



**HAL**  
open science

# Diffraction d'ondes par des milieux élastiques sphériques multi-couches

Alain Gérard

► **To cite this version:**

Alain Gérard. Diffraction d'ondes par des milieux élastiques sphériques multi-couches. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1980. Français. NNT: . tel-00198634

**HAL Id: tel-00198634**

**<https://theses.hal.science/tel-00198634>**

Submitted on 17 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

- PARIS VI -

par

ALAIN GERARD

pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

Sujet de la thèse:

DIFFRACTION D'ONDES PAR DES  
MILIEUX ELASTIQUES SPHERIQUES MULTI-COUCHES

Soutenu le 17 Décembre 1980 devant le jury composé de

MM. P. GERMAIN

Président

J.P. GUIRAUD

Rapporteurs

M. ROSEAU

M. BOUIX

Examineurs

J. LEMAITRE

Qu'il me soit permis de témoigner ma très profonde et respectueuse reconnaissance à Monsieur P.GERMAIN qui m'a fait découvrir l'attrait de la mécanique des milieux continus et m'a guidé dans une voie de recherche passionnante. Sa grande patience, ses suggestions et ses encouragements constants ont été décisifs dans l'accomplissement de ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur M. ROSEAU pour l'intérêt qu'il a manifesté pour cette recherche et pour les entretiens qu'il m'a accordés sur ce sujet. Je sais gré à Monsieur J.P.GUIRAUD et à Monsieur M. ROSEAU d'avoir bien voulu lire et juger ce mémoire.

Ma gratitude va aussi à Monsieur J. LEMAITRE qui a accepté de satisfaire mon souhait d'avoir une seconde thèse et m'a initié à la mécanique appliquée dans une voie riche de développements potentiels. Je remercie Monsieur M. BOUIX et Monsieur J. LEMAITRE d'avoir bien voulu participer au jury.

Il ne m'est pas possible de citer ici tous les professeurs qui ont contribué à ma formation et vers lesquels va ma reconnaissance. Toutefois, je désire l'exprimer plus particulièrement à Messieurs H.CABANNES et Ph.GATIGNOL dont l'enseignement de mécanique générale a été déterminant dans le choix délicat de ma spécialisation. Je ne saurais oublier que cette étude doit aussi beaucoup à Monsieur G.A.MAUGIN dont les encouragements ne m'ont jamais fait défaut, à mes collègues et amis de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, ainsi qu'aux personnalités du monde scientifique, extérieur, notamment Monsieur G.JOBERT. Je les remercie tous bien vivement.

Que l'imprimerie REPRO-PRESS et Monsieur SEGOUAT trouvent ici l'expression de mes remerciements pour le soin qu'ils ont apporté à la réalisation matérielle de ce texte.

\*  
\* \*

DIFFRACTION D'ONDES PAR DES  
MILIEUX ELASTIQUES SPHERIQUES MULTI-COUCHES

## R É S U M É

La finalité de ce mémoire est double : tout d'abord, d'appréhender la solution exacte de propagation d'ondes élastiques harmoniques (tant longitudinales que transversales) régnant dans les diverses zones d'un milieu sphérique multi-couches ; ensuite, d'apprécier, par voie asymptotique, l'influence de cette stratification sur le phénomène de diffraction sévissant à l'extérieur de l'obstacle. Le premier point est donc une étape importante pour laquelle est développée une méthode qui permet de s'affranchir d'une des principales difficultés inhérentes à ce type de milieu : les conditions aux limites. Cette méthode s'appuie sur la solution de point source dans un espace infini et sur les coefficients de réflexion et de réfraction.

Le modèle théorique retenu est celui d'un espace infini contenant un point source (d'ondes harmoniques) extérieur à un nombre fini de sphères concentriques. Tous les domaines sont supposés élastiques, homogènes, isotropes et de propriétés mécaniques distinctes.

Les résultats acquis ont pour champ d'application les domaines scientifiques où ce genre de schéma peut être adopté : acoustique sous-marine, géophysique et d'une manière générale toutes branches d'activités où interviennent des dispositifs de détection, où d'émission, d'ondes se propageant en présence de corps de forme géométrique simple.

La rédaction de ce travail est organisée, sur cinq chapitres, autour des deux centres d'intérêts : la détermination de la solution exacte de propagation d'ondes dans l'ensemble du modèle (chapitres II à IV) et le développement d'une approximation asymptotique de celle-ci dans le cadre d'une propagation d'ondes "SH" (chapitre V).

Le chapitre I, consacré à de brefs rappels, permet d'introduire les

potentiels de Helmholtz et le découplage des mouvements en milieu borné en mouvements plan et anti-plan, de préciser le type d'ondes (P,SV,SH) auquel on s'intéresse, d'acquérir le potentiel des déplacements engendrés par un point source situé dans un espace infini. Ce résultat est identifié par la suite aux ondes incidentes sur l'obstacle.

Au chapitre II on détermine les solutions globales exactes (potentiels des déplacements) régnant dans l'ensemble d'un modèle à une sphère (soumise à l'incidence d'ondes SH) par résolution classique du problème canonique, c'est à dire, par résolution des équations du mouvement tenant compte, de la singularité de point source, des conditions aux limites, de la condition de radiation à l'infini et d'absorption à l'origine de Sommerfeld. Les solutions ainsi obtenues, qui ne laissent transparaitre aucune interprétation physique évidente, sont ensuite développées (à l'aide des coefficients de réflexion et de réfraction) en des séries - développement de Debye - dont chaque terme rend compte des réflexions et réfractions multiples dont le modèle est le siège. Ce dernier point permet d'élaborer une nouvelle méthode de construction directe des solutions exactes régissant le mouvement des divers domaines, et ce, sous une forme plus satisfaisante pour l'esprit au regard de l'information physique que l'on pressent contenue dans la solution globale.

Cette méthode est mise en oeuvre au chapitre III pour construire les potentiels de déplacements dans toutes les zones d'un modèle à un nombre fini de sphères concentriques soumises à la seule influence d'ondes SH. Elle est fondée sur l'utilisation de la solution de point source d'une part, du principe des superpositions d'autre part. Avec la solution de point source on précise la structure des solutions dans chaque région du modèle. Le principe des superpositions est ensuite utilisé à deux niveaux : d'abord au niveau des harmoniques puis au niveau des conditions aux limites (par le biais des coefficients de réflexion-réfraction) pour générer directement la solution exacte. Entre autres avantages relatés plus loin, ce processus donne, ipso facto, une représentation analytique interprétable du phénomène physique étudié.

L'extension matricielle de cette méthode est réalisée au chapitre IV pour asseoir directement la solution exacte relative à l'incidence d'ondes P et SV sur une sphère en introduisant des matrices de réflexion et de réfraction. Par récurrence on établit la solution dans chacune des régions d'une sphère multi-couches - développement de Debye généralisé -. Les résultats obtenus englobent ceux d'un certain nombre de cas particuliers qui sont examinés comme ceux d'une onde P incidente puis d'une onde SV incidente. On montre, par un passage à la limite, que les solutions contiennent celles en vigueur pour des milieux fluides; ainsi on complète l'acquis du modèle à une sphère fluide donné par Scholte, Roseau, Datta,

Les avantages d'opérer par superpositions sont nombreux. Le premier est de se libérer de calculs qui pratiquement ne sont jamais simples. Le second de fournir directement les éléments, de la solution, propres à un approfondissement des effets que l'on espère spécifiques de tel constituant particulier du modèle. Cette étude fait l'objet du chapitre V. Un autre aspect intéressant de ce processus est de détenir la solution exacte pour un éventail assez large de schémas dès lors que l'on possède (ou sait évaluer) les coefficients de réflexion et de réfraction d'une géométrie donnée dont les frontières sont des surfaces coordonnées (cylindre, sphéroïde, ellipsoïde, ...). Par ailleurs les solutions dégagées aux chapitres III et IV sont également valables pour des milieux visco-élastiques linéaires et complètement donc celles publiées récemment dans le cadre d'une couche cylindrique plongée dans un fluide (acoustique sous-marine) par Überall et son équipe qui ne fournissent pas le développement de Debye de leur solution.

Le cinquième chapitre est exclusivement réservé à l'obtention de développements asymptotiques des solutions exhibées dans le cas des ondes incidentes SH. Cela est réalisé à l'aide de calculs d'intégrales dans le plan complexe (transformation de Watson) et de diverses techniques asymptotiques, d'abord pour une sphère parfaitement rigide puis pour les premiers termes du développement de Debye généralisé d'une sphère multi-couches.

Dans le cas de la sphère parfaitement rigide les résultats asymptotiques sont acquis tant dans la zone "d'ombre" (méthode des résidus) qu'en

avant de l'obstacle (méthode du col). Les interprétations physiques auxquelles on est conduit sont en accord avec celles données par Scholte, Roseau, Datta pour une sphère fluide; tel est le cas des rayons qui s'enroulent autour de l'inclusion et des lois de l'optique géométrique qui sont plus spécifiques de la méthode employée que du modèle considéré.

Pour ce qui concerne la sphère élastique, une distinction nette entre milieu fluide et solide est établie par la présence de l'angle d'incidence critique. L'étude du premier terme du développement de Debye montre que deux sortes d'ondes de surface (dispersives, évanescentes) prennent simultanément naissance sur la frontière. Les unes sont excitées ou éteintes par des rayons tangents comme pour les matériaux fluides, les autres sont suscitées, ou s'évanouissent, selon l'angle d'incidence critique lorsque le milieu interne est plus rigide que le milieu infini. L'étude du premier terme du développement de Debye, susceptible de rendre compte de la présence d'une couche  $p$  au sein de la stratification, est également effectuée. Elle dévoile une autre caractéristique nouvelle des ondes de surface liée aux milieux élastiques. Celles-ci sont engendrées (après réflexion sur la couche  $p$ ) sous l'angle d'incidence critique puis étouffées par des rayons tangents à la frontière, et vice versa, lorsque la rigidité des milieux va en décroissant vers le centre du modèle. On note que cette excitation d'ondes de surface par l'angle d'incidence critique est en parfait accord avec les expériences d'acoustique sous-marine de Bertoni et Tamir (faisceau d'ondes planes venant frapper un demi-espace élastique immergé dans l'eau) ou de Überall et son équipe (cas du cylindre métallique). D'autres résultats sont mis au jour. En outre, on effectue le lien entre les solutions asymptotiques obtenues et la théorie des rayons de Levy et Keller. Ce dernier point permet de contrôler les résultats acquis et de mettre en évidence l'incidence de certaines singularités analytiques (pôles multiples) sur l'interprétation physique des solutions asymptotiques (faisceau des rayons réfléchis sur la couche étudiée  $p$ ).

*Note:*

- onde P = onde longitudinale
- onde SV = onde transversale à polarisation verticale
- onde SH = onde transversale à polarisation horizontale

DIFFRACTION D'ONDES PAR DES MILIEUX ELASTIQUES  
SPHERIQUES MULTI-COUCHES

Pages

INTRODUCTION .....	3
CHAPITRE I : CHAMP DE DEPLACEMENTS ENGENDRE PAR UN POINT SOURCE .....	9
§ 1 - Ondes élastiques en milieu infini .....	9
§ 2 - Ondes élastiques en milieu borné .....	11
§ 3 - Potentiels de Helmholtz .....	12
§ 4 - Champ de déplacements engendré par un point source	14
§ 5 - Déplacements et vecteur contrainte associés aux ondes P et SV .....	18
CHAPITRE II : CHAMP DE DEPLACEMENTS ENGENDRE PAR L'INCIDENCE D'ONDES SH SUR UNE SPHERE ELASTIQUE .....	22
§ 1 - Formulation du problème .....	22
§ 2 - Solution du problème canonique .....	24
§ 3 - Coefficients de réflexion et de réfraction .....	27
§ 4 - Développement de Debye (méthode classique) .....	30
§ 5 - Génération directe de la solution .....	33
Annexe du chapitre 2 .....	35
CHAPITRE III : CHAMP DE DEPLACEMENTS ENGENDRE PAR L'INCIDENCE D'ONDES SH SUR UNE SPHERE MULTI-COUCHES .....	37
§ 1 - Problème canonique .....	37
§ 2 - Structure des champs .....	39
§ 3 - Génération directe de la solution .....	40
CHAPITRE IV : CHAMP DE DEPLACEMENTS ENGENDRE PAR L'INCIDENCE D'ONDES P et SV SUR UNE SPHERE MUTLI-COUCHES ..	48
§ 1 - Problème canonique .....	48
§ 2 - Structure des solutions .....	50
§ 3 - Matrices de réflexion et de réfraction .....	53

	Pages
§ 4 - Génération directe de la solution pour une sphère élastique .....	57
4.1 Cas des ondes incidentes P et SV.....	57
4.2. Cas des ondes incidentes P seules ou SV seules .....	60
4.3 Cas d'une sphère fluide .....	61
§ 5 - Génération directe de la solution pour des ondes P et SV incidentes sur un nombre fini de sphères concentriques .....	63
Annexe du chapitre 4 .....	69
 CHAPITRE V : QUELQUES ASPECTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS	 78
§ 1 - Transformation de Watson = Sphère parfaitement rigide.....	78
§ 2 - Domaine de validité, interprétation .....	84
§ 3 - Solution en avant de l'obstacle .....	88
§ 4 - Sphère élastique .....	94
§ 5 - Influence sur la solution dans l'espace infini d'une couche quelconque .....	103
Annexe du chapitre 5 .....	112
I - Rappels et compléments .....	112
II - Convergence de l'intégrale (5.5).....	116
III - Pôles ; convergence d'intégrale du § 4 .....	119
1) Recherches des pôles de (5.6) .....	119
2) Convergence de l'intégrant (5.46) .....	121
IV - Pôles, résidus, convergence d'intégrale.....	124
1) Pôles de $g^{(p)}(v)$ .....	124
2) Résidus .....	126
3) Convergence de (67) .....	128
CONCLUSION .....	130
REFERENCES.....	133

## INTRODUCTION

La déviation subie par une vibration rasant les bords d'un obstacle, effet commun à diverses branches de la physique, est répertoriée sous le vocable "diffraction".

Sans entrer dans une énumération fastidieuse des domaines où sévit ce phénomène nous pouvons cependant en recenser quelques uns des plus connus. L'optique, avec l'arc en ciel attribué depuis fort longtemps (+) à une diffraction des ondes lumineuses (vibrations longitudinales) par les gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. L'électromagnétisme où l'apparition de la "transmission sans fil" et des particularités qui s'y rattachent conduisit, au début du siècle, à expliquer les singularités détectées dans le cheminement des vibrations d'origine électromagnétique à l'aide de la déviation des ondes hertziennes (type transversale) par les couches denses de l'atmosphère. En sismologie, depuis les années 50, l'oscultation de plus en plus fine du globe terrestre par les sismographes met à son tour en évidence des anomalies dans la progression des ondes élastiques (simultanément longitudinales et transversales). Un essai de compréhension de ces anomalies s'appuie sur la diffraction des ondes élastiques par les diverses couches de matériaux qui constituent la terre. Les actuels progrès de l'acoustique sous-marine sont aussi révélateurs de semblables phénomènes pour lesquels des études, tant expérimentales que théoriques, sont en cours.

Les méthodes à mettre en oeuvre pour explorer la propagation de ces diverses sortes d'ondes linéaires, dans un modèle précis, sont voisines.

---

(+) *En effet le premier à avoir tenté de fournir une explication rationnelle de l'arc en ciel est Aristote.*

La difficulté dans leur mise en application va croissante selon la nature des vibrations considérées (longitudinales, transversales ou simultanément les deux). Néanmoins, ces méthodes se répartissent en deux classes : la classe des intégrations numériques et celle des méthodes analytiques.

Les processus de la première classe débouchent, par exemple en élasticité, sur la réalisation de sismogrammes synthétiques : travaux d'Alterman et ses collaborateurs (1968, 1970) : utilisation de la technique des différences finies ; ceux de Lysmer (1970) : application des éléments finis ; ou de Thomson (1950) Haskell (1953) : résolution matricielle des équations aux dérivées partielles du second ordre qui sont transcrites en un système du 1<sup>er</sup> ordre. Les difficultés sous-jacentes sont dès lors spécifiques de l'analyse numérique d'éléments dynamiques.

La seconde classe, qui relève des méthodes analytiques, a plus particulièrement retenue notre attention pour une approche de la diffraction des ondes élastiques par un ensemble de sphères concentriques, thème de ce mémoire. Dans cette dernière classe on peut entrevoir deux voies essentielles. L'une conduit directement à une solution approchée, l'autre consiste à asseoir d'abord la solution exacte que l'on approxime ensuite.

Dans la voie des solutions approchées, il semble être attribué une autorité certaine, à la théorie des rayons - ou de la diffraction géométrique - due à Keller (1953), Levy et Keller (1959). Elle réside en une extension de l'optique géométrique et permet d'atteindre directement la structure de la solution approchée (pour des obstacles de forme géométrique simple) à l'aide du principe de conservation de l'énergie et d'une généralisation du principe de Fermat. Pour analyser les résultats de mesure de l'explosion de Bukhara c'est par ce biais que Woodhouse (1972) a obtenu la solution pour une sphère élastique (décentrée de l'origine des coordonnées) de rigidité inférieure à celle de l'espace infini. Bien adaptée à la recherche d'une solution approchée pour un modèle simple (Chen - 1964 - par exemple pour un modèle à un cylindre) elle devient d'un abord très délicat pour les milieux multi-couches étant donné le nombre infini de réflexions et de réfractions à concevoir. Cette remarque tient également pour la tech-

nique des développements asymptotiques raccordés dont l'usage est satisfaisant pour l'étude du champ lointain et proche d'un obstacle ou encore pour les géométries particulières tels les sphéroïdes S.K.Datta (1973,1974). Ces méthodes approchées sont toutes dominées par le facteur  $ka$  ( $ka \gg 1$  - haute fréquence) produit du nombre d'onde  $k$  de la vibration examinée par une grandeur  $a$ , caractéristique de la géométrie du modèle. L'idée qui consiste à rechercher, a priori, un développement en série en puissance de  $(ka)^{-1}$  - méthode dite de Luneburg - Kline - est d'un apport intéressant notamment vis à vis de la détermination de la section d'un obstacle diffractant à grande distance de celui-ci, George et Überall (1979). Elle ne paraît cependant guère envisageable dans le cadre d'une stratification.

Du bref inventaire qui vient d'être dressé il découle que la seconde voie ouverte par les méthodes analytiques (recherche d'une solution exacte) semble mieux adaptée aux propagations d'ondes dans les multi-couches. Elle nécessite d'opérer en deux étapes. Au cours de la première nous devons expliciter une solution des équations du mouvement tenant compte de la singularité due à la source, des conditions aux limites attachées à l'obstacle, de la condition de radiation à l'infini et d'absorption à l'origine de Sommerfeld adjointe à des considérations énergétiques. Ceci constitue notre problème canonique. Hormis les écueils relevant de ces impératifs il y a ceux inhérents à l'expression mathématique de la solution du problème canonique, expression qui masque toute interprétation physique et, par voie de conséquence, interdit, en général, toute exploitation rationnelle des résultats comme nous le verrons. Parmi les différentes démarches à notre disposition pour surmonter ces embûches nous retiendrons les méthodes asymptotiques qui constituent la seconde étape. Rappelons pour mémoire que celles-ci furent développées sur la base des travaux de Debye (1908), Poincaré (1909) et Watson (1918) par Van der Pol, Bremmer (1937), Fock (1948), Bremmer (1949) au cours de leurs études sur les ondes hertziennes. Il s'agit, ayant trouvé la solution exacte d'un problème, d'acquérir une expression approchée et interprétable de celle-ci. Ceci s'obtient en manipulant la méthode du col et des calculs d'intégrales par la technique des résidus. Nous verrons que, dans les cas complexes, il est intéressant de faire précéder cette seconde étape d'un développement de l'amplitude en série d'ondes partielles - développement de Debye -.

L'intérêt, relativement récent, des mécaniciens envers les problèmes de diffraction par des sphères, ou des cylindres, dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences, explique l'extension tardive des méthodes asymptotiques ci-dessus à l'élasticité et à l'acoustique sous-marine. Les premières recherches sur la diffraction des ondes P (ondes longitudinales) par une sphère fluide remontent, semble-t-il, aux travaux de Nagase (1956), Scholte (1956) dont certains résultats furent justifiés dernièrement par Ansell (1973) et Roseau (1976). Une synthèse de l'acquis sur la propagation d'ondes élastiques P en présence d'une sphère fluide a été donnée par S.K. Datta (1978). On rencontre également les approches relatives au voisinage de la frontière "d'ombre" projetée par des cylindres dans les travaux de Teng et Richards (1969), la recherche des caustiques d'ondes P (cas du cylindre) par Griffin et Miklowitz (1974). Les études relatives à la diffraction des ondes linéaires par des cylindres ou des sphères couvrent, bien sûr, d'autres domaines comme nous l'avons déjà signalé. Citons : l'électromagnétisme avec les travaux de Poincaré (1909,1910), Bremmer (1949), Fock (1965) sur les ondes radioélectriques, Streifer et Kodis (1964) études de cylindres diélectriques, Nussenzveig pour le cas sphérique (1965, 1969)..., l'acoustique avec Überall et ses collaborateurs (études d'ondes de surface sur des cylindres 1973, 1976...) dont les recherches semblent s'orienter vers les phénomènes de résonance et d'absorption (Flax, Gaunaurd (1978), Murphy et Al (1979)) ou encore l'aspect du passage d'une onde de surface à une fréquence de résonance (Derem (1979) cas du cylindre). Une bibliographie fournie, en particulier sur les problèmes de diffraction par des cylindres, peut être consultée dans Pao et Mow (1973). La recherche du développement de Debye pour la solution exacte, issue de l'incidence d'une onde de pression sur un cylindre élastique immergé dans un liquide, est menée à bien par des calculs laborieux : Brill et Überall (1971). Hormis les études de stratifications planes, traitées par les méthodes matricielles attachées à la résolution des équations du mouvement (Thomson, Haskell par exemple), le modèle le plus complexe que l'on ait pu relever dans la littérature est celui de deux cylindres élastiques concentriques plongés dans un fluide et dont l'intérieur renferme un liquide : Flax et Neubauer (1977) ou son pendant sphérique : Murphy et collaborateurs (1979).

Un point commun à tous ces travaux concerne la première étape qui est toujours maîtrisée par le biais de la résolution d'équations linéaires par la méthode de Cramer du fait des conditions aux limites qui débouchent sur un système linéaire. Dans les approches de Flax et de Murphy le développement de Debye de l'amplitude, nécessairement très complexe, n'est pas effleuré. Le calcul de la série solution est laissé au soin de l'ordinateur.

L'un des buts que nous nous fixons est d'établir une méthode d'obtention directe de la solution exacte, sous la forme d'un développement de Debye généralisé pour un nombre fini de milieux concentriques soumis à un point source externe à cet ensemble, évinçant ainsi la technique des déterminants de Cramer. Après avoir rappelé le résultat important du point source placé dans l'espace infini (chapitre I) nous verrons comment une exploitation rationnelle de la linéarité à deux niveaux permet de dégager (chapitre II consacré à l'acquisition du champ de déplacements pour une sphère élastique) les principes de la méthode que nous proposons. Ceux-ci, appliqués au chapitre III, fournissent la solution dans l'un quelconque des domaines du multi-couches excités par des ondes SH. Au chapitre IV l'extension de la méthode, conduite à l'aide de matrices de réflexion et de réfraction, permet de déboucher sur la solution pour l'ensemble du problème dans le cadre d'une émission simultanée d'ondes P et SV ; l'étude des cas particuliers d'ondes incidentes P seules ou SV seules sur le multi-couches est effectuée très simplement sans faire de nouveau calcul. Le passage à la limite du milieu fluide rejoint et complète les résultats de Scholte (1956) et S.K. Datta (1978). Enfin, vue la complexité des solutions, on s'attache, avec le chapitre V et dans l'hypothèse des vibrations SH, à développer l'aspect asymptotique pour un certain nombre de cas spéciaux. Nous y examinons, entre-autre, l'influence d'un domaine quelconque du multi-couches sur la solution dans l'espace infini.

L'ordre logique suivi ici ne concorde pas avec la progression chronologique de nos travaux. Cela tient à une volonté de dégager d'abord la solution exacte pour toutes les configurations de source extérieure au modèle avant de se glisser dans l'approximation des hautes fréquences. Les éléments de ce premier souci sont rassemblés dans de courtes présentations (1980<sub>a</sub> mouvements P et SV, 1979<sub>b</sub> mouvements P ou SV) ou sont dispersés dans des rédactions plus étoffées (ondes SH 1974<sub>a</sub>, 1976, 1979<sub>a</sub>, 1980<sub>b</sub>) qui détiennent également les approches de notre seconde préoccupation.

*Note : La numérotation des figures est continue tout au long de ce texte.  
La numérotation des formules est particulière à chaque chapitre.  
Le renvoi à une formule est précédé du numéro du chapitre lorsque celui-ci est différent du chapitre dans lequel on cite la formule.*

## CHAPITRE I

### CHAMP DE DÉPLACEMENTS ENGENDRÉ PAR UN POINT SOURCE

*Ce chapitre, consacré en majeure partie à des rappels, va nous permettre de préciser le type d'ondes auquel nous nous intéresserons dans ce mémoire. De plus, la construction du champ de déplacements engendré par un point source placé dans un milieu infini est un résultat important pour la suite. Il sera en effet identifié ultérieurement au champ de déplacements incident sur les divers obstacles que nous aurons à considérer.*

#### 1 - ONDES ELASTIQUES EN MILIEU INFINI.

Soit un espace infini élastique, homogène et isotrope, de coefficients de Lamé  $\lambda$ ,  $\mu$  et de masse spécifique  $\rho$ . Admettons qu'à tout instant  $t$ , et qu'en chaque point de coordonnées  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), soumis à une densité de forces  $\vec{f}$ , il existe un champ de déplacements  $\vec{U}(x_i, t)$ . Ce champ de déplacements imprime au milieu un mouvement régit par les équations de Navier :

$$(1) \quad (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} - \mu \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{U}) + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} .$$

En l'absence de force de volume, cherchons une solution du système (1) de la forme :

$$(2) \quad \vec{U} = A \vec{d} \exp \{ i [ k \vec{p} \cdot \vec{x} - \omega t ] \} .$$

Une telle représentation correspond à une onde plane, de pulsation  $\omega$ , de nombre d'onde  $k$ , se propageant à la vitesse  $c = \omega k^{-1}$ , dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{p}$  (composantes  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), et induisant un déplacement d'amplitude  $A$  dans la direction  $\vec{d}$  ;  $\vec{x}$  désigne le vecteur d'espace de coordonnées  $x_i$ .

La substitution de (2) dans (1) conduit à l'équation vectorielle :

$$(3) \quad (C^2 - \frac{\mu}{\rho}) \vec{d} - \frac{\lambda + \mu}{\rho} (\vec{p} \cdot \vec{d}) \vec{p} = 0 \quad .$$

Le vecteur unitaire  $\vec{d}$ , de composantes  $d_i$ , support de l'amplitude doit donc satisfaire au système d'équations homogènes :

$$(4) \quad \{ (C^2 - \frac{\mu}{\rho}) \delta_{ij} - (\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} - \frac{\mu}{\rho}) p_i p_j \} d_i = 0 \quad .$$

Une solution non triviale de (4) existe si et seulement si :

$$(5) \quad \det \{ (C^2 - \mu/\rho) \delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\rho} p_i p_j \} = 0 \quad .$$

Ceci conduit à l'équation caractéristique

$$(6) \quad (C^2 - \mu/\rho)^2 (C^2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}) = 0 \quad .$$

Ainsi, les solutions du type (2) se propagent dans un milieu non borné avec l'une des deux vitesses (i), (ii) :

$$(7) \quad (i) C_L = (\frac{\lambda + 2\mu}{\rho})^{1/2} \quad ; \quad (ii) C_T = (\frac{\mu}{\rho})^{1/2}$$

Dans le cas d'une onde cheminant à la vitesse (i), l'équation (3) se réduit à :

$$(8) \quad \vec{d} = (\vec{p} \cdot \vec{d}) \vec{p} \quad .$$

Cette relation montre que le vecteur déplacement, associé à une onde progressant à la vitesse  $C_L$ , est colinéaire à la direction de propagation. Ceci caractérise une onde longitudinale notée P. Si l'on considère à présent la vitesse (ii), l'équation (3) devient :

$$(9) \quad \vec{p} \cdot \vec{d} = 0 \quad .$$

Par conséquent, le vecteur déplacement accouplé à une onde parcourant

l'espace à la vitesse  $C_T$ , est normal à la direction de propagation, c'est à dire situé dans un plan parallèle au front d'onde. On dit que l'onde est transverse, ou de cisaillement, notée S.

Il est facile de s'assurer que  $\text{rot } \vec{U} = 0$  dans le cas des ondes longitudinales et que  $\text{div } \vec{U} = 0$  pour les ondes transversales. Ceci justifie les expressions, d'ondes irrotationnelles ou de dilatation, attribuées aux ondes longitudinales, et, d'ondes d'équivolume ou de distorsion, réservées aux ondes transverses. De (7) il suit que  $C_L$  est supérieure à  $C_T$ , de là découle la dénomination d'ondes P et d'ondes S utilisée respectivement pour les ondes longitudinales qui arrivent les premières en un point d'observation, les ondes transverses, étant perçues en second (cf. par exemple Achenbach, Brekhovskikh).

Notons que ces deux types d'ondes évoluent indépendamment les unes des autres de sorte que les déplacements engendrés sont entièrement découplés. Enfin, cette propriété est spécifique des milieux infinis comme l'indique l'étude suivante des milieux bornés.

## 2 - ONDES ELASTIQUES EN MILIEU BORNE.

Sans restreindre la généralité on peut analyser la propagation des ondes P et S dans deux demi-espaces accolés par un plan H. La surface de discontinuité est simplement caractérisée par le vecteur directeur  $\vec{n}$  du plan ; la direction de propagation, quant à elle, est précisée par le vecteur unitaire  $\vec{p}$  du nombre d'onde. Par anticipation sur les développements ultérieurs, désignons par plan vertical V le plan défini par les deux vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{p}$ . Les projections du vecteur déplacement (2) dû aux ondes transverses dans ce plan V, et sur la normale à ce même plan V, sont respectivement représentatives des ondes transversales à polarisation verticale, notées SV, et des ondes transversales à polarisation horizontale, notées SH.

Ceci étant, la présence de la surface H nécessite d'assortir les équations du mouvement de conditions aux limites. Par exemple, à la traversée de deux milieux élastiques, on doit adjoindre à (1) des relations

traduisant la continuité des contraintes et des déplacements. Supposons que l'on ait une onde P incidente sur la surface H de séparation de deux matériaux, on peut penser trouver la solution régnant dans chacun d'eux en ajoutant à l'onde P incidente, une onde P réfléchie et une onde P réfractée. Une telle opération conduit, en général, à un système, issu des conditions aux limites, surdéterminé et insoluble (sauf si l'incidence est normale). Par contre, si l'on superpose à ces déplacements réfléchis et réfractés P, des déplacements réfléchis et réfractés SV, le système des conditions aux limites devient soluble. De même, à une onde SV incidente il est indispensable d'adjoindre une onde réfléchie et une onde réfractée des deux catégories, P et SV, pour satisfaire le système des conditions aux limites (voir par exemple Ewing et collaborateurs (1957)).

En revanche, à des ondes incidentes SH, il suffit d'associer des ondes SH réfléchies et réfractées pour vérifier les conditions aux limites.

La propriété d'indépendance des mouvements longitudinaux et transversaux du paragraphe précédent se trouve donc réduite à un découplage entre mouvements plan (P et SV) et anti-plan (SH)<sup>(†)</sup>. Notons que ce découplage est intimement lié à la géométrie du milieu et n'est valable que pour des géométries simples (plans, cylindres, sphères...), dont les surfaces sont des surfaces coordonnées comme l'a montré Jobert (1976).

Voyons à présent comment relier cette décomposition des mouvements à la théorie des potentiels de Helmholtz qui sera d'un usage constant à l'avenir.

### 3 - POTENTIELS DE HELMHOLTZ .

Depuis la théorie des potentiels de Helmholtz, on sait que l'on peut construire un champ de déplacements à l'aide d'un potentiel scalaire  $\phi$  et

---

(†) Remarquons en outre la possibilité d'une transition d'ondes P en ondes SV, et vice-versa, ce qui complique quelque peu le problème de l'incidence d'ondes P et SV qui sera étudié au chapitre IV.

d'un potentiel vecteur  $\vec{\Psi}$  à divergence nulle :

$$(10) \quad \vec{U} = \text{grad } \phi + \text{rot}(\vec{\Psi}) ; \text{div } \vec{\Psi} = 0 .$$

Tous les modèles que nous aurons à envisager par la suite étant à base de sphères, plaçons-nous d'ores et déjà dans le système de coordonnées adaptées  $r, \theta, \phi$ , de vecteurs unitaires  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ . Dès lors, la normale à une surface de discontinuité est colinéaire à  $\vec{e}_r$  qui n'est autre que le vecteur directeur du plan H s'appuyant sur les vecteurs  $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ . Rappelons qu'avec les notations du paragraphe précédent ce plan H est normal au plan sagittal V engendré par la direction de propagation  $\vec{p}$  et par la normale  $\vec{n}$  ( $=\vec{e}_r$ ) à la surface de discontinuité. Le report de (10) dans (1) montre, après quelques calculs simples, que le mouvement des particules associé à  $\phi$ , s'effectue dans le sens de la propagation; celui engendré par  $\vec{\Psi}$  est exécuté selon une direction orthogonale à celle de la propagation. La distinction entre mouvements plan et anti-plan, établie au paragraphe précédent, incite à chercher une décomposition du potentiel vecteur  $\vec{\Psi}$  en deux composantes orthogonales, dont l'une, compte tenu de (10), est portée par le vecteur  $\vec{e}_r$ . Cette opération est aisément réalisée en s'appuyant sur deux fonctions scalaires  $\psi(r, \theta, \phi, t)$  et  $\chi(r, \theta, \phi, t)$ . Si l'on choisit la première fonction portée par  $\vec{e}_r$ , une combinaison répondant à l'objectif fixé est donnée par :

$$(11) \quad \vec{\Psi} = r\psi\vec{e}_r + \vec{\nabla}_\Lambda (r\chi\vec{e}_r) .$$

L'association de (11) et de (10) nous fournit la décomposition (12) du champ de déplacements à l'aide de potentiels tenant compte des propriétés énoncées au § 2.

$$(12) \quad \vec{U} = \text{grad } \phi + \text{rot}(\text{rot}\{r\chi\vec{e}_r\}) + \text{rot}(r\psi\vec{e}_r) .$$

Ce résultat montre que les quantités scalaires  $\phi, \chi$  et  $\psi$  sont respectivement associées aux ondes P, SV et SH; de plus, les composantes  $U_r, U_\theta, U_\phi$  du champ  $\vec{U}$  s'expriment en fonction de ces potentiels par les relations (13) (voir par exemple Eringen, Suhubi 1975):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left\{ \frac{\partial^2 (r\chi)}{\partial r^2} - r\nabla^2 \chi \right\} , \\ U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\chi)}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} , \\ U_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 r\chi}{\partial r \partial \phi} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} . \end{array} \right.$$

Par ailleurs, pour une normale extérieure aux surfaces de discontinuité portée par  $\vec{e}_r$ , il est clair, d'après la loi de Hooke et (12), que les composantes du vecteur contrainte ( $T_{rr}, T_{r\theta}, T_{r\phi}$ ) nécessaires à l'expression des conditions aux limites que nous aurons à évaluer dans les chapitres suivants sont (cf. Scholte par exemple) :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{rr} = \lambda \operatorname{div} \vec{U} + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} , \\ T_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) , \\ T_{r\phi} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} + \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right) . \end{array} \right.$$

Remarque. Le découplage des ondes SH, des ondes P et SV, joint au formalisme (12), permettent d'utiliser le principe de superposition des solutions. Notons, pour ne plus y revenir par la suite, que le vecteur contrainte agissant sur une surface coordonnée  $r = c \frac{ste}{e}$ , et, le champ des déplacements associés aux ondes SH, sont donnés par les relations (15) et (16)

$$(15) \quad U_r = 0 \quad , \quad U_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad , \quad U_\phi = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ,$$

$$(16) \quad T_{rr} = 0 \quad , \quad T_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) \quad , \quad T_{r\phi} = \mu \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right) \quad .$$

Des expressions analogues peuvent de toute évidence être extraites de (13) et (14) en ce qui concerne les ondes P et les ondes SV qui, rappelons le, sont respectivement attachées aux potentiels  $\phi$  et  $\chi$ .

Mettons en oeuvre ces résultats pour définir le champ de déplacements dû à un point source.

#### 4 - CHAMP DE DEPLACEMENTS ENGENDRE PAR UN POINT SOURCE.

Par souci de simplification, nous établissons le champ de déplacements relatif à une source émettant uniquement des ondes SH. Cette

singularité, agissant dans un milieu infini, est supposée située au point S de coordonnées  $r=r_s$ ,  $\theta=\theta_s$ ,  $\phi=\phi_s$ . Utilisons le formalisme des champs de forces développé par Burridge et Knopoff (1964), Hudson (1969). Ces auteurs ont établi qu'une force concentrée en S est équivalente à une source d'ondes placée en ce point. Dans le cas général, on montre que le champ de forces a une structure analogue au champ de déplacements donné en (12), où les potentiels  $\Phi$ ,  $\chi$  et  $\psi$  sont à remplacer respectivement par des potentiels  $g$ ,  $h$  et  $f$ . Il en résulte que pour décrire, par exemple, des ondes SH issues de S, il suffit de considérer un champ de forces  $\vec{F}$  par unité de volume tel que :

$$(17) \quad \vec{F} = \vec{\nabla}_\Lambda \{ r f(r, \theta, \phi, t) \vec{e}_r \} .$$

Ceci implique que les composantes radiales de  $\vec{F}$  et  $\vec{U}$  sont nulles ainsi que la dilatation. L'une des équations du mouvement est automatiquement satisfaite, les deux autres ne le sont que si le potentiel  $\psi$  est solution de l'équation :

$$(18) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c_T^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - f \right) .$$

Pour une distribution de forces  $f$ , correspondant à une source d'ondes monochromatiques de pulsation  $\omega$ , qui communique au milieu élastique un mouvement d'amplitude  $f_0$ , nous avons :

$$(19) \quad f = f_0 \frac{\delta(r-r_s) \delta(\theta-\theta_s) \delta(\phi-\phi_s)}{r^2 \sin \theta} e^{-i\omega t} .$$

Singh et Ben Menahem (1969) ont montré que :

$$(20) \quad \frac{\delta(\theta-\theta_s) \delta(\phi-\phi_s)}{\sin \theta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s) Y_{mn}(\theta, \phi) ,$$

où  $\bar{Y}_{mn}$  est le conjugué de  $Y_{mn} = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$  .

Pour résoudre (18), compte tenu de (19) et (20), nous utilisons la méthode de séparation des variables et posons :

$$(21) \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{mn}(r) Y_{mn}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} .$$

En introduisant le nombre d'onde  $\beta = \omega c_T^{-1}$  et le développement ci-dessus dans (18), il s'ensuit que  $U_{mn}(r)$  doit être solution de :

$$(22) \quad \frac{d^2 U_{mn}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d U_{mn}(r)}{dr} + \left\{ \beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} U_{mn}(r) = A_{mn} \frac{\delta(r-r_s)}{r^2},$$

$$A_{mn} = (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s).$$

Deux solutions fondamentales de l'équation homogène associée à (22) sont les fonctions de Hankel de première et seconde espèce d'ordre  $n+1/2$ . Seule la somme de ces deux fonctions reste finie en  $r=0$ . En outre, il est bien connu que la condition de radiation à l'infini de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial r} - i\beta \vec{U} \right) = 0,$$

est satisfaite seulement par la fonction  $H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r)$  en  $+\infty$ , par la fonction  $H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r)$  en  $-\infty$ , tandis qu'à l'origine ( $r \rightarrow 0$ ) la fonction de Bessel  $J_{n+1/2}(\beta r)$  vérifie le même type de condition dite condition d'absorption (cf. Sommerfeld (1949)). Nous retenons donc comme solutions fondamentales de (22) les fonctions de Hankel et de Bessel  $H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r)$  et  $J_{n+1/2}(\beta r)$ . Pour-suivant la résolution de (22) par les méthodes usuelles (cf. Morse et Feshbach 1953), et utilisant la valeur  $2i/\pi\beta r$  du Wronskien des solutions fondamentales retenues, on trouve :

$$(23) \quad \begin{aligned} U_{mn} &= \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8C_T^2 \sqrt{rr_s} (n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s) J_{n+1/2}(\beta r_s) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r), r > r_s ; \\ U_{mn} &= \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8C_T^2 \sqrt{rr_s} (n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r_s) J_{n+1/2}(\beta r), 0 \leq r < r_s . \end{aligned}$$

A l'avenir, les modèles étudiés posséderont la symétrie de révolution et nous choisirons la source placée en  $\theta_s=0, \phi_s=0$ . Nous explicitons la solution de (18) pour cette position particulière  $(r_s, 0, 0)$  de la source, le cas général ne posant plus de difficulté majeure. Ainsi le potentiel  $\psi$ , que nous désignerons dorénavant par abus de langage "champ", vaut, en posant  $\eta = \cos\theta$  :

$$(24) \quad \psi = \frac{if_0 e^{-i\omega t}}{4C_T^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r_s) J_{n+1/2}(\beta r) P_n(\eta), 0 \leq r < r_s ;$$

$$(22) \quad \frac{d^2 U_{mn}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU_{mn}(r)}{dr} + \left\{ \beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} U_{mn}(r) = A_{mn} \frac{\delta(r-r_s)}{r^2},$$

$$A_{mn} = (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s).$$

Deux solutions fondamentales de l'équation homogène associée à (22) sont les fonctions de Hankel de première et seconde espèce d'ordre  $n+1/2$ . Seule la somme de ces deux fonctions reste finie en  $r=0$ . En outre, il est bien connu que la condition de radiation à l'infini de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial r} - i\beta \vec{U} \right) = 0,$$

est satisfaite seulement par la fonction  $H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r)$  en  $+\infty$ , par la fonction  $H_{n+1/2}^{(2)}(\beta r)$  en  $-\infty$ , tandis qu'à l'origine ( $r \rightarrow 0$ ) la fonction de Bessel  $J_{n+1/2}(\beta r)$  vérifie le même type de condition dite condition d'absorption (cf. Sommerfeld (1949)). Nous retenons donc comme solutions fondamentales de (22) les fonctions de Hankel et de Bessel  $H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r)$  et  $J_{n+1/2}(\beta r)$ . Pour suivre la résolution de (22) par les méthodes usuelles (cf. Morse et Feshbach 1953), et utilisant la valeur  $2i/\pi\beta r$  du Wronskien des solutions fondamentales retenues, on trouve :

$$U_{mn} = \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8C_T^2 \sqrt{rr_s} (n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s) J_{n+1/2}(\beta r_s) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r), r > r_s;$$

$$(23) \quad U_{mn} = \frac{if_0(2n+1)(n-m)!}{8C_T^2 \sqrt{rr_s} (n+m)!} \bar{Y}_{mn}(\theta_s, \phi_s) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r_s) J_{n+1/2}(\beta r), 0 \leq r < r_s.$$

A l'avenir, les modèles étudiés posséderont la symétrie de révolution et nous choisirons la source placée en  $\theta_s=0, \phi_s=0$ . Nous explicitons la solution de (18) pour cette position particulière ( $r_s, 0, 0$ ) de la source, le cas général ne posant plus de difficulté majeure. Ainsi le potentiel  $\psi$ , que nous désignerons dorénavant par abus de langage "champ", vaut, en posant  $\eta = \cos\theta$  :

$$(24) \quad \psi = \frac{if_0 e^{-i\omega t}}{4C_T^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r_s) J_{n+1/2}(\beta r) P_n(\eta), 0 \leq r < r_s;$$

$$(24) \quad \psi = \frac{if_0 e^{-i\omega t}}{4C_T^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) H_{n+1/2}^{(1)}(\beta r) J_{n+1/2}(\beta r_s) P_n(\eta), r > r_s.$$

On retrouve ainsi un résultat bien connu (voir Sommerfeld, Bremmer...). Rappelons que (24) est aussi le développement classique (cf. Robin) de

$$(25) \quad \psi = e^{-i\omega t} \frac{f_0 e^{i\beta R}}{4\pi C_T^2 R}, \quad R = (r^2 + r_s^2 - 2r_s r \cos\theta)^{1/2}.$$

Supposons à présent que le point source S émette des ondes SV (ou des ondes P) engendrées par une distribution de forces analogue à (19). Dans ce cas, en utilisant les potentiels adaptés aux ondes SV (ou aux ondes P), nous devons dans (18) échanger  $\psi$  en  $\chi$  (ou  $\psi$  en  $\Phi$  et  $C_T$  en  $C_L$ ). Il en résulte que le champ émis par une source d'ondes SV est celui donné en (24) à condition d'y remplacer  $\psi$  par  $\chi$ . De même, pour une source d'ondes P, nous tirons de (24), en admettant que l'amplitude de la densité de force soit  $g_0$  :

$$(26) \quad \Phi = \frac{ig_0 e^{-i\omega t}}{4C_L^2 \sqrt{rr_s}} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) H_{n+1/2}^{(1)}(\alpha r_s) J_{n+1/2}(\alpha r) P_n(\eta), & 0 \leq r < r_s, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) H_{n+1/2}^{(1)}(\alpha r) J_{n+1/2}(\alpha r_s) P_n(\eta), & r > r_s, \end{cases}$$

où  $\alpha = \omega C_L^{-1}$  est le nombre d'ondes attaché aux ondes P.

