



# Modélisation et commande d'hélicoptère

Juan Carlos Avila Vilchis

## ► To cite this version:

Juan Carlos Avila Vilchis. Modélisation et commande d'hélicoptère. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00198379

**HAL Id: tel-00198379**

**<https://theses.hal.science/tel-00198379>**

Submitted on 17 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

**T H E S E**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

**Spécialité : Automatique-Productique**

préparée au **Laboratoire d'Automatique de Grenoble**

présentée et soutenue publiquement par

Juan Carlos AVILA VILCHIS

le 19 septembre 2001

**Titre : MODELISATION ET COMMANDE D'HELICOPTERE**

**Directeur de Thèse :**

M. B. BROGLIATO

LAG

**JURY**

M. G. BORNARD

Président

M. B. MASCHKE

Rapporteur

Mme. B. D'ANDREA NOVEL

Rapporteur

M. B. BROGLIATO

Directeur de thèse

M. R. LOZANO

Co-encadrant

M. A. DESOPPER

Examineur



# Remerciements

Je tiens à remercier :

Monsieur Guy BORNARD, directeur de recherche au C.N.R.S. d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse.

Madame Brigitte D'ANDREA-NOVEL, professeur à l'Ecole des Mines de Paris, et Monsieur Bernhard MASCHKE, professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1 d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Monsieur André DESOPPER, ingénieur de recherche à l'O.N.E.R.A. d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Monsieur Bernard BROGLIATO, chargé de recherche au C.N.R.S., et Monsieur Rogelio LOZANO, directeur de recherche au C.N.R.S. pour m'avoir dirigé durant ces trois années de thèse.

Monsieur Carlos CANUDAS DE WIT, directeur de recherche au C.N.R.S. pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe ROBOTIQUE.

L'ensemble du secrétariat et l'équipe technique du LAG pour leur aide toujours précieuse.

De même, je remercie tous ceux qui m'ont permis de passer d'agréables moments au sein du laboratoire, en particulier aux thésards de l'équipe Robotique.

Je remercie de manière spéciale à ceux qui ont été mon plus grand soutien durant ces dernières années, Adriana, Carlos Rodrigo et José Roberto.



# Notation

Les indices  $F$ ,  $M$  et  $T$  concernent le fuselage, le rotor principal et le rotor de queue, respectivement.

$a$	Gradient de portance ( $1/rad$ )
$a_0$	Angle de conicité ( $rad$ )
$a_1$	Angle longitudinal de battement vertical par rapport au plan du plateau cyclique ( $rad$ )
$a_{1s}$	Angle longitudinal de battement vertical par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur ( $rad$ )
$A_1$	Angle latéral de pas cyclique (inclinaison du plateau cyclique par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur) ( $rad$ )
$A$	Aire du disque rotor ( $m^2$ )
$b$	Longueur d'une pale du rotor de queue ( $m$ )
$b_1$	Angle latéral de battement vertical par rapport au plan du plateau cyclique ( $rad$ )
$b_{1s}$	Angle latéral de battement vertical par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur ( $rad$ )
$B_1$	Angle longitudinal de pas cyclique (inclinaison du plateau cyclique par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur) ( $rad$ )
$bl_M$	Bras de levier des pales du rotor principal ( $m$ )
$bl_T$	Bras de levier des pales du rotor de queue ( $m$ )

$C$	Matrice de Coriolis
$C_M$	Couple de traînée du rotor principal ( $N \cdot m$ )
$C_T$	Couple de traînée du rotor de queue ( $N \cdot m$ )
$C_P$	Couple de tangage ( $N \cdot m$ )
$C_R$	Couple de roulis ( $N \cdot m$ )
$C_Y$	Couple de lacet ( $N \cdot m$ )
$C_{mot}$	Couple moteur ( $N \cdot m$ )
$c_d$	Coefficient de traînée
$c_M$	Corde des pales du rotor principal ( $m$ )
$c_T$	Corde des pales du rotor de queue ( $m$ )
$c.m.$	Centre de masse de l'hélicoptère
$d$	Longueur d'une pale du rotor principal ( $m$ )
$D_F$	Force de traînée sur le fuselage ( $N$ )
$D_{vi}$	Déportance ( $N$ )
$e_T$	Vecteur unitaire parallèle à la direction de $T_M$ dans le repère $(cm, x_c, y_c, z_c)$
$e_i$	Vecteur unitaire parallèle à l'axe $i$ dans le repère $(o, x, y, z)$ , $i = x, y, z$
$e_{ic}$	Vecteur unitaire parallèle à l'axe $i$ dans le repère $(cm, x_c, y_c, z_c)$ , $i = x, y, z$
$e_{i1}$	Vecteur unitaire parallèle à l'axe $i$ dans le repère $(o_1, x_1, y_1, z_1)$ , $i = x, y, z$
$e_{i2}$	Vecteur unitaire parallèle à l'axe $i$ dans le repère $(o_2, x_2, y_2, z_2)$ , $i = x, y, z$
$F_c$	Vecteur de forces externes
$f_{cm}$	Première composante du vecteur de forces externes ( $N$ )
$G$	Vecteur de forces conservatives
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$h_M$	Levier collectif du rotor principal ( $m$ )
$h_T$	Levier collectif du rotor de queue ( $m$ )
$H_M$	Force horizontale sur le rotor principal ( $N$ )
$H_T$	Force horizontale sur le rotor de queue ( $N$ )
$I_n$	Matrice identité $n \times n$
$I_F$	Tenseur d'inertie du fuselage ( $kg \cdot m^2$ )
$I_M$	Tenseur d'inertie du rotor principal ( $kg \cdot m^2$ )
$I_T$	Tenseur d'inertie du rotor de queue ( $kg \cdot m^2$ )
$I_{iik}$	Moment d'inertie du $k = F, M, T$ par rapport à l'axe $i$ ( $kg \cdot m^2$ )
$I_{ijk}$	Produit d'inertie du $k = F, M, T$ par rapport aux axes $ij$ ( $kg \cdot m^2$ )
$J$	Matrice Jacobienne

$K_{mot}$	Gain du moteur ( $N$ )
$k$	Raideur des pales du rotor principal ( $N \cdot m/rad$ )
$L$	Position initiale du c.m. de l'hélicoptère par rapport au repère inertiel ( $m$ ) Lagrangien ( $J$ )
$M$	Matrice d'inertie
$m$	Masse de l'hélicoptère ( $kg$ )
$m_F$	Masse du fuselage ( $kg$ )
$m_M$	Masse d'une pale du rotor principal ( $kg$ )
$m_T$	Masse d'une pale du rotor de queue ( $kg$ )
$P_d$	Pression dynamique ( $Pa$ )
$p_M$	Nombre de pales du rotor principal
$p_t$	Nombre de pales du rotor de queue
$Q$	Vecteur de forces généralisées
$q$	Vecteur de coordonnées généralisées
$R$	Matrice de rotation
$R_M$	Rayon du rotor principal ( $m$ )
$R_T$	Rayon du rotor de queue ( $m$ )
$r$	Vecteur de position du c.m. de l'hélicoptère par rapport au repère inertiel ( $o, x, y, z$ ) ( $m$ )
$r_e$	Distance du centre du rotor (principal ou de queue) à chaque élément différentiel de pale ( $m$ )
$r_M$	Vecteur de position du centre du rotor principal par rapport au repère ( $cm, x_c, y_c, z_c$ ) ( $m$ )
$r_T$	Vecteur de position du centre du rotor de queue par rapport au repère ( $cm, x_c, y_c, z_c$ ) ( $m$ )
$r_\gamma$	Rapport de vitesses de rotation des rotors
$T$	Energie cinétique de l'hélicoptère ( $J$ )
$T_t$	Energie cinétique de translation ( $J$ )
$T_r$	Energie cinétique de rotation ( $J$ )
$T_M$	Poussée du rotor principal ( $N$ )
$T_T$	Poussée du rotor de queue ( $N$ )



$u_1$	Entrée de commande associée au levier collectif du rotor principal et à la puissance du moteur ( $m$ )
$u_2$	Entrée de commande associée au levier collectif du rotor de queue ( $m$ )
$u_3$	Entrée de commande associée à l'angle longitudinal de pas cyclique $B_1$ ( $rad$ )
$u_4$	Entrée de commande associée à l'angle latéral de pas cyclique $A_1$ ( $rad$ )
$U$	Energie potentielle de l'hélicoptère ( $J$ )
$U_g$	Energie potentielle gravitationnelle ( $J$ )
$U_b$	Energie potentielle élastique ( $J$ )
$V$	Vitesse de translation de l'hélicoptère ( $m/s$ )
$v_h$	Vitesse induite en vol stationnaire ( $m/s$ )
$v_v$	Vitesse induite en vol vertical ( $m/s$ )
$v_p$	Vitesse induite en vol en palier ( $m/s$ )
$v_1$	Vitesse induite en vol général ( $m/s$ )
$(o, x, y, z)$	Système de référence inertiel
$(cm, x_c, y_c, z_c)$	Système de référence fixe au c.m. de l'hélicoptère
$(o_1, x_1, y_1, z_1)$	Système de référence fixe au centre du rotor principal
$(o_2, x_2, y_2, z_2)$	Système de référence fixe au centre du rotor de queue
$\alpha$	Angle d'attaque des pales du rotor principal ( $rad$ )
$\alpha_s$	Angle d'attaque du rotor principal ( $rad$ )
$\alpha_F$	Angle d'attaque du fuselage ( $rad$ )
$\alpha_{TPP}$	Angle d'attaque du plan de l'extrémité des pales ( $rad$ )
$\beta$	Angle de battement vertical des pales du rotor principal ( $rad$ )
$\delta$	Angle latéral de translation ( $rad$ )
$\delta_3$	Angle d'inclinaison de l'articulation de battement des pales du rotor de queue ( $rad$ )
$\eta$	Vecteur d'angles d'Euler de convention $xyz$ ( $rad$ )
$\gamma$	Angle d'azimut des pales du rotor principal ( $rad$ )
$\iota$	Angle d'incidence ( $rad$ )
$\lambda$	Multiplicateur de Lagrange. Gain
$\phi$	Angle de lacet ( $rad$ )
$\psi$	Angle de roulis ( $rad$ )
$\theta$	Angle de tangage ( $rad$ )
$\rho$	Masse volumique de l'air ( $kg/m^3$ )

$\varphi_M$	Angle de pas collectif du rotor principal ( <i>rad</i> )
$\varphi_T$	Angle de pas collectif du rotor de queue ( <i>rad</i> )
$\varphi_0$	Angle moyen de pas par rapport au centre de rotation du rotor principal ( <i>rad</i> )
$\varphi_1$	Angle de torsion linéaire de pales (vrillage) ( <i>rad</i> )
$\tau_{cm}$	Deuxième composante du vecteur de forces externes ( $N \cdot m$ )
$\omega_c$	Vecteur de vitesse angulaire de l'hélicoptère par rapport au repère $(cm, x_c, y_c, z_c)$ ( <i>rad/s</i> )

## Résumé

Ce mémoire concerne la modélisation et la commande non-linéaires d'un hélicoptère à modèle réduit (VARIO Benzin-Trainer) de l'Université de Technologie de Compiègne. En ce qui concerne la modélisation, deux modèles généraux à 7-DDL (degrés de liberté) pour l'hélicoptère en mode de vol libre sont proposés. Le premier modèle est Lagrangien et le deuxième de Newton-Euler. Ce système sous-actionné possède 4 entrées de commande. Lorsque l'hélicoptère est monté sur une plate-forme expérimentale, le système sous-actionné qui en résulte possède 3-DDL et 2 entrées de commande. Le modèle à 3-DDL utilisé pour l'analyse du mode de vol vertical (décollage, montée, vol stationnaire, descente et atterrissage) est Lagrangien. Les modèles non-linéaires proposés possèdent des caractéristiques spécifiques qui font de leurs études un défi intéressant, même dans le cas à 3-DDL. Particulièrement les forces aérodynamiques sont exprimées en fonction des signaux de commande et de matrices qui diffèrent de manière significative des formes normalement considérées dans la littérature sur la commande de systèmes mécaniques. En ce qui concerne le système à 3-DDL, deux stratégies de commande sont proposées. La première est une stratégie à deux phases utilisant une commande passive (1ère phase) et une commande linéarisante (2ème phase). La deuxième stratégie concerne uniquement l'application de la commande linéarisante utilisée dans la stratégie précédente. Des résultats en simulation (système à 3-DDL) illustrent les développements théoriques. Une étude en simulation de robustesse est faite pour trois incertitudes paramétriques. Pour les modèles généraux, le vecteur de forces externes (aérodynamiques) possède une structure où les entrées de commande présentent des formes non-linéaires qui sont négligées dans un premier temps pour la conception d'une loi de commande, mais qui seront considérées comme des perturbations pour des simulations ultérieures.

## Abstract

This report concerns the nonlinear modelling and control of a scale model helicopter (VARIO Benzin-Trainer) of the Université de Technologie de Compiègne. For the modelling task, two 7-DOF (degrees of freedom) general models used on the free flight mode of the helicopter are proposed. The first one is a Lagrangian model and the second one a Newton-Euler model. This underactuated system has 4 control inputs. When the helicopter is mounted on an experimental platform the system is underactuated with 3-DOF and 2 control inputs. The 3-DOF used for the vertical flight analysis (take-off, climbing, hover, descent and landing) is a Lagrangian one. The proposed nonlinear models possess quite specific features which make its studies an interesting challenge, even in the 3-DOF case. In particular aerodynamical forces result in input signals and matrices which significantly differ from what is usually considered in the

literature on mechanical systems control. For the 3-DOF system, two control strategies are proposed. The first one is a 2-phase strategy using a passive control (1st phase) and a linearizing control (2nd phase). The second strategy only concerns the linearizing control used in the previous strategy. Numerical results (3-DOF system) illustrate the theoretical developments. A numerical study for three parametric uncertainties is provided to illustrate the robustness of the proposed controllers. The external forces (aerodynamical) vector in the case of the general models possesses a specific structure where the control inputs result in nonlinear forms that are initially neglected for the design of the control law, but that will be considered as disturbances for subsequent simulations.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Etat de l'Art</b>	<b>21</b>
1.1	Modélisation et Commande . . . . .	21
1.2	Systèmes Mécaniques Sous-actionnés (SMS-A) . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Aérodynamique des Hélicoptères</b>	<b>33</b>
2.1	Généralités . . . . .	34
2.2	Les Forces et Les Couples Aérodynamiques . . . . .	36
2.3	Le Plateau Cyclique . . . . .	37
2.4	Le Battement Vertical des Pales . . . . .	40
2.5	Calcul des Forces et Couples Aérodynamiques. . . . .	44
2.5.1	Les Modes de Vol. . . . .	44
2.5.2	Forces et Couples. . . . .	45
<b>3</b>	<b>Modélisation</b>	<b>59</b>
3.1	Les Hypothèses . . . . .	60

3.2	Le Modèle Général de l'Hélicoptère. . . . .	63
3.2.1	Les Moments et les Produits d'Inertie. . . . .	63
3.2.2	Formulation du Modèle Général. . . . .	66
3.2.3	Les Equations de Newton-Euler. . . . .	86
3.3	Le Modèle Hélicoptère-Plateforme. . . . .	92
<b>4</b>	<b>Commande</b>	<b>101</b>
4.1	Commande du Système Hélicoptère-Plateforme. . . . .	101
4.1.1	Propriétés de Dissipativité du Modèle à 3-DDL . . . . .	103
4.1.2	Conception de la Commande . . . . .	105
4.1.3	Résultats en Simulation. . . . .	110
4.1.4	Robustesse Paramétrique. . . . .	119
4.2	Commande du Modèle à 7-DDL. . . . .	121
4.2.1	Régulation de l'Hélicoptère au Sol. . . . .	122
4.2.2	Résultats en Simulation. . . . .	125
<b>5</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>127</b>
5.1	Conclusions . . . . .	127
5.2	Perspectives . . . . .	128
<b>A</b>	<b>Les Paramètres de l'Hélicoptère</b>	<b>131</b>

	15
<b>B Le Calcul du Tenseur d’Inertie du Fuselage</b>	<b>133</b>
<b>C Développements</b>	<b>137</b>
<b>D Exemple Illustratif</b>	<b>141</b>
<b>E Concepts de Base sur la Passivité</b>	<b>143</b>
E.1 Introduction. . . . .	143
E.2 Définitions et Théorèmes . . . . .	145
E.3 Commande Passive . . . . .	150





# Introduction

L'intérêt global de ce travail concerne la modélisation non-linéaire et la commande non-linéaire d'un hélicoptère à modèle réduit VARIO Benzin-Trainer de l'HEUDIASYC (Université de Technologie de Compiègne) qui est montré dans la figure I.1 où il réalise un vol en palier.



FIG. I.1 – L'Hélicoptère VARIO Benzin-Trainer.

Parmi les objectifs de ce travail nous pouvons mentionner l'obtention d'un modèle général à 7-DDL (Degrés De Liberté) pour être utilisé dans le vol libre autonome de l'hélicoptère (cas du vol en palier par exemple). Nous développons un modèle d'ordre réduit à 3-DDL pour le cas particulier lorsque l'hélicoptère est monté sur une plateforme expérimentale où le vol vertical (décollage, montée, vol stationnaire, descente et atterrissage) peut être étudié. Bien que ce modèle à 3-DDL soit simplifié, il présente des défis intéressants vis-à-vis des non linéarités, des forces aérodynamiques et de la condition de système sous-actionné. En tant que système dynamique, un hélicoptère doit travailler suivant le cahier de charges de son utilisateur (le pilote) définissant la vitesse relative de l'air, l'altitude, le taux de montée ou de descente, l'angle latéral de translation, ainsi que plusieurs paramètres limitant l'évolution du système [33]. Nous

nous intéressons à la commande automatique d'hélicoptères sans pilote (être humain). Pourtant il existe un cahier de charges à respecter et l'évolution du système doit se développer suivant certaines spécifications données à l'avance tout en étant capable de réagir de manière automatique aux perturbations externes. L'assistance au pilotage où la simulation du vol, le modèle de l'hélicoptère et la commande non-linéaires y sont impliqués représente une application potentielle importante de ce travail.

Le premier pas pour atteindre le but d'une commande automatique d'un hélicoptère concerne l'obtention d'un modèle du système. L'obtention d'un modèle dynamique pour un système comme celui-ci implique la connaissance de plusieurs aspects liés à son comportement, tels que l'aérodynamique des rotors, des stabilisateurs et du corps de l'hélicoptère ainsi que des aspects mécaniques concernant la dynamique du corps rigide et les représentations de leur mouvements dans des repères différents. Il est difficile d'obtenir avec une grande précision les équations de mouvement d'un hélicoptère car il s'agit d'un système ayant un nombre de degrés de liberté important qui évolue dans un milieu très perturbé. Le système présente aussi des couplages entre les variables d'état et il est soumis à plusieurs phénomènes d'origine aérodynamique qui ne sont pas faciles de modéliser ; le modèle dynamique du système aura donc une certaine imprécision. Le développement d'une loi de commande pour un hélicoptère peut poser des problèmes difficiles à résoudre étant donné le nombre considérable de degrés de liberté. En plus, l'instabilité d'un hélicoptère à modèle réduit est plus significative que celle d'un hélicoptère réel, du fait de la différence de tailles. Au niveau théorique, les difficultés principales de conception de lois de commande stables pour les hélicoptères ont leur origine dans les non-linéarités et couplages (partie mécanique solide) et dans le fait que les entrées ne sont ni des forces ni des couples mais des déplacements de certains éléments qui entraînent la dynamique à travers des forces/couples aérodynamiques. Les deux systèmes (à 7-DDL et à 3-DDL) représentent des systèmes sous-actionnés où le vecteur d'entrées  $u \in \mathbb{R}^4$  pour le modèle général et  $u \in \mathbb{R}^2$  pour le modèle sur la plateforme. Les modèles non-linéaires proposés présentent des caractéristiques spécifiques qui font de leur étude un défi intéressant. En particulier, la forme des forces aérodynamiques a une représentation des signaux d'entrée et des matrices qui diffère de manière significative de ce qui est normalement considéré dans la littérature sur la commande de systèmes mécaniques. De plus les entrées de commande sont prises comme les vrais entrées (mécaniques) de l'hélicoptère (les déplacements ou "collectifs" des plateaux cycliques des rotors principal et de queue et les angles longitudinal et latéral de pas cyclique du rotor principal).

L'intérêt pour commander de façon automatique plusieurs types de systèmes de vol autonome (appelés drones) parmi lesquels nous trouvons les hélicoptères a augmenté pendant les dix dernières années à cause des applications potentielles importantes. Les

hélicoptères constituent une classe spécifique de drones du fait des caractéristiques dynamiques particulières qui ne permettent pas de les classer parmi les systèmes VTOL (*Vertical Take-Off and Landing*) [26]. Parmi les domaines où ces systèmes sont utilisés nous pouvons mentionner la surveillance, l'arrosage des champs, la reconnaissance et récupération d'objets dans des terrains peu accessibles, les applications militaires et en général les tâches qui représentent un danger pour le pilote. Nous remarquons que pour des nombreuses applications, la précision concernant la position de l'hélicoptère n'est pas très importante, par exemple l'arrosage ou la surveillance peuvent se développer à une hauteur  $h_0 \pm 10 \text{ m}$  sans que cela représente un problème pour l'obtention d'un bon résultat de l'opération. Il est important de remarquer que la dynamique de vol varie d'un hélicoptère à un autre en fonction du type de rotor principal qu'il possède, du sens de rotation des rotors, du nombre de pales, des conditions de vol, du poids de l'hélicoptère et de plusieurs autres caractéristiques définissant chaque hélicoptère et sa dynamique. Ceci dit, le modèle développé ici présente des propriétés et des caractéristiques qui semblent suffisamment génériques pour être adaptées sans obstacle majeur à d'autres types d'hélicoptères (par exemple les concepts de base d'aérodynamique qui conduisent à une forme très particulière des forces généralisées, restent les mêmes quel que soit le type de rotor).

Nous faisons dans le chapitre 1 une étude de l'état de l'art du sujet en considérant les aspects de modélisation, de commande et du fait qu'il s'agit d'un système sous-actionné. Nous remarquons que les applications militaires de ce type de système donnent une caractéristique de confidentialité à l'information concernant la modélisation et la commande des hélicoptères. L'acquisition et l'étude d'information liées à ce sujet ont donc représenté un problème d'une certaine importance qui a pris plus de temps que celui considéré au début du projet.

Une analyse de l'aérodynamique d'un hélicoptère est fortement complexe et implique des aspects (comme les effets des tourbillons, les perturbations provenant des rafales, les aspects de performance, etc.) qui, pour les objectifs de la modélisation et de la commande, ne sont pas considérés dans ce travail. Nous présentons dans le chapitre 2 les aspects aérodynamiques généraux des hélicoptères en remarquant les similitudes et les différences entre les modes de vol. Nous calculons pour un cas général de vol en 3 dimensions les expressions des forces et des couples aérodynamiques des rotors principal et de queue de l'hélicoptère.

Dans le chapitre 3 nous montrons une modélisation générale pour le système à 7-DDL basée sur l'énergie du système ainsi qu'un modèle du type Newton-Euler. Des hypothèses sont établies afin d'obtenir quelques simplifications du modèle pour les cas de vol à basse vitesse et les expressions des forces et des couples aérodynamiques sont

simplifiées. Un modèle à 3-DDL est ensuite obtenu par la formalisation de Lagrange à partir du système formé par l'hélicoptère monté sur une plateforme permettant à l'hélicoptère d'évoluer en vol vertical (décollage, montée, descente et atterrissage). Des représentations d'état sont données pour chaque modèle afin de faciliter leur construction pour des simulations numériques. Dans le chapitre 4 nous présentons premièrement les lois de commande utilisées dans le cas du système à 3-DDL où deux stratégies de commande différentes sont proposées. Une étude de robustesse paramétrique est aussi présentée où 3 paramètres du modèle y sont considérés. Des résultats en simulation pour le système à 3-DDL sont donnés à afin d'illustrer les développements théoriques. Les idées de base pour la conception d'une stratégie de commande du système à 7-DDL sont présentées. La première phase du problème de commande du système à 7-DDL concernant le système sous contrainte ( $z \equiv L$ ) est résolue. Cette phase concerne l'hélicoptère au sol pour lequel un problème de régulation avant le décollage s'impose.

Des annexes sont données à la fin de ce rapport comme complément d'information sur certaines caractéristiques de l'hélicoptère VARIO, comme les paramètres physiques de l'hélicoptère et le calcul du tenseur d'inertie du fuselage ainsi que sur quelques concepts de base sur la théorie des systèmes passifs.

# Chapitre 1

## Etat de l'Art

Nous présentons cette étude de l'état de l'art en deux parties, initialement celle qui concerne la modélisation et la commande des hélicoptères et ensuite celle des systèmes mécaniques sous-actionnés (SMS-A). Le vol des hélicoptères peut se produire avec des modes différents de vol, dans une, deux ou trois directions et avec des conditions très différentes dans chaque mode. Pourtant, dans la littérature concernant l'aérodynamique des hélicoptères [52] [36], les cas analysés les plus importantes sont ceux du vol vertical, du vol stationnaire et du vol en palier.

On remarque que dans la plupart des travaux analysés, les auteurs considèrent leurs études dans des conditions de vol stationnaire où près de ces conditions particulières. D'autre part, la dynamique des pales est souvent négligée.

### 1.1 Modélisation et Commande

Dans [33] l'hélicoptère est défini comme étant constitué de plusieurs sous-systèmes (fuselage, rotors, moteur, etc.) interagissant entre eux. Les équations gouvernant le comportement de ces interactions sont présentés sous la forme d'équations différentielles non linéaires :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1.1)$$

avec les conditions initiales  $x(0) = x_0$ . Dans (1.1)  $x(t)$  est le vecteur d'état,  $u(t)$  est le vecteur d'entrées de commande,  $t$  est le temps et  $f(\cdot)$  est une fonction non linéaire du mouvement de l'hélicoptère, des entrées et des perturbations externes. Afin de trouver une solution au problème de stabilité de l'hélicoptère une linéarisation au tour d'un point de fonctionnement est proposée en [33]. Ce point de fonctionnement est défini comme une condition particulière d'équilibre (de l'anglais *Trim condition*) du système donné par l'expression  $f(x_e, u_e) = 0$  où l'indice  $e$  concerne la condition d'équilibre.

Dans [33] et [36] les dérivées du mouvement sont utilisées afin de formuler la force totale et le couple total sous l'hypothèse d'une représentation du rotor comme étant un système complètement linéaire. Cette approche a été établie dès 1911. Elle est basée sur l'idée que les forces et couples aérodynamiques peuvent être exprimés comme une fonction analytique multidimensionnelle du mouvement du système par rapport à une condition d'équilibre. Pour des petits mouvements, les termes linéaires seront les dominants et une approximation (linéarisation) pourra être faite. Par exemple si  $L$  représente le couple de roulis, alors :

$$L = L_e + \frac{\partial L}{\partial u}u + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}u^2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial v}v + \dots + \frac{\partial L}{\partial w}w + \dots + \frac{\partial L}{\partial p}p + \dots + \frac{\partial L}{\partial q}q + \dots \quad (1.2)$$

où  $u, v, w$  sont les vitesses de translation,  $p$  et  $q$  sont les dérivées instantanées de deux angles d'Euler. Les hélicoptères sont des systèmes dynamiques non linéaires à plusieurs variables ; cependant, dans la plupart des travaux concernant les études sur la modélisation et la commande de ces systèmes, des techniques de linéarisation pour concevoir des lois de commande ont été utilisées par exemple par [9], [19], [40] et [22] qui arrivent à un modèle linéaire invariant dans le temps du type montré dans l'équation (1.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le modèle de base utilisé par [9] est un modèle non linéaire de l'hélicoptère *Westland Lynx* qui n'est pas montré dans l'article. Le vecteur  $x = [\nu \ w \ q \ \theta \ v \ p \ r \ \phi \ a_{1s} \ b_{1s}]^T$  représente le vecteur d'état et le vecteur d'entrées est  $u = [\theta_m \ a_1 \ b_1 \ \theta_t]^T$ , avec  $\nu, v$  et  $w$  les vitesses en palier, latérale et verticale, respectivement ;  $p, q$  et  $r$  les vitesses angulaires de roulis, de tangage et de lacet, respectivement ;  $\theta$  et  $\phi$  sont les angles de tangage et de roulis, respectivement ;  $a_{1s}$  et  $b_{1s}$  sont respectivement les angles latéral

et longitudinal de battement vertical,  $\theta_m$  est le pas collectif du rotor principal;  $a_1$  et  $b_1$  sont les pas cycliques latéral et longitudinal et  $\theta_t$  est le pas collectif du rotor de queue. [19] utilise un modèle à deux degrés de liberté correspondant aux rotations verticale et horizontale produites par des moteurs électriques. Le vecteur d'état est  $x = [\Delta\psi \ \Delta\dot{\psi} \ \Delta\phi \ \Delta\dot{\phi} \ \Delta\omega_M \ \Delta\omega_T]^T$ , où  $\psi$  est l'angle de lacet,  $\phi$  est celui de tangage,  $\omega_M$  est la vitesse de rotation du rotor principal et  $\omega_T$  est celle du rotor de queue. Le vecteur d'entrées dans ce cas a deux composantes, celles des tensions électriques des moteurs. [19] présente deux méthodes pour stabiliser le système :

- Stabilisation  $H^\infty$  et
- Stabilisation quadratique.

Une comparaison des deux méthodes montre que la variation de l'angle de pas dans le temps est complètement bruitée lorsque la méthode de stabilisation  $H^\infty$  est utilisée. La méthode quadratique est donc préférable dans ce cas. Après avoir fait une linéarisation numérique pour les vitesses de vol en palier de 80 et 140 noeuds, [40] utilise plusieurs modèles linéaires de l'hélicoptère UH-60 (*The Black Hawk Helicopter*). La dynamique du fuselage est décrite par un modèle de vecteur d'état à neuf composantes  $x = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \theta \ \phi \ \psi]^T$  où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les états de vitesse linéaire;  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont les états de rotation et  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  sont les états angulaires. La dynamique de l'ensemble fuselage-rotor est décrite par deux modèles de vecteurs d'état à 24 et à 26 composantes. Des lois de commande basés sur l'analyse  $H^\infty$  sont proposés et comparés tout en respectant une spécification militaire pour les hélicoptères <sup>1</sup>.

Dans [22] nous trouvons un système à six degrés de liberté correspondant aux trois forces dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et aux trois couples dans chacune des directions précédentes. Le système est linéarisé en utilisant une expansion en séries de Taylor. Il s'agit d'un système qui évolue près des conditions du vol stationnaire. Le vecteur d'état est donné par  $x = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ p \ \theta \ q \ r]^T$ , où les trois premières composantes sont les vitesses dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $\phi$  est l'angle de roulis,  $p$  est le taux de variation de l'angle de roulis, c'est à dire  $p = \frac{d\phi}{dt}$ ,  $\theta$  est l'angle de tangage et son taux de variation est  $q$ , finalement  $r$  est le taux de variation de l'angle de lacet. Le vecteur d'entrées est  $u = [\theta_M \ \theta_T \ A_1 \ B_1]^T$  où  $\theta_M$  et  $\theta_T$  sont les angles de pas collectif des rotors principal et de queue et  $A_1$  et  $B_1$  sont les angles de pas cyclique latéral et longitudinal, respectivement. [22] néglige le mouvement de battement vertical des pales du rotor principal qui est considéré donc rigide. Les auteurs utilisent des expressions des forces et des couples proposées par [36] pour décrire le mouvement de l'hélicoptère. Un régulateur numérique est synthétisé en utilisant la théorie LQG (*Linear Quadratic*

---

<sup>1</sup>ADS-33C, Handling Qualities Requirements for Military Rotorcraft.



*Gaussian*). D'autres auteurs ont travaillé avec des modèles non linéaires [43], [21] et [20].

Dans [43] un modèle non linéaire valable pour des conditions de vol stationnaire et pour des faibles vitesses est utilisé mais il n'est pas montré dans l'article. En ce qui concerne le calcul des équations du mouvement de l'hélicoptère, le même principe que celui utilisé par [22] est pris en compte. Le vecteur d'entrées est aussi le même que celui de [22]. Une comparaison de trois méthodologies de commande pour un hélicoptère est présentée en considérant :

- Commande robuste multi-variable ( $\mu$ -synthèse),
- Commande par logique floue et
- Linéarisation par feedback.

L'intérêt de cette comparaison est d'utiliser le type de commande qui soit le mieux adapté au mode de vol de l'hélicoptère car les conditions de vol varient d'un mode à un autre. Les commandes robuste et floue sont limitées pour des conditions de vol stationnaire tandis que la linéarisation par feedback peut s'appliquer à une variété de modes de vol plus importante. Un système de gestion du vol de véhicules (FVMS, *Flight Vehicle Management System*) est légèrement présenté. Le FVMS est chargé de sélectionner le type de commande à utiliser en dépendant des conditions de vol et du comportement souhaité. Des techniques de commande hybride sont donc envisagées dans cet article. Dans [21] et [20] le modèle donné en (1.4) a été utilisé et obtenu par une formulation de Newton-Euler. Le vecteur d'état est donné par  $x = [P \ V \ R \ \omega]^T$  où  $P$  et  $V$  sont la position et la vitesse du centre de masse de l'hélicoptère par rapport à un système de référence inertiel,  $R$  est la matrice de rotation qui permet le passage entre les repères inertiel et celui qui est fixe à l'hélicoptère et  $\omega$  est la vitesse angulaire de l'hélicoptère. Le vecteur d'entrées est le même que celui donné par [22] et [43].

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{V} \\ \dot{R} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \frac{1}{m} R f^b + b_I g \\ R \hat{\omega} \\ I^{-1}(\tau^b - \omega^b \times I \omega^b) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où  $f^b$  et  $\tau^b$  sont les forces et couples appliquées à l'hélicoptère,  $b_I = [0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\hat{\omega} = R^T \dot{R}$  et  $I$  est la matrice d'inertie. En ce qui concerne le calcul des forces et des couples [21] utilise les mêmes expressions que [36] et [22]. Une modification du modèle a été faite à cause de la présence d'une dynamique interne instable trouvée lors d'un processus de

linéarisation entrée-sortie. Le modèle est modifié en négligeant les couplages entre les forces et les couples et il est ensuite linéarisé en prenant comme sorties les positions et l'angle de tangage. Une commande dite approximative est donc trouvée pour faire la poursuite d'une trajectoire bornée du modèle complet. Nous remarquons que les auteurs montrent que pour ce type de systèmes, une linéarisation entrée-sortie qui considère plusieurs choix de sorties n'est pas possible car elle aboutit à une dynamique interne instable.

[20] présente le FVMS d'une manière plus détaillée que celle trouvée dans [43] en proposant une formulation hybride de la commande qui considère les trois cas donnés par [43] en intégrant la dynamique du système et les lois de commande continues avec le module discret du FVMS chargé de la planification et de la prise de décisions. Parmi les commandes proposées par [43], nous trouvons celle basée sur la logique floue. [35] a étudié une commande de ce type qui utilise aussi l'approche des algorithmes génétiques pour commander le vol des hélicoptères du type UH-1. Le modèle considéré a dix degrés de liberté (six pour le corps de l'hélicoptère, trois pour le battement vertical du rotor principal et un pour la rotation de ce rotor); cependant, le modèle n'est pas donné dans l'article.

D'autres techniques ont été utilisées pour résoudre le problème du vol autonome des hélicoptères comme dans [7] où les auteurs cherchent à mettre un hélicoptère à modèle réduit en vol stationnaire stable en s'appuyant sur un système inertiel de navigation INS (de l'anglais *Inertial Navigation System*) pour construire un réseau neuronal qui utilise les données provenant du INS pour générer des commandes pour le vol stationnaire. [3] utilise des algorithmes pour évaluer et concevoir des commandes (avec une structure du type réseau neuronal) sous des distributions de modèles Markoviens afin d'appliquer des méthodes de recherche de politiques d'apprentissage renforcé au cas du vol autonome d'hélicoptères.

Nous trouvons peu de travaux qui utilisent des techniques de commande non linéaire comme dans [17] et [45] qui utilisent le même modèle d'hélicoptère donné par les équations (1.5), (1.6) et (1.7). Ce modèle a été proposé pour représenter un hélicoptère X-Cell 50 à modèle réduit.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y &= Cx \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3^2[a_1 + a_2x_4 - \sqrt{a_3 + a_4x_4}] + a_5x_2 + a_6x_2^2 + a_7 \\ a_8x_3 + a_{10}x_3^2 \sin x_4 + a_9x_3^2 + a_{11} \\ x_5 \\ a_{13}x_4 + a_{14}x_3^2 \sin x_4 + a_{15}x_5 + a_{12} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Dans ce modèle, le vecteur d'état est  $x = [z \ \dot{z} \ \omega \ \theta_c \ \dot{\theta}_c]^T$  et celui d'entrées est  $u = [u_1 \ u_2]^T$  où  $z$  est la hauteur par rapport au sol,  $\omega$  est la vitesse de rotation du rotor principal,  $\theta_c$  est l'angle de pas collectif,  $u_1$  est associée au débit du combustible du moteur,  $u_2$  est associée au pas collectif du rotor principal et les  $a_i$ ,  $i = 1 \dots 15$  sont des paramètres du système. [17] propose une application pour le cas de vol vertical afin de stabiliser le système en altitude. La méthode directe de Lyapunov est utilisée pour vérifier la stabilité du système sous les conditions de vol stationnaire. La technique de backstepping est utilisée pour la synthèse de la loi de commande robuste en attendant une stabilité semiglobale du système (région où l'angle de pas n'est pas nul). [45] comme [17] propose une application pour le cas de vol vertical afin de stabiliser le système en altitude. Cette application est basée sur une stratégie de commande du type modes glissants lorsque le système est proche des conditions de vol stationnaire et l'effet du sol est négligé. Afin de réduire le bruit des variables d'entrée, [45] propose un schéma de conception basé sur une hypothèse qui considère le système de départ comme étant un système linéarisable entièrement par feedback statique.

Le modèle donné par l'équation (1.8) est obtenu par une modélisation de Newton-Euler proposé par [27].

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ m\dot{V} \\ \dot{\eta} \\ I\dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ RT_M e_T + RT_T e_2 + mge_z \\ W_\eta^{-1}\Omega \\ \Omega \times I\Omega + T_M(e_T \times l_M) + T_{M_y}(e_y \times l_T) - Q_M e_z - Q_T e_y - \beta K(e_T \times e_z) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

où  $P$  et  $V$  sont les vecteur de position et de vitesse de l'hélicoptère,  $T_T$  est la force de poussée du rotor de queue,  $I$  est le tenseur d'inertie du fuselage,  $l_M$  et  $l_T$  sont les

vecteurs de position des centres des rotors principal et de queue,  $\eta$  est le vecteur d'angles d'Euler,  $\Omega$  est le vecteur de vitesse angulaire du rotor principal,  $R$  est une matrice de rotation qui relie le système de référence inertiel avec celui du corps de l'hélicoptère,  $Q_M$  et  $Q_T$  sont les couples de traînée sur les rotors principal et de queue,  $\beta$  est l'angle de battement vertical,  $T_M$  est la force de poussée et  $K$  est la raideur des pales du rotor principal. Ce modèle est très proche de celui proposé par [21] dans l'équation (1.4). Le modèle de [27] considère en plus les aspects suivants :

- L'effet de la force de poussée du rotor de queue  $T_T$  et
- La présence du couple produit par la force de restitution des pales du rotor principal lors de leur déformation  $\beta K(e_T \times e_z)$ .

Dans [28], une formulation de Lagrange est utilisée et le modèle (1.9) est obtenu. Dans ce modèle l'énergie cinétique de rotation du rotor de queue n'est pas prise en compte <sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + mge_z &= F_r = uG(\eta) \\ I\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} &= \tau \end{aligned} \tag{1.9}$$

où  $\ddot{r}$  est le vecteur d'accélération de l'hélicoptère,  $F_r$  est la première composante du vecteur de forces généralisées,  $u$  et  $\tau$  sont des entrées de commande,  $\eta$  est le vecteur d'angles d'Euler,  $G(\eta)$  est une fonction des angles d'Euler,  $C$  est la matrice de Coriolis et  $\tau$  est la deuxième composante du vecteur de forces généralisées. [28] néglige la plupart des effets aérodynamiques trouvés dans les hélicoptères réels. Un algorithme basé sur la technique du backstepping de commande pour la poursuite de trajectoires est proposé. Nous observons que l'intérêt pour la modélisation et la commande d'hélicoptères est assez répandu depuis plus de dix ans. Des techniques plus complexes comme l'analyse aéroélastique <sup>3</sup> ont été utilisées dans ce sujet par [8] et par [48] dans le cas de la stabilisation des rotors.

Dans [8], les auteurs développent un modèle de l'hélicoptère AH-64A qui n'est pas donné dans l'article du fait qu'il s'agit de l'information confidentielle d'un hélicoptère de la compagnie américaine *McDonnell Douglas Helicopter*. Le modèle est généré par un logiciel sophistiqué appelé *CAMRAD* qui fait l'analyse d'hélicoptères. Dans [48], le

---

<sup>2</sup>L'énergie cinétique de rotation du rotor de queue peut être plus de 20 fois plus importante que celle du fuselage.

<sup>3</sup>Une analyse aéroélastique d'un hélicoptère implique généralement les problèmes suivantes : 1. Aérodynamique complexe du rotor, 2. Interaction aérodynamique entre le rotor et le fuselage, 3. Dynamique structurelle du rotor et 4. Phénomènes dynamiques de couplage entre le rotor et le fuselage.

but est d'appliquer une analyse aéroélastique à un rotor rigide (sans articulation de battement vertical) en vol stationnaire afin de prédire la stabilité du rotor du point de vue de la torsion produite par le battement et par le décalage des pales. L'analyse aéroélastique de stabilité d'hélicoptères *HELSEA* (Helicopter Stability Analysis) est utilisée pour le cas d'un rotor isolé. Le modèle du rotor considère qu'il existe une flexibilité des pales dans la direction de la variation de l'angle de pas. Cette flexibilité est modélisée par des angles de conicité, de battement et de flexion.

