(\zeta - \nu) \quad (\text{IV.2.68})$$

La condition limite de radiation nous impose de choisir  $V = w_1$ .

Afin de déterminer la coefficient  $A(s)$ , nous utilisons la deuxième équation du système :

$$L_0 u_1 = L_1 u_0 \quad (\text{IV.2.69})$$

Soit  $W$  une solution de l'équation :

$$L_0 W = \frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu + \kappa} \frac{\partial W}{\partial \nu} + (\nu - \xi) W = 0 \quad (\text{IV.2.70})$$

ce qui nous donne aussi :

$$(\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} \hat{L}_0 \left( (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W \right) = (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{1}{4(\nu + \kappa)^2} \right) \right] \left( (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W \right) = 0 \quad (\text{IV.2.71})$$

En multipliant l'équation (IV.2.69) par  $(\kappa + \nu) W$  et en intégrant selon  $\nu$  entre 0 et  $+\infty$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu) W L_0 u_1 d\nu = \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu) W L_1 u_0 d\nu \quad (\text{IV.2.72})$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu) W L_0 (u_1) d\nu &= \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} L_0 (u_1) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W \hat{L}_0 u_1 d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} u_1 \hat{L}_0^* \left( (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W \right) d\nu \end{aligned} \quad (\text{IV.2.73})$$

avec  $\hat{L}_0^*$  l'opérateur auto-adjoint de  $\hat{L}_0$ .

Or on a  $\hat{L}_0^* = \hat{L}_0$ , ce qui nous amène :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu) W L_0(u_1) d\nu = \int_0^{+\infty} u_1 \hat{L}_0 \left( (\kappa + \nu)^{\frac{1}{2}} W \right) d\nu = 0 \quad (\text{IV.2.74})$$

En suivant la méthodologie pour les corps non allongés et 'moyennement' allongés, le coefficient d'amplitude  $A(s)$  se calcule grâce à l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu) W L_1(u_0) d\nu = 0 \quad (\text{IV.2.75})$$

Le calcul de  $A(s)$  n'a pas encore été effectué dans le cadre de cette thèse. On peut cependant penser que par combinaison des propriétés des fonctions  $W$  et  $w_1$  le coefficient peut être calculé.

## Maxwell

On reprend l'Ansatz postulé pour les études dans l'ombre loin de la frontière ombre-lumière (III.3.61) :

$$\vec{E}(s, \alpha, \nu) = e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_E(s, \alpha)} \sum_{j=1}^N \vec{e}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.76})$$

$$\vec{H}(s, \alpha, \nu) = e^{iks + ik^{\frac{1}{3}} \varphi_H(s, \alpha)} \sum_{j=1}^N \vec{h}_j(s, \alpha, \nu) k^{-\frac{j}{3}} \quad (\text{IV.2.77})$$

avec  $\nu = nk^{\frac{2}{3}}$ .

On reporte cet Ansatz dans les équations de Maxwell en coordonnées géodésiques pour les corps allongés.

En identifiant les termes de même ordre, on a un système dont les premiers opérateurs sont les suivants :

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu_1^2} + \frac{3}{\nu_1 + \kappa_1} \frac{\partial}{\partial \nu_1} + 2 \left( \frac{\nu_1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \quad (\text{IV.2.78})$$

$$L_1 = 2i \frac{\partial}{\partial s} + 3i \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial s} - 3i \frac{\nu_1}{\kappa_1 (\nu_1 + \kappa_1)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial s} \quad (\text{IV.2.79})$$

avec  $\kappa_1 = \rho_t k^{\frac{2}{3}}$ .

On remarque que comme dans la zone de Fock, les opérateurs liés à l'acoustique et à l'électromagnétique sont égaux à un coefficient près. On passe l'équation (IV.2.78) dans les variables étirées  $(\nu, \kappa)$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu + \kappa} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \left( \nu - 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) u_0 = 0 \quad (\text{IV.2.80})$$

En posant  $\xi(s) = 2^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ , on retrouve l'équation bi-confluente réduite de Heun de l'étude dans la zone de Fock.

On effectue un changement de fonction :

$$v_0 = u_0 (\nu + \kappa)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{IV.2.81})$$

ce qui nous donne l'équation en  $v_0$  :

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2} \right) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.82})$$

En considérant que l'on recherche une solution très proche de la surface, on peut effectuer un développement limité de  $\left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2}$  à l'ordre 0 en 0.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi + \frac{9}{4\kappa^2} \right) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.83})$$

Par le changement de variable :

$$\zeta = \xi - \frac{9}{4\kappa^2}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) v_0 = 0 \quad (\text{IV.2.84})$$

qui est une équation d'Airy.

Soit  $V$  une solution de cette équation, on a  $u_0$  sous la forme :

$$u_0 = \frac{A(s)}{(\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}}} V(\zeta - \nu) \quad (\text{IV.2.85})$$

La condition limite de radiation nous impose de choisir  $V = w_1$ .

Afin de déterminer la coefficient  $A(s)$ , nous utilisons la deuxième équation du système :

$$L_0 u_1 = L_1 u_0 \quad (\text{IV.2.86})$$

Soit  $W$  une solution de l'équation :

$$L_0 W = \frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2} + \frac{3}{\nu + \kappa} \frac{\partial W}{\partial \nu} + (\nu - \xi) W = 0 \quad (\text{IV.2.87})$$

ce qui nous donne aussi :

$$(\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} \hat{L}_0 \left( (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W \right) = (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \left( \nu - \xi + \frac{1}{4(\nu + \kappa)^2} \right) \right] \left( (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W \right) = 0 \quad (\text{IV.2.88})$$

En multipliant l'équation (IV.2.86) par  $(\kappa + \nu)^3 W$  et en intégrant selon  $\nu$  entre 0 et  $+\infty$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^3 W L_0 u_1 d\nu = \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^3 W L_1 u_0 \quad (\text{IV.2.89})$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^3 W L_0 (u_1) d\nu &= \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} L_0 (u_1) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W \hat{L}_0 u_1 d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} u_1 \hat{L}_0^* \left( (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W \right) d\nu \end{aligned} \quad (\text{IV.2.90})$$

avec  $\hat{L}_0^*$  l'opérateur auto-adjoint de  $\hat{L}_0$ .

Or on a  $\hat{L}_0^* = \hat{L}_0$ , ce qui nous amène :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^3 W L_0 (u_1) d\nu = \int_0^{+\infty} u_1 \hat{L}_0 \left( (\kappa + \nu)^{\frac{3}{2}} W \right) d\nu = 0 \quad (\text{IV.2.91})$$

Comme dans le cas acoustique, le coefficient d'amplitude  $A(s)$  se calcule grâce à l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (\kappa + \nu)^3 W L_1 (u_0) d\nu = 0 \quad (\text{IV.2.92})$$

## 2.3 Raccordement des solutions

Nous allons maintenant montrer que les formulations trouvées dans la zone de Fock se raccordent avec les formulations de zone éclairée et de la zone d'ombre profonde proche de la surface.

Les formulations étant différentes pour Helmholtz et Maxwell, nous traitons les cas séparément.

### Helmholtz

#### 1. Raccordement en zone éclairée.

Afin de raccorder les solutions, on étend le système de coordonnées semi-géodésique pour  $\sigma < 0$ .

Comme dans le cas de corps non allongés, on utilise une méthode du col pour  $\sigma$  grand et négatif. On considère l'intégrale oscillante :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\mu} \frac{d\mu}{w_1'(\mu) - imZ_\kappa w_1(\mu)} \quad (\text{IV.2.93})$$

Les expressions de  $w_1(\mu)$  et  $w_1'(\mu)$  pour  $\mu$  grand sont :

$$w_1(\mu) \approx \mu^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.2.94})$$

$$w_1'(\mu) \approx \mu^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.2.95})$$

ce qui amène :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\mu - \frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{\frac{1}{4}}}{\mu^{\frac{1}{2}} - imZ_\kappa} d\mu \quad (\text{IV.2.96})$$

En prenant la phase :

$$q(\mu) = i \left( \sigma - \frac{i}{2\kappa} \right) \mu - \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}}$$

On a :

$$\begin{aligned} q'(\mu) &= i \left( \sigma - \frac{i}{2\kappa} \right) - \mu^{\frac{1}{2}} \\ q''(\mu) &= -\frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le point stationnaire est alors :

$$\sqrt{\mu_s} = i\sigma + \frac{1}{2\kappa}, \quad \mu_s = \left( i\sigma + \frac{1}{2\kappa} \right)^2 \quad (\text{IV.2.97})$$

La méthode du col nous donne alors :

$$I(\sigma) = 2\sqrt{\pi} \frac{i\sigma + \frac{1}{2\kappa}}{i\sigma - imZ_\kappa} e^{\frac{(i\sigma + \frac{1}{2\kappa})^3}{3}} \quad (\text{IV.2.98})$$

Dans la zone de Fock, on a  $\sigma = m \frac{s}{\rho} = O(1)$ , or  $\frac{s}{\rho}$  est le développement au premier ordre de  $-\cos \theta$ .

Ceci nous donne alors dans la région de Fock éclairée :

$$\sigma = -m \cos \theta \quad (\text{IV.2.99})$$

et donc :

$$U_0 = e^{iks} e^{i \frac{(-m \cos \theta)^3}{3}} F_Z(-m \cos \theta) = e^{iks} e^{i \frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \quad (\text{IV.2.100})$$

## Maxwell

### 1. Raccordement en zone éclairée

Afin de raccorder les solutions, on étend le système de coordonnées semi-géodésique pour  $\sigma < 0$ .

Comme dans le cas de corps non allongés, on utilise une méthode du col pour  $\sigma$  grand et négatif. On considère l'intégrale oscillante :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\mu} \frac{d\mu}{w_1'(\mu) - imZ_\kappa w_1(\mu)} \quad (\text{IV.2.101})$$

Les expressions de  $w_1(\mu)$  et  $w_1'(\mu)$  pour  $\mu$  grand sont :

$$w_1(\mu) \approx \mu^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.2.102})$$

$$w_1'(\mu) \approx \mu^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{IV.2.103})$$

ce qui amène :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\mu - \frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{\frac{1}{4}}}{\mu^{\frac{1}{2}} - imZ_\kappa} d\mu \quad (\text{IV.2.104})$$

En prenant la phase :

$$q(\mu) = i \left( \sigma - \frac{i}{2\kappa} \right) \mu - \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}}$$

On a :

$$\begin{aligned} q'(\mu) &= i \left( \sigma - \frac{i}{2\kappa} \right) - \mu^{\frac{1}{2}} \\ q''(\mu) &= -\frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le point stationnaire est alors :

$$\sqrt{\mu_s} = i\sigma + \frac{1}{2\kappa}, \quad \mu_s = \left( i\sigma + \frac{1}{2\kappa} \right)^2 \quad (\text{IV.2.105})$$

La méthode du col nous donne alors :

$$I(\sigma) = 2\sqrt{\pi} \frac{i\sigma + \frac{1}{2\kappa}}{i\sigma - imZ_\kappa} e^{\frac{(i\sigma + \frac{1}{2\kappa})^3}{3}} \quad (\text{IV.2.106})$$

Dans la zone de Fock, on a  $\sigma = m \frac{s}{\rho} = O(1)$ , or  $\frac{s}{\rho}$  est le développement au premier ordre de  $-\cos \theta$ .

Ceci nous donne alors dans la région de Fock éclairée :

$$\sigma = -m \cos \theta \quad (\text{IV.2.107})$$

et donc :

$$U_0 = e^{iks} e^{i \frac{(-m \cos \theta)^3}{3}} F_Z(-m \cos \theta) = e^{iks} e^{i \frac{\sigma^3}{3}} F_Z(\sigma) \quad (\text{IV.2.108})$$

## 2.4 Modes de propagation des rampants

On a remarqué dans (2) que l'allongement du corps diffractant agit comme une impédance complexe.

Les modes de propagation des rampants, solutions de l'équation :

$$\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi) \quad (\text{IV.2.109})$$

pour les corps non allongés deviennent solution de l'équation :

$$\dot{w}_1(\xi) - im \left( Z + \frac{i}{2m\kappa} \right) w_1(\xi) \quad (\text{IV.2.110})$$

Ces modes sont donc directement dépendants de  $\kappa$ .

La recherche de ces modes de propagation, expliquée dans ( cf. annexe 6), nous montre l'influence de l'allongement par rapport à l'impédance ( fig. 70).

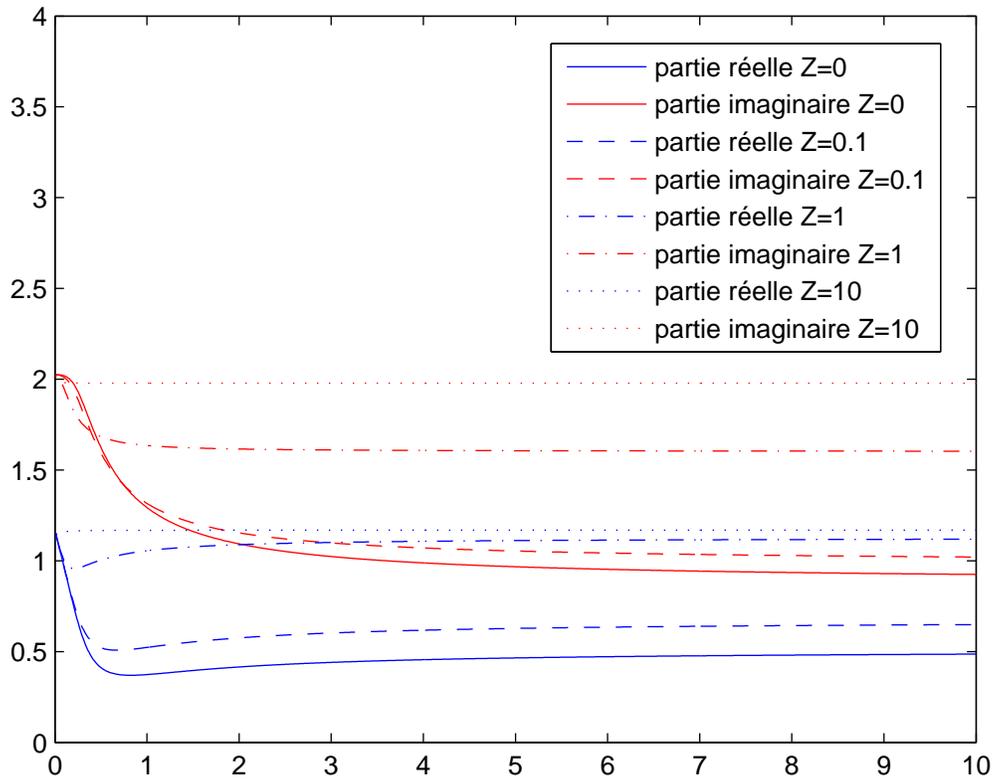


FIG. 70 – Modes de propagation des rampants en fonction de  $\kappa$

La valeur de l'impédance a donc un effet plus ou moins dominant sur l'effet provoqué par l'allongement du corps.

