



HAL
open science

Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions. Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines.

Céline Gélis

► **To cite this version:**

Céline Gélis. Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions. Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines.. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2005. Français. NNT : . tel-00199493

HAL Id: tel-00199493

<https://theses.hal.science/tel-00199493>

Submitted on 19 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Géophysique

présentée et soutenue par

Céline GELIS

**Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine
espace-fréquence en deux dimensions.**
**Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de
la détection de cavités souterraines**

Thèse préparée dans le laboratoire Géosciences Azur (UMR 6526) Sophia Antipolis
Dirigée par **Jean VIRIEUX** (directeur) et **Gilles GRANDJEAN** (co-directeur)
Financée par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières

Soutenue le 14 décembre 2005, devant le jury composé de :

Jean VIRIEUX	Professeur	Directeur de thèse
Gilles GRANDJEAN	Chercheur BRGM	Co-directeur
Michel DIETRICH	Directeur de recherche	Rapporteur
Gilles LAMBARE	Enseignant-chercheur	Rapporteur
Gérard HERMAN	Professeur	Examineur
Raül MADARIAGA	Professeur	Examineur

Remerciements

Au terme de ces trois années de thèse, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidée à mener à bien cette thèse. Ces trois années resteront dans ma mémoire, ainsi que ceux qui les ont peuplées et vécues avec moi.

Tout d'abord, je remercie vivement mon directeur de thèse **Jean Virieux** pour son encadrement durant cette thèse. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet en collaboration avec le BRGM pendant mon stage de DEA au laboratoire Gésociences Azur et de m'avoir aidée à le réaliser et à le mener à bien. Je le remercie de m'avoir apporté une méthodologie scientifique, de m'avoir donné de la rigueur et de m'avoir montré la mise en place d'un cheminement scientifique ainsi que les différentes étapes à valider. Je lui suis également reconnaissante de m'avoir donné une vision large des géosciences et m'avoir fait part de son intuition et de sa vision de différents problèmes. Merci aussi pour son enthousiasme, son soutien, son écoute et ses encouragements, surtout pendant la dernière partie de cette thèse ... Je tiens aussi à remercier Jean Virieux de m'avoir laissé certains de ses cours alors qu'il n'y avait plus de vacances et d'être resté avec moi pour les donner. Enfin, merci de m'avoir laissé participer aux différents ateliers proposés par l'Ecole Doctorale et à des cours de langue étrangère, et de m'avoir permis de participer à plusieurs conférences et à une Ecole d'été.

Je tiens aussi à remercier particulièrement **Stéphane Operto**, pour son aide précieuse, sa rigueur scientifique, son regard critique sur mon travail. Merci pour les remarques et commentaires, toujours très utiles et très instructives pour améliorer un travail ou avoir une autre vision des phénomènes et problèmes physiques. Enfin je le remercie pour sa disponibilité à chaque fois que je l'ai sollicité et le temps qu'il m'a consacré.

Ensuite, je remercie vivement mes encadrants actuels du BRGM : **Gilles Grandjean**, mon co-directeur de thèse, et **Adnand Bitri**, qui ont suivi ce travail attentivement. Je les remercie pour leur encadrement au cours des mes différents séjours à Orléans, pour leur regard critique, leurs conseils, leur enthousiasme, leur disponibilité et leurs encouragements.

Un merci chaleureux à **Donatienne Leparoux**, actuellement à l'IPGP mais qui était au BRGM pendant ma première année de thèse et qui m'a encadrée pendant cette période. Merci pour les commentaires critiques, les discussions professionnelles et plus personnelles, le soin et la rigueur qu'elle m'a apportée, la gentillesse.

Je remercie vivement mes rapporteurs, **Gilles Lambaré** et **Michel Dietrich**, d'avoir accepté d'évaluer ce travail, ainsi que mes examinateurs, **Raül Madariaga** et **Gérard Herman**.

Je remercie ensuite les personnes ayant participé aux **réunions d'imagerie** qui se sont tenues pendant les deux premières années de ma thèse. Merci pour les réflexions occasionnées et les connaissances apportées. Particulièrement, merci à **Victor Manuel Cruz** d'en avoir pris en charge

l'organisation pendant ces deux ans.

Par ailleurs, je remercie tous les membres de Géosciences Azur à Sophia pour l'ambiance et la convivialité du laboratoire.

Je remercie spécialement toutes les personnes qui nous aident quotidiennement : **Reine, Isabelle, Véronique, Caroline, Lionel et Sophie**. Je leur remercie pour leur patience et leur disponibilité, ainsi que leur bonne humeur et leur aide précieuse.

Je remercie sincèrement **Tony et Françoise** pour leur gentillesse, leur soutien et les discussions que nous avons eues au cours de ces trois années.

Je remercie chaleureusement tous les étudiants que j'ai connus ici au cours de ma thèse, pour les discussions, la bonne humeur, les pauses café, le soutien, l'écoute, les sorties, les rires ... Même si certains sont partis, les moments partagés sont inoubliables ! Je remercie ainsi **Mickaël, Diane, Victor, Diana, Carine, Stéphanie, Sophie, Samyr, Cédric, Marie-Aude, Jenny, Perrine, Damien, Hervé, Frédéric**.

Je remercie également les étudiants de Villefranche, collègues du DEA : **Audrey, William et César**.

Un grand merci à **Christine** de Aix, qui, malgré la distance, reste très proche de moi ! Merci pour les conversations téléphoniques, le soutien, l'amitié, les rires ... Merci aussi à **Michel** et à ses interventions téléphoniques, qui nous ont bien aidés et bien fait rire ...

Je remercie également mes amis de Paris : **Marie, Céline, Gwendoline, Olivier, Alexis, Gwen et Thomas** ... Merci pour les conversations téléphoniques, les visites dans le Sud, les invitations aux mariages, les discussions ...

Une pensée particulière à ceux qui ont partagé les planches avec moi : **Solveig, Mai-Anh, Eric, Stéphane, Michel, Corinne, Edith, Jocelyne, Teddy, Christine et Catherine**. Merci pour les moments de détente, les rires et pour le fabuleux voyage à Oléron.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement **ma famille** : mes parents, ma soeur, mes grand-mères, pour leur soutien, leur gentillesse et les petites attentions particulières. Merci d'avoir toujours été là pour moi.

Enfin, je remercie du fond du coeur mon **Poussin**, pour tout ce qu'il est, pour sa gentillesse, sa patience, son soutien ... Merci de m'avoir aidée et supportée durant la thèse. Je te dédie mon après-thèse ...

Table des matières

1 Introduction : L'imagerie quantitative multiparamètres de la subsurface en sismique	27
1.1 Sismique et sismologie	29
1.1.1 Définition de la sismologie	29
1.1.2 Pourquoi étudier les ondes sismiques	29
1.1.3 Sismologie (passive)	30
1.1.4 Sismique ou sismologie active	30
1.2 L'imagerie quantitative multiparamètres	31
1.2.1 Qu'est ce que l'imagerie quantitative multiparamètres ?	31
1.2.2 Pourquoi faire une imagerie quantitative multiparamètres	32
1.3 L'imagerie quantitative multiparamètres : un problème inverse non linéaire	34
1.4 Comment obtenir une image quantitative du milieu : stratégie	35
1.4.1 Connaissance préalable d'un macromodèle de vitesse	35
1.4.2 Au-delà de la migration	36
1.4.3 Approximations et linéarité	36
1.4.4 Itérations et linéarité	37
1.4.5 Longueur d'onde et linéarité	37
1.4.6 Utilisation des différentes ondes	37
1.4.7 Choix des paramètres et des données	37
1.4.8 Temps ou fréquence	38
1.4.9 Distance ou nombre d'onde	38
1.4.10 Sismique Réflexion ou Sismique Grand angle	39
1.5 L'imagerie quantitative de la subsurface	39
1.5.1 Qu'est ce que la subsurface	39
1.5.2 Pourquoi s'intéresser à la subsurface	40
1.5.3 Particularités de la subsurface	40
1.6 Le problème spécifique de la détection des cavités souterraines	41
1.6.1 Quelles cavités	41
1.6.2 Autres méthodes de détection des cavités souterraines	41
1.6.3 L'application de l'inversion des formes d'onde élastique	42
1.7 Plan de la thèse	43
2 Problème direct : Propagation des ondes élastiques en deux dimensions : modélisations temporelle et fréquentielle	45
2.1 Equations de propagation des ondes élastiques en deux dimensions dans un milieu linéaire élastique isotrope	46
2.1.1 Ecriture des équations	46
2.1.2 Propagation des ondes de volume	48
2.1.3 Propagation des ondes de Rayleigh	49

2.1.4	Systèmes d'équations hyperbolique d'ordre 1 et d'ordre 2 en temps	53
2.2	De la formulation temporelle à la formulation fréquentielle	53
2.2.1	Transformée de Fourier de données continues	53
2.2.2	Systèmes d'équations en fréquence	54
2.2.3	Transformée de Fourier de données discrètes échantillonnées	55
2.3	Discrétisation avec les différences finies : le stencil spatial de Saenger et al. (2000) .	56
2.3.1	Différentes méthodes de résolution du système d'équations différentielles . .	56
2.3.2	Le choix des différences finies	58
2.3.3	Les différences finies en temps et en espace	58
2.3.4	Les différences finies en quinconce de Yee (1966); Madariaga (1976); Virieux (1986)	59
2.3.5	Le stencil de Saenger et al. (2000)	60
2.4	Modélisation de la surface libre	63
2.4.1	Différentes manières de modéliser la surface libre	63
2.4.2	Implémentation de la surface libre	64
2.4.3	Validation de l'implémentation de la surface libre	65
2.5	Les conditions absorbantes aux bords du modèle	66
2.5.1	Système hyperbolique d'ordre 1 discrétisé dans le domaine temporel	67
2.5.2	Système discrétisé dans le domaine fréquentiel	70
2.5.3	Système elliptique d'ordre 2 discrétisé dans le domaine fréquentiel	71
2.6	Valeur et implémentation numérique du terme source	77
2.6.1	Notion de fonction de Green	77
2.6.2	Linéarité des équations de propagation des ondes par rapport à la source . .	78
2.6.3	Implémentation numérique de la source	78
2.7	Temps ou fréquence ?	79
2.7.1	Ecriture matricielle des champs	79
2.7.2	Résolution numérique des équations dans le domaine temporel	79
2.7.3	Résolution numérique des équations dans le domaine fréquentiel	80
2.7.4	Résolution de l'équation matricielle en fréquence	82
2.8	Exemples numériques de résolution de l'équation matricielle	82
2.9	Conclusion	93
3	Construction d'un macromodèle de vitesse	97
3.1	Méthodes générales de résolution du problème inverse non linéaire	98
3.1.1	Méthodes globales et semi-globales de résolution du problème inverse	98
3.1.2	Méthodes locales de résolution du problème inverse	99
3.1.3	Utilisation combinée de méthodes linéaires et non linéaires	102
3.2	Différentes méthodes d'obtention d'un macromodèle de vitesse	102
3.2.1	Analyse de vitesse	103
3.2.2	L'inversion non linéaire du modèle de vitesse	103
3.2.3	La tomographie des écarts de temps des premières arrivées	103
3.2.4	La tomographie des ondes de surface	104
3.2.5	La tomographie des temps généralisés à l'échelle géotechnique	104
3.2.6	La SASW : Spectral Analysis of Surface Waves	104
3.2.7	Quelle méthode pour la détermination d'un macromodèle en subsurface . .	105
3.3	Conclusion	108