Les solutions données en (24) et (26) suscitent quelques remarques utiles pour les développements futurs. Dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences  $kr \gg (n+1/2)$ ,  $k$  désignant l'un ou l'autre des nombres d'onde  $\alpha$  ou  $\beta$ , les fonctions  $H_{n+1/2}^{(1)}(kr)$  et  $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$  (qui vérifient les conditions de radiation à l'infini de Sommerfeld) ont un développement asymptotique (voir annexe I du chapitre V) tel que :

$$(27) \quad H_{n+1/2}^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \sim \left( \frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \exp\left\{i(kr - \omega t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})\right\}, \quad \nu = n+1/2$$

$$(28) \quad H_{n+1/2}^{(2)}(kr)e^{-i\omega t} \sim \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \exp\left\{-i(kr+\omega t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})\right\}, \quad \nu=n+1/2.$$

Il apparaît donc que tout potentiel proportionnel à  $H_{n+1/2}^{(1)}(kr)$  correspond à une onde qui s'écarte de l'origine vers l'infini - onde dite sortante ou divergente -. A contrario, un potentiel proportionnel à  $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$  caractérise une onde qui se propage vers l'origine - onde dite entrante ou convergente -. Ces deux remarques permettent de mieux saisir la nature physique du phénomène contenu dans chacun des éléments de (24) ou (26). En particulier, puisque  $2J_{n+1/2}(x) = H_{n+1/2}^{(1)}(x) + H_{n+1/2}^{(2)}(x)$ , si l'on imagine une sphère de rayon inférieur à  $r_s$  centrée à l'origine des coordonnées, il est clair que les termes valables pour  $r < r_s$ , contiennent autant d'ondes entrantes que d'ondes sortantes, ce que l'on traduit parfois en précisant que ces termes correspondent à une réflexion sur l'origine.

#### 5 - DEPLACEMENTS ET VECTEURS CONTRAINTES ASSOCIES AUX ONDES P ET SV.

La solution de point source que nous venons d'appréhender apparaît sous une forme à variables séparées pour les trois types d'ondes P, SV et SH. Ceci nous conduit à revenir sur les expressions des déplacements et du vecteur contrainte car, si le découplage des variables  $r$  et  $\theta$  persiste pour les mouvements d'ondes SH, avec les écritures (15) et (16), on observe qu'il n'en est pas de même pour les deux autres espèces de mouvements.

En effet, on note, avec (13) par exemple, que les déplacements relatifs aux ondes P et SV ne sont pas acquis avec le même ordre de dérivation, relativement aux variables  $r$  et  $\theta$ , pour les potentiels  $\phi$  (ondes P) et  $\chi$  (ondes SV). Pour conserver une séparation des variables  $r$  et  $\theta$  efficace au niveau des futures conditions aux limites il est indispensable de modifier l'écriture de (13) et de (14). Nous réalisons cette opération comme d'autres auteurs (voir par exemple Roseau, chp.7) à l'aide d'un changement de variable approprié pour les ondes P d'une part, puis pour les ondes SV, d'autre part.

$$(28) \quad H_{n+1/2}^{(2)}(kr) e^{-i\omega t} \sim \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \exp\left\{-i(kr + \omega t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4})\right\}, \quad \nu = n + 1/2.$$

Il apparaît donc que tout potentiel proportionnel à  $H_{n+1/2}^{(1)}(kr)$  correspond à une onde qui s'écarte de l'origine vers l'infini - onde dite sortante ou divergente -. A contrario, un potentiel proportionnel à  $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$  caractérise une onde qui se propage vers l'origine - onde dite entrante ou convergente -. Ces deux remarques permettent de mieux saisir la nature physique du phénomène contenu dans chacun des éléments de (24) ou (26). En particulier, puisque  $2J_{n+1/2}(x) = H_{n+1/2}^{(1)}(x) + H_{n+1/2}^{(2)}(x)$ , si l'on imagine une sphère de rayon inférieur à  $r_s$  centrée à l'origine des coordonnées, il est clair que les termes valables pour  $r < r_s$ , contiennent autant d'ondes entrantes que d'ondes sortantes, ce que l'on traduit parfois en précisant que ces termes correspondent à une réflexion sur l'origine.

#### 5 - DEPLACEMENTS ET VECTEURS CONTRAINTES ASSOCIES AUX ONDES P ET SV.

La solution de point source que nous venons d'appréhender apparaît sous une forme à variables séparées pour les trois types d'ondes P, SV et SH. Ceci nous conduit à revenir sur les expressions des déplacements et du vecteur contrainte car, si le découplage des variables  $r$  et  $\theta$  persiste pour les mouvements d'ondes SH, avec les écritures (15) et (16), on observe qu'il n'en est pas de même pour les deux autres espèces de mouvements.

En effet, on note, avec (13) par exemple, que les déplacements relatifs aux ondes P et SV ne sont pas acquis avec le même ordre de dérivation, relativement aux variables  $r$  et  $\theta$ , pour les potentiels  $\Phi$  (ondes P) et  $\chi$  (ondes SV). Pour conserver une séparation des variables  $r$  et  $\theta$  efficace au niveau des futures conditions aux limites il est indispensable de modifier l'écriture de (13) et de (14). Nous réalisons cette opération comme d'autres auteurs (voir par exemple Roseau, chp.7) à l'aide d'un changement de variable approprié pour les ondes P d'une part, puis pour les ondes SV, d'autre part.

Dans le cas des ondes P, le champ des déplacements dans l'hypothèse de la symétrie de révolution s'écrit, d'après (13), en fonction du potentiel scalaire  $\Phi(r, \theta, t)$ :

$$(29) \quad U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad U_\phi = 0.$$

Désignons par  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$  la partie du potentiel (26) qui dépend des variables  $r, \theta$  par l'intermédiaire du produit du polynôme de Legendre par la fonction de Hankel de première espèce ( $\Phi^+$ ) ou de seconde espèce ( $\Phi^-$ ). Il en découle que les quantités  $X^+$  (associée à  $\Phi^+$ ) et  $X^-$  (liée à  $\Phi^-$ ) définies en (30) ne dépendent que de la seule variable  $r$ .

$$(30) \quad X^{+,-} = \frac{r}{\Phi^{+,-}} \frac{\partial \Phi^{+,-}}{\partial r} - 1.$$

Les composantes (29) du déplacement sont dès lors données par (31) assortie des signes + ou - convenables.

$$(31) \quad U_r = \frac{X+1}{r} \Phi, \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad U_\phi = 0.$$

Il nous reste à faire disparaître les dérivées croisées en  $r$  et  $\theta$  de l'expression (14) du vecteur contrainte. Pour ce faire, on observe en faisant appel à l'équation des ondes vérifiées par  $\Phi^+$  et  $\Phi^-$ , que la partie  $\vec{U}^+$  (ou  $\vec{U}^-$ ) du vecteur contrainte exprimée à l'aide de  $\Phi^+$  (ou  $\Phi^-$ ) vaut :

$$(32) \quad \text{div } \vec{U}^{+,-} = \Delta \Phi^{+,-} = -\frac{\omega^2}{C_L^2} \Phi^{+,-}.$$

De même, en faisant intervenir l'équation différentielle génératrice des polynômes de Legendre et l'équation des ondes, dont  $\Phi$  est solution, nous obtenons :

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \Phi^{+,-}}{\partial r^2} = \frac{\Phi^{+,-}}{r^2} \left\{ -\frac{\omega^2 r^2}{C_L^2} + (n+2)(n-1) - 2X^{+,-} \right\}.$$

Nous avons également besoin de trouver une autre expression de la dérivée croisée de  $\Phi^{+,-}$  par rapport à  $r$  et  $\theta$ . Or une telle quantité figure dans l'équation des ondes que l'on utilise conjointement avec les résultats (33) et (30) pour obtenir :

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{X+1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Introduisons les résultats (31) à (34) dans (14). Il s'ensuit, après simplification :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{rr} = -\mu \frac{4X^{+,-} - m^2}{r^2} \phi^{+,-} \\ T_{r\theta} = 2\mu \frac{X^{+,-}}{r^2} \frac{\partial \phi^{+,-}}{\partial \theta} \end{array} \right. ,$$

où l'on a posé :

$$m^2 = 2(n+2)(n-1) - \frac{\omega^2 r^2}{C_T^2} .$$

Dans le cas d'un milieu fluide, pour lequel  $\mu=0$ , les expressions (35) prennent la forme particulièrement simple :

$$(36) \quad T_{rr} = -\lambda \frac{\omega^2}{C_L^2} \phi^{+,-} ; T_{r\theta} = 0 .$$

En ce qui a trait aux déplacements dus aux ondes SV, engendrées par le potentiel  $\chi(r, \theta, t)$ , nous avons en faisant usage de (12) et (13) :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_r = \frac{\partial^2 r \chi}{\partial r^2} - r \nabla^2 \chi \\ U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \chi}{\partial r \partial \theta} , U_\phi = 0 \end{array} \right. .$$

Nous désignons par  $\chi^{+,-}$  la partie du potentiel analogue à (24) construite à l'aide de  $P_n(\cos\theta)$  et des fonctions  $H_\nu^{(1)}(x)$  ou  $H_\nu^{(2)}(x)$ . L'équation différentielle pour les polynômes de Legendre conduit à :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \chi^{+,-}}{\partial \theta} \right) = \frac{n(n+1)}{r} \chi^{+,-} \\ U_\theta = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \chi^{+,-}}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 \chi^{+,-}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r}{\chi^{+,-}} \frac{\partial \chi^{+,-}}{\partial r} \right\} \frac{\partial \chi^{+,-}}{\partial \theta} . \end{array} \right.$$

Avec la définition de  $m^2$  ci-dessus nous introduisons la quantité (39) qui, comme (30), ne dépend que de  $r$ .

$$(39) \quad Y^{+,-} = 2 \frac{r}{\chi^{+,-}} \frac{\partial \chi^{+,-}}{\partial r} - 2 - m^2 .$$

Ainsi nous pouvons transformer la composante  $U_\theta$  du déplacement (38) en :

$$(40) \quad U_\theta = \frac{Y+m^2+4}{2r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} .$$

Par ailleurs, puisque le potentiel  $\chi$  est à divergence nulle, nous avons :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{rr} = 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial \theta} = \mu \frac{n(n+1)}{r^2} (Y+m^2)\chi, \\ T_{r\theta} = \mu \left\{ \frac{n(n+1)}{r^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \right\} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \end{array} \right.$$

Enfin de l'équation des ondes et de (39) on déduit sans difficulté :

$$(42) \quad \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = - \frac{Y+m^2+2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\omega^2 r^2}{C_T^2} - n(n+1) \right\}.$$

En se souvenant de la définition de  $m^2$  le report de (42) dans (41) implique:

$$(43) \quad T_{r\theta} = - \frac{\mu Y}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}.$$

En résumé, avec les relations (31), (35), (38)<sub>1</sub>, (40), (41)<sub>1</sub> et (43) nous avons une écriture tout à fait semblable des composantes du déplacement et des contraintes, tant pour les mouvements engendrés par les ondes P que pour ceux issus des ondes SV, de sorte que dans l'écriture des conditions aux limites la variable  $\theta$  disparaîtra. Nous verrons au chapitre IV que cet artifice permet de rendre unidimensionnel le problème de l'impact d'ondes P ou SV sur une surface. Il conduit en outre, à ne raisonner que sur la variable  $r$  et, par voie de conséquence, d'étendre aisément aux ondes P et SV la méthode développée pour les ondes SH au chapitre III.

## CHAPITRE II

### CHAMP DE DÉPLACEMENTS ENGENDRÉ PAR L'INCIDENCE D'ONDES SH SUR UNE SPHÈRE ÉLASTIQUE

*Si l'on s'attache à déterminer le champ de déplacements régnant dans un milieu stratifié soumis à l'influence d'ondes harmoniques, plusieurs difficultés surgissent. Les unes sont intimement liées au système d'équations issues des conditions aux limites, les autres à l'expression de la solution globale inexploitable a priori.*

*Le but essentiel de ce chapitre est d'appréhender, à propos d'un exemple simple, une méthode qui permette de s'affranchir des conditions aux limites, conduise directement à la solution exacte régissant le mouvement des différentes couches, et ce, sous une forme plus satisfaisante pour l'esprit au regard de l'information physique que l'on pressent naturellement contenue dans la solution globale.*

#### 1 - FORMULATION DU PROBLEME.

Les études relatives à des milieux stratifiés sphériques sont relativement complexes. Aussi pour une première application des résultats du chapitre précédent, choisissons le modèle le plus simple imaginable en la matière : celui de l'espace infini (noté 2), contenant un point source S extérieur à une sphère  $\Sigma_1$  ; celle-ci limite un domaine noté 1. Nous supposons tous les milieux élastiques homogènes et isotropes mais de densité massique  $\rho$  et de coefficients de Lamé  $\lambda$ ,  $\mu$  distincts. Ces quantités affectées de l'indice  $j$  ( $j=1,2$ ) seront spécifiques du milieu  $j$ . Soit  $r_1$ , le rayon de  $\Sigma_1$  dont le centre 0 est confondu avec l'origine des coordonnées sphériques. En un point M de la sphère le plan H (cf. chp. I) est le plan tangent en M à  $\Sigma_1$  engendré par les vecteurs  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\phi$ .

Nous nous intéressons aux effets dus à la propagation d'ondes SH émises par le point source S situé en  $r=r_s$  ( $r_s > r_1$ ),  $\theta_s=0, \phi_s=0$ . Le problème initial est de déterminer le champ des déplacements régnant dans chacun des deux domaines. Si l'on observe la symétrie de révolution du modèle autour de OS, on conçoit que les diverses grandeurs (contraintes, déplacements) décrivant l'état vibratoire SH de l'ensemble sont indépendantes de la variable  $\phi$ . En particulier, le champ des déplacements possède une seule composante non nulle  $U_\phi$  (cf.1.15). On admettra à l'avenir l'absence de force de volume et que la source induit dans le milieu infini un champ de déplacements représenté par (1.19).

La théorie des potentiels de Helmholtz jointe aux équations de mouvement données en (1.1) implique que les potentiels  $\psi_j e^{-i\omega t}$  ( $j=1,2$ ), appelé par abus de langage *champs* par la suite, doivent, d'après (1.18), vérifier :

$$(1) \quad \Delta\psi_1 + \frac{\omega^2}{C_{T1}^2} \psi_1 = 0 \quad , \quad \text{dans } 1 \quad ,$$

$$(2) \quad \Delta\psi_2 + \frac{\omega^2}{C_{T1}^2} \psi_2 = -\frac{1}{C_{T2}^2} f \quad , \quad \text{dans } 2 \quad .$$

Outre les équations ci-dessus,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont astreints à satisfaire aux conditions de radiation et d'absorption de Sommerfeld, à des conditions aux limites sur  $\Sigma_1$  de continuité des contraintes et des déplacements. Sous réserve d'une adhérence parfaite des milieux 1 et 2 sur toute la surface  $r = r_1$  ces dernières se réduisent, d'après (1.15) et (1.16), à :

$$(3) \quad \psi_1 = \psi_2 \quad , \quad \text{en } r=r_1 \quad ,$$

$$(4) \quad \mu_1 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) = \mu_2 \left( \frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{\psi_2}{r} \right) \quad , \quad \text{en } r=r_1 \quad .$$

En résumé, nous sommes contraints à chercher une solution du problème canonique, c'est à dire une solution répondant aux impératifs (1) à (4) et satisfaisant aux conditions de radiation à l'infini et d'absorption à

l'origine de Sommerfeld.

2 - SOLUTION DU PROBLEME CANONIQUE.

De la mise au point effectuée au chapitre I il ressort que certains éléments du problème canonique sont déjà connus. En effet, le champ  $\psi_i e^{-i\omega t}$  émis par la source est acquis d'après (1.24) et s'écrit :

$$(5) \quad \psi_i = \frac{if_0}{8C_{T_2} \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_V^{(1)}(x_s) \{ H_V^{(1)}(x_2) + H_V^{(2)}(x_2) \} P_n(n), \quad r_1 \leq r < r_s,$$

$$(6) \quad \psi_i = \frac{if_0}{8C_{T_2} \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_V^{(1)}(x_2) \{ H_V^{(1)}(x_s) + H_V^{(2)}(x_s) \} P_n(n), \quad r > r_s.$$

Pour tout le chapitre nous posons :

$$(7) \quad \nu = n + 1/2, \quad x_s = \frac{\omega r_s}{C_{T_2}}, \quad x_j = \frac{\omega r}{C_{T_j}} \quad (j=1,2).$$

Par ailleurs, de la nature élastique de la sphère il découle qu'une onde SH qui vient frapper la surface de celle-ci donne naissance, en général, à une onde transmise dans 1 et à une onde réfléchie vers 2. Par conséquent, le champ dans 2 est constitué d'ondes provenant directement de la source et d'ondes "restituéés" par la sphère. Ces dernières sont nécessairement de nature divergente (phase proportionnelle à  $H_V^{(1)}(x_2)$ ) et les premières de type divergent ou convergent (phase proportionnelle à  $H_V^{(2)}(x_2)$ ) selon que l'on s'intéresse à un point pour lequel  $r > r_s$  ou  $r < r_s$ . Or on observe dans (5) et (6) une partie continue et une partie discontinue. La première (nous la notons  $\psi_{i2}$ ) correspond nécessairement aux ondes incidentes sur  $\Sigma_1$ . La seconde (nous la notons  $\psi_{i1}^-$  pour  $r < r_s$  et  $\psi_{i1}^+$  pour  $r > r_s$ ) coïncide, au point P ( $r, \theta$ ), aux ondes en provenance directe de la source. Ceci nous montre que le champ "restitué" par la sphère, soit  $\psi_r e^{-i\omega t}$ , est connu (pour chaque harmonique de rang n) à une "constante" près A(n) et vaut :

---

(+) à l'exception du milieu fluide pour lequel il n'y a pas de propagation d'ondes SH ( $\mu=0$ ).

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_r = \frac{if_0}{8C_{T_2}^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(1)}(x_2) A(n) P_n(\eta) \quad , \quad r > r_1 , \\ \psi_{i_1}^- = \frac{if_0}{8C_{T_2}^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(2)}(x_2) P_n(\eta) \quad , \quad r_1 < r < r_s , \\ \psi_{i_1}^+ = \frac{if_0}{8C_{T_2}^2 \sqrt{rr_s}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(2)}(x_s) H_v^{(1)}(x_2) P_n(\eta) \quad , \quad r > r_s . \end{array} \right.$$

On peut facilement déduire de l'analyse ci-dessus la structure du champ  $\psi_2$  en tout point de 2; il est exprimé par  $\psi_{i_1}^- + \psi_r$  si  $r_1 < r < r_s$  ou  $\psi_{i_1}^+ + \psi_r$  si  $r > r_s$ . Comme les conditions aux limites sont à écrire sur la surface  $r=r_1$  nous transcrivons ci-dessous la valeur de ce champ pour  $r_1 < r < r_s$  soit :

$$(9) \quad \psi_2 = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) \{ H_v^{(2)}(x_2) + A(n) H_v^{(1)}(x_2) \} P_n(\eta) \quad , \quad r_1 < r < r_s ,$$

avec 
$$\psi_0 = \frac{if_0}{8C_{T_2}^2 \sqrt{r_s}} \quad , \quad \eta = \cos \theta .$$

De même, le champ  $\psi_1$  transmis dans 1 est connu à une constante près  $D(n)$  car il doit être proportionnel au champ incident sur  $\Sigma_1$  et rester fini en  $r=0$  donc de phase proportionnelle à  $J_v(x_1)$  d'où :

$$(10) \quad \psi_1 = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) J_v(x_1) D(n) P_n(\eta) \quad , \quad 0 < r < r_1 .$$

Dans (9) et (10) les coefficients  $A(n)$  et  $D(n)$ , à déterminer par application des conditions aux limites, sont des constantes dépendantes de  $n$  et des caractéristiques des milieux 1 et 2. Par commodité pour la suite, nous indiquons la dérivée d'une fonction par rapport à son argument par un prime et nous introduisons les notations :

$$(11) \quad [z] = \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} - \frac{3}{2z}, \quad [lz] = \frac{H'_\nu^{(l)}(z)}{H_\nu^{(l)}(z)} - \frac{3}{2z}, \quad (l=1,2)$$

$$N_{12} = \mu_1 \beta_1 (\mu_2 \beta_2)^{-1},$$

où  $N_{12}$  est l'impédance des deux milieux. Le report de (9) et (10) dans (3) et (4) nous fournit le système :

$$(12) \quad H_\nu^{(2)}(x_2) + A(n)H_\nu^{(1)}(x_2) - D(n)J_\nu(x_1) = 0,$$

$$(13) \quad H_\nu^{(2)}(x_2) [2x_2] + A(n)H_\nu^{(1)}(x_2)[1x_2] - N_{12}J_\nu(x_1)[x_1] - D(n) = 0,$$

dont les racines  $A(n)$  et  $D(n)$  s'explicitent sans difficulté,

$$(14) \quad A(n) = - \frac{H_\nu^{(2)}(x_2)}{H_\nu^{(1)}(x_2)} \left\{ \frac{[2x_2] - N_{12}[x_1]}{[1x_2] - N_{12}[x_1]} \right\},$$

$$(15) \quad D(n) = \frac{H_\nu^{(2)}(x_2)}{J_\nu(x_1)} \left\{ \frac{[1x_2] - [2x_2]}{[1x_2] - N_{12}[x_1]} \right\}.$$

Avec (14) et (15) nous connaissons à présent les champs cherchés en tout point des domaines 1 et 2.

$$(16) \quad \psi_2 = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu (H_\nu^{(1)}(x_2) H_\nu^{(2)}(x_s))$$

$$= H_\nu^{(1)}(x_s) H_\nu^{(1)}(x_2) \left( \frac{H_\nu^{(2)}(x_2)}{H_\nu^{(1)}(x_2)} \frac{[2x_2] - N_{12}[x_1]}{[1x_2] - N_{12}[x_1]} \right) P_n(\eta), \quad \text{si } r > r_s,$$

$$(17) \quad \psi_2 = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu (H_\nu^{(1)}(x_s) H_\nu^{(2)}(x_2))$$

$$= H_\nu^{(1)}(x_s) H_\nu^{(1)}(x_2) \left( \frac{H_\nu^{(2)}(x_2)}{H_\nu^{(1)}(x_2)} \frac{[2x_1] - N_{12}[x_1]}{[1x_2] - N_{12}[x_1]} \right) P_n(\eta), \quad \text{si } r_1 \leq r < r_s,$$

$$(18) \quad \psi_1 = \frac{\psi}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) J_{\nu}(x_1) \frac{H_{\nu}^{(2)}(x_2)}{J_{\nu}(x_1)} \left\{ \frac{[1 \times_2] - [2 \times_2]}{[1 \times_2] - N_{12}[x_1]} \right\} P_n(\eta), \quad 0 < r < r_1.$$

Les séries (16) à (18) suscitent quelques remarques. La première : sous ces écritures aucune interprétation physique ne peut être dégagée, la seconde a trait à leur convergence. L'utilisation des développements asymptotiques des fonctions de Hankel et de Bessel (cf. Annexe) montre que le terme général de (16) par exemple [resp. (17)] se comporte à l'infini comme  $\left(\frac{r_s}{r}\right)^{n+1} P_n(\eta)$ ,  $r > r_s$  [resp.  $\left(\frac{r}{r_s}\right)^{n+1} P_n(\eta)$ ,  $r < r_s$ ]; or puisque  $|P_n(\eta)| \leq 1$  chacune de ces séries convergent et ceci très lentement. On ne peut donc pas avoir une bonne approximation de la solution décrite par (16) et (17) en ne conservant que les premiers termes. La même remarque tient pour (18). Nous verrons au chapitre V comment remédier à cette seconde remarque par l'introduction d'une transformation intégrale. Quant à la première nous lui apportons un premier élément de réponse après avoir évalué les coefficients de réflexion et de réfraction d'une surface sphérique ce que nous faisons ci-dessous.

### 3 - COEFFICIENTS DE REFLEXION ET DE REFRACTION.

L'évaluation des coefficients de réflexion et de réfraction n'est pas spécifique du nombre de surfaces considérées ; elle ne dépend que de la géométrie de celles-ci et des caractéristiques mécaniques des milieux adjacents. Aussi nous effectuons la détermination de ces coefficients dans le cas général afin d'alléger quelque peu les autres chapitres.

Soit deux milieux fictifs  $k$  et  $j = k+1$  que l'on suppose infinis et séparés par la surface  $r=r_k$ . Pour une onde qui se propage dans le milieu  $j$  [resp.  $k$  contenant l'origine] on désigne par  $R_{jk}$  [resp.  $R_{kj}$ ] le coefficient de réflexion de cette onde sur le milieu  $k$  [resp.  $j$ ]. De même notons

$T_{jk}$  [resp.  $T_{kj}$ ] le coefficient de réfraction correspondant au passage d'une onde du milieu  $j$  [resp.  $k$ ] vers le milieu  $k$  [resp.  $j$ ].

Dans l'hypothèse d'une sphère  $\Sigma_k$  élastique, homogène et isotrope il est patent que ces coefficients ne sont pas fonction du point considéré sur la surface de celle-ci. D'après l'écriture (3) et (4) des conditions aux limites ils ne peuvent dépendre que de la variable  $r$  et des caractéristiques mécaniques des deux milieux en présence. Par analogie avec les ondes planes nous cherchons ces coefficients pour un harmonique de rang  $n$  correspondant à un champ incident unitaire sur la surface  $r=r_k$ . Introduisons la notation:

$$(19) \quad x_\ell = \beta_\ell r \quad , \quad x_\ell^k = \beta_\ell r_k \quad , \quad (\ell = k, k+1) \quad ,$$

où  $\beta_\ell$  est le nombre d'onde du milieu  $\ell$ . Il ressort, des remarques faites au chapitre I à propos des fonctions  $H_\nu^{(1)}(x)$  et  $H_\nu^{(2)}(x)$  (associées aux ondes divergentes et convergentes), que si l'on choisit l'onde incidente dans le milieu  $j$  les champs  $\phi_j e^{-i\omega t}$  et  $\phi_k e^{-i\omega t}$ , correspondant à l'harmonique de rang  $n$  régnant dans chacun des milieux  $j$  et  $k$ , doivent être choisis de la forme :

$$(20) \quad \phi_j = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \frac{H_\nu^{(2)}(x_j)}{H_\nu^{(2)}(x_j^k)} + R_{jk} \frac{H_\nu^{(1)}(x_j)}{H_\nu^{(1)}(x_j^k)} \right) P_n(\eta) \quad ,$$

$$(21) \quad \phi_k = \frac{1}{\sqrt{r}} T_{jk} \frac{H_\nu^{(2)}(x_k)}{H_\nu^{(2)}(x_k^k)} P_n(\eta) \quad .$$

La détermination de  $R_{jk}$  et de  $T_{jk}$  s'effectue en utilisant les conditions aux limites (3) et (4). Elles conduisent au système de Cramer :

$$(22) \quad 1 + R_{jk} = T_{jk} \quad ,$$

$$(23) \quad [2x_j^k] + [1x_j^k] R_{jk} + N_{kj} [2x_k^k] T_{jk} \quad ,$$

où l'indépendance  $N_{kj}$  des deux milieux est définie par :

$$(24) \quad N_{kj} = \mu_k x_k^k (\mu_j x_j^k)^{-1} \quad .$$

La solution de (22) et (23), transcrite en se souvenant de la valeur du Wronskien des fonctions de Hankel [ $W(H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z)) = -4i(\pi z)^{-1} = H_v^{(1)}(z) H_v^{(2)}(z) ([2z] - [1z])$ ], s'explicite par les relations (25).

$$(25) \quad \left[ \begin{array}{l} R_{jk} = - \frac{[2x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]}{[1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]}, \quad T_{jk} = \frac{[1x_j^k] - [2x_j^k]}{[1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]} \quad \text{ou} \\ T_{jk} = \frac{-4i}{\pi x_j^k H_v^{(1)}(x_j^k) ([1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]) H_v^{(2)}(x_j^k)} \end{array} \right.$$

La résolution d'un problème analogue (+) pour des ondes incidentes issues du milieu k conduit, sans difficulté, aux expressions (26).

$$(26) \quad \left[ \begin{array}{l} R_{kj} = - \frac{[1x_j^k] - N_{kj} [1x_k^k]}{[1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]}; \quad T_{kj} = N_{kj} \frac{[1x_k^k] - [2x_k^k]}{[1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k]} \quad \text{ou} \\ T_{kj} = \frac{-4i N_{kj}}{\pi x_j^k H_v^{(1)}(x_j^k) H_v^{(2)}(x_j^k) ([1x_j^k] - N_{kj} [2x_k^k])} \end{array} \right.$$

Notons que  $|R_{jk}| < 1$  et  $|R_{kj}| < 1$  et que de plus ces coefficients sont unitaires. Or, nous avons vu en (5) et (6) que le champ incident sur  $\Sigma_1$  n'est pas unitaire. En particulier d'après (9) il est égal à la valeur que prend la fonction  $H_v^{(2)}(x_2)$  en  $r=r_1$ . Dès lors considérons une onde dont la phase dans le milieu j est proportionnelle à  $H_v^{(2)}(x_j)$ . Sur la surface  $r=r_k$  cette phase vaut  $H_v^{(2)}(x_k)$  à partir de (20) un raisonnement simple permet d'établir que le coefficient  $R_{jk}$  doit être multiplié par le rapport "d'interaction"

$H_v^{(2)}(x_k) [H_v^{(1)}(x_j^k)]^{-1}$  pour que l'onde réfléchie ait une phase proportionnelle à  $H_v^{(1)}(x_j)$ . De même de (21) on s'assure que le coefficient  $T_{jk}$  est à multiplier par  $H_v^{(2)}(x_j^k) [H_v^{(2)}(x_k^k)]^{-1}$  pour que la phase de l'onde transmise reste  $H_v^{(2)}(x_k)$ . Un résultat similaire tient pour  $R_{kj}$  et  $T_{kj}$ . De ces constatations il se dégage la règle générale suivante:

(+) En effet les coefficients ne sont pas symétriques. Cependant on peut se dispenser de résoudre le problème en invoquant le sens de propagation des ondes et en prenant garde de bien conserver la même valeur  $N_{kj}$  de l'impédance.

Le coefficient d'interaction d'une onde avec une surface sphérique (en réflexion ou en réfraction) est une fraction ayant pour numérateur la fonction de Hankel caractéristique du sens de propagation de l'onde avant que celle-ci ne rencontre la surface de séparation des deux milieux et pour dénominateur la fonction de Hankel associée au sens de propagation de l'onde après qu'elle ait atteint la surface de séparation des milieux. L'argument de ces fonctions est le produit du rayon de la surface de discontinuité considérée par le nombre d'onde du milieu "d'émission" ou de "réception" selon que l'on s'intéresse respectivement à l'argument du numérateur ou du dénominateur.

Ces résultats nous conduisent à la définition des coefficients de réflexion et de réfraction "effectifs"  $r_{jk}$  et  $t_{jk}$  [resp.  $r_{kj}, t_{kj}$ ] adaptés à une onde incidente d'amplitude  $H_v^{(2)}(x_j^k)$  [resp.  $H_v^{(1)}(x_k^j)$ ] sur la frontière  $r=r_k$ .

$$(27) \quad r_{jk} = R_{jk} \frac{H_v^{(2)}(x_j^k)}{H_v^{(1)}(x_j^k)}, t_{jk} = T_{jk} \frac{H_v^{(2)}(x_j^k)}{H_v^{(2)}(x_k^k)}, r_{kj} = R_{kj} \frac{H_v^{(1)}(x_k^j)}{H_v^{(2)}(x_k^k)}, t_{kj} = T_{kj} \frac{H_v^{(1)}(x_k^j)}{H_v^{(1)}(x_j^k)}.$$

Du fait de la structure de (9) et (10) il est important de remarquer pour la suite que ce sont bien ces quantités qui doivent intervenir pour éventuellement rendre compte des ondes multiples réfléchies-réfractées et qui sont nécessairement contenues dans les résultats (16) à (18) comme nous l'établissons au paragraphe suivant. Observons également que

$|R_{kj}| < 1$  et  $|R_{jk}| < 1$  impliquent que nous avons aussi  $|r_{kj}| < 1$  et  $|r_{jk}| < 1$ . Voyons à présent comment ces coefficients interviennent dans  $A(n)$  et  $D(n)$ .

#### 4 - DEVELOPPEMENT DE DEBYE (METHODE CLASSIQUE).

Dans le cas d'une seule sphère séparant les milieux 1 et 2 les expressions (25) et (26) se réduisent à

$$(28) \quad R_{21} = - \frac{[2 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}]}{[1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}]}, \quad T_{21} = \frac{[1 \times \frac{1}{2}] - [2 \times \frac{1}{2}]}{[1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}]},$$

$$(28) \quad R_{12} = - \frac{[1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [1 \times \frac{1}{1}]}{[1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}]} \quad , \quad T_{12} = N_{12} \frac{[1 \times \frac{1}{1}] - [2 \times \frac{1}{1}]}{[1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}]} \quad .$$

Le but de ce paragraphe est d'asseoir un développement des solutions obtenues en (16), (17), (18) en fonction de ces coefficients. Pour ce faire partons de l'expression (14) de A(n) à laquelle nous ajoutons et retranchons  $r_{21}$ . Après quelques manipulations, reproduites en annexe, nous obtenons le nouvel arrangement (29) de A(n) :

$$(29) \quad A(n) = \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{H_v^{(1)}(x_2^1)} R_{21} + T_{21} \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{H_v^{(2)}(x_1^1)} \cdot T_{12} \frac{H_v^{(1)}(x_2^1)}{H_v^{(1)}(x_1^1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{H_v^{(1)}(x_1^1)}{H_v^{(2)}(x_1^1)} R_{12}} \quad .$$

Ceci, d'après les définitions (27), s'écrit simplement :

$$(30) \quad A(n) = r_{21} + \frac{t_{21} t_{12}}{1 - r_{12}} \quad .$$

Or, puisque  $|r_{12}| < 1$ , on peut utiliser dans (30) le développement en série de  $(1-x)^{-1}$ . Celui-ci inséré dans (14), puis reporté dans (7), nous fournit le champ restitué  $\psi_r e^{-i\omega t}$  :

$$(31) \quad \psi_r = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) \left( r_{21} + t_{21} \cdot t_{12} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12})^{q-1} \right) H_v^{(1)}(x_2) P_n(\eta), r \geq r_1 \quad .$$

L'étude de la convergence de (31) révèle que, vis à vis de l'écriture de  $(8)_1$  au moyen de (14), aucun progrès en la matière n'a été réalisé. En revanche nous détenons, avec cette nouvelle série, l'image que l'on présentait contenue dans la solution exhibée au paragraphe précédent. En effet, les premiers termes de (31) représentent, au point  $(r, \theta)$ , l'ensemble des ondes ayant subi une réflexion (coef.  $r_{21}$ ) sur la face externe de  $\Sigma_1$ . La deuxième série d'éléments ( $q=1$ ) est l'image (en  $r, \theta$ ) de la totalité des harmoniques ayant effectué la réfraction de 2 vers 1 (coef.  $t_{21}$ ) puis émergé dans le milieu 1 (coef.  $t_{12}$ ). D'une manière générale les  $p+1$ <sup>ième</sup> termes ( $q=p$ ) du développement (31) ne sont autre que l'ensemble des ondes qui,

après s'être réfractées dans le milieu 1 (coef.  $t_{21}$ ), ont exécuté (p-1) réflexions sur la face interne de  $\Sigma_1$  (coef.  $r_{21}^{p-1}$ ) avant d'émerger dans le domaine 2 (coef.  $t_{12}$ ).

Un résultat analogue à (31) peut être facilement acquis pour le champ  $\psi_1 e^{-i\omega t}$  qui (cf. annexe) s'écrit sous la forme :

$$(32) \quad D(n) = t_{21} \frac{1}{1-r_{12}} \quad \text{ou} \quad D(n) = t_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12})^{q-1} .$$

Par simple transport de (32) dans (10) il vient :

$$(33) \quad \psi_1 = \frac{2\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} vH_v^{(1)}(x_s) \left\{ t_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12})^{q-1} \right\} J_v(x_1) P_n(n), \quad 0 \leq r < r_1 .$$

Le contenu physique de  $\psi_1$  est tout aussi évident que celui inclus dans  $\psi_2$ . Les premiers termes de la série (q=1) regroupent l'ensemble des harmoniques transmis au travers de  $\Sigma_1$  dans le domaine 1 (coef.  $t_{21}$ ). La série des  $p^{\text{ièmes}}$  termes (q=p-1) abrite la totalité des ondes réfractées dans 1 et qui se sont réfléchies (p-1) fois sur la face interne de  $\Sigma_1$  (coef.  $r_{12}^{p-1}$ ).

Par ailleurs, le développement (31) est de même nature que celui obtenu par Scholte lors de son étude sur la réflexion des ondes P par une sphère fluide (voir aussi S.K. Datta (1978)). Suivant la terminologie utilisée en électromagnétisme où des développements mathématiques de même type sont rencontrés (Bremmer, Streifer et Kodis...) nous pouvons dire que (31) est le développement de Debye de la solution de notre problème.

Ceci dit la physionomie des solutions (31) et (33) n'est pas surprenante et permet de concevoir une méthode de construction directe de ces solutions qui, tout en aboutissant à la solution exacte, nous libère des conditions aux limites (3) et (4) du problème canonique.

## 5 - GENERATION DIRECTE DE LA SOLUTION.

Le raisonnement élaboré pour préciser la structure des solutions (8) et (10) peut être poursuivi quelque soit le nombre de couches. On peut donc connaître aisément la structure de la solution en tout point d'une couche quelconque comme on le verra plus loin.

Le problème que l'on s'est posé étant linéaire répond à l'évidence au principe de superposition. D'une part avec la recherche de  $A(n)$  à l'aide de (12) et (13) nous avons utilisé une première fois ce principe au niveau des harmoniques  $n$ . D'autre part, nous observons que pour un harmonique de rang  $n$  les développements de Debye, acquis en (31) et (33), correspondent en réalité à une autre superposition - celles des conditions aux limites. Ainsi il est loisible de préciser non seulement la structure des solutions mais encore de construire directement celles-ci en raisonnant d'une façon fort simple comme le dévoile l'analyse suivante .

Lorsque l'on a traité le problème de réflexion, réfraction les coefficients ont été déterminés par l'application des conditions aux limites du problème canonique. Par suite si l'on associe, à chaque impact d'une onde sur une surface, une onde réfléchie et une onde réfractée on construit, à chacun de ces impacts, un terme de la solution dans chaque domaine de part et d'autre de la frontière. Chacun de ces termes vérifie les conditions aux limites. En prenant, dans chaque domaine, la somme de ces termes après  $n$  impacts, la somme partielle effectuée vérifie, par construction, les conditions aux limites du problème canonique. Or, du fait que  $|r_{jk}| < 1$  et  $|r_{kj}| < 1$  pour toute surface, les sommes partielles sont absolument convergentes. Etant en régime harmonique, le nombre de points d'impacts est infini. Si donc on fait tendre  $n$  vers l'infini les séries ainsi constituées sont absolument convergentes et chaque élément vérifie les conditions aux limites. La somme des séries existe et vérifie aussi les conditions aux limites du problème canonique.

On a ainsi un processus simple pour atteindre directement la solution

en tout point du domaine dès lors que l'on connaît la solution de point source en espace infini et les coefficients de réflexion, réfraction. C'est ce processus que nous utilisons à présent pour déterminer la solution dans le cas de  $n$  couches, processus qui ne semble pas avoir été mis en évidence jusqu'à ce jour vraisemblablement à cause des multiples réflexions et réfractions dont de tels modèles sont le siège.