On remarque de plus que pour un  $\kappa$  très faible (corps extrêmement allongé) la valeur de l'impédance devient négligeable face à l'influence de l'allongement.

### 3 Validation des formulations

Nous appliquons maintenant les résultats obtenus précédemment au cas de l'ellipsoïde de révolution.

L'ellipsoïde de révolution constitue un corps allongé lorsqu'il est éclairé selon son axe de révolution ( fig. 71).

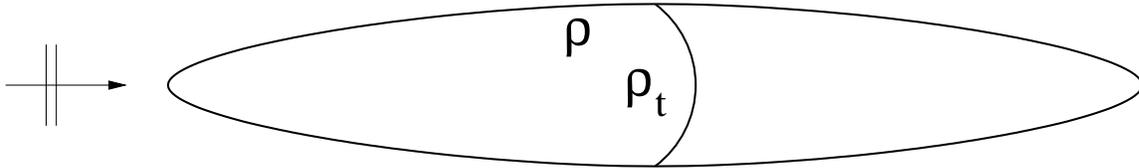


FIG. 71 – Cas de validation de corps allongé

Nous comparons les résultats obtenus aux résultats obtenus par une méthode de moments 3D ainsi qu'avec les formulations de corps non allongés.

On compare alors les composantes suivant les deux axes principaux des courants électriques et le module des courants électriques.

– Composante  $x$  des courants électriques

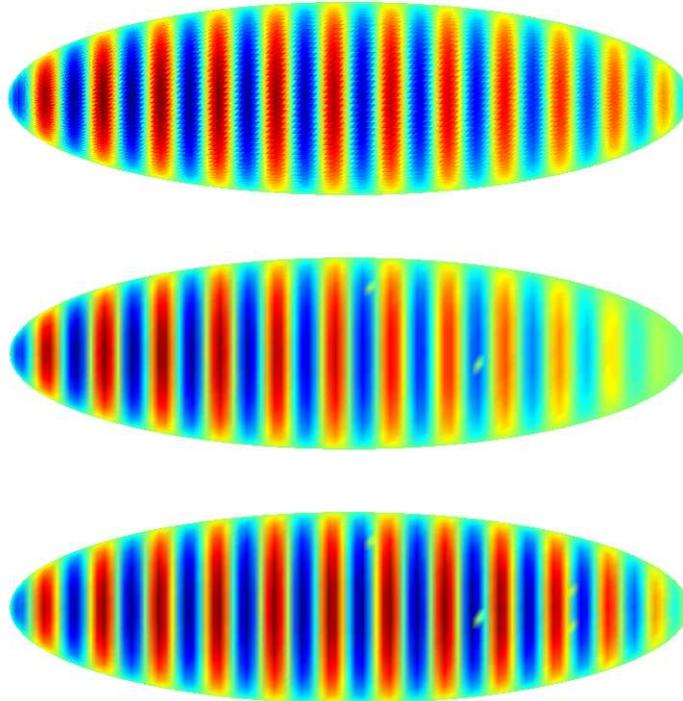


FIG. 72 – Composante  $x$  des courants électriques

Le premier résultat est celui de la méthode des moments 3D, le second est obtenu par l'application des formulations de corps non allongés et le troisième par application des nouvelles fonctions de Fock (corps allongés) ( fig. 72).

On remarque que la perte de niveau des corps non allongés est bien compensée par les nouvelles formulations.

Les résultats obtenus sur une géodésique sont plus représentatifs ( fig. 73).

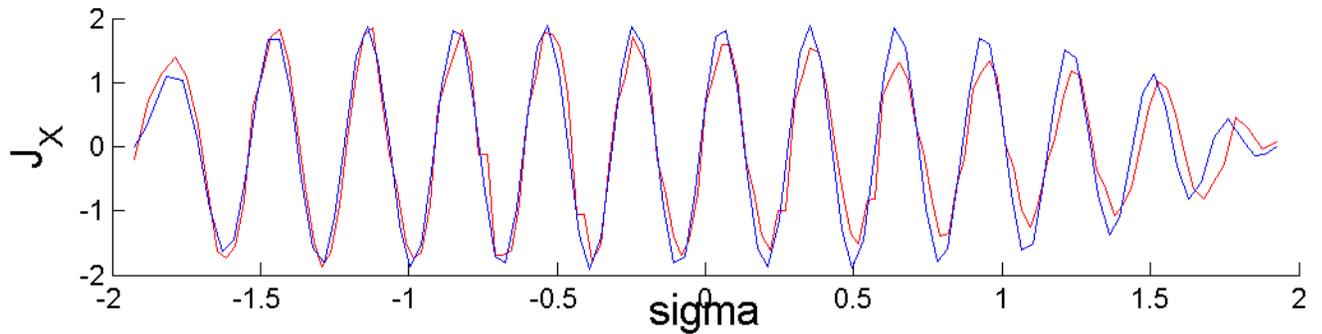


FIG. 73 – Valeurs de la composante  $x$  des courants électriques suivant une géodésique

En effet, on remarque que, dans la zone d'ombre profonde, les formulations corps allongés (en bleu) amènent des valeurs plus fortes que pour la méthode des moments (en rouge). On peut penser que comme dans le cas de corps non allongés, ce trop fort niveau est dû à l'absence du passage de caustique des rayons rampants. Le déphasage observé entre les deux résultats nous laisse penser qu'en fait, c'est la formulation elle-même qui n'est pas encore assez précise.

– Composante  $y$  des courants électriques

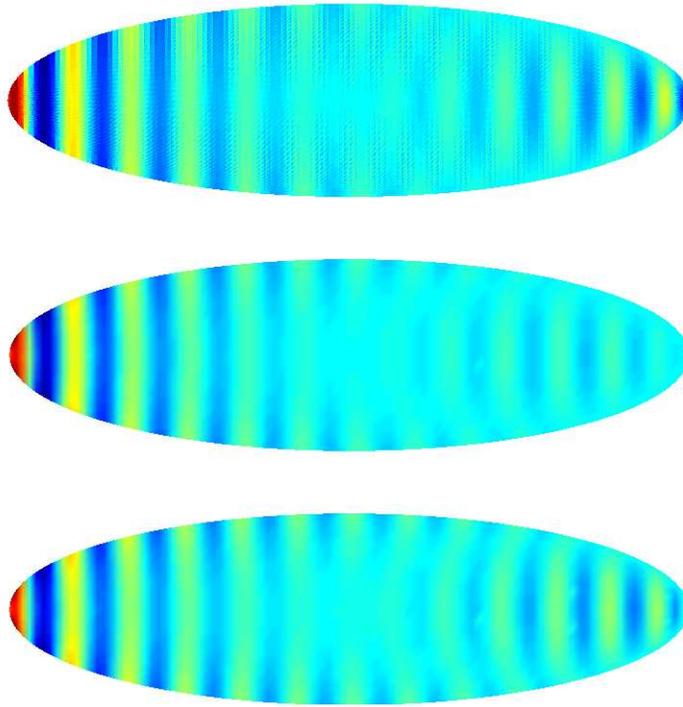


FIG. 74 – Composante  $y$  des courants électriques

Comme dans le cas précédent, on remarque une meilleure concordance du résultat de la méthode de moments avec la formulation corps allongés ( fig. 74).

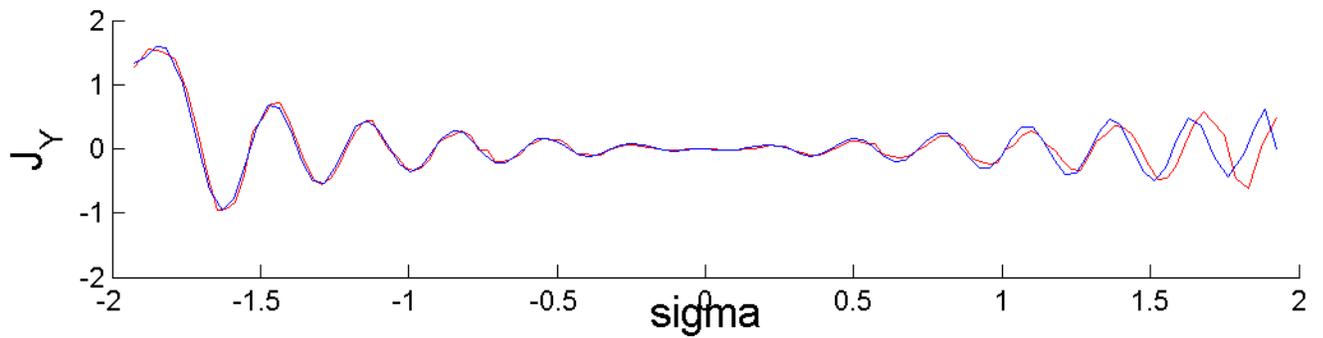


FIG. 75 – Valeurs de la composante  $y$  des courants électriques suivant une géodésique

Sur cette composante, la différence d'amplitude est plus faible. la différence de phase est, elle, toujours présente ( fig. 75).

– Module des courants électriques

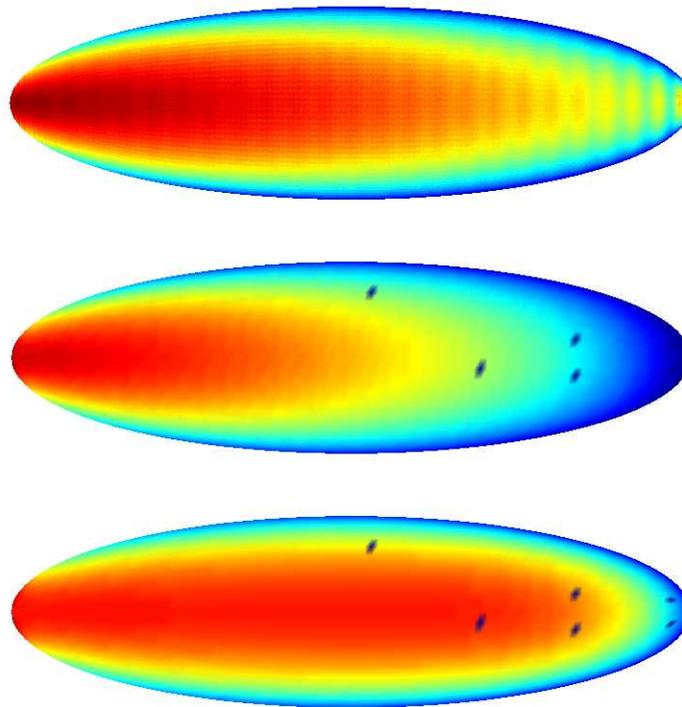


FIG. 76 – Module des courants électriques

La comparaison des modules nous permet de mieux observer les différences entre les trois méthodes.

La formulation corps allongés nous amène bien un niveau plus fort dans la zone d'ombre. Ce niveau reste cependant trop élevé par rapport à la méthode des moments dans l'ombre profonde ( fig. 76).

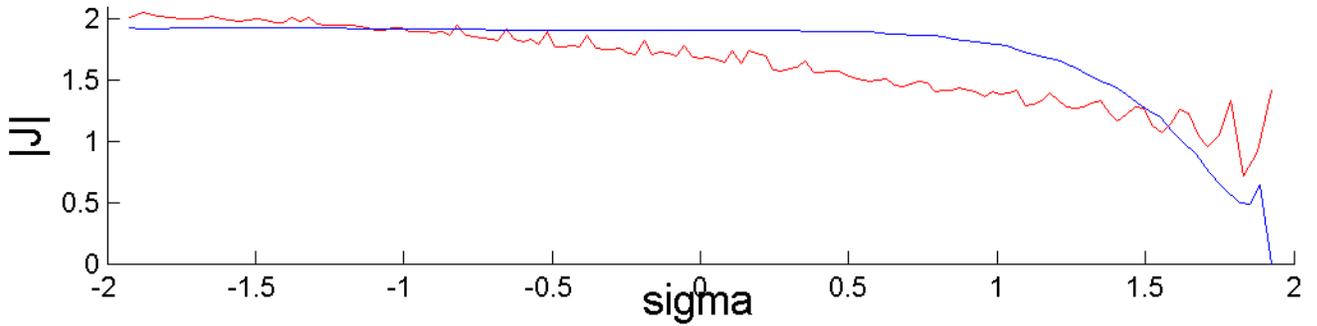


FIG. 77 – Valeurs du module des courants électriques suivant une géodésique

On observe bien la différence entre le résultat de la méthode des moments et la formulation corps allongés ( fig. 77). Comme on l’explique dans (??), on peut penser que cette différence est due à une approximation trop rude soit dans le calcul du champ incident, soit dans l’approximation de l’équation biconfluente réduite de Heun.

## 4 Équation Biconfluente Réduite de Heun

L’application de la méthode de la couche limite pour les phénomènes de diffraction d’onde par des surfaces régulières nous amène souvent à la solution de l’équation d’Airy, équation maintenant bien connue. Dans l’étude de corps ‘fortement’ allongés, nous avons vu l’apparition d’une nouvelle équation : **L’équation biconfluente réduite de Heun.**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a}{x+b} \frac{\partial}{\partial x} + (x-c) = 0 \quad (\text{IV.4.111})$$

Cette équation est particulière car sa solution ne s’écrit pas comme une combinaison de fonctions hypergéométriques.

Dans le domaine de Fock et dans le cadre d’études sur la surface ( $x = 0$ ), nous avons réussi à éviter la résolution de cette équation par l’utilisation de développements limités. Pour les ondes rampantes hors domaine de Fock, la résolution de cette équation devient cependant nécessaire. On peut alors utiliser une résolution numérique de l’équation de Heun. Certains problèmes se posent alors :

- La solution de cette équation est utilisée dans une intégrale dont le calcul se fait soit de façon numérique, soit par méthode des résidus.

Dans le cadre d’une intégration numérique, l’approximation due au calcul numérique de la solution de l’équation (IV.4.111) est alors amplifiée par l’approche numérique de l’intégrale. Cette superposition d’approches numériques peut engendrer des erreurs assez fortes étant donné le caractère fortement oscillatoire des fonctions utilisées.

Pour une intégration par méthode des résidus, le même problème se pose car cette méthode est déjà une méthode approchée.

- Le premier apport des méthodes asymptotiques liées aux méthodes de rayons est le gain de temps de calcul par rapport aux méthodes intégrales. La nécessité d’une résolution numérique d’équation différentielle pour chaque nœud de chaque géodésique risque d’augmenter fortement le coût de calcul.