4 Le problème inverse : l'inversion des formes d'onde élastiques dans le domaine fréquentiel	109
4.1 Différentes méthodes d'imagerie des diffractants	110
4.1.1 Inversion linéaire des ondes de surface diffractées à l'échelle globale	110
4.1.2 La simulation d'une distribution de diffractants pour modéliser les ondes de surface diffractées	110
4.1.3 Les méthodes d'imagerie quantitative	111
4.1.4 Vers une nouvelle approche : l'inversion des formes d'onde élastique pour l'imagerie de la subsurface	114
4.2 Différences entre Born et Rytov : éléments de la bibliographie	115
4.3 L'inversion des formes d'onde élastiques	117
4.3.1 Introduction	118
4.3.2 Inversion formulation	119
4.3.3 Born forward and inverse formulations	121
4.3.4 Discretization of equations with finite differences	125
4.3.5 Rytov approach - the gradient estimation for V_p and V_s velocity parameters	126
4.3.6 Convergence behaviour for Born and Rytov formulations	128
4.3.7 Choice of inverted parameters	129
4.3.8 The acquisition geometry influence	130
4.3.9 The free surface influence	131
4.3.10 Discussion and conclusion	132
4.3.11 Appendix A : Green functions versus propagation operators and impedance matrix for the Born approximation	134
4.3.12 Appendix B : Elastic Rytov analytical approximation	136
4.3.13 Appendix C : Green function versus impedance matrix for Rytov approximation	139
4.4 Quelques points de l'article détaillés	153
4.4.1 Calcul détaillé des dérivées de Fréchet avec l'approximation de Rytov	153
4.4.2 Calcul de la dérivée de la matrice d'impédance	154
4.4.3 Paramétrisation du problème inverse	157
4.4.4 Structure du Hessien	157
4.5 Eléments techniques relatifs au gradient	165
4.5.1 Recherche du pas de descente α	165
4.5.2 Régularisation du gradient	166
4.5.3 Méthode du gradient ou de Gauss-Newton ?	167
4.6 Différences entre Born et Rytov : interprétation du noyau comme un chemin d'onde	167
4.6.1 Principe de construction des noyaux	167
4.6.2 Chemins d'onde de Born et Rytov	168
4.6.3 Structure des chemins d'onde et migration	176
4.6.4 Equivalence entre la première itération du gradient et la migration avant sommation	176
4.6.5 Influence du dispositif d'acquisition	177
4.7 Imagerie, spectre de nombre d'onde et choix des fréquences inversées	187
4.7.1 Gradient et contenu en nombre d'onde	187
4.7.2 Illumination en nombre d'onde pour le cas à une dimension	192
4.7.3 Règle de choix des fréquences inversées	193
4.7.4 Choix de la fréquence minimale	193
4.8 Choix de l'approximation de Born pour les acquisitions de surface	199
4.9 Pondération des données	199
4.9.1 D'autres pondérations envisageables	200

4.9.2	Sélection des données par déport croissant : une manière de prendre en compte de la non linéarité pour l'imagerie de la subsurface	201
4.10	Prise en compte des ondes de surface et influence de la surface libre	206
4.10.1	Prise en compte des ondes de surface	206
4.10.2	Préconditionnement des données : une manière de séparer ondes de volume et de surface	206
4.10.3	Influence du nombre de fréquences inversées	218
4.11	Application à la détection de cavités souterraines	225
4.11.1	Influence du nombre de fréquences inversées	233
4.11.2	Synthèse : influence des différents facteurs	238
4.12	Conclusion	238
5	Application à un cas réel : Détection d'une cavité maçonnée	329
5.1	Problématique	329
5.2	Présentation des données	240
5.2.1	Dispositif d'acquisition	240
5.2.2	Allure des sismogrammes	241
5.3	Premières observations	243
5.3.1	Complexité du milieu de propagation	243
5.3.2	Signature de la cavité	243
5.3.3	L'arrivée tardive basse fréquence	245
5.3.4	Signature d'une couche de vitesse plus rapide	249
5.3.5	Synthèse des observations	249
5.4	Détermination d'un macromodèle de vitesse	251
5.4.1	Résultats avec la tomographie des écarts de temps	251
5.4.2	Résultats avec l'analyse spectrale des ondes de surface	254
5.4.3	Bilan : pertinence des modèles obtenus	258
5.4.4	Stratégie choisie : la méthode essais-erreurs	258
5.5	Application de l'inversion des formes d'onde élastique aux données réelles	265
5.5.1	Prétraitements appliqués aux données pour l'application des formes d'onde élastique	265
5.5.2	Application de la méthode	266
5.5.3	Résultats pour l'inversion simultanée de V_p et V_s en inversant la source sismique et comparaison avec les données	277
5.6	Conclusion	302
6	Conclusion générale et perspectives	305
A	Manipulation des équations de propagation en fréquence	325
B	Article de Gélis et al. (2005)	329
B.0.1	Abstract	329
B.0.2	Introduction	329
B.0.3	New 2D elastic rotated staggered grid definition	330
B.0.4	Dispersion Image Analysis	332
B.0.5	Synthetic cavity examples	332
B.0.6	Conclusions	335
C	Inversion de la source sismique d'après Ravaut (2003) et Pratt (1999)	343

Table des figures

1.1	Schéma du problème direct et du problème inverse	34
1.2	Exemple de cavité effondrée à Bihorel, France	40
2.1	Schéma du déplacement d'un corps dans l'espace et dans le temps. A $t=0$, le point matériel \mathbf{x} est en \mathbf{x}_0 . A $t>0$, le point matériel est en \mathbf{x} et a effectué un déplacement \mathbf{u} . Le volume V est soumis à des forces volumiques \mathbf{f} et à des forces surfaciques \mathbf{T} s'exerçant sur S , sa surface.	46
2.2	Schéma de la propagation des ondes P et S.	49
2.3	Schéma de la propagation des ondes de Rayleigh (à gauche) et de Love (à droite). Tiré du site internet www.geo.mtu.edu/UPSeis/waves.html	50
2.4	Polarisation de l'onde de Rayleigh et diminution exponentielle avec la profondeur. Tiré de Sheriff & Geldart (1995)	51
2.5	Diminution de l'amplitude des différents modes des ondes de Love avec la profondeur. Tiré de Keilis-Borok (1986)	51
2.6	Apparition des différents modes des ondes de Love selon la fréquence considérée. Tiré de Keilis-Borok (1986)	52
2.7	Schéma du calcul des dérivées spatiales dans le stencil de différences finies de Saenger et al. (2000)	60
2.8	Comparaison entre la grille en quinconce du stencil de Virieux (1986) et celui de Saenger et al. (2000)	61
2.9	Comparaison de sismogrammes obtenus à partir du stencil de différences finies de Saenger et al. (2000) et des éléments spectraux (Komatitsch, 1997)	65
2.10	Comparaison de sismogrammes obtenus à partir du stencil de différences finies de Saenger et al. (2000), de Virieux (1986) et de la méthode analytique de Garvin (1956)	66
2.11	Modélisation numérique des conditions aux limites. A gauche : coefficients $\gamma(\mathbf{x})$ et $\eta(\mathbf{x})$ permettant de déphaser les champs. A droite, type de PML appliqué aux différents bords du domaine et valeur de $\gamma(\mathbf{x})$ sur les bords verticaux. D'après Operto (2001)	68
2.12	Structure du vecteur X contenant les champs V_x et V_z et correspondance avec la discrétisation du milieu	79
2.13	Structure de la matrice d'impédance X pour la formulation elliptique fréquentielle	81
2.14	Ricker temporel (gauche) et contenu fréquentiel (droite)	83
2.15	Carte en fréquence pour la partie réelle de V_x (gauche) et V_z pour une fréquence de 147 Hz (milieu) et V_z pour une fréquence de 195 Hz (droite)	83
2.16	Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre	84
2.17	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147 Hz et une source profonde S_2 (figure 2.16) et les récepteurs au-dessous	85
2.18	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations fréquentielles pour une source localisée en S_2 et les récepteurs au-dessous (figure 2.16)	85

2.19	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S_2 et les récepteurs au-dessous (figure 2.16)	86
2.20	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $147Hz$ et une source superficielle S_1 (figure 2.16)	87
2.21	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S_1 et les récepteurs à la surface libre (figure 2.16) . . .	87
2.22	Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre	88
2.23	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $147Hz$, une source superficielle et une cavité (figure 2.22)	88
2.24	Mise en évidence de l'influence de la cavité par la soustraction des cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) avec une cavité (figure 2.23) et sans cavité (figure 2.20).	89
2.25	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $195Hz$, une source superficielle et une cavité (figure 2.22)	89
2.26	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22) . . .	90
2.27	Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre	91
2.28	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $147Hz$, une source superficielle, une cavité et un cône d'altération (figure 2.27)	91
2.29	Mise en évidence de l'influence de la cavité par la soustraction des cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) avec une cavité (figure 2.23) et sans cavité (figure 2.20).	92
2.30	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22) . . .	92
2.31	Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre	93
2.32	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $147Hz$, une source superficielle, une topographie non plane et deux couches de terrain (figure 2.31)	94
2.33	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22) . . .	94
2.34	Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre	95
2.35	Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de $147Hz$, une source superficielle, une cavité, une topographie non plane et deux couches de terrain (figure 2.34)	95
2.36	Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22) . . .	96
3.1	Exemple d'une trace sismique. T : Temps d'arrivée de l'onde	97
3.2	Exemple d'une trace sismique. T : Temps d'arrivée de l'onde	98
3.3	Variation des sismogrammes verticaux en fonction du lissage spatial du milieu pour un milieu dont la vitesse augmente globalement avec la profondeur. Le coefficient de Poisson vaut 2.	107
3.4	Variation des sismogrammes verticaux en fonction du lissage spatial du milieu pour un milieu contenant une zone à moindre vitesse. Le coefficient de Poisson vaut 2. .	108