ANNEXE DU CHAPITRE II

Les résultats ci-dessous peuvent être retrouvés dans Gérard (1976) sous une présentation légèrement différente.

On note qu'avec les notations (11) on a l'identité suivante issue de l'écriture de  $J_v(z)$  en fonction de  $H_v^{(1)}(z)$  et  $H_v^{(2)}(z)$  :

$$(A_1) \quad 2J_v(z) = H_v^{(1)}(z) [1z] + H_v^{(2)}(z) [2z]$$

de (14) nous tirons en utilisant (28)

$$(A_2) \quad A(n) \frac{H_v^{(1)}(x_2^1)}{H_v^{(2)}(x_2^1)} - R_{21} = \frac{[2x_1^1] - N_{12}[2x_1^1]}{[1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1]} + \frac{N_{12}[x_1^1] - [2x_1^1]}{[1x_2^1] - N_{12}[x_1^1]}$$

En réduisant cette expression au même dénominateur on a :

$$(A_3) \quad A(n) \frac{H_v^{(1)}(x_2^1)}{H_v^{(2)}(x_2^1)} - R_{21} = \frac{N_{12} \frac{-[2x_1^1][x_1^1] - [2x_1^1][1x_2^1] + [x_1^1][1x_2^1] + [2x_1^1][2x_2^1]}{([1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1]) \{ [1x_2^1] - N_{12}[x_1^1] \}}}{}$$

Après mise en facteur au numérateur et division, de celui-ci et du dénominateur, par  $[1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1]$  il vient, compte tenu de (28) :

$$(A_4) \quad A(n) \frac{H_v^{(1)}(x_2^1)}{H_v^{(2)}(x_2^1)} - R_{21} = N_{12} T_{21} \frac{[x_1^1] - [2x_1^1]}{[1x_2^1] - N_{12}[x_1^1]}$$

On introduit l'identité (A<sub>1</sub>) dans (A<sub>4</sub>) pour  $z=x_1^1$  ce qui donne :

$$(A_5) \quad A(n) \frac{H_v^{(1)}(x_2^1)}{H_v^{(2)}(x_2^1)} - R_{21} = N_{12} T_{21} \frac{H_v^{(1)}(x_1^1) \{ [1x_1^1] - [2x_1^1] \}}{H_v^{(1)}(x_1^1) \{ [1x_2^1] - N_{12}[1x_1^1] \} + H_v^{(2)}(x_1^1) \{ [1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1] \}}$$

Il suffit de diviser numérateur et dénominateur du 2<sup>ième</sup> membre de (A<sub>5</sub>) par  $[1 \times_2^1] - N_{12} [2 \times_1^1]$  pour être conduit d'après (28) à :

$$(A_6) \quad A(n) \frac{H_v^{(1)}(\times_2^1)}{H_v^{(2)}(\times_1^1)} = R_{21} + \frac{T_{21} T_{12} H_v^{(1)}(\times_1^1) \{H_v^{(2)}(\times_1^1)\}^{-1}}{1 - R_{12} H_v^{(1)}(\times_1^1) \{H_v^{(2)}(\times_1^1)\}^{-1}} .$$

d'où l'expression (29) de A(n).

Le développement de D(n) est tout aussi simple. Partons de (15) :

$$(A_7) \quad \frac{D(n)}{2H_v^{(2)}(\times_2^1)} = \frac{1}{2J_v(\times_1^1)} \left\{ \frac{[1 \times_2^1] - [2 \times_2^1]}{[1 \times_2^1] - N_{12} [ \times_1^1 ]} \right\} .$$

On utilise au dénominateur de (A<sub>7</sub>) la décomposition de  $J_v(\times_1^1)$  couplée avec  $[1 \times_2^1]$  conjointement avec l'identité (A<sub>1</sub>) pour l'élément  $J_v(\times_1^1)[ \times_1^1 ]$ . On obtient après regroupement et mise en facteur :

$$(A_8) \quad \frac{D(n)}{2H_v^{(2)}(\times_2^1)} = \frac{[1 \times_2^1] - [2 \times_2^1]}{H_v^{(1)}(\times_1^1) \{ [1 \times_2^1] - N_{12} [ \times_1^1 ] \} + H_v^{(2)}(\times_1^1) \{ [1 \times_2^1] - N_{12} [2 \times_1^1] \}} .$$

Divisons le numérateur et le dénominateur du 2<sup>ième</sup> membre par

$H_v^{(2)}(\times_1^1) \{ [1 \times_2^1] - N_{12} [2 \times_1^1] \}$  et utilisons (28) on a :

$$(A_9) \quad D(n) = 2 \frac{T_{21} H_v^{(2)}(\times_2^1) \{H_v^{(2)}(\times_1^1)\}^{-1}}{1 - R_{12} H_v^{(1)}(\times_1^1) \{H_v^{(2)}(\times_1^1)\}^{-1}} ,$$

d'où (32) .

## CHAPITRE III

### CHAMP DE DÉPLACEMENTS ENGENDRÉ PAR L'INCIDENCE D'ONDES SH SUR UNE SPHÈRE MULTICOUCHES

*La finalité de cette étape est d'accéder aux champs de déplacements ayant investis un nombre fini de sphères concentriques soumises aux sollicitation d'ondes SH.*

*A partir de la solution de point source et des coefficients de réflexion et de réfraction, les principes dégagés du chapitre II sont mis en oeuvre pour construire directement les potentiels régissant le mouvement des divers constituants du modèle.*

#### 1 - PROBLEME CANONIQUE.

Nous adoptons le schéma d'un espace infini, noté  $m+1$ , contenant un nombre fini  $m$  de sphères concentriques  $\Sigma_k$  de rayon  $r_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ ). La sphère  $\Sigma_k$  sépare donc le milieu  $k$  du milieu  $k+1$  (fig.1) que l'on suppose adhérer parfaitement. Ces différents domaines de propriétés mécaniques distinctes sont tous élastiques, homogènes et isotropes. La source responsable de l'émission d'ondes SH, placée comme précédemment, à l'extérieur de la sphère  $\Sigma_m$  est située au point  $S$  de coordonnées  $r_s$  ( $r_s > r_m$ ),  $\theta_s = 0$ ,  $\phi_s = 0$ .

On généralise les notations du chapitre II. En particulier, la coordonnée radiale  $r$  jointe au nombre d'onde  $\beta_\ell$  du milieu  $\ell$  devant jouer un rôle privilégié, nous définissons les quantités :

$$(1) \quad x_\ell = \beta_\ell r, \quad x_s = \beta_{m+1} r_s, \quad \psi_0 = \frac{if_0}{8C_{T_{m+1}}^2 \sqrt{r_s}}, \quad \ell=1,2,\dots, m+1.$$

Notre préoccupation première est de connaître la réaction de chacun

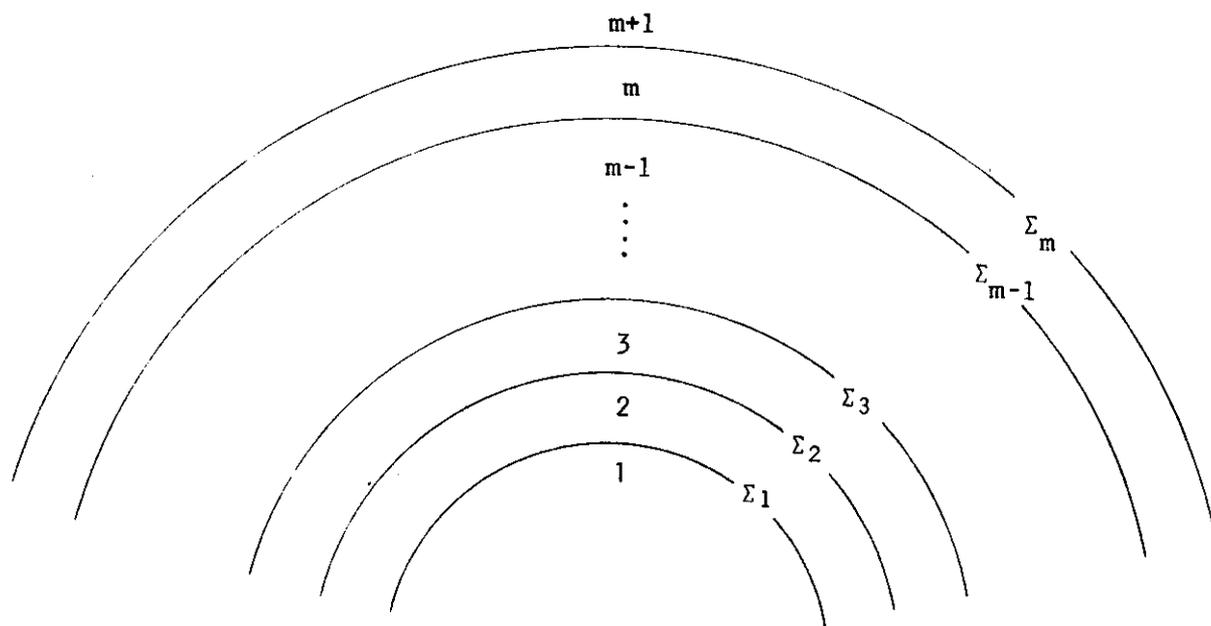


Fig.1 Modèle de milieu sphérique stratifié. La numérotation des couches et des surfaces de discontinuités  $\Sigma_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) est indiquée sur la figure.

. . . .

des milieux aux sollicitations du point S. Ceci équivaut à la recherche du champ des déplacements dans  $m+1$  domaines. Profitant de la théorie des potentiels de Helmholtz la question posée est reportée sur la détermination de  $m+1$  potentiels  $\psi_j e^{-i\omega t}$  ( $j=1,2,\dots,m+1$ ) qui, d'après (1.12) et les équations de mouvements (1.1), doivent être solutions des équations aux dérivées partielles (2) et vérifier les conditions aux limites de continuité des déplacements et des contraintes (3). En outre, la solution dans  $m+1$  doit satisfaire à la condition de radiation à l'infini de Sommerfeld et ne pas violer la condition d'absorption à l'origine dans le milieu 1.

$$(2)_1 \quad \Delta\psi_j + \frac{\omega^2}{C_{Tj}^2} \psi_j = 0 \quad , \text{ dans } j \quad , \quad (j=1,2,\dots,m) \quad ,$$

$$(2)_2 \quad \Delta\psi_{m+1} + \frac{\omega^2}{C_{T_{m+1}}^2} \psi_{m+1} = -\frac{1}{C_{T_{m+1}}^2} f \quad , \text{ dans } m+1 \quad ,$$

$$(3)_1 \quad \psi_{j+1} = \psi_j \quad , \quad \text{sur } r = r_j \quad (j=1,2,\dots,m) \quad ,$$

$$(3)_2 \quad \mu_{j+1} \left( \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial r} - \frac{\psi_{j+1}}{r} \right) = \mu_j \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - \frac{\psi_j}{r} \right) \quad , \quad \text{sur } r=r_j \quad .$$

Dans ces relations on n'utilise pas la règle de sommation sur l'indice répété. De plus, aucune force de volume ne s'exerce sur les  $m+1$  matériaux ( $f=0$ ) tandis que la densité de force représentant la source est précisée, en  $(2)_2$  , par la donnée (1.19) de  $f$ .

Bien que les solutions fondamentales des équations (2) soient connues il est manifeste que le problème ainsi défini n'est pas résolu. Il revient, par l'intermédiaire des conditions (3), à déterminer  $(2m+2)$  inconnues d'un système de Cramer. Or, de la philosophie dégagée au chapitre II, il est patent qu'une telle résolution peut être évitée en raisonnant à partir de la solution de point source (1.24) et de la connaissance des coefficients de réflexion et de réfraction "effectifs" (2.27).

## 2 - STRUCTURE DES CHAMPS.

L'ensemble des ondes venant frapper la sphère  $\Sigma_m$  engendre dans  $m+1$  un champ restitué  $\psi_r$  dont la structure est analogue à celle indiquée pour une sphère ; il suffit de remplacer dans  $(2.8)_1$  la variable  $x_2$  par  $x_{m+1}$  et nous en déduisons :

$$(4) \quad \psi_r = \frac{\psi_o}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} {}_v H_v^{(1)}(x_s) S_{m+1,m}(n) H_v^{(1)}(x_{m+1}) P_n(\eta) \quad , \quad r \gg r_m \quad ,$$

où le coefficient  $S_{m+1,m}(n)$  désigne le coefficient de "restitution" entre les milieux  $m+1$  et  $m$ . Dans une couche quelconques  $\ell$ , distincte de la première ou de la dernière ( $\ell=2,3,\dots,m$ ), il est clair que les surfaces  $\Sigma_\ell$ ,  $\Sigma_{\ell-1}$  sont le siège de réflexions et de réfractions. Seules dans la couche  $\ell$  sont à prendre en considération les ondes de type "entrantes" (dont l'amplitude, rappelons le, est proportionnelle à  $H_v^{(2)}(x_\ell)$ ) et les ondes

"sortantes" (dont il faut se souvenir que l'amplitude est un multiple de  $H_v^{(1)}(x_\ell)$ ). Il s'ensuit que pour un domaine  $\ell$  quelconque inclus entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_m$  le champ  $\psi_\ell$  est du type :

$$(5) \quad \left[ \begin{array}{l} \psi_\ell = \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) \{ H_v^{(2)}(x_\ell) B_\ell(n) \\ + H_v^{(1)}(x_\ell) C_\ell(n) \} P_n(n) , \quad r_{\ell-1} \leq r \leq r_\ell, \quad \ell=2,3,\dots,m, \end{array} \right.$$

où  $B_\ell(n)$ ,  $C_\ell(n)$  sont des constantes à déterminer.

Le milieu 1 contenant l'origine doit être traité à part. Pour ce domaine le champ  $\psi_1$  doit rester fini à l'origine (condition d'absorption) ; ceci revient à considérer la série des ondes réfléchies sur l'origine. Ainsi les coefficients  $B_\ell(n)$  et  $C_\ell(n)$  de (5) sont égaux. En les désignant par  $D(n)$  nous avons, vue la décomposition de la fonction de Bessel  $J_v(x_1)$  :

$$(6) \quad \psi_1 = 2 \frac{\psi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) J_v(x_1) D(n) P_n(n) , \quad 0 \leq r \leq r_1 \quad .$$

Le problème canonique se trouve comme prévu, reporté à la détermination des  $2m+2$  éléments  $S_{m+1,m}(n)$ ,  $B_\ell(n)$ ,  $C_\ell(n)$  et  $D(n)$  pour chaque rang  $n$ . Cela peut, bien sûr, être effectué par transfert de (4), (5) et (6) dans (3), puis résolution du système linéaire qui en découle. Rappelons que c'est précisément ce dédale de calculs fastidieux, dont l'issue ne dévoile aucune interprétation physique évidente a priori (cf. à titre d'exemple  $A(n)$  donné en (2.13) ou (3.9) donné en (1979)a.), que nous évitons dans le paragraphe ci-dessous.

### 3 - GENERATION DIRECTE DE LA SOLUTION.

Pour les études ultérieures que nous avons en vue seul le champ dans l'espace infini nous importe. On pourrait appliquer la méthode que nous proposons à l'unique recherche du champ dans ce milieu, cependant elle vaut

également pour expliciter les déplacements dans l'un quelconque des domaines de 1 à m+1. Aussi nous choisissons de préciser les champs dans tout le modèle à partir de ceux décrivant l'état des milieux m et m+1. Ce choix n'entrave en rien la généralité de notre méthode mais permet de gagner quant à la clareté de son exposé.

Les coefficients que nous devons évaluer sont donc les trois quantités  $S_{m+1,m}(n)$ ,  $B_m(n)$ ,  $C_m(n)$ . Remarquons tout d'abord que le problème étant linéaire le principe de superposition des solutions peut être utilisé. Cette observation nous permet de raisonner sur un seul harmonique (n est fixé). Par ailleurs supposons connu  $S_{m,m-1}(n)$  le coefficient de "restitution" de toutes les ondes "réémises" par l'ensemble des sphères  $\Sigma_\ell$  depuis  $\ell=1$  jusqu'à  $\ell=m-1$  (nous verrons plus loin comment s'affranchir de cette hypothèse). Du principe de conservation de l'énergie il résulte que  $|S_{m,m-1}(n)| = 1$ . Voyons comment se construit alors son homologue  $S_{m+1,m}(n)$  et les coefficients  $B_m(n)$ ,  $C_m(n)$ .

Pour des raisons d'écriture, plutôt que de faire intervenir à chaque impact d'une onde sur une surface les fonctions  $H_V^{(2)}(x)$  et  $H_V^{(1)}(x)$  associées aux ondes convergentes et divergentes, nous considérons les familles  $U_i$  et  $V_i$  assorties à droite du signe supérieur - ou + selon que l'on évoque une onde convergente (proportionnelle à  $H_V^{(2)}(x)$ ) ou divergente ( $H_V^{(1)}(x)$ ). Ainsi, à une onde  $U_0^-$  incidente sur une frontière correspond deux ondes : l'une transmise  $U_0^-$  dont l'amplitude est obtenue par le produit de  $U_0^-$  par le coefficient de réfraction effectif de l'interface, l'autre réfléchie (échange de  $U_0^-$  en  $U_0^+$ ) dont l'amplitude est acquise par multiplication de  $U_0^+$  par le coefficient de réflexion effectif de la surface (avec ces notations une réflexion correspond donc à un échange des signes + et -).

Soit  $U_0^-$  une onde incidente sur  $\Sigma_m$ , au point d'impact elle donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie vers m+1 d'amplitude  $r_{m+1,m} U_0^+ = U_1^+$ , l'autre transmise dans le milieu m d'amplitude  $t_{m+1,m} U_0^- = U_1^-$  (cf. fig. 2). Cette onde  $U_1^-$  devient incidente sur  $\Sigma_{m-1}$ . Elle excite une infinité d'ondes dans les milieux suivants m-1, m-2, ..., 1. La somme de toutes ces ondes, qui se sont réfléchies sur l'origine (transformation du  $U_0^-$  en  $U_0^+$ ), est alors

représentée par le coefficient de restitution  $S_{m,m-1}$ . Elles ont donc une amplitude donnée par  $S_{m,m-1}^{(n)} U_1^+ = V_1^+$  ( $V_1^+ = t_{m+1,m} S_{m,m-1}^{(n)} U_0^+$ ). Ces ondes  $V_1^+$  restituées par  $\Sigma_{m-1}$  deviennent à leur tour incidentes pour  $\Sigma_m$ . Au premier impact interne sur  $\Sigma_m$  il y a création de deux groupes d'ondes, l'un

$t_{m,m+1} V_1^+ = U_2^+$  réfracté vers  $m+1$ , l'autre  $r_{m,m+1} V_1^- = U_2^-$  réfléchi par  $\Sigma_m$  vers  $\Sigma_{m-1}$ . L'arrivée de ce nouveau paquet d'ondes  $U_2^-$  sur  $\Sigma_{m-1}$  excite à

son tour une série d'ondes qui va se réfléchir sur l'origine ( $U_2^-$  changée en  $U_2^+$ ). La somme de toutes ces ondes restituées par  $\Sigma_{m-1}$  est encore représentée par  $S_{m,m-1}$  de sorte qu'il y a émergence, dans le milieu  $m$ , d'ondes d'amplitude  $S_{m,m-1} U_2^+ = V_2^+$ . Ce nouveau groupe d'ondes  $V_2^+$  est à présent incident pour la face interne de  $\Sigma_m$ . Au 2<sup>ième</sup> point d'impact interne à  $\Sigma_m$  il y a donc émergence, dans le milieu  $m+1$ , d'ondes d'amplitude  $t_{m,m+1} V_2^+ = U_3^+$  et ainsi de suite.

Par récurrence, au  $p$ <sup>ième</sup> point d'impact interne sur  $\Sigma_m$ , les ondes  $V_p^+$  ( $V_p^+ = S_{m,m-1} U_p^+$ ) sont incidentes. Leur réfraction dans le domaine  $m+1$  est donc le groupe d'ondes  $U_{p+1}^+ = t_{m,m+1} V_p^+$ . Ainsi à l'issue de ce  $p$ <sup>ième</sup> impact interne sur  $\Sigma_m$  la situation dans  $m+1$  et  $m$  est la suivante : dans le milieu  $m+1$  on a une série d'ondes (cf. tableau 3)  $U_i^+$  ( $i=1,2,\dots,p+1$ ) restituées par  $\Sigma_m$  qui contribuent toutes à l'élaboration du champ  $\psi_r$  et dont la somme  $S_{m+1,m}^P$  est donnée par (7) ; l'espace  $m$  quant à lui contient deux espèces de groupes d'ondes, l'un issu de la réflexion sur  $\Sigma_m$  que nous avons noté  $U_1^-$ , l'autre restitué par  $\Sigma_{m-1}$  noté  $V_1^+$ . Seul l'ensemble de toutes les ondes du premier groupe contribue à la conception du coefficient d'amplitude que nous désignons par  $B_m^P(n)$  donné en (8). De même seule la totalité des ondes  $V_i^+$  contribue au coefficient d'amplitude induit par  $\Sigma_m$  noté  $C_m^P(n)$  répertorié en (9).

$$(7) \quad S_{m+1,m}^P(n) = \sum_{i=0}^P U_{i+1}^+ ,$$

$$(8) \quad B_m^P(n) = \sum_{i=0}^P U_{i+1}^- ,$$

$$(9) \quad C_m^P(n) = \sum_{i=1}^P V_i^+ .$$

Or, compte tenu de la valeur de chacun des éléments  $U_1^+$ ,  $U_1^-$ ,  $V_1^+$  consignée dans le tableau 3, ces relations s'explicitent en fonction des coefficients de réflexion et de réfraction en :

$$(10) \quad S_{m+1,m}^P(n) = r_{m+1,m} + t_{m+1,m} S_{m,m-1}(n) \left\{ \sum_{q=1}^P [r_{m,m+1} S_{m,m-1}(n)]^{q-1} \right\} t_{m,m+1},$$

$$(11) \quad B_m^P(n) = t_{m+1,m} \left\{ \sum_{q=1}^{P+1} [r_{m,m+1} S_{m,m-1}(n)]^{q-1} \right\},$$

$$(12) \quad C_m^P(n) = t_{m+1,m} S_{m,m-1}(n) \left\{ \sum_{q=1}^P [r_{m,m+1} S_{m,m-1}(n)]^{q-1} \right\}.$$

Plusieurs propriétés peuvent être dégagées des trois sommes partielles ci-dessus : (i) puisque nous savons que  $|r_{kj}| < 1$  ( $\forall_k, \forall_j$ ) et comme  $|S_{m,m-1}(n)| = 1$  ces séries sont absolument convergentes et leurs sommes  $S_{m+1,m}(n)$ ,  $B_m(n)$ ,  $C_m(n)$  existent.

ii) chacun des éléments composants (10), (11) et (12) vérifie les conditions aux limites du problème canonique par construction. En ce qui concerne les termes de (12) ceci est vrai d'après l'hypothèse  $S_{m,m-1}(n)$  solution. Quant aux termes de (10) et de (11) les conditions aux limites sur  $\Sigma_m$  sont satisfaites par les éléments de même rang d'après la détermination des coefficients de réflexion et de réfraction. Par suite les sommes partielles (10) à (12) vérifient les conditions (3). Ceci implique que leurs sommes qui existent d'après (i)) satisfont aussi les conditions aux limites (3).

iii) nous étudions un mouvement harmonique, le nombre des points d'impact est donc infini.

Des propriétés (i) à (iii) on conclut que la solution du problème est obtenue en faisant tendre  $p$  vers l'infini dans (10), (11) et (12) d'où :

$$(13) \quad S_{m+1,m}(n) = r_{m+1,m} + t_{m+1,m} t_{m,m+1} S_{m,m-1}(n) \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} [r_{m,m+1} S_{m,m-1}(n)]^{q-1} \right\},$$

$$(14) \quad B_m(n) = t_{m+1,m} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} [r_{m,m+1} S_{m,m-1}(n)]^{q-1} \right\},$$

$$(15) \quad C_m^{(n)} = t_{m+1,m} S_{m,m-1} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} [r_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}]^{q-1} \right\} .$$

Si nous observons que la raison  $r_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}$  de chacune des séries ci-dessus est de module inférieur à 1 on en déduit les formes (16) à (18).

$$(16) \quad S_{m+1,m}^{(n)} = r_{m+1,m} + \frac{t_{m+1,m} t_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}}{1 - r_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}} ,$$

$$(17) \quad B_m^{(n)} = \frac{t_{m+1,m}}{1 - r_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}} ,$$

$$(18) \quad C_m^{(n)} = \frac{t_{m+1,m} S_{m,m-1}^{(n)}}{1 - r_{m,m+1} S_{m,m-1}^{(n)}} .$$

En définitive, il nous reste à nous assurer que nous pouvons déterminer le coefficient de restitution  $S_{m,m-1}^{(n)}$  supposé connu au départ. Or, pour une sphère quelconque  $\Sigma_p$ , le coefficient de restitution  $S_{p+1,p}^{(n)}$  de cette frontière vers le milieu  $p$  est donné par l'analogie de la relation (13) soit :

$$(19) \quad S_{p+1,p}^{(n)} = r_{p+1,p} + t_{p+1,p} t_{p,p+1} S_{p,p-1}^{(n)} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} [r_{p,p+1} S_{p,p-1}^{(n)}]^{q-1} \right\} .$$

En effet, pour un modèle à une seule sphère nous avons déterminé au chapitre II le coefficient de restitution  $A(n) = S_{2,1}$  de la surface  $\Sigma_1$  qui est précisément donné par (19) lorsque  $p=1$  (car pour une sphère le terme  $S_{1,0}$  correspond à la réflexion sur l'origine et donc vaut + 1).  $S_{2,1}$  étant connu la relation de récurrence (19) nous fournit pour  $p=2$  le coefficient  $S_{3,2}$  correspondant au cas de deux sphères (+). Cette loi de récurrence étant supposée acquise jusqu'à l'ordre  $p=m-1$  nous avons démontré, en établissant (13) qu'elle était exacte au rang supérieur  $m$  ce qui en assure la validité quelque soit  $p=1,2,\dots,m$ . Ceci nous assure également que tous

(+) On retrouve ainsi les résultats que nous avons établi dans (1979) a par résolution du problème canonique pour deux sphères concentriques.

Les éléments des développements (13) à (15) sont connus. Ainsi la solution exacte est déterminée dans tous les domaines constituant le modèle et en particulier dans l'espace infini pour lequel le champ restitué  $\psi_r$  s'écrit :

$$(20) \quad \psi_r = \frac{\psi_o}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) \mathcal{S}_{j=1, j=m}^{j=1} \{S_{j+1, j}^{(n)}\} H_v^{(1)}(x_{m+1}) P_n(\eta) \quad , \quad r \geq r_m \quad .$$

Dans (20) le symbole  $\mathcal{S}$  indique que l'on doit substituer la quantité  $S_{j+1, j}$  par son expression (19) et ce, pour les valeurs entières, successives et décroissantes de l'indice  $j$  depuis  $j=m$  jusqu'à  $j=1$ .

Ceci étant, nous nous attacherons au chapitre V à préciser l'influence d'une couche  $p$  sur la solution globale régnant dans le milieu infini lorsque ce dernier contient un ensemble  $m$  de sphères ( $p < m$ ). Il est clair que le premier élément  $\psi_r^{(p)}$  pouvant éventuellement contribuer à détecter la présence de cette couche  $p$  est celui qui, dans le développement (20), contient le coefficient de réflexion des ondes sur la face convexe de la sphère  $\Sigma_{p-1}$ , soit  $r_{p, p-1}$ . Compte tenu de (19) et (20) cet élément s'écrit :

$$(21) \quad \psi_r^{(p)} = \frac{\psi_o}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(1)}(x_{m+1}) U^{(p)}(n) P_n(\eta) \quad , \quad r \geq r_m \quad ,$$

$$U^{(p)}(m) = t_{m+1, m} t_{m, m+1} \dots t_{p+1, p} t_{p, p+1} r_{p, p-1} \quad .$$

La méthode que nous venons d'exploiter est une illustration du principe de superposition des solutions à deux niveaux, d'abord au niveau des harmoniques et ensuite à celui des conditions aux limites. Nous nous proposons à présent de l'étendre à la détermination des champs dans le cas plus général où la source émet simultanément des ondes P et des ondes SV.



TABLEAU 3

On pose :  $r^- = r_{m,m+1}$  ;  $r^+ = r_{m+1,m}$  ;  $t^- = t_{m+1,m}$  ;  $t^+ = t_{m,m+1}$  ;  $s = S_{m,m-1}^{(n)}$  et  $U_0^- = H_v^{(2)}(x_m)$ ,  $U_0^+ = H_v^{(1)}(x_{m+1})$ ,  $V_1^+ = H_v^{(1)}(x_m)$ , d'une manière générale pour  $i \neq 0$  le signe + pour  $U_i$  correspond à  $H_v^{(1)}(x_{m+1})$  ; le signe - pour  $U_i$  remplace  $H_v^{(2)}(x_m)$  le signe + pour  $V_i$  doit être substitué par  $H_v^{(1)}(x_m)$ .

$U_1^+ = r^- U_0^+$	$U_1^- = t^- U_0^-$	$V_1^+ = t^- s U_0^+$
$U_2^+ = t^+ V_1^+ = t^+ t^- s U_0^+$	$U_2^- = r^- V_1^+ = r^- t^- s U_0^-$	$V_2^+ = s U_2^+ = t^- s (r^- s) U_0^+$
$U_3^+ = t^+ V_2^+ = t^+ t^- s (r^- s) U_0^+$	$U_3^- = r^- V_2^+ = t^- (r^- s)^2 U_0^-$	$V_3^+ = s U_3^+ = t^- s (r^- s)^2 U_0^+$
$U_4^+ = t^+ V_3^+ = t^+ t^- s (r^- s)^2 U_0^+$	$U_4^- = r^- V_3^+ = t^- (r^- s)^3 U_0^-$	$V_4^+ = s U_4^+ = t^- s (r^- s)^3 U_0^+$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	$V_p^+ = s U_p^+ = t^- s (r^- s)^{p-1} U_0^+$
$U_{p+1}^+ = t^+ V_p^+ = t^+ s t^- (r^- s)^{p-1} U_0^+$	$U_{p+1}^- = r^- V_p^+ = t^- (r^- s)^p U_0^-$	

## CHAPITRE IV

### CHAMPS DE DÉPLACEMENTS ENGENDRÉS PAR L'INCIDENCE D'ONDES P ET SV SUR UNE SPHÈRE MULTI-COUCHES

*On étend la méthode exposée au chapitre précédent au cas d'une source émettant simultanément des ondes P et SV. Après avoir posé le problème canonique et établi la structure des solutions on introduit des matrices de réflexion et de réfraction et l'on détermine le développement de Debye généralisé pour un modèle à une seule sphère élastique. On en déduit les résultats afférents au cas particulier de la sphère fluide avant de se pencher sur le modèle général à un nombre fini de sphères concentriques.*

#### 1 - LE PROBLEME CANONIQUE.

Nous avons développé au chapitre III une méthode qui permet d'acquies assez rapidement et à moindre calcul le champ des déplacements régnant dans une sphère multi-couches soumise à l'influence d'ondes SH. Nous envisageons dans ce passage son extension au cas où la source émet dans l'espace infini simultanément des ondes P et SV. Ainsi à l'issue de ce chapitre le principe de superposition nous fournira la solution globale pour un modèle soumis à la sollicitation la plus générale que l'on puisse envisager (ondes P, SV et SH).

Nous conservons la géométrie précédente d'un nombre fini  $m$  de sphères concentriques  $\Sigma_k$  de rayon  $r_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ ) dont les centres coïncident avec l'origine des coordonnées sphériques. La source est située au point S de coordonnées  $r_s$  ( $r_s > r_m$ ),  $\theta_s = 0$ ,  $\phi_s = 0$  de l'espace infini noté  $m+1$ . La symétrie de révolution est conservée (pas de dépendance en  $\phi$ ). Par ailleurs on admet une adhérence parfaite des divers domaines que l'on suppose élastiques, homogènes et isotropes mais de propriétés mécaniques distinctes ; en outre

les forces de volume sont négligées. Dès lors le problème peut être posé en ces termes : quels sont les déplacements induits dans les différents milieux et en particulier dans l'espace infini, par une émission d'ondes P et SV harmoniques, monochromatiques ? Ceci se transcrit en un problème mathématique que nous appelons canonique et qui consiste à chercher  $4m+4$  fonctions scalaires  $\phi_j, \chi_j$  solution des équations (1) et (2), satisfaisant aux conditions de radiation à l'infini et d'absorption à l'origine de Sommerfeld, vérifiant  $4m+4$  équations linéaires (3) et (4) issues des conditions aux limites qui traduisent la continuité des contraintes et des déplacements à travers les surfaces  $\Sigma_k$  (cf. chapitre I).

$$(1) \quad \Delta\phi_k + \frac{\omega^2}{C_{Lk}^2} \phi_k = 0 \quad ; \quad \Delta\chi_k + \frac{\omega^2}{C_{Tk}^2} \chi_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$(2) \quad \Delta\phi_{m+1} + \frac{\omega^2}{C_{L_{m+1}}^2} \phi_{m+1} = -\frac{\omega^2}{C_{L_{m+1}}^2} h \quad ; \quad \Delta\chi_{m+1} + \frac{\omega^2}{C_{T_{m+1}}^2} \chi_{m+1} = -\frac{\omega^2}{C_{T_{m+1}}^2} g \quad ,$$

$$(3)_1 \quad (X+1)\phi_{k+1} + n(n+1)\chi_{k+1} = (X+1)\phi_k + n(n+1)\chi_k \quad , \quad \text{sur } r=r_k \quad ,$$

$$(3)_2 \quad \frac{\partial\phi_{k+1}}{\partial\theta} + \frac{Y+m^2+4}{2} \frac{\partial\chi_{k+1}}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi_k}{\partial\theta} + \frac{Y+m^2+4}{2} \frac{\partial\chi_k}{\partial\theta} \quad , \quad \text{sur } r=r_k \quad ,$$

$$(4)_1 \quad \left[ \begin{array}{l} -\mu_{k+1} (4X-m^2)\phi_{k+1} + \mu_{k+1} n(n+1)(Y+m^2)\chi_{k+1} = \\ -\mu_k (4X-m^2)\phi_k + \mu_k n(n+1)(Y+m^2)\chi_k \quad , \quad \text{sur } r=r_k \quad , \end{array} \right.$$

$$(4)_2 \quad 2\mu_{k+1} X \frac{\partial\phi_{k+1}}{\partial\theta} - \mu_k Y \frac{\partial\chi_{k+1}}{\partial\theta} = 2\mu_k X \frac{\partial\phi_k}{\partial\theta} - \mu_k Y \frac{\partial\chi_k}{\partial\theta} \quad , \quad \text{sur } r=r_k \quad .$$

Dans (2)  $h$  et  $g$  sont les densités de force analogue à (1.19), leur présence est liée à l'existence du point source. Dans (3) et (4) il convient de se souvenir que les grandeurs  $X$  et  $Y$  définies au chapitre I s'entendent assorties du signe plus ou moins selon qu'elles sont associées (par les potentiels  $\phi$  ou  $\chi$ ) aux fonctions de Hankel de première ou seconde espèce et de l'indice  $k$  révélateur du milieu dans lequel les ondes se propagent.

Remarquons que nous connaissons déjà les solutions fondamentales de (1) et (2) vérifiant les conditions de radiation à l'infini et d'absorption à l'origine de Sommerfeld (cf. Chapitre I). Il reste donc surtout à satisfaire aux relations (3) à (4) ce qui peut être évité après avoir établi la structure des solutions objet du paragraphe ci-dessous.

### 3 - STRUCTURE DES SOLUTIONS.

Pour ce faire nous généralisons et complétons les notations des chapitres I à III en posant :

$$(5) \quad y_j = \alpha_j r ; \alpha_j = (C_{L_j})^{-1} ; y_s = \alpha_{m+1} r_s ; y_j^k = \alpha_j r_{j^k} ; j=1, 2, \dots, m+1 ; k=1, 2, \dots, m .$$

$$\phi_o = \frac{i h}{8 C_{L_{m+1}}^2 \sqrt{r_s}} , \quad \chi_o = \frac{i g}{8 C_{T_{m+1}}^2 \sqrt{r_s}} .$$

Comme pour les ondes SH il est important de bien dissocier dans la solution de point source (1.24) et (1.26) les éléments qui contribuent à une écriture discontinue de celle-ci, de ceux qui en donnent une représentation continue. Les premiers, notés  $\phi_{i1}^-$ ,  $\chi_{i1}^-$  et  $\phi_{i1}^+$ ,  $\chi_{i1}^+$  (cf. 6 à 9) sont constitués de tous les harmoniques qui arrivent directement de la source en un point  $P(r, \theta)$  respectivement plus proche de l'origine que ne l'est la source ( $r < r_s$ , phase en  $H_v^{(2)}$ ) et vice versa ( $r > r_s$ , phase en  $H_v^{(1)}$ ). Les seconds notés  $\phi_{i2}$  et  $\chi_{i2}$ , quant à eux, recouvrent la totalité des harmoniques qui semblent venir de l'origine, et ce, quelque soit la position de  $P$  et de la source ( $r > 0$ ). Par suite ces éléments sont proportionnels à tous les harmoniques qui auront eu des interactions avec les sphères du modèle (phase en  $H_v^{(1)}$  et pas de condition sur  $r$ ). Cette remarque conduit à :

$$(6) \quad \phi_{i1}^+ = \frac{2\phi_o}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(y) H_v^{(2)}(y_s) P_n(n) , \quad r > r_s ,$$

$$(7) \quad \chi_{i1}^+ = \frac{2\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x) H_{\nu}^{(2)}(x_s) P_n(\eta) \quad , r > r_s ,$$

$$(8) \quad \phi_{i1}^- = \frac{2\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(y_s) H_{\nu}^{(2)}(y) P_n(\eta) \quad , r < r_s ,$$

$$(9) \quad \chi_{i1}^- = \frac{2\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) H_{\nu}^{(2)}(x) P_n(\eta) \quad , r < r_s ,$$

$$(10) \quad \phi_{i2} = \frac{2\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(y_s) H_{\nu}^{(1)}(y) P_n(\eta) \quad , r \geq 0 ,$$

$$(11) \quad \chi_{i2} = \frac{2\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) H_{\nu}^{(1)}(x) P_n(\eta) \quad , r \geq 0 .$$

Dans ces expressions l'indice  $m+1$  est sous-entendu pour les variables  $y$  et  $x$  qui se rapportent au milieu infini. Cette simplification de notation sera dorénavant d'un usage courant. De (6) à (11) il est aisé de déduire la forme du champ dans chacun des domaines constituant le modèle.

Considérons d'abord le cas d'une seule sphère  $\Sigma_1$  de rayon  $r_1$  entourée de l'espace infini 2. Souvenons nous que lors d'une incidence d'ondes P, ou SV, sur une surface il y a couplage de ces ondes après réflexion - réfraction et, a fortiori, lorsque des ondes P et SV sont incidentes. Les deux potentiels  $\phi$  et  $\chi$  interviennent donc simultanément et le champ restitué  $(\phi_r, \chi_r)$  par la sphère est proportionnel à  $(\phi_{i2}, \chi_{i2})$ ; en désignant par  $A(n)$  et  $B(n)$  les coefficients de proportionnalité nous avons :

$$(12) \quad \phi_r = \frac{2\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(y_s) H_{\nu}^{(1)}(y) A(n) P_n(\eta) \quad , r \geq r_1 ,$$

$$(13) \quad \chi_r = \frac{2\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) H_{\nu}^{(1)}(x) B(n) P_n(\eta) \quad , r \geq r_1 .$$

Le champ  $(\phi_2, \chi_2)$  dans le milieu infini compte tenu de (6),(7),(8) et (9) est en définitive donné par (14) et (15).

$$(14) \quad \phi_2 = \phi_{il}^+ + \phi_r, \quad r > r_s ; \quad \phi_2 = \phi_{il}^- + \phi_r, \quad r < r_s,$$

$$(15) \quad \chi_2 = \chi_{il}^+ + \chi_r, \quad r > r_s ; \quad \chi_2 = \chi_{il}^- + \chi_r, \quad r < r_s.$$

De même, à l'intérieur de  $\Sigma_1$ , le champ devant rester fini à l'origine (condition d'absorption) est proportionnel à celui émis par la source  $r < r_s$ . En désignant par  $C(n)$  et  $D(n)$  les coefficients de proportionnalité on a, en partant des notations (5) prises pour  $j=1$  :

$$(16) \quad \phi_1 = \frac{\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(y_s) J_{\nu}(y_1) C(n) P_n(\eta), \quad r < r_1,$$

$$(17) \quad \chi_1 = \frac{\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) J_{\nu}(x_1) D(n) P_n(\eta), \quad r < r_1.$$

A ce stade une notation matricielle ne s'impose pas. Cependant elle sera très utile par la suite aussi nous introduisons immédiatement la matrice (18) dite de "propagation"  $P_{\ell}^{+,-}$  où le signe plus se rapporte à la fonction  $H_{\nu}^{(1)}$ , tandis que le signe moins est adjoint à la fonction  $H_{\nu}^{(2)}$ .

$$(18) \quad P_{\ell}^{+,-} = \begin{vmatrix} \frac{\phi_0}{\sqrt{r}} \nu H_{\nu}^{(1)}(y_s) H_{\nu}^{(1,2)}(y_{\ell}) P_n(\eta) & 0 \\ 0 & \frac{\chi_0}{\sqrt{r}} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_s) H_{\nu}^{(1,2)}(x_{\ell}) P_n(\eta) \end{vmatrix}.$$

Adoptons la même convention de signe que dans (18) pour les vecteurs  $\vec{\phi}_r$  et  $\vec{\phi}_{il}^{+,-}$  définis en (19).

$$(19) \quad \vec{\phi}_r = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_{il}^{+,-} = \begin{pmatrix} \phi_{il}^{+,-} \\ \chi_{il}^{+,-} \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En convenant que la matrice de propagation privée de son indice inférieur est afférente à l'espace infini, nous introduisons la matrice  $J_1$  et celle de "restitution"  $S_{2,1}$ . Ainsi les relations (14), (15), (16) et (17) se

transforment en :

$$(20)_1 \quad \vec{\phi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (P^+ \underline{I} + P^+ S_{2,1} \underline{I}) \quad , \quad r > r_s \quad ,$$

$$(20)_2 \quad \vec{\phi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (P^- \underline{I} + P^+ S_{2,1} \underline{I}) \quad , \quad r < r_s \quad ,$$

$$(21) \quad \vec{\phi}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P J_1 \underline{I} \quad , \quad 0 \leq r < r_1 \quad , \quad P = \frac{1}{2} (P^+ + P^-) \quad .$$

Il nous faut maintenant déterminer les deux matrices inconnues  $S_{2,1}$  et  $J_1$ . Ceci nécessite d'établir d'abord les matrices de réflexion et de réfraction que nous mettons en place dans ce qui suit.