L'obtention d'une solution analytique de l'équation (IV.4.111) serait alors une sérieuse avancée qui nous permettrait de pallier les problèmes précédemment cités. Nous ne connaissons pas, aujourd'hui, de solution à cette équation.

Avant de donner des pistes pour résoudre ce problème, rappelons quelques généralités sur les équations différentielles ordinaires (EDO) à coefficients polynomiaux.

## 4.1 Classification des singularités des EDO

On considère des équations différentielles ordinaires à coefficients polynomiaux de la forme

$$P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0, \quad (\text{IV.4.112})$$

avec  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  des polynômes. La classification et l'étude des ce type d'équation fait l'objet d'un grand nombre de travaux dont on pourra trouver des références dans [34]. En particulier, dans [34], Slavyanov et Lay proposent un classement de ces Équation Différentielles Ordinaires dont nous rappelons maintenant des éléments essentiels.

Le problème de Cauchy associé à (IV.4.112) ne peut pas être résolu aux singularités de cette équation, i.e. aux zéros de  $P_0$ . Notons que parmi les éventuelles sigularités,  $z = \infty$  est inclus si  $\zeta = 0$  est une singularité après le changement de variable  $1/z = \zeta$ . En général, les points singuliers sont des points de branchement d'au moins une solution de (IV.4.112). On dira qu'une singularité  $z^*$  d'une solution de (IV.4.112) est d'ordre fini si il existe  $\rho > 0$  tel que  $y(z) \times (z - z^*)^\rho \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow z^*$ . Si les deux solutions de (IV.4.112) sont d'ordre fini en  $z^*$ , on dira que  $z = z^*$  est une *singularité régulière*. Cette propriété peut être caractérisée par une propriété sur les coefficients de (IV.4.112) :

**Théorème 4.1** (*Théorème 1.1 de [34]*) *Le point  $z = z^*$  est une singularité régulière de (IV.4.112) si et seulement si  $z = z^*$  est un pôle d'ordre au plus 1 de  $\frac{P_1}{P_0}$  et d'ordre au plus 2 de  $\frac{P_2}{P_0}$  (pour  $z^* = \infty$  cela signifie  $\frac{P_1}{P_0} = O(z^{-1})$ ,  $\frac{P_2}{P_0} = O(z^{-2})$ ).*

Les points singuliers de (IV.4.112) peuvent être caractérisés par le *s-rang* défini comme suit. Le *s-rang*  $R(z_j)$  d'un point irrégulier fini  $z_j$  est donné par :

$$R(z_j) = \max(\text{mult}_{z_j}\left(\frac{P_0}{P_1}\right), \frac{1}{2}\text{mult}_{z_j}\left(\frac{P_0}{P_2}\right)),$$

où  $\text{mult}_{z_j}(f)$  désigne la multiplicité du zéro de  $f$  au point  $z_j$ . En un point irrégulier infini  $z = \infty$ , le *s-rang* est donné par :

$$R(\infty) = \max(\text{deg}(P_1) - \text{deg}(P_0) + 2, \frac{1}{2}(\text{deg}(P_2) - \text{deg}(P_0)) + 2).$$

Ainsi, l'équation (IV.4.112) pour laquelle  $P_0(z) = z + b$ ,  $P_1(z) = a$ ,  $P_2(z) = (z - c)(z + b)$ , possède deux singularités : en  $z = -b$  et en  $z = \infty$ . Le point  $z = -b$  est une singularité régulière ( $R(-b) = 1$ ) alors que  $z = \infty$  est une singularité irrégulière dont le  $s - rang$  est :

$$R(\infty) = \max\left(1, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des  $s - rang$  des points singuliers de (IV.4.112) forme son  $s - multisymbole$ . Des équations irréductibles caractérisées par le même  $s - multisymbole$  appartiennent au même type d'équation. En particulier, le  $s - rang$  d'un point  $z_j$ , intervient dans la détermination du comportement de la solution de (IV.4.112) près de  $z_j$ .

L'équation (IV.4.112) est dite *confluente* si elle contient au moins une singularité irrégulière. Elle est de plus dite *confluente réduite* si au moins une des singularités irrégulières possède un  $s - rang$  demi-entier (i.e. égal à la moitié d'un nombre impair, un tel point est encore nommé singularité irrégulière *ramifiée*). Ces termes *confluente*, *confluente réduite* sont justifiés par le fait que de telles équations peuvent être déduites d'équations moins singulières par des processus de *confluence* et de *réduction*. La *confluence* consiste à faire tendre une singularité  $z_2$  vers une autre  $z_1$ . On obtient alors une nouvelle équation ayant une singularité plus importante en  $z_1$  (i.e. le  $s - rang$  augmente) (voir le Théorème 1.5 de [34]). La *réduction* permet de transformer une équation ayant une singularité en un point  $z_0$  en une équation ayant le même point singulier avec un  $s - rang$  diminué de  $\frac{1}{2}$ .

On peut alors distinguer des classes d'équations suivant la somme de leur  $s - rang$  (voir paragraphe 1.3.4 de [34]). Deux classes importantes sont les équations *hypergéométriques* et les équations de *Heun*.

La forme générique d'une équation *hypergéométrique* est une équation admettant 3 singularités régulières :

$$z(1 - z)y''(z) + (c - (a + b + 1))y'(z) - aby(z) = 0.$$

Les hautes types d'équations *hypergéométriques* se déduisent de celle-ci par des processus de confluence et de réduction.

La forme générique d'une équation *de Heun* est une équation admettant 4 singularités régulières :

$$z(z-1)(z-t)y''(z) + (c(z-1)(z-t) + dz(z-t) + (a+b+1-c-d)z(z-1))y'(z) + (abz - \lambda)y(z) = 0.$$

Les hautes types d'équations *de Heun* se déduisent de celle-ci par des processus de confluence et de réduction.

La classe des équations hypergéométriques contient 5 types d'équations, alors que celle de Heun en contient 10 (voir les tables 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3 de [34]). Il est connu que les solutions des équations hypergéométriques peuvent être représentées en terme de fonctions élémentaires. La représentation des solutions des équations de Heun pose plus de problèmes.

## 4.2 Sur la représentation des solutions de (IV.4.112)

De récents travaux proposent des solutions d'équations confluentes de Heun. Les liens entre ces équations et nos équations biconfluentes réduites sont cependant assez difficiles à effectuer. Notre première approche a été d'utiliser les travaux de Cheb-Terrab [13] [14] et [31]. L'idée étant d'utiliser les représentations des équations de Heun confluentes obtenues par Cheb-Terrab puis d'appliquer un processus de confluence pour représenter les solutions (IV.4.112). Les travaux de Cheb-Terrab ne traitent pas de l'équation confluyente qui nous intéresse.

Une piste serait sans doute d'appliquer les procédés de Cheb-Terrab directement à l'équation (IV.4.112).

Les transformations considérées par Maier [29] pourraient aussi être utiles.

## Conclusion et Perspectives

Lors de simulations numériques en acoustique et en électromagnétisme, le coût élevé des méthodes intégrales pour certains calculs (hautes fréquences) a nécessité le développement des méthodes asymptotiques associées aux méthodes de rayons. Ces méthodes reposent sur l'utilisation de développements de la solution en puissances du nombre d'onde  $k$ .

Le point de vue géométrique de ces méthodes est aussi bien décrit par le principe de Fermat que par l'utilisation de l'équation eikonale donnée par l'introduction d'un développement asymptotique de la solution dans les équations de propagation (équation d'Helmholtz en acoustique, équations de Maxwell en électromagnétisme).

L'équation de transport associée à l'équation eikonale nous donne les moyens de résoudre la propagation en espace libre. Les phénomènes de réflexion et de transmission sont correctement décrits par les relations de passage à une interface. Ces relations sont données par la résolution locale des équations de propagation. Ces phénomènes viennent compléter la première approximation des développements asymptotiques, l'**Optique Géométrique**. Dans le cadre de calculs sur des objets diffractants de forme simple ou bien de calculs à très hautes fréquences, l'**Optique Géométrique** est souvent suffisante pour décrire les phénomènes en présence.

Les simulations numériques en acoustique (respectivement en électromagnétisme) ont souvent pour but de connaître la pression (respectivement le champ électromagnétique) en un point donné. Pour effectuer ces calculs, l'utilisation d'une **Méthode de Courants** permet d'éviter les problèmes de caustiques. L'association de l'**Optique Géométrique** et d'une **Méthode de Courants** nous amène l'**Optique Physique**. Nous avons proposé une méthode robuste pour le calcul de l'intégrale de rayonnement (**Méthode de Ludwig**) utilisable dans le cadre d'une méthode de rayons permettant de diminuer de façon conséquente le nombre de rayons lancés et donc le coût des calculs.

Nous avons ici donné l'exemple de cas pour lesquels l'**Optique Physique** est très satisfaisante. Les résultats obtenus pour les calculs de multi-réflexion et de transmission sont très proches des résultats trouvés par une méthode intégrale  $3D$  et nous ont aussi permis de valider une approche couche mince permettant de représenter un matériau multi-couches par une seule couche de matériau affecté d'une impédance particulière.

Certaines régions ne sont pas correctement décrites par l'**Optique Géométrique**. Le comportement de la solution dans ces régions est alors étudié par une **Méthode de couche limite**. L'utilisation de cette méthode nécessite le passage à un système de coordonnées lié au phénomène de diffraction étudié. Pour l'étude de la zone de Fock comme pour l'étude de rampants, le système de coordonnées est lié à la surface. Ces systèmes sont les systèmes de coordonnées semi-géodésique et géodésique. Ensuite, nous postulons un **Ansatz** sous forme de développement asymptotique que nous insérons dans les équations de propagation adaptées au nouveau système de coordonnées. L'ordonnement des équations résultantes suivant les puissances de  $k$  permet de déterminer, par résolution des équations de plus grand ordre, les premiers ordres du développement de la solution. Après avoir déterminé les formes de solutions dans ces régions particulières, il reste à les relier entre elles par utilisation de passage à la limite, de méthode de résidus et de méthode de phase stationnaire.

Dans le cadre de cette thèse nous appliquons cette **Méthode de couche limite** aux

phénomènes de diffraction sur la surface : la zone de Fock (autour de la frontière ombre-lumière), la zone d'ombre profonde sur la surface. L'étude de ces régions fait apparaître l'**équation d'Airy**. Nous avons expliqué la méthodologie utilisée afin d'obtenir les formulations dans ces domaines particuliers ainsi que les procédés qui permettent de les relier. Les simulations numériques obtenues sur la sphère sont très proches des résultats obtenus par la méthode intégrale. De nombreux cas d'utilisation de méthode de couche limite sont disponibles dans la littérature, notamment dans les ouvrages de Bouche, Molinet et Andronov.

Certains cas, comme celui des corps allongés, nécessitent une attention plus particulière. Afin de décrire correctement le comportement de la solution la prise en compte de certaines caractéristiques géométriques est nécessaire. L'étude de la prise en compte du rayon de courbure transverse à la géodésique amène une nouvelle équation : l'**équation biconfluente réduite de Heun**. Ne connaissant pas actuellement de solution analytique à cette équation, nous avons utilisé un développement limité afin de caractériser la solution sur la surface dans la zone de Fock. La solution d'onde rampante nécessite, quant à elle, d'obtenir une solution de l'équation de Heun.

La résolution numérique de l'**équation biconfluente réduite de Heun** est coûteuse et augmente les approximations effectuées par l'approche asymptotique. La résolution analytique de l'**équation biconfluente réduite de Heun** est l'un des principaux axes de travail sur les corps allongés. Les récents travaux de Cheb-Terrab sur les équations de Heun peuvent être un bon point de départ pour cette recherche de solutions. Nous avons effectué l'étude des phénomènes de diffraction sur la surface ; l'étude de la diffraction de rampants dans la zone d'ombre profonde loin de la surface permettrait une meilleure compréhension des phénomènes sur les corps allongés. Enfin, les applications numériques sur des géométries à trois dimensions amèneraient une certaine validation des travaux effectués sur les corps allongés.

Dans le cadre de calculs sur des objets grands devant la longueur d'onde contenant certaines parties très difficiles à traiter avec les méthodes asymptotiques, on peut envisager une hybridation avec des méthodes plus basses fréquences telles que les méthodes de moments ou les méthodes multipôles. Les processus d'hybridation mis en oeuvre aux interfaces sont alors complexes. Afin que ce genre de calcul ne devienne pas trop coûteux, il peut être intéressant de développer une approche multipolaire des sources.

# Cinquième partie

## Annexe

# Table des Matières

1	Géométrie Différentielle . . . . .	130
1.1	Calcul de la matrice métrique ( $g$ ) . . . . .	130
1.2	Calcul du coefficient de divergence de géodésiques . . . . .	132
1.3	Calcul de la Torsion . . . . .	134
2	Développement de Luneberg-Kline . . . . .	135
2.1	Helmholtz . . . . .	135
2.2	Maxwell . . . . .	136
2.3	Résolution de l'équation eikonale de la phase . . . . .	137
3	Calcul du coefficient d'amplitude des rampants . . . . .	138
3.1	Corps non allongés . . . . .	139
3.2	Corps 'modérément' allongés . . . . .	140
4	Fonctions spéciales . . . . .	141
4.1	Fonctions d'Airy . . . . .	141
4.2	Calcul des fonctions de Fock . . . . .	143
5	Approximation de l'équation de Heun . . . . .	145
5.1	Helmholtz . . . . .	145
6	Modes de Propagation des Rampants . . . . .	148
6.1	Corps "classiques" (fonction d'Airy) . . . . .	148
6.2	Corps allongés . . . . .	150

# 1 Géométrie Différentielle

## 1.1 Calcul de la matrice métrique ( $g$ )

Dans cette partie, nous allons définir la matrice définissant la surface dans le système de coordonnées géodésique  $(s, \alpha, n)$ .

On pose  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + n\vec{n}$  avec  $M$  un point de l'espace,  $P$  sur la surface et  $\vec{n}$  le vecteur normal à la surface dirigé vers l'extérieur. On a alors  $\overrightarrow{OP}$  fonction des seules coordonnées  $(s, \alpha)$ . Les coefficients de la matrice ( $g$ ) sont les produits scalaires des dérivées partielles de  $\overrightarrow{OM}$ .

On a :

$$g_{xy} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \quad (\text{A.1})$$

avec  $(x, y) \in (s, \alpha, n)^2$ .

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial n} = \vec{n}$$

nous donne :

$$g_{sn} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$g_{\alpha n} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$g_{nn} = 1 \quad (\text{A.4})$$

Il reste alors à calculer  $g_{ss}, g_{\alpha\alpha}$  et  $g_{s\alpha} = g_{\alpha s}$ .