4.1	Phénomène d’ambiguïté de phase illustré pour une sinusoïde (une composante fréquentielle) en temps pour les données calculées et observées. La différence des temps de trajet est inférieure à une demi-période (à gauche) et supérieure à une demi-période (à droite).	115
4.2	Comparison between the 2nd order finite difference stencils of Virieux (1986) (left) and Saenger et al. (2000) (right)	140
4.3	Gradient kernel construction with the Born and Rytov approximations. Frequency maps show the waves propagation at a given frequency on the left. On the right gradients are displayed for one source-receiver couple with the Fresnel zone interpretation.	140
4.4	Background and transmission acquisition geometry synthetic example for illustration of Born and Rytov approximations performances. Background medium is homogeneous. Perturbations are 20 % high. Acquisition geometry provides transmission effects.	141
4.5	V_p progressive imaging with the frequency increase in the Born approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.	142
4.6	V_s progressive imaging with the frequency increase in the Born approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.	143
4.7	V_p progressive imaging with the frequency increase in the Rytov approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.	144
4.8	V_s progressive imaging with the frequency increase in the Rytov approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.	145
4.9	Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) with the Born approximation.	146
4.10	Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) with the Rytov approximation.	147
4.11	V_p and V_s parameters cross-sections extracted along a horizontal line crossing the lowest anomaly (see figure 4.4) and calculated with the Born approximation for different parameters couples.	148
4.12	V_p and V_s parameters cross-sections extracted along a horizontal line crossing the lowest anomaly (see figure 4.4) and calculated with the Rytov approximation for different parameters couples.	149
4.13	Top : Background and reflection acquisition geometry. Bottom : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation	150
4.14	Top : Background, free surface and reflection acquisition geometry. Middle : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation and the full data set. Bottom : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation and progressively introduced data set. Parameters maps colors are saturated to highlight reconstructed anomalies.	151
4.15	Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) calculated without and with data preconditioning for the horizontal component with the Born approximation.	152

4.16	Structure de la matrice $\partial W/\partial V_p$, dérivée de la matrice d'impédance W par rapport à V_p	155
4.17	Structure de la matrice $\partial W/\partial V_s$, dérivée de la matrice d'impédance W par rapport à V_s	156
4.18	Coefficients du Hessien pour V_p et V_s dans une configuration d'acquisition en transmission et une fréquence de $1.75Hz$	159
4.19	Profils de vitesse horizontaux pour l'inversion de (V_p, V_s) avec l'approximation de Born et différentes valeurs de ϵ . Les courbes sont très proches les unes des autres. Néanmoins, dans les cas réels, l'influence de ϵ est plus importante (Ravaut, 2003) .	160
4.20	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources explosives. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.	161
4.21	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches. Notons la différence entre le cas où les sources verticales sont alignées verticalement (milieu) et celui où elles sont alignées horizontalement (à droite) : la répartition spatiale de l'énergie est différente en raison de la directivité de la source.	161
4.22	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en réflexion avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.	162
4.23	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources explosives. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.	162
4.24	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches. Par rapport à la figure 4.21 calculée pour le paramètre V_p , la directivité de la source joue un rôle moins important pour le paramètre V_s	162
4.25	Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en réflexion avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.	163
4.26	Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en transmission. Deux points du milieu sont considérés. Notons la présence de coefficients situés près de la diagonale et non nuls. La largeur de la bande aux coefficients non négligeables est plus importante avec V_p car la longueur d'onde des ondes P est plus grande que celle des ondes S. Les échelles considérées sont arbitraires.	164
4.27	Coefficients de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en transmission pour un seul point du milieu. A gauche : coefficients extraits le long d'une ligne verticale de la matrice. Ils sont égaux à ceux de la figure 4.26 à gauche, ce qui prouve la symétrie de la matrice. A droite : coefficients pour une fréquence plus élevée égale à $3Hz$. La largeur de la bande diagonale dont les coefficients sont non négligeables diminue.	164

4.28	Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en réflexion. Deux points du milieu sont considérés. La largeur de la bande diagonale dont les coefficients sont non négligeables est équivalente à celle de la figure 4.26 mais ils sont dans l'ensemble plus élevés que ceux calculés avec un dispositif en transmission, ce qui signifie que les coefficients hors diagonale non nul jouent un rôle plus important.	165
4.29	Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle avec surface libre et un dispositif d'acquisition en réflexion. Deux points du milieu sont considérés. Les termes hors diagonale non nuls sont plus éloignés de la diagonale que précédemment.	166
4.30	Obtention du pas de descente optimal α_{opt} à partir des pas de descente α_1 et α_2 associés aux modèles \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2	167
4.31	Profils de vitesse horizontaux pour l'inversion de (V_p, V_s) avec l'approximation de Born et différentes valeurs de lissage spatial. σ est la valeur de la longueur de corrélation de la gaussienne spatiale, λ est la longueur d'onde.	168
4.32	Illustration de la reconstruction du chemin d'onde pour un couple source-récepteur	169
4.33	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source explosive et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	171
4.34	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	171
4.35	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	172
4.36	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	172
4.37	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source explosive et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	174
4.38	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	174
4.39	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	175
4.40	Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.	175
4.41	Source temporelle et contenu fréquentiel de la source	178
4.42	Profil horizontal de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born	178

4.43	Profil horizontal de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov .	179
4.44	Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Born	179
4.45	Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Rytov	180
4.46	Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born . .	180
4.47	Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov .	181
4.48	Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Born	182
4.49	Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Rytov	183
4.50	Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born	184
4.51	Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov	185
4.52	Schéma de base de la diffraction 1D. L'onde incidente est diffractée par une couche fine à une dimension au centre entre la source et le récepteur.	189
4.53	Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_p . Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde . . .	189
4.54	Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_p et des ondes directes et rétropropagées de nature différente. Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde	190
4.55	Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_s . Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde . . .	190
4.56	Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_s des ondes directes et rétropropagées de nature différente. Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde	191
4.57	Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	194
4.58	Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	195

4.59	Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	195
4.60	Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	196
4.61	Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	196
4.62	Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	197
4.63	Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	197
4.64	Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.	198
4.65	Modèles de vitesses obtenus après inversion avec l'approximation de Rytov	200
4.66	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils traversent l'anomalie supérieure.	203
4.67	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils traversent l'anomalie inférieure.	203
4.68	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	204
4.69	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	205
4.70	Modèles de vitesse finaux obtenus après inversion des données fenêtrées à différents déports	208
4.71	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion dont les données sont fenêtrées avec le déport. Les profils traversent l'anomalie supérieure.	209

4.72	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion dont les données sont fenêtrées avec le déport. Les profils traversent l'anomalie inférieure.	210
4.73	Modèles de vitesses obtenus après inversion, en fonction des données sélectionnées .	211
4.74	Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (en haut à gauche), avec préconditionnement par déport croissant (en haut à droite) et décroissant (en bas). Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	212
4.75	Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (en haut à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (en haut à droite) et décroissant (en bas). Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	213
4.76	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie supérieure.	214
4.77	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie inférieure.	215
4.78	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	216
4.79	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	217
4.80	Modèles de vitesses obtenus après inversion avec et sans préconditionnement des données, pour des fréquences deux fois plus nombreuses	218
4.81	Modèles de vitesses obtenus après inversion, en fonction des données sélectionnées, pour des fréquences inversées deux fois plus nombreuses	219
4.82	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie supérieure. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment	220
4.83	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie inférieure. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment	221
4.84	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant et avec davantage de fréquences inversées. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	222
4.85	Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	223
4.86	Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	224

4.87	Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion de toutes les données ou inversion pondérée des données, en injectant des données à déport croissant. L'inversion pondérée permet de reconstruire des contrastes de vitesse beaucoup plus importants et plus proches des contrastes réels. Les contrastes de vitesses sont saturés.	226
4.88	Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion des données sélectionnées par déport croissant. Les contrastes de vitesse ne sont pas saturés.	227
4.89	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. En haut : pas de préconditionnement des données. Au milieu : données fenêtrées des courts vers les grands déports. En bas : données fenêtrées des grands vers les courts déports.	228
4.90	Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (en haut à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (en haut à droite) et décroissant (en bas à droite). Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	229
4.91	Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (en haut à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (en haut à droite) et décroissant (en bas à droite). Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	230
4.92	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	231
4.93	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué	232
4.94	Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion de toutes les données ou inversion pondérée des données, en injectant des données à déport croissant. L'inversion pondérée permet de reconstruire des contrastes de vitesse beaucoup plus importants et plus proches des contrastes réels. Les contrastes de vitesses sont saturés. Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment.	233
4.95	Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. En haut : pas de préconditionnement des données. En bas : données fenêtrées des courts vers les grands déports. Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment.	234
4.96	Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant et davantage de fréquences. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment	235
4.97	Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	236
4.98	Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.	237
5.1	Dispositif d'acquisition utilisé pour l'enregistrement de données sismiques verticales à Jargeau (Loiret, France)	241

5.2	Sismogrammes enregistrés pour le tir direct 1 (voir la figure 5.1 pour la localisation du profil).	242
5.3	Sismogrammes enregistrés pour le tir inverse 12 (voir la figure 5.1 pour la localisation du profil)	242
5.4	Diagrammes de dispersion associés au tir direct 1 (à gauche) et au tir inverse 12 (à droite). Les diagrammes de dispersion ont été calculés par Adnand Bitri du BRGM.	243
5.5	Contenu fréquentiel du tir sismique direct n°1 (gauche) et du tir sismique inverse n°12 (droite). L'énergie est principalement concentrée à des fréquences inférieures à 100Hz. Notons la décroissance de l'énergie avec le déport.	244
5.6	Tirs contenant des hyperboles de diffraction liées à la présence de la cavité : tir direct n°21 (gauche) et tir inverse n°26 (droite)	245
5.7	Effet d'une cavité circulaire située à 2 m de profondeur, de rayon 1 m sur un profil où la cavité est localisée latéralement au déport 16 m. A gauche : sismogramme avec la cavité. Au milieu : sismogramme de référence. A droite : différence entre les deux sismogrammes.	246
5.8	Mise en évidence des deux arrivées tardives sur les données réelles. Les sismogrammes enregistrés pour ces quatre tirs sismiques montrent la variabilité de cinématique le long du profil d'acquisition. Les ondes de volume et les ondes tardives basse fréquence sont soulignées pour les mettre en évidence. Les temps d'arrivée d'une onde réfléchie latéralement (équation 5.1) sont également représentés en rouge. L'onde réfléchie théorique 1 est l'onde réfléchie par une digue parallèle au profil à 7.5 m de distance. L'onde réfléchie théorique 2 est l'onde réfléchie par une digue parallèle au profil à 10 m de distance.	247
5.9	Schéma des vitesses et des distances pour le calcul des temps d'arrivée de l'onde tardive	248
5.10	Sismogrammes calculés avec et sans une couche de vitesse rapide juste en-dessous de la surface libre	250
5.11	Source temporelle calculée à partir du blanchiment des données et contenu fréquentiel associé	252
5.12	Sismogramme du tir direct n°1 après prétraitement. Les ondes de surface ont été éliminées.	253
5.13	Meilleur modèle initial pour la tomographie des temps et couverture du milieu par les rais. Le milieu en V_p est peu réaliste car des anomalies rapides se trouvent au milieu d'une zone de vitesse plus lente. En réalité, aucune information n'est apportée par la tomographie des écarts de temps en-dessous de 7 m de profondeur.	254
5.14	Meilleur modèle issu de la tomographie des temps et sismogrammes calculés pour deux valeurs du ratio V_p/V_s différentes. Les sismogrammes correspondent au tir direct n°15 (source à 19m de la source du premier tir). Le milieu en V_p est peu réaliste car des anomalies rapides se trouvent au milieu d'une zone de vitesse plus lente. En réalité, aucune information n'est apportée par la tomographie des écarts de temps en-dessous de 7 m de profondeur.	255
5.15	Exemple de calcul d'un profil en une dimension de V_s : calcul et pointé du diagramme de dispersion (à gauche), obtention d'un modèle de vitesse à une dimension en V_p et V_s (au milieu) et calcul du sismogramme associé (à droite). Le diagramme de dispersion, son pointé et le calcul du modèle à une dimension ont été effectués par Gilles Grandjean.	256