### 3 - MATRICES DE REFLEXION ET DE REFRACTION.

Dans le cas d'une onde incidente P ou SV sur une interface il y a création de quatre ondes ; deux ondes réfléchies P et SV, deux ondes réfractées P et SV. Ces phénomènes de réflexion-réfraction s'accompagnent (cf. chapitre I) d'une transition d'ondes P en ondes SV et réciproquement. Par suite, pour une onde P incidente dans le milieu  $j=k+1$ , on désigne par  $r_{jk}^{PP}$  (resp.  $r_{jk}^{PS}$ ) le coefficient de réflexion sur le milieu k de cette onde en une onde P (resp. SV). Nous appelons  $t_{jk}^{PP}$  (resp.  $t_{jk}^{PS}$ ) le coefficient de réfraction d'une onde P incidente dans le milieu j en une onde P (resp. SV) réfractée dans le milieu k. De même pour une onde SV incidente dans le milieu j nous définissons le coefficient de réflexion  $r_{jk}^{SS}$  (resp.  $r_{jk}^{SP}$ ) de cette onde SV en une onde SV (resp. P) sur le milieu k. De façon analogue  $t_{jk}^{SP}$  (resp.  $t_{jk}^{SS}$ ) est le coefficient de réfraction du milieu j vers le milieu k pour la transition d'une onde incidente SV en une onde réfractée P (resp. SV).

La détermination de ces coefficients de réflexion et de réfraction

"effectifs" s'effectue en considérant le problème relatif à l'impact d'une onde incidente, successivement P, puis SV sur une surface donnée  $\Sigma_k$ , pour laquelle  $r=r_k$  et séparant deux demi-espaces. Développons à titre d'exemple la méthode pour l'harmonique n d'une onde incidente P du milieu  $j=k+1$  sur le milieu k. Hormis les complications induites pour la nécessité de considérer les deux potentiels  $\phi$  et  $\chi$  le processus est semblable à celui exposé pour les ondes SH. Soit une onde P incidente de type convergente (harmonique proportionnel à  $H_v^{(2)}$ ) et qui rencontre la surface  $\Sigma_k$ . Les ondes réfléchies engendrées sont de type divergent (harmonique proportionnel à  $H_v^{(1)}$ ) tandis que les ondes réfractées restent convergentes. On en déduit que les champs  $(\psi_j, \chi_j)$  et  $(\psi_k, \chi_k)$  régnant dans les milieux j et k sont nécessairement de la forme :

$$(22) \quad \psi_j = \frac{1}{\sqrt{r}} \{H_v^{(2)}(y_j) + r_{jk}^{PP} H_v^{(1)}(y_j)\} P_n(\eta), \quad r \gg r_k,$$

$$(23) \quad \chi_j = \frac{1}{\sqrt{r}} r_{jk}^{PS} H_v^{(1)}(x_j) P_n(\eta), \quad r \gg r_k,$$

$$(24) \quad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{r}} t_{jk}^{PP} H_v^{(2)}(y_k) P_n(\eta), \quad r \ll r_k,$$

$$(25) \quad \chi_k = \frac{1}{\sqrt{r}} t_{jk}^{PS} H_v^{(2)}(x_k) P_n(\eta), \quad r \ll r_k.$$

La détermination des quatre coefficients apparaissant dans (22) à (25) se fait en utilisant les conditions aux limites de continuité des déplacements et des contraintes sur la surface  $r=r_k$  qui, après usage des relations (3) et (4), nous conduit au système (26) à (29).

$$(26) \quad \left[ \begin{array}{l} (X_j^- + 1) H_v^{(2)}(y_j^k) + r_{jk}^{PP} (X_j^+ + 1) H_v^{(1)}(y_j^k) + n(n+1) r_{jk}^{PS} H_v^{(1)}(x_j^k) \\ - (X_k^- + 1) t_{jk}^{PP} H_v^{(2)}(y_k^k) - n(n+1) t_{jk}^{PS} H_v^{(2)}(x_k^k) = 0 \end{array} \right.$$

$$(27) \quad H_v^{(2)}(y_j^k) + r_{jk}^{PP} H_v^{(1)}(y_j^k) + \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} r_{jk}^{PS} H_v^{(1)}(x_j^k)$$

$$-t_{jk}^{pp} H_v^{(2)}(y_k^k) - \frac{Y_k^{-+m} k^{+4}}{2} t_{pk}^{ps} H_v^{(2)}(x_k^k) = 0 ,$$

$$(28) \left[ \begin{aligned} & - (4X_j^{-m} 2) H_v^{(2)}(y_j^k) - (4X_j^{+m} 2) r_{jk}^{pp} H_v^{(1)}(y_j^k) + n(n+1) (Y_j^{+m} 2) r_{jk}^{ps} H_v^{(1)}(x_j^k) \\ & + N_{kj} \{ (4X_k^{-+m} 2) t_{jk}^{pp} H_v^{(2)}(y_k^k) - n(n+1) (Y_k^{-+m} 2) t_{jk}^{ps} H_v^{(2)}(x_k^k) \} = 0 , \end{aligned} \right.$$

$$(29) \left[ \begin{aligned} & 2X_j^{-} H_v^{(2)}(y_j^k) + 2X_j^{+} r_{jk}^{pp} H_v^{(1)}(y_j^k) - Y_j^{+} r_{jk}^{ps} H_v^{(1)}(x_j^k) \\ & - N_{kj} \{ 2X_k^{-} t_{jk}^{pp} H_v^{(2)}(y_k^k) - Y_k^{-} t_{jk}^{ps} H_v^{(2)}(x_k^k) \} = 0 , \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé l'impédance  $N_{kj} = \mu_k \mu_j^{-1}$ . Rappelons que dans (26) à (29) les éléments <sup>(+)</sup> X et Y affectés des signes supérieurs plus ou moins indiquent simplement que ces grandeurs sont à évaluer respectivement avec les fonctions  $r^{-1/2} H_v^{(1)}$  ou  $r^{-1/2} H_v^{(2)}$  (cf. chapitre I). La résolution de ce système, présentée en annexe, nous fournit les coefficients de réflexion et de réfraction. La valeur précise de ceux-ci n'étant pas indispensable pour nos développements ultérieurs, nous nous dispensons de les retranscrire ici afin d'alléger quelque peu le texte.

Envisageons de même une onde SV incidente sur la frontière  $r=r_k$ . Nous sommes conduits à définir pour l'harmonique de rang n les champs suivants dans chacun des milieux j et k.

$$(30) \left[ \begin{aligned} \psi_j &= \frac{1}{\sqrt{r}} r_{jk}^{sp} H_v^{(1)}(y_j) P_n(\eta) , \quad r \geq r_k , \\ \chi_j &= \frac{1}{\sqrt{r}} \{ H_v^{(2)}(x_j) + r_{jk}^{ss} H_v^{(1)}(x_j) \} P_n(\eta) , \quad r \geq r_k ; \end{aligned} \right.$$

(+) En outre les éléments  $X_j$ ,  $Y_j$  et  $m_j^2$  relèvent du milieu j tandis que les éléments  $X_k$ ,  $Y_k$  et  $m_k^2$  sont associés au milieu k.

$$(31) \quad \begin{cases} \psi_k = \frac{1}{\sqrt{r}} t_{jk}^{sp} H_v^{(2)}(y_k) P_n(\eta) , & r \leq r_k , \\ \chi_k = \frac{1}{\sqrt{r}} t_{jk}^{ss} H_v^{(2)}(x_k) P_n(\eta) , & r \leq r_k . \end{cases}$$

L'obtention des nouveaux coefficients figurant dans (30) et (31) s'effectue en utilisant les conditions aux limites (3) et (4) qui engendrent un système linéaire voisin de celui décrit par (26) à (29) [voir annexe]. Par ailleurs, par application du principe classique de conservation de l'énergie (cf. Roseau, ch.7) il découle les propriétés (32) relatives à ces coefficients de réflexion et de réfraction :

$$(32) \quad \begin{aligned} |r_{jk}^{pp}| < 1 ; |r_{jk}^{ps}| < 1 ; |r_{jk}^{pp}|^2 + |r_{jk}^{ps}|^2 + |t_{jk}^{pp}|^2 + |t_{jk}^{ps}|^2 = 1 , \quad \forall j, \forall k , \\ |r_{jk}^{sp}|^2 + |r_{jk}^{ss}|^2 + |t_{jk}^{sp}|^2 + |t_{jk}^{ss}|^2 = 1 . \end{aligned}$$

Appliquons le principe de superposition. Il est clair que la somme des champs définis en (22), (23) et (30) d'une part, en (24), (25) et (31) d'autre part fournit le champ résultant de l'incidence simultanée d'une onde P et d'une onde SV sur la surface  $r=r_k$ . Pour un harmonique de rang n nous en déduisons ainsi les matrices de réflexion  $R_{jk}$  et de réfraction  $T_{jk}$ .

$$(33) \quad R_{jk} = \begin{vmatrix} r_{jk}^{pp} & r_{jk}^{sp} \\ r_{jk}^{ps} & r_{jk}^{ss} \end{vmatrix} ; \quad T_{jk} = \begin{vmatrix} t_{jk}^{pp} & t_{jk}^{sp} \\ t_{jk}^{ps} & t_{jk}^{ss} \end{vmatrix} .$$

Par analogie avec les notations (18) et (19) nous introduisons les matrices (34) de propagation  $p_\ell^{+,-}$  et les vecteurs  $\vec{\psi}_j$  (composantes  $\psi_j, \chi_j$ ),  $\vec{\chi}_k$  (composantes  $\psi_k, \chi_k$ ).

$$(34) \quad p_\ell^{+,-} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} H_v^{(1,2)}(y_\ell) P_n(\eta) , & 0 \\ 0 , & \frac{1}{\sqrt{r}} H_v^{(1,2)}(x_\ell) P_n(\eta) \end{vmatrix} .$$

Ainsi les champs dans les milieux j et k s'écrivent sous la forme condensée:

$$(35) \quad \vec{\psi}_j = p_j^- \vec{I} + p_j^+ \mathbf{R}_{jk} \vec{I}, \quad r > r_k; \quad \vec{\psi}_k = p_k^- \mathbf{T}_{jk} \vec{I}, \quad r < r_k.$$

Par inversion des indices  $k$  et  $j$  dans (33) définissons les matrices de réflexion  $\mathbf{R}_{kj}$  et de réfraction  $\mathbf{T}_{kj}$  dont les coefficients sont obtenus en résolvant un problème analogue(†) à celui que nous venons de traiter quand les ondes incidentes sur la frontière  $r=r_k$  sont issues non plus du milieu  $j$  mais du milieu  $k$ . Connaissant à présent les différentes matrices régissant les phénomènes de réflexion et de réfraction nous déterminons ci-dessous les matrices  $S_{2,1}$  et  $J_1$ .

#### 4 - GENERATION DIRECTE DE LA SOLUTION POUR UNE SPHERE ELASTIQUE.

##### 4.1. Cas des ondes incidentes P et SV

Le problème étant linéaire nous utilisons le principe de superposition des solutions à plusieurs niveaux comme au chapitre III, d'abord au niveau de l'harmonique de rang  $n$  puis au niveau des réflexions - réfractions. Ainsi le principe général de la méthode n'est pas altéré.

Des ondes incidentes P (phase en  $H_v^{(2)}(y_2)$ ) et SV (phase en  $H_v^{(2)}(x_2)$ ) sur la face externe de  $\Sigma_1$  excitent quatre ondes réfléchies (2 ondes P et 2 ondes SV) et quatre ondes réfractées (2 ondes P, 2 ondes SV). D'après l'étude du paragraphe 3, l'amplitude des premières est proportionnelle à la matrice de réflexion  $\mathbf{R}_{21}$  et contribue à la constitution de la matrice  $S_{2,1}$  (fig.4). Les secondes sont représentées, en amplitude, par la matrice  $\mathbf{T}_{21}$  et vont se réfléchir sur l'origine. Après cette réflexion elles deviennent incidentes (avec l'amplitude  $\mathbf{T}_{21}$ ) sur la face concave de  $\Sigma_1$ . Au premier impact interne sur  $\Sigma_1$  il y a de nouveau création de deux groupes d'ondes ; l'un A réfracté (multiplication de l'amplitude par  $\mathbf{T}_{12}$ ) d'amplitude  $t_1 = \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{12}$ , l'autre B réfléchi (multiplication de l'amplitude  $\mathbf{R}_{12}$ ) d'amplitude

---

(†) Cela peut être évité si l'on prend soin de bien conserver la même définition de l'impédance  $N_{kj}$  des deux milieux  $k$  et  $j$  et en prenant garde à l'inversion des ondes convergentes et des ondes divergentes en regard du phénomène de réflexion - réfraction.

$r_1 = \mathbf{T}_{21} \mathbf{R}_{12}$ . Ces ondes, d'amplitude  $r_1$ , deviennent (après réflexion sur l'origine) incidentes sur la face interne de  $\Sigma_1$  etc... Par récurrence, au  $q^{\text{ième}}$  point d'impact interne sur  $\Sigma_1$  les ondes incidentes sur la face concave de  $\Sigma_1$  ont pour amplitude  $r_{q-1} \mathbf{T}_{21} (\mathbf{R}_{12})^{q-1}$ . Il y a en ce point réfraction d'ondes d'amplitude  $t_q = \mathbf{T}_{21} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \mathbf{T}_{12}$  dans le milieu 2.

A ce stade de l'analyse, la totalité des ondes restituées dans le milieu 2 par la sphère  $\Sigma_1$ , est égale à la somme de toutes les ondes réfractées dans ce milieu à chaque point d'impact (coef.  $t_i$ ), augmentée des ondes directement réfléchies par  $\Sigma_1$ . Elles constituent donc le coefficient de restitution  $S_{2,1}^{(q)}$  défini par ces  $q$  premières interactions avec  $\Sigma_1$ .

$$(36) \quad S_{2,1}^{(q)} = \mathbf{R}_{21} + \mathbf{T}_{21} \sum_{s=1}^q (\mathbf{R}_{12})^{s-1} \mathbf{T}_{12} .$$

De même l'ensemble des ondes prisonnières de  $\Sigma_1$  a une amplitude proportionnelle à  $J_1^{(q)}$  somme des amplitudes  $r_i$  augmentée des ondes directement réfléchies d'où :

$$(37) \quad J_1^{(q)} = \mathbf{T}_{21} \sum_{s=1}^{q+1} (\mathbf{R}_{12})^{s-1} .$$

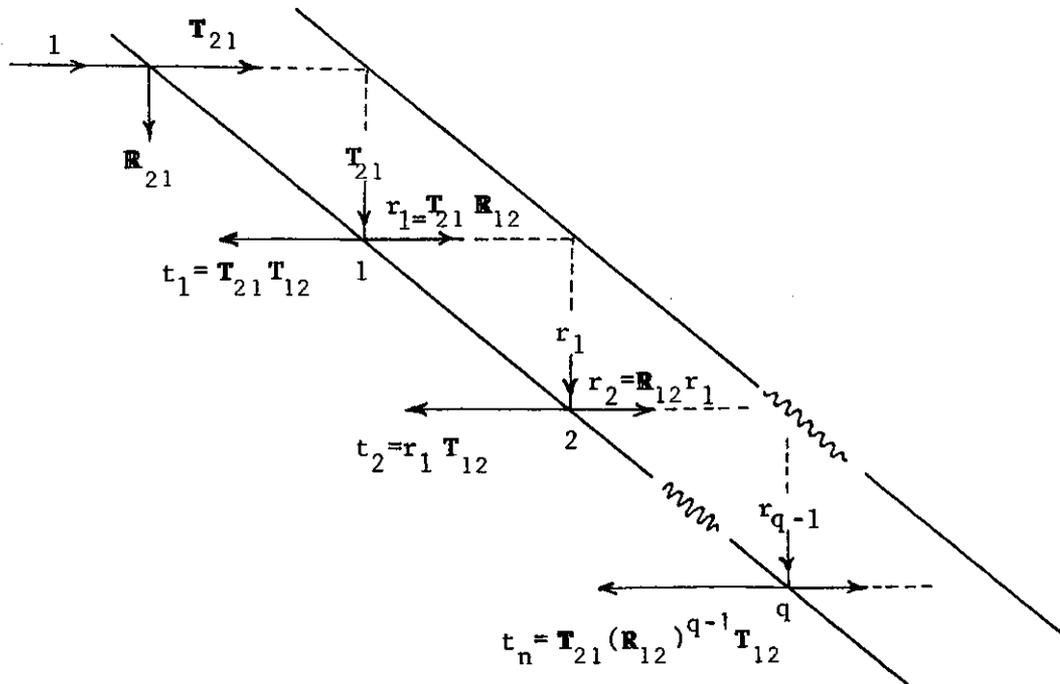


Fig. 4. Illustration schématique des réflexions et réfractions multiples.

Ce faisant, les sommes partielles (36) et (37) possèdent les propriétés suivantes :

(i) les éléments de même rang vérifient les conditions aux limites du problème canonique par définition même de ceux-ci. Il en résulte que

$S_{21}^{(q)}$  et  $J_1^{(q)}$  satisfont également les conditions aux limites (3) et (4).

(ii) puisque nous savons, d'après (32), que les coefficients  $r_{jk}^{pp}$ ,  $r_{jk}^{ps}$ ,  $r_{kj}^{sp}$ ,  $r_{kj}^{ss}$  sont de module inférieur à 1 quelque soit j et k les séries (36), (37) sont absolument convergentes. Leurs sommes  $S_{2,1}$  et  $J_1$  existent et s'obtiennent en faisant tendre le nombre de points d'interaction q vers l'infini.

(iii) comme nous étudions un régime d'ondes harmoniques le nombre de points d'interaction des ondes avec  $\Sigma_1$  est infini.

Il découle des propriétés énoncées en i), ii) et iii) que les valeurs des matrices  $S_{2,1}$  et  $J_1$  sont acquises en faisant tendre q vers l'infini respectivement dans (36) et (37), et sont bien la solution du problème canonique.

$$(38) \quad S_{21} = R_{21} + T_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{12})^{q-1} T_{12} ,$$

$$(39) \quad J_1 = T_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{12})^{q-1} .$$

L'application du théorème de Cayley-Hamilton permet en outre de condenser (38) et (39) en (40) où  $E$  est la matrice unité.

$$(40) \quad S_{21} = R_{21} + T_{21} (E - R_{12})^{-1} T_{12} ; J_1 = T_{21} (E - R_{12})^{-1} .$$

Le report des relations (38) et (39) ou (40) dans (20) et (21) nous fournit la solution exacte du problème canonique écrite en (41), (42) et (43).

$$(41) \quad \vec{\phi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P^+ \underset{\sim}{I} + P^+ [ R_{21} + T_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{12})^{q-1} T_{12} ] \underset{\sim}{I} \} , \quad r > r_s ,$$

$$(42) \quad \vec{\phi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P^- \vec{I} + P^+ [\mathbf{R}_{21} + \mathbf{T}_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \mathbf{T}_{12}] \vec{I} \} , \quad r_1 \leq r < r_s ,$$

$$(43) \quad \vec{\phi}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P \{ \mathbf{T}_{21} \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \} , \quad 0 \leq r < r_1 .$$

Abordons maintenant le cas plus simple d'une source émettant uniquement soit des ondes P soit des ondes SV.

#### 4.2. Cas des ondes incidentes P seules ou SV seules.

Il n'est pas difficile d'extraire de la solution globale précédente celle qui correspond à des ondes incidentes P seules. En effet dans ce cas l'unique modification faisant suite à une telle émission se situe au niveau de la première interaction des ondes avec  $\Sigma_1$ . En ce point il ne peut y avoir que deux transitions (à la réflexion comme à la réfraction) l'une d'ondes P en ondes SV, l'autre d'ondes P en ondes P. Dans les matrices de réflexion  $\mathbf{R}_{21}$  et de réfraction  $\mathbf{T}_{21}$  nous devons donc annuler les coefficients  $r_{21}^{rp}$ ,  $r_{21}^{ss}$ ,  $t_{21}^{sp}$  et  $t_{21}^{ss}$ . Ceci constitue les matrices de réflexion  $\mathbf{R}_{21}^P$  et de réfraction  $\mathbf{T}_{21}^P$  définies en (46). Après ce premier point d'interaction sur la face convexe de  $\Sigma_1$  il régné dans le milieu 1 à la fois des ondes P et des ondes SV comme dans le cas général. Les matrices  $\mathbf{R}_{12}$  et  $\mathbf{T}_{12}$  ne sont pas modifiées. Il en résulte que pour une émission d'ondes P seules, les relations (38) et (39) sont encore valables à condition d'y substituer les matrices  $\mathbf{R}_{21}$  et  $\mathbf{T}_{21}$  respectivement par  $\mathbf{R}_{21}^P$  et  $\mathbf{T}_{21}^P$ . Après report de ces modifications dans (41) à (43) la solution globale dans les milieux 1 et 2 est donnée par :

$$(44)_1 \quad \vec{\phi}_2^P = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P^+ \vec{I}^P + P^+ [\mathbf{R}_{21}^P + \mathbf{T}_{21}^P \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \mathbf{T}_{12}] \vec{I} \} , \quad r > r_s ,$$

$$(44)_2 \quad \vec{\phi}_2^P = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P^- \vec{I}^P + P^+ [\mathbf{R}_{21}^P + \mathbf{T}_{21}^P \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \mathbf{T}_{12}] \vec{I} \} , \quad r_1 \leq r < r_s ,$$

$$(45) \quad \vec{\phi}_1^P = \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ \mathbf{T}_{21}^P \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \right\} \vec{I} \quad , \quad 0 \leq r < r_1 \quad ,$$

avec

$$(46) \quad \mathbf{R}_{21}^P = \begin{pmatrix} r_{21}^{PP} & 0 \\ r_{21}^{PS} & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{T}_{21}^P = \begin{pmatrix} t_{21}^{PP} & 0 \\ t_{21}^{PS} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{I}^P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

De même, dans le cas où la source n'émet que des ondes SV la solution dans les deux milieux s'obtient en remarquant que les coefficients de réflexion  $r_{21}^{PP}$ ,  $r_{21}^{PS}$  et de réfraction  $t_{21}^{PP}$ ,  $t_{21}^{PS}$  sont nuls. Ceci conduit aux matrices de réflexion et de réfraction  $\mathbf{R}_{21}^S$  et  $\mathbf{T}_{21}^S$  recensées en (49). Le transfert de ces matrices dans (38) et (39) aboutit à la solution afférente aux seules ondes SV incidentes sur  $\Sigma_1$  :

$$(47) \quad \vec{\phi}_2^S = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} P^+ \vec{I}^S \\ P^- \vec{I}^S \end{matrix} + P^+ [\mathbf{R}_{21}^S + \mathbf{T}_{21}^S \sum_{q=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \mathbf{T}_{12}] \vec{I} \right\} \quad , \quad \begin{matrix} r > r_s \\ r_1 \leq r < r_s \end{matrix}$$

$$(48) \quad \vec{\phi}_1^S = \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ \mathbf{T}_{21}^S \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{R}_{12})^{q-1} \right\} \vec{I} \quad , \quad 0 \leq r \leq r_1$$

$$(49) \quad \mathbf{R}_{21}^S = \begin{pmatrix} 0 & r_{21}^{SP} \\ 0 & r_{21}^{SS} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{T}_{21}^S = \begin{pmatrix} 0 & t_{21}^{SP} \\ 0 & t_{21}^{SS} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{I}^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Si l'on se souvient qu'en théorie linéaire il existe un moyen simple pour passer d'un milieu élastique à un milieu fluide, il est clair que ces résultats englobent ceux d'une inclusion liquide. Aux fins de comparaison avec la littérature existante le passage à la limite fluide est donc souhaitable.

#### 4.3. Cas d'une sphère fluide.

Puisqu'un milieu fluide peut être caractérisé par  $\mu=0$  les ondes de cisaillement ne se propagent pas dans un tel matériau. Il en résulte que

les coefficients de réfraction associés à une transition d'ondes P, ou SV, en ondes SV dans le domaine 1 sont nuls. De même les coefficients de réflexion ou de réfraction adjoints à la transition d'ondes SV, issues de 1, en ondes P ou SV, vers les milieux 1 ou 2 n'existent pas. Pour des ondes incidentes P sur une sphère fluide, les matrices de réflexion et de réfraction (33) prennent l'aspect particulièrement simple :

$$(50) \quad \mathbf{R}_{21}^F = \begin{pmatrix} r_{21}^{PP} & 0 \\ r_{21}^{PS} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{21}^F = \begin{pmatrix} t_{21}^{PP} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{12}^F = \begin{pmatrix} t_{12}^{PP} & 0 \\ t_{12}^{PS} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{12}^F = \begin{pmatrix} r_{12}^{PP} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La solution dans chacun des deux domaines se déduit des relations (44) et (45) en y introduisant les quantités (50) au lieu et place des éléments définis en (46). Le champ  $\vec{\phi}_r$  restitué dans 2 et celui  $\phi_1$  régnant dans 1 s'explicitent, après développement des produits matriciels, sous la forme :

$$(51) \quad \left[ \begin{aligned} \phi_r &= \frac{2\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(y_s) H_v^{(1)}(y) \{ r_{21}^{PP} \\ &+ t_{21}^{PP} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12}^{PP})^{q-1} t_{12}^{PP} \} P_n(\eta), \quad r \geq r_1, \end{aligned} \right.$$

$$(52) \quad \left[ \begin{aligned} \chi_r &= \frac{2\chi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(1)}(x) \{ r_{21}^{PS} \\ &+ t_{21}^{PP} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12}^{PP})^{q-1} t_{12}^{PS} \} P_n(\eta), \quad r \geq r_1, \end{aligned} \right.$$

$$(53) \quad \phi_1 = \frac{2\phi_0}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} v H_v^{(1)}(y_s) J_v(y_1) \{ t_{21}^{PP} \sum_{q=1}^{\infty} (r_{12}^{PP})^{q-1} \} P_n(\eta), \quad 0 \leq r < r_1 .$$

En se rappelant que les fonctions sphériques  $h_{v-1/2}^{(j)}(z)$  se déduisent des fonctions cylindriques  $H_v^{(j)}(z)$  par l'égalité  $h_{v-1/2}^{(j)}(z) = (2\pi/z)^{-1/2} H_v^{(j)}(z)$ , on constate que les résultats (51) et (52) sont en parfait accord avec ceux obtenus par Scholte, Roseau... après résolution classique du problème

canonique puis développement. Les travaux de ces auteurs sont complétés ici par la donnée (53) du champ dans l'inclusion fluide également acquise par S.K.Datta (1978) [après résolution du problème canonique puis développement]. Observons que sans faire de nouveau calcul nous détenons avec (46) et (47) la solution correspondant à l'incidence d'ondes SV seules, tandis que (41) à (43) fournissent avec le concours de (50) les résultats du cas plus général des ondes incidentes simultanément P et SV sur une sphère fluide que Scholte, Roseau, Datta n'ont pas abordés.

Par ailleurs, en acoustique sous-marine Brill et Überall (1971) ont traité le problème d'un cylindre élastique immergé dans un liquide et soumis à l'influence d'ondes de pression, planes, harmoniques, d'extension infinie. La solution qu'ils obtiennent est acquise par la technique des systèmes de Cramer puis développée en séries de Debye par des calculs laborieux s'appuyant sur la formule du binôme. Bien que les coefficients de réflexion et de réfraction d'un cylindre et d'une sphère soient distincts, on peut constater, qu'à des différences de notation près, leur développement (22) à l'intérieur du cylindre élastique est en accord avec (45) établi ici par une voie différente. De plus les ondes S ne se propageant pas dans un milieu fluide notre solution générale (44) englobe aussi leur résultat (25).

Voyons à présent comment se présente la solution pour un modèle à un nombre fini de sphères élastiques concentriques.

##### 5 - GENERATION DIRECTE DE LA SOLUTION POUR DES ONDES P ET SV INCIDENTES SUR UN NOMBRE FINI DE SPHERES CONCENTRIQUES.

Nous généralisons les résultats qui précèdent en considérant le cas des ondes P et SV incidentes sur un nombre fini  $m$  de sphères concentriques. Le modèle du chapitre III est conservé. Bien que l'on puisse déterminer uniquement le champ dans le milieu infini nous montrons comment on peut l'atteindre dans chacun des domaines constituant le modèle.

Dans la couche  $m$  comprise entre  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_{m-1}$  le champ "émis" par  $\Sigma_m$  est constitué d'ondes de type convergent - [donc de phase proportionnelle à  $H_v^{(2)}(y_m)$  ou  $H_v^{(2)}(x_m)$  selon qu'il s'agit d'ondes P ou d'ondes SV] - et nous désignons par  $J_{m+1,m}^{(n)}$  la matrice représentative des amplitudes de ces ondes. De même les ondes provenant du milieu  $m-1$  à travers  $\Sigma_{m-1}$  sont de nature divergente - [phase proportionnelle à  $H_v^{(1)}(y_m)$  ou  $H_v^{(1)}(x_m)$ ] - et nous désignons par  $J_{m-1,m}^{(n)}$  la matrice des amplitudes associées à ces mouvements. Enfin, les ondes restituées par  $\Sigma_m$  vers le milieu  $m+1$  sont aussi de nature divergente. Ces remarques justifient la structure des champs restitués dans  $m+1$  soit  $\vec{\phi}_r$  et ceux ayant investi la couche  $m$  soit  $\vec{\phi}_m$  :

$$(54) \quad \vec{\phi}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P^+ S_{m+1,m} I \} \quad , \quad r \geq r_m \quad ,$$

$$(55) \quad \vec{\phi}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \{ P_m^- J_{m+1,m} + P_m^+ J_{m-1,m} \} I \quad , \quad r_{m-1} \leq r \leq r_m \quad .$$

Dans (55) nous avons adopté la notation générale :

$$\vec{\phi}_\ell = \begin{pmatrix} \phi_\ell \\ \chi_\ell \end{pmatrix} \quad , \quad \ell = 1, 2, \dots, m \quad .$$

Supposons connue la matrice de restitution  $S_{m,m-1}$  des  $m-1$  sphères internes à  $\Sigma_{m-1}$ . Cette unique hypothèse, dont nous nous affranchirons plus tard, suffit à démarrer le processus récurrent de détermination des trois matrices inconnues de (54) et (55).

En effet, au premier impact des ondes P et SV sur la face convexe de  $\Sigma_m$  sont créés deux groupes d'ondes, l'un réfléchi vers  $m+1$ , d'amplitude donnée par la matrice de réflexion  $R_{m+1,m} = U_1$ , l'autre transmis dans  $\Sigma_m$  d'amplitude  $T_{m+1,m} = V_1$ . Ce dernier groupe  $V_1$  devient incident sur  $\Sigma_{m-1}$  et excite une infinité d'ondes, dans tous les milieux compris entre 1 et  $m-1$ , qui vont se réfléchir sur l'origine et dont la somme, connue par hypothèse, vaut  $S_{m,m-1}$ . Après le 1<sup>er</sup> impact sur  $\Sigma_{m-1}$  on a donc les ondes  $S_{m,m-1} V_1 = W_1$  qui deviennent incidentes sur  $\Sigma_m$ . Au premier impact de celles-ci sur  $\Sigma_m$  il y a transmission vers le milieu  $m+1$ , d'ondes d'amplitude  $T_{m,m+1} W_1 = U_2$  et réfraction vers  $\Sigma_{m-1}$  d'ondes d'amplitude  $R_{m,m+1} W_1 = V_2$ .

Ces dernières ( $V_2$ ) sont à leur tour incidentes sur  $\Sigma_{m-1}$  et le processus se perpétue. Par récurrence, au  $q^{\text{ième}}$  point d'impact interne sur  $\Sigma_m$  les ondes incidentes sont représentées par  $W_{q-1} = S_{m,m-1} V_{q-1}$ . Elles sont d'une part réfractées vers le milieu  $m+1$  en des ondes d'amplitude proportionnelle à  $T_{m,m+1} W_{q-1} = U_q$  et d'autre part réfléchies vers  $\Sigma_{m-1}$  en des ondes d'amplitudes  $R_{m,m+1} W_{q-1} = V_q$ .

La situation dans les milieux  $m+1$  et  $m$  est donc la suivante à l'issue des  $q$  premiers points d'impact sur la face concave de  $\Sigma_m$ . Puisque l'on est en régime harmonique, le champ restitué dans  $m+1$  par  $\Sigma_m$  est constitué de la somme  $S_{m+1,m}^{(q)}$  de toutes les ondes  $U_j$  ( $j=2,3,\dots,q$ ) excitées par les différentes interactions, et est augmenté des ondes  $U_1$  directement réfléchies par  $\Sigma_m$  d'où :

$$(56) \quad S_{m+1,m}^{(q)} = \sum_{j=1}^{q+1} U_j = R_{m+1,m} + T_{m+1,m} \sum_{j=1}^q (R_{m,m+1})^{j-1} T_{m+1,m} .$$

De même dans la couche  $m$  la totalité des ondes  $V_j$  réfléchies par  $\Sigma_m$  est représentée par  $J_{m+1,m}^{(q)}$  tandis que l'ensemble des ondes  $W_j$  restituées par  $\Sigma_{m-1}$  a pour somme  $J_{m-1,m}^{(q)}$  :

$$(57) \quad J_{m+1,m}^{(q)} = \sum_{j=1}^{q+1} V_j = T_{m+1,m} \sum_{j=1}^q (R_{m,m+1} S_{m,m-1})^{j-1} ,$$

$$(58) \quad J_{m-1,m}^{(q)} = \sum_{j=1}^q W_j = T_{m+1,m} S_{m,m-1} \sum_{j=1}^q (R_{m,m+1} S_{m,m-1})^{j-1} .$$

Les remarques (i) à (iii) du paragraphe 4 sont toujours valables de sorte que les éléments cherchés s'obtiennent en faisant tendre le nombre  $q$  de points d'interactions vers l'infini d'où :

$$(59) \quad S_{m+1,m} = R_{m+1,m} + T_{m+1,m} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{m,m+1} S_{m,m-1})^{q-1} T_{m+1,m} ,$$

$$(60) \quad J_{m+1,m} = T_{m+1,m} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{m,m+1} S_{m,m-1})^{q-1} ,$$

$$(61) \quad J_{m-1,m} = T_{m+1,m} S_{m,m-1} \sum_{q=1}^{\infty} [R_{m,m+1} S_{m,m-1}]^{q-1} .$$

Le théorème de Cayley-Hamilton peut être exploité pour écrire ces relations sous une forme plus compacte. Ainsi (59) par exemple devient :

$$(62) \quad S_{m+1,m} = R_{m+1,m} + T_{m+1,m} (E - R_{m,m+1} S_{m,m-1})^{-1} T_{m,m+1} .$$

Il nous reste à préciser  $S_{m,m-1}$ . Or, par récurrence nous établissons qu'entre deux domaines  $q+1, q$  le coefficient de restitution est donné par :

$$(63) \quad S_{q+1,q} = R_{q+1,q} + T_{q+1,q} \sum_{s=1}^{\infty} [R_{q,q+1} S_{q,q-1}]^{s-1} T_{q,q+1} .$$

Nous avons obtenu (63) dans le cas particulier de deux matériaux (en posant  $S_{1,0} = E$ ). Par ailleurs ayant supposé (63) vrai jusqu'au milieu  $m$  nous démontrons avec (59) que la relation est valable entre les domaines  $m+1$  et  $m$  et par conséquent, quelque soit le domaine envisagé. On note aussi que le raisonnement effectué pour établir (60) et (61) vaut pour une zone  $q$  quelconque du modèle. Il s'ensuit que l'introduction de (59) à (61) respectivement dans (54) et (55), compte tenu de (63), engendre la solution dans les diverses régions. Nous l'écrivons :

$$(64) \quad \vec{\phi}_r = \sum_{n=0}^{\infty} \{P^+ \mathcal{S}_{j=m+1}^1 (S_{j,j-1})\} I_{\sim} , \quad r \geq r_m ,$$

$$(65) \quad \vec{\phi}_q = \sum_{n=0}^{\infty} \{P^- \mathcal{S}_{j=q}^1 (J_{j+1,j})^{+P^+}_q \mathcal{S}_{j=q}^1 (J_{j-1,j})\} I_{\sim} , \quad r_{q+1} \leq r \leq r_q ,$$

$\forall q = 2, 3, \dots, m.$

Le champ dans le milieu 1 est, rappelons le, donné en (43).

Dans le cas d'une source émettant soit des ondes P, soit des ondes SV, par un raisonnement déjà développé au § 4.2, on sait que les matrices  $R_{m+1,m}$  et  $T_{m+1,m}$  doivent être modifiées. Par analogie avec (46) et (49),

lorsque l'une des deux sortes d'ondes P ou SV est incidente sur  $\Sigma_m$  nous définissons :

$$(66) \quad \mathbf{R}_{m+1,m}^P = \begin{pmatrix} r_{m+1,m}^{PP} & 0 \\ r_{m+1,m}^{PS} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{m+1,m}^P = \begin{pmatrix} t_{m+1,m}^{PP} & 0 \\ t_{m+1,m}^{PS} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(67) \quad \mathbf{R}_{m+1,m}^S = \begin{pmatrix} 0 & r_{m+1,m}^{SP} \\ 0 & r_{m+1,m}^{SS} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{m+1,m}^S = \begin{pmatrix} 0 & t_{m+1,m}^{SP} \\ 0 & t_{m+1,m}^{SS} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les solutions exhibées en (64) et (65) sont toujours variables à condition de faire apparaître, selon les circonstances, (66) ou (67) dans (63) dès que  $q=m$ . Enfin les résultats concernant des sphères fluides non miscibles et ceux afférents à toute combinaison de matériaux élastiques-fluides concentriques se déduisent de manière évidente de l'étude ci-dessus.

Par ailleurs, l'acquis de ce chapitre joint à celui des précédents nous apporte, par application du principe de superposition, le champ dans l'ensemble du modèle lorsque celui-ci est soumis à la sollicitation la plus générale d'une source émettant simultanément des ondes P et S. En particulier pour ce qui est du milieu infini la solution est obtenue par superposition de (3.20) et (64). La relation (64), utilisée dans le cas de deux surfaces concentriques, complète les résultats de l'équipe de Überall qui s'est intéressée à l'influence d'une onde plane de pression d'extension infinie émise dans un fluide où se trouve immergé deux cylindres élastiques concentriques renfermant un liquide Flax 1977 ou son pendant sphérique Murphy 1979.

Ce faisant, le champ d'application des résultats ci-dessus ne se borne pas au seul cadre des modèles à sphères concentriques. Le processus qui nous a guidé vers (3.20) et (64) s'appuie essentiellement sur trois points.

- 1) L'utilisation de la méthode des variables séparées qui nous a permis, entre-autre, de réduire le problème à une dimension d'espace -

la variable  $r$  - .

- 2) Nous avons un modèle pour lequel les diverses frontières sont des surfaces coordonnées concentriques - ce qui est essentiel pour une écriture simple des conditions aux limites - .
- 3) Nous avons bénéficié de la décomposition du champ des déplacements en deux grandes classes de mouvements - les mouvements plans (ondes P et SV) et anti-plan (ondes SH).

Sous réserve de connaître les coefficients de réflexion et de réflexion des surfaces limitant les différentes zones de modèles pour lesquels les conditions 1 à 4 seraient vérifiées, nous avons avec (3.20) et (64) la solution de ceux-ci. Par suite, notre étude s'étend au cas des schémas de cylindres, sphéroïdes, ellipsoïdes... .

De plus, avec le théorème de correspondance, nous avons aussi la solution pour des milieux viscoléastiques linéaires dans le plan de la transformation de Laplace. Ainsi le développement de Debye, qui n'a pas été obtenu par Gaunaurd et Überall (1979) dans leur étude d'un cylindre constitué d'un milieu de Kelvin-Voigt, est maintenant acquis avec (41) à (43) dans le cas d'une inclusion ((64), fournit la solution dans le cas de plusieurs domaines concentriques).

Les développements de Debye que nous avons établis convergent tous mais très lentement. Pour avoir des résultats significatifs il faudrait donc sommer un très grand nombre de termes de ces séries. Aussi nous allons voir comment, en se saisissant de certaines intégrales dans le plan complexe, cette difficulté peut être surmontée en nous limitant au cas simple des ondes SH.