La considération de la flexibilité des pales du rotor principal a été aussi prise en compte par [39] qui modélise le battement vertical des pales par un ressort. [39] propose un modèle linéaire pour calculer la correction du retard de l'angle de phase par la présence d'un offset de l'articulation de l'angle de battement vertical pour l'hélicoptère UH-60. Le retard est modélisé en simulation par un filtre de premier ordre, qui sert à calculer les valeurs instantanées des coefficients aérodynamiques (dans un repère tournant) de chaque élément différentiel des pales avant d'être utilisés pour le calcul des forces et des couples aérodynamiques. La correction de l'angle de phase est utilisée dans un deuxième modèle (non linéaire) afin de compenser des effets aérodynamiques instables (distorsion du sillage, vortex, compressibilité). Une analyse aéroélastique où des corrections de l'angle de phase pourraient nous donner un modèle plus proche de la réalité; cependant, la commande pourrait être plus compliquée à synthétiser. Des telles analyses ne sont donc pas intéressantes pour nos objectifs de modélisation et de commande.

L'étude de l'état de l'art que nous présentons dans ce rapport a été limitée car la caractéristique de confidentialité de l'information du sujet ne nous a pas permis d'en faire davantage.

## 1.2 Systèmes Mécaniques Sous-actionnés (SMS-A)

Le nombre de degrés de liberté d'un SMS-A est inférieur au nombre d'entrées de commande ( $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $m < n$ ). Le problème de commande devient donc plus difficile que celui des systèmes complètement actionnés pour lesquels des techniques déjà connues peuvent être appliquées (backstepping, forwarding, linéarisation par feedback, etc.). Ces techniques ne sont pas applicables à la généralité des SMS-A. La conception du système (l'Acrobot [15] ou le Pendubot [51]), les robots mobiles ou les robots sous-marins [24], le modèle mathématique utilisé ou l'application du système sont à l'origine de certains systèmes sous-actionnés. D'autre part, lorsque nous devons

respecter la consigne de diminuer le poids, la consommation d'énergie ou le coût du système, un système sous-actionné en résulte.

Lorsque le système sous-actionné est un système mécanique, il peut se représenter par un modèle Lagrangien de la forme [51] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau \quad (1.10)$$

où  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'inertie,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est celle de Coriolis,  $G \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur de gravité,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est de rang plein,  $q \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur de coordonnées généralisées et  $\tau \in \mathbb{R}^m$  est la vecteur de forces généralisées d'entrée ( $m < n$ ). En général une partition du vecteur  $q = [q_1^T \ q_2^T]^T$  peut être faite avec  $q_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$  les ddl non-actionnés et  $q_2 \in \mathbb{R}^m$  les ddl actionnés. L'équation (1.10) s'écrira donc

$$\begin{aligned} M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + h_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \phi_1(q_1, q_2) &= 0 \\ M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + h_2(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \phi_2(q_1, q_2) &= b(q_1, q_2)\tau \end{aligned} \quad (1.11)$$

où  $h_i$  inclut les termes de Coriolis et centrifuges,  $\phi_i$  contient les termes associés à l'énergie potentielle et la matrice  $b \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est inversible. A partir de l'équation (1.11) une linéarisation partielle par feedback (*Collocated Partial Feedback Linearization*) peut être réalisée comme dans les cas de [30], [38], [44], [51] et [55]. Cette linéarisation peut s'interpréter comme une linéarisation entrée-sortie par rapport à la sortie  $y = q_2$ . Après la linéarisation, (1.11) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} M_{11}\ddot{q}_1 + h_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + \phi_1(q_1, q_2) &= -M_{12}u \\ \ddot{q}_2 &= u \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $u$  est une nouvelle commande à déterminer. Dans (1.11), l'équation dynamique des ddl non-actionnés représente  $n - m$  contraintes non-holonomes en  $q$ ,  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  (c'est à dire de 2ème ordre). Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité partielle et complète de ces contraintes sont données dans [30] pour un manipulateur. Dans [55], une extension des résultats de [30] aux cas de véhicules est donnée en particulier pour un bateau sous-actionné qui prend en compte un terme d'amortissement. [38] étend les résultats précédents suivant l'approche de la géométrie différentielle, ces résultats sont appliqués aussi au bateau de [55].

Si le système sous-actionné remplit les conditions d'intégrabilité, il représente soit un système avec des contraintes non-holonomes d'ordre 1 (intégrabilité partielle), soit un système avec des contraintes holonomes (intégrabilité complète). [55] établit un résultat qui vérifie la non-existence d'une loi de commande par retour d'état de classe  $C^1$  qui puisse rendre un point d'équilibre du système sous-actionné asymptotiquement stable. Dans [30] la stabilité asymptotique est associée à une variété d'équilibre où les  $\dot{q}_i = 0$ ,  $i = 1 \dots n$ . Dans le cadre de l'hélicoptère, nous ne nous intéressons pas à une linéarisation du modèle, mais plutôt à la conception des lois de commande non-linéaires. Les propriétés physiques du système ainsi que les effets des variations de l'état sur son comportement réel sont à prendre en compte dans cette conception. Nous ne pouvons donc pas utiliser les résultats de [30] ou de [55] où une variété ou un point d'équilibre sont impliqués car une telle condition représenterait une configuration du genre  $\dot{\gamma} = 0$ . Il est clair que cette condition ne doit jamais se présenter lorsque l'hélicoptère est en mode de vol.

Pour certains systèmes sous-actionnés une stratégie de commande hybride a été considérée. Dans [51] l'utilisation d'une commande non-linéaire est proposée pour amener le système (le Pendubot) dans un voisinage d'un point d'équilibre, ensuite une commutation vers une loi de commande linéaire est faite afin de stabiliser le système autour de ce point d'équilibre. Dans [20] et [43], trois techniques de commande sont proposées en fonction du mode de vol de l'hélicoptère. Une telle stratégie de commande (hybride) peut en principe être considérée dans notre problème. L'utilisation d'une loi de commande en boucle ouverte par [10] nous permet d'apercevoir que même si le système est complètement commandable [4], [49] le problème de commande pour les SMS-A est encore difficile à résoudre. Des lois de commande en boucle ouverte ou bien discontinues ou variant dans le temps ont été envisagées dans [10] lorsque la stabilisation du système autour d'un point d'équilibre n'est pas possible.

Le terme de dérive  $f(x)$  dans une équation d'état telle que (1.5), rend la conception d'une loi de commande plus compliquée. En fait, dans le domaine des systèmes non-linéaires avec dérive, l'accessibilité n'implique pas la commandabilité [10]. La propriété de STLC *Small-time Local Controllability* introduite par [53] est donc souvent utilisée afin de vérifier la commandabilité du système comme dans [38]. D'autres auteurs ont travaillé avec une autre classe de SMS-A. [41] s'intéresse au problème de la reorientation 3D d'un vaisseau spatial multi-corps sous-actionné. [24] travaille aussi dans le cas des véhicules sous-marins. Ces problèmes sont très particuliers comme celui de l'hélicoptère peut l'être. Les résultats trouvés dans ces travaux ne sont donc pas applicables à notre problème.

Dans [29] une stabilisation asymptotique vers une variété d'équilibre (où les couples

$\tau = 0$ ) est proposée car pour construire une loi de commande par feedback stabilisant le système, une des conditions nécessaires pour l'existence d'une loi de commande  $C^\infty$  proposée par [5] n'est pas remplie. Une stabilisation vers une telle variété n'est pas applicable au cas de l'hélicoptère car nous ne pouvons pas parler de point ou des variétés d'équilibre du système ( $\dot{\gamma} = 0$  ou  $\tau = 0$ ).





## Chapitre 2

# Aérodynamique des Hélicoptères

Les systèmes conçus pour décoller et/ou pour atterrir en une très courte distance ou de façon verticale sont connus sous plusieurs acronymes <sup>1</sup>. Un hélicoptère est un système capable de décoller et d'atterrir verticalement. Cependant, les hélicoptères ne sont pas généralement comptés parmi les systèmes VTOL car la sustentation et la force de poussée sont produites par le rotor principal au lieu de l'être par une aile fixe et par un éjecteur séparé [26].

Nous présentons dans ce chapitre une description générale d'un hélicoptère, des forces et des couples d'origine aérodynamique et des paramètres définissant la dynamique du système.

Contrairement à la généralité de travaux concernant la commande de systèmes mécaniques qui utilisent les forces et les couples externes appliqués au système comme les entrées de commande, nous utiliserons les entrées mécaniques réelles de l'hélicoptère que nous décrivons dans la section 2.3.

Contrairement aux travaux qui sont focalisés sur des cas particuliers de vol (stationnaire, vertical ou en palier) [22], [36], [45], les expressions des forces et des couples aérodynamiques ainsi que celle concernant la vitesse induite sont calculées pour des conditions de vol général 3D de l'hélicoptère.

---

<sup>1</sup>V/STOL (Vertical or Short Take-off and Landing), STOL (Short Take-off and Landing), VTOL (Vertical Take-off and Landing), STOVL (Short Take-off and Vertical Landing) and ASTOVL (Advanced Short Take-off and Vertical Landing).

## 2.1 Généralités

Pour analyser les aspects aérodynamiques d'un hélicoptère, considérons d'abord la figure 2.1 où les parties les plus significatives de l'hélicoptère pour notre étude sont signalées.

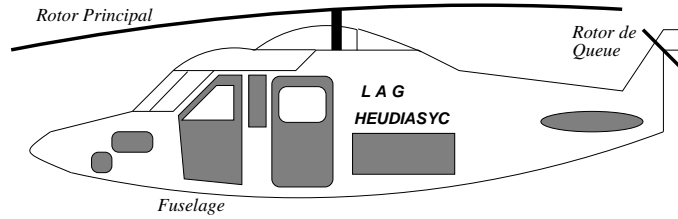


FIG. 2.1 – Les Rotors et le Fuselage d'un Hélicoptère.

Le rotor principal génère la force de sustentation permettant à l'hélicoptère de décoller et de se maintenir à une certaine hauteur ; c'est à dire, de voler. Etant donné que l'hélicoptère représente un système pour lequel le moment cinétique autour de l'axe de rotation du rotor principal se conserve, le rotor de queue sert à produire le couple qui annule celui de renversement généré lors de la rotation des pales du rotor principal et qui ferait faire au fuselage des rotations contraires à celles du rotor principal si le rotor de queue n'existerait pas.

Le fuselage est la partie de l'hélicoptère qui représente la masse la plus significative du système et l'énergie cinétique de rotation la plus faible (voir annexe D). Le comportement de l'hélicoptère est naturellement dominé par les rotors principal et de queue. Dans la figure 2.2 nous montrons les différents repères qui seront utilisés par la suite. Il faut remarquer que pour chaque rotor, le sens de rotation des pales indiqué dans la figure 2.2 est celui de l'hélicoptère VARIO et qu'il existe des hélicoptères dont les sens de rotation des pales sont contraires à ceux-ci [36] [33]. Dans la même figure nous observons les angles décrits par les rotations et qui sont connus comme les angles d'azimut,  $\gamma$  pour le rotor principal et  $r_\gamma\gamma$  pour le rotor de queue, avec  $r_\gamma$  le rapport de vitesses de rotation des rotors <sup>2</sup> donné par :

---

<sup>2</sup>Généralement  $|r_\gamma| > 1$ . Une valeur fréquemment trouvée est  $|r_\gamma| = 2$  [12]. La valeur de  $r_\gamma$  pour l'hélicoptère VARIO est donnée dans l'annexe A.

$$r_\gamma = -\frac{||\dot{\gamma}_T||}{||\dot{\gamma}_M||} \quad (2.1)$$

Dans (2.1)  $\dot{\gamma}_M$  et  $\dot{\gamma}_T$  sont les vitesses angulaires de rotation de rotors de queue et principal, respectivement. Le signe dans l'équation est choisi afin de respecter le sens de rotation des rotors.

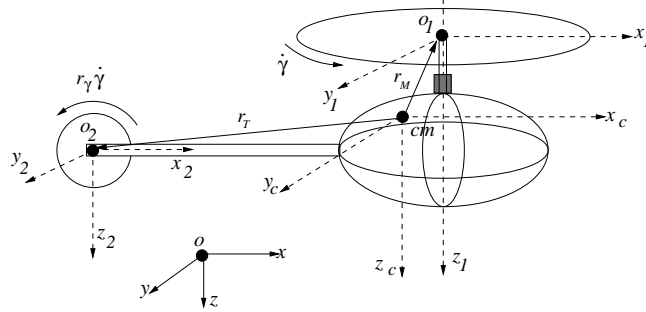


FIG. 2.2 – Les Systèmes de Référence.

Dans le cas général, le centre de masse (c.m.) de l'hélicoptère ne se trouve pas sur un axe de symétrie. Plusieurs systèmes de référence sont donc définis de la façon suivante :

- Le repère  $(o, x, y, z)$  fixe par rapport au sol est inertiel.
- Le repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  est fixé au c.m. de l'hélicoptère qui est considéré comme un corps rigide.
- Le repère  $(o_1, x_1, y_1, z_1)$  est placé au centre du rotor principal et fixe par rapport au corps de l'hélicoptère.
- Le repère  $(o_2, x_2, y_2, z_2)$  est placé au centre du rotor de queue et fixe par rapport au corps de l'hélicoptère.

Nous observons que l'axe  $z_1$  est l'axe de rotation du rotor principal et que l'axe  $y_2$  est celui du rotor de queue. Dans la figure 2.2  $r_M = [x_M \ y_M \ z_M]^T$  et  $r_T = [x_T \ y_T \ z_T]^T$  sont les vecteurs de position des rotors principal et de queue, respectivement par rapport au centre de masse de l'hélicoptère. Dans la littérature traitant les aspects aérodynamiques des hélicoptères [52], les modes de vol analysés (sans considérer le vol stationnaire) sont restreints aux modes suivant une seule direction de vol. De manière générale et d'après le nombre de directions nécessaires lors du vol de l'hélicoptère, nous pouvons classer le vol en définissant les cas suivants :

**Le Vol Stationnaire (hover).** Il est réalisé lorsque l'hélicoptère reste à une certaine hauteur constante par rapport au sol en ayant une vitesse de translation pratiquement nulle. Dans ce mode de vol, l'hélicoptère a la liberté de faire des rotations autour de l'axe  $z_c$ .

**Les Translations Verticales.** Elles sont définies quand l'hélicoptère se déplace dans deux directions simultanément, par exemple dans les plans  $xz$  ou  $yz$  ou bien lorsqu'il fait un vol vertical suivant l'axe  $z$  (voir figure 2.2).

**Les Translations Horizontales.** Elles sont définies de façon similaire aux translations verticales mais cette fois-ci dans le plan  $xy$  ou dans les directions  $x$  ou  $y$ . Le vol dans la direction  $x$  de la figure 2.2 est connu comme *vol en palier* (level flight).

**La Translation Spatiale.** Elle est développée dans l'espace  $xyz$  suivant trois directions de déplacement.

## 2.2 Les Forces et Les Couples Aérodynamiques

Les forces et les couples aérodynamiques intervenant lors du vol d'un hélicoptère sont montrés dans la figure 2.3 [33] [36].

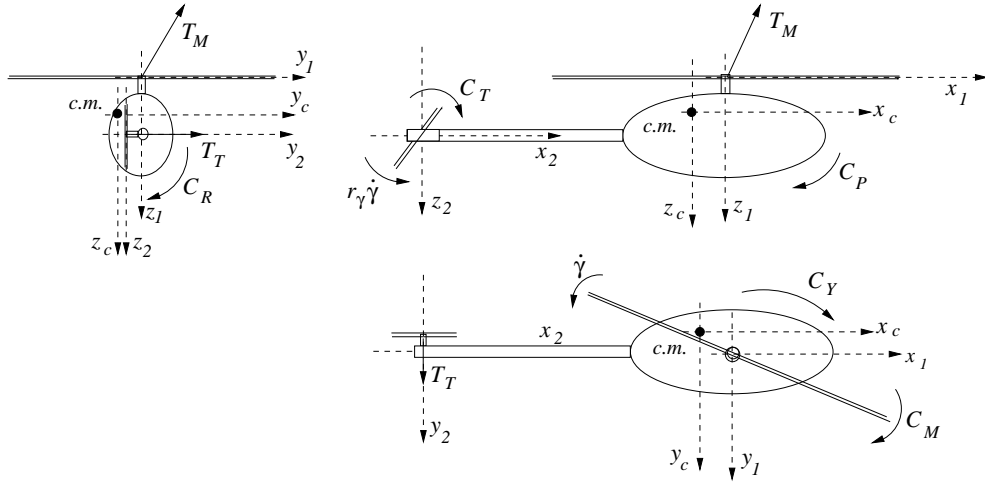


FIG. 2.3 – Les Forces et les Couples Aérodynamiques.

La force de poussée principale  $T_M$  est celle qui garantit la sustentation de l'hélicoptère

et qui génère à partir de son inclinaison une force de traction permettant la présence de translations horizontales. Cette inclinaison produit aussi les couples aérodynamiques de tangage et/ou de lacet comme le résultat d'un bras de levier de la ligne d'action de  $T_M$  au centre de masse de l'hélicoptère. Les couples de tangage  $C_P$ , de roulis  $C_R$  et de lacet  $C_Y$  sont avec  $C_M$  et  $C_T$  les couples les plus importants considérés dans les analyses aérodynamiques des hélicoptères. Les couples de traînée  $C_M$  et  $C_T$  sont générés par les forces de traînée qui agissent sur les pales du rotor principal et du rotor de queue respectivement. Ces forces de traînée représentent la résistance de l'air que les pales doivent vaincre lors de leur rotation.

Nous pouvons faire varier le couple de lacet  $C_Y$  en fonction de l'orientation souhaitée de l'hélicoptère ; ce couple est produit par la force de poussée du rotor de queue  $T_T$  qui a sa ligne d'action éloignée du centre de masse de l'hélicoptère.

## 2.3 Le Plateau Cyclique

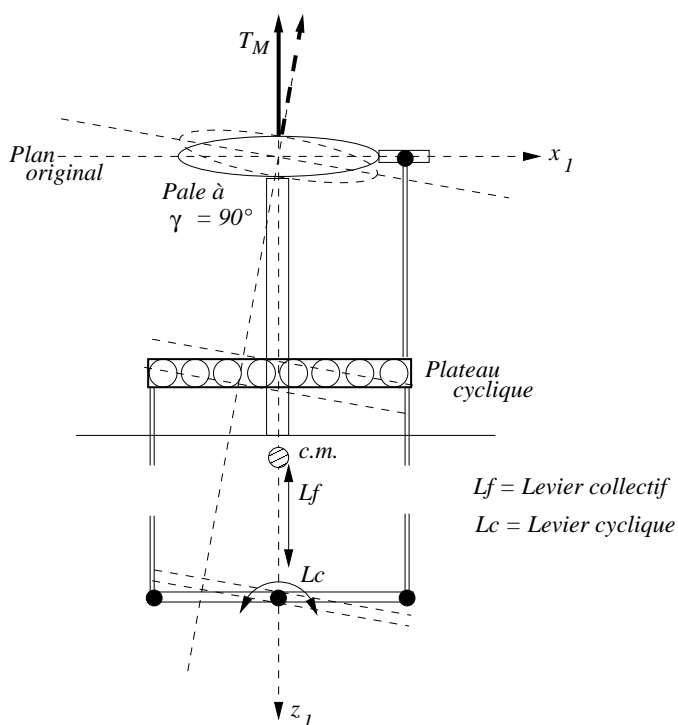


FIG. 2.4 – Le Plateau Cyclique.

Dans un rotor d'hélicoptère, l'inclinaison d'un dispositif appelé le plateau cyclique produit l'inclinaison de  $T_M$  par rapport à l'axe de rotation du rotor principal et en conséquence un couple sur le rotor, soit de tangage, soit de roulis ou une combinaison des deux. Un schéma du plateau cyclique est montré dans la figure 2.4 où nous pouvons observer l'inclinaison de  $T_M$  par rapport à l'axe  $z_1$ . Le levier cyclique permet au pilote d'incliner le plateau cyclique et le levier collectif lui permet de changer l'angle de pas de toutes les pales de façon simultanée. L'inclinaison de  $T_M$  à son tour, génère une composante de cette force connue comme force de traction et une translation horizontale a lieu. Des couples sont engendrés par la variation cyclique de l'angle de pas des pales du rotor principal  $\varphi$  en fonction de l'angle d'azimut  $\gamma$ . Ce mouvement est connu dans la littérature sous le nom de pas cyclique (*Feathering*). La figure 2.5 montre l'angle de pas d'une pale. Si un changement de vol stationnaire en vol en palier dans la direction de l'axe  $x_c$  est souhaité, la procédure antérieure devra se réaliser de telle façon que l'inclinaison plus importante du plateau cyclique se fasse vers l'avant de l'hélicoptère. Un changement dans la hauteur du plateau cyclique qui représente une autre entrée de commande sert à modifier l'angle de pas des pales du rotor principal de façon collective et donc à faire varier l'amplitude de la force de sustentation.

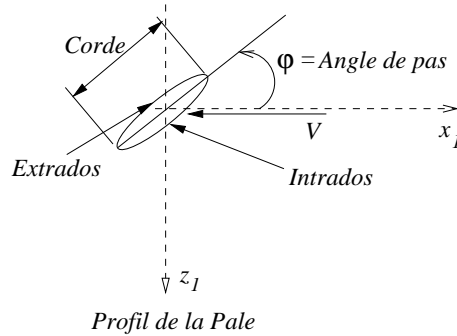


FIG. 2.5 – L'Angle de Pas.

Cette variation de  $\varphi$  peut s'exprimer en termes d'une série de Fourier [26] [36]. En prenant en compte les termes d'ordre égal ou inférieur à la première harmonique, nous trouvons l'équation (2.2) représentant la commande de pas cyclique.

$$\varphi(r_e, \gamma, u_1, u_3, u_4) = \varphi_0 + \frac{r_e}{R_M} \varphi_1 - A_1 \cos \gamma - B_1 \sin \gamma \quad (2.2)$$

Dans l'équation (2.2)  $A_1$  et  $B_1$  sont les angles de pas cyclique latéral et longitudinal respectivement, ils sont définis par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur et

représentent respectivement les entrées de commande  $u_4$  et  $u_3$ .  $\varphi_0$  est l'angle moyen de pas par rapport au centre de rotation,  $\varphi_1$  est l'angle de torsion linéaire des pales,  $r_e$  est la distance du centre du rotor à chaque élément différentiel de la pale comme nous le montrons dans la figure 2.6 et  $R_M$  est le rayon du rotor principal.  $A_1$  est positif lorsque  $\varphi(0) > \varphi(\pi)$  et  $B_1$  est positif lorsque  $\varphi(\frac{\pi}{2}) > \varphi(\frac{3\pi}{2})$ .

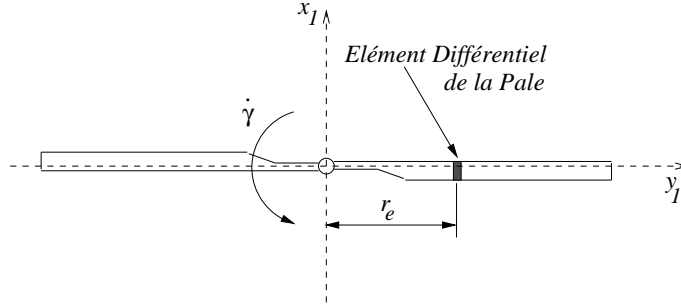


FIG. 2.6 – Les Eléments Différentiels des Pales.

Nous pouvons définir l'angle moyen de pas  $\varphi_0$  par rapport au centre de rotation de la façon suivante (voir figure 2.7) :

$$\varphi_0 = \frac{1}{bl_M} u_1 \quad (2.3)$$

où  $bl_M$  est le bras de levier des pales du rotor principal et  $u_1$  est l'entrée de commande représentant le levier collectif du rotor principal (voir figure 2.4).



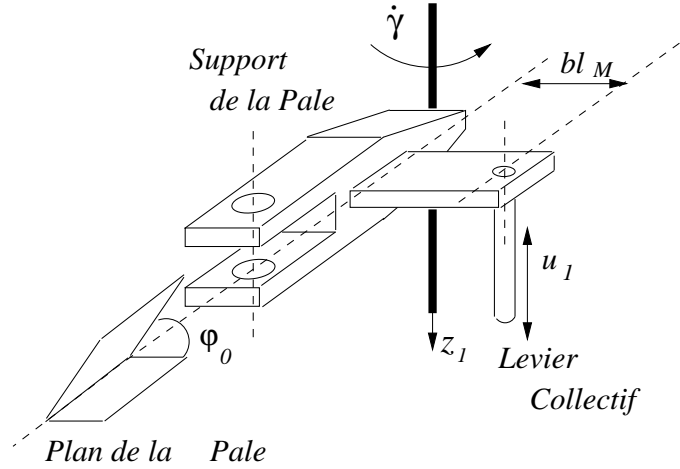


FIG. 2.7 – Le Bras de Levier des Pales.

La dépendance de  $\varphi$  par rapport à  $r_e$  nous permet d'avoir une idée de la variation de l'angle de pas au fur et à mesure que nous prenons des éléments différentiels des pales plus éloignés du centre de rotation.

D'autre part, l'angle  $\varphi_0$  d'une pale avec torsion linéaire est relié à l'angle de pas de l'extrémité de la pale  $\varphi_t$  et à l'angle de torsion  $\varphi_1$  par l'équation suivante [36] :

$$\varphi_0 = \frac{3}{2}\varphi_t - \frac{3}{4}\varphi_1 \quad (2.4)$$

## 2.4 Le Battement Vertical des Pales

Lors du vol en palier, un phénomène aérodynamique connu comme battement vertical (flapping) des pales se présente. Il s'agit d'un battement cyclique des pales du rotor principal. Le mouvement occasionné par la différence de vitesses relatives de l'air sur les profils des pales avançante et reculante produit le battement longitudinal. Le mouvement produit par l'augmentation de l'angle d'attaque des pales en  $\gamma = -\pi$  et par sa diminution en  $\gamma = 0$  est appelé battement latéral [52] [36].

Ce mouvement est défini par l'angle  $\beta$  connu comme l'angle de battement vertical qui est montré dans la figure 2.8.

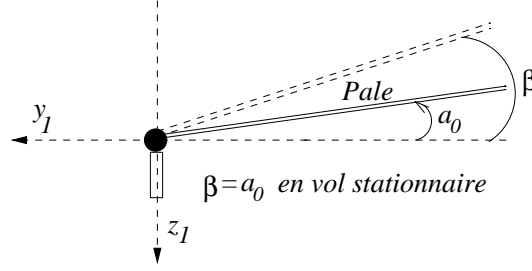


FIG. 2.8 – Les Angles de Conicité et de Battement Vertical.

Le mouvement de battement vertical peut s'exprimer par une série infinie de Fourier [52] [36]. En négligeant les termes correspondant aux harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 2 car ils ont des effets assez faibles sur les forces et couples aérodynamiques, nous trouvons l'équation suivante :

$$\beta(\gamma) = a_0 - a_{1s} \cos \gamma - b_{1s} \sin \gamma \quad (2.5)$$

où  $a_0$  est l'angle de conicité,  $a_{1s}$  et  $b_{1s}$  sont les angles longitudinal et latéral de battement vertical, respectivement. Ils sont définis par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur. L'amplitude de  $a_{1s}$  est déterminée par le couple de tangage que le rotor doit produire pour compenser un offset de la position du centre de masse, une force de sustentation du stabilisateur horizontal et/ou un couple de tangage aérodynamique sur le fuselage. L'amplitude de  $b_{1s}$  est celle qui doit équilibrer l'hélicoptère sous l'action de couples de roulis externes comme celui de la force de poussée du rotor de queue ou celui produit par un offset latéral de la position du centre de masse. Il a été montré dans [52] que ce type de mouvement trouve une position d'équilibre des pales du rotor principal où le couple transitoire aérodynamique de roulis produit par la différence de vitesse et donc par la différence de force de poussée des pales avançante et reculante est constant, égal et opposé au couple centrifuge généré par l'angle de conicité  $a_0$ .

Quand le battement vertical trouve l'équilibre, la force  $T_M$  possède une inclinaison (par rapport à l'arbre moteur) qui est fonction des angles de battement longitudinal et latéral comme nous pouvons l'observer dans la figure 2.9 où l'angle de conicité a été négligé.

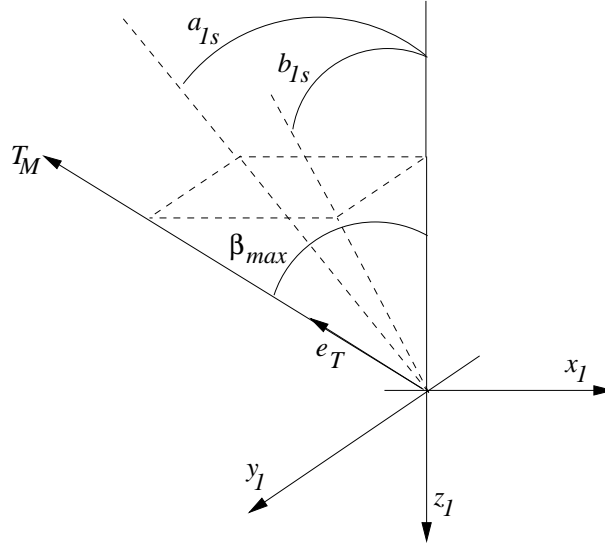


FIG. 2.9 – L’Inclinaison de  $T_M$  due au Battement Vertical.

Cette inclinaison de  $T_M$  peut s’exprimer en fonction d’un angle maximum de battement vertical noté  $\beta_{max}$  [27] correspondant à la valeur maximale que l’angle  $\beta$  de l’équation (2.5) peut avoir. Dans la figure 2.9, le vecteur  $e_T$  détermine l’orientation de  $T_M$  en fonction des angles longitudinal  $a_{1s}$  et latéral  $b_{1s}$  de battement vertical lors d’une *condition normale* de battement vertical [36]<sup>3</sup>. Les composantes du vecteur  $e_T$  sont données par l’équation suivante :

$$e_T = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin^2 a_{1s} \sin^2 b_{1s}}} \begin{bmatrix} \sin a_{1s} \cos b_{1s} \\ -\sin b_{1s} \cos a_{1s} \\ \cos a_{1s} \cos b_{1s} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Nous remarquons que l’angle maximum de battement vertical est exprimé par (2.7).

$$\cos \beta_{max} = \frac{\cos a_{1s} \cos b_{1s}}{\sqrt{1 - \sin^2 a_{1s} \sin^2 b_{1s}}} \quad (2.7)$$

---

<sup>3</sup>La condition normale de battement vertical se présente lorsque la pale bat vers le haut du côté du nez et vers le bas du côté de la queue ( $a_{1s} > 0$ ) et lorsque elle bat vers le bas du côté avançant et vers le haut du côté reculant ( $b_{1s} > 0$ ).

Il a été démontré dans [52] que les mouvements de battement vertical (*Flapping*) et celui de pas cyclique (*Feathering*) sont des mouvements équivalents dans le sens qu'une variation d'un degré en  $\beta$  produit les mêmes effets aérodynamiques qu'une variation d'un degré en  $\varphi$ . Le mouvement de battement vertical peut donc être éliminé complètement ou partiellement (quand nous voulons compenser les couples de tangage et de roulis produits par un offset du centre de masse, par exemple).

Les plans considérés pour l'analyse aérodynamique d'un hélicoptère sont montrés dans la figure 2.10 où nous pouvons observer que :

$$a_1 = B_1 + a_{1s} \quad (2.8)$$

$$b_1 = -(A_1 - b_{1s}) \quad (2.9)$$

$$\alpha_s = \alpha_{TPP} - a_{1s} \quad (2.10)$$

où  $a_1$  est l'angle longitudinal de battement vertical et  $b_1$  est l'angle latéral de battement, exprimés par rapport au plan du plateau cyclique,  $\alpha_s$  est l'angle d'attaque défini par rapport au plan perpendiculaire de l'arbre moteur et  $\alpha_{TPP}$  est l'angle d'attaque défini par rapport au plan de la trajectoire de l'extrémité de la pale.

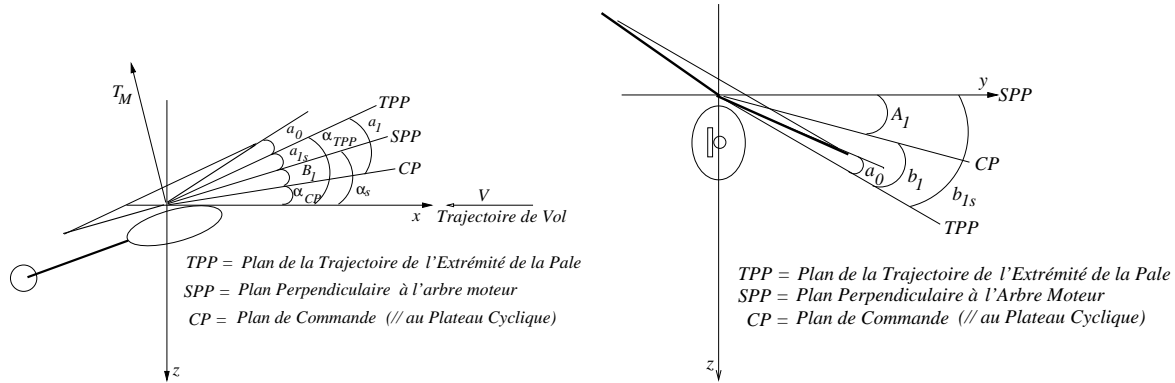


FIG. 2.10 – Les Plans dans un Hélicoptère.

Une variation de  $\Delta B_1$  de l'angle longitudinal de pas cyclique produit une inclinaison longitudinale du plan de la trajectoire de l'extrémité de la pale de valeur  $\Delta B_1$  approximativement et une légère inclinaison latérale (généralement négligeable) [36]. Une variation de  $\Delta A_1$  de l'angle latéral de pas cyclique produit une inclinaison latérale du plan de la trajectoire de l'extrémité de la pale de valeur  $\Delta A_1$  approximativement et une légère inclinaison longitudinale (généralement négligeable) [36].

Dans la section suivante nous étudierons les trois modes de vol principaux d'un hélicoptère et les relations qui définissent les forces et les couples. Il est important de remarquer que les expressions utilisées par la suite devront servir à la détermination des forces externes appliquées à l'hélicoptère et donc des forces généralisées du système. Les trois modes sont ceux du vol stationnaire, du vol vertical et du vol en palier.

## 2.5 Calcul des Forces et Couples Aérodynamiques.

Nous commençons cette section avec une description des modes de vol plus fréquemment trouvés lors du vol de l'hélicoptère. Ensuite nous passons au calcul des forces et des couples aérodynamiques.

### 2.5.1 Les Modes de Vol.

Pour un pilote expérimenté, une translation verticale suivant deux ou trois directions peut faire partie d'un décollage. Un vol général en trois dimensions peut aussi être obtenu grâce à l'expérience du pilote ; cependant, il existe trois modes de vol où l'hélicoptère évolue souvent. Ces modes de vol sont :

**Le vol stationnaire.** En montée verticale et après avoir franchi le seuil définissant l'effet du sol (HES)<sup>4</sup>, l'hélicoptère peut rester en vol stationnaire où la force de sustentation doit équilibrer le poids de l'hélicoptère  $mg$  et la force de traînée  $D_{vi}$  sur le fuselage créée par la vitesse induite du rotor principal<sup>5</sup>. Cette force de

---

<sup>4</sup>Lorsque l'hélicoptère est près du sol l'air aspiré par le rotor principal forme une couche d'air comprimé entre le rotor et le sol. Cet effet est connu comme l'effet de sol et en général il est considéré nul quand le système se trouve à une hauteur égale ou supérieure au diamètre du rotor principal.

<sup>5</sup>La vitesse induite est la vitesse acquise par l'écoulement de l'air dans le rotor. L'effet de cette vitesse ou simplement l'effet du sillage est très importante. Il est considéré dans les travaux concernant

sustentation correspond à une force de poussée  $T_M$  qui est orientée normalement (en absence de perturbations) dans la direction négative de l'axe  $z$  (voir figure 2.2).

**Le vol vertical.** Ce mode de vol commence avec l'hélicoptère dans l'effet de sol (DES). Ensuite, le décollage vertical du système peut avoir lieu et le système évolue en mode de montée. Le mode de descente verticale précède l'atterrissage. En absence de perturbations la force de poussée est toujours verticale et en montée elle est supérieure à la somme du poids de l'hélicoptère et de la force de traînée sur le fuselage tandis que en descente elle sera inférieure à cette somme.<sup>6</sup>

**Le vol en palier.** Nous considérons que ce mode aura lieu dans des conditions HES. Une inclinaison de la force de poussée par rapport à la verticale produit une composante horizontale connue comme force de traction qui assure la translation du système dans la direction de vol souhaitée tandis que la composante verticale de cette force de poussée doit maintenir le système à une hauteur constante par rapport au sol (voir figure 2.16).

Dans chaque cas, la force de poussée du rotor principal doit nous permettre à travers son inclinaison par rapport à l'axe  $z_c$  de compenser les couples de roulis ou de tangage produits par des perturbations. La variation de l'amplitude de la force de poussée du rotor de queue nous permettra de compenser les couples de lacet de la même nature.

## 2.5.2 Forces et Couples.

Généralement les forces et les couples aérodynamiques sont exprimés d'une manière normalisée en fonction des coefficients aérodynamiques [33] [36] tels que le coefficient de poussée ou le rapport de solidité. Dans ce travail nous n'utiliserons pas ces coefficients mais les expressions algébriques des amplitudes des forces et des couples aérodynamiques. Afin d'établir les expressions des forces et des couples aérodynamiques nous considérons un élément différentiel de pale comme celui montré dans la figure 2.6. Pour un tel élément l'amplitude de la force de sustentation est donnée par l'équation suivante.

---

l'analyse aérodynamique où par exemple le phénomène transitoire connu comme "pitching-up" est produit par la vitesse induite lors d'un changement du mode de vol stationnaire en vol en palier [54].

<sup>6</sup>Une descente trop lente n'est pas conseillée car l'entrée dans un Vortex peut se présenter. Le Vortex s'annule en amorçant soit une translation, soit une autorotation (Rotor tournant sans entraînement moteur et diminution immédiate du pas des pales).

$$\Delta L = P_d c_l c_M \Delta r_e \quad (2.11)$$

où  $\Delta L$  est l'incrément de force de sustentation,  $P_d$  est la pression dynamique,  $c_l = a\alpha$  est le coefficient de sustentation,  $c_M$  est la longueur de la corde de la pale et  $\Delta r_e$  est l'incrément de la distance radiale. En écrivant l'équation (2.11) en termes des conditions de l'élément de pale :

$$\Delta L = \frac{\rho}{2} V_T^2 a \alpha c_M \Delta r_e \quad (2.12)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $V_T$  est la valeur algébrique de la vitesse tangente à la corde de l'élément de pale,  $a$  est la pente de la courbe de la force de sustentation ou gradient de portance et  $\alpha$  est l'angle d'attaque de l'élément de pale. L'amplitude de la force de sustentation pour une pale  $L_p$  et pour une certaine valeur de l'angle d'azimut du rotor est donc :

$$L_p = \int_0^{R_M} \frac{\Delta L}{\Delta r_e} dr_e \quad (2.13)$$

La force de poussée totale est égale au nombre de pales fois la force moyenne de sustentation par pale :

$$T_M = \frac{p_M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \frac{\Delta L}{\Delta r_e} dr_e d\gamma = \frac{\rho p_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} V_T^2 \alpha dr_e d\gamma \quad (2.14)$$

Nous avons considéré que  $\rho$  est constante, que  $a$  est constante dans la direction de la longueur des pales et que  $c_M$  est constant suivant la largeur des pales. L'angle d'attaque de la pale  $\alpha$  est défini par l'équation suivante [36] :

$$\alpha = \varphi + \arctan\left(\frac{V_P}{V_T}\right) \quad (2.15)$$

où  $\varphi$  est défini par l'équation (2.2) et  $V_P$  est la valeur algébrique de la vitesse perpendiculaire à la pale dans le plan contenant l'axe de l'arbre moteur. Les vitesses  $V_T$  et  $V_P$  sont illustrées dans la figure 2.11.

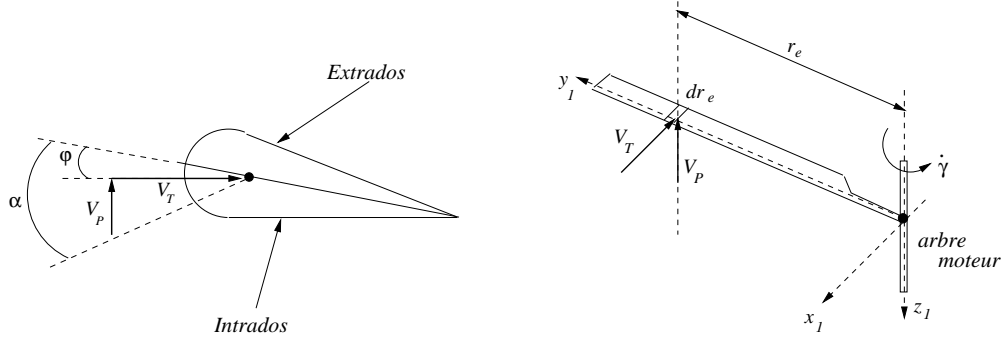


FIG. 2.11 – Les Vitesses Tangentielle et Perpendiculaire.

Nous pouvons donc écrire :

$$T_M = \frac{\rho p_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} [V_T^2 \varphi + V_T^2 \arctan(\frac{V_P}{V_T})] dr_e d\gamma \quad (2.16)$$

Dans l'annexe C de ce rapport les développements de quelques termes tels que  $V_T^2 \varphi$  (équation (C.1)) et  $V_T V_P$  (équation (C.2)) sont donnés.