5.16	Modèles de V_p et V_s issus de l'analyse de dispersion des ondes de surface et sismogramme calculé dans ce milieu. Les sismogrammes correspondent au tir direct n°24 et au tir inverse n°26. Les milieux de vitesse 2D sont obtenus par juxtaposition des milieux 1D issus de l'inversion des courbes de dispersion calculée pour chaque tir sismique par Adnand Bitri (BRGM). Lorsqu'un milieu 1D est calculé, le profil de vitesse correspondant est placé latéralement sous le récepteur localisé au milieu du tir sismique. Les milieux 1D obtenus pour les différents tirs sont ensuite juxtaposés et interpolés latéralement. Ici les milieux en V_p et V_s sont limités latéralement aux zones où un profil de vitesse 1D est reconstruit par la SASW. Ainsi, seuls 33 m sont représentés (33 m = 87 m (total) - 2* (10 m (PML) - 5 m (déport minimal) - 12 m (milieu du profil))	257
5.17	Influences respectives de V_p et V_s sur les sismogrammes	259
5.18	Exemple de résultat d'une inversion pour V_p . Une couche rapide est créée juste sous la surface libre, une couche de vitesse plus lente apparaît en-dessous	260
5.19	Sismogrammes calculés pour une épaisseur variable de la zone de vitesse rapide . .	261
5.20	Sismogrammes calculés pour une épaisseur variable de la zone à moindre vitesse . .	262
5.21	Sismogrammes calculés pour des lissages spatiaux différents. Notons l'influence du lissage spatial sur l'arrivée tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence est préférentiellement générée pour les contrastes de vitesse les moins lisses.	263
5.22	Modèle construit reproduisant le mieux les observées parmi les 200 modèles créés .	264
5.23	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 1 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de $43Hz$ est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	268
5.24	Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 1 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de $43Hz$ est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	269
5.25	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour le modèle issu de l'inversion des différences fréquences. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. Les zones PML sont larges de 10 m.	270
5.26	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour la comparaison entre le modèle à reconstruire et le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. L'amplitude des anomalies reconstruites est sous-estimée, puisque l'approximation de Born reconstruit des perturbations de vitesses linéaires par rapport aux perturbations des paramètres. Les zones PML sont larges de 10 m.	271
5.27	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées dans le milieu obtenu dans la section 5.5.3 contenant une cavité artificiellement introduite de rayon 1 m et de profondeur 2 m.	272

5.28	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 2 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de $43Hz$ est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	273
5.29	Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 2 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de $43Hz$ est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	274
5.30	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour le modèle issu de l'inversion des différences fréquences. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. Les zones PML sont larges de 10 m. Le rayon de la cavité vaut 2 m. La dissymétrie de l'anomalie reconstruite, observée sur le profil horizontal en V_p , est due au dispositif d'éclairage.	275
5.31	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour la comparaison entre le modèle à reconstruire et le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ avec des données synthétiques. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. L'amplitude des anomalies reconstruites est sous-estimée, puisque l'approximation de Born reconstruit des perturbations de vitesses linéaires par rapport aux perturbations des paramètres. Les zones PML sont larges de 10 m. Le rayon de la cavité vaut 2 m.	276
5.32	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées dans le milieu obtenu dans la section 5.5.3 contenant une cavité artificiellement introduite de rayon 2 m et de profondeur du toit 2 m.	276
5.33	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence. Des variations de vitesse latérales apparaissent mais la signature de la cavité montrée dans le cas synthétique n'est pas présente dans les images de V_p . Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	278
5.34	Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence. Des variations de vitesse latérales apparaissent mais la signature de la cavité montrée dans le cas synthétique n'est pas présente dans les images de V_p . Notons la présence d'oscillations latérales dans le modèle de vitesse, caractéristiques d'une longueur d'onde et donc d'une fréquence inversée (la fréquence $19Hz$). Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	278
5.35	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence.	279
5.36	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. Les zones PML sont larges de 10 m.	280

5.37	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence, très énergétique, est bien reproduite dans les sismogrammes synthétiques calculés dans le modèle final.	281
5.38	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence, très énergétique, est bien reproduite dans les sismogrammes synthétiques calculés dans le modèle final.	282
5.39	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $16Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (2ème ligne). Modèle initial en V_s (3ème ligne), modèle final obtenu à la fréquence $16Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (bas). Le milieu est peu différent du milieu initial, il est globalement plus lent. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.	283
5.40	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée. Le milieu est peu différent du milieu initial, il est globalement plus lent. Les zones PML sont larges de 10 m.	284
5.41	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $16Hz$ après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée.	285
5.42	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $16Hz$ après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée.	286
5.43	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée. Seules les fréquences $10Hz$ et $16Hz$ permettent d'extraire de l'information des données.	287
5.44	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p seul avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (milieu), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_s seul avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (bas). V_s est déduit via le rapport V_p/V_s égal à 2. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML sont larges de 10 m.	287
5.45	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p seulement. La source sismique est inversée.	288
5.46	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_s seulement. La source sismique est inversée.	288
5.47	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour un seul des deux paramètres inversés, l'autre étant calculé via le rapport V_p/V_s . Les zones PML sont larges de 10 m.	289
5.48	Sismogramme où l'arrivée tardive basse fréquence a été éliminée (gauche) et spectre correspondant (droite) pour le tir sismique inverse n°12	290

5.49	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (2ème ligne). Modèle initial en V_s (3ème ligne), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (bas). L'onde tardive basse fréquence a été éliminée. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Le modèle de vitesse V_p final est globalement plus rapide que le modèle initial.	291
5.50	Coupes verticales et horizontales avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Le modèle de vitesse V_p final est globalement plus rapide que le modèle initial et le modèle de vitesse V_s final évolue peu. Les zones PML sont larges de 10 m.	292
5.51	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées. V_p et V_s sont inversés. Les données ne contiennent pas l'onde tardive.	292
5.52	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Les ondes autres que l'onde tardive basse fréquence, éliminée des données, sont bien reproduites.	293
5.53	Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence $43Hz$ avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Les ondes autres que l'onde tardive basse fréquence, éliminée des données, sont bien reproduites.	294
5.54	Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_p seul avec les données réelles sans l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (milieu), modèle final obtenu à la fréquence $43Hz$ après inversion de V_s seul avec les données réelles sans l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (bas). V_s est déduit via le rapport V_p/V_s égal à 2. Les milieux sont peu différents du milieu initial.	295
5.55	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p seulement. L'onde tardive basse fréquence est éliminée.	296
5.56	Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_s seulement. L'onde tardive basse fréquence est éliminée.	296
5.57	Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour un seul des deux paramètres inversés, l'autre étant calculé via le rapport V_p/V_s . L'onde tardive basse fréquence est éliminée. Les milieux sont peu différents du milieu initial. Les zones PML sont larges de 10 m.	297
5.58	Coupes extraites des modèles finaux pour l'inversion de V_p et V_s en fonction de la valeur de ϵ , coefficient d'amortissement. L'onde tardive basse fréquence est incluse dans les données. La source sismique est inversée. Les zones PML sont larges de 10 m. L'amplitude des perturbations est plus fortes lorsque le coefficient d'amortissement ϵ est plus faible. Les milieux sont plus lisses lorsque le coefficient d'amortissement ϵ est plus fort.	298
5.59	Fonctions coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour différentes valeurs de ϵ , coefficient d'amortissement. A gauche : fonction coût pour $\epsilon = 10^{-3}$. A droite : fonction coût pour $\epsilon = 10^{-1}$. Les fonctions coût ont des allures similaires. Le nombre d'itérations effectué par fréquence est le même dans les deux cas et dans le cas où $\epsilon = 10^{-2}$	298

5.60	Coupes extraites des modèles finaux pour l'inversion de V_p et V_s en fonction du déport maximal pour sélectionner les données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique est inversée. Les zones PML sont larges de 10 m. Notons que pour la coupe verticale extraite des modèles à $x=43$ m, les vitesses V_p et V_s sont très proches à faible profondeur, ce qui est peu réaliste physiquement.	299
5.61	Fonctions coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour l'inversion de données dont le déport est inférieur à 15m uniquement.	299
5.62	Figure extraite de l'article de Leparoux et al. (2000). Profil en récepteurs communs sommés après correction DLMO	303
B.1	New staggered grid (left) and derivative stencil (right), after Saenger et al. (2000). In this Figure, $\Delta x = \Delta z = h$	336
B.2	Comparison between seismograms obtained with the Saenger et al. (2000) finite difference stencil, the Virieux (1986) stencil and the Garvin (1956) analytical solution. Body waves as well as surface waves are better modeled with the Saenger et al. (2000) stencil. For this simulation, $V_p = 888m/s$, $V_s = 431m/s$ and $\rho = 1600kg/m^3$	336
B.3	Comparison between seismograms obtained with the finite difference stencil of Saenger et al. (2000) and the Spectral Elements method	337
B.4	Positions of the source (S) and receivers for a medium containing circular cavities (a), rectangular cavity (b) and a circular cavity with altered zones (c)	338
B.5	Time domain representation of the Ricker source centered around 88.8Hz (left) and frequency content of the source (right)	338
B.6	Vertical seismograms and dispersion images for the homogeneous medium (a and d), with a cylindrical cavity (b and e) and differences between both cases (c and f). Label 1 is for surface waves, label 1b, for surface waves shift and label 2, for diffracted Rayleigh waves. For (e), the attenuated zone presents a 25% energy decrease. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.	339
B.7	Spectral amplitude of the surface waves propagating in a medium without cavity (a) and with a 2m deep circular cavity (b). In this case, the circular cavity center is located at the offset 10m.	339
B.8	Seismograms (a,b,c), corresponding dispersion images (d,e,f), differential seismograms (g,h,i) and corresponding dispersion images (j,k,l) for the homogeneous medium with a 5m deep circular cavity (left column : a, d, g, j), a 8m deep circular cavity (central column : b, e, h, k) and 2 m deep rectangular cavity (right column : c, f, i, l). Label 3 is for disturbed arrival train, label 4, for diffracted body wave and label 5, for diffracted surface wave. For (d) and (e), the attenuated zone presents a 12% energy decrease. For (f), the attenuated zone presents a 25% energy decrease. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.	340
B.9	Seismogram (a), corresponding dispersion image (c), differential seismogram (b) and corresponding dispersion image (d) for the homogeneous medium with a 2m deep circular cavity and a surrounding circular zone of altered medium. Label 6 is for forward diffracted surface wave. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.	341
B.10	Seismograms and dispersion images in the homogeneous medium with a conical-shape altered zone with (a and c) or without (b and d) an underlying cavity. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.	342

Liste des tableaux

2.1	Valeur des paramètres du milieu	82
-----	---	----

Chapitre 1

Introduction : L'imagerie quantitative multiparamètres de la subsurface en sismique

La connaissance de la structure et de la composition du sous-sol représente, depuis de nombreuses années, un enjeu économique, environnemental et humain de première importance. Par exemple, la détection des ressources naturelles, enfouies dans le sol, constitue actuellement un enjeu économique majeur. Des objets potentiellement dangereux, comme des infiltrations de polluants pouvant contaminer la nappe phréatique (Lanz et al., 1998) ou des cavités souterraines susceptibles de s'effondrer (Leparoux et al., 2000), doivent également être localisés dans le cadre de l'aménagement du territoire.