ANNEXE DU CHAPITRE IV

Comme pour les ondes SH, pour résoudre (26) à (29) il est avantageux d'introduire au lieu et place des coefficients de réflexion et de réfraction "effectifs"  $r_{jk}^{PP}, \dots, t_{jk}^{PP}, \dots$ , les coefficients unitaires  $R_{jk}^{PP}, T_{jk}^{PS}, \dots$  définis par :

$$(A1) \quad R_{jk}^{PP} = \frac{H_v^{(1)}(y_j^k)}{H_v^{(2)}(y_j^k)} r_{jk}^{PP} ; \quad R_{jk}^{PS} = \frac{H_v^{(1)}(x_j^k)}{H_v^{(2)}(y_j^k)} r_{jk}^{PS} ; \quad R_{jk}^{SP} = \frac{H_v^{(1)}(y_j^k)}{H_v^{(2)}(x_j^k)} r_{jk}^{SP} ;$$

$$R_{jk}^{SS} = \frac{H_v^{(1)}(x_j^k)}{H_v^{(2)}(x_j^k)} r_{jk}^{SS} ; \quad T_{jk}^{PP} = \frac{H_v^{(2)}(y_j^k)}{H_v^{(2)}(y_j^k)} t_{jk}^{PP} ; \quad T_{jk}^{PS} = \frac{H_v^{(2)}(x_j^k)}{H_v^{(2)}(y_j^k)} t_{jk}^{PS} ;$$

$$T_{jk}^{SP} = \frac{H_v^{(2)}(y_j^k)}{H_v^{(2)}(x_j^k)} t_{jk}^{SP} ; \quad T_{jk}^{SS} = \frac{H_v^{(2)}(x_j^k)}{H_v^{(2)}(x_j^k)} t_{jk}^{SS} .$$

Il en résulte l'écriture du système (26) à (29) sous la forme :

$$(X_j^- + 1) + R_{jk}^{PP}(X_j^+ + 1) + n(n+1)R_{jk}^{PS} - (X_k^- + 1)T_{jk}^{PP} - n(n+1)T_{jk}^{PS} = 0 ;$$

$$1 + R_{jk}^{PP} + \frac{1}{2}(Y_j^+ + m_j^2 + 4)R_{jk}^{PS} - T_{jk}^{PP} - \frac{1}{2}(Y_k^- + m_k^2 + 4)T_{jk}^{PS} = 0 ;$$

$$(4X_j^- - m_j^2) + (4X_j^+ - m_j^2)R_{jk}^{PP} - n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2)R_{jk}^{PS} - N_{kj}(4X_k^- - m_k^2)T_{jk}^{PP}$$

$$(A2) \quad + N_{kj}n(n+1)(Y_k^- + m_k^2)T_{jk}^{PS} = 0 ;$$

$$2X_j^- + 2X_j^+ R_{jk}^{PP} - Y_j^+ R_{jk}^{PS} - N_{kj}2X_k^- T_{jk}^{PP} + N_{kj}Y_k^- T_{jk}^{PS} = 0 ;$$

Après regroupement des termes et simplifications les solutions du système homogène (A2) sont :

$$(A3) \quad R_{jk}^{PP} = -1 + \frac{(X_j^+ - X_j^-) [\Delta_{11} - 4\Delta_{13} - 2\Delta_{14}]}{\Delta}$$

$$(A4) \quad \left[ \begin{aligned} R_{jk}^{PS} &= \frac{(X_j^+ - X_j^-)}{\Delta} \{ (m_j^2 - m_k^2 N_{kj}) [2n(n+1) + Y_k^-(1 - N_{kj}) + m_k^2 + 4] \\ &+ X_k^-(1 - N_{kj}) [2n(n+1)N_{kj}(Y_k^- + m_k^2) - 4N_{kj}Y_k^- + m_j^2(Y_k^- + m_k^2 + 4)] \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A5) \quad \left[ \begin{aligned} T_{jk}^{PS} &= \frac{(X_j^+ - X_j^-)}{\Delta} \{ [n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2) - 2Y_j^+] [2X_k^-(N_{kj} - 1) + Y_j^+ + m_j^2 + 4] \\ &+ (N_{kj}m_k^2 - m_j^2) [2n(n+1) + Y_j^+] + X_k^-(1 - N_{kj})m_j^2(Y_j^+ + m_j^2 + 4) \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A6) \quad \left[ \begin{aligned} T_{jk}^{PP} &= \frac{(X_j^+ - X_j^-)}{2\Delta} \{ [2n(n+1) - m_j^2] [(Y_j^+ + m_j^2)(2n(n+1) + N_{kj}Y_k^-) \\ &- (Y_k^- + m_k^2) \{ Y_j^+ + 2n(n+1)N_{kj} \} + 4(N_{kj}Y_k^- - Y_j^+)] + 8n(n+1) \sqrt{\frac{(N_{kj} - 1)}{(Y_k^- + m_k^2)}} \} , \end{aligned} \right.$$

Dans les expressions (A3) à (A6) on a posé :

$$(A7) \quad \left[ \begin{aligned} 2\Delta_{11} &= N_{kj} \{ (Y_k^- + m_k^2 + 4) [2n(n+1)X_k^-(Y_j^+ + m_j^2) - Y_j^+(4X_k^- - m_k^2)] \\ &+ 2n(n+1)(Y_k^-m_j^2 - Y_j^+m_k^2) \} + N_{kj}^2 \{ - (Y_j^+ + m_j^2 + 4)2n(n+1)X_k^- (Y_k^- + m_k^2) \\ &+ (4X_k^- - m_k^2)Y_k^-(Y_j^+ + m_j^2 + 4) \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A8) \quad \left[ \begin{aligned} 4\Delta_{13} &= (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) [ (X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) + 4N_{kj} X_k^- n(n+1) ] \\ &+ 2(N_{kj} Y_k^- - Y_j^+) [ (X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2n(n+1) ] , \end{aligned} \right.$$

$$(A9) \quad \left[ \begin{aligned} 2\Delta_{14} &= n(n+1)N_{kj} \{ (Y_k^- + m_k^2) [ 4X_k^- - m_k^2 + 2n(n+1) ] - (Y_j^+ + m_j^2 + 4)(Y_k^- + m_k^2)(X_k^- + 1) \} \\ &- (Y_j^+ + m_j^2)(4X_k^- - m_k^2) \} \\ &+ n(n+1) \{ (Y_j^+ + m_j^2) [ (X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2n(n+1) ] \} \end{aligned} \right.$$

et où le déterminant  $\Delta$  du système vaut :

$$(A10) \quad \Delta = (X_j^+ - X_k^-) \Delta_{11} + 2(N_{kj} X_k^- - X_j^+) [ 2\Delta_{13} + \Delta_{14} ] + (m_j^2 - N_{kj} m_k^2) \Delta_{13} .$$

Dans le cas d'une onde incidente SV sur  $\Sigma_k$  le report des champs (30) et (31) dans les conditions aux limites (3) et (4) conduit au système :

$$(A11) \quad \left[ \begin{aligned} &(X_j^+ + 1)r_{jk}^{sp} H_v^{(1)}(Y_j^k) + n(n+1) [ H_v^{(2)}(x_j^k) + r_{jk}^{ss} H_v^{(1)}(x_j^k) ] \\ &- (X_k^- + 1)t_{jk}^{sp} H_v^{(2)}(Y_k^k) - n(n+1)t_{jk}^{ss} H_v^{(2)}(x_k^k) = 0 ; \\ &r_{jk}^{sp} H_v^{(1)}(Y_j^k) + \frac{Y_j^- + m_j^2 + 4}{2} H_v^{(2)}(x_j^k) + \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} r_{jk}^{ss} H_v^{(1)}(x_j^k) \\ &- \frac{Y_k^- + m_k^2 + 4}{2} t_{jk}^{ss} H_v^{(2)}(x_k^k) - t_{jk}^{sp} H_v^{(2)}(y_k^k) = 0 ; \\ &- (4X_j^+ - m_j^2)r_{jk}^{sp} H_v^{(1)}(y_j^k) + n(n+1) [ (Y_j^- + m_j^2) H_v^{(2)}(x_j^k) \\ &+ (Y_j^+ + m_j^2) r_{jk}^{ss} H_v^{(1)}(x_j^k) ] - N_{kj} \{ - (4X_k^- - m_k^2)t_{jk}^{sp} H_v^{(2)}(x_k^k) \\ &+ n(n+1)(Y_k^- + m_k^2)t_{jk}^{ss} H_v^{(2)}(x_k^k) \} = 0 ; \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} 2X_j^+ r_{jk}^{sp} H_v^{(1)}(y_j^k) - Y_j^- H_v^{(2)}(x_j^k) - Y_j^+ r_{jk}^{ss} H_v^{(1)}(x_j^k) \\ - N_{kj} \{ 2X_k^- t_{jk}^{sp} H_v^{(2)}(y_k^k) - Y_k^- t_{jk}^{ss} H_v^{(2)}(x_k^k) \} = 0 ; \end{array} \right.$$

En introduisant les coefficients unitaires définis en (A1) on obtient le système homogène :

$$(A12) \left[ \begin{array}{l} (X_j^+ + 1) R_{jk}^{sp} + n(n+1) [1 + R_{jk}^{ss}] - (X_k^- + 1) T_{jk}^{sp} - n(n+1) T_{jk}^{ss} = 0 , \\ R_{jk}^{sp} + \frac{Y_j^- + m_j^2 + 4}{2} + \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} R_{jk}^{ss} - T_{jk}^{sp} - \frac{Y_k^- + m_k^2 + 4}{2} T_{jk}^{ss} = 0 , \\ - (4X_j^+ - m_j^2) R_{jk}^{sp} + n(n+1) [(Y_j^- + m_j^2) + (Y_j^+ + m_j^2) R_{jk}^{ss}] \\ - N_{kj} \{ - (4X_k^- + m_k^2) T_{jk}^{sp} + n(n+1) (Y_k^- + m_k^2) T_{jk}^{ss} \} = 0 , \\ 2X_j^+ R_{jk}^{sp} - Y_j^- - Y_j^+ R_{jk}^{ss} - N_{kj} \{ 2X_k^- T_{jk}^{sp} - Y_k^- T_{jk}^{ss} \} = 0 . \end{array} \right.$$

Après simplification on trouve pour solution du système (A12) :

$$(A13) \left[ \begin{array}{l} R_{jk}^{sp} = \frac{n(n+1)(Y_j^- - Y_j^+)}{2\Delta} \left\{ N_{kj}^2 [2n(n+1)X_k^- (Y_k^- + m_k^2) - Y_k^- (4X_k^- - m_k^2)] \right. \\ + N_{kj} [(2Y_j^- + m_j^2) \{ X_k^- (Y_k^- + m_k^2 + 4) + Y_k^- \} + Y_k^- (4X_k^- + m_k^2 + 2n(n+1) + 8)] \\ \left. - (2Y_j^- + m_j^2) [(X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2n(n+1)] \right\} , \end{array} \right.$$

$$(A14) \quad T_{jk}^{sp} = - \frac{(Y_j^- - Y_j^+) n(n+1) N_{kj}^2}{\Delta} Y_k^- (X_j^+ + 1) (Y_k^- + m_k^2) \\ + \frac{(Y_j^- - Y_j^+) n(n+1) N_{kj}}{2\Delta} \{ (Y_k^- + m_k^2) (X_j^+ + 1) [2(Y_j^- + Y_k^-) + m_j^2 + 4 - 2n(n+1)] \\ - Y_k^- (4X_j^+ - 2n(n+1) - m_j^2) \}$$

$$(A14) \left[ \begin{aligned} & + \frac{(Y_j^- - Y_j^+)n(n+1)}{2\Delta} \{ (Y_k^- + m_k^2) [2n(n+1)X_j^+ - X_j^+(m_j^2 + 4)] + 2n(n+1)Y_k^- \\ & + (2Y_j^- + m_j^2) [4X_j^+ - m_j^2 + n(n+1)] + n(n+1)m_j^2 \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A15) \left[ \begin{aligned} T_{jk}^{ss} &= \frac{Y_j^+ - Y_j^-}{2\Delta} N_{kj} \{ (4X_k^- - m_k^2) [(X_j^+ + 1)(Y_j^- + m_j^2 + 4) - (Y_j^- + 2n(n+1))] \\ & + 2n(n+1)X_k^+ [-1 + (X_j^+ + 1)(Y_j^- + m_j^2) + 4X_j^+ - m_j^2 + 2n(n+1)] \} \\ & + \frac{Y_j^+ - Y_j^-}{2\Delta} \{ n(n+1) [(X_j^+ + 1)(m_j^2 Y_j^- + m_j^4 + 4m_j^2 - 2(Y_j^- + m_j^2)(X_k^- + 1)) + 2n(n+1)(X_k^- + 1 - n(n+1))] \\ & + (4X_j^+ - m_j^2 + 2n(n+1)) [n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2 + 4) - (m_j^2 + 4)(X_k^- + 1)] \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A16) \quad R_{jk}^{ss} = -1 + \frac{(Y_j^- - Y_j^+) \{ \Delta_{12} + 2n(n+1)\Delta_{13} + 2\Delta_{14} \}}{2\Delta} ,$$

où l'on a posé le déterminant  $\Delta$  du système :

$$(A17) \left[ \begin{aligned} 2\Delta &= - (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) \Delta_{12} - 2n(n+1) [Y_j^+ + m_j^2 - N_{kj} (Y_k^- + m_k^2)] \Delta_{13} \\ & + 2(N_{kj} Y_k^- - Y_j^+) \Delta_{14} , \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(A18) \left[ \begin{aligned} \Delta_{12} &= (X_j^+ + 1) N_{kj}^2 \{ Y_k^- (4X_k^- - m_k^2) - 2n(n+1) X_k^- (Y_k^- + m_k^2) \} \\ & + N_{kj} \{ Y_k^- (X_k^- + 1) [m_j^2 - 4X_j^+ + 2n(n+1) X_j^+] + 2n(n+1) X_k^- (m_j^2 + X_j^+ m_k^2) \} , \end{aligned} \right.$$

$$(A19) \left[ \begin{aligned} \Delta_{13} &= N_{kj} \{ X_j^+ [Y_k^- + X_k^- (Y_k^- + m_k^2 + 4)] + X_k^- (m_k^2 + 4 - 2n(n+1)) \} \\ & - X_j^+ [(X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2n(n+1)] , \end{aligned} \right.$$

$$2\Delta_{14} = (4X_j^+ - m_k^2) [(X_k^- + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2(n+1)n] \\ + N_{kj} \{ 2n(n+1)(X_k^- - X_j^+)(Y_k^- + m_k^2) - (4X_k^- - m_k^2) [(X_j^+ + 1)(Y_k^- + m_k^2 + 4) - 2n(n+1)] \}$$

De même que précédemment dans le cas d'une onde P incidente sur  $\Sigma_k$  issue du milieu k le système homogène qui fournit les coefficients de réflexion et de réfraction unitaires est :

$$(X_k^+ + 1) + (X_k^- + 1)R_{kj}^{PP} + n(n+1)R_{kj}^{PS} - (X_j^+ + 1)T_{kj}^{PP} - n(n+1)T_{kj}^{PS} = 0 ;$$

$$1 + R_{kj}^{PP} + \frac{Y_k^- + m_k^2 + 4}{2} R_{kj}^{PS} - T_{kj}^{PP} - \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} T_{kj}^{PS} = 0 ;$$

$$N_{kj}(4X_k^+ - m_k^2) + N_{kj}(4X_k^- - m_k^2)R_{kj}^{PP} - N_{kj}(n+1)n(Y_k^- + m_k^2)R_{kj}^{PS}$$

$$- (4X_j^+ - m_j^2)T_{kj}^{PP} + n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2)T_{kj}^{PS} = 0 ;$$

$$2N_{kj}X_k^+ + 2N_{kj}X_k^- R_{kj}^{PP} - N_{kj}Y_k^- R_{kj}^{PS} - 2X_j^+ T_{kj}^{PP} + Y_j^+ T_{kj}^{PS} = 0 .$$

La solution est :

$$R_{kj}^{PP} = -1 + \frac{(X_k^- - X_k^+) [\Delta_{11} - 4\Delta_{13} - 2\Delta_{14}]}{\Delta} ,$$

$$R_{kj}^{PS} = \frac{(X_k^- - X_k^+)}{\Delta} \{ (m_k^2 N_{kj} - m_j^2) [2n(n+1) + Y_j^+ + (Y_j^+ + m_j^2 + 4)((1 - N_{kj}) + 1)] \\ + X_k^- (N_{kj} - 1) [2n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2) - 4Y_j^+ + (Y_j^+ + m_j^2 + 4)N_{kj}m_k^2] \} ,$$

$$T_{kj}^{PP} = \frac{(X_k^- - X_k^+)}{\Delta} N_{kj} (m_k^2 + 4 - 2n(n+1)) \{ N_{kj} Y_k^- (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) \\ - (Y_j^+ - N_{kj} Y_k^-) (Y_k^- + m_k^2 + 4) + 2n(n+1) [Y_j^+ + m_j^2 - N_{kj} (Y_k^- + m_k^2)] \} ,$$

$$\left[ \begin{aligned} T_{kj}^{ps} &= \frac{(X_k^- - X_k^+)}{2\Delta} N_{kj} \{ X_j^+ (1 - N_{kj}) [(Y_k^- + m_k^2 + 2)(2n(n+1) - m_k^2 - 4) - 2(m_k^2 + 4)] \\ &+ [4(1 - N_{kj})X_j^+ + N_{kj}m_k^2 - m_j^2][m_k^2 + 4 - 2n(n+1)] \} , \end{aligned} \right.$$

où le déterminant du système  $\Delta$  vaut :

$$\Delta = (X_k^- - X_j^+) \Delta_{11} + 2(X_j^+ - N_{kj} X_k^-) [2\Delta_{13} + \Delta_{14}] + (m_k^2 N_{kj} - m_j^2) \Delta_{13} ,$$

avec

$$\left[ \begin{aligned} 2\Delta_{11} &= (Y_k^- + m_k^2 - Y_j^+ - m_j^2) [Y_j^+ (4X_j^+ - m_j^2) - 2n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2)] \\ &+ n(n+1) \{ (Y_j^+ + m_j^2 + 4) [N_{kj} (Y_k^- + m_k^2) (Y_j^+ + 2X_j^+ - Y_k^-) - 2X_j^+ (Y_j^+ + m_j^2)] \\ &+ 2N_{kj} (Y_j^+ m_k^2 - Y_k^- m_j^2) \} , \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} 4\Delta_{13} &= (Y_k^- + m_k^2 - Y_j^+ - m_j^2) [(X_j^+ + 1)(Y_j^+ + m_j^2 + 4) + 4n(n+1)X_j^+] \\ &+ (Y_j^+ - N_{kj} Y_k^-) [(X_j^+ + 1)(Y_j^+ + m_j^2 + 4) - 2n(n+1)] , \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} 2\Delta_{14} &= n(n+1) \left\{ (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) [(X_j^+ + 1)(Y_j^+ + m_j^2) - (4X_j^+ - m_j^2)] \right. \\ &\left. + [N_{kj} (Y_k^- + m_k^2) - (Y_j^+ + m_j^2)] [(X_j^+ + 1)(Y_j^+ + m_j^2 + 4) - 2n(n+1)] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Le système à résoudre pour des ondes SV incidentes dans le milieu  $k$  sur  $\Sigma_k$  est :

$$\left[ \begin{aligned} n(n+1) + n(n+1)R_{kj}^{ss} + (X_k^- + 1)R_{kj}^{sp} - (X_j^+ + 1)T_{kj}^{sp} - n(n+1)T_{kj}^{ss} &= 0 , \\ \frac{Y_k^+ + m_k^2 + 4}{2} + \frac{Y_k^- + m_k^2 + 4}{2} R_{kj}^{ss} + R_{kj}^{sp} - T_{kj}^{sp} - \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} T_{kj}^{ss} &= 0 , \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & N_{kj} n(n+1)(Y_k^+ + m_k^2) + N_{kj} n(n+1)(Y_k^- + m_k^2) R_{kj}^{ss} - (4X_k^- - m_k^2) R_{kj}^{sp} \\
 & + (4X_j^+ - m_j^2) T_{kj}^{sp} - n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2) T_{kj}^{ss} = 0 \quad , \\
 & - N_{kj} Y_k^+ - N_{kj} Y_k^- R_{kj}^{ss} + 2X_k^- N_{kj} R_{kj}^{sp} - 2X_j^+ T_{kj}^{sp} + Y_j^+ T_{kj}^{ss} = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

La solution est :

$$R_{kj}^{ss} = -1 + \frac{(Y_k^+ - Y_k^-) [\Delta_{12} - 2N_{kj} n(n+1) \Delta_{13} - 2N_{kj} \Delta_{14}]}{2\Delta} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 R_{kj}^{sp} & = \frac{Y_k^- - Y_k^+}{2\Delta} \{ N_{kj}^2 (2Y_k^+ + m_k^2) [(X_j^+ + 1)(Y_j^+ + m_j^2 + 4) - 2n(n+1)] \\
 & + N_{kj} [-(Y_j^+ + m_j^2) \{ (X_j^+ + 1)(2Y_k^+ + m_k^2 - 2n(n+1)) + 2n(n+1)m_j^2 + 4 \}] \\
 & + Y_j^+ \{ 2n(n+1)Y_j^+ - 4(X_j^+ + 1) \} - (2Y_k^+ + m_k^2)(4X_j^+ - m_j^2) ] \\
 & + Y_j^+ (4X_j^+ - m_j^2) - 2n(n+1)X_j^+ (Y_j^+ + m_j^2) \} \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{jk}^{sp} & = \frac{n(n+1)}{2\Delta} [(X_k^- + 1) Y_j^+ + 2n(n+1) X_k^- N_{kj}] [Y_k^- (1 - N_{kj}) (Y_j^+ + m_j^2) + N_{kj} Y_k^+ (m_k^2 - Y_j^+ - m_j^2)] \\
 & + \frac{n(n+1)}{\Delta} (Y_j^+ - N_{kj} Y_k^-) (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) [(X_k^- + 1)(Y_j^+ + m_j^2) + 4X_k^- - m_k^2] \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{jk}^{ss} & = \frac{N_{kj}^2}{2\Delta} \{ (Y_k^+ - Y_k^-) [(X_j^+ - X_k^-) (-Y_k^+ (X_k^- + 1)(4X_j^+ - m_j^2) + 2n(n+1)m_k^2)] \\
 & - 4n(n+1) X_k^- ((X_j^+ + 1)(Y_k^+ + m_k^2 + 4) - 2n(n+1)) \} \\
 & + \frac{N_{kj} (Y_k^- - Y_k^+)}{2\Delta} \{ (Y_k^+ + m_k^2 + 4) [(X_j^+ + 1)(2X_j^+ - 2X_k^- + m_k^2 - m_j^2 + 2n(n+1)(X_k^- N_{kj} - X_j^+)) \\
 & + 4X_j^+ - 4X_k^-] + (X_k^- - X_j^+) (2X_j^+ - m_j^2) \} + \frac{n(n+1)}{\Delta} X_j^+ (Y_k^+ - Y_j^-) (m_k^2 - 4X_k^-) \quad ,
 \end{aligned}$$

où l'on a posé le déterminant  $\Delta$  du système égal à :

$$\left[ \begin{aligned} 2\Delta &= (Y_j^+ + m_j^2 - Y_k^- - m_k^2) \Delta_{12} + 2n(n+1) [N_{kj} (Y_k^- + m_k^2) \\ &\quad - (Y_j^+ + m_j^2)] \Delta_{13} + 2[N_{kj} Y_k^- - Y_j^+] \Delta_{14} \quad , \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\left[ \begin{aligned} \Delta_{12} &= 2n(n+1)(Y_j^+ + m_j^2) [X_k^- N_{kj} - X_j^+ + X_j^+ X_k^- (N_{kj} - 1)] \\ &\quad + (4X_j^+ - m_j^2) [Y_j^+ + X_k^- (1 + 2n(n+1)N_{kj})] - (4X_k^- - m_k^2) [(X_j^+ + 1)Y_j^+ - 2n(n+1)X_j^+] \end{aligned} \right.$$

$$\Delta_{13} = X_j^+ (Y_j^+ + m_j^2 + 4) [X_k^- (2N_{kj} - 1) - X_j^+] + Y_j^+ (X_j^+ - X_k^-) + 2n(n+1) (X_j^+ - X_k^- N_{kj})$$

$$\left[ \begin{aligned} \Delta_{14} &= n(n+1) (X_k^- - X_j^+) (Y_j^+ + m_j^2) + \left( \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} - n(n+1) \right) [4X_j^+ - 4X_k^- + m_k^2 - m_j^2] \\ &\quad - \left( \frac{Y_j^+ + m_j^2 + 4}{2} \right) (X_j^+ m_k^2 + X_k^- m_j^2) \quad . \end{aligned} \right.$$

## CHAPITRE V

### QUELQUES ASPECTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS

Ce qui suit est exclusivement consacré à dégager des valeurs asymptotiques des solutions explicitées aux chapitres II et III. Les trois premiers paragraphes correspondent à l'étude de la sphère parfaitement rigide dont l'avantage réside en la mise en place, à propos d'un exemple simple, de la transformation de Watson. Celle-ci est utilisée directement dans le cas des sphères élastiques aux paragraphes 4 et 5.

#### 1 - TRANSFORMATION DE WATSON : SPHERE PARFAITEMENT RIGIDE.

Le support de ce paragraphe n'est certes pas très réaliste. Il a cependant l'avantage de permettre la mise en place, à propos d'un exemple très simple, d'une méthode d'analyse dans le plan complexe qui sera utilisée directement à l'avenir.

Pour cette première étude asymptotique, nous considérons le mouvement engendré par des ondes SH dans le cas particulier le plus simple des modèles à une couche: celui de l'espace infini (noté 2) contenant une sphère  $\Sigma_1$  parfaitement rigide de rayon  $r=r_1$ . Le milieu 1 étant parfaitement rigide, il n'y a qu'une seule condition à la limite de déplacement nul à vérifier sur la surface  $r=r_1$ . Elle nous conduit au champ global  $\psi_2$  dans le milieu infini sous la forme <sup>(†)</sup> :

$$(1) \quad \psi_2 = \psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} v g_j (v, x_s, x_2, x) P_n(\cos \theta) \quad , j = 1, 2 ;$$

---

(†) On peut aussi remarquer l'absence d'ondes transmises dans le milieu 1 ce qui implique  $T_{21} = 0$  et, d'après (2.22),  $R_{21} = -1$ ; en utilisant (2.29) dans (2.16) et (2.17) on déduit le champ  $\psi_2$  donné en (1).

avec

$$(2) \quad \begin{cases} g_1 = H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(2)}(x) - H_v^{(1)}(x_s) \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{H_v^{(1)}(x_2^1)} H_v^{(1)}(x), & r_1 < r < r_s ; \\ g_2 = H_v^{(1)}(x) H_v^{(2)}(x_s) - H_v^{(1)}(x_s) \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{H_v^{(1)}(x_2^1)} H_v^{(1)}(x), & r > r_s. \end{cases}$$

Dans ces expressions nous reconnaissons le champ arrivant directement de la source en un point P (r, θ) avec le premier terme de g<sub>1</sub> ou de g<sub>2</sub>, puis le champ restitué par la sphère avec le second terme. En reportant dans (1) le développement en série des fonctions H<sub>v</sub><sup>(1)</sup> et H<sub>v</sub><sup>(2)</sup> on constate que le terme d'ordre n dans (1) se comporte comme :

$$(3) \quad \psi_2^{(n)} = - \psi_0^{(n+1/2)} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{r}{r_s}\right)^{n+1} \text{ ou } \left(\frac{r_s}{r}\right)^{n+1} \right\} P_n(\cos\theta) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

selon que r < r<sub>s</sub> ou r > r<sub>s</sub>. Comme |P<sub>n</sub>(cos)| < 1 la série converge mais très lentement. Il est donc hors de question d'avoir une bonne approximation de (1) en ne conservant que les premiers termes. Ceci nous incite à utiliser comme d'autres auteurs (Ansell, Nagase, Roseau, Scholte, Überall...) la transformation de Watson<sup>(+)</sup> pour passer de la série (1) à une série équivalente et plus rapidement convergente. On considère, pour ce faire, l'intégrale dans le plan de la variable v que l'on suppose complexe :

$$(4) \quad J = \frac{\psi_0}{2i} \int_C \frac{v g_j(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi v} dv,$$

où C est le contour qui enlace le demi-axe Ré(v) > 0 (fig. 5).

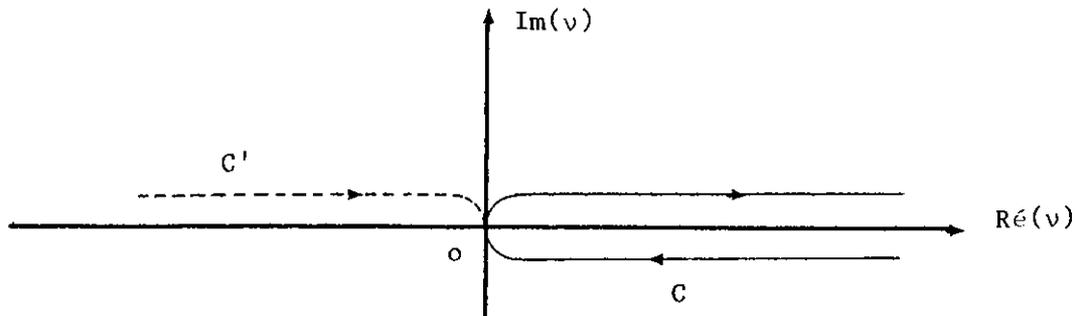


Fig. 5 Chemins d'intégration C et C'.

(+) En réalité cette transformation est due à H. Poincaré (1909) ; Watson et Sommerfeld l'ont développée et étendue à des problèmes d'optique et d'électromagnétisme.

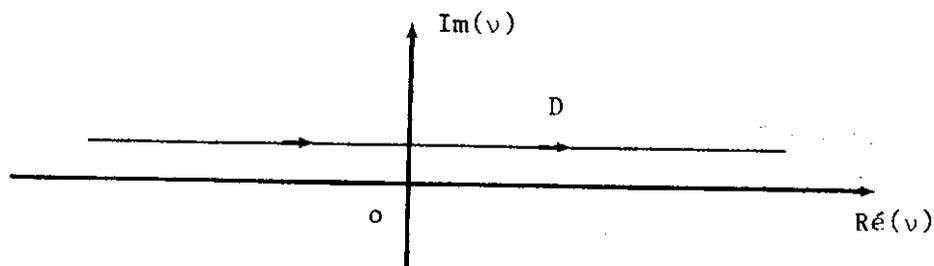


Fig. 6 Chemin d'intégration D.

Si l'on remarque que  $H_\nu^{(1)}(x_2^1)$ , en tant que fonction de  $\nu$ , ne possède pas de pôle sur l'axe réel de  $\nu$  positif (voir Annexe I Fig.19) alors  $g_j$  et  $P_{\nu-1/2}$  sont holomorphes dans le plan  $\nu$ . Les seuls pôles de  $J$  sont les zéros de  $\cos \pi \nu$  soit  $\nu=1/2, 3/2 \dots, n+1/2$ . Or puisque  $P_n(-\cos \theta) = (-1)^n P_n(\cos \theta)$  on en déduit que la série des résidus de  $J$  pris aux pôles  $\nu=n+1/2$  est identique à (1). Ceci permet de substituer l'étude de (1) à celle de (4).

Les propriétés des fonctions  $H_\nu^{(1)}(x)$ ,  $H_\nu^{(2)}(x)$  et  $P_{\nu-1/2}(\eta)$  lorsque l'on change  $\nu$  en  $-\nu$  (cf. Annexe I-(I.14)) montrent que l'intégrand  $J$  est une fonction impaire de  $\nu$ . Il est alors possible de remplacer la partie inférieure du contour  $C$  par son symétrique  $C'$  par rapport à l'origine (fig.5). Ainsi le chemin  $C$  est déformé sans difficulté en la droite  $D$  qui va de  $-\infty+i\epsilon$  à  $\infty+i\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  fig.6.

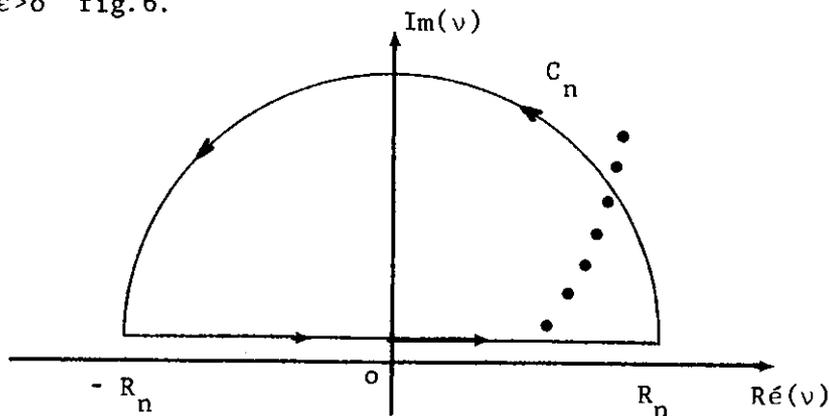


Fig.7. Les points désignent les zéros de  $H_\nu^{(1)}(x_2^1)$ .

Soit  $D_n$  le contour fermé constitué de la droite  $D$  et du demi-cercle  $C_n$  de rayon  $R_n$  tracé dans  $I^+$  (demi-plan  $\text{Im}(\nu)$  positif)(fig.7); nous choisissons  $C_n$  de façon à éviter les singularités qui se trouvent dans  $I^+$  lesquelles sont les zéros de la fonction de  $\nu$ ,  $H_\nu^{(1)}(x_2^1)$ , c'est à dire les pôles de la fonction  $g_j$  définie en (2).

Comme (cf. Annexe II) :

$$(5) \quad \lim_{|v_n| \rightarrow \infty} \frac{\psi_0}{2i} \int_{C_n} \frac{v g_j(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi v} dv = 0 ,$$

$\psi_2$  est égale à la série des résidus pris aux pôles de la fonction  $g_j(v)$  car l'intégrale J se réduit à :

$$(6) \quad \psi_2 = \frac{\psi_0}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v g_j(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi v} dv .$$

Sur le contour D on a la relation :

$$\frac{1}{\cos \pi v} = 2 e^{i\pi v} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{2im\pi v}$$

et (6) s'écrit :

$$(7) \quad \psi_2(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi^{(m)}(r, \theta) ,$$

avec :

$$(8) \quad \psi^{(m)}(r, \theta) = (-1)^m \frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} v g_j(v, x_2^1, x_s, x_2) P_{v-1/2}(-\cos\theta) e^{i\pi v(2m+1)} dv .$$

Puisque  $P_{v-1/2}(-\cos\theta) = (-1)^{v-1/2} P_{v-1/2}(\cos\theta)$  on a aussi :

$$(9) \quad \psi^{(m)}(r, \theta) = (-1)^m \frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} v g_j(v) P_{v-1/2}(\cos\theta) e^{2im\pi v} dv .$$

Pour connaître  $\psi_2$  il nous suffit de calculer les intégrales par la méthode des résidus. On trouve que les zéros en  $v$  de la fonction  $H_v^{(1)}(x \frac{1}{2})$  sont donnés par (Keller, Rubinow, Goldstein (1963)) :

$$(10) \quad v_n(x_2^1) = x_2^1 + \left(\frac{x_2^1}{2}\right)^{1/3} \xi_n e^{i\pi/3} + o((x_2^1)^{-1/3})$$

où -  $\xi_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d'Airy d'argument  $x$ ; pour  $n$  assez grand on voit que :

$$(11) \quad v_n(x_2^1) = x_2^1 + \frac{1}{2} [3\pi(n-1/4)]^{-2/3} \xi_n e^{i\pi/3} (x_2^1)^{-1/3}, \quad n \gg 1$$

soit  $r_n$  la quantité :

$$(12) \quad r_n = - \left\{ \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{\frac{\partial H_v^{(1)}(x_2^1)}{\partial v}} \right\}_{v=v_n}$$

Pour  $v$  voisin de  $x_2^1$  on utilise les approximations (Annexe 1(I.8)). Il convient aussi de tenir compte du Wronskien des fonctions d'Airy  $A_i(-\xi)$  et  $A_i(-\xi e^{2i\pi/3})$  pour obtenir la relation :

$$(13) \quad r_n = \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi} \left(\frac{x_2^1}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{[A'_i(-\xi_n)]^2}$$

où  $A'_i$  désigne la dérivée de la fonction d'Airy. Le calcul de (8) et (9) conduit respectivement à :

$$(14) \quad \psi^{(m)}(r, \theta) = (-1)^m 2\pi \psi_0 \sum_{n=1}^{\infty} v_n r_n H_{v_n}^{(1)}(x_2) H_{v_n}^{(1)}(x_s) P_{v_n-1/2}(-\cos\theta) e^{i(2m+1)\pi v_n}$$

$$(15) \quad \psi^{(m)}(r, \theta) = (-1)^m 2\pi \psi_0 \sum_{n=1}^{\infty} v_n r_n H_{v_n}^{(1)}(x_2) H_{v_n}^{(1)}(x_s) P_{v_n-1/2}(\cos\theta) e^{2i\pi v_n}$$

Aux fins d'expliciter (14) et (15) on se sert de (I.7) et (I.12) de l'annexe I qui impliquent :

$$\left[ \begin{aligned} H_{\nu_n}^{(1)}(x_s) H_{\nu_n}^{(1)}(x_2) &\sim \frac{2}{\pi \beta_2} \{(r^2 - r_1^2)(r_s^2 - r_1^2)\}^{-1/4} \\ &\times \exp \{i\beta_2 (r^2 - r_1^2)^{1/2} - i\nu_n \arccos \frac{r_1}{r} - i\pi/4 \} \\ &\times \exp \{i\beta_2 (r_s^2 - r_1^2)^{1/2} - i\nu_n \arccos \frac{r_1}{r_s} - i\pi/4 \} , \end{aligned} \right.$$

$$\nu_n r_n = \left[ \frac{x_1}{2} \right]^{1/3} \times \frac{1}{2} \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi} \{A'_i(-\xi_n)\}^{-2} .$$

Il est alors aisé d'écrire (14) et (15), en se souvenant de la valeur de  $\psi_0$ , sous la forme :

$$\left[ \begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta) &= \frac{(-1)^m f_0(x_2)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{1/6} r_1 \{(r^2 - r_1^2)(r_s^2 - r_1^2)\}^{-1/4}}{4\pi^{3/2} C_{T_2}^2 \sqrt{r r_s r_1 \beta_2 \sin \theta}} \\ &\times \exp \{i\beta_2 [(r^2 - r_1^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2)^{1/2}]\} \times \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-\xi_n)]^{-2} \\ &\times \exp \{i\nu_n [(2m+1)\pi - \theta - \arccos \frac{r_1}{r} - \arccos \frac{r_1}{r_s}] + i\pi/4 \} , \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta) &= \frac{(-1)^m f_0(x_2)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{1/6} r_1 \{(r^2 - r_1^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2)^{1/2}\}^{-1/4}}{4\pi^{3/2} C_{T_2}^2 \sqrt{r r_s r_1 \beta_2 \sin \theta}} \\ &\times \exp \{i\beta_2 [(r^2 - r_1^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2)^{1/2}]\} \times \sum_{n=1}^{\infty} [A'_i(-\xi_n)]^{-2} \\ &\times \exp \{i\nu_n [2m\pi + \theta - \arccos \frac{r_1}{r_s} - \arccos \frac{r_1}{r}] - i\pi/4 \} . \end{aligned} \right.$$

De ces deux dernières expressions on déduit :

$$(16) \left[ \begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta) &= B \exp \{ i\beta_2 [(r^2 - r_1^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2)^{1/2}] \} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \{ [A_n^{(1)}(-\xi_n)]^{-2} \\ &\times \{ \exp i(v_n \delta_m - \pi/4) + \exp i(v_n \gamma_m + \pi/4) \} \} , \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(17) \left[ \begin{aligned} B &= \frac{f_0 (x_2^1)^{1/3} e^{i\pi/3} 2^{-5/6} r_1 [(r^2 - r_1^2)(r_s^2 - r_1^2)]^{-1/4}}{4\pi^{3/2} C_{T_2}^2 \sqrt{r r_s r_1 \beta_2 \sin \theta}} , \\ \delta_m &= 2m\pi + \theta - \theta_0 , \quad \gamma_m = (2m+1)\pi - \theta - \theta_0 , \quad \theta_0 = \arccos \frac{r_1}{r_s} + \arccos \frac{r_1}{r} . \end{aligned} \right.$$

Par anticipation sur le paragraphe suivant nous pouvons noter que (7) et (16) représentent la solution du problème quelque soit  $\theta$  si  $m > 1$  et pour  $\theta > \theta_0$  si  $m=0$ . Ces résultats, établis indépendamment des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques de Levy et Keller, sont en accord avec leur relation 26 p.173, obtenue à l'aide d'un bilan d'énergie et d'une extension du principe de Fermat - théorie des rayons -. Voyons à présent quelques traits particuliers se dégageant de cette solution ainsi que son domaine de validité.

## 2 - DOMAINE DE VALIDITE, INTERPRETATION.

Pour connaître le domaine de validité du développement auquel nous venons d'aboutir il convient d'examiner la convergence de ce dernier.

Puisque  $v_n$  a une partie imaginaire positive, la partie réelle de  $i v_n \delta_0$  (valeur de  $\delta_m$  pour  $m=0$ ) est négative si  $\delta_0$  est positif ; ce qui a lieu si

$$(18) \quad \theta > \arccos \frac{r_1}{r_s} + \arccos \frac{r_1}{r} .$$

Lorsque cette condition est satisfaite, les termes de la série (16) décroissent exponentiellement. Dans tous les autres cas la solution est inacceptable. La comparaison de ce résultat à (3) justifie donc, a posteriori, l'usage de la transformation de Watson.

Enfin, lorsque l'on remplace  $v_n$  par  $\beta_2 r_1$  on néglige les termes de l'ordre de  $(\beta_2 r_1)^{1/3}$ . Par suite (16) n'est valable que si

$$\beta_2 (r^2 - r_1^2)^{1/2} \gg (\beta_2 r_1)^{1/3} \text{ et } \beta_2 (r_s^2 - r_1^2)^{1/2} \gg (\beta_2 r_1)^{1/3} ;$$

cet ensemble de conditions s'écrit encore :

$$(19) \quad (r - r_1) \gg r_1^{1/3} \beta_2^{-2/3} \text{ et } (r_s - r_1) \gg r_1^{1/3} \beta_2^{-2/3} .$$

Autrement dit, la solution proposée au paragraphe précédent est acceptable quelque soit  $m$ , si la source et "l'observateur" sont suffisamment loin de la sphère de rayon  $r_1$  d'après (19), et seulement dans la zone "d'ombre", si  $m=0$  d'après (18).

On peut interpréter, en termes d'optique géométrique, la solution établie au paragraphe 1. Envisageons d'abord le cas simple  $m=0$  qui correspond au premier élément  $\psi^{(0)}$  du développement (7) soit :

$$(20) \quad \psi^{(0)}(r, \theta) = B \exp \{ i\beta_2 [(r_s^2 - r_1^2)^{1/2} + (r^2 - r_1^2)^{1/2}] \} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_1'(-\xi_n))^{-2} e^{i(v_n \gamma_0 + \pi/4)} + e^{i(v_n \delta_0 - \pi/4)} \} .$$

où l'on a posé :

$$(21) \quad \delta_0 = \theta - \arccos \frac{r_1}{r_s} - \arccos \frac{r_1}{r} ; \quad \gamma_0 = \pi - \theta - \arccos \frac{r_1}{r_s} - \arccos \frac{r_1}{r} .$$

Comme  $\beta_2$ , l'inverse de la longueur d'onde, vaut  $\omega/C_{T_2}$  il est commode pour l'avenir d'écrire (11) sous la forme :

$$(22)_1 \quad v_n = \frac{\omega r_1}{\omega_n} + i\chi_n ,$$

$$(22)_2 \quad W_n = c_{T_2} [1 + (4 r_1 \beta_2)^{-2/3} \xi_n]^{-1} ,$$

$$(22)_3 \quad \chi_n = \frac{r_1}{c_{T_2}} (4 r_1 \beta_2)^{-2/3} \xi_n \sqrt{3} > 0 .$$

Les  $n^{\text{ièmes}}$  composantes de  $\psi^{(\circ)}$  ont pour phases :

$$(23) \quad \left[ \begin{array}{l} \phi_{n1}^{(\circ)} = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_s^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \frac{r_1 \delta_o}{W_n} \right\} , \\ \phi_{n2}^{(\circ)} = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_s^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \frac{r_1 \gamma_o}{W_n} \right\} , \end{array} \right.$$

Il est clair que  $\left( \frac{r_s^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2}$  est le temps mis par l'onde pour parcourir le trajet  $ST_1$  ou  $ST_1'$ , Fig.8. De même  $\left( \frac{r^2 - r_1^2}{c_{T_2}^2} \right)^{1/2}$  est apparenté aux rayons

$T_2 P$  ou  $T_2' P$  tandis que les termes  $r_1 \delta_o / W_n$  ou  $r_1 \gamma_o / W_n$  représentent les chemins  $T_1' T_2'$  ou  $T_1 T_2$  parcourus sur la sphère de rayon  $r_1$  à la vitesse  $W_n$ . Il en résulte que les termes de phase  $\phi_{n1}^{(\circ)}$  et  $\phi_{n2}^{(\circ)}$  correspondent respectivement aux trajets  $ST_1' T_2' P$  et  $ST_1 T_2 P$  (fig.8).