Considérons maintenant la figure 2.12 qui nous servira à déterminer les termes formant les vitesses  $V_P$  et  $V_T$ . Ici  $V$  est le vecteur de vitesse relative de translation de l'hélicoptère en trois dimensions dont son amplitude est exprimée par l'équation (2.17),  $V_{II}$  est le vecteur de vitesse parallèle au plan de rotation du rotor,  $\alpha_s$  est considéré négatif lors d'une translation en montée ou lors du vol en palier car l'hélicoptère vole en avant le nez incliné (voir figure 2.16) et  $\delta$  est l'angle latéral de translation par rapport à l'axe longitudinal de l'hélicoptère.



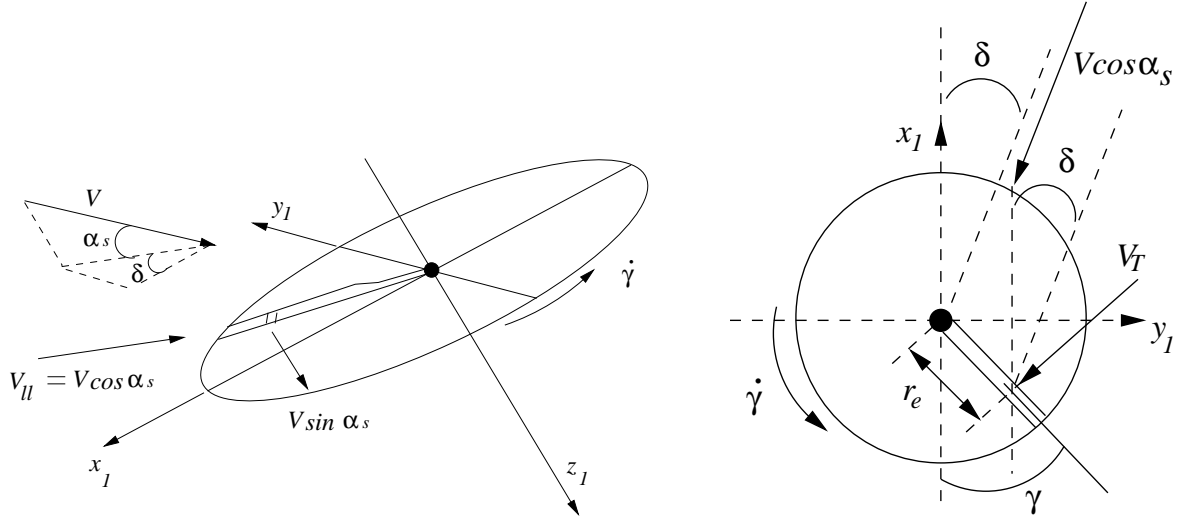


FIG. 2.12 – Les Composantes de la Vitesse sur le Rotor Principal.

$$V^T V = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (2.17)$$

Dans la détermination des forces et des couples aérodynamiques, la vitesse perpendiculaire au bord d'attaque des pales  $V_T$  est prise en compte [36] [52]. A partir de la figure 2.12 il est facile de vérifier :

$$V_T = |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) + \dot{\gamma} r_e \quad (2.18)$$

Ici, le terme  $\dot{\gamma} r_e$  est obtenu à partir du produit vectoriel  $\dot{\gamma} \times r_e$  avec  $\dot{\gamma} \perp r_e$ . D'autre part, la vitesse  $V_P$  est composée de plusieurs termes.

$$V_P = -|V| \sin(\alpha_s) + v_{locale} - r_e \dot{\beta} + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(\beta) \cos(\gamma) \quad (2.19)$$

où  $|V| \sin(\alpha_s)$  est la composante perpendiculaire de la vitesse de translation,  $v_{locale}$  est la vitesse induite locale considérée parallèle à l'arbre moteur,  $r_e \dot{\beta}$  est la contribution du battement vertical des pales et  $|V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(\beta) \cos(\gamma)$  est l'effet de la

composante de la vitesse de translation sur le plan de rotation du rotor principal agissant sur l'extrados (partie supérieure de la pale) lorsque  $\gamma = 0$  et sur l'intrados (partie inférieure de la pale) lorsque  $\gamma = -\pi$  (voir figure 2.11). Le terme de la vitesse induite locale et le terme  $r_e \dot{\beta}$  sont définis ci-dessous [36] :

$$v_{locale} = |v_1| \left(1 + \frac{r_e}{R_M} \cos(\gamma)\right) \quad (2.20)$$

où  $v_1$  est la vitesse induite dans le plan de rotation du rotor principal. Prenons les définitions de vitesse induite données par [36] dans les cas du vol stationnaire  $v_h$ , du vol vertical  $v_v$  et du vol en palier  $v_p$ .

$$v_h = \sqrt{\frac{mg + D_{vi}}{2\rho A}} \quad (2.21)$$

$$v_v = \frac{\dot{z}}{2} + \sqrt{\frac{\dot{z}^2}{4} + v_h^2} \quad (2.22)$$

$$v_p = \sqrt{-\frac{V^T V}{2} + \sqrt{\frac{(V^T V)^2}{4} + v_h^4}} \quad (2.23)$$

où  $m$  est la masse de l'hélicoptère,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $D_{vi}$  est l'amplitude de la force de traînée créée par la vitesse induite<sup>7</sup> et  $A$  est l'aire du disque rotor. Chaque équation est utilisable dans un mode précis de vol. Dans (2.23)  $V^T V = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  en général et pour le vol en palier  $V^T V = \dot{x}^2$ . Nous avons proposé un cas plus général de vol en trois dimensions où l'amplitude de la vitesse de translation est donnée par l'équation (2.17) et la vitesse induite est définie par :

$$v_1 = \sqrt{-\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \sqrt{\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}{4} + v_h^4}} - \frac{\dot{z}}{2} + \sqrt{\frac{\dot{z}^2}{4} + v_h^2} - v_h \quad (2.24)$$

Il est facile de vérifier que lorsque  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ,  $v_1 = v_h$ , que lorsque  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ,  $v_1 = v_v$  et que lorsque  $\dot{z} = 0$ ,  $v_1 = v_p$ . L'équation (2.24) sera prise en compte dans

---

<sup>7</sup>Dans la pratique, la valeur de  $D_{vi}$  se situe entre 2% et 5% du poids de l'hélicoptère [23].

un premier temps comme définition générale de l'amplitude de la vitesse induite en trois dimensions ; cependant, une analyse expérimentale devra être effectuée afin de la définir plus correctement. Finalement

$$r_e \dot{\beta} = \dot{\gamma} R_M \frac{r_e}{R_M} (a_{1s} \sin(\gamma) - b_{1s} \cos(\gamma)) \quad (2.25)$$

Nous considérons dans les intégrations des forces de poussée et des couples de traînée que :

- Les angles de torsion, d'attaque, latéral, de battement vertical et de conicité ne dépendent pas de  $\gamma$  et non plus de  $r_e$ .
- $\sin(\beta) \approx \beta$
- $\arctan(\frac{V_P}{V_T}) \approx \frac{V_P}{V_T}$
- La vitesse de translation ne dépend pas de  $\gamma$  et non plus de  $r_e$ .
- Les entrées de commande ont été prises comme des termes indépendants de  $\gamma$  et de  $r_e$  car la deuxième intégration est effectuée en un tour (de 0 à  $2\pi$ ) et la vitesse de rotation des rotors est assez importante ( $> 500 \text{ rpm}$ ). Dans ces conditions la vitesse de réponse des actionneurs est très faible.

Si nous considérons que les angles d'attaque, de conicité, de battement, latéral de translation et de torsion des pales sont constants et en substituant (C.1) et (C.2) dans (2.16) il est facile de vérifier que  $T_M = T_M(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, u_1, u_2, u_3)$  et :

$$\begin{aligned} T_M = \frac{\rho p_M c_M a}{4} [ & (\frac{R_M}{bl_M} \cos^2(\alpha_s) V^T V + \frac{2R_M^3}{3bl_M} \dot{\gamma}^2) u_1 - R_M^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} u_3 + \\ & R_M^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| \dot{\gamma} u_4 + (\frac{R_M}{2} \cos^2(\alpha_s) V^T V + \frac{R_M^3}{2} \dot{\gamma}^2) \varphi_1 - \\ & (R_M^2 \sin(\alpha_s) + \frac{R_M^2}{2} a_{1s} \cos(\alpha_s) \cos(\delta) + \frac{R_M^2}{2} b_{1s} \cos(\alpha_s) \sin(\delta)) |V| \dot{\gamma} - \\ & R_M a_0 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) V^T V + (-\frac{R_M}{2} \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| + R_M^2 \dot{\gamma}) v_1 ] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considérons maintenant le cas du couple de traînée du rotor principal. Nous utilisons un élément différentiel de pale pour lequel le couple de traînée est donné par :

$$\Delta C_M = (\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) r_e \quad (2.27)$$

où  $\Delta D \cos(\iota_e)$  représente l'increment de force de traînée du profil de la pale,  $\Delta L \sin(\iota_e)$



$$C_M = \frac{\rho p_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} (V_T^2 r_e) + (V_T^2 r_e) \alpha \frac{V_P}{V_T} \right] dr_e d\gamma \quad (2.29)$$

et

$$C_M = \frac{\rho p_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} (V_T^2 r_e) + (r_e V_P^2 + r_e V_T V_P \varphi) \right] dr_e d\gamma \quad (2.30)$$

En prenant en compte les éléments définis dans le cas de la force  $T_M$  nous pouvons écrire :

$$r_e V_T^2 = r_e V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\gamma - \delta) + 2r_e^2 |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \dot{\gamma} + r_e^3 \dot{\gamma}^2 \quad (2.31)$$

Dans l'annexe C de ce rapport nous montrons les développements des termes  $r_e V_P^2$  (équation (C.8)) et  $r_e V_T V_P \varphi$  (équation (C.6)). En utilisant (2.31), (C.8) et (C.6) en (2.30) et en intégrant nous trouvons que  $C_M = C_M(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, u_1, u_2, u_3)$  et :

$$\begin{aligned} C_M = & \frac{\rho p_M a c_M}{4} \left[ \left( -\frac{2}{3bl_M} R_M^3 \sin(\alpha_s) |V| \dot{\gamma} - \frac{2a_{1s}}{3bl_M} R_M^3 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} - \right. \right. \\ & \frac{b_{1s}}{3bl_M} R_M^3 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| \dot{\gamma} + \frac{2}{3bl_M} R_M^3 v_1 \dot{\gamma} - \frac{1}{3bl_M} R_M^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| v_1 - \\ & \frac{a_0}{2bl_M} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) V^T V u_1 + \left( \frac{1}{2} R_M^2 \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) \cos(\delta) V^T V + \right. \\ & \frac{a_{1s}}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) V^T V - \frac{b_{1s}}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) V^T V - \\ & \frac{1}{2} R_M^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| v_1 + \frac{a_{1s}}{4} R_M^4 \dot{\gamma}^2 u_3 + \left( -\frac{1}{4} R_M^3 v_1 \dot{\gamma} + \right. \\ & \frac{1}{2} R_M^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| v_1 - \frac{b_{1s}}{4} R_M^4 \dot{\gamma}^2 - \frac{a_0}{3} R_M^3 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} - \\ & \frac{1}{2} R_M^2 \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) \sin(\delta) V^T V - \frac{3a_{1s}}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) V^T V + \\ & \frac{b_{1s}}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) V^T V u_4 + \left( -\frac{1}{2} R_M^3 \sin(\alpha_s) |V| \dot{\gamma} - \right. \\ & \frac{a_{1s}}{2} R_M^3 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} - \frac{b_{1s}}{4} R_M^3 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| \dot{\gamma} + \frac{1}{2} R_M^3 v_1 \dot{\gamma} - \\ & \frac{1}{4} R_M^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| v_1 - \frac{a_0}{3} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) V^T V \varphi_1 + \\ & \left( \frac{c_d}{2a} + \frac{a_{1s}^2}{4} + \frac{b_{1s}^2}{4} \right) R_M^4 \dot{\gamma}^2 + \left( \frac{c_d}{2a} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) + \frac{a_0^2}{2} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + \right. \\ & a_{1s} R_M^2 \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) \cos(\delta) + \frac{3a_{1s}^2}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + \\ & \frac{b_{1s}^2}{8} R_M^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + R_M^2 \sin^2(\alpha_s) V^T V + \left( -2 R_M^2 \sin(\alpha_s) + \right. \\ & \frac{2a_0}{3} R_M^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) - a_{1s} R_M^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| v_1 + \frac{5}{4} R_M^2 v_1^2 + \frac{1}{2} R_M^3 b_{1s} v_1 \dot{\gamma} + \\ & \left. \left. \frac{2}{3} R_M^3 a_0 b_{1s} \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} \right] \right] \quad (2.32) \end{aligned}$$

Nous déterminerons maintenant les force de poussée  $T_T$  et le couple de traînée  $C_T$  pour le rotor de queue.

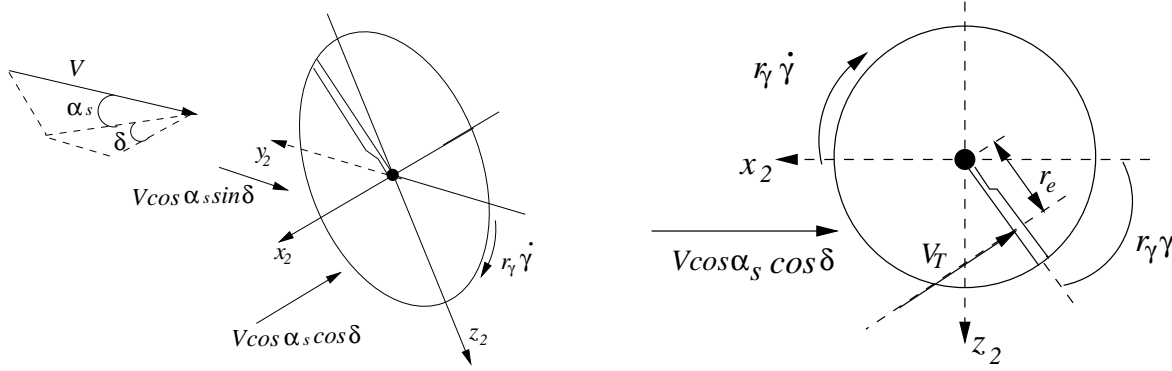


FIG. 2.14 – Les Composantes de la Vitesse sur le Rotor de Queue.

En considérant la figure 2.14 nous pouvons écrire :

$$(V_T)_T = [|V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) + r_\gamma \dot{\gamma} r_e]_T \quad (2.33)$$

$$(V_P)_T = [|V| \cos(\alpha_s) \sin(\delta) + v_{locale} - r_e \dot{\beta} + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(\beta) \cos(r_\gamma \gamma)]_T \quad (2.34)$$

Afin de ne pas compliquer la notation, nous avons utilisé la même que celle utilisée dans l'analyse du rotor principal. L'indice  $T$  signifie que les paramètres concernent le rotor de queue. La force de poussée pour ce rotor est exprimée de façon similaire à celle du rotor principal.

$$T_T = \frac{\rho p_T a c_T}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \left[ V_T^2 \varphi + V_T^2 \arctan\left(\frac{V_P}{V_T}\right) \right]_T d(r_e) d(r_\gamma \gamma) \quad (2.35)$$

où  $p_T$  est le nombre de pales du rotor de queue,  $c_T$  est la longueur de sa corde et  $R_T$  est son rayon. Nous avons considéré que les pales du rotor principal et celles du rotor de queue ont la même valeur du coefficient  $a$ . Il faut remarquer que le plateau cyclique du rotor de queue ne possède pas de pas cyclique. Son angle de pas est donné par [36] :

$$[\varphi]_T = [\varphi_0 + \frac{r_e}{R_T} \varphi_1 + \beta \tan(\delta_3)]_T \quad (2.36)$$

où  $\delta_3$  est l'angle d'inclinaison de l'articulation de battement des pales du rotor de queue (voir figure 2.15). Nous remarquons que l'angle de pas moyen est définie de manière similaire à celui du rotor principal (voir équation (2.3) et figure 2.7) :

$$\varphi_{0T} = \frac{1}{bl_T} u_2 \quad (2.37)$$

où  $bl_T$  est le bras de levier des pales et  $u_2$  est l'entrée de commande représentant le levier collectif du rotor de queue.

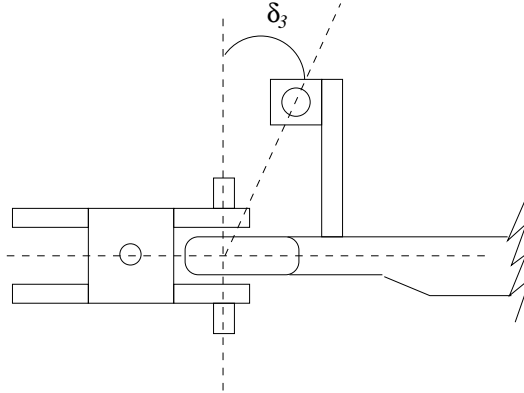


FIG. 2.15 – L'angle d'Inclinaison  $\delta_3$ .

Dans l'annexe C de ce rapport nous montrons les développements des termes  $[V_T^2 \varphi]_T$  (équation (C.3)) et  $[V_P V_T]_T$  (équation (C.4)). En considérant les quantités définies ci-dessus, les angles d'attaque, de conicité, de battement, latéral de translation et de torsion des pales comme des constantes et après intégration, nous trouvons  $T_T = T_T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, u_2)$  et :

$$\begin{aligned}
T_T = & \frac{\rho p_T c_T a}{4} \left[ \left( \frac{R_T}{b l_T} \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) V^T V \right) + \left( \frac{2}{3 b l_T} r_\gamma^2 R_T^3 \dot{\gamma}^2 \right) u_2 \right. \\
& + \left( \frac{1}{2} R_T \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) V^T V \right) + \left( \frac{1}{2} r_\gamma^2 R_T^3 \dot{\gamma}^2 \right) \varphi_{1T} - \left( r_\gamma R_T^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) \right) + \\
& \left. \frac{1}{2} r_\gamma a_{1sT} R_T^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \right] |V| \dot{\gamma} + r_\gamma R_T^2 v_{1T} \dot{\gamma} + (a_{0T} R_T \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) V^T V + \\
& \frac{2}{3} a_{0T} r_\gamma^2 R_T^3 \dot{\gamma}^2 - b_{1sT} r_\gamma R_T^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} \tan(\delta_3) ]
\end{aligned} \tag{2.38}$$

où  $\varphi_{1T}$  est l'angle de torsion des pales et  $v_{1T}$  est la vitesse induite du rotor de queue. Les coefficients  $a_{0T}$ ,  $a_{1sT}$  et  $b_{1sT}$  sont les angles de conicité, latéral et longitudinal de battement du rotor de queue respectivement.

Pour le couple de traînée du rotor de queue nous partons de l'expression suivante :

$$\Delta C_T = [-(\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) r_e]_T \tag{2.39}$$

Le couple  $C_T$  est donc donné par :

$$C_T = \frac{\rho p_T c_T a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \left[ -\frac{c_{dT}}{a} ((V_T)_T^2 r_e) + ((V_T)_T^2 r_e) \alpha \frac{V_P}{V_T} \right] d(r_e) d(r_\gamma \gamma) \tag{2.40}$$

où  $c_{dT}$  est le coefficient de traînée du rotor de queue. Nous calculons les termes suivants sans considérer l'indice  $T$ . Bien entendu les termes correspondent au rotor de queue.

$$\begin{aligned}
(V_T^T V_T) r_e = & V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) r_e \sin^2(r_\gamma \gamma) + 2 r_\gamma \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) + \\
& r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^3
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Dans l'annexe C de ce rapport nous montrons les développements des termes  $V_P^2 r_e$  (équation (C.5)) et  $V_P V_T r_e \varphi$  (équation (C.7)). En considérant que les angles de torsion, de battement, d'attaque, de translation latéral, d'inclinaison et de conicité sont des constantes ; en utilisant (2.41), (C.5) et (C.7) en (2.40) et après intégration nous trouvons  $C_T = C_T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\gamma}, u_2)$  et :



$$\begin{aligned}
C_T = & \frac{\rho v_T c_T a}{4} \left[ -\left(\frac{2}{3bl_T} r_\gamma R_T^3 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| \dot{\gamma} + \frac{2}{3bl_T} r_\gamma R_T^3 a_{1sT} \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} + \right. \right. \\
& \frac{2}{3bl_T} r_\gamma R_T^3 v_{1T} \dot{\gamma} u_2 + \left. \left( -\frac{1}{2} r_\gamma R_T^3 a_{1sT} \cos(\alpha_s) \cos(\delta) |V| \dot{\gamma} + \frac{1}{2} r_\gamma R_T^3 v_{1T} \dot{\gamma} - \right. \right. \\
& \frac{1}{2} r_\gamma R_T^3 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) |V| \dot{\gamma} \varphi_1 + \left. \left( -\frac{c_{dT}}{2a} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + \right. \right. \\
& R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\delta) + \left. \frac{a_{0T}^2}{2} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + \right. \\
& \left. \frac{3a_{1sT}^2}{8} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + a_{1sT} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) + \right. \\
& \left. \frac{b_{1sT}^2}{8} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) + \frac{a_{1sT} b_{1sT}}{4} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \tan(\delta_3) + \right. \\
& \left. \frac{b_{1sT}}{2} R_T^2 \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) \tan(\delta_3) \right) V^T V \\
& \left( -\frac{2a_{0T}}{3} r_\gamma R_T^3 \tan(\delta_3) \cos(\alpha_s) \sin(\delta) - a_{0T} a_{1sT} r_\gamma R_T^3 \tan(\delta_3) \cos(\alpha_s) \cos(\delta) + \right. \\
& \left. \frac{2a_{0T} b_{1sT}}{3} r_\gamma R_T^3 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \right) |V| \dot{\gamma} + \left( -\frac{c_{dT}}{2a} r_\gamma^2 R_T^4 + \frac{a_{1sT}^2}{4} r_\gamma^2 R_T^4 + \frac{b_{1sT}^2}{4} r_\gamma^2 R_T^4 \right) \dot{\gamma}^2 + \\
& \left( -2R_T^2 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) - a_{1sT} R_T^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) + \frac{2a_{0T}}{3} R_T^2 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) - \right. \\
& \left. \frac{b_{1sT}}{2} R_T^2 \tan(\delta_3) \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \right) |V| v_1 + \left( \frac{b_{1sT}}{2} r_\gamma R_T^3 + \frac{2a_{0T}}{3} r_\gamma R_T^3 \tan(\delta_3) - \right. \\
& \left. \frac{a_{1sT}}{4} r_\gamma R_T^3 \tan(\delta_3) \right) v_{1T} \dot{\gamma} + \frac{5}{4} R_T^2 v_{1T}^2 \Big]
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Les équations (2.26), (2.32), (2.38) et (2.42) nous permettent de calculer les valeurs algébriques de  $T_M$ ,  $C_M$ ,  $T_T$  et  $C_T$  dans un cas général de vol de l'hélicoptère en trois dimensions. Sous certaines conditions particulières ( $\delta = 0$ ,  $\alpha_s$  petit) ces équations aboutissent à celles trouvées dans [36] définissant les forces de poussée et les couples de traînée des rotors principal et de queue pour le vol en palier. Si en plus nous prenons la condition  $V = 0$ , nous trouvons les expressions correspondant au cas du vol stationnaire en tenant compte de la relation (2.4).

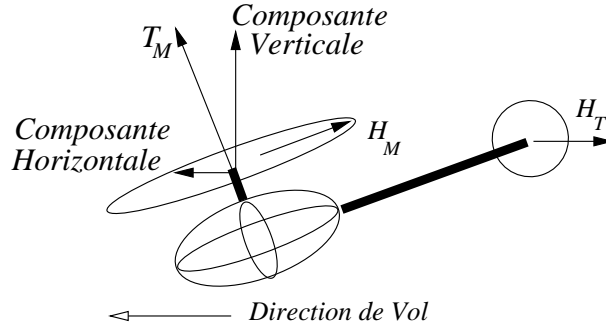


FIG. 2.16 – Les Forces Horizontales.

Les forces de traînée sur les rotors principal et de queue sont connues comme les forces horizontales ou plus simplement forces-H. Elles sont notées  $H_M$  et  $H_T$  respectivement. La force  $H_M$  est toujours perpendiculaire à l'arbre moteur et il faut remarquer

que son amplitude varie de façon importante lorsqu'il existe des petits changements des conditions de vol. La force  $H_T$  est toujours parallèle à la trajectoire de vol (voir figure 2.16). Les forces-H sont généralement des forces négligeables par rapport aux forces de poussée. Ces forces ne seront pas prises en compte dans notre analyse ; cependant, nous donnons ci-dessus les expressions de base pour leurs déterminations.

$$\Delta H_M = [(\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) \sin(\gamma) + \Delta L \sin(\beta) \cos(\gamma)]_M \quad (2.43)$$

$$\Delta H_T = [-(\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) \sin(r_\gamma \gamma) + \Delta L \sin(\beta) \cos(r_\gamma \gamma)]_T \quad (2.44)$$

où les indices  $M$  et  $T$  concernent les éléments du rotor principal et du rotor de queue respectivement.



# Chapitre 3

## Modélisation

Nous commençons ce chapitre avec la section 3.1 où nous montrons les hypothèses que nous utiliserons par la suite. Contrairement à l'approche utilisant des modèles linéaires [9] et [19], nous proposons dans la section 3.2 un modèle non-linéaire de l'hélicoptère. Ce modèle est destiné à être utilisé dans le cas du vol général en 3 dimensions de l'hélicoptère. Un modèle non-linéaire d'ordre réduit de l'hélicoptère monté sur une plateforme sera proposé dans la section 3.3 en ayant comme objectif principal l'identification ultérieure des paramètres du système et la commande du vol vertical de l'hélicoptère.

Comme nous l'avons précisé au début du chapitre précédent, le modèle général à 7-DDL que nous proposons est destiné au vol 3D de l'hélicoptère (régulation au sol, décollage, montée, vol stationnaire, vol en palier, vol 3D, descente et atterrissage). D'autres auteurs se sont intéressés aux linéarisations autour d'un point de fonctionnement comme [33] et [36].

D'autre part, dans notre modèle nous prenons en compte la dynamique des rotors qui est souvent négligée [20], [22].

Les modèles proposés sont basés sur des considérations d'énergie cinétique et potentielle. L'énergie cinétique du rotor de queue est prise en compte dans la modélisation, contrairement à [27] qui considère uniquement celles du rotor principal et du fuselage. L'énergie potentielle est formée par la partie gravitationnelle et par l'énergie élastique associée au phénomène de battement vertical.

### 3.1 Les Hypothèses

Les hypothèses que nous utiliserons pour l'obtention des équations du mouvement de l'hélicoptère sont les suivantes <sup>1</sup> :

1. La région de flux inversé est ignorée. La figure 3.1 montre la région de flux inversé. Dans cette région l'air frappe le bord de fuite (partie postérieure) de la pale plutôt que le bord d'attaque (partie antérieure). La vitesse perpendiculaire à la partie antérieure (profil) de la pale est donc négative.

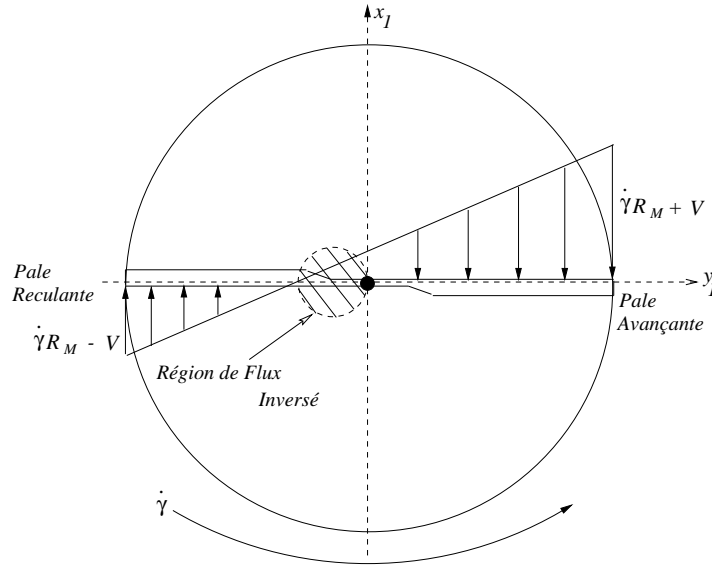


FIG. 3.1 – La Région de Flux Inversé.

2. Les vitesses induites sont uniformes. Les calculs de vitesses induites et les approximations des forces de traînée seront donc plus simples car en général les vitesses induites ne sont pas uniformes.
3. La corde des pales est supposée constante. Les variations de la force de poussée et du couple de traînée tout au long de la pale sont donc négligeables.
4. Le profil des pales est pris comme celui du type NACA 2412 <sup>2</sup>. Ce type de profil

<sup>1</sup>Les six premières hypothèses sont similaires à celles proposées par [36]. Les hypothèses suivantes ont été établies en fonction des caractéristiques de notre système.

<sup>2</sup>Le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) est le prédécesseur de la NASA (National Aeronautics and Space Administration).

est très utilisé et très proche du profil des pales de l'hélicoptère VARIO qui est inconnu <sup>3</sup>.

5. Dans un premier temps l'évolution du vol en palier et du vol stationnaire est supposée effectuée hors l'effet du sol (HES). Les effets de compressibilité de la couche d'air en dessous de l'hélicoptère ne sont donc pas pris en compte.
6. Les caractéristiques de poussée du profil sont linéaires et libres des effets de pertes de sustentation et de compressibilité. Nous considérons donc qu'une force aérodynamique est obtenue tout au long de la pale.
7. Le profil des pales du rotor de queue est celui des pales du rotor principal. En général ces profils sont différents.
8. Le battement vertical des pales est constitué d'un angle de conicité et d'un battement de première harmonique. Les termes des harmoniques supérieures sont négligeables.
9. Le gradient de portance est supposé constant. Les conditions de vol ayant un nombre de Mach supérieur à 0.5 <sup>4</sup> (valeur à partir de laquelle le gradient n'est plus constant) ne seront donc pas prises en compte. Le vol de l'hélicoptère sera donc considéré pour des vitesses faibles. L'angle d'attaque et ceux de battement vertical seront donc considérés petits et constants,<sup>5</sup> ainsi que les angles définis par  $u_3$  et  $u_4$ .
10. Le vol de l'hélicoptère est supposé effectué dans des conditions d'une atmosphère standard <sup>6</sup>.
11. Nous considérons que l'effet du sol existe pour une hauteur inférieure au diamètre du rotor principal ( $2R_M \approx 1.8 \text{ m}$ ).
12. Les modes de vol de l'hélicoptère donnés dans la section 2.5.1 sont définis par les relations du tableau 3.1 où  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont des constantes à déterminer (voir figure 2.2).

---

<sup>3</sup>Dans [26] une présentation plus détaillée des profils aérodynamiques ainsi que de leurs familles est donnée.

<sup>4</sup>La valeur de la vitesse de rotation pour l'hélicoptère VARIO correspondant à ce nombre de Mach est de 1800 rpm.

<sup>5</sup>Soit l'angle  $\theta$  petit. Alors  $\sin(\theta) \approx \theta$  et  $\cos(\theta) \approx 1$ . En général  $a_{1s}$  et  $b_{1s}$  ne sont pas constants mais fonction de  $\dot{\gamma}$  et des entrées de commande.

<sup>6</sup>Une Atmosphère Standard au niveau de la mer concerne une température de  $15^\circ\text{C}$  décroissant de  $-2^\circ\text{C}$  par mille pieds et une pression de 101.325 kPa.

	<i>Vol Vertical</i>	<i>Vol Stationnaire</i>	<i>Vol en Palier</i>
$ x ,  \dot{x} $	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$> \varepsilon, > \varepsilon'$
$ y ,  \dot{y} $	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$
$ z ,  \dot{z} $	$> \varepsilon, > \varepsilon'$	$> 2R_M, \leq \varepsilon$	$> 2R_M, \leq \varepsilon$
$ \phi ,  \dot{\phi} $	$\leq 2\pi, \leq \varepsilon$	$\leq 2\pi, > \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$
$ \theta ,  \dot{\theta} $	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$> \varepsilon, \leq \varepsilon$
$ \psi ,  \dot{\psi} $	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$	$\leq \varepsilon, \leq \varepsilon$

TAB. 3.1 – Les Modes de Vol et les Variations des Coordonnées.

13. La force de poussée du fuselage est négligée car elle est très faible. Les seules forces de poussée considérées seront donc celles du rotor principal et du rotor de queue.
14. Les forces horizontales de traînée sur les rotors seront négligées car elles sont très faibles par rapport aux forces de poussée.
15. Le couple de roulis transitoire produit par le battement de pales du rotor principal est négligé car le rotor trouve sa position d'équilibre avant de compléter une révolution.
16. Le mouvement de battement des pales du rotor de queue est considéré négligeable car il est plus faible que celui du rotor principal. Dans la littérature, le mouvement de battement vertical de pales du rotor principal est par fois négligé car le rotor trouve sa position d'équilibre avant de compléter une révolution [36].
17. Pour le calcul des éléments d'inertie du rotor principal, nous considérons que l'axe de rotation du rotor principal coïncide avec l'axe  $z_c$  car autrement les calculs et les expressions de ces éléments deviennent trop compliqués pour les objectifs de la commande.
18. Les contributions aérodynamiques des stabilisateurs (horizontal et vertical) sont négligées dans ce rapport.
19. La force de traînée sur le fuselage sera négligée car elle est très faible. Nous considérons uniquement celle produite par la vitesse induite (déportance sur le fuselage).
20. La distribution de masse des pales des rotors est supposée uniforme. La masse linéique des pales est donc constante.
21. Les perturbations produites par le vent (par exemple celles des rafales) sont négligées initialement. Elles pourront être considérées pour une étude ultérieure de robustesse.

## 3.2 Le Modèle Général de l'Hélicoptère.

Nous obtiendrons d'abord les moments et les produits d'inertie des rotors dans la section 3.2.1. Dans la section 3.2.2 nous passerons à la formulation énergétique du modèle du système à 7 DDL.

### 3.2.1 Les Moments et les Produits d'Inertie.

En général le centre de masse de l'hélicoptère ne coïncide pas avec un axe de symétrie. Les systèmes de référence de la figure 2.2 seront utilisés pour le calcul des éléments d'inertie des rotors de l'hélicoptère. Dans la figure 3.2 nous observons les pales des rotors principal et de queue. Dans cette figure  $r_e$  est la distance radiale du centre de rotation à l'élément différentiel de pale  $dr_e$ ,  $c_M$  et  $c_T$  sont les cordes des rotors principal et de queue, respectivement,  $d$  et  $b$  sont les longueurs des pales des rotors principal et de queue, respectivement. La forme géométrique que nous prenons pour les pales est celle d'un prisme rectangulaire ( $dc_M h_1$  pour le rotor principal et  $bc_T h_2$  pour celui de queue).

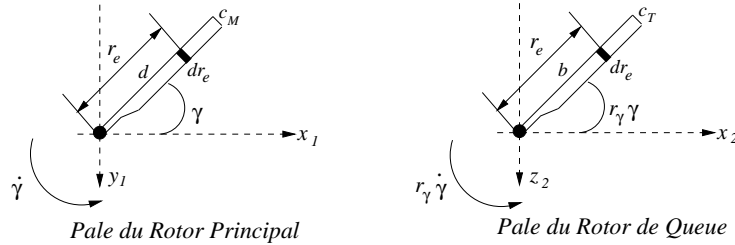


FIG. 3.2 – Les Pales des Rotors.

Nous utilisons les définitions classiques pour les moments (3.1) et les produits d'inertie (3.2). Dans ces équations nous montrons uniquement la notation utilisée pour le rotor principal en ce qui concerne  $I_{xx}$  et  $I_{xy}$  avec  $m_M$  la masse d'une pale du rotor.

$$I_{xx} = \int_0^d [r^2] dm = \int_0^d [r^2] \rho dv = \int_0^d [r^2] \frac{m_M}{d} dr \quad (3.1)$$



$$I_{xy} = \int_0^d [xy] dm = \int_0^d [xy] \rho dv = \int_0^d [xy] \frac{m_M}{d} dr \quad (3.2)$$

Dans (3.1)  $r$  est la distance entre l'élément de masse et l'axe  $x$ . En (3.2)  $x$  et  $y$  sont les distances entre l'élément de masse et les plans  $yz$  et  $zx$ , respectivement. Les définitions pour les élément d'inertie restant sont similaires. A partir de la figure 3.2 en utilisant (3.1) et (3.2) et dans le repère  $(o_1, x_1, y_1, z_1)$  nous pouvons écrire pour le rotor principal en considérant deux pales :

$$I_{xx1} = 2 \int_0^d [r_e^2 \sin^2(\gamma) \frac{m_M}{d}] dr_e = \frac{2}{3} m_M d^2 \sin^2(\gamma) \quad (3.3)$$

$$I_{yy1} = 2 \int_0^d [r_e^2 \cos^2(\gamma) \frac{m_M}{d}] dr_e = \frac{2}{3} m_M d^2 \cos^2(\gamma) \quad (3.4)$$

$$I_{zz1} = 2 \int_0^d [r_e^2 \frac{m_M}{d}] dr_e = \frac{2}{3} m_M d^2 \quad (3.5)$$

$$I_{xy1} = -2 \int_0^d [r_e^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \frac{m_M}{d}] dr_e = -\frac{2}{3} m_M d^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \quad (3.6)$$

$$I_{xz1} = I_{yz1} = 0 \quad (3.7)$$

Pour le rotor de queue et dans le repère  $(o_2, x_2, y_2, z_2)$  nous avons :

$$I_{xx2} = 2 \int_0^b [r_e^2 \sin^2(r_\gamma \gamma) \frac{m_T}{b}] dr_e = \frac{2}{3} m_T b^2 \sin^2(r_\gamma \gamma) \quad (3.8)$$

$$I_{yy2} = 2 \int_0^b [r_e^2 \frac{m_T}{b}] dr_e = \frac{2}{3} m_T b^2 \quad (3.9)$$

$$I_{zz2} = 2 \int_0^b [r_e^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) \frac{m_T}{b}] dr_e = \frac{2}{3} m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) \quad (3.10)$$

$$I_{xy2} = I_{yz2} = 0 \quad (3.11)$$

$$I_{xz2} = -2 \int_0^b [r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) \frac{m_T}{b}] dr_e = -\frac{2}{3} m_T b^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) \quad (3.12)$$

Ici, nous avons utilisé la masse d'une pale du rotor de queue  $m_T$ .

Nous utilisons le théorème des axes parallèles (voir par exemple [42]) pour calculer les moments et produits d'inertie généraux par rapport au système de référence  $(cm, x_c, y_c, z_c)$ . Ces éléments d'inertie sont donnés dans le tableau 3.2.

	<i>Main Rotor</i>	<i>Tail Rotor</i>
$I_{xx}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 \sin^2(\gamma) + 2m_M(y_M^2 + z_M^2)$	$\frac{2}{3}m_T b^2 \sin^2(r_\gamma \gamma) + 2m_T(y_T^2 + z_T^2)$
$I_{yy}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 \cos^2(\gamma) + 2m_M(x_M^2 + z_M^2)$	$\frac{2}{3}m_T b^2 + 2m_T(x_T^2 + z_T^2)$
$I_{zz}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 + 2m_M(x_M^2 + y_M^2)$	$\frac{2}{3}m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2)$
$I_{xy}$	$-\frac{2}{3}m_M d^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) + 2m_M x_M y_M$	$2m_T x_T y_T$
$I_{xz}$	$2m_M x_M z_M$	$-\frac{2}{3}m_T b^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + 2m_T x_T z_T$
$I_{yz}$	$2m_M y_M z_M$	$2m_T y_T z_T$

TAB. 3.2 – Les Eléments d'Inertie Généraux.

Si nous considérons que  $x_M = y_M = 0$  et que  $z_T = 0$  les éléments d'inertie se simplifient et prennent les formes du tableau 3.3.

	<i>Main Rotor</i>	<i>Tail Rotor</i>
$I_{xx}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 \sin^2(\gamma) + 2m_M z_M^2$	$\frac{2}{3}m_T b^2 \sin^2(r_\gamma \gamma) + 2m_T y_T^2$
$I_{yy}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 \cos^2(\gamma) + 2m_M z_M^2$	$\frac{2}{3}m_T b^2 + 2m_T x_T^2$
$I_{zz}$	$\frac{2}{3}m_M d^2$	$\frac{2}{3}m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2)$
$I_{xy}$	$-\frac{2}{3}m_M d^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma)$	$2m_T x_T y_T$
$I_{xz}$	0	$-\frac{2}{3}m_T b^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma)$
$I_{yz}$	0	0

TAB. 3.3 – Les Eléments d'Inertie Simplifiés.

Nous utilisons  $I_{iiR}$  pour noter le moment d'inertie par rapport à l'axe  $i$  et  $I_{ijR}$  pour noter le produit d'inertie par rapport aux axes  $ij$  avec  $R = M, T$ . Les indices  $M$  et  $T$  sont utilisés pour les rotors principal et de queue, respectivement. La forme des tenseurs d'inertie des rotors principal et de queue est donnée ci-dessous en (3.13) et (3.14), respectivement. En ce qui concerne le tenseur d'inertie du fuselage, nous considérons qu'il est constant et diagonal (voir équation (3.15)) <sup>7</sup>.

$$I_M = \begin{bmatrix} I_{xxM} & -I_{xyM} & -I_{xzM} \\ -I_{xyM} & I_{yyM} & -I_{yzM} \\ -I_{xzM} & -I_{yzM} & I_{zzM} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$I_T = \begin{bmatrix} I_{xxT} & -I_{xyT} & -I_{xzT} \\ -I_{xyT} & I_{yyT} & -I_{yzT} \\ -I_{xzT} & -I_{yzT} & I_{zzT} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$I_F = \begin{bmatrix} I_{xxF} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyF} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzF} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.2.2 Formulation du Modèle Général.