Afin d'accéder à cette connaissance, diverses méthodes et techniques géophysiques ont été développées et mises en oeuvre au cours du temps. Parmi elles, figurent, entre autres, les méthodes électriques, électromagnétiques, gravimétriques et sismiques. Le choix d'une de ces méthodes dépend du type de propriétés physiques à étudier, de l'objet et/ou de la zone à caractériser et enfin de l'environnement dans lequel il/elle se trouve. Dans certains cas, comme par exemple celui de la détection de cavités souterraines en milieu urbain, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, de manière à caractériser un milieu à l'aide de différentes grandeurs physiques. Cette étude se focalise sur la méthode sismique. Nous expliquons dans la première partie de cette introduction les principes de la sismique et pourquoi nous avons choisi cette technique.

L'"imagerie quantitative multiparamètres" en sismique consiste à déterminer les valeurs de propriétés physiques caractérisant les roches et mesurables avec des ondes sismiques, comme par exemple la vitesse des ondes P (de pression-décompression) et des ondes S (de cisaillement). Le but de notre étude est d'obtenir une image du milieu la plus précise possible, *i.e.* d'attribuer en chaque point du milieu une valeur des paramètres physiques choisis. Nous définirons précisément dans la deuxième partie de cette introduction quelles sont les performances attendues et les limites de l'imagerie quantitative multiparamètre.

Le milieu proche de la surface libre, ou subsurface, se définit comme les premières dizaines de mètres du sol. C'est un milieu particulièrement complexe, pouvant contenir des zones où les ondes se propagent plus lentement ou plus rapidement, avec des contrastes importants. Les ondes arrivant sur ces zones peuvent être réfléchies ou diffractées selon la taille des entités considérées. Nous nous intéresserons plus particulièrement à des anomalies fortes et de petite taille, comme les cavités souterraines. Par "petite taille", nous entendons des objets dont la taille caractéristique est de l'ordre de la longueur d'onde dominante et donnant lieu à des diffractions des ondes. De plus, lorsque la source sismique est proche de la surface libre (ce qui est presque toujours le cas), des ondes de surface de forte amplitude sont générées. Les enregistrements d'ondes se propageant à

proximité de la surface libre sont donc à la fois riches d'informations et difficiles d'interprétation.

Le milieu peut être considéré comme variable dans une dimension, deux dimensions ou trois dimensions. Les milieux tabulaires, dans lesquels les propriétés du milieu dépendent uniquement de la profondeur, constituent une première approximation des milieux géologiques. Néanmoins, dans le cadre de l'étude de la subsurface, cette approximation est peu réaliste. Il faut donc caractériser le milieu à l'aide de deux ou trois dimensions. En trois dimensions, la résolution de ce problème devient très coûteuse numériquement. De plus, les données sismiques acquises dont nous disposons sont constituées de lignes de récepteurs, enregistrant le passage des ondes qui peuvent être modifiées par des structures latérales (phénomènes en trois dimensions). Nous supposons néanmoins que la propagation ne se fait qu'en deux dimensions. Pour ces raisons, nous nous intéressons à une imagerie en deux dimensions. Les représentations du milieu que nous montrerons seront donc des coupes verticales.

Caractériser ce milieu complexe et en détecter les diffractants constitue un problème difficile. C'est pourquoi il est nécessaire d'effectuer des approximations physiques et/ou de ne s'intéresser qu'à certains phénomènes physiques. La détermination de la structure et la composition d'un milieu complexe s'effectue ainsi à des échelles caractéristiques différentes selon la méthode considérée.

Lorsque les grandes longueurs d'onde du milieu sont correctement modélisées, le milieu ainsi construit est appelé un **macromodèle**. Ce dernier donne une image lisse du milieu. Un milieu "lisse" est un milieu dans lequel les ondes qui se propagent ont une longueur d'onde spatiale inférieure à la longueur d'onde caractéristique du milieu de propagation (Ben Menahem & Beydoun, 1985). Ainsi, les anomalies de "petite taille" ne sont pas détectées ni caractérisées. Différentes méthodes existent actuellement pour déterminer les grandes longueurs d'onde d'un milieu. Citons par exemple la tomographie des écarts de temps des premières arrivées (Zelt & Smith, 1992; Le Meur, 1994; Improta et al., 2002; Ravaut, 2003) ou l'étude de la dispersion des ondes de surface (Nazarian & Stokoe, 1984; Xia et al., 1999; Ganji et al., 1997; Foti, 2000; Bitri et al., 1998, 2002).

Ce macromodèle sert ensuite de modèle initial pour appliquer des méthodes caractérisant le milieu à des longueurs d'onde inférieures et permettant d'imager les diffractants. En effet, les courtes longueurs d'onde d'un milieu ne peuvent être caractérisées quantitativement lorsque les grandes longueurs d'onde sont mal déterminées. Ceci a été démontré et utilisé en sismique par de nombreux auteurs (Robein, 2003; Snieder et al., 1989; Mora, 1988, 1989; Cao et al., 1990; Delprat-Jannaud & Lailly, 2005; Nolet, 1990). **L'inversion des formes d'onde élastique**, méthode étudiée et présentée dans cette thèse, fait partie de ces méthodes.

Les longueurs d'onde intermédiaires sont difficiles d'accès. Selon Jannane et al. (1989), pour les acquisitions sismiques de proche surface avec une configuration de sismique réflexion, les données sismiques avec une bande de fréquence typique ne sont pas sensibles aux longueurs d'onde intermédiaires. Selon Sirgue (2003), la connaissance des longueurs d'onde intermédiaires permet de mieux connaître les courtes longueurs d'onde, améliorant ainsi la méthode d'inversion des formes d'onde élastique.

Nous appliquons ici l'inversion des formes d'onde élastique à la détermination des propriétés sismiques de la proche surface pour la détection de cavités souterraines. Ce travail a en effet été financé par le département ARN (Aménagement et Risques Naturels) du BRGM (Bureau de Recherche Géologique et Minière) pour la caractérisation de cavités superficielles. Cependant, comme nous allons également le voir dans cette introduction, l'inversion des formes d'onde élastique est une méthode applicable dans de nombreux contextes géologiques et à des échelles spatiales très variables.

Dans cette introduction, nous commençons par rappeler le principe de la sismique et son utilisation pour la caractérisation des milieux. Puis nous définissons l'imagerie multiparamètres quantitative et expliquons pourquoi nous avons choisi la méthode de l'inversion des formes d'onde élastique pour la caractérisation de la proche surface. Enfin nous décrivons comment nous l'avons mise en oeuvre.

1.1 Sismique et sismologie

1.1.1 Définition de la sismologie

Si la Terre était strictement à l'équilibre mécanique, (*i.e.* si pour chaque point de la Terre, la somme des forces mécaniques extérieures et intérieures et celle des contraintes intérieures et extérieures étaient nulles), aucune onde sismique ne se propagerait. Néanmoins, l'application de toute force ou combinaison de forces en un point donné provoque une perturbation de l'état d'équilibre local. Citons comme exemples de ces sources sismiques, les tremblements de terre, les explosions, mais également le bruit urbain et la chute d'un poids. Ces perturbations se propagent aux points voisins, créant ainsi une onde sismique perturbant les champs locaux de proche en proche. Lorsque l'énergie libérée à la source est plus importante, les ondes possèdent généralement une amplitude plus grande.

La sismologie est l'étude des ondes sismiques qui se propagent dans la Terre. Ces ondes sont émises par une source et se propagent dans un milieu donné. Les capteurs sismiques enregistrent en des points discrets les déplacements du sol, les vitesses de déplacement ou les accélérations du sol selon le type de capteur utilisé.

La sismologie active ou sismique et la sismologie se différencient par le type de source émettant les ondes. Dans la sismologie active, les sources sismiques sont déclenchées artificiellement par un opérateur, qui en connaît a priori précisément la localisation spatiale et temporelle. A l'opposé, en sismologie (passive), les sources sont naturelles et correspondent principalement aux tremblements de terre ou éruptions volcaniques.

1.1.2 Pourquoi étudier les ondes sismiques

La propagation des ondes dans un milieu donné dépend des propriétés du milieu. Les ondes enregistrées portent donc l'empreinte du milieu traversé.

Les méthodes sismiques permettent d'étudier la composition et la structure des milieux à des échelles différentes, dépendant du contenu fréquentiel et énergétique de la source sismique. Ceci constitue un avantage important par rapport à d'autres méthodes géophysiques. Ainsi, les méthodes sismiques peuvent être utilisées pour la détection d'hydrocarbures, à plusieurs kilomètres de profondeur, ou pour la caractérisation de la proche surface, à quelques mètres de profondeur. De plus, à la différence d'autres méthodes comme le géoradar basé sur la propagation et la diffusion des ondes électromagnétiques, les ondes se propagent quel que soit le milieu et ne sont que peu absorbées. Dans les milieux argileux ou limoneux par exemple, les ondes électromagnétiques se propagent sur des très courtes distances (Leparoux et al., 2002b). Enfin, cette méthode peut également s'appliquer en milieu urbain à des heures choisies, alors que d'autres méthodes comme la gravimétrie souffrent de perturbations causées par la présence de caves ou d'immeubles (Radogna et al., 2003).

Les informations contenues dans les enregistrements sismiques renseignent non seulement sur le milieu de propagation mais également sur la source qui a émis les ondes. Cette propriété est utilisée pour l'étude des tremblements de terre et plus particulièrement de la source sismique ayant généré les ondes (Aki & Richards, 2002).

L'étude des ondes sismiques permet idéalement de déterminer à la fois la localisation spatio-temporelles des sources sismiques, leur durée temporelle ainsi que la composition et la structure du milieu de propagation.

Malheureusement, le nombre d'enregistrements disponibles pour caractériser un milieu ou une source sismique est la plupart du temps inférieur au nombre d'inconnues du problème. De plus, les données enregistrées ne sont pas parfaites et contiennent du bruit. Il est donc nécessaire de choisir les grandeurs à connaître et de simplifier le problème à résoudre. Les approximations effectuées

dépendent de la connaissance de la source sismique et de l'objet d'étude. Ainsi, en sismologie et en sismique, les approches pratiques ou la mise en oeuvre théorique sont différentes.