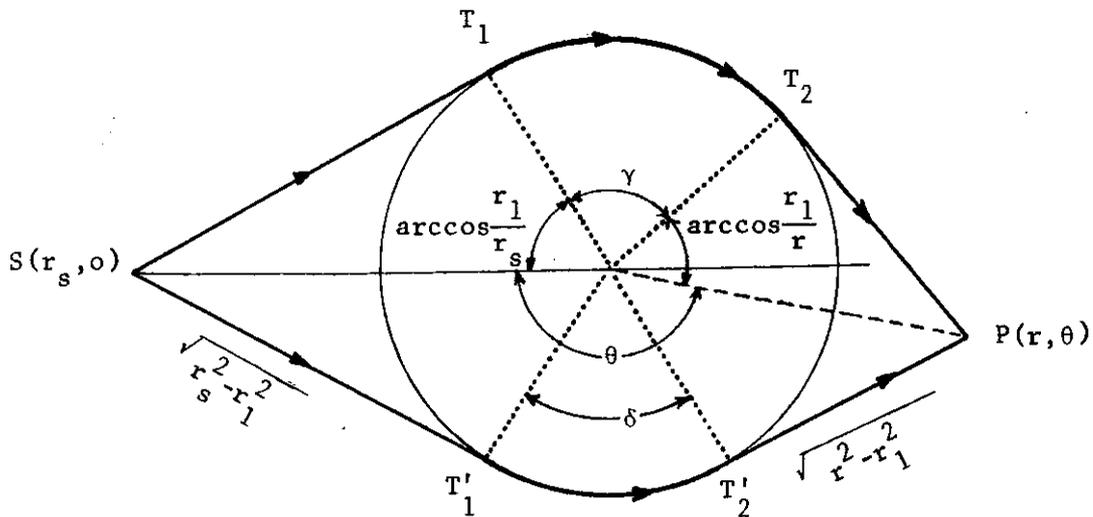


Fig.8

Ainsi le premier élément  $\psi^{(o)}$  de la solution représente une diffraction des rayons issus de la source S. En outre, il convient de remarquer que les chemins  $T_1 T_2$  et  $T'_1 T'_2$  sont parcourus par une infinité d'ondes qui, ayant pris naissance aux points  $T_1$  et  $T'_1$  possèdent les trois propriétés<sup>(†)</sup> suivantes :

a) Elles sont évanescentes car elles ont un facteur d'amplitude, à décroissance exponentielle, proportionnel à :

$$\exp(-\chi_n \delta_o) \text{ soit à } \exp(-\chi_n \gamma_o) \text{ (20) et (22)}_3 .$$

b) Elles sont dispersives puisque leur vitesse  $W_n$  dépend de la fréquence  $\omega$  d'après (22)<sub>2</sub>.

c) Elles se propagent toujours à une vitesse  $W_n$  inférieure<sup>(\*)</sup> à celles des ondes SH incidentes qui leur ont donné naissance d'après (22)<sub>2</sub>.

Une analyse semblable peut être conduite lorsque  $m > 1$ . En effet,

(†) Scholte, dans son étude sur les ondes P, donne seulement la première propriété (a) .

(\*) On est en présence d'ondes de surface d'après les caractères a et c.

écrivons (16) sous la forme :

$$(24) \quad \psi^{(m)}(r, \theta) = (-1)^m e^{2i\pi m \nu} \psi^{(0)},$$

il est clair que la phase des deux composantes de  $\psi^{(m)}$  est :

$$(25) \quad \begin{cases} \phi_{n_1}^{(m)} = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - r_1^2}{C_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_s^2 - r_1^2}{C_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \frac{r_1 \delta_0}{W_n} + m \frac{2\pi r_1}{W_n} \right\} \\ \phi_{n_2}^{(m)} = \omega \left\{ \left( \frac{r^2 - r_1^2}{C_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_s^2 - r_1^2}{C_{T_2}^2} \right)^{1/2} + \frac{r_1 \gamma_0}{W_n} + m \frac{2\pi r_1}{W_n} \right\} \end{cases}$$

Ainsi (25) nous montre que les termes  $\psi^{(m)}$  correspondent à des rayons qui effectuent en plus du trajet  $ST_1 T_2 P$  ou  $ST'_1 T'_2 P$  (fig.8)  $m$  fois le tour de  $\Sigma_1^{(+)}$ . Il y a atténuation et dispersion de ces ondes faisant plusieurs fois le tour de la sphère qu'elles parcourent avec une vitesse  $W_n < C_{T_2}$ . On est donc en présence d'ondes de surface. Enfin, si nous remarquons que pour  $n$  fixé, la série en  $m$  est une série géométrique de raison inférieure à 1 en module, on peut alors écrire la solution  $\psi$  sous la forme plus compacte :

$$(26) \quad \psi(r, \theta) = B \exp\{i\beta_2 [(r^2 - r_1^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2)^{1/2}]\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(\nu_n \delta_0 - \pi/4)} + e^{i(\nu_n \gamma_0 + \pi/4)}}{[A_i(-\xi_n)]^2 (1 + e^{2i\pi \nu_n})}$$

### 3 - SOLUTION EN AVANT DE L'OBSTACLE.

Nous avons remarqué que la solution acquise au paragraphe 1 est en défaut en avant de l'obstacle si  $m=0$ . Les résidus contenant  $\gamma_m$  restent rapidement convergents dans la zone "éclairée" pourvu que, d'après (17), on ait:

(+) A notre connaissance, une interprétation de même nature a été donnée pour la première fois à propos d'ondes électromagnétiques par Levy et Keller (1953).

$$(27) \quad (\beta_2 r_1)^{1/3} (\theta + \theta_0) \gg 1 \quad .$$

Si l'on considère, comme Nussenzweig (1964), la décomposition :

$$(28) \quad P_{\nu-1/2}(\cos\theta) = Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos\theta) + Q_{\nu-1/2}^{(2)}(-\cos\theta) \quad ,$$

on constate que les termes  $\gamma_m$  proviennent de  $Q_{\nu-1/2}^{(2)}(-\cos\theta)$  tandis que les facteurs  $\delta_m$  (responsables de la non validité de (16) pour  $\theta < \theta_0$ ) sont issus des pôles de  $Q_{\nu-1/2}^{(1)}(-\cos\theta)$ . Il est donc indispensable de reprendre le calcul des intégrales (9) pour  $m=0$  soit :

$$(29) \quad \psi^{(0)} = \frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu g_j(\nu, x_2^1, x_2, x_s) P_{\nu-1/2}(-\cos\theta) e^{i\pi\nu} \, d\nu \quad .$$

De (2), on observe que les seconds termes de  $g_1$  et de  $g_2$ , qui correspondent au champ restitué par la sphère, sont identiques. D'autre part, on passe du premier terme de  $g_1$  au premier terme de  $g_2$  en échangeant le rôle de la source et de l'observateur. Ainsi, vue la réciprocité source-observateur, il nous suffit d'estimer (29) pour l'une des deux fonctions  $g_j$ . Traitons par exemple le cas où  $r > r_s$  ce qui correspond à la fonction  $g_2$ . L'intégrale (29) est rapidement oscillante à proximité de l'axe réel. Nous calculons chacun des termes qui la compose par la méthode du col dont la mise en oeuvre nous oblige à distinguer deux cas selon que  $\theta$  est inférieur ou supérieur à un certain angle  $\theta_1 < \pi/2$  qui sera défini plus loin. En outre, la parité des fonctions mises en cause permet de restreindre l'étude au cas des angles  $\theta$  positifs.

Lorsque  $\theta$  est inférieur à  $\pi/2$  le premier terme  $\psi^{01}$  de (29) s'écrit d'après (2) :

$$(30) \quad \psi^{01} = \frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_2) H_{\nu}^{(1)}(x_s) P_{\nu-1/2}(\cos[\pi-\theta]) e^{i\pi\nu} \, d\nu \quad .$$

En utilisant les développements asymptotiques donnés en annexe I pour chacune des fonctions figurant dans (30) on trouve que le col est défini par :

$$(31) \quad v = \beta_2 r_s \sin W_1 = \beta_2 r \sin W_2 \quad \text{avec} \quad W_1 + W_2 + \theta = \pi \quad .$$

Le chemin de plus grande descente fait un angle de  $-\pi/4$  avec  $\text{Ré}(v) > 0$  et  $0 < W_1 < \pi/2$  tandis que  $W_2 \in (\pi/2, \pi)$ . En posant  $V_1 = W_1$  et  $V_2 = \pi - W_2$  nous avons au col :

$$(32) \quad V_2 = \theta + V_1 \quad ,$$

en remplaçant  $\psi_0$  par sa valeur il vient :

$$(33) \quad \psi^{01} = \frac{f_0}{4\pi C T_2} e^{i\beta_2 R} \quad , \quad \text{avec} \quad R = r_s \cos V_1 - r \cos V_2 \quad .$$

C'est donc le champ en P provenant directement de la source S que l'on retrouve par ce premier calcul dont une illustration physique est donnée par la figure 9.

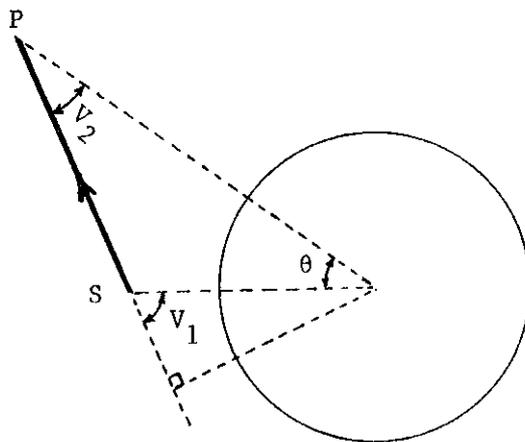


Fig.9. champ direct SP ;  $r_s < r \cos \theta$  ,  $\theta < \theta_1 = \text{Arccos} \frac{r_s}{r}$  .

Le second terme de (29)  $\psi^{02}$  que nous avons à évaluer, vue (28), est :

$$(34) \quad \psi^{02} = - \frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} v H_v^{(1)}(x_2) H_v^{(1)}(x_s) \frac{H_v^{(2)}(x_2)}{H_v^{(1)}(x_1)} P_{v-1/2}(-\cos \theta) \, dv \quad .$$

De la remarque faite plus haut sur la série  $\gamma_m$ , il résulte que cet élément  $\psi^{o2}$  se décompose lui-même en deux termes à l'aide de (28). L'un  $\psi_2^{o2}$  contenant  $Q_{\nu-1/2}^{(2)}$  n'a pas besoin d'être estimé puisqu'il correspond à la série des résidus convergents  $\gamma_m$  de (26). Ainsi il nous suffit de nous pencher sur (34) lorsque l'on a remplacé  $P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)$  par  $Q_{\nu-1/2}^{(1)}(-\cos\theta)$ . L'intégrale  $\psi^{o1}$ , engendrée par cette transformation, est rapidement oscillatoire au voisinage de l'axe réel. Nous la calculons par la méthode du col :

$$(35) \quad \psi_1^{o2} = -\frac{\psi_0}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu H_{\nu}^{(1)}(x_2) H_{\nu}^{(1)}(x_s) \frac{H_{\nu}^{(2)}(x_2^1)}{H_{\nu}^{(1)}(x_2^1)} Q_{\nu-1/2}^{(1)}(-\cos\theta) d\nu \cdot$$

Les approximations asymptotiques des fonctions de Hankel (cf. Annexe I) nous conduisent à :

$$(36) \quad H_{\nu}^{(2)}(x_2^1) / H_{\nu}^{(1)}(x_2^1) = \exp \left\{ -2i \left[ \left\{ (x_2^1)^2 - \nu^2 \right\}^{1/2} - \nu \arccos \frac{\nu}{x_2^1} - \pi/4 \right] \right\} \cdot$$

Le col de l'intégrand (36) est déterminé (toujours pour le cas où  $\theta$  est inférieur à  $\pi/2$ ) par :

$$(37) \quad \nu = \beta_2 r_s \sin W_1 = \beta_2 r \sin W_2 = \beta_2 r_1 \sin W_3 \quad \text{avec} \quad W_1 + W_2 - 2W_3 + \theta = 0 \cdot$$

Tous les angles figurants dans (37) étant inférieurs à  $\pi/2$  l'estimation de (35) nous fournit l'expression :

$$(38) \quad \psi_1^{o2} = -\frac{r_1 f_0 \sqrt{\sin W_3 \cos W_3}}{4 \pi C_{T_2}^2 \sqrt{r r_s \sin \theta}} \times \frac{\exp [i \beta_2 (D_1 + D_2)]}{(D_1 r_s \cos W_1 + D_2 r \cos W_2)^{1/2}}$$

où l'on a posé :

$$(39) \quad D_1 = r_s \cos W_1 - r_1 \cos W_2, \quad D_2 = r \cos W_2 - r_1 \cos W_3 \cdot$$

Le résultat (38) s'interprète aisément à l'aide de la figure 10 comme les rayons réfléchis ayant parcourus une distance du type STP. On note, en outre, que (39) est l'analogue, pour les ondes SH, des lois de Descartes

de l'optique géométrique :

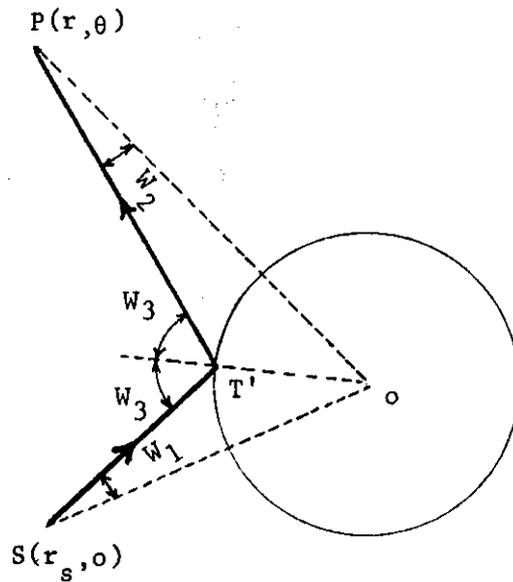


Fig.10. Champ réfléchi STP ;  $r_s < r \cos \theta$  ,  $0 < \theta < \theta_1 = \text{Arccos } \frac{r_s}{r}$  .

L'étude précise du col défini par (31) (en particulier de la ligne de plus grande pente) montre que celui-ci n'existe que si  $\sin V_2 > \frac{r_s}{r}$  (i). Quand  $V_1 \rightarrow \pi/2$  ,  $V_2 \rightarrow \theta + \pi/2$  d'après (32) et la relation (i) est équivalente à  $r_s < r \cos \theta$  . Il en est de même en ce qui concerne le col défini en (37) et les solutions (33), (38) sont valables dans la région :  $r_s < r \cos \theta$  ,  $0 < \theta < \theta_1$ .

Lorsque  $\theta$  est supérieur à  $\theta_1$ , des calculs analogues à ceux présentés ci-dessus doivent être effectués. L'évaluation de (30) dans ce cas conduit au champ  $\bar{\psi}^{o1}$  venant directement de la source soit :

$$(40) \quad \bar{\psi}^{o1} = \frac{f_o}{4\pi C_{T_2}^2 R_1} e^{i\beta_2 R_1} , \quad R_1 = r \cos \bar{W}_1 - r_s \cos \bar{W}_2 ,$$

provenant du col défini par :

$$(41) \quad v = \beta_2 r \sin \bar{W}_1 = \beta_2 r_s \sin \bar{W}_2 , \quad \bar{W}_1 + \bar{W}_2 - \theta = \pi .$$

La contribution de (35) est le champ réfléchi  $\bar{\psi}_1^{o2}$  :

$$(42) \quad \bar{\psi}_1^{o2} = \frac{r_1 f_o}{4\pi C_{T_2}^2 \sqrt{r r_s \sin \theta}} \left\{ \frac{\sin \bar{w}_3 \cos \bar{w}_3}{\bar{D}_1 r \cos \bar{w}_1 + \bar{D}_2 r_s \cos \bar{w}_2} \right\}^{1/2} \exp\{i\beta_2(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)\},$$

avec :  $\bar{D}_1 = r_s \cos \bar{w}_2 - r_1 \cos \bar{w}_3$  ,  $\bar{D}_2 = r \cos \bar{w}_1 - r_1 \cos \bar{w}_3$  .

Cette dernière expression se déduit du col engendré par :

$$(43) \quad v = \beta_2 r_s \sin \bar{w}_1 = \beta_2 r_s \sin \bar{w}_2 = \beta_2 r_1 \sin \bar{w}_3 \text{ tel que: } \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - 2\bar{w}_3 - \theta = 0$$

L'interprétation physique de (40) et (42) est illustrée par les figures 11 et 12.

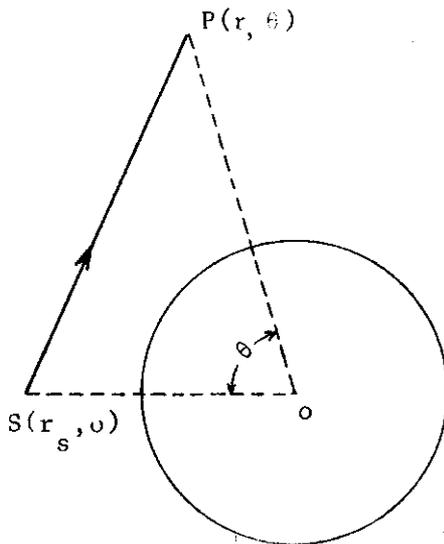


Fig. 11. Champ direct :  $r_s > r \cos \theta$ ,  
 $\theta_1 < \theta < \theta_o$  .

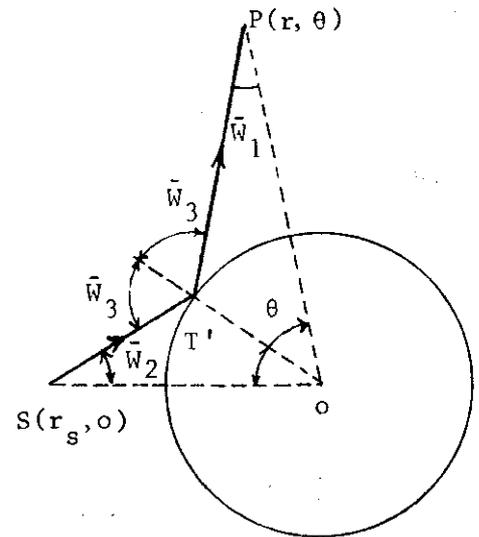


Fig. 12. Champ réfléchi ;  $r_s > r \cos \theta$ ,  
 $\theta_1 < \theta < \theta_o$  .

Un examen des cols (41) et (43) indique que ceux-ci ne tiennent, quand  $\theta > \theta_1$ , que dans la zone où  $r_s > r \cos \theta$  ( $r_s < r$ ) et  $\theta_1 < \theta < \theta_o$  ; d'où la limitation de (40) et (42) au domaine :  $r_s > r \cos \theta$  ,  $\theta_1 < \theta < \theta_o$ .

En résumé : au terme de cette étude, la solution de propagation d'ondes SH, dans un espace infini contenant une sphère parfaitement rigide, est décrite (pour  $r > r_s$ ) par les relations (7) et (16) dans tout l'espace

lorsque  $m > 1$ . Pour  $m = 0$ , la représentation (16) est encore valable tant que  $\theta > \theta_0$  (cf. (18) et (27)). Dès que  $\theta < \theta_0$ , la solution est donnée par la partie de (16) correspondant à la série des termes  $\gamma_m$ ; la série des éléments  $\delta_m$  devant, selon le cas, être remplacée par :

- le champ "direct" (33) et le champ réfléchi (38) lorsque  $r_s < r \cos \theta$  et  $0 < \theta < \theta_1$  où  $\theta_1$  est l'angle défini par  $\cos \theta_1 = \frac{r_s}{r}$
- le champ "direct" (40) et le champ réfléchi (42) dans le domaine  $r \cos \theta < r_s$  et  $\theta_1 < \theta < \theta_0$ .

Pour  $r < r_s$  la solution est acquise en échangeant dans les expressions ci-dessus le rôle de la source et de l'observateur.

On peut observer que ces résultats sont en accord avec ceux de Scholte, Nagase, Ansell, ... pour les ondes P en incidence sur une sphère fluide, de Überall et de ses collaborateurs (ondes acoustiques en incidences sur un cylindre), Bremmer (Chp.5 p.88). Toutefois, ces travaux ne font pas la distinction entre les deux zones  $r_s < r \cos \theta$  et  $r_s > r \cos \theta$ ; une telle limitation peut être trouvée dans Roseau ch.7 P.301 (angles limites  $\theta_1$  et  $\theta_0$  exclus). Voyons à présent les modifications apportées par une sphère élastique.

#### 4 - SPHERE ELASTIQUE.

Nous revenons avec ce paragraphe au modèle plus réaliste d'une sphère élastique  $\Sigma_1$  de rayon  $r_1$  entourée de l'espace infini 2. Nous avons établi la solution globale dans celui-ci au chapitre II sous la forme d'un développement en série de Debye dont nous ne retenons ici que le 1<sup>er</sup> terme. Il correspond, rappelons le, à la première interaction des ondes SH avec  $\Sigma_1$  et au champ incident arrivant directement de la source au point d'observation  $P(r, \theta)$ . Nous nous intéressons en particulier à la forme du premier terme du développement de Debye  $\psi_2^1$  valable pour  $r > r_s$  qui d'après (2.14), (2.16) et (2.29) s'explicité sous la forme :

$$(44) \quad \psi_2^1 = \psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) g(n+1/2) P_n(\eta) \quad , \quad r > r_s \quad ,$$

avec :

$$(45) \quad g(n+1/2) = H_{n+1/2}^{(2)}(x_s) H_{n+1/2}^{(1)}(x_2) \left\{ 1 + \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(x_s) H_{n+1/2}^{(2)}(x_2)}{H_{n+1/2}^{(2)}(x_s) H_{n+1/2}^{(1)}(x_2)} R_{21} \right\} .$$

Cette limitation  $r > r_s$  est intéressante pour l'acoustique sous-marine, la géophysique puisque les sources sismiques sont placées entre le manteau et la croûte terrestre où sont situées les stations d'observation. Cependant, cette restriction n'est pas fondamentale en vertu du principe de réciprocité entre la source et l'observateur d'une part, la validité du champ restitué pour  $r > r_1$  d'autre part. Ainsi les résultats obtenus ci-après tiennent aussi pour  $r < r_s$  par échange des grandeurs  $r$  et  $r_s$ .

La série (44) est du type  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) F(n+1/2) P_n(\eta)$ . Nous lui appliquons la transformation de Watson (4). On montre (voir Annexe III) que  $g(v)$  ne possède pas de pôle sur l'axe réel de  $v$  positif de sorte que la forme (44) est substituée à l'intégrale dans le plan complexe  $v$  :

$$(46) \quad \psi_2^1 = \frac{\psi_0}{2i} \int_C \frac{v g(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi v} dv$$

où  $C$  est le contour de la fig. 5.

Avant d'aller plus loin, il convient de noter que selon la rigidité relative des milieux, il peut y avoir, ou non, réflexion totale des ondes sur  $\Sigma_1$ .

La distinction entre ces deux éventualités peut être effectuée à l'aide de l'impédance  $N_{12}$ . Toutefois il est préférable de raisonner sur les vitesses des milieux qui s'introduisent naturellement au niveau des pôles de (46). Ainsi nous définissons l'incidence  $n = \beta_1 / \beta_2$  ( $n = x_1^1 / x_2^1$ ) qui, d'après (2.24), est relié à l'impédance par :

$$(47) \quad n = N_{12} \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot$$

Pour une sphère moins rigide que le milieu infini,  $n > 1$ , quelque soit l'angle d'incidence des ondes sur la sphère, il existe des rayons réfractés à l'intérieur de celle-ci. En revanche, pour  $n < 1$ , il existe un angle d'incidence critique  $\theta_c$  au delà duquel les rayons qui atteignent la frontière de séparation des deux milieux sont totalement réfléchis. Ceci implique une évaluation différente de (46) suivant la position de  $n$  par rapport à 1.

Pour  $n > 1$ , l'étude de l'intégrant  $I_1(v)$  de (46), montre que ce dernier converge dans le demi-plan complexe  $\text{Im}(v)$  positif ainsi que dans le quatrième quadrant dès que  $\eta_1 > (\pi - \theta)/2$  (voir Annexe III). Ces constatations permettent de passer du contour C au contour D (fig.13) à condition de prendre en compte les séries de résidus provenant des pôles  $v_{n(1)}$  et  $v_{n(2)}$  de  $g(v)$ ; ceux-ci, évalués dans l'annexe III, sont les racines du dénominateur de  $R_{21}$  soit de:

$$(48) \quad [1 \times \frac{1}{2}] - N_{12} [2 \times \frac{1}{1}] = 0 \cdot$$

Les considérations ci-dessus conduisent à remplacer (46) par :

$$(49) \quad \psi_2^1 = \frac{\psi_0}{2i} \int_D \frac{v g(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi v} dv + \psi_0 \cdot \pi \sum_n (\bar{R}_{n(1)} + \bar{R}_{n(2)}) \cdot,$$

où  $\bar{R}_{n(i)}$  ( $i=1,2$ ) est le résidu de  $I_1(v)$  pris aux pôles  $v_{n(i)}$  .

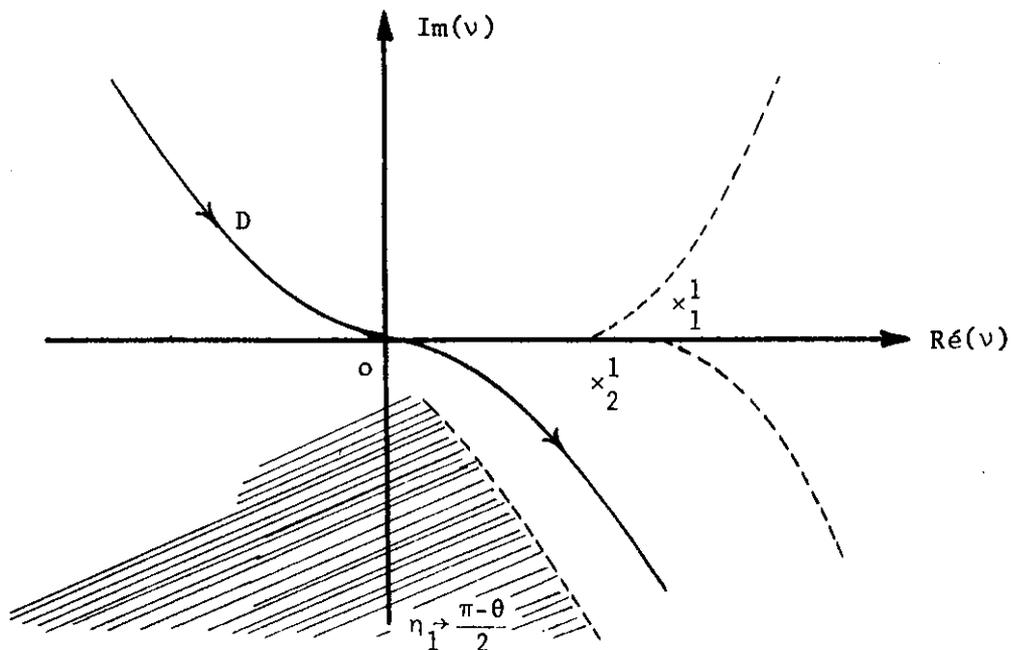


Fig.13. Divergence de l'intégrant de (46) dans la zone hachurée.

Si l'on remarque que seul le second terme de (45) fournit une contribution non nulle aux séries de résidus et si l'on pose :

$$(50) \quad r_{n(i)} = \text{résidus de } \left\{ \frac{H_v^{(2)}(x_2^1)}{H_v^{(1)}(x_2^1)} R_{21} \right\}_{v=v_{n(i)}}, \quad (i=1,2),$$

alors de (45) et (50) on tire :

$$(51) \quad \bar{R}_{n(i)} = v_{n(i)} \frac{H_{v_{n(i)}}^{(1)}(x_2^1) H_{v_{n(i)}}^{(1)}(x_s) r_{n(i)} P_{v_{n(i)}}^{-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi v_{n(i)}}, \quad (i=1,2) \cdot$$

En outre, des propriétés sur la parité des fonctions de Hankel et de Bessel (Annexe I(13)), il découle que  $I_1(v)$  est une fonction impaire de  $v$ ; il s'ensuit que l'intégrale figurant dans (49), étant prise le long d'un contour  $D$  symétrique par rapport à l'origine, est nulle. De ce résultat et des expressions (49) et (51) on déduit l'expression (52) de  $\psi_2^1$ .

$$(52) \quad \psi_2^1 = \psi_{2(1)}^1 + \psi_{2(2)}^1,$$

$$(53) \quad \psi_{2(i)}^1 = \psi_0 \pi \int_n v_{n(i)} H_{v_{n(i)}}^{(1)}(x_2^1) H_{v_{n(i)}}^{(1)}(x_s) r_{n(i)} \frac{P_{v_{n(i)}}^{-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi v} \quad (i=1,2) \cdot$$

Pour exploiter (52), (53) il reste à obtenir l'expression de  $r_{n(i)}$ . De (46), (48) et du Wronskien des fonctions de Hankel [voir Annexe I. (14)] il suit :

$$r_{n(i)} = \frac{4i}{\pi(x_2^1)[H_v^{(1)}(x_2^1)]^2} \left[ \frac{\partial([1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1])}{\partial v} \right]_{v=v_{n(i)}}^{-1} \cdot$$

Il suffit d'utiliser les développements asymptotiques (donnés dans l'annexe I) et les valeurs des pôles  $v_{n(1)}$  et  $v_{n(2)}$  [Annexe I (7) et (8)] pour obtenir respectivement :

$$(54) \quad r_{n(1)} = \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi [A'_i(-\xi_n)]^2} \left( \frac{2}{x_1^2} \right)^{-1/3},$$

$$(55) \quad r_{n(2)} = \frac{2i}{\sqrt{n^2-1}} \exp \left\{ -2\sqrt{n^2-1} x_1^1 - 2v_{n(2)} \operatorname{argch} n \right\}.$$

En introduisant conjointement (54), (55), le développement asymptotique de  $P_{\nu-1/2}$  [Annexe I (I.12)] et les développements en série de  $(\cos \pi \nu)^{-1}$  dans (53), il vient :

$$(56) \quad \left[ \begin{aligned} \psi_{2(1)}^1 &= \sum_n C_1(v_{n(1)}) H_{v_{n(1)}}^{(1)}(x_2) H_{v_{n(1)}}^{(1)}(x_s) \left\{ e^{iv_{n(1)}\theta + i\pi/4} \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[ \exp(iv_{n(1)}[2m\pi - \theta] - i\pi/4) + \exp(iv_{n(1)}[2m\pi + \theta] + i\pi/4) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(57) \quad \left[ \begin{aligned} \psi_{2(2)}^1 &= \sum_n C_2(v_{n(2)}) H_{v_{n(2)}}^{(1)}(x_2) H_{v_{n(2)}}^{(1)}(x_s) \exp \left\{ -2e^{-i\pi/3} \xi_n \operatorname{Argch} n \left( \frac{x_1^1}{2} \right)^{1/3} \right\} \\ &x \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-i2m\pi v_{n(2)}} \left\{ \exp[-iv_{n(2)}\theta - i\pi/4] + \exp[-iv_{n(2)}(2\pi - \theta) + i\pi/4] \right\}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(58) \quad \left[ \begin{aligned} C_1(v_{n(1)}) &= \frac{\psi_0 e^{-i\pi/6}}{[A'_i(-\xi_n)]^2} \left[ \frac{x_1^1}{x_2^2} \right]^{1/3} \frac{\sqrt{v_{n(1)}}}{2\pi \sin \theta}, \\ C_2(v_{n(2)}) &= \frac{2i}{\sqrt{n^2-1}} \sqrt{\frac{2\pi v_{n(2)}}{\sin \theta}} \exp \left\{ -2\beta_1 [n \operatorname{argch} n - n] \right\}, \end{aligned} \right.$$

où  $-\xi_n$  représente le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d'Airy  $A_i$ .

L'analyse de la phase des solutions (56), (57) se fait comme au paragraphe 2 (cf. 23 et 16). Elle montre l'existence d'ondes qui parcourent la surface de la sphère  $m$  fois (dans le sens direct ou rétrograde selon le

signe de  $\theta$ ) à une vitesse inférieure à celle des ondes incidentes. En outre, ces ondes de surface sont dispersives et évanescentes. On peut de plus noter la présence d'un facteur d'atténuation très importante dans (57). La solution  $\psi_2^1(2)$  est donc rapidement évanescente. On en conclut que les pôles  $\nu_n(2)$  apportent une contribution négligeable à la solution  $\psi_2^1$ .

Pour voir apparaître clairement l'interprétation indiquée il est nécessaire de remplacer dans (56) et (57) les fonctions de Hankel et les polynômes de Legendre par leurs approximations asymptotiques. Celles-ci sont données dans l'annexe I, (7) et (12). Vue que (I.12) n'est valable que si  $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$ , l'approximation vaut seulement si  $\nu \gg (x_2^1)^{1/3}$  et lorsque  $(x_2^1)^{-1/3} < \theta < \pi - (x_2^1)^{-1/3}$ . Enfin l'examen de la phase du premier terme de la série montre que celui-ci converge seulement dans la zone d'ombre  $\theta > \theta_0$  (avec la définition (17) de  $\theta_0$ ).

Dans le cas où l'indice de réfraction est important  $n < 1$  on définit un angle d'incidence critique  $\theta_c$  (fig.14) tel que :

$$(59) \quad \theta_c = \text{Arc sin } n \quad .$$

Lorsque l'angle d'incidence est inférieur à  $\theta_c$ , il existe à la fois des rayons réfléchis et des rayons réfractés. En revanche si l'angle d'incidence est supérieur à  $\theta_c$  les rayons incidents subissent une réflexion totale sur la frontière de la sphère.

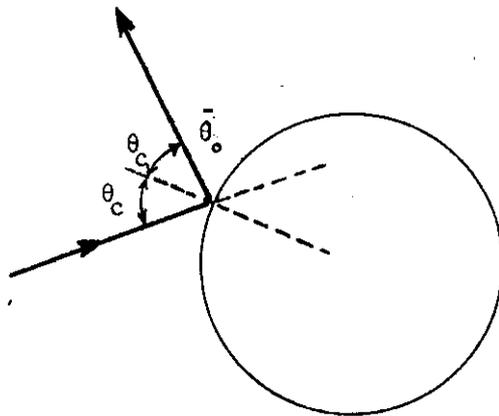


Fig.14

Dans ce dernier cas on constate que l'intégrand  $I_2(v)$  de (46) converge très rapidement dans le demi-plan complexe  $\text{Im}(v)$  positif. Ainsi que dans la zone du quatrième quadrant pour laquelle  $[\eta_2 > \frac{\pi - \theta}{2} \text{ [} \eta_2 = \epsilon \text{ Log[} |e\beta 2^{-1} v^{-1}| \text{]}]$ , voir Annexe III]. Ceci justifie le fait que l'on puisse déformer le contour C en un contour D' (fig. 15) sous réserve de prendre en compte les pôles  $v_{n(1)}$  et  $v_{n(2)}$  (donnés en Annexe III - 5 et 7). La parité de l'intégrand ne dépend pas de l'impédance ; l'intégrand est donc toujours impair. Il en résulte que les expressions (46) à (53) sont valables pour  $n < 1$  et qu'il ne reste qu'à déterminer la valeur des résidus  $r_{n(i)}$  définis en (50).

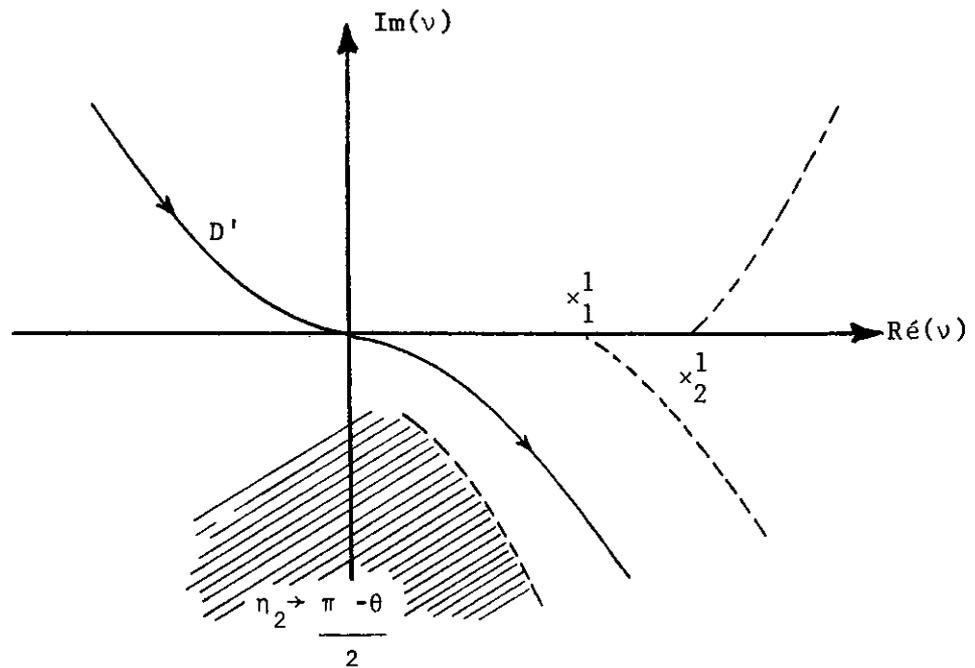


Fig. 15. Divergence de l'intégrand dans la zone hachurée.

Il n'est pas très difficile de s'assurer que la solution (56) est toujours valable à condition d'y remplacer la valeur de  $v_{n(1)}$  pour  $n > 1$  par celle donnée pour  $n < 1$  (voir Annexe III - (5)). Il s'ensuit que l'interprétation de l'élément  $\psi_2^1(1)$  est la même que celle donnée auparavant. De même l'approximation de (57) afférente aux pôles  $v_{n(2)}$  est encore valable, cependant les résidus correspondants  $r_{n(2)}$  doivent être remplacés par :

$$(60) \quad r_{n(2)} = - 2n \left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1/2} \exp\{-2i\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{1/2} x_1^1 + 2iv_{n(2)} \arccos n\} \cdot$$

Soit  $\bar{\theta}_0$  l'angle supplémentaire du double de l'angle d'incidence critique (fig. 14) d'après (59) on a :

$$(61) \quad \bar{\theta}_0 = \pi - 2\theta_c = 2 \operatorname{Arccos} n ,$$

qui est l'angle apparaissant dans (60). En utilisant (60), (61) et les développements asymptotiques de l'annexe I (I.17) il résulte que la solution (57) devient :

$$(62) \quad \left[ \begin{array}{l} \psi_2^1(2) = \sum_n C_4(v_{n(2)}) \exp\{i\beta_2[(r^2 - r_1^2 n^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_1^2 n^2)^{1/2} - 2r_1 \sqrt{1-n^2}]\} \\ x \left\{ e^{i v_{n(2)} \delta_0} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [\exp(i v_{n(2)} \delta_m) - i \exp(i v_{n(2)} \gamma_m)] \right\} \end{array} \right. ,$$

avec :

$$(63) \quad \left[ \begin{array}{l} C_4(v_{n(2)}) = \frac{f e^{-i\pi/4} [(r^2 - r_1^2 n^2)(r_s^2 - r_1^2 n^2)]^{-1/4}}{2C_{T_2}^2 \sqrt{2\pi \times \frac{1}{r} r_s \sin\theta (1-n^2)}} , \\ \delta_m = 2m\pi + \theta + \bar{\theta}_0 - \arccos \frac{r_1}{r} n - \arccos \frac{r_1}{r_s} n , \\ \gamma_m = 2m\pi - \theta + \bar{\theta}_0 - \arccos \frac{r_1}{r} n - \arccos \frac{r_1}{r_s} n . \end{array} \right. ,$$

La construction géométrique réalisée sur la fig. 16, illustre l'interprétation physique des deux premiers termes de (62). La présence du facteur  $2m\pi$  dans (63) implique simplement que les ondes, correspondantes à l'ordre  $m=p$  de la série, ont effectué  $p$  fois le tour de la sphère en plus des trajets  $S_1 S_1'$  ou  $S_2 S_2'$  parcourus sur la surface de celle-ci. La différence entre (62) et les solutions précédentes se situe au niveau de la phase des ondes dans laquelle s'introduit l'angle d'incidence critique<sup>(+)</sup>. Avec (62) on constate que les ondes de surface ne sont plus excitées ou éteintes par des rayons tangents mais suivant des rayons  $S S_1$ ,  $SS_2$  ou  $S_1' P$ ,  $S_2' P$  inclinés de l'angle d'incidence critique  $\theta_c$  sur la normale en  $S_1, S_2, S_1', S_2'$ . En outre, en première

(+) Frisk et Überall (1976) ont mis en évidence un résultat similaire pour des ondes acoustiques venant frapper un cylindre élastique immergé dans un fluide.