Considérons d'abord le vecteur de coordonnées généralisées  $q \in \mathbb{R}^7$  défini par :

$$q(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  définissent la position du centre de masse de l'hélicoptère par rapport au repère inertiel  $(o, x, y, z)$  (voir figure 2.2). L'angle d'azimut des pales du rotor principal

---

<sup>7</sup>Dans l'annexe B nous calculons de manière approximative les moments d'inertie du fuselage.

est  $\gamma$ . L'orientation de l'hélicoptère est donnée par les angles d'Euler  $\phi$  représentant l'angle de lacet,  $\theta$  l'angle de tangage et  $\psi$  l'angle de roulis. Le vecteur d'angles d'Euler est exprimé dans le repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  lié au centre de masse de l'hélicoptère. Il est noté  $\eta_c$  :

$$\eta_c = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (3.17)$$

Dans le cas de l'hélicoptère VARIO, le vecteur d'entrées  $u \in \mathbb{R}^4$  est donné par le vecteur suivant.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_M \\ h_T \\ B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Il s'agit donc d'un système sous-actionné où  $h_M$  et  $h_T$  sont les leviers collectifs des rotors principal et de queue respectivement.

**Remarque 1 .** *La dynamique du moteur est plus lente que celle du rotor principal. Dans certains hélicoptères réels une troisième entrée indépendante (le levier de gaz) agit sur le débit de combustible vers le moteur et donc sur sa puissance. Cependant, dans les hélicoptères à modèle réduit il existe un couplage entre la puissance du moteur et l'angle de pas collectif du rotor principal (entrée  $u_1$ ) comme une conséquence des conditions de manœuvrabilité.*  $\circ$

Prenons les matrices suivantes définissant les rotations de base au tour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  et d'angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ , respectivement [13]<sup>8</sup>.

$$R_{x\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & s_\psi \\ 0 & -s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

---

<sup>8</sup>Nous prenons par la suite la notation simplifiée  $s_i = \sin(i)$  et  $c_i = \cos(i)$ .

$$R_{y\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$R_{z\phi} = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A partir des axes  $x_0y_0z_0$  correspondant à un repère initialement parallèle à l'inertiel et fixe au centre de masse de l'hélicoptère,  $x'y'z'$  représentent les axes obtenus après la première rotation  $R_{z_0\phi}$ ,  $x''y''z''$  ceux obtenus après la deuxième rotation  $R_{y'\theta}$  et  $x_cy_cz_c$  les axes après la troisième et dernière rotation  $R_{x''\psi}$ . Soit  $X \in \mathbb{R}^3$  un vecteur qui a son origine au centre de masse de l'hélicoptère et ses composantes définies par rapport aux axes  $x_0y_0z_0$ ,  $X'$  sa représentation dans le repère obtenu à partir de la première rotation  $R_{z_0\phi}$ ,  $X''$  celle après la deuxième rotation  $R_{y'\theta}$  et  $X_c$  sa représentation finale. Nous pouvons écrire la relation entre les différentes représentations du vecteur  $X$  de la manière suivante :

$$X' = R_{z_0\phi}X \quad (3.22)$$

$$X'' = R_{y'\theta}X' \quad (3.23)$$

$$X_c = R_{x''\psi}X'' \quad (3.24)$$

Il est donc clair que :

$$X_c = R_{x''\psi}R_{y'\theta}R_{z_0\phi}X \quad (3.25)$$

La matrice de rotation  $R^T = R_{x''\psi}R_{y'\theta}R_{z_0\phi}$  nous permet d'obtenir la représentation du vecteur  $X$  dans le dernier repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  fixe au centre de masse de l'hélicoptère, i.e.  $R^T : (o, x, y, z) \rightarrow (cm, x_c, y_c, z_c)$ . Il est souvent utilisé la transformation inverse,

c'est à dire la matrice  $R : (cm, x_c, y_c, z_c) \rightarrow (o, x, y, z)$  <sup>9</sup>. La matrice  $R^T$  est obtenue en prenant une convention  $xyz$  de classe 321 d'angles d'Euler souvent utilisée dans les analyses aérodynamiques <sup>10</sup> [13].

La matrice  $R \in SO(3)$  <sup>11</sup> est facilement obtenue par une simple multiplication et transposition de matrices :

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi \\ -s_\theta & s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Si nous supposons que le vecteur  $q$  est formé de deux composantes  $r$  et  $p$  :

$$q(t) = [r^T \ p^T]^T \quad (3.27)$$

où

$$r(t) = [x \ y \ z]^T \quad (3.28)$$

et

$$p(t) = [\phi \ \theta \ \psi \ \gamma]^T \quad (3.29)$$

la dérivée de  $q$  par rapport au temps  $t$  s'écrira :

---

<sup>9</sup>Ces transformations sont connues comme des transformations rigides. Dans une transformation rigide la matrice de transformation reliant les différents repères satisfait la condition  $R^{-1} = R^T$  qui caractérise une matrice orthogonale. Les colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires et mutuellement orthogonales et son déterminant  $Det$  peut prendre les valeurs  $-1$  ou  $+1$ .

<sup>10</sup>Une convention  $xyz$  signifie que les trois axes du système de référence sont utilisés dans l'orientation de l'hélicoptère. La classe 321 signifie que la première rotation s'effectue par rapport au troisième axe ( $z$ ), la deuxième rotation par rapport au deuxième axe ( $y$ ) du nouveau système et la troisième rotation par rapport au premier axe ( $x$ ) du avant-dernier système, i.e. Les rotations sont faites de manière successive dans le nouveau repère obtenu à partir de la rotation précédente.

<sup>11</sup> $SO(3)$  dénote le groupe Spécial des matrices Orthogonales d'ordre 3 avec  $Det = +1$ . Une matrice ayant  $Det = -1$  ne peut pas représenter un mouvement d'un corps rigide car une inversion (réflexion) des axes du système de référence y est associée.

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Nous remarquons que la première composante de cette dérivée est la vitesse de translation  $V$  exprimée dans le repère inertiel. La deuxième composante doit être traitée avec un peu plus de détail. Afin de trouver une expression définissant le vecteur  $\omega_c$  qui est le vecteur de vitesse angulaire de l'hélicoptère exprimé dans le repère lié à l'hélicoptère (voir équation (3.31)) nous considérons les point suivant :

- La vitesse angulaire  $\omega_\psi$  est développée suivant l'axe  $x_c$  du corps de l'hélicoptère. Nous avons donc  $\dot{\psi}_c = [\dot{\psi} \ 0 \ 0]^T$ .
- La vitesse angulaire  $\omega_\theta$  est développée suivant l'axe intermédiaire  $y'$  dans le plan final  $y_c z_c$ . Nous avons donc  $\dot{\theta}_c = R_{x''\phi} R_{y'\theta} [0 \ \theta_{y'} \ 0]^T$ .
- La vitesse angulaire  $\omega_\phi$  est développée suivant l'axe  $z$  inertiel. Nous avons donc  $\dot{\phi}_c = R^T [0 \ 0 \ \dot{\phi}_z]^T$ .

Le vecteur de vitesse angulaire  $\omega_c$  est donc donné en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées par la paramétrisation locale suivante :

$$\omega_c = \begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\phi}s_\theta \\ \dot{\theta}c_\psi + \dot{\phi}c_\theta s_\psi \\ \dot{\phi}c_\theta c_\psi - \dot{\theta}s_\psi \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où  $\omega_{ic}$   $i = x, y, z$  représente la vitesse angulaire par rapport à l'axe  $i$  dans le repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  lié au corps de l'hélicoptère. Considérons que :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A partir de (3.31) nous avons donc :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 & 0 \\ c_\theta s_\psi & c_\psi & 0 & 0 \\ c_\theta c_\psi & -s_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

nous trouvons que  $\omega = J_0 \dot{p}$  avec

$$J_0 = \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 & 0 \\ c_\theta s_\psi & c_\psi & 0 & 0 \\ c_\theta c_\psi & -s_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

nous pouvons donc écrire :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ J_0^{-1} \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & J_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

En définissant :

$$J = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

et avec

$$\tau_c = \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

nous pouvons écrire :

$$\tau_c = J \dot{q} \quad (3.38)$$

L'équation (3.38) définit à travers la matrice  $J$ , la relation entre le vecteur de vitesses ( $\dot{q}$ ) dans l'espace  $\mathcal{G}$  de coordonnées *généralisées* et celui ( $\tau_c$ ) dans l'espace  $\mathcal{C}$



de coordonnées *cartésiennes*. Nous utilisons le principe du travail virtuel en notant  $F_c$  ( $Q$ , respectivement) le vecteur de forces externes appliquées à l'hélicoptère (le vecteur de forces généralisées, respectivement),  $\delta\tilde{X}$  ( $\delta q$ , respectivement) le déplacement virtuel dans  $\mathcal{C}$  (dans  $\mathcal{G}$ , respectivement). Ici,  $\frac{\delta\tilde{X}}{\delta t} = \tau_c$ .

En général, le vecteur  $F_c$  peut s'écrire  $F_c = [f_{cm}^T \ \tau_{cm}^T]^T$  où  $f_{cm}$  représente les forces et  $\tau_{cm}$  les couples par rapport au système de référence fixe à l'hélicoptère au centre de masse. Dans notre cas,  $f_{cm} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\tau_{cm} \in \mathbb{R}^4$  et nous notons  $f_{cm} = [f_{xc} \ f_{yc} \ f_{zc}]^T$  et  $\tau_{cm} = [\tau_{xc} \ \tau_{yc} \ \tau_{zc} \ \tau_\gamma]^T$ . Nous exprimons le vecteur des forces externes de la manière suivante. Les trois premières composantes du vecteur (celles des forces) seront exprimées par rapport au système de référence inertiel et les quatre dernières composantes (celles des couples) seront exprimées par rapport au système de référence du corps de l'hélicoptère localisé au centre de masse.

En définissant :

$$R_{ext} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

nous pouvons écrire :

$$F = R_{ext} F_c \quad (3.40)$$

Nous pouvons écrire que le travail virtuel effectué dans l'espace  $\mathcal{G}$  est égal à celui effectué dans l'espace  $\mathcal{C}$  :

$$F^T \delta\mu = Q^T \delta q \quad (3.41)$$

Si nous exprimons (3.41) en termes de la puissance virtuelle, nous pouvons écrire :

$$F^T (\delta mu / \delta t) = Q^T (\delta q / \delta t) \quad (3.42)$$

et en utilisant (3.38) dans (3.42) nous obtenons :

$$F^T J(\delta q/dt) = Q^T(\delta q/dt) \quad (3.43)$$

d'où la relation entre le vecteur de forces généralisées et celui de forces externes appliquées au système :

$$Q = J^T F = J^T R_{ext} F_c \quad (3.44)$$

Si nous écrivons :

$$J_R^T = J^T R_{ext} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & J_0^T \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

nous avons finalement :

$$Q = J_R^T F_c \quad (3.46)$$

Le modèle utilisé dans ce rapport est un modèle obtenu par une formulation basée sur l'énergie du système qui considère l'énergie cinétique de l'hélicoptère  $T$  comme étant constituée par une énergie cinétique de translation du centre de masse de l'hélicoptère  $T_t$  et par une énergie cinétique de rotation  $T_r$  du système autour de ce centre de masse.

$$T = T_t + T_r \quad (3.47)$$

où

$$T_t = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \dot{r} \quad (3.48)$$

Dans (3.48),  $r = [x \ y \ z]^T$  est le vecteur de position du centre de masse de l'hélicoptère par rapport au système de référence inertiel et  $m$  est la masse de l'hélicoptère. L'énergie cinétique de rotation est considérée formée par celle du fuselage  $T_{rF}$ , celle du rotor principal  $T_{rM}$  et celle du rotor de queue  $T_{rT}$  :

$$T_{rF} = \frac{1}{2} \omega_c^T I_F \omega_c \quad (3.49)$$

où  $I_F$  est le tenseur d'inertie du fuselage de l'hélicoptère dans le repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$ . L'énergie cinétique pour le rotor principal est donnée par :

$$T_{rM} = \frac{1}{2} (\omega_c + \dot{\gamma} e_{zc})^T I_M (\omega_c + \dot{\gamma} e_{zc}) \quad (3.50)$$

Dans (3.50),  $e_{zc}$  représente un vecteur unitaire parallèle à l'axe  $z_c$  et  $I_M$  est le tenseur d'inertie des pales du rotor principal par rapport au repère localisé au centre de masse de l'hélicoptère. Pour le rotor de queue nous écrivons :

$$T_{rT} = \frac{1}{2} (\omega_c + r_\gamma \dot{\gamma} e_{yc})^T I_T (\omega_c + r_\gamma \dot{\gamma} e_{yc}) \quad (3.51)$$

où  $e_{yc}$  est un vecteur unitaire parallèle à l'axe  $y_c$  et  $I_T$  est le tenseur d'inertie des pales du rotor de queue par rapport au repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$ .

Nous considérons que l'énergie potentielle de l'hélicoptère est constituée de l'énergie potentielle gravitationnelle  $U_g$  et de l'énergie élastique  $U_b$  reliée au battement vertical des pales du rotor principal.

$$U = U_g + U_b \quad (3.52)$$

avec

$$U_g = -mgz \quad (3.53)$$

et

$$U_b = k\beta^2 \quad (3.54)$$

Le signe négatif de l'équation (3.53) est dû à la direction que nous avons définie pour l'axe  $z$ . La raideur des pales du rotor principal est notée par  $k$  dans l'équation (3.54) et l'angle  $\beta$  est donné par l'équation (2.5). Nous pouvons écrire maintenant les équations des énergies cinétique et potentielle suivantes :

$$T = \frac{1}{2}[m\dot{r}^T\dot{r} + \omega_c^T I_F \omega_c + (\omega_c + \dot{\gamma}e_{zc})^T I_M (\omega_c + \dot{\gamma}e_{zc}) + (\omega_c + r_\gamma \dot{\gamma}e_{yc})^T I_T (\omega_c + r_\gamma \dot{\gamma}e_{yc})] \quad (3.55)$$

et

$$U = -mgz + k(a_0 - a_{1s} \cos \gamma - b_{1s} \sin \gamma)^2 \quad (3.56)$$

Nous pouvons maintenant calculer le Lagrangien  $L = T - U$  et obtenir les équations du mouvement de l'hélicoptère à partir de :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.57)$$

où  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Cette méthode sera utilisée dans le cas du système hélicoptère-plateforme. Ici nous obtiendrons les équations du mouvement d'une façon différente. A partir de (3.55) nous pouvons écrire :

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^T N \dot{r} + \frac{1}{2}\omega_c^T (I_F + I_M + I_T) \omega_c + \omega_c^T I_M \dot{\gamma}e_{zc} + \omega_c^T I_T r_\gamma \dot{\gamma}e_{yc} + \frac{1}{2}(\dot{\gamma}e_{zc})^T I_M \dot{\gamma}e_{zc} + \frac{1}{2}(r_\gamma \dot{\gamma}e_{yc})^T I_T r_\gamma \dot{\gamma}e_{yc} \quad (3.58)$$

où  $N \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est une matrice diagonale avec  $N_{ii} = m$ . Nous trouvons donc :

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^T N \dot{r} + \frac{1}{2}\omega_c^T (I_F + I_M + I_T) \omega_c + \frac{1}{2}(I_{zzM} + r_\gamma^2 I_{yyT})\dot{\gamma}^2 + \omega_c^T I \dot{\gamma} \quad (3.59)$$

où  $I$  est le vecteur donné par (3.60).

$$I = \begin{bmatrix} -I_{xz}M - r_\gamma I_{xy}T \\ -I_{yz}M + r_\gamma I_{yy}T \\ I_{zz}M - r_\gamma I_{yz}T \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

En considérant le vecteur  $\tau_c = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \omega_{xc} \ \omega_{yc} \ \omega_{zc} \ \dot{\gamma}]^T$  et à partir de (3.59) nous pouvons écrire :

$$T = \frac{1}{2} \tau_c^T \mathcal{I} \tau_c \quad (3.61)$$

où la matrice  $\mathcal{I}$  est la matrice d'inertie calculée dans le repère lié au corps de l'hélicoptère :

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} mI_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & (I_M + I_T + I_F)_{3 \times 3} & \begin{matrix} -I_{xz}M - I_{xy}T^r\gamma \\ -I_{yz}M + I_{yy}T^r\gamma \\ I_{zz}M - I_{yz}T^r\gamma \end{matrix} \\ 0_{1 \times 3} & \begin{matrix} -I_{xz}M - I_{xy}T^r\gamma \\ -I_{yz}M + I_{yy}T^r\gamma \\ I_{zz}M - I_{yz}T^r\gamma \end{matrix} & \begin{matrix} -I_{xz}M - I_{xy}T^r\gamma \\ -I_{yz}M + I_{yy}T^r\gamma \\ I_{zz}M - I_{yz}T^r\gamma \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

en prenant en compte l'équation (3.38) nous écrivons :

$$T = \frac{1}{2} \tau_c^T \mathcal{I} \tau_c = \frac{1}{2} (J\dot{q})^T \mathcal{I} (J\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T (J^T \mathcal{I} J) \dot{q} \quad (3.63)$$

La matrice  $M = J^T \mathcal{I} J$  est la matrice d'inertie du système donnée par l'équation (3.64)<sup>12</sup>. Nous définissons les constantes du tableau 3.4 afin de simplifier l'écriture du modèle.

---

<sup>12</sup>Nous utilisons la notation simplifiée définie précédemment  $s_i = \sin(i)$ ,  $c_i = \cos(i)$  pour  $i = \theta, \psi$  et  $s_\gamma = \sin(\gamma)$ ,  $c_\gamma = \cos(\gamma)$ ,  $s_{c_6\gamma} = \sin(c_6\gamma)$  et  $c_{c_6\gamma} = \cos(c_6\gamma)$ .

$c_i$	<i>Expression Analytique</i>	$c_i$	<i>Expression Analytique</i>
$c_0$	$m$	$c_8$	$-2r_\gamma m_T x_T y_T$
$c_1$	$2m_M z_M^2 + 2m_T y_T^2 + I_{xxF}$	$c_9$	$r_\gamma (\frac{2}{3}m_T b^2 + 2m_T x_T^2)$
$c_2$	$\frac{2}{3}m_M d^2$	$c_{10}$	$\frac{2}{3}m_M d^2 + r_\gamma^2 (\frac{2}{3}m_T b^2 + 2m_T x_T^2)$
$c_3$	$\frac{2}{3}m_T b^2$	$c_{11}$	$-mg$
$c_4$	$r_\gamma$	$c_{12}$	$2ka_0 a_{1s}$
$c_5$	$-2m_T x_T y_T$	$c_{13}$	$-2ka_0 b_{1s}$
$c_6$	$2m_M z_M^2 + 2m_T x_T^2 + \frac{2}{3}m_T b^2 + I_{yyF}$	$c_{14}$	$2k(b_{1s}^2 - a_{1s}^2)$
$c_7$	$2m_T(x_T^2 + y_T^2) + \frac{2}{3}m_M d^2 + I_{zzF}$	$c_{15}$	$2ka_{1s} b_{1s}$

TAB. 3.4 – Les Constantes du Modèle Général.

La matrice d'inertie prend la forme suivante :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ 0 & 0 & 0 & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ 0 & 0 & 0 & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

où  $M_{11} = M_{22} = M_{33} = c_0$ ,  $M_{ij} = M_{ji}$  et :

$$M_{44} = c_1 s_\theta^2 + c_2 (s_\theta^2 s_\gamma^2 + c_\theta^2 s_\psi^2 c_\gamma^2 - 2s_\theta c_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 (s_\theta^2 s_{c4\gamma}^2 - 2s_\theta c_\theta c_\psi s_{c4\gamma} c_{c4\gamma} + c_\theta^2 c_\psi^2 c_{c4\gamma}^2) - 2c_5 s_\theta c_\theta s_\psi + c_6 c_\theta^2 s_\psi^2 + c_7 c_\theta^2 c_\psi^2$$

$$M_{45} = c_2 (-s_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma + c_\theta s_\psi c_\psi c_\gamma^2) + c_3 (s_\theta s_\psi s_{c4\gamma} c_{c4\gamma} - c_\theta s_\psi c_\psi c_{c4\gamma}^2) - c_5 s_\theta c_\psi + (c_6 - c_7) c_\theta s_\psi c_\psi$$

$$M_{46} = -c_1 s_\theta + c_2 (-s_\theta s_\gamma^2 + c_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 (-s_\theta s_{c4\gamma}^2 + c_\theta c_\psi s_{c4\gamma} c_{c4\gamma}) + c_5 c_\theta s_\psi$$

$$M_{47} = c_2 c_\theta c_\psi - c_8 s_\theta + c_9 c_\theta s_\psi$$

$$M_{55} = c_2 c_\psi^2 c_\gamma^2 + c_3 s_\psi^2 c_{c4\gamma}^2 + c_6 c_\psi^2 + c_7 s_\psi^2$$

$$M_{56} = c_2 c_\psi s_\gamma c_\gamma - c_3 s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + c_5 c_\psi$$

$$M_{57} = -c_2 s_\psi + c_9 c_\psi$$

$$M_{66} = c_1 + c_2 s_\gamma^2 + c_3 s_{c_4\gamma}^2$$

$$M_{67} = c_8$$

$$M_{77} = c_{10}$$

Les éléments de la matrice de Coriolis sont calculés par les expressions suivantes [50] :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (3.65)$$

où les termes  $c_{ijk}$  sont appelés les *Symboles de Christoffel* (de première classe), avec  $i, j, k = 1, \dots, 7$ .

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right] \quad (3.66)$$

Les matrices  $M$  et  $C$  vérifient la propriété telle que  $\dot{M} - 2C \in \mathcal{SS}(7)$ <sup>13</sup>. Cette propriété sera très utile pour la conception des lois de commande.

La matrice de Coriolis est donnée par (3.67).

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & C_{56} & C_{57} \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & C_{65} & C_{66} & C_{67} \\ 0 & 0 & 0 & C_{74} & C_{75} & C_{76} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

---

<sup>13</sup>  $\mathcal{SS}(n)$  représente l'ensemble de matrices antisymétriques d'ordre  $n \times n$ . Une matrice  $S$  est dite antisymétrique si et seulement si  $S + S^T = 0$ .

où les composantes de  $C$  sont données ci-dessous.

$$C_{44} = [c_1 s_\theta c_\theta + c_2 [s_\theta c_\theta (s_\gamma^2 - s_\psi^2 c_\gamma^2) + s_\psi s_\gamma c_\gamma (s_\theta^2 - c_\theta^2)] + c_3 [s_\theta c_\theta (s_{c_4\gamma}^2 - c_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2) + c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} (s_\theta^2 - c_\theta^2)] + c_5 (s_\theta^2 - c_\theta^2) s_\psi + c_6 s_\theta c_\theta s_\psi^2 - c_7 s_\theta c_\theta c_\psi^2] \dot{\theta} + [c_2 (c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_\gamma^2 - s_\theta c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 (s_\theta c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_{c_4\gamma}^2) - c_5 s_\theta c_\theta c_\psi + (c_6 - c_7) c_\theta^2 s_\psi c_\psi] \dot{\psi} + [c_2 [(s_\theta^2 - c_\theta^2 s_\psi^2) s_\gamma c_\gamma + s_\theta c_\theta s_\psi (s_\gamma^2 - c_\gamma^2)] + c_3 c_4 [s_\theta c_\theta c_\psi (s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) + (s_\theta^2 - c_\theta^2 c_\psi^2) s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}]] \dot{\gamma}$$

$$C_{45} = [c_1 s_\theta c_\theta + c_2 [s_\theta c_\theta (s_\gamma^2 - s_\psi^2 c_\gamma^2) + s_\psi s_\gamma c_\gamma (s_\theta^2 - c_\theta^2)] + c_3 [s_\theta c_\theta (s_{c_4\gamma}^2 - c_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2) + c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} (s_\theta^2 - c_\theta^2)] + c_5 (s_\theta^2 - c_\theta^2) s_\psi + c_6 s_\theta c_\theta s_\psi^2 - c_7 s_\theta c_\theta c_\psi^2] \dot{\phi} + [-c_2 (c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma + s_\theta s_\psi c_\psi c_\gamma^2) + c_3 (c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + s_\theta s_\psi c_\psi c_{c_4\gamma}^2) - c_5 c_\theta c_\psi - (c_6 - c_7) s_\theta s_\psi c_\psi] \dot{\theta} + \frac{1}{2} [c_2 (c_\theta c_\psi^2 c_\gamma^2 - c_\theta s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi^2 c_\gamma^2) + c_3 (c_\theta s_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2 - c_\theta s_{c_4\gamma}^2 - c_\theta c_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2) + (c_6 - c_7) c_\theta (c_\psi^2 - s_\psi^2)] \dot{\psi} + \frac{1}{2} [-2c_2 (s_\theta c_\psi c_\gamma^2 + c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma) - c_3 c_4 [s_\theta s_\psi (s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) - 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_8 c_\theta - c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\gamma}$$

$$C_{46} = [c_2 (c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_\gamma^2 - s_\theta c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 (s_\theta c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_{c_4\gamma}^2) - c_5 s_\theta c_\theta c_\psi + (c_6 - c_7) c_\theta^2 s_\psi c_\psi] \dot{\phi} + \frac{1}{2} [c_2 (c_\theta c_\psi^2 c_\gamma^2 - c_\theta s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi^2 c_\gamma^2) + c_3 (c_\theta s_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2 - c_\theta s_{c_4\gamma}^2 - c_\theta c_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2) + (c_6 - c_7) c_\theta (c_\psi^2 - s_\psi^2)] \dot{\theta} + [c_2 c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma - c_3 c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + c_5 c_\theta c_\psi] \dot{\psi} + \frac{1}{2} [-2c_2 (c_\theta s_\psi s_\gamma^2 + s_\theta s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4 [c_\theta c_\psi (c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - 2s_\theta s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] + c_9 c_\theta c_\psi] \dot{\gamma}$$

$$C_{47} = [c_2 [(s_\theta^2 - c_\theta^2 s_\psi^2) s_\gamma c_\gamma + s_\theta c_\theta s_\psi (s_\gamma^2 - c_\gamma^2)] + c_3 c_4 [s_\theta c_\theta c_\psi (s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) + (s_\theta^2 - c_\theta^2 c_\psi^2) s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}]] \dot{\phi} + \frac{1}{2} [-2c_2 (s_\theta c_\psi c_\gamma^2 + c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma) - c_3 c_4 [s_\theta s_\psi (s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) - 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_8 c_\theta - c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\theta} + \frac{1}{2} [-2c_2 (c_\theta s_\psi s_\gamma^2 + s_\theta s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4 [c_\theta c_\psi (c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - 2s_\theta s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] + c_9 c_\theta c_\psi] \dot{\psi}$$

$$C_{54} = [-c_1 s_\theta c_\theta - c_2 [s_\theta c_\theta (s_\gamma^2 - s_\psi^2 c_\gamma^2) + s_\psi] s_\gamma c_\gamma (s_\theta^2 - c_\theta^2)] - c_3 [s_\theta c_\theta (s_{c_4\gamma}^2 - c_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2) + c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} (s_\theta^2 - c_\theta^2)] - c_5 (s_\theta^2 - c_\theta^2) s_\psi - c_6 s_\theta c_\theta s_\psi^2 + c_7 s_\theta c_\theta c_\psi^2] \dot{\phi} + \frac{1}{2} [c_1 c_\theta + c_2 [2s_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma + c_\theta c_\gamma^2 (c_\psi^2 - s_\psi^2) + c_\theta s_\gamma^2] + c_3 [2s_\theta c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + c_\theta c_{c_4\gamma}^2 (s_\psi^2 - c_\psi^2) + c_\theta s_{c_4\gamma}^2] + 2c_5 s_\theta s_\psi + (c_6 - c_7) c_\theta (c_\psi^2 - s_\psi^2)] \dot{\psi} + \frac{1}{2} [2c_2 (s_\theta) c_\psi s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4 [s_\theta s_\psi (c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) + 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] + c_8 c_\theta + c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\gamma}$$

$$C_{55} = [-c_2 c_\gamma^2 + c_3 c_{c_4\gamma}^2 - (c_6 - c_7)] s_\psi c_\psi \dot{\psi} + [-c_2 c_\psi^2 s_\gamma c_\gamma - c_3 c_4 s_\psi^2 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\gamma}$$

$$C_{56} = \frac{1}{2} [c_1 c_\theta + c_2 [2s_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma + c_\theta c_\gamma^2 (c_\psi^2 - s_\psi^2) + c_\theta s_\gamma^2] + c_3 [2s_\theta c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + c_\theta c_{c_4\gamma}^2 (s_\psi^2 - c_\psi^2) + c_\theta s_{c_4\gamma}^2] + 2c_5 s_\theta s_\psi + (c_6 - c_7) c_\theta (c_\psi^2 - s_\psi^2)] \dot{\phi} + [-c_2 c_\gamma^2 + c_3 c_{c_4\gamma}^2 - (c_6 - c_7)] s_\psi c_\psi \dot{\theta} + [-c_2 s_\psi s_\gamma c_\gamma - c_3 c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - c_5 s_\psi] \dot{\psi} + \frac{1}{2} [-2c_2 c_\psi s_\gamma^2 - c_3 c_4 s_\psi (c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\gamma}$$



$$C_{57} = \frac{1}{2}[2c_2(s_\theta)c_\psi s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma] + c_3 c_4[s_\theta s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) + 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] + c_8 c_\theta + c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\phi} + [-c_2 c_\psi^2 s_\gamma c_\gamma - c_3 c_4 s_\psi^2 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\theta} + \frac{1}{2}[-2c_2 c_\psi s_\gamma^2 - c_3 c_4 s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\psi}$$

$$C_{64} = [-c_2(c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_\gamma^2 - s_\theta c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma) - c_3(s_\theta c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_{c_4\gamma}^2) + c_5 s_\theta c_\theta c_\psi - (c_6 - c_7)c_\theta^2 s_\psi c_\psi] \dot{\phi} + \frac{1}{2}[-c_1 c_\theta - c_2[2s_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma + c_\theta c_\gamma^2(c_\psi^2 - s_\psi^2) + c_\theta s_\gamma^2] - c_3[2s_\theta c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} + c_\theta c_{c_4\gamma}^2(s_\psi^2 - c_\psi^2) + c_\theta s_{c_4\gamma}^2] - 2c_5 s_\theta s_\psi - (c_6 - c_7)c_\theta(c_\psi^2 - s_\psi^2)] \dot{\theta} + \frac{1}{2}[2c_2(c_\theta s_\psi c_\gamma^2 - s_\theta s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4[c_\theta c_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - 2s_\theta s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_9 c_\theta c_\psi] \dot{\gamma}$$

$$C_{65} = \frac{1}{2}[-c_1 c_\theta + c_2[-2s_\theta s_\psi s_\gamma c_\gamma + c_\theta c_\gamma^2(s_\psi^2 - c_\psi^2) - c_\theta s_\gamma^2] + c_3[-2s_\theta c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - 2c_\theta s_\psi^2 c_{c_4\gamma}^2] - 2c_5 s_\theta s_\psi + (c_6 - c_7)c_\theta(s_\psi^2 - c_\psi^2)] \dot{\phi} + [c_2 c_\gamma^2 - c_3 c_{c_4\gamma}^2 + (c_6 - c_7)] s_\psi c_\psi \dot{\theta} + \frac{1}{2}[-2c_2 c_\psi c_\gamma^2 + c_3 c_4 s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\gamma}$$

$$C_{66} = [c_2 s_\gamma c_\gamma + c_3 c_4 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\gamma}$$

$$C_{67} = \frac{1}{2}[2c_2(c_\theta s_\psi c_\gamma^2 - s_\theta s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4[c_\theta c_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - 2s_\theta s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_9 c_\theta c_\psi] \dot{\phi} + \frac{1}{2}[-2c_2 c_\psi s_\gamma^2 - c_3 c_4 s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\theta} + [c_2 s_\gamma c_\gamma + c_3 c_4 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\psi}$$

$$C_{74} = [-c_2[(s_\theta^2 - c_\theta^2 s_\psi^2) s_\gamma c_\gamma + s_\theta c_\theta s_\psi(s_\gamma^2 - c_\gamma^2)] - c_3 c_4[s_\theta c_\theta c_\psi(s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) + (s_\theta^2 - c_\theta^2 c_\psi^2) s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\phi} + \frac{1}{2}[-2c_2(s_\theta c_\psi s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma) - c_3 c_4[s_\theta s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) + 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_8 c_\theta - c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\theta} + [c_2(c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_\gamma^2 - s_\theta c_\theta c_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3(s_\theta c_\theta s_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma} - c_\theta^2 s_\psi c_\psi c_{c_4\gamma}^2) - c_5 s_\theta c_\theta c_\psi + (c_6 - c_7)c_\theta^2 s_\psi c_\psi] \dot{\psi}$$

$$C_{75} = \frac{1}{2}[-2c_2(s_\theta c_\psi s_\gamma^2 - c_\theta s_\psi c_\psi s_\gamma c_\gamma) + c_3 c_4[s_\theta s_\psi(s_{c_4\gamma}^2 - c_{c_4\gamma}^2) - 2c_\theta s_\psi c_\psi s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] - c_8 c_\theta - c_9 s_\theta s_\psi] \dot{\phi} + [c_2 c_\psi^2 s_\gamma c_\gamma + c_3 c_4 s_\psi^2 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\theta} + \frac{1}{2}[-2c_2 c_\psi c_\gamma^2 + c_3 c_4 s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\psi}$$

$$C_{76} = \frac{1}{2}[-2c_2(c_\theta s_\psi c_\gamma^2 - s_\theta s_\gamma c_\gamma) - c_3 c_4[c_\theta c_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - 2s_\theta s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] + c_9 c_\theta c_\psi] \dot{\phi} + \frac{1}{2}[-2c_2 c_\psi c_\gamma^2 + c_3 c_4 s_\psi(c_{c_4\gamma}^2 - s_{c_4\gamma}^2) - c_9 s_\psi] \dot{\theta} + [-c_2 s_\gamma c_\gamma - c_3 c_4 s_{c_4\gamma} c_{c_4\gamma}] \dot{\psi}$$

Le vecteur de forces conservatives est calculé par l'équation suivante :

$$G = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.68)$$

où  $i = 1, \dots, 7$ . Nous trouvons donc :

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_7 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

où les composantes de  $G$  sont :

$$G_3 = c_{11}$$

$$G_7 = c_{12}s_\gamma + c_{13}c_\gamma + c_{14}s_\gamma c_\gamma + c_{15}(c_\gamma^2 - s_\gamma^2)$$

Les composantes du vecteur de forces externes  $F_c$  en fonction des forces et des couples aérodynamiques mentionnés dans la section 2.2 sont montrées dans le tableau 3.5 pour le cas le plus général du vol de l'hélicoptère.

$F_c$	<i>Expression Analytique</i>
$f_{xc}$	$T_M \cos(u_4) \sin(u_3) + T_{Tx}$
$f_{yc}$	$T_M \cos(u_3) \sin(u_4) + T_{Ty}$
$f_{zc}$	$T_M \cos(u_3) \cos(u_4) + D_{vi} + T_{Tz}$
$\tau_{xc}$	$kb_{1s} + T_M \cos(u_3) \cos(u_4) y_M - T_M \cos(u_3) \sin(u_4) z_M + T_{Tz} y_T - T_{Ty} z_T$
$\tau_{yc}$	$ka_{1s} + C_T + T_M \cos(u_4) \sin(u_3) z_M - T_M \cos(u_3) \cos(u_4) x_M + T_{Tx} z_T - T_{Tz} x_T$
$\tau_{zc}$	$T_M \cos(u_3) \sin(u_4) x_M - T_M \cos(u_4) \sin(u_3) y_M + T_{Ty} x_T - T_{Tx} y_T$
$\tau_\gamma$	$C_{mot} + C_M$

TAB. 3.5 – Les Composantes du Vecteur de Forces Externes.

Dans ce tableau  $T_M$ ,  $T_T$ ,  $C_M$ ,  $C_T$  et  $C_{mot}$  sont donnés par leurs valeurs algébriques. Nous pouvons donc écrire les composantes du vecteur  $F_c$  d'une façon plus simplifiée dans le tableau 3.6 en considérant que :

- La force  $T_T$  est parallèle à l'axe  $y_2$ .
- Les entrées  $u_3$  et  $u_4$  sont petites.
- Les centres des rotors sont localisés d'après  $x_M = y_M = z_T = 0$ .

$F_c$	<i>Expression Analytique</i>
$f_{xc}$	$T_M u_3$
$f_{yc}$	$T_M u_4 + T_T$
$f_{zc}$	$T_M + D_{vi}$
$\tau_{xc}$	$kb_{1s} - T_M u_4 z_M$
$\tau_{yc}$	$ka_{1s} + C_T + T_M u_3 z_M$
$\tau_{zc}$	$T_T x_T$
$\tau_\gamma$	$C_{mot} + C_M$

TAB. 3.6 – Les Composantes du Vecteur de Forces Externes (Simplifiées).

Si nous considérons que le vol de l'hélicoptère se restreindra aux cas des faibles vitesses (voir section 3.1) pour les vols en palier et vertical, les expressions pour  $T_M$ ,  $C_M$ ,  $T_T$  et  $C_T$  seront celles données par les équations (3.70), (3.71), (3.72) et (3.73) où nous avons pris en compte que :

- L'angle d'attaque  $\alpha_s$  est petit.
- L'angle latéral de translation  $\delta = 0$ .
- Les angles de torsion des pales  $\varphi_1 = \varphi_{1T} = 0$ .
- Les angles de conicité et de battement du rotor de queue  $a_{0T} = a_{1sT} = b_{1sT} = 0$ .
- La vitesse induite du rotor de queue est négligeable  $v_{1T} = 0$ .

$$T_M = \frac{\rho p_M c_M a}{4} \left[ \left( \frac{R_M}{bl_M} V^T V + \frac{2R_M^3}{3bl_M} \dot{\gamma}^2 \right) u_1 - (R_M^2 ||V|| \dot{\gamma}) u_3 - \frac{R_M^2}{2} a_{1s} ||V|| \dot{\gamma} - R_M^2 \alpha_s ||V|| \dot{\gamma} + R_M^2 \dot{\gamma} v_1 \right] \quad (3.70)$$

$$C_M = \frac{\rho p_M a c_M}{4} \left[ \left( -\frac{2R_M^3}{3bl_M} \alpha_s ||V|| \dot{\gamma} - \frac{2R_M^3}{3bl_M} a_{1s} ||V|| \dot{\gamma} + \frac{2R_M^3}{3bl_M} v_1 \dot{\gamma} \right) u_1 + \left( \frac{R_M^2}{2} \alpha_s V^T V + \frac{a_{1s}}{8} R_M^2 V^T V - \frac{R_M^2}{2} ||V|| v_1 + \frac{a_{1s}}{4} R_M^4 \dot{\gamma}^2 \right) u_3 + \left( -\frac{1}{4} R_M^3 v_1 \dot{\gamma} - \frac{b_{1s}}{4} R_M^4 \dot{\gamma}^2 - \frac{a_0}{3} R_M^3 ||V|| \dot{\gamma} + \frac{b_{1s}}{8} R_M^2 V^T V \right) u_4 + \left( \frac{c_a}{2a} + \frac{a_{1s}^2}{4} + \frac{b_{1s}^2}{4} \right) R_M^4 \dot{\gamma}^2 + \frac{5}{4} R_M^2 v_1^2 + \left( \frac{c_a}{2a} R_M^2 + \frac{a_0^2}{2} R_M^2 + a_{1s} R_M^2 \alpha_s + \frac{3a_{1s}^2}{8} R_M^2 + \frac{b_{1s}^2}{8} R_M^2 + R_M^2 \alpha_s^2 \right) V^T V + \left( -2R_M^2 \alpha_s + \frac{2a_0}{3} R_M^2 - a_{1s} R_M^2 \right) ||V|| v_1 + \frac{1}{2} R_M^3 b_{1s} v_1 \dot{\gamma} + \frac{2}{3} R_M^3 a_0 b_{1s} ||V|| \dot{\gamma} \right] \quad (3.71)$$

$$T_T = \frac{\rho p_T c_T a}{4} \left[ \left( \frac{R_T}{bl_T} V^T V + \frac{2}{3bl_T} r_\gamma^2 R_T^3 \dot{\gamma}^2 \right) u_2 \right] \quad (3.72)$$

$$C_T = -\frac{\rho p_T c_T a}{4} \left[ \frac{c_{dT}}{2a} R_T^2 V^T V + \frac{c_{dT}}{2a} r_\gamma^2 R_T^4 \dot{\gamma}^2 \right] \quad (3.73)$$

Afin d'exprimer le vecteur  $F_c$  d'une façon plus simple, nous définissons les constantes du tableau 3.7.

