



**HAL**  
open science

# Contribution à la représentation et à l'identification des systèmes avec nonlinéarités nondifférentiables

Laleh Ravanbod Shirazi

► **To cite this version:**

Laleh Ravanbod Shirazi. Contribution à la représentation et à l'identification des systèmes avec nonlinéarités nondifférentiables. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2002. Français. NNT: . tel-00198349

**HAL Id: tel-00198349**

**<https://theses.hal.science/tel-00198349>**

Submitted on 17 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Institut National Polytechnique de Grenoble**

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'INPG**

**Spécialité : Automatique - Productique**

préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG)  
dans le cadre de l'Ecole Doctorale Electronique, Electrotechnique, Automatique,  
Télécommunications, Signal (EEATS)

présentée et soutenue publiquement

par

**Laleh RAVANBOD SHIRAZI**

le 12 juillet 2002

**Contribution à la représentation et à l'identification  
des systèmes avec nonlinéarités nondifférentiables**

Directeur de thèse : Alina Besançon-Voda

**Jury**

M.	Guy Bornard	Président
M.	Zhang Qinghua	Rapporteur
M.	Maxime Gautier	Rapporteur
M.	Jean-Luc Thomas	Examineur
M.	Alireza Karimi	Examineur
Mme.	Alina Besançon-Voda	Directeur



**A la mémoire de ma mère**



## Remerciements

Je tiens à remercier Madame Alina Besançon-Voda, la directrice de ma thèse, pour sa patience et ses conseils précieux tout au long de ce travail.

Je remercie également Monsieur Guy Bornard pour avoir accepté de présider ce jury.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Qinghua Zhang et Monsieur Maxime Gautier qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques m'ont beaucoup aidé à améliorer la qualité du manuscrit.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Jean-Luc Thomas et Monsieur Alireza Karimi pour avoir accepté de participer à mon jury.

A l'ensemble des membres du Laboratoire d'Automatique de Grenoble, mes sincères remerciements pour leurs encouragements et leur soutien. Je remercie en particulier Messieurs Daniel Rey, Bernard Brogliato et Alphonse Franco.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Patrick Latteux de la compagnie ALSTOM pour ses réponses précieuses à mes nombreuses questions techniques et pour avoir lu et corrigé une partie du manuscrit.

La présence de mon père pendant la préparation et la soutenance de ma thèse m'a fourni un grand soutien moral. Je le remercie pour ses aides et le temps qu'il m'a consacré.

Je remercie enfin mon mari Shahram pour ses aides, son soutien et son amour, et ma fille Shabnam dont la naissance au début de cette thèse m'a offert une source infinie de joie et motivation. Je suis contente d'avoir toute une vie pour compenser les peines qu'ils ont subies pendant ma thèse.



## AVANT PROPOS

Ce travail présenté dans cette thèse a donné lieu à un certain nombre de publications:

### Revues

- Friction Identification using the Karnopp Model, applied to an Electro-pneumatique Actuator.  
L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda.  
Soumis à *Journal of Systems and Control Engineering*.
- Friction Compensation using the Karnopp Model, applied to an Electro-pneumatique Actuator.  
L. Ravanbod-Shirazi, A. Besançon-Voda et P. Halva.  
Soumis à *Journal of Systems and Control Engineering*.

### Congrès

- Identification of the Karnopp Model Parameters: a Two-Step Approach.  
L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda.  
Présenté dans *IEE Control 2000*, September 2000, Cambridge, U.K.
- Stiction Friction Identification of Karnopp Model using Describing Function.  
L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda.  
Présenté dans *5<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, July 2001, Saint-Petersburg, Russia.
- Robust Friction Compensation Based on Karnopp Model.  
L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda.  
Présenté dans *European Control Conference*, September 2001, Porto, Portugal.
- Backlash Identification: a Two-Step Approach.  
L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda.  
Accepté par *15<sup>th</sup> IFAC World Congress*, July 2002, Barcelona, Spain.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction . . . . .	11
2.2	Modélisation . . . . .	11
2.2.1	Modèles de connaissance (ou phénoménologiques) . . . . .	12
2.2.2	Modèles de représentation (ou comportementaux) . . . . .	13
2.3	Identifiabilité . . . . .	13
2.3.1	Définitions de l'identifiabilité structurelle selon Walter et Pronzato . . . . .	15
2.4	Jeu d'engrenage et ses modèles . . . . .	17
2.4.1	Modèle (géométrique) du jeu . . . . .	18
2.4.2	Modèle compliant du jeu . . . . .	20
2.5	Frottement et ses modèles . . . . .	22
2.5.1	Modèles statiques de frottement . . . . .	22
2.5.2	Modèles dynamiques de frottement . . . . .	25
2.6	Conclusion . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Identification du jeu d'engrenage</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Présentation du modèle du système . . . . .	33
3.3	Identifiabilité du modèle de zone morte du jeu . . . . .	36
3.3.1	Identifiabilité, données acquises dans plusieurs régimes . . . . .	37
3.4	Identification du jeu . . . . .	40
3.4.1	Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations . . . . .	41
3.4.1.1	Estimation des instants de commutations . . . . .	43
3.4.2	Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés . . . . .	44
3.5	Résultats de simulation . . . . .	45
3.5.1	Identification du jeu dans le cas des paramètres linéaires connus . . . . .	46

3.5.2	Identification du jeu dans le cas des paramètres linéaires inconnus . . . . .	47
3.5.2.1	Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations . . . . .	47
3.5.2.2	Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés . . . . .	49
3.6	Généralisation de la méthode d'identification du jeu à un système avec trois axes . . . . .	51
3.6.1	Présentation du modèle du système . . . . .	51
3.6.2	Identification du jeu . . . . .	52
3.6.2.1	Procédure d'identification des paramètres de la dynamique linéaires . . . . .	54
3.6.2.2	Reconstruction de vitesse de la dernière inertie avant l'engrenage . . . . .	54
3.6.3	Résultats de simulation avec l'entrée échelon . . . . .	57
3.6.3.1	Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations . . . . .	57
3.6.3.2	Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés . . . . .	59
3.6.4	Résultats de simulation de l'estimation du jeu en utilisant une entrée créneaux . . . . .	60
3.6.4.1	Procédure d'identification du jeu en utilisant les instants de commutations . . . . .	60
3.6.4.2	Résultat de simulation . . . . .	60
3.7	Conclusion . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Identification du frottement et la compensation fixe</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Pourquoi le modèle de Karnopp? . . . . .	67
4.3	Présentation détaillée du modèle de Karnopp . . . . .	67
4.3.1	Modèle de Karnopp symétrique . . . . .	67
4.3.2	Modèle de Karnopp asymétrique . . . . .	69
4.4	Identification des paramètres du modèle de Karnopp . . . . .	69
4.4.1	Approche de transformée de Laplace pour la vérification de l'identifiabilité . . . . .	71
4.4.2	Identifiabilité structurelle du modèle de Karnopp . . . . .	72
4.4.3	Identification du modèle de Karnopp symétrique . . . . .	75
4.4.4	Identification du modèle de Karnopp asymétrique . . . . .	76
4.4.5	Identification du paramètre du frottement de collage basée sur la fonction caractéristique . . . . .	77
4.5	Compensation fixe basée sur le modèle de Karnopp . . . . .	78
4.5.1	Actionneur électrique . . . . .	79
4.5.2	Actionneur électro-pneumatique . . . . .	81

4.6	Résultats . . . . .	84
4.6.1	Résultats de simulations . . . . .	85
4.6.2	Résultats expérimentaux . . . . .	86
4.6.2.1	Identification du modèle de Karnopp pour l'actionneur électro-pneumatique . . . . .	86
4.6.2.2	Compensation fixe pour l'actionneur électro-pneumatique . . . . .	89
4.7	Conclusion . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Modèles de régression par morceaux</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Deux classes de modèles contenant une nonlinéarité nondifférentiable . . . . .	94
5.2.1	Régression par morceaux . . . . .	94
5.2.2	Présentation des deux classes . . . . .	94
5.2.2.1	Classe 1: changement continu de régime . . . . .	95
5.2.2.2	Classe 2: changement discontinu de régime . . . . .	98
5.3	Identifiabilité structurelle de la classe 1 . . . . .	100
5.3.1	Vérification de l'identifiabilité structurelle par la méthode de séries de Taylor [83] . . . . .	101
5.3.2	Identifiabilité, les données acquises dans plusieurs régimes . . . . .	102
5.3.3	Identifiabilité, les données acquises dans un seul régime . . . . .	104
5.4	Conclusion . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Modèles de complémentarité</b>	<b>109</b>
6.1	Introduction . . . . .	109
6.2	Modèles hybrides et de complémentarité . . . . .	111
6.3	Modèle de complémentarité de la classe 1 . . . . .	113
6.4	Lissage du modèle de complémentarité . . . . .	115
6.4.1	Lissage des transitions entre des régimes . . . . .	115
6.4.2	Lissage des variables de complémentarité . . . . .	116
6.5	Résultats de simulation . . . . .	118
6.5.1	Comportement du modèle de complémentarité lisse du modèle de zone morte . . . . .	118
6.5.2	Comportement du modèle de complémentarité lisse du modèle 1 . . . . .	119
6.6	Conclusion . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>123</b>

<b>A</b>	<b>Identifiabilité, données acquises dans un seul régime</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Preuve des lemmes 3.1 et 3.2</b>	<b>139</b>
<b>C</b>	<b>Preuve des relations (3.24) et (3.25)</b>	<b>145</b>
<b>D</b>	<b>Estimation de la constante de temps de la charge</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>Identification des dynamiques linéaires du système de la section 3.6</b>	<b>149</b>
	E.1 Introduction . . . . .	149
	E.2 Calcul de la fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur . .	150
	E.3 Estimation de la fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur	152
	E.4 Calcul des paramètres linéaires . . . . .	154
	E.5 Expérience optimale . . . . .	156
	E.6 Résultats . . . . .	158
	E.7 Commentaire sur les résultats . . . . .	163
<b>F</b>	<b>Actionneur électro-pneumatique</b>	<b>169</b>
<b>G</b>	<b>Friction Identification using the Karnopp model, applied to an electro-pneumatic actuator</b>	<b>173</b>
<b>H</b>	<b>Friction Compensation using the Karnopp model, applied to an electro-pneumatic actuator</b>	<b>201</b>
<b>I</b>	<b>Stiction Friction Identification of Karnopp model using Describing Function</b>	<b>221</b>
<b>J</b>	<b>Robust Friction Compensation based on Karnopp model</b>	<b>231</b>

## NOTATIONS GENERALES

### Typographie

Minuscule ordinaire	scalaire.
Minuscule en gras	vecteur colonne (les vecteurs ligne s'écriront comme des vecteurs colonne transposés)
Majuscule en gras	matrice.
$v_i$	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{v}$ .
$\mathbf{M}(s)$ , $\mathbf{v}(s)$ et $v(s)$	transformées de Laplace de $\mathbf{M}(t)$ , $\mathbf{v}(t)$ et $v(t)$ respectivement.
$\mathbf{M}^{-1}$	inverse de la matrice $\mathbf{M}$ .
$\mathbf{M}^T$ , $\mathbf{v}^T$	transposée de la matrice $\mathbf{M}$ et du vecteur $\mathbf{v}$ .
$\det(\mathbf{M})$	déterminant de $\mathbf{M}$ .
$\text{rang}(\mathbf{M})$	rang de la matrice $\mathbf{M}$ .

### Symboles

$\mathbf{A}$	matrice d'état.
$\mathbf{B}$ et $\mathbf{b}$	matrice et vecteur de commande.
$\mathbf{C}$ et $\mathbf{c}$	matrice et vecteur d'observation.
$\mathbf{d}$	vecteur traduisant l'effet direct du paramètre sur l'état.
$\mathbf{x}$ , $\mathbf{x}_m$	vecteur d'état du système et du modèle respectivement.
$\mathbf{y}$ , $\mathbf{y}_m$	vecteur des sorties du système et du modèle respectivement.
$n_x$	bruit de mesure du signal $x$ .
$x_f$	signal $x$ filtré.
$T_s$	période d'échantillonnage.
$q^{-1}$	opérateur retard unique.
$A(q^{-1}, \mathbf{p})$ , $B(q^{-1}, \mathbf{p})$	polynômes en $q^{-1}$ , de paramètre $\mathbf{p}$ .
$\mathbf{p}$	vecteur des paramètres.
$\mathbf{p}^*$	vrai valeur du vecteur des paramètres.
$\hat{\mathbf{p}}$	estimé du vecteur des paramètres.
$\sigma_p$	écart-type du paramètre $p$ .
$\mathcal{D}_v$	domaine de variation de variable $v$ .
$j(\cdot)$	critère à optimiser.
$\arg_{\mathcal{D}_p} \min(j(\mathbf{p}))$	valeur de $\mathbf{p}$ qui minimise $j(\cdot)$ .

$E_t(\cdot)$	moyenne temporelle.
$\mathbf{e}$ ou $e$	erreur.
<i>FIR</i>	<i>Finite Impulse Response</i> .
$\mathbf{H}(s, \mathbf{p})$	matrice de transfert d'un modèle de paramètres $\mathbf{p}$ .
$M(\cdot)$	structure du modèle.
$M(\mathbf{p})$	modèle de structure $M(\cdot)$ et de paramètres $\mathbf{p}$ .
$\delta(t)$	distribution de Dirac.
$1(t)$	fonction valant 0 si $t < 0$ et 1 si $t \geq 0$ .
$T_i$	durée du test d'identification

- **Modèles *LE* et *LP*** [83]:

Nous désignons par *LE* un modèle dont la structure est linéaire par rapport aux entrées, *i.e.*:

$$\forall \lambda, \mu \in R, \forall t \in R^+, \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}, \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2) = \lambda \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}, \mathbf{u}_1) + \mu \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}, \mathbf{u}_2), \quad (0.1)$$

et par *LP* un modèle dont la structure est linéaire par rapport aux paramètres, *i.e.*:

$$\forall \lambda, \mu \in R, \forall t \in R^+, \mathbf{y}_m(t, \lambda \mathbf{p}_1 + \mu \mathbf{p}_2, \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{u}) + \mu \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}_2, \mathbf{u}), \quad (0.2)$$

- **Critère quadratique** [83]:

Un critère

$$j(\mathbf{p}) = \mathbf{e}^T(\mathbf{p})\mathbf{Q}\mathbf{e}(\mathbf{p}).$$

où  $\mathbf{e}$  est soit l'erreur de sortie,  $\mathbf{e}_s(\mathbf{p}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\mathbf{p})$ , soit l'erreur d'entrée,  $\mathbf{e}_u(\mathbf{p}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_m(\mathbf{p})$ . L'erreur de sortie est trouvée en utilisant un modèle parallèle et l'erreur d'entrée en utilisant un modèle série (ou inverse)[83]. La matrice de pondération  $\mathbf{Q}$  est symétrique, définie non négative, qui est supposée souvent la matrice identité  $\mathbf{I}$ .

# Chapitre 1

## Introduction

Notre objectif principal dans ce travail consiste à identifier le jeu d'engrenage dans un système d'entraînement électro-mécanique, et le frottement dans un actionneur électro-pneumatique et un actionneur électrique. Les modèles identifiés peuvent être ensuite utilisés pour la compensation.

Le jeu d'engrenage et le frottement sont deux phénomènes nonlinéaires qui perturbent le fonctionnement des systèmes mécaniques asservis en produisant des oscillations, des erreurs statiques, et de la dissipation de puissance. De différents modèles, basés sur la connaissance des lois physiques gouvernant ces phénomènes, ont été proposés que l'on peut classer en deux classes principales: modèles dynamiques et modèles statiques.

Les modèles dynamiques prennent en compte la dynamique interne de ces phénomènes et fournissent une représentation plus précise de leurs comportements. Ils sont pourtant compliqués et l'identifiabilité structurelle de leurs paramètres n'est pas facile à étudier, surtout lorsque les entrées et les sorties du modèle ne sont pas directement disponibles. L'utilisation des modèles statiques, plus simple et plus facile à identifier, peut être plus raisonnable, même s'ils sont moins précis.

Dans ce travail, deux modèles statiques, le modèle de zone morte pour le jeu d'engrenage et le modèle de Karnopp pour le frottement, sont utilisés. Ces modèles fournissent un bon compromis entre la simplicité et la précision. Ils contiennent tous les deux une nonlinéarité



nondifférentiable et peuvent être décrits par le modèle de régression par morceaux suivant:

$$f(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{cases} f_1(x, \boldsymbol{\theta}_1), & x \leq \gamma_1 \\ f_2(x, \boldsymbol{\theta}_2), & \gamma_1 < x \leq \gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_D(x, \boldsymbol{\theta}_D), & \gamma_{D-1} < x \end{cases}$$

Dans le système d'entraînement électro-mécanique contenant le jeu que nous étudions, le modèle de zone morte est entouré par les modèles dynamiques linéaires avec les paramètres inconnus, reliés par le retour d'état. Par conséquent, les méthodes proposées dans la littérature, supposant la disponibilité de l'entrée ou de la sortie du modèle, ne peuvent pas être utilisées. Nous proposons donc une nouvelle méthode en deux phases basée sur la connaissance du système étudié. La première phase consiste à étudier le problème de l'identifiabilité structurelle du modèle de zone morte dans notre système. Cette étude nous permet de planifier un test d'identification de sorte que certaines conditions suffisantes pour l'identifiabilité soient satisfaites. En deuxième phase, cette planification est utilisée pour identifier le modèle de zone morte.

L'identification du modèle de Karnopp de frottement a été déjà effectuée en utilisant un algorithme d'optimisation nonlinéaire [14]. Cette méthode ne se sert pas de toutes les informations *a priori* disponibles sur le modèle. Elle risque aussi de s'arrêter sur les minima locaux. Nous proposons une nouvelle approche qui bénéficie au maximum des connaissances *a priori* du comportement du modèle aux différentes vitesses dans la procédure d'identification. L'interprétation physique du modèle de Karnopp asymétrique nous permet d'identifier les paramètres du modèle progressivement et en trois étapes. Ainsi, la plupart des paramètres sont identifiés en première étape par une méthode basée sur la régression linéaire, deux autres en deuxième étape par une méthode de seuillage, et finalement les deux derniers par une méthode d'optimisation nonlinéaire. Cette dernière étape peut être effectuée en minimisant un critère de moindres carrés temporel. Cependant, nous proposons aussi une nouvelle méthode, basée sur l'utilisation de la fonction de description. Nous prouvons également l'identifiabilité structurelle du modèle de Karnopp.

Le modèle de Karnopp identifié sera ensuite utilisé pour la compensation du frottement, en ajoutant l'opposé de la sortie du modèle au signal de commande. Les erreurs de modélisation et la présence d'une dynamique non négligeable entre le signal de commande et le point d'action du frottement peuvent pourtant entraîner la sur-compensation ou la sous-compensation du frottement, et produire ainsi des oscillations et des erreurs statiques.

Pour faire face à ce problème, nous proposons une conception des contrôleurs robustes pour l'actionneur électrique, et une correction des erreurs statiques pour l'actionneur électropneumatique.

On peut constater que la particularité des méthodes proposées dans ce travail est l'utilisation des connaissances *a priori* sur les systèmes étudiés et les lois physiques qui les gouvernent. Ces connaissances nous aident à utiliser les modèles plus simples et plus fiables par rapport aux modèles boîte noire qui ne se servent pas de ces informations *a priori*. Elles nous sont aussi utiles dans l'étude de l'identifiabilité et dans la planification des tests d'identification. Cependant, l'inconvénient majeur de ces approches est qu'elles ne sont pas facilement généralisables aux autres systèmes. Dans la dernière partie de ce mémoire, nous essayons de généraliser les idées développées dans l'étude des systèmes particuliers traités, et les travaux existants sur les systèmes de complémentarité, aux familles plus larges des modèles contenant une nonlinéarité nondifférentiable. Ainsi, nous présentons d'abord des représentations de régression par morceaux pour le modèle de zone morte du jeu et le modèle de Karnopp de frottement. La première régression est continue avec une entrée et une sortie, tandis que la deuxième est une combinaison de deux régressions par morceaux, l'une continue et l'autre discontinue, avec deux entrées et une sortie. En utilisant ces représentations, nous définissons deux classes. La classe 1 est la classe des modèles avec une nonlinéarité nondifférentiable décrite par la régression par morceaux continue à laquelle, le modèle du système d'entraînement électro-mécanique appartient. La classe 2 est la classe des modèles avec la nonlinéarité nondifférentiable décrite par un modèle de régression composé de deux régressions par morceaux, l'une continue et l'autre discontinue, contenant le modèle de Karnopp. L'identifiabilité de la classe 1 est étudiée en généralisant la méthode proposée pour étudier l'identifiabilité du modèle de zone morte.

Enfin, nous dérivons le modèle de complémentarité de la classe 1, et nous proposons une méthode de lissage qui peut faciliter l'estimation des paramètres du modèle, surtout lors de l'utilisation des algorithmes d'optimisation qui utilisent la dérivée analytique de la fonction de coût. Le modèle de complémentarité peut être utilisé pour étudier les problèmes d'observabilité, de contrôlabilité, de stabilité, etc, de la classe 1. Ceci n'est pourtant pas l'objectif de ce travail.

## Organisation du manuscrit

Le chapitre 2 introduit les notions qui nous serviront dans les chapitres suivants: les concepts de modélisation et d'identifiabilité, et les deux phénomènes étudiés dans ce mémoire, le frottement et le jeu, ainsi que leurs modèles.

Le chapitre 3 est consacré à l'identification du jeu d'engrenage dans un système d'entraînement électro-mécanique, l'étude de l'identifiabilité, la planification d'expérience garantissant l'identifiabilité structurelle, et les résultats de simulation.

Dans le chapitre 4, l'identification du modèle de Karnopp de frottement et la compensation basée sur ce modèle sont considérées dans deux types d'actionneur: électrique et électro-pneumatique. L'identifiabilité structurelle du modèle est démontrée et les résultats de simulation de l'actionneur électrique et les résultats expérimentaux en temps réel avec l'actionneur électro-pneumatique sont présentés.

Dans le chapitre 5, nous nous servons du concept de régression par morceaux pour proposer deux classes de modèles contenant une nonlinéarité nondifférentiable, auxquelles les modèles particuliers étudiés dans les chapitres 3 et 4 appartiennent. L'identifiabilité structurelle de l'une des deux classes est étudiée en utilisant des idées développées dans les chapitres précédents.

Cette classe est également le sujet du chapitre 6, où nous dérivons sa représentation de complémentarité. Nous proposons ensuite une méthode pour le lissage de la représentation de complémentarité. Les résultats de simulation sont également présentés.

Ce mémoire se termine avec une conclusion générale, dans le chapitre 7, rappelant les principaux apports de cette thèse et présentant quelques perspectives.

# Chapitre 2

## Préliminaires

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste à introduire les notions qui nous serviront dans les chapitres suivants et à présenter les deux phénomènes étudiés dans ce mémoire: le frottement et le jeu.

Ainsi, le concept de modélisation est présenté dans la section 2.2. Dans la section 2.3, nous nous intéressons à la notion d'identifiabilité et ses différentes définitions dans la littérature. Les sections 2.4 et 2.5 sont respectivement consacrées au jeu et ses modèles et au frottement et ses modèles.

### 2.2 Modélisation

En science appliquée, on s'intéresse très souvent à trouver une relation entre un ensemble de variables observées dans un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T_i]$ . En général, certaines de ces variables, appelées variables dépendantes ou variables de sortie ou *réponses*, notées par  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , sont d'un intérêt particulier. Les autres variables  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , appelées variables indépendantes ou variables d'entrée ou *régresseurs* sont utilisées pour prédire ou expliquer le comportement de  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

On suppose souvent que la liaison entre  $y_i, i = 1, \dots, m$  et  $u_i, i = 1, \dots, r$  est exprimée par des relations mathématiques  $f_i, i = 1, \dots, m$  dont les formes sont *a priori* connues, à l'exception de quelques constantes inconnues appelées *paramètres*,  $p_1, \dots, p_p$ . Cette liaison peut être exprimée sous la forme vectorielle suivante:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \tag{2.1}$$

où  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$ ,  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_m]^T$ ,  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_p]^T$  et  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^T$ . On pourrait imaginer que le vecteur des régresseurs contient les entrées du système  $\mathbf{u}$  et les états du

ystème  $\mathbf{x}$ . Dans ce cas:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0, t, \mathbf{p}) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{f}$  est une relation fonctionnelle qui décrit une application entrée-sortie initialisée.

Cette relation reste toujours approximative, d'une part à cause de l'influence des variables non maîtrisées et plus ou moins inconnues, et d'autre part en raison de l'erreur de mesure. La fonctionnelle  $\mathbf{f}$ , selon la réquisition de la connaissance *a priori* sur le système ayant généré les données, peut être soit un modèle de connaissance [55] (appelé aussi modèle phénoménologique [82]) soit un modèle de représentation [55] (appelé également modèle comportemental [82]). Une fois la structure du modèle choisi, on peut l'identifier en estimant les paramètres  $\mathbf{p}$ , par l'optimisation d'un critère d'optimalité, qui peut consister à mesurer la ressemblance entre les sorties observées et les sorties du modèle [83, 46].

### 2.2.1 Modèles de connaissance (ou phénoménologiques)

Les modèles de connaissance sont construits à l'aide des lois physiques. Ils se prêtent donc à la prise en compte des informations *a priori* disponibles et au contrôle *a posteriori* des ordres de grandeur des paramètres obtenus, car ces paramètres ont un sens physique.

Les modèles de connaissance sont potentiellement riches, ils contiennent toute information nécessaire sur les régimes statiques et dynamiques du système. Autrement dit, ils sont bien adaptés à une simulation détaillée en vue d'une prédiction de comportement à long terme. Ils sont néanmoins lourds, chers et difficiles à établir et par conséquent souvent inutilisables pour calculer une commande.

Un modèle de connaissance d'un système complet pourrait être [25]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] \\ \mathbf{y}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{p}] \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{p}) \\ \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t, \mathbf{p}), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}] \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$  et  $\mathbf{y} \in R^m$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie.  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  sont deux fonctions vectorielles paramétrisées par  $\mathbf{p}$  qui définissent les relations (connues) entre la sortie  $\mathbf{y}$ , l'entrée  $\mathbf{u}$ , et l'état  $\mathbf{x}$ . Notez que dans la représentation ci-dessus, les fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  jouent le rôle de la fonction  $\mathbf{f}$  dans (2.2). Enfin,  $\boldsymbol{\psi}$  représente toutes les contraintes supplémentaires d'égalité et d'inégalité algébriques et connues *a priori*, reliant  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$ .

### 2.2.2 Modèles de représentation (ou comportementaux)

Ces modèles, appelés aussi *modèles boîte noire*, reproduisent un comportement observé, sans requérir aucune connaissance *a priori* sur le système. Il n'est même pas nécessaire de savoir ce que représente la sortie ni en quelle unité elle est exprimée.

Ils sont faciles à établir, limités, mais efficaces dans un domaine de fonctionnement. Le rendement de l'opération (= capacité de prédire le comportement / coût de la modélisation), est peut être bien meilleur que celui d'un modèle de connaissance.

Les modèles ARX, ARMAX et ARAX sont quelques exemples de modèles de représentation linéaires par rapports aux entrées (LE). En ce qui concerne les modèles de représentation non linéaires, on peut citer les réseaux de neurones, les ondelettes et les modèles logique floue. Pour plus d'informations voir [46, 61].

Le principal point faible des modèles de représentation est qu'ils ne tiennent pas compte des informations *a priori* disponibles sur le système. On peut remédier à ce problème [55] en réduisant le système en plusieurs sous-systèmes, en choisissant les paramètres à identifier sur une base physique, et en utilisant, par exemple, un modèle de connaissance statique comme base et un modèle de représentation local pour décrire la dynamique. Les modèles ainsi obtenus sont parfois appelés *modèles boîte grise*. Les modèles Wiener et Hammerstein en sont des exemples [46].

Un autre inconvénient des modèles de représentation est la difficulté du choix de la complexité du modèle. Par exemple, la détermination du nombre de couches cachées et du nombre d'unités dans chaque couche cachée d'un réseau de neurones pour un problème donné est loin d'être facile.

Le choix entre un modèle de connaissance et un modèle de représentation dépend de la connaissance *a priori* disponible sur le système et de la facilité de l'estimation des paramètres. L'estimation des coefficients d'une équation aux dérivées partielles d'ordre convenable, décrivant un modèle de connaissance, peut être plus simple que l'estimation de nombreux paramètres d'un modèle de représentation.

## 2.3 Identifiabilité

L'une des questions fondamentales de l'identification est si les paramètres  $\mathbf{p}$  peuvent être estimés de façon unique à partir d'un ensemble d'observations expérimentales ou non. Cette question est l'essence de ce qu'on appelle *identifiabilité* [43]. Si une estimation unique des paramètres ne peut pas être obtenue, alors soit le modèle mathématique,  $\mathbf{f}$ , soit l'expérience elle-même doit être modifié.

Le problème de l'identifiabilité a été simultanément, et un peu différemment, développé dans plusieurs disciplines de mathématiques appliquées dont la physique [7], l'économie [56], la biologie [5, 57], et le contrôle de systèmes [77, 30], chacune ayant son propre ensemble de définitions et terminologies.

Certains considèrent l'identifiabilité dans un cadre probabiliste, parce que l'identification des paramètres est intrinsèquement un problème d'estimation. Par exemple, Rothenberg [56] et Bonder [10] étudient l'identifiabilité des modèles économétriques, et définissent l'identifiabilité comme l'unicité de la fonction de répartition au voisinage d'une valeur particulière du vecteur des paramètres aléatoires (identifiabilité locale). Les références [1, 44, 65, 78] traitent l'identifiabilité des systèmes dynamiques stochastiques et définissent l'identifiabilité comme l'existence d'un estimateur convergeant en probabilité (ou en moindres carrés) vers les vraies valeurs des paramètres. Cette dernière définition est donc plus forte que la simple unicité de l'estimation des paramètres [77].

D'autres chercheurs ont proposé un cadre déterministe pour l'identifiabilité. Ce cadre a été largement utilisé dans l'identification des systèmes biologiques [7, 5, 57]. La caractéristique principale de ces systèmes est le nombre limité des portes d'entrée/sortie, de types des entrées, et des échantillons de la base de données, en raison des problèmes techniques. Par conséquent, l'estimation des paramètres de tels systèmes est difficile et nécessite l'utilisation de toutes les informations sur la structure de système, pour la modélisation et pour l'étude d'identifiabilité des paramètres. Ces informations comprennent les relations entre les paramètres et entre les paramètres et les variables d'état, les contraintes internes du système, *etc.* Elles sont exprimées par un modèle déterministe de variables d'état.

Cette modélisation est aussi importante dans d'autres branches de sciences physiques qu'en biologie [36], car elle fournit une approche formelle et exhaustive pour étudier l'identifiabilité des paramètres du système à partir de son modèle expérimental et pour planifier des expériences [26, 15].

Néanmoins, lorsque parmi les informations structurelles du système, seul son ordre est connu (et si un modèle linéaire du système est utilisé), il est plus convenable d'utiliser le modèle canonique du système, qui s'écrit d'une façon unique, pour étudier l'identifiabilité des paramètres.

Afin d'éviter la complexité du cadre probabiliste de l'identifiabilité, nous ne considérons ici que le cadre déterministe. De différentes définitions de l'identifiabilité dans ce cadre ont été proposées: la non-identifiabilité au sens du système [25], l'identifiabilité au sens

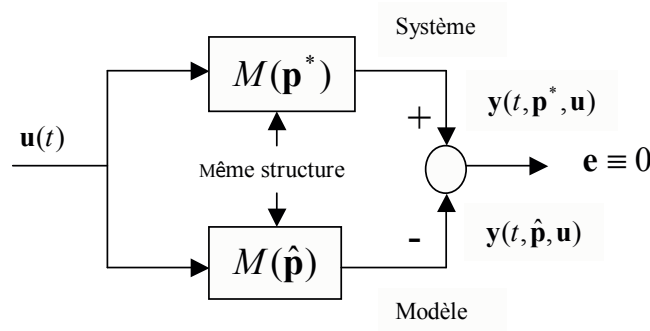


Figure 2.1: Cadre idéalisé des études d'identifiabilité structurelle

du système [25], l'identifiabilité au sens des paramètres [25], l'identifiabilité globale [75], l'identifiabilité locale [56], l'identifiabilité au sens des moindres carrés [5], l'identifiabilité au sens de la discernabilité [30], et l'identifiabilité au sens de la sensibilité [54]. Il est montré [25] que parmi les définitions mentionnées ci-dessus, seules les trois premières sont indépendantes.

Walter et Pronzato [83] proposent une autre catégorie de définitions de l'identifiabilité que nous détaillerons dans ce qui suit.

### 2.3.1 Définitions de l'identifiabilité structurelle selon Walter et Pronzato

On suppose que le système est complet (voir (2.3)). D'après Walter et Pronzato, l'identifiabilité est structurelle si elle est vraie pour *presque toute* valeur des paramètres, et éventuellement fausse sur un sous-espace de mesure nulle de l'espace paramétrique (pour plus d'information voir [82, 83]). Soit un processus et une structure de modèles de type parallèle, dont on souhaite estimer les paramètres suivant le schéma décrit par la figure 2.1. Dans cette figure,  $M(\mathbf{p})$  représente une application entrée-sortie. L'application entrée-sortie du système de paramètre  $\mathbf{p}^*$  sera notée par  $M(\mathbf{p}^*)$  et celle du modèle de paramètre  $\hat{\mathbf{p}}$  sera représentée par  $M(\hat{\mathbf{p}})$ .

Avant de commencer les procédures de collecte des données et d'estimation, on se demande si les mesures envisagées contiendront assez d'information pour l'estimation de  $\mathbf{p}$ . Dans le cadre idéalisé, où

1. le système et le modèle ont des structures identiques (pas d'erreur de caractérisation),
2. les données sont sans bruit,
3. l'entrée appliquée,  $\mathbf{u}$ , et les instants de mesure peuvent être choisis librement,



il est toujours possible (par exemple en choisissant les paramètres du modèle identiques à ceux du processus, *i.e.*  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ ) de régler les paramètres du modèle de telle sorte qu'il ait un comportement entrée-sortie identique à celui du processus pour tout temps et toute entrée, ce que nous noterons  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$ .

Dans ce cadre, les définitions suivantes sont présentées par Walter et Pronzato:

- **Identifiabilité structurelle globale:**

Le paramètre  $p_i$  est dit *structurellement globalement identifiable* (s.g.i.) si pour presque tout  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  représente l'ensemble paramétrique admissible *a priori*,

$$M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2) \Rightarrow p_{i_1} = p_{i_2} .$$

La structure  $M(\cdot)$  est dite s.g.i. si tous ses paramètres  $p_i$  le sont. Dans les définitions qui suivent, nous allons remplacer l'égalité des applications  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$  par l'égalité des sorties  $\mathbf{y}(\mathbf{p}_1, \cdot) = \mathbf{y}(\mathbf{p}_2, \cdot)$ , étant donné que toutes les autres conditions sont identiques pour 2 structures (condition initiale  $\mathbf{x}_0$ , instant initial  $t_0$ , entrée  $\mathbf{u}$  et durée d'identification  $T_i$ ).

La structure  $M(\mathbf{p})$  est donc s.g.i., si pour n'importe quelle entrée  $\mathbf{u}(t)$ , l'égalité des sorties  $\mathbf{y}(\mathbf{p}_1, \cdot) = \mathbf{y}(\mathbf{p}_2, \cdot)$  ne distingue pas les paramètres ( $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ ):

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{x}_0, \forall \mathbf{u}, \forall t_0, \forall T_i, \forall t \in [t_0, t_0 + T_i], \mathbf{y}_m(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{u}) = \mathbf{y}_m(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{u})) \\ \Rightarrow (\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Inversement, pour tout couple de  $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$ , il existe une entrée  $\mathbf{u}(t)$  qui distingue les  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2) \Rightarrow \\ (\exists \mathbf{x}_0, \exists \mathbf{u}, \exists t_0, \exists T_i, \exists t \in [t_0, t_0 + T_i], \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{u}) \neq \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{u})) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La définition (2.5) peut être utilisée pour planifier l'expérience permettant l'identifiabilité structurelle. Cette approche est approuvée par Eric Walter.

- **Identifiabilité structurelle locale:**

Le paramètre  $p_i$  est dit *structurellement localement identifiable* (s.l.i.) si pour presque tout  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\mathbf{p}_2)$  tel que

$$\mathbf{p}_1 \in \mathcal{V}(\mathbf{p}_2) \text{ et } M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2) \Rightarrow p_{i_1} = p_{i_2} .$$

L'identifiabilité locale est donc une condition nécessaire pour l'identifiabilité globale. La structure  $M(\cdot)$  est dite s.l.i. si tous ses paramètres le sont. Comme dans le cas de

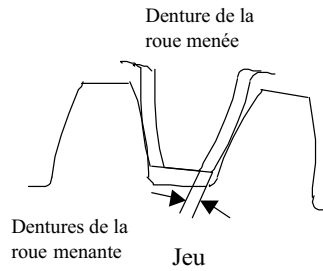


Figure 2.2: Position des dentures en présence du jeu

l'identifiabilité globale, on peut remplacer  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$  par  $\mathbf{y}(\mathbf{p}_1, \cdot) = \mathbf{y}(\mathbf{p}_2, \cdot)$ , où par souci de simplicité on n'a pas écrit la forme complète (2.2) comme c'était le cas pour (2.4) et (2.5).

- **Non identifiabilité structurelle :**

Le paramètre  $p_i$  est dit *structurellement non identifiable* (s.n.i.) si pour presque tout  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$ , il existe une infinité non dénombrable de valeurs de  $p_{i_1}$  et  $p_{i_2}$  telles que  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$ . La structure  $M(\cdot)$  est dite s.n.i si elle comporte au moins un paramètre s.n.i. Comme dans les deux autres cas, on peut remplacer  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$  par  $\mathbf{y}(\mathbf{p}_1, \cdot) = \mathbf{y}(\mathbf{p}_2, \cdot)$ . On a simplifié aussi la notation de  $\mathbf{y}$ .

Dans la thèse, nous allons utiliser la définition (2.5) de l'identifiabilité structurelle globale. En pratique, il faut donc choisir les entrées, les conditions initiales et la durée du test pour garantir l'identifiabilité .

C'est le rôle du protocole d'expérimentation d'établir ces éléments. La notion d'entrée type excitation persistante fait partie de cette catégorie d'éléments garantissant l'identifiabilité du point de vue expérimentale. Pour plus de détails sur l'excitation persistants et la richesse de l'information, surtout dans le cas des modèles linéaires en entrée, voire le livre Ljung [46].

## 2.4 Jeu d'engrenage et ses modèles

L'usage des engrenages dans les systèmes de transmission de puissance et dans les systèmes d'asservissement de position est devenu omniprésent. Tout défaut dans la transmission par engrenage perturbe considérablement la performance du système.

Le jeu est le défaut le plus commun dans les systèmes contenant des engrenages. L'amplitude du jeu est définie comme la plus petite distance entre les surfaces des dentures de la roue

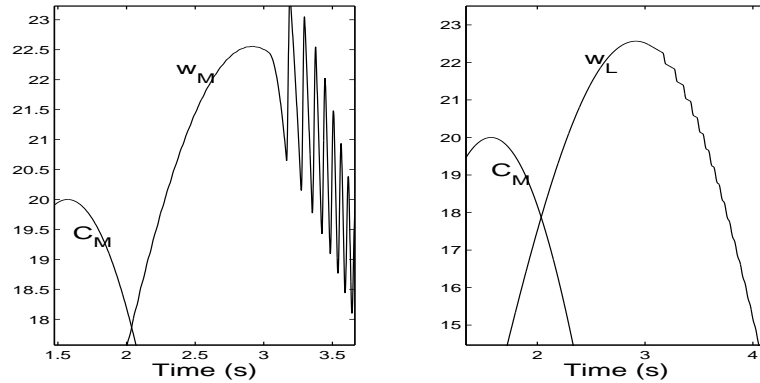


Figure 2.3: Des vibrations des vitesses du moteur,  $\omega_M$ , et de la charge,  $\omega_L$ , dues au jeu d'engrenage existant entre le moteur et la charge.

menée et la roue menante [13, 39] (voir Figure 2.2).

Son effet est plus remarquable dans le comportement transitoire d'un système lors du changement de direction. Le jeu est un facteur déstabilisant qui limite la performance du contrôle de vitesse et de position. La figure 2.3 illustre des vibrations des vitesses du moteur,  $\omega_M$ , et de la charge,  $\omega_L$ , dues au jeu d'engrenage existant entre le moteur et la charge. Le couple de moteur,  $C_M$ , est une sinusoïde. On constate les vibrations à chaque changement de direction de couple du moteur.

Pourtant, la présence du jeu d'amplitude convenable est essentielle pour le fonctionnement correct de système [17]: l'interférence des dentures se produit et le frottement de Coulomb augmente si l'amplitude du jeu est inférieure à cette amplitude convenable. En revanche, si l'amplitude du jeu est supérieure à l'amplitude convenable, le système perd la puissance. Dans la littérature, pour analyser, simuler et commander des systèmes contenant le jeu, différents modèles du jeu sont utilisés [12, 37, 73, 85, 71, 60, 66]. Ces modèles sont très souvent des modèles de connaissance en raison des connaissances *a priori* sur le phénomène. Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux modèles de connaissance du jeu.

Brogliato [12] compare les modèles géométriques tels que le modèle de zone morte et le modèle d'hystérésis, avec les modèles dynamiques ou quasi-statiques comme les modèles ressort-amortisseur ou les modèles contact-impact. Dans la suite, nous présentons trois des modèles les plus connus, deux statiques et un dynamique.

#### 2.4.1 Modèle (géométrique) du jeu

La modélisation géométrique du jeu est basée sur les caractéristiques statiques des éléments du système couplés par le jeu (Figure 2.4). Chaque schéma de la figure 2.4 est composé

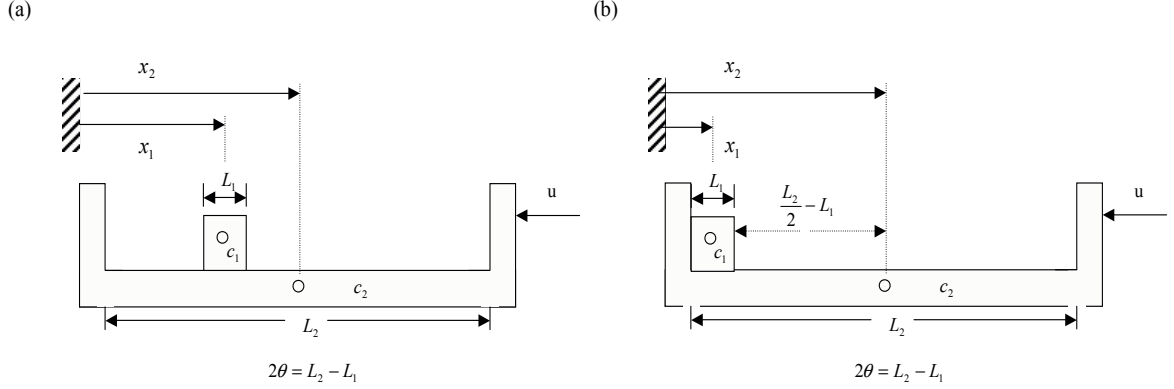


Figure 2.4: Schéma des éléments du système couplés par le jeu dans un modèle géométrique: a) dans la phase de jeu, b) dans la phase de contact.

d'un corps primaire  $c_1$  de masse  $m_1$  (denture de la roue menée) se déplaçant à l'intérieur d'un corps secondaire  $c_2$  de masse  $m_2$  (denture de la roue menante).  $x_1$  et  $x_2$  représentent respectivement la position du corps  $c_1$  et du corps  $c_2$  par rapport à une référence. Le corps  $c_2$  est contrôlé par une commande (force) externe  $u$ . Le mouvement de  $c_1$ , supposé sans inertie, est produit par les contacts avec  $c_2$ . Les contacts se produisent de manière répétée à cause du jeu  $2\theta$ . Ce jeu est provoqué du fait que la rainure où se trouve le corps  $c_1$  est plus grande que la taille de  $c_1$  (dans la figure 2.4,  $L_2 > L_1$ ).

Dans la figure 2.5, on présente deux modèles géométriques, à savoir le modèle de zone morte et le modèle d'hystérésis.

Le modèle de zone morte est décrit par:

$$x_1 = DZ_\theta(x_2) = \begin{cases} x_2 - \theta & \text{si } x_2 \geq \theta \\ 0 & \text{si } |x_2| \leq \theta \\ x_2 + \theta & \text{si } x_2 \leq -\theta, \end{cases} \quad (2.6)$$

et le modèle d'hystérésis par:

$$\dot{x}_1 = HYS_\theta(x_1, x_2, \dot{x}_2) = \begin{cases} \dot{x}_2 & \text{si } \dot{x}_2 > 0, \quad x_1 - x_2 = -\theta \\ \dot{x}_2 & \text{si } \dot{x}_2 < 0, \quad x_1 - x_2 = \theta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.7)$$

La modélisation géométrique est valable si les conditions suivantes sont satisfaites [37]:

1. Dans la figure 2.4, la masse  $m_1$  est négligeable devant la masse  $m_2$ , *i.e.*  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$ .
2. La réaction du système au moment du contact ne modifie pas le mouvement de la masse  $m_2$ .
3. La durée du contact est nulle.

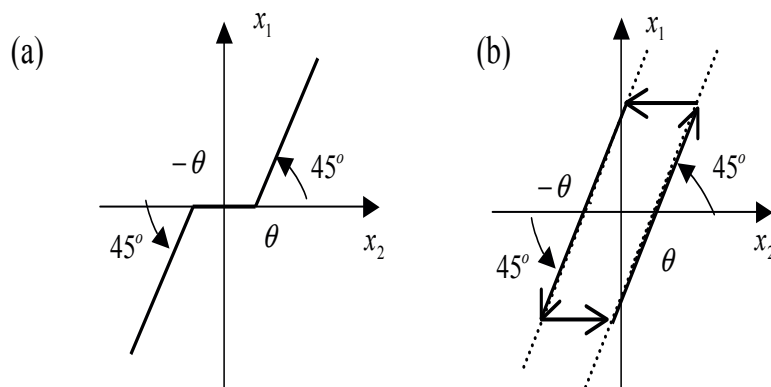


Figure 2.5: Modèles géométriques du jeu: a) modèle de zone morte, b) modèle d'hystérésis.

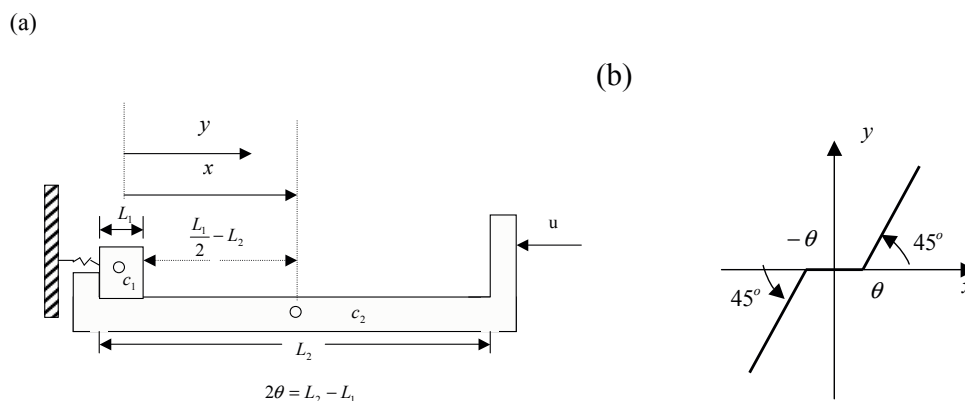


Figure 2.6: Le modèle de zone morte en fonction de la distance entre deux corps.

Il est clair que cette modélisation ne considère pas les effets nonlinéaires introduits par les contacts.

*Remarque:*

Le modèle de zone morte introduit ci-dessus est en fonction de la position  $x_2$ . On peut pourtant choisir la référence au centre du corps  $c_2$  tel que  $x_2 = 0$ . Dans ce cas, le modèle est exprimé en fonction de la distance entre deux corps (voir Figure 2.6). C'est cette représentation que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

## 2.4.2 Modèle compliant du jeu

Les modèles compliant sont généralement des combinaisons de masses, ressorts et amortisseurs (Figure 2.7).

Dans chaque schéma de la figure 2.7, la masse  $m_1$  se déplace à l'intérieur de la masse  $m_2$  qui est plus grande. La masse  $m_2$  est soumise à une commande externe  $u$ . Les paramètres

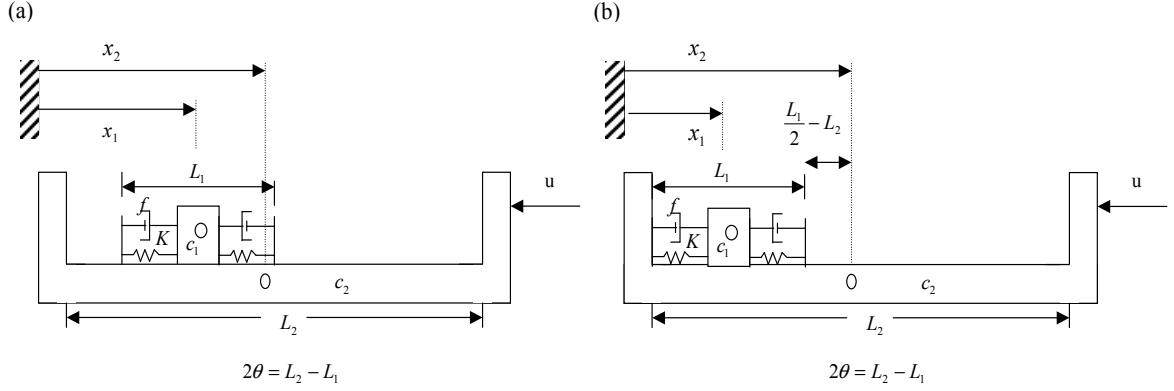


Figure 2.7: Schéma des éléments du système couplés par le jeu dans le modèle compliant: a) dans la phase de jeu, b) dans la phase de compliance.

$K$  et  $f$  déterminent la déformation.

Le modèle compliant peut être décrit en considérant les deux phases suivantes:

- La *phase de jeu* où les deux corps ne sont pas en contact *i.e.*  $|x_1 - x_2| < \theta$  (voir Figure 2.7.a). Dans cette phase, les relations suivantes décrivent le modèle:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= u, \end{aligned}$$

où l'entrée de commande  $u$  modifie seulement le mouvement de la masse  $m_2$ . Pendant cette phase, la masse  $m_1$  peut être considérée comme une particule libre évoluant entre les contraintes.

- La *phase de compliance* où les deux masses interagissent. Les deux corps restent collés pendant une durée de temps donnée par les conditions initiales au moment du contact et la commande du système. Le contact est établi avec une vitesse relative différente de zéro *i.e.*  $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \neq 0$  et  $|x_1 - x_2| \geq \theta$  (voir Figure 2.7.b). Dans cette phase, les relations suivantes décrivent le modèle:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) - g(t) &= u \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + g(t) &= 0, \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes,  $g(\cdot)$  donne la déformation près du point de contact:

$$g(t) = \begin{cases} K \cdot (x_2 - x_1 - \theta) + f \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & \text{si } x_2 - x_1 - \theta \geq 0 \\ K \cdot (x_2 - x_1 + \theta) + f \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & \text{si } x_2 - x_1 + \theta \leq 0. \end{cases}$$

Le modèle compliant est basé sur les hypothèses suivantes:

1. Il existe une déformation près du point du contact entre les deux corps.

2. Le temps de contact est non négligeable.
3. La perte d'énergie au contact est donnée par les coefficients  $K$  et  $f$ . Le coefficient de restitution d'énergie,  $e$ , est une fonction de ces deux paramètres  $e = g(K, f)$  [12].

## 2.5 Frottement et ses modèles

Le frottement se manifeste dans tous les systèmes mécaniques avec parties en mouvement. Les valves, les cylindres hydrauliques et pneumatiques, les freins et les roues en sont quelques exemples.

Le frottement peut engendrer des erreurs statique et des cycles limites, et dégrade en général la performance de système. Ainsi, la compréhension de ce phénomène s'avère très importante dans la conception des servo-mécanismes de haute précision, des robots, des asservissements hydrauliques et pneumatiques et des freins de véhicules, afin d'améliorer la qualité, l'économie et la sûreté des systèmes.

Un modèle de frottement doit pouvoir exprimer le comportement compliqué et nonlinéaire de frottement. Ce comportement est souvent modélisé par des équations différentielles d'ordre bas ou des équations algébriques, dont les paramètres sont plus simples à identifier que de nombreux paramètres d'un modèle de représentation. Pour cette raison, dans ce qui suit, nous ne considérons que les modèles de connaissance de frottement, même s'il existe des travaux à base de modèles de représentation. Par exemple, dans [35, 42], des réseaux de neurones ont été utilisés pour modéliser et compenser le frottement, et certaines propriétés physiques sont prises en compte comme des contraintes complémentaires pour l'apprentissage des réseaux.

Les modèles de connaissance de frottement peuvent être statiques ou dynamiques. Dans la suite, nous présentons quelques modèles statiques et dynamiques, parmi les plus connus. Le lecteur intéressé peut consulter les références [50, 3, 48] pour davantage d'information sur le frottement.

### 2.5.1 Modèles statiques de frottement

Dans ces modèles, le frottement,  $F_f$ , est considéré soit constant soit une fonction linéaire de la vitesse,  $\dot{y}$ , ou de la force externe,  $F_e$ . Les modèles statiques ne considèrent que le comportement de frottement à une vitesse constante.

Les modèles statiques les plus connus sont les modèles classiques et le modèle de Karnopp.

- **Modèles classiques:**

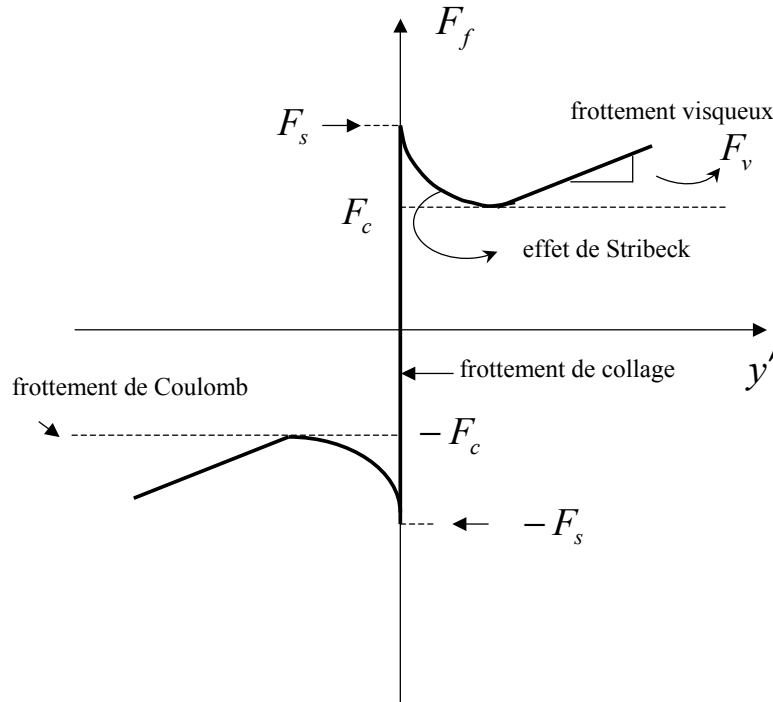


Figure 2.8: Composantes d'un modèle classique de frottement.

Chaque modèle statique est une combinaison des composantes suivantes (Figure 2.8), notées  $F_{f_i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

- Frottement de Coulomb :

$$F_{f_1}(\dot{y}) = F_c \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (2.8)$$

où le paramètre du modèle,  $F_c$ , est proportionnel à la charge normale à la direction de mouvement, *i.e.*  $F_c = \mu F_N$ .

- Frottement visqueux:

$$F_{f_2}(\dot{y}) = F_v \dot{y} \quad (2.9)$$

où  $F_v$  est appelé coefficient du frottement visqueux.

- Frottement de collage (stiction):

$$F_{f_3}(F_e, \dot{y}) = \begin{cases} F_e & \dot{y} = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \dot{y} = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $F_s$ , qui représente le maximum du frottement statique, est appelée la force de décrochage. La relation entre la force externe,  $F_e$ , et le déplacement,  $\Delta y$ , pendant la période statique (c'est à dire à la vitesse presque nulle) et pour  $|F_e| < F_s$ , peut être modélisée par un ressort d'élasticité  $k$  (voir Figure 2.9).



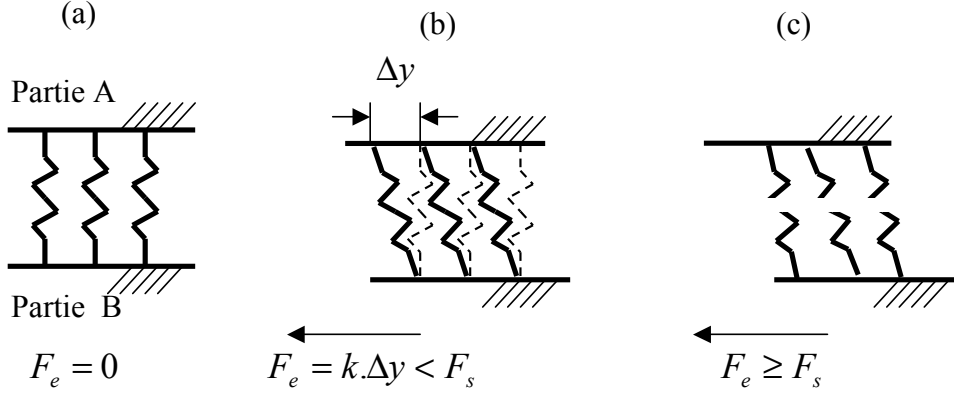


Figure 2.9: Situation des surfaces en contact à la vitesse zéro.

– Frottement de Stribeck [67]:

$$F_{f_4}(\dot{y}) = F_c \operatorname{sgn}(\dot{y}) + (F_s - F_c) e^{-|\frac{\dot{y}}{v_s}|^\delta} + F_v \dot{y} \quad (2.11)$$

où  $v_s$  est la vitesse de Stribeck, et la valeur de  $|\frac{\dot{y}}{v_s}|^{-\delta}$  détermine la vitesse de transition du frottement statique,  $F_f = F_s$ , au frottement dynamique,  $F_f = F_c \operatorname{sgn}(\dot{y}) + F_v \dot{y}$ .

• **Modèle de Karnopp [40]:**

Il semble paradoxal de modéliser le frottement seulement en fonction de la vitesse, alors qu'en réalité, la vitesse est une *conséquence* de la somme des forces exercées sur le système, le frottement y étant inclus. Le modèle de Karnopp définit un intervalle de vitesse nulle, dans lequel, le frottement n'est plus une fonction de la vitesse,  $\dot{y}$ , mais dépend de la force externe,  $F_e$  (Figure 2.10.b).

Le diagramme bloc de ce modèle est montré dans la figure 2.10.a. Considérant ce diagramme bloc, le modèle peut être décrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} F_e &= m\ddot{y} - F_f, \\ F_f(F_e, \dot{y}) &= \begin{cases} F_c \cdot \operatorname{sgn}(\dot{y}) + F_v \dot{y} & |\dot{y}| > dv \\ \operatorname{sgn}(F_e) \cdot \min(|F_e|, F_s) & |\dot{y}| \leq dv \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dans ce diagramme bloc,  $m$  représente la masse,  $F_{col}$  et  $F_{décol}$  sont respectivement les frottements de collage et de décollage et  $2dv$  est la largeur de l'intervalle de vitesse nulle. De plus, la maximum de frottement de collage,  $F_s$ , est toujours plus grand que le frottement de Coulomb,  $F_c$ .

Contrairement aux autres modèles statiques, le modèle de Karnopp a la vitesse comme sortie et la force appliquée comme entrée. Dans l'intervalle  $[-dv, dv]$ , la sortie du modèle,  $\dot{y}(t)$ , reste nulle (le collage continu), mais la sortie du système,

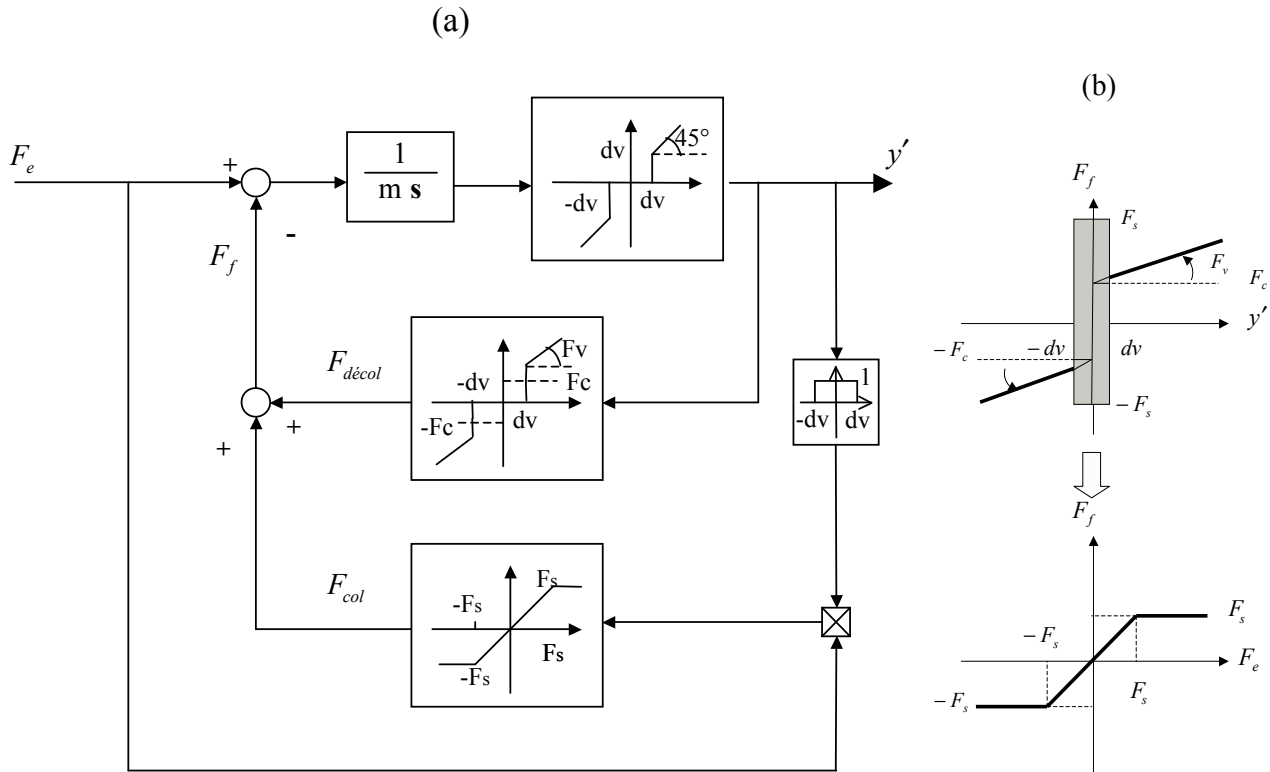


Figure 2.10: Modèle de Karnopp, a) diagramme bloc, b) caractéristique frottement-vitesse et frottement-force externe.

$\frac{1}{m} \int (F_e(t) - F_f(t)) dt$ , peut varier. Ainsi, le modèle est capable de simuler le mouvement du type collage-décollage <sup>1</sup>, ce qui n'est pas faisable avec les autres modèles statiques, où le collage ne se produit qu'à la vitesse nulle.

### 2.5.2 Modèles dynamiques de frottement

Les modèles statiques ne sont pas capables d'expliquer plusieurs propriétés importantes de frottement dues à sa dynamique interne: les mouvement du type collage-décollage (à l'exception du modèle de Karnopp), les micro déplacements pendant la phase de collage, et l'hystérésis de frottement en fonction de la vitesse non stationnaire. Il existe plusieurs modèles dynamiques dont les plus importants sont le modèle de Dahl [18], les modèles de Bliman et Sorine [8], [9], et le modèles de LuGre [24]. Ce dernier est l'un des modèles les

<sup>1</sup>stick-slip

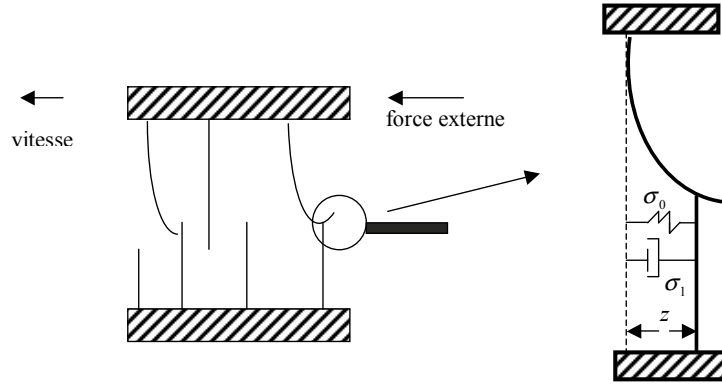


Figure 2.11: Modélisation ressort-amortisseur du modèle LuGre.

plus précis et les plus récents, décrit par les équations suivantes (voir Figure 2.11):

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{q} - \sigma_0 \frac{\dot{q}}{g(\dot{q})} z \\ g(\dot{q}) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{\dot{q}}{v_0}\right)^2} \\ F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \alpha_2 \dot{q} \end{cases} \quad (2.13)$$

où,  $z$  correspond à l'état interne du modèle,  $\dot{q}$  est la vitesse relative entre les deux surfaces,  $\sigma_0$  peut être interprété comme un coefficient de raideur des déformations microscopiques,  $\sigma_1$  correspond à un coefficient d'amortissement associé à la variation de  $z$ ,  $\alpha_0$  est le frottement de Coulomb,  $\alpha_0 + \alpha_1$  représente le frottement statique et  $\alpha_2$  représente le frottement visqueux.

## 2.6 Conclusion

Nous avons commencé ce chapitre par la présentation du concept de modélisation et les deux catégories principales des modèles: modèles de connaissances et modèles de représentation. Nous avons vu que le choix entre ces deux catégories dépendait de la connaissance *a priori* disponible sur le système et de la facilité de l'estimation des paramètres. Une fois le modèle choisi, on doit estimer ses paramètres. L'unicité de ces estimations étant très importante, nous avons passé en revue les différentes définitions d'identifiabilité, proposées dans la littérature.

Nous avons enfin présenté les deux phénomènes étudiés dans ce mémoire, le jeu et le frottement et leurs modèles. Ces études nous ont ramenés aux conclusions suivantes:

- En raison des connaissances *a priori* sur les deux phénomènes jeu et frottement, l'utilisation des modèles de connaissances est préférable.

- Parmi les modèles de connaissance existants, les modèles statiques du jeu, et le modèle de Karnopp de frottement fournissent un bon compromis entre la simplicité et la précision, et facilitent l'étude d'identifiabilité .
- Parmi les différentes définitions de l'identifiabilité, celle de l'identifiabilité structurelle globale, définie par Walter et Pronzato, nous convient la mieux, car elle est facilement applicable aux modèles statiques et nondifférentiables de jeu et de frottement.

Dans les chapitres suivants, nous nous servons de ces conclusions pour l'identification et l'étude d'identifiabilité des modèles, dans les systèmes que nous traitons.



## Chapitre 3

# Identification du jeu d'engrenage

### Notation

$u, y$	entrée et sortie du système
$u_j, y_j$	entrée et sortie du modèle de zone morte
$n_a$	rapport entre le nombre des dents de la roue menée et celui de la roue menante
$J_M, J_L$	inerties du moteur, de la charge
$J_{G_1}$ et $J_{G_2}$	inertie d'un accouplement et d'un réducteur
$f_M, f_L, f_{G_i}$	coefficients du frottement visqueux de $J_M, J_L, J_{G_i}$
$f_{sh_i}, k_{sh_i}$	coefficient du frottement visqueux, et élasticité du ressort $i$
$\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_L, \dot{\phi}_{G_i}, (\omega_M, \omega_L, \omega_{G_i})$	vitesse angulaire du moteur, de la charge et de l'inertie $i$
$\phi_d$	déphasage (position relative ou écart angulaire) entre la charge et la dernière inertie avant le jeu
$C_{sh_i}$	couple de l'axe $i$
$\mathbf{p}$	vecteur des paramètres linéaires
$\theta$	paramètre du modèle de zone morte du jeu
$a, b$	amplitude de la première et la deuxième entrées échelon
$t_0, T_i$	instant de début et durée du test d'identification du jeu
$t_s$	instant où le système entre dans le régime stationnaire (en partant du

$t_{c_i}, t_{b_i}$	instant d'entrée dans ou de sortie de la zone morte pour la $i^{\text{ème}}$ fois, lors de l'application d'un échelon de couple
$t_{c1_{m_i}}, t_{b1_{m_i}}$	$t_{c_1}$ et $t_{b_1}$ pour le modèle de paramètre $\theta_i$
$\omega_{M_{max}}$	vitesse maximum permise du moteur
$\omega_{M_n}, \omega_{L_n}$	vitesse mesurées du moteur et de la charge
$n_M, n_L$	bruits de mesure des vitesses du moteur et de la charge
$g_s$	gain statique
$\hat{\theta}_{com}$	estimation du jeu en utilisant les instants de commutations
$T_{aj_i}$ et $T_{ij_i}$	$i^{\text{ème}}$ périodes d'activité et d'inactivité du jeu
$n_\theta$	paramètre déterminant l'intervalle de recherche de $\theta$
$\alpha$	constante de temps de la rotation de charge

### 3.1 Introduction

Notre objectif est d'identifier le jeu d'engrenage dans un système d'entraînement électromécanique sous la contrainte de limitation de la vitesse maximum du moteur. Le système est composé d'un moteur et d'une charge, reliés par un axe flexible et un engrenage (Figure 3.1). La position du coté de la charge n'est pas disponible car aucun capteur n'est autorisé pour des raisons d'exploitation (*e.g.* cage de laminoir). Coté moteur, seule la vitesse est mesurable à travers un capteur de type incrémental. Le codeur absolu n'est pas autorisé en raison des problèmes de transfert des informations entre le capteur et le calculateur associé. On peut toujours imaginer d'utiliser la vitesse moteur pour en déduire sa position, mais avec tous les problèmes posés par une intégration, sans connaître la position initiale. Nous nous intéressons à une planification du test d'identification qui garantit l'identifiabilité du modèle utilisé pour caractériser le jeu.

Nous commençons par l'étude d'un système avec un seul ensemble allonge-inertie. Ensuite, nous généralisons la méthode proposée pour un système avec trois ensembles allonge-inertie dont le modèle nous a été fourni par la compagnie ALSTOM.

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé trois modèles du jeu, deux statiques et un dynamique. Parmi ces modèles, le modèle dynamique compliant est le plus précis. Dans [66], ce modèle a été utilisé pour caractériser le jeu dans un système ressemblant au système de la figure 3.1. Les amplitudes des vibrations de la vitesse angulaire du moteur, produites par un couple sinusoïdal, ont été utilisées pour identifier le jeu (voir Figure 2.3). Cependant, nous ne pouvons pas utiliser ce modèle dynamique car nous devons traiter le cas où, outre le jeu, les paramètres des dynamiques linéaires du système, appelés

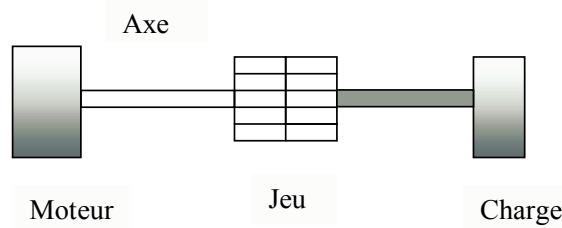


Figure 3.1: Schéma physique du système d'entraînement électro-pneumatique avec un seul axe.

*paramètres linéaires* doivent aussi être identifiés. Dans ce cas, l'estimation des paramètres du modèle dynamique du jeu devient très compliquée. Par ailleurs, l'étude d'identifiabilité des modèles dynamiques s'avère très difficile. Pour ces raisons, nous avons préféré utiliser un modèle statique. Même si ces modèles ne sont pas très précis [12, 47], ils ont été utilisés pour la modélisation et la compensation du jeu [85, 60, 71].

Parmi les deux modèles statiques du jeu, le modèle de zone morte et le modèle d'hystérésis, c'est le premier que nous avons choisi, pour faciliter l'étude de l'identifiabilité du modèle.

Le modèle de zone morte a été utilisé pour caractériser les nonlinéarités des captures et des actionneurs [70, 69, 72, 76, 73], dans les structures montrées dans les figures 3.2 (a), (b), et (c). Les méthodes d'identification utilisées dans ces travaux consiste à inverser le modèle de zone morte et à concevoir des observateurs de l'entrée ou de la sortie du modèle de zone morte. La disponibilité de l'entrée ou de la sortie du modèle de zone morte est indispensable pour pouvoir utiliser ces méthodes et reconstruire l'entrée ou la sortie non disponible de la zone morte.

Néanmoins, lorsque le modèle de zone morte est utilisé pour caractériser le jeu dans un système mécanique du type montré dans la figure 3.2.d, ni l'entrée ni la sortie du modèle ne sont accessibles. Par ailleurs, comme nous allons le voir dans la section 3.2, le modèle de notre système est caractérisé par des retours d'état et une condition logique (Figure 3.2.d). Cette structure complexe rend difficile l'application des algorithmes d'identification mentionnés.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode d'identification du jeu, basée sur la connaissance du comportement du système, pour planifier l'expérience d'identification du modèle de zone morte du jeu<sup>1</sup>. Notre étude consiste en deux parties: identifiabilité et identification.

- La première partie comprend l'étude du problème de l'identifiabilité structurelle (selon Walter et Pronzato) du modèle de zone morte, sans considérer l'identifiabilité des paramètres linéaires. Nous montrons que le test d'identification (le choix de

<sup>1</sup>Rappelons que le seul paramètre à identifier est l'amplitude du jeu,  $\theta$ .



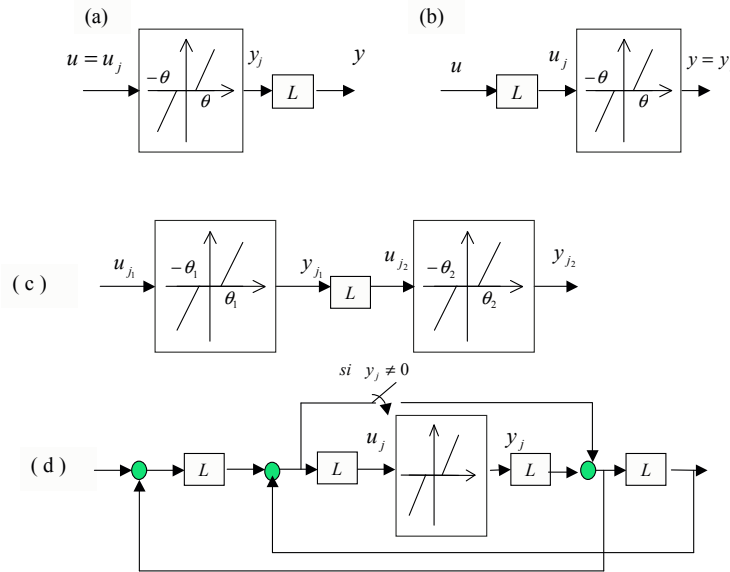


Figure 3.2: Différentes structures utilisant le modèle de zone morte, (a) modélisation d'actionneur, (b) modélisation de capteur, (c) modélisation d'actionneur et de capteur, (d) modélisation du jeu d'engrenage.

l'entrée du système, de l'instant de début du test et de la durée du test) peut être planifié en utilisant la connaissance du comportement du système, de façon à ce que certaines conditions suffisantes pour l'identifiabilité structurelle soient satisfaites.

- La deuxième partie donne des procédures d'identification du modèle de zone morte en utilisant le plan d'expérience obtenu dans la première partie (identifiabilité). On peut alors considérer deux cas différents:
  - le cas où les valeurs exactes des paramètres linéaires du système sont connues,
  - le cas où elles ne sont pas connues.

Dans le premier cas, le jeu peut être facilement identifié en minimisant un critère de moindres carrés sur l'erreur de sortie.

Dans le deuxième cas, toute erreur d'estimation des paramètres linéaires peut dégrader l'estimation de moindres carrés du jeu. Ainsi, nous proposons une nouvelle méthode, basée sur l'estimation des instants de commutations, qui est moins sensible aux erreurs d'estimation des paramètres linéaires. Cette nouvelle méthode peut être utilisée indépendamment, ou comme nous allons le voir, en association avec la méthode de moindres carrés.

Par la suite, la section 3.2 est consacrée à la présentation du modèle du système. L'identifiabilité est étudiée dans la section 3.3. Dans la section 3.4, nous présentons notre méthode

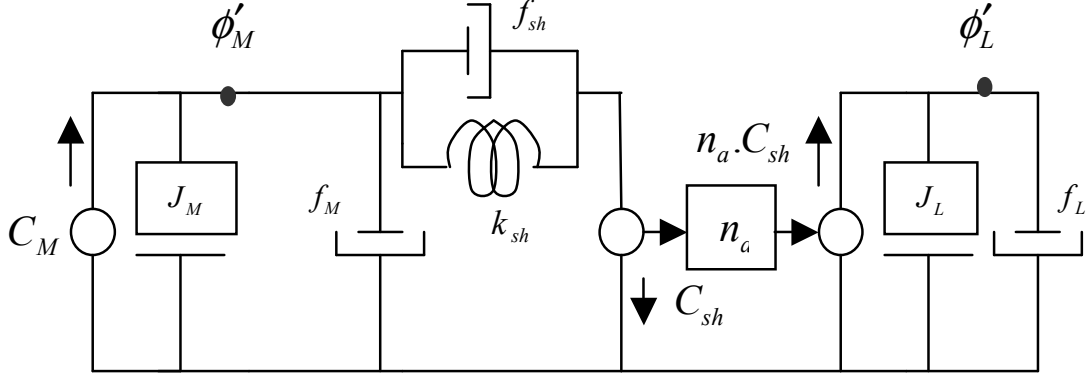


Figure 3.3: Schéma mécanique du système sans jeu.

d'identification du jeu. Les résultats de simulation sont illustrés dans la section 3.5. Enfin, dans la section 3.6, nous généralisons la méthode d'identification proposée à un système d'entraînement électrique avec trois axes de la compagnie ALSTOM.

## 3.2 Présentation du modèle du système

Le schéma mécanique équivalent du système pour un engrenage sans jeu est montré dans la figure 3.3, où  $n_a$  est le rapport entre le nombre des dents de la roue menée et celui de la roue menante [21]<sup>2</sup>.  $J_M$  et  $J_L$  sont les inerties du moteur et de la charge,  $f_L$ ,  $f_{sh}$  et  $f_M$  sont les coefficients du frottement visqueux des amortisseurs, et  $k_{sh}$  est le coefficient d'élasticité du ressort.  $\omega_M = \dot{\phi}_M$  et  $\omega_L = \dot{\phi}_L$  sont respectivement la vitesse du moteur et la vitesse de la charge, et  $C_{sh}$  est le couple appliqué à la charge. Les équations différentielles de ce modèle sans jeu sont:

$$M_1(\mathbf{p}) = \begin{cases} J_M \cdot \ddot{\phi}_M(t) + f_M \cdot \dot{\phi}_M(t) = C_M(t) - C_{sh}(t) \\ J_L \cdot \ddot{\phi}_L(t) + f_L \cdot \dot{\phi}_L(t) = C_{sh}(t) \\ C_{sh}(t) = k_{sh} \phi_d(t) + f_{sh} \dot{\phi}_d(t) \\ \phi_d(t) = \phi_M(t) - \phi_L(t) \\ \dot{\phi}_M(0) = 0, \dot{\phi}_L(0) = 0, \phi_d(0) = 0; \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{p} = [J_M, J_L, f_M, f_L, f_{sh}, k_{sh}]^T$  représente les paramètres linéaires.

En présence du jeu, le couple  $C_{sh}$  est nul quand le jeu est actif (le déphasage  $\phi_d$  est inférieur à  $\theta$ ). Lorsque le jeu n'est pas actif, ce couple est une fonction du déphasage retardé et sa dérivée. Pour l'ensemble de ces deux situations, les équations du système

<sup>2</sup>Par la suite, nous supposons  $n_a = 1$ .

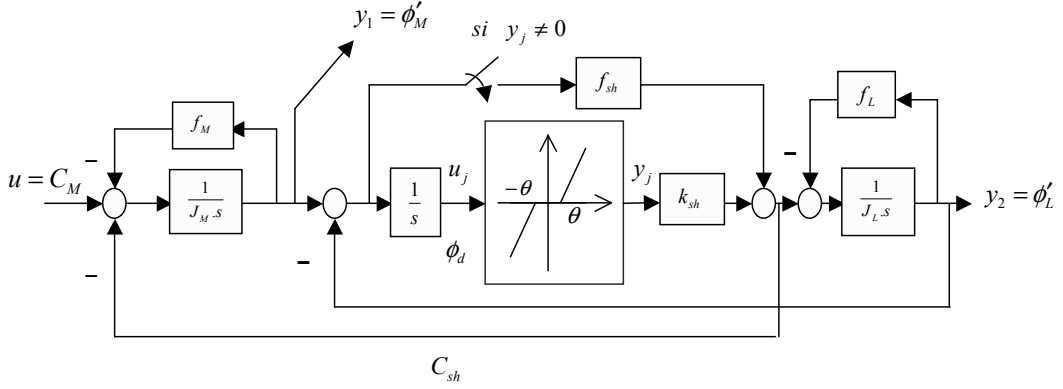


Figure 3.4: Schéma-bloc du système avec jeu.

sont:

$$\begin{cases} C_{sh}(y_j(t)) = k_{sh}y_j(t) + f_{sh}\dot{y}_j(t) \\ y_j(t) = DZ_{\theta}(u_j(t)), u_j = \phi_d \end{cases}$$

Ainsi, le schéma bloc du système avec jeu est celui de la figure 3.4, qui peut être décrit par les équations différentielles suivantes:

$$M_1(\mathbf{p}, \theta) = \begin{cases} J_M \ddot{\phi}_M(t) + f_M \dot{\phi}_M(t) = C_M(t) - C_{sh}(y_j(t)) \\ J_L \ddot{\phi}_L(t) + f_L \dot{\phi}_L(t) = C_{sh}(y_j(t)) \\ C_{sh}(y_j(t)) = k_{sh}y_j(t) + f_{sh}\dot{y}_j(t) \\ y_j(t) = DZ_{\theta}(u_j(t)), u_j(t) = \phi_d(t) = \phi_M(t) - \phi_L(t) \\ \dot{\phi}_M(0) = 0, \dot{\phi}_L(0) = 0, \phi_d(0) = rand(-\theta, \theta); \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $rand(-\theta, \theta)$  représente une valeur aléatoire entre  $-\theta$  et  $\theta$ . La condition initiale  $\phi_d(0)$  a une valeur aléatoire car à l'instant d'immobilité  $t = 0$ , le déphasage  $\phi_d$  peut prendre une valeur quelconque entre  $-\theta$  et  $\theta$  (voir aussi Figure 2.4).

En définissant  $\mathbf{x} = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_L, \phi_M - \phi_L]^T$ , et en appelant  $t_0$  l'instant de début de test d'identification,  $\mathbf{x}(t_0)$  est l'état du système au début du test d'identification.

Nous ne pouvons pas considérer le cas  $t_0 = 0$  du fait que cela nous amène à la situation expliquée auparavant dans laquelle l'état initial  $\mathbf{x}_3(0) = \phi_d(0) = rand(-\theta, \theta)$  a donc une valeur aléatoire. Il ne faudrait donc pas choisir  $t_0$  à l'instant d'immobilité mais à un instant où le système est dans un régime stationnaire (par exemple). L'entrée  $u(t) = C_M(t)$  et l'instant de début du test sont choisis de la façon suivante:

$$u(t) = a1(t), \quad a \neq 0, \quad \text{et } t_0 \geq t_s \quad (3.3)$$

où  $1(t)$  est la fonction échelon unité et  $t_s$  est l'instant où le système entre dans le régime stationnaire.

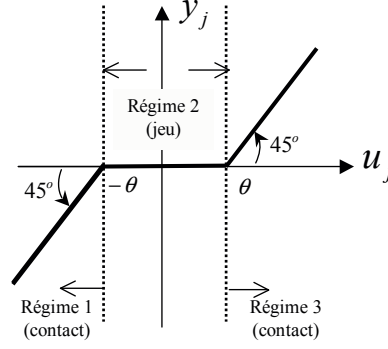


Figure 3.5: Trois régimes d'un modèle de zone morte.

Les sorties du système d'entraînement électro-mécanique sont la vitesse du moteur,  $\omega_M$ , et la vitesse de la charge,  $\omega_L$ . Contrairement aux certains systèmes d'asservissement de position (*e.g.* les robots), la position n'est pas mesurable sur ce système.

En définissant,  $u = C_M$ ,  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$ , et  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , les représentations d'état dans les différents régimes du modèle de zone morte (Figure 3.5) sont:

- représentation d'état dans le régime 1 (régime contact):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u + \mathbf{d}_1 \theta \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} \leq -\theta \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{f_M + f_{sh}}{J_M} & \frac{f_{sh}}{J_M} & -\frac{k_{sh}}{J_M} \\ \frac{f_{sh}}{J_L} & -\frac{f_L + f_{sh}}{J_L} & \frac{k_{sh}}{J_L} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_{sh}}{J_M} \\ \frac{k_{sh}}{J_L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- représentation d'état dans le régime 2 (régime jeu):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad |\mathbf{e}^T \mathbf{x}| \leq \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{f_M}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_L}{J_L} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$$

- représentation d'état dans le régime 3 (régime contact):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{b}_3 \cdot u - \mathbf{d}_3 \theta \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} \geq \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1$ .

L'état au début du test,  $\mathbf{x}(t_0)$ , pour une entrée  $C_M = a.1(t)$ , peut être trouvé en appliquant la condition d'équilibre  $\dot{\mathbf{x}}(t_s) = 0$  à la représentation d'état (3.4), (3.5) et (3.6):

- L'état stationnaire dans le régime 1 ( $\phi_d \leq -\theta$ ,  $a < 0$ ):

$$(\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \text{ pour } t \geq t_s) \Rightarrow (\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_s) = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}_1 a - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{d}_1 \theta) \quad (3.7)$$

- L'état stationnaire dans le régime 2 ( $|\phi_d| < \theta$ ,  $a = 0$ ):

$$(\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \text{ pour } t \geq t_s) \Rightarrow (\dot{\phi}_M(t_0) = \dot{\phi}_L(t_0) = 0, \phi_d(t_0) = \text{rand}(-\theta, \theta)) \quad (3.8)$$

- L'état stationnaire dans le régime 3 ( $\phi_d \geq \theta$ ,  $a > 0$ ):

$$(\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \text{ pour } t \geq t_s) \Rightarrow (\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_s) = -\mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta) \quad (3.9)$$

On peut constater que les états stationnaires obtenus dans le cas  $a \neq 0$  sont des fonctions de seul  $\theta$ . Par conséquent, l'acquisition de données doit commencer lorsque le modèle entre dans le régime stationnaire et que  $\phi_d$  est dans le régime 1 ( $\phi_d \leq -\theta$ ) ou 3 ( $\phi_d \geq \theta$ ).

### 3.3 Identifiabilité du modèle de zone morte du jeu

Comme nous avons expliqué dans la section 3.2, pour surmonter le problème de l'état inconnu  $\phi_d$  à l'instant d'immobilité ( $\text{rand}(-\theta, \theta)$ ) l'acquisition de données doit commencer en  $t_0$  quand le système est dans un régime stationnaire ( $t_0 > t_s$ ) et quand l'entrée de la zone morte  $\phi_d$  est dans l'un des régimes 1 ou 3 (régimes de contact). L'instant de début du test est choisi comme  $t_0 \geq t_s$ , où  $t_s$  est l'instant où le système entre dans le régime stationnaire.

Nous utilisons la définition d'identifiabilité (2.5), pour planifier l'expérience, *i.e.* pour choisir la durée du test,  $T_i$ , le type d'entrée,  $u(t) = C_M(t)$ ,  $t > t_0$  et la sortie  $y$ . L'identifiabilité est étudiée pour les deux cas suivants:

- Durant le test, l'entrée du modèle de zone morte,  $u_j = \phi_d$ , ne dépasse aucun des seuils,  $\theta$  et  $-\theta$ , ce qui signifie que les données sont acquises dans un seul régime.

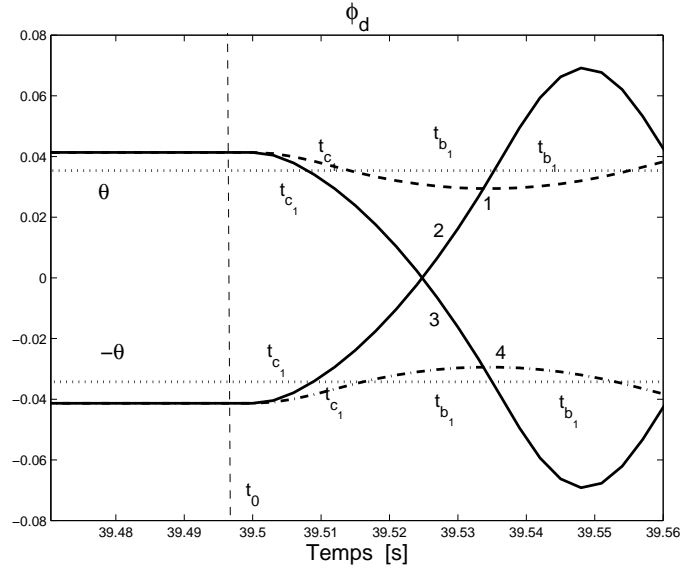


Figure 3.6: Différentes situations possibles pour l'entrée du modèle de zone morte pendant les deux premières commutations,  $t_{c_1}$  et  $t_{b_1}$ .

- Durant le test, l'entrée du modèle de zone morte,  $u_j = \phi_d$ , dépasse au moins l'un des seuils,  $\theta$  et  $-\theta$ , ce qui signifie que les données sont acquises dans plusieurs régimes.

Dans l'annexe A, nous montrons que si les données sont acquises dans un seul régime (qui doit être le régime de contact, car le test commence dans ce régime), alors  $\theta$  est structurellement globalement identifiable si l'entrée du modèle de zone morte est mesurable. Ce cas est irréaliste car seules les vitesses du moteur et de la charge sont mesurables. Nous devons donc acquérir les données non seulement dans les régimes de contact mais aussi dans le régime de jeu.

Dans toute cette étude d'identifiabilité, les paramètres linéaires  $\mathbf{p}$  sont considérés fixes et nous ne donnons plus un argument  $\mathbf{p}$  dans les fonctions concernées.

### 3.3.1 Identifiabilité, données acquises dans plusieurs régimes

Dans cette partie, nous traitons les cas où les données sont acquises quand  $\phi_d$  change entre soit deux régimes (1 et 2 ou 3 et 2), soit trois régimes 1, 2 et 3 (voir Figure 3.6). Dans cette figure,  $t_{c_1}$  et  $t_{b_1}$  représentent respectivement le premier instant d'entrée dans et de sortie de la zone morte correspondant à la première et la deuxième commutations.

**Proposition 3.1** *Si au moins l'une des vitesses (du moteur,  $\dot{\phi}_M$ , ou de la charge,  $\dot{\phi}_L$ ) est*

mesurable, alors la condition suffisante pour l'identifiabilité de  $\theta$  est

$$\text{sgn}(\phi_d(t_{c_1}))\text{sgn}(\phi_d(t_{b_1})) = -1 \quad (3.10)$$

où  $[t_{c_1}, t_{b_1}] \in [t_0, t_0 + T_i]$ .

*Démonstration* . Nous présentons la preuve pour le cas  $\phi_d(t_{c_1}) = \theta$  et  $\phi_d(t_{b_1}) = -\theta$  (la courbe 2 dans la figure 3.6). Elle est généralisable à l'autre cas:  $\phi_d(t_{c_1}) = -\theta$  et  $\phi_d(t_{b_1}) = \theta$  (la courbe 3 dans la figure 3.6).

Pour deux modèles avec deux valeurs différentes du paramètre  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les notations  $t_{c1_{m1}}$ ,  $t_{c1_{m2}}$  et  $t_{b1_{m1}}$ ,  $t_{b1_{m2}}$ , représentent les premiers moments d'entrée dans et de sortie de zones mortes correspondantes,  $[-\theta_1, \theta_1]$  et  $[-\theta_2, \theta_2]$ . Nous nous servons des deux lemmes suivants:

**Lemme 3.1** *Si  $t_{c1_{m1}} \neq t_{c1_{m2}}$ , alors on peut trouver un instant  $t = \min(t_{c1_{m1}}, t_{c1_{m2}}) + \epsilon_1$  ( $\epsilon_1$  est une valeur positive) tel que  $y_m(t, \theta_1) \neq y_m(t, \theta_2)$ , d'où l'identifiabilité de  $\theta$ .*

*Preuve* . Voir Annexe B.

◇

**Lemme 3.2** *Même si  $t_{c1_{m1}} = t_{c1_{m2}}$ , alors  $t_{b1_{m1}} \neq t_{b1_{m2}}$  et par conséquent, on peut trouver un instant  $t = \min(t_{b1_{m1}}, t_{b1_{m2}}) + \epsilon_2$  ( $\epsilon_2$  est une valeur positive) tel que  $y_m(t, \theta_1) \neq y_m(t, \theta_2)$ , d'où l'identifiabilité de  $\theta$ .*

*Preuve* . Voir Annexe B.

◇

Il s'en suit de ces lemmes que  $\exists t \in [t_0, \min(t_{b1_{m1}}, t_{b1_{m2}})]$  tel que  $y_m(t, \theta_1) \neq y_m(t, \theta_2)$ . Si  $t_0 + T_i > t_{b_1}$  on en conclue que  $\exists t \in [t_0, t_0 + T_i]$  tel que  $y_m(t, \theta_1) \neq y_m(t, \theta_2)$ , ce qui signifie que  $\theta$  est identifiable. Pour être sûr que  $t_0 + T_i > t_{b_1}$ , nous choisissons  $T_i$  de façon à ce qu'il existe des oscillations dans les données acquises. Ces oscillations sont produites par plusieurs passages de l'entrée du modèle de zone morte dans la zone morte.

♠

Notre expérience de simulation montre que si l'entrée,  $C_M$ , et l'instant de début du test sont choisis de la manière suivante:

$$C_M(t) = a.1(t) + b.1(t - t_0), \quad a > 0, \quad b \leq -a, \quad \text{et} \quad t_0 \geq t_s \quad (3.11)$$

alors, pour les deux premières commutations après  $t = t_0$ , les conditions  $\phi_d(t_{c_1}) = \theta$  et

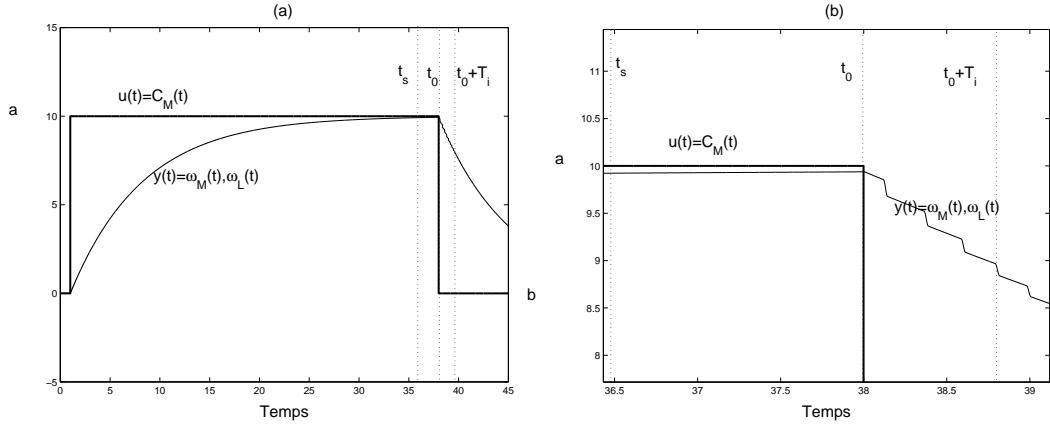


Figure 3.7: (a) L'entrée  $C_M$ , la sortie  $y$ , l'instant de début du test  $t_0$ , et la durée du test  $T_i$ . (b) Agrandissement de la figure (a).

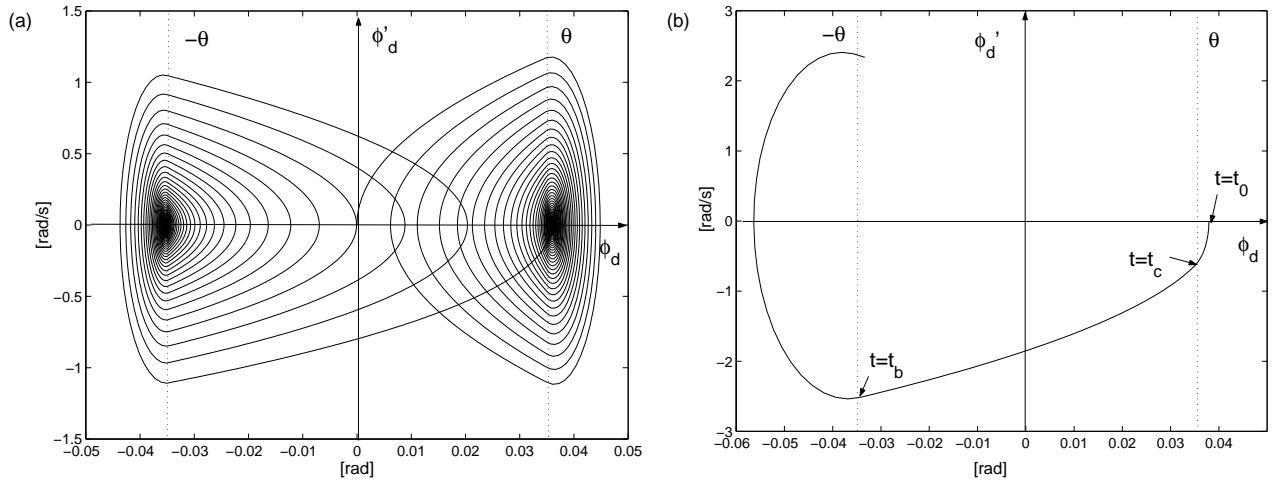


Figure 3.8: (a) Diagramme de phase pour  $t \in [0, t_0 + t_s]$ . (b) Passage dans la zone morte et les instants de commutations  $t_c$  et  $t_b$ .

$\phi_d(t_{b_1}) = -\theta$  sont satisfaites (voir Figure 3.7). Si  $T_i$  est choisie suffisamment longue de façon à ce que quelques oscillations dans les données acquises (la vitesse du moteur ou la vitesse de la charge) existent, alors  $\theta$  est identifiable.

Le choix de l'entrée peut être justifié en regardant le diagramme de phase,  $(\phi_d, \dot{\phi}_d)$  de la figure 3.8.a. Dans cette figure, pour l'entrée  $C_M(t) = a.1(t)$  avec  $a > 0$  le système est stationnaire dans un point situé à droite de la zone morte:  $(\phi_d(t_s), 0)$  où  $\phi_d(t_s) = a \frac{f_L}{k_{sh}(f_M + f_L)} + \theta > \theta$  (compte tenu de la relation (3.9)). En  $t = t_0$ , le couple d'entrée change de direction et le couple  $C_M = a + b$ ,  $a + b < 0$ , est suffisamment fort pour que le deuxième point de stationnarité soit situé à gauche de la zone morte:  $(\phi_d(t_0 + t_s), 0)$  où  $\phi_d(t_0 + t_s) = (a + b) \frac{f_L}{k_{sh}(f_M + f_L)} - \theta < -\theta$  (compte tenu de la relation (3.7)). Avec



ce changement des points de stationnarité, un passage dans la zone morte survient. Les instants de commutations  $t_c = t_{c_1}$  et  $t_b = t_{b_1}$  sont montrés dans la figure 3.8.b. Enfin, il faut noter que le passage dans la zone morte survient également quand  $b = -a$ .

*Remarque:*

Les preuves des lemmes 3.1 et 3.2 sont données pour le cas  $b = -a$  et l'entrée que nous utilisons par la suite est:  $u(t) = C_M(t) = a(1(t) - 1(t - t_0))$ .

### 3.4 Identification du jeu

Dans cette section, nous nous intéressons à l'identification du jeu du système d'entraînement électro-mécanique de la figure 3.1, sous la contrainte de limitation de la vitesse maximum du moteur ( $\omega_M(t) \leq \omega_{M_{max}}$ ). Les données sont les mesures de la vitesse du moteur,  $\omega_{M_n} = \omega_M + n_M$ , et de la vitesse de la charge  $\omega_{L_n} = \omega_L + n_L$ , où  $n_M$  et  $n_L$  représentent les bruits de mesures.

Deux cas différents sont considérés: le cas où les valeurs exactes des paramètres linéaires du système sont connues et le cas où elles ne sont pas connues.

- Dans le cas où les valeurs exactes des paramètres linéaires sont connues, ayant un seul paramètre à identifier *i.e.*  $\theta$ , on utilise le critère de moindres carrés sur l'erreur de sortie  $\varepsilon(\theta, t)$ :

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} V(\theta) \\ V(\theta) = \sum_{t_0}^{t_0+T_i} (\varepsilon(\theta, t))^2 \\ \varepsilon(\theta, t) = y_s(t) - y_m(t, \theta) \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $y_s$  et  $y_m$  représentent respectivement les sorties du système et du modèle. La sortie peut être la vitesse du moteur,  $\omega_M$ , ou la vitesse de la charge,  $\omega_L$ .

Le domaine de recherche  $\mathcal{D}_\theta$  devrait être choisi suffisamment grand pour inclure la maximum valeur possible du paramètre à identifier, *i.e.*  $\theta$ .

- Dans le cas où les valeurs exactes des paramètres linéaires ne sont pas connues, l'identification du modèle de zone morte devient compliquée, car l'estimation de  $\theta$  dépend de l'estimation des paramètres linéaires,  $\hat{\mathbf{p}}$ :

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} V(\theta, \hat{\mathbf{p}}) \\ V(\theta, \hat{\mathbf{p}}) = \sum_{t_0}^{t_0+T_i} (\varepsilon(t, \theta, \hat{\mathbf{p}}))^2 \\ \varepsilon(t, \theta, \hat{\mathbf{p}}) = y_s(t) - y_m(t, \theta, \hat{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (3.13)$$

A cause de l'erreur de l'estimation de  $\mathbf{p}$ , l'estimation de  $\theta$  par (3.13) est plus erronée que celle obtenue par (3.12). Pour diminuer cette erreur, nous proposons une autre méthode pour l'estimation du jeu qui est basée sur l'estimation des instants de commutations. Cette nouvelle méthode peut être utilisée indépendamment, où en association avec la méthode de moindres carrées.

Ayant un seul paramètre à estimer,  $\theta$ , on peut chercher le minimum global du critère en l'évaluant pour différente valeur du paramètre, sans avoir besoin de calculer le gradient ((3.12) ou (3.13)).

Dans les deux cas, la planification de l'expérience d'identification de  $\theta$ , à savoir le choix de l'entrée  $C_M$ , et de  $t_0$  et  $T_i$  dans (3.12) et (3.13), est effectuée comme pour l'étude de l'identifiabilité dans le cas de l'identification dans plusieurs régimes, car l'entrée du modèle de zone morte,  $\phi_d$ , n'est pas accessible. On choisit donc:

$$C_M(t) = a(1(t) - 1(t - t_0)), \quad (3.14)$$

où  $t_0 \geq t_s$ .

Dans le cas où les valeurs exactes des paramètres linéaires ne sont pas connues et on utilise (3.13),  $T_i$  doit être suffisamment courte pour que seulement une ou deux oscillations apparaisse dans la sortie du système. Ce choix minimise l'influence des erreurs de l'estimation des paramètres linéaires sur le critère de moindres carrés. Les oscillations se produisent en raison des alternances entre le régime de contact et le régime de jeu. Elles signifient que le jeu est excité.

De plus, l'amplitude de l'entrée échelon,  $a$ , est choisie de façon à ce que la contrainte sur la vitesse soit respectée:

$$a < a_{max} = \frac{\omega_{Mmax}}{\hat{g}_s} \quad (3.15)$$

où  $\hat{g}_s$  représente le gain statique identifié. Ce gain peut être facilement identifié à partir d'une réponse indicielle,

$$\hat{g}_s = \frac{\omega_M(t_s)}{a_0}, \quad (3.16)$$

où  $\omega_M(t)$  est la réponse indicielle de la vitesse du moteur pour l'entrée  $C_M(t) = a_0 1(t)$ , et  $t_s$  est l'instant où le système entre dans le régime stationnaire.

### 3.4.1 Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations

Nous proposons maintenant une nouvelle méthode, basée sur l'estimation des instants de commutations. Cette méthode est moins sensible aux estimations des paramètres linéaires

que la méthode de moindres carrés.

A chaque instant de commutation,  $t_{c_i}$  ou  $t_{b_i}$ , la condition  $\phi_d = \pm\theta$  est satisfaite. Si ces instants sont connus, alors une première relation pouvant être utilisée pour l'estimation du jeu est:

$$\theta = |\phi_d(t_{c_i})| = \left| \int_0^{t_{c_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt + \phi_d(0) \right| \quad (3.17)$$

qui peut être également écrite pour  $t_{b_i}$ .

L'inconvénient de l'estimation de  $\theta$  par la relation ci-dessus est qu'elle fait intervenir  $\phi_d(0)$  qui est inconnu. Supposons maintenant qu'il existe un indice  $i$  tel que  $\phi_d(t_{c_i}) = \theta$ ,  $\phi_d(t_{b_i}) = -\theta$  et  $t_{c_i} < t_{b_i}$ , alors :

$$\begin{aligned} -\theta = \phi_d(t_{b_i}) &= \int_0^{t_{b_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt + \phi_d(0) = \int_0^{t_{c_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt + \int_{t_{c_i}}^{t_{b_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt + \phi_d(0) \\ &= \phi_d(t_{c_i}) - \phi_d(0) + \int_{t_{c_i}}^{t_{b_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt + \phi_d(0) = \theta + \int_{t_{c_i}}^{t_{b_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\theta = -0.5 \int_{t_{c_i}}^{t_{b_i}} \dot{\phi}_d \cdot dt \quad (3.18)$$

ce qui est indépendant de  $\phi_d(0)$ .

Une entrée satisfaisant les conditions:

$$\phi_d(t_{c_i}) = \theta, \quad \phi_d(t_{b_i}) = -\theta \quad (3.19)$$

est celle présentée dans (3.11). Sachant que  $\dot{\phi}_d = \omega_M(t) - \omega_L(t)$ , l'équation (3.18) devient:

$$\theta = -0.5 \int_{t_c}^{t_b} (\omega_M(t) - \omega_L(t)) dt \quad (3.20)$$

où  $t_c = t_{c_1}$  et  $t_b = t_{b_1}$ .

Remarque importante: la relation (3.20) est basée sur une traversée de la zone morte entre  $t_c$  et  $t_b$ , donc sur les conditions (3.19). Dans le cas de l'entrée (3.11), nous avons une seule traversée de la zone morte. C'est pour cette raison que nous utilisons par la suite les deux premières commutations ( $t_c$  et  $t_b$ ).

L'estimation de  $\theta$  en utilisant (3.20), nécessite l'estimation des instants de commutations (seuls les deux premiers),  $t_c$  et  $t_b$ . L'estimation de  $\theta$ , notée  $\hat{\theta}_{com}$ , est donc calculée par:

$$\hat{\theta}_{com} = -0.5 \int_{\hat{t}_c}^{\hat{t}_b} (\omega_{M_f}(t) - \omega_{L_f}(t)) dt \quad (3.21)$$

où l'indice  $f$  représente les signaux filtrés. Par la suite, nous présentons une méthode pour estimer  $t_c$  et  $t_b$  à partir des mesures de la vitesse de la charge.

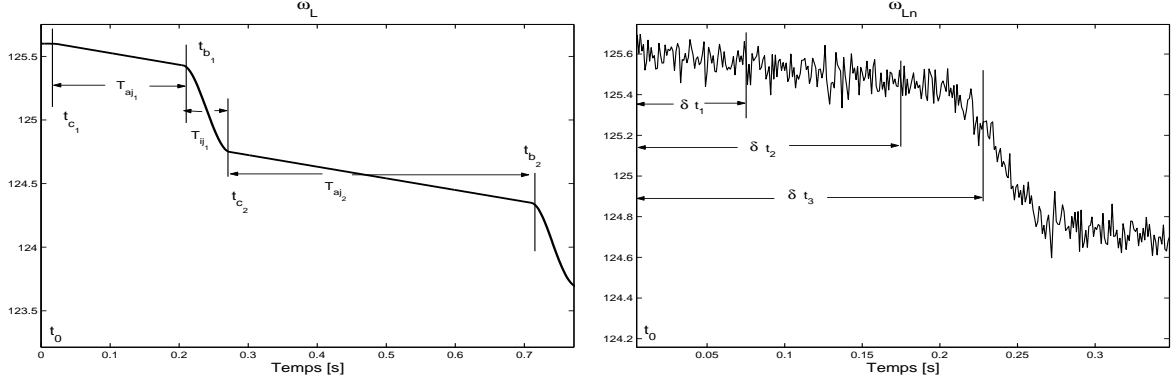


Figure 3.9: Gauche: fractures sur la courbe de la vitesse de charge réelle dues aux commutations aux instants  $t_{c_i}$  et  $t_{b_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Droite: intervalles de recherche de  $t_{c_1}$  et  $t_{b_1}$  sur la courbe de la vitesse de charge mesurée.

### 3.4.1.1 Estimation des instants de commutations

Chaque commutation entraîne un changement du couple appliqué aux inerties existantes dans le système, car le couple du contact,  $C_{sh}$ , est nul pendant les périodes d'activité du jeu et non nul en dehors de ces périodes. Chaque instant de commutation correspond donc à un point de fracture sur la courbe de la vitesse de la charge (Figure 3.9). Ces points de fracture marquent les intervalles dans lesquels le jeu est actif, notés  $T_{aj_i}$ , ou inactif, notés  $T_{ij_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (Figure 3.9).

Notons par  $t_c^*$  et  $t_b^*$  les valeurs exactes de deux instants de commutations. La vitesse de la charge sur l'intervalle  $T_{aj_1} = [t_c^*, t_b^*]$  vérifie (voir (3.2) avec  $C_{sh} = 0$ ):

$$J_L \dot{\omega}_L + f_L \omega_L = 0 \quad (3.22)$$

La solution de cette équation différentielle est  $\omega_L(t) = \omega_L(t_c) e^{-\alpha(t-t_c^*)}$  où  $\alpha = f_L/J_L$  est la constante de temps de la rotation de charge. Cette solution peut être réécrite comme:

$$\omega_L(t) = \omega_L(t_i) e^{-\alpha(t-t_i)} \quad t_c^* \leq t_i \leq t_b^* \quad (3.23)$$

où  $t_i$  représente un instant quelconque entre  $t_c^*$  et  $t_b^*$ . On peut montrer que les instants de commutations peuvent être estimés avec les relations suivantes (voir Annexe C):

$$\hat{t}_c = \arg \min_{t_c \in (t_0, t_0 + \delta t_1)} \sum_{t=t_0}^{t_0 + \delta t_1} (\omega_L(t) - F_1(t, t_c))^2 \quad (3.24)$$

$$\hat{t}_b = \arg \min_{t_b \in (t_0 + \delta t_2, t_0 + \delta t_3)} \sum_{t=t_0 + \delta t_2}^{t_0 + \delta t_3} (\omega_L(t) - F_2(t, t_b))^2 \quad (3.25)$$

où

$$F_1(t, t_c) \equiv \begin{cases} \omega_L(t_c) & t_0 \leq t < t_c \\ \omega_L(t_c)e^{-\alpha(t-t_c)} & t_c \leq t \leq t_0 + \delta t_1 \end{cases}$$

et

$$F_2(t, t_b) \equiv \begin{cases} \omega_L(t_b)e^{-\alpha(t-t_b)} & t_0 + \delta t_2 \leq t \leq t_b \\ \omega_L(t_b) & t_b \leq t \leq t_0 + \delta t_3 \end{cases}$$

Notez que  $\omega_L(t_c)$  et  $\omega_L(t_b)$  sont des fonctions des variables à identifier,  $t_c$  et  $t_b$ , et elles ne sont pas constantes.

Lors de l'utilisation de (3.24) et (3.25), nous remplaçons  $\omega_L$  par  $\omega_{L_n}$  et  $\alpha = \frac{f_L}{J_L}$  (qui n'est pas connu) par son estimation (Annexe D):

$$\hat{\alpha} = \frac{\log(\sum_{i=1}^{N_\alpha} \omega_{L_{ni}}(t_1) / \sum_{i=1}^{N_\alpha} \omega_{L_{ni}}(t_2))}{t_2 - t_1} \quad (3.26)$$

où  $t_1$  et  $t_2$  appartiennent à une période d'activité du jeu.  $\omega_{L_{ni}}(t_1)$  et  $\omega_{L_{ni}}(t_2)$ ,  $i = 1, \dots, N_\alpha$  sont  $N_\alpha$  mesures de  $\omega_{L_n}(t_1)$  et  $\omega_{L_n}(t_2)$  dans  $N_\alpha$  expériences.

Cette estimation de  $\alpha$  est indépendante de l'estimation de  $f_L$  et  $J_L$ : elle est donc plus précise que  $\hat{\alpha} = \frac{\hat{f}_L}{J_L}$ .

*Remarque1:*

Pour estimer  $\alpha$ , outre la méthode proposée dans l'annexe D, on peut utiliser la relation  $\omega_L(t) = \alpha\omega_L(t)$ ,  $t \in [t_c^*, t_b^*]$  et un critère de moindres carrés sur l'erreur  $\omega_L(t) - \alpha\omega_L(t)$ . Cette méthode est plus simple mais nécessite la dérivation de la vitesse de charge mesurée, qui est un signal bruité.

*Remarque2:*

La figure 3.10 compare les vibrations pour le choix d'entrée  $b = -a$  et différentes valeurs de  $a$ :  $a = 0.5a_0$  et  $a = 0.9a_0$ , où  $a_0$  est fixé. On constate que pour  $a = 0.9a_0$ , les vibrations sont plus rapides. Cette expérience montre qu'un changement du couple plus brutal en  $t = t_0$ , aboutit à une commutation plus rapide. Si l'intervalle de temps  $[t_c, t_b]$  est plus long, l'erreur de l'estimation de  $t_c$  et  $t_b$  influence moins l'estimation de  $\theta$  (voir (3.21)), d'où l'intérêt d'avoir des amplitudes du couple plus petites.

### 3.4.2 Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés

On peut aussi estimer  $\theta$  en minimisant le critère de moindres carrés (3.13). Comme le test commence dans le régime stationnaire, l'état initial du modèle est:

$$\mathbf{x}_m(t_0) = [a\hat{g}_s, a\hat{g}_s, \frac{\hat{f}_L}{\hat{k}_{sh}} + a\hat{g}_s + \theta] \quad (3.27)$$

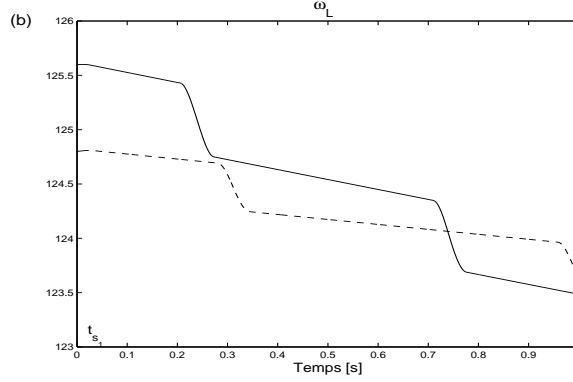


Figure 3.10: Vibrations pour  $b = -a$  et  $a = 0.5a_0$  (ligne coupée) et  $a = 0.9a_0$  (ligne solide).

où  $\hat{g}_s = \frac{1}{\hat{f}_M + \hat{f}_L}$ . Pourtant, on peut remplacer  $\hat{g}_s$  par le gain statique estimé du système (voir (3.16)). Par conséquent, les variables d'état deviennent plus indépendantes de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires.

On peut minimiser le critère de moindres carrés de deux manières suivantes:

1. Minimisation sur l'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$ : dans ce cas, l'estimation obtenue, notée  $\hat{\theta}_{mcr}$ , est le minimum global du critère de moindres carrés (3.13). Ce critère dépend des paramètres linéaires estimés.  $\hat{\theta}_{mcr}$  serait donc sensible aux erreurs d'estimation de ces paramètres.
2. Minimisation de (3.13) sur un petit intervalle  $\mathcal{D}_\theta$  autour de  $\hat{\theta}_{com}$ , l'estimation de  $\theta$  obtenue en utilisant des instants de commutations. En effet, on essaie de minimiser (3.13) sans trop s'éloigner de  $\hat{\theta}_{com}$  qui n'est *a priori* pas très sensible aux erreurs d'estimation des paramètres linéaires. Autrement dit, on essaie de raffiner l'estimation  $\hat{\theta}_{com}$  en utilisant le critère de moindres carrés. L'intervalle de recherche  $\mathcal{D}_\theta$  est défini comme:

$$\mathcal{D}_\theta : [\theta_1 = \hat{\theta}_{com}(1 - n_\theta), \theta_2 = \hat{\theta}_{com}(1 + n_\theta)] \quad (3.28)$$

où  $0 < n_\theta < 1$ . L'estimation obtenue par cette approche sera notée  $\hat{\theta}_{comcr}$ .

Dans le critère (3.13), nous choisissons  $y(t) = \omega_L(t)$  car la sortie de la zone morte est plus proche de la vitesse de la charge que de la vitesse du moteur.

### 3.5 Résultats de simulation

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'identification de  $\theta$ , dans les deux cas des paramètres linéaires connus et inconnus.

$J_M, J_L [m^2.kg]$	$k_{sh} [N.m.rad^{-1}]$	$f_{sh}, f_M, f_L [N.m.rad^{-1}s^{-1}]$	$\theta^* [rad]$
$4.88 \times 10^{-3}, 6.8 \times 10^{-2}$	78	$1.575 \times 10^{-2}, 0.5 \times 10^{-2}, 0.5 \times 10^{-2}$	$3.49 \times 10^{-2}$

Table 3.1: Valeurs utilisées pour la simulation du système avec un seul axe.

### 3.5.1 Identification du jeu dans le cas des paramètres linéaires connus

Le diagramme bloc de la figure 3.4 est simulé avec les valeurs données dans le tableau 3.1 où les variances des bruits de mesure blancs gaussiens sont  $var(n_{\dot{\phi}_M}) = var(n_{\dot{\phi}_L}) = 2 \times 10^{-6}$  et  $var(n_{\phi_d}) = 10^{-12}$ , et la période d'échantillonnage est  $T_s = 1 ms$ . La réponse indicielle du système montre que le système entre dans le régime stationnaire en  $t_s = 38 s$ . Selon que l'identification est effectuée dans un ou plusieurs régimes, le choix de  $C_M(t)$ ,  $t_0$  et  $T_i$  est différent.

#### Identification dans un seul régime

Dans ce cas,  $C_M(t) = 1(t)$  N.m et  $[t_0, t_0 + T_i] = [38, 40]$  s. La figure 3.11-a montre que pendant le test, l'entrée du modèle de zone morte est dans le régime 3, *i.e.*  $\phi_{dn} > \theta^*$ . La figure 3.11-b compare les critères  $V_1(\theta)$ ,  $V_2(\theta)$  et  $V_3(\theta)$ , respectivement correspondant aux choix des sorties:  $y(t) = \dot{\phi}_M(t) + \dot{\phi}_L(t)$ ,  $y(t) = \dot{\phi}_L(t) + \phi_d(t)$  et  $y(t) = \phi_d(t)$ . On constate que seuls  $V_2(\theta)$  et  $V_3(\theta)$ , dans lesquels  $\phi_{dn}$  intervient, peuvent estimer correctement  $\theta$  :  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_3 = \theta^* = 0.0349 rad$ ; alors que  $\hat{\theta}_1 = 0$ .

#### Identification dans plusieurs régimes

Les critères  $V_1(\theta)$  et  $V_2(\theta)$ , correspondent respectivement aux sorties  $y(t) = \dot{\phi}_M(t)$  et  $y(t) = \dot{\phi}_L(t)$ .

- Identification dans trois régimes avec  $t_0 > t_s$ :

$C_M(t) = 1(t) - 1(t - 39.5)$  N.m et  $[t_0, t_0 + T_i] = [39.5, 40]$  s. La figure 3.12-a montre  $\phi_d$  pendant le test. On peut constater que les deux critères  $V_1$  et  $V_2$  sont minimisés en  $\theta^*$  (Figure 3.12-b).

- Identification dans deux régimes avec  $t_0 > t_s$ :

$C_M(t) = 1(t) - 0.4(t - 39.5)$  N.m, et  $[t_0, t_0 + T_i] = [39.5, 40]$  s. La figure 3.13-a montre que, pendant le test,  $\phi_d$  reste dans les régimes 3 et 2. On constate que ni  $V_1$ , ni  $V_2$  ne sont pas minimisés en  $\theta^* = 0.0349 rad$ , ( $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0.02 rad$ ).

- Identification dans trois régimes avec  $t_0$  proche de zéro:

$C_M(t) = 1(t) - 1(t - 0.5)$  N.m et  $[t_0, t_0 + T_i] = [0.5, 1]$  s. La figure 3.14-a montre l'entrée du modèle de zone morte. Aucun des deux critères  $V_1$  et  $V_2$  n'est minimisé

en  $\theta^* = 0.0349 \text{ rad}$  ( $\hat{\theta}_1 = 0.105 \text{ rad}$  et  $\hat{\theta}_2 = 0.0505 \text{ rad}$ ).

### 3.5.2 Identification du jeu dans le cas des paramètres linéaires inconnus

Lorsque les vraies valeurs des paramètres linéaires ne sont pas connues, on doit les estimer. L'erreur de l'estimation de ces paramètres influence la précision de l'estimation finale du jeu. Dans cette expérience de simulation, nous voulons tester la robustesse de notre approche vis-à-vis des erreurs de l'estimation des paramètres linéaires. Ainsi, nous supposons que les paramètres linéaires estimés suivent le modèle suivant:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^*(1 - Err_p \cdot x) \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{p}^*$  est le vrai vecteur des paramètres,  $x$  est une variable aléatoire uniformément distribuée de moyenne nulle et de variance unité, et  $Err_p$  est une constante déterminant l'erreur maximum.

L'expérience est répétée pour différentes valeurs de  $Err_p$  (0%, 10%, 20% et 30%). Pour chaque valeur de  $Err_p$ , 10 expériences correspondant aux 10 conditions initiales du générateur du bruit de mesure sont effectuées, et la moyenne ( $\bar{\theta}$ ) et l'écart-type ( $\sigma\theta$ ) de ces expériences sont calculés. Les variances des bruits de mesure blancs gaussiens sont  $var(n_M) = 10^{-5}$  et  $var(n_L) = 2.5 \times 10^{-6}$ .

Le filtrage des signaux est effectué hors ligne en utilisant un filtre FIR avec compensation (par décalage) du déphasage introduit.

#### 3.5.2.1 Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations

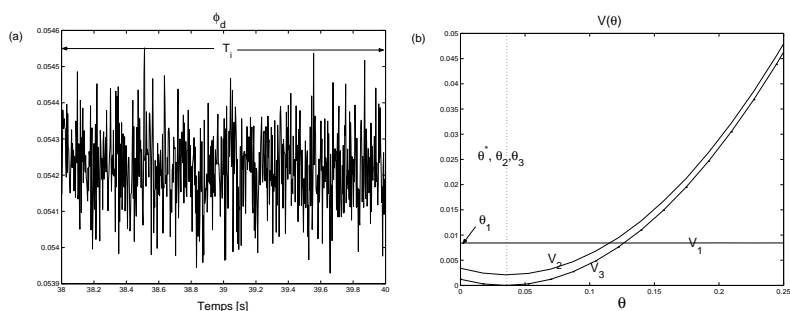
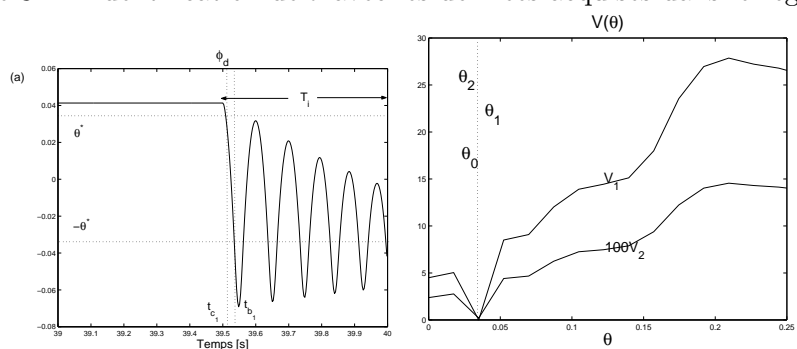
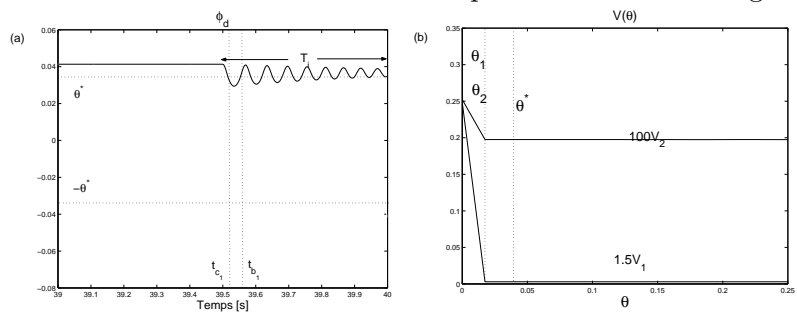
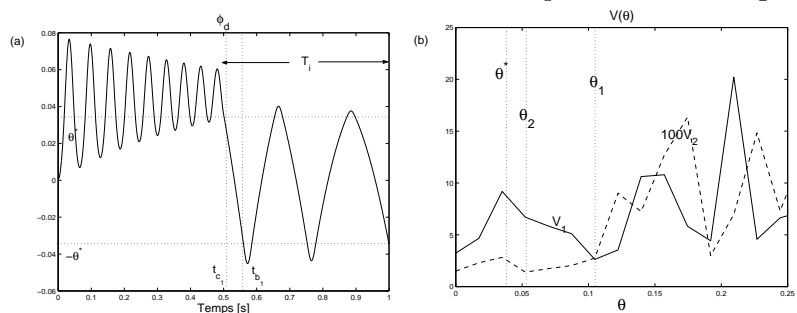
Le gain statique estimé est  $\hat{g}_s = 100$ . Sachant que  $\omega_{M_{max}} = 157 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , l'amplitude maximum de l'entrée échelon est  $a_{max} = \frac{157}{100} = 1.57$ . Le système entre dans le régime stationnaire en  $t_s = 38 \text{ s}$  et  $t_0 = 38.5 \text{ s}$ .

La constante de temps de la rotation de charge,  $\alpha$ , est estimée par la formule (3.26) avec  $N_\alpha = 100$ ,  $t_1 = t_0 + 0.07 \text{ s}$ ,  $t_2 = t_0 + 0.1 \text{ s}$  et en utilisant l'entrée  $C_M(t) = 0.9a_{max}(1(t) - 1(t - t_0))$ . On obtient alors,  $\hat{\alpha} = 6.9 \times 10^{-3}$  (valeur exacte de  $\alpha$  est  $7.35 \times 10^{-3}$ ).

Ensuite, en appliquant l'entrée  $C_M(t) = 0.1a_{max}(1(t) - 1(t - t_0))$ , les instants de commutations,  $t_c$  et  $t_b$ , sont estimés en utilisant les relations (3.24) et (3.25), où  $\delta t_1 = \delta t_2 = 0.5\delta t_3$  et  $\delta t_3 = 0.105 \text{ s}$ . Une réalisation des signaux bruités  $\omega_{L_n}$  et  $\omega_{M_n}$  utilisés dans les expériences est montrée dans la figure 3.15.

Les résultats de l'estimation de  $\theta$  en utilisant (3.21), notée  $\hat{\theta}_{com}$ , sont présentés dans le tableau 3.2.



Figure 3.11: Identification de  $\theta$  avec les données acquises dans le régime 3.Figure 3.12: Identification de  $\theta$  avec les données acquises dans les trois régimes pour  $t_0 \geq t_s$ .Figure 3.13: Identification de  $\theta$  avec les données acquises dans les régimes 2 et 3.Figure 3.14: Identification de  $\theta$  avec les données acquises dans les trois régimes pour  $t_0$  proche de zéro.

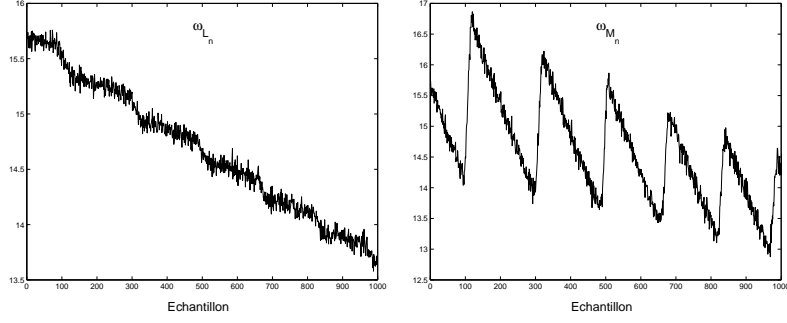


Figure 3.15: Signaux bruités utilisés pour l'estimation du jeu quand les paramètres linéaires sont inconnus.

### 3.5.2.2 Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés

Le tableau 3.2 montre aussi les résultats de l'estimation de  $\theta$  en utilisant (3.13), (3.14) et (3.28) avec  $t_0 = 39$  s,  $T_i = 1$  s, et l'entrée  $C_M(t) = 0.6a_{max}(1(t) - 1(t - t_s))$ . La vitesse mesurée de la charge est filtrée par un filtre FIR de fréquence de coupure 70 Hz. On considère les deux cas suivants.

1. Le critère (3.13) est minimisé sur l'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$  (ici, entre 0 et  $10^\circ$ ). L'estimation obtenue est notée  $\hat{\theta}_{mcr}$ .
2. Le critère (3.13) est minimisé sur l'intervalle  $[0.9\hat{\theta}_{com}, 1.1\hat{\theta}_{com}]$ , où  $\hat{\theta}_{com}$  est l'estimation obtenue en utilisant les instants de commutations. L'estimation obtenue dans ces conditions est notée  $\hat{\theta}_{comcr}$ .

Pour les trois estimateurs  $\hat{\theta}_{com}$ ,  $\hat{\theta}_{comcr}$  et  $\hat{\theta}_{mcr}$ , nous calculons l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) définie par:

$$EQM(\theta^*, \hat{\theta}) = (\bar{\hat{\theta}} - \theta^*)^2 + E[(\hat{\theta} - \bar{\hat{\theta}})^2] \quad (3.30)$$

où  $\theta^*$  est la vraie valeur du paramètre,  $\hat{\theta}$  est son estimation, et  $\bar{\hat{\theta}} = E[\hat{\theta}]$  est la moyenne de l'estimation. EQM peut donc être considérée comme une mesure de performance fiable, car elle tient compte à la fois du biais et de la variance de l'estimateur.

La figure 3.16 montre EQM de trois estimateurs en fonction de l'erreur sur l'estimation des paramètres linéaires. On peut constater que les estimateurs basés sur les instants de commutations ( $\hat{\theta}_{com}$  et  $\hat{\theta}_{comcr}$ ) sont quasiment indépendants de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires, alors que l'estimateur correspondant au minimum global du critère de moindres carrés ( $\hat{\theta}_{mcr}$ ) dépend considérablement de cette erreur.

Ce résultat confirme les explications de la section 3.4. En effet, l'estimateur de moindres carrés fait intervenir l'estimation des paramètres linéaires, tandis que l'estimation des instants de commutations est relativement indépendante de ces paramètres.

$\theta^* = 2^\circ \equiv 3,49 \times 10^{-2} \text{ rad}$									
	$\hat{\theta}_{com}$			$\hat{\theta}_{comcr}$			$\hat{\theta}_{mcr}$		
$Err_p\%$	$10^2 \bar{\theta}_{com}$	$err\%$	$10^3 \sigma \theta_{com}$	$10^2 \bar{\theta}_{comcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma \theta_{comcr}$	$10^2 \bar{\theta}_{mcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma \theta_{mcr}$
0	3.07	11.8	4.5	3.22	7.6	5.2	3.49	0	0
10	3.31	5	3.62	3.38	3	4.45	4.1	17.5	7.3
20	3,03	12.9	3.9	3.29	5.67	4.3	3.97	13.57	13
30	2.83	18.9	6.1	3.06	12.2	6.6	4.07	16.8	17

Table 3.2: Trois estimations de  $\theta$  pour  $var_{n_M} = 10^{-5}$  et  $var_{n_L} = 2.5 \times 10^{-6}$  et différentes valeurs de  $Err_p$ .

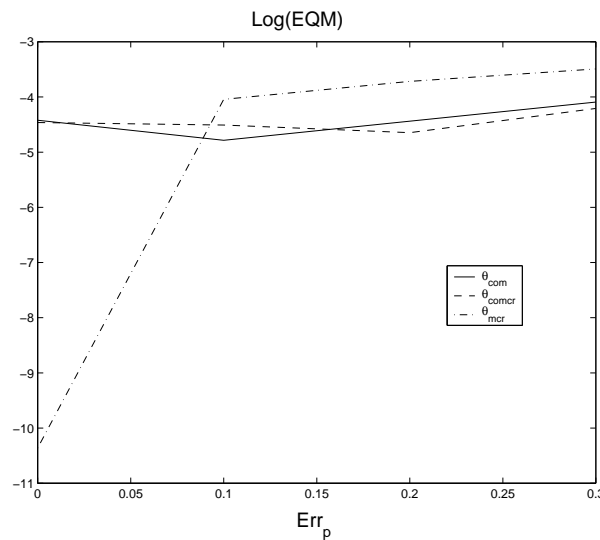


Figure 3.16: Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en fonction de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires pour les trois estimateurs.

Pour mieux comprendre ce raisonnement, le critère de moindres carrés, ainsi que la vraie valeur du paramètre  $\theta$  ( $\theta^*$ ) et ses trois estimations, pour une expérience de simulation sont montrés dans la figures 3.17. On constate qu'en présence de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires, le minimum global du critère de moindres carrés ne correspond pas à la vraie valeur du paramètre  $\theta$ .

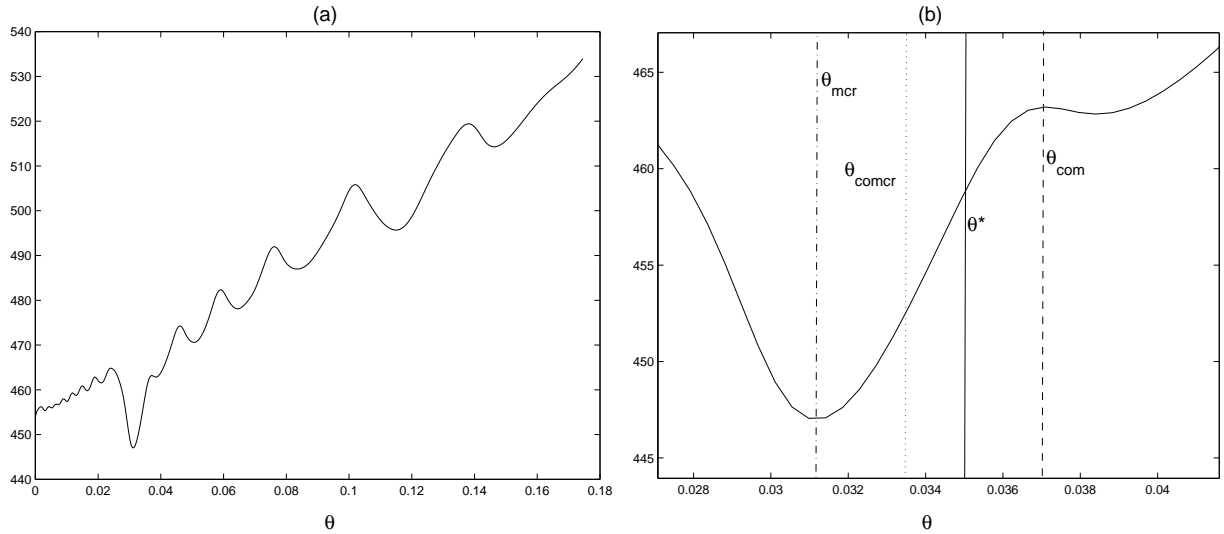


Figure 3.17: (a) Critère de moindres carrés. (b) Son agrandissement et la position des trois estimateurs par rapport à la vraie valeur du paramètre ( $\theta^*$ ).

### 3.6 Généralisation de la méthode d'identification du jeu à un système avec trois axes

Nous allons maintenant généraliser la méthode proposée pour l'identification du jeu dans le système d'entraînement électro-mécanique avec un seul axe à un système plus compliqué, montré dans la figure 3.18. Ce système est un banc d'essai de la compagnie ALSTOM qui correspond à un modèle général simplifié pour des entraînements réels. Il peut donc représenter de façon simplifiée soit un ensemble d'allonges, accouplement, jeu et inerties, soit un ensemble d'allonges, réducteur, accouplement et inerties. Un réducteur peut être modélisé par une inertie (les roues d'engrenage), une raideur (la raideur des dents d'engrenage en prise), et peut-être un jeu (le jeu de denture). Le banc d'essai se compose d'un moteur d'entraînement et de trois ensembles *allonge-inertie*. La dernière inertie est constituée d'un volant d'inertie associé à un moteur; ce moteur servant à simuler tous les profils de charge. Dans le reste de ce mémoire, ce banc d'essai sera appelé *le système avec trois axes*.

#### 3.6.1 Présentation du modèle du système

Le schéma mécanique [21] du système physique de la figure 3.18 est montré dans la figure 3.19, où le train d'engrenage est supposé être sans jeu. Ce schéma est composé de 4 inerties, 3 ressorts et 7 amortisseurs. 3 amortisseurs sont entre les inerties et les autres sont entre les inerties et le cadre.  $n_a$  est le rapport entre le nombre des dents de la roue

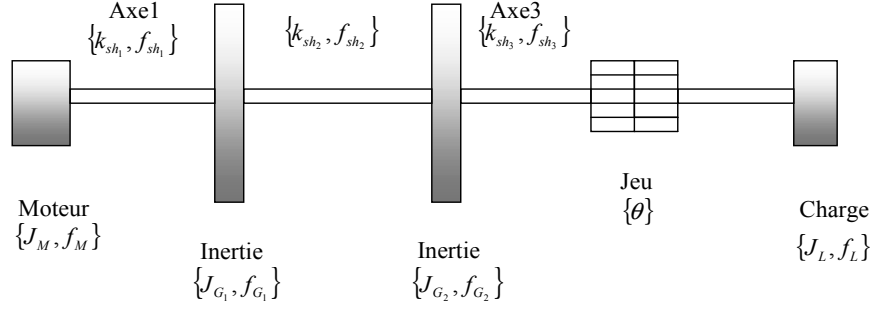


Figure 3.18: Schéma physique du système d'entraînement électro-mécanique avec trois axes.

menée et celui de la roue menante.

Les paramètres linéaires sont les inerties ( $J_M, J_{G_1}, J_{G_2}, J_L$ ), les coefficients d'élasticité des ressorts ( $k_{sh_1}, k_{sh_2}, k_{sh_3}$ ) et les coefficients du frottement visqueux des amortisseurs ( $f_{sh_1}, f_{sh_2}, f_{sh_3}, f_M, f_{G_1}, f_{G_2}, f_L$ ).  $\omega_M = \dot{\phi}_M$ ,  $\omega_{G_1} = \dot{\phi}_{G_1}$ ,  $\omega_{G_2} = \dot{\phi}_{G_2}$  et  $\omega_L = \dot{\phi}_L$  sont respectivement les vitesses du moteur, de la première et de la deuxième inerties, et de la charge.  $C_{sh_1}, C_{sh_2}$  et  $C_{sh_3}$  sont des couples des trois axes.

Le schéma bloc du système est montré dans la figure 3.20. Considérant ce schéma, la structure  $M_3(\cdot)$  du modèle du système est décrite par les équations différentielles suivantes:

$$M_3(\mathbf{p}, \theta) = \begin{cases} \ddot{\phi}_M = \frac{-(f_M + f_{sh_1})}{J_M} \cdot \dot{\phi}_M + \frac{f_{sh_1}}{J_M} \cdot \dot{\phi}_{G_1} + \frac{-k_{sh_1}}{J_M} \cdot (\phi_M - \phi_{G_1}) + \frac{1}{J_M} \cdot C_M \\ \ddot{\phi}_{G_1} = \frac{f_{sh_1}}{J_{G_1}} \cdot \dot{\phi}_M + \frac{-(f_{G_1} + f_{sh_1} + f_{sh_2})}{J_{G_1}} \cdot \dot{\phi}_{G_1} + \frac{f_{sh_2}}{J_{G_1}} \cdot \dot{\phi}_{G_2} + \frac{k_{sh_1}}{J_{G_1}} \cdot (\phi_M - \phi_{G_1}) + \frac{-k_{sh_2}}{J_{G_1}} \cdot (\phi_{G_1} - \phi_{G_2}) \\ \ddot{\phi}_{G_2} = \frac{f_{sh_2}}{J_{G_2}} \cdot \dot{\phi}_{G_1} + \frac{-(f_{G_2} + f_{sh_2})}{J_{G_2}} \cdot \dot{\phi}_{G_2} + \frac{k_{sh_2}}{J_{G_2}} \cdot (\phi_{G_1} - \phi_{G_2}) - \frac{1}{J_{G_2}} \cdot C_{sh_3}(y_j) \\ \ddot{\phi}_L = \frac{-f_L}{J_L} \cdot \dot{\phi}_L + \frac{1}{J_L} \cdot C_{sh_3}(y_j) \\ C_{sh_3}(y_j) = k_{sh_3} y_j + f_{sh_3} \dot{y}_j \\ u_j = \phi_d = \phi_{G_2} - \phi_L \end{cases} \quad (3.31)$$

où

$$y_j = DZ_\theta(u_j) = \begin{cases} u_j - \theta & \text{si } u_j \geq \theta \\ 0 & \text{si } |u_j| \leq \theta \\ u_j + \theta & \text{si } u_j \leq -\theta, \end{cases}$$

$\theta$  est le paramètre du modèle de zone morte et le vecteur des paramètres linéaires est:

$$\mathbf{p} = [J_M, J_{G_1}, J_{G_2}, J_L, k_{sh_1}, k_{sh_2}, k_{sh_3}, f_{sh_1}, f_{sh_2}, f_{sh_3}, f_M, f_{G_1}, f_{G_2}, f_L].$$

### 3.6.2 Identification du jeu

L'estimation simultanée du jeu et des paramètres linéaires du système d'entraînement électro-mécanique de la compagnie ALSTOM par un algorithme d'optimisation non linéaire

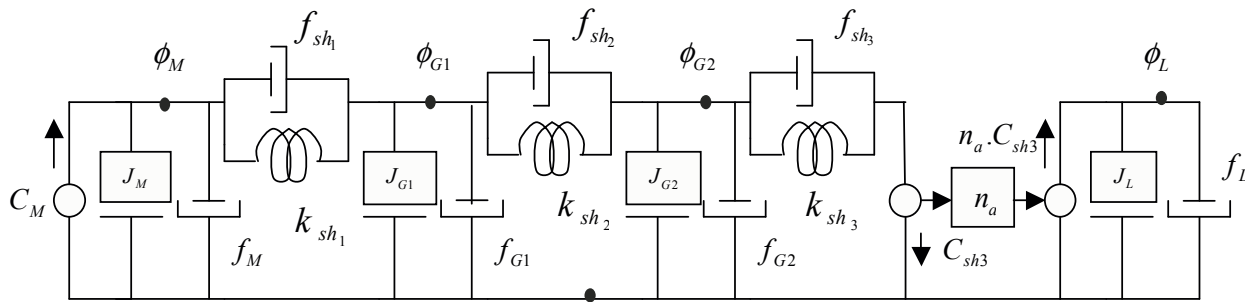


Figure 3.19: Schéma mécanique équivalent du système sans jeu avec trois axes.

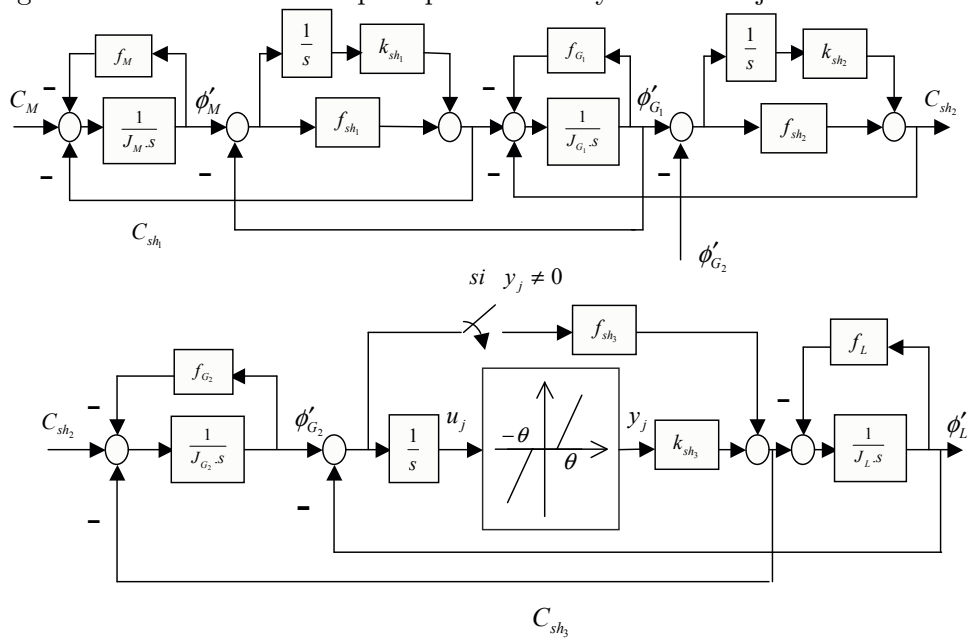


Figure 3.20: Schéma-bloc du système avec trois axes.

pouvant aboutir aux problèmes de convergence de ce genre d'algorithmes, nous avons trouvé plus judicieux de séparer l'identification de la dynamique linéaire et celle du jeu. Nous avons donc d'abord développé une méthode pour estimer les paramètres linéaires, **p**. Pour alléger le texte, les détails de cette méthode relativement lourde, et ses résultats de simulation sont transportés à l'annexe E. Nous présentons par la suite, un résumé de la procédure d'identification de ces paramètres.

### 3.6.2.1 Procédure d'identification des paramètres de la dynamique linéaires

1. Calculer le temps de montée,  $t_r$ , le gain statique,  $g_s$ , et l'amplitude maximum de l'entrée échelon.
2. Calculer les coefficients du frottement visqueux à partir du gain statique et en supposant qu'ils sont égaux.
3. Identifier la dynamique lente entre le couple du moteur  $C_M$  et la vitesse du moteur  $\omega_M$ ,  $H_l(z)$ , avec une entrée échelon.
4. Identifier la dynamique rapide entre le couple du moteur  $C_M$  et la vitesse du moteur  $\omega_M$ ,  $H_h(z)$ , avec une entrée SBPA, en surestimant l'ordre du modèle.
5. Calculer la dynamique totale  $H_t(z) = H_h(z)H_l(z)$ .
6. Réduire l'ordre de la dynamique totale jusqu'à ce qu'elle contienne 3 paires de zéros complexes, 3 paires de pôles complexes et un pôle simple (en accord avec la vraie fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur,  $H(s)$ ).
7. Transformer la dynamique totale réduite en temps continu,  $H_r(s)$ .
8. Calculer les paramètres d'inertie et d'élasticité des ressorts en comparant  $H_r(s)$  avec  $H(s)$ .

### 3.6.2.2 Reconstruction de vitesse de la dernière inertie avant l'engrenage

Les paramètres linéaires étant estimés, on peut passer à l'identification du jeu en utilisant des méthodes similaires à celles proposées dans les sections 3.4.1 et 3.4.2 pour le système avec un seul axe. Néanmoins, l'estimation de  $\theta$  en utilisant les instants de commutations est maintenant plus compliquée car  $\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_{G_2} - \dot{\phi}_L$ , et  $\dot{\phi}_{G_2}$  n'est pas mesurable <sup>3</sup>. Nous devons donc reconstruire  $\dot{\phi}_{G_2}$ , qui est la vitesse de la dernière inertie avant l'engrenage

<sup>3</sup>Dans le système avec un seul axe  $\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_M - \dot{\phi}_L$ , où  $\dot{\phi}_M$  et  $\dot{\phi}_L$  sont mesurables.

(voir Figure 3.20). Les équations différentielles du système dans l'intervalle  $[t_c, t_b]$  sont (voir (3.31) avec  $C_{sh_3} = 0$ ):

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_M = \frac{-(f_M + f_{sh_1})}{J_M} \dot{\phi}_M + \frac{f_{sh_1}}{J_M} \dot{\phi}_{G_1} - \frac{k_{sh_1}}{J_M} (\phi_M - \phi_{G_1}) + \frac{1}{J_M} C_M \\ \ddot{\phi}_{G_1} = \frac{f_{sh_1}}{J_{G_1}} \dot{\phi}_M - \frac{f_{G_1} + f_{sh_1} + f_{sh_2}}{J_{G_1}} \dot{\phi}_{G_1} + \frac{f_{sh_2}}{J_{G_1}} \dot{\phi}_{G_2} + \frac{k_{sh_1}}{J_{G_1}} (\phi_M - \phi_{G_1}) - \frac{k_{sh_2}}{J_{G_1}} (\phi_{G_1} - \phi_{G_2}) \\ \ddot{\phi}_{G_2} = \frac{f_{sh_2}}{J_{G_2}} \dot{\phi}_{G_1} - \frac{f_{G_2} + f_{sh_2}}{J_{G_2}} \dot{\phi}_{G_2} + \frac{k_{sh_2}}{J_{G_2}} (\phi_{G_1} - \phi_{G_2}) \\ \ddot{\phi}_L = -\frac{f_L}{J_L} \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (3.32)$$

En définissant  $\mathbf{x}_2 = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_{G_1}, \dot{\phi}_{G_2}, \dot{\phi}_L, \phi_M - \phi_{G_1}, \phi_{G_1} - \phi_{G_2}]^T$  et en considérant  $u = C_M$ ,  $y_1 = \omega_{M_n} = \omega_M + n_M$  et  $y_2 = \omega_{L_n} = \omega_L + n_L$ , les équations différentielles (3.32) se transforment en représentation d'état à temps discret suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_2(t+1) = \mathbf{A}_2^d(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2^d(\mathbf{p}^*) \cdot u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $T_s$  étant la période d'échantillonnage,  $\mathbf{A}_2^d(\mathbf{p}^*) = e^{\mathbf{A}_2(\mathbf{p}^*)T_s}$  et  $\mathbf{b}_2^d(\mathbf{p}^*) = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_2(\mathbf{p}^*)\tau} d\tau \mathbf{b}_2(\mathbf{p}^*)$ , avec

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -\frac{f_M + f_{sh_1}}{J_M} & \frac{f_{sh_1}}{J_M} & 0 & 0 & -\frac{k_{sh_1}}{J_M} & 0 \\ \frac{f_{sh_1}}{J_{G_1}} & -\frac{f_{G_1} + f_{sh_1} + f_{sh_2}}{J_{G_1}} & \frac{f_{sh_2}}{J_{G_1}} & 0 & \frac{k_{sh_1}}{J_{G_1}} & -\frac{k_{sh_2}}{J_{G_1}} \\ 0 & \frac{f_{sh_2}}{J_{G_2}} & -\frac{f_{G_2} + f_{sh_2}}{J_{G_2}} & 0 & 0 & \frac{k_{sh_2}}{J_{G_2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f_L}{J_L} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2(\mathbf{p}) = \left[ \frac{1}{J_M}, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T,$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} n_M \\ n_L \end{bmatrix}$$

On suppose que les bruits de mesure sont centrés et blancs:

$$E_t\{\mathbf{w}(t)\} = 0, \quad E_t\{\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{W} \cdot \delta_{tk} \quad (3.34)$$

Dans la relation ci-dessus,  $\mathbf{W}$  est une matrice symétrique et définie positive et  $\delta_{tk}$  vaut 1 si  $t = k$  et 0 autrement.



Les matrices  $\mathbf{A}_2^d$ ,  $\mathbf{C}_2$  et  $\mathbf{W}$  et le vecteur  $\mathbf{b}_2^d$  étant supposés constants, le système et les bruits sont stationnaires si bien que l'on peut utiliser le filtre Kalman stationnaire [46] pour estimer le vecteur d'état du système ( $\mathbf{x}_2$ ):

$$\hat{\mathbf{x}}_2(t+1) = \mathbf{A}_2^d \cdot \hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{b}_2^d \cdot u(t) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_2 \cdot (\mathbf{A}_2^d \cdot \hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{b}_2^d \cdot u(t))) \quad (3.35)$$

où  $\mathbf{k}$  représente le gain du filtre Kalman:

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}_2^d \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{C}_2^T \cdot [\mathbf{W} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{C}_2^T]^{-1} \quad (3.36)$$

et  $\mathbf{p}_{Ric}$  est la solution de l'équation de Riccati suivante:

$$\mathbf{p}_{Ric} = \mathbf{A}_2^d \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{A}_2^{dT} - \mathbf{A}_2^d \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{C}_2^T [\mathbf{W} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{C}_2^T]^{-1} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{p}_{Ric} \cdot \mathbf{A}_2^{dT} \quad (3.37)$$

Lors de l'utilisation des relations (3.35), (3.36) et (3.37) pour la reconstruction des états du système dans l'intervalle temporel  $[\hat{t}_c, \hat{t}_b]$ , il faudra tenir compte des remarques suivantes:

1. Seules les estimations des paramètres linéaires sont disponibles. Nous remplaçons donc  $\mathbf{A}_2(\mathbf{p}^*)$  par  $\mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{p}})$ . Notez que même avec ce remplacement, nous n'avons pas besoin de considérer le bruit d'état,  $\mathbf{v}$ , et d'utiliser la forme suivante:

$$\mathbf{x}_2(t+1) = \mathbf{A}_2^d(\hat{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2^d(\hat{\mathbf{p}}) \cdot u(t) + \mathbf{v} \quad (3.38)$$

En fait, le vecteur  $\mathbf{v}$  correspond à la partie non déterministe de la commande (erreur de modélisation, imperfection des actionneurs, et perturbations externes). Il entraîne l'évolution aléatoire de l'état d'un système dynamique entre les instants de mesure (voir section 4.1.5.3 de [82]). Cette évolution ne nous concerne pas parce que nous n'avons utilisé le filtre Kalman que pendant la période d'activité du jeu où l'erreur de modélisation n'existe pas, et que l'estimation des paramètres linéaires ne change pas entre les instants de mesure.

2. La condition initiale  $\hat{\mathbf{x}}(t_c)$  n'est pas connue. Sachant que  $t_c$  est très proche de  $t_s$  (l'instant où le système entre dans le régime stationnaire), nous approximations  $\hat{\mathbf{x}}_2(t_c)$  par l'état stable. Nous calculons  $\hat{\mathbf{x}}(t_c)$  de la manière suivante:

- on calcule l'état stable:

L'état stable peut être trouvé à partir des équations différentielles (3.31), en considérant  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  où  $\mathbf{x} = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_{G_1}, \dot{\phi}_{G_2}, \dot{\phi}_L, \phi_M - \phi_{G_1}, \phi_{G_1} - \phi_{G_2}, \phi_{G_1} - \phi_{G_2}, \phi_{G_2} - \phi_L]^T$ . En supposant une entrée positive, on obtient:

$$\mathbf{x}(t_s) = [a \cdot g_s, a \cdot g_s, a \cdot g_s, a \cdot g_s, \frac{f_{G_1} + f_{G_2} + f_L}{k_{sh1}} a \cdot g_s, \frac{f_{G_2} + f_L}{k_{sh2}} a \cdot g_s, \frac{f_L}{k_{sh3}} a \cdot g_s + \theta] \quad (3.39)$$

où  $g_s = \frac{1}{f_{G_1} + f_{G_2} + f_L + f_M}$  est le gain statique.

- on n'utilise que les six premières variables d'état, car la septième,  $\phi_{G_2} - \phi_L$ , n'intervient pas dans  $\mathbf{x}_2$ .
- on remplace les paramètres par leurs estimations.
- on utilise le gain statique estimé par la relation (3.16) qui est plus précis que celui estimé par  $\hat{g}_s = \frac{1}{\hat{f}_{G_1} + \hat{f}_{G_2} + \hat{f}_L + \hat{f}_M}$ .

Finalement, nous considérons :

$$\hat{\mathbf{x}}(t_c) = [a.\hat{g}_s, a.\hat{g}_s, a.\hat{g}_s, a.\hat{g}_s, \frac{\hat{f}_{G_1} + \hat{f}_{G_2} + \hat{f}_L}{\hat{k}_{sh_1}} a.\hat{g}_s, \frac{\hat{f}_{G_2} + \hat{f}_L}{\hat{k}_{sh_2}} a.\hat{g}_s] \quad (3.40)$$

La vitesse estimée de la dernière inertie avant le jeu est  $\hat{\phi}_{G_2}(t) = \hat{x}_{2_3}(t)$ .

### 3.6.3 Résultats de simulation avec l'entrée échelon

Le diagramme bloc de la figure 3.20 est simulé en utilisant les valeurs de le tableau E.1 de l'annexe E, fournie par la compagnie ALSTOM. La vitesse maximum permise du moteur est  $\omega_{M_{max}} = 157 \frac{rad}{s}$ .

Nous estimons d'abord les paramètres linéaires du système pour 4 cas différents, correspondant à 4 combinaisons différentes des variances des bruits de mesures de la vitesse du moteur et de la vitesse de la charge. Les résultats de ces estimations sont fournis dans l'annexe E. Nous estimons ensuite le jeu par deux méthodes: 1) estimation en utilisant les instants de commutations, 2) estimation en minimisant le critère de moindres carrés. Les simulations sont effectuées pour deux valeurs différentes de l'amplitude du jeu:  $\theta = 2^\circ$  et  $5^\circ$ .

#### 3.6.3.1 Estimation du jeu en utilisant les instants de commutations

Le gain statique estimé est  $\hat{g}_s = 500$ . Sachant que  $\omega_{M_{max}} = 157 \frac{rad}{s}$ , l'amplitude maximum de l'entrée échelon est  $a_{max} = \frac{157}{500} = 0.31$ . Le système entre dans le régime stationnaire en  $t_s = 250$  s.

La constante de temps de la rotation de charge,  $\alpha$ , est estimée par la formule (3.26) avec  $N_\alpha = 100$ ,  $t_1 = t_s + 0.15$  s et  $t_2 = t_s + 0.2$  s (pour  $\theta = 2^\circ$ ),  $t_1 = t_s + 0.3$  s et  $t_2 = t_s + 0.35$  s (pour  $\theta = 5^\circ$ ), et en utilisant l'entrée  $C_M(t) = 0.9a_{max}(1(t) - 1(t - t_s))$ . On obtient alors,  $\hat{\alpha} = 7.1 \times 10^{-3}$  pour  $\theta = 2^\circ$ , et  $\hat{\alpha} = 6.9 \times 10^{-3}$  pour  $\theta = 5^\circ$  (valeur exacte de  $\alpha$  est  $7.35 \times 10^{-3}$ ).

Ensuite, en appliquant l'entrée  $C_M(t) = 0.9a_{max}(1(t) - 1(t - t_s))$ , les instants de commutations,  $t_c$  et  $t_b$ , sont estimés en utilisant les relations (3.24) et (3.25), où  $\delta t_1 = \delta t_2 = 0.5\delta t_3$

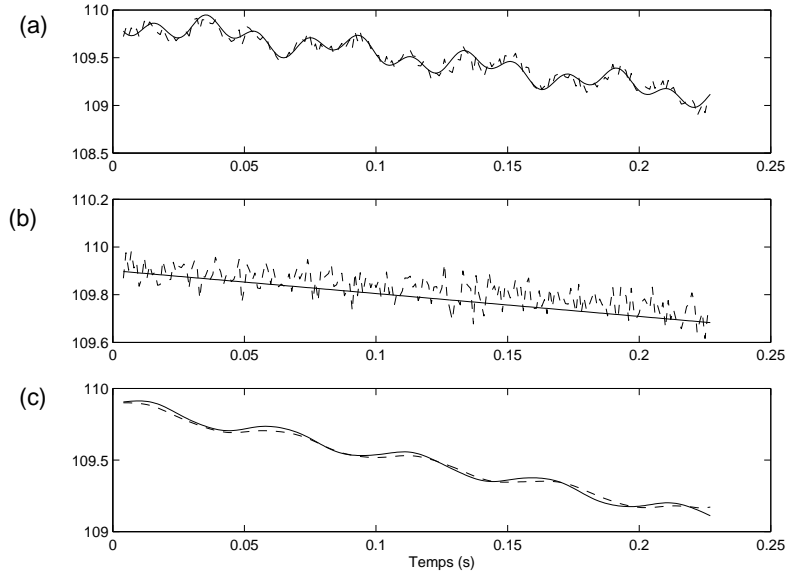


Figure 3.21: (a) Vitesses du moteur, mesurée (ligne solide) et estimée par le filtre de Kalman (ligne coupée). (b) Vitesses de la charge, mesurée (ligne solide) et estimée par le filtre de Kalman (ligne coupée). (c) Vitesse reconstruite de la dernière inertie (ligne coupée) est comparée avec la vraie vitesse (ligne solide). L'instant 0 correspond à  $\hat{t}_c$ .  $\theta^* = 2^\circ$ .

et  $\delta t_3 = 0.22$  s pour  $\theta = 2^\circ$ , et  $\delta t_3 = 0.37$  s pour  $\theta = 5^\circ$ . La vitesse reconstruite de la dernière inertie avant l'engrenage,  $\hat{\phi}_{G_2}(t)$ , dans l'intervalle  $\hat{t}_c < t < \hat{t}_b$  est montrée dans la figure 3.21 (pour une expérience). Afin de montrer la précision du filtre de Kalman utilisé, les vitesses reconstruites et les vitesses mesurées du moteur et de la charge sont aussi montrées dans la même figure.

Nous considérons quatre cas différents, correspondant à 4 combinaisons différentes des variances des bruits de mesure:

- cas 1:  $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ,
- cas 2:  $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-5}$ ,
- cas 3:  $var_{n_M} = 0.1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ,
- cas 4:  $var_{n_M} = 1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ .

Les résultats de l'estimation en utilisant (3.21), notée  $\hat{\theta}_{com}$ , sont présentés dans le tableau 3.3.

$\theta^* = 2^\circ \equiv 3,49 \times 10^{-2} \text{ rad}$									
	$\hat{\theta}_{com}$			$\hat{\theta}_{comcr}$			$\hat{\theta}_{mcr}$		
	$10^2 \bar{\theta}_{com}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{com}}$	$10^2 \bar{\theta}_{comcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{comcr}}$	$10^2 \bar{\theta}_{mcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{mcr}}$
Cas 1	3,65	4.7	1.6	3,49	0.05	0.24	3.8	8.75	0.46
Cas 2	3,69	5.9	3.43	3.53	1.24	1.13	3.71	6.5	0.84
Cas 3	2.9	16.5	12.8	2.83	18.1	1	3.89	11.5	0.84
Cas 4	2.78	20	7.89	2.7	22	6	2.82	19	0.7
$\theta^* = 5^\circ \equiv 8.73 \times 10^{-2} \text{ rad}$									
	$\hat{\theta}_{com}$			$\hat{\theta}_{comcr}$			$\hat{\theta}_{mcr}$		
	$10^2 \bar{\theta}_{com}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{com}}$	$10^2 \bar{\theta}_{comcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{comcr}}$	$10^2 \bar{\theta}_{mcr}$	$err\%$	$10^3 \sigma_{\theta_{mcr}}$
Cas 1	8.74	0.59	1.36	8.78	0.17	0.27	9.77	12	0.1
Cas 2	8.83	1.2	3.9	8.79	0.75	0.61	9.82	12.6	0.8
Cas 3	8.83	1.18	9.3	8.7	0.3	2.3	10.28	17.8	3.98
Cas 4	19.6	124	6	17.8	105	4	14.3	64	0.55

Table 3.3: Estimations de  $\theta$  pour différentes variances des bruits de mesure.  $\hat{\theta}_{com}$ : estimation en utilisant les instants de commutations,  $\hat{\theta}_{comcr}$ : estimation de moindres carrés en utilisant  $\hat{\theta}_{com}$ ,  $\hat{\theta}_{mcr}$  estimation de moindres carrés sans utilisation de  $\hat{\theta}_{com}$ .

### 3.6.3.2 Estimation du jeu par la méthode de moindres carrés

Le tableau 3.3 montre aussi les résultats de l'estimation de  $\theta$  en utilisant (3.13), (3.14) et (3.28) avec  $t_0 = 250 \text{ s}$  et l'entrée  $C_M(t) = 0.6a_{max}(1(t) - 1(t - t_s))$ . La durée du test correspond au temps nécessaires pour la production de deux commutations:  $T_i = 0.35 \text{ s}$  pour  $\theta = 2^\circ$ , et  $T_i = 0.65 \text{ s}$  pour  $\theta = 5^\circ$ . On considère les deux cas suivants.

1. Le critère (3.13) est minimisé sur l'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$  (ici, entre 0 et  $10^\circ$ ). L'estimation obtenue est notée  $\hat{\theta}_{mcr}$ .
2. Le critère (3.13) est minimisé sur l'intervalle  $[0.9\hat{\theta}_{com}, 1.1\hat{\theta}_{com}]$ , où  $\hat{\theta}_{com}$  est l'estimation obtenue en utilisant les instants de commutations. L'estimation obtenue dans ces conditions est notée  $\hat{\theta}_{comcr}$ .

On constate que l'utilisation des instants de commutations améliore la précision de l'estimation de  $\theta$ , sauf si le bruit est fort. En fait, l'estimation des instants de commutations étant sensible aux bruits, la précision de l'estimation de  $\theta$  se dégrade en augmentant la variance du bruit.

### 3.6.4 Résultats de simulation de l'estimation du jeu en utilisant une entrée créneaux

L'utilisation d'une entrée créneaux au lieu de deux entrées échelon utilisées dans la partie précédente peut améliorer l'estimation du jeu. En fait, on peut moyenner les estimations obtenues sur différentes périodes de l'entrée pour obtenir une meilleure estimation. Dans ce cas, la procédure d'identification du jeu, en utilisant les instants de commutations, est la suivante.

#### 3.6.4.1 Procédure d'identification du jeu en utilisant les instants de commutations

1. Calculer le temps de montée,  $t_r$ , le gain statique,  $g_s$ , et l'amplitude maximum de l'entrée échelon.
2. Appliquer un signal créneaux de période  $2t_r$  et de rapport cyclique 0.5.
3. Pour chaque montée et chaque descente du signal créneaux (sauf la première, à l'instant 0):
  - estimer les deux premiers instants de commutations,
  - mesurer (ou reconstruire) la dérivée de l'entrée du modèle de zone morte,
  - estimer l'amplitude du jeu avec la relation (3.18),
  - [optionnel] minimiser le critère de moindres carrés (3.13) sur un petit intervalle au voisinage de l'estimation obtenue.
4. Calculer la moyenne des estimations obtenues pour chaque demi-période du signal créneaux.

Nous rappelons que le jeu peut être également identifié en minimisant directement le critère de moindre carrés (3.13) sans utilisation des instants de commutations.

#### 3.6.4.2 Résultat de simulation

En utilisant la procédure mentionnée, nous procédons à l'identification du jeu dans le système d'entraînement électro-mécanique avec trois axes. Pour évaluer la sensibilité des estimateurs du jeu à l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires, ces paramètres sont déviés de leurs vraies valeurs en utilisant la formule suivante:

$$p_i = p_i^* + \text{sign}(\text{rand})\text{Err}_p \quad (3.41)$$

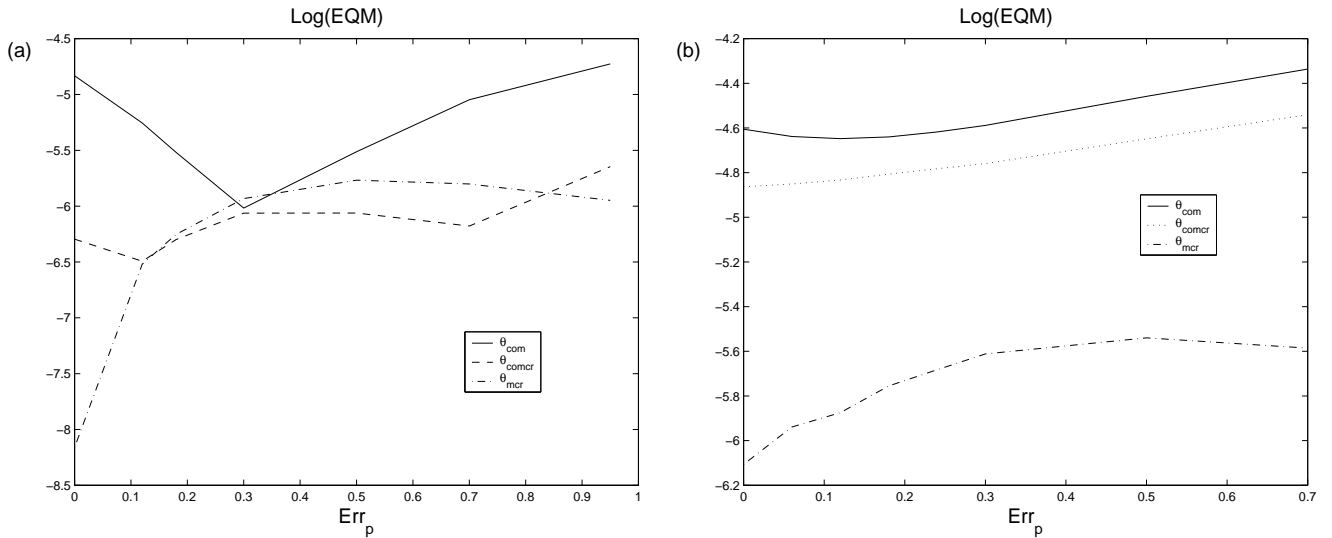


Figure 3.22: EQM en fonction de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires pour les trois estimateurs (a) bruit faible, (b) bruit fort.

où  $sign(rand)$  est une valeur aléatoire qui prend l'une des valeurs 1 ou -1, déterminant ainsi le sens de la déviation du paramètre de sa vraie valeur de manière aléatoire, et  $Err_p$  une constante positive déterminant la valeur absolue de cette déviation.

Les trois estimateurs de  $\theta$ , à savoir  $\hat{\theta}_{com}$ ,  $\hat{\theta}_{mcr}$  et  $\hat{\theta}_{comcr}$  sont obtenus pour les deux cas de bruits de mesures faibles ( $var_{n_M} = 0.01$  et  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ) et forts ( $var_{n_M} = 0.1$  et  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ). La figure 3.22 montre EQM en fonction de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires. On peut constater que dans le cas du bruit fort,  $\hat{\theta}_{mcr}$  est considérablement meilleur que les deux autres estimateurs, car l'estimation des instants de commutations est assez sensible aux bruits de mesure. Dans le cas du bruit faible, c'est  $\hat{\theta}_{comcr}$  qui fournit la meilleure performance. Il faut souligner que contrairement au système avec un seul axe, l'estimation basée sur les instants de commutations n'est pas indépendante de l'erreur de l'estimation des paramètres linéaires. C'est parce que la reconstruction de vitesse de la dernière inertie avant l'engrenage dépend de ces paramètres. Ceci explique la baisse de performance des estimateurs basés sur l'estimation des instants de commutations par rapport au système avec un seul axe.

Le critère de moindres carrés et les estimateurs obtenus pour une expérience de simulation sont montrés dans la figure 3.23.

Une étude comparative avec une méthode classique de Programmation Non Linéaire PNL qui identifierait  $\theta$  et les paramètres linéaires en même temps, serait utile pour comprendre l'influence des erreurs sur  $\mathbf{p}$ . Néanmoins, la dimension du problème de minimisation est importante ( $dim(\mathbf{p}) + dim(\theta) = 15$ ), ce qui rend peu envisageable cette méthode comme

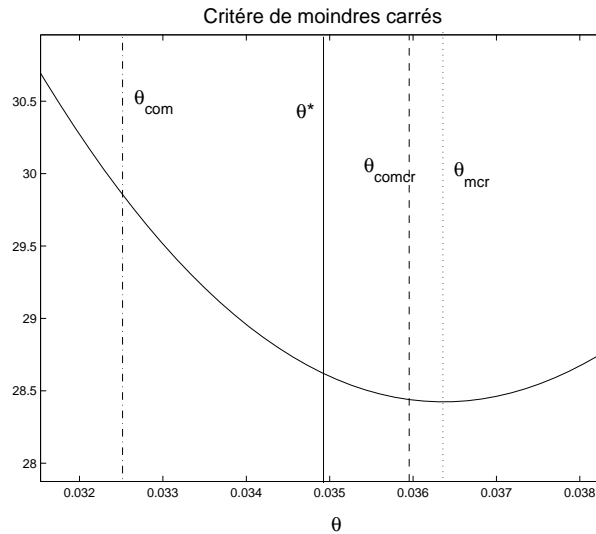


Figure 3.23: Critère de moindres carrés et la position des trois estimateurs par rapport à la vraie valeur du paramètre ( $\theta^*$ ).

alternative.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche pour identifier le jeu d'engrenage, modélisé par le modèle de zone morte, dans un système d'entraînement électro-mécanique. A partir de l'étude de l'identifiabilité, nous avons proposé une planification d'expérience qui garantit l'unicité de l'estimation. L'estimation du jeu a été effectuée par deux méthodes: 1) estimation en utilisant une relation entre les instants de commutations, la dérivée de l'entrée du modèle de zone morte, et l'amplitude du jeu, 2) estimation en minimisant un critère de moindres carrés (globalement ou au voisinage de l'estimation obtenue par la première méthode). Les résultats de simulation montrent que l'utilisation des instants de commutations, rend l'approche plus robuste vis-à-vis des erreurs de l'estimation des paramètres des dynamiques linéaires du système. L'approche est sensible aux bruits de mesure, ce qui rend difficile l'estimation des instants de commutations.

Dans la dernière partie de ce chapitre, la méthode d'identification, développée initialement pour un système avec un seul axe, a été généralisée à un système contenant trois axes où nous avons également proposé une méthode pour estimer les paramètres des dynamiques linéaires de ce système. Ces méthodes ont été ensuite testées en simulation sur un système de la compagnie ALSTOM. Les résultats de simulation confirment la pertinence des méthodes proposées, même si les estimateurs basés sur l'estimation des instants

de commutations n'ont pas la même performance que dans le cas du système avec un seul axe.





## Chapitre 4

# Identification du frottement et la compensation fixe

### 4.1 Introduction

Dans la section 2.5, nous avons étudié le phénomène de frottement et ses différents modèles. L'objectif de ce chapitre est l'identification du modèle de Karnopp de frottement en vue de son utilisation pour la compensation fixe du frottement dans un actionneur électrique et dans un actionneur électro-pneumatique.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la compensation du frottement. Dans [3], plus de 100 articles concernant ce sujet sont cités et la *compensation fixe* (compensation à base de modèle avec paramètres fixes) est présentée comme une approche importante. Cette approche consiste à:

1. choisir un modèle de frottement,
2. identifier les paramètres du modèle,
3. compenser le frottement en utilisant le modèle identifié.

Le modèle de frottement que nous choisissons est le modèle de Karnopp. Ce choix est justifié dans la section 4.2 et le modèle est détaillé dans la section 4.3. L'identification du modèle de Karnopp symétrique a été déjà effectuée [14] en utilisant une méthode d'optimisation nonlinéaire pour estimer tous les paramètres simultanément. L'algorithme souffre donc des problèmes de convergence des algorithmes d'optimisation nonlinéaire. Les auteurs n'ont pas considéré les effets du bruit de mesure ni étudié théoriquement l'identifiabilité du modèle. Dans la section 4.4, nous proposons une approche originale en trois étapes pour l'identification des modèles asymétriques et symétriques de Karnopp.

La première étape est basée sur l'interprétation physique du modèle de Karnopp dans les périodes de décollage. On se sert d'un modèle de régression linéaire pour estimer la masse et les paramètres du frottement de décollage. Dans la deuxième étape, une méthode de seuillage est utilisée pour estimer la vitesse limite du passage entre les périodes de décollage et de collage. Dans la troisième étape, une méthode d'optimisation non linéaire permet d'identifier les paramètres du frottement de collage. Pour cette troisième étape, une autre méthode qui consiste à optimiser un critère basé sur la fonction caractéristique<sup>1</sup> sera également proposée. La fonction caractéristique est souvent utilisée pour analyser les nonlinéarités, concevoir les compensateurs, et étudier la stabilité [4], mais à notre connaissance, c'est la première fois qu'elle est utilisée pour l'identification. Le critère obtenu en utilisant cette fonction étant considérablement plus lisse que le critère temporel, son optimisation est plus facile à effectuer.

Notre méthode d'identification est en liaison directe avec une étude théorique d'identifiabilité, également en trois étapes, que nous effectuons préalablement. Nous garantissons ainsi l'identifiabilité structurelle globale du modèle, en utilisant la méthode d'identification proposée.

La section 4.5 est consacrée à la compensation fixe de frottement dans un actionneur électrique et dans un actionneur électro-pneumatique en utilisant le modèle de Karnopp identifié de frottement.

Tout erreur d'identification du modèle peut aboutir à une compensation incorrecte du frottement. La sur-compensation engendre des oscillations et la sous-compensation introduit une erreur statique dans le signal de sortie. Pour faire face au problème de sur-compensation d'un actionneur électrique, une méthode de conception de contrôleur robuste a été déjà proposée [24], où un modèle simple de frottement (Coulomb) a été utilisé. Nous nous inspirons de ce travail pour proposer une conception robuste dans l'actionneur électrique quand le frottement est caractérisé par le modèle de Karnopp.

Dans le cas de l'actionneur électro-pneumatique, le problème est encore plus difficile. Même si le modèle de frottement est correctement identifié, l'existence de la dynamique de servo-valve entre le signal de commande et la composante engendrant le frottement peut aboutir à la compensation incorrecte du frottement. Pour éliminer l'erreur statique due à la sous-compensation, nous proposons une méthode qui consiste à renforcer la compensation du frottement à vitesse nulle.

Dans la section 4.6, nous présentons les résultats de simulation de l'actionneur électrique, et les résultats expérimentaux en temps réel obtenus avec l'actionneur électro-pneumatique.

---

<sup>1</sup>Describing function

## 4.2 Pourquoi le modèle de Karnopp?

Dans [3], de nombreux études et rapports industriels concernant la compensation à base de modèles caractérisant les frottements Coulomb, visqueux et statique (voir section 2.5.1) sont cités. Alors que ces modèles sont très efficaces pour les grandes vitesses, ils peuvent aboutir à l'instabilité dans les algorithmes de compensation nécessitant une *vraie* vitesse nulle pour compenser correctement le frottement. Une solution à ce problème est l'utilisation du modèle de Karnopp [40], dans lequel la discontinuité entre le frottement de collage (statique) et le frottement de décollage (dynamique) survient à une vitesse très petite mais non nulle [3, 38].

Afin de surmonter ce problème de discontinuité et caractériser précisément le comportement de frottement, les modèles dynamiques de frottement à base d'état interne, tels que le modèle de Dahl [19] ou modèle de LuGre [24] (voir section 2.5.2), peuvent être utilisés. Néanmoins, les modèles dynamiques nécessitent une procédure d'identification compliquée [45] car l'état interne n'est pas mesurable, d'où la nécessité d'un observateur d'état. Ces modèles sont donc plutôt convenables pour modéliser les systèmes à très haute précision [68].

Le modèle de Karnopp est un bon compromis entre la simplicité et le représentation exacte des effets de frottement. Pour cette raison, nous allons étudier l'identification de ce modèle en vue de son utilisation pour la compensation fixe du frottement. Ce modèle a été déjà utilisé dans d'autres études [12,4,9], pour caractériser le frottement dans différents servomécanismes. Ces travaux montrent que le modèle de Karnopp fournit les réponses suffisamment correctes pour caractériser les effets principaux de frottement dans les systèmes étudiés.

## 4.3 Présentation détaillée du modèle de Karnopp

Le modèle de Karnopp peut être symétrique ou asymétrique. Dans le modèle asymétrique, les valeurs des paramètres changent avec le sens de la vitesse. Dans cette section, le modèle de Karnopp sera analysé afin d'utiliser son interprétation physique en vue de l'identification.

### 4.3.1 Modèle de Karnopp symétrique

Figure 2.10.a montre le diagramme bloc du modèle de Karnopp symétrique. L'entrée du modèle est la force externe,  $F_e$ , et sa sortie est la vitesse,  $\dot{y}$ . Le vecteur des paramètres à

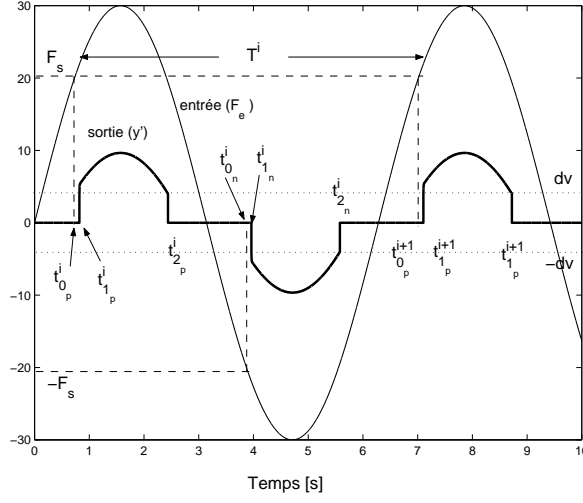


Figure 4.1: Simulation des mouvements du type collage-décollage par le modèle de Karnopp.

identifier est (voir la section 2.5.1)  $\mathbf{p}_{sym} = [m, F_c, F_v, dv, F_s]$  dont toutes les composantes sont positives. La force de frottement,  $F_f$ , est caractérisée par:

$$F_f = \begin{cases} F_{décol} = \begin{cases} F_c + F_v \cdot \dot{y}(t) & \dot{y}(t) \geq dv \\ -F_c + F_v \cdot \dot{y}(t) & \dot{y}(t) \leq -dv \end{cases} \\ F_{col} = \begin{cases} \min(F_e(t), F_s) & -dv < \dot{y}(t) < dv, F_e(t) \geq 0 \\ \max(F_e(t), -F_s) & -dv < \dot{y}(t) < dv, F_e(t) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

Figure 4.1 montre la sortie  $\dot{y}(t)$  de ce modèle pour une entrée sinusoïdale  $F_e(t)$  de période  $T$ . Une période  $T^i$  est composée de:

- une période positive de décollage :  $t_{1_p}^i \leq t \leq t_{2_p}^i$  où  $\dot{y}(t) \geq dv$  et une période négative de décollage :  $t_{1_n}^i \leq t \leq t_{2_n}^i$  où  $\dot{y}(t) \leq -dv$ . La sortie du modèle,  $\dot{y}(t)$ , est donnée par l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{y}(t) = F_e(t) - (F_c \cdot \text{sign}(\dot{y}(t)) + F_v \cdot \dot{y}(t)) \\ \dot{y}(t_{1_{p,n}}) = dv \cdot \text{sign}(F_e(t_{1_{p,n}})), \quad t_{1_{p,n}} \leq t \leq t_{2_{p,n}} \end{cases} \quad (4.2)$$

- deux périodes de collage:  $t_{2_p}^i < t < t_{1_n}^i$  et  $t_{2_n}^i < t < t_{1_p}^{i+1}$ . La sortie du modèle est  $\dot{y}(t) = 0$ .

Les instants  $t_{1_{n,p}}$  sont caractérisés par l'équation:

$$\left( \int_{t_{0_{p,n}}}^{t_{1_{p,n}}} (F_e(t) - F_s \cdot \text{sign}(F_e(t))) dt \right) = 2 \cdot dv \cdot m \cdot \text{sign}(F_e(t_{0_{p,n}})), \quad (4.3)$$

où les instants  $t_{0_{n,p}}$  satisfont les conditions:

$$F_e(t_{0_{p,n}}) = F_s \cdot \text{sign}(F_e(t_{0_{p,n}})) \quad \text{et} \quad \dot{F}_e(t_{0_{p,n}}) \cdot \text{sign}(F_e(t_{0_{p,n}})) > 0 \quad (4.4)$$

*Remarque:*

La sortie du modèle de Karnopp,  $\dot{y}$ , aux instants  $t_{1_p}^i$  et  $t_{1_n}^i$  égale  $dv$  et  $-dv$  respectivement (voir (4.2)). Cependant, dans la figure 4.1, on a l'impression que la sortie n'est pas tout-à-fait égale à ces valeurs. Ceci est en raison des valeurs numériques de  $m$ ,  $F_c$ ,  $F_v$ ,  $dv$  et  $F_s$  utilisées pour résoudre (4.2) et du fait que les changements de  $\dot{y}$  par rapport à l'échelle temporelle utilisée sont trop rapides à ces instants. Si on fait un agrandissement de la courbe autour de ces instants, on observe que l'égalité (4.2) est respectée.

### 4.3.2 Modèle de Karnopp asymétrique

Dans le modèle de Karnopp asymétrique, les valeurs des paramètres (à l'exception de la masse) ne sont pas identiques dans les périodes positives et négatives de décollage :

- $F_c = F_{c_p}$ ,  $F_v = F_{v_p}$ ,  $dv = dv_p$  pour les périodes positives de décollage ,
- $F_c = F_{c_n}$ ,  $F_v = F_{v_n}$ ,  $dv = dv_n$  pour les périodes négatives de décollage ,

Elles ne sont pas non plus identiques dans les périodes de collages pour les forces externes,  $F_e$ , positives et négatives:

- $F_s = F_{s_p}$  pour  $F_e \geq 0$ ,
- $F_s = F_{s_n}$  pour  $F_e < 0$ .

Ainsi, le vecteur des paramètres s'écrit:  $\mathbf{p}_{asym} = [m, F_{c_p}, F_{v_p}, dv_p, F_{c_n}, F_{v_n}, dv_n, F_{s_p}, F_{s_n}]$ .

Tous les paramètres à l'exception de  $F_{s_n}$  et  $dv_n$  sont supposés positifs.

La force de frottement s'écrit:

$$F_f(\mathbf{p}_{asym}) = \begin{cases} F_{décol} = \begin{cases} F_{c_p} + F_{v_p} \cdot \dot{y}(t) & \dot{y}(t) \geq dv_p \\ -F_{c_n} + F_{v_n} \cdot \dot{y}(t) & \dot{y}(t) \leq dv_n \end{cases} \\ F_{col} = \begin{cases} \min(F_e(t), F_{s_p}) & dv_n < \dot{y}(t) < dv_p, F_e(t) \geq 0 \\ \max(F_e(t), F_{s_n}) & dv_n < \dot{y}(t) < dv_p, F_e(t) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.5)$$

## 4.4 Identification des paramètres du modèle de Karnopp

Les travaux concernant l'identification des paramètres du modèle de Karnopp ne sont pas nombreux. Cheok *et al.* [14] identifient les paramètres d'un modèle de Karnopp symétrique en utilisant une version avancée de la méthode d'optimisation non linéaire *simplex* pour accélérer la convergence et augmenter la chance de trouver l'optimum global. Ils n'ont pas considéré les effets du bruit de mesure. L'identifiabilité des paramètres est expérimentalement garantie par l'application d'une excitation persistante comme le signal

d'entrée.

Comme le frottement peut être bien caractérisé par un modèle linéaire par rapport aux paramètres (LP) pour les grandes vitesses (frottement dynamique), les paramètres décrivant le comportement de frottement à ces vitesses peuvent être estimés en utilisant un modèle de régression linéaire. Cette méthode, utilisée très souvent (par exemple dans [24, 3]) pour certains modèles de frottement (mais pas le modèle de Karnopp) évite les problèmes de convergence des algorithmes d'optimisation non linéaire. Dans ce chapitre, cette idée sera appliquée au modèle de Karnopp pour estimer les paramètres du frottement de décollage et la masse. L'avantage de notre méthode par rapport à la méthode de Cheok *et al* est la réduction du nombre des paramètres qui doivent être estimés par l'optimisation non linéaire.

Nous utilisons la connaissance du comportement du modèle de Karnopp aux différentes vitesses pour démontrer l'identifiabilité structurelle du modèle selon Walter et Pronzato (voir section 2.3.1). Cette étude de l'identifiabilité est réalisée en trois étapes qui sont également utilisées pour identifier les paramètres du modèle. Les trois étapes d'identification des paramètres sont:

1. Première étape: un modèle de régression linéaire et la méthode de moindres carrés sont utilisés pour estimer les paramètres caractérisant le frottement de décollage et la masse ( $F_c$ ,  $F_v$  et  $m$  dans la figure 2.10.a).
2. Deuxième étape: une méthode de seuillage est utilisée pour estimer le paramètre caractérisant le passage entre le frottement de collage et le frottement de décollage ( $dv$  dans la figure 2.10.a).
3. Troisième étape: une méthode d'optimisation non linéaire est utilisée pour estimer le paramètre caractérisant le frottement de collage ( $F_s$  dans la figure 2.10.a).

Nous montrons que la connaissance du modèle permet de déterminer un intervalle précis et limité, dans lequel le paramètre identifié par l'optimisation non linéaire,  $F_s$ , sera recherché. Ainsi, le minimum global peut être trouvé plus facilement. Nous proposons deux critères différents pour estimer  $F_s$ : un critère temporel et un critère basé sur le premier harmonique, qui est considérablement plus lisse que le critère temporel. Le premier harmonique peut être calculé soit numériquement à partir des transformées de Fourier des signaux, soit analytiquement en utilisant la fonction caractéristique du modèle de Karnopp. La fonction caractéristique [4] a été déjà utilisée pour l'analyse (et pas pour l'identification) du frottement [3, 2]. Nous montrons qu'en utilisant le critère basé sur la fonction caractéristique, la durée du test d'identification est considérablement réduite.

Les paramètres sont estimés par une procédure hors-ligne, qui permet l'application des entrées riches, de sorte que l'identification soit plus fiable. Le test d'identification est effectué en boucle fermée avec un relais de façon à ce que l'entrée du système (l'actionneur électrique ou électro-pneumatique), soit la sortie du relais. L'avantage principal d'une telle approche est qu'elle permet facilement la production d'oscillation avec l'amplitude et la fréquence contrôlables dans le signal de position. Ainsi, on peut assurer à la fois le fonctionnement du système dans un domaine convenable des valeurs de sortie (position), et la reconstruction précise des signaux de vitesse et d'accélération à partir de la dérivation numérique du signal de position.

Dans la suite, nous étudions d'abord l'identifiabilité du modèle, et nous développons ensuite la méthode d'identification pour les modèles symétriques et asymétriques.

#### 4.4.1 Approche de transformée de Laplace pour la vérification de l'identifiabilité

Cette approche a été initialement proposée dans le contexte de la modélisation de systèmes biologiques [83]. Considérez la structure invariant dans le temps  $M$ , décrite par l'équation d'état suivante:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(\mathbf{p}) \\ \mathbf{y}_m = \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{u} \end{cases}$$

Après l'élimination de l'état dans la transformée de Laplace de l'équation ci-dessus, on obtient:

$$\mathbf{y}_m(s, \mathbf{p}) = \mathbf{H}_1(s, \mathbf{p})\mathbf{u}(s) + \mathbf{H}_2(s, \mathbf{p})\mathbf{x}_0(\mathbf{p})$$

avec

$$\mathbf{H}_1(s, \mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p})[s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{p})]^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{p}) + \mathbf{D}(\mathbf{p})$$

et

$$\mathbf{H}_2(s, \mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p})[s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{p})]^{-1}.$$

$M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$  si et seulement si

$$\mathbf{y}_m(s, \mathbf{p}_1) - \mathbf{y}_m(s, \mathbf{p}_2) \equiv 0 \quad \forall s, \mathbf{u}(s)$$

En mettant les matrices de transfert,  $\mathbf{H}(s, \mathbf{p}_1)$  et  $\mathbf{H}(s, \mathbf{p}_2)$ , sous *forme canonique*, c'est à dire sous une forme telle qu'il existe une façon unique de l'écrire, on peut simplifier considérablement le calcul, car dans ce cas  $M(\mathbf{p}_1) = M(\mathbf{p}_2)$  si et seulement si les coefficients de  $\mathbf{H}(s, \mathbf{p}_1)$  et  $\mathbf{H}(s, \mathbf{p}_2)$  ont les mêmes valeurs pour  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2$ . Cette forme



canonique s'obtient, par exemple, en écrivant chaque élément des matrices de transfert comme le rapport de deux polynômes ordonnés en  $s$ , à condition de simplifier le numérateur et le dénominateur par leur **PGCD** et de fixer à un, le coefficient de plus bas (ou de plus haut) degré en  $s$  du dénominateur.

#### 4.4.2 Identifiabilité structurelle du modèle de Karnopp

Nous montrons qu'il existe une entrée pour laquelle, si deux ensembles de paramètres du modèle de Karnopp asymétrique, *i.e.*  $\mathbf{p}_{asym_1}$  et  $\mathbf{p}_{asym_2}$ , engendrent la même sortie, alors  $\mathbf{p}_{asym_1} = \mathbf{p}_{asym_2}$  (voir section 2.3.1).

Pour simplifier la discussion, une entrée sinusoïdale  $F_e(t)$  de période  $T$  est appliquée de façon à ce que les périodes positives et négatives de décollage dans la sortie  $\dot{y}(t)$  existent (voir Figure 4.1). Nous présentons la preuve pour cette entrée. Elle est pourtant généralisable à n'importe quelle entrée pouvant engendrer les périodes positives et négatives de décollage dans la sortie.

Les sorties de deux modèles sont notées par  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2})$ . Vu la périodicité de ces deux sorties, nous montrons que pour l'entrée mentionnée:

$$\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2}), t \in [0, T] \Rightarrow \mathbf{p}_{asym_1} = \mathbf{p}_{asym_2}$$

Chacun des signaux  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2})$ ,  $t \in [0, T]$  comprend deux périodes de décollage, l'une positive et l'autre négative (voir Figure 4.1). Les instants du début et de la fin de chaque période positive de décollage dans les deux modèles sont notés par  $t_{1p_{m1}}$ ,  $t_{1p_{m2}}$  et  $t_{2p_{m1}}$ ,  $t_{2p_{m2}}$ . Pour les périodes négatives de décollage, les notations  $t_{1n_{m1}}$ ,  $t_{1n_{m2}}$  et  $t_{2n_{m1}}$ ,  $t_{2n_{m2}}$  sont utilisées. Pendant les périodes de collage,  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2}) = 0$ . Ainsi, si  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2})$ ,  $t \in [0, T]$ , on peut écrire:

$$t_{1p_{m1}} = t_{1p_{m2}} = t_{1p}, t_{2p_{m1}} = t_{2p_{m2}} = t_{2p} \text{ et } \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2}) \quad t \in [t_{1p}, t_{2p}] \quad (4.6)$$

$$t_{1n_{m1}} = t_{1n_{m2}} = t_{1n}, t_{2n_{m1}} = t_{2n_{m2}} = t_{2n} \text{ et } \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2}) \quad t \in [t_{1n}, t_{2n}] \quad (4.7)$$

L'identifiabilité structurelle globale du modèle de Karnopp asymétrique est alors prouvée par les propositions suivantes:

**Proposition 4.1** *L'identifiabilité structurelle globale des paramètres  $\{F_{c_p}, F_{v_p}, dv_p\}$ ,  $\{F_{c_n}, F_{v_n}, dv_n\}$  et de la masse  $m$ , est assurée par l'égalité des sorties de deux modèles,  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2})$ , pendant les périodes de décollage.*

*Démonstration* . Dans la suite, seuls les paramètres  $F_{c_p}$ ,  $F_{v_p}$  et  $dv_p$  sont considérés. Le même raisonnement peut être ensuite appliqué aux paramètres  $F_{c_n}$ ,  $F_{v_n}$  et  $dv_n$ .

- $dv_p$  est structurellement globalement identifiable (s.g.i.).

Etant donné que  $\dot{y}_m(t_{2p_{m_1}}, \mathbf{p}_{asym_1}) = dv_{p_1}$  et  $\dot{y}_m(t_{2p_{m_2}}, \mathbf{p}_{asym_2}) = dv_{p_2}$ , et vu la relation (4.6), on peut écrire:  $dv_{p_1} = dv_{p_2}$ , ce qui signifie que  $dv_p$  est s.g.i.

- $m$ ,  $F_{c_p}$  et  $F_{v_p}$  sont s.g.i.

Les sorties des modèles  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2})$ , durant la période positive de décollage,  $t_{1p} \leq t \leq t_{2p}$ , peuvent être exprimées par les équations différentielles suivantes (voir (4.2) pour le modèle asymétrique):

$$\begin{cases} F_e(t) = m_1 \cdot \ddot{y}(t, \mathbf{p}_{asym_1}) + F_{c_{p_1}} + F_{v_{p_1}} \cdot \dot{y}(t, \mathbf{p}_{asym_1}) \\ \dot{y}(t_{1p}, \mathbf{p}_{asym_1}) = dv_{p_1} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F_e(t) = m_2 \cdot \ddot{y}(t, \mathbf{p}_{asym_2}) + F_{c_{p_2}} + F_{v_{p_2}} \cdot \dot{y}(t, \mathbf{p}_{asym_2}) \\ \dot{y}(t_{1p}, \mathbf{p}_{asym_2}) = dv_{p_2} \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $dv_{p_0} = dv_{p_1} = dv_{p_2}$ , car  $dv_p$  est s.g.i. En définissant  $F_{e_1}(t) = F_e(t - t_{1p})$  et

$$\dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_1}) = \dot{y}_m(t - t_{1p}, \mathbf{p}_{asym_1}), \quad \dot{y}_m(t, \mathbf{p}_{asym_2}) = \dot{y}_m(t - t_{1p}, \mathbf{p}_{asym_2}),$$

la transformation de Laplace peut être appliquée à la relation (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_1}) &= \frac{s \cdot F_{e_1}(s) + s \cdot m_1 \cdot dv_{p_0} - F_{c_{p_1}}}{s \cdot (s \cdot m_1 + F_{v_{p_1}})} \\ &= H_1(s, \mathbf{p}_{asym_1}) \cdot F_{e_1}(s) + H_2(s, \mathbf{p}_{asym_1}) \cdot dv_{p_0} - H_3(s, \mathbf{p}_{asym_1}) \\ \dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_2}) &= \frac{s \cdot F_{e_1}(s) + s \cdot m_2 \cdot dv_{p_0} - F_{c_{p_2}}}{s \cdot (s \cdot m_2 + F_{v_{p_2}})} \\ &= H_1(s, \mathbf{p}_{asym_2}) \cdot F_{e_1}(s) + H_2(s, \mathbf{p}_{asym_2}) \cdot dv_{p_0} - H_3(s, \mathbf{p}_{asym_2}) \end{aligned}$$

En écrivant les fonctions de transfert  $H_i(s, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $H_i(s, \mathbf{p}_{asym_2})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sous forme canonique, on obtient les représentations suivantes de  $\dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_2})$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_1}) &= \frac{\frac{1}{m_1} s \cdot F_{e_1}(s) + s \cdot dv_{p_0} - \frac{F_{c_{p_1}}}{m_1}}{s \cdot (s + \frac{F_{v_{p_1}}}{m_1})} \\ \dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_2}) &= \frac{\frac{1}{m_2} s \cdot F_{e_1}(s) + s \cdot dv_{p_0} - \frac{F_{c_{p_2}}}{m_2}}{s \cdot (s + \frac{F_{v_{p_2}}}{m_2})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'égalité de  $\dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_1})$  et  $\dot{y}_m(s, \mathbf{p}_{asym_2})$  dans (4.9) implique l'égalité de leurs numérateurs et leurs dénominateurs, d'où  $m_1 = m_2$ ,  $F_{c_{p_1}} = F_{c_{p_2}}$  et  $F_{v_{p_1}} = F_{v_{p_2}}$ . Ainsi,  $m$ ,  $F_{c_p}$  et  $F_{v_p}$  sont s.g.i.



**Proposition 4.2** *L'identifiabilité structurelle globale des paramètres  $F_{s_p}$  et  $F_{s_n}$  est assurée par l'identifiabilité structurelle globale de  $dv_p$ ,  $dv_n$  et  $m$ .*

*Démonstration .* Nous montrons que si  $F_{s_p}$  n'est pas s.g.i. (i.e.  $F_{s_{p_1}} \neq F_{s_{p_2}}$ ) alors  $m_1 dv_{p_1} \neq m_2 dv_{p_2}$ , ce qui est faux, car  $m$  et  $dv_p$  sont s.g.i. Considérons le cas où  $F_{s_{p_2}} < F_{s_{p_1}}$ . Compte tenu des définitions de  $t_{0p_{m_1}}$  et  $t_{0p_{m_2}}$  dans la relation (4.4), on peut écrire:

$$\begin{aligned} F_e(t_{0p_1}) &= F_{s_{p_1}}, \quad \text{et} \quad \dot{F}_e(t_{0p_1}) > 0 \\ F_e(t_{0p_2}) &= F_{s_{p_2}}, \quad \text{et} \quad \dot{F}_e(t_{0p_2}) > 0 \end{aligned}$$

On en conclue que  $F_{s_{p_2}} < F_{s_{p_1}} \Rightarrow t_{0p_2} < t_{0p_1}$  et que:

$$\Delta F = ((F_e(t) - F_{s_{p_2}}) - (F_e(t) - F_{s_{p_1}})) > 0 \quad \text{et} \quad \left( \int_{t_{0p_2}}^{t_{0p_1}} (F_e(t) - F_{s_{p_1}}) dt \right) > 0 \quad (4.10)$$

Étant données la relation (4.6) et la définition de  $t_{1p}$  par (4.3):

$$\begin{aligned} 2m_1 \cdot dv_{p_1} &= \int_{t_{0p_1}}^{t_{1p}} (F_e(t) - F_{s_{p_1}}) \cdot dt \\ 2m_2 \cdot dv_{p_2} &= \int_{t_{0p_2}}^{t_{1p}} (F_e(t) - F_{s_{p_2}}) \cdot dt \end{aligned}$$

En développant le terme  $2(m_1 \cdot dv_{p_1} - m_2 \cdot dv_{p_2})$  et en utilisant l'équation (4.10), nous avons:

$$\begin{aligned} 2(m_1 \cdot dv_{p_1} - m_2 \cdot dv_{p_2}) &= \int_{t_{0p_1}}^{t_{1p}} (F_e(t) - F_{s_{p_1}}) \cdot dt - \int_{t_{0p_2}}^{t_{1p}} (F_e(t) - F_{s_{p_2}}) \cdot dt \\ &= - \int_{t_{0p_2}}^{t_{0p_1}} (F_e(t) - F_{s_{p_1}}) dt - \int_{t_{0p_2}}^{t_{1p}} \Delta F < 0 \end{aligned}$$

d'où  $m_1 \cdot dv_{p_1} < m_2 \cdot dv_{p_2}$ . Nous avons pourtant déjà montré que  $m$  et  $dv_p$  sont s.g.i., ce qui signifie  $m_1 dv_{p_1} = m_2 dv_{p_2}$ . Il s'en suit que l'hypothèse  $F_{s_{p_2}} < F_{s_{p_1}}$  ne peut pas être vraie.

Le même raisonnement peut être utilisé pour montrer que

$$F_{s_{p_2}} > F_{s_{p_1}} \Rightarrow m_1 dv_{p_1} > m_2 dv_{p_2},$$

ce qui n'est pas vrai étant donné que  $m$  et  $dv_p$  sont s.g.i.

Enfin, avec un raisonnement similaire, on montre que  $F_{s_n}$  est aussi s.g.i.



Compte tenu de ces deux propositions, tous les paramètres du modèle de Karnopp asymétrique sont s.g.i. Le modèle est donc s.g.i.

### 4.4.3 Identification du modèle de Karnopp symétrique

L'identification des paramètres du modèle de Karnopp symétrique est réalisée en trois étapes: 1) l'identification de  $F_c$ ,  $F_v$  et  $m$ , 2) l'identification de  $dv$ , 3) l'identification de  $F_s$  (pour plus de détails, voir Annexe G).

Première étape: identification de  $F_c$ ,  $F_v$  et  $m$ :

L'équation différentielle (4.2) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$F_e(t) = m.\ddot{y}(t) + F_c.sign(\dot{y}(t)) + F_v.\dot{y}(t). \quad (4.11)$$

Cette équation est linéaire par rapport aux paramètres  $F_c$ ,  $F_v$  et  $m$ . Ainsi, en définissant  $\mathbf{p}_{sym_1} = [m, F_c, F_v]$ , si les valeurs de  $\dot{y}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  et  $F_e(t)$  sont disponibles durant les périodes de décollage, le modèle de régression suivant peut être directement construit:

$$\hat{F}_e(t) = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\theta}^T \quad (4.12)$$

où

$$\boldsymbol{\phi} = [\ddot{y}(t) \quad sgn(\dot{y}(t)) \quad \dot{y}(t)] \quad (4.13)$$

et

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{p}_{sym_1} = [m \quad F_c \quad F_v]. \quad (4.14)$$

En utilisant le critère de moindres carrés sur l'erreur de la force appliquée (méthode de l'erreur d'entrée), le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  peut être estimé par:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \epsilon_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \epsilon_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t (F_e(t) - \hat{F}_e(t, \boldsymbol{\theta}))^2 \quad t \in [t_{1_{pn}}^i, t_{2_{pn}}^i], \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.15)$$

La fonction  $sgn$  dans (4.13) égale soit 1 (pour  $\dot{y}(t) > 0$ ) soit  $-1$  (pour  $\dot{y}(t) < 0$ ) et jamais zéro car  $\dot{y}(t)$  ne peut pas être nulle dans la période de décollage.

Pour caractériser les périodes de décollage  $[t_{1_{pn}}^i, t_{2_{pn}}^i]$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (voir Figure 4.1), la connaissance de leurs instants du début et de la fin,  $t_{1_p}^i$ ,  $t_{2_p}^i$ ,  $t_{1_n}^i$  et  $t_{2_n}^i$   $i = 1, 2, \dots$  est nécessaire. Cependant, ces instants dépendent à leur tour aux paramètres du modèle (voir (4.3) et (4.4)).

Pour faire face à ce problème, nous introduisons une variable  $\delta v$ , qui varie entre une petite valeur positive,  $\varepsilon < 0$ , et  $max(|\dot{y}(t)|)$ . Pour le  $k^{\text{ème}}$  pas, on détermine des intervalles de temps  $[t_{1_{pn}}^i, t_{2_{pn}}^i]_k$ ,  $i = 1, 2, \dots$  au cours desquels  $|\dot{y}(t)| > \delta v_k$ . Ces intervalles sont des estimations préliminaires des périodes de décollage. Les valeurs de  $\dot{y}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  et  $F_e(t)$  dans ces intervalles sont utilisées pour estimer les paramètres  $m$ ,  $F_c$  et  $F_v$  avec le critère (4.15). Ces estimations préliminaires sont notées par  $m_k$ ,  $F_{c_k}$  et  $F_{v_k}$ . Les moyennes des

estimations  $m_k$ ,  $F_{c_k}$  et  $F_{v_k}$  dans les zones où elles restent relativement constantes seront considérées comme les estimations finales des paramètres, notées par  $\hat{m}$ ,  $\hat{F}_c$  et  $\hat{F}_v$ .

#### Deuxième étape: identification de $dv$

L'estimation de  $dv$  est considérée comme la plus petite vitesse pour laquelle, la force de frottement estimée,  $\hat{F}_f$ , peut être caractérisée par le frottement de décollage estimé,  $\hat{F}_{décol}$ . Ainsi, afin d'estimer  $dv$ , nous traçons  $\hat{F}_f(\delta v_k) = F_{c_k} \text{sign}(\delta v_k) + F_{v_k} \delta v_k$  et  $\hat{F}_{décol}(\delta v_k) = \hat{F}_c \text{sign}(\delta v_k) + \hat{F}_v \delta v_k$ , où  $\hat{F}_c$  et  $\hat{F}_v$  sont déjà trouvées dans la première étape de l'identification. L'estimation  $\hat{dv}$  est considérée comme la plus petite valeur de  $\delta v_k$  pour laquelle la différence entre  $\hat{F}_f(\delta v_k)$  et  $\hat{F}_{décol}(\delta v_k)$  commence à décroître. Ceci peut être facilement détecté en comparant  $(\hat{F}_f - \hat{F}_{décol})^2$  avec un seuil pré-défini.

Notez que la force  $\hat{F}_f(\delta v_k)$  pour les petites valeurs de  $|\delta v_k|$  ne représente pas la vraie force du frottement car au voisinage de la vitesse nulle, le frottement ne peut pas être caractérisé avec le frottement de Coulomb ( $F_{c_k}$ ) et le frottement visqueux ( $F_{v_k} \delta v_k$ ). En effet, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.5.2, la modélisation du frottement aux petites vitesses nécessite l'utilisation d'un modèle dynamique comme le modèle de LuGre.

#### Troisième étape: identification de $F_s$

Le critère de moindres carrés non linéaire suivant est utilisé:

$$\begin{cases} \hat{F}_s = \arg \min_{F_s \in \mathcal{D}_{F_s}} \epsilon_{2t}(F_s) \\ \epsilon_{2t}(F_s) = \sum_{t=t_k}^t (\dot{y}_s(t) - \dot{y}_m(t, \hat{m}, \hat{F}_c, \hat{F}_v, \hat{dv}, F_s))^2 \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\dot{y}_s$  est la vitesse trouvée par la dérivation numérique du signal de position mesuré (et filtré) et  $\dot{y}_m$  est la vitesse estimée (sortie du modèle de Karnopp). Afin de préciser l'intervalle  $\mathcal{D}_{F_s}$  dans lequel  $F_s$  est recherchée, nous prenons en compte les faits suivants:

- Vu les relations (4.3) et (4.4), la valeur absolue de la force externe,  $F_e$ , au début des périodes de décollage ( $t = t_{1p}$  ou  $t = t_{1n}$ ) peut être considérée comme la valeur maximum de  $F_s$ .
- $F_s$  est toujours supérieure ou égale au frottement de Coulomb,  $F_c$ .

Ainsi, nous considérons  $\mathcal{D}_{F_s} = [\hat{F}_c, \min(F_{s_{max}}, |F_{s_{min}}|)]$ , où  $F_{s_{max}} = F_e(t)|_{\dot{y}=\hat{dv}, \dot{F}_e(t)>0}$  et  $F_{s_{min}} = F_e(t)|_{\dot{y}=-\hat{dv}, \dot{F}_e(t)<0}$ . Pour estimer  $F_s$  dans ce cas, on peut trouver le minimum global de  $\epsilon_{2t}$  par rapport à  $F_s$ .

#### 4.4.4 Identification du modèle de Karnopp asymétrique

La méthode présentée dans la section 4.4.3 peut être aussi utilisée pour les modèles asymétriques en notant que, dans ce cas, la valeur des paramètres dépend du signe de

la vitesse dans la période de décollage.

Comme dans le cas du modèle symétrique, nous utilisons deux variables  $\delta v_p$  et  $\delta v_n$  qui servent respectivement à trouver les estimations  $\hat{m}_p$ ,  $\hat{F}_{c_p}$ ,  $\hat{F}_{v_p}$  et  $\hat{m}_n$ ,  $\hat{F}_{c_n}$ ,  $\hat{F}_{v_n}$ . L'estimation finale de  $m$  est la moyenne de  $\hat{m}_p$  et  $\hat{m}_n$ :  $\hat{m} = \frac{\hat{m}_p + \hat{m}_n}{2}$ .

Les valeurs de  $dv_p$  et  $dv_n$  sont estimées en traçant sur le même graphique, le frottement estimé,  $\hat{F}_f$ , et le frottement de décollage,  $\hat{F}_{décol}$ , pour  $\delta v_{p_k}$  et  $\delta v_{n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , en utilisant la méthode présentée pour le modèle symétrique.

Les paramètres du frottement de collage,  $F_{s_p}$  et  $F_{s_n}$ , peuvent être estimés avec la méthode introduite dans le cas symétrique (relation (4.16)). La seule différence concerne les domaines de recherche  $\mathcal{D}_{F_{s_p}} = [\hat{F}_{c_p}, F_{s_{max}}]$  et  $\mathcal{D}_{F_{s_n}} = [F_{s_{min}}, -\hat{F}_{c_n}]$ .

Pour estimer  $F_{s_p}$  et  $F_{s_n}$  dans ce cas, on peut utiliser un algorithme de minimisation non-linéaire. Pour améliorer l'estimation, plusieurs expériences, correspondant aux plusieurs valeurs initiales des paramètres, sont effectuées et les estimations correspondant au minimum de la fonction de coût sur ces expériences sont choisies comme les estimations finales,  $\hat{F}_{s_p}$  et  $\hat{F}_{s_n}$ .

*Remarque:*

L'entrée du modèle,  $F_e(t)$ , doit être choisie de manière à garantir l'existence des périodes positives et négatives de décollage.

#### 4.4.5 Identification du paramètre du frottement de collage basée sur la fonction caractéristique

La fonction caractéristique<sup>2</sup> d'une composante nonlinéaire est définie comme le rapport (complexe) entre le harmonique principal de la sortie, et l'entrée qui est supposée sinusoïdale. Cette fonction détermine avec quel gain et quel déphasage un signal sinusoïdal passe par une composante nonlinéaire. La fonction caractéristique (DF) peut être calculée par:

$$DF = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi y(\theta) e^{-j\theta} d\theta \quad (4.17)$$

où  $y$  est la sortie pour l'entrée  $a \sin(\theta)$  et  $\theta = \omega t$ . Pour plus d'informations voir [4].

Sachant que les systèmes d'asservissement de position (par exemple, l'actionneur électropneumatique ou électrique) sont passe-bas et que la présence du relais fortifie cette propriété, une fois que la première et la deuxième étapes de la procédure d'identification de la section 4.4.3 sont effectuées, nous pouvons utiliser l'approche suivante pour réaliser la

---

<sup>2</sup>Describing Function (DF)

troisième étape, l'estimation du paramètre du frottement de collage,  $F_s$ .

Les sorties du système,  $\dot{y}_s(t)$ , et du modèle,  $\dot{y}_m(F_s, t)$ , dans (4.16), peuvent être approximées par les sinusoides,  $\dot{y}_s(t) \approx A_1 \sin(\omega_0 t + \theta_1)$  et  $\dot{y}_m(F_s, t) \approx A_2(F_s) \sin(\omega_0 t + \theta_2(F_s))$ , où  $\omega_0$  est la fréquence du premier harmonique qui dépend de l'amplitude du relais. Dans ces conditions, pour estimer  $F_s$  par un critère de moindres carrés nonlinéaire, on peut penser à ne minimiser que l'erreur entre les premiers harmoniques de  $\dot{y}_s(t)$  et  $\dot{y}_m(F_s, t)$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}_s &= \arg \min_{F_s \in \mathcal{D}_{F_s}} \epsilon_{2_f}(F_s) \\ \epsilon_{2_f}(F_s) &= (\dot{Y}_s - \dot{Y}_m(\hat{m}, \hat{F}_c, \hat{F}_v, \hat{d}v, F_s))^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $\dot{Y}_s = A_1 e^{i\theta_1}$  et  $\dot{Y}_m = A_2 e^{i\theta_2}$ .

Le critère  $\epsilon_{2_f}(F_s)$  est considérablement plus lisse que le critère  $\epsilon_{2_t}(F_s)$  dans (4.16) (voir Figure 4.9). Le calcul de  $\dot{Y}_m$  est possible soit en utilisant la transformée de Fourier numérique de  $\dot{y}_m(t)$ , soit en calculant analytiquement la fonction caractéristique du modèle de Karnopp.

Dans l'annexe G, supposant que l'entrée du modèle de Karnopp peut être approximée par une sinusoïde  $F_e(t) \approx A_3 \sin(\omega t + \theta_3)$ , nous calculons  $\dot{Y}_m$  en utilisant la fonction caractéristique (DF) [4], *i.e.*

$$\dot{Y}_m = DF(\hat{m}, \hat{F}_c, \hat{F}_v, \hat{d}v, F_s) F_E \quad (4.19)$$

où  $F_E = A_3 e^{i\theta_3}$  détermine le premier harmonique de  $F_e(t)$ . Avec cette nouvelle approche, le temps nécessaire pour minimiser le critère (4.18) diminue considérablement par rapport au critère qui utilise  $\dot{Y}_m$  obtenu par le calcul numérique (voir les résultats dans la section 4.6.1). Dans le calcul de la fonction caractéristique pour le modèle de Karnopp, les bornes de l'intégrale (4.17) sont remplacées par le début et la fin d'une période de décollage, et  $\dot{y}_m(t)$  est la solution de l'équation différentielle (4.2) pour  $F_e(t) = a \sin(\omega t)$ .

## 4.5 Compensation fixe basée sur le modèle de Karnopp

Nous nous intéressons maintenant à l'utilisation des modèles de Karnopp identifiés pour la compensation fixe de frottement d'un actionneur électrique et d'un actionneur électropneumatique.

Le compensateur nommé robuste par endroit tien compte juste de l'erreur d'estimation du frottement. Nous ne traitons pas la robustesse par rapport à d'autres erreurs de modélisation. Il faudrait une étude à part entière dédiée à ce sujet.

Le but de ces compensateurs est de valider les modèles identifiés du frottement, modèle de Karnopp.

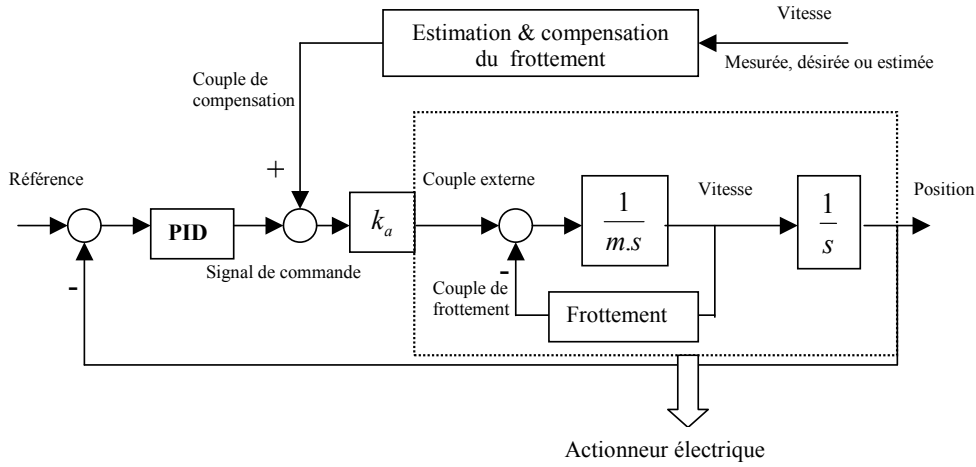


Figure 4.2: Contrôleur PID et compensation fixe de frottement dans un actionneur électrique.

#### 4.5.1 Actionneur électrique

La figure 4.2 montre le schéma de la compensation fixe d'un actionneur électrique ( $m$  est un moment d'inertie). Le couplage entre le couple de compensation et le couple de frottement peut être précisément modélisé par un gain  $k_a$  [21]. Le frottement peut être donc compensé en ajoutant l'opposé de son estimation au signal de commande. Le diagramme bloc 4.2 peut être utilisé [45, 3] pour:

- éliminer l'erreur statique de position, produite par le frottement, quand le contrôleur de position est PD.
- éliminer les oscillations de position, produites par le frottement, quand le contrôleur est PI(D).

Les paramètres du modèle de Karnopp étant identifiés, on pourrait penser à choisir le couple de compensation (montré dans la figure 4.2), de la manière suivante:

$$F_{comp} = \frac{\hat{F}_f}{k_a} = \frac{F_f(\hat{\mathbf{p}}_{sym})}{k_a} \quad (4.20)$$

avec  $F_f(\hat{\mathbf{p}}_{sym})$  donnée par (4.1). Les entrées du compensateur sont la vitesse,  $\dot{y}$ , et la force appliquée,  $F_e$ .

Un problème concernant la compensation fixe est le risque de la sur-compensation ou la sous-compensation en raison de la différence entre les vraies valeurs des paramètres de frottement et les valeurs estimées. En général, dans les systèmes d'asservissement de position, la sur-compensation produit des oscillations et la sous-compensation entraîne des erreurs statiques de position. Une solution pour éliminer les oscillations dues à la sur-compensation du frottement est proposée dans [23] où la conception des contrôleurs garan-





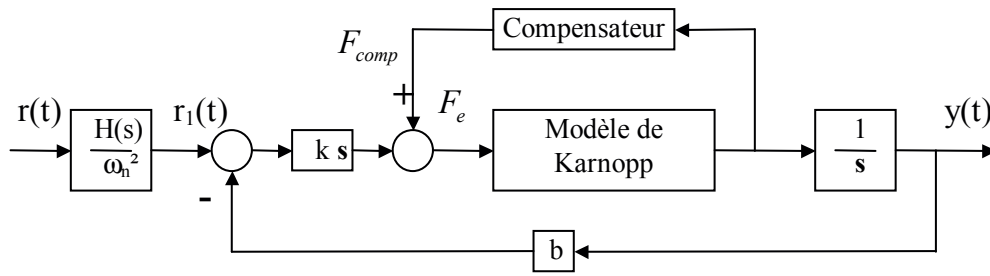


Figure 4.4: Diagramme bloc du contrôleur robuste proposé.

paramètres du compensateur sont choisies égales aux valeurs maximales des paramètres du système (voir Figure 4.4). Dans cette figure,  $b$  est un contrôleur et le gain  $k$  est choisi de la manière suivante:

- Identifier les paramètres du modèle de Karnopp,  $\hat{F}_{c_{id}}$ ,  $\hat{F}_{s_{id}}$ ,  $\hat{d}v_{id}$ .
- Considérer un maximum pour les déviations des paramètres du frottement du système  $n\%$ .
- Dans (4.21), choisir  $\hat{F}_c = \hat{F}_{c_{id}}(1 + n\%)$ ,  $\hat{F}_s = \hat{F}_{s_{id}}(1 + n\%)$  et  $\hat{d}v = \hat{d}v_{id}$ .
- Trouver une valeur de  $k$  qui fait baisser considérablement l'amplitude des oscillations. Cette valeur sera notée  $k_1$ .
- Choisir  $k = 2k_1$ .

Nous montrons dans l'annexe J qu'avec cette approche, la réponse indicielle du système ne change pas significativement même si les vrais paramètres de frottement varient sur un vaste intervalle, si bien que l'amplitude du cycle limite est négligeable.

Comme dans [22], d'où le travail est inspiré, nous justifions la méthode robuste proposée en l'analysant avec la fonction caractéristique (voir Annexe J). Il faut cependant signaler que la conception proposée semble plus efficace quand le bruit de mesure de position est faible. Ceci s'explique par la valeur élevée du paramètre  $k$  et la présence du dérivateur. Comme en général pour la commande, il faut gérer le compromis robustesse (erreur de modèle,...), sensibilité aux bruits, saturation d'actionneur.

#### 4.5.2 Actionneur électro-pneumatique

La figure 4.5 montre le schéma de la compensation fixe d'un actionneur électro-pneumatique<sup>3</sup>. Une fois les paramètres du modèle de Karnopp asymétrique identifiés, on pourrait penser

<sup>3</sup>Cet actionneur est un banc d'essai se trouvant au Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Voir l'annexe F pour les détails.

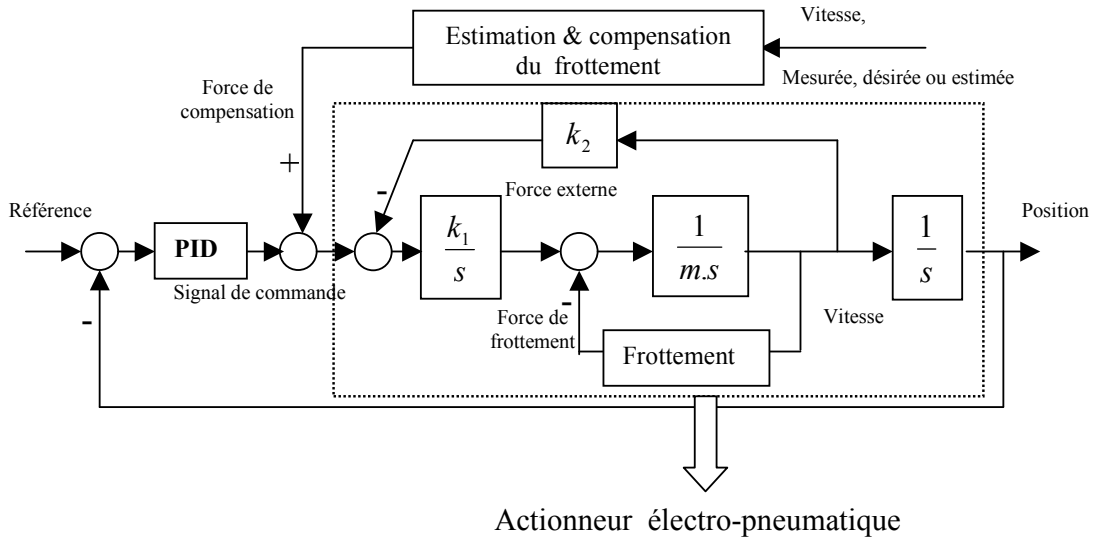


Figure 4.5: Contrôleur PID et compensation fixe de frottement dans un actionneur électro-pneumatique.

à choisir la force de compensation (montrée dans la figure 4.6) de la manière suivante:

$$F_{comp} = \hat{F}_f = F_f(\hat{\mathbf{p}}_{asym}) \quad (4.23)$$

avec  $F_f(\hat{\mathbf{p}}_{asym})$  donnée par (4.5). Les entrées du compensateur sont la vitesse,  $\dot{y}$ , et la force appliquée,  $F_e$ .

Ici, la compensation devient plus compliquée, car le signal de commande n'est pas appliquée au même point que la force de frottement. L'actionneur est composé d'une partie pneumatique (servovalve) et d'une partie mécanique (cylindre et piston ou vérin). La partie pneumatique transforme le signal de commande (courant) en deux pressions qui seront à leur tour transformées par la partie mécanique en un signal de force. La servovalve est composée de deux parties, la partie électrique qui transforme le courant d'entrée à la servovalve en une force  $F$ , et la partie pneumatique ou servovanne qui produit les deux pressions  $P_p$  et  $P_n$ . Cette deuxième partie est montrée dans la figure 4.7.

La compensation du frottement dans le mécanisme cylindre-piston est difficile à cause de la présence de la dynamique de servovanne. Pour faire face à ce problème, le schéma de la figure 4.6 peut être utilisé [62]. La conception des contrôleurs de position et de force est le résultat de l'analyse Lyapunov des équations décrivant la dynamique nonlinéaire de servovalve. Cette approche nécessite l'identification de cette dynamique.

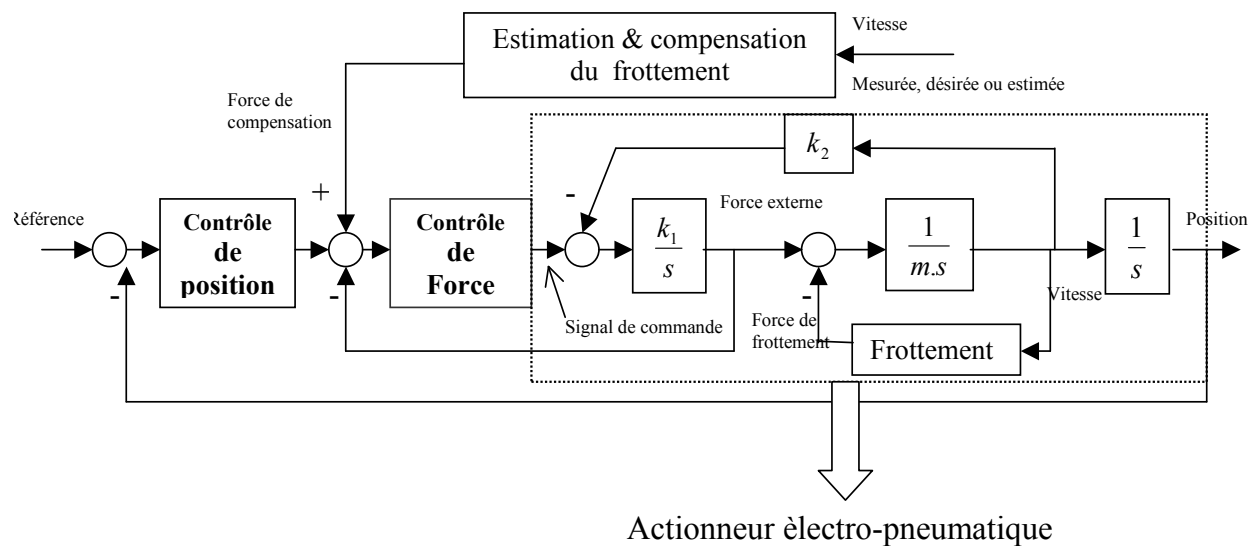


Figure 4.6: Contrôle de force, contrôle de position et compensation fixe du frottement dans un actionneur électro-pneumatique ou électro-hydraulique.

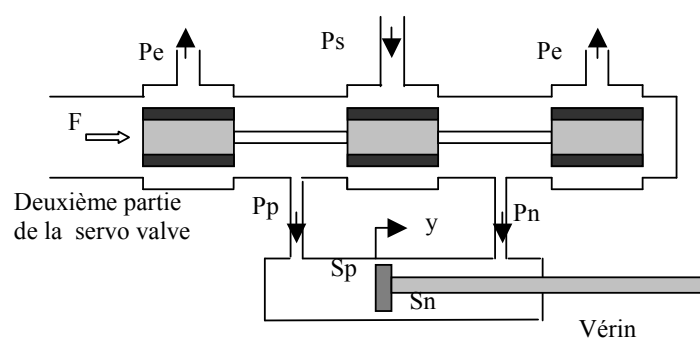


Figure 4.7: Couplage entre la force d'entrée à servovanne et le vérin dans un actionneur électro-pneumatique.

### Compensation proposée pour éliminer l'erreur statique

Afin de valider le modèle de frottement identifié, nous utilisons le diagramme bloc de la figure 4.6 pour la compensation du frottement, basée sur le modèle de Karnopp identifié, de l'actionneur électro-pneumatique présenté. Nos expériences avec l'actionneur électro-pneumatique montrent que si dans la figure 4.6 on utilise le compensateur basé sur la relation (4.5), l'erreur statique n'est pas complètement éliminée (voir Annexe H). Pour éliminer cette erreur, le compensateur doit donc se servir de l'erreur de position,  $e_y = r - y$ , quand la vitesse est trop petite (c'est-à-dire dans l'intervalle  $\frac{\hat{d}v_n}{N_c} \leq \dot{y} \leq \frac{\hat{d}v_p}{N_c}$  où  $N_c > 1$ ). Nous utilisons

$$\hat{F}_{\text{vitesse-nulle}} = \begin{cases} \min(\frac{e_y}{e_T} \hat{F}_{s_p}, \hat{F}_{s_p}) & e_y \geq 0, \quad \frac{\hat{d}v_n}{N_c} < \dot{y} < \frac{\hat{d}v_p}{N_c} \\ \max(-\frac{e_y}{e_T} \hat{F}_{s_n}, \hat{F}_{s_n}) & e_y < 0, \quad \frac{\hat{d}v_n}{N_c} < \dot{y} < \frac{\hat{d}v_p}{N_c} \end{cases} \quad (4.24)$$

La force de compensation aux petites vitesses est donc proportionnelle à l'erreur de position  $e_y$ , tant que  $|e_y|$  est inférieure à un certain seuil positif,  $e_T$ . Au dessus de ce seuil, la force de compensation est fixée à  $\hat{F}_{s_p}$  si  $e_y \geq 0$ , et à  $\hat{F}_{s_n}$  si  $e_y < 0$ .

Un autre problème concerne la présence du frottement visqueux,  $\hat{f}_{v_p} \dot{y}(t)$  et  $\hat{f}_{v_n} \dot{y}(t)$ , qui introduit le bruit dans le compensateur, car la vitesse  $\dot{y}(t)$  est calculée par la dérivation numérique du signal de position. Nous avons donc négligé ce frottement dans la structure de notre compensateur, comme c'est le cas de certaines approches de compensation fixe [3].

Finalement, la force de compensation utilisée,  $F_{comp}$ , s'écrit:

$$F_{comp} = \begin{cases} \hat{F}_{décol_p} = \begin{cases} \hat{F}_{c_p} & \dot{y} \geq \hat{d}v_p \\ -\hat{F}_{c_n} & \dot{y} \leq \hat{d}v_n \end{cases} \\ \hat{F}_{col} = \begin{cases} \min(F_e(t), \hat{F}_{s_p}) & \dot{y} \in (\hat{d}v_n, \hat{d}v_{n1}] \cup [\hat{d}v_{p1}, \hat{d}v_p), \quad F_e \geq 0 \\ \max(F_e(t), \hat{F}_{s_n}) & \dot{y} \in (\hat{d}v_n, \hat{d}v_{n1}] \cup [\hat{d}v_{p1}, \hat{d}v_p), \quad F_e \leq 0 \end{cases} \\ \hat{F}_{\text{vitesse-nulle}} = \begin{cases} \min(\frac{e_y}{e_T} \hat{F}_{s_p}, \hat{F}_{s_p}) & \hat{d}v_{n1} < \dot{y} < \hat{d}v_{p1}, \quad e_y \geq 0 \\ \max(-\frac{e_y}{e_T} \hat{F}_{s_n}, \hat{F}_{s_n}) & \hat{d}v_{n1} < \dot{y} < \hat{d}v_{p1}, \quad e_y < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.25)$$

où  $\hat{d}v_{p1} = \frac{\hat{d}v_p}{N_c}$  et  $\hat{d}v_{n1} = \frac{\hat{d}v_n}{N_c}$  avec  $N_c > 1$ . Pour les détails, voir l'annexe H.

## 4.6 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation de l'actionneur électrique et les résultats expérimentaux en temps réel obtenus avec l'actionneur électro-pneumatique.

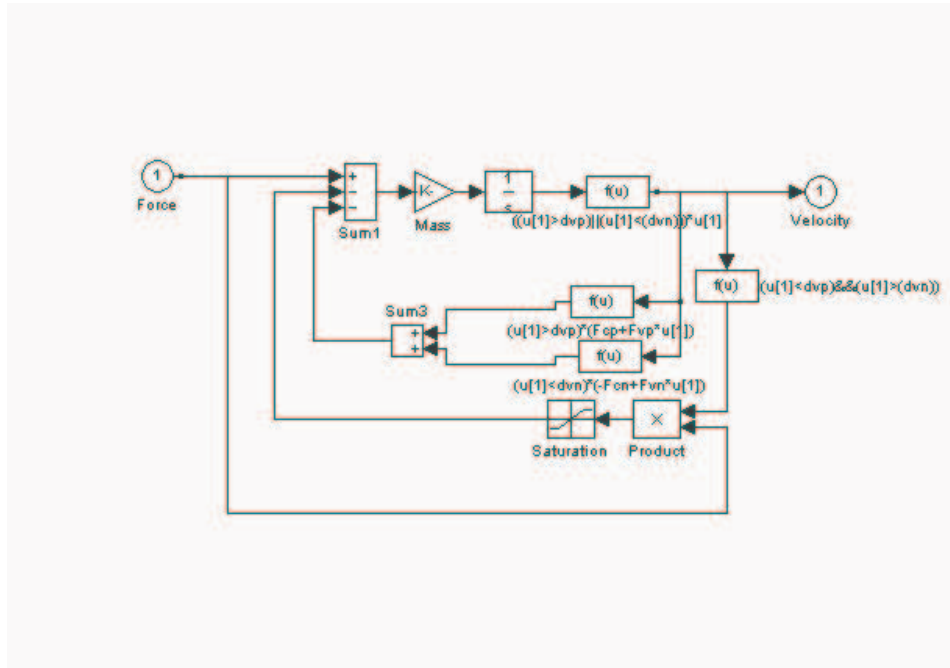


Figure 4.8: Simulation du modèle de Karnopp.

#### 4.6.1 Résultats de simulations

Les résultats de simulation de l'actionneur électrique sont présentés dans les annexes I et J. Les simulations sont effectuées en utilisant le logiciel Simulink. Le modèle de Karnopp est simulé avec le schéma de la figure 4.8. Pour résoudre les équations différentielles, la formule de Runge-Kutta (4,5), nommée *ode45 (Dormand-Prince)* du pas variable dans l'environnement Simulink, est utilisée. Dans ce qui suit, nous présentons une partie de ces résultats concernant 1) l'estimation du paramètre du frottement de collage,  $F_s$ , par le critère basé sur la fonction caractéristique, 2) le contrôleur robuste.

Estimation de  $F_s$  par le critère basé sur la fonction caractéristique:

Les critères  $\epsilon_{2_t}$  et  $\epsilon_{2_f}$ , définis respectivement par les relations (4.16) et (4.18), sont montrés dans la figure 4.9. Les variances des bruits de mesures de la force appliquée,  $F_e$ , et de la position,  $y$ , étaient respectivement 0.01 et  $10^{-12}$ . On constate que tous les deux critères sont minimisés autour de la vraie valeur du paramètre  $F_s^* = 20.6$ . Pourtant l'erreur de l'estimation par le critère basé sur la fonction caractéristique est 2.91%, alors qu'elle est 9.46% pour l'estimation obtenue par la minimisation du critère temporel. Le critère  $\epsilon_{2_f}$  est considérablement plus lisse. Nous avons fait deux essais: dans le premier,  $\epsilon_{2_f}$  est réalisé

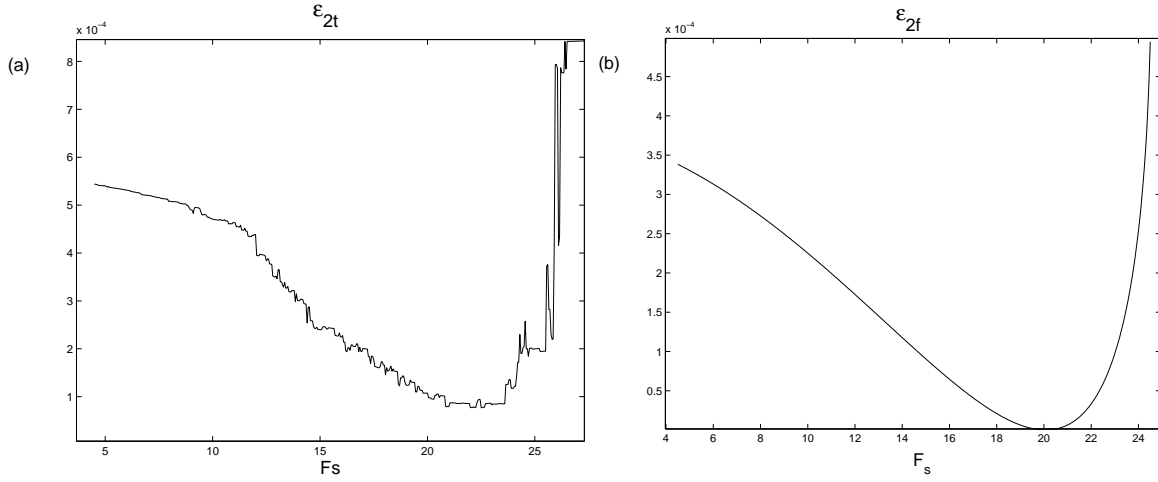


Figure 4.9: a) Estimation de  $F_s$  par le critère temporel. b) Estimation de  $F_s$  par le critère basé sur la fonction caractéristique.

en utilisant la fonction caractéristique et dans le deuxième, il est réalisé par le calcul numérique de la transformée de Fourier (6 périodes du signal  $\dot{y}(t)$  sont utilisées pour ce calcul). Le premier essai ne dure que 13.4 seconds alors que le deuxième dure 40 seconds.

#### Méthode de contrôleur robuste:

L'effet de la compensation incorrecte sur la réponse indicielle est montré dans la figure 4.10, pour les deux cas: (a) la conception avec le gain  $g$ , (b) la conception robuste. Dans la première conception, on peut constater les oscillations et l'erreur statique de position dues à la sur-compensation et la sous-compensation du frottement. On peut aussi remarquer que les oscillations de position sont négligeables dans la conception robuste.

## 4.6.2 Résultats expérimentaux

Les résultats que nous présentons ici concernent l'identification des paramètres du modèle de Karnopp et la compensation fixe dans l'actionneur électro-pneumatique (pour plus de détails, voir Annexe G et Annexe H). Ces résultats sont obtenus par l'application en temps réel de nos méthodes sur le banc d'essai.

### 4.6.2.1 Identification du modèle de Karnopp pour l'actionneur électro-pneumatique

Les signaux mesurés sont les pressions dans les chambres droite et gauche du cylindre,  $P_{pm}$  et  $P_{nm}$ , et la position,  $y_m$ .

La force externe est calculée par:

$$F_{ec}(t) = S_p \cdot P_{pf} - S_n \cdot P_{nf} - (S_p - S_n) \cdot P_s \quad (4.26)$$

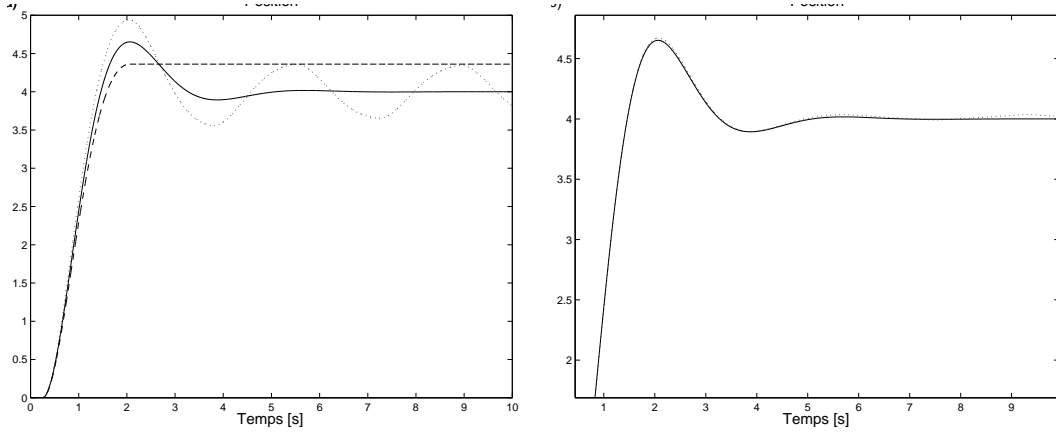


Figure 4.10: (a) Conception avec le gain  $g$ . Ligne solide: réponse indicielle désirée, Ligne pointillée: réponse du système avec le frottement sur-compensé, Ligne coupée: réponse du système avec le frottement sous-compensé. (b) Conception robuste avec une erreur relative de +60% sur les paramètres du compensateur par rapport aux paramètres du système. Ligne solide: réponse indicielle désirée, Ligne pointillée: réponse du système.

où  $P_{p_f}$  et  $P_{n_f}$  sont les pressions filtrées mesurées,  $P_s$  est la pression du réservoir d'aire,  $S_p$  et  $S_n$  sont respectivement les surfaces des chambres droite et gauche du cylindre. Les signaux de la vitesse et de l'accélération sont construits par la dérivation numérique du signal de position filtré mesuré. Le filtrage des signaux est effectué hors ligne en utilisant un filtre FIR avec compensation (par décalage) du déphasage introduit.

Les résultats de la première étape de l'identification sont montrés dans la figure 4.11.a. En moyennant les estimations sur les intervalles  $[k_{n_1}, k_{n_2}]$  et  $[k_{p_1}, k_{p_2}]$ , marqués sur la figure, les estimations  $\hat{m}$ ,  $\hat{F}_{c_p}$ ,  $\hat{F}_{c_n}$ ,  $\hat{F}_{v_p}$  et  $\hat{F}_{v_n}$  sont déterminées (voir Table 4.1).

Les estimations  $\hat{d}v_p$  et  $\hat{d}v_n$  sont trouvées en traçant le frottement de décollage estimé et le frottement estimé ou en comparant  $(\hat{F}_f - \hat{F}_{décol})^2$  avec un seuil (voir Figures 4.11.b et 4.12 et Table 4.1).

La figure 4.13.a montre la force externe et la vitesse. Dans cette figure, le maximum et le minimum acceptables des paramètres  $F_{s_p}$  et  $F_{s_n}$ , *i.e.*  $F_{s_{max}}$  et  $F_{s_{min}}$ , sont aussi marqués. Afin de minimiser le risque du blocage dans les minima locaux, 10 conditions initiales aléatoires dans les intervalles de recherche,  $\mathcal{D}_{F_{s_p}}$  et  $\mathcal{D}_{F_{s_n}}$ , sont utilisées pour effectuer 10 expériences d'optimisation nonlinéaire<sup>4</sup>. Les valeurs de  $\hat{F}_{s_p}$  et  $\hat{F}_{s_n}$  présentées dans la table 4.1 sont les minima de ces 10 expériences.

Figure 4.13.b compare la vitesse estimée (sortie du modèle) et la vitesse réelle (trouvée par la dérivation numérique). Les petites valeurs de la vraie vitesse ( $-\hat{d}v_n < \dot{y} < \hat{d}v_p$ ) sont

<sup>4</sup>Nous avons utilisé la fonction FMINS de MATLAB qui utilise l'algorithme Simplex.



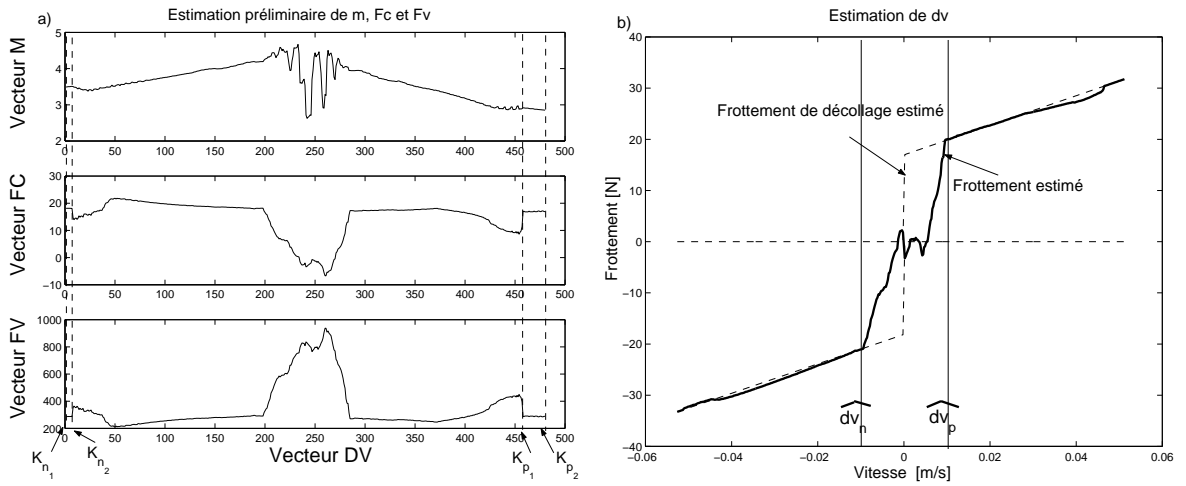


Figure 4.11: a) Vecteurs  $M$ ,  $FC$  et  $FV$ , respectivement: estimations préliminaires de la masse ( $m$ ), du frottement de Coulomb ( $F_c$ ) et du coefficient du frottement visqueux ( $F_v$ ). b) Estimation de la vitesse limite ( $dv$ ) au moment du passage décollage-collage de frottement.

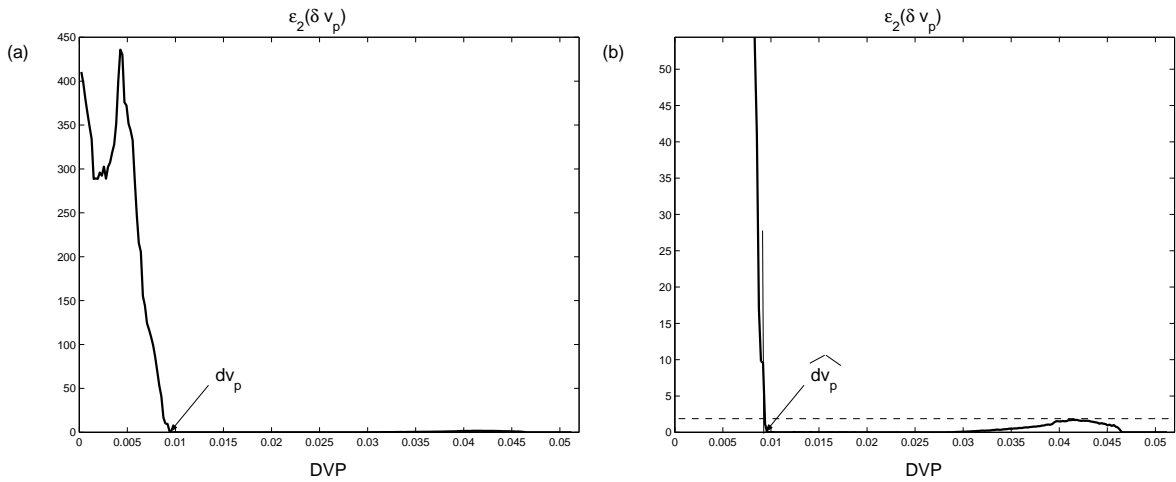


Figure 4.12: Méthode de seuillage utilisée pour estimer  $dv_p$  ((b) est l'agrandissement de (a)).

	[N]		$[N \frac{m}{s}]$		[kg]	$[\frac{m}{s}]$		[N]	
$p$	$F_{c_p}$	$F_{c_n}$	$F_{v_p}$	$F_{v_n}$	$m$	$dv_p$	$dv_n$	$F_{s_p}$	$F_{s_n}$
$\hat{p}$	16.97	18.13	289	287.4	3.5	0.009	-0.01	20.76	-21.8

Table 4.1: Modèle de Karnopp asymétrique identifié pour l'actionneur électro-pneumatique (résultats expérimentaux).

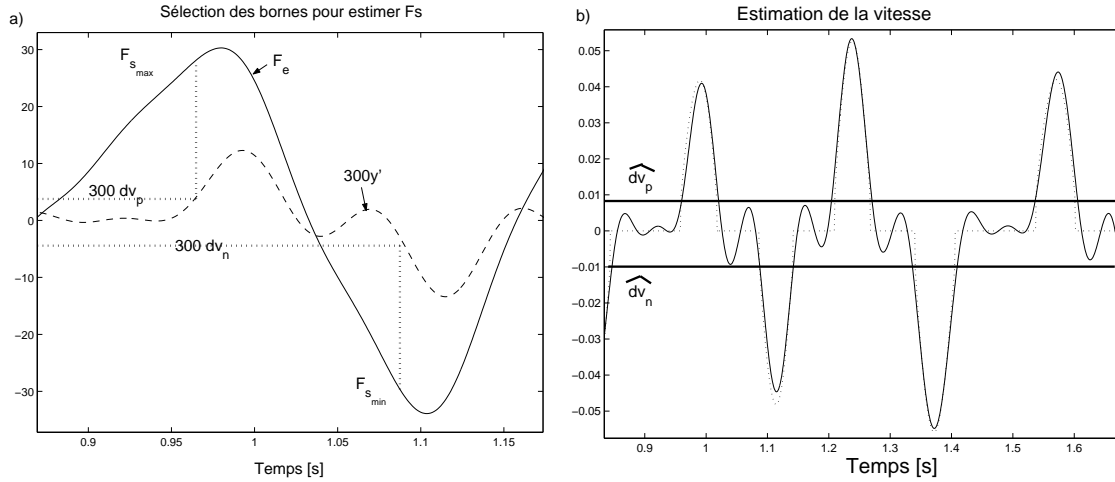


Figure 4.13: a) Sélection des bornes des intervalles de recherche de  $F_{s_n}$  et  $F_{s_p}$ ,  $F_{s_{max}}$  (maximum de  $F_{s_p}$ ), et de  $F_{s_{min}}$  (minimum de  $F_{s_n}$ ). b) Comparaison entre la vitesse réelle (ligne solide) et estimée (ligne coupée).

remplacées par une estimation nulle. Dans les périodes de décollage (grandes vitesses), la vitesse estimée est en parfait accord avec la vraie vitesse.

Dans la figure 4.14, les vitesses estimées avec le modèle de Karnopp identifié par notre méthode et avec le modèle de LuGre sont comparées avec la vitesse réelle [32]. Les estimations sont très similaires. Le modèle de LuGre est meilleur pour les petites vitesses grâce à la modélisation du frottement Stribeck.

#### 4.6.2.2 Compensation fixe pour l'actionneur électro-pneumatique

Les signaux mesurés sont les pressions dans les chambres droite et gauche du cylindre,  $P_{p_m}$  et  $P_{n_m}$ , et la position  $y$ . La force appliquée,  $F_e$ , est calculée par (4.13) et la vitesse par la dérivation numérique du signal de position filtré.

Nous avons utilisé les paramètres de la table 4.1 dans le compensateur (4.25). Figure 4.15 montre que l'erreur statique, due à la présence du frottement, est complètement éliminée en utilisant la compensation avec  $F_{vitesse-nulle}$ .

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'identification du modèle de Karnopp en vue de son utilisation pour la compensation fixe du frottement dans un actionneur électrique et dans un actionneur électro-pneumatique. Ainsi, après la justification de

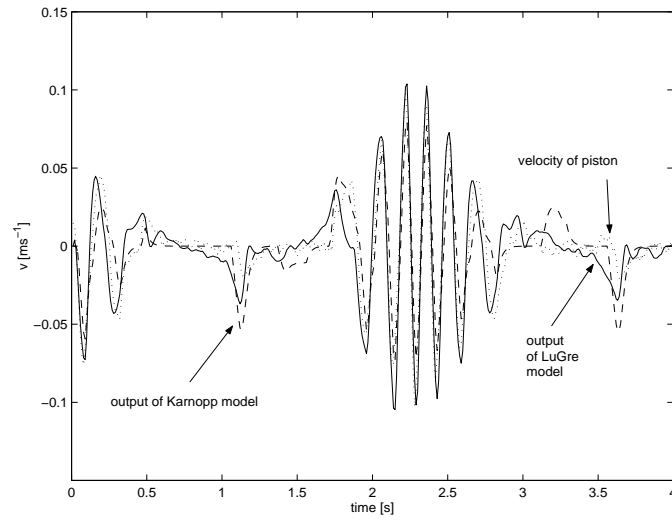


Figure 4.14: Comparaison des modèles de Karnopp et de LuGre.

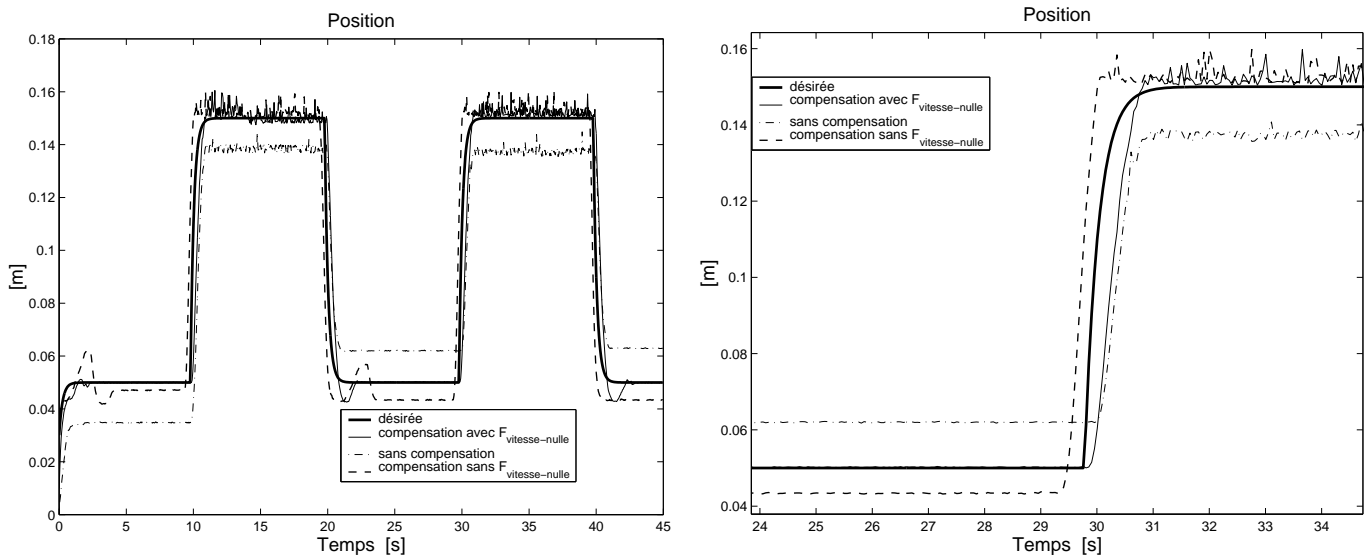


Figure 4.15: (a) Le signal de position désiré, et ses mesures dans les différents cas. (b) Agrandissement de la figure a.

l'utilisation du modèle de Karnopp et sa présentation détaillée, nous avons démontré l'identifiabilité structurelle globale de ce modèle. Ensuite, une méthode d'identification en trois étapes a été présentée. La méthode est basée sur la détermination des périodes de décollage et collage durant lesquelles les paramètres d'un modèle de Karnopp asymétrique sont identifiés. La première étape est basée sur l'interprétation physique du modèle de Karnopp dans les périodes de décollage. Elle se sert d'un modèle de régression linéaire pour estimer la masse et les paramètres du frottement de décollage. La deuxième étape utilise une méthode de seuillage pour estimer la vitesse limite du passage entre les périodes de décollage et de collage. Dans la troisième étape, une méthode d'optimisation non linéaire permet d'identifier les paramètres du frottement de collage. Pour cette dernière étape, l'optimisation d'un autre critère, basé sur la fonction caractéristique a été également proposée.

La méthode est sensible aux bruits de mesure, elle n'est donc idéale que pour modéliser le frottement dans les systèmes passe-bas.

Le modèle identifié a été ensuite utilisé pour la compensation du frottement. Deux systèmes d'asservissement, un actionneur électrique et un actionneur électro-pneumatique, ont été considérés. Dans l'actionneur électrique, le signal de commande est appliqué, sans aucune dynamique intermédiaire, à la composante engendrant le frottement. Une conception du compensateur robuste vis-à-vis des changements des paramètres de frottement a été proposée. Dans l'actionneur électro-pneumatique, l'existence de la dynamique de valve entre le signal de commande et la composante engendrant le frottement peut impliquer des erreurs statiques. Nous avons proposé une méthode de compensation pour éliminer ces erreurs.

Les résultats expérimentaux sur un actionneur électro-pneumatique et les résultats de simulation d'un actionneur électrique confirment la précision des méthodes proposées pour identifier les paramètres du modèle de Karnopp et compenser le frottement en utilisant le modèle identifié.



## Chapitre 5

# Modèles de régression par morceaux

### 5.1 Introduction

Dans les sections 3.3 et 4.4.2, nous avons étudié l'identifiabilité structurelle de deux modèles avec caractéristique entrée-sortie du type nonlinéarité nondifférentiable, à savoir le modèle de zone morte (pour le jeu) et le modèle de Karnopp (pour le frottement).

Dans ce chapitre, nous nous servons du concept de régression par morceaux pour proposer deux classes de modèles contenant une nonlinéarité nondifférentiable, auxquelles les modèles particuliers ci-dessous appartiennent:

- Modèle 1: modèle du système d'entraînement électro-mécanique avec le jeu d'engrenage, décrit par la relation (3.2),
- Modèle 2: modèle de frottement, décrit par la relation (2.12).

Ces deux classes peuvent ainsi être considérées comme des généralisations des modèles étudiés dans ce mémoire.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 5.2, après une brève introduction de la régression par morceaux, nous présentons les deux classes généralisées mentionnées ci-dessus et nous montrons que les modèles 1 et 2 appartiennent à ces deux classes.

La section 5.3 est consacrée à l'étude de l'identifiabilité structurelle de la classe 1. L'étude se sert des idées développées dans la section 3.3 pour étudier l'identifiabilité du modèle de zone morte.

Nous n'avons malheureusement pas pu étudier l'identifiabilité de la classe 2 en raison de sa complexité et nous laissons donc cette étude comme une perspective du travail.

## 5.2 Deux classes de modèles contenant une nonlinéarité non-différentiable

Le concept de régression linéaire par morceaux [59] nous permet de définir deux classes de modèles contenant la nonlinéarité nondifférentiable. Nous commençons cette section par l'explication du concept de régression par morceaux.

### 5.2.1 Régression par morceaux

Une régression par morceaux <sup>1</sup> est une relation de régression entre  $x \in R$  et  $(y = f(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) + n) \in R$ , où  $n$  est un bruit centré ( $E_t(n) = 0$ ) et  $f(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$  s'obtient en unissant les différentes courbes sur différents intervalles, *i.e.*

$$f(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{cases} f_1(x, \boldsymbol{\theta}_1), & x \leq \gamma_1 \\ f_2(x, \boldsymbol{\theta}_2), & \gamma_1 < x \leq \gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_D(x, \boldsymbol{\theta}_D), & \gamma_{D-1} < x \end{cases} \quad (5.1)$$

Les  $D$  sous-modèles  $f_i(x, \boldsymbol{\theta}_i)$ ,  $i = 1, \dots, D$  sont appelés *modèles de régimes* ou *de phases*, et les bornes d'intervalles,  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, D - 1$ , sont nommés *points de changement*. En général, les paramètres des modèles de phase,  $\boldsymbol{\theta}_i$ , et les points de changement,  $\gamma_i$ , sont inconnus et doivent être estimés.

Les régressions par morceaux peuvent être classifiées en deux catégories: continue et discontinue. Elles sont continues (aux points de changement), si

$$f_i(\gamma_i, \boldsymbol{\theta}_i) = f_{i+1}(\gamma_i, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) \quad (5.2)$$

et discontinues sinon,

$$f_i(\gamma_i, \boldsymbol{\theta}_i) \neq f_{i+1}(\gamma_i, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) \quad (5.3)$$

pour  $i = 1, \dots, D - 1$ .

### 5.2.2 Présentation des deux classes

Dans la suite, on montre que les modèles 1 et 2 peuvent être généralisés à 2 classes des modèles, classe 1 et classe 2.

Les modèles de ces 2 classes contiennent une partie nonlinéaire (NL) décrite par la régression par morceaux (5.1), entourée par des parties linéaires par rapport à l'entrée

---

<sup>1</sup>Multiphase regression.

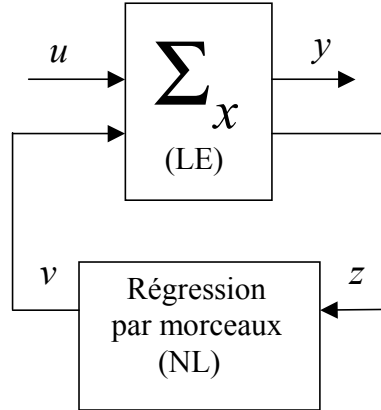


Figure 5.1: Diagramme bloc général des classes 1 et 2.

(LE), comme dans la figure 5.1.

On suppose que l'ensemble des parties linéaires et nonlinéaire peuvent être décrites par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{b}.u + \mathbf{d}_0.v + \mathbf{d}_1.\dot{v} \\ v = f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \gamma) \\ \mathbf{z} = \mathbf{E}.\mathbf{x} + \mathbf{f}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{x} \in R^n$  et  $\mathbf{y} \in R^m$  sont respectivement les vecteurs d'état et de sortie, et  $u \in R$  est l'entrée du modèle. L'entrée et la sortie de la nonlinéarité sont respectivement représentées par  $\mathbf{z}$  et  $v$ , où  $\mathbf{z} \in R$  pour la classe 1,  $\mathbf{z} \in R^2$  pour la classe 2 (voir 5.2.2.2) et  $v \in R$  pour les deux classes.  $d_0 \in R^n$  et  $d_1 \in R^n$  sont des vecteurs traduisant les effets directs de la sortie de la non linéarité et sa dérivée sur l'état.

La fonction  $f(\cdot)$  est définie par (5.1), où les  $D$  modèles de régime sont linéaires:  $f_i(z, \boldsymbol{\theta}_i) = \alpha_i z + \beta_i$ ,  $\boldsymbol{\theta}_i = [\alpha_i, \beta_i]$ . Pour le modèle 1, la partie nonlinéaire est la zone morte (Figure 3.5) et pour le modèle 2, la partie nonlinéaire est composée de tous les blocs existants dans le modèle de Karnopp, excepté le bloc masse et le bloc intégrateur (voir Figure 2.10-a).

### 5.2.2.1 Classe 1: changement continu de régime

La classe 1 est définie de la manière suivante:

- $\mathbf{f} = 0$



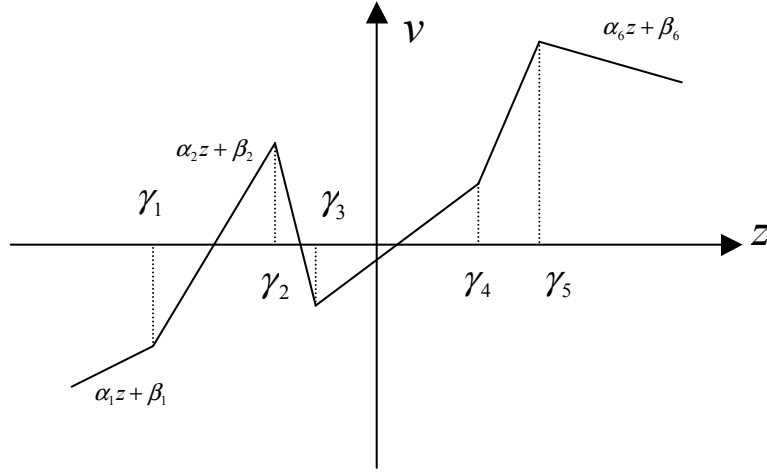


Figure 5.2: Caractéristique de la nonlinéarité de la classe 1 ( $D = 6$ ).

- elle est décrite par la représentation d'état (5.4), où la nonlinéarité a une seule entrée, *i.e.*  $z = \mathbf{e}^T \mathbf{x}$ .
- le changement de régime est continu, *i.e.*:

$$\alpha_j \gamma_j + \beta_j = \alpha_{j+1} \gamma_j + \beta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, D - 1$$

- la condition suivante est satisfaite:

$$\text{rang}(\mathbf{E}(\alpha) = \mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{e}^T) = n, \quad \forall \alpha \in R \quad (5.5)$$

La régression par morceaux,  $f(\cdot)$  dans (5.4), peut être considérée comme une fonction continue et linéaire par morceaux (voir Figure 5.2).

Cette fonction peut être caractérisée par les pentes,  $\alpha_j$ , et les ordonnées à l'origine,  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, D$ , qu'on peut rassembler dans les paires  $\boldsymbol{\theta}_j = [\alpha_j, \beta_j]$ .

Les points de changement de régime sont calculés par:

$$\gamma_j = \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\alpha_j - \alpha_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, D - 1$$

Ainsi, le vecteur de paramètres de la fonction linéaire par morceaux est défini comme:

$$\mathbf{p} = \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_D, \beta_D\}$$

La représentation d'état (5.4) peut être réécrite comme:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u + \mathbf{d}_0 \cdot v + \mathbf{d}_1 \cdot \dot{v} \\ v = \alpha_i \cdot z + \beta_i, \quad z \in \mathcal{D}_{z_i}, \quad i = 1, \dots, D \\ z = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $\mathcal{D}_{z_i}$ ,  $i = 1, \dots, D$  sont les domaines de la variation de  $z$ , définis par:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{z_1} = \{z \mid z \leq \gamma_1\} \\ \mathcal{D}_{z_2} = \{z \mid \gamma_1 < z \leq \gamma_2\} \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{z_{D-1}} = \{z \mid \gamma_{D-2} < z \leq \gamma_{D-1}\} \\ \mathcal{D}_{z_D} = \{z \mid \gamma_{D-1} < z\} \end{cases} \quad (5.8)$$

Afin de trouver une forme plus compacte de (5.7),  $v$  est remplacé par son équivalent,  $\alpha_i \mathbf{e}^T \mathbf{x} + \beta_i$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u + \mathbf{d}_0 \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{x} + \beta_i) + \mathbf{d}_1 \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{e}^T \cdot \dot{\mathbf{x}})$$

Considérant (5.5), l'équation ci-dessus implique:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I} - \alpha_i \cdot \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{e}^T)^{-1} [(\mathbf{A} + \mathbf{d}_0 \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{e}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u + \mathbf{d}_0 \cdot \beta_i]$$

Alors, la forme compacte de la représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i(\alpha_i) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_i(\alpha_i) \cdot u + \mathbf{d}_i(\alpha_i) \beta_i \\ \mathbf{e}^T \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{z_i}, \quad i = 1, \dots, D \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.9)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(\alpha_i) &= \mathbf{E}_i^{-1}(\alpha_i) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{d}_0 \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{e}^T) \\ \mathbf{B}_i(\alpha_i) &= \mathbf{E}_i^{-1}(\alpha_i) \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{d}_i(\alpha_i) &= \mathbf{E}_i^{-1}(\alpha_i) \cdot \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{E}_i(\alpha_i) &= \mathbf{I} - \alpha_i \cdot \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{e}^T \end{aligned} \quad (5.10)$$

et  $\mathcal{D}_{z_i}$ ,  $i = 1, \dots, D$  sont définis par (5.8).

**Proposition 5.1** *Le modèle 1, décrit par (3.2), appartient à la classe 1 (nous considérons le système d'entraînement électro-mécanique avec un seul axe mais la démonstration est similaire pour le système avec trois axes).*

*Démonstration* . Il est clair que la relation entrée-sortie du modèle de zone-morte, présentée dans la figure 3.5, est une fonction linéaire par morceaux et continue avec  $D = 3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ,  $\beta_1 = -\beta_3 = \theta$  et  $\gamma_1 = -\gamma_2 = -\theta$ .

On montre maintenant que le modèle 1 est décrit par la représentation d'état (5.4), et que la condition (5.5) est satisfaite.

Soit  $\mathbf{x} = [\dot{\varphi}_M, \dot{\varphi}_L, \varphi_d]^T$ ,  $u = C_M$  et les sorties les vitesses du moteur et de la charge, alors les équations différentielles représentant le modèle 1 (3.2), peuvent être réécrites comme:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}.u_s + \mathbf{d}_0v + \mathbf{d}_1\dot{v} \\ v = DZ_\theta(z), \quad z = \mathbf{e}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\text{où } v = DZ_\theta(z) = \begin{cases} z - \theta & z \geq \theta \\ 0 & |z| \leq \theta \\ z + \theta & z \leq -\theta. \end{cases},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{f_M}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_L}{J_L} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{k_{sh}}{J_M} \\ \frac{k_{sh}}{J_L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{f_{sh}}{J_M} \\ \frac{f_{sh}}{J_L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$ .

Par ailleurs, la condition  $\text{rang}(\mathbf{E} = \mathbf{I} - \alpha.\mathbf{d}_1\mathbf{e}^T) = n$ ,  $\forall \alpha \in R$  est satisfaite, car:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\alpha f_M}{J_M} \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha f_L}{J_L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

d'où  $\text{rang}(\mathbf{E}) = 1$ .



### 5.2.2.2 Classe 2: changement discontinu de régime

La classe 2 est définie de la manière suivante:

- elle est décrite, comme la classe 1, par la représentation d'état (5.4), où la nonlinéarité a deux entrées  $z_1$  et  $z_2$ ,
- le changement de régime est discontinu, *i.e.*:

$$\alpha_j.\gamma_j + \beta_j \neq \alpha_{j+1}.\gamma_j + \beta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, D - 1$$

- il y a deux points de changement  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour  $z_1$  et entre eux, on considère une autre régression linéaire par morceaux, celle-ci de type continu et avec les points

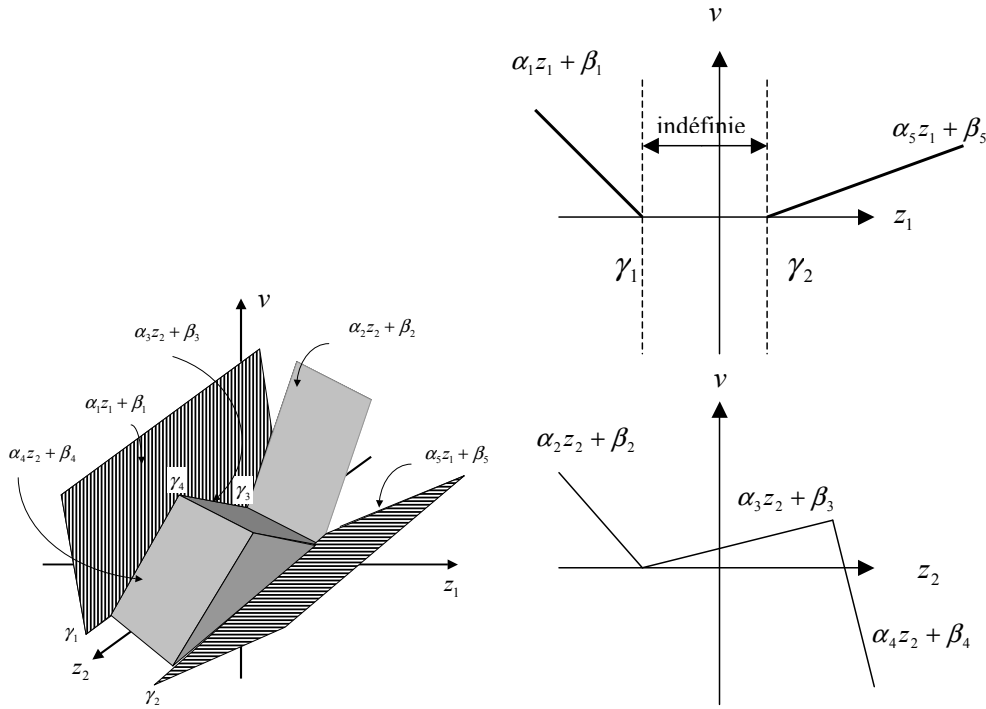


Figure 5.3: Caractéristique de la nonlinéarité de la classe 2.

de changement  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$  pour  $z_2$ . La régression linéaire par morceaux totale,  $f$ , est définie par (voir Figure 5.3):

$$v = f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{cases} \alpha_1 z_1 + \beta_1, & z_1 \leq \gamma_1 \\ \alpha_2 z_2 + \beta_2, & \gamma_1 < z_1 < \gamma_2, \quad z_2 \leq \gamma_3 \\ \alpha_3 z_2 + \beta_3, & \gamma_1 < z_1 < \gamma_2, \quad \gamma_3 \leq z_2 \leq \gamma_4 \\ \alpha_4 z_2 + \beta_4, & \gamma_1 < z_1 < \gamma_2, \quad \gamma_4 \leq z_2 \\ \alpha_5 z_1 + \beta_5, & \gamma_2 \leq z_1 \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$ .

**Proposition 5.2** *Le modèle 2 appartient à la classe 2.*

*Démonstration.* Rappelons la loi de Newton, écrite au point d'intersection de la force appliquée et le frottement dans le diagramme bloc du modèle de Karnopp symétrique (voir Figure 2.10-a):

$$m\ddot{y}(t) = F_e(t) - F_f(t) \quad (5.13)$$

où

$$F_f = \begin{cases} -F_c + F_{v_n} \cdot \dot{y}(t) & \dot{y}(t) \leq -dv \\ -F_s & -dv < \dot{y}(t) < dv, \quad F_e(t) \leq -F_s \\ F_e & -dv < \dot{y}(t) < dv, \quad -F_s \leq F_e(t) \leq F_s \\ F_s & -dv < \dot{y}(t) < dv, \quad F_s \leq F_e(t) \\ F_c + F_v \cdot \dot{y}(t) & dv \leq \dot{y}(t) \end{cases}$$

L'équation (5.13) peut se mettre sous la forme (5.4), si on définit  $\mathbf{x} = \dot{y}$ ,  $u = F_e$ ,  $\mathbf{A} = 0$ ,  $\mathbf{b} = \frac{1}{m}$ ,  $\mathbf{d}_0 = -\frac{1}{m}$ ,  $\mathbf{d}_1 = 0$ ,  $\mathbf{E} = [1, 0]^T$ ,  $\mathbf{f} = [0, 1]^T$ ,  $\mathbf{c} = 1$  et  $v = F_f$ , et si on considère  $f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$  décrite par (5.12) avec  $z_1 = \dot{y}$ ,  $z_2 = F_e$ ,  $\gamma_1 = -dv$ ,  $\gamma_2 = dv$ ,  $\gamma_3 = -F_s$ ,  $\gamma_4 = F_s$  et

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F_v, \quad \beta_1 = -F_c, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = -F_s \\ \alpha_3 &= 1, \quad \beta_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \beta_4 = F_s, \quad \alpha_5 = F_v, \quad \beta_5 = F_c \end{aligned}$$

Avec une démarche similaire, on peut montrer que le modèle de Karnopp asymétrique appartient aussi à la classe 2.



### 5.3 Identifiabilité structurelle de la classe 1

Nous généralisons maintenant la méthode proposée dans la section 3.3 pour étudier l'identifiabilité du modèle de régression par morceaux dans la classe 1.

Supposons que le nombre  $D$  de modèles de régime dans la régression par morceaux est connu et considérons deux modèles appartenant à la classe 1,  $\hat{\mathbf{p}} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_D]$  et  $\mathbf{p}^* = [\boldsymbol{\theta}_1^*, \dots, \boldsymbol{\theta}_D^*]$ , avec  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = [\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i]$  et  $\boldsymbol{\theta}_i^* = [\alpha_i^*, \beta_i^*]$ .

Les sorties de ces deux modèles sont  $y_m(u(t), \hat{\mathbf{p}})$  et  $y_m(u(t), \mathbf{p}^*)$ , où  $u(t)$  représente l'entrée commune de deux modèles.

Rappelons que le paramètre  $p_i \in \mathbf{p}$  est s.g.i, selon Walter et Pronzato (voir (2.4)), si:

$$y_m(u(t), \hat{\mathbf{p}}) = y_m(u(t), \mathbf{p}^*), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T_i] \Rightarrow \hat{p}_i = p_i^*$$

où  $t_0$  représente le début d'acquisition des données et  $T_i$  est la durée du test d'identification. L'objectif est de trouver certaines relations algébriques entre les matrices et les vecteurs intervenant dans la représentation d'état (5.9), *i.e.*  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{d}_i$ , de façon à ce que la vérification de ces relations soit suffisante pour l'identifiabilité structurelle du modèle de régression par morceaux.

Ces relations algébriques pour les modèles LE sont trouvées en utilisant la méthode du développement des séries de Taylor.

Nous étudions l'identifiabilité, en considérant les deux cas suivants:

- Durant le test,  $z$  passe par au moins un point de changement. L'identification dans ce cas est appelée identification avec des données acquises dans plusieurs régimes.
- Durant le test,  $z$  ne passe par aucun point de changement. L'identification dans ce cas est appelée identification avec des données acquises dans un régime.

Dans la suite, on commence par présenter la méthode de séries de Taylor pour vérifier l'identifiabilité structurelle. On continue ensuite par étudier l'identifiabilité structurelle quand l'identification est effectuée avec les données acquises dans plusieurs régimes. On en conclue la difficulté rencontrée dans ce cas et l'intérêt de faire cette étude quand l'identification est réalisée avec les données acquises dans un seul régime.

### 5.3.1 Vérification de l'identifiabilité structurelle par la méthode de séries de Taylor [83]

Considérez la structure  $M$  définie par:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(\mathbf{p}) \\ \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}) \end{cases}$$

où  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  sont supposés d'être infiniment différentiables.

Soit

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{d}^k}{dt^k} \mathbf{y}_m(t, \mathbf{p}) \quad (5.14)$$

le vecteur des coefficients de séries de Taylor de  $\mathbf{y}(t, p)$  en  $t = 0^+$ .

La relation  $M(\hat{\mathbf{p}}) = M(\mathbf{p}^*)$  implique

$$\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{a}_k(\mathbf{p}^*), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.15)$$

Une condition *suffisante* pour que  $M$  soit s.g.i. est donc [51, 83]

$$\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{a}_k(\mathbf{p}^*), \quad k = 0, 1, \dots, k_{max} \Rightarrow \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^* \quad (5.16)$$

où  $k_{max}$  est un entier positif et suffisamment petit pour que le calcul reste faisable.

---

Exemple :

Considérons la réponse impulsionnelle du modèle, linéaire par rapport aux entrées (LE), décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{p}).\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{p}).\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p}).\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0^-) = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

où  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{y} \in R^m$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$  sont respectivement les vecteurs d'état, de sortie et d'entrée du système et  $\mathbf{p}$  est le vecteur des paramètres.

Pour calculer la condition initiale en  $t = 0^+$ ,  $\mathbf{x}(0^+)$ , nous utilisons (5.17):

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} \dot{\mathbf{x}}(t).dt = \int_{t=0^-}^{t=0^+} \mathbf{A}(\mathbf{p}).\mathbf{x}(t).dt + \int_{t=0^-}^{t=0^+} \mathbf{B}(\mathbf{p}).\delta(t).dt$$

L'intégrale concernant le vecteur d'état est nulle, car la discontinuité du premier degré de l'entrée Dirac ne produit que la discontinuité du premier degré du vecteur d'état,  $\mathbf{x}$ , et pas d'intégrale du vecteur d'état. Ainsi,

$$\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}(0^-) = 0 + \mathbf{B}(\mathbf{p})$$

et comme  $\mathbf{x}(0^-) = 0$ ,

$$\mathbf{x}(0^+) = \mathbf{B}(\mathbf{p}) \quad (5.18)$$

Le vecteur de sortie  $\mathbf{y}(t)$  sera:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}).e^{\mathbf{A}(\mathbf{p}).t}.\mathbf{x}(0^+) \quad t \geq 0^+$$

et  $\mathbf{a}_k(\mathbf{p})$  sont calculés par:

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{y}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p}).\mathbf{A}^k(\mathbf{p}).\mathbf{B}(\mathbf{p})$$

et l'identité de  $\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{p}})$  et  $\mathbf{a}_k(\mathbf{p}^*)$  implique:

$$\mathbf{C}(\hat{\mathbf{p}}).\mathbf{A}^k(\hat{\mathbf{p}}).\mathbf{B}(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{C}(\mathbf{p}^*).\mathbf{A}^k(\mathbf{p}^*).\mathbf{B}(\mathbf{p}^*), \quad k = 0, 1, \dots, k_{max}$$

Ainsi, l'approche de séries de Taylor revient à tester l'identifiabilité à partir de l'identité des paramètres de Markov [28, 30].

### 5.3.2 Identifiabilité, les données acquises dans plusieurs régimes

Supposons que  $z$  dépasse les points de changement  $\gamma_I, \gamma_{I+1}, \dots, \gamma_{I+K}$  aux instants  $t_I, t_{I+1}, \dots, t_{I+K}$  (voir Figure 5.4). En utilisant la forme compacte (5.9), on arrive à la solution suivante

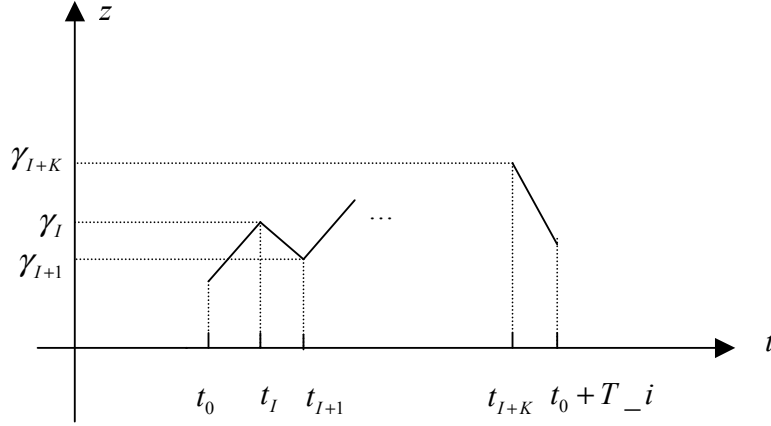


Figure 5.4: Entrée de la nonlinéarité pendant l'identification avec les données acquises dans plusieurs régimes.

pour la variable d'état  $\mathbf{x}(t)$  pendant le test:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \phi_I(\alpha_I, t - t_0)\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_I(\alpha_I, t - \tau)\mathbf{b}_I(\alpha_I)u(\tau)d\tau \\ + \int_{t_0}^t \phi_I(\alpha_I, t - \tau)\mathbf{d}_I(\alpha_I)\beta_I d\tau, & t_0 \leq t \leq t_I \\ \phi_{i+1}(\alpha_{i+1}, t - t_i)\mathbf{x}_{t_i} + \int_{t_i}^t \phi_{i+1}(\alpha_{i+1}, t - \tau)\mathbf{b}_{i+1}(\alpha_{i+1})u(\tau)d\tau \\ + \int_{t_i}^t \phi_{i+1}(\alpha_{i+1}, t - \tau)\mathbf{d}_{i+1}(\alpha_{i+1})\beta_{i+1}d\tau, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = I, I + 1, \dots, I + K - 1 \\ \phi_{I+K+1}(\alpha_{I+K}, t - t_{I+K})\mathbf{x}_{t_{I+K}} + \int_{t_{I+K}}^t \phi_{I+K+1}(\alpha_{I+K+1}, t - \tau)\mathbf{b}_{I+K+1}(\alpha_{I+K+1})u(\tau)d\tau \\ + \int_{t_{I+K}}^t \phi_{I+K+1}(\alpha_{I+K+1}, t - \tau)\mathbf{d}_{I+K+1}(\alpha_{I+K+1})\beta_{I+K+1}d\tau, & t_{I+K} \leq t \leq t_0 + T_i \end{cases} \quad (5.19)$$

où  $\phi_i(\alpha_i, t) = e^{A_i(\alpha_i)t}$  et  $\mathbf{x}_{t_i}$ ,  $i = I, \dots, I + K$ , sont respectivement la matrice de transition et la condition initiale de l'équation différentielle (5.9) du régime  $i$ .

En raison de la continuité des modèles de régime aux points de changement, la condition initiale du régime  $i$ ,  $\mathbf{x}_{t_i}$ , est égale à l'état au moment de sortie du régime  $i - 1$ , *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t_i} &= \phi_{i-1}(\alpha_{i-1}, t_i - t_{i-1})\mathbf{x}_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_{i-1}(\alpha_{i-1}, t - \tau)\mathbf{b}_{i-1}(\alpha_{i-1})u(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_{i-1}(\alpha_{i-1}, t - \tau)\mathbf{d}_{i-1}(\alpha_{i-1})\beta_{i-1}d\tau, \quad i = I + 1, \dots, I + K \end{aligned} \quad (5.20)$$

On constate que la condition initiale  $\mathbf{x}_{t_i}$  du régime  $i$  est une fonction des paramètres du régime  $i - 1$ ,  $\boldsymbol{\theta}_{i-1}$ , et la condition initiale du régime  $i - 1$ ,  $\mathbf{x}_{t_{i-1}}$ , *i.e.*

$$\mathbf{x}_{t_i} = f_i(\boldsymbol{\theta}_{i-1}, \mathbf{x}_{t_{i-1}}) = f_i(\boldsymbol{\theta}_{i-1}, f_{i-1}(\boldsymbol{\theta}_{i-2}, \mathbf{x}_{t_{i-2}})) = \dots = g_i(\boldsymbol{\theta}_{i-1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_I) \quad (5.21)$$

L'état  $\mathbf{x}(t)$ , et par conséquent, la sortie  $y_m(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$  sont donc des fonctions compliquées et variant dans le temps des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_i = [\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = I, \dots, I + K$  (voir (5.19),



(5.20), (5.21)). Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'étudier l'identifiabilité des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_i$  dans ce cas, qui nous a paru relativement difficile.

Dans la suite, on s'intéresse à l'identification dans un régime, où, en assumant certaines hypothèses, l'étude de l'identifiabilité devient plus simple.

### 5.3.3 Identifiabilité, les données acquises dans un seul régime

L'identification dans un régime  $i$ ,  $i = 1, \dots, D$ , nécessite:

- que  $z$  soit mesurable et que l'on connaisse les points de changement,  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, D - 1$ , afin de pouvoir contrôler l'amplitude de l'entrée,  $u$ , pour que  $z$  ne passe par aucun point de changement.
- que l'état du modèle au début du test,  $\mathbf{x}_{t_0}$ , soit une fonction de  $\boldsymbol{\theta}_i = [\alpha_i, \beta_i]$  seulement, *i.e.*  $\mathbf{x}_{t_0} = f_0(\alpha_i, \beta_i)$ .

**Proposition 5.3** *Si (5.9) représente un modèle stable pour lequel*

$$\text{rang}(\mathbf{A}^0(\alpha) = \mathbf{A}_1 + \alpha \mathbf{d}_0 \mathbf{e}^T) = n, \quad (5.22)$$

*la deuxième condition ci-dessus est satisfaite si l'entrée,  $u(t)$ , et l'instant de début du test,  $t_0$ , soient choisis de la façon suivante:*

$$u(t) = u_0 \cdot 1(t) + u_1(t) \cdot 1(t - t_0) \text{ et } t_0 \geq t_s \quad (5.23)$$

*où  $t_s$  représente le moment où la réponse indicielle se stabilise,  $1(t)$  est une entrée échelon d'amplitude 1,  $u_0$  est une constante et  $u_1(t)$  est une fonction variant dans le temps, avec amplitude bornée. L'amplitude de  $u_1$  est contrôlée pour que  $z$  ne passe par aucun point de changement.*

*Démonstration* . Supposons que l'entrée  $u(t) = u_0 \cdot 1(t)$  soit appliquée et que la réponse du modèle soit stabilisée à l'instant  $t = t_s$  *i.e.*  $\dot{\mathbf{x}}(t_s) = 0$ .

L'état à l'instant de stabilité,  $\mathbf{x}(t_s)$ , est trouvé en appliquant la condition  $\dot{\mathbf{x}}(t_s) = 0$  à l'équation (5.9):

$$\mathbf{x}(t_s) = -\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 + \mathbf{d}_i(\alpha_i) \cdot \beta_i) = f_0(\alpha_i, \beta_i)$$

Compte tenu de la forme de l'entrée,  $u(t)$ , dans (5.23), et du choix  $t_0 \geq t_s$ , on conclue que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_s) = f_0(\alpha_i, \beta_i)$ .



Supposons que  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, D - 1$  soient connus, que  $z$  soit mesurable, que  $u(t)$  et  $t_0$  soient choisis comme dans (5.23) et que l'identification soit faite dans le régime  $i$ .

La représentation d'état dans le régime  $i$  est:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i(\alpha_i).\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i(\alpha_i).u_2(t) + \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i \\ \mathbf{x}(t_0) = -\mathbf{A}^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{b}_i u_0 + \mathbf{d}(\alpha_i).\beta_i) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T_i$$

où  $u_2(t) = u_0 + u_1(t)$ .

En changeant la référence du temps de  $t = t_0$  à  $t = 0$ , on obtient:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i(\alpha_i).\mathbf{x} + \mathbf{b}_i(\alpha_i).u_2(t) + \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i \\ \mathbf{x}(0) = -\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 + \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i) \end{cases} \quad (5.24)$$

En raison de la ressemblance de (5.24) et (5.17) dans l'exemple de la section 5.3.1, l'étude de l'identifiabilité de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  revient à l'étude effectuée dans cet exemple.

La condition initiale en  $t = 0^+$ ,  $\mathbf{x}(0^+)$ , est nécessaire, pour trouver la réponse impulsionnelle du modèle (5.24). Cette condition peut être calculée de la façon suivante:

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{\mathbf{x}}(t).dt = \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{A}_i(\alpha_i).\mathbf{x}(t).dt + \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{b}_i(\alpha_i).\delta(t).dt + \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i.dt$$

Comme la première et la troisième intégrales de droite sont nulles (voir l'exemple 1 de la section 5.3.1):

$$\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{b}_i(\alpha_i)$$

où  $\mathbf{x}(0^-) = -\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{b}_i u_0 + \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i)$ .

La réponse impulsionnelle recherchée est donc  $y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$ , où  $\mathbf{x}(t)$  est calculé par:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \phi_i(\alpha_i, t)\mathbf{x}(0^+) + \mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i - \mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)\phi_i(\alpha_i, t)\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i \\ \mathbf{x}(0^+) = \mathbf{b}_i(\alpha_i) - \mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{b}_i u_0 + \mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i) \end{cases}$$

où  $\phi_i(\alpha_i, t)$  est la matrice de transition dans le régime  $i$ :  $\phi_i(\alpha_i, t) = e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}$ .

A ce stade, on peut utiliser l'approche des séries de Taylor, en calculant les différentes dérivées de  $y(t)$  en  $t = 0^+$ :

$$y(0^+) = \mathbf{c}\mathbf{x}(0^+) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i)\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{d}_i(\alpha_i).\beta_i + \mathbf{c}\mathbf{b}_i(\alpha_i)$$

$$\dot{y}(t) = \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{c}e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$\dot{y}(0^+) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i(\alpha_i)\mathbf{b}_i(\alpha_i) - \mathbf{c}\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$\ddot{y}(t) = \mathbf{c}\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^2(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$\ddot{y}(0^+) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^2(\alpha_i)\mathbf{b}_i(\alpha_i) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{A}_i\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$y^3(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}^3(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^3(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^2(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$y^3(0^+) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^3(\alpha_i)\mathbf{b}_i(\alpha_i) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^2\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{A}_i^2\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

⋮

$$y^k(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^k(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}(\alpha_i)e^{\mathbf{A}_i(\alpha_i)t}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

$$y^k(0^+) = \mathbf{c}\mathbf{A}_i^k(\alpha_i)\mathbf{b}_i(\alpha_i) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{b}_i(\alpha_i)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{d}_i(\alpha_i)\beta_i$$

⋮

L'équation  $a_k(\hat{\mathbf{p}}) = a_k(\mathbf{p}^*)$ , nous fournit deux relations algébriques différentes correspondant aux deux cas,  $k = 0$  et  $k \geq 1$ :

- $k = 0$ :

$$\begin{aligned} & -\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}(\hat{\alpha}_i)\mathbf{b}_i(\hat{\alpha}_i)u_0 - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}(\hat{\alpha}_i)\mathbf{d}_i(\hat{\alpha}_i).\hat{\beta}_i + \mathbf{c}\mathbf{b}_i(\hat{\alpha}_i) = \\ & -\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i^*)\mathbf{b}_i(\alpha_i^*)u_0 - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{-1}(\alpha_i^*)\mathbf{d}_i(\alpha_i^*).\beta_i^* + \mathbf{c}\mathbf{b}_i(\alpha_i^*) \end{aligned} \quad (5.25)$$

- $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}\mathbf{A}_i^k(\hat{\alpha}_i)\mathbf{b}_i(\hat{\alpha}_i) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{b}_i(\hat{\alpha}_i)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{d}_i(\hat{\alpha}_i)\hat{\beta}_i = \\ & \mathbf{c}\mathbf{A}_i^k(\alpha_i^*)\mathbf{b}_i(\alpha_i^*) - \mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{b}_i(\alpha_i^*)u_0 - 2\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}\mathbf{d}_i(\alpha_i^*)\beta_i^* \end{aligned} \quad (5.26)$$

La condition suffisante pour l'identifiabilité de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , est qu'il existe un  $k \geq 0$  pour lequel les équations (5.25) et (5.26) impliquent  $\hat{\alpha}_i = \alpha_i^*$  et  $\hat{\beta}_i = \beta_i^*$ .

Si  $\alpha_i$  est connu la condition suffisante pour l'identifiabilité de  $\beta_i$ , est que  $\exists k \geq 0$  pour lequel:

$$\mathbf{c}\mathbf{A}_i^{k-1}(\alpha_i)\mathbf{d}_i(\alpha_i) \neq 0. \quad (5.27)$$

Cette condition pour  $k = 0$  est également obtenue pendant l'étude de l'identifiabilité du modèle de zone morte quand les données sont acquises dans un seul régime (voir A.8).

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux classes: 1 et 2, de modèles contenant une non-linéarité nondifférentiable, étudiés dans les chapitres précédents. Ces deux modèles sont le modèle d'un système d'entraînement électro-mécanique dont le jeu est caractérisé par un modèle de zone morte (modèle 1) et le modèle de Karnopp (modèle 2). La classification est effectuée en utilisant le concept de régression linéaire par morceaux.

L'identifiabilité de la classe 1 est étudiée en généralisant la méthode proposée pour étudier l'identifiabilité du modèle de zone morte dans la section 3.3.

Pour la raison de la complexité des modèles de classe 2, nous n'avons pas effectué l'étude de l'identifiabilité de cette classe. Néanmoins, l'identifiabilité du modèle de frottement de Karnopp a été présentée dans la section 4.4.2.



## Chapitre 6

# Modèles de complémentarité

### 6.1 Introduction

Le terme *systèmes hybrides* a été récemment utilisé pour se référer aux systèmes contenant à la fois des composantes continues et discrètes<sup>1</sup>. Ce genre de systèmes a été étudié dans les mathématiques et les sciences de l'ingénieurs depuis quelques décennies. Les systèmes continus avec relais [52, 84], les systèmes linéaires par morceaux [29, 63, 64], et les systèmes mécaniques sous contraintes d'inégalité [49, 41], en sont quelques exemples.

L'article de Witsenhausen [84] publié en 1966, est peut-être le premier à avoir utilisé explicitement le terme *hybride* en connexion avec les systèmes dynamiques contenant un mélange des composantes continues et discrètes.

Une classe spéciale de systèmes hybrides est la classe des systèmes de complémentarité, pour laquelle les spécifications des équations et l'analyse sont considérablement plus simples que pour les systèmes hybrides. Un de fameux exemples de cette classe est un système linéaire par morceaux [79, 81, 27, 34].

L'un des avantages de la représentation d'un système par un modèle de complémentarité est sa capacité de généralisation: une classe particulière des modèles de complémentarité est capable de représenter plusieurs modèles (par exemple les modèles linéaires par morceaux). Ainsi, les problèmes tels que la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilité, les problèmes inverses, ... peuvent être simultanément étudiés et résolus pour une classe des modèles. Quelques références concernant ces problèmes sont [79, 6, 11].

Dans ce chapitre, nous dérivons le modèle de complémentarité de la classe 1, présentée

---

<sup>1</sup>Les composantes discrètes sont aussi appelées *événements*.

dans la section 5.2.2.1. Nous proposons ensuite une méthode pour lisser un modèle de complémentarité, et en particulier le modèle de complémentarité de la classe 1, de manière à obtenir un modèle différentiable.

notre méthode de lissage est inspirée de la méthode proposée dans [59] pour lisser la transition entre les régimes d'une régression par morceaux. L'idée est d'approximer une régression par morceaux  $h(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$  (voir la section 5.2.1) par une fonction lisse  $\tilde{h}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda)$ , qui tend vers  $h(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . La fonction  $\tilde{h}$  est choisie de façon à avoir la dérivée continue par rapport à  $z$  lorsque  $\lambda$  est fixé.

Le lissage a été utilisé pour résoudre le problème de la non-différentiabilité de la fonction de coût quadratique, introduit par la discontinuité de la régression par morceaux dans ses points de changement [59, 86]. Le lissage résout ce problème car, pour  $\lambda$  fixé,  $\tilde{h}$  peut être ajusté en utilisant une méthode de moindres carrés ordinaire. Les estimés de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  pour  $h$  peuvent être ensuite obtenus en réduisant progressivement  $\lambda$ .

La méthode que nous proposons pour le lissage d'un modèle de complémentarité peut être donc utile pour l'identification du modèle dans les algorithmes d'optimisation qui utilisent la dérivée analytique de la fonction de coût <sup>2</sup>.

Le modèle de complémentarité de la classe 1 obtenu peut aussi être utilisé pour étudier la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilité, etc. de la classe 1.

Il faut pourtant souligner que dans ce mémoire, nous nous contentons de présenter le modèle de complémentarité de la classe 1 et sa version lisse. Les issues proposées dans les deux derniers paragraphes ci-dessus ne seront pas traitées dans ce travail et peuvent être considérées comme des perspectives pour les futurs travaux.

Pour vérifier la précision du modèle lisse, nous effectuons quelques expériences de simulation. Ces expériences sont réalisées sur un modèle appartenant à la classe 1: le modèle linéaire d'un système d'entraînement électro-mécanique dont le jeu d'engrenage est caractérisé par un modèle de zone morte, nommé modèle 1 (voir la section 5.2.2.1).

Dans la suite, après une brève introduction aux modèles hybrides et aux modèles de complémentarité dans la section 6.2, nous présentons dans la section 6.3 le modèle de complémentarité de la classe 1. La section 6.4 concerne la méthode proposée pour lisser

---

<sup>2</sup>Les modèles de complémentarité lisses peuvent être aussi utilisés pour résoudre le problème de la sélection du prochain mode (ou phase) du système [34]

un modèle de complémentarité et en particulier, le modèle de complémentarité de la classe 1. Enfin, la section 6.5 est consacrée aux résultats de simulation.

## 6.2 Modèles hybrides et de complémentarité

### Modèle hybride:

De différents modèles hybrides, utilisés dans les différents domaines de la science comme philosophie, sociologie, économie et sciences de l'ingénieurs, sont disponibles. Les modèles *Timed of hybrid Petri-nets* [20], *Differential automata* [74], et *Hybrid automata* [11] en sont quelques exemples. Pour une description plus détaillée, voir [34].

Une technique de modélisation, proposée initialement dans [80], considère le modèle hybride comme une composition de plusieurs dynamiques continues, où les transitions entre ces dynamiques (les événements) sont contrôlées par quelques contraintes algébriques sur les états (continus) du système. Ainsi, la description la plus naturelle des dynamiques continues sur les intervalles entre les événements est la forme différentielle-algébrique utilisant un mélange d'Équations Différentielles et Algébriques (EDAs).

La forme totalement implicite d'un vecteur EDA est l'ensemble d'équations :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)) = 0 \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{f}$  est une fonction de  $R^n \times R^n$  sur  $R^n$ .

On trouve souvent aussi la forme semi-explicite suivante [80]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ 0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{x}$  peut être le vecteur d'état et  $\mathbf{f}$  est maintenant une fonction de  $R^{n+k} \times R^n$  dans  $R^n$  et  $\mathbf{h}$  de  $R^{n+k} \times R^n$  dans  $R^k$ .

### Modèle de complémentarité:

Les *systèmes de complémentarité*<sup>3</sup> [80, 34] sont un sous-ensemble des systèmes hybrides,

---

<sup>3</sup>complementarity-slackness systems.



décrits par EDAs suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)) = 0 & (\mathbf{f} : R^{n+k} \times R^{n+k} \rightarrow R^n), \\ \mathbf{y}_c(t) = \mathbf{h}_1(\mathbf{z}(t)) & (\mathbf{y}_c(t) \in R^k), \\ \mathbf{u}_c(t) = \mathbf{h}_2(\mathbf{z}(t)) & (\mathbf{u}_c(t) \in R^k), \\ \mathbf{y}_c = [y_{c_1}, \dots, y_{c_k}]^T, & \mathbf{u}_c = [u_{c_1}, \dots, u_{c_k}]^T \end{cases} \quad (6.3)$$

avec les conditions de complémentarité

$$u_{c_i} \geq 0, y_{c_i} \geq 0 \text{ et } \{u_{c_i} = 0 \text{ ou } y_{c_i} = 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, k\}\} \quad (6.4)$$

Les conditions (6.4) peuvent être réécrites comme:

$$\mathbf{u}_c \geq 0, \mathbf{y}_c \geq 0, \mathbf{u}_c^T \mathbf{y}_c = 0$$

ou, dans la forme plus compacte:

$$0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0,$$

où la notation  $\mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c$  montre que  $\mathbf{y}_c$  et  $\mathbf{u}_c$  sont orthogonales.

Une forme spéciale de la description (6.3), reliée à la forme semi-explicite des EDAs, est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t)) = 0 & (\mathbf{f} : R^n \times R^k \rightarrow R^n), \\ \mathbf{y}_c(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t)) & (\mathbf{u}_c(t), \mathbf{y}_c(t) \in R^k), \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{x} \in R^n$  est le vecteur d'état.

Considérant (6.5), un *modèle linéaire de complémentarité* est défini de la façon suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_c(t) \\ \mathbf{y}_c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_c(t) \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont des matrices constantes<sup>4</sup>.

*Remarque :*

Le terme *complémentarité* vient du *problème de complémentarité linéaire* [16]<sup>5</sup>, qui est l'un des problèmes étudiés en programmation mathématique, et qui est défini de la manière suivante:

<sup>4</sup>On note que  $u_c$  et  $y_c$  sont les variables de complémentarité et pas les entrées-sorties du système. Dans les références [80] et [12], quelques exemples des systèmes de complémentarité-slackness sont mentionnés où les EDAs sont exprimées en fonction des variables d'état, des variables de complémentarité, et des entrées-sorties de système.

<sup>5</sup>Linear Complementarity Problem (LCP)

Considérez la matrice  $\mathbf{M} \in R^{k \times k}$  et le vecteur  $\mathbf{q} \in R^k$ .  $LCP(\mathbf{q}, \mathbf{M})$  cherche les vecteurs  $\mathbf{u}_c$  et  $\mathbf{y}_c \in R^k$  de sorte que  $\mathbf{y}_c = \mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{u}_c$  et  $0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0$ . Quelques solutions pour résoudre ce problème ont été proposées dans [79, 58, 81].

*Remarque:*

L'entrée et la sortie du système hybride (6.3) sont dans le vecteur  $\mathbf{z}$ .

### 6.3 Modèle de complémentarité de la classe 1

Dans cette section, nous nous intéressons à la représentation de complémentarité de la classe 1, présentée dans la section 5.2.2.1.

**Proposition 6.1** *La fonction  $\max(z - \gamma_i, 0)$  peut être remplacé par sa représentation de complémentarité [34]:*

$$\max_i = \max(z - \gamma_i, 0) \equiv \begin{cases} z = u_{c_i} - y_{c_i} + \gamma_i \\ \max_i = u_{c_i} \\ u_{c_i} \geq 0, y_{c_i} \geq 0 \text{ et } \{u_{c_i} = 0 \text{ ou } y_{c_i} = 0\} \end{cases} \quad (6.7)$$

*Démonstration .* Considérons le cas  $z \geq \gamma_i$ . On peut facilement montrer que  $\max_i$  calculé par  $\max(z - \gamma_i, 0)$ , est identique à celui calculé par la représentation de complémentarité (6.7):

$$\begin{aligned} z \geq \gamma_i &\Rightarrow u_{c_i} - y_{c_i} \geq 0 \Rightarrow (u_{c_i} = z - \gamma_i) \geq 0, y_{c_i} = 0 \Rightarrow \max_i = u_{c_i} = z - \gamma_i \\ z \geq \gamma_i &\Rightarrow \max(z - \gamma_i, 0) = z - \gamma_i \end{aligned}$$

Pour l'autre cas,  $z \leq \gamma_i$ , la démonstration est similaire. ♠

La régression linéaire par morceaux et continue aux points de changement ci-dessous:

$$v(z) = \begin{cases} \alpha_1 z + \beta_1, & z \leq \gamma_1 \\ \alpha_2 z + \beta_2, & \gamma_1 \leq z \leq \gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_D z + \beta_D, & \gamma_{D-1} \leq z \end{cases}$$

peut être réécrite comme:

$$v = \alpha_1 \cdot z + \beta_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \max(z - \gamma_1, 0) + \dots + (\alpha_{D-1} - \alpha_{D-2}) \cdot \max(z - \gamma_{D-2}, 0) + \alpha_D \cdot \max(z - \gamma_{D-1}, 0), \quad (6.8)$$

car, grâce à la continuité du modèle aux points de changement  $\gamma_i$ ,

$$\beta_{i+1} = (\alpha_i - \alpha_{i+1})\gamma_i + \beta_i = \sum_{j=1}^{j=i} (\alpha_j - \alpha_{j+1})\gamma_j + \beta_1 \quad i = 1, \dots, D-1$$

La représentation de complémentarité de (6.8) est donc:

$$\begin{cases} v = \alpha_1.z + \beta_1 + (\alpha_2 - \alpha_1).u_{c_1} + \dots + (\alpha_{D-1} - \alpha_{D-2}).u_{c_{D-2}} + \alpha_D.u_{c_{D-1}} \\ v = \alpha_1.z + \beta_1 + \boldsymbol{\alpha}.\mathbf{u}_c \\ u_{c_i} = z + y_{c_i} - \gamma_i, \quad i = 1, \dots, D-1 \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

où  $\boldsymbol{\alpha} = [(\alpha_2 - \alpha_1), \dots, (\alpha_{D-1} - \alpha_{D-2}), \alpha_D]$ .

---

Exemple :

Considérons la caractéristique d'un modèle de zone morte, montrée dans la figure 3.5, pour laquelle (voir la proposition 5.1):

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = -\beta_3 = \theta, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = -\theta.$$

La relation (6.8) s'écrit dans ce cas:

$$v = z + \theta - \max(z + \theta, 0) + \max(z - \theta, 0)$$

et la représentation de complémentarité (6.9) devient:

$$\begin{cases} v = z + \theta - u_{c_1} + u_{c_2} \\ u_{c_1} = z + y_{c_1} + \theta, \quad u_{c_2} = z + y_{c_2} - \theta \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

---

Insérant la représentation (6.9) dans les équations différentielles de la classe 1 (relation (5.4)), réécrite ci-dessous:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{b}.u + \mathbf{d}_0.v + \mathbf{d}_1.\dot{v} \\ v = f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{E}.\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

on obtient le modèle de complémentarité de la classe 1:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\alpha_1).\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\alpha_1).u(t) + \mathbf{B}(\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}).\mathbf{U}_c(t) + \mathbf{d}(\alpha_1).\beta_1 \\ \mathbf{z} = \mathbf{E}.\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ u_{c_i} = z + y_{c_i} - \gamma_i, \quad i = 1, \dots, D-1 \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

où  $\mathbf{A}(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{b}(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{d}(\alpha_1)$  sont, respectivement,  $\mathbf{A}_1(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{b}_1(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{d}_1(\alpha_1)$  définis par (5.10),  $\mathbf{B}(\cdot) = [\mathbf{d}_0 \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{d}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}]$  et  $\mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \dot{\mathbf{u}}_c \end{bmatrix}$  sont de dimension  $n \times (2.(D - 1))$  et  $(2.(D - 1)) \times 1$  respectivement.

En raison de la présence des dérivées des variables de complémentarité,  $\dot{\mathbf{u}}_c$  (et donc  $\dot{\mathbf{y}}_c$ ), dans les EDAs (6.12), le modèle de complémentarité est dynamique [79].

## 6.4 Lissage du modèle de complémentarité

Le lissage d'un modèle de complémentarité permet d'obtenir un modèle différentiable dont l'étude et l'estimation des paramètres sont plus faciles <sup>6</sup>. Dans cette section, nous proposons une méthode pour lisser un modèle de complémentarité en général, et le modèle de complémentarité de la classe 1 en particulier. On montre que ce lissage change la propriété d'orthogonalité des variables de complémentarité,  $u_{c_i}$  et  $y_{c_i}$  dans (6.4).

Dans la suite, nous présentons d'abord une méthode existante pour lisser les transitions entre des régimes d'une régression par morceaux [59]. Notre approche pour lisser le modèle de complémentarité sera ensuite présentée dans la section 6.4.2.

### 6.4.1 Lissage des transitions entre des régimes

Considérez la régression par morceaux continue suivante, avec seulement deux régimes:

$$h(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{cases} \alpha_1 z + \beta_1, & z \leq \gamma_1 \\ \alpha_2 z + \beta_2, & \gamma_1 \leq z \end{cases}, \quad (6.13)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2\}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_i = [\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = 1, 2$ .

Cette régression peut être réécrite comme:

$$h(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \nu_0 + \nu_1(z - \gamma_1) + \nu_2(z - \gamma_1) \text{sgn}(z - \gamma_1), \quad (6.14)$$

où  $\nu_0 = h(\gamma_1, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$ ,  $\nu_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ ,  $\nu_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ , et

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} -1, & z < 0, \\ 0, & z = 0, \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>L'estimation des paramètres d'un modèle nondifférentiable peut être effectuée sans l'utilisation du lissage (voir, par exemple [53]). Le lissage est pourtant utile dans les algorithmes d'optimisation qui utilisent la dérivée analytique de la fonction de coût.

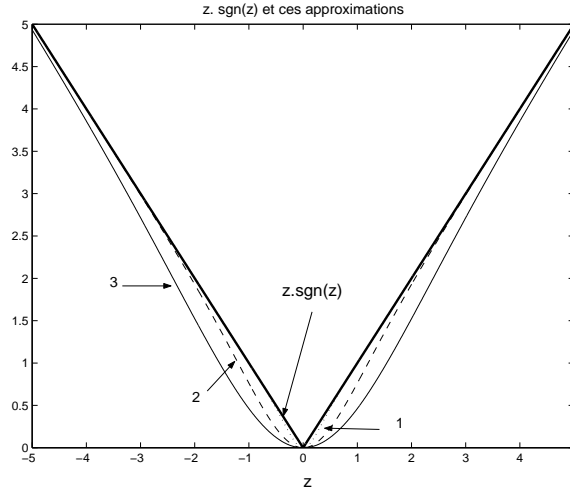


Figure 6.1: La fonction  $z.sgn(z)$  (ligne solide épaisse) et ses approximations pour  $\lambda = 0.3, 1, 2$ : les courbes 1, 2 et 3 respectivement.

L'idée est de remplacer la fonction  $sgn$  par son approximation lisse, notée par  $trn(\cdot)$ , *i.e.*:

$$\tilde{h}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \nu_0 + \nu_1(z - \gamma_1) + \nu_2(z - \gamma_1)trn\left(\frac{z - \gamma_1}{\lambda}\right), \quad \lambda \geq 0, \quad (6.15)$$

qui satisfait les conditions suivantes [31]:

- $\lim_{z \rightarrow \mp\infty} [z.trn(z) - z.sgn(z)] = 0$
- la fonction (6.14) est une forme limite de (6.15), *i.e.*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} trn\left(\frac{z}{\lambda}\right) = sgn(z)$$

- La fonction lisse passe par le point de changement  $(\gamma_1, \nu_0)$ , *i.e.*

$$\tilde{h}(\gamma_1, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \nu_0 \Rightarrow trn(0) = sgn(0) = 0$$

Une fonction satisfaisant ces conditions est:

$$trn(z) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (6.16)$$

La figure 6.1 compare les fonctions  $z.sgn(z)$  et  $z.tanh(\frac{z}{\lambda})$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ . On constate que toutes les trois conditions mentionnées précédemment sont satisfaites.

#### 6.4.2 Lissage des variables de complémentarité

Les variables de complémentarité de (6.4),  $u_{c_i}$  et  $y_{c_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , peuvent être écrites comme (voir (6.7)):

$$u_{c_i} = \max(z - \gamma_i, 0) = \begin{cases} 0, & z \leq \gamma_i, \\ z - \gamma_i, & \gamma_i \leq z \end{cases}$$

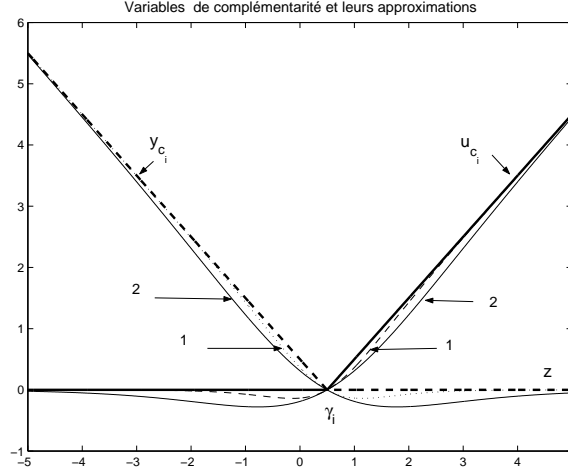


Figure 6.2: Variables de complémentarité,  $u_{c_i}$  (ligne solide épaisse) et  $y_{c_i}$  (ligne coupée épaisse) et leurs approximations pour  $\lambda = 1, 2$ : respectivement les courbes 1 et 2.

qui a la forme de (6.13) pour  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$  et  $\beta_2 = -\gamma_i$ , et

$$y_{c_i} = \max(z - \gamma_i, 0) - z + \gamma_i = \begin{cases} -z + \gamma_i, & z \leq \gamma_i, \\ 0, & \gamma_i \leq z \end{cases}$$

qui a aussi la forme de (6.13) pour  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = \gamma_i$  et  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ .

On les réécrit donc en utilisant la fonction  $sgn$  (voir (6.14)):

$$\begin{aligned} u_{c_i} &= 0.5(z - \gamma_i) + 0.5(z - \gamma_i)sgn(z - \gamma_i) \\ y_{c_i} &= -0.5(z - \gamma_i) + 0.5(z - \gamma_i)sgn(z - \gamma_i), \end{aligned}$$

Les variables de complémentarité lisses,  $\tilde{u}_{c_i}$  et  $\tilde{y}_{c_i}$ , sont trouvées en remplaçant  $sgn(z - \gamma_i)$  dans les équations ci-dessus par  $\tanh(\frac{z - \gamma_i}{\lambda})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{c_i} &= 0.5(z - \gamma_i) + 0.5(z - \gamma_i)\tanh\left(\frac{z - \gamma_i}{\lambda}\right) \\ \tilde{y}_{c_i} &= -0.5(z - \gamma_i) + 0.5(z - \gamma_i)\tanh\left(\frac{z - \gamma_i}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

La figure 6.2 compare  $u_{c_i}$  et  $y_{c_i}$  avec  $\tilde{u}_{c_i}$  et  $\tilde{y}_{c_i}$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  en supposant  $\gamma_i > 0$ .

Comme c'est montré sur cette figure, la propriété d'orthogonalité de  $u_{c_i}$  et  $y_{c_i}$  ( $u_{c_i} \cdot y_{c_i} = 0$ ) n'est plus valable pour  $\tilde{u}_{c_i}$  et  $\tilde{y}_{c_i}$  ( $\tilde{u}_{c_i} \cdot \tilde{y}_{c_i} \neq 0$ ). Néanmoins, elle est approximativement vraie pour des grandes valeurs de  $z$  ou des petites valeurs de  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\forall \lambda \geq 0, z \rightarrow \pm\infty} \tilde{u}_{c_i} \cdot \tilde{y}_{c_i} &= u_{c_i} \cdot y_{c_i} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0, \forall z} \tilde{u}_{c_i} \cdot \tilde{y}_{c_i} &= u_{c_i} \cdot y_{c_i} = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Exemple:

Le modèle de complémentarité lisse de la classe 1 s'obtient en utilisant les variables de complémentarité lisses  $\tilde{u}_{c_i}$  et  $\tilde{y}_{c_i}$ , dans la relation (6.12),

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\alpha_1).\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\alpha_1).u(t) + \mathbf{B}(\alpha_1, \boldsymbol{\alpha}).\tilde{\mathbf{U}}_c(t) + \mathbf{d}(\alpha_1).\beta_1 \\ \mathbf{z} = \mathbf{E}.\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \tilde{u}_{c_i} = 0.5(z - \gamma_i)(\tanh(\frac{z-\gamma_i}{\lambda}) + 1), \quad \tilde{y}_{c_i} = 0.5(z - \gamma_i)(\tanh(\frac{z-\gamma_i}{\lambda}) - 1), \quad i = 1, \dots, D - 1 \end{cases} \quad (6.19)$$

où  $\mathbf{A}(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{b}(\alpha_1)$ ,  $\mathbf{d}(\alpha_1)$  et  $\mathbf{B}(\alpha_1, \boldsymbol{\alpha})$  sont les mêmes que dans le modèle de complémentarité (6.12), et  $\tilde{\mathbf{U}}_c = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_c \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_c \end{bmatrix}$  est de dimension  $(2.(D - 1)) \times 1$ .

## 6.5 Résultats de simulation

L'objectif de cette section est de montrer la ressemblance entre le comportement entrée-sortie du modèle de complémentarité de la classe 1 et celui du modèle de complémentarité lisse.

On a déjà montré dans la section 5.2.2.1, que le modèle linéaire du système d'entraînement électro-mécanique dont le jeu d'engrenage est modélisé par le modèle de zone morte (nommé modèle 1), appartenait à la classe 1. Nous avons donc décidé de l'utiliser dans cette section.

Les deux cas suivants sont considérés:

- **cas 1:** Comparaison entre le comportement du modèle de zone morte et celui de ses représentations de complémentarité (avant et après le lissage).
- **cas 2:** Comparaison entre le comportement du modèle général 1 et celui de ses représentations de complémentarité (avant et après le lissage).

Deux types d'entrée sont utilisés: des entrée sinusoïdales de fréquence différente, et une entrée aléatoire.

### 6.5.1 Comportement du modèle de complémentarité lisse du modèle de zone morte

Les comportements des modèles suivants sont étudiés, pour  $\theta = 0.0349 \text{ rad}$  (2 deg):

- Le modèle de zone morte:

$$DZ_\theta(z) = \begin{cases} z - \theta & \theta \leq z \\ 0 & -\theta \leq z \leq \theta \\ z + \theta & z \leq -\theta \end{cases} \quad (6.20)$$

- Le modèle de complémentarité du modèle de zone morte (voir (6.10)):

$$\begin{cases} DZ_{\theta_c}(z) = z + \theta + u_{c_2} - u_{c_1} \\ u_{c_1} = z + y_{c_1} + \theta, \quad u_{c_2} = z + y_{c_2} - \theta \\ 0 \leq \mathbf{y}_c \perp \mathbf{u}_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

- Le modèle de complémentarité lisse du modèle de zone morte (voir (6.17)):

$$\begin{cases} \tilde{DZ}_{\theta_c}(z) = z + \theta + \tilde{u}_{c_2} - \tilde{u}_{c_1} \\ \tilde{u}_{c_i} = 0.5(z - \gamma_i)(\tanh(\frac{z - \gamma_i}{\lambda}) + 1) \\ \tilde{y}_{c_i} = 0.5(z - \gamma_i)(\tanh(\frac{z - \gamma_i}{\lambda}) - 1), \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (6.22)$$

où  $\gamma_1 = -\theta$  et  $\gamma_2 = \theta$ .

#### Comportements pour des entrées sinusoïdales:

Les entrées  $z_1 = 0.1 \sin(10t)$  et  $z_2 = 0.1 \sin(200t)$  sont appliquées aux modèles (6.20), (6.21) et (6.22). Pour plus de visibilité, l'amplitude de l'entrée est choisie pour être comparable avec  $\theta$  (environs trois fois plus grande). La période d'échantillonnage égale  $T_s = 1 \text{ ms}$  et  $T_s = 0.1 \text{ ms}$  pour les fréquences respectives de 10 et 200  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Figure 6.3 (en haut) montre des sorties des modèles pour les entrées mentionnées. On remarque le comportement identique des modèles (6.20), (6.21) et (6.22) pour  $\lambda = 0.0005$ .

#### Comportements pour une entrée aléatoire:

L'entrée  $z$  est un bruit blanc de puissance  $10^{-7}$ . La période d'échantillonnage est  $T_s = 0.1 \text{ ms}$ . Figure 6.3 (en bas) montre des sorties des modèles pour cette entrée. Comme dans le cas de l'entrée sinusoïdale, les sorties des modèles (6.20), (6.21) et (6.22) pour  $\lambda = 0.0005$  sont identiques.

### 6.5.2 Comportement du modèle de complémentarité lisse du modèle 1

La figure 6.4 montre le diagramme bloc simulé du modèle 1 où la nonlinéarité est l'un des modèles (6.20), (6.21) ou (6.22). Les valeurs des autres paramètres sont

$$\begin{aligned} J_M &= 4.88 \times 10^{-3}, \quad J_L = 6.8 \times 10^{-2} \text{ [Kg.m}^2\text{]}, \\ k_{sh} &= 78 \text{ [} \frac{\text{N.m}}{\text{rad}} \text{]}, \quad f_M = f_L = 0.5 \times 10^{-2} \text{ [} \frac{\text{N.m.s}}{\text{rad}} \text{]}, \\ f_{sh} &= 1.575 \times 10^{-2} \text{ [} \frac{\text{N.m.s}}{\text{rad}} \text{]}. \end{aligned}$$

#### Comportements pour des entrées sinusoïdales:

On applique des entrées  $C_{M_1} = 6 \sin(10t)$  et  $C_{M_2} = 6 \sin(200t)$ . La période d'échantillonnage égale  $T_s = 1 \text{ ms}$  et  $T_s = 0.1 \text{ ms}$  pour les fréquences respectives 10 et 200  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . La figure 6.5



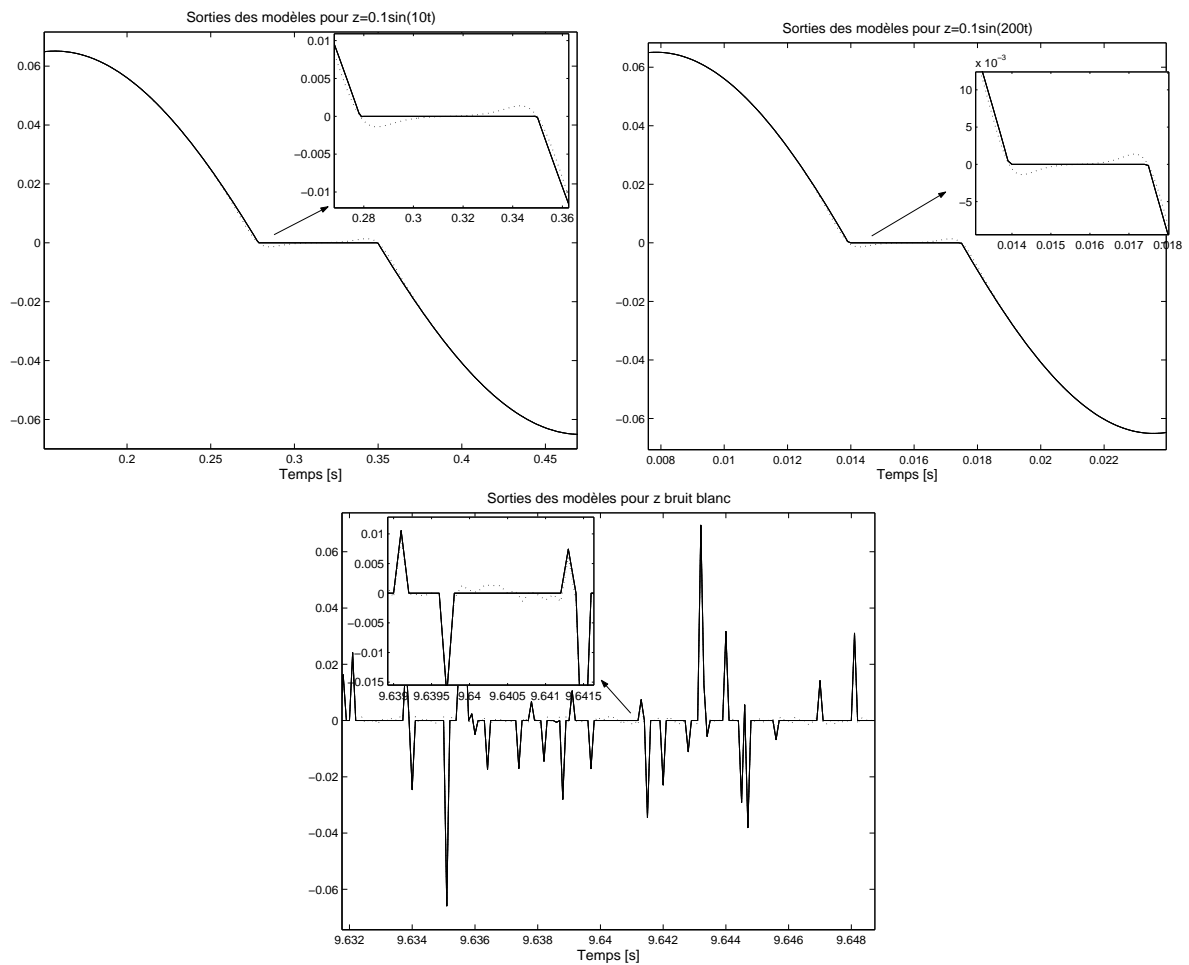


Figure 6.3: Sorties des modèles pour des entrées sinusoïdales de fréquences différentes et pour une entrée bruit blanc: le modèle de zone morte, le modèle de complémentarité et le modèle de complémentarité lisse coïncident parfaitement pour  $\lambda = 0.0005$  (les lignes solides). La ligne pointillée correspond au modèle de complémentarité lisse avec  $\lambda = 0.01$ .

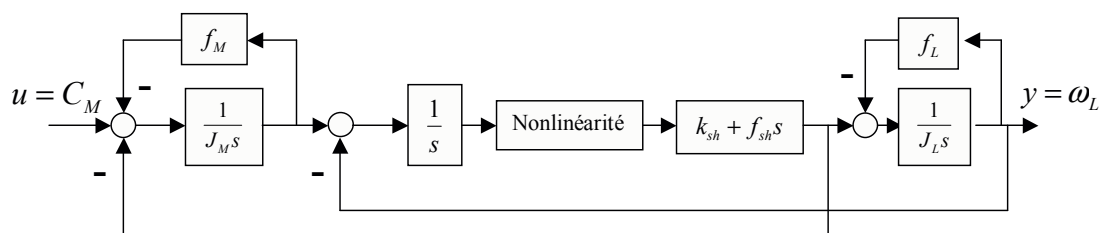


Figure 6.4: Diagramme bloc du modèle 1.

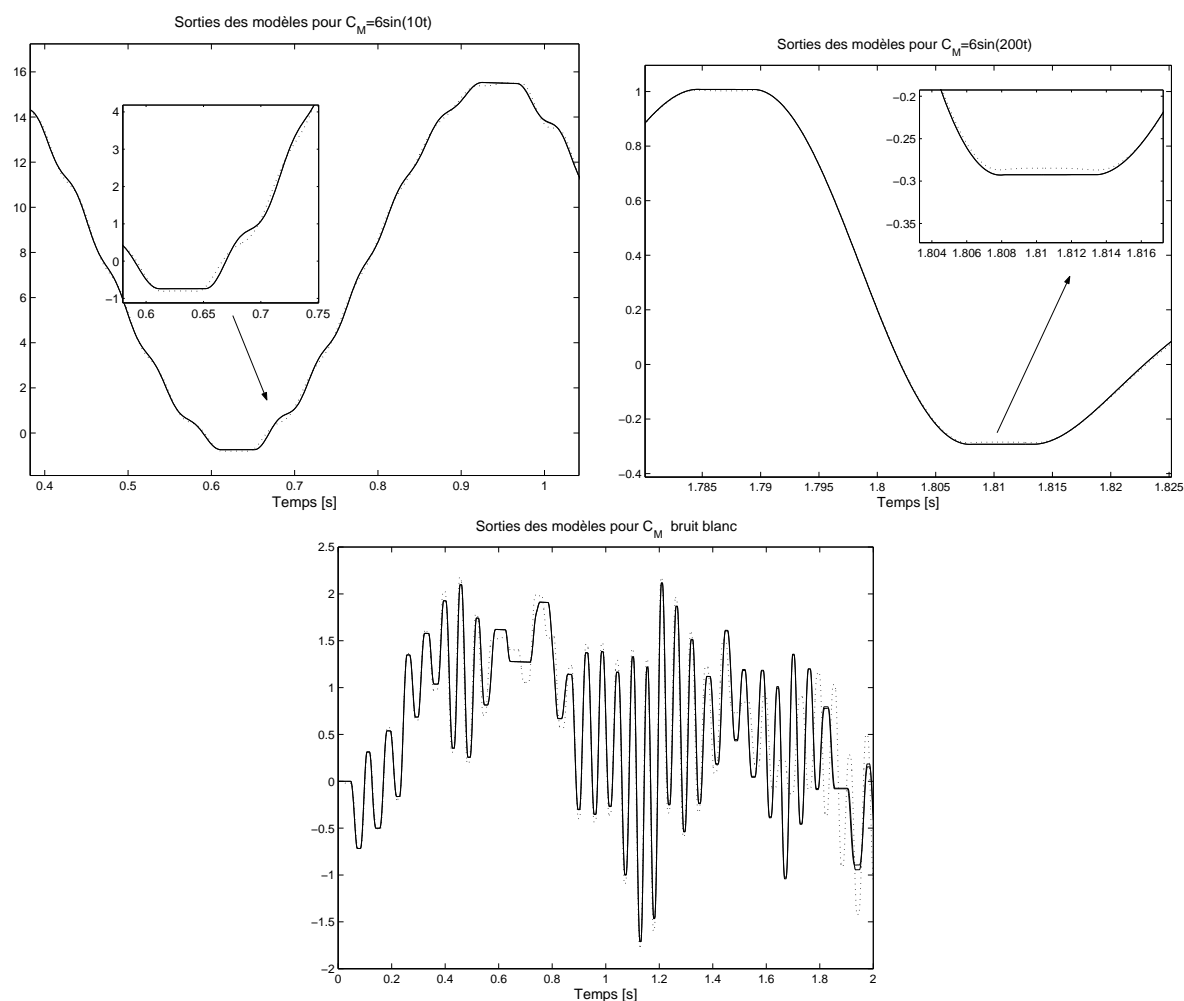


Figure 6.5: Sorties des modèles pour des entrées sinusoïdales de fréquences différentes et pour une entrée bruit blanc: le modèle 1, le modèle de complémentarité et le modèle de complémentarité lisse coïncident parfaitement pour  $\lambda = 0.0005$  (les lignes solides). La ligne pointillée correspond au modèle de complémentarité lisse avec  $\lambda = 0.01$ .

montre les sorties des modèles pour les entrées mentionnées. On remarque le comportement identique des modèles pour  $\lambda = 0.0005$ .

### Comportements pour l'entrée aléatoire:

L'entrée  $C_M$  du type bruit blanc de puissance  $10^{-2}$  est appliquée. La période d'échantillonnage est  $T_s = 0.1 \text{ ms}$ .

Figure 6.5 bas, montre des sorties des modèles pour cette entrée. Comme dans le cas de l'entrée sinusoïdale, les sorties des modèles pour  $\lambda = 0.0005$  sont identiques.

### Commentaire:

La différence principale entre les résultats obtenus dans le cas du modèle de zone morte

et le modèle 1 est que dans le cas du modèle 1, l'erreur produite par le lissage du modèle de complémentarité augmente dans le temps. Cette erreur est surtout considérable quand  $\lambda$  n'est pas suffisamment petit et quand l'entrée est très excitante (comparez les sorties obtenues pour l'entrée bruit blanc avec les sorties obtenues pour l'entrée sinusoïdale). La phénomène est dû à la présence des dynamiques et des retours d'état qui n'existent que dans le modèle 1 (voir Figure 6.4). Ces retours d'état amplifient l'erreur de plus en plus au cours du temps .

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de complémentarité de la classe 1. Ce modèle peut être utilisé dans les algorithmes existants [79, 6, 11] pour étudier les problèmes d'observabilité, de contrôlabilité, de stabilité, etc, ce qui n'est pourtant pas l'objectif de notre travail.

Ensuite, nous avons proposé une méthode pour lisser des modèles de complémentarité, et en particulier, le modèle de complémentarité de la classe 1. Le lissage permet d'obtenir un modèle différentiable dont l'étude et l'estimation des paramètres sont plus faciles, surtout lors de l'utilisation des algorithmes d'optimisation qui utilisent la dérivée analytique de la fonction de coût. Il faut pourtant souligner que le lissage ne permet pas de résoudre certains problèmes communs de ces algorithmes comme l'existence des minima locaux.

Les résultats de simulation sur le modèle de zone morte et sur le modèle 1 montrent que les comportements entrée-sortie de ces modèles (pour une entrée sinusoïdale et pour une entrée aléatoire) sont identiques à ceux de leurs modèles de complémentarité et de leurs modèles de complémentarité lisse avec  $\lambda$  très petit.

L'erreur produite par le lissage du modèle de complémentarité du modèle 1 augmente dans le temps en raison de la présence des retours d'état.

## Chapitre 7

# Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire s'articulent sur le thème principal de l'identification des modèles de connaissance des nonlinéarités nondifférentiables dans les systèmes physiques. Ainsi, nous avons étudié deux cas particuliers: le modèle de zone morte du jeu d'engrenage et le modèle Karnopp de frottement. Les idées développées dans ces études ont été ensuite généralisées aux familles plus larges des modèles contenant une nonlinéarité nondifférentiable.

Nous nous sommes d'abord intéressés à l'identification du jeu d'engrenage dans un système d'entraînement électro-mécanique. Lorsque les valeurs exactes des paramètres de la partie linéaire du système ne sont pas connues, outre le jeu, ces paramètres doivent aussi être identifiés. Afin de faciliter l'identification du jeu dans ces circonstances et l'étude de l'identifiabilité, nous avons préféré utiliser le modèle relativement simple de zone morte pour caractériser le jeu. L'indisponibilité de l'entrée et de la sortie du modèle et la complexité de la structure du système ne nous permettant pas d'utiliser les méthodes existantes de l'identification du modèle de zone morte, nous avons proposé une nouvelle approche.

L'étude de l'identifiabilité du modèle nous a permis de proposer une planification d'expérience, garantissant l'identifiabilité. L'estimation du jeu a été effectuée par deux méthodes: 1) estimation en utilisant une relation entre les instants de commutations produites par le jeu, l'amplitude du jeu, et la dérivée de l'entrée du modèle de zone morte, 2) estimation en minimisant un critère de moindres carrés. L'avantage de la première méthode est qu'elle est moins influencée par les erreurs de l'estimation des paramètres de la dynamique linéaire du système. Son inconvénient est que l'estimation des instants de commutations est sensible au bruit de mesure.

L'utilisation de l'algorithme issu de notre approche sur le système simulé d'entraînement

électro-mécanique de la compagnie ALSTOM a prouvé sa pertinence. Nous avons également proposé une méthode pour estimer préalablement les paramètres des dynamiques linéaires de ce système.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour améliorer les travaux effectués dans cette partie. La contrainte sur la vitesse maximum du moteur et l'influence du jeu dégradent la précision de l'estimation de certains paramètres des parties linéaires du système. Ces paramètres pourraient être ré-estimés séparément en définissant d'autres critères et en appliquant d'autres entrées auxquelles ces paramètres sont plus sensibles. En ce qui concerne le jeu, on peut envisager

- la modélisation du jeu avec des modèles plus compliqués,
- l'utilisation de la relation entre la fréquence des oscillations (cycle limite produit par le jeu) et l'amplitude du jeu pour rendre l'estimation moins sensible au bruit de mesure,
- l'étude de l'influence du bruit de l'entrée (le couple moteur).

Le deuxième modèle contenant une nonlinéarité nondifférentiable étudié dans ce mémoire est le modèle Karnopp de frottement. Ce modèle fournit un bon compromis entre la simplicité et la précision de la simulation des mouvements collage-décollage dus au frottement. Nous avons proposé une nouvelle méthode en trois étapes pour estimer les paramètres de ce modèle. En première étape, un modèle de régression linéaire a été utilisé pour estimer les paramètres du frottement de décollage. La deuxième étape utilise une méthode de seuillage pour estimer la vitesse limite du passage entre les périodes décollage et collage. En troisième étape, une méthode d'optimisation nonlinéaire permet d'estimer les paramètres du frottement de collage. Pour cette dernière étape, nous avons utilisé deux critères, un temporel et un autre basé sur la fonction caractéristique. Ce dernier critère est considérablement plus lisse et plus rapide à calculer. L'identifiabilité du modèle a été également prouvée.

Le modèle identifié a été ensuite utilisé pour la compensation du frottement. Nous avons considéré deux systèmes d'asservissement, un actionneur électrique et un actionneur électro-pneumatique. Dans le cas de l'actionneur électrique, le signal de commande est appliqué au même point que la composante engendrant le frottement. Nous avons proposé une conception du compensateur robuste vis-à-vis des changements des paramètres de frottement. Dans le cas de l'actionneur électro-pneumatique, l'existence de la dynamique de servovalve entre le signal de commande et la composante engendrant le frottement peut impliquer des erreurs statiques. Nous avons proposé une méthode de compensation pour éliminer ces erreurs.

Les résultats expérimentaux sur l'actionneur électro-pneumatique et les résultats de simulation d'un actionneur électrique confirment la précision et l'efficacité des méthodes proposées. L'avantage principal de notre approche d'identification est la prise en compte de l'interprétation physique du modèle de Karnopp pour estimer ses paramètres en plusieurs étapes. Ainsi, un grand nombre des paramètres sont estimés par une méthode d'optimisation linéaire, ce qui évite les problèmes de convergence des algorithmes d'optimisation non-linéaire. La méthode est sensible aux bruits de mesure. Elle n'est donc idéale que pour modéliser le frottement dans les systèmes passe-bas, pour lesquels le bruit de mesure haute fréquence peut être filtré sans détériorer les résultats de l'estimation des paramètres.

Pour poursuivre nos travaux concernant le frottement (identification et compensation), nous proposons

- l'utilisation d'une méthode d'estimation en-ligne au lieu de la méthode hors-ligne utilisée dans ce mémoire,
- l'étude de l'influence du bruit de mesure sur le fonctionnement du compensateur robuste utilisé dans le cas de l'actionneur électrique,
- l'estimation de la dynamique de servovanne pour concevoir les contrôleurs de position et de force, et améliorer ainsi la compensation du frottement dans le cas de l'actionneur électro-pneumatique. Les approches proposées dans [62] peuvent être utilisées pour cet objectif.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons essayé de généraliser les idées développées dans l'étude d'identifiabilité des systèmes particuliers traités, et les travaux existants sur les systèmes de complémentarité, aux familles plus larges des modèles contenant une non-linéarité nondifférentiable.

Ainsi, dans le chapitre 4 nous avons d'abord présenté des représentations de régression par morceaux pour le modèle de zone morte du jeu et le modèle de Karnopp de frottement. La première représentation est continue avec une entrée et une sortie, tandis que la deuxième est une combinaison de deux régressions par morceaux, l'une continue et l'autre discontinue, avec deux entrées et une sortie.

En utilisant ces représentations, nous avons défini deux classes de modèles. La classe 1 est la classe des modèles avec une nonlinéarité nondifférentiable décrite par la régression par morceaux continue, à laquelle le modèle du système d'entraînement électro-mécanique appartient. La classe 2 est la classe des modèles avec la nonlinéarité nondifférentiable décrite par un modèle de régression composé de deux régressions par morceaux, une continue et

une autre discontinue, contenant le modèle de Karnopp.

L'identifiabilité de la classe 1 a été étudiée en généralisant la méthode proposée pour étudier l'identifiabilité du modèle de zone morte. En raison de la complexité des modèles de classe 2, nous n'avons pas pu étudier l'identifiabilité de cette classe. Nous laissons donc cette étude comme une perspective du travail.

Dans le chapitre 5, nous avons présenté la représentation de complémentarité de la classe 1. Cette représentation peut être utilisée pour étudier les problèmes d'observabilité, de contrôlabilité, de stabilité, etc des modèles appartenant à la classe 1 dans les futurs travaux.

Nous avons aussi proposé une méthode pour le lissage des modèles de complémentarité, et en particulier le modèle de complémentarité de la classe 1. Ce modèle lisse et différentiable peut être alors identifié plus facilement surtout lors de l'utilisation des algorithmes d'optimisation qui utilisent la dérivée analytique de la fonction de coût. Ceci peut être considéré comme une perspective du travail.

# Bibliographie

- [1] M. Aoki and P.C. Yue. On certain convergence questions in system identification. *SIAM J. Contr.*, 8:239–256, 1970.
- [2] B. Armstrong and B. Amin. PID control in the presence of static friction: a comparison of algebraic and describing function analysis. *Automatica*, 32(5):679–692, 1996.
- [3] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines and friction. *Automatica*, 30(7):1083–1138, 1994.
- [4] D. P. Atherton. *Nonlinear Control Engineering, Describing Function Analysis and Design*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, U.S.A., 1982.
- [5] R. Bellman and K. J. Aström. On structural identifiability. *Math. Biosci.*, 7:329–339, 1970.
- [6] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 45(10):1864–1876, 2000.
- [7] M. Berman and R. Schoenfeld. Invariants in experimental data on linear kinetics and the formulation of models. *J. Appli. Phys*, 27:1361–1370, 1956.
- [8] P.-A. Bliman and M. Sorine. Friction modelling by hysteresis operators. applications to Dahl, stiction and Stribeck effects. *Proc. of Conference on models of Hysteresis, Pitman Research Notes in Mathematics*, 1991.
- [9] P.-A. Bliman and M. Sorine. A systems theoretic approach of systems with hysteresis. application to friction modelling and compensation. *Proceedings of the 2nd European Control Conference*, pages 1844–1849, 1993. Groningen, Netherlands.
- [10] R. Bowden. The theory of parametric identification. *Econometrics*, 41, Nov. 1973.



- [11] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. K. Mitter. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 43(1):31–45, 1998.
- [12] B. Brogliato. *Nonsmooth mechanics. Models, dynamics and control*. Springer Verlag, 1999.
- [13] E. Buckingham. *Manual of gear design*. New York: Machinery, Inc., U.S.A., 1935.
- [14] Ka C. Cheok, Hongxing Hu, and Nan K.Loh. Modeling and identification of a class of servomechanism systems with stick-slip friction. *Transactions of the ASME*, 110:324–328, 1988.
- [15] C. Cobelli, A. Lepschy, and G. R. Jacur. Identifiability of compartmental systems and related structural properties. *Math. Biosci.*, 44:1–18, 1979.
- [16] R. W. Cottle, J. S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, Boston, 1992.
- [17] N. G. Dagalakis and D. R. Myers. Adjustment of robot joint gear backlash using the robot joint test excitation technique. *The International J. of Robotics Research*, 4(2):65–79, 1985.
- [18] P. R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14(12):1675–1682, 1976.
- [19] P. R. Dahl. Measurements of solid friction parameters of ball bearings. *Proc. of 6th Annual Symp. on Incremental Motion, Control Systems and Devices*, 1977.
- [20] R. David and H. Alla. Petri nets for modelling of dynamic systems—a survey. *Automatica*, 30(2):175–202, 1994.
- [21] J. J. D’Azzo and C. H. Houpis. *Linear control system*. McGraw-Hill Inc., U.S.A., 1981.
- [22] C. Canudas de Wit. Robust control for servo-mechanisms under inexact friction compensation. *Automatica*, 29(3):757–761, 1993.
- [23] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Aström, and P. Lischinsky. Dynamic friction models and control design. *Proc. of American Control Conference*, pages 1920–1926, 1993.

- [24] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Aström, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 40(3):419–425, 1995.
- [25] J. J. Distefano and C. Cobelli. On parameter and structural identifiability: nonunique observability/ reconstructability for identifiable systems, other ambiguities and new definitions. *IEEE Trans. on Automat. Control*, AC-25(4):830–833, 1980.
- [26] J. J. DiStefano and F. Mori. Parameter identifiability and experiment design: thyroid hormone metabolism parameters. *Amer. J. Physiol.*, 233:R134–R144, 1977.
- [27] B. C. Eaves and C. E. Lemke. Equivalence of LCP and PLS. *Mathematics of Operations Research*, 6:475–484, 1981.
- [28] F. M. Fisher. *The Identification Problem in Economics*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [29] L. Glass. Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics. *J. Chem. Phys.*, 63:1325–1335, 1975.
- [30] M. S. Grewal and K. Glover. Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 21:833–837, 1976.
- [31] D. Griffiths and A. Miller. Hyperbolic regression—a model based on two-phase piecewise regression with a smooth transition between regimes. *Commun. Stat.*, 32:89–90, 1973.
- [32] Petr Halva. Identification of friction of pneumatic actuator. Technical report, Laboratoire d’Automatique de Grenoble, 2001.
- [33] K. Hamiti, A. Besancon-Voda, and H. Roux-Buisson. Position control of a electro-pneumatic actuator under the influence of stiction. *Control Eng. Practice*, 4(8):1079–1088, 1996.
- [34] M. Heemels. *Linear Complementarity systems, A study in hybrid dynamics*. PhD thesis, Eindhoven, 1999.
- [35] R.H.A. Hensen, G.Z. Angelis, M.J.G. van de Molengraft, A.G. de Jager, and J.J. Kok. Grey-box modeling of friction: An experimental case-study. *EJC*, 8, 1999.
- [36] III J. J. DiStefano. Matching the model and the experiment to the goals: data limitations, complexity and optimal experiment design for dynamic systems with biochemical signals. *J. Cyb. Inf. Sci.*, 2(2-3), 1979.

- [37] M. T. Mata Jimenez. *Commande de systèmes mécaniques avec du jeu dynamique*. PhD thesis, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France, 1998.
- [38] C. T. Johnson and R. D. Lorenz. Experimental identification of friction and its compensation in precise position controller mechanisms. *IEEE Trans. on Industrial Applications.*, 28(6):1392–1398, 1992.
- [39] F. D. Jones and H. H. Ryffel. *Gear design simplified*. New York: Industrial Press., U.S.A., 1935. 3rd ed.
- [40] D. Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107:100–103, 1985.
- [41] C. W. Kilmister and J. E. Reeve. *Rational Mechanics*. Longmans, London, 1966.
- [42] Y. H. Kim and F. L. Lewis. Reinforcement adaptive learning neural-net-based friction compensation control for high speed and precision. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 8(1):118–126, 2000.
- [43] R. C. L. Lee. *Optimal Estimation, Identification, and Control*. MA: M.I.T. Press, 1964. Cambridge.
- [44] V. S. Levadi. Design of input signals for parameter estimation. *IEEE Trans. on Automat. Control*, AC-11:205–211, Apr. 1966.
- [45] P. Lischinsky. *Compensation de frottement et commande en position d'un robot hydraulique industriel*. PhD thesis, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France, 1997.
- [46] L. Ljung. *System identification, theory for the user*. Prentice-Hall Inc., U.S.A, second edition, 1999.
- [47] M. Nordin, J. Galic, and P. O. Gutman. New models for backlash and gear play. *International journal of adaptive control and signal processing*, 11:49–63, 1997.
- [48] H. Olsson, K. J. Aström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4:176–195, 1998.
- [49] J. Pérès. *Mécanique Générale*. Masson, Paris, 1953.
- [50] N. J. Persson. *Sliding friction, physical principles and applications*. Springer, 1998.
- [51] H. Pohjanpalo. System identifiability based on the power series expansion of the solution. *Math. Biosci.*, 41:21–33, 1978.

- [52] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, New York, 1962.
- [53] P. Pucar and J. Sjberg. On the hinge-finding algorithm for hinging hyperplanes. *IEEE Trans. on Information Theory*, 44(3):1310–1319, May 1998.
- [54] J. Gary Reid. Structural identifiability in linear time-invariant systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, AC-22:242–246, Apr. 1977.
- [55] J. Richalet. *Pratique de l'identification*. HERMES, Paris, 1991.
- [56] T. J. Rothenberg. Identification in parametric models. *Econometrics*, 39:577–591, May 1971.
- [57] S. I. Rubinow and A. Winzer. Compartment analysis: an inverse problem. *Math. Biosci.*, 11:203–247, 1971.
- [58] B. De Schutter and B. De Moor. Generalized linear complementarity problems and the analysis of continuously variable systems and discrete event systems. *Proceed. of the International Workshop on Hybrid and Real-Time Systems (HART 97)*, 1997. Grenoble, France.
- [59] G. A. F. Seber and C. J. Wild. *Nonlinear Regression*. WILEY, U.S.A., 1989.
- [60] R. R. Selmic and F. L. Lewis. Backlash compensation in nonlinear systems using dynamic inversion by neural networks. *Proceedings of the 1999 IEEE, International conference on control application*, pages 1163–1168, 1999.
- [61] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Deylon, P-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. Non-linear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, 31(12):1691–1724, 1995.
- [62] G. A. Sohl and J. E. Bobrow. Experiments and simulation on the nonlinear control of a hydraulic servosystem. *IEEE Trans. on Control Sys. Technology*, 7(2):238–247, 1999.
- [63] E. D. Sontag. Nonlinear regulation: the piecewise linear approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26:346–358, 1981.
- [64] E. D. Sontag. Interconnected automata and linear systems: A theoretical framework in discrete-time, hybrid systems: Verification and control. *Proc. 5th DIMACS/SYCON Workshop on verification and control of hybrid systems*, Oct. 1995. New Brunswick, NJ.

- [65] R. M. Staley and P. C. Yue. On system parameter identifiability. *Inform. Sci.*, 2:127–138, 1970.
- [66] J.L. Stein and C.H. Wang. Estimation of gear backlash: Theory and simulations. *Transaction of ASME*, 120:74–82, 1998.
- [67] R. Stribeck. The key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrrift des vereines deutscher ingenieure*, 46(38):91–114, 1902.
- [68] J. Swevers, F. Al-Bender, C. G. Ganseman, and T. Prajogo. An integrated friction model structure with improved presliding behaviour for accurate friction compensation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(4):675–686, 2000.
- [69] G. Tao. Adaptive control of systems with nonsmooth input and output nonlinearities. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 41(9):1348–1352, 1996.
- [70] G. Tao and P. V. Kokotovic. Adaptive control of systems unknown dead-zone. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 39:59–68, 1994.
- [71] G. Tao and P. V. Kokotovic. Adaptive control of systems with unknown output backlash. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 39(2):326–330, 1995.
- [72] G. Tao and P. V. Kokotovic. Discrete-time adaptive control of plants with unknown output dead-zone. *Automatica*, 31(2):287–291, 1995.
- [73] G. Tao and P. V. Kokotovic. *Adaptive Control of Systems with actuator and sensor nonlinearities*. John Wiley and Sons, Inc., New York, U.S.A., 1996.
- [74] L. Tavernini. Differential automata and their discrete simulators. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 11(6):665–683, 1987.
- [75] A. Thowsen. Identifiability of dynamic systems. *Int. J. Sys. Sci.*, 9:813–825, 1978.
- [76] M. Tian and G. Tao. Adaptive dead-zone compensation for output-feedback canonical systems. *Int. J. Control*, 67:791–812, 1997.
- [77] E. Tse. Information matrix and local identifiability of parameters. *Proc. Joint Automat. Control Conf.*, 7:611–619, 1973.
- [78] E. Tse and J.J. Anton. On the identifiability of parameters. *IEEE Trans. on Automat. Control*, AC-17:637–646, Oct. 1972.
- [79] A. J. van der Schaft. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Trans. on Automat. Control.*, 43(4):483–490, 1998.

- [80] A. J. van der Schaft and J. M. Schumacher. The complementary-slackness class of hybrid systems. *Math. Control Signals Systems*, 9:266–301, 1996.
- [81] L. Vandenberghe, B. L. De Moor, and J. Vandewalle. The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 36:1382–1391, 1989.
- [82] E. Walter and L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques, à partir de données expérimentales*. Masson, Paris, 1994.
- [83] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer, New York, 1997.
- [84] H. S. Witsenhausen. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 11:161–167, 1966.
- [85] K.T. Woo, Li-Xin Wang, F.L Lewis, and Z.X. Li. A fuzzy system compensator for backlash. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 181–186, 1998.
- [86] S. Zhang, X. Zou, J. Ahlquist, I. M. Navon, and J. G. Sela. Use of differentiable and non differentiable optimization algorithms for variational data assimilation with discontinuous cost functions. *Submitted to Monthly Weather Review*, 1999.



## Annexe A

# Identifiabilité, données acquises dans un seul régime

Comme nous avons expliqué dans la section 3.2, l'acquisition doit commencer quand le système est stable, et quand soit  $\phi_d(t_0) \leq -\theta$ , soit  $\phi_d(t_0) \geq \theta$ . Ainsi, l'identification en n'utilisant que les données acquises dans un seul régime n'est possible que dans les régimes 1 ou 3.

Pour que  $\phi_d(t)$ ,  $t \geq t_0$  reste dans l'un des deux régimes 1 ou 3, il faut que l'entrée du système pour  $t \geq t_0$  soit telle que les dentures restent en contact pour  $t \geq t_0$ . Pour trouver cette entrée, le comportement suivant du système est utilisé:

*Quand le système est stable mais mobile, les dentures sont en contact et tournent dans la direction du couple d'entrée  $C_M$ . Cette connexion est préservée tant que le couple d'entrée n'a pas changé de direction i.e. tant que  $\dot{C}_M(t) \text{sgn}(C_M(t)) \geq 0$ .*

Considérant l'explication ci-dessus et (3.3), si l'entrée suivante est appliquée

$$u(t) = C_M(t) = a 1(t) + u_1(t)1(t - t_0), \quad t_0 \geq t_s \quad (\text{A.1})$$

où  $1(t)$  représente un échelon d'amplitude 1, alors, on peut être sûr que durant l'acquisition des données sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T_i]$ , soit l'entrée du modèle de zone morte est dans le régime 3 (si  $a + u_1(t) > 0$  et  $\dot{u}_1(t) \geq 0$ ), soit elle est dans le régime 1 (si  $a + u_1(t) < 0$  et  $\dot{u}_1(t) \leq 0$ ).

**Proposition A.1** *Si durant le test, l'entrée du modèle de zone morte,  $u_j = \phi_d$ , est dans le régime de contact (régime 1 ou régime 3), alors la condition nécessaire et suffisante pour l'identifiabilité de  $\theta$  est que  $\phi_d$  soit observable.*



*Démonstration* . Dans la suite, nous n'étudierons l'identifiabilité que dans le cas où, pendant le test, l'entrée du modèle de zone morte est dans le régime 3 *i.e.*  $\phi_d(t) \geq \theta$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T_i]$ . L'étude pour le cas des données acquises dans le régime 1 est tout à fait similaire.

Dans le régime 3, la représentation d'état s'écrit (voir (3.6) et (3.9)) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_3 u_2(t) \cdot 1(t) - \mathbf{d}_3 \theta \\ \mathbf{x}(t_0) = -\mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T_i \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $u_2(t) = a + u_1(t)$ .  $\mathbf{x}(t)$  peut être alors trouvé pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_i$  :

$$\mathbf{x}(t) = \phi_3(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_2(\tau) \cdot d\tau - \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{d}_3 \cdot \theta \cdot d\tau \quad (\text{A.3})$$

où  $\phi_3(t)$  est la matrice de transition d'état du régime 3:  $\phi_3(t) = e^{\mathbf{A}_3 t}$ .

Dans l'équation (A.3), en remplaçant  $\mathbf{x}(t_0)$  par l'expression donnée dans (A.2) et en calculant la dernière intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & -\phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta + \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_2(\tau) \cdot d\tau + \\ & \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \mathbf{d}_3 \cdot \theta - \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \phi_3(t - t_0) \cdot \mathbf{d}_3 \cdot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dans cette équation, les termes  $-\phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta$  et  $\mathbf{A}_3^{-1} \phi_3(t - t_0) \mathbf{d}_3 \theta$  peuvent être éliminés, car:

$$\phi_3(t - t_0) = e^{\mathbf{A}_3(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(t - t_0) \mathbf{A}_3^i$$

où  $n = 3$  et  $\lambda_i(t - t_0)$ ,  $i = 0, 1, 2$  sont des fonctions temporelles des valeurs propres de  $\mathbf{A}_3$  [21] (notez que  $\text{rang}(\mathbf{A}_3) = 3$ ). Alors,

$$-\phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta = \sum_{i=0}^2 \lambda_i(t) \mathbf{A}_3^{i-1} \mathbf{d}_3 \theta = -\mathbf{A}_3^{-1} \phi_3(t - t_0) \mathbf{d}_3 \theta$$

Par conséquent, l'état  $\mathbf{x}(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_i$  est:

$$\mathbf{x}(t) = -\phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_2(\tau) d\tau + \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \mathbf{d}_3 \theta \quad (\text{A.5})$$

et la sortie  $y_m(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_i$  est

$$y_m(t) = -\mathbf{c} \phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \mathbf{c} \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_2(\tau) \cdot d\tau + \mathbf{c} \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \mathbf{d}_3 \cdot \theta \quad (\text{A.6})$$

Compte tenu de l'équation (A.6), si  $y_m(t, \theta_1)$  et  $y_m(t, \theta_2)$  sont les sorties de deux modèles avec les paramètres respectifs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , nous avons pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_i$ :

$$\begin{cases} y_m(t, \theta_1) = -\mathbf{c} \phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \mathbf{c} \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_1(\tau) d\tau + \mathbf{c} \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta_1 \\ y_m(t, \theta_2) = -\mathbf{c} \phi_3(t - t_0) \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{b}_3 a + \mathbf{c} \int_{t_0}^t \phi_3(t - \tau) \mathbf{b}_3 u_1(\tau) d\tau + \mathbf{c} \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{d}_3 \theta_2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

et par conséquent:

$$(\mathbf{c}\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 \neq 0) \Leftrightarrow (y_m(t, \theta_1) \neq y_m(t, \theta_2))$$

ce qui implique l'identifiabilité de  $\theta$  si et seulement si:

$$(\theta_1 \neq \theta_2) \Rightarrow (\mathbf{c}\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 \neq 0) \quad (\text{A.8})$$

Afin de trouver la valeur de  $\mathbf{c}$  assurant  $\mathbf{c}\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 \neq 0$ , on doit calculer le terme  $\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3$ :

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{k_{sh}}{J_L} & \frac{k_{sh}}{J_M} & \frac{-k_{sh}f_L}{J_M J_L} \\ \frac{k_{sh}}{J_L} & \frac{k_{sh}}{J_M} & \frac{-k_{sh}f_M}{J_M J_L} \\ \frac{f_L}{J_L} & \frac{-f_M}{J_M} & \frac{f_M f_L + f_M f_{sh} + f_{sh} f_L}{J_M J_L} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{-J_M J_L}{k_{sh}(f_M + f_L)} \right) \text{ et } \mathbf{d}_3 = \left[ \frac{-k_{sh}}{J_M}, \frac{k_{sh}}{J_L}, 0 \right]^T$$

Ainsi,  $\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 = [0, 0, 1]^T$ . Pour que la condition  $\mathbf{c}\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 \neq 0$  soit satisfaite,  $c_3$  doit évidemment être non-nul, ce qui signifie que la troisième variable d'état, l'entrée du modèle de la zone morte,  $u_j = \phi_d$ , doit être mesurable. La disponibilité de  $\phi_d$  est donc la condition suffisante et nécessaire pour l'identifiabilité de  $\theta$  quand l'identification est effectuée dans un seul régime (voir (A.8)).





## Annexe B

### Preuve des lemmes 3.1 et 3.2

Dans cette partie, pour plus de simplicité, les variables d'état de deux modèles avec les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont notés par  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , les sorties de deux modèles par  $y_1$  et  $y_2$ , et les entrées des modèles de zone morte par  $\phi_{d_1}$  et  $\phi_{d_2}$ .

#### Preuve du lemme 3.1:

Considérons le cas  $t_{c1_{m1}} < t_{c1_{m2}}$ . Pendant l'intervalle  $t_{c1_{m1}} < t < t_{c1_{m2}}$ ,  $\phi_{d_1}$  entre dans sa zone morte, alors que  $\phi_{d_2}$  est toujours dans son troisième régime, *i.e.*

$$-\theta_1 \leq \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_1(t) \leq \theta_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_2(t) \geq \theta_2 \quad t_{c1_{m1}} < t < t_{c1_{m2}}$$

où  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$  et  $\mathbf{x} = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_L, \phi_M - \phi_L]^T$ . Ainsi,  $y_1(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_1(t)$ ,  $t_{c1_{m1}} < t < t_{c1_{m2}}$ , doit être calculée en utilisant la représentation d'état du régime de jeu (équation (3.5)) avec  $u(t) = 0$ , tandis que,  $y_2(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_2(t)$  doit être calculée avec la représentation d'état du régime 3 (équation (3.6)).

En ce qui concerne  $y_1(t)$ ,  $t_{c1_{m1}} < t < t_{c1_{m2}}$ , on peut écrire:

$$\begin{cases} y_1(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{c}\phi_2(t - t_{c1_{m1}})\mathbf{x}_1(t_{c1_{m1}}). \\ \mathbf{x}_1(t_{c1_{m1}}) = -\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \mathbf{d}_3 \cdot \theta_1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où  $\phi_2(t)$  est la matrice de transition dans le régime 2,  $\phi_2(t) = e^{\mathbf{A}_2 t}$ . Quant à  $y_2(t)$ , nous avons:

$$\begin{cases} y_2(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{c}\phi_3(t - t_0)\mathbf{x}_2(t_s). \\ \mathbf{x}_2(t_s) = -\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1} \cdot \mathbf{d}_3 \cdot \theta_2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où  $\phi_3(t)$  est la matrice de transition dans le régime 3,  $\phi_3(t) = e^{\mathbf{A}_3 t}$ . Sachant que l'entrée du modèle de zone morte n'est pas observable, nous avons  $c_3 = 0$ , ce qui implique  $\mathbf{c}\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a = 0$

(voir la fin de l'annexe A). Par conséquent

$$y_2(t) = -\mathbf{c}\phi_3(t - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a$$

Écrivons le développement de Taylor au premier ordre de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  à l'instant  $t = t_{c1_{m1}} + \epsilon_1$  où  $\epsilon_1 \ll 1$  :

$$y_1(t_{c1_{m1}} + \epsilon_1) = y_1(t_{c1_{m1}}) + \dot{y}_1(t_{c1_{m1}}).\epsilon_1$$

$$y_2(t_{c1_{m1}} + \epsilon_1) = y_2(t_{c1_{m1}}) + \dot{y}_2(t_{c1_{m1}}).\epsilon_1$$

Dans ces équations  $y_1(t_{c1_{m1}}) = y_2(t_{c1_{m1}}) = -\mathbf{c}\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a$ , et

$$\dot{y}_1(t_{c1_{m1}}) = \mathbf{c}.\mathbf{A}_2.\mathbf{x}_1(t_{c1_{m1}}) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_2\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{c}.\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_1 \quad (\text{B.3})$$

et

$$\dot{y}_2(t_{c1_{m1}}) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_3\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a$$

Si on peut trouver une valeur pour  $\mathbf{c}$  telle que  $\dot{y}_1(t_{c1_{m1}}) \neq \dot{y}_2(t_{c1_{m1}})$ , il en résulte aussi que  $y_1(t_{c1_{m1}} + \epsilon_1) \neq y_2(t_{c1_{m1}} + \epsilon_1)$ , et que  $y_1(t) \neq y_2(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T_i]$ , ce qui signifie l'identifiabilité de  $\theta$ . Par la suite, nous voulons trouver de telles valeurs de  $\mathbf{c}$ .

Le terme  $\mathbf{c}.\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_1$  dans (B.3) est nul, car  $\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 = [0, 0, 1]^T$  et

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-f_M}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_L}{J_L} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La différence entre  $\dot{y}_1(t_{c1_{m1}})$  et  $\dot{y}_2(t_{c1_{m1}})$  est donc:

$$\dot{y}_1(t_{c1_{m1}}) - \dot{y}_2(t_{c1_{m1}}) = (\mathbf{c}\mathbf{A}_3 - \mathbf{c}.\mathbf{A}_2).\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a \quad (\text{B.4})$$

Compte tenu de la non singularité de  $\phi_3(t_{c1_{m1}} - t_0)$  et  $\mathbf{A}_3$ , et étant donné que  $\mathbf{b}_3a \neq 0$ , on peut dire que  $\dot{y}_1(t_{c1_{m1}}) - \dot{y}_2(t_{c1_{m1}}) = 0$  si et seulement si  $(\mathbf{c}\mathbf{A}_3 - \mathbf{c}.\mathbf{A}_2) = 0$ , ce qui peut être écrit sous la forme suivante:

$$[c(1), c(2), c(3)] \begin{bmatrix} -\frac{f_M+f_{sh}}{J_M} & \frac{f_{sh}}{J_M} & -\frac{k_{sh}}{J_M} \\ \frac{f_{sh}}{J_L} & -\frac{f_L+f_{sh}}{J_L} & \frac{k_{sh}}{J_L} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq [c(1), c(2), c(3)] \begin{bmatrix} \frac{-f_M}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_L}{J_L} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Si la sortie du système est la vitesse du moteur,  $y(t) = \dot{\varphi}_M(t)$ , alors  $\mathbf{c} = [1, 0, 0]$  et si la sortie est la vitesse de la charge,  $y(t) = \dot{\varphi}_L(t)$ , alors  $\mathbf{c} = [0, 1, 0]$ . On peut facilement

vérifier que pour ces deux valeurs de  $\mathbf{c}$ , la relation (B.5) est vraie.

Il s'en suit de la discussion ci-dessus que l'observabilité de  $\dot{\varphi}_M(t)$  ou  $\dot{\varphi}_L(t)$  est une condition suffisante pour l'identifiabilité de  $\theta$ .

### Preuve du lemme 3.2:

Nous montrons que:

1. Si  $t_{c1m1} = t_{c1m2} = t_{cm}$ , alors  $t_{b1m1} \neq t_{b1m2}$ .
2. En utilisant une approche similaire à celle utilisée dans la preuve du lemme 3.1, on montre que l'observabilité de la vitesse du moteur ou de la charge est suffisante pour l'identifiabilité de  $\theta$ .

Dans l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_{c1}$ ,  $\phi_d$  est dans le troisième régime si bien que l'état du système,  $\mathbf{x}(t)$ , doit être obtenu par (3.6). Dans l'intervalle  $t_{c1} \leq t \leq t_{b1}$ ,  $\phi_d$  est dans le deuxième régime et l'état du système est exprimé par (B.1). dans cet intervalle:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}_2(t - t_{c1})\mathbf{x}(t_{c1}) \\ \mathbf{x}(t_{c1}) = -\boldsymbol{\phi}_3(t_{c1} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3.\theta \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, à l'instant de commutation  $t_{b1}$ , nous avons:

$$\mathbf{e}.\mathbf{x}(t_{b1}) = -\theta \quad (\text{B.7})$$

où  $\mathbf{x}(t)$  est trouvé par (B.6).

En utilisant (B.6) et étant donné que  $t_{c1m1} = t_{c1m2} = t_{cm}$ , les deux états  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $t_{cm} \leq t \leq t_{b1m1}$  et  $\mathbf{x}_2(t)$ ,  $t_{cm} \leq t \leq t_{b1m2}$  de deux modèles avec les paramètres respectifs (et différents)  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , sont:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = -\boldsymbol{\phi}_2(t - t_{cm})\mathbf{x}_1(t_{cm}) \\ \mathbf{x}_1(t_{cm}) = -\boldsymbol{\phi}_3(t_{cm} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3.\theta_1 \\ \mathbf{x}_2(t) = -\boldsymbol{\phi}_2(t - t_{cm})\mathbf{x}_2(t_{cm}) \\ \mathbf{x}_2(t_{cm}) = -\boldsymbol{\phi}_3(t_{cm} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3.\theta_2 \end{cases}$$

et compte tenu de (B.7):

$$\mathbf{e}\mathbf{x}_1(t_{b1m1}) = -\theta_1, \quad \mathbf{e}\mathbf{x}_2(t_{b1m2}) = -\theta_2$$

En soustrayant ces deux dernières relations:

$$\begin{aligned} -\theta_1 + \theta_2 &= \mathbf{e}\mathbf{x}_1(t_{b1m1}) - \mathbf{e}\mathbf{x}_2(t_{b1m2}) = \\ &\mathbf{e}\boldsymbol{\phi}_2(t_{b1m1} - t_{c1m1})\boldsymbol{\phi}_3(t_{c1m1} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a - \mathbf{e}\boldsymbol{\phi}_2(t_{b1m2} - t_{c1m2})\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3.\theta_1 \\ &- \mathbf{e}\boldsymbol{\phi}_2(t_{b1m1} - t_{c1m1})\boldsymbol{\phi}_3(t_{c1m2} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{e}\boldsymbol{\phi}_2(t_{b1m1} - t_{c1m1})\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3.\theta_2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dans la suite, en utilisant cette dernière relation, nous montrons que  $t_{b_{1m_1}}$  ne peut pas être égal à  $t_{b_{1m_2}}$ .

En supposant  $t_{b_{1m_1}} = t_{b_{1m_2}} = t_{b_m}$ , (B.8) devient

$$-\theta_1 + \theta_2 = \mathbf{e}\phi_2(t_{b_m} - t_{c_m})\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{B.9})$$

L'égalité (B.9) n'est vraie que si  $\mathbf{e}\phi_2(t_{b_m} - t_{c_m})\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3 = -1$ . Cependant comme  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]$  et  $\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3 = [0, 0, 1]^T$  et

$$\phi_2(t_{b_m} - t_{c_m}) = \begin{bmatrix} e^{a(t_{b_m} - t_{c_m})} & 0 & 0 \\ 0 & e^{b(t_{b_m} - t_{c_m})} & 0 \\ \frac{1}{a}(e^{a(t_{b_m} - t_{c_m})} - 1) & \frac{-1}{b}(e^{b(t_{b_m} - t_{c_m})} - 1) & 1 \end{bmatrix}$$

avec  $a = \frac{-f_M}{J_M}$  et  $b = \frac{-f_L}{J_L}$ , nous avons  $\mathbf{e}\phi_2(t_{b_m} - t_{c_m})\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3 = 1$  (et pas  $-1$ ). Ainsi, (B.9) ne peut pas être vraie si  $t_{b_{1m_1}} = t_{b_{1m_2}}$ .

Supposons maintenant que  $t_{b_{1m_1}} < t_{b_{1m_2}}$ . Durant l'intervalle  $t_{b_{1m_1}} \leq t \leq t_{b_{1m_2}}$ ,  $\phi_{d_1}$  sort de sa zone morte mais  $\phi_{d_2}$  est toujours dans sa zone morte, *i.e.*:

$$\mathbf{e}.\mathbf{x}_1(t) \geq \theta_1 \quad \text{et} \quad -\theta_2 \leq \mathbf{e}.\mathbf{x}_2(t) \leq \theta_2$$

Par conséquent, dans cet intervalle, les sorties du premier modèle,  $y_1(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_1(t)$ , et du second modèle  $y_2(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_2(t)$  doivent respectivement être calculées avec les représentations d'état du régime 1, (3.4, 3.7), et du régime 2, (B.1). En ce qui concerne  $y_1(t)$ , nous avons:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_1\theta_1 \\ \mathbf{x}_1(t_{b_{1m_1}}) = \phi_2(t_{b_{1m_1}} - t_{c_m})\mathbf{x}_1(t_{c_{1m_1}}) \\ \mathbf{x}_1(t_{c_m}) = -\phi_3(t_{c_{1m_1}} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3\theta_1 \end{cases}$$

L'état  $\mathbf{x}_1(t)$  peut être trouvé dans l'intervalle  $t_{b_{1m_1}} \leq t \leq t_{b_{1m_2}}$  d'une manière similaire à celle utilisée dans la preuve du lemme 3.1:

$$\mathbf{x}_1(t) = \phi_1(t - t_{b_{1m_1}})\mathbf{x}_1(t_{b_{1m_1}}) - \mathbf{A}_1^{-1}.\mathbf{d}_1\theta_1 + \mathbf{A}_1^{-1}\phi_1(t - t_{b_{1m_1}})\mathbf{d}_1\theta_1$$

où  $\phi_1(t) = e^{\mathbf{A}_1 t}$  est la matrice de transition d'état dans le premier régime. Ainsi, la sortie  $y_1(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}_1(t)$  dans cet intervalle est:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathbf{c}\phi_1(t - t_{b_{1m_1}})\phi_2(t_{b_{1m_1}} - t_{c_m})(-\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) \\ &+ \mathbf{c}\phi_1(t - t_{b_{1m_1}})\phi_2(t_{b_{1m_1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3\theta_1) - \mathbf{c}\mathbf{A}_1^{-1}.\mathbf{d}_1\theta_1 + \mathbf{c}\mathbf{A}_1^{-1}\phi_1(t - t_{b_{1m_1}})\mathbf{d}_1\theta_1 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Comme  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_3$  et  $\mathbf{c}\mathbf{A}_3^{-1}.\mathbf{d}_3 = 0$ , le terme  $\mathbf{c}\mathbf{A}_1^{-1}.\mathbf{d}_1\theta_1$  dans l'équation (B.10) est nul.

Concernant  $y_2(t)$  :

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathbf{c}\phi_2(t - t_{c_m})\mathbf{x}_2(t_{c_m}) \\ \mathbf{x}_2(t_{c_m}) &= -\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a + \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_2 \end{aligned}$$

En écrivant le développement de Taylor au premier ordre de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  à l'instant  $t = t_{b1_{m1}} + \epsilon_2$  où  $\epsilon_2 \ll 1$ :

$$\begin{aligned} y_1(t_{b1_{m1}} + \epsilon_2) &= y_1(t_{b1_{m1}}) + \dot{y}_1(t_{b1_{m1}})\epsilon_2 \\ y_2(t_{b1_{m1}} + \epsilon_2) &= y_2(t_{b1_{m1}}) + \dot{y}_2(t_{b1_{m1}})\epsilon_2 \end{aligned}$$

Dans ces relations :

$$\begin{aligned} y_1(t_{b1_{m1}}) &= y_2(t_{b1_{m1}}) = \\ &\mathbf{c}\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(-\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) + \mathbf{c}\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_1) \end{aligned}$$

où, le terme  $\mathbf{c}\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_1)$  est nul car  $\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 = [0, 0, 1]^T$  et  $c(3) = 0$  (l'entrée de la zone morte n'est pas observable).

Cependant, nous montrons dans la suite qu'on peut trouver des valeurs pour  $\mathbf{c}$  telles que  $\dot{y}_1(t_{b1_{m1}}) \neq \dot{y}_2(t_{b1_{m1}})$  et par conséquent  $y_1(t_{b1_{m1}}) \neq y_2(t_{b1_{m1}})$ , ce qui signifie que  $\theta$  est identifiable.

$\dot{y}_1(t_{b1_{m1}})$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t_{b1_{m1}}) &= \mathbf{c}\mathbf{A}_1\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(-\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) \\ &+ \mathbf{c}\mathbf{A}_1\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_1) + \mathbf{c}\mathbf{d}_1\theta_1 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}_1\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3) = [\frac{-k_{sh}}{J_M}, \frac{k_{sh}}{J_L}, 0] = \mathbf{d}_1$ . Ainsi,

$$\dot{y}_1(t_{b1_{m1}}) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_1\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) + 2\mathbf{c}\mathbf{d}_1\theta_1 \quad (\text{B.11})$$

$\dot{y}_2(t_{b1_{m1}})$  s'écrit:

$$\dot{y}_2(t_{b1_{m1}}) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_2\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(-\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) - \mathbf{c}\mathbf{A}_2\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_2)$$

où le terme  $-\mathbf{c}\mathbf{A}_2\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3\theta_2)$  est nul car  $\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{d}_3 = 0$ . Par conséquent,

$$\dot{y}_2(t_{b1_{m1}}) = -\mathbf{c}\mathbf{A}_2\phi_2(t_{b1_{m1}} - t_{c_m})(-\phi_3(t_{c_m} - t_0)\mathbf{A}_3\mathbf{b}_3a) \quad (\text{B.12})$$

En comparant (B.11) et (B.12), on constate que si le vecteur de sortie  $\mathbf{c}$  satisfait les deux conditions suivantes,

$$\mathbf{c}\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{c}\mathbf{A}_2, \quad \text{et} \quad \mathbf{c}\mathbf{d}_1 \neq 0 \quad (\text{B.13})$$



alors,  $\dot{y}_1(t_{b_{1_{m_1}}}) \neq \dot{y}_2(t_{b_{1_{m_1}}})$ . Si la sortie du système est la vitesse du moteur  $y(t) = \dot{\phi}_M(t)$ , alors  $\mathbf{c} = [1, 0, 0]$  et si cette sortie est la vitesse de la charge  $y(t) = \dot{\phi}_L(t)$ , alors  $\mathbf{c} = [0, 1, 0]$ . On peut facilement vérifier que dans les deux cas, les conditions (B.13) sont satisfaites. Il s'en suit que l'observabilité d'au moins l'une de ces vitesses est suffisante pour l'identifiabilité de  $\theta$ .

## Annexe C

### Preuve des relations (3.24) et (3.25)

Nous définissons  $W_c(t_c)$  et  $W_b(t_b)$  de la façon suivante:

$$W_c(t_c) \equiv \sum_{t=t_0}^{t_0+\delta t_1} (\omega_L(t) - F_1(t, t_c))^2 \quad (\text{C.1})$$

$$W_b(t_b) \equiv \sum_{t=t_0+\delta t_2}^{t_0+\delta t_3} (\omega_L(t) - F_2(t, t_b))^2 \quad (\text{C.2})$$

En développant  $W_c(t_c)$ , nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} W_c(t_c) &= \sum_{t=t_0}^{t_c} (\omega_L(t) - F_1(t, t_c))^2 + \sum_{t=t_c}^{t_0+\delta t_1} (\omega_L(t) - F_1(t, t_c))^2 \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_c} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c))^2 + \sum_{t=t_c}^{t_0+\delta t_1} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c)e^{-\alpha(t-t_c)})^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pour  $t_c^- < t_c^*$ , nous avons:

$$\begin{aligned} W_c(t_c^-) &= \sum_{t=t_0}^{t_c^-} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c^-))^2 + \sum_{t=t_c^-}^{t_c^*} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c^-)e^{-\alpha(t-t_c^-)})^2 + \\ &\sum_{t=t_c^*}^{t_0+\delta t_1} (\omega_L(t_c^*)e^{-\alpha(t-t_c^*)} - \omega_L(t_c^-)e^{-\alpha(t-t_c^-)})^2 = Err_1(t_c^-) + Err_2(t_c^-) + Err_3(t_c^-), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

pour  $t_c = t_c^*$ :

$$W_c(t_c^*) = \sum_{t=t_0}^{t_c^*} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c^*))^2 = Err_1(t_c^*), \quad (\text{C.5})$$

et pour  $t_c^+ > t_c^*$ :

$$W_c(t_c^+) = \sum_{t=t_0}^{t_c} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c))^2 + \sum_{t=t_c}^{t_0+\delta t_1} (\omega_L(t_c^*)e^{-\alpha(t-t_c^*)} - \omega_L(t_c)e^{-\alpha(t-t_c)})^2$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_c} (\omega_L(t) - \omega_L(t_c))^2 = Err_1(t_c^+) \quad (C.6)$$

La deuxième somme dans l'équation ci-dessus est nulle car  $t_c^* < t_c < t_0 + \delta t_1 < t_b^*$ , et par conséquent,  $\omega_L(t) = \omega_L(t_c^*)e^{-\alpha(t-t_c^*)} = \omega_L(t_c)e^{-\alpha(t-t_c)}$ .

En comparant  $W_c(t_c^*)$  avec  $W_c(t_c^-)$  et  $W_c(t_c^+)$ , on conclue que:

1. Bien que  $Err_1(t_c^*) > Err_1(t_c^-)$ , mais  $W_c(t_c^-) > W_c(t_c^*)$  en raison de l'existence des termes  $Err_2(t_c^-)$  et  $Err_3(t_c^-)$ .
2.  $W_c(t_c^+) > W_c(t_c^*)$ .

Il s'en suit que  $W_c(t_c)$  atteint son minimum en  $t_c = t_c^*$ .

Le développement de  $W_b(t_b)$  avec une démarche similaire nous permet de constater que ce critère atteint son minimum en  $t_b = t_b^*$ .

## Annexe D

# Estimation de la constante de temps de la charge

Nous déterminons la constante de temps de la charge quand la charge n'est influencée que par l'inertie,  $J_L$ , et le frottement,  $f_L$ . Étant donné le système d'équations (3.2), ces conditions sont satisfaites quand  $C_{sh3} = 0$ , autrement dit, quand le jeu est actif:

$$J_L^* \dot{\omega}_L + f_L^* \omega_L = 0 \quad (\text{D.1})$$

Si  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont trois instants différents appartenant à une période d'activation du jeu, on peut écrire:

$$\begin{cases} \omega_{L_n}(t_1) = \omega_L(t_3)e^{-\alpha^*(t_1-t_3)} + n_L(t_1) \\ \omega_{L_n}(t_2) = \omega_L(t_3)e^{-\alpha^*(t_2-t_3)} + n_L(t_2) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

où  $\alpha^* = f_L^*/J_L^*$  est la vraie valeur de la constante de temps de la rotation de charge. Le bruit  $n_L$  étant centré, nous avons:

$$\begin{cases} E[\omega_{L_n}(t_1)] = \omega_L(t_3)e^{-\alpha^*(t_1-t_3)} \\ E[\omega_{L_n}(t_2)] = \omega_L(t_3)e^{-\alpha^*(t_2-t_3)} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

En divisant les deux équations et en prenant le logarithme, nous obtiendrons:

$$\alpha^* = \frac{\log(E[\omega_{L_n}(t_1)]/E[\omega_{L_n}(t_2)])}{t_2 - t_1} \quad (\text{D.4})$$

En pratique, les espérances mathématiques sont estimées à partir d'un nombre fini d'expériences,  $N_\alpha$ , pour obtenir une estimation,  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha^*$ :

$$\hat{\alpha} = \frac{\log(\sum_{i=1}^{N_\alpha} \omega_{L_{ni}}(t_1) / \sum_{i=1}^{N_\alpha} \omega_{L_{ni}}(t_2))}{t_2 - t_1} \quad (\text{D.5})$$



## Annexe E

# Identification des dynamiques linéaires du système de la section 3.6

### E.1 Introduction

Dans cette annexe, nous proposons une méthode pour l'identification des dynamiques linéaires du système d'entraînement électro-mécanique avec trois axes de la compagnie ALSTOM, présenté dans la section 3.6.

Les paramètres linéaires du système sont rassemblés dans le vecteur suivant:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= [J_M, J_{G_1}, J_{G_2}, J_L, k_{sh_1}, k_{sh_2}, k_{sh_3}, f_{sh_1}, f_{sh_2}, f_{sh_3}, f_M, f_{G_1}, f_{G_2}, f_L] \\ &= \{p_i\}, i = 1, \dots, 14\end{aligned}\tag{E.1}$$

L'identification de ces paramètres est basée sur le modèle sans zone morte, *i.e.*  $\theta = 0$ , appelé *modèle linéaire*.

Pour estimer les paramètres linéaires, nous nous servons de la fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur de la manière suivante:

1. Cette fonction de transfert est calculée à partir des équations différentielles du modèle linéaire. Le résultat est appelé  $H(\mathbf{p}, s)$ .
2. Cette fonction de transfert est estimée en identifiant la dynamique entre le couple du moteur,  $C_M(t)$ , et la vitesse du moteur,  $\omega_{M_n}(t)$ . Le résultat est appelé  $\hat{H}(s)$ .
3. En supposant  $\hat{H}(s) = H(\mathbf{p}, s)$ , les paramètres linéaires peuvent être ensuite estimés.

Pourtant, le nombre assez élevé de ces paramètres, *i.e.* 14, rend difficile cette approche. On essaie donc de classer les paramètres en deux groupes: paramètres importants et paramètres moins importants. On commence par l'identification du groupe des paramètres

importants en supposant que les paramètres moins importants sont nuls.

Etant donné que les fréquences des pôles et des zéros de  $H(\mathbf{p}, s)$  dépendent davantage des paramètres d'inertie et des raideurs de ressorts, *i.e.*  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , que des coefficients du frottement visqueux des amortisseurs, *i.e.*  $p_i$ ,  $i = 8, \dots, 14$ <sup>1</sup>, on peut supposer que  $p_1$  à  $p_7$  sont plus importants que les autres.

L'identification du vecteur des paramètres linéaires  $\mathbf{p}$  est effectuée en deux étapes:

1. l'identification de  $p_1$  à  $p_7$  en supposant  $p_8$  à  $p_{14}$  nuls.
2. l'identification de  $p_8$  à  $p_{14}$ , en les supposant égaux,  $p_i = f$ ,  $i = 8, \dots, 14$ .

Evidemment, les différentes estimations des paramètres linéaires s'obtiennent dans différentes conditions expérimentales (par exemple différents types d'entrées, différentes durées du test, *etc.*). On doit donc trouver l'expérience optimale parmi les expériences effectuées.

*Remarque:*

La fonction de transfert entre le couple du moteur  $C_M$  (entrée) et la vitesse de la charge  $\dot{\phi}_L$  (sortie), n'a pas été utilisée pour identifier les paramètres linéaires  $\mathbf{p}$ . Elle est difficilement estimable car ses zéros sont en très haute fréquence par rapport à ses pôles (voir  $G(\mathbf{p}, s)$  dans la section E.2, pour  $k_{sh_i} \gg f_{sh_i}$ ).

Dans la suite, le calcul de la fonction de transfert  $H(\mathbf{p}, s)$  à partir de la représentation d'état est présenté dans la section E.2. Dans la section E.3, nous expliquons une procédure pour trouver  $\hat{H}(s)$ . Le calcul des paramètres linéaires est le sujet de la section E.4. Enfin, l'expérience optimale est conçue dans la section E.5.

## E.2 Calcul de la fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur

En supposant  $\theta = 0$  et en définissant

$$\mathbf{x} = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_{G1}, \dot{\phi}_{G2}, \dot{\phi}_L, (\phi_M - \phi_{G1}), (\phi_{G1} - \phi_{G2}), (\phi_{G2} - \phi_L)]^T,$$

et

$$u = C_M, \quad \mathbf{y} = [\dot{\phi}_M, \dot{\phi}_L]^T,$$

<sup>1</sup>Ce constat est confirmé par les experts de la compagnie ALSTOM.

les équations différentielles (3.31), se transforment en représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (\text{E.2})$$

où:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(f_M + f_{sh1})}{J_M} & \frac{f_{sh1}}{J_M} & 0 & 0 & \frac{-k_{sh1}}{J_M} & 0 & 0 \\ \frac{f_{sh1}}{J_{G1}} & \frac{-(f_{G1} + f_{sh1} + f_{sh2})}{J_{G1}} & \frac{f_{sh2}}{J_{G1}} & 0 & \frac{k_{sh1}}{J_{G1}} & \frac{-k_{sh2}}{J_{G1}} & 0 \\ 0 & \frac{f_{sh2}}{J_{G2}} & \frac{-(f_{G2} + f_{sh2} + f_{sh3})}{J_{G2}} & \frac{f_{sh3}}{J_{G2}} & 0 & \frac{k_{sh2}}{J_{G2}} & \frac{-k_{sh3}}{J_{G2}} \\ 0 & 0 & \frac{f_{sh3}}{J_L} & \frac{-(f_L + f_{sh3})}{J_L} & 0 & 0 & \frac{k_{sh3}}{J_L} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = [\frac{1}{J_M} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \text{ et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des fonctions de transfert,  $\mathbf{h}(\mathbf{p}, s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$  est:

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, s) = \begin{bmatrix} H(\mathbf{p}, s) = \frac{\omega_M(s)}{C_M(s)} \\ G(\mathbf{p}, s) = \frac{\omega_L(s)}{C_M(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s.n_1(.)}{A_M(.).n_1(.) - B_1^2(.).(A_L(.).A_{G2}(.)) - 2.B_3^2(.)} \\ \frac{s.n_2(.)}{A_M(.).n_1(.) - B_1^2(.).(A_L(.).A_{G2}(.)) - 2.B_3^2(.)} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

où:

$$\begin{aligned}A_M(\mathbf{p}, s) &= s^2.J_M + s.(f_M + f_{sh1}) + k_{sh1} \\ A_{G1}(\mathbf{p}, s) &= s^2.J_{G1} + s.(f_{G1} + f_{sh1} + f_{sh2}) + k_{sh1} + k_{sh2} \\ A_{G2}(\mathbf{p}, s) &= s^2.J_{G2} + s.(f_{G2} + f_{sh2} + f_{sh3}) + k_{sh2} + k_{sh3} \\ A_L(\mathbf{p}, s) &= s^2.J_L + s.(f_{sh3} + f_L) + k_{sh3} \\ B_1(\mathbf{p}, s) &= s.f_{sh1} + k_{sh1} \\ B_2(\mathbf{p}, s) &= s.f_{sh2} + k_{sh2} \\ B_3(\mathbf{p}, s) &= s.f_{sh3} + k_{sh3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}n_1(\mathbf{p}, s) &= A_{G1}(\mathbf{p}, s)A_{G2}(\mathbf{p}, s).A_L(\mathbf{p}, s) - 2A_{G1}(\mathbf{p}, s)B_3^2(\mathbf{p}, s) - A_L B_2^2(\mathbf{p}, s) \\ n_2(\mathbf{p}, s) &= B_1(\mathbf{p}, s)B_2(\mathbf{p}, s)B_3(\mathbf{p}, s)\end{aligned}$$

*Remarque :*

Pour faire apparaître clairement les paramètres physiques dans les polynômes du numérateur et du dénominateur, nous présentons une forme non-minimale de la fonction de transfert, dans le sens où son dénominateur est d'ordre 8 et son numérateur est d'ordre 7. La représentation minimale est bien d'ordre 7.



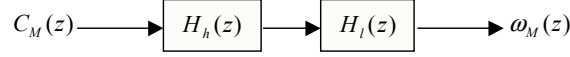


Figure E.1: Dynamiques lente,  $H_l(z)$ , et rapide,  $H_h(z)$ , entre le couple du moteur,  $C_M(z)$ , et la vitesse du moteur,  $\omega_M(z)$ .

### E.3 Estimation de la fonction de transfert entre le couple et la vitesse du moteur

Nous proposons maintenant une procédure pour identifier la fonction de transfert discrète,  $\hat{H}(z)$ , en supposant que la dynamique totale entre le couple du moteur  $C_M$  et la vitesse du moteur  $\omega_M$  comprend deux dynamiques: une dynamique lente, active en basse fréquence, et une dynamique rapide, active en haute fréquence (voir Figure E.1), *i.e.*:

$$H(z) = \frac{\omega_M(z)}{C_M(z)} = H_h(z)H_l(z) \quad (\text{E.4})$$

L'identification de  $\hat{H}(z)$  se réalise donc en estimant ces dynamiques, nommées  $\hat{H}_l(z)$  (modèle rigide) et  $\hat{H}_h(z)$  (caractérisant les modes flexibles). Le modèle final sera  $\hat{H}(z) = \hat{H}_h(z)\hat{H}_l(z)$ .

Pour identifier  $H_l(z)$  et  $H_h(z)$ , on a utilisé un modèle d'erreur de sortie [46]:

$$y_{m_b}(q) = \frac{B(q, \mathbf{p}_B)}{A(q, \mathbf{p}_A)} \cdot u_{m_b}(q - k) + v(q) \quad (\text{E.5})$$

où  $u_{m_b}$  et  $y_{m_b}$  représentent l'entrée et la sortie du modèle boîte noire,  $v$  représente une séquence aléatoire centrée et indépendante de l'entrée  $u_{m_b}$ ,  $\mathbf{p}_B$  et  $\mathbf{p}_A$  sont les vecteurs des paramètres du modèle à identifier. Dans l'identification de chacune de  $H_l(z)$  et  $H_h(z)$ , la sortie  $y_{m_b}$  et le choix du type de l'entrée  $u_{m_b}$ , de la période d'échantillonnage  $T_s$  et de l'ordre de  $B(q, \mathbf{p}_B)$  et  $A(q, \mathbf{p}_A)$  sont différents. Le retard  $k$  est toujours égal à 1 car nous avons utilisé le bloqueur d'ordre zéro.

Identification de la dynamique lente,  $H_l(z)$ :

1. L'entrée du système,  $C_M(t)$ , est un échelon.
2. La période d'échantillonnage est  $T_s = \frac{t_r}{50}$ , où  $t_r$  représente le temps de montée. L'entrée du modèle est  $u_{m_b}(i) = C_M(T_s i)$ ,  $i = 0, \dots, 50$ .
3. La sortie du modèle est  $y_{m_b}(i) = \omega_{M_n}(T_s i)$ ,  $i = 0, \dots, 50$ .
4.  $A(q, \mathbf{p}_A)$  et  $B(q, \mathbf{p}_B)$  sont d'ordre 1.

Identification de la dynamique rapide,  $H_h(z)$ :

1. L'entrée du système,  $C_M(t)$ , est un signal SBPA.
2. La bande passante du système,  $\omega_{BO}$ , est calculée à partir de la réponse fréquentielle. En supposant qu'un signal SBPA est produit avec un nombre de diviseurs de fréquence  $n_{div}$ , la période d'échantillonnage  $T_s$  doit satisfaire:

$$T_s < 0,45 \frac{2\pi}{\omega_{BO} n_{div}} \quad (\text{E.6})$$

L'entrée du modèle,  $u_{mb}$ , est l'entrée du système,  $C_M(t)$ , échantillonnée avec  $T_s$ .

3. Pour trouver  $y_{m_b}(q)$  dans (E.5), les échantillons de  $\omega_{M_n}$  sont filtrés par l'inverse de la fonction de transfert de la dynamique lente identifiée  $\hat{H}_l^{-1}(z)$  (voir Figure E.1).
4. Considérons  $H(\mathbf{p}, z) = H_h(\mathbf{p}, z)H_l(\mathbf{p}, z)$ , où  $H_h$  et  $H_l$  représentent les fonctions de transfert calculées pour les dynamiques rapide et lente respectivement. En définissant  $H(\mathbf{p}, z) = \frac{N_H(\mathbf{p}, z)}{D_H(\mathbf{p}, z)}$ ,  $H_h(\mathbf{p}, z) = \frac{N_{H_h}(\mathbf{p}, z)}{D_{H_h}(\mathbf{p}, z)}$  et  $H_l(\mathbf{p}, z) = \frac{N_{H_l}(\mathbf{p}, z)}{D_{H_l}(\mathbf{p}, z)}$ , on obtient

$$H_h(\mathbf{p}, z) = \frac{N_H(\mathbf{p}, z) \cdot D_{H_l}(\mathbf{p}, z)}{D_H(\mathbf{p}, z) \cdot N_{H_l}(\mathbf{p}, z)}. \quad (\text{E.7})$$

Sachant que  $N_H(\cdot)$  et  $D_H(\cdot)$  sont d'ordres 6 et 7 (voir Remarque de la section E.2) et que  $N_{H_l}(\cdot)$  et  $D_{H_l}(\cdot)$  sont d'ordre 1, on arrive aux ordres 7 et 8 pour  $N_{H_h}(\cdot)$  et  $D_{H_h}(\cdot)$ . Nous considérons donc que  $B(q, \mathbf{p}_B)$  et  $A(q, \mathbf{p}_A)$  dans (E.5) sont d'ordres 7 et 8.

En raison de la contrainte sur la vitesse maximum du moteur, il est possible que le modèle identifié ne soit pas de degré espéré, *i.e.* 6 pour le numérateur et 7 pour le dénominateur. Par conséquent, pour avoir un modèle suffisamment flexible, en appliquant une excitation faible, il faudra augmenter l'ordre du modèle boîte noire utilisé pour identifier la dynamique rapide (degré de  $B(q, \mathbf{p}_B)$  et de  $A(q, \mathbf{p}_A)$ ). Ensuite, pour pouvoir calculer les paramètres linéaires, nous pouvons éliminer certains pôles avec les zéros voisins jusqu'à arriver au degré correct. La fonction de transfert  $\hat{H}_r(z)$  ainsi trouvée peut être rejetée dans les cas suivants:

- si elle ne peut pas être considérée comme le modèle d'un système physiquement réalisable. On doit vérifier que pour chaque pôle ou zéro complexe  $a + bj$ , le pôle ou le zéro  $a - bj$  existe ( $j^2 = -1$ ).
- si le modèle ne possède pas (seulement) trois paires de zéros complexes conjugués, trois paires de pôles complexes conjugués et un pôle simple, ce qui est la configuration des zéros et des pôles du système.

Si  $\hat{H}(z)$  n'est pas rejetée, elle va être utilisée pour le calcul des paramètres linéaires, après une transformation du temps discret au temps continu. Pour cette transformation, on utilise la période d'échantillonnage obtenue pour identifier la dynamique rapide.

## E.4 Calcul des paramètres linéaires

Supposons que  $\hat{z}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  et  $\hat{p}_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  représentent les zéros et les pôles de la fonction de transfert identifiée,  $\hat{H}(s)$ . Nous proposons la procédure suivante pour estimer les paramètres linéaires en les classifiant dans deux groupes : le groupe important,  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , et le groupe moins important,  $p_i$ ,  $i = 8, \dots, 14$ . Cette classification est basée sur la sensibilité des zéros et des pôles de la fonction de transfert,  $H(\mathbf{p}, s)$ , à chaque paramètre.

1. Identification du groupe plus important:

- Ré-écrire  $\hat{H}(s)$  sous une forme telle que les coefficients de plus haut degré en  $s$  du numérateur et du dénominateur soient égaux à 1:

$$\hat{H}(s) = g_{\hat{H}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^6 (s - \hat{z}_i)}{\prod_{k=1}^7 (s - \hat{p}_k)} \quad (\text{E.8})$$

Cette forme peut être également écrite pour  $H(\mathbf{p}, s)$ :

$$H(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{J_M} \frac{s^6 + \dots}{s^7 + \dots}$$

alors,

$$\hat{H}(s) = H(\mathbf{p}, s) \Rightarrow \hat{p}_1 = \hat{J}_M = \frac{1}{g_{\hat{H}}} \quad (\text{E.9})$$

- Appliquer l'hypothèse  $p_i = 0$ ,  $i = 8, \dots, 14$  sur la fonction de transfert calculée,  $H(\mathbf{p}, s)$ , et estimée,  $\hat{H}(s)$ :
  - Considérant (E.3), on obtient:

$$H(\mathbf{p}, s) \approx \frac{A_z}{s \cdot J_M \cdot A_p} = \frac{s^6 + K_4 \cdot s^4 + K_2 \cdot s^2 + K_0}{s \cdot J_M \cdot (s^6 + L_4 \cdot s^4 + L_2 \cdot s^2 + L_0)} \quad (\text{E.10})$$

où

$$\begin{aligned}
K_4 &= \frac{k_{G_2}}{J_{G_2}} + \frac{k_{sh_3}}{J_L} + \frac{k_{G_1}}{J_{G_1}} \\
K_2 &= \frac{k_{sh_{1,3}} + k_{sh_{2,3}}}{J_L \cdot J_{G_1}} + \frac{k_{sh_{2,3}}}{J_L \cdot J_{G_2}} + \frac{k_{sh_{1,3}} + k_{sh_{1,2}} + k_{sh_{2,3}}}{J_{G_1} \cdot J_{G_2}} \\
K_0 &= \frac{k_{sh_1} \cdot k_{sh_2} \cdot k_{sh_3}}{J_{G_1} \cdot J_{G_2} \cdot J_L} \\
k_{G_1} &= k_{sh_1} + k_{sh_2} \\
k_{G_2} &= k_{sh_2} + k_{sh_3} \\
k_{sh_{i,j}} &= k_{sh_i} \cdot k_{sh_j}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_4 &= \frac{1}{J_M \cdot J_{G_1} \cdot J_{G_2} \cdot J_L} \cdot (J_M \cdot a_1 + k_{sh_1} \cdot J_L \cdot J_{G_1} \cdot J_{G_2}) \\
L_2 &= \frac{1}{J_M \cdot J_{G_1} \cdot J_{G_2} \cdot J_L} \cdot (J_M \cdot a_2 + k_{sh_1} \cdot a_1 - k_{sh_1}^2 \cdot J_L \cdot J_{G_2}) \\
L_0 &= \frac{1}{J_M \cdot J_{G_1} \cdot J_{G_2} \cdot J_L} \cdot (k_{sh_1} \cdot a_2 + J_M \cdot a_3 - k_{sh_1}^2 \cdot (J_L \cdot k_{G_2} + k_{sh_3} \cdot J_{G_2})) \\
a_1 &= k_{G_2} \cdot J_{G_1} \cdot J_L + J_{G_2} \cdot k_{sh_3} \cdot J_{G_1} + k_{G_1} \cdot J_L \cdot J_{G_2} \\
a_2 &= k_{G_1} \cdot k_{sh_3} \cdot J_{G_2} + k_{G_2} \cdot J_{G_1} \cdot k_{sh_3} + k_{G_2} \cdot k_{G_1} \cdot J_L - k_{sh_3}^2 \cdot J_{G_1} - k_{sh_3}^2 \cdot J_L \\
a_3 &= k_{sh_1} \cdot k_{sh_2} \cdot k_{sh_3}
\end{aligned}$$

- Définissons  $\hat{H}(s) \approx \frac{\hat{A}_z}{s \cdot \hat{g}_H \cdot \hat{A}_p}$ . Afin d'avoir seulement les termes de degré paire dans  $\hat{A}_z$  et  $\hat{A}_p$  (comme dans  $A_z$  et  $A_p$ ), il faudra utiliser seulement les parties imaginaires des zéros et des pôles, de la manière suivante:

$$\hat{H}(s) \approx \frac{\hat{A}_z}{s \cdot \hat{g}_H \cdot \hat{A}_p} = \frac{\prod_{i=1}^6 (s - j \cdot \text{imag}(\hat{z}_i))}{s \cdot \prod_{i=1}^7 (s - j \cdot \text{imag}(\hat{p}_i))} = g_{\hat{H}} \frac{s^6 + \hat{K}_4 \cdot s^4 + \hat{K}_2 \cdot s^2 + \hat{K}_0}{s \cdot \hat{J}_M \cdot (s^6 + \hat{L}_4 \cdot s^4 + \hat{L}_2 \cdot s^2 + \hat{L}_0)} \quad (\text{E.11})$$

où  $j^2 = -1$ .

En supposant  $\hat{A}_z = A_z$  et  $\hat{A}_p = A_p$ <sup>2</sup> et après quelques manipulations algébriques,

---

<sup>2</sup>Le passage du modèle discret identifié,  $\hat{H}(z)$ , au modèle continu,  $\hat{H}(s)$ , peut être effectué en utilisant le bloqueur d'ordre zéro, l'approximation de Tustin, ou *matched pole-zero*. Il faut cependant noter que cette conversion est approximative et implique des erreurs, surtout en ce qui concerne les zéros de la fonction de transfert. Les résultats obtenus par notre méthode doivent donc être interprétés en tenant compte de cette erreur de conversion.

on arrive aux résultats suivants:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_5 &= \hat{k}_{sh1} = a_4 \cdot \hat{J}_M \\
\hat{p}_2 &= \hat{J}_{G_1} = \frac{\hat{k}_{sh1}^2}{\hat{J}_M \cdot a_5} \\
\hat{p}_6 &= \hat{k}_{sh2} = \hat{J}_{G_1} \cdot (K_4 - a_6) - \hat{k}_{sh1} \\
\hat{p}_3 &= \hat{J}_{G_2} = \frac{\hat{k}_{sh2} - \frac{a_5}{a_7}}{a_6 - \frac{k_2 - \hat{k}_{sh2} \cdot a_9}{a_7}} \\
\hat{p}_7 &= \hat{k}_{sh3} = (a_6 - \hat{J}_{G_2} \cdot a_9) \cdot \hat{J}_{G_2} - \hat{k}_{sh2} \\
\hat{p}_4 &= \hat{J}_L = \frac{\hat{k}_{sh3}}{\hat{J}_{G_2} \cdot a_9}
\end{aligned} \tag{E.12}$$

où

$$\begin{aligned}
a_4 &= \hat{L}_4 - \hat{K}_4 \\
a_5 &= \hat{K}_4 \cdot (\hat{L}_4 - \hat{K}_4) - (\hat{L}_2 - \hat{K}_2) \\
a_6 &= \frac{\hat{K}_2 \cdot (\hat{L}_4 - \hat{K}_4) - (\hat{L}_0 - \hat{K}_0)}{a_5} \\
a_7 &= \frac{\hat{k}_{sh1} + \hat{k}_{sh2}}{\hat{J}_{G_1}} \\
a_8 &= \frac{\hat{k}_{sh1} \cdot \hat{k}_{sh2}}{\hat{J}_{G_1}} \\
a_9 &= \frac{\hat{K}_0}{a_8}
\end{aligned}$$

2. Identification du groupe moins important:

Pour calculer les paramètres du frottement visqueux, on suppose qu'ils sont tous égaux  $f_L = f_M = f_{G_1} = f_{G_2} = f$ . Le gain statique calculé est

$$g_s = \lim_{s \rightarrow 0} H(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{f_L + f_M + f_{G_1} + f_{G_2}} = \frac{1}{4f}.$$

Par conséquent,

$$\hat{p}_i = f = \frac{1}{4\hat{g}_s}, \quad i = 8 \dots 14 \tag{E.13}$$

où  $\hat{g}_s$  est le gain statique identifié.

*Remarque :*

Les paramètres estimés par cette procédure sont acceptables s'ils sont tous positifs.

## E.5 Expérience optimale

Nous désignons par  $\Xi$  le protocole expérimental [83], autrement dit, le vecteur des conditions expérimentales à optimiser. La meilleure estimation des paramètres linéaires, appelée  $\hat{\mathbf{p}}^o$ , est obtenue par l'expérience optimale  $\Xi^*$ , *i.e.*  $\hat{\mathbf{p}}^o = \mathbf{p}(\Xi^*)$ .

Sachant que les paramètres de frottement,  $p_i$ ,  $i = 8, \dots, 14$ , sont estimés à partir de l'estimation du gain statique  $\hat{g}_s$  (voir (3.16)), ils sont indépendants des conditions expérimentales. Dans cette section, on ne considère l'expérience optimale que pour  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ .

Pour planifier une expérience de façon optimale il faut [83]:

1. définir un critère d'optimalité (grandeur scalaire) relié au but poursuivi,
2. prendre en compte toutes les contraintes venant limiter les expériences réalisables,
3. optimiser le critère choisi par rapport aux variables disponibles à l'expérimentateur.

Ainsi:

1. Nous définissons la meilleure expérience comme une expérience qui donne la plus petite erreur de sortie. Le critère d'optimalité est défini de la façon suivante:

$$j(\mathbf{p}) = \mathbf{e}^T(\mathbf{p})\mathbf{e}(\mathbf{p})$$

où  $\mathbf{e}(\mathbf{p}) = \mathbf{y}_f - \mathbf{y}_m(\mathbf{p})$  est le vecteur de l'erreur de sortie,  $\mathbf{y}_f = [\omega_{M_f}, \omega_{L_f}]^T$  est le vecteur des sorties du système (filtrés) et  $\mathbf{y}_m(\mathbf{p}) = [\omega_M(\mathbf{p}), \omega_L(\mathbf{p})]^T$  représente le vecteur des sorties du modèle.

2. Si nous désignons par  $\Xi$  le protocole expérimental (vecteur des conditions expérimentales à optimiser), on peut considérer:

$$\Xi = [T_{id}, g] \quad (\text{E.14})$$

où  $T_{id} = [t_0, t_0 + T_i]$  représente l'intervalle de temps dans lequel l'acquisition des données d'identification est faite, et  $g$  est l'amplitude de l'entrée SBPA appliquée pour identifier la dynamique rapide. Ainsi, les paramètres estimés avec le protocole  $\Xi$  sont  $p_i(\Xi)$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Les autres paramètres,  $p_i$ ,  $i = 8, \dots, 14$ , sont trouvés par (E.13).

3. L'expérience optimale, appelée  $\Xi^*$  peut être trouvée par:

$$\begin{cases} \Xi^* = \arg \min_{\Xi \in \mathcal{D}_\Xi} j(\Xi) \\ j(\Xi) = \sum_{t=t_0}^{t_0+T_i} (0.5(\omega_{M_f}(t) - \omega_M(t, \mathbf{p}(\Xi)))^2 + 0.5(\omega_{L_f}(t) - \omega_L(t, \mathbf{p}(\Xi)))^2). \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

sachant que le modèle linéarisé est utilisé ( $\theta = 0$ ), les vitesses  $\omega_M(t, \mathbf{p})$  et  $\omega_L(t, \mathbf{p})$  sont des sorties du modèle  $M_3(\mathbf{p}, 0)$ , décrit par (3.31).

L'entrée utilisée pour l'expérience optimale est :

$$C_M(t) = a^o \cdot 1(t) - g^o \cdot u_{SBPA}(t - t_s). \quad (\text{E.16})$$

$J_M, J_{G_1}, J_{G_2}, J_L [m^2.kg]$	$k_{sh_1}, k_{sh_2}, k_{sh_3} [N.m.rad^{-1}]$
$4.88 \times 10^{-3}, 1.4 \times 10^{-2}, 3 \times 10^{-2}, 6.8 \times 10^{-2}$	357, 175, 78
$f_{sh_1}, f_{sh_2}, f_{sh_3}, f_M, f_{G_1}, f_{G_2}, f_L [N.m.rad^{-1}s^{-1}]$	$\theta [deg]$
$5.1 \times 10^{-3}, 5.6 \times 10^{-3}, 1.57 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}$	2, 5, 10

Table E.1: Les valeurs utilisées pour la simulation du système avec trois axes.

où  $g^o$  et  $a^o$  sont des valeurs constantes.  $u_{SBPA}(t - t_s)$  représente une séquence SBPA passée par un bloqueur d'ordre zéro <sup>3</sup> et retardée  $t_s$  seconds. Avec cette entrée, le problème de l'état d'immobilité aléatoire est résolu et le choix de la meilleure estimation des paramètres linéaires est plus facile.

## E.6 Résultats

Le diagramme bloc de la figure 3.20 est simulé en utilisant les valeurs des paramètres de la table E.1 <sup>4</sup>. La vitesse maximum permise du moteur est  $\omega_{M_{max}} = 157 [\frac{rad}{s}]$ .

Par la suite, nous présentons les résultats de l'identification des paramètres linéaires.

- Identification de la dynamique lente:

Les simulations sont faites en choisissant les variances de bruit de mesure de la vitesse du moteur et de la vitesse de charge:  $var(n_{\phi_M}) = 0.1$  et  $var(n_{\phi_L}) = 3 \times 10^{-4}$ . L'entrée échelon  $C_M(t) = 0.1 1(t)$  est appliquée. La réponse indicielle de la vitesse du moteur est montrée dans la figure E.2 droite, où le gain statique est  $\hat{g}_s = 500$  et le temps de montée est  $t_r = 250 s$ . La période d'échantillonnage est  $T_s = 5 s$ .

La dynamique lente identifiée est:

$$\hat{H}_l(z) = \frac{41,012}{z - 0,9179} \quad (E.17)$$

Les résultats de la validation de ce modèle sont montrés dans la figure E.2 gauche.

- Identification de la dynamique rapide:

Le diagramme de Bode du système linéaire ( $\theta = 0$ ) est montré dans la figure E.3. La bande passante du système est  $\omega_{Bo} = 314 \frac{rad}{s}$ . La séquence SBPA est construite en utilisant 9 cellules et sans diviseur de fréquence ( $n_{div} = 1$  dans E.6). Compte tenu de la relation (E.6), la période d'échantillonnage est:  $T_s = 0.005 < (0.45 \frac{2\pi}{314} = 0.009) s$ .

Vu la relation (E.7) et étant donné que la dynamique lente identifiée n'a pas de zéro, le numérateur et le dénominateur du modèle de la dynamique rapide devraient

<sup>3</sup>Zero Order Hold

<sup>4</sup>Ces valeurs sont fournies par la compagnie ALSTOM.

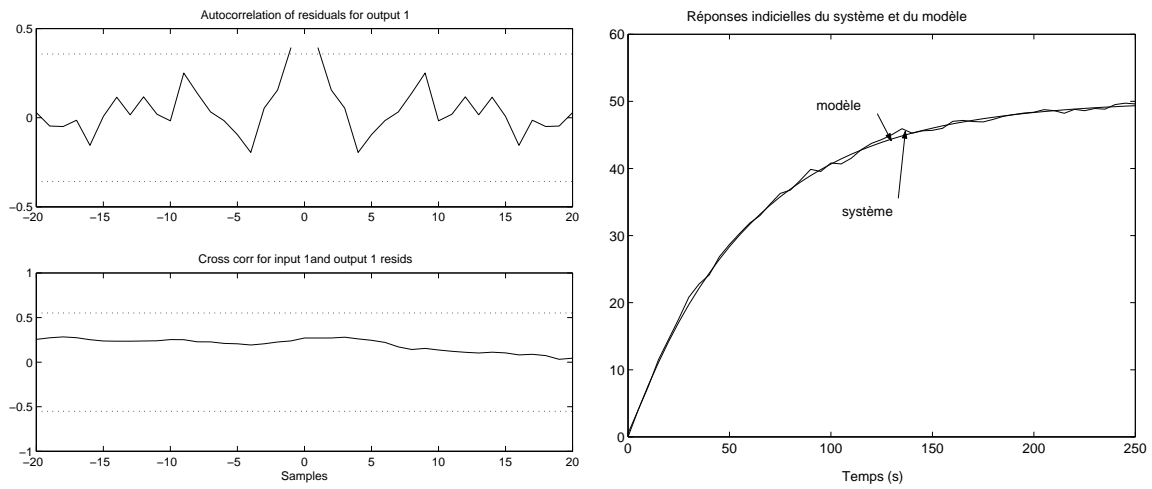


Figure E.2: Gauche: validation du modèle identifié pour la dynamique lente. Droite: réponses indicielles du système et du modèle.

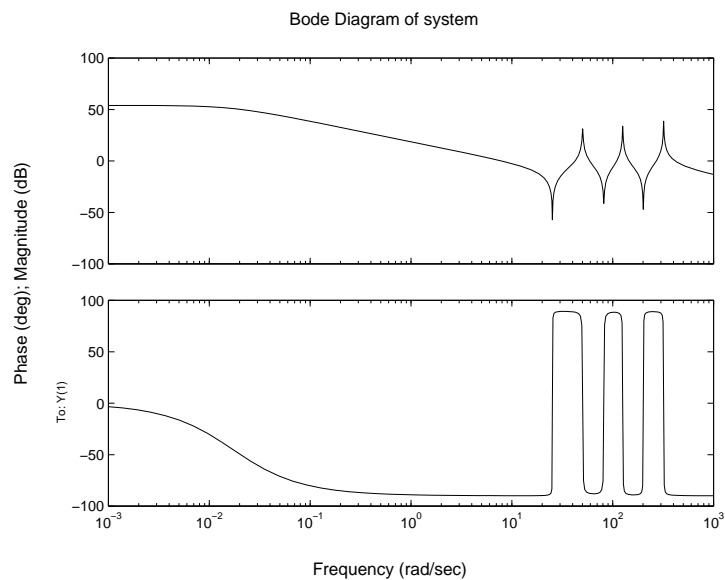


Figure E.3: Diagramme de Bode continu du système.



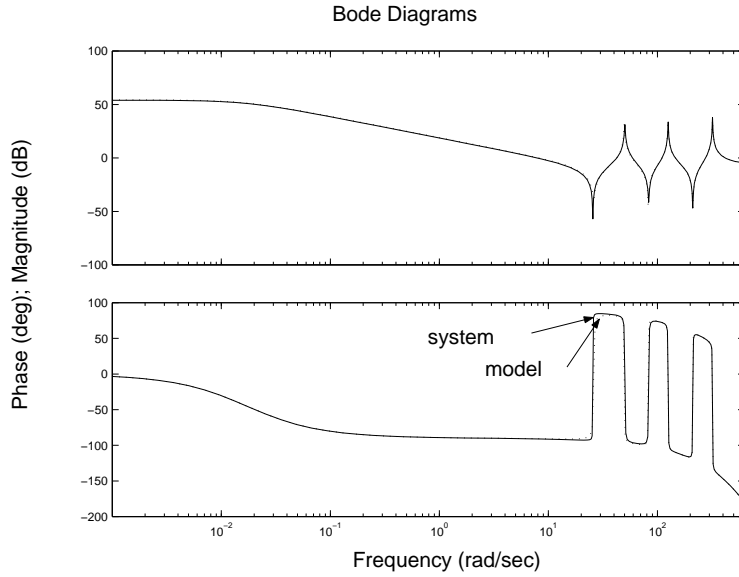


Figure E.4: Diagramme de Bode discret du système (ligne solide) et du modèle d'ordre correct identifié avec une excitation forte,  $g = 70$  (ligne coupée).

être d'ordre 7. Cependant, un tel modèle ne peut être atteint qu'en choisissant une entrée SBPA très excitante ( $g = 70$ ), ce qui implique une vitesse du moteur inacceptable ( $\omega_{M_n} = 800 \frac{rad}{s}$ ), largement supérieure à la vitesse maximum permise  $157 \frac{rad}{s}$ . D'autre part, la comparaison des diagrammes de Bode des modèles identifiés avec les entrées SBPA très faibles ( $g < 5$ ) avec le diagramme de Bode du système montre que ces modèles ne fournissent pas d'estimations acceptables du système. L'expérience nous montre qu'une estimation acceptable est accessible en choisissant  $5 \leq g \leq 17$ , et que les numérateurs et les dénominateurs des modèles identifiés avec ces valeurs sont d'ordre 14.

- Calcul des paramètres linéaires:

- Paramètres moins importants:

Les paramètres  $p_i$ ,  $i = 8, \dots, 14$  sont calculés en utilisant le gain statique estimé:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{4\hat{g}_s} \text{ (voir Table E.2).}$$

- Paramètres importants:

Comme le modèle global identifié,  $\hat{H}$ , a un numérateur d'ordre 14 et un dénominateur d'ordre 15 (voir (E.7)), on doit éliminer 8 pôles avec les 8 zéros les plus proches pour arriver aux degrés exacts du modèle global attendu. Cette élimination aboutit parfois aux modèles réduits  $\hat{H}_r$  non utilisables pour l'estimation des paramètres linéaires (voir la fin de la section E.3). Par exemple, le modèle iden-

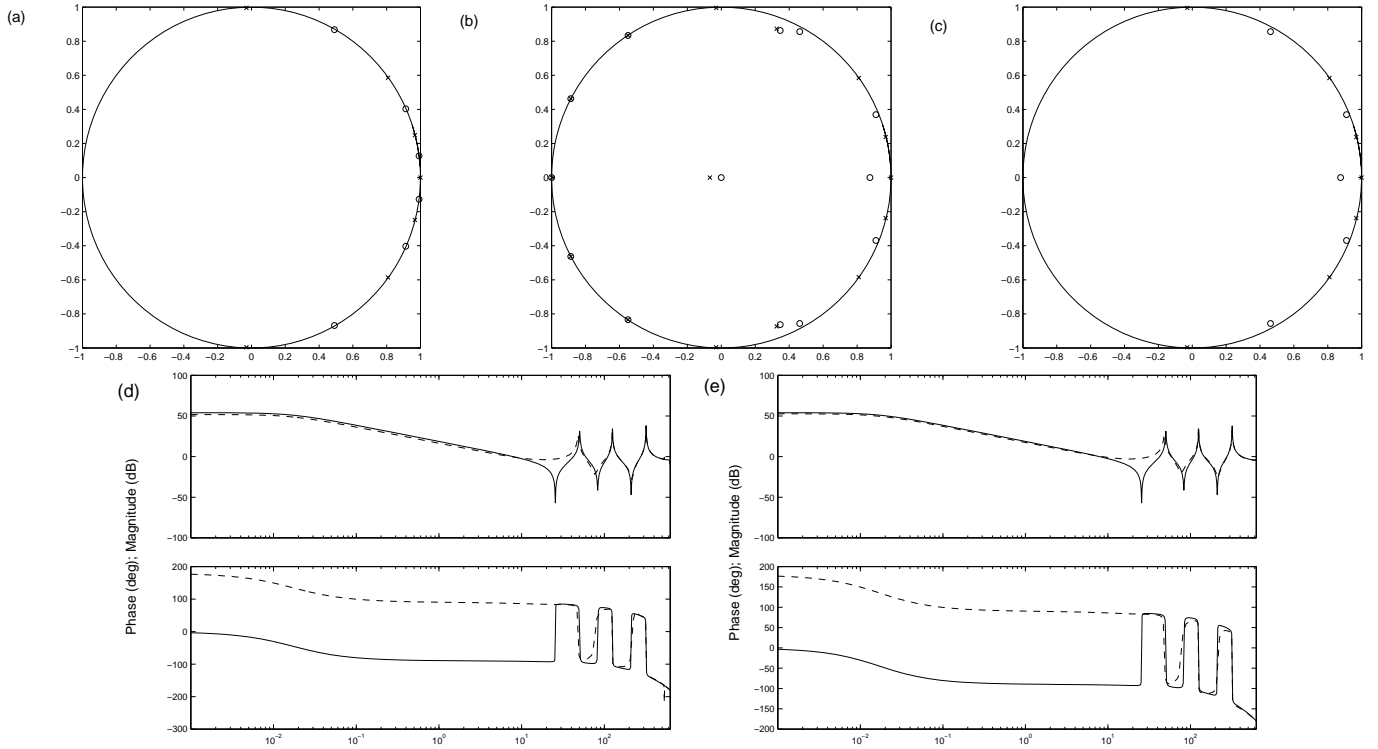


Figure E.5: Diagramme pôles-zéros (a) du système  $H$ , (b) du modèle identifié  $\hat{H}$ , (c) du modèle identifié réduit  $\hat{H}_r$ . Diagramme de Bode du système (trait continu) et des modèles (trait discontinu): (d)  $H$ ,  $\hat{H}$ , (e)  $H$ ,  $\hat{H}_r$ . L'amplitude du signal SBPA est  $g = 10$  et l'intervalle de temps du test d'identification est  $T_{id} = [21, 26.2]$  seconds ( $\theta^* = 2^\circ$ ).

tifié réduit de la figure E.5, ne possède que deux paires de zéros conjugués (au lieu de trois). En revanche, le modèle identifié réduit de la figure E.6 est tout à fait acceptable. Les résultats obtenus par ce modèle sont montrés dans la table E.2.

- Résultats de l'expérience optimale:

Nous considérons quatre cas différents, correspondant à 4 combinaisons différentes des variances des bruits de mesure:

- cas 1:  $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ,
- cas 2:  $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-5}$ ,
- cas 3:  $var_{n_M} = 0.1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ,
- cas 4:  $var_{n_M} = 1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ .

Pour chaque cas, 16 expériences correspondant aux 16 combinaisons différentes de 4 amplitudes de l'entrée SBPA  $g \in \{5, 10, 13, 17\}$ , et 4 intervalles temporels du test

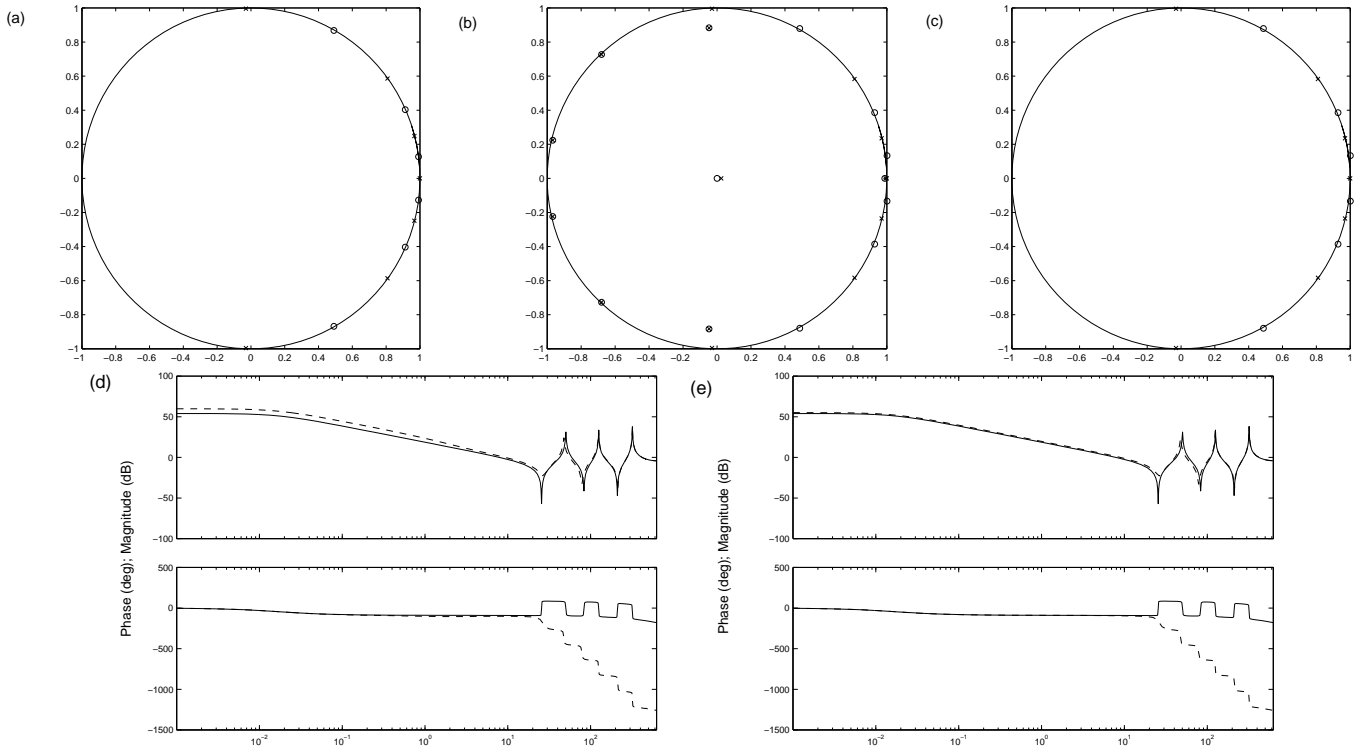


Figure E.6: Diagramme pôles-zéros (a) du système  $H$ , (b) du modèle identifié  $\hat{H}$ , (c) du modèle identifié réduit  $\hat{H}_r$ . Diagramme de Bode du système (trait continu) et des modèles (trait discontinu): (d)  $H$ ,  $\hat{H}$ , (e)  $H$ ,  $\hat{H}_r$ . L'amplitude du signal SBPA est  $g = 10$  et l'intervalle de temps du test d'identification est  $T_{id} = [15, 26.2] s$  ( $\theta^* = 2^\circ$ ).

paramètre	$10^3 J_M$	$10^2 J_{G_1}$	$10^2 J_{G_2}$	$10^2 J_L$	$k_{sh_1}$	$k_{sh_2}$	$k_{sh_3}$
vraie valeur	4,88	1,4	3	6.8	357	175	78
estimation	4,78	1,34	3,06	5,45	347,34	174,79	62
erreur %	2	4,3	2	19,8	2,7	0,12	20,5
paramètre	$10^3 f_{sh_1}$	$10^3 f_{sh_2}$	$10^2 f_{sh_3}$	$10^4 f_M$	$10^4 f_{G_1}$	$10^4 f_{G_2}$	$10^4 f_L$
vraie valeur	5.1	5.6	1.57	5	5	5	5
estimation	0.5	0.5	0.05	5	5	5	5
erreur %	90	91.1	96.8	0	0	0	0

Table E.2: Estimation des paramètres linéaires calculés à partir du modèle trouvé pour  $g = 10$ ,  $T_{id} = [15, 26.2] s$  et  $\theta^* = 2^\circ$ .

$\mathbf{T}_{id} = \{[0, T_a], [\frac{2}{5}T_a, T_a], [\frac{3}{5}T_a, T_a], [\frac{4}{5}T_a, T_a]\}$ , sont effectuées.  $T_a$  est l'instant où la vitesse du moteur atteint %80 de sa valeur maximale permise:  $\omega_{M_n}(T_a) = 0.8\omega_{M_{max}}$ . Parmi les modèles trouvés avec ces 16 expériences, celui qui minimise le critère (E.15) (avec le couple d'entrée donnée par (3.14) et les valeurs numériques  $t_0 = 255$  s,  $g^o = 8$  N.m,  $a^o = 0.1$  N.m et  $T_i = 5$  s), est choisi comme le modèle optimal et noté par  $M(\hat{\mathbf{p}}_i^o, 0)$ , où l'indice  $i$  correspond à l'un des cas 1 à 4.

Pour avoir une estimation plus fiable, nous répétons 10 fois chaque expérience avec les différentes valeurs initiales du générateur du bruit. L'estimation optimale moyenne,  $\bar{\mathbf{p}}_i^o$ , est la moyenne de  $\hat{\mathbf{p}}_i^o$  obtenus par ces 10 expériences.

Les tables E.3, E.4 et E.5 montrent les résultats obtenus pour  $\theta^* = 2^\circ, 5^\circ$  et  $10^\circ$ . Il faut noter que les paramètres correspondant aux coefficients du frottement visqueux *i.e.*  $p_8$  à  $p_{14}$  ne dépendent pas des bruits de mesure car ils sont calculés avec la relation (E.13).

## E.7 Commentaire sur les résultats

Nous expliquons maintenant la raison pour laquelle, indépendamment de l'amplitude du jeu, les estimations des certains paramètres sont plus erronées que les autres.

$J_M$  étant le paramètre calculé indépendamment des autres, son estimation est plus précise. En revanche,  $J_L$  et  $k_{sh3}$  sont les deux derniers paramètres calculés à partir des estimations des autres paramètres. Ils accumulent donc les erreurs d'estimation des autres paramètres.

Nous allons maintenant expliquer pourquoi l'estimation de  $\frac{k_{sh3}}{J_L}$  est moins précise que celles des variables  $\frac{k_{sh1}+k_{sh2}}{J_{G1}}$  et  $\frac{k_{sh2}+k_{sh3}}{J_{G2}}$ .

Rappelons que l'estimation des paramètres linéaires est basée sur cette hypothèse simplificatrice que la réponse fréquentielle du système sans jeu est similaire à celle du système avec le jeu, ce qui n'est pas en réalité tout à fait correct. Nous pouvons montrer approximativement que parmi les variables mentionnées ci-dessus, celles pour lesquelles cette hypothèse est moins pertinente sont moins bien estimées que les autres.

Nous calculons le spectre de la vitesse du moteur pour les entrées SBPA de différentes amplitudes  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 1.1$ ,  $g_3 = 13$  et  $g_4 = 14.3$ . Notez que  $\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_4}{g_3} = 1.1$ . Figure E.7 montre les rapports des spectres  $R_1(\omega) = \left| \frac{\omega_M(j\omega, g_2)}{\omega_M(j\omega, g_1)} \right|$  et  $R_2(\omega) = \left| \frac{\omega_M(j\omega, g_4)}{\omega_M(j\omega, g_3)} \right|$ , pour  $\theta^* = 0^\circ, 2^\circ$  et  $10^\circ$ . On constate que pour  $\theta^* = 0^\circ$ ,  $R_1(\omega) = R_2(\omega)$ ,  $\forall \omega$ . Ceci signifie un comportement complètement linéaire par rapport à l'entrée. On peut aussi remarquer qu'en présence du jeu ( $\theta \neq 0$ ), ce comportement n'est pas tout à fait linéaire. La non

$p$	$10^3 J_M$	$10^2 J_{G_1}$	$10^2 J_{G_2}$	$10^2 J_L$	$k_{sh_1}$	$k_{sh_2}$	$k_{sh_3}$
$p^*$	4,88	1,4	3	6,8	357	175	78
$\bar{p}_1^o$	4,84	1,38	2,95	6,81	355	176,37	70,3
erreur %	0,82	0,42	1,7	0,15	0,56	2,37	10,9
écart-type	$2,93 \times 10^{-5}$	$4,2 \times 10^{-4}$	$0,3 \times 10^{-3}$	$1,29 \times 10^{-2}$	1,26	2,95	5,84
$\bar{p}_2^o$	4,86	1,39	2,94	6,65	355,54	172	67,3
erreur %	0,41	0,7	2	2,2	0,4	1,7	15,2
écart-type	$9,38 \times 10^{-5}$	$7,34 \times 10^{-4}$	$0,5 \times 10^{-3}$	$1,78 \times 10^{-2}$	9,37	18,9	11
$\bar{p}_3^o$	4,79	1,4	2,8	7,7	345,8	165,5	62,28
erreur %	1,84	0	6,7	13,23	3,36	5,43	19,5
écart-type	$8,6 \times 10^{-5}$	$15 \times 10^{-4}$	$0,44 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	10,9	17,47	12,65
$\bar{p}_4^o$	4,8	1,33	3,5	5,23	346	162,19	44,8
erreur %	1,6	5	16,7	23	3,1	7,3	-42,6
écart-type	$13 \times 10^{-8}$	$18 \times 10^{-6}$	$2,6 \times 10^{-4}$	$4,56 \times 10^{-4}$	20	28,2	30,9
$p$	$10^3 f_{sh1}$	$10^3 f_{sh2}$	$10^2 f_{sh3}$	$10^4 f_M$	$10^4 f_{G1}$	$10^4 f_{G2}$	$10^4 f_L$
$p^*$	5.1	5.6	1.57	5	5	5	5
$\hat{p}$	0.5	0.5	0.05	5	5	5	5
erreur %	90	91.1	96.8	0	0	0	0

Table E.3: Estimations optimales moyennes des paramètres linéaires pour  $\theta^* = 2^\circ$ .  $\bar{\mathbf{p}}_i^o$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont obtenus, respectivement, pour les variances des bruits ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ), ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-5}$ ), ( $var_{n_M} = 0.1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ), et ( $var_{n_M} = 1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ).

$p$	$10^3 \cdot J_M$	$10^2 \cdot J_{G_1}$	$10^2 J_{G_2}$	$10^2 J_L$	$k_{sh1}$	$k_{sh2}$	$k_{sh3}$
$p^*$	4,88	1,4	3	6.8	357	175	78
$\bar{p}_1^o$	4,89	1,43	3,12	9,39	359,58	179	60,67
erreur %	0,2	2,1	4	38	0,7	2,3	22,2
écart-type	$5,7 \times 10^{-5}$	$4,66 \times 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{-3}$	$1,63 \times 10^{-2}$	6,39	6,2	4,87
$\bar{p}_2^o$	4,84	1,41	3,17	9,67	355,,6	179,1	60,85
erreur %	0,8	0,7	5,7	42,2	0,6	2,3	22
écart-type	$4,57 \times 10^{-5}$	$2,57 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$	$1,97 \times 10^{-2}$	3,99	4,52	6,82
$\bar{p}_3^o$	4,89	1,44	3,11	10,3	359,6	185,65	64,61
erreur %	0,2	2,8	3,7	51,5	0,7	6,1	17,2
écart-type	$1,4 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$	$5,3 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-2}$	18,87	34	25,7
$\bar{p}_4^o$	3,95	0,93	1,4	0,62	361	216	72,95
erreur %	19	33,6	53,3	90,9	1,1	23,4	6,5
écart-type	$13,7 \times 10^{-4}$	$5,46 \times 10^{-3}$	$8,9 \times 10^{-3}$	$1,67 \times 10^{-2}$	47,8	126,52	70,95
$p$	$10^3 f_{sh1}$	$10^3 f_{sh2}$	$10^2 f_{sh3}$	$10^4 f_M$	$10^4 f_{G1}$	$10^4 f_{G2}$	$10^4 f_L$
$p^*$	5.1	5.6	1.57	5	5	5	5
$\hat{p}$	0.5	0.5	0.05	5	5	5	5
erreur %	90	91.1	96.8	0	0	0	0

Table E.4: Estimations optimales moyennes des paramètres linéaires pour  $\theta^* = 5^\circ$ .  $\bar{p}_i^o$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont obtenus, respectivement, pour les variances des bruits ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ), ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-5}$ ), ( $var_{n_M} = 0.1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ), et ( $var_{n_M} = 1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ).

$p$	$10^3 \cdot J_M$	$10^2 \cdot J_{G_1}$	$10^2 J_{G_2}$	$10^2 J_L$	$k_{sh_1}$	$k_{sh_2}$	$k_{sh_3}$
$p^*$	4,88	1,4	3	6,8	357	175	78
$\bar{p}_1^o$	4,86	1,39	2,9	6,7	355,53	172,04	50,28
erreur %	0,4	0,7	3,3	1,5	0,4	1,7	35,5
écart-type	$4,77 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-4}$	$1,63 \times 10^{-3}$	$8,6 \times 10^{-3}$	3,88	5,45	4
$\bar{p}_2^o$	4,86	1,39	3	6,49	355,32	174,9	49,51
erreur %	0,4	0,7	0	4,5	0,5	0,1	36,5
écart-type	$5,14 \times 10^{-5}$	$5,37 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-3}$	$1,29 \times 10^{-2}$	6,7	6,84	7
$\bar{p}_3^o$	4,77	1,34	2,59	9,27	347,66	163,4	49,51
erreur %	2,2	4,2	13,7	36,3	2,6	6,6	36,5
écart-type	$1,38 \times 10^{-4}$	$9,54 \times 10^{-4}$	$6,1 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-1}$	12,9	17,5	32,2
$p$	$10^3 f_{sh1}$	$10^3 f_{sh2}$	$10^2 f_{sh3}$	$10^4 f_M$	$10^4 f_{G1}$	$10^4 f_{G2}$	$10^4 f_L$
$p^*$	5.1	5.6	1.57	5	5	5	5
$\hat{p}$	0.5	0.5	0.05	5	5	5	5
erreur %	90	91.1	96.8	0	0	0	0

Table E.5: Estimations optimales moyennes des paramètres linéaires pour  $\theta^* = 10^o$ .  $\bar{\mathbf{p}}_i^o$ ,  $i = 1, \dots, 3$  sont obtenus, respectivement, pour les variances des bruits ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-6}$ ), ( $var_{n_M} = 0.01$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-5}$ ), et ( $var_{n_M} = 0.1$ ,  $var_{n_L} = 3 \times 10^{-4}$ ).

linéarité est plus visible dans la graphique de  $R_1$  (signaux de faible amplitude) et dans une bande de fréquence, que nous appelons la bande de fréquence de l'activité du jeu.

Les zéros de  $H(\mathbf{p}, s)$  pour  $p_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$  (voir (E.10) ) sont approximativement <sup>5</sup>  $z_1 \approx \sqrt{\frac{k_{sh1} + k_{sh2}}{J_{G_1}}} = 195 \text{ Hz}$ ,  $z_2 \approx \sqrt{\frac{k_{sh2} + k_{sh3}}{J_{G_2}}} = 91.8 \text{ Hz}$  et  $z_3 \approx \sqrt{\frac{k_{sh3}}{J_L}} = 33.9 \text{ Hz}$ . On constate que  $z_3$  est situé dans la bande de fréquence de l'activité du jeu. Son estimation est donc moins précise que celle de  $z_2$  et  $z_1$ .

---

<sup>5</sup>L'erreur de cette approximation est  $(J_{G_1} \cdot k_{sh3}^2 + J_L \cdot k_{sh2}^2) \cdot s^2 + (k_{sh2}^2 + k_{sh1} k_{sh3} + k_{sh2} k_{sh3})$ .



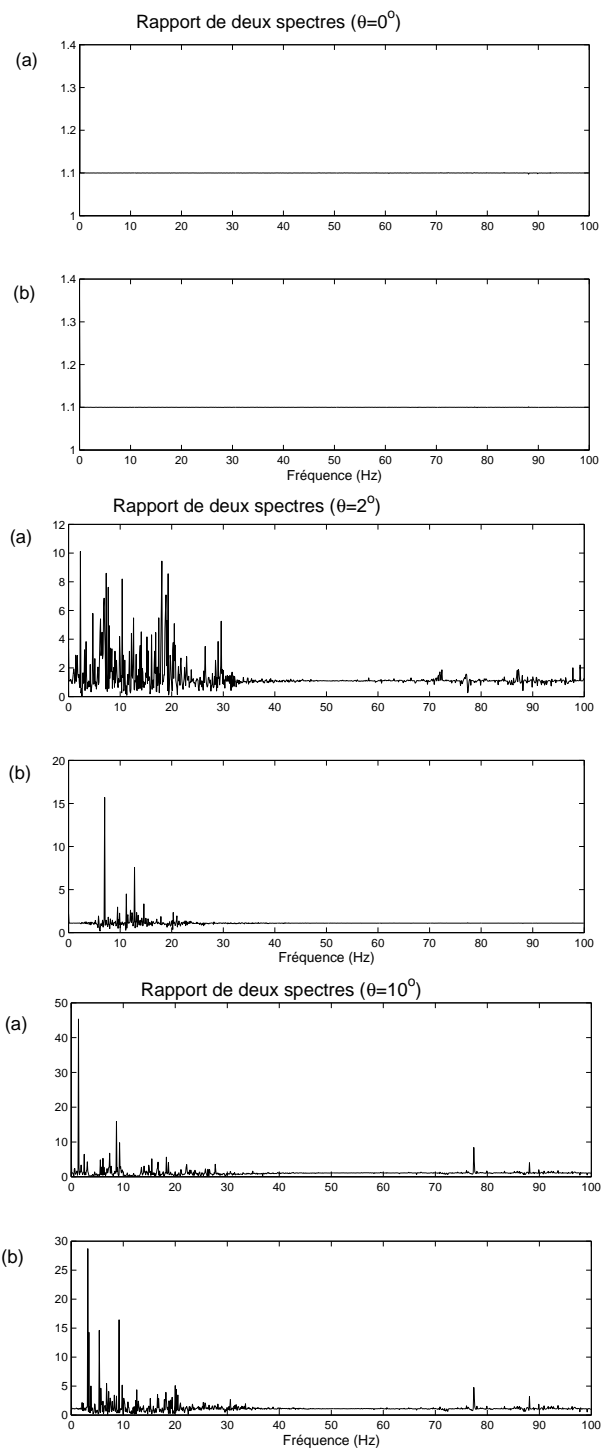


Figure E.7: Les rapports des spectres du système pour différentes amplitudes du jeu et pour différentes amplitudes de l'entrée, (a):  $g_1 = 1, g_2 = 1, 1$ , (b):  $g_1 = 13, g_2 = 14, 3$ .

## Annexe F

# Actionneur électro-pneumatique

Le banc d'essai est représenté dans la figure F.1. Il s'agit d'un actionneur électro-pneumatique composé de quatre éléments:

1. un vérin pneumatique à tige, fixé sur un bâti pour assurer une bonne rigidité de fonctionnement.
2. une servovalve électro-pneumatique, pour commander le mouvement du vérin.
3. un capteur de déplacement linéaire (LVDT), qui fournit l'information sur la position.
4. deux capteurs de pression placés sur chacune des entrées du vérin.

### Linéarisation du modèle physique

Pour linéariser le modèle physique de l'actionneur électro-pneumatique, on s'est servi de l'approche développée dans [33]. Les équations différentielles représentant la dynamique de chaque chambre du vérin peuvent être écrites [33], sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dP_p}{dt} = \frac{\gamma \cdot R \cdot T_s}{V_p(y)} (\dot{m}_p - \frac{P_p \cdot S_p}{R \cdot T_s} \dot{y}) \\ \frac{dP_n}{dt} = \frac{\gamma \cdot R \cdot T_s}{V_n(y)} (\dot{m}_n - \frac{P_n \cdot S_n}{R \cdot T_s} \dot{y}) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

où  $\dot{m}_p(t) = -\dot{m}_n(t) = g_u \cdot u(t)$ ,  $u(t)$  désigne la commande et  $g_u$  est une constante.

L'application de la loi de Newton à la partie mobile (la masse  $m$ ), fournit l'équation simplifiée suivante [33]:

$$m\ddot{y} = P_p(t)S_p - P_n(t)S_n - P_a(S_p - S_n) - F_f \quad (\text{F.2})$$

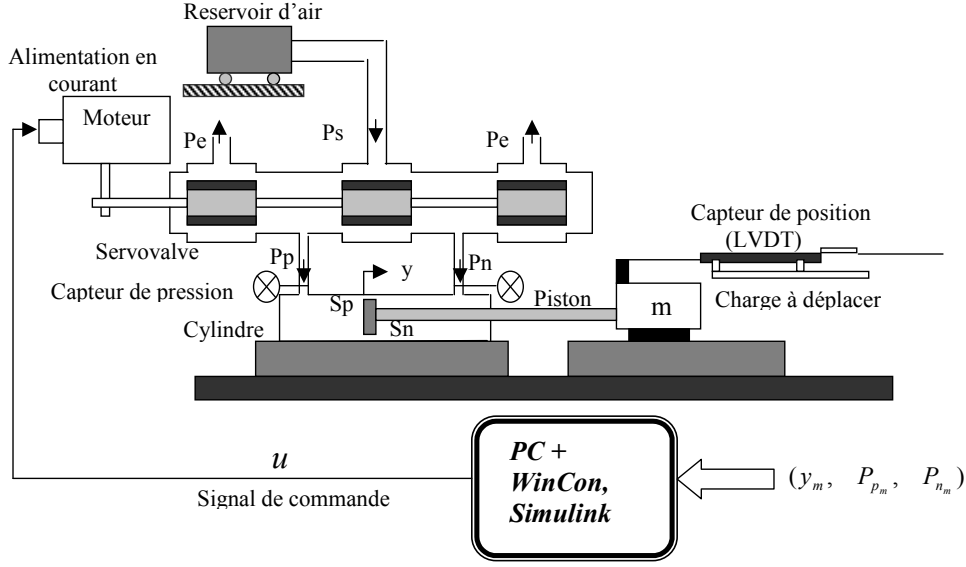


Figure F.1: Schéma d'un actionneur électro-pneumatique.

où  $P_a(S_p - S_n)$  représente l'action de la pression atmosphérique et  $F_f$  représente l'action de frottement sur le piston et sur la charge.

En négligeant l'effet de la pression atmosphérique et ne considérant que l'effet du frottement visqueux,  $F_f = F_v \dot{y}$ , et en notant les variables d'état  $\mathbf{x} = [P_p, P_n, y, \dot{y}]^T$  et après une linéarisation au premier ordre du modèle physique présenté par des équations (F.1) and (F.2), on arrive à [33]:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \Delta u$$

où,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\gamma P_{p0} S_p}{V_{p0}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma P_{n0} S_n}{V_{n0}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{S_p}{m} & \frac{-S_n}{m} & 0 & \frac{-F_v}{m} \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{b} = \left[ \frac{\gamma RT_s g_u}{V_{p0}}, \frac{-\gamma RT_s g_u}{V_{n0}}, 0, 0 \right]^T \quad (\text{F.3})$$

Ce modèle linéaire n'est évidemment valable qu'autour d'un point de fonctionnement  $\mathbf{x}_0 = [P_{p0}, P_{n0}, y_0, \dot{y}_0]^T = \mathbf{x}(t_0)$ , où  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0$ .

Le schéma fonctionnel de la figure F.2 représente les équations linéarisées (F.3). Ce schéma peut être simplifié (Figure F.3) en utilisant les relations entre les variables auxiliaires  $x_1, x_2, y_1, y_2$  et  $z$  (voir Figure F.2):

$$\begin{cases} z = \frac{\gamma RT_s}{s} \left( \frac{S_p}{V_{p0}} \cdot y_1 - \frac{S_n}{V_{n0}} \cdot y_2 \right) \\ y_1 = -x_1 + u \cdot g_u \\ y_2 = x_2 - u \cdot g_u \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

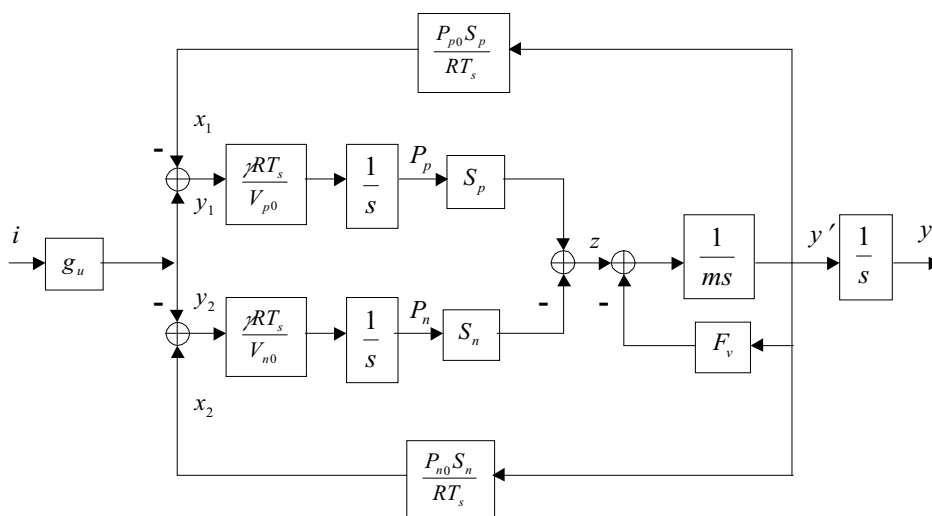


Figure F.2: Le schéma fonctionnel détaillé.

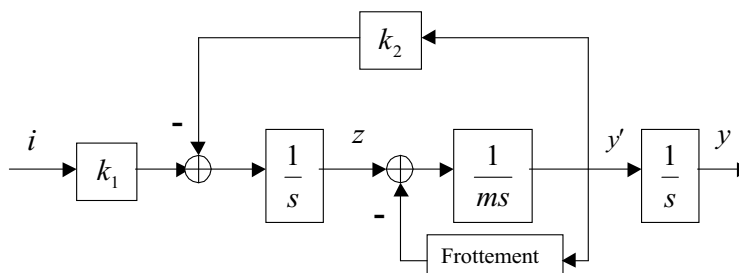


Figure F.3: Le schéma fonctionnel simplifié.

où:

$$k_1 = g_u \cdot \gamma \cdot R \cdot T_s \cdot \left( \frac{S_p}{V_{p0}} + \frac{S_n}{V_{n0}} \right), \text{ et } k_2 = \gamma \cdot \left( \frac{P_{p0}}{V_{p0}} \cdot S_p^2 + \frac{P_{n0}}{V_{n0}} \cdot S_n^2 \right). \quad (\text{F.5})$$

## Annexe G

# Friction Identification using the Karnopp model, applied to an electro-pneumatic actuator

L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda

Soumis à: *Journal of Systems and Control Engineering*



Annexe H

# Friction Compensation using the Karnopp model, applied to an electro-pneumatic actuator

L. Ravanbod-Shirazi, A. Besançon-Voda et P. Halva

Soumis à: *Journal of Systems and Control Engineering*





## Annexe I

# Stiction Friction Identification of Karnopp model using Describing Function

L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda

Présenté à: 5<sup>th</sup> *IFAC Symposium Nonlinear Control Systems*, NOLCOS01, Saint-Petersburg,  
Russia, 2001



**Annexe J**

# **Robust Friction Compensation based on Karnopp model**

**L. Ravanbod-Shirazi et A. Besançon-Voda**

Présenté à: *European Control Conference*, ECC01, Porto, Portugal, 2001