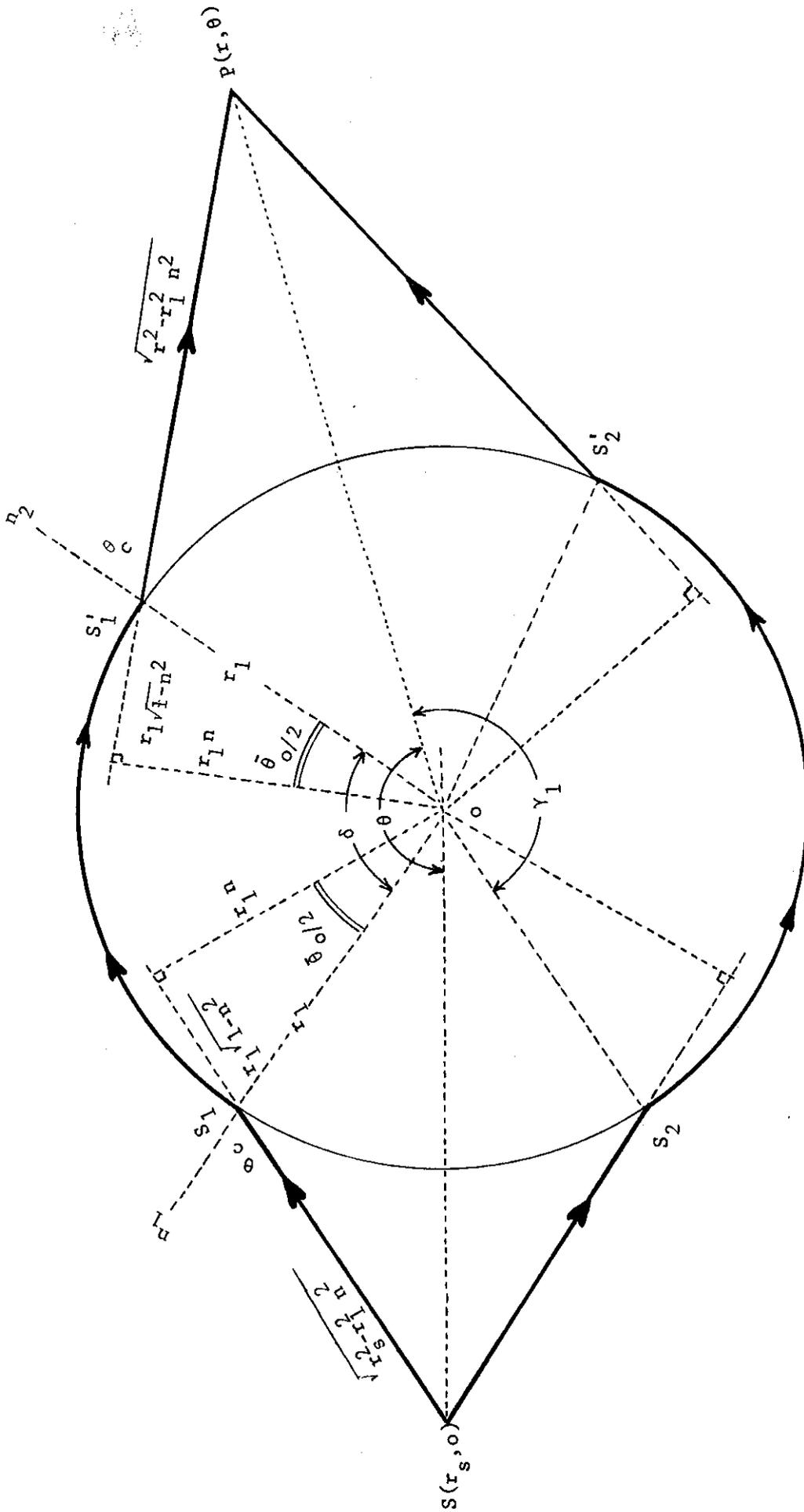


Fig.16. Interprétation des deux premiers termes de (62), les autres se déduisent de ceux-ci par des rotations de  $2\pi$ .

approximation, de la valeur  $v_{n(2)} \sim \beta_1 r_1$  (Annexe III. (III.7)) il ressort que ces ondes de surface parcourent  $\Sigma_1$  avec une vitesse proche de celle des ondes dans la sphère. Une analyse analogue à celle réalisée en (22) laisse percevoir que le caractère dispersif des ondes sur la surface  $\Sigma_1$  est conservé. De plus, cette solution n'est à retenir que dans la zone d'ombre en ce qui concerne le premier terme  $\delta_0$  de la série.

Si l'on compare  $g(v)$  à son homologue  $g_1(v)$  du paragraphe 1 on constate une différence entre ces deux fonctions par la présence dans  $g(v)$  du coefficient  $R_{21}$  (dont le module est inférieur à 1). Dans la zone "éclairée" la méthode du col peut être utilisée, et, conduit à un découpage de cette région analogue à celui obtenu pour le modèle à une sphère parfaitement rigide. Toutefois, le coefficient de réflexion doit être évalué au col. Nous laissons volontairement de côté ce calcul pour nous préoccuper de l'influence, dans l'espace infini, d'une couche quelconque d'une sphère stratifiée.

#### 5 - INFLUENCE SUR LA SOLUTION DANS L'ESPACE INFINI D'UNE COUCHE QUELCONQUE.

Grâce au développement de Debye (3.20), le chapitre III nous a fourni la solution exacte pour un espace infini contenant un nombre fini des sphères concentriques. Ce développement permet de discerner dans la solution générale les termes susceptibles de renfermer les effets induits par tel constituant du modèle. Ainsi on peut donc réaliser une évaluation asymptotique de l'élément  $\psi^{(p)}$  de la série qui, à lui seul, correspond aux phénomènes que l'on souhaite apprécier.

Dans ce qui suit, nous précisons l'influence d'une couche  $p$  quelconque, sur la solution globale, dans le cas où la vitesse des ondes décroît d'une couche à l'autre lorsque l'on se rapproche du centre du modèle. On suppose que :

$$(64) \quad C_{T_{m+1}} = C_{T_m} > C_{T_{m-1}} > \dots > C_{T_p} \cdot$$

De façon précise nous nous plaçons dans le cadre où :

$$(65) \quad x_p^p > \dots > x_m^{m-1} > x_m^m > x^m .$$

De (3.21) l'élément  $\psi^{(p)}$  s'écrit :

$$(66) \quad \left[ \begin{array}{l} \psi^{(p)} = \frac{\psi_0}{x^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} v g^{(p)}(v) P_{v-1/2}(\cos \theta) \quad , \quad r > r_m \quad , \\ g^{(p)} = H_v^{(1)}(x) H_v^{(1)}(x_s) t_{m+1,m} t_{m,m+1} \dots t_{p+1,p} t_{p,p+1} r_{p,p-1} . \end{array} \right.$$

Pour  $v$  complexe, à partir des relations (2.26) définissant chacun des termes de  $g^{(p)}(v)$ , il résulte que cette quantité n'a aucun pôle sur l'axe réel de  $v$  positif. Nous pouvons utiliser la transformation de Watson pour la série (66). Ceci nous conduit à échanger l'étude de (66) avec celle de l'intégrale :

$$(67) \quad \psi^{(p)} = \frac{\psi_0}{2i x^{1/2}} \int_C \frac{v g^{(p)}(v) P_{v-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi v} dv \quad ,$$

où  $C$  est le contour de la fig.5 qui enlace le demi-axe  $\text{Ré}(v) > 0$ .

L'étude de l'intégrand (67) montre que ce dernier converge dans le demi-plan complexe  $\text{Im}(v) > 0$  et dans le quatrième quadrant dès que  $\eta_m > \frac{\pi-\theta}{2}$  [voir annexe III où  $\eta_m = \epsilon \text{Log} \left| \frac{e^{x_m}}{2v} \right|$ ,  $\epsilon > 0$ ]. Cela permet de passer du contour  $C$  au contour  $D$  (fig.17) à condition de prendre en compte les séries de résidus provenant des pôles  $v_{nk}$  de la fonction  $g^{(p)}(v)$  ce qui donne :

$$(68) \quad \psi^{(p)} = \frac{\psi_0}{2i} \int_D \frac{v g^{(p)}(v) P_{v-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi v} dv + \pi \psi_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \sum_{n_k} \text{Rés}(f, v_{nk}) .$$

où  $\text{Rés}(f, v_{nk})$  désigne le résidus de l'intégrand (67) en ses divers pôles  $v_{nk}$ .

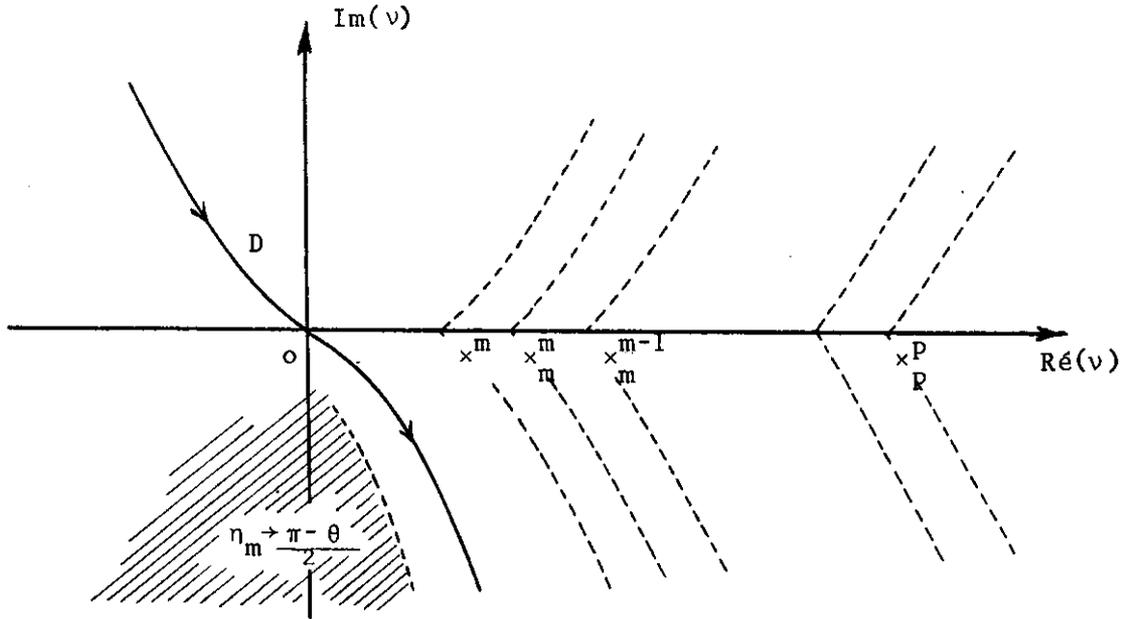


Fig. 17. Divergence de l'intégrant de (67) dans la zone hachurée lieu des pôles (dans  $\text{Im}(v) > 0$  pôles voisins de  $H_v^{(1)}$ , dans  $\text{Im}(v) < 0$  pôles voisins de  $H_v^{(2)}$  - voir annexe IV.3)

A partir des propriétés sur la parité des fonctions  $H_v^{(1)}$ ,  $H_v^{(2)}$  et  $P_n(\eta)$  (données en annexe I-(13)), on constate que l'intégrant de (67) est une fonction impaire de  $v$ . L'intégrale (68) prise le long du contour  $D$  symétrique par rapport à l'origine est nulle. Le champ  $\psi^{(p)}$  se réduit à :

$$(69) \quad \psi^{(p)} = \pi \psi_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \sum_{n_k} \text{Rés}(f, v_{nk})$$

De (2.26) et de (66) il résulte que l'intégrant de (67) possède  $m+1-p$  pôles doubles. Ceux-ci sont liés aux racines des dénominateurs communs aux coefficients  $t_{j,j-1}$  et  $t_{j-1,j}$  ( $j = p+1, \dots, m+1$ ) considérés comme des fonctions de  $v$ , c'est à dire liés aux racines des quantités :

$$(70) \quad d_j = [1 \times_j^k] - N_{kj} [2 \times_k^k] = 0, \quad (j=k+1), \quad k=p, p+1, \dots, m,$$

comptées deux fois. A ces pôles doubles s'ajoutent des pôles simples provenant des racines du dénominateur  $d_p$  du coefficient de réflexion  $r_{p,p-1}$ . Ces séries de pôles [explicitées en annexe IV] sont voisines des zéros des

fonctions  $H_v^{(1)}(x_j^k)$  et  $H_v^{(2)}(x_k^k)$ . Il résulte, de l'hypothèse faite en (6), que les pôles se répartissent dans le plan complexe  $v$  comme indiqué sur la fig. 22 de l'annexe IV ; la série des pôles apportant à (69) une contribution significative, est celle des pôles doubles voisine des zéros de  $H_v^{(1)}(x^m)=0$ , engendrée par  $d_{m+1}^2=0$ , soit :

$$(71) \quad v_{nl} = x^m + e^{i\pi/3} \xi_n \left(\frac{x^m}{2}\right)^{1/3}, \quad N_{m,m+1} < 1,$$

où  $-\xi_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d'Airy  $A_i(-\xi)$ . Par ailleurs, du résultat (71) et de l'hypothèse (65) il vient, qu'à  $O([x^m]^{1/3})$  on a :

$$(72) \quad h_j = \frac{v_{nl}}{\beta_j} < r_j, \quad v_j = m+1, m, \dots, p.$$

Par suite à chaque couche  $j$  correspond un angle de réfraction limite  $\alpha_j^j$  défini par :

$$(73) \quad \sin \frac{v_{nl}}{x_j^j} = \alpha_j^j,$$

ou encore vu (72) :

$$(74) \quad \Pi - 2 \arccos \frac{h_j}{r_j} = 2\alpha_j^j.$$

Après insertion des relations ci-dessus et du calcul des résidus de (68) [voir Annexe IV, 2] dans (69) on obtient :

$$(75) \quad \left[ \begin{aligned} \psi^{(p)} &= B(v) \exp i \phi_\ell \left\{ \sum_n (a_i^!)^{-2} \delta_o^+ \exp (i v_{nl} \delta_o^+) \right. \\ &+ \left. \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \left[ \sum_n \{ (a_i^!)^{-2} [\delta_q^+ \exp (i v_{nl} \delta_q^+) + i \delta_q^- \exp (i v_{nl} \delta_q^-) ] \} \right] \right\} \end{aligned} \right]$$

$$\phi_\ell = \beta_{m+1} \left\{ (r^2 - r_m^2)^{1/2} + (r_s^2 - r_m^2)^{1/2} \right\} + 2 \sum_{j=m}^p \left\{ \beta_j [(r_j^2 - h_j^2)^{1/2} (r_{j-1}^2 - h_j^2)^{1/2}] \right\},$$

avec

$$(76) \quad \delta_q^\pm = 2q\pi \pm \theta - \left\{ \arccos \frac{r_m}{r} + \arccos \frac{r_m}{r_s} + 2 \sum_{j=m}^p \left[ \arccos \frac{h_j}{r_j} - \arccos \frac{h_j}{r_{j-1}} \right] \right\},$$

$$(76) \quad \left[ \begin{array}{l} B(v) = \frac{(2x^m)^{1/2} \psi_0 \cos \alpha_p^p 4^{m-p} e^{i\pi/12 [x^2 - (x^m)^2]^{-1/4} [x_s^2 - (x^m)^2]^{-1/4}}}{(\sin \theta)^{1/2} \pi^{3/2} (2/x^m)^{1/3} [(x^m/x^m)^2 - 1]} \\ \\ \prod_{j=m}^{p+1} \left[ \frac{\cos \alpha_j^j \cos \alpha_j^{j-1}}{(\cos \alpha_j^{j-1} - N_{j-1,j} \cos \alpha_{j-1}^{j-1})^2} \right] \end{array} \right] .$$

Le domaine de validité de (75) est imposé comme dans les paragraphes précédents par le premier terme en  $\delta_0^+$  de la série. Il nous faut  $\delta_0^+ > 0$ . Ceci nous définit la zone d'ombre pour laquelle la solution est valable dans son ensemble soit d'après (76)<sub>2</sub>,

$$(77) \quad \theta > \theta_0 + 2 \sum_{j=m}^p \left( \arccos \frac{h_j}{r_j} - \arccos \frac{h_j}{r_{j-1}} \right) .$$

La somme des différences dans (77) étant positive on a donc une zone d'ombre qui est plus grande que pour les termes analogues caractéristiques des couches supérieures.

Sous la forme (75), la contribution de la couche p au champ global régnant dans le milieu infini est claire et s'interprète facilement en termes d'optique géométrique. Un exemple de cette interprétation est dépeint par la figure 18, qui, dessinée dans le cas particulier  $p=2$  et  $m=3$ , correspond aux déductions émanantes des termes de phase  $\phi_\ell, \delta_0^+$  et  $\delta_1^-$ . Ceux-ci ont respectivement pour image des segments de droite (coef.  $\phi_\ell$ ) ou des arcs de cercle (coef.  $\delta_q^\pm$ ). D'une manière générale, la première série de termes de (75) est constituée de tous les rayons qui, arrivant de la source S tangentielllement à la sphère  $\Sigma_m$ , pénètrent dans les couches successives selon l'angle de réfraction limite  $\alpha_j^j$  relatif à chaque couche j rencontrée, et ce, jusqu'à la couche p où ils se réfléchissent sur la sphère  $\Sigma_{p-1}$ ; ensuite ces rayons émergent d'une couche à l'autre jusqu'à la couche m pour enfin émerger de la

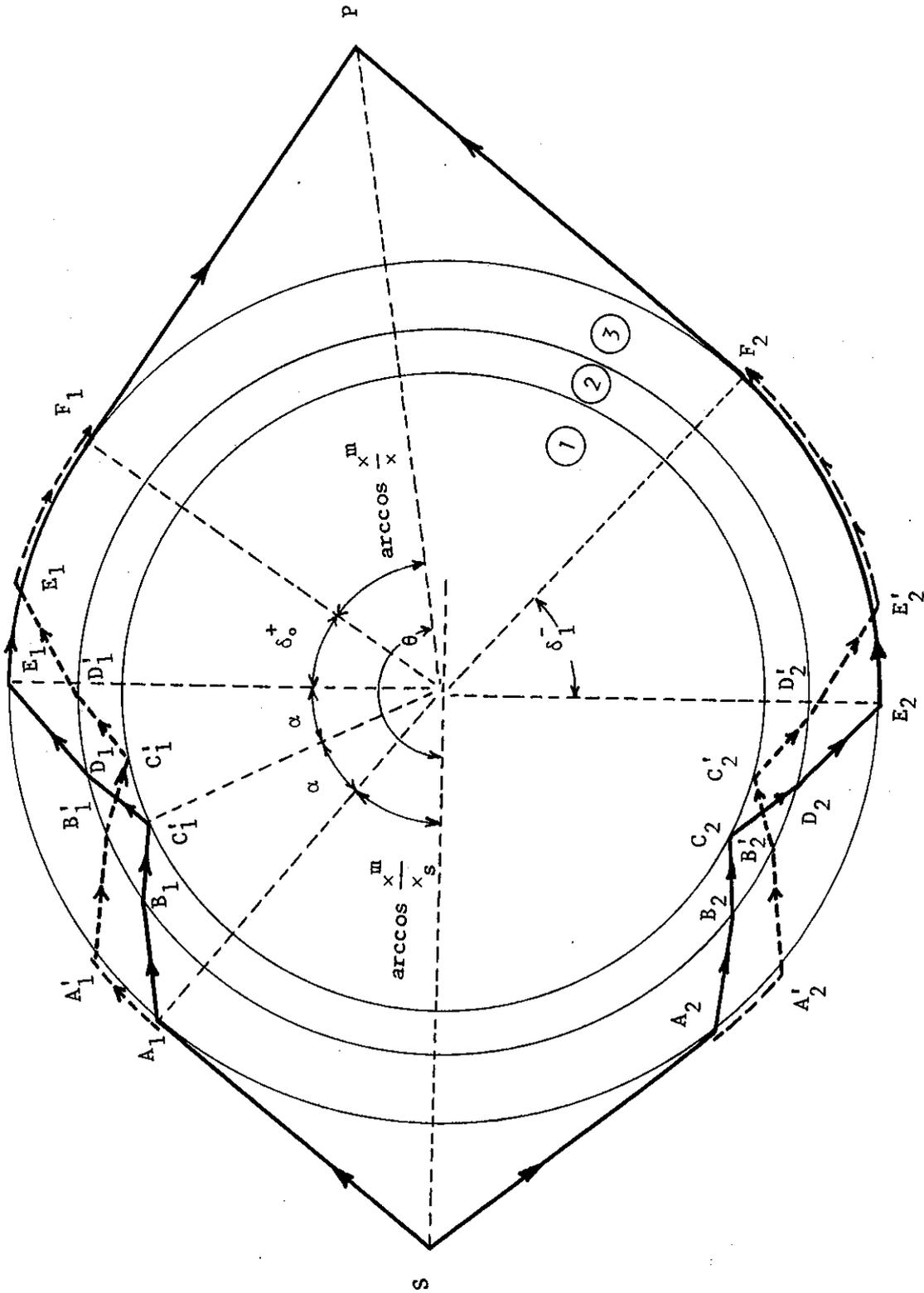


Fig.18 Interprétation physique de (75) dans le cas particulier  $p=2$  et  $m=3$  ;  
 on a posé  $\alpha = \arccos \frac{h_3}{r_3} - \arccos \frac{h_2}{r_2} + \arccos \frac{h_1}{r_1}$

sphère  $\Sigma_m$ . A partir de ce point d'émergence des ondes de surface prennent naissance (cf. vitesse différente dans  $\phi_\ell$  et  $\delta_q^\pm$ ) et parcourent une partie de la sphère  $\Sigma_m$  avant de s'éteindre aux points où les rayons quittent tangentielle- ment la sphère vers le point P situé dans la zone d'ombre (trajet du type  $SA_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  pour  $\delta_0^+$  et du type  $SA_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2$  pour  $\delta_1^-$  fig.18). Il en résulte que les ondes de surface créées sur  $\Sigma_m$  sont excitées ou éteintes selon l'angle de réfraction limite  $\alpha_{m+1}^m$  relatif à la couche m. Les autres éléments composants  $\psi^{(p)}$ , comme on le voit d'après (76), se distinguent des premiers par la présence du terme  $2q\pi$  qui indique simplement qu'à l'ordre  $q=s$  les ondes de surface ont effectué s fois le tour de  $\Sigma_m$  en plus des trajets décrits ci-dessus. En outre, ces ondes de surface sont dispersives, évanescentes et se propagent avec une vitesse inférieure à celle  $C_{T_{m+1}}$  des ondes SH du milieu infini. Cependant, avant de pénétrer dans les couches successives les rayons peuvent aussi effectuer une partie de leur trajet sur la sphère  $\Sigma_m$  (chemin en pointillés de la fig.18). Ces trajets complémentaires sont essentiellement dus à la présence du facteur  $\delta_q^\pm$  devant les exponentielles de (75) comme nous le verrons plus loin. Analytiquement ils proviennent des pôles doubles figurant dans l'intégrale (67) ce qui est l'une des nouveautés de ce paragraphe en regard des précédents.

Ce faisant, la solution obtenue suscite quelques remarques. On peut s'assurer que les résultats asymptotiques (75) généralisent ceux obtenus au paragraphe précédent et dans le cas du modèle à deux sphères concentriques (Gérard 1979). Il convient de noter qu'ils sont aussi en accord avec ceux que l'on peut obtenir à l'aide de la théorie des rayons de Levy et Keller (1953). En effet, la phase du  $n^{\text{ième}}$  harmonique qui exécute le trajet géométrique d'un rayon tel que  $SA_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  (fig.18) est donnée par  $\exp i\phi_\ell \exp i\nu_{n1} \delta_0^+$ . Considérons un faisceau élémentaire de rayons compris entre les points  $E_1$  et  $E_1'$  séparés d'un angle  $d\Omega$ . La contribution à la solution de l'ensemble des rayons de ce faisceau élémentaire est  $dA = \exp i\phi_\ell \exp i\nu_{n1} \delta_0^+ d\Omega$ . Or, la solution doit englober tous les faisceaux de ce type inclus entre les points  $E_1$  et  $F_1$ ;  $d\Omega$  varie donc de 0 à  $\delta_0^+$ . La contribution totale est donnée par :

$$(78) \quad \exp i\phi_\ell \int_0^{\delta_0^+} \exp(i\nu_{n1} \delta_0^+) d\Omega = \exp(i\phi_\ell) \cdot \delta_0^+ \exp(i\nu_{n1} \delta_0^+) \cdot$$

On retrouve ainsi la phase de l'harmonique de rang  $n$  de la première série de (75). Il en est de même en ce qui concerne les rayons qui s'enroulent plusieurs fois autour de  $\Sigma_m$  (remplacement de  $\delta_o^+$  par  $\delta_q^\pm$  dans (78)) et l'application du principe de superposition établit le lien entre (75) et la théorie des rayons.

Par ailleurs, avec (75) on a la contribution à la solution générale correspondante au premier terme rendant compte d'une couche quelconque  $q$  telle que  $p < q < m$ . D'après (76) nous observons que la longueur du trajet parcouru par les ondes de surface sur  $\Sigma_m$  est d'autant plus courte que la couche  $q$  considérée est plus profonde. Enfin à ce stade de l'analyse on remarque aussi que la relation (72) permet de savoir, a priori, quel est le nombre maximum de couches pouvant avoir, en première approximation, une influence sur la solution globale régnant dans le milieu infini. En effet, si on suit un rayon en partant de la couche  $m$ , la première couche pour laquelle la condition (72) est violée, est une couche qui est traversée par des rayons ne se réfléchissant pas sur la sphère qui la limite inférieurement. Dès lors, les couches suivantes ne sont traversées par aucun rayon et celles-ci n'ont donc aucune incidence sur le phénomène de diffraction qui se manifeste dans le milieu infini.

La voie empruntée dans ce chapitre, pour acquérir quelques renseignements asymptotiques associés aux développements des chapitres précédents, a permis de mettre au jour un certain nombre d'effets communs avec le modèle de sphère fluide.

La présence d'ondes de surface, faisant plusieurs fois le tour de l'inclusion, est intimement liée au facteur  $(\cos\pi\nu)^{-1}$  dans la transformation de Watson. Le caractère dispersif des ondes de surface, quant à lui, est engendré par la méthode des résidus et ne peut être dissocié de la structure des pôles. Enfin l'interprétation de la solution en termes d'optique géométrique et l'extension des lois de Descartes aux ondes élastiques SH sont naturellement introduites par la méthode du col ou la transformation de

Watson selon les circonstances.

Néanmoins, l'introduction d'une certaine rigidité du milieu stratifié a laissé transparaître des résultats plus spécifiques d'un caractère élastique de la sphère, notamment grâce à la possibilité d'avoir un angle d'incidence critique que l'on retrouve dans le mécanisme d'excitation et d'extinction des ondes de surface, lorsque la sphère est plus rigide que le milieu infini par exemple. Ce dernier résultat est en parfait accord avec les relevés expérimentaux de Bertoni et Tamir (1973) (cas d'un faisceau acoustique d'ondes planes venant frapper un demi-espace élastique plongé dans l'eau) ou de Frisk et Überall (1976) (cas du cylindre métallique immergé).

ANNEXE DU CHAPITRE V

I - RAPPELS ET COMPLEMENTS.

Partant des représentations intégrales des fonctions de Bessel et de Hankel<sup>(+)</sup> on établit, en utilisant la méthode du col, les comportements asymptotiques ci-après (pour l'ordre  $\nu$  et l'argument  $z$  grands) :

Zone →	A	B	C	D	E
$H_\nu^{(1)}(z) \dots$	$-i A e^{-\alpha(z)}$	$A e^{\alpha(z)}$	$A e^{\alpha(z)}$	$-A e^{\alpha(z)-2i\nu}$	$-i A e^{-\alpha(z)}$
$H_\nu^{(2)}(z) \dots$	$i A e^{-\alpha(z)}$	$i A e^{-\alpha(z)}$	$-A e^{\alpha(z)+2i\nu}$	$A e^{\alpha(z)}$	$A e^{\alpha(z)}$
$J_\nu(z) \dots \dots$	$\frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$	$\frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$	$\frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$	$\frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$	$\frac{A}{2} e^{\alpha(z)}$
$H_\nu^{(1)}(z) \dots$	$i B e^{-\alpha(z)}$	$B e^{\alpha(z)}$	$B e^{\alpha(z)}$	$-B e^{\alpha(z)-2i\nu}$	$i B e^{-\alpha(z)}$
$H_\nu^{(2)}(z) \dots$	$-i B e^{-\alpha(z)}$	$-i B e^{-\alpha(z)}$	$-B e^{\alpha(z)+2i\nu}$	$B e^{\alpha(z)}$	$B e^{\alpha(z)}$
$J_{-\nu}(z) \dots$	-	$i \frac{A}{2} e^{-[\alpha(z)+i\nu]}$	$i \frac{A}{2} e^{-\alpha(z)-2i\nu}$	$-i \frac{A}{2} e^{-\alpha(z)+i\nu}$	$-i \frac{A}{2} e^{-\alpha(z)+i\nu}$

où

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right)^{-1/4}, \quad B = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right)^{1/4}$$

ainsi quand  $|\nu| \rightarrow \infty$ , on a

$$(I.1.) \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu}}, \quad B = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}, \quad e^{\alpha(z)} = \left(\frac{ze}{2\nu}\right)^\nu.$$

Les zéros des fonctions  $H_\nu^{(1)}(z)$  [resp.  $H_\nu^{(2)}(z)$ ] se localisent asymptotiquement le long des courbes  $h_1$  et  $h_{-1}$  [resp.  $h_2$  et  $h_{-2}$ ] dont la tangente

(+) - Watson, G.N. *Treatise on the Theory of Bessel Functions* (1962).  
 - Nussenzveig H.H. *High Frequency Scattering by an impenetrable sphere* (1965).

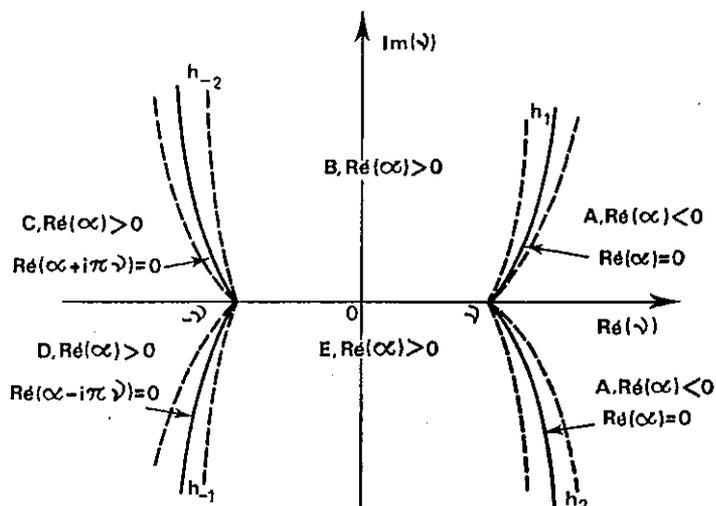


Fig. 19

devient verticale lorsque  $|\nu| \rightarrow \infty$ . Asymptotiquement les courbes tendent vers  $\nu = \sigma|\nu|$  et  $\eta \rightarrow -\pi/2$ , où  $\sigma$  et  $\eta$  sont définis par

$$(I.2) \quad \sigma = \exp(i\pi/2 + i\varepsilon), \quad \eta = \varepsilon \text{Log} \left| \frac{2\nu}{ez} \right|.$$

Au voisinage des courbes  $h_1$  et  $h_2$  les deux cols sont de même importance de sorte que les développements à utiliser dans ces zones sont

$$(I.3) \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = 2A \exp(i\pi/4) \text{Sh}(\alpha(z) - i\pi/4) \quad \text{dans AB,}$$

$$(I.4) \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = -2A \exp(-i\pi\nu - i\pi/4) \text{Sh}(\alpha(z) - i\pi\nu + i\pi/4) \quad \text{dans DE,}$$

$$(I.5) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = -2A \exp(i\pi\nu + i\pi/4) \text{Sh}(\alpha(z) - i\pi\nu - i\pi/4) \quad \text{dans BC,}$$

$$(I.6) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = 2A \exp(-i\pi/4) \text{SH}(\alpha(z) + i\pi/4) \quad \text{dans EA,}$$

où les deux lettres indiquent la zone voisine de la courbe  $h_i$  (ou  $h_{-i}$ ) qui sépare les deux régions repérées par ces mêmes lettres.

Dans la zone BE, proche de l'axe réel, on a le développement asymptotique de Debye soit :

$$(I.7) \left[ \begin{aligned} H_v^{(1,2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - v^2)^{-1/4} \exp\{\pm i[(x^2 - v^2)^{1/2} - v \arccos \frac{v}{x} - \pi/4]\} \\ &\times \{1 \mp \frac{i}{8(x^2 - v^2)^{1/2}} [1 + \dots]\}, \end{aligned} \right.$$

avec  $(x^2 - v^2)^{-1/4} > 0$ ,  $0 < \arccos(v/x) < \pi/2$  pour  $-x < v < x$  dans (I.7) le signe supérieur (resp. inférieur) vaut pour  $H_v^{(1)}(x)$  (resp.  $H_v^{(2)}(x)$ ).

Le long des courbes  $h_i$  (et  $h_{-i}$ ) on a besoin des développements suivants (cf. Abramowitz, Stegun-Dover 1970) valables au voisinage de  $v=x$  et si  $|v-x|=0(v^{1/3})$  :

$$(I.8) \quad H_v^{(1,2)}(x) = 2e^{\mp i\pi/3} \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} A_i \left[ (v-x) \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} e^{\pm i\pi/3} \right],$$

$$(I.9) \quad J_v(x) = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} A_i \left[ (v-x) \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} \right],$$

enfin si  $(v-x) = 0(x)$  et  $(x-y) = 0(y)$  avec  $(x-y) = 0(x)$  on a (Streifer, Kodis 1964) :

$$(I.10) \quad \times \frac{H_v^{(1)}(x)}{H_v^{(1)}(x)} \sim i(x^2 - v^2)^{1/2} - \frac{x^2}{2(x^2 - v^2)} + \dots \quad (\text{zones B et E}),$$

$$(I.11) \quad \times \frac{H_v^{(1)}(x)}{H_v^{(1)}(x)} \sim \frac{H_v^{(2)}(x)}{H_v^{(2)}(x)} \sim -(v^2 - x^2)^{1/2} + \frac{x^2}{2(x^2 - v^2)} + \dots \quad (\text{zone A}).$$

Pour les polynômes de Legendre les développements asymptotiques utilisés sont (Robin 1957)

$$(I.12) \quad P_{v-1/2}(\cos\theta) = \left(\frac{2}{\pi v \sin\theta}\right)^{1/2} \left[ \cos(v\theta - \pi/4) + \frac{1}{8v} \cot\theta \sin(v\theta - \pi/4) + O(v^{-2}) \right]$$

avec  $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ ,  $|v| \gg 1$ ,  $\varepsilon |v| \gg 1$ .

Il est tenu compte dans le texte des relations classiques :

$$(I.13) \quad \begin{cases} H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(x) & ; H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(x) & ; \\ 2J_{\nu}(x) = H_{\nu}^{(1)}(x) + H_{\nu}^{(2)}(x) & ; P_{-\nu-1/2}(\cos\theta) = P_{\nu-1/2}(\cos\theta) & ; \end{cases}$$

$$(I.14) \quad W(H_{\nu}^{(1)}(x), H_{\nu}^{(2)}(x)) = H_{\nu}^{(1)}(x)H_{\nu}^{(2)}(x) ([2x] - [1x]) = -4i(\pi x)^{-1} ,$$

où W désigne le Wronskien de  $H_{\nu}^{(1)}$  et  $H_{\nu}^{(2)}$ .

$$(I.15) \quad H_{\nu}^{(1)}(x)H_{\nu}^{(2)}(y) - H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(x) \equiv 2\{J_{\nu}(x)H_{\nu}^{(2)}(y) - H_{\nu}^{(2)}(x)J_{\nu}(y)\} ,$$

$$(I.16) \quad H_{\nu}^{(1)}(x)H_{\nu}^{(2)}(y) - H_{\nu}^{(1)}(y)H_{\nu}^{(2)}(x) \equiv 2\{J_{\nu}(y)H_{\nu}^{(1)}(x) - H_{\nu}^{(1)}(y)J_{\nu}(x)\} ,$$

(cf. Robin 1957 p.89) :

$$Q_{\nu-1/2}^{(1)} = \frac{\exp\{-i(\nu\theta-\pi/4)\}}{\sqrt{2\pi\nu\sin\theta}} & ; & Q_{\nu-1/2}^{(2)}(\cos\theta) = \frac{\exp\{i(\nu\theta-\pi/4)\}}{\sqrt{2\pi\nu\sin\theta}} .$$

Les trois premiers zéros de la fonction d'Airy  $A_1(-x)$  sont

$$\xi_1 = 2,33811 \quad \xi_2 = 4,08795 \quad \xi_3 = 5,52056$$

d'une manière générale tous les  $\xi_n$  sont positifs (V.A.Fock, Vol.1, p.384, 1965)

On a aussi :

$$(I.17) \quad 2J_{\nu}(y) = H_{\nu}^{(1)}(y) + H_{\nu}^{(2)}(y) \Rightarrow 2J_{-\nu}(y) = H_{-\nu}^{(1)}(y) + H_{-\nu}^{(2)}(y) \Rightarrow$$

$$(I.18) \quad 2J_{-\nu}(y) = e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(y) + e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(y) .$$

Avec (I.17) on remplace  $H_{\nu}^{(1)}$  par  $H_{\nu}^{(2)}$  d'où :

$$(I.19) \quad \begin{cases} 2J_{-\nu}(y) = e^{i\pi\nu} [2J_{\nu}(y) - H_{\nu}^{(2)}(y)] + e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(y) , \\ 2J_{-\nu}(y) = e^{-i\pi\nu} [2J_{\nu}(y) - H_{\nu}^{(1)}(y)] + e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(y) , \end{cases}$$

d'où :

$$(I.20) \quad J_{-\nu}(y) = e^{i\pi\nu} J_{\nu}(y) - H_{\nu}^{(2)}(y) \sin i\pi\nu ,$$

$$(I.21) \quad J_{-\nu}(y) = e^{-i\pi\nu} J_{\nu}(y) + H_{\nu}^{(1)}(y) \sin i\pi\nu ,$$

et ainsi il vient :

$$(I.22) \quad J_{\nu}(y) = e^{i\pi\nu} J_{-\nu}(y) - e^{-i\pi\nu} \sin i\pi\nu H_{\nu}^{(1)}(y) ,$$

$$(I.23) \quad J_{\nu}(y) = e^{-i\pi\nu} J_{-\nu}(y) + e^{i\pi\nu} \sin i\pi\nu H_{\nu}^{(2)}(y) .$$

## II - CONVERGENCE DE L'INTEGRALE (5.5).

On pose :  $x = x_2^1$  ,  $y = x_s$  ,  $z = x_2$

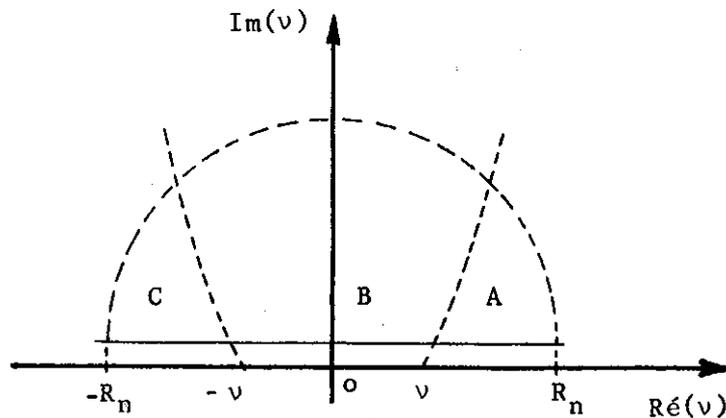


Fig. 20

### 1) Dans la zone A

On utilise (I.15) pour mettre  $g_1$  sous la forme :

$$(II.1) \quad g_1 = 2 \frac{H_{\nu}^{(1)}(y)}{H_{\nu}^{(1)}(x)} \{ J_{\nu}(x) H_{\nu}^{(2)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(x) J_{\nu}(z) \} \text{ avec } x < z < y .$$

Pour  $z$  et  $\nu$  grands, on utilise les valeurs asymptotiques des fonctions de Hankel et de Bessel, données par le tableau de l'annexe I, d'où :

$$g_1 \sim iA^2 e^{\alpha(x)-\alpha(y)} \{e^{\alpha(x)-\alpha(z)} - e^{\alpha(z)-\alpha(x)}\}$$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{v \operatorname{Log} \frac{x}{y}} \{e^{v \operatorname{Log} \frac{x}{y}} - e^{-v \operatorname{Log} \frac{x}{y}}\} ;$$

or,  $x < z < y \Rightarrow \frac{x}{z} < 1$ , comme dans la région A  $\operatorname{Ré}(v) > 0$ , l'accolade se comporte comme :

$$e^{-v \operatorname{Log} x/z}$$

d'où

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{v \operatorname{Log} z/y}$$

or  $z/y < 1 \Rightarrow g \rightarrow 0$  exponentiellement quand  $|v| \rightarrow +\infty$  .

### 2) Dans la zone B $\operatorname{Ré}(v) > 0$

On peut de même utiliser la forme (II.1) d'où :

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{\alpha(y)-\alpha(x)} \{e^{\alpha(x)-\alpha(z)} - e^{-\alpha(x)+\alpha(z)}\} \Rightarrow$$

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi v} e^{v \operatorname{Log} y/x} \{e^{v \operatorname{Log} x/z} - e^{-v \operatorname{Log} x/z}\}_{x/z < 1} ,$$

$g_1$ , quand  $|v| \rightarrow +\infty$ , se comporte comme :

$$\frac{2i}{\pi v} e^{v \operatorname{Log} y/z} , \quad \operatorname{Ré}(v) > 0 .$$

### 3) Dans les zones B $\operatorname{Ré}(v) < 0$ et C.

On utilise la formule (I.16) d'où :

$$(II.2) \quad g_1 = 2 \frac{H_v^{(1)}(y)}{H_v^{(1)}(x)} \{J_v(x)H_v^{(1)}(z) - J_v(z)H_v^{(1)}(x)\} \quad \text{avec } x < z < y .$$

On utilise la formule (I.22) dans (II.2) pour en déduire :

$$g_1 = 2e^{i\pi\nu} \{ J_{-\nu}(x) H_{\nu}^{(1)}(z) - J_{-\nu}(z) H_{\nu}^{(1)}(x) \} \frac{H_{\nu}^{(1)}(y)}{H_{\nu}^{(1)}(x)}$$

or dans ces zones on a :

$$J_{-\nu} = i \frac{A}{2} e^{-(\alpha+i\pi\nu)} \quad \text{et} \quad H_{\nu}^{(1)} = Ae^{\alpha}$$

d'où

$$g_1 = \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } y/x} \{ e^{\nu \text{Log } x/z} - e^{-\nu \text{Log } x/z} \}$$

$$\text{Ré}(\nu) < 0 \text{ et } y/z < 1 \Rightarrow g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } y/z}$$

donc  $g_1$ , quand  $|\nu| \rightarrow +\infty$ , converge exponentiellement vers zéro dans les régions B  $\text{Ré}(\nu) < 0$  et C.