1.1.3 Sismologie (passive)

En sismologie (passive), la localisation spatio-temporelle des sources, l'évolution temporelle de la source, ainsi que la connaissance du milieu de propagation sont inconnues. Le problème est donc largement sous-déterminé et des hypothèses fortes ou des approximations sont nécessaires pour accéder à l'une des inconnues. Notons néanmoins que localisations des séismes et composition du milieu ne sont pas des paramètres indépendants, puisque chacun influence l'autre.

Si la source sismique constitue le but de l'étude, le milieu de propagation et la localisation du séisme sont considérés comme connus. Dans ce cas, le milieu de propagation est souvent assimilé à un milieu tabulaire (Ji et al., 2003) ou à un milieu homogène (Olsen et al., 1997), *i.e.* à un milieu simple. Il est également possible de considérer que la signature du milieu de propagation est connue. Par exemple, la méthode des fonctions de Green empiriques assimile un petit séisme à une source ponctuelle. Les ondes émises par le petit séisme et arrivant aux capteurs dépendent uniquement de la propagation des ondes dans le milieu. Ceci permet ensuite d'estimer que la signature du milieu de propagation est connue pour l'étude de séismes plus importants localisés dans la même région (Kohrs-Sansorny et al., 2005).

Si la détermination de la structure du milieu traversé par les ondes constitue l'objectif de l'étude, la source sismique est considérée comme connue et simple. Localisations spatio-temporelles des séismes et structures du milieu sont alors étudiés conjointement. Ceci fait l'objet des méthodes de tomographie par exemple (Latorre et al., 2004; Vanorio et al., 2005).

L'avantage de ces méthodes réside dans le nombre important de données accessibles dans certaines régions du monde. De plus, les ondes se propagent dans des zones où il est souvent difficile d'obtenir des informations à l'aide de la sismique car les profondeurs à atteindre sont très importantes (Improta et al., 2002). Ce type d'étude peut également permettre d'obtenir des informations sur les milieux de propagation où il est très délicat d'utiliser des sources d'origine anthropique, comme les parcs naturels ou les glissements de terrain. Dans certaines applications, le bruit urbain est utilisé comme source sismique (Wathelet et al., 2002).

Cependant, la répartition spatiale des sources est loin d'être homogène et certaines parties du milieu à connaître ne sont pas du tout parcourues par les ondes. De plus, les incertitudes sur les localisations spatio-temporelles des séismes influencent les images du milieu obtenues (Gélis, 2002). Récemment, des méthodes de double différence ont été développées, permettant d'obtenir des images précises de la structure et de la composition du milieu à proximité des régions sources, en s'affranchissant de la connaissance de la propagation des ondes des sources sismiques aux récepteurs (Waldhauser & Ellsworth, 2000; Got et al., 1994; Monteiller, 2005). Cependant, cette dernière reste à déterminer précisément.

1.1.4 Sismique ou sismologie active

Dans ce cas, les sources sismiques sont d'origine anthropique. Ce sont par exemple des explosions à la dynamite, des chutes de poids, des bombes, des canons à air ... La localisation des sources est donc connue, mais la signature temporelle de la source ne l'est généralement pas et doit être déterminée (Delprat-Jannaud & Lailly, 2005; Pratt et al., 1998). Néanmoins, en plaçant un capteur à proximité de la source, il est possible d'obtenir une bonne approximation de la signature temporelle de la source.

Pour déterminer la composition du sol dans une région précise ou à une échelle locale, la sismique est couramment utilisée. Pour caractériser les zones de subsurface, les sources de type chute de poids sont bien adaptées (Leparoux et al., 2000). Elles génèrent des ondes qui se propagent

sur des distances hectométriques, avec des longueurs d'onde métriques à décamétriques. L'amplitude de ces sources n'excède pas celle du bruit urbain, elles n'occasionnent donc pas de pollution supplémentaire.

Enfin, la propagation des ondes dans un milieu donné est gouvernée par des équations établissant des relations non linéaires entre les propriétés du milieu de propagation et les enregistrements sismiques (Mora, 1987b; Tarantola, 1987). Ceci constitue une des difficultés principales rencontrées pour effectuer une imagerie quantitative multiparamètres d'un milieu donné en sismique.

1.2 L'imagerie quantitative multiparamètres

1.2.1 Qu'est ce que l'imagerie quantitative multiparamètres ?

Les ondes qui se propagent dans un milieu donné contiennent des informations relatives au milieu traversé, puisque leur propagation dépend des paramètres physiques du milieu. Une **imagerie quantitative du milieu** est une image des paramètres caractérisant le milieu. Comme nous avons choisi la méthode sismique, les paramètres caractérisant le milieu sont des paramètres sismiques. Parmi eux figurent la vitesse des ondes P, celle des ondes S, le coefficient de Poisson, les paramètres de Lamé ... Nous définirons tous ces paramètres au cours de cette thèse et verrons l'importance de leur choix.

L'"imagerie" du milieu implique que nous souhaitons obtenir une "image" des paramètres du milieu, *i.e.* nous souhaitons attribuer à chaque point du milieu une valeur des paramètres physiques choisis. Ainsi, le milieu peut être considéré comme un ensemble de points juxtaposés, caractérisés séparément et indépendants, et représentant une version discrète ou pixelisée d'un continuum. Les variations spatiales des paramètres caractérisent les couches, les gradients de vitesse, les zones à moindre vitesse ... Il est également possible de connaître les propriétés du milieu en chaque point physique n'appartenant pas à la grille de points diffractants par des interpolations entre les points voisins appartenant à la grille. Cette approche rejoint le concept de grille de points diffractants : chaque point du milieu est considéré comme une source secondaire, émettant un champ, selon le principe de Huyghens.

Cette imagerie est "quantitative" dans le sens où nous nous intéressons à l'amplitude des paramètres physiques et à leur valeur absolue, pas seulement à leur valeur relative. Ceci constitue une différence majeure avec les méthodes de migration puisque dans ces dernières, la réflectivité du milieu est recherchée, *i.e.* la capacité des différents points du milieu à renvoyer l'énergie (Robein, 2003). Les endroits où la réflectivité est plus importante caractérisent les interfaces entre couches ou réflecteurs. Dans ce cas, les différentes parties du milieu ne sont pas caractérisées par leurs propriétés physiques propres, seuls les contrastes relatifs sont accessibles. Au contraire, dans l'inversion des formes d'onde, les amplitudes des paramètres sont calculées.

Comme le milieu est discrétisé, la valeur des paramètres en chaque point du milieu constitue en réalité une moyenne spatiale locale des paramètres. Lorsque cette moyenne s'effectue sur des distances relativement importantes ou lorsque la maille de la grille est grossière, l'image du milieu est lisse et le modèle est nommé **macromodèle**. Dans ce cas, les interfaces ne sont pas clairement imagées et les réflexions sur des interfaces séparant des milieux contrastés sont mal modélisées (Cerveny et al., 1977; Chapman, 1985).

Dans notre cas, le but est d'obtenir une image des diffractants, et donc d'effectuer les calculs sur une grille fine où les paramètres sont peu moyennés spatialement. Ceci permet de déterminer localement de forts contrastes de vitesse.

Enfin, nous souhaitons effectuer une imagerie quantitative "multiparamètres". Ceci signifie que le milieu est caractérisé à l'aide de deux paramètres sismiques au moins. Comme nous souhaitons en connaître le plus possible, nous avons étudié les ondes élastiques et non pas acoustiques (Mora, 1987b). Les ondes élastiques sont gouvernées par l'équation d'onde élastique (l'équation d'onde

acoustique n'est qu'une approximation de cette dernière et ne modélise que la propagation des ondes de pression-décompression (ondes P)). Comme nous travaillons en deux dimensions spatiales, nous pouvons utiliser des données enregistrées selon deux axes du plan perpendiculaires. Nous pouvons ainsi espérer effectuer une image du milieu pour deux paramètres indépendants. Il est en effet important que les deux paramètres soient le plus indépendants possible, de manière à pouvoir extraire des données des informations complémentaires et à ne pas polluer la détermination d'un paramètre par la mauvaise connaissance de l'autre paramètre (Tarantola, 1987).

1.2.2 Pourquoi faire une imagerie quantitative multiparamètres

Le but de l'imagerie quantitative multiparamètres étudiée dans cette thèse est de déterminer précisément la structure et la composition du milieu en deux dimensions pour deux paramètres sismiques. La caractérisation précise d'un milieu ou la localisation de diffractants sont utiles pour des échelles spatiales très différentes. Après avoir exposé divers exemples d'application, nous expliquerons les principales caractéristiques des diffractants que nous cherchons à détecter et les propriétés que l'algorithme de détermination de la structure et composition du sol doit posséder pour caractériser ces diffractants.

Différentes échelles d'imagerie

A l'échelle crustale, les zones de subduction et les zones sismogènes constituent des objets d'étude qui doivent être imagés de plus en plus finement, de manière à comprendre leur fonctionnement plus en détail (Dessa et al., 2004; Agudelo, 2005). Ainsi, la génération de séismes à des profondeurs importantes pourra être mieux expliquée.

A l'échelle kilométrique ou hectométrique, les pétroliers désirent caractériser les réservoirs d'hydrocarbures et détecter les zones contenant potentiellement ces ressources naturelles. Pour l'instant, les méthodes de tomographie des temps des premières arrivées permettent d'avoir des indications sur la porosité et le contenu en fluides d'une zone à partir de la connaissance de $V_p * V_s$ et de V_p/V_s où V_p et V_s sont les vitesses de propagation des ondes P et S respectivement (Latorre et al., 2004; Vanorio et al., 2005).

A l'échelle décimétrique, une des applications majeures de l'imagerie sismique quantitative multiparamètres est la caractérisation des zones de faille. Ce sont en effet des zones particulièrement complexes, contenant des matériaux broyés et soumises à des forces et contraintes très importantes. La connaissance de la composition du milieu précise à proximité des zones de faille est très importante pour la compréhension et la modélisation de la rupture sismique (Andrews & Ben-Zion, 1997; Harris & Day, 1997). Les anciennes mines nécessitent également des études précises, permettant de déterminer l'état des galeries en profondeur et de prévenir tout risque de tassement du sol, dangereux pour les habitations situées au-dessus (Abraham et al., 2001). Enfin, dans les régions sismogènes, il est primordial de déterminer la structure du terrain sous-jacent puisque sa composition renseigne sur de possibles effets de site et permet d'en prévoir l'importance (Ramos-Martinez et al., 1997). Ces derniers sont provoqués par le piégeage des ondes sismiques dans des zones à moindre vitesse et provoquent en surface des dégâts humains et matériels considérables, pouvant aller jusqu'à l'effondrement de bâtiments et la mort de personnes (par exemple à Mexico en 1985).