$c_i$	<i>Expression Analytique</i>	$c_i$	<i>Expression Analytique</i>
$c_{16}$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M}{4bl_M}$	$c_{32}$	$c_{21} x_T$
$c_{17}$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M^3}{6bl_M}$	$c_{33}$	$K_{mot}$
$c_{18}$	$-\frac{\rho p_M c_M a R_M^2}{4}$	$c_{34}$	$-\frac{\rho p_M c_M a R_M^3}{6bl_M} (a_{1s} + \alpha_s)$
$c_{19}$	$-\frac{\rho p_M c_M a R_M^2}{4} (a_{1s}/2 + \alpha_s)$	$c_{35}$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M^2}{8} (a_{1s}/4 + \alpha_s)$
$c_{20}$	$\frac{\rho p_T c_T a R_T}{4bl_T}$	$c_{36}$	$c_{18}/2$
$c_{21}$	$\frac{\rho p_T c_T a R_T^3 r_\gamma^2}{6bl_T}$	$c_{37}$	$-c_{18} R_M^2 a_{1s}/4$
$c_{22}$	$\%mg$	$c_{38}$	$c_{18} R_M/4$
$c_{23}$	$kb_{1s}$	$c_{39}$	$c_{18} R_M^2 b_{1s}/4$
$c_{24}$	$-c_{16} z_M$	$c_{40}$	$c_{18} R_M a_0/3$
$c_{25}$	$-c_{17} z_M$	$c_{41}$	$-c_{18} b_{1s}/8$
$c_{26}$	$-c_{18} z_M$	$c_{42}$	$-c_{18} R_M^2 \left( \frac{c_d}{2a} + \frac{a_{1s}^2}{4} + \frac{b_{1s}^2}{4} \right)$
$c_{27}$	$-c_{19} z_M$	$c_{43}$	$-\frac{5}{4} c_{18}$
$c_{28}$	$ka_{1s}$	$c_{44}$	$-c_{18} \left( \frac{c_d}{2a} + \frac{a_0^2}{2} + a_{1s} \alpha_s + \frac{3a_{1s}^2}{8} + \frac{b_{1s}^2}{8} + \alpha_s^2 \right)$
$c_{29}$	$-\frac{\rho p_T c_T c_{dT} R_T^2}{8}$	$c_{45}$	$-c_{18} \left( -2\alpha_s + \frac{2a_0}{3} - a_{1s} \right)$
$c_{30}$	$c_{29} R_T^2 r_\gamma^2$	$c_{46}$	$-c_{18} R_M b_{1s}/2$
$c_{31}$	$c_{20} x_T$	$c_{47}$	$-\frac{2}{3} c_{18} R_M a_0 b_{1s}$

TAB. 3.7 – Les Constantes du Modèle Général.

De cette façon les composantes de  $F_c$  par rapport au repère  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  lié à l'hélicoptère sont :

$$f_{xc} = (c_{16} V^T V + c_{17} \dot{\gamma}^2) u_1 u_3 + c_{18} \|V\| \dot{\gamma} u_3^2 + (c_{19} \|V\| \dot{\gamma} - c_{18} \dot{\gamma} v_1) u_3$$

$$f_{yc} = (c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2)u_1u_4 + c_{18}\|V\|\dot{\gamma}u_3u_4 + (c_{19}\|V\|\dot{\gamma} - c_{18}\dot{\gamma}v_1)u_4 + (c_{20}V^TV + c_{21}\dot{\gamma}^2)u_2$$

$$f_{zc} = (c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2)u_1 + c_{18}\|V\|\dot{\gamma}u_3 + c_{19}\|V\|\dot{\gamma} - c_{18}v_1\dot{\gamma} + c_{22}$$

$$\tau_{xc} = c_{23} + (c_{24}V^TV + c_{25}\dot{\gamma}^2)u_1u_4 + c_{26}\|V\|\dot{\gamma}u_3u_4 + (c_{27}\|V\|\dot{\gamma} - c_{26}v_1\dot{\gamma})u_4$$

$$\tau_{yc} = c_{28} + c_{29}V^TV + c_{30}\dot{\gamma}^2 - (c_{24}V^TV + c_{25}\dot{\gamma}^2)u_1u_3 - c_{26}\|V\|\dot{\gamma}u_3^2 - (c_{27}\|V\|\dot{\gamma} - c_{26}v_1\dot{\gamma})u_3$$

$$\tau_{zc} = (c_{31}V^TV + c_{32}\dot{\gamma}^2)u_2$$

$$\tau_{\gamma} = (c_{33} + c_{34}\|V\|\dot{\gamma} + c_{17}v_1\dot{\gamma})u_1 + (c_{35}V^TV + c_{36}\|V\|v_1 + c_{37}\dot{\gamma}^2)u_3 + (c_{38}v_1\dot{\gamma} + c_{39}\dot{\gamma}^2 + c_{40}\|V\|\dot{\gamma} + c_{41}V^TV)u_4 + c_{42}\dot{\gamma}^2 + c_{43}v_1^2 + c_{44}V^TV + c_{45}\|V\|v_1 + c_{46}v_1\dot{\gamma} + c_{47}\|V\|\dot{\gamma}$$

Il est utile d'exprimer  $F_c$  de la façon suivante :

$$F_c = D(\dot{q}, u)u + A(\dot{q})u + B(\dot{q}) \quad (3.74)$$

où les matrices  $D$  et  $A$  et le vecteur  $B$  sont donnés ci-dessous.

$$D(\dot{q}, u) = \begin{bmatrix} (c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2)u_3 & 0 & c_{18}\|V\|\dot{\gamma}u_3 & 0 \\ (c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2)u_4 & 0 & c_{18}\|V\|\dot{\gamma}u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (c_{24}V^TV + c_{25}\dot{\gamma}^2)u_4 & 0 & c_{26}\|V\|\dot{\gamma}u_4 & 0 \\ -(c_{24}V^TV + c_{25}\dot{\gamma}^2)u_3 & 0 & -c_{26}\|V\|\dot{\gamma}u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$A(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \\ 0 & 0 & A_{53} & 0 \\ 0 & A_{62} & 0 & 0 \\ A_{71} & 0 & A_{73} & A_{74} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

avec

$$A_{13}(\dot{q}) = (c_{19}\|V\| - c_{18}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{22}(\dot{q}) = c_{20}V^TV + c_{21}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{24}(\dot{q}) = (c_{19}\|V\| - c_{18}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{31}(\dot{q}) = c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{33}(\dot{q}) = c_{18}\|V\|\dot{\gamma}$$

$$A_{44}(\dot{q}) = (c_{27}\|V\| - c_{26}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{53}(\dot{q}) = -(c_{27}\|V\| - c_{26}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{62}(\dot{q}) = c_{31}V^TV + c_{32}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{71}(\dot{q}) = c_{33} + (c_{34}\|V\| + c_{17}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{73}(\dot{q}) = (c_{35}\|V\| + c_{36}v_1)\|V\| + c_{37}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{74}(\dot{q}) = (c_{40}\|V\| + c_{38}v_1)\dot{\gamma} + c_{39}\dot{\gamma}^2 + c_{41}V^TV$$

$$B(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c_{19}\|V\| - c_{18}v_1)\dot{\gamma} + c_{22} \\ c_{23} \\ c_{28} + c_{29}V^TV + c_{30}\dot{\gamma}^2 \\ 0 \\ c_{42}\dot{\gamma}^2 + c_{43}v_1^2 + c_{44}V^TV + c_{45}\|V\|v_1 + c_{46}v_1\dot{\gamma} + c_{47}\|V\|\dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Nous écrivons maintenant le modèle général de l'hélicoptère sous forme matricielle.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J_R^T[D(\dot{q}, u)u + A(\dot{q})u + B(\dot{q})] \quad (3.78)$$

### 3.2.3 Les Equations de Newton-Euler.

Nous proposons dans cette section un modèle de Newton-Euler qui est obtenu à partir de (3.78). En utilisant (3.45) nous écrivons (3.78) de la façon suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J^T R_{ext}[D(\dot{q}, u)u + A(\dot{q})u + B(\dot{q})] \quad (3.79)$$

D'autre part, nous pouvons écrire (voir équation (3.38))

$$J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} = \dot{\tau}_c \quad (3.80)$$

et

$$\ddot{q} = J^{-1}\dot{\tau}_c - J^{-1}\dot{J}J^{-1}\tau_c \quad (3.81)$$

en prenant en compte que  $M = J^T \mathcal{I} J$  ainsi que les équations (3.38) et (3.81) nous trouvons :

$$J^T \mathcal{I}(q)\dot{\tau}_c + [C(q, \dot{q})J^{-1} - J^T \mathcal{I}(q)\dot{J}J^{-1}]\tau_c + G(q) = J^T R_{ext}[D(\dot{q}, u)u + A(\dot{q})u + B(\dot{q})] \quad (3.82)$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice donnée en (3.62).

Pour ce qui suit considérons la notation suivante lorsque le système est séparé en deux sous-systèmes concernant la translation (indice  $t$ ) et la rotation (indice  $r$ ) de l'hélicoptère. Voir équations (3.62), (3.67) et (3.69).

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_t & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_r \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_r \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_t \\ G_r \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Pour le sous-système de translation nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{I}_t \dot{V} + G_t = R f_{cm} \quad (3.86)$$

et pour le sous-système de rotation :

$$J_0^T \mathcal{I}_r \dot{\omega} + [C_r J_0^{-1} - J_0^T \mathcal{I}_r \dot{J}_0 J_0^{-1}] \omega + G_r = J_0^T \tau_{cm} \quad (3.87)$$

où  $V = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$  est le vecteur de vitesse de l'hélicoptère par rapport au repère inertiel et  $\omega = [\omega_{xc} \ \omega_{yc} \ \omega_{zc} \ \dot{\gamma}]^T$  est le vecteur de vitesse angulaire de l'hélicoptère par rapport au repère fixe au centre de masse de l'hélicoptère. Nous rappelons que le torseur des efforts externes calculé dans le repère fixe au centre de masse de l'hélicoptère est donné par  $F_c = [f_{cm}^T \ \tau_{cm}^T]^T$ .

Le terme  $F_c$  à droite de l'équation (3.78) ou de l'équation (3.79) est assez compliqué du point de vue de la commande à cause de la présence des termes quadratiques et multiplicatifs de l'entrée. Nous allons donc étudier les termes  $D(\dot{q}, u)u$  et  $A(\dot{q})u$  du vecteur  $F_c$  (voir équation (3.74)). A partir des équations (3.75) et (3.76) nous avons les termes du tableau 3.8 qui seront comparés ligne par ligne.

$D(q, u)u$	$A(\dot{q})u$
$D_{11}u_1 + D_{13}u_3$	$A_{13}u_3$
$D_{21}u_1 + D_{23}u_3$	$A_{22}u_2 + A_{24}u_4$
$D_{41}u_1 + D_{43}u_3$	$A_{44}u_4$
$D_{51}u_1 + D_{53}u_3$	$A_{53}u_3$

TAB. 3.8 – Les Termes des Produits  $D(q, u)u$  et  $A(\dot{q})u$ .

Admettons que l'hélicoptère soit en régime permanent (voir section 4.1.3 pour les valeurs utilisées de  $u_1 = -0.00005 \text{ m}$ ,  $u_2 = 0$  et  $\dot{\gamma} = -124.62 \text{ rad/s} = -1190 \text{ rpm}$ ). Les valeurs suivantes sont prises en compte initialement  $a_0 = 2^\circ$ ,  $a_{1s} = 2^\circ$ ,  $b_{1s} = 1^\circ$  et  $\alpha_s = -3^\circ$  lorsqu'elles sont concernées. Définissons les cas suivants concernant les modes de vol particuliers sous l'hypothèse qu'il n'existe pas de perturbations externes (voir figure 2.2) :



**Montée/Descente 1D** . L'hélicoptère suit une trajectoire verticale ( $u_3 = u_4 = 0$ ) sans modifier son angle de lacet ( $u_2 = 0$ ). Deux cas sont analysés :

1. Montée  $\dot{z} = -3.52 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 5.69 \text{ m/s}$ ).
2. Descente  $\dot{z} = 3.52 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 2.17 \text{ m/s}$ ).

Dans ces deux cas nous obtenons  $A_{13}u_3 = -2.653$  pendant que tous les autres termes sont zéro.

**Vol Stationnaire** . L'hélicoptère reste à une hauteur constante avec la possibilité de modifier son angle de lacet ( $u_2 \neq 0$ ). Ici  $V = 0$  ( $v_1 = v_h = 3.52 \text{ m/s}$ ). Nous obtenons  $A_{13}u_3 = -2.649$  pendant que tous les autres termes sont zéro. Si  $u_2 = \pm 0.0025$ , alors nous avons  $A_{22}u_2 + A_{24}u_4 = \pm 7.893$  en plus du terme précédent.

**Vol en Palier** . La direction de vol est celle de l'axe  $x$  uniquement ( $\dot{y} = \dot{z} = 0$ ) lorsque l'hélicoptère reste à une hauteur constante ( $u_3 = -2^\circ$ , et  $u_4 = 0$ ). Nous proposons deux cas :

1.  $\dot{x} = 2 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 3.24 \text{ m/s}$ ). Ici le terme  $D_{11}u_1 + D_{13}u_3$  représente 5.4% du terme  $A_{13}u_3$  et  $D_{51}u_1 + D_{53}u_3$ , 5.8% de  $A_{53}u_3$ . Tous les autres termes restent égaux à zéro.
2.  $\dot{x} = 0.5 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 3.5 \text{ m/s}$ ). Avec cette vitesse inférieure, les termes associés au produit  $D(\dot{q}, u)u$  sont moins significatifs que ceux du produit  $A(\dot{q})u$  par rapport au cas précédent.

**Montée/Descente 2D** . Ici la trajectoire de vol est définie dans le plan  $xz$  ( $\dot{y} = 0$ ,  $u_3 = -2^\circ$  et  $u_4 = 0$ ). Nous analysons deux cas :

1. Montée  $\dot{x} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $\dot{z} = -0.5 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 3.76 \text{ m/s}$ ).
2. Descente  $\dot{x} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $\dot{z} = 0.5 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 3.26 \text{ m/s}$ ).

Ici le terme  $D_{11}u_1 + D_{13}u_3$  représente 4.1% du terme  $A_{13}u_3$  (pour les deux cas) et  $D_{51}u_1 + D_{53}u_3$ , 3.9% de  $A_{53}u_3$  pour le premier cas et 4.5% pour le deuxième. Tous les autres termes restent égaux à zéro.

**Vol 3D** . Il s'agit d'un mode de vol "hybride" au sens qu'il est composé d'une montée en 3D ( $u_3 = -3^\circ$  et  $u_4 = 2^\circ$ ) avec la possibilité de modifier l'angle de lacet ( $u_2 \neq 0$ ). Nous proposons pour ce cas une montée où  $\dot{x} = \dot{y} = 0.5 \text{ m/s}$  et  $\dot{z} = -0.5 \text{ m/s}$  ( $v_1 = 3.74 \text{ m/s}$ ). Le terme  $D_{11}u_1 + D_{13}u_3$  représente 7.0% du terme  $A_{13}u_3$ , le terme  $D_{21}u_1 + D_{23}u_3$  représente 4.3% du terme  $A_{22}u_2 + A_{24}u_4$ , le terme  $D_{41}u_1 + D_{43}u_3$  représente 4.5% du terme  $A_{44}u_4$  et le terme  $D_{51}u_1 + D_{53}u_3$  représente 4.5% du terme  $A_{53}u_3$ .

Nous remarquons que les variations  $1^\circ \leq a_0 \leq 5^\circ$ ,  $-6^\circ \leq a_{1s} \leq 6^\circ$ ,  $-6^\circ \leq b_{1s} \leq 6^\circ$  et  $-3^\circ \leq \alpha_s \leq -10^\circ$  ne changent pratiquement pas les résultats obtenus. En supposant

que l'hélicoptère soit en régime permanent et en nous appuyant sur cette analyse nous négligeons dans un premier temps le terme  $D(\dot{q}, u)u$  par rapport au terme  $A(\dot{q})u$  dans l'équation (3.78). La loi de commande sera donc dans un premier temps conçue en supposant que le vecteur de forces externes est donné par

$$\bar{F}_c = A(\dot{q})u + B(\dot{q}) \in \mathbb{R}^7 \quad (3.88)$$

Afin de tester la robustesse de la commande par rapport à la perturbation  $D(\dot{q}, u)$ , ce terme sera pris en compte dans des simulations ultérieures. Nous écrivons maintenant l'ensemble de deux équations du modèle de Newton-Euler définissant le mouvement de l'hélicoptère :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_t \dot{V} + G_t = R \bar{f}_{cm} \\ \mathcal{I}_r \dot{\omega} + [J_0^{-T} C_r J_0^{-1} - \mathcal{I}_r \dot{J}_0 J_0^{-1}] \omega + J_0^{-T} G_r = \bar{\tau}_{cm} \end{cases} \quad (3.89)$$

avec  $\bar{f}_{cm} \in \mathbb{R}^3$  et  $\bar{\tau}_{cm} \in \mathbb{R}^4$  donnés par (3.90) et (3.93). Rappelons que  $R$  n'est pas une matrice constante (voir (3.26)).

$$\bar{f}_{cm} = A_1(\dot{q})u + B_1(\dot{q}) \quad (3.90)$$

où la matrice  $A_1$  et le vecteur  $B_1$  sont

$$A_1(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{113} & 0 \\ 0 & A_{122} & 0 & A_{124} \\ A_{131} & 0 & A_{133} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

avec

$$A_{113}(\dot{q}) = (c_{19} \|V\| - c_{18} v_1) \dot{\gamma}$$

$$A_{122}(\dot{q}) = (c_{20} V^T V + c_{21} \dot{\gamma}^2)$$

$$A_{124}(\dot{q}) = (c_{19} \|V\| - c_{18} v_1) \dot{\gamma}$$

$$A_{131}(\dot{q}) = (c_{16}V^TV + c_{17}\dot{\gamma}^2)$$

$$A_{133}(\dot{q}) = c_{18}||V||\dot{\gamma}$$

$$B_1(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c_{19}||V|| - c_{18}v_1)\dot{\gamma} + c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\bar{\tau}_{cm} = A_2(\dot{q})u + B_2(\dot{q}) \quad (3.93)$$

où la matrice  $A_2$  et le vecteur  $B_2$  sont

$$A_2(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{214} \\ 0 & 0 & A_{223} & 0 \\ 0 & A_{232} & 0 & 0 \\ A_{241} & 0 & A_{243} & A_{244} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

avec

$$A_{214}(\dot{q}) = (c_{27}||V|| - c_{26}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{223}(\dot{q}) = -(c_{27}||V|| - c_{26}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{232}(\dot{q}) = c_{31}V^TV + c_{32}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{241}(\dot{q}) = c_{33} + (c_{34}||V|| - c_{17}v_1)\dot{\gamma}$$

$$A_{243}(\dot{q}) = (c_{35}||V|| + c_{36}v_1)||V|| + c_{37}\dot{\gamma}^2$$

$$A_{244}(\dot{q}) = (c_{40}||V|| + c_{38}v_1)\dot{\gamma} + c_{39}\dot{\gamma}^2 + c_{41}V^TV$$

$$B_2(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{23} \\ c_{28} + c_{29}V^TV + c_{30}\dot{\gamma}^2 \\ 0 \\ c_{42}\dot{\gamma}^2 + c_{43}v_1^2 + c_{44}V^TV + c_{45}||V||v_1 + c_{46}v_1\dot{\gamma} + c_{47}||V||\dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

A partir de (3.89) et en prenant en compte que  $\mathcal{I}_t = c_0 I_3$  nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{c_0} [R \bar{f}_{cm} - G_t] \quad (3.96)$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{xc} \\ \dot{\omega}_{yc} \\ \dot{\omega}_{zc} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_r^{-1} \bar{\tau}_{cm} + [\dot{J}_0 J_0^{-1} - \mathcal{I}_r^{-1} J_0^{-T} C_r J_0^{-1}] \omega - \mathcal{I}_r^{-1} J_0^{-T} G_r \quad (3.97)$$

Afin de simuler ce modèle considérons maintenant les variables d'état définies dans le tableau 3.9.

<i>Variable</i>	<i>Dérivée</i>
$x_1 = x$	$x_2 = \dot{x}$
$x_3 = y$	$x_4 = \dot{y}$
$x_5 = z$	$x_6 = \dot{z}$
$x_7 = \omega_{xc}$	$x_8 = \dot{\omega}_{xc}$
$x_9 = \omega_{yc}$	$x_{10} = \dot{\omega}_{yc}$
$x_{11} = \omega_{zc}$	$x_{12} = \dot{\omega}_{zc}$
$x_{13} = \gamma$	$x_{14} = \dot{\gamma}$

TAB. 3.9 – Les Variables d'Etat.

Une représentation du modèle en variables d'état est donnée par les équations (3.98) et (3.99).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_{10} \\ x_{12} \\ x_{14} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\omega}_{xc} \\ \dot{\omega}_{yc} \\ \dot{\omega}_{zc} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

### 3.3 Le Modèle Hélicoptère-Plateforme.

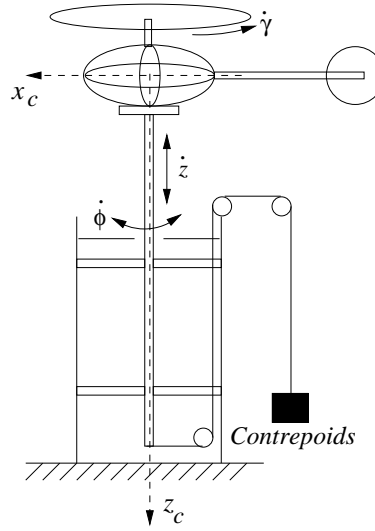


FIG. 3.3 – Le Système à 3-DDL.

Nous présentons une formulation de Lagrange afin d'obtenir le modèle de l'hélicoptère lorsqu'il est monté sur une plateforme expérimentale. Considérons d'abord la figure 3.3 qui représente l'hélicoptère monté sur une plateforme. Nous avons donc un système à trois degrés de liberté  $z$ ,  $\phi$  et  $\gamma$ .

L'énergie cinétique de translation prend une forme plus simple que celle donnée par l'équation (3.48), car elle considère uniquement un déplacement dans la direction  $z$ , nous trouvons donc l'équation (3.100).

$$T_t = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \quad (3.100)$$

De manière simple, nous pouvons dire que la seule composante significative de la vitesse angulaire du fuselage est donnée par  $\dot{\phi}$  ; en plus, l'axe  $z$  du repère inertiel coïncide avec l'axe  $z_c$  lié à l'hélicoptère et donc la vitesse angulaire dans le repère inertiel est la même que celle exprimée dans le repère de l'hélicoptère. Elle est donnée par l'équation (3.101).

$$\omega_z = \omega_{zc} = \dot{\phi} \quad (3.101)$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique de rotation, elle est définie par les équations (3.102) pour le fuselage, (3.103) pour le rotor principal et (3.104) pour le rotor de queue.

$$T_{rF} = \frac{1}{2}I_{zzF}\dot{\phi}^2 \quad (3.102)$$

$$T_{rM} = \frac{1}{2}I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma})^2 \quad (3.103)$$

$$T_{rT} = \frac{1}{2}I_{zzT}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{yyT}\dot{\gamma}^2 r_\gamma^2 - I_{yzT}\dot{\phi}\dot{\gamma}r_\gamma \quad (3.104)$$

L'énergie potentielle est formée par l'énergie potentielle gravitationnelle et par la partie de l'énergie élastique correspondant à l'angle de conicité. Cette énergie est donnée par l'équation (3.56) où  $a_{1s} = b_{1s} = 0$ . Le Lagrangien  $L$  est donc exprimé par :

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_{zzF}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma})^2 + \frac{1}{2}I_{zzT}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{yyT}\dot{\gamma}^2 r_\gamma^2 - I_{yzT}\dot{\phi}\dot{\gamma}r_\gamma + \\ & mgz - ka_0^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Nous prenons l'hypothèse d'une force de poussée toujours verticale dans ce système car une variation dans l'orientation de  $T_M$  entraînerait un changement du mode de vol (par exemple en vol en palier) qui ne peut pas se produire dans le système hélicoptère-plateforme. D'autre part, l'angle de conicité est considéré constant. Le vecteur de coordonnées généralisées prend donc la forme suivante :

$$q = [z \quad \phi \quad \gamma]^T \quad (3.106)$$

Les entrées que nous pouvons utiliser dans ce cas sont définies par le vecteur d'entrées de l'équation (3.107).

$$u = [h_M \quad h_T]^T \quad (3.107)$$

Nous observons que  $q \in \mathbb{R}^3$  et que  $u \in \mathbb{R}^2$ , il s'agit donc toujours d'un système sous-actionné.

La dérivée du vecteur de coordonnées généralisées est :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Nous observons que la première composante de  $\dot{q}$  est la vitesse de translation du système, que la deuxième composante représente la vitesse de rotation du fuselage dans les repères inertiel  $(o, x, y, z)$  et du corps  $(cm, x_c, y_c, z_c)$  et la troisième composante est la vitesse de rotation du rotor principal. A partir de (3.105), en tenant compte du fait que  $I_{yzT} = 0$  et en utilisant l'équation (3.57) nous avons :

$$\frac{\partial L}{\partial z} = mg \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = -\frac{2}{3}m_T b^2 r_\gamma \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) \dot{\phi}^2 \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_{zzF} \dot{\phi} + I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma}) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2) \dot{\phi} + \frac{2}{3}m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) \dot{\phi} \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma}) + I_{yyT} r_\gamma^2 \dot{\gamma} \quad (3.114)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right] = m \ddot{z} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right] &= I_{zzF} \ddot{\phi} + I_{zzM}(\ddot{\phi} + \ddot{\gamma}) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2) \ddot{\phi} + \\ &\quad \frac{2}{3}m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) \ddot{\phi} - \frac{4}{3}m_T b^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) r_\gamma \dot{\gamma} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \right] = I_{zzM}(\ddot{\phi} + \ddot{\gamma}) + I_{yyT} r_\gamma^2 \ddot{\gamma} \quad (3.117)$$

A partir des équations ci-dessus nous pouvons écrire la forme matricielle du modèle à 3-DDL :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = Q(u) \quad (3.118)$$

où

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_{zzF} + I_{zzM} + m_T(x_T^2 + y_T^2) + \frac{2}{3}m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) & I_{zzM} \\ 0 & I_{zzM} & I_{zzM} + I_{yyT} r_\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}m_T b^2 r_\gamma \sin(2r_\gamma \gamma) \dot{\gamma} & -\frac{1}{3}m_T b^2 r_\gamma \sin(2r_\gamma \gamma) \dot{\phi} \\ 0 & \frac{1}{3}m_T b^2 r_\gamma \sin(2r_\gamma \gamma) \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$



$$G(q) = \begin{bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

D'après l'équation (3.101), il est évident que les vitesses dans l'espace de coordonnées généralisées et celles dans l'espace de coordonnées cartésiennes sont les mêmes. Autrement dit, les forces généralisées sont les forces externes appliqués à l'hélicoptère ( $J = I_3$  et  $Q = F_c$ ).

Les composantes du vecteur de forces externes (ou généralisées) sont montrées dans le tableau 3.10.

$F_c$	<i>Vol Vertical ou Stationnaire</i>
$f_{zc}$	$T_M + D_{vi}$
$\tau_{zc}$	$T_T x_T$
$\tau_\gamma$	$C_M + C_{mot}$

TAB. 3.10 – Les Forces Généralisées.

Les matrices  $M$ ,  $C$  et le vecteur  $G$  prennent donc les formes suivantes :

$$M(q) = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \cos^2(c_3 \gamma) & c_4 \\ 0 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} & c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} \\ 0 & -c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} c_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

où nous avons utilisé les constantes du tableau 3.11. Les valeurs des paramètres sont montrées dans l'annexe A de ce rapport.

$c_i$	Expression Analytique	Valeur Numérique
$c_0$	$m$	$7.5 \text{ kg}$
$c_1$	$I_{zzF} + I_{zzM} + 2m_T(x_T^2 + y_T^2)$	$0.4305 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_2$	$\frac{2}{3}m_T b^2$	$3 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_3$	$r_\gamma$	$-4.143$
$c_4$	$I_{zzM}$	$0.108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_5$	$I_{zzM} + r_\gamma^2 I_{yyT}$	$0.4993 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_6$	$\frac{1}{3}m_T b^2 r_\gamma$	$-6.214 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_7$	$-mg$	$-73.58 \text{ N}$
$c_8$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M^3}{6bl_M}$	$3.411 \text{ kg}$
$c_9$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M^2}{4} v_h$	$0.6004 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
$c_{10}$	$0.05mg$	$3.679 \text{ N}$
$c_{11}$	$\frac{\rho p_T c_T a R_T^3 r_\gamma^2 x_T}{6bl_T}$	$-0.1525 \text{ kg} \cdot \text{m}$
$c_{12}$	$\frac{\rho p_M c_M a R_M^3}{6bl_M} v_h$	$12.01 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
$c_{13}$	$K_{moteur}$	$1 \times 10^5 \text{ N}$
$c_{14}$	$\frac{\rho p_M c_M c_d R_M^4}{8}$	$1.2055 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_{15}$	$\frac{5\rho p_M c_M a R_M^2}{16} v_h^2$	$2.642 \text{ N} \cdot \text{m}$

TAB. 3.11 – Les Constantes du Modèle à 3-DDL.

Les termes correspondant aux forces et couples aérodynamiques peuvent être calculés en utilisant les expressions algébriques du chapitre 2. Pour le cas de l'hélicoptère monté sur la plateforme nous avons :

$$T_M = \frac{\rho p_M c_M a}{4} \left[ \left( \frac{R_M}{bl_M} \dot{z}^2 + \frac{2R_M^3}{3bl_M} \dot{\gamma}^2 \right) u_1 + R_M^2 \dot{\gamma} v_1 \right] \quad (3.125)$$

$$C_M = \frac{\rho p_M a c_M}{4} \left[ \frac{2R_M^3}{3bl_M} v_1 \dot{\gamma} u_1 + \frac{c_d}{2a} R_M^4 \dot{\gamma}^2 + \frac{5}{4} R_M^2 v_1^2 + \frac{c_d}{2a} R_M^2 \dot{z}^2 \right] \quad (3.126)$$

$$T_T = \frac{\rho p_T c_T a}{4} \left[ \left( \frac{R_T}{bl_T} \dot{z}^2 + \frac{2}{3bl_T} r_\gamma^2 R_T^3 \dot{\gamma}^2 \right) u_2 \right] \quad (3.127)$$

Si nous considérons que l'hélicoptère vol à basse vitesse de telle façon que la vitesse induite en vol vertical et la vitesse induite en vol stationnaire sont presque les mêmes ( $v_v \approx v_h$ ) et à partir de (3.125), (3.126), (3.127), du tableau 3.11, en modélisant  $Q(u) =$

$A(\dot{q})u + B(\dot{q})$  et en considérant que  $\frac{R_M}{bl_M}\dot{z}^2 \ll \frac{2R_M^3}{3bl_M}\dot{\gamma}^2$  et  $\frac{R_T}{bl_T}\dot{z}^2 \ll \frac{2}{3bl_T}r_\gamma^2 R_T^3\dot{\gamma}^2$  les forces généralisées prennent les formes suivantes :

$$A(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_8\dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & c_{11}\dot{\gamma}^2 \\ c_{12}\dot{\gamma} + c_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$B(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_9\dot{\gamma} + c_{10} \\ 0 \\ c_{14}\dot{\gamma}^2 + c_{15} \end{bmatrix}$$

Comme dans le cas du modèle général, il est intéressant d'utiliser une représentation du modèle en variables d'état qui sera utilisée pour faire des simulations en Matlab/Simulink. Nous prenons donc les trois variables du vecteur de coordonnées généralisées et leurs dérivées comme les variables d'état. Ces variables d'état sont montrées dans le tableau 3.12.

<i>Variable</i>	<i>Dérivée</i>
$x_1 = z$	$x_2 = \dot{z}$
$x_3 = \phi$	$x_4 = \dot{\phi}$
$x_5 = \gamma$	$x_6 = \dot{\gamma}$

TAB. 3.12 – Les Variables d'Etat du Système Hélicoptère-Plateforme.

Une représentation du modèle en variables d'état est donc donnée par les équations (3.129).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{c_0} [c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} - c_7] \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma)} [c_5 (c_{11} \dot{\gamma}^2 u_2 - 2c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} \dot{\phi}) \\
&\quad - c_4 ((c_{12} \dot{\gamma} + c_{13}) u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi}^2 + c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15})] \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma)} [-c_4 (c_{11} \dot{\gamma}^2 u_2 - 2c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} \dot{\phi}) \\
&\quad + (c_1 + c_2 \cos^2(c_3 \gamma)) ((c_{12} \dot{\gamma} + c_{13}) u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi}^2 + c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15})]
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Nous remarquons que la force de frottement du sol sur le système avant le décollage n'est pas modélisée. L'hélicoptère montre donc un comportement où des mouvements de lacet sont produits lors de la mise en marche du moteur<sup>14</sup>. Une stratégie de commande pour la régulation et la poursuite des variables reliées à  $\phi$  et à  $\gamma$  est proposée plus loin. Cette stratégie est utilisée initialement lorsque l'hélicoptère est sur le sol mais peut être aussi utilisée pour le cas de l'hélicoptère en vol.

La contrainte  $z - L \leq 0$  du sol (force normale) sur l'hélicoptère est prise en compte de la façon suivante (voir figure 3.4).

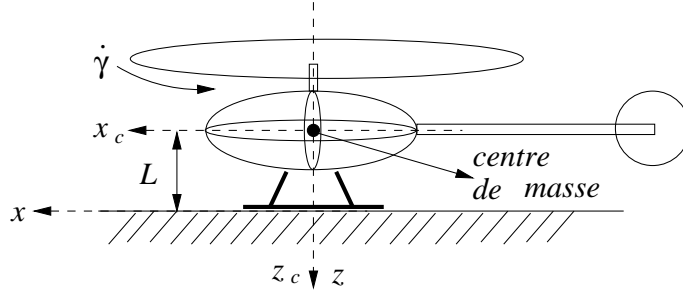


FIG. 3.4 – La Contrainte  $z - L \leq 0$ .

Nous pouvons écrire à partir de (3.118) en prenant en compte la contrainte du sol :

$$\begin{aligned}
\ddot{q} &= M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + Q(u) - \nabla g \lambda) \\
0 &\geq z - L, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda(z - L) = 0
\end{aligned} \tag{3.130}$$

<sup>14</sup>Ce comportement est attendu lorsque l'hélicoptère se trouve sur la glace ou sur l'eau avec des coussins gonflables.

où  $\nabla g = \frac{\partial[z-L]}{\partial q} = [1 \ 0 \ 0]^T$  et  $\lambda \geq 0$  est un multiplicateur de Lagrange. Quand  $z - L = 0$ , les équations (3.130) représentent un système d'équations algébriques différentielles (DAE *Differential Algebraic Equation*. Voir [14]) à indice de différentiation 3 (niveau position). A partir de (3.130) et en supposant que  $z - L = 0$  sur un intervalle de temps strictement positif nous pouvons écrire le système à indice 2 (niveau vitesse) suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + Q(u) - \nabla g \lambda) \\ 0 &\geq \dot{z}, \lambda \geq 0, \lambda \dot{z} = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

A partir de (3.131) et en supposant que  $z - L = \dot{z} = 0$  sur un intervalle de temps strictement positif le système à indice 1 (niveau accélération) est donc :

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + Q(u) - \nabla g \lambda) \\ 0 &\geq \ddot{z}, \lambda \geq 0, \lambda \ddot{z} = 0 \end{aligned} \quad (3.132)$$

Si en (3.132)  $\ddot{z} = 0$  ( $\lambda > 0$   $z - L = 0$   $z_0 = L$ ), alors :

$$\lambda = c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} - c_7 \quad (3.133)$$

Si en (3.132)  $\ddot{z} < 0$  ( $\lambda = 0$   $z - L < 0$ ), alors :

$$\ddot{z} = \frac{1}{c_0} [c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} - c_7] \quad (3.134)$$

Les conditions  $\ddot{z} = 0$  et  $\ddot{z} < 0$  représentent la commutation entre les modes contrainte (au sol) et vol libre, respectivement. Tandis que  $\lambda > 0$  l'hélicoptère reste au sol. Le décollage a lieu dès que  $\lambda = 0$ .

# Chapitre 4

## Commande

Nous commençons ce chapitre avec l'analyse du système à 3-DDL pour lequel nous présentons deux stratégies de commande et montrons quelques résultats en simulation dans chaque cas. En ce qui concerne le système général à 7-DDL pour le vol libre de l'hélicoptère nous présentons les idées de base d'une première stratégie de commande dans la section 4.2.

Contrairement à la généralité de travaux concernant la commande de systèmes mécaniques, nous utilisons les entrées réelles de l'hélicoptère comme entrées de commande en faisant attention particulièrement au choix de trajectoires désirées qui s'avère un point crucial afin de respecter les saturations des entrées.

La structure du vecteur de forces généralisées représente un nouveau cas particulier parmi d'autres systèmes sous-actionnés [24] [50] [38] [41]. Cette structure est le résultat de la considération de certains phénomènes aérodynamiques lors de la modélisation du système, tels que le battement vertical, les couplages entre les forces et les couples, la vitesse induite et les couples de traînée que plusieurs auteurs ont négligé [20] [43].

### 4.1 Commande du Système Hélicoptère-Plateforme.

Bien que le modèle à 3-DDL soit plus simple que celui du vol libre de l'hélicoptère, sa dynamique s'avère non triviale (non linéaire en l'état et sous-actionnée). Plusieurs

travaux concernant le problème de commande d'hélicoptères ont été développés [17] [19] [20] [21] [27] [29] [35] [40] [43] [45]. Contrairement à la plupart des travaux concernant la commande non-linéaire d'hélicoptères, nous avons incorporé la dynamique des rotors principal et de queue dans les équations de Lagrange.

Reprenons l'équation (3.118) du système hélicoptère-plateforme que nous écrivons ci-dessous.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q(u) \quad (4.1)$$

où  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice d'inertie,  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice de Coriolis,  $G \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de forces conservatives,  $Q(u) = [f_z \ \tau_z \ \tau_\gamma]^T$  est le vecteur de forces généralisées et  $u = [h_M \ h_T]^T$  est le vecteur d'entrées. Ici,  $f_z$ ,  $\tau_z$  et  $\tau_\gamma$  sont la force vertical, le couple de lacet et le couple du rotor principal, respectivement. L'axe vertical (altitude)  $z < 0$  vers le haut.

Les différents éléments dans (4.1) sont :

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \cos^2(c_3 \gamma) & c_4 \\ 0 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} & c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} \\ 0 & -c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} c_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

le vecteur de forces généralisées

$$Q(u) = \begin{bmatrix} c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} \\ c_{11} \dot{\gamma}^2 u_2 \\ (c_{12} \dot{\gamma} + c_{13}) u_1 + c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

a été modélisé par  $Q(u) = A(\dot{q})u + B(\dot{q})$  où :

$$A(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_8 \dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & c_{11} \dot{\gamma}^2 \\ c_{12} \dot{\gamma} + c_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$B(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_9 \dot{\gamma} + c_{10} \\ 0 \\ c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15} \end{bmatrix}$$

**Remarque 2** . La force de poussée  $T_M$  ou la vitesse angulaire  $\dot{\gamma}$  du rotor principal ne sont pas utilisées comme des entrées dans (4.3) car  $\ddot{\gamma}$  est trop petite du fait des capacités du moteur. Etant donné que  $\dot{u}_1$  et  $\dot{u}_2$  peuvent être plus grandes que  $\ddot{\gamma}$ ,  $u_1$  et  $u_2$  sont préférées comme entrées.  $\circ$

**Remarque 3** La dynamique du modèle (4.1)-(4.3) diffère en plusieurs aspects de la forme canonique des systèmes sous-actionnés étudiée en [38]. En particulier la forme de la matrice qui multiplie à gauche le vecteur d'entrées n'est pas la même, et  $\bar{A}(\dot{q})$  dans (4.6) n'est pas inversible pour tout  $\dot{q} \in \mathbb{R}^3$ . Par conséquent, les résultats en stabilisation pour un point d'équilibre  $(q^e, 0)$  qui peuvent être trouvés dans [38] ne sont pas applicables pour (4.1)-(4.3), car pour un hélicoptère il est souhaitable d'avoir  $\|\dot{\gamma}\| \gg 1$  et d'obtenir  $\dot{\gamma} \approx \text{constante}$  pendant le vol.  $\circ$

#### 4.1.1 Propriétés de Dissipativité du Modèle à 3-DDL

Nous observons à partir de (3.122)-(3.122) et (3.128) que le modèle est constitué de deux sous-systèmes :  $S_{translation}$  avec  $(z, \dot{z})$  comme états et  $S_{rotation}$  avec  $(\phi, \dot{\phi}, \gamma, \dot{\gamma})$  comme états.

**Remarque 4** . La condition unilatérale de transmission de puissance (roue libre) entre



*l'arbre moteur et le rotor principal pourrait être prise en compte lors de la modélisation. De plus, une fonction de transfert de premier ou deuxième ordre pourrait être considérée pour modéliser la dynamique du moteur. Le résultat serait un modèle plus complexe. Cependant, dans ce cas il est clair que le problème de commande serait plus complexe à cause des dynamiques additionnelles. Dans ce travail nous avons considéré que le système évolue dans la bande passante de la dynamique du moteur.*  $\circ$

L'utilisation de la passivité a été au centre de la conception de plusieurs lois de commande durant les dernières quinze années (voir [25] et annexe E). L'intérêt d'une loi de commande passive se trouve dans ses fondements physiques (contrairement à d'autres techniques de stabilisation non-linéaire qui dépendent uniquement de la structure des équations dans l'espace d'état). La conception d'une loi de commande passive pour (4.1) est très spécifique du fait de la dynamique Lagrangienne et de la forme de  $Q(u)$ . Plus précisément, la pesanteur qui agit dans la dynamique  $z$  dans (4.1) et le fait que les entrées en  $u \in \mathbb{R}^2$  ne sont pas 3 forces généralisées indépendantes empêche la dissipativité des opérateurs :

$$\begin{aligned} O_1 : u &\mapsto \dot{q} \\ O_2 : Q(u) &\mapsto \dot{q} \end{aligned}$$

une propriété qui est cruciale dans la conception de régulateurs basés sur la passivité assurant la commande en poursuite globale de  $(q(t), \dot{q}(t))$ . Cependant pour le sous-système  $S_{rotation}$  l'opérateur :

$$O_3 : \bar{u} \triangleq \bar{A}u + \bar{B} \mapsto \dot{\eta} \triangleq [\dot{\phi} \ \dot{\gamma}]^T \quad (4.5)$$

est passif sans pertes, avec (voir équations (4.2) et (4.4)) :

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \cos^2(c_3 \gamma) & c_4 \\ c_4 & c_5 \end{bmatrix} & \bar{C} &= \begin{bmatrix} c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} & c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} \\ -c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & c_{11} \dot{\gamma}^2 \\ c_{12} \dot{\gamma} + c_{13} & 0 \end{bmatrix} & \bar{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

La preuve est simple en remarquant que  $\dot{\bar{M}} - 2\bar{C}$  est antisymétrique [25].