– Calcul de  $g_{ss}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} &= \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial s} + n \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \\ &= (1 + b_{ss}n) \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial s} + \frac{b_{s\alpha}n}{h^2} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ce qui nous donne :

$$g_{ss} = \left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} \right)^2 = (1 + b_{ss}n)^2 + \frac{b_{s\alpha}^2 n^2}{h^2} \quad (\text{A.6})$$

– Calcul de  $g_{\alpha\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha} + n \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \\ &= \left( 1 + \frac{b_{\alpha\alpha}n}{h^2} \right) \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha} + b_{s\alpha}n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial s} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

et donc :

$$g_{\alpha\alpha} = \left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \right)^2 = h^2 \left( 1 + \frac{b_{\alpha\alpha} n}{h^2} \right)^2 + b_{s\alpha}^2 n^2 \quad (\text{A.8})$$

– Calcul de  $g_{s\alpha}$

$$\begin{aligned} g_{s\alpha} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \\ &= b_{s\alpha} n (1 + b_{ss} n) + b_{s\alpha} n \left( 1 + \frac{b_{\alpha\alpha} n}{h^2} \right) \\ &= 2b_{s\alpha} n + b_{s\alpha} n^2 \left( b_{ss} + \frac{b_{\alpha\alpha}}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La matrice  $(g)$  se met alors sous la forme :

$$(g) = \begin{pmatrix} (1 + b_{ss} n)^2 + \frac{b_{s\alpha}^2 n^2}{h^2} & 2b_{s\alpha} n + b_{s\alpha} n^2 \left( b_{ss} + \frac{b_{\alpha\alpha}}{h^2} \right) & 0 \\ 2b_{s\alpha} n + b_{s\alpha} n^2 \left( b_{ss} + \frac{b_{\alpha\alpha}}{h^2} \right) & h^2 \left( 1 + \frac{b_{\alpha\alpha} n}{h^2} \right)^2 + b_{s\alpha}^2 n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Il nous faut maintenant calculer les  $b_{xy}$ .

Le système de coordonnées géodésique nous donne que la première forme quadratique est :

$$ds^2 + g_{\alpha\alpha} d\alpha^2 = ds^2 + h d\alpha^2$$

Nous définissons la seconde forme quadratique comme :

$$\begin{aligned} b_{ss} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \\ b_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \\ b_{s\alpha} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \end{aligned}$$

Les équations de Weingarten nous donnent les dérivées de  $\vec{n}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} &= b_{ss} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} + \frac{b_{s\alpha}}{h^2} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} &= b_{s\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} + \frac{b_{\alpha\alpha}}{h^2} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s}$  est le vecteur tangent à la géodésique,  $\frac{1}{h} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha}$  est le vecteur binormal à la géodésique et  $\vec{n}$  est l'opposé du vecteur normal à la géodésique. On a alors :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} - \frac{\tau}{h} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha}$$

avec  $\rho$  le rayon de courbure dans le sens de la géodésique et  $\tau$  la torsion de la géodésique. Ceci nous donne :

$$b_{ss} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{A.11})$$

$$b_{s\alpha} = -h\tau \quad (\text{A.12})$$

De plus  $\frac{b_{\alpha\alpha}}{h^2}$  est l'inverse du rayon de courbure de la courbe orthogonale à la géodésique  $\rho_t$ .

Alors :

$$b_{\alpha\alpha} = \frac{h^2}{\rho_t} \quad (\text{A.13})$$

La matrice métrique devient alors :

$$(g) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{n}{\rho}\right)^2 + \tau^2 n^2 & -h\tau \left(2n + n^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t}\right)\right) & 0 \\ -h\tau \left(2n + n^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t}\right)\right) & h^2 \left(\left(1 + \frac{n}{\rho_t}\right)^2 + \tau^2 n^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

## 1.2 Calcul du coefficient de divergence de géodésiques

### Calcul de la courbure Gaussienne

Soit un point  $M$  d'une surface  $S$  repéré par ses coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \\ \vec{x}_{uu} &= \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^2}, \quad \vec{x}_{uv} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u \partial v} \quad \text{et} \quad \vec{x}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial v^2} \end{aligned}$$

et la normale est définie par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \vec{x}_v|}$$

On introduit les 6 coefficients suivants :

$$\begin{aligned} E &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u & F &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v & G &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v \\ L &= \vec{x}_{uu} \cdot \vec{n} & M &= \vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} & N &= \vec{x}_{vv} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

La première forme quadratique fondamentale s'écrit alors :

$$I(du, dv) = E \cdot du^2 + F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \quad (\text{A.15})$$

Pour  $\rho$  et  $\rho_t$  les courbures principales en  $M$ , on a la courbure gaussienne  $K$  :

$$K = \rho \cdot \rho_t = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2} \quad (\text{A.16})$$

Si  $F$  est nul, on obtient rapidement que :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E.G}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

On montre que dans le cas de géodésiques, on a  $F = 0$  et  $E(u) = 1$ .

Ceci nous donne :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \quad (\text{A.18})$$

### Calcul du coefficient de divergence

Considérons trois géodésiques proches parcourant une surface.

Les trois points  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  ont la même abscisse  $s$  sur leur géodésique respective.

Les quantités calculées sont les quantités concernant la géodésique 1 au point  $P$ .

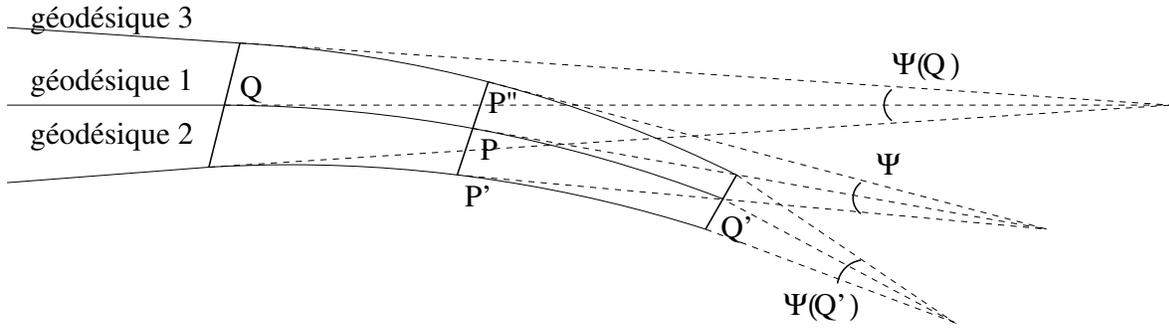


FIG. 78 – Divergence des géodésiques

On note  $h(s) = |P'P''|$  et  $\Psi$  l'angle entre les vecteurs tangents aux géodésiques 1 et 3 en  $P'$  et  $P''$ .

On a rapidement l'équation :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s} = \Psi \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = -Kh(s) \quad (\text{A.20})$$

avec  $K$  la courbure gaussienne.

Le rayon de courbure de la géodésique est aussi le rayon de courbure du front d'onde :

$$\rho = \frac{h(s)}{\Psi(s)} \quad (\text{A.21})$$

La première forme quadratique se met sous la forme :

$$dl^2 = ds^2 + g_{\alpha\alpha}d\alpha^2$$

ce qui, en utilisant les équations (A.19) et (A.20) nous donne :

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{\partial s^2} + K(s)g_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Précédemment nous avons vu :

$$g_{\alpha\alpha} = h^2 \left( \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} \right)^2 + \tau^2 n^2 \right)$$

L'équation (A.22) est donc aussi vérifiée par  $h$ . Seuls très peu de cas ( $K(s)$  simple) peuvent aboutir à une expression de  $h$  analytique. Pour le cas général, une résolution numérique est nécessaire pour déterminer  $h(s)$ .

### 1.3 Calcul de la Torsion

La torsion mesure la *non-planarité* d'une courbe.

La définition de la torsion est la limite du rapport de l'angle entre les plans osculateurs (plans contenant les vecteurs tangent et normal) de deux points et la longueur d'arc entre ces deux points lorsqu'ils se rapprochent.

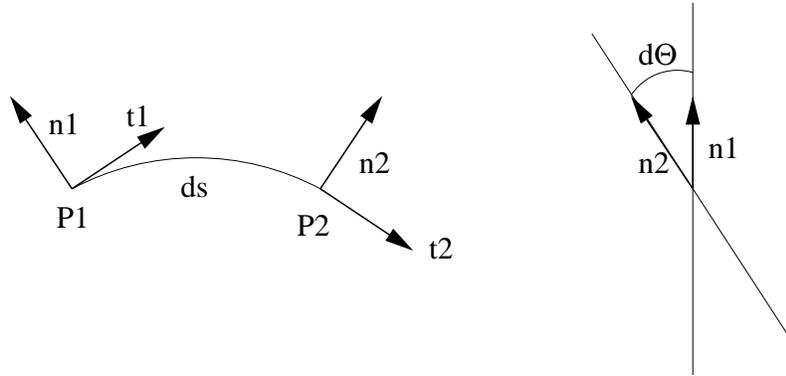


FIG. 79 – Définition de la torsion

$$\tau(s) = \vec{n}(s) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) \right) \quad (\text{A.23})$$

La nécessité d'une troisième dérivée pour exprimer la torsion rend son estimation particulièrement sensible.

## 2 Développement de Luneberg-Kline

Lors du calcul du champ diffracté dans la zone de Fock, nous avons besoin d'exprimer le champ incident dans le système de coordonnées semi-géodésique.

Une méthode basée sur la géométrie différentielle [10] peut être utilisée, cependant, dans le cadre de corps allongés, cette méthode n'est pas suffisante. Nous utilisons donc un développement de Luneberg-Kline afin d'exprimer ce champ incident.

### 2.1 Helmholtz

A hautes fréquences, le champ s'écrit en tout point de l'espace  $M(\vec{r})$  :

$$U(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(\vec{r})}{(ik)^j} \quad (\text{B.24})$$

On entre le développement (B.24) dans l'équation d'Helmholtz en coordonnées semi-géodésiques (III.1.7).

On néglige les termes contenant  $\tau$ , petit dans la direction paraxiale. On considère de plus les développements à l'ordre 0 des rayons de courbure ainsi que de l'écartement du pinceau de géodésique.

$$\rho(s) = \rho_0, \rho_t(s) = \rho_{0t} \text{ et } h(s) = h_0$$

Pour faciliter la lecture, nous remplaçons le développement du premier ordre par la variable elle même.

On a donc pour les termes d'ordre  $k^2$  et  $k$  :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2n}{\rho}\right) \left[ k^2 \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 u_0 - ik \left(\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} u_0 + 2 \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial u_0}{\partial s}\right) \right] \\ & + \left[ k^2 \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^2 u_0 - ik \left(\frac{\partial^2 S}{\partial n^2} u_0 + 2 \frac{\partial S}{\partial n} \frac{\partial u_0}{\partial n}\right) \right] \\ & - ik \frac{\partial S}{\partial n} u_0 \left(1 - \frac{2n}{\rho} - \frac{2n}{\rho_t}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t}\right) = k^2 u_0 \quad (\text{B.25}) \end{aligned}$$

On identifie les termes d'ordre  $k^2$  auxquels on ajoute le terme d'ordre  $k$  en  $\frac{1}{\rho_t}$ . L'ajout du terme d'ordre  $k$  vient du fait que dans le cas de corps très allongés,  $\rho_t$  est d'ordre  $k^{-\frac{2}{3}}$  et donc devient moins négligeable.

Cette équation eikonale s'écrit alors :

$$\left(1 - \frac{2n}{\rho}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^2 + \frac{1}{ik\rho_t} \frac{\partial S}{\partial n} = 1 \quad (\text{B.26})$$

## 2.2 Maxwell

Pour les équations de Maxwell, on procède comme précédemment.

$$\vec{U}(\vec{r}) = e^{ikS(\vec{r})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{u}_j(\vec{r})}{(ik)^j} \quad (\text{B.27})$$

$\vec{U}$  désignant soit le champ  $\vec{E}$  soit le champ  $\vec{H}$ .

On entre le développement (B.27) dans les équations de Maxwell sous leur forme la plus complète.

On effectue les mêmes approximations que pour Helmholtz sur les rayons de courbure et l'écartement du pinceau de géodésiques.

En plaçant (B.27) dans le système (III.1.8), on a :

$$h_0^s = \frac{2ih}{k\rho_t} e_0^\alpha - h \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) e_0^\alpha \quad (\text{B.28})$$

$$h_0^\alpha = \begin{aligned} & -\frac{2i}{\rho h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) e_0^s + \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} + \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial s} e_0^s - \frac{i}{k} \frac{\partial e_0^s}{\partial s} \right) \\ & - \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial n} e_0^s - \frac{i}{k} \frac{\partial e_0^s}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$h_0^n = h \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial s} e_0^\alpha - \frac{i}{k} \frac{\partial e_0^\alpha}{\partial s} \right) \quad (\text{B.30})$$

ainsi que son 'dual' :

$$e_0^s = -\frac{2ih}{k\rho_t} h_0^\alpha + h \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) h_0^\alpha \quad (\text{B.31})$$

$$e_0^\alpha = \begin{aligned} & \frac{2i}{\rho h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) h_0^s - \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} + \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial s} h_0^s - \frac{i}{k} \frac{\partial h_0^s}{\partial s} \right) \\ & + \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial s} h_0^n - \frac{i}{k} \frac{\partial h_0^n}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$e_0^n = -h \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} - \frac{n}{\rho} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial s} h_0^\alpha - \frac{i}{k} \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial s} \right) \quad (\text{B.33})$$

L'équation (B.31) nous amène :

$$\frac{\partial e_0^s}{\partial n} = \frac{2ih}{k\rho_t\rho} h_0^\alpha - \frac{2ih}{k\rho_t} \left( 1 - \frac{n}{\rho} \right) \frac{\partial h_0^\alpha}{\partial n} + \left( \frac{h}{\rho_t} \left( 1 - \frac{n}{\rho} \right) - \frac{h}{\rho} \left( 1 + \frac{n}{\rho_t} \right) \right) \frac{\partial S}{\partial n} h_0^\alpha \quad (\text{B.34})$$

soit en négligeant les termes d'ordre inférieur :

$$\frac{\partial e_0^s}{\partial n} = \frac{h}{\rho_t} \left( 1 - \frac{n}{\rho} \right) \frac{\partial S}{\partial n} h_0^\alpha \quad (\text{B.35})$$

On reporte (B.31), (B.35) et (B.33) dans (B.29). En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en  $n$ , on a :

$$h_0^\alpha = \left[ \left(1 - \frac{2n}{\rho}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^2 + \frac{3}{ik\rho_t} \frac{\partial S}{\partial n} \right] h_0^\alpha \quad (\text{B.36})$$

ce qui nous donne l'équation eikonale :

$$\left(1 - \frac{2n}{\rho}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^2 + \frac{3}{ik\rho_t} \frac{\partial S}{\partial n} = 1 \quad (\text{B.37})$$

## 2.3 Résolution de l'équation eikonale de la phase

Après avoir obtenu la même équation eikonale dans les cas acoustique et électromagnétique, nous allons maintenant résoudre cette équation eikonale à un ordre qui nous satisfait.