La profondeur maximale atteinte dépend du contenu fréquentiel de la source sismique. Pour atteindre des profondeurs élevées, la longueur d'onde caractéristique doit être importante et la source doit émettre des basses fréquences. Ainsi, une bande de fréquences de 5 à 15 Hz permet d'atteindre des profondeurs de l'ordre de la dizaine de kilomètres. Lorsque les fréquences sont plus élevées, entre 100 et 200 Hz par exemple, les profondeurs maximales atteintes sont de l'ordre de la centaine de mètres. Ces valeurs ne sont que des ordres de grandeur et dépendent de nombreux facteurs, comme l'ouverture du dispositif ou les variations de vitesse dans le milieu de propagation ainsi que l'atténuation.

Nous avons ainsi énuméré quelques exemples dans lesquels la caractérisation des diffractants du milieu à une échelle donnée constitue un enjeu économique, environnemental et humain conséquent. Les domaines sont aussi variés que l'aménagement du territoire, le risque naturel et la détection d'hydrocarbures.

Particularités des diffractants et propriétés souhaitées de la méthode

Modélisation précise de la propagation des ondes Les diffractants auxquels nous nous intéressons comportent des contrastes de vitesse locaux importants, de forte amplitude, avec une chute brutale des vitesses, comme dans le cas des cavités souterraines non maçonnées et remplies d'eau ou d'air, ou bien une accélération brutale des vitesses au niveau de la paroi en béton pour les cavités maçonnées par exemple (Leparoux et al., 2000). Ces variations brutales de vitesse provoquent des **diffractions multiples** des ondes. Il est donc nécessaire de se munir d'un outil numérique les prenant en compte.

Ce dernier phénomène est d'autant plus marqué que, près de la surface libre, des réflexions multiples existent entre diffractants et surface libre, complexifiant encore les phénomènes physiques mis en jeu. Il est donc nécessaire que la méthode utilisée prenne en compte **tout le champ d'onde** qui se propage (Mora, 1988).

De plus, ces diffractants ont une taille de l'ordre de la longueur d'onde dominante ou inférieure. L'approximation haute fréquence de l'équation d'onde (les rais) n'est strictement valable que dans un milieu lisse. Elle ne permet donc pas de prendre en compte des anomalies de taille égale ou inférieure à la longueur d'onde (Cerveny et al., 1977; Chapman, 1985; Luo & Schuster, 1991). La détection de variations de vitesse sur les distances égales ou inférieures à la longueur d'onde nécessite donc que la résolution de la méthode utilisée soit de l'ordre de la longueur d'onde ou moins si possible.

Pour les deux raisons précédemment exposées, les méthodes du type Rai+Born (Lambaré et al., 1992; Forgues, 1996; Ribodetti & Virieux, 1998; Lambaré et al., 2003; Agudelo, 2005), basées sur l'approximation haute fréquence, ne peuvent pas s'appliquer dans ces milieux complexes pour la caractérisation de diffractants ou de zones de taille réduite. En effet, dans cette méthode, le milieu est supposé varier lentement spatialement et une approximation haute fréquence de l'équation d'onde est effectuée. Ceci implique que de forts contrastes de vitesse, ainsi que les ondes associées (ondes réfractées, ondes de surface, ondes rampantes ...) ne peuvent être pris en compte.

Prise en compte de la surface libre Nous souhaitons appliquer la méthode à des données réelles acquises près de la surface libre, pour détecter des cavités souterraines. La proximité de la surface libre entraîne la propagation d'ondes de surface très énergétiques (Miller & Pursey, 1955; Sheriff & Geldart, 1995). Ces dernières portent également des informations sur le milieu de propagation (Nazarian & Stokoe, 1984). Elles doivent donc être correctement modélisées ou supprimées, ce qui est couramment effectué.

Ceci entraîne que l'approximation acoustique, couramment utilisée pour modéliser la propagation des ondes, ne peut être utilisée, car avec cette dernière, les ondes de surface ne sont pas modélisées. En effet, ces dernières résultent d'interférences constructives entre ondes P et S réfléchies à la surface libre. Dans cette thèse, nous n'étudions que les ondes de surface de Rayleigh et non celles de Love car nous travaillons avec des déplacements dans le plan vertical.

Utilisation du maximum d'informations possibles Comme le milieu de propagation est très complexe, nous souhaitons utiliser le maximum d'informations contenues dans les traces sismiques. Les méthodes de tomographie (Zelt & Smith, 1992; Imbrota et al., 2002; Latorre et al., 2004), basées sur l'étude des temps de trajet, ne permettent pas de prendre en compte la complexité des phénomènes physiques. Les méthodes d'étude du contenu fréquentiel des ondes de surface

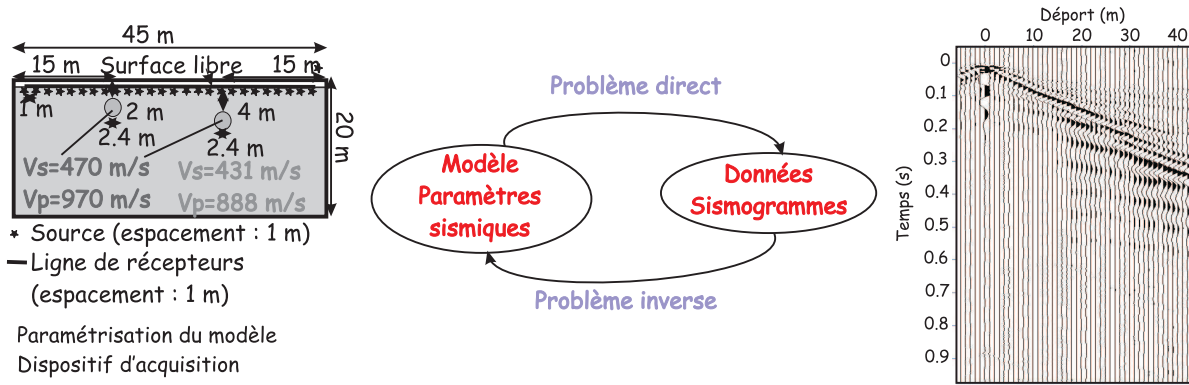


FIG. 1.1: Schéma du problème direct et du problème inverse

s'intéressent également à une partie limitée du sismogramme (Nazarian & Stokoe, 1984; Snieder, 1986; Nolet, 1987). Ainsi, nous souhaitons que ondes de volume et de surface soient prises en compte dans la méthode.

Extraction d'informations pertinentes Les enregistrements sismiques contiennent toujours du bruit. Il peut être d'origine instrumentale, dû à des sources extérieures ou à des phénomènes non pris en compte dans l'algorithme d'imagerie quantitative multiparamètres. Quelle que soit sa nature, ce bruit ne doit pas être considéré comme une onde se propageant.

Nous souhaitons donc utiliser une méthode permettant d'extraire des informations pertinentes des données et compatibles avec le modèle utilisé. Nous ne souhaitons pas "obliger" l'algorithme à expliquer toutes les signaux qui se trouvent sur les enregistrements, signaux qui pourraient ne pas vérifier les équations de propagation (bruit, ondes se propageant en trois dimensions ...).

1.3 L'imagerie quantitative multiparamètres : un problème inverse non linéaire

Nous avons formulé dans les lignes précédentes, les principales propriétés de l'algorithme que nous souhaitons développer. En réalité, l'imagerie quantitative multiparamètres peut être formulée à l'aide du formalisme des **problèmes inverses**, longuement étudiés en géophysique et en sismique particulièrement (Tarantola, 1984a; Lailly, 1984; Menke, 1989; Tarantola, 1987; Sen & Stoffa, 1995).

La propagation des ondes élastiques dans un milieu linéaire isotrope en deux dimensions est un problème physique qui peut être modélisé à l'aide d'équations mathématiques aux dérivées partielles. Grâce à ces dernières, il est possible de connaître, en un point donné, les mouvements du sol lorsque la source sismique et le milieu de propagation sont connus. Ceci correspond à un **problème direct** : la connaissance du modèle permet de calculer les données (figure 1.1). Généralement, en physique, les problèmes directs sont plus faciles à résoudre que les problèmes inverses.

En revanche, les problèmes inverses (figure 1.1) sont beaucoup plus difficiles à résoudre. En effet, il s'agit de déduire des données le modèle. Dans notre cas, il faut déterminer la structure et la composition du milieu lorsque les enregistrements des ondes sont connus. Ce problème inverse est de surcroît non linéaire (Mora, 1987b; Tarantola, 1987; Menke, 1989; Sen & Stoffa, 1995), *i.e.* si l'un des paramètres du milieu est multiplié par deux par exemple, le champ résultant n'est pas nécessairement multiplié par deux.

Pour résoudre les problèmes inverses, il est courant d'utiliser une formulation du problème inverse basée sur la définition d'une fonction coût, contenant les carrés des différences entre données observées ou enregistrées et données calculées ou modélisées (Tarantola, 1987; Sen & Stoffa, 1995;

Menke, 1989). Résoudre le problème inverse équivaut alors à trouver le minimum global de la fonction coût. En ce point, données observées et calculées se ressemblent le plus possible étant donnée la formulation du problème direct. Le milieu ayant servi à calculer les données théoriques est considéré comme le meilleur modèle représentant la réalité.

La résolution des problèmes inverses non linéaires est délicate puisque la fonction coût est susceptible de contenir plusieurs minima locaux. Il faut donc éviter de rester bloqué dans un minimum local afin d'atteindre le minimum global.

Des méthodes dites globales ou semi-globales (Sen & Stoffa, 1995) permettent de parcourir l'espace des modèles de manière plus ou moins aléatoire et ainsi de localiser le minimum global de la fonction coût. Néanmoins ces méthodes s'appuient sur la résolution d'un grand nombre de problèmes directs et deviennent très coûteuses lorsque le problème direct n'est pas résolu rapidement. Dans notre cas, le problème direct est trop coûteux pour être résolu un grand nombre de fois.

Tarantola (1987) a formulé une méthode d'inversion basée sur la minimisation de cette fonction coût à l'aide d'approximations linéaires successives, au cours desquelles la fonction coût décroît. A chaque itération, nous considérons que le problème inverse est localement linéaire, *i.e.* que la fonction coût est localement quadratique. Nous déterminons localement la pente de descente maximale le long de cette fonction coût par le calcul du **gradient** en première approximation. Des raffinements peuvent ensuite être apportés pour déterminer précisément le pas de descente optimal ou pour accélérer la convergence (Pratt et al., 1998; Polak, 1971; Shin et al., 2001a). Ainsi, nous espérons atteindre de proche en proche le minimum global de la fonction coût. Dans ce cas, le problème inverse est dit **linéarisé** (Tarantola, 1987).

Le principal inconvénient de cette approche réside dans l'importance du choix du modèle initial. En effet, si ce dernier est mal choisi, l'algorithme de minimisation de la fonction coût peut mener vers un minimum local.