### 4.1.2 Conception de la Commande

Nous présentons dans cette section deux stratégies de commande pour le modèle de l'hélicoptère sur la plateforme. La première concerne la commutation entre deux commandes (une passive et une linéarisante E/S). La deuxième stratégie utilise uniquement la commande linéarisante E/S.

#### 1ère Stratégie. Commutation Commande Passive/Commande Linéarisante.

Pour l'objectif de la commande par feedback, nous utiliserons la structure de la dynamique du modèle et la propriété physique de l'opérateur  $O_3 : \bar{u} \mapsto \dot{\eta}$ . Par la suite, nous supposons que initialement  $\|\dot{\gamma}(0) \geq \delta > 0\|$  et  $z(0) < 0$ , alors  $\bar{A}$  dans (4.6) est de rang plein. La stratégie de commande est séparée en deux phases principales :

Phase 1. Mise en Marche et Décollage. Dans cette phase nous supposons que le rotor principal tourne ( $\dot{\gamma} \neq 0$ ). La commande en boucle fermée doit garantir la stabilité asymptotique des erreurs de poursuite  $\tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_d(t)$ ,  $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_d(t)$ ,  $\tilde{\phi} = \phi - \phi_d(t)$  et  $\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d(t)$  quand l'hélicoptère est sur le sol. De plus cette commande doit garantir le décollage de l'hélicoptère.

Phase 2. Vol Vertical. Lorsque le décollage a lieu ( $z < L - \epsilon$  pour un  $\epsilon > 0$ . Voir figure 3.4), nous commutons à une commande linéarisante E/S qui garantit la poursuite asymptotique de  $\tilde{z} = z - z_d(t)$ ,  $\dot{\tilde{z}} = \dot{z} - \dot{z}_d(t)$ ,  $\tilde{\phi}$  et  $\dot{\tilde{\phi}}$  pendant que  $\dot{\gamma}$  converge vers une valeur constante et reste bornée loin de 0.

Dans les deux phases les propriétés de robustesse par rapport aux incertitudes des paramètres  $a$ ,  $c_d$  et  $K_{mot}$  seront étudiées en évaluant les critères suivants :

$$J_r = \int_0^{t_{off}} \left[ |\tilde{\gamma}|^2 + |\dot{\tilde{\gamma}}|^2 + |\tilde{\phi}|^2 + |\dot{\tilde{\phi}}|^2 + u^T u \right] dt \quad (4.7)$$

pour la phase 1 et

$$J_f = \int_{t_{off}}^{t_f} \left[ |\tilde{z}|^2 + |\dot{\tilde{z}}|^2 + |\tilde{\phi}|^2 + |\dot{\tilde{\phi}}|^2 + u^T u \right] dt \quad (4.8)$$

pour la phase 2. Dans ces équations  $t_{off}$  est le temps de commutation (décollage) et  $t_f$  est le temps final de simulation. Dans le premier critère (4.7)  $\tilde{z}$  et  $\dot{\tilde{z}}$  ne sont pas considérés car même si l'hélicoptère décolle, aucune propriété de poursuite dans la direction verticale n'est requise. Similairement pour  $\tilde{\gamma}$  et  $\dot{\tilde{\gamma}}$  dans (4.8).

### Phase 1 (Mise en Marche et Décollage).

**Commande Passive de la Partie Rotationnelle.** La dynamique de la partie rotationnelle est donnée par (voir équation (4.6)) :

$$\bar{M}(\eta)\ddot{\eta} + \bar{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \bar{A}(\dot{\eta})u + \bar{B}(\dot{\eta}) \quad (4.9)$$

Il est intéressant de mentionner que cette dynamique représente aussi la partie rotationnelle du système lorsque l'hélicoptère n'a pas encore décollé, i.e. quand  $z \equiv L (L < 0)$  (voir figure 3.4).

Soit  $u$  dans (4.5) telle que :

$$\bar{u} = \bar{M}(\ddot{\eta}_d - \lambda_1 \dot{\tilde{\eta}}) + \bar{C}(\dot{\eta}_d - \lambda_1 \tilde{\eta}) - \lambda_2(\dot{\tilde{\eta}} + \lambda_1 \tilde{\eta}) \quad (4.10)$$

où  $\tilde{\eta} = \eta - \eta_d$ ,  $\eta_d(t) \in C^2(\mathbb{R}^+)$  est une trajectoire désirée,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . L'entrée (4.10) garantit que  $\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, \ddot{\tilde{\eta}} \rightarrow 0$  asymptotiquement exponentiellement globalement (voir [25] et annexe E).

**Décollage.** L'idée de base est d'utiliser  $\dot{\gamma}$  (en fait  $\dot{\gamma}_d$ ) pour commander la première équation dans (4.1), i.e.

$$c_0 \ddot{z} + c_7 = c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} \quad (4.11)$$

avec  $u_1$  donnée par (4.10). Admettons que le système (4.9)-(4.10) a convergé, i.e.  $\|\tilde{\eta}^{(i)}\| < \epsilon$ ,  $i = 0, 1, 2$ , et  $\dot{\phi}_d = 0$ . Nous pouvons approximer  $u_1$  dans (4.10) comme :

$$u_1^{app} = \frac{1}{a_{31}}[c_5\ddot{\gamma}_d - c_{14}\dot{\gamma}_d^2 - c_{15}] \quad (4.12)$$

A partir de (4.11) et (4.12) il est clair que si  $\dot{\gamma}_d$  est constante, alors la hauteur  $z(t - t_{off}) = a(t - t_{off})^2$  avec  $z(t_{off}) = \dot{z}(t_{off}) = 0$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous pouvons alors utiliser (4.12) pour faire décoller l'hélicoptère et le faire atteindre une certaine hauteur.

**Remarque 5 .** *La strategie de commande proposée ne nous permet pas d'obtenir une régulation précise de la hauteur lorsque l'hélicoptère est près du sol. Cependant, une telle tâche aurait besoin d'un modèle analytique des effets du sol, qui (à notre connaissance) n'est pas disponible dans la littérature de l'aérodynamique.*  $\circ$

**Phase 2 ( Vol Vertical).** A partir de (4.1) en prenant en compte (4.3) et (4.2) nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z} = \frac{1}{c_0}[c_8\dot{\gamma}^2 u_1 + c_9\dot{\gamma} + c_{10} - c_7] \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma)}[c_5(c_{11}\dot{\gamma}^2 u_2 - 2c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\gamma}\dot{\phi}) - c_4((c_{12}\dot{\gamma} + c_{13})u_1 + \\ c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\phi}^2 + c_{14}\dot{\gamma}^2 + c_{15})] \\ \ddot{\gamma} = \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma)}[-c_4(c_{11}\dot{\gamma}^2 u_2 - 2c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\gamma}\dot{\phi}) + (c_1 + \\ c_2 \cos^2(c_3 \gamma))((c_{12}\dot{\gamma} + c_{13})u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\phi}^2 + c_{14}\dot{\gamma}^2 + c_{15})] \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Quand l'hélicoptère a décollé, nous proposons une commutation de la commande dans (4.10) à une commande linéarisante E/S :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{c_8\dot{\gamma}^2}[c_7 - c_{10} - c_9\dot{\gamma} + c_0(\ddot{z}_d - \lambda_3\dot{\ddot{z}} - \lambda_4\ddot{z})] \\ u_2 = \frac{1}{c_5 c_{11}\dot{\gamma}^2}[(c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma))(\ddot{\phi}_d - \lambda_5\dot{\ddot{\phi}} - \lambda_6\ddot{\phi}) + 2c_5 c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\gamma}\dot{\phi} + \\ c_4((c_{12}\dot{\gamma} + c_{13})u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma)\dot{\phi}^2 + c_{14}\dot{\gamma}^2 + c_{15})] \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Le système en boucle fermée est alors :

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{z}} + \lambda_3 \dot{\tilde{z}} + \lambda_4 \tilde{z} = 0 \\ \ddot{\tilde{\phi}} + \lambda_5 \dot{\tilde{\phi}} + \lambda_6 \tilde{\phi} = 0 \\ \ddot{\gamma} = \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2 + c_2 c_5 \cos^2(c_3 \gamma)} [-c_4 (c_{11} \dot{\gamma}^2 u_2 - 2c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\gamma} \dot{\phi}) + (c_1 + \\ c_2 \cos^2(c_3 \gamma)) ((c_{12} \dot{\gamma} + c_{13}) u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma) \dot{\phi}^2 + c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15})] \end{cases} \quad (4.15)$$

où la dynamique  $(\gamma, \dot{\gamma})$  représente la dynamique zéro de (4.13) avec  $u_1$  et  $u_2$  comme entrées et  $(z, \phi)$  comme sorties. Les simulations de la section 4.1.3 montrent que  $\dot{\gamma}$  reste bornée loin de zéro pendant le vol. Pour les trajectoires désirées et pour les gains choisis,  $\dot{\gamma}$  converge rapidement vers une valeur constante (voir figure 4.6). Ceci est un point intéressant car il montre que la dynamique et la commande par feedback amènent les conditions de vol près de celles des hélicoptères réels qui volent avec une valeur constante de  $\dot{\gamma}$  grâce à une boucle locale de régulation de la vitesse de rotation du rotor principal (qui n'existe pas dans l'hélicoptère à modèle réduit VARIO).

**Remarque 6 .** Si nous considérons que la puissance du moteur est associée à une entrée indépendante  $u_3$  nous pourrions compenser avec  $u_1 = u_1(\dot{\gamma}, v_1)$  la pesanteur dans la première équation de (4.13). En utilisant  $u_3 = u_3(u_1, v_3)$  dans la dernière équation pour compenser les termes introduits par la première entrée et ceux de la dernière ligne du vecteur  $B(\dot{q})$  et en utilisant  $u_2 = u_2(\dot{\gamma}, v_2)$  dans la deuxième équation où les  $v_i$   $i = 1, 2, 3$  sont des nouvelles entrées, nous arrivons à :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Nous pouvons voir que l'opérateur

$$O : [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \mapsto [\dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\gamma}]^T \quad (4.17)$$

est passif. Une loi de commande passive peut être alors facilement conçue [25].  $\circ$

La selection des trajectoires désirées  $\eta_d(t)$ ,  $z_d(t)$  et des gains de la boucle est cruciale pour respecter les saturations des entrées  $u_m^1 \leq u_1 \leq 0$  et  $u_m^2 \leq u_2 \leq u_M^2$ . Ici  $u_m^1 = -1.0112 \text{ m}$ ,  $u_m^2 = -0.005 \text{ m}$  et  $u_M^2 = 0.005 \text{ m}$ . La technique utilisée pour faire face aux saturations de l'entrée pour la phase de mise en marche est la suivante : à partir de (4.10) et en supposant une poursuite parfaite ( $\tilde{\eta} = \dot{\tilde{\eta}} \equiv 0$ ) nous avons :

$$u = \bar{A}^{-1}(\dot{\gamma}_d(t))[\bar{M}(\eta_d)\ddot{\eta}_d + \bar{C}(\eta_d, \dot{\eta}_d)\dot{\eta}_d - \bar{B}(\dot{\gamma}_d)] \quad (4.18)$$

A partir de cette expression nous calculons hors ligne si  $u_m^1 \leq u_1 \leq 0$  et  $u_m^2 \leq u_2 \leq u_M^2$ . Les saturations sont alors respectées si les erreurs initiales de poursuite  $\tilde{\eta}(0)$  et  $\dot{\tilde{\eta}}(0)$  et les gains de la boucle  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  sont choisis suffisamment petits. De plus, en faisant des simulations (voir section 4.1.3) nous observons que l'entrée peut saturer pendant le transitoire sans détruire la stabilité du système en boucle fermée. Les saturations doivent bien sûr être évitées en général, au moins pour des raisons pratiques.

## 2ème Stratégie. Commande Linéarisante E/S.

Appliquons la commande dans (4.14) pour tout  $t \geq 0$ . Puisque cette stratégie de commande concerne une structure de commande unique, la séparation de la tâche de commande en deux phases perd sa signification. Si les données initiales sont choisies comme  $z(0) = L$ ,  $z^{(j)}(0) = 0$  pour tout  $j \geq 1$  (l'hélicoptère est au sol) ; et si  $z_d = L$ , alors la première équation dans (4.15) devient  $z - z_d = 0$ . Lorsque la contrainte  $z = L$  est activée la dynamique en  $z$  est donnée par

$$0 = c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} - c_7 - \lambda \quad (4.19)$$

avec  $\lambda \geq 0$  la réaction du sol. Avec les conditions ci-dessus établies (valeurs initiales et contrainte unilatérale activée) il est simple de voir que la commande

$$u_1 = \frac{1}{c_8 \dot{\gamma}^2} [c_7 - c_{10} - c_9 \dot{\gamma} + v(t)] \quad (4.20)$$

implique  $\lambda = v(t)$ . Nous pouvons choisir le signal  $v(t) \geq 0$  d'une forme souhaitable pendant la période de mise en marche. Lorsque le décollage est désiré ( $t = t_{off}$ ) nous

devons avoir  $v(t) = 0$  et  $z_d(t) < L$  pour  $t \geq t_{off}$ . Pour utiliser cette stratégie de commande, une valeur minimale initiale de la vitesse de rotation du rotor principal ( $\dot{\gamma}_0$ ) doit être garantie afin d'éviter une saturation initiale de la commande. A partir de la deuxième équation dans (4.14) et en prenant  $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = \tilde{\phi} = 0$  nous avons

$$\frac{1}{c_5 c_{11} \dot{\gamma}_0^2} [2c_5 c_6 \sin(2c_3 \gamma_0) \dot{\gamma}_0 \dot{\phi}_0 + c_4 ((c_{12} \dot{\gamma}_0 + c_{13}) u_1 + c_6 \sin(2c_3 \gamma_0) \dot{\phi}_0^2 + c_{14} \dot{\gamma}_0^2 + c_{15})] < u_M^2 \quad (4.21)$$

où  $u_M^2$  est la limite supérieure de saturation pour l'entrée  $u_2$  et l'indice 0 concerne les conditions initiales. En négligeant les termes qui contiennent  $\dot{\phi}$ , une condition suffisante pour respecter les saturations de  $u_2$  dans (4.14) est donnée par

$$(c_{14} - c_5 c_{11} u_M^2) \dot{\gamma}_0^2 + c_4 c_{12} u_1 \dot{\gamma}_0 + c_4 c_{13} u_1 + c_{15} > 0 \quad (4.22)$$

Il est clair à partir de (4.14) que  $\|\dot{\gamma}(0)\|$  doit être suffisamment grande pour maintenir les entrées à l'intérieur des limites de saturation. La robustesse paramétrique par rapport aux paramètres  $a$ ,  $c_d$  et  $K_{mot}$  sera numériquement étudiée dans la section suivante pour cette loi de commande linéarisante en utilisant le critère (4.8) de  $t = 0$  à  $t = t_f$ .

### 4.1.3 Résultats en Simulation.

Dans cette section nous présentons des résultats numériques obtenus en réalisant plusieurs simulations. Les figures 4.1 à 4.2 concernent la première simulation, donc la commande (4.10)-(4.12) de la partie rotationnelle de l'hélicoptère. Pour la deuxième simulation nous présentons les figures 4.3 à 4.6 concernant la stratégie à 2 phases (mise en marche-décollage et vol vertical), c'est à dire les commandes (4.10) et (4.14). Les figures 4.9 à 4.14 concernent uniquement la commande linéarisante (4.14) pour des trajectoires désirées différentes en hauteur (premièrement un problème de régulation-poursuite et deuxièmement un problème de régulation à trois niveaux d'altitude).

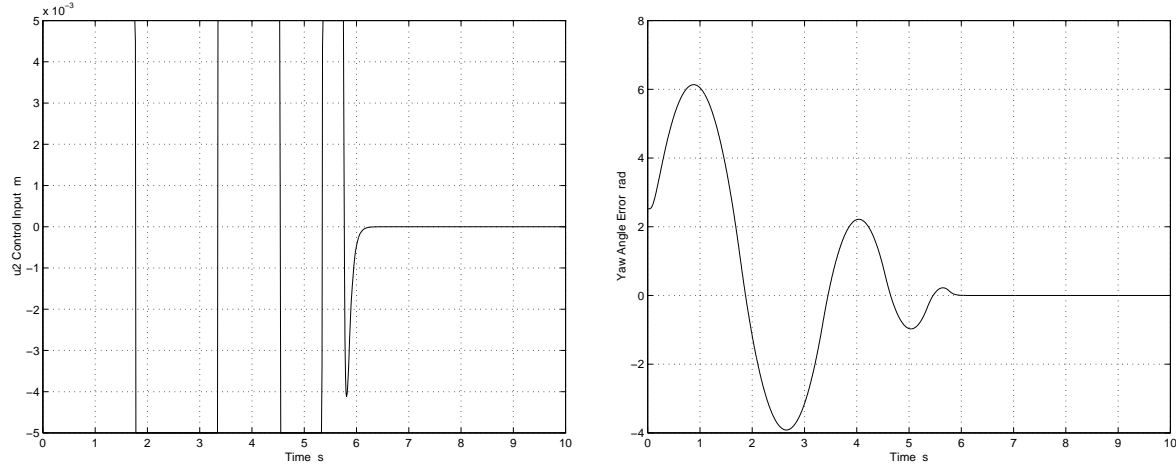


FIG. 4.1 – Variation de l'Entrée  $u_2$  et Convergence de l'Erreur de l'Angle de Lacet ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 15$ ).

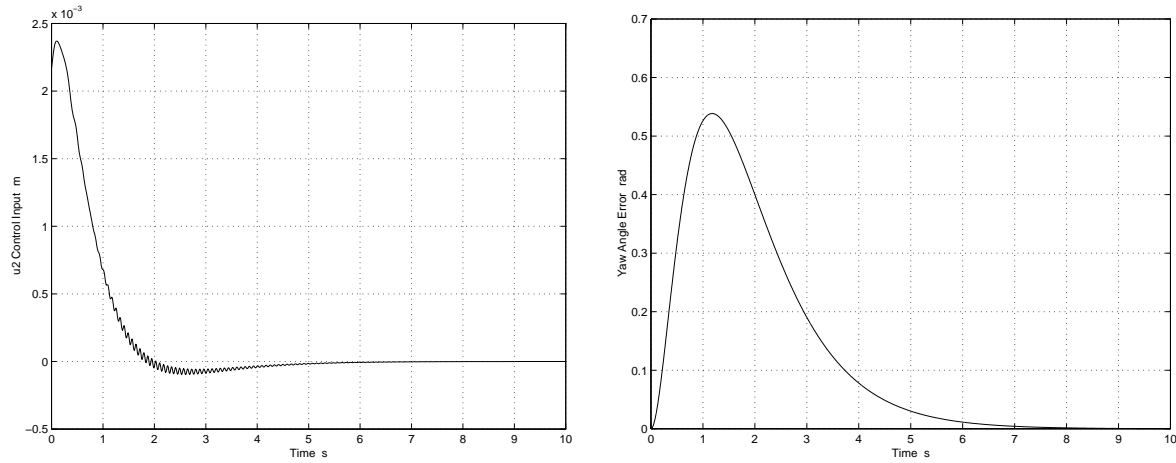


FIG. 4.2 – Variation de l'Entrée  $u_2$  et Convergence de l'Erreur de l'Angle de Lacet ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ).

1. Cette simulation concerne un problème de régulation de la partie rotationnelle du système  $(\phi, \gamma)$  en utilisant l'opérateur passif (4.5). La trajectoire désirée est définie par  $\phi_d = -\pi/6 \text{ rad}$  et  $\dot{\gamma}_d = -85 \text{ rad/s}$ . Premièrement nous prenons les conditions initiales  $\phi(0) = 2 \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma(0) = -5 \text{ rad}$  et  $\dot{\gamma}(0) = -45 \text{ rad/s}$  et les gains  $\lambda_1 = \lambda_2 = 15$ . Dans la figure 4.1 nous pouvons observer que l'entrée  $u_2$  sature pendant le transitoire sans détruire la stabilité du système en boucle fermée. Dans ce cas  $\tilde{\phi}(0) = 1.476 \text{ rad}$ ,  $\tilde{\dot{\phi}}(0) = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\tilde{\gamma}(0) = -5 \text{ rad}$  et  $\tilde{\dot{\gamma}}(0) =$



40 rad/s. Deuxièmement nous réduisons les erreurs initiales avec les conditions initiales  $\phi(0) = -\pi/6$  rad,  $\dot{\phi}(0) = 0$  rad/s,  $\gamma(0) = -\pi$  rad et  $\dot{\gamma}(0) = -70$  rad/s et prenons des gains plus petits  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Nous observons dans la figure 4.2 que en diminuant les gains de la boucle ainsi que les erreurs initiales les saturations des entrées sont respectées et le comportement du transitoire est amélioré. Dans ce cas  $\tilde{\phi}(0) = 0$  rad,  $\dot{\tilde{\phi}}(0) = 0$  rad/s,  $\tilde{\gamma}(0) = -\pi$  rad et  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = 15$  rad/s.

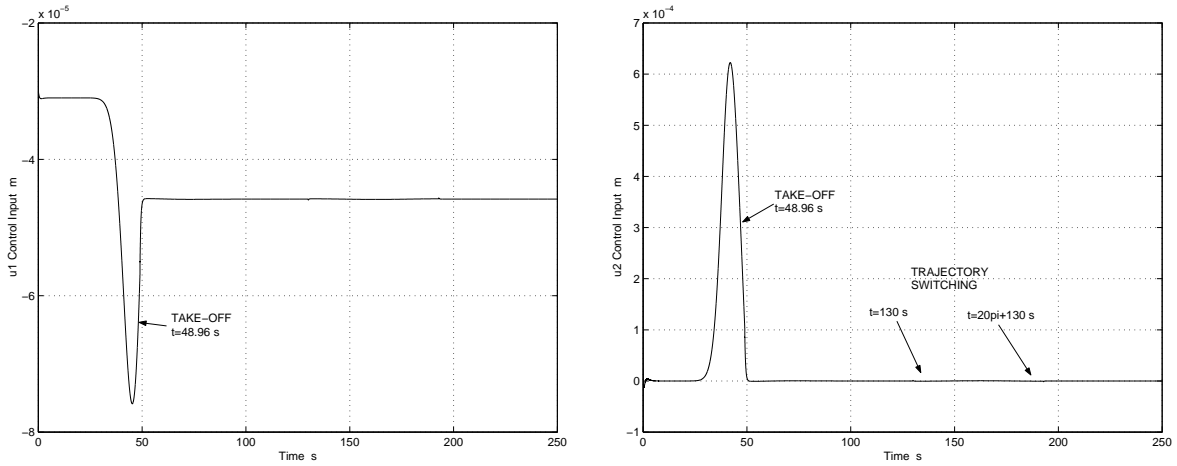


FIG. 4.3 – Variation des Entrées  $u_1$  et  $u_2$  (phases 1 et 2).

2. Cette simulation concerne un problème de poursuite et de régulation du système complet (parties rotationnelle et translationnelle) en utilisant la stratégie de commande à deux phases. Initialement nous supposons que l'hélicoptère est sur le sol (monté sur la plateforme) avec les conditions initiales  $z(0) = -0.2$  m,  $\dot{z}(0) = 0$  m/s, le rotor principal tourne à  $\dot{\gamma}(0) = -60$  rad/s,  $\gamma(0) = -0.1$  rad et  $\phi(0) = -\pi/4$  rad,  $\dot{\phi}(0) = 0$  rad/s. Pour la phase 1 la trajectoire désirée est définie par  $\phi_d = -\pi/4$  rad et  $\dot{\gamma}_d = -125 + (-125 + 60)[-1 + \exp(-(t - 50)^2/60)]$  rad/s. Cette trajectoire permet à l'hélicoptère de décoller quand  $t = t_{off}$  s. A ce moment nous commutons à la commande de la phase 2 avec une nouvelle trajectoire désirée  $\phi_d = -\pi/4$  rad et  $z_d$  définie par :

- $z_d = -0.2 + (0.5 - 0.2)[-1 + \exp(-(t - t_{off})^2/350)]$  m, pour  $t_{off} \leq t < 130$  s.
- $z_d = -0.6 + 0.1\cos[(t - 130)/10]$  m, pour  $130 < t < 20\pi + 130$  s.
- $z_d = -0.5$  m, pour  $t \geq 20\pi + 130$  s.

Dans ce cas  $\tilde{\phi}(0) = 0$  rad,  $\dot{\tilde{\phi}}(0) = 0$  rad/s,  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  rad,  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = 0$  rad/s,  $\tilde{z}(t_{off}) = 0$  m,  $\dot{\tilde{z}}(t_{off}) = 0$  m/s,  $\tilde{\phi}(t_{off}) = 0$  rad et  $\dot{\tilde{\phi}}(t_{off}) = 0$  rad/s. Pour cette simulation l'hélicoptère décolle à  $t_{off} = 48.96$  s et  $t_f = 250$  s. Dans la figure 4.3

nous observons que les saturations des entrées sont respectées et que l'allure des entrées est assez douce comme une conséquence d'une sélection convenable des trajectoires désirées au moment de la commutation (un pic peut se produire après avoir commuté si la trajectoire désirée n'est pas définie d'une manière convenable). Des tels pics doivent être évités car les actionneurs électriques des plateaux cycliques possèdent une bande passante finie). Les erreurs de la partie rotationnelle sont montrées dans la figure 4.4.

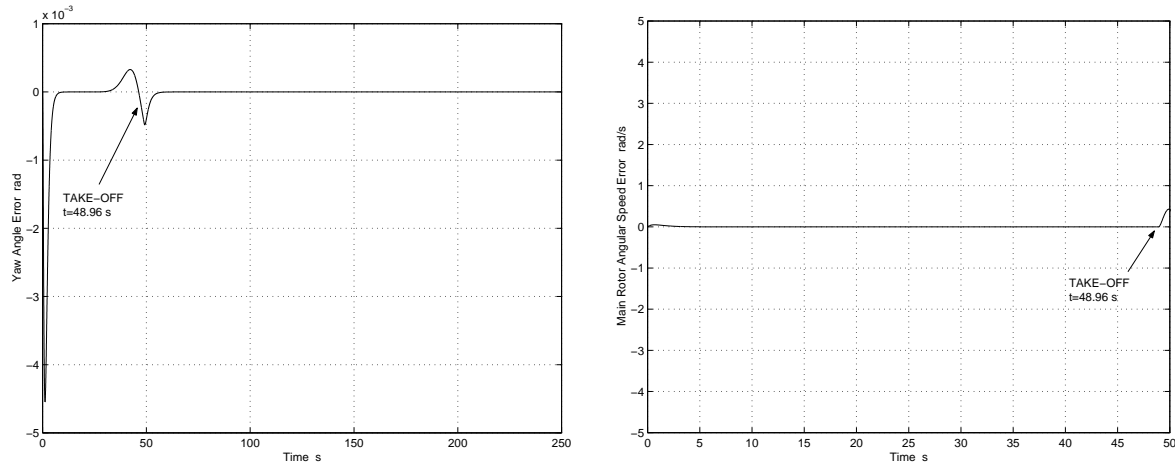


FIG. 4.4 – Convergence des Erreur de la partie Rotationnelle (phases 1 et 2).

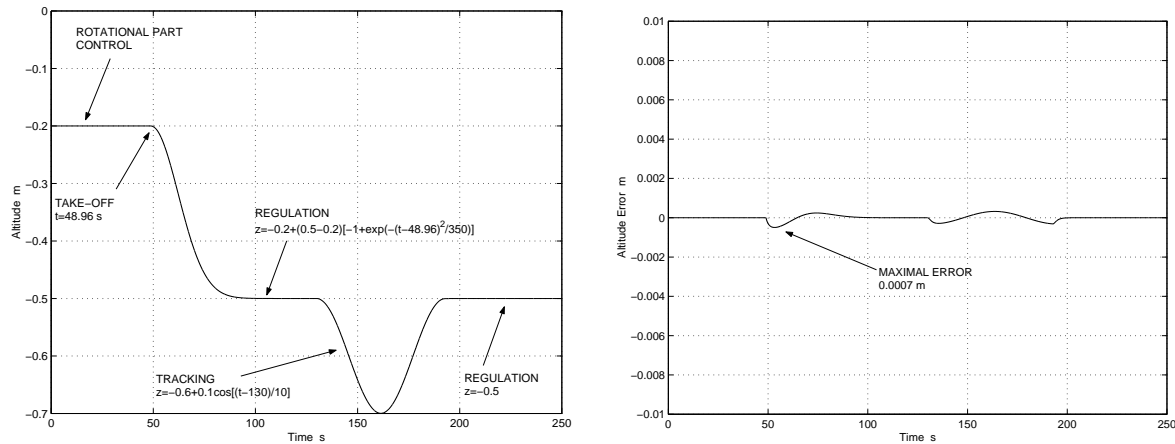


FIG. 4.5 – Hauteur et Convergence de son Erreur (phases 1 et 2).

Nous remarquons que l'erreur de poursuite  $\dot{\gamma}(t)$  n'a plus de signification après avoir commuté car  $\gamma_d(t)$  n'est pas définie après cet instant. Les problèmes de

poursuite et de régulation sont résolus de manière satisfaisante pour les deux phases comme nous pouvons l'observer dans les figures 4.4 et 4.5. Dans la phase 2 de commande  $\dot{\gamma}$  converge vers une valeur constante  $\dot{\gamma} \rightarrow -124.62 \text{ rad/s}$  et reste bornée comme le montre la figure 4.6 (voir la dernière équation dans (4.15) qui représente la dynamique zéro avec état  $(\gamma, \dot{\gamma})$ ).

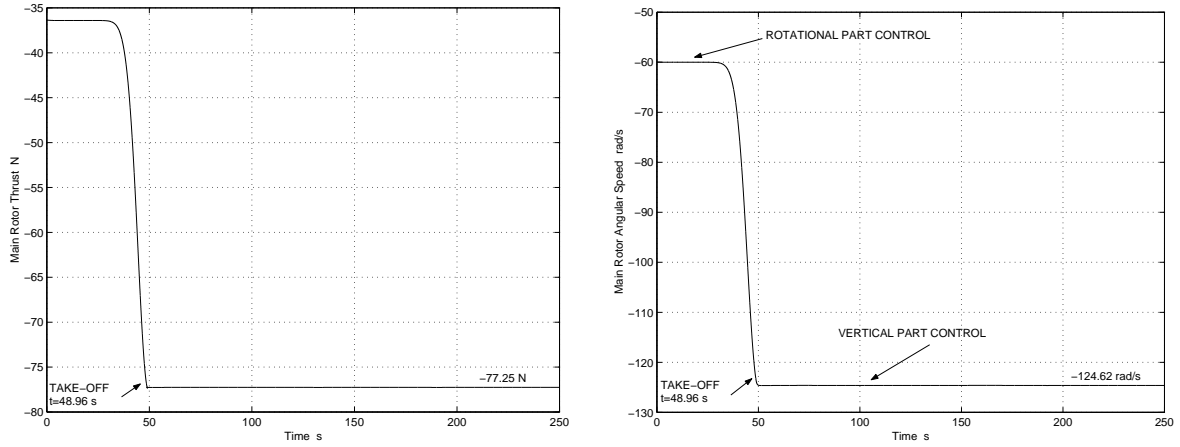


FIG. 4.6 – Force de Poussée et Vitesse Angulaire (phases 1 et 2).

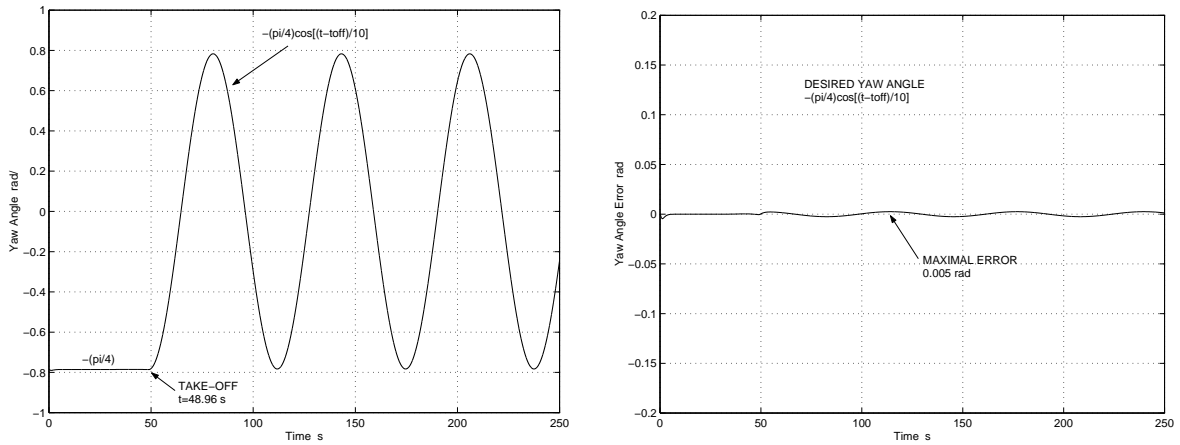


FIG. 4.7 – Angle de Lacet et Convergence de son Erreur ( $\phi_d = -\frac{\pi}{4} \cos[(t - t_{off})/10]$ ).

Nous remarquons que lorsque la trajectoire désirée en  $\phi_d$  est plus complexe ( $\phi_d = -\pi/4$  pour  $0 \leq t \leq t_{off}$  et  $\phi_d = -\frac{\pi}{4} \cos[(t - t_{off})/10]$  pour  $t > t_{off}$ , par exemple. Voir figure 4.7)  $\dot{\gamma}$  présente le même comportement comme nous pouvons l'observer dans la figure 4.8.

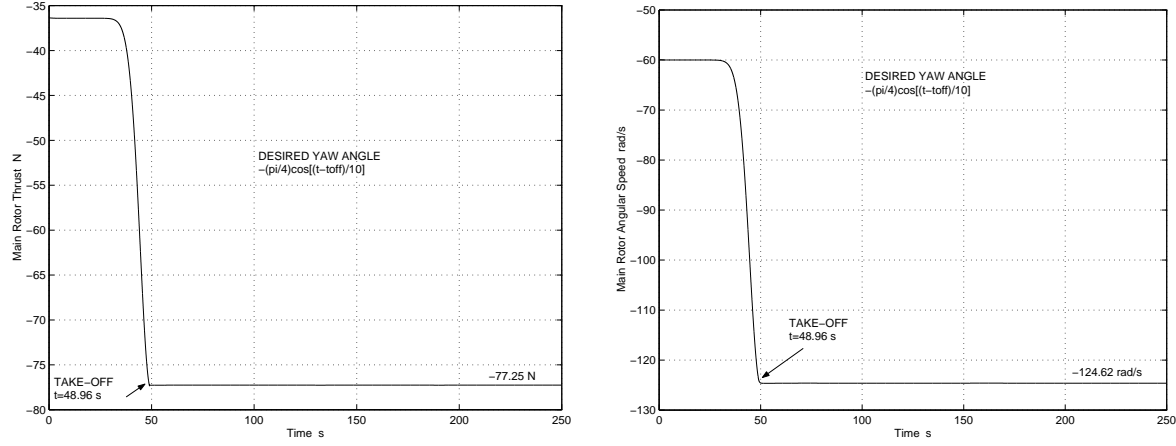


FIG. 4.8 – Force de Poussée et Variation de la Vitesse Angulaire ( $\phi_d = -\frac{\pi}{4}\cos[(t - t_{off})/10]$ ).

Comme nous l'avons déjà dit, ceci est un point intéressant car quelques hélicoptères réels volent avec une valeur constante de la vitesse angulaire du rotor principal. Après une période transitoire toutes les erreurs dans (4.15) sont près de zéro et la dynamique zéro peut être approximée comme un système non linéaire variant dans le temps de la forme  $\ddot{\gamma} = f(\gamma, \dot{\gamma}, t)^1$ . Dans les figures 4.6 et 4.8 nous observons que la force de poussée  $T_M \rightarrow -77.25 \text{ N}$ , valeur correspondant à celle qui compense le poids de l'hélicoptère et la force de traînée sur le fuselage.

3. Cette simulation concerne la stratégie de commande linéarisante E/S. Les conditions initiales sont  $z(0) = -0.2 \text{ m}$ ,  $\dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$ ,  $\phi(0) = -\pi \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma(0) = -\pi \text{ rad}$ . A partir de (4.22) et en supposant  $\ddot{z}(0) = \dot{\ddot{z}}(0) = \ddot{\ddot{z}}(0) = 0$  nous avons  $\dot{\gamma}(0) = -99.5 \text{ rad/s}$ . Comme nous pouvons le constater la valeur initiale de la vitesse angulaire du rotor principal est beaucoup plus importante que celle utilisé dans la stratégie de commande passive. Ce point pourrait représenter un inconvénient par rapport à la stratégie passive où la valeur initiale de cette vitesse angulaire n'a pas de contraintes spécifiques. Dans cette simulation nous imposons le temps de décollage  $t_{off} = 50 \text{ s}$ . La trajectoire désirée est définie par  $\phi_d = 0 \text{ rad}$  et  $z_d$  est donnée par :

- $z_d = -0.2 \text{ m}$ , pour  $0 \leq t \leq t_{off}$
- $z_d = -0.2 + (0.5 - 0.2)[-1 + \exp(-(t - t_{off})^2/350)] \text{ m}$  pour  $t_{off} < t \leq 130 \text{ s}$
- $z_d = -0.6 + 0.1\cos[(t - 130)/10] \text{ m}$  pour  $130 < t < 20\pi + 130 \text{ s}$

<sup>1</sup>Il serait intéressant d'effectuer une étude analytique des propriétés de cette dynamique zéro. Dans ce travail nous nous contenterons cependant des résultats numériques qui semblent montrer un comportement très satisfaisant.

$$- z_d = -0.5 \text{ m pour } t \geq 20\pi + 130 \text{ s}$$

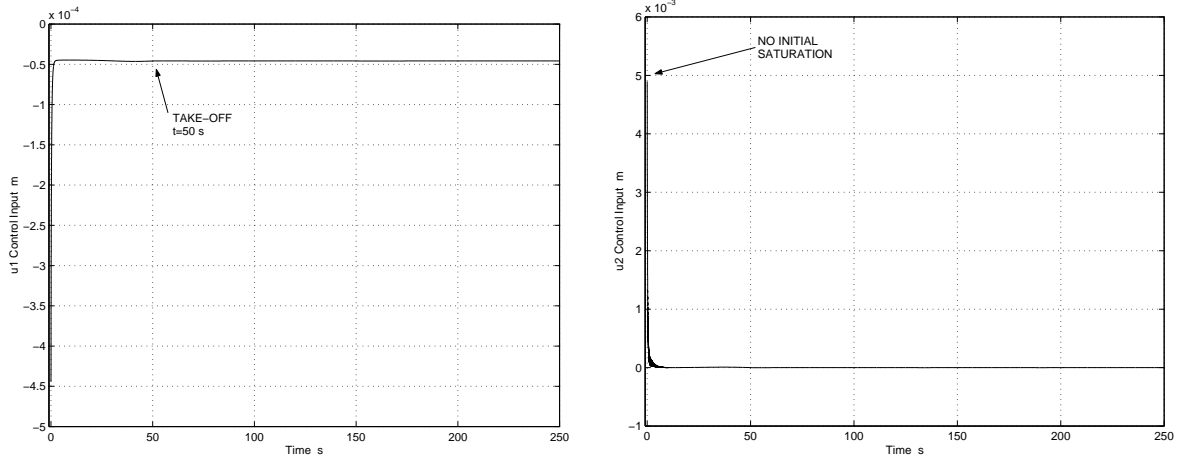


FIG. 4.9 – Variations des Entrées  $u_1$  et  $u_2$  (Commande Linéarisante E/S).

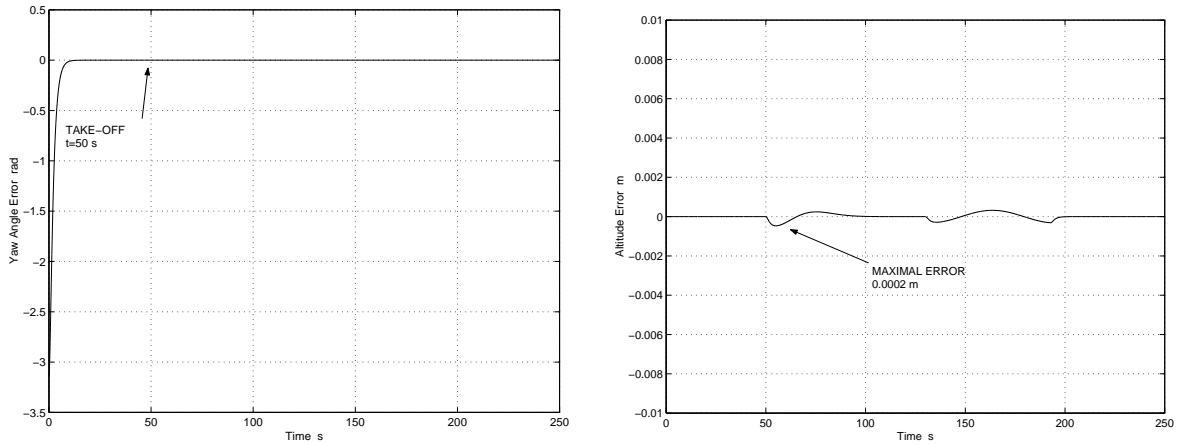


FIG. 4.10 – Erreurs de l'Angle de Lacet et de la Hauteur (Commande Linéarisante E/S).