En résumé, on a les comportements ci-après pour  $g_1$  :

dans A

$$g_1 \sim \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } z/y}, \quad z/y < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) > 0 ;$$

dans B

$$\left[ \begin{array}{l} g_1 \sim \frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) > 0 , \\ g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) < 0 ; \end{array} \right.$$

dans C

$$g_1 \sim -\frac{2i}{\pi\nu} e^{\nu \text{Log } y/z}, \quad y/z < 1 \text{ et } \text{Ré}(\nu) < 0 .$$

Ces résultats permettent d'établir sans difficulté la relation (5.5) pour la fonction  $g_1$ . Il en est de même pour la fonction  $g_2$ .

III - PÔLES ; CONVERGENCE D'INTEGRALE DU PARAGRAPHE 4.

1) Recherche des pôles de (5.6).

Le problème à résoudre est le suivant : pour  $x_2^1$  et  $x_1^1$  donnés quels sont les valeurs de l'ordre  $\nu$  des fonctions de Hankel pour que :

$$(III.1) \quad [1x_2^1] - N_{12}[2x_1^1] = 0$$

soit vérifiée.

La résolution d'équations du type (III.1) a déjà été traitée par de nombreux auteurs. Aussi nous ne donnons ici que les principales étapes de la méthode dont les détails peuvent être trouvés dans Streifer et Kodis (1964) par exemple :

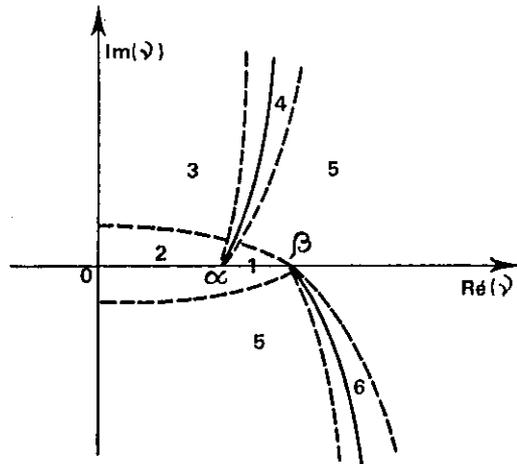


Fig.21

A partir des propriétés (I.13) on établit que les racines de (III.1) sont symétriques par rapport à l'origine ce qui permet de se restreindre au demi-plan  $\text{Re}(\nu)$  positif. Les résultats de l'annexe I imposent de décomposer le demi-plan complexe  $\text{Re}(\nu) > 0$  en six zones (cf. fig.21). Dans les zones 3 et 5 on a  $|\nu - x_1^1| = o(x_2^1)$ ,  $|\nu - x_2^1| = o(x_2^1)$  et  $|x_2^1 - x_1^1| = o(x_2^1)$  de sorte qu'en utilisant (I.10) et (I.11) (III.1) devient :

$$(\nu^2 - (x_2^1)^2)^{1/2} \pm \frac{\mu_1}{\mu_2} (\nu^2 - (x_1^1)^2)^{1/2} = 0 + o(1) \quad .$$

Il s'ensuit que (III.1) a des racines dans les zones 3 et 5 si l'on a

$O(\alpha) = O(\alpha^2)$  ce qui est impossible. De même on s'assure qu'il n'y a pas de racine dans les régions 1 et 2. Dans 4,  $v$  est voisin de  $x_2^1$  et  $|v - x_1^1| = O([x_1^1]^{1/3})$ ,  $|v - (x_2^1)| = O([x_2^1]^{1/3})$ ,  $|v - (x_1^1)| = O([x_1^1])$ ; les racines étant proches des zéros de  $H_v^{(1)}$  on les cherche sous la forme :

$$(III.2) \quad v = x_2^1 + e^{i\pi/3} \frac{\xi}{(2/x_2^1)^{1/3}}, \quad \xi = (v - x_2^1) \left( \frac{2}{x_1^1} \right)^{1/3} e^{-i\pi/3}, \left( \frac{2}{x_2^1} \right)^{1/3} \ll 1 .$$

De (I.8) il résulte que :

$$[1x_2^1] = \left( \frac{2}{x_1^1} \right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \frac{A_i'(-\xi)}{A_i(-\xi)} + O([x_2^1]^{-1}) ,$$

et puisque  $|v - (x_1^1)| + O(x_2^1) \gg (x_1^1)^{1/3}$  ou déduit de (I.10)  $(x_1^1) [2x_1^1] = - (v^2 - (x_1^1)^2)^{1/2} + O(1)$ , de sorte que (III.1) est transformée en

$$(III.3) \quad \left( \frac{2}{x_2^1} \right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \frac{A_i'(-\xi)}{A_i(-\xi)} = - (v^2 - [x_1^1]^2)^{1/2} \frac{\mu_1}{\mu_2 (x_2^1)} .$$

Mais  $A_i'(-\xi)$  est fini pour tout  $\xi$  fini, donc le membre de gauche n'est pas borné uniquement aux zéros de  $A_i(-\xi)$ . On cherche donc  $\xi_n$  voisin des zéros de  $A_i$ . On pose  $\xi_n = x_n - \varepsilon_n$  avec  $A_i(-x_n) = 0$  et on utilise le développement de Taylor de la fonction d'Airy ce qui nous fournit la valeur :

$$\varepsilon_n = - \frac{(2/\alpha)^{1/3} \mu_1 e^{i\pi/3}}{(N_{12}^2 \mu_2^2 / \mu_1^2 - 1)^{1/2}} , \quad N_{12} > 1$$

et par suite avec (III.2) on a :

$$(III.4) \quad v_{n(1)} = x_2^1 + e^{i\pi/3} \frac{x_n}{(2/x_2^1)^{1/3}} + \frac{\mu_2}{\mu_1 (N_{12}^2 \mu_2^2 / \mu_1^2 - 1)^{1/2}} , \quad N_{12} > 1 .$$

Le même processus utilisé lorsque  $N_{12} < 1$  conduit à :

$$(III.5) \quad v_{n(1)} = x_2^1 + e^{i\pi/3} \frac{x_n}{(2/x_2^1)^{1/3}} - \frac{i\mu_2}{\mu_1 (1 - N_{12}^2 \mu_2^2 / \mu_1^2)^{1/2}}, \quad N_{12} < 1.$$

Dans la zone 6,  $v$  est voisin de  $x_1^1$  ; on distingue aussi le cas  $N_{12} > 1$  et  $N_{12} < 1$  et l'on cherche  $v$  tel que :

$$v = x_1^1 + e^{i\pi/3} \frac{\xi}{(2/x_1^1)^{1/3}},$$

Les approximations précédentes sont inversées, on a :

$$x_2^1 [1/x_2^1] = i(v^2 - (x_2^1)^2) + O(1) \text{ et } [2x_1^1] = \left(\frac{2}{x_1^1}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} \frac{A_i'(-\xi)}{A_i(-\xi)}.$$

En posant  $\xi_n = x_n - \varepsilon_n'$  on trouve :

$$\varepsilon_n' = -i \left(\frac{2}{x_1^1}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} \frac{\mu_1}{\mu_2 (1 - \mu_1^2 / N_{12}^2 \mu_2^2)^{1/2}}, \quad N_{12} < 1,$$

d'où il découle :

$$(III.6) \quad v_{n(2)} = x_1^1 + e^{-i\pi/3} x_n \left(\frac{2}{x_1^1}\right)^{1/3} + \frac{i\mu_1}{\mu_2 (1 - \mu_1^2 / N_{12}^2 \mu_2^2)^{1/2}}, \quad N_{12} > 1,$$

de même on a :

$$(III.7) \quad v_{n(2)} = x_1^1 + e^{-i\pi/3} x_n \left(\frac{2}{x_1^1}\right)^{1/3} + \frac{\mu_1 x_1^1}{\mu_2 x_2^1 (1 - N_{12}^2 \mu_2^2 / \mu_1^2)^{1/2}}, \quad N_{21} < 1.$$

## 2 - Convergence de l'intégrant (5.46).

Posons :

$$(III.8) \quad G(v) = H_v^{(1)}(x_2^1) H_v^{(2)}(x_s) + R_{21} H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(2)}(x_2^1).$$

Il en résulte que l'intégrand  $I(v)$  de (5.46) s'écrit :

$$(III.9) \quad I(v) = \frac{v H_v^{(1)}(x) G(v) P_{v-1/2}(-\cos\theta)}{H_v^{(1)}(x_2) \cos\pi v} .$$

Par la suite on désigne par  $I_1(v)$  (resp.  $I_2(v)$ ) la valeur de  $I(v)$  pour  $N_{12} < 1$  (resp.  $N_{12} > 1$ ). Avant d'étudier la convergence de  $I_1(v)$  il est nécessaire de préciser le comportement à l'infini de  $R_{21}$ . Les développements asymptotiques (I.10) et (I.11) fournissent les résultats suivants pour  $N_{12} < 1$  ; dans les zones A, D et C,  $R_{21} \rightarrow -1$  quand  $|v| \rightarrow \infty$ , tandis que dans les zones B et E,  $R_{21} \rightarrow (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2) < 1$  quand  $|v| \rightarrow \infty$ . Par suite dans la zone A le comportement à l'infini de  $G(v)$  est de même nature que celui de

$$(III.10) \quad G(v) = H_v^{(1)}(x_2) H_v^{(2)}(x_s) - H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(2)}(x_2) .$$

Comme  $J_v(x)$  et  $H_v^{(2)}(x)$  conservent le même développement asymptotique dans les zones A et B il est préférable de faire apparaître ces quantités dans l'expression de  $G(v)$ , d'où :

$$(III.11) \quad G(v) = 2 \{ J_v(x_2) H_v^{(2)}(x_s) - H_v^{(2)}(x_2) J_v(x_s) \} .$$

Dans  $I^+$ , le demi-plan imaginaire de  $v$  positif, on a :

$$(III.12) \quad (\cos\pi v)^{-1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \exp \{ i(2m+1)\pi v \} .$$

Aussi du tableau donné en I et du terme prépondérant dans le développement du polynôme de Legendre soit :

$$P_{v-1/2}(\cos\theta) = \left( \frac{2}{\pi v \sin\theta} \right)^{1/2} \exp \{ -iv(\pi-\theta) + i\pi/4 \} ,$$

il résulte que  $I_1(v)$  se comporte comme :

$$\exp \left\{ v \left[ \text{Log} \frac{r}{r} + i(2m\pi + \theta) \right] \right\} .$$

En posant:  $v = |v| e^{i\phi}$ ,  $\phi \in [0, \pi/2]$  on en déduit :

$$(III.13) \quad I_1(v) \sim \exp \left\{ |v| \cos\phi \text{Log} \frac{r}{r} - |v| \sin\phi (2m\pi + \theta) \right\} .$$

Or, puisque  $r_s/r < 1$  (III.13) montre que  $I_1(v) \rightarrow 0$  très rapidement quand  $|v| \rightarrow \infty$ . Dans les zones B et C les mêmes résultats sont obtenus par le même genre de calcul. Cependant, pour la zone C, plutôt que d'utiliser (III.11) il vaut mieux remarquer que (III.10) s'écrit aussi :

$$G(v) = 2e^{i\pi v} [H_v^{(1)}(x_2^1) J_{-v}(x_s) - J_{-v}(x_2^1) H_v^{(1)}(x_s)] .$$

Ceci, joint au fait que  $\text{Re}(v) < 0$  et  $\text{Im}(v) > 0$  dans la région C, conduit à l'expression :

$$(III.14) \quad I_1(v) = \exp [ |v| \cos \phi \text{Log} \frac{r}{r_s} - |v| \sin \phi (2m\pi + \theta) ] ,$$

où  $\text{Log} \frac{r}{r_s} > 0$  et  $\phi \in (\pi/2, \pi)$  impliquent la convergence vers zéro de  $I_1(v)$ .

Dans  $I^-$ , le demi-plan partie imaginaire de  $v$  négatif, on a :

$$(III.15) \quad (\cos \pi v)^{-1} = -2 \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^m \exp[i(2m+1)\pi v] ,$$

le terme dominant de  $P_{v-1/2}$  est :

$$(III.16) \quad P_{v-1/2}(-\cos \theta) = \left( \frac{2}{\pi v \sin \theta} \right)^{1/2} \exp [iv(\pi - \theta) - i\pi/4] ,$$

de (III.16), (III.15) et des développements asymptotiques donnés dans l'annexe I il résulte :

$$I_1(v) \sim \frac{2i}{\pi} \left[ \left( \frac{r_1}{r_s} \right)^v - \left( \frac{r_s}{r_1} \right)^v \right] \left( \frac{r_1}{r} \right)^v \exp [i(2m+1)\pi v + iv(\pi - \theta) - i\pi/4] .$$

Posons  $v = |v| e^{i(\pi/2 - \epsilon)}$  ; on en déduit que quand  $|v| \rightarrow \infty$  et  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$(III.17) \quad I_1(v) \sim \exp [-|v|(2\eta_1 - \pi + \theta)] ; \quad \eta_1 = \epsilon \text{Log} \left| \frac{e x_2^1}{2v} \right| ;$$

donc quand  $|v| \rightarrow \infty$ ,  $I_1(v) \rightarrow 0$  si  $2\eta_1 - \pi + \theta > 0$  soit pour  $\eta_1 > \frac{\pi - \theta}{2}$  .

Ce qui établit le résultat utilisé en (5.46) et dans la fig. (13).

Dans  $I^+$  on montre que les résultats acquis pour  $I_1(v)$  valent aussi pour  $I_2(v)$ . Dans  $I^-$ , il n'est pas très difficile de trouver que :

$$I_2(v) \sim \exp[|v|(\sin \varepsilon - i \cos \varepsilon)(2 \operatorname{Log} \left| \frac{e^{x_1^1}}{2v} \right| + \operatorname{Log} \left| \frac{2v}{e^{x_1^1}} \right| + \operatorname{Log} \left| \frac{2v}{e^{x_1^1}} \right| - i\theta)] ,$$

d'où le résultat :

$I_2(v) \sim \exp[-|v|(2\eta_2 - \pi + \theta)]$  quand  $|v| \rightarrow \infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  donc à l'infini dans  $I^-$ ,  $I_2(v) \rightarrow 0$  aussi vite qu'une exponentielle si :

$$\eta_2 > \frac{\pi - \theta}{2} , \quad \eta_2 = \varepsilon \operatorname{Log} \left| \frac{e^{x_1^1}}{2v} \right| .$$

#### IV - POLES; RESIDUS; CONVERGENCE D'INTEGRALE.

##### 1) Pôles de $g^{(p)}(v)$ .

Les pôles de  $g^{(p)}(v)$ , définis au chapitre V (66), sont les racines des quantités :

$$(IV.1) \quad d_j = [1 \times_j^{j-1}] - N_{j-1, j} [2 \times_j^{j-1}] = 0, \quad j = p, p+1, \dots, m+1 ,$$

considérées comme des fonctions de  $v$ . Ces racines sont calculées de façon approchée à  $O(\times_j^{j-1})^{1/3}$  près en utilisant les méthodes indiquées en annexe III. On remarque que ces racines sont proches des zéros des fonctions  $H_v^{(1)}(\times_j^{j-1})$  et  $H_v^{(2)}(\times_{j-1}^{j-1})$ . La résolution de (IV.1) est faite dans le cas où  $v \gg 1$  et en faisant appel aux développements asymptotiques des fonctions  $H_v^{(1)}(z)$  et  $H_v^{(2)}(z)$ . Lorsque l'argument  $z$  est loin d'un pôle on évalue les crochets à l'aide de (I.7). Par contre près d'un pôle,  $v$  est équivalent à  $z$ , et on utilise les développements (I.8); d'où

$$(IV.2) \quad v_{n(1)}^j = \times_j^{j-1} + e^{i\pi/3} \xi_n \left( \frac{\times_j^{j-1}}{2} \right)^{1/3} \quad j=p, p+1, \dots, m+1$$

$$(IV.3) \quad v_{n2}^{j-1} = \times_{j-1}^{j-1} + e^{-i\pi/3} \xi_n \left( \frac{\times_{j-1}^{j-1}}{2} \right)^{1/3} .$$

Des hypothèses faites au paragraphe 5 (cf. 5.65) il résulte la répartition des divers pôles représentée sur la fig. 22.

En première approximation, les pôles  $v_\ell$  se présentent d'après (IV.2) comme le produit du rayon  $r_{\ell-1}$  (de la sphère  $\Sigma_{\ell-1}$ ) par le nombre d'onde  $\beta_\ell$  relatif à la couche  $\ell$ . Il est utile pour les interprétations données aux paragraphes 4 et 5 du chapitre V, de noter l'interprétation physique associée aux différents groupements apparaissant dans le développement (I.7) que l'on peut réécrire, pour la fonction  $H_v^{(1)}(x_k^k)$  par exemple, sous la forme

$$(IV.4) \quad H_v^{(1)}(x_k^k) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(x_k^k)^2 - v_\ell^2]^{-1/4} \exp\{i\beta_k (r_k^2 - h_k^2)^{1/2} - i\beta_\ell (r_{\ell-1} \arccos \frac{h_k}{r_k}) - i\pi/4\},$$

où l'on a posé  $\frac{v_\ell}{\beta_k} = h_k$ . Plaçons nous dans le cas où  $h_k < r_k$ .

Ainsi dans la phase associée à une onde pour laquelle (IV.4) intervient on distingue, dans l'exponentielle, deux termes. Le premier  $\beta_k (r_k^2 - h_k^2)^{1/2}$  correspond au segment de droite  $M_k H_k$  (cf. fig. 23) parcouru par l'onde dans la couche de nombre d'onde  $\beta_k$ . Le second  $\beta_\ell (r_{\ell-1} \arccos h_k/r_k)$  est associé au trajet effectué par l'onde sur  $\Sigma_{\ell-1}$  à la vitesse des ondes dans la couche  $\ell$ . La présence du signe moins devant ce dernier terme indique simplement que le second trajet est à remplacer par le premier. Pour la suite on note  $\alpha_k^k$  l'angle  $\widehat{OM_k H_k}$  et  $\alpha_{\ell-1}^k$  l'angle  $\widehat{OM_k H_{k-1}}$ .

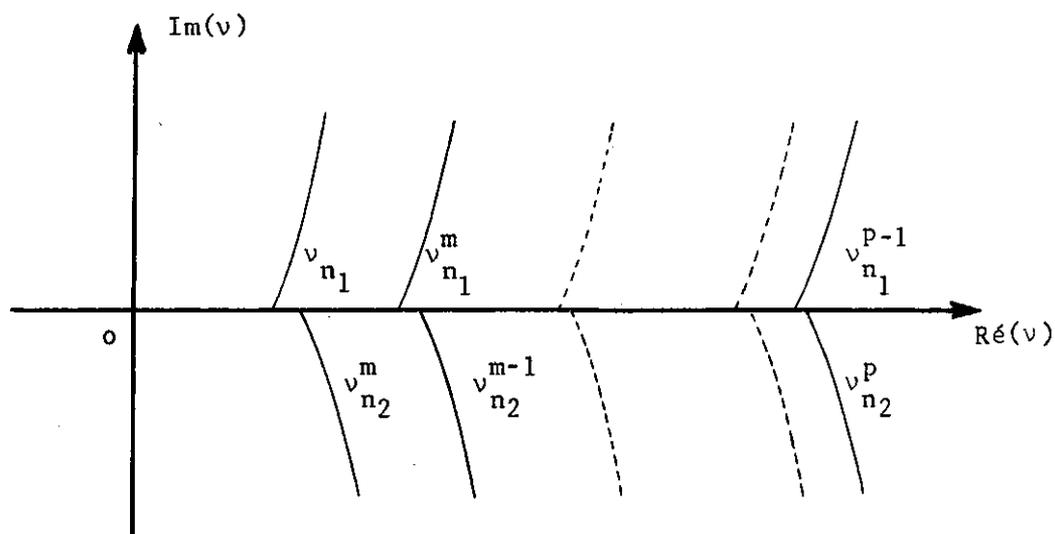


Fig. 22. Répartition des pôles dans le cas où  $V > V_m > V_{m-1} > \dots > V_p$ .

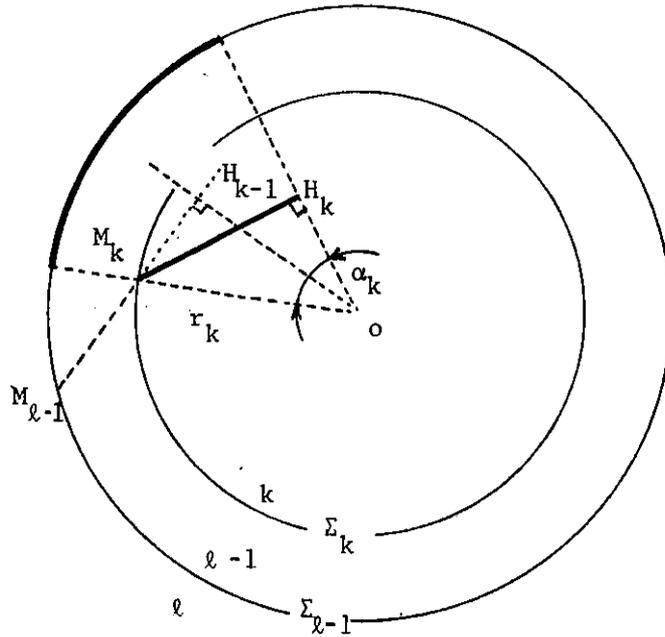


Fig.23. Interprétation géométrique des éléments qui apparaissent dans l'exponentielle du développement asymptotique (IV.4) de  $H_v^{(1)}(x_k^k)$ .  
On a posé :  $\alpha_k = \arccos (h_k/r_k)$ .

2) Résidus.

Pour faire le calcul des résidus nous remarquons d'abord que l'intégrand de (67) peut, pour chaque pôle considéré, être mis sous la forme du produit de deux fonctions :  $C(v)$ , ne possédant pas de pôle, et  $d_j^{-2}$  contenant les pôles (on note ici  $d_j$  le dénominateur commun aux coefficients de réflexion et de réfraction donnés en IV.1). Ainsi en un pôle double  $v_{nl}$  on sait, d'après les résultats de Morse Feshbach (1953), que les résidus sont :

$$(IV.5) \quad \text{Rés} \left[ \frac{C}{d_{m+1}^2} \right]_{v=v_{nl}} = \frac{C}{\left( \frac{\partial d_{m+1}}{\partial v} \right)} \cdot \left\{ \frac{\partial \text{Log } C}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \left[ \text{Log} \left( \frac{\partial d_{m+1}}{\partial v} \right) \right] \right\}_{v=v_{nl}}$$

En employant les développements asymptotiques, des fonctions  $H_v^{(1)}(z)$  et  $H_v^{(2)}(z)$  et de leurs dérivées, donnés en I on obtient :

$$(IV.6) \quad \left[ \frac{\partial d_{m+1}}{\partial v} \right]^2 = \left[ \left[ \frac{x^m}{x^m} \right]^2 - 1 \right]^2$$

Puis de (I.8) on déduit :

$$(IV.7) \quad [H_v^{(1)}(x^m)]^{-2} = \frac{e^{i\pi/3} [(x^m/x_m^m)^2 - 1]}{4(a'_n)^2 (x^m/2)^{4/3}}$$

où  $a'_n = A'_1(-\xi_n)$ ,  $\xi_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d'Airy  $A_1(-x)$ . De même, de la définition de  $d_j$  (cf. IV.1) et des résultats asymptotiques de l'annexe I., il vient tout calcul fait :

$$(IV.8) \quad d_j = -i \left\{ \left[ 1 - \frac{v_{nl}^2}{(x_{j-1}^{j-1})^2} \right]^{1/2} - N_{j-1,j} \left[ 1 - \frac{v_{nl}^2}{(x_{j-1}^{j-1})^2} \right]^{1/2} \right\},$$

ce qui, vus les éléments géométriques introduits avec la fig. (23), conduit à :

$$(IV.9) \quad d_j^2 = -i \{ \cos \alpha_j^{j-1} - N_{j-1,j} \cos \alpha_{j-1}^{j-1} \}^2.$$

Pour obtenir le résidu au pôle  $v_{nl}$ , on utilise les résultats ci-dessus et le développement de Debye de  $P_{v-1/2}(\cos\theta)$  (cf. I.12). Toutefois, il est commode, avant de mettre en oeuvre (IV.5), de séparer dans  $C(v)$  les exponentielles des autres termes, ce que l'on fait en posant :

$$(IV.10) \quad C(v) = G(v) \{ F^+(v) + F^-(v) \},$$

où  $F^\pm(v)$  désigne les fonctions regroupant toutes les exponentielles qui apparaissent dans  $C(v)$  tandis que dans  $G(v)$  figurent tous les autres termes de  $C(v)$ . Ainsi à partir de (IV.4), (IV.7), (IV.9) et (I.12) on aboutit tout calcul fait à :

$$(IV.11) \quad \begin{cases} F^\pm(v) = -i \exp[i(\phi_\ell - v\phi_a)] \exp(iv[(2s+1)\pi \pm \theta \mp \pi/4]) , \\ G(v) = B(v) [(x^m/x_m^m)^2 - 1] , \quad \phi_a = -\delta_s^\pm + (2s\pi \pm \theta) , \end{cases}$$

$\phi_\ell$  et  $\delta_s^\pm$  étant donnés en (5.76). D'où en appliquant (IV.5) à  $O(x^m)^{1/3}$  près il vient les résultats présentés en (5.75) et (5.76).

3) Convergence de (67).

Dans (67) la fonction  $g^{(p)}(v)$  a la forme :

$$(IV.12) \quad g^{(p)}(v) = H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(1)}(x) U^{(p)}$$

$$U^{(p)} = t_{m+1,m} t_{m,m+1} \dots t_{p+1,p} t_{p,p+1} r_{p,p-1} \cdot$$

De l'expression des coefficients  $t_{ij}$  [ chp. II. (2.25), (2.26), (2.27) ] on déduit :

$$(IV.13) \quad t_{ij} t_{ji} = \frac{-16 N_{ji} (x_j^i)^{-1}}{\pi^2 (x_i^i) [H_v^{(1)}(x_j^i) H_v^{(2)}(x_i^i)]^2 d_i^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} j=i+1, \\ i=m-1, \dots, p+1, p \end{array} \right\},$$

ce qui conduit à :

$$U^{(p)} = - \left(\frac{16}{\pi}\right)^{m-p} \frac{N_{m+1,p} R_{p,p-1} H_v^{(2)}(x_p^{p-1})}{[H_v^{(1)}(x_{m+1}^m) H_v^{(2)}(x_p^p)]^2 H_v^{(1)}(x_p^{p-1}) \prod_{j=m}^{p+1} \left\{ (x_j^j x_{j+1}^j) \right\}^{-1}}$$

$$\times [H_v^{(2)}(x_j^j) H_v^{(1)}(x_j^{j-1}) d_j]^{-2} \} \cdot$$

Il est alors indispensable de regarder le comportement à l'infini du coefficient de réflexion  $R_{p,p-1}$ . Les développements asymptotiques (I.10) et (I.11) dans les diverses zones du plan complexe  $v$  permettent d'établir, par la voie utilisée pour  $R_{21}$  (cf. III), que  $|R_{p,p-1}|$  reste borné par une constante strictement inférieure à 1 quand  $|v| \rightarrow +\infty$ . En conséquence, l'intégrant a un comportement à l'infini de même nature que :

$$(IV.15) \quad G_m^{(p)}(v) = H_v^{(1)}(x_s) H_v^{(2)}(x^m) t_{m+1,m} t_{m,m+1} \dots t_{p+1,p} t_{p,p+1} \cdot$$

Les calculs sont plus longs que difficiles pour montrer la convergence de  $G_m^{(p)}(v)$  étant donnée la nécessité de changer la représentation asymptotique des fonctions de Hankel à la traversée de chacune des lignes où sont situés les pôles de  $g^{(p)}(v)$  (fig.22) en accord avec la fig.19 de l'annexe I.

Dans  $\text{Im}(v) > 0$  les résultats sont tout à fait similaires à ceux obtenus dans le cas d'une seule sphère élastique et l'intégrand converge vers 0 exponentiellement quand  $|v| \rightarrow \infty$ .

Dans le demi-plan  $\text{Im}(v) < 0$  on obtient,

$$(IV.16) \quad I(v) \sim A \exp \{ -|v| (2\eta_m - \pi + \theta) \}, \quad \eta_m = \varepsilon \text{Log} \left| \frac{e^{x^m}}{2v^{m+1}} \right|,$$

en posant  $v = |v| e^{i(\pi/2 - \varepsilon)}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $|v| \rightarrow +\infty$ ).  $A$  est une constante bornée issue de  $U^{(p)}$  dans laquelle intervient des quantités telles que (IV.7) et (IV.8). Ainsi quand  $|v| \rightarrow +\infty$ ,  $I(v) \rightarrow 0$  exponentiellement pourvu que  $2\eta_m - \pi + \theta > 0$ , ce qui établit la convergence de l'intégrand (67) dans  $\text{Im}(v) < 0$  pour la zone du plan complexe située à droite de la région hachurée de la fig.17.

## CONCLUSION

L'une des difficultés majeures de la recherche des solutions exactes régissant le mouvement d'un milieu stratifié réside dans les conditions aux limites. L'exploitation de celles-ci se traduit par la nécessité de résoudre un système d'équations linéaires. Cette résolution est habituellement menée à bien par la méthode de Cramer.

Dans le cadre de l'élasticité, nous avons évité cette technique. Nous avons établi les solutions exactes du mouvement d'un milieu stratifié sphérique par application du principe des superpositions utilisé à deux niveaux. D'abord au niveau des harmoniques puis au niveau des conditions aux frontières dont nous nous sommes affranchis par un usage intensif des coefficients de réflexion et de réfraction. Ce dernier aspect est, nous semble-t-il, fondamental. En effet, nous étant dégagés des conditions aux limites nous détenons avec les chapitres III et IV la solution exacte pour un éventail assez large de modèles et de domaines. Effectivement, il suffit de disposer de la solution de point source et de connaître (ou de savoir évaluer) les coefficients de réflexion et de réfraction d'une géométrie donnée pour exploiter les résultats des chapitres III et IV.

L'avantage d'opérer par superposition est double. Le premier est de nous libérer de calculs qui, pratiquement, ne sont jamais simples. Le second est de nous fournir directement les éléments propres à un approfondissement des effets que l'on souhaite détecter, et que l'on espère spécifiques de tel constituant particulier du modèle stratifié. On pourrait étendre la méthode élaborée aux chapitres III et IV à une configuration de source non plus interne mais externe au multi-couches. Il est également tentant d'envisager de passer au milieu continu en faisant tendre la distance inter-couche vers zéro. Ces processus permettraient d'asseoir directement la solution globale pour un milieu radialement non-homogène puisque la technique de séparation des variables, support de ce travail, nous a conduit à raisonner uniquement

sur la coordonnée  $r$ .

La seconde étape importante de ce mémoire réside dans la voie d'approche asymptotique empruntée au chapitre V. Elle nous a enclin à constater qu'un modèle élastique n'échappe pas à certaines interprétations physiques révélées par d'autres études, milieux fluides par exemple. Tel est le cas des rayons qui s'enroulent autour de l'inclusion et des lois de l'optique géométrique qui sont plus spécifiques de la méthode employée que du modèle exploité.

Néanmoins, la méthode de Watson a été révélatrice d'éléments marquant une distinction nette entre les milieux fluides et solides. Ainsi l'étude du premier terme du développement de Debye a montré que deux types d'ondes de surface prennent simultanément naissance sur la frontière d'un milieu élastique. Les unes sont excitées ou éteintes par des rayons tangents comme pour les milieux fluides, les autres sont suscitées et s'évanouissent selon l'angle d'incidence critique lorsque le milieu interne est plus rigide que le milieu externe. En outre, ces deux sortes d'ondes dispersives se propagent avec des vitesses distinctes. Les premières ont une célérité plus proche de celle des ondes dans le milieu externe tandis que les secondes ont un temps de parcours voisin de celui des ondes dans le milieu interne. De plus, l'influence du premier terme susceptible de rendre compte de la présence d'une couche précise au sein de la stratification a dévoilé une autre caractéristique nouvelle des ondes de surface élastiques. Celles-ci sont engendrées sous l'angle d'incidence critique puis étouffées par des rayons tangents à la frontière, et vice-versa, lorsque la rigidité des milieux internes va en décroissant vers le centre du modèle. L'importance de cet angle critique, spécifique des milieux élastiques, nous amène à penser qu'il serait également intéressant d'affronter une configuration inverse de l'ordre des vitesses.

Ceci dit, nous sommes conscients de ne pas avoir abordé, dans ce mémoire, certaines questions : études des caustiques, de la frontière d'ombre pour lesquelles de sérieuses difficultés sont à craindre, les

développements asymptotiques que nous avons utilisés cessant d'être variables dans ces zones. Quant à tendre vers le milieu continu ce n'est pas un problème simple du fait de passages à la limite à effectuer simultanément sur les séries et sur les arguments de fonctions (et de leurs dérivées) génératrices de la solution. L'étude préalable des milieux de célérité voisine ( $n \sim 1$ ) paraît donc être une étape essentielle.

Pour emprunter ces diverses voies, parmi lesquelles ce travail peut recevoir des prolongements, la manipulation des fonctions de variable complexe, entre autre, est indispensable. Cela montre, s'il en était encore besoin, que les méthodes d'analyse classique ne sont pas désuètes et peuvent apporter certaines satisfactions.

## RÉFÉRENCES

ACHENBACK J.D. (1973)

Wave propagation in elastic solids - North-Holland

ABRAMOWITZ M, STEGUN I.A. (1970)

Handbook of Mathematical functions - Dover, New-York

ALTERMAN Z.S., ABOUDI J., KARAL F.C. (1970)

Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere - Geoph. J.R., Ast.Soc. 21 (243-260).

ALTERMAN Z.S., KARAL F.C. (1968)

Propagation of elastic waves in layered media by difference methods. Bul.Sei.Soc.Am. 58 (367-398).

ANSELL J.H. (1973)

Legendre functions, the Hilbert transform and surface waves on a sphere - Geoph.J.R.Ast.Soc. 32 (95-117).

BREKHOVSKIKH L.M. (1960)

Waves in Layered media. Academic Press New-York.

BREMMER H. (1949)

Terrestrial radiowaves (theory of propagation), Elsevier.

BRILL D., ÜBERALL H. (1971)

Acoustics waves transmitted through elastic cylinders.  
J. Acoust. Soc. Amer. 50 (921-939).

BURRIDGE R., et KNOPOFF L. (1964)

Body force equivalents for Seismic dislocations. Bull.Seism. Soc. Amer. 54 (1875-1888).

CHEN Y., (1964)

Diffraction by a smooth transparent object. J.Math.Phy. 5  
(820-832)

DATTA S.K., (1973)

Interaction of a plane compressional elastic wave with a rigid spheroidal inclusion. Quat.Appl.Math.31 (217-235).

- DATTA S.K., (1974)  
Diffraction of SH waves by an elliptic elastic cylinder.  
Int. J. Sol. Struct. 10 (123-133).
- DATTA S.K. (1978)  
Scattering of elastic waves - Mechanics today 4 (149-208).
- DEBYE P.J. (1908)  
Diffraction by a glass rod. - Phip. Zeitsch. 9 (775-778).
- DEBYE P.J. (1909)  
Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grobe Werte  
des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index.  
67 (535-558) .
- DEREM A., (1979)  
Relation entre la formation des ondes de surface et l'appari-  
tion de resonances dans la diffusion acoustique - Revue du  
CETHEDEC. 58 (43-79).
- ERINGEN A.C., SUHUBI E.S. (1975)  
Elastodynamics (linear theory) vol.II., Academic Press New-York.
- EWING W., JARDETSKY W., F.PRESS. (1957)  
Elastic waves in layered media, Mac.Graw Hill, New-York.
- FLAX L., DRAGONETTE L.R., ÜBERALL H. (1978)  
Theory of elastic resonance excitation by sound scattering  
J.Acous. Soc. Amer. 63 (723-731).
- FLAX L., NEUBAUER W.G. (1977)  
Acoustic reflexion from layered elastic absorptive cylinders.  
J.Acous.Soc.Amer. 61 (307-312).
- FRISK G.V., ÜBERALL H. (1976)  
Creeping waves and lateral waves in acoustic scattering by  
large elastic cylinder - J.Acous.Soc.Amer. 59 (46-54).
- FOCK V.A. (1948)  
New Methods in diffraction theory - Phil Mag. Ser.7 (39,149).
- FOCK V.A. (1965)  
Electromagnetic diffraction and propagation problems, Pergamon  
Press.

GAUNAURD G.C., ÜBERALL H. (1978)

Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media., J.Acous.Soc.Amer.63 (1699-1712).

GEORGE J., ÜBERALL H. (1979)

Approximate methods to describe the reflections from cylinders and spheres with complex impedance , J.Acous.Soc.Amer.65 (15.24)

GEORGE J., (1979)

Calculation of differential cross sections of sound geometrically reflected from impedance cylinders, J.Acoust.Soc.Amer. 65 (307-317).

GERARD A. (1974)a

Ondes de cisaillement à polarisation horizontale : diffraction par une sphère parfaitement rigide. Arch.of Mech.26 (1029-1047).

GERARD A. (1976)b

Diffraction d'ondes de cisaillement par une sphere élastique. C.R.Acad.Sc. Paris 278,A., (1055-1057).

GERARD A. (1976)

Ondes de cisaillement diffractées par une sphère élastique. J.Méca.-25 (427-456).

GERARD A. (1979)a

Scattering of SH waves by a spherical layer. Int.J.Enging.Sc. 17 (313-327).

GERARD A. (1979)b

Champ résultant de l'incidence d'ondes P ou SV sur une sphère élastique . - C.R.Acad.Sc.Paris t.289 (237-240).

GERARD A. (1980)a

Champ résultant de l'incidence d'ondes P et SV sur un milieu stratifié à symétrie sphérique - C.R.Acad.Sc.Paris t.290 (43-46).

GERARD A. (1980)b

Diffraction d'ondes SH par un milieu stratifié sphérique . Int.J.Enging. Sc.18 (583-595).

GRIFFIN J.H., MIKLOWITZ J. (1974)

Wave front analysis of a plane compressional pulse scattered by a cylindrical inclusion - Int.J.Sol.Struct. 10 (1333-1356).

HASKELL N.A. (1953)

The dispersion of surface waves on multilayered media. Bull. Seism.Soc.Amer. 43 (17-34).

HUDSON J.A. (1969)

A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distance I. Radiation from point sources. Geoph.J.R.Ast.Soc. 18 (233-249).

JOBERT G. (1976)

Matrix methods for generally stratified media - Geoph.J.R.Ast.Soc. 47 (351-362).

KELLER J.B. (1953)

The geometrical theory of diffraction - Proc.sympos. Microwave optics - Montreal Canada.

KELLER J.B., RUBINOW S.I., GOLDSTEIN M. (1963)

Zeros of Hankel functions and poles of scattering amplitudes J. of Math.Phys. 4 (829-832).

LEVY B.R., KELLER J.B. (1959)

Diffraction by a smooth object., Com.Pure.Appl.Math. 12(159-209).

LYSMER J. (1970)

Lumped mass method for Rayleigh waves. Bull.Seism.Soc.Amer. 60 (89-104).

MORSE P.M., FESHBACH H. (1953)

Methods of theoretical physics - Mc.Graw Hill New-York.

MURPHY J.D., GEORGE J., NAGL A., ÜBERALL H. (1979)

Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells., J.Acous.Soc.Am. 65, (368-373).

NAGASE M. (1956)

Diffraction of elastic waves by a spherical surface. J. of Phys. Soc. of Jap. 11 (279-301).

NUSSENZVEIG H.M. (1965)

High frequency scattering by an impenetrable sphere.  
Ann. of Phys. 34 (23-95).

NUSSENZVEIG H.M. (1969)

High frequency by a transparent sphere. J. of Math. Phys. 10  
(82-124)

PAO Y.H., MOW C.C. (1973)

Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.  
Crane, Russak et Co. New-York.

PETIAU G. (1957)

La théorie des fonctions de Bessel. - C.N.R.S. Paris

POINCARÉ H. (1909)

Sur la diffraction des ondes hertziennes - C.R. Acad. Sc. Paris  
t. 148 (966-968).

POINCARÉ H. (1910)

Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, t. 29 (169-259).

ROBIN L. (1957)

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales.  
Gauthier-Villars - Paris.

ROSEAU M. (1976)

Asymptotic wave theory - North Holland.

SCHOLTE J.G.J. (1956)

On seismic waves in a spherical Earth. Konin. Ned. Meteo. Inst.  
Med. en Ver. 65 (1-55).

SINGH S.J., BEN.MENACHEM A. (1969)

Eigenvibrations of the Earth excited by finite dislocations-II.  
spheroidal oscillation - Geoph. J. R. Ast. Soc. 17 (333-350).

SOMMERFELD A. (1949)

Partial differential equations in physics - Academic Press  
New-York.

STREIFER W., KODIS R.W. (1964)a

On the solution of a transcendental equation arising in the  
theory of scattering by a dielectric cylinder. Quat. Appl. Math. 21  
(285-298).

STREIFER W., KODIS R.W. (1964)b

On the scattering of electromagnetic waves by a dielectric cylinder - Quat.Appl.Math.22 (193-206).

TENG T.L., RICHARDS J. (1969)

Diffacted P, SV and SH waves and their shadow boundary shifts. J. of Geoph. Res. 74 (1537-1555).

THOMSON W.T. (1950)

Transmission of elastic waves through a stratified solid medium J.Appl.Phys. 21 (89-93).

ÜBERALL H. (1973)

Surfaces waves in acoustics - Phys.Acoust. 10 (1-60).

VAN DER POL, BREMMER H. (1937)

The diffraction of electromagnetic waves from our electrical point source round a finitely conducting sphere with applications to radio telegraphy and theory of rainbow., Phil.Mag.Serie 7 24, (141 et 825).

WATSON G.N. (1918)

The diffraction of electric waves by the Earth. Proc.Roy.Soc. London (A), 95 (83-99).

WATSON G.N. (1922)

Theory of Bessel functions - University Press Cambridge.

WOODHOUSE J.H. (1972)

Diffraction by anomalous regions in the Earth's mantle. Geoph. J. Roy. Ast. Soc. 32 (295-324).

BERTONI H.L., TAMIR T. (1973)

Unified theory of Rayleigh angle phenomena for acoustics beams at liquid-solid interfaces - Appl. Phys. 2 (157,172).