1.4 Comment obtenir une image quantitative du milieu : stratégie

1.4.1 Connaissance préalable d'un macromodèle de vitesse

Comme nous l'avons vu, le problème inverse de l'imagerie multiparamètres quantitative est non linéaire. De plus, comme nous souhaitons atteindre des petites échelles, il est nécessaire de connaître au préalable les **grandes longueurs d'onde** du milieu (Robein, 2003; Snieder et al., 1989; Mora, 1988; Cao et al., 1990; Delprat-Jannaud & Lailly, 2005). Lors du développement théorique de la méthode d'inversion des formes d'onde élastiques, nous supposons qu'un macromodèle de vitesse est connu. L'application de la méthode d'inversion permet ensuite de caractériser à petite échelle des zones localisées ou des diffractants.

Pour l'étude des données réelles, nous suivons la démarche complète. Nous utiliserons des méthodes classiques de détermination d'un macromodèle comme la tomographie des temps d'arrivée des ondes de volume (Zelt & Smith, 1992; Le Meur, 1994; Imbrota et al., 2002; Ravaut, 2003) ou de surface (Snieder, 1986; Nolet, 1987; Ernst & Herman, 2000) et l'inversion des courbes de dispersion des ondes de surface (Nazarian & Stokoe, 1984; Xia et al., 1999; Ganji et al., 1997; Foti, 2000; Bitri et al., 1998, 2002). Nous effectuerons également de nombreux problèmes directs par une méthode essai-erreur afin de reproduire au mieux les principales ondes des sismogrammes, modélisant ainsi correctement les grandes longueurs d'onde du milieu de propagation.

Le macromodèle de vitesse utilisé sert de **modèle initial** pour l'inversion linéarisée développée dans cette thèse. Or les méthodes linéarisées sont très sensibles au choix du modèle initial (Tarantola, 1987). Il est donc primordial que ce modèle reproduise correctement les grandes longueurs d'onde du milieu et explique les temps des principales arrivées.

L'utilisation successive de deux méthodes, chacune résolvant des échelles différentes ou correspondant à des approximations physiques différentes, a été utilisée par de nombreux auteurs en

sismologie ou sismique (Improta et al., 2002; Cao et al., 1990; Snieder et al., 1989; Ji & Singh, 2005).

1.4.2 Au-delà de la migration

Cette approche par "macromodèle + inversion des formes d'onde élastique" correspond à l'équivalent de la sismique pétrolière : "analyse de vitesse + migration" (Mora, 1989; Robein, 2003; Yilmaz, 2001). L'analyse de vitesse consiste à trouver un milieu de propagation à une dimension permettant de redresser les hyperboles de diffraction créées par des réflecteurs ou diffractants éclairés avec des angles et à des distances différentes. La migration consiste ensuite à localiser la position des réflecteurs (Beylkin, 1985). Beylkin (1985) effectue une imagerie du milieu par une transformée de Radon généralisée. Bleistein (1987) généralise ensuite la méthode. Néanmoins, ces deux approches, effectuées dans le domaine de l'espace et du temps, ne sont pas itératives.

Le gradient de la fonction coût de l'inversion des formes d'onde élastique s'interprète physiquement comme la corrélation à décalage nul entre le champ propagé et les résidus (différences entre les champs observés et les champs calculés aux récepteurs) rétro-propagés, *i.e.* propagés dans le sens du "temps négatif" (Tarantola, 1987; Pratt et al., 1998). Ce gradient est calculé pour chaque point du milieu, de manière à obtenir partout la direction optimale de convergence.

La première itération de l'inversion des formes d'onde élastique est comparable à la migration profonde (Tarantola, 1987; Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003). En effet, la migration ne requiert aucune itération alors que l'inversion améliore progressivement l'image des paramètres du milieu par des itérations successives (Robein, 2003). Tarantola (1984b) a montré en milieu homogène que l'inversion des formes d'onde est équivalente à la migration de Kirchhoff, effectuant une imagerie des diffractants à l'aide d'hyperboles de diffractions et considérant des réflecteurs continus. Tarantola (1984a) a également montré en milieu hétérogène que l'inversion des formes d'onde équivaut au principe d'imagerie de Claerbout (1971). Ce principe permet de retrouver la réflectivité du milieu. Un réflecteur existe quand champ direct et champ rétro-propagé aux récepteurs se rencontrent.

1.4.3 Approximations et linéarité

Nous avons précédemment expliqué que nous souhaitons modéliser tous les types d'onde qui se propagent dans la résolution du problème direct : ondes réfléchies, réfractées, converties, de volume, de surface ... Ainsi, le problème direct est résolu par différences finies (Alford et al., 1974; Kelly et al., 1976; Virieux, 1986; Levander, 1988), méthode numérique permettant de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles sans approximation haute fréquence ni linéarisation. L'avantage de cette méthode numérique réside dans sa simplicité d'implémentation et de formulation ainsi que sa rapidité et son efficacité de résolution (Mora, 1987b, 1988).

Nous avons également expliqué que nous linéarisons le problème à chaque étape. Dans la formulation de l'inversion linéarisée de Tarantola (1987), cela signifie que les perturbations des données et des paramètres sont reliées linéairement. Selon le choix des données à ajuster et les approximations associées dites de Born et de Rytov, que nous présenterons, les relations linéaires entre perturbations des données et des récepteurs sont obtenues différemment. Dans l'approximation de Born, les perturbations des paramètres du milieu et les perturbations de vitesses de déplacement sont linéairement reliées (Lambaré et al., 1992; Pratt et al., 1996). Dans l'approximation de Rytov, les perturbations des paramètres du milieu sont reliées linéairement aux perturbations des phases des vitesses de déplacement (Woodwards, 1992; Spetzler & Snieder, 2004). Le choix de l'une de ces approximations conditionne la taille et l'amplitude maximales des anomalies considérées (Wu, 2003). Nous verrons l'influence de ces approximations sur les images finales, ainsi que leur importance selon que le dispositif d'acquisition possède une géométrie en réflexion ou en transmission (Pratt et al., 1996). Néanmoins, comme nous considérons des linéarisations successives, l'amplitude

totale des anomalies n'est pas nécessairement faible même si elle reste limitée (Gauthier et al., 1986; Ravaut, 2003).

1.4.4 Itérations et linéarité

Les itérations successives permettent de tenir compte de la non linéarité du problème inverse par des linéarisations successives (Tarantola, 1987; Pratt et al., 1998; Operto et al., 2004). En effet, les approximations quadratiques successives de la fonction coût doivent mener au minimum global. Nous devons néanmoins choisir un milieu initial ou macromodèle **suffisamment proche du milieu solution** (Tarantola, 1987). Ces itérations permettent également de modérer les effets de fréquence finie de la source et d'ouverture finie du dispositif (Pratt et al., 1998; Sirgue, 2003).

1.4.5 Longueur d'onde et linéarité

Nous souhaitons effectuer une démarche multiéchelle, allant des grandes longueurs d'onde vers les petites longueurs d'onde (Ravaut, 2003; Operto et al., 2004). Nous commençons donc par modéliser les basses fréquences disponibles dans le signal, avant d'en modéliser les hautes fréquences. Cette technique a été employée par de nombreux auteurs (Kolb et al., 1986; Pratt et al., 1998; Pica et al., 1990).

Les basses fréquences sont plus linéaires que les hautes fréquences (Ravaut, 2003; Operto et al., 2004; Sirgue, 2003). Ceci signifie que les relations entre perturbations des données et des paramètres sont plus linéaires aux basses fréquences. De plus, les signaux basse fréquence sont moins sensibles à de petits écarts de phase que les signaux haute fréquence, rendant moins probable la mauvaise interprétation de certaines phases.

1.4.6 Utilisation des différentes ondes

Toute la trace sismique est utilisée pour reconstruire la structure du milieu de propagation en deux dimensions. Ainsi, les ondes de volume et de surface sont considérées dans notre processus d'imagerie. Dans notre approche, les ondes ne sont pas séparées et il n'est pas nécessaire de les pointer (Ji & Singh, 2005). Ceci diffère de certaines techniques dans lesquelles ondes de volume et de surface sont séparées ou éliminées (Operto et al., 2004), ou bien dans lesquelles ondes P et S sont inversées séparément car elles arrivent à des temps très différents (Esmersoy, 1990).

Afin de modéliser précisément les ondes de surface avec les différences finies, nous utilisons le stencil numérique de Saenger et al. (2000). Ce dernier permet de modéliser la surface libre de manière simple par l'introduction de vitesses de propagation des ondes P et S nulles au-dessus de la surface libre (Hayashi et al., 2001; Graves, 1996; Ohminato & Chouet, 1997). De plus, les paramètres physiques du milieu sont définis une seule fois dans la maille numérique. Ceci est important pour l'inversion qui vise à déterminer une image du milieu et à attribuer en chaque point de la grille de points une valeur qui sera une valeur vraie et non pas une sorte de valeur moyenne effectuée sur les points de la grille numérique. Enfin, à la différence d'autres stencils (Jo et al., 1996), ce stencil est indépendant du coefficient de Poisson. Ceci est également important pour l'inversion puisque nous cherchons à caractériser un milieu dont les paramètres sont a priori inconnus. Ainsi, des zones contenant de l'air ou des fluides peuvent également être imagées sans remettre en cause la validité du problème direct.

1.4.7 Choix des paramètres et des données

Quelle que soit l'approximation de Born ou de Rytov choisie, les deux paramètres imagés sont reconstruits différemment par l'inversion. En effet, physiquement, ces paramètres sont associés à des phénomènes différents. Ils occupent donc des places différentes dans les équations et l'algorithme

extrait des données des informations différentes pour les reconstruire (Tarantola, 1987; Mora, 1988). Il est nécessaire que ces paramètres soient le plus indépendants possible, de manière à éviter toute pollution de l'un par l'autre et à extraire le maximum d'information des données (Tarantola, 1987).

Les données que nous utilisons contiennent deux composantes : la composante horizontale et la composante verticale des sismogrammes. Elles peuvent être utilisées ensemble dans l'inversion ou bien sélectionnées par départ, *i.e.* par distance à la source (Shipp & Singh, 2002; Ji & Singh, 2005; Sirgue, 2003; Operto et al., 2004; Pratt et al., 1996). En effet, les traces situées à des départs proches ou lointains ne contiennent pas le même type d'information ni les mêmes ondes.

Les données peuvent être également sélectionnées selon leur temps d'arrivée dans les enregistrements, de manière, par exemple, à ne prendre en compte que les premières ondes, réfléchies ou réfractées, et non pas les ondes multidiffractées ou les ondes de surface (Operto et al., 2004; Ravaut, 2003). Cette élimination des arrivées tardives est souvent utilisée pour les modélisations acoustiques puisque les ondes de surface ne sont pas à modéliser.

1.4.8 Temps ou fréquence

L'inversion des formes d'onde élastique est un problème inverse qui peut être formulé en temps (Gauthier et al., 1986; Mora, 1987b, 1988) ou en fréquence (Pratt, 1990; Pratt et al., 1996, 1998; Ravaut et al