Ce développement étant effectué dans la zone de Fock proche de la surface, on peut faire un développement de la phase sous la forme :

$$S = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} s^i n^j \quad (\text{B.38})$$

que l'on peut aussi exprimer en fonction des variables dilatées  $\sigma$  et  $\nu$  en une série asymptotique en puissances de  $k^{\frac{1}{3}}$ .

Après insertion de (B.38) dans (B.26) et (B.37), on a :

– Pour Helmholtz :

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} ((i+1)(k+1)a_{i+1,j}a_{k+1,l} + (j+1)(l+1)a_{i,j+1}a_{k,l+1}) s^{i+k} n^{j+l} \right. \\ \left. - \frac{2}{\rho} ((i+1)(k+1)a_{i+1,j}a_{k+1,l} s^{i+k} n^{j+l+1}) - \frac{i}{k\rho_t} (j+1)a_{i,j+1} s^i n^j \right] = 0 \quad (\text{B.39})$$

– Pour Maxwell :

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} ((i+1)(k+1)a_{i+1,j}a_{k+1,l} + (j+1)(l+1)a_{i,j+1}a_{k,l+1}) s^{i+k} n^{j+l} \right. \\ \left. - \frac{2}{\rho} ((i+1)(k+1)a_{i+1,j}a_{k+1,l} s^{i+k} n^{j+l+1}) - \frac{3i}{k\rho_t} (j+1)a_{i,j+1} s^i n^j \right] = 0 \quad (\text{B.40})$$

Après identification des termes du même ordre, on ne retient que les termes d'ordre supérieur à  $k^{-1}$ .

– Pour Helmholtz :

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 & a_{01} &= 0 \\ a_{11} &= \frac{1}{\rho} & a_{20} &= \frac{i}{4k\rho\rho_t} \\ a_{30} &= -\frac{1}{6\rho^2} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

– Pour Maxwell :

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 & a_{01} &= 0 \\ a_{11} &= \frac{1}{\rho} & a_{20} &= \frac{3i}{4k\rho\rho_t} \\ a_{30} &= -\frac{1}{6\rho^2} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

On a donc l'expression de  $S$  que l'on passe dans les coordonnées du système semi-géodésique.

Une fois obtenue cette formulation, nous devons séparer les cas non allongés et fortement allongés.

– Pour les corps non allongés ou moyennement allongés, (B.38) s'écrit :

$$S(s, \alpha, n) = s + \frac{1}{k} \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} \right) + O\left(k^{-\frac{4}{3}}\right) \quad (\text{B.43})$$

– Pour les corps fortement allongés, le terme contenant le rayon de courbure transverse apparaît dans le terme de phase au même ordre que les deux autres termes. (B.38) s'écrit come suit.

Pour Helmholtz :

$$S(s, \alpha, n) = s + \frac{1}{k} \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{i\sigma^2}{2\kappa} \right) + O\left(k^{-\frac{4}{3}}\right) \quad (\text{B.44})$$

Pour Maxwell :

$$S(s, \alpha, n) = s + \frac{1}{k} \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{3i\sigma^2}{2\kappa} \right) + O\left(k^{-\frac{4}{3}}\right) \quad (\text{B.45})$$

### 3 Calcul du coefficient d'amplitude des rampants

On dispose pour ce calcul de l'équation  $L_0 u_1 + L_1 u_0 = 0$ .

Après multiplication par  $w_1(\xi - \nu)$  et intégration par rapport à la variable  $\nu$  sur le domaine  $[0, \infty]$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_0 u_1 d\nu + \int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_1 u_0 d\nu = 0 \quad (\text{C.46})$$

Le milieu étant considéré comme ayant des pertes, les intégrales ne contiennent que des termes en  $w_1^2$  et en  $w_1 w_1'$  qui sont exponentiellement décroissants. Les intégrales convergent donc.

Suivant l'allongement du corps traité, le calcul du facteur d'amplitude est différent car les opérateurs  $L_1$  sont différents.

### 3.1 Corps non allongés

En intégrant par partie la première moitié de (C.46), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_0 u_1 d\nu &= \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left[ w_1(\xi - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} d\nu \\ &= \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left[ w_1(\xi - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) u_1 \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} L_0 w_1(\xi - \nu) u_1 d\nu \end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \left[ w_1(\xi - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) \right]_0^{+\infty} &= \left[ w_1(\xi - \nu) \left( \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + imZu_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) + imZw_1(\xi - \nu) \right) u_1 \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + imZu_1 = 0 \text{ et } \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) + imZw_1(\xi - \nu) = 0$$

de plus, la présence de pertes nous donne :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} w_1(\xi - \nu) = 0 \text{ et } \lim_{\nu \rightarrow +\infty} w_1'(\xi - \nu) = 0$$

donc

$$\left[ w_1(\xi - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(\xi - \nu) \right]_0^{+\infty} = 0 \quad (\text{C.47})$$

Comme

$$L_0 w_1(\xi - \nu) = 0 \quad (\text{C.48})$$

alors (C.47) et (C.48) nous donnent :

$$\int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_0 u_1 d\nu = 0 \text{ et donc } \int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_1 u_0 d\nu = 0 \quad (\text{C.49})$$

Par le développement de  $L_1 u_0$  suivant :

$$\begin{aligned} L_1 u_0 &= 2i \left[ \frac{\partial A(s) w_1(\xi - \nu)}{\partial s} + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) w_1(\xi - \nu) \right] \\ &= 2i \left[ A'(s) w_1(\xi - \nu) + \frac{\rho'(s)}{3\rho(s)} \nu A(s) w_1'(\xi - \nu) \right. \\ &\quad \left. + \xi'(s) A(s) w_1'(\xi - \nu) + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) w_1(\xi - \nu) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

on a l'expression de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_1 u_0 d\nu &= 2i \left[ \left( A'(s) + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) \right) \int_0^{+\infty} w_1^2(\xi - \nu) d\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho'(s)}{3\rho(s)} A(s) \int_0^{+\infty} \nu w_1'(\xi - \nu) w_1(\xi - \nu) d\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \xi'(s) A(s) w_1^2(\xi) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

En intégrant par parties et en utilisant l'équation d'Airy (III.2.17) , on trouve rapidement :

$$\int_0^{+\infty} w_1^2(\xi - \nu) d\nu = -((w_1')^2(\xi - \nu) - \xi w_1^2(\xi - \nu)) \quad (\text{C.52})$$

$$\int_0^{+\infty} \nu w_1'(\xi - \nu) w_1(\xi - \nu) d\nu = -\frac{1}{2} ((w_1')^2(\xi - \nu) - \xi w_1^2(\xi - \nu)) \quad (\text{C.53})$$

En utilisant (C.49), (C.51), (C.52) et (C.53), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( A'(s) + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) \right) ((w_1')^2(\xi - \nu) - \xi w_1^2(\xi - \nu)) \\ & + \frac{\rho'(s)}{6\rho(s)} A(s) ((w_1')^2(\xi - \nu) - \xi w_1^2(\xi - \nu)) \\ & - \frac{1}{2} \xi'(s) A(s) w_1^2(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

On retrouve alors l'équation de transport :

$$\frac{A'(s)}{A(s)} + \frac{1}{6} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \frac{1}{2} \frac{Q'(s)}{Q(s)} + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (\text{C.55})$$

où  $Q(s) = (\xi(s) + m^2 Z^2) w_1^2(\xi(s))$ .

On obtient finalement :

$$A(s) = A(0) \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.56})$$

### 3.2 Corps 'modérément' allongés

Les premiers développements sont communs avec la partie sur les rampants classiques. Ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_0 u_1 d\nu = 0 \text{ et donc } \int_0^{+\infty} w_1(\xi - \nu) L_1 u_0 d\nu = 0 \quad (\text{C.57})$$

L'opérateur  $L_1$  étant différent, on a :

$$\begin{aligned} L_1 u_0 &= 2i \left[ \frac{\partial A(s) w_1(\xi - \nu)}{\partial s} + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) w_1(\xi - \nu) - \frac{i}{2\kappa_1(s)} \frac{\partial A(s) w_1(\xi - \nu)}{\partial \nu_1} \right] \\ &= 2i \left[ A'(s) w_1(\xi - \nu) + \frac{\rho'(s)}{3\rho(s)} \nu A(s) w_1'(\xi - \nu) + \xi'(s) A(s) w_1'(\xi - \nu) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) w_1(\xi - \nu) - \frac{i}{2\kappa_1(s)} \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial A(s) w_1(\xi - \nu)}{\partial \nu_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

avec  $\nu = \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \nu_1$ .

On multiplie par  $w_1(\xi - \nu)$  et on intègre. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_1 u_0 w_1(\xi - \nu) d\nu &= 2i \left[ \left( \frac{\xi'(s)A(s)}{2} - \frac{i}{4\kappa_1(s)} \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right) A(s) w_1^2(\xi - \nu) \right. \\ &\quad + \left( A'(s) + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) \right) \int_0^\infty w_1^2(\xi - \nu) d\nu \\ &\quad \left. + \frac{\rho'(s)A(s)}{3\rho(s)} \int_0^\infty \nu w_1'(\xi - \nu) w_1(\xi - \nu) d\nu \right] = 0 \quad (\text{C.59}) \end{aligned}$$

d'après les équations (C.52) et (C.53), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_1 u_0 w_1(\xi - \nu) d\nu &= 2i \left[ \left( A'(s) + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial s} A(s) + \frac{\rho'(s)A(s)}{6\rho(s)} \right) (\xi w_1^2(\xi - \nu) - (w_1')^2(\xi - \nu)) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\xi'(s)A(s)}{2} - \frac{i}{4\kappa_1(s)} \left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right) A(s) w_1^2(\xi - \nu) \right] = 0 \quad (\text{C.60}) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{A'(s)}{A(s)} + \frac{h'(s)}{2h(s)} + \frac{\rho'(s)}{6\rho(s)} \frac{\xi'(s)}{2} \frac{Q'(s)}{Q(s)} - \frac{i}{4\kappa_1(s)} \frac{\left( \frac{2}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}}{(\xi + m^2 Z^2)} = 0 \quad (\text{C.61})$$

Ce qui nous donne :

$$A(s) = A(0) \left( \frac{\rho(0)}{\rho(s)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{Q(0)}{Q(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h(0)}{h(s)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i2 - \frac{5}{3} \int_0^s \rho^{-\frac{1}{3}} \kappa_1^{-1} (\xi + m^2 Z^2)^{-1} ds'} \quad (\text{C.62})$$

## 4 Fonctions spéciales

### 4.1 Fonctions d'Airy

Les fonctions spéciales utilisées sont les fonctions d'Airy solutions de l'équation :

$$y''(z) - zy(z) = 0 \quad (\text{D.63})$$

On prend la notation formelle de Fock pour ces fonctions :

$$w_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (\text{D.64})$$

$$v(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z t + \frac{t^3}{3})} dt \quad (\text{D.65})$$

pour  $z \in \mathcal{C}$ .

Afin que ces intégrales perdent leur caractère formel, on effectue une modification du contour d'intégration dans le plan complexe. On recherche d'abord un contour pour  $w_i$ .

Pour la borne supérieure, on remarque que pour  $t$  réel, on a bien une décroissance exponentielle de  $e^{zt - \frac{t^3}{3}}$ .

Pour la borne inférieure, on prend  $t$  sous la forme  $re^{i\theta}$ . La décroissance est alors assurée pour  $Re\left(\frac{t^3}{3}\right) > 0$  et donc  $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$  ( $\frac{2\pi}{3}$ ).

On peut alors prendre les contours d'intégration suivants :

$$\left[\infty e^{-i\frac{\pi}{6}}; \infty e^{\frac{\pi}{6}}\right] \cup \left[\infty e^{\frac{\pi}{2}}; \infty e^{\frac{5\pi}{6}}\right] \cup \left[\infty e^{\frac{7\pi}{6}}; \infty e^{\frac{3\pi}{2}}\right]$$

ce qui nous donne :

$$w_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\infty e^{-\frac{2i\pi}{3}}}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{zt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (\text{D.66})$$

$$w_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\infty e^{\frac{2i\pi}{3}}}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{zt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (\text{D.67})$$

On remarque que

$$\overline{w_1(z)} = w_2(\bar{z}) \text{ et } v(z) = \frac{w_1(z) - w_2(z)}{2i}$$

On a alors :

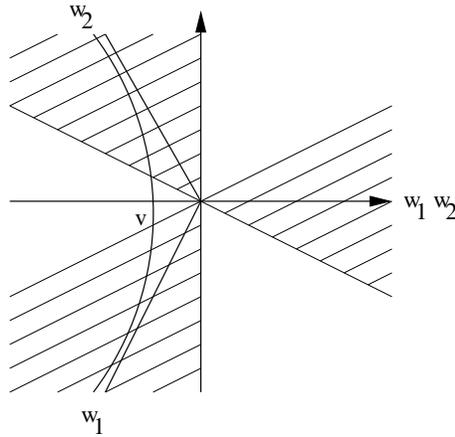


FIG. 80 – Domaines d'évolution des contours

On regarde maintenant les domaines d'intégrabilité des fonctions  $w_1$  et  $w_2$ . Pour que ces fonctions soient intégrables, il faut  $Re(zt) < 0$ .

On prend  $t = re^{i\theta}$  et  $z = se^{i\tau}$

Dans chacune des trois parties, on doit avoir  $Re(zt) < 0$ , donc

$$\frac{\pi}{2} - \theta < \tau < \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Les domaines d'intégrabilité par parties sont donc les suivants :

$$\left[ \infty e^{-i\frac{\pi}{6}}; \infty e^{\frac{\pi}{6}} \right] , \quad \tau \in \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right] \quad (\text{D.68})$$

$$\left[ \infty e^{\frac{\pi}{2}}; \infty e^{\frac{5\pi}{6}} \right] , \quad \tau \in \left[ \frac{5\pi}{3}; \pi \right] \quad (\text{D.69})$$

$$\left[ \infty e^{\frac{7\pi}{6}}; \infty e^{\frac{3\pi}{2}} \right] , \quad \tau \in \left[ \pi; \frac{7\pi}{3} \right] \quad (\text{D.70})$$

Le domaine d'intégrabilité de  $w_1$  est l'intersection de D.68 et de D.70 ce qui nous donne  $\tau \in \left[ \pi; \frac{5\pi}{3} \right]$ .