Les figures 4.9 et 4.10 montrent que le comportement des entrées de commande est amélioré par rapport à la stratégie de 2 phases de commande ainsi que ceux des erreurs de l'angle de lacet et de la hauteur. Dans la figure 4.11 nous observons que l'allure de la courbe de hauteur est similaire pour les deux stratégies de commande et que  $\dot{\gamma} \rightarrow -124.62 \text{ rad/s}$  aussi. Une légère différence entre les deux comportements des vitesses angulaires du rotor principal (stratégie à 2 phases et

stratégie linéarisante) est observée avant le temps de décollage. Cette différence est le résultat de la fonction  $v(t)$  utilisée dans (4.20) où :

- $v(t) = -2.5[-1 + \exp(-(t - t_{off})^2/350)]$ , pour  $0 \leq t \leq t_{off}$
- $v(t) = 0$ , pour  $t > t_{off}$

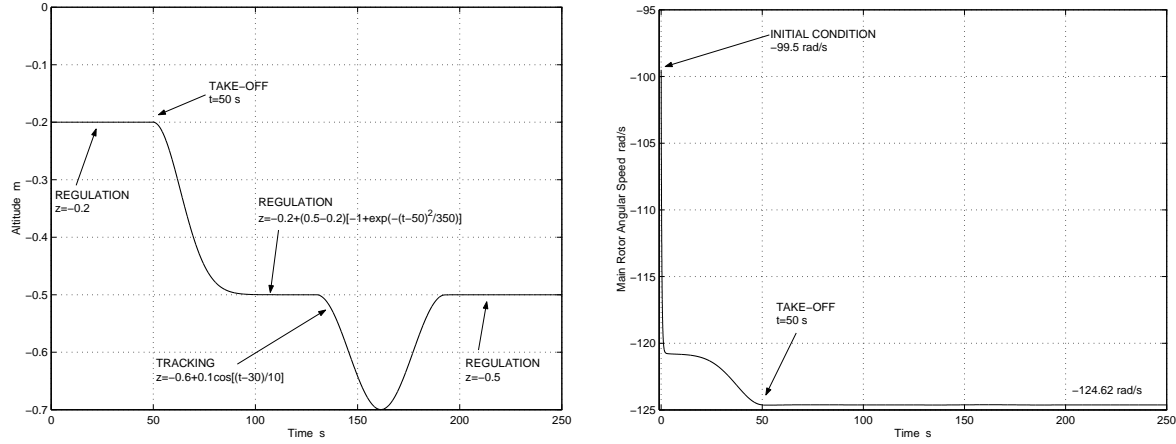


FIG. 4.11 – Variations de la Hauteur et de la Vitesse Angulaire du Rotor Principal (Commande Linéarisante E/S).

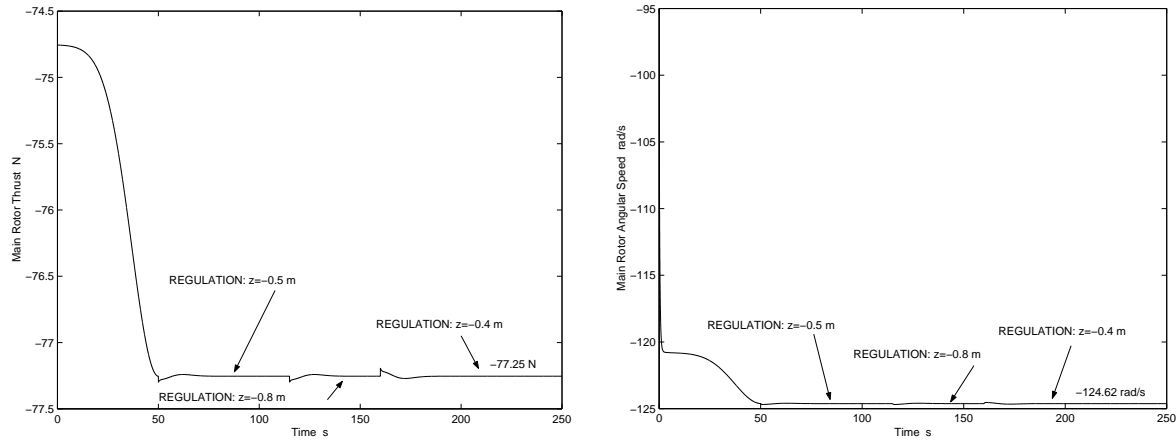


FIG. 4.12 – Variations de  $T_M$  et de  $\dot{\gamma}$  (Régulation à 3 Hauteurs).

4. Dans ce cas nous définissons un problème de régulation à trois hauteurs différentes en utilisant la stratégie de commande linéarisante E/S. Les conditions initiales sont  $z(0) = -0.2 \text{ m}$ ,  $\dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$ ,  $\phi(0) = -\pi \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma(0) =$

$-\pi \text{ rad}$  et  $\dot{\gamma}(0) = -99.5 \text{ rad/s}$ . Le temps de décollage  $t_{off} = 50 \text{ s}$ . La trajectoire désirée est définie par  $\phi_d = 0 \text{ rad}$  et  $z_d$  est donnée par :

- $z_d = -0.2 \text{ m}$ , pour  $0 \leq t \leq t_{off}$
- $z_d = -0.2 + (0.5 - 0.2)[-1 + \exp(-(t - t_{off})^2/100)] \text{ m}$  pour  $t_{off} < t \leq 115 \text{ s}$
- $z_d = -0.5 + (0.8 - 0.5)(-1 + \exp(-(t - 115)^2/100)) \text{ m}$  pour  $115 < t < 160 \text{ s}$
- $z_d = -0.8 + 0.4(1 - \exp(-(t - 160)^2/100)) \text{ m}$  pour  $t \geq 160 \text{ s}$

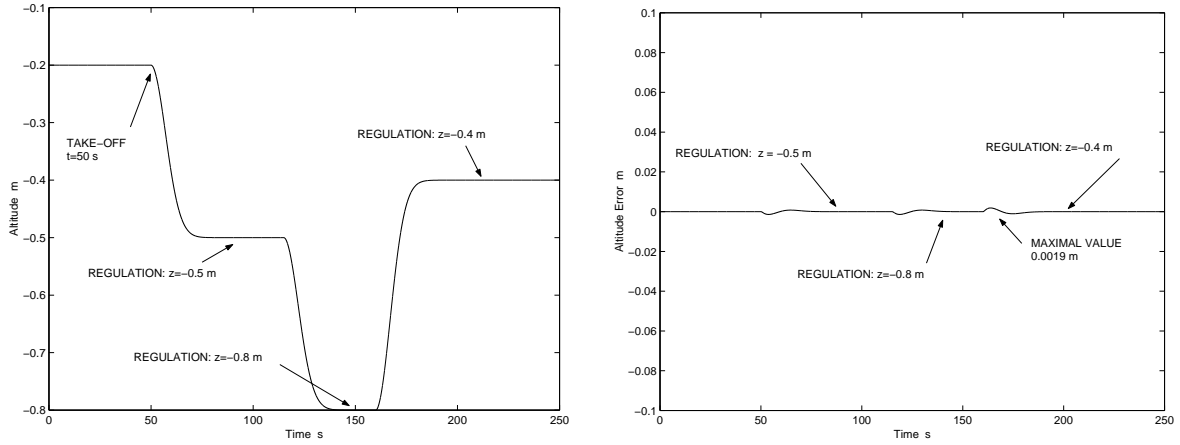


FIG. 4.13 – Altitude et Erreur en Altitude (Régulation à 3 Hauteurs).

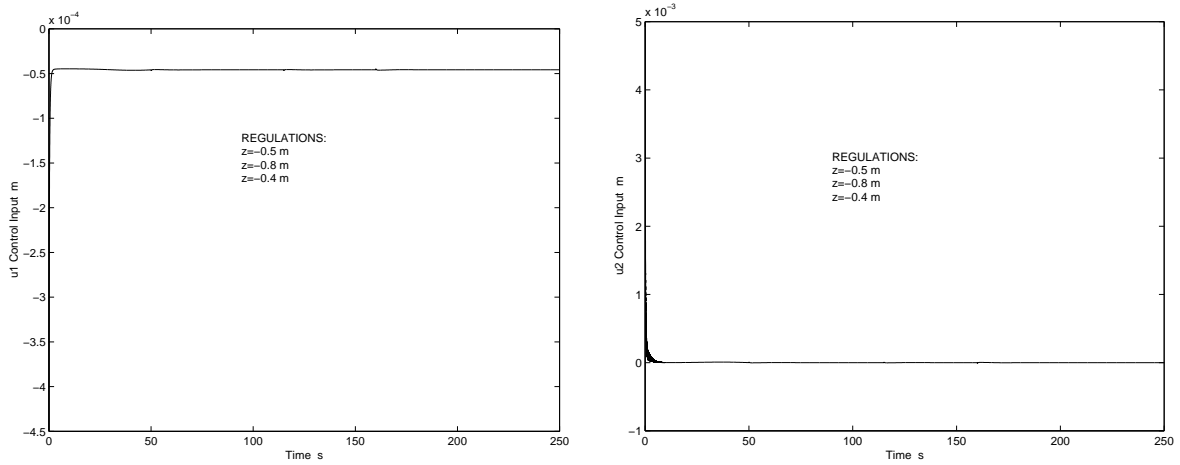


FIG. 4.14 – Variations des Entrées de Commande (Régulation à 3 Hauteurs).

Dans la figure 4.12 nous observons que  $T_M$  et  $\dot{\gamma}$  restent proches des valeurs  $-77.25 \text{ N}$  et  $-124.62 \text{ rad/s}$  respectivement de façon similaire aux simulations

précédentes. Les figures 4.13 et 4.14 montrent le comportement de certaines variables (la hauteur, son erreur et les entrées de commande).

**Remarque 7 .** *Les résultats en simulation montrent que la sélection des trajectoires désirées représente un pas crucial dans la conception de lois de commande pour les hélicoptères. Il est envisageable que ceci sera beaucoup plus important pour la commande du modèle à 7-DDL lorsqu'une perturbation (rafale de vent) soudain amène l'hélicoptère loin de sa position/orientation désirée. Une orbite spécifique devra alors être conçue afin de commander l'hélicoptère vers sa position/orientation originale, sans saturer les entrées. Il sera donc nécessaire pour le problème complet de commande d'utiliser un module pour la conception en ligne de telles trajectoires désirées.* ◦

#### 4.1.4 Robustesse Paramétrique.

Les valeurs estimées des paramètres  $a$ ,  $c_d$  et  $K_{mot}$  utilisés dans ce modèle sont  $a = 5.73 \text{ 1/rad}$ ,  $c_d = 0.01$  et  $K_{mot} = 100000 \text{ N}$ . Les paramètres  $a$  et  $c_d$  dépendent du profil des pales du rotor principal. Ces valeurs correspondent à un profil NACA 2412 (voir section 3.1) [1] qui représente une forme approximée du profil des pales de l'hélicoptère VARIO.

	Variation	$J_{ra}$	$J_{rc_d}$	$J_{rk_{mot}}$	$J_{fa}$	$J_{fc_d}$	$J_{fk_{mot}}$
Phase 1	+10%	-0.075%	-0.005%	0.025%	—	—	—
	-10%	—	0.007%	-0.015%	—	—	—
Phase 2	+10%	—	—	—	-3.052%	0.386%	-0.538%
	-10%	—	—	—	—	0.145%	-1.221%

TAB. 4.1 – Variations des Critères  $J_r$  et  $J_f$ .

**Stratégie à 2 Phases.** Nous étudions la robustesse des commandes conçues par rapport aux trois incertitudes paramétriques en  $a$ ,  $c_d$  et  $K_{mot}$  en utilisant les critères définis dans les équations (4.7) et (4.8) pendant que la troisième simulation définie précédemment est en cours. Nous réalisons les simulations avec les paramètres nominaux variant dans un intervalle d'incertitude de  $\pm 10\%$ .

Les variations des critères par rapport aux incertitudes paramétriques sont montrées



dans le tableau 4.1. Dans ce tableau  $J_{ij}$  représente la variation du critère  $i = r, f$  par rapport au paramètre  $j = a, c_d, K_{mot}$ .

Dans le cas d'une variation de  $-10\%$  du paramètre  $a$  l'hélicoptère ne décolle pas et l'entrée  $u_1$  sature. De plus, pour cette stratégie de commande il existe une valeur minimale de  $a$  notée  $a_{min}$  (qui correspond à une variation de  $-0.46\%$ ) au dessous de laquelle l'hélicoptère ne décolle pas. Ceci est considéré comme une carence de robustesse de la commande, le système étant considéré comme un système dynamique hybride, qui ne peut pas être représentée par les critères quadratiques dans (4.7) et (4.8). Pour  $a < a_{min}$  le système hybride reste au mode "système sous contrainte"  $z = L$ , et la commutation au mode "système libre"  $z < L$  ne peut pas se faire. En d'autres termes  $T_M$  ne peut pas compenser la pesanteur et la force de traînée  $D_{vi}$  et le problème de poursuite de trajectoire perd sa signification. Quand la variation de  $-0.46\%$  de  $a$  est considérée séparément,  $J_r$  et  $J_f$  varient de  $0.0334\%$  et de  $-1.136\%$  respectivement.

Ces simulations mettent en évidence la forte dépendance que la force de poussée du rotor principal  $T_M$  a par rapport au paramètre  $a$ . Nous pouvons dire que la robustesse par rapport aux incertitudes en  $c_d$  et en  $K_{mot}$  est garantie. Une sur-estimation de  $a$  sera préférable à une sous-estimation afin d'assurer le décollage et la robustesse partielle des commandes par rapport au paramètre  $a$ .

**Stratégie Linéarisante E/S.** Nous étudions la robustesse de la commande linéarisante de la même forme que nous l'avons fait dans le cas de la stratégie à 2 phases. Dans le tableau 4.2 nous observons la variation du critère  $J_f$  pour des variations des paramètres de  $\pm 10\%$ . Dans ce tableau  $J_{fj}$  représente la variation du critère  $J_f$  par rapport au paramètre  $j = a, c_d, K_{mot}$ .

Variation	$J_{fa}$	$J_{fc_d}$	$J_{fK_{mot}}$
+10%	$-1.121 \times 10^{-5}\%$	$1.626 \times 10^{-7}\%$	$-0.252\%$
-10%	$-10.47\%$	$-1.523 \times 10^{-7}\%$	$-1.184 \times 10^{-6}\%$

TAB. 4.2 – Variations du Critère  $J_f$ .

Lorsque  $a$  varie de  $-10\%$ , lorsque  $K_{mot}$  varie de  $+10\%$  et lorsque les trois paramètres varient de façon simultanée de  $-10\%$  l'entrée  $u_2$  sature au début de la simulation. Pour le reste des variations paramétriques le comportement de toutes les variables est

acceptable. Nous pouvons dire qu'en général cette loi de commande est robuste par rapport aux incertitudes en  $c_d$  et en  $K_{mot}$ . De la même forme que pour la stratégie précédente, une sur-estimation de  $a$  sera préférable à une sous-estimation. Cependant, cette loi de commande est beaucoup plus robuste par rapport aux incertitudes en  $a$  que celle comportant la commutation car l'hélicoptère décolle aussi pour des variations de  $-10\%$  de  $a$ .

## 4.2 Commande du Modèle à 7-DDL.

Reprenons les équations (3.78) et (3.89) du modèle général de l'hélicoptère

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J_R^T[D(\dot{q}, u)u + A(\dot{q})u + B(\dot{q})] \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_t \dot{V} + G_t = R \bar{f}_{cm} \\ \mathcal{I}_r \dot{\omega} + [J_0^{-T} C_r J_0^{-1} - \mathcal{I}_r \dot{J}_0 J_0^{-1}] \omega + J_0^{-T} G_r = \bar{\tau}_{cm} \end{cases} \quad (4.24)$$

La stratégie de commande que nous envisageons dans un premier temps est basée sur le fait que le système est découplé en deux sous-systèmes (rotation et translation), similairement au cas du système hélicoptère-plateforme. Cette stratégie peut être décrite de la façon suivante

1. La première phase considérée est celle du mode contraint lorsque l'hélicoptère est au sol ( $z \equiv L$ ). Dans ce cas  $\theta = \psi = 0$ . Le système sous contrainte possède donc 4-DDL et il est a priori pleinement actionné ( $u \in \mathbb{R}^4$ ). Une voie possible est d'utiliser des trajectoires désirées  $\phi_d(t)$  et  $\dot{\gamma}_d(t)$  adéquates, de façon à ce que  $x(t)$  et  $y(t)$  restent bornés, voire à l'intérieur d'une boule. Nous cherchons donc à stabiliser la partie rotationnelle du système de telle sorte que la matrice de rotation  $R$  tende vers une matrice constante  $R_{cte}$ .
2. Une fois la partie rotationnelle stabilisée, une trajectoire désirée adéquate en  $\dot{\gamma}_d$  produira le décollage de l'hélicoptère. Nous chercherons à le stabiliser à une certaine hauteur (comme pour le cas du système à 3-DDL) pour qu'il reste en mode de vol stationnaire.

3. Il est important de définir en termes de trajectoires désirées les modes de vol où l'hélicoptère peut évoluer à partir du mode de vol stationnaire (vol en palier, par exemple). Pour des modes différents (avec des sorties différentes) des linéarisations E/S peuvent être envisagées en tenant compte du problème lié à une dynamique zéro souhaitée stable (cas du système à 3-DDL).
4. Une deuxième idée est de stabiliser la partie rotationnelle en s'appuyant sur la technique du backstepping et d'utiliser les trajectoires désirées sur la partie rotationnelle, pour "stabiliser" les autres degrés de liberté. L'idée centrale est de chercher à utiliser des trajectoires désirées adéquates pour les degrés de liberté commandés (i.e. découplés) pour obtenir un comportement acceptable des autres degrés de liberté.

Il est clair que ces idées ne représentent pour l'instant qu'une esquisse de ce qui pourrait être une stratégie de commande pour le vol général de l'hélicoptère.

#### 4.2.1 Régulation de l'Hélicoptère au Sol.

Lorsque la contrainte  $z \leq L$  est active ( $z \equiv L$ ) nous avons  $\ddot{z} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\ddot{\psi} = 0$ .

Prenons donc pour la partie translationnelle du système  $q_t = [x \ y \ z]^T$ ,  $E_t = [0 \ 0 \ 1]$  tel que  $E_t q_t = L$  et pour la partie rotationnelle  $q_r = [\phi \ \theta \ \psi \ \gamma]^T$ ,  $E_r = [[0 \ 0]^T \ [1 \ 0]^T \ [0 \ 1]^T \ [0 \ 0]^T]$  telle que  $E_r q_r = 0$

Soit  $\bar{E}_t$  telle que  $\bar{E}_t q_t = \bar{q}_t = [x \ y]^T$  donnée par

$$\bar{E}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

et  $\bar{E}_r$  telle que  $\bar{E}_r q_r = \bar{q}_r = [\phi \ \gamma]^T$  donnée par

$$\bar{E}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

En utilisant simultanément les parties translationnelle et rotationnelle du système, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
\bar{E}_t M_t(q) \ddot{q}_t + \bar{E}_t G_t(q) &= \bar{E}_t R \bar{f}_{cm} \\
\bar{E}_r M_r(q) \ddot{q}_r + \bar{E}_r C_r(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \bar{E}_r G_r(q) &= \bar{E}_r J_0^T \bar{\tau}_{cm}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

où les indices  $t$  et  $r$  correspondent aux parties translationnelle et rotationnelle du système, respectivement. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
\bar{E}_t M_t(q) \bar{E}_t^T \ddot{\bar{q}}_t + \bar{E}_t G_t(q) &= \bar{E}_t R \bar{f}_{cm} \\
\bar{E}_r M_r(q) \bar{E}_r^T \ddot{\bar{q}}_r + \bar{E}_r C_r(q, \dot{q}) \bar{E}_r^T \dot{\bar{q}}_r + \bar{E}_r G_r(q) &= \bar{E}_r J_0^T \bar{\tau}_{cm}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

finalemt nous avons

$$\begin{aligned}
\bar{M}_t(q) \ddot{\bar{q}}_t &= \bar{E}_t R \bar{f}_{cm} \\
\bar{M}_r(q) \ddot{\bar{q}}_r + \bar{C}_r(q, \dot{q}) \dot{\bar{q}}_r + \bar{G}_r(q) &= \bar{E}_r J_0^T \bar{\tau}_{cm}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

où  $\bar{M}_t = mI_2$ ,  $\bar{E}_t R \bar{f}_{cm} = [\bar{f}_x c_\phi - \bar{f}_y s_\phi \quad \bar{f}_x s_\phi + \bar{f}_y c_\phi]^T$ ,  $\bar{M}_r = [[M_{44} \ M_{47}]^T \ [M_{47} \ M_{77}]^T]$ ,  $\bar{C}_r = [[C_{44} \ C_{74}] \ [C_{47} \ 0]]$ ,  $\bar{G}_r = [0 \ G_7]^T$  et  $\bar{E}_r J_0^T \bar{\tau}_{cm} = [\bar{\tau}_{zc} \ \bar{\tau}_\gamma]^T$ . Les composantes de ces éléments étant évaluées pour les conditions de contrainte active.

Nous remarquons que sous la contrainte les matrices  $R$  et  $J_0^T$  prennent les formes suivantes :

$$R = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Considérons le vecteur d'état suivant :

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.32)$$

où à partir de (4.29) et des constantes du tableau 3.7 nous avons :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \\ f_6 \\ x_8 \\ f_8 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

et

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_{21}}{c_0} s_\phi \dot{\gamma}^2 & -\frac{c_{18}}{c_0} v_1 c_\phi \dot{\gamma} & \frac{c_{18}}{c_0} v_1 s_\phi \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{21}}{c_0} c_\phi \dot{\gamma}^2 & -\frac{c_{18}}{c_0} v_1 s_\phi \dot{\gamma} & -\frac{c_{18}}{c_0} v_1 c_\phi \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_2}{\delta} (c_{33} + c_{17} v_1 \dot{\gamma}) & \frac{c_{10} c_{32}}{\delta} \dot{\gamma}^2 & -\frac{c_2 c_{37}}{\delta} \dot{\gamma}^2 & -\frac{c_2}{\delta} (c_{38} v_1 \dot{\gamma} + c_{39} \dot{\gamma}^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_7 + c_3 c_{e4\gamma}^2}{\delta} (c_{33} + c_{17} v_1 \dot{\gamma}) & -\frac{c_2 c_{32}}{\delta} \dot{\gamma}^2 & \frac{c_7 + c_3 c_{e4\gamma}^2}{\delta} c_{37} \dot{\gamma}^2 & \frac{c_7 + c_3 c_{e4\gamma}^2}{\delta} (c_{38} v_1 \dot{\gamma} + c_{39} \dot{\gamma}^2) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

où  $v_1$  est la vitesse induite (voir équation (2.24)),  $f_6 = \frac{1}{\delta}[c_3c_4c_{10}s_{2c_4\gamma}\dot{\phi}\dot{\gamma} - c_2(c_{42}\dot{\gamma} + c_{43}v_1^2 + c_{46}v_1\dot{\gamma} - c_3c_4s_{c_4\gamma}c_{c_4\gamma}\dot{\phi}^2 - c_{12}s_\gamma - c_{13}c_\gamma - c_{14}s_\gamma c_\gamma - c_{15}(c_\gamma^2 - s_\gamma^2))]$ ,  $f_8 = \frac{1}{\delta}[-c_3c_4c_2s_{2c_4\gamma}\dot{\phi}\dot{\gamma} + (c_7 + c_3c_{c_4\gamma}^2)(c_{42}\dot{\gamma} + c_{43}v_1^2 + c_{46}v_1\dot{\gamma} - c_3c_4s_{c_4\gamma}c_{c_4\gamma}\dot{\phi}^2 - c_{12}s_\gamma - c_{13}c_\gamma - c_{14}s_\gamma c_\gamma - c_{15}(c_\gamma^2 - s_\gamma^2))]$  et  $\delta = c_7c_{10} - c_2^2 + c_3c_{10}c_{c_4\gamma}^2$ .

Pour ce système pleinement actionné nous proposons comme pour le cas à 3-DDL une stratégie de commande linéarisante E/S avec  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$  et  $y = [\gamma \ \phi \ x \ y]^T$ .

Le système en boucle fermée est alors :

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{x}} + \lambda_5\dot{\tilde{x}} + \lambda_6\tilde{x} &= 0 \\ \ddot{\tilde{y}} + \lambda_7\dot{\tilde{y}} + \lambda_8\tilde{y} &= 0 \\ \ddot{\tilde{\phi}} + \lambda_3\dot{\tilde{\phi}} + \lambda_4\tilde{\phi} &= 0 \\ \ddot{\tilde{\gamma}} + \lambda_1\dot{\tilde{\gamma}} + \lambda_2\tilde{\gamma} &= 0\end{aligned}\tag{4.35}$$

Le décollage de l'hélicoptère peut être garanti en utilisant une trajectoire  $\dot{\gamma}_d$  ou  $z_d$  convenable.

### 4.2.2 Résultats en Simulation.

Dans cette section nous présentons une simulation du problème de régulation lorsque l'hélicoptère est au sol (contrainte  $z \leq L$  active). Nous prenons les conditions initiales  $x(0) = 0.2 \text{ m}$ ,  $\dot{x}(0) = -0.01 \text{ m/s}$ ,  $y(0) = -0.2 \text{ m}$ ,  $\dot{y}(0) = 0.015 \text{ m/s}$ ,  $\phi(0) = -\pi/4 \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0.035 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma(0) = -2\pi \text{ rad}$  et  $\dot{\gamma}(0) = -50 \text{ rad/s}$ . La trajectoire désirée est définie par  $x_d = y_d = \phi_d = 0$  et  $\dot{\gamma}_d = -85 \text{ rad/s}$ . La valeur de  $\dot{\gamma}_d$  proposée ne permet pas le décollage de l'hélicoptère car elle n'est pas suffisamment grande pour produire la force de poussée qui compenserait le poids et la déportance. Les gains choisis sont  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 0.04$ ,  $\lambda_3 = 2.5$ ,  $\lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_5 = 2.5$ ,  $\lambda_6 = 1$ ,  $\lambda_7 = 2.5$  et  $\lambda_8 = 1$ .

Nous remarquons que toutes les erreurs convergent vers zéro. La figure (4.15) montre les comportements des entrées de commande. Nous remarquons que les saturations de toutes les entrées sont respectées lors de cette simulation.

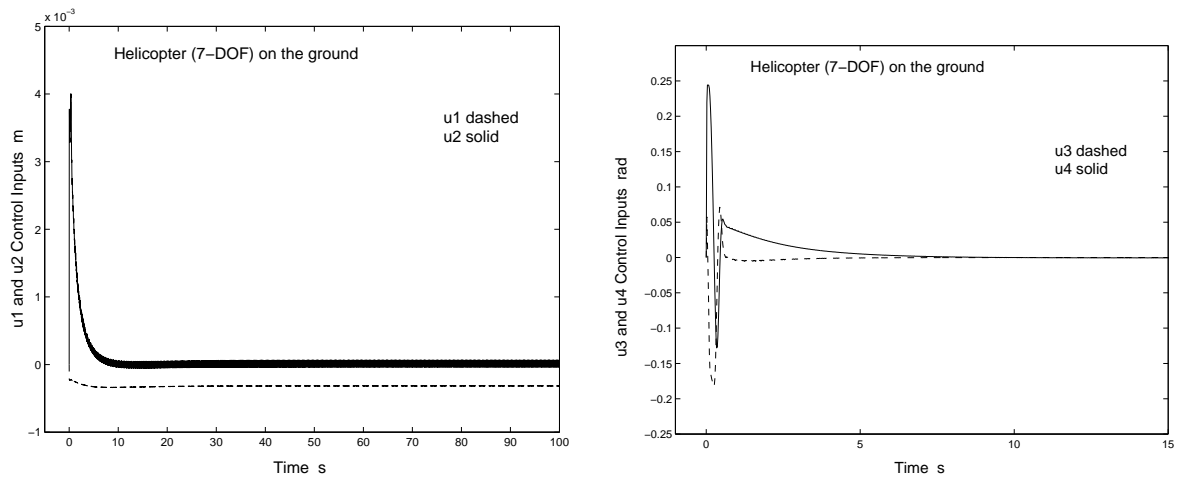


FIG. 4.15 – Variations des Entrées de Commande (Régulation à 3 Hauteurs).

# Chapitre 5

## Conclusions et Perspectives

### 5.1 Conclusions

Dans ce travail nous avons développé un modèle général non linéaire à 7-DDL destiné à être appliqué au vol libre autonome d'un hélicoptère à modèle réduit VARIO Benzin-Trainer. Un deuxième modèle Lagrangien non-linéaire à 3-DDL représentant le cas particulier lorsque l'hélicoptère est monté sur une plateforme expérimentale a été aussi développé. Nous remarquons que dans chaque cas nous avons un système sous-actionné. Dans ces modèles nous avons considéré quelques phénomènes aérodynamiques jouant un rôle important dans la détermination des efforts aérodynamiques comme le battement vertical et la raideur des pales, la force de traînée sur le fuselage et les couples de traînée des rotors. Dans ces modèles nous avons pris comme entrées de commande les entrées mécaniques réelles de l'hélicoptère (les pas collectifs des rotors et les angles longitudinal et latéral de pas cyclique du rotor principal), ce qui représente une situation différente de celles qui sont normalement considérées dans la littérature sur la commande de systèmes mécaniques. Pour le système à 3-DDL une première stratégie de commande garantissant une poursuite asymptotique de trajectoires désirées appropriées (i.e. suffisamment différentiable et telles que les entrées ne saturent pas) basée sur la commutation entre une commande passive et une commande linéarisante a été proposée. Une deuxième stratégie de commande linéarisante est utilisée avec une amélioration générale du comportement du système en boucle fermée.

Des effets de couplages mécaniques et aérodynamiques sont pris en compte dans la



modélisation et dans l'action de commande. Les propriétés de dissipativité de la partie rotationnelle ont été utilisées pour la conception partielle de la commande par feedback du système à 3-DDL. Des simulations numériques sont présentées pour montrer les performances et robustesses paramétriques des lois de commande. Nous remarquons qu'une sur-estimation du paramètre  $a$  est préférable à une sous-estimation.

Une stratégie de commande linéarisante E/S est proposée afin de résoudre le problème de régulation du système à 7-DDL lorsque l'hélicoptère est au sol (contrainte active).

## 5.2 Perspectives

Le travail futur envisageable peut être concentré dans les points suivants :

- Des expérimentations sur l'hélicoptère VARIO afin de valider le modèle à 3-DDL, de tester les lois de commande proposées et d'identifier les paramètres  $a$ ,  $c_d$  et  $K_{mot}$ .
- L'étude analytique fine de la dynamique zéro des commandes linéarisantes E/S proposées pour le modèle à 3-DDL.
- La conception de lois de commande et simulations pour le système à 7-DDL (contrainte inactive).
- Des expérimentations sur l'hélicoptère VARIO afin de valider le modèle à 7-DDL.
- Le développement d'une commande "superviseur" avec différents modules dont un planificateur des trajectoires désirées, la commutation entre procédure démarrage et commande non-linéaire, etc.
- Des études de robustesse pour le rejet de perturbations (provenant des rafales de vent, par exemple).
- L'intégration des effets du sol au modèle à 7-DDL pour l'analyse et la commande des tâches de décollage et d'atterrissage.
- La conception d'un simulateur de vol avec module non-linéaire.
- La complexification du modèle en considérant par exemple
  - i) La dynamique du moteur.
  - ii) La transmission unilatérale (roue libre) du rotor principal.
  - iii) Les effets aérodynamiques des stabilisateurs.
  - iv) Les effets du frottement sol/patins lorsque l'hélicoptère est au sol.
  - v) Un modèle de contact pour la tâche d'atterrissage/décollage.

Les points ii) et v) peuvent être inclus dans le modèle général de l'hélicoptère,

en rajoutant une loi de ré-initialisation de la vitesse normale au contact (loi de choc), ainsi que des relations de complémentarité (entre la distance et la force de contact) pour gérer les détachements des solides en contact [6]. Le point v) reste relativement annexe tant qu'un modèle des effets de sol n'est pas incorporé.

- Une étude des variations du modèle proposé pour d'autres types d'hélicoptères (rotor articulé, tandem, etc.).



# Annexe A

## Les Paramètres de l'Hélicoptère

Les paramètres de l'hélicoptère VARIO sont donnés dans les tableaux ci-dessous.

Paramètre	Description
$m = 7.5 \text{ kg}$	Masse del'hélicoptère
$m_M = 0.2 \text{ kg}$	Masse d'une pale rotor principal
$m_T = 0.02 \text{ kg}$	Masse d'une pale rotor de queue
$[I_{xx}]_M = 0.00676 + 0.108\sin^2\gamma_M$	Moment d'inertie rotor principal axe $x$
$[I_{yy}]_M = 0.00676 + 0.108\cos^2\gamma_M$	Moment d'inertie rotor principal axe $y$
$[I_{zz}]_M = 0.108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment d'inertie rotor principal axe $z$
$[I_{xy}]_M = -0.108\sin\gamma_M\cos\gamma_M$	Produit d'inertie rotor principal axes $xy$
$[I_{xz}]_M = 0$	Produit d'inertie rotor principal axes $xz$
$[I_{yz}]_M = 0$	Produit d'inertie rotor principal axes $yz$
$[I_{xx}]_T = 0.0003\sin^2\gamma_T$	Moment d'inertie rotor de queue axe $x$
$[I_{yy}]_T = 0.0228 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment d'inertie rotor de queue axe $y$
$[I_{zz}]_T = 0.0225 + 0.0003\cos^2\gamma_T$	Moment d'inertie rotor de queue axe $z$
$[I_{xy}]_T = 0$	Produit d'inertie rotor de queue axes $xy$
$[I_{xz}]_T = -0.0003\sin\gamma_T\cos\gamma_T$	Produit d'inertie rotor de queue axes $xz$
$[I_{yz}]_T = 0$	Produit d'inertie rotor de queue axes $yz$
$[I_{yz}]_T = 0$	Produit d'inertie rotor de queue axes $yz$
$[I_{xx}]_F = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment d'inertie fuselage axe $x_c$
$[I_{yy}]_F = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment d'inertie fuselage axe $y_c$
$[I_{zz}]_F = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment d'inertie fuselage axe $z_c$
$[I_{xy}]_F = [I_{xz}]_F = [I_{yz}]_F = 0$	Produits d'inertie du fuselage axes

Paramètre	Description
$a = 5.73/rad$	Gradient de portance (NACA2412)
$A = 2.544 \text{ m}^2$	Aire du disque rotor
$b = 0.15 \text{ m}$	Longueur des pales rotor de queue
$bl_M = 0.03 \text{ m}$	Bras de levier rotor principal
$bl_T = 0.01 \text{ m}$	Bras de levier rotor de queue
$c_M = 0.06 \text{ m}$	Corde des pales rotor principal
$c_T = 0.015 \text{ m}$	Corde des pales rotor de queue
$c_d = 0.01$	Coefficient de traînée
$d = 0.9 \text{ m}$	Longueur des pales rotor principal
$K_{mot} = 1 \times 10^5 \text{ N}$	Gain du moteur
$k = 75.13 \text{ N} \cdot \text{m}/rad$	Raideur des pales rotor principal
$p_M = 2$	Nombre de pales rotor principal
$p_T = 2$	Nombre de pales rotor de queue
$\% = 0.05$	Pourcentage du poids (déportance)
$R_M = 0.9 \text{ m}$	Rayon du rotor principal
$R_T = 0.15 \text{ m}$	Rayon du rotor de queue
$r_\gamma = -4.1428571$	Rapport de vitesses angulaires des rotors
$z_M = -0.25 \text{ m}$	Coordonnée $z$ du centre du rotor principal/c.m.
$x_T = -0.75 \text{ m}$	Coordonnée $x$ du centre du rotor de queue/c.m.
$y_T = -0.05 \text{ m}$	Coordonnée $y$ du centre du rotor de queue/c.m.
$u_{1max} = 0 \text{ m}$	Entrée de commande $u_1$ maximale
$u_{1min} = -0.0112 \text{ m}$	Entrée de commande $u_1$ minimale
$u_{2max} = 0.005 \text{ m}$	Entrée de commande $u_2$ maximale
$u_{2min} = -0.005 \text{ m}$	Entrée de commande $u_2$ minimale
$u_{3max} = 12^\circ$	Entrée de commande $u_3$ maximale
$u_{3min} = -12^\circ$	Entrée de commande $u_3$ minimale
$u_{4max} = 14^\circ$	Entrée de commande $u_4$ maximale
$u_{4min} = -14^\circ$	Entrée de commande $u_4$ minimale
$v_h = 3.52 \text{ m/s}$	Vitesse induite en vol stationnaire
$\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$	Masse Volumique de l'air

## Annexe B

# Le Calcul du Tenseur d'Inertie du Fuselage

Si bien nous avons représenté l'hélicoptère comme un ellipsoïde (voir par exemple les figures 2.2 et 2.3), sa structure est de façon approximative celle de la figure B.1.

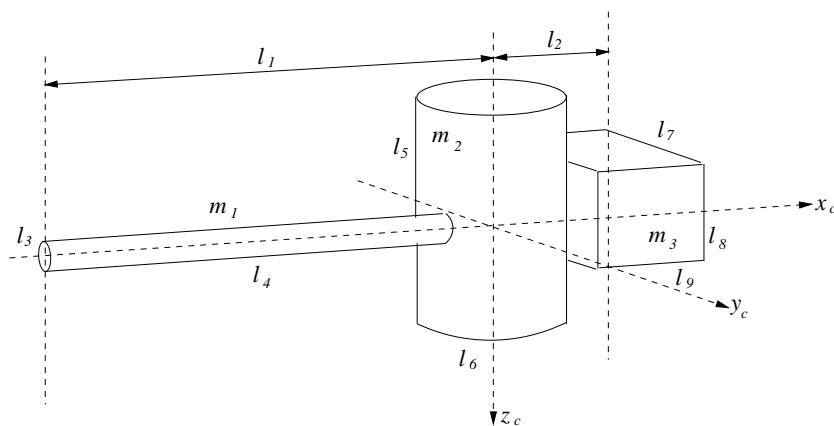


FIG. B.1 – La Structure du fuselage de l'Hélicoptère VARIO.

L'hélicoptère est donc constitué d'un cylindre de masse  $m_1$  de longueur  $l_4$  et diamètre  $l_3$ , d'un deuxième cylindre de masse  $m_2$  de longueur  $l_5$  et diamètre  $l_6$  et d'un cube de masse  $m_3$  de dimensions  $l_7$ ,  $l_8$  et  $l_9$ .