Le domaine d'intégrabilité de  $w_2$  est l'intersection de D.68 et de D.69 ce qui nous donne  $\tau \in \left[ \frac{\pi}{3}; \pi \right]$ .

Le domaine d'intégrabilité de  $v$  est alors l'intersection de D.69 et de D.70 ce qui nous donne  $\tau \in \left[ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$ .

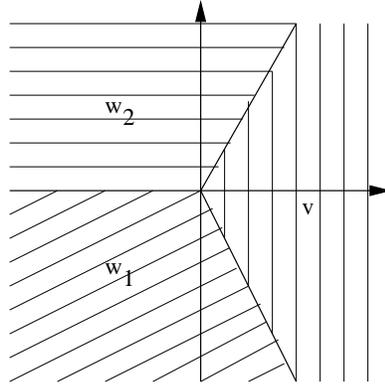


FIG. 81 – Domaines d'intégrabilité des fonctions

## 4.2 Calcul des fonctions de Fock

L'utilisation des fonctions de Fock intervient dans le calcul du champ tangent à la surface dans la zone de Fock (zone proche de la frontière ombre-lumière) et dans la zone d'ombre. Suivant le cas étudié, nous calculons les fonctions de Fock de différentes manières.

### Calcul par méthode des résidus

Dans la zone d'ombre, on calcule l'intégrale en utilisant le théorème des résidus.

**Théorème 4.1 (Théorème des résidus)** *Soit  $f$  une fonction méromorphe dans l'ouvert  $S^2$  (sphère de Riemann) du plan  $\Omega$ .*

*Soit  $A$  l'ensemble des points de  $\Omega$  en lesquels  $f$  a un pôle.*

*Si  $\gamma$  est un chemin fermé dans  $\Omega - A$  tel que  $Ind_\gamma(\alpha) = 0 \forall \alpha \in S^2 - \Omega$ , alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(z)}{h(z)} dz = \sum_{a \in A} Res\left(\frac{g}{h}; a\right) Ind_\gamma(a) = \sum_{a \in A} Res(f; a) Ind_\gamma(a)$$

avec  $Res(f; a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$  le résidu

et  $Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$  pour  $z \in \gamma^*$  l'indice.

On applique ce théorème à l'intégrale de la fonction courant de Fock dans le cas d'étude de rampants (zone d'ombre) et en aucun cas la zone éclairée.

### Calcul par intégration numérique

Dans la zone de Fock, l'intégration par méthode des résidus nécessite un trop grand nombre de pôles. On calcule alors l'intégrale par une méthode numérique. On base le calcul de l'intégrale sur les points de Gauss-Legendre. On a alors :

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=-n}^n w_i f(x_i) \quad (D.71)$$

On définit alors les points  $x_i$  comme les zéros des polynômes de Legendre.

On étudie la convergence de la méthode afin de déterminer au mieux l'intervalle d'intégration et le nombre de points de Gauss.

### Représentation des fonctions

Comparaison en parfaitement électrique conducteur :

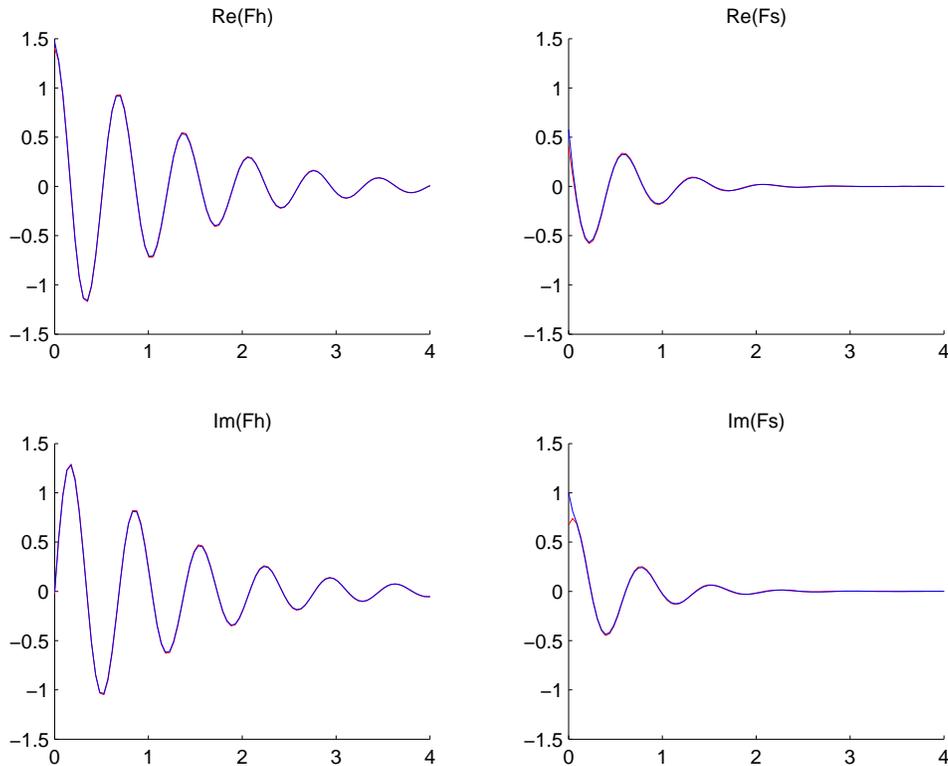


FIG. 82 – Comparaison des méthodes pour  $Z = 0$

On remarque que la méthode des résidus est très performante. Seul le domaine très proche de la frontière ombre lumière nécessite beaucoup de zéros.

Dans les applications numériques, nous utilisons donc la méthode des résidus (beaucoup plus rapide que la méthode d'intégration numérique) pour les points de l'ombre.

## 5 Approximation de l'équation de Heun

Nous ne connaissons pas, aujourd'hui, de solution à l'équation biconfluente réduite de Heun. Dans le cadre de notre étude, on peut approcher la solution de cette équation en utilisant des développements limités dans un domaine proche de la surface.

Nous allons montrer, dans cette partie, trois approximations possibles pour l'équation de Heun dans le cas acoustique. Nous relierons par la suite les approximations dans le cas électromagnétique.

### 5.1 Helmholtz

Nous avons l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu + \kappa} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \nu} + (\nu - \xi) \tilde{u}_0 = 0 \quad (\text{E.72})$$

avec  $\nu = \frac{kn}{m}$ ,  $\kappa = \frac{k\rho t}{m}$  pour  $m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  le paramètre de Fock.

Nous pouvons utiliser différentes approches.

#### Ordre 0 (1)

Considérant que la résolution se fait sur la surface, nous pouvons prendre  $\nu = 0$  dans le terme  $\frac{1}{\nu + \kappa}$ . Cette approximation revient à faire un développement limité de  $\nu$  en 0 à l'ordre 0. On a alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \nu} + (\nu - \xi) \tilde{u}_0 = 0 \quad (\text{E.73})$$

En faisant le changement de fonction

$$\tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 e^{-\frac{\nu}{2\kappa}}$$

on a :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi - \frac{1}{4\kappa^2} \right) \tilde{u}_0 = 0 \quad (\text{E.74})$$

qui, en prenant  $\zeta = \xi + \frac{1}{4\kappa^2}$  est une équation d'Airy.

En poursuivant les développements comme dans (2.1), on a :

$$u_0(\sigma, 0, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - \frac{v' \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - imZ_\kappa v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right)}{w_1' \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - imZ_\kappa w_1 \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right)} w_1 \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) \right] d\xi \quad (\text{E.75})$$

Une telle approximation, bien que d'ordre 0 modifie la solution dans le sens espéré. Un développement à un ordre supérieur nous amène sur une équation différentielle pour laquelle nous ne connaissons pas de solution analytique pour le moment.

Le coefficient sur lequel nous avons fait le développement limité est situé devant le terme de dérivée première. Son influence est alors assez forte. Dans la méthode suivante, nous effectuons encore un développement à l'ordre 0 mais seulement après avoir fait le changement de fonction, ce qui nous permet d'apporter une moins forte perturbation à l'équation.

## Ordre 0 (2)

On commence par faire le changement de fonction

$$\tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 (\nu + \kappa)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui nous amène :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{E.76})$$

Nous effectuons alors un développement limité à l'ordre 0 en 0 de  $(1 + \frac{\nu}{\kappa})^{-2}$ , ce qui nous amène :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{E.77})$$

qui, en prenant  $\zeta = \xi - \frac{1}{4\kappa^2}$  est une équation d'Airy.

En poursuivant les développements comme dans (2.1), on a :

$$u_0(\sigma, 0, \kappa) = \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - \frac{v' \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - imZ_\kappa v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_\kappa w_1(\zeta)} w_1(\zeta) \right] d\xi \quad (\text{E.78})$$

Après le changement de fonction, on peut aussi effectuer un développement limité à l'ordre 1.

La fonction solution étant recherchée en  $\nu = 0$ , le développement limité à l'ordre 0 est suffisant. C'est la méthode que nous utilisons dans (2).

## Ordre 1

On part de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} \left( \nu - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \left( 1 + \frac{\nu}{\kappa} \right)^{-2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{E.79})$$

Nous effectuons alors un développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $(1 + \frac{\nu}{\kappa})^{-2}$ , ce qui nous amène :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \nu^2} \left( \nu \left( 1 - \frac{1}{2\kappa^3} \right) - \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{E.80})$$

Par le changement de variables :

$$\begin{aligned} \mu &= \nu \left( 1 - \frac{1}{2\kappa^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \zeta &= \frac{\xi - \frac{1}{4\kappa^2}}{\left( 1 - \frac{1}{2\kappa^3} \right)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \mu^2} - (\mu - \zeta) \tilde{v}_0 = 0 \quad (\text{E.81})$$

Cette méthode nous amène :

$$\begin{aligned} u_0(\sigma, 0, \kappa) &= \frac{e^{\frac{1}{12\kappa^3}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma - \frac{i}{2\kappa})\xi} \left[ v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{v' \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right) - imZ_\kappa v \left( \xi + \frac{1}{4\kappa^2} \right)}{w_1'(\zeta) - imZ_\kappa w_1(\zeta)} w_1(\zeta) \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{E.82})$$

Le résultat obtenu est le même que pour l'approximation d'ordre 0.

Le développement limité à l'ordre 1 peut alors s'avérer utile dans le cadre d'étude de la diffraction pour  $\nu \approx 0$  non nul.

## 6 Modes de Propagation des Rampants

L'expression (III.2.27) ne pouvant pas être utilisée comme telle, on approche l'intégrale en utilisant le théorème des résidus.

Dans ce but, on recherche la famille des pôles  $\{\xi\}_n$  de la fonction sous le signe intégral dépendant de l'impédance.

- Pour  $Z = 0$ , la recherche de zéros se ramène au problème de Neumann.
- Pour  $Z = \infty$ , la recherche de zéros se ramène au problème de Dirichlet.

Cette famille est l'ensemble des modes de propagation des ondes rampantes électriques et magnétiques.

### 6.1 Corps "classiques" (fonction d'Airy)

On recherche les zéros de  $\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)$  avec  $w_1$  la fonction de Fock-Airy ( cf. annexe 4) et  $Z$  pouvant être l'impédance électrique ou magnétique.

La fonction d'Airy et sa dérivée admettant une infinité de zéros, nous obtenons une infinité de solutions. Ces solutions étant situées dans le premier et le quatrième quadrant du plan complexe, nous ne prendrons en compte que celles situées dans le premier quadrant c'est-à-dire de parties réelle et imaginaire positives afin d'obtenir la décroissance due à la condition de radiation.

Les modes de propagation de rampants se calculent à partir des zéros de  $w_1$  et  $\dot{w}_1$ . On a :

$$\nu_n = k\rho - e^{i\frac{\pi}{3}}\xi_n m \quad \text{avec } m = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{F.83})$$

On peut tracer un graphe donnant les premiers modes de propagation de rampants en faisant varier le module et l'argument de  $Z$ , le 'mode' de propagation spatial se situant en  $k\rho = (20, 0)$  ( fig. 83). Ce graphe correspond à un graphe de [10] donnant les constantes de propagation pour  $k\rho = 20$  que nous retrouvons rapidement par la méthode proposée précédemment.

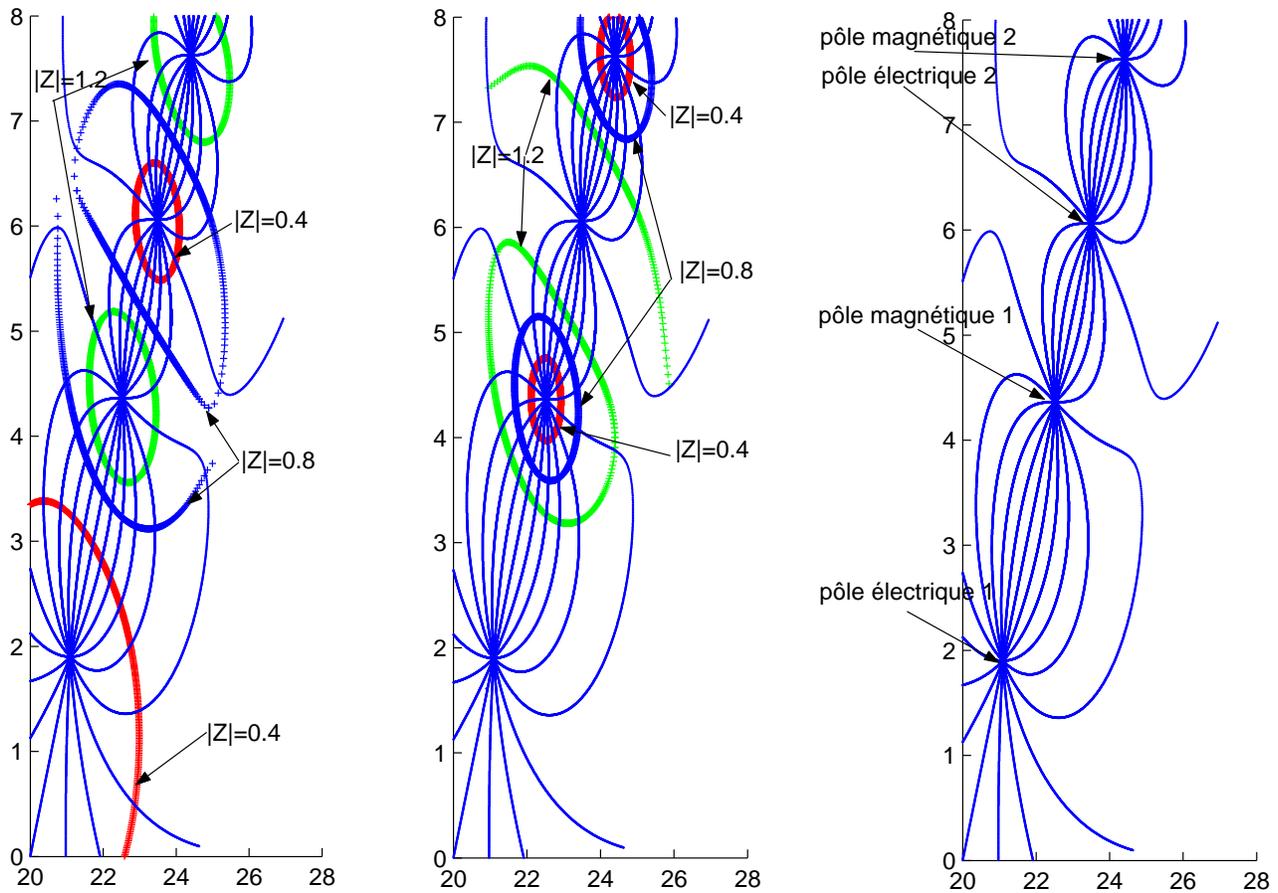


FIG. 83 – Modes de propagation des rampants en corps non allongés

Dans la pratique, on utilise uniquement le premier mode de propagation. En effet, étant donné les valeurs des zéros, leur contribution diminue de ce fait exponentiellement.

## 6.2 Corps allongés

Dans le cas des corps allongés, comme nous l'avons vu dans la partie ( cf. part IV), l'influence du rayon de courbure transverse agit comme une impédance complexe négative. La recherche des modes de propagation se fait donc de la même façon que précédemment avec une impédance particulière.

- Dans le cas du conducteur parfait, l'influence de  $\kappa$  modifie fortement les modes de propagation des rampants ( fig. 84).

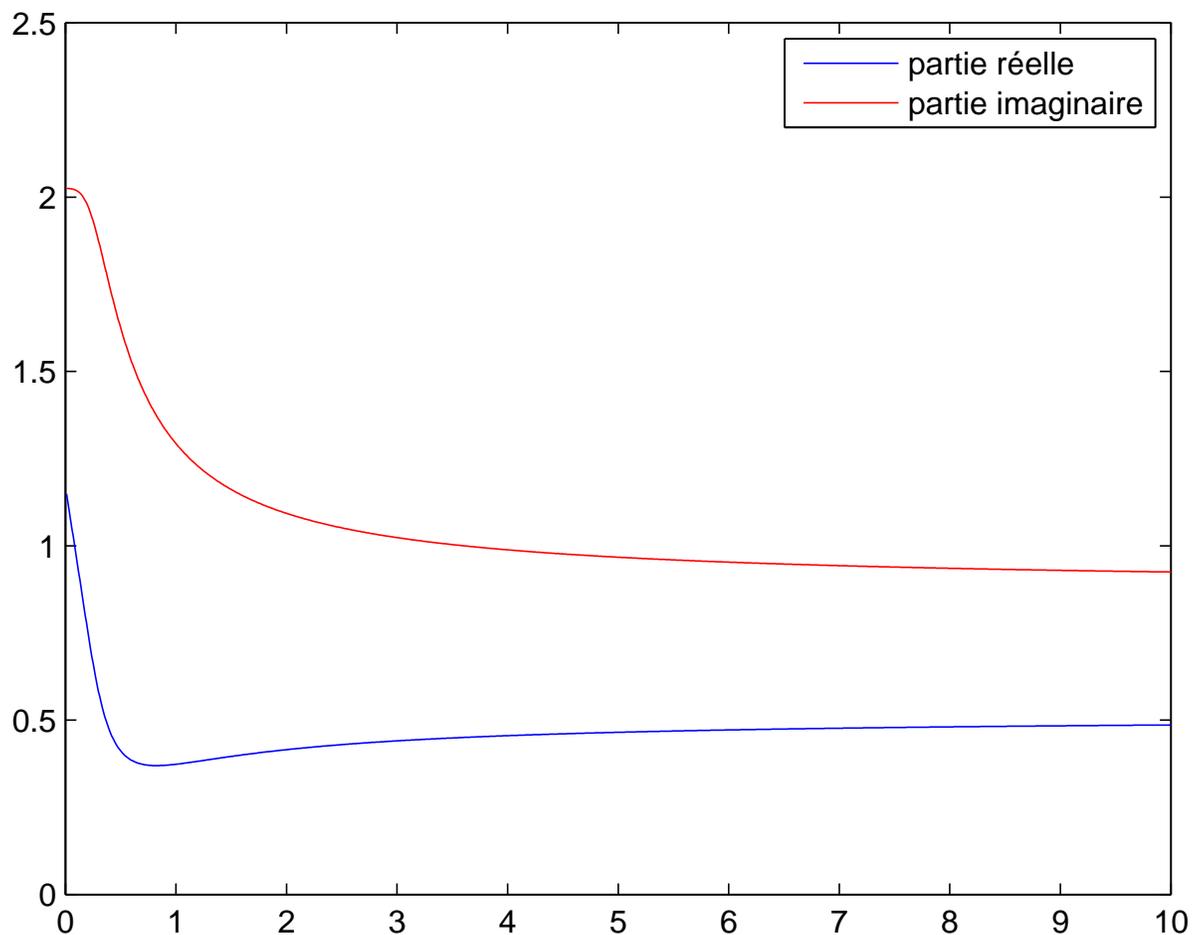


FIG. 84 – Modes de propagation des rampants en fonction de  $\kappa$  pour  $Z = 0$

– Pour un matériau à impédance, l'influence de  $\kappa$  est différente suivant la valeur de l'impédance.

En effet, pour  $Z = 0$ , le mode se stabilise vers  $\kappa = 10$ , alors que pour une impédance de 0.1, le mode de propagation électrique se stabilise vers  $\kappa = 7$  ( fig. 85).

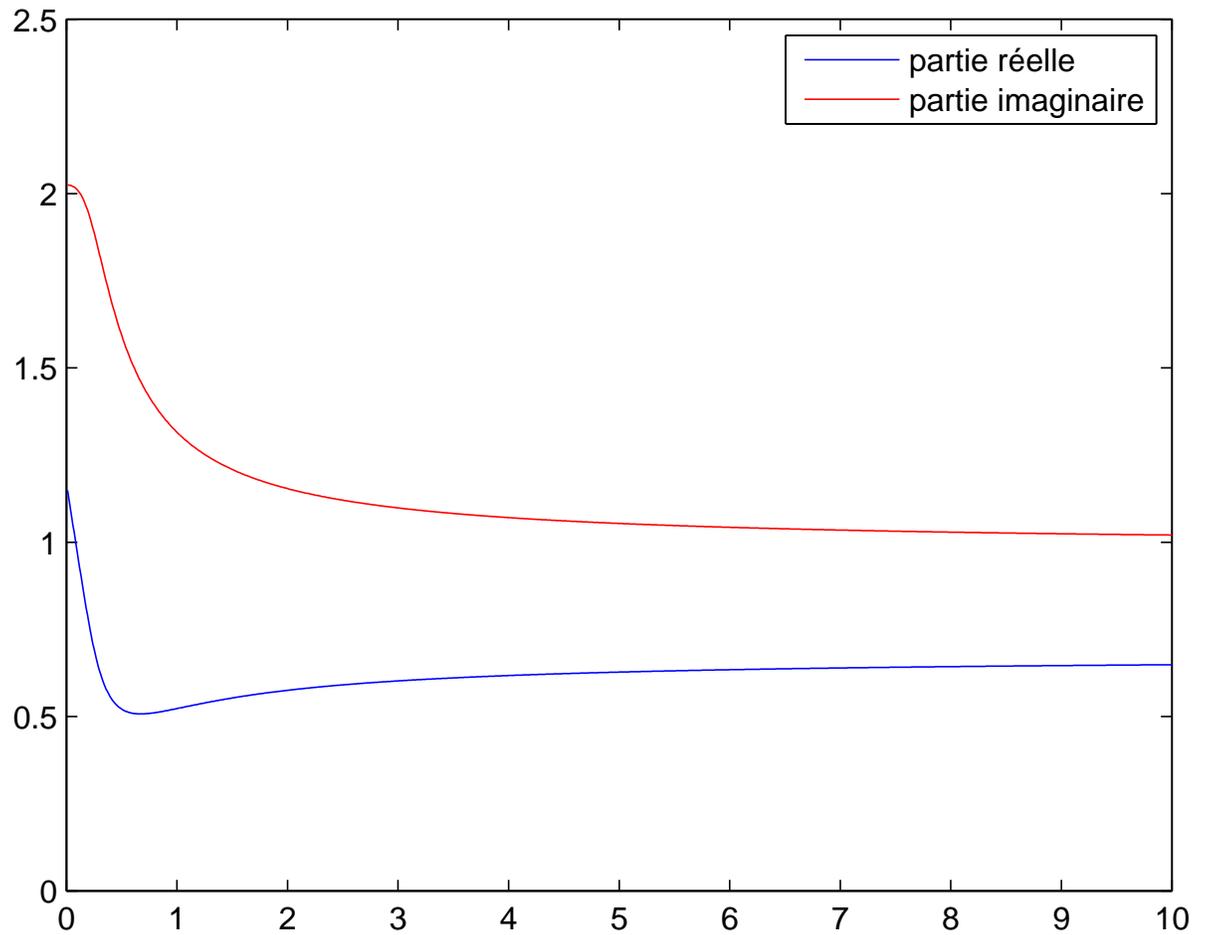


FIG. 85 – Modes de propagation des rampants en fonction de  $\kappa$  pour  $Z = 0.1$

- Pour une impédance de 1, le mode de propagation électrique se stabilise vers  $\kappa = 4$  (fig. 86).

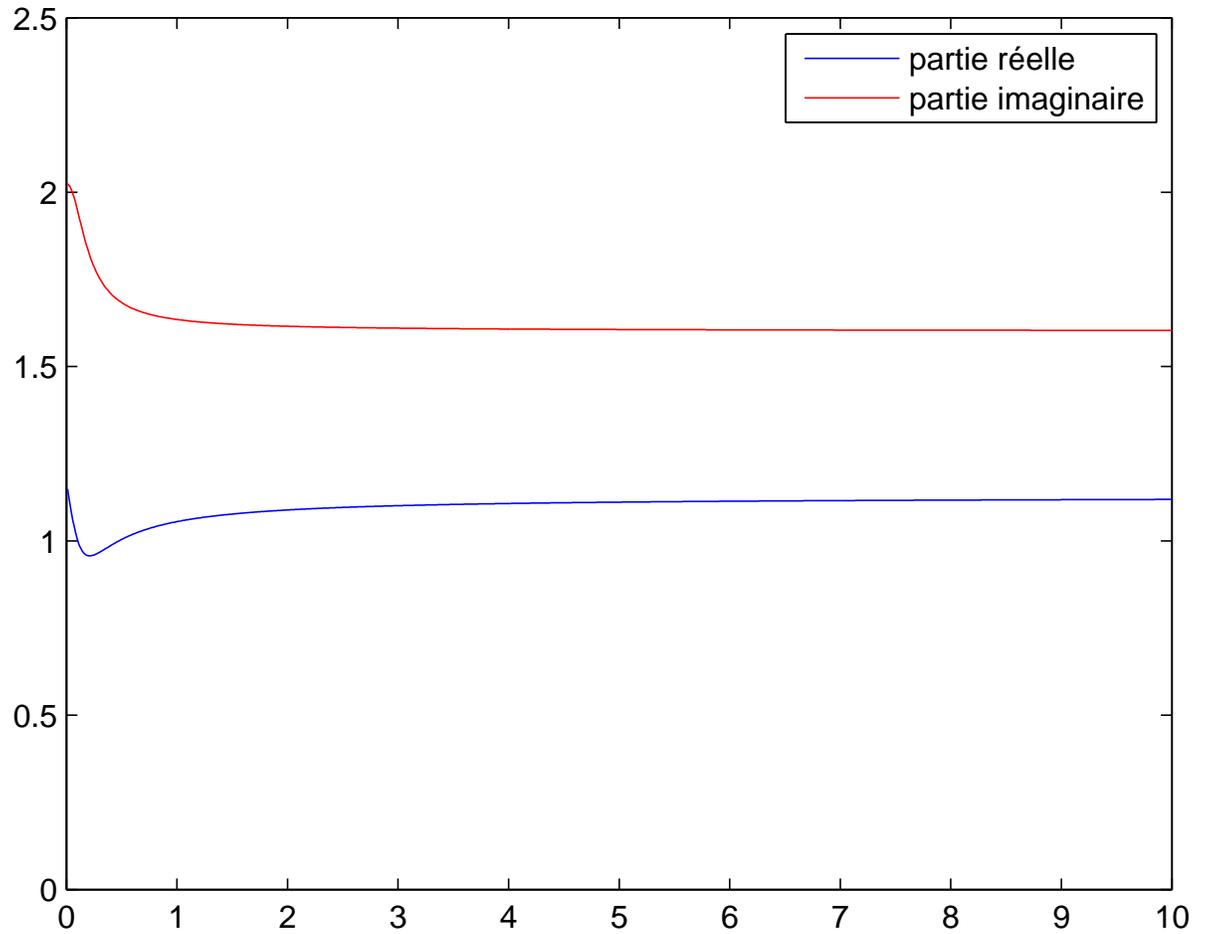


FIG. 86 – Modes de propagation des rampants en fonction de  $\kappa$  pour  $Z = 1$

- Pour une impédance de 10, le mode de propagation électrique se stabilise vers  $\kappa = 0.5$  ( fig. 87).

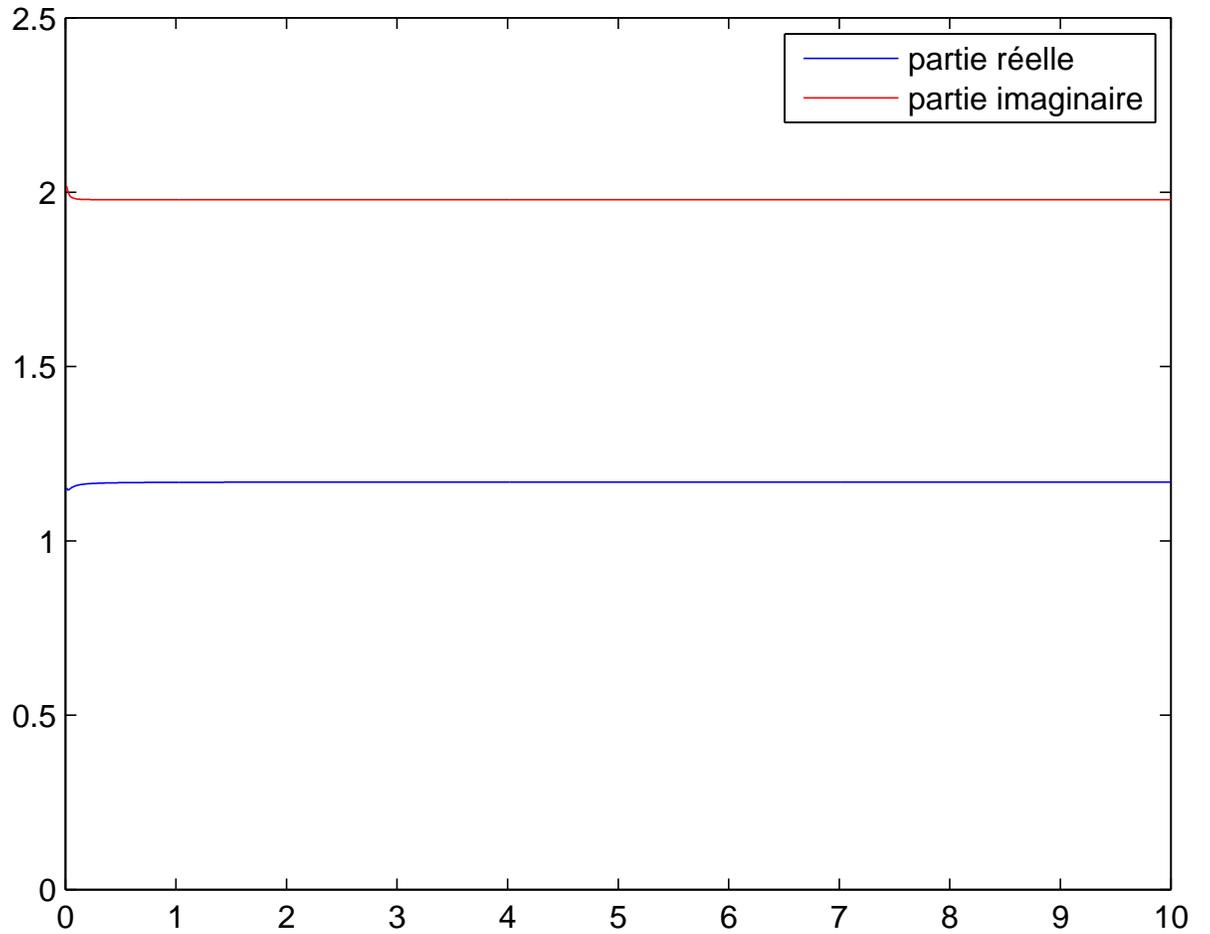


FIG. 87 – Modes de propagation des rampants en fonction de  $\kappa$  pour  $Z = 10$

# Table des figures

1	Courants électriques sur Falcon 20 . . . . .	1
2	Définition du domaine par méthode d'Optique Géométrique . . .	11
3	Définition du domaine par Théorie Géométrique de la Diffraction	11
4	Principe de Fermat appliqué à une arête . . . . .	12
5	Principe de Fermat appliqué à un objet . . . . .	12
6	Chemin . . . . .	12
7	Réflexion . . . . .	14
8	Emission d'un rayon rampant par un rayon d'espace . . . . .	14
9	Emission d'un rayon d'espace par un rayon rampant . . . . .	15
10	Diffraction par une arête (cône de Keller) . . . . .	15
11	Rampant émis par une arête . . . . .	16
12	Diffraction par une pointe . . . . .	16
13	Rampants émis par une pointe . . . . .	17
14	Rayons se propageant le long d'une arête . . . . .	17
15	Modélisation des champs . . . . .	18
16	Maillages de front d'onde . . . . .	19
17	Interpolation des champs . . . . .	19
18	Maillage d'optique géométrique . . . . .	20
19	Vecteurs d'onde réfléchis et transmis . . . . .	20
20	Interactions sur le trièdre . . . . .	21
21	Maillage de la partie éclairée . . . . .	22
22	Maillage sur toute la sphère . . . . .	23
23	Principe d'équivalence en surface . . . . .	23
24	Quantités sur la surface . . . . .	25
25	Quantités de la formule de Stokes . . . . .	26
26	Quantités de la formule de Gordon . . . . .	27
27	Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à $10kHz$ . . . . .	29
28	Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à $10kHz$ (avec projection) . . . . .	30
29	Domaine de control du nœud $P$ . . . . .	31
30	Pression lointaine en $dB.m^2$ . . . . .	32
31	Conservation du flux . . . . .	38
32	Courbures du front d'onde . . . . .	38
33	Zone éclairée, Zone d'ombre, Limite Ombre-Lumière . . . . .	40
34	Réflexion . . . . .	41
35	Transmission . . . . .	42

36	Description des modes montants et descendants . . . . .	43
37	Cylindre recouvert éclairé par une onde plane . . . . .	44
38	Cas de calcul acoustique sur un ensemble corps, dérive et empen- nage d'un Falcon à $3kHz$ . . . . .	47
39	Comparaison avec un résultat issu d'une méthode intégrale $3D$ . . . . .	48
40	Cas de calcul sur dièdre . . . . .	49
41	Comparaison dièdre monostatique avec balayage fréquentiel . . . . .	49
42	Cas de calcul sur trièdre . . . . .	50
43	Comparaison trièdre monostatique avec balayage angulaire à $10GHz$ . . . . .	51
44	Problème de multi-réflexion dans un matériau multi-domaines . . . . .	52
45	Problème équivalent en approximation couche mince . . . . .	52
46	Itérations successives . . . . .	53
47	Comparaison des résultats . . . . .	54
48	Champ de rayons . . . . .	57
49	Système de coordonnées $(s, \alpha, n)$ . . . . .	59
50	Dimensions du domaine de Fock . . . . .	61
51	Racines de $\dot{w}_1(\xi) - imZw_1(\xi)$ . . . . .	68
52	Ecartement du pinceau géodésique . . . . .	70
53	Rampants électrique et magnétique . . . . .	71
54	Zones de raccord avec le domaine de Fock . . . . .	76
55	Lien entre Fock et zone éclairée . . . . .	77
56	Comparaison entre l'Optique Géométrique et la formulation de rampants en parfaitement électrique conducteur . . . . .	81
57	Comparaison entre l'Optique Géométrique et la formulation de rampants en parfaitement absorbant . . . . .	82
58	Zones de formulations différentes . . . . .	84
59	Potentiel de double couche de la sphère acoustique parfaitement réfléchissante à $10kHz$ . . . . .	86
60	Comparaison des potentiels de double couche . . . . .	87
61	Cas de calcul sur une sphère . . . . .	88
62	Module des courants électriques pour la sphère PEC . . . . .	88
63	Comparaison des composantes des courants électriques . . . . .	89
64	Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale $3D$ sur la sphère PEC . . . . .	90
65	Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale $3D$ sur la sphère $Z = 0.1$ . . . . .	91
66	Comparaison de la SER entre la méthode asymptotique et une méthode intégrale $3D$ sur la sphère $Z = 1$ . . . . .	92
67	Evolution de la partie réelle, imaginaire et du module des fonctions $g(\sigma)$ et $f(\sigma)$ en fonction de $\kappa$ . . . . .	98
68	Fonction courant de Fock modifiée en fonction de $\kappa$ . . . . .	107
69	Fonction courant de Fock modifiée en fonction de $\kappa$ . . . . .	108
70	Modes de propagation des rampants en fonction de $\kappa$ . . . . .	117
71	Cas de validation de corps allongé . . . . .	118
72	Composante $x$ des courants électriques . . . . .	118

73	Valeurs de la composante $x$ des courants électriques suivant une géodésique . . . . .	119
74	Composante $y$ des courants électriques . . . . .	120
75	Valeurs de la composante $y$ des courants électriques suivant une géodésique . . . . .	121
76	Module des courants électriques . . . . .	121
77	Valeurs du module des courants électriques suivant une géodésique	122
78	Divergence des géodésiques . . . . .	133
79	Définition de la torsion . . . . .	134
80	Domaines d'évolution des contours . . . . .	142
81	Domaines d'intégrabilité des fonctions . . . . .	143
82	Comparaison des méthodes pour $Z = 0$ . . . . .	144
83	Modes de propagation des rampants en corps non allongés . . . .	149
84	Modes de propagation des rampants en fonction de $\kappa$ pour $Z = 0$	150
85	Modes de propagation des rampants en fonction de $\kappa$ pour $Z = 0.1$	151
86	Modes de propagation des rampants en fonction de $\kappa$ pour $Z = 1$	152
87	Modes de propagation des rampants en fonction de $\kappa$ pour $Z = 10$	153

# Bibliographie

- [1] I. V. Andronov, "*Waves on the surface of strongly stretched bodies*" J. of Communic. Technol. & Electronics vol. 43 (1998)
- [2] I. V. Andronov & D. Bouche, "*Calcul du second terme de l'exposant linéïque de propagation des ondes rampantes par une méthode de couche limite*" Ann. Telecomm. vol. 49 PP. 199-204 (1994)
- [3] I. V. Andronov & D. Bouche, "*Asymptotics of creeping waves on a strongly prolate body*" Ann. Telecomm. vol. 49 PP. 205-210 (1994)
- [4] I. V. Andronov & D. Bouche, "*Creeping waves on strongly prolate bodies*" Proc. of the 1995 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, pp. 404-406 (St Petersburg, May 1995)
- [5] I. V. Andronov, D. Bouche & F. Molinet, "*Asymptotic & Hybrid Methods in Electromagnetics*" Institution of Electrical Engineers (IEE Electromagnetic Waves Series; 48) (2005)
- [6] M. Artola M. Cessenat, "*Diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle à perméabilité élevée*", CRAS, t314, série 1, pp. 249-254, 1992
- [7] V. M. Babitch & V. S. Buldyrev, "*Short-Wavelength Diffraction Theory*" Springer-Verlag (1991)
- [8] V. M. Babitch & N. Y. Kirpitsnikova, "*The boundary-layer method in diffraction problems*" Springer-Verlag (1979)
- [9] S. Belmehdi, J.-P. Chehab, "*Integral representation of the solutions to Heun's biconfluent equation*", Abstract and applied Analysis 2004 P. 295-306
- [10] D. Bouche, F. Molinet & R. Mittra, "*Asymptotic Methods in Electromagnetics*" Springer-Verlag (1991)
- [11] R. N. Buchal & J. B. Keller, "*Boundary layer problems in diffraction theory*" Comm. Pure Appl. Math. vol. 8(3) (1960)
- [12] L. Chan, E. S. Cheb-Terrab, "*Non-Liouvilian Solutions for Second Order Linear ODEs*", ISSAC'04, July 4-7, 2004, Santander, Spain
- [13] E. S. Cheb-Terrab, "*A connection between Abel and  $pFq$  hypergéometric differential equations*", Pre-print European Journal of Applied Mathematics 2004
- [14] E. S. Cheb-Terrab, "*Solutions for the general, confluent and biconfluent Heun equations and their connection with Abel equations*", J. of Physics, October, 2004
- [15] T. Cluchat, "*Etude de validité de la condition d'impédance*", Ph.D Dissertation, Université de Bordeaux, 1992

- [16] V. Fock, "*Electromagnetic wave propagation and diffraction problem*" US Air Force Foreign Technology Division, Doc. N FTD-HC-23-259-71 (1971)
- [17] N. Gurappa, P. K. Panigrahi, "*On polynomial solutions of Heun equation*", Pre-Print
- [18] S. Hong, "*Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surfaces of variable curvature*" J. Math. Physics vol. 8 PP. 1223-1232 (1967)
- [19] J. B. Keller, "*A Geometrical Theory of Diffraction*" in Calculus of Variations and its Applications, McGraw-Hill, pp. 27-52 (1958)
- [20] J. B. Keller, "*Geometrical Theory of Diffraction*" J. Opt. Soc. Am. (1962)
- [21] J. B. Keller, "*Diffraction by a Convex Cylinder*" IRE Trans. Antennas and Propagation vol. AP-24 (1956)
- [22] H. T. Kim, N. Wang, "*UTD Solution for Electromagnetic scattering by a circular cylinder with a thin coating*", IEEE Trans. Ant. Prop, Vol AP-37, pp. 1463-1472, Nov 1989
- [23] M. Kline, "*An asymptotic solution of Maxwell's equations*" Commun. Pure Appl. Math. (1951)
- [24] O. Lafitte "*Calcul microlocal de la solution de l'équation des ondes dans la zone d'ombre d'un obstacle strictement convexe de frontière analytique*" C. R. Acad. Sci. Paris, T. 315, Série I, p. 153-157, (1992)
- [25] O. Lafitte "*Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow*" Asymptotic Analysis 13 p. 319-359 (1996)
- [26] O. Lafitte & G. Lebeau, "*Equations de Maxwell et opérateur d'impédance sur le bord d'un obstacle convexe absorbant*" C. R. Acad. Sci. Paris, T. 316, Série I, p. 1177-1182, (1993)
- [27] M. A. Leontovitch, "*Investigation of radio wave propagation*", Partie II, Izd. AN SSSR. Moscou, 1948
- [28] M. A. Lialinov, "*Diffraction of a high frequency electromagnetic field on a smooth convex surface in a nonuniform medium*" Radiofizika pp. 704-711 (1979)
- [29] R. S. Maier, "*The 192 solutions of the Heun equation*", Pre-Print of Mathematics of Computation
- [30] Y. Revalor, "*Méthodes de rayons en aéroacoustique*", Thèse à paraître
- [31] A. D. Roche, E. S. Cheb-Terrab, "*An Abel ODE class generalizing known integrable classes*", Pre-print for European Journal of Applied Mathematics, 2000
- [32] A. Ronveaux, "*Heun's Differential Equation*", Oxford Science Publications, 1995
- [33] S. M. Rytov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 10, 180 1940
- [34] S. Y. Slavyanov, W. Lay, "*Special Functions, A unified theory based on singularities*", Oxford Science Publication 2000
- [35] S. Y. Slavyanov, W. Lay & A. Seeger, "*The classification of Heun's equation and its special and confluent cases*" in A. Ronveaux, Ed. *Heun equation*, Oxford University Press (1995)
- [36] A. Sommerfeld & J. Runge, "*Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik*" Ann. Phys. vol. 35 (1911)

- [37] P. Y. Ufimtsev, "*Method of edge waves in the physical theory of diffraction*" Pergamon Press, 1965