Les valeurs approximées des distances  $l_i$   $i = 1, \dots, 9$  dans la figure B.1 sont :

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 0.75 \text{ m} \\
 l_2 &= 0.10 \text{ m} \\
 l_3 &= 0.02 \text{ m} \\
 l_4 &= 0.70 \text{ m} \\
 l_5 &= 0.18 \text{ m} \\
 l_6 &= 0.10 \text{ m} \\
 l_7 &= 0.10 \text{ m} \\
 l_8 &= 0.15 \text{ m} \\
 l_9 &= 0.18 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Avec la notation  $m$  pour la masse totale de l'hélicoptère,  $m_M$  pour la masse d'une pale du rotor principal et  $m_T$  pour celle d'une pale du rotor de queue, nous pouvons écrire :

$$m_1 + m_2 + m_3 = m - 2m_M - 2m_t \tag{B.2}$$

D'autre part nous associons aux masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  les pourcentages suivants :

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0.05(m - 2m_M - 2m_t) \\
 m_2 &= 0.8(m - 2m_M - 2m_t) \\
 m_3 &= 0.15(m - 2m_M - 2m_t)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Bien sûr, pour chaque moment d'inertie par rapport à l'axe  $i = x, y, z$  nous écrivons  $I_{iiF} = I_{iim_1} + I_{iim_2} + I_{iim_3}$ .

$$I_{xxF} = \left[\frac{1}{8}m_1l_3^2\right] + \left[\frac{1}{48}m_2(3l_6^2 + 4l_5^2)\right] + \left[\frac{1}{12}m_3(l_7^2 + l_8^2)\right] \tag{B.4}$$

$$I_{yyF} = \left[\frac{1}{3}m_1l_4^2 + m_1l_1^2\right] + \left[\frac{1}{48}m_2(3l_6^2 + 4l_5^2)\right] + \left[\frac{1}{12}m_3(l_7^2 + l_8^2) + m_3l_2^2\right] \tag{B.5}$$

$$I_{zzF} = \left[\frac{1}{3}m_1l_4^2 + m_1l_1^2\right] + \left[\frac{1}{8}m_2l_6^2\right] + \left[\frac{1}{12}m_3(l_7^2 + l_9^2) + m_3l_2^2\right] \tag{B.6}$$

En utilisant les valeurs des masses de l'annexe A et (B.1) nous trouvons les valeurs du tenseur d'inertie du fuselage :

$$I_F = \begin{bmatrix} 0.021 & 0 & 0 \\ 0 & 0.288 & 0 \\ 0 & 0 & 0.278 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0.30 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$





# Annexe C

## Développements

Dans cette annexe nous donnons les développements de quelques termes utilisés lors des calculs des forces et de couples aérodynamiques. Pour la force de poussée du rotor principal les deux termes en (C.1) et (C.2) sont utilisés. Pour la force de poussée du rotor de queue (C.3) et (C.4). Pour le couple de traînée du rotor principal nous avons utilisé les termes en (C.8) et (C.6). Finalement, pour le couple de traînée du rotor de queue (C.5) et (C.7). .

$$\begin{aligned}
 V_T^2 \varphi = & \frac{1}{bl_M} V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\gamma - \delta) u_1 + \frac{2r_e}{bl_M} |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \dot{\gamma} u_1 + \frac{r_e^2}{bl_M} \dot{\gamma}^2 u_1 + \\
 & \frac{r_e}{R_M} V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\gamma - \delta) \varphi_1 + \frac{2r_e^2}{R_M} |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \dot{\gamma} \varphi_1 + \frac{r_e^3}{R_M} \dot{\gamma}^2 \varphi_1 - \\
 & V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\gamma - \delta) \sin(\gamma) u_3 - 2r_e |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \dot{\gamma} u_3 - \\
 & r_e^2 \sin(\gamma) \dot{\gamma}^2 u_3 - V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\gamma - \delta) \cos(\gamma) u_4 - \\
 & 2r_e |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) \dot{\gamma} u_4 - r_e^2 \cos(\gamma) \dot{\gamma}^2 u_4
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 V_T V_P = & -V^T V \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) + |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) + \\
 & \frac{r_e}{R_M} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) - a_{1s} r_e |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \dot{\gamma} + \\
 & b_{1s} r_e |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + a_0 \cos(\delta) V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) - \\
 & a_{1s} \cos(\delta) V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - \\
 & b_{1s} \cos(\delta) V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) - r_e |V| \sin(\alpha_s) \dot{\gamma} + r_e v_1 \dot{\gamma} + \\
 & \frac{r_e^2}{R_M} v_1 \cos(\gamma) \dot{\gamma} - a_{1s} r_e^2 \sin(\gamma) \dot{\gamma}^2 + b_{1s} r_e^2 \cos(\gamma) \dot{\gamma}^2 + a_0 \cos(\delta) r_e |V| \cos(\alpha_s) \cos(\gamma) \dot{\gamma} - \\
 & a_{1s} \cos(\delta) r_e |V| \cos(\alpha_s) \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} - b_{1s} \cos(\delta) r_e |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
[V_T^2 \varphi]_T = & \frac{v_2}{b_T} [V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin^2(r_\gamma \gamma) + 2|V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e \sin(r_\gamma \gamma) + r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2] + \\
& \frac{\varphi_1}{R_T} [V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) r_e \sin^2(r_\gamma \gamma) + 2|V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) + \\
& r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^3] + a_0 \tan(\delta_3) r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2 + a_0 \tan(\delta_3) V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin^2(r_\gamma \gamma) - \\
& a_{1s} \tan(\delta_3) V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin^2(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& a_{1s} \tan(\delta_3) r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) - b_{1s} \tan(\delta_3) V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin^3(r_\gamma \gamma) - \\
& b_{1s} \tan(\delta_3) r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) + 2a_0 \tan(\delta_3) |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e \sin(r_\gamma \gamma) - \\
& 2a_{1s} \tan(\delta_3) |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& 2b_{1s} \tan(\delta_3) |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e \sin^2(r_\gamma \gamma)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
[V_P V_T]_T = & r_\gamma \dot{\gamma} r_e v_1 - V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) v_1 \sin(r_\gamma \gamma) + \\
& \frac{r_e}{R_T} v_1 |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - r_\gamma a_{1s} \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e \sin^2(r_\gamma \gamma) + \\
& r_\gamma b_{1s} \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - |V| \cos(\alpha_s) \sin(\delta) r_\gamma \dot{\gamma} r_e + \\
& a_0 V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + \frac{r_e^2}{R_T} r_\gamma \dot{\gamma} v_1 \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& a_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) - a_{1s} r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) - \\
& b_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) \sin^2(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + b_{1s} r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_\gamma \dot{\gamma} r_e \cos(r_\gamma \gamma) - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e \cos^2(r_\gamma \gamma) - \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
V_P^2 r_e = & V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin^2(\delta) r_e + v_1^2 r_e - 2a_0 b_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) + \\
& r_\gamma^2 b_{1s}^2 \dot{\gamma}^2 r_e^3 \cos^2(r_\gamma \gamma) + V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) b_{1s}^2 \sin^2(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) r_e + \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) a_0^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) r_e + V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) a_{1s}^2 \cos^4(r_\gamma \gamma) r_e - \\
& 2|V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\delta) r_e - \frac{2|V| v_1}{R_T} \cos(\alpha_s) \sin(\delta) r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& 2r_\gamma a_{1s} \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \sin(\delta) r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) - 2r_\gamma b_{1s} \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \sin(\delta) r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& 2a_0 V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) r_e \cos(r_\gamma \gamma) + 2a_0 |V| v_1 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& 2a_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) r_e \cos^2(r_\gamma \gamma) + \frac{v_1^2}{R_T^2} r_e^3 \cos^2(r_\gamma \gamma) + \frac{2v_1^2}{R_T} r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& 2b_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \sin(\delta) \cos(\delta) r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - 2r_\gamma a_{1s} v_1 \dot{\gamma} r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) + \\
& 2r_\gamma b_{1s} v_1 \dot{\gamma} r_e^2 \cos(r_\gamma \gamma) - 2a_0 a_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) r_e \cos^3(r_\gamma \gamma) - \\
& 2a_{1s} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e \cos^2(r_\gamma \gamma) - 2b_{1s} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& \frac{2v_1}{R_T} a_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e^3 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + 2a_{1s} b_{1s} V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos^2(\delta) r_e \sin(r_\gamma \gamma) \cos^3(r_\gamma \gamma) + \\
& \frac{2a_0 v_1}{R_T} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) - \frac{2v_1}{R_T} a_{1s} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \cos^3(r_\gamma \gamma) - \\
& \frac{2v_1}{R_T} b_{1s} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) - 2a_{1s} b_{1s} r_\gamma^2 \dot{\gamma}^2 r_e^3 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& 2a_0 a_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& 2a_{1s}^2 r_\gamma \dot{\gamma} |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) r_e^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) + r_\gamma^2 a_{1s}^2 \dot{\gamma}^2 r_e^3 \sin^2(r_\gamma \gamma) + \\
& 2a_{1s} b_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2 |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin^2(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) + \\
& 2a_0 b_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2 |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \cos^2(r_\gamma \gamma) - 2a_{1s} b_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2 |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \cos^3(r_\gamma \gamma) - \\
& 2b_{1s}^2 r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2 |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) \cos^2(r_\gamma \gamma) + \frac{2v_1}{R_T} b_{1s} r_\gamma \dot{\gamma} r_e^3 \cos^2(r_\gamma \gamma)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
r_e V_T V_P \varphi = & \frac{u_1}{b l_M} [-V^T V \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \delta) + V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) + \\
& |V| v_1 \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \delta) + \frac{r_e^2}{R_M} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) + \frac{r_e^3}{R_M} v_1 \cos(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& |V| \cos(\alpha_s) a_{1s} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \dot{\gamma} + |V| \cos(\alpha_s) b_{1s} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e^2 \cos(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - |V| \sin(\alpha_s) r_e^2 \dot{\gamma} + \\
& v_1 r_e^2 \dot{\gamma} - V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) - \\
& a_{1s} r_e^3 \sin(\gamma) \dot{\gamma}^2 + b_{1s} r_e^3 \cos(\gamma) \dot{\gamma}^2 - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e^2 \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} + \\
& \frac{\varphi_1}{R_M} [-V^T V \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) r_e^2 \sin(\gamma - \delta) - |V| \sin(\alpha_s) r_e^3 \dot{\gamma} + v_1 r_e^3 \dot{\gamma} + \\
& |V| v_1 \cos(\alpha_s) r_e^2 \sin(\gamma - \delta) + \frac{r_e^4}{R_M} v_1 \cos(\gamma) \dot{\gamma} + \frac{r_e^3}{R_M} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) - \\
& |V| \cos(\alpha_s) a_{1s} r_e^3 \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \dot{\gamma} - a_{1s} r_e^4 \sin(\gamma) \dot{\gamma}^2 + b_{1s} r_e^4 \cos(\gamma) \dot{\gamma}^2 + \\
& |V| \cos(\alpha_s) b_{1s} r_e^3 \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e^3 \cos(\gamma) \dot{\gamma} - V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e^3 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma} - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e^3 \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma)] + \\
& [V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e \sin(\gamma - \delta) \sin^2(\gamma) \cos(\gamma) + V^T V \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \\
& \delta) \sin(\gamma) + |V| \sin(\alpha_s) \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma) + V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e \sin(\gamma - \\
& \delta) \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) - |V| v_1 \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) - v_1 \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma) - \\
& \frac{r_e^2}{R_M} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) - \frac{r_e^3}{R_M} v_1 \dot{\gamma} \sin(\gamma) \cos(\gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) a_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \sin^2(\gamma) + a_{1s} \dot{\gamma}^2 r_e^3 \sin^2(\gamma) - |V| \cos(\alpha_s) b_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma - \\
& \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) - b_{1s} \dot{\gamma}^2 r_e^3 \sin(\gamma) \cos(\gamma) - V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e \sin(\gamma - \\
& \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin^2(\gamma) \cos(\gamma) + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma) \cos^2(\gamma)] u_3 + \\
& [V^T V \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) + |V| \sin(\alpha_s) \dot{\gamma} r_e^2 \cos(\gamma) - \\
& |V| v_1 \cos(\alpha_s) r_e \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma) - v_1 \dot{\gamma} r_e^2 \cos(\gamma) - \\
& \frac{r_e^2}{R_M} |V| v_1 \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - \frac{r_e^3}{R_M} v_1 \dot{\gamma} \cos^2(\gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) a_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos(\gamma) + a_{1s} \dot{\gamma}^2 r_e^3 \sin(\gamma) \cos(\gamma) - \\
& |V| \cos(\alpha_s) b_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - b_{1s} \dot{\gamma}^2 r_e^3 \cos^2(\gamma) - \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 r_e \sin(\gamma - \delta) \cos^2(\gamma) - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 \dot{\gamma} r_e^2 \cos^2(\gamma) + \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} r_e \sin(\gamma - \delta) \cos^3(\gamma) + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \cos^3(\gamma) + \\
& V^T V \cos^2(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} r_e \sin(\gamma - \delta) \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) + \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} \dot{\gamma} r_e^2 \sin(\gamma) \cos^2(\gamma)] u_4
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
V_P V_T r_e \varphi = & [|V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) \sin(r_\gamma \gamma) r_e + r_\gamma \dot{\gamma} r_e^2] [-|V| \cos(\alpha_s) \sin(\delta) + v_1 + \frac{v_1}{R_T} r_e \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& r_e r_\gamma a_{1s} \dot{\gamma} \sin(r_\gamma \gamma) + r_e r_\gamma b_{1s} \dot{\gamma} \cos(r_\gamma \gamma) + |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_0 \cos(r_\gamma \gamma) - \\
& |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) a_{1s} \cos^2(r_\gamma \gamma) - |V| \cos(\alpha_s) \cos(\delta) b_{1s} \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma)] [\frac{u_2}{b l_T} + \\
& \frac{r_e}{R_T} \varphi_1 + a_0 \tan(\delta_3) - a_{1s} \tan(\delta_3) \cos(r_\gamma \gamma) - b_{1s} \tan(\delta_3) \sin(r_\gamma \gamma)]
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
r_e V_P^2 = & r_e V^T V \sin^2(\alpha_s) + r_e v_1^2 + 2a_{1s}b_{1s}r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \sin(\gamma) \cos^3(\gamma) + \\
& a_{1s}^2 r_e^3 \sin^2(\gamma) \dot{\gamma}^2 + b_{1s}^2 r_e^3 \cos^2(\gamma) \dot{\gamma}^2 - 2a_{1s}b_{1s}r_e^3 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma}^2 + \\
& a_0^2 r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \cos^2(\gamma) + a_{1s}^2 r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \cos^4(\gamma) + \\
& b_{1s}^2 r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \sin^2(\gamma) \cos^2(\gamma) - 2a_0 a_{1s} r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \cos^3(\gamma) - \\
& 2a_0 b_{1s} r_e \cos^2(\delta) \cos^2(\alpha_s) V^T V \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) + \frac{r_e^3}{R_M^2} v_1^2 \cos^2(\gamma) + \frac{2r_e^2}{R_M} v_1^2 \cos(\gamma) - \\
& 2r_e \sin(\alpha_s) |V| v_1 - \frac{2r_e^2}{R_M} \sin(\alpha_s) |V| v_1 \cos(\gamma) + 2a_{1s} r_e^2 \sin(\alpha_s) |V| \sin(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& 2b_{1s} r_e^2 \sin(\alpha_s) |V| \cos(\gamma) \dot{\gamma} + 2b_{1s} r_e \cos(\delta) \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) V^T V \sin(\gamma) \cos(\gamma) - \\
& 2a_0 r_e \cos(\delta) \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) V^T V \cos(\gamma) + 2a_{1s} r_e \cos(\delta) \sin(\alpha_s) \cos(\alpha_s) V^T V \cos^2(\gamma) - \\
& 2a_{1s} r_e^2 v_1 \sin(\gamma) \dot{\gamma} + 2b_{1s} r_e^2 v_1 \cos(\gamma) \dot{\gamma} - \frac{2a_{1s} r_e^3}{R_M} v_1 \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + \frac{2b_{1s} r_e^3}{R_M} v_1 \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} + \\
& 2a_0 r_e \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \cos(\gamma) - 2a_{1s} r_e \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \cos^2(\gamma) - \\
& 2b_{1s} r_e \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \sin(\gamma) \cos(\gamma) + \frac{2a_0 r_e^2}{R_M} \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \cos^2(\gamma) - \\
& \frac{2a_{1s} r_e^2}{R_M} \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \cos^3(\gamma) - \frac{2b_{1s} r_e^2}{R_M} \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| v_1 \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) - \\
& 2a_0 a_{1s} r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \sin(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + 2a_{1s}^2 r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} + \\
& 2a_{1s} b_{1s} r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \sin^2(\gamma) \cos(\gamma) \dot{\gamma} + 2a_0 b_{1s} r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \cos^2(\gamma) \dot{\gamma} - \\
& 2a_{1s} b_{1s} r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \cos^3(\gamma) \dot{\gamma} - 2b_{1s}^2 r_e^2 \cos(\delta) \cos(\alpha_s) |V| \sin(\gamma) \cos^2(\gamma) \dot{\gamma}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

# Annexe D

## Exemple Illustratif

Dans cette annexe nous montrons un exemple afin de mettre en évidence l'importance de considérer l'énergie cinétique de rotation du rotor de queue comme une partie de celle de l'hélicoptère, en la comparant avec l'énergie cinétique du rotor principal initialement et ensuite avec celle du fuselage. Les énergies cinétiques des rotors sont données par les équations (3.50) et (3.51). Admettons que le fuselage de l'hélicoptère n'ait aucune rotation, c'est à dire  $\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$  ou plus simplement  $\omega_c = 0$ . Les énergies cinétiques de rotation des rotors deviennent donc :

$$T_{rM} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}e_{zc})^T I_M (\dot{\gamma}e_{zc}) \quad (\text{D.1})$$

et

$$T_{rT} = \frac{1}{2}(r_\gamma \dot{\gamma} e_{yc})^T I_T (r_\gamma \dot{\gamma} e_{yc}) \quad (\text{D.2})$$

En considérant les tenseurs d'inertie des rotors, nous écrivons :

$$T_{rM} = \frac{1}{2} I_{zzM} \dot{\gamma}^2 \quad (\text{D.3})$$

et

$$T_{rT} = \frac{1}{2} r_\gamma^2 I_{yyT} \dot{\gamma}^2 \quad (\text{D.4})$$

En utilisant les moment d'inertie du tableau 3.3 et les valeurs des masses des pales des rotors et du rapport de vitesses de l'annexe A nous trouvons que  $T_{rT} = 0.0476 T_{rM}$ . L'énergie cinétique de rotation du rotor de queue représente pour ce système 4.76% de celle du rotor principal et doit donc être prise en compte dans l'énergie du système. D'autre part, nous comparons les énergies cinétiques de rotation des rotors avec celle du fuselage. Admettons que le fuselage tourne à une vitesse de rotation  $\dot{\phi} = 0.175 \text{ rad/s}$  et que l'hélicoptère est en vol stationnaire. Les énergies cinétiques de rotation du fuselage, du rotor principal et du rotor de queue sont données par les équations (3.102), (3.103) et (3.104), respectivement.

En utilisant les éléments d'inertie du tableau 3.3, les valeurs des masses des pales des rotors, des longueurs des pales et du rapport de vitesses de l'annexe A et en considérant  $\dot{\gamma} = -70 \text{ rad/s}$  pour  $\gamma = -\pi \text{ rad}$  nous trouvons  $T_{rF} = 4.5937 \exp(-3) J$ ,  $T_{rM} = 263.278 J$  et  $T_{rT} = 12.528 J$ . Les énergies cinétiques du rotor de queue et du fuselage représentent 4.76% et 0.001% de celle du rotor principal, respectivement. L'énergie cinétique du fuselage représente 0.03% de celle du rotor de queue. Nous observons comme prévu, que l'énergie cinétique la plus importante est celle du rotor principal, suivie par celle du rotor de queue et par celle du fuselage à la dernière place. Nous avons présenté cet exemple afin d'illustrer l'importance de l'énergie cinétique de rotation du rotor de queue dans une formulation énergétique.

# Annexe E

## Concepts de Base sur la Passivité

### E.1 Introduction.

La théorie de la passivité prend en compte des considérations énergétiques des systèmes physiques afin de définir un cadre pour la conception et l'analyse des systèmes de commande en utilisant une relation entre l'entrée et la sortie du système. De nombreux systèmes physiques possèdent certaines propriétés entrée-sortie reliées à la conservation, à la dissipation et au transport d'énergie. Ces propriétés sont connues comme des propriétés dissipatives. Les systèmes qui possèdent ce genre de propriétés sont appelés des systèmes dissipatifs [25]. Pour un système où les lois physiques de base impliquent des propriétés dissipatives, il est intéressant de construire le modèle de telle sorte qu'il possède les mêmes propriétés dissipatives sans se soucier des valeurs numériques des paramètres physiques. Si une loi de commande est alors conçue où la stabilité dépend uniquement des propriétés dissipatives, le système en boucle fermée sera stable indépendamment des valeurs des paramètres physiques. Un changement dans l'ordre du système pourrait même être accepté lorsqu'il ne détruit pas la dissipativité.

Nous présentons ici uniquement quelques concepts de base sur les systèmes dissipatifs car des ouvrages spécialisés ainsi que les références bibliographiques qui sont considérées peuvent être consultés par le(la) lecteur(lectrice) intéressé(e) à ce sujet, comme par exemple [11], [25] ou [31]. D'autres ouvrages peuvent être consultés aussi pour des aspects plus généraux sur les systèmes passifs comme [18] ou [46].



Dans le cas d'un système (mécanique ou électrique, par exemple) évoluant dans le temps entre  $t = t_0$  et  $t = t_f$  nous pouvons écrire que l'énergie finale  $E_{t_f}$  est reliée à l'énergie initiale  $E_{t_0}$  par :

$$E_{t_f} = E_{t_0} + E_{fournie} - E_{dissipée} \quad (\text{E.1})$$

où l'énergie  $E_{fournie}$  pourrait être produite par une force externe et l'énergie  $E_{dissipée}$  serait associée au frottement, par exemple. Si dans ce cas il n'existe pas de force externe et le frottement est négligé, l'énergie du système reste alors constante. Etant donné que  $E_{t_f} > 0$ ,  $E_{t_0} > 0$ ,  $E_{dissipée} \geq 0$  et à partir de (E.1) nous pouvons écrire :

$$E_{fournie} \geq -E_{t_0} \quad (\text{E.2})$$

Pour le système mécanique particulier (masse-ressort) :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (\text{E.3})$$

où  $m$  est la masse,  $c$  est le coefficient de frottement visqueux,  $k$  est la raideur du ressort,  $x$  est la position de la masse et  $F$  est la force externe qui agit sur la masse, nous écrivons à partir de (E.2) :

$$\int_{t_0}^{t_f} F(t)\dot{x}(t) dt \geq -E[x(t_0), \dot{x}(t_0)] \quad (\text{E.4})$$

Si  $F(t)$  représente l'entrée de commande  $u(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  la sortie  $y(t)$  et en utilisant la notation  $V(0)$  pour  $E[x(t_0), \dot{x}(t_0)]$  lorsque  $t_0 = 0$  nous avons :

$$\int_0^{t_f} u(t)y(t) dt \geq -V(0) \quad (\text{E.5})$$

qui représente la relation entre l'entrée de commande et la sortie du système dont nous en avons parlé au début de cette introduction. A partir de (E.1) nous pouvons écrire que l'énergie totale du système  $E_{t_f} - E_{t_0}$  (ou énergie emmagasinée) est

la différence entre l'énergie fournie et l'énergie dissipée  $E_{fournie} - E_{dissipée}$ . Nous utilisons parfois la forme de puissance (*power form*) (E.6) de cette relation lorsque les systèmes qui la vérifient sont considérés de manière plus générale comme des systèmes passifs [46].

$$\dot{V}(t) = u(t)y(t) - g(t) \quad (\text{E.6})$$

où  $V(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions scalaires du temps.  $V(t)$  bornée inférieurement représente l'énergie totale et  $g(t)$  l'énergie dissipée du système à l'instant  $t \geq 0$ .

## E.2 Définitions et Théorèmes

Il est important de séparer les concepts et définitions reliés à la passivité d'un système lorsqu'il s'agit d'un système linéaire ou d'un système non-linéaire. L'énergie emmagasinée est un concept important pour l'étude et la commande des systèmes dynamiques. Un système linéaire est appelé Réel Positif (où PR de l'anglais *Positive Real*) si son énergie emmagasinée reste constante. Il est appelé Strictement Réel Positif (où SPR de l'anglais *Strictly Positive Real*) si son énergie emmagasinée diminue. Le terme dissipatif est normalement utilisé pour les systèmes non-linéaires. Il est important de remarquer que un système constitué de sous-systèmes passifs reliés de façon parallèle ou en feedback est aussi passif. Nous présentons ci-dessous quelques définitions et résultats concernant les systèmes passifs.

**Définition 1** [25] Un système avec entrée  $u$  et sortie  $y$  où  $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$  est passif s'il existe une constante  $\beta \leq 0$  telle que

$$\int_0^T y^T(t)u(t) dt \geq \beta \quad (\text{E.7})$$

$\forall u$  et  $\forall T \geq 0$ . Si, en plus, il existe des constantes  $\delta \geq 0$  et  $\epsilon \geq 0$  telles que

$$\int_0^T y^T(t)u(t) dt \geq \beta + \delta \int_0^T u^T(t)u(t) dt + \epsilon \int_0^T y^T(t)y(t) dt \quad (\text{E.8})$$

$\forall u$  et  $\forall T \geq 0$ , alors le système est

- Strictement passif en entrée si  $\delta > 0$ ,
- Strictement passif en sortie si  $\epsilon > 0$ ,
- Très strictement passif (ou strictement passif en entrée et en sortie) si  $\delta > 0$  et  $\epsilon > 0$ .

△

**Théorème 1** [25] Supposons qu'il existe une fonction continue  $V(t) \geq 0$  telle que

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y^T(t)u(t) dt \quad (\text{E.9})$$

$\forall u, \forall T \geq 0$  et  $\forall V(0)$ . Alors, le système avec entrée  $u(t)$  et sortie  $y(t)$  est passif. Supposons, en plus, qu'il existe des constantes  $\delta \geq 0$  et  $\epsilon \geq 0$  telles que

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y^T(t)u(t) dt - \delta \int_0^T u^T(t)u(t) dt - \epsilon \int_0^T y^T(t)y(t) dt \quad (\text{E.10})$$

$\forall u, \forall T \geq 0$  et  $\forall V(0)$ . Alors le système est

- Strictement passif en entrée s'il existe un  $\delta > 0$ ,
- Strictement passif en sortie s'il existe un  $\epsilon > 0$ ,
- Très strictement passif (ou strictement passif en entrée et en sortie) s'il existe un  $\delta > 0$  et un  $\epsilon > 0$  tels que l'inégalité se vérifie.

△

Si l'inégalité de (E.9) se vérifie de façon stricte, alors la différence entre l'énergie fournie et l'incrément d'énergie emmagasinée doit être l'énergie dissipée par le système. Etant donné que (E.9) se vérifie  $\forall T \geq 0$ , l'inégalité de puissance instantannée suivante doit se vérifier  $\forall T \geq 0$ .

$$y^T(T)u(T) \geq \dot{V}(T) \quad (\text{E.11})$$

Si  $V(t)$  est l'énergie totale du système, alors  $\langle u, y \rangle = \int_0^T [y^T(t)u(t)]dt$  peut être vue comme l'énergie fournie au système par la commande. Le terme  $w(u, y) = u^T y$  est appelé le taux d'énergie fournie au système.

Nous présentons ici un problème qui peut être considéré comme un premier pas vers la conception de lois de commande passives. Il s'agit du problème de Lur'e. Considérons le système en boucle fermée de la figure E.1 où  $\phi(t, y)$  est une non-linéarité<sup>1</sup>. Le problème de Lur'e consiste en obtenir les conditions du système linéaire et de  $\phi(t, y)$  telles que le système en boucle fermée soit stable.

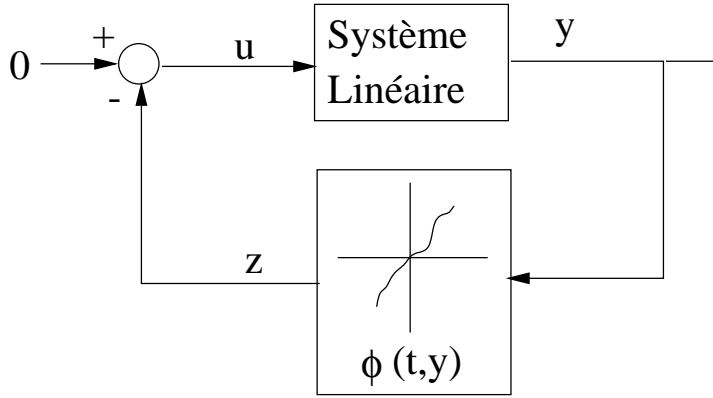


FIG. E.1 – Le Problème de Lur'e.

Le système linéaire est donné par la réalisation minimale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{E.12}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^m$  avec  $n > m$ . La non-linéarité statique peut aussi varier dans le temps. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} z(t) &= \phi(t, y(t)) \\ u(t) &= -z(t) \end{aligned} \tag{E.13}$$

Admettons que  $\phi(t, y)$  appartient au secteur  $[a, b]$ , i.e.

---

<sup>1</sup> $\phi$  peut être une non-linéarité statique du genre  $\phi = \phi(u)$  qui pourrait varier dans le temps.

1.  $\phi(t, y) = 0, \forall t$
2.  $[\phi(t, y) - ay]^T [by - \phi(t, y)] \geq 0, \forall t, y \in \mathbb{R}^m$

Le problème de Lur'e peut être établi de la façon suivante : Trouver les conditions de matrices  $(A, B, C, D)$  telles que le point d'équilibre  $x = 0$  soit globalement asymptotiquement stable pour toutes les non-linéarités  $\phi(t, y)$  dans le secteur  $[a, b]$ .

Une des propriétés plus importantes d'un système dynamique dissipatif est reliée au fait que l'énergie emmagasinée dans le système diminue dans le temps. La théorie des systèmes dissipatifs est très utile pour la stabilisation de systèmes mécaniques. Elle est reliée de façon importante à la théorie de stabilisation de Lyapunov. Il existe des outils de l'approche dissipative utilisés pour la construction de fonctions de Lyapunov. La théorie de Lyapunov a besoin de l'état du système et du point d'équilibre tandis que l'approche dissipative est plutôt basée sur le comportement entrée-sortie du système.

Considérons un système causal non-linéaire  $\Sigma : u(y) \mapsto y(t)$ , avec  $u(t), y(t) \in \mathcal{L}_{pe}^2$  représenté par

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) + j(x)u \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R}^m, f, g, h$  and  $j$  sont lisses et  $f(0) = h(0) = 0$ . Soit  $w(t) = w(u(t), y(t))$  le taux d'énergie telle que  $\forall u, \forall x(0)$  et  $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^t |w(s)| ds < \infty \quad (\text{E.15})$$

**Définition 2** [25] Le système  $\Sigma$  est dit dissipatif s'il existe une fonction appelée fonction d'emmagasinage  $V(x) \geq 0$  telle que l'inégalité de dissipation suivante est vérifiée

$$V(x) \leq V(x(0)) + \int_0^t w(s) ds \quad (\text{E.16})$$

$$\forall u, \forall x(0) \text{ et } \forall t \geq 0$$

△

---

<sup>2</sup> $\mathcal{L}_{pe}$  représente l'espace de norme  $\mathcal{L}_p$  étendu de fonctions intégrables. La norme  $\mathcal{L}_p$  d'une fonction  $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie dans [25] par  $\|f\|_p \triangleq [\int |f(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$ .

La fonction d'emmagasinement  $V(x)$  peut être trouvée en calculant la quantité maximale d'énergie qui peut être extraite du système (voir la définition 3).

**Définition 3** [25] La  $V_a(x)$  disponible du système  $\Sigma$  est donnée par

$$0 \leq V_a(x) = \sup_{x=x(0), u, t \geq 0} - \left\{ \int_0^t w(s) ds \right\} \quad (\text{E.17})$$

où  $V_a(x)$  est la quantité maximale d'énergie qui peut être extraite du système  $\triangle$

Nous présentons ci-dessous quelques résultats concernant les systèmes dissipatifs.

**Théorème 2** [25] Admettons que le système (E.14) soit dissipatif avec un taux d'énergie  $\omega = u^T y$  et une fonction d'emmagasinement  $V$  avec  $V(0) = 0$ , i.e.  $\forall t \geq 0$  :

$$V(x) \leq V(x(0)) + \int_0^T u^T(s)y(s)ds \quad (\text{E.18})$$

alors le système est passif.  $\triangle$

**Définition 4** [25](**Système Strictement Passif en l'Etat**) Le système (E.14) est strictement passif en l'état s'il est dissipatif avec un taux d'énergie  $\omega = u^T y$  et fonction d'emmagasinement  $V$  avec  $V(0) = 0$  et s'il existe une fonction définie positive  $\vartheta(x)$  telle que  $\forall t \geq 0$  :

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^T u^T(s)y(s)ds + \int_0^T \vartheta(x(t))dt \quad (\text{E.19})$$

Si l'inégalité se vérifie et si  $\vartheta \equiv 0$ , alors le système (E.14) est un système sans pertes.

### E.3 Commande Passive

Considérons le système Lagrangien suivant qui représente la dynamique de la partie mécanique d'un robot manipulateur.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{E.20})$$

où  $M$  est la matrice d'inertie,  $C$  celle de Coriolis,  $g$  est le vecteur de la force de gravité,  $\tau$  est le vecteur des couples et  $q$  celui des coordonnées généralisées.

Pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires, les propriétés de dissipativité du système peuvent être utilisées pour concevoir une commande globalement stable garantissant la poursuite de n'importe quelle trajectoire désirée suffisamment différentiable. L'idée de base est d'appliquer la commande suivante [32] :

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) - \lambda_1\ddot{\tilde{q}} - \lambda_2\dot{\tilde{q}} \quad (\text{E.21})$$

où  $q_d \in C^2(\mathbb{R}^+)$  est une trajectoire désirée. Si  $q_d$  est constante nous trouvons une commande PD (Proportionnelle Dérivée) avec compensation de gravité :

$$\tau = g(q) - \lambda_1\ddot{\tilde{q}} - \lambda_2\dot{\tilde{q}} \quad (\text{E.22})$$

Le système en boucle fermée est donc

$$M(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + \lambda_1\ddot{\tilde{q}} + \lambda_2\dot{\tilde{q}} = 0 \quad (\text{E.23})$$

Considérons maintenant la commande suivante [47] :

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) - \lambda_1 s \quad (\text{E.24})$$

où  $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \lambda\tilde{q}$ ,  $s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q}$ . En utilisant (E.24) dans (E.20) nous obtenons

$$\begin{aligned} M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + \lambda_1 s &= 0 \\ \dot{\tilde{q}} &= -\lambda\tilde{q} + s \end{aligned} \tag{E.25}$$

Contrairement à (E.21), lorsque dans (E.25)  $q_d$  est constante, nous ne trouvons pas une commande PD ; cependant (E.25) peut être vue comme une action PD ( $\lambda_1 s$ ) avec des termes non-linéaires additionnels qui ont pour objectif d'assurer certaines propriétés de poursuite. La première équation dans (E.25) définit un opérateur passif entre  $u_1 = -\lambda_1 s = -y_2$  et  $y_1 = s = u_2$  avec une fonction d'emmagasinement  $V_1(s) = \frac{1}{2}s^T M(q)s$ .

Une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée (E.25) est donnée par [25] :

$$V(s, \tilde{q}, t) = \frac{1}{2}s^T M(\tilde{q}, t)s + \lambda\lambda_1\tilde{q}^T\tilde{q} \tag{E.26}$$





# Bibliographie

- [1] Abbott, I. H. and Von Doenhoff, A. E., *Theory of Wing Sections*, Dover Publications, Inc., New York, 1949.
- [2] Avila Vilchis, J. C. and Brogliato, B., *Nonlinear Passivity-Based Control for a Scale Model Helicopter*, 26th European Rotorcraft Forum, CD-ROM paper 21, The Hague, The Netherlands, 2000.
- [3] Bagnell, J. A. and Schneider, J. G., *Autonomous Helicopter Control using Reinforcement Learning Policy Search Methods*, IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, pp. 1615-1620, 2001.
- [4] Bicchi, A. and Sorrentino, R., *Dexterous Manipulation Through Rolling*, IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, pp. 452-453, 1995.
- [5] Brockett, R. W., *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. Differential Geometric Control Theory*, Brockett, R. W., Millmann, R. S. and Sussmann, H. J. Eds., Boston : Birkhauser, pp. 181-191, 1983.
- [6] Brogliato, B., *Nonsmooth Mechanics*, 2nd Ed., Springer Verlag, 1999.
- [7] Buskey, G., Wyeth, G. and Roberts, J., *Autonomous Helicopter Hover Using an Artificial Neural Network*, IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, pp. 1435-1440, 2001.
- [8] Callahan, C. and Bassett, D., *Application of a Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics (CAMRAD) to the McDonnell Douglas AH-64A Helicopter*, American Helicopter Society, 43rd Annual Forum, St. Louis Missouri, USA, pp. 243-257, May 1987.
- [9] Clarke, T. and Sun, X.-D., *Minimal State Space Model Realisation of a Nonlinear Helicopter*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 145, No. 4, pp. 415-422, July 1998.
- [10] De Luca, A., Mattone, R. and Oriolo, G., *Control of Underactuated Mechanical Systems : Application to the Planar 2R Robot*, 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp. 1455-1460, 1996.

- [11] Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., *Feedback Systems Input-Output Properties*, Academic Press Inc., 1975.
- [12] Du Puy de Goynes, T. and Koska, M., *Technique d'Utilisation de l'Hélicoptère. T. V. HELICO*, Cépaduès Editions. 1997.
- [13] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd Ed., Addison-Wesley, U. S. A., 1980.
- [14] Hairer, E. and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd revised edition, Springer Verlag, series in Computational Mathematics, vol. 14, 1996.
- [15] Hauser, J. and Murray, R. M., *Nonlinear Controllers for Non-integrable Systems : The Acrobot example*, American Control Conference, San Diego, California, USA, pp. 669-671, 1990.
- [16] Jain, A. and Rodriguez, G., *Kinematics and Dynamics of Under-Actuated Manipulators*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California, USA, pp. 1754-1759, April 1991.
- [17] Kaloust, J., Ham, C. and Qu, Z., *Nonlinear Autopilot Control Design for a 2-DOF Helicopter Model*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 144, No. 6, pp. 612-616, November 1997.
- [18] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, 2nd Ed., Prentice-Hall International, 1996.
- [19] Kienitz, K., Wu, Q. and Mansour, M., *Robust Stabilization of a Helicopter Model*, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, pp. 2607-2612, 1990.
- [20] Koo, T. J., Hoffmann, H., Sinopoli, B. and Sastry, S., *Hybrid Control of an Autonomous Helicopter*, Preprints of the Third IFAC International Workshop on Motion Control, Grenoble, France, pp. 285-290, 1998.
- [21] Koo, T. J. and Sastry, S., *Output Tracking Control design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization*, 37th IEEE Conference on Decision and Control, Florida, USA, 1998.
- [22] Lee, E. H., Shim, H., Park, H. and Lee, K. I., *Design of Hovering Attitude Controller for a Model Helicopter*, IEEE Inter. Soc. Instrument and Control Engineers, pp. 1385-1390, August 1993.
- [23] Lefort, P. and Hamann, J., *L'Hélicoptère. Théorie et Pratique*, CHIRON-Paris, 1995.
- [24] Leonard, N. E., *Periodic Forcing, Dynamics and Control of Underactuated Spacecraft and Underwater Vehicles*, 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, pp. 3980-3985, 1995.
- [25] Lozano, R., Brogliato, B., Egeland, O. and Maschke, B., *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications*, Springer Verlag, CCE Series, London, 2000.

- [26] McCormick, B. W., *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1995.
- [27] Mahony, R. and Lozano, R., *Dynamics of Helicopter with Flexible Rotor Blades*, Technical Report, HEUDIASYC-UTC, France, December 1998.
- [28] Mahony, R. and Lozano, R., *An Energy Based Approach to the Regulation of a Model Helicopter near to Hover*, European Control Conference, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- [29] Mukherjee, R. and Chen, D., *Control of Free-Flying Underactuated Space Manipulators to Equilibrium Manifolds*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 9, No. 5, pp. 561-570, October 1993.
- [30] Oriolo, G. and Nakamura, *Control of Mechanical Systems with Second-Order Non-holonomic Constraints : Underactuated Manipulators*, 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, pp. 2398-2403, December 1991.
- [31] Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J. and Sira-Ramirez, H., *Passivity-based Control of Euler Lagrange Systems*, Communications and Control Engineering, Springer Verlag, London, 1998.
- [32] Paden, B. and Panja, R., *Globally Asymptotically Stable PD+ Controller for Robot Manipulators*, International Journal of Control, vol.47, pp. 1697-1712, 1988.
- [33] Padfield, G. D., *Helicopter Flight Dynamics : The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling*, AIAA Education Series, 1996.
- [34] Philippe, J. J., *Les Hélicoptères*, Notes de Cours, ONERA, Edition 1991.
- [35] Phillips, C., Karr, C. L. and Walker, G., *Helicopter Flight Control with Fuzzy Logic and Genetic Algorithms*, Engng. Applic. Artif. Intell., Vol. 9, No. 2, pp. 175-184, 1996.
- [36] Prouty, R. W., *Helicopter Performance, Stability and Control*, Krieger Publishing Company, 1995.
- [37] Rathinam, M. and Murray, R. M., *Configuration Flatness of Lagrangian Systems Underactuated by One Control*, 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp. 1688-1693, 1996.
- [38] Reyhanoglu, M., Van der Schaft, A., McClamroch, N. H. and Kolmanovsky, I., *Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 09, pp. 1663, September 1999.
- [39] Rosen, A., Yaffe, R., Mansur, M. H. and Tischler, M. B., *Methods for Improving the Modeling of Rotor Aerodynamics for Flight Mechanics Purposes*, American Helicopter Society, 54th Annual Forum, Washington, DC, USA, pp. 1337-1355, May 1998.

- [40] Rozak, J. N. and Ray, A., *Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight*, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 43, Num. 3, pp. 149-160, 1997.
- [41] Rui, Ch., Kolmanovsky, I. nad McNally, P. J., *Attitude Control of Underactuated Multibody Spacecraft*, IFAC, 13th Triennial World Congress, San Francisco, USA, pp. 425-430 , 1996.
- [42] Shames, I. H., *Engineering Mechanics : Dynamics*, Prentice-Hall International. 1967.
- [43] Shim, H., Koo, T. J., Hoffman, F. and Sastry, S., *A Comprehensive Study of Control Design for an Autonomous Helicopter*, 37th IEEE Conference on Decision and Control, Florida, USA, 1998.
- [44] Siciliano, B. and Valavanis, K. P. (Editors), *Control Problems in Robotics and Automation*, Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences 230, pp. 135-150, 1998.
- [45] Sira-Ramírez, H., Zribi, M. and Ahmed, S., *Dynamical Sliding Mode Control Approach for vertical Flight Regulation in Helicopters*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 141, No. 1, pp. 19-24, January 1994.
- [46] Slotine, J-J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International. 1991.
- [47] Slotine, J-J. E. and Li, W., *Adaptive Manipulator Control : A Case Study*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, pp. 995-1003, 1988.
- [48] Sopher, R., Cassarino, S. J. and Sikorsky Aircraft Division, *Effects of Analytical Modeling Assumptions on the Predicted Stability of a Model Hingeless Rotor*, American Helicopter Society, 41st Annual Forum, Ft. Worth, Texas, USA, pp. 85-99, May 1985.
- [49] Sjørdalen, O. J., Nakamura, Y. and Chung, W. J., *Design of a Nonholonomic Manipulator*, IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, San Diego, California, USA, pp. 8-13, 1994.
- [50] Spong, M. W. and Vidyasagar, M., *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, N. Y., 1989.
- [51] Spong, M. W., *Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems*, IFAC, 13th Triennial World Congress, San Francisco, USA, pp. 431-435, 1996.
- [52] Stepniewsky, W. Z., *Rotor-wing Aerodynamics*, Vol. 1 *Basic Theories of Rotor Aerodynamics*, Dover Publishing., Inc., N. Y., 1984.
- [53] Sussmann, H. J., *A General Theorem on Local Controllability*, SIAM Journal Contr. Opt., vol. 25, pp. 158-194, 1987.

- [54] Tchen-Fo, F., Allain, C. and Desopper, A., *Improved Vortex Ring Model for Helicopter Pitch Up Prediction*, 26th European Rotorcraft Forum, CD-ROM paper 42, The Hague, The Netherlands, 2000.
- [55] Wichlund, K. Y., Sjørdalen, O. J. and Egeland, O., *Control of Vehicles with Second-Order Nonholonomic Constraints : Underactuated Vehicles*, 3rd. European Control Conference, Rome, Italy, pp. 3086-3091, September 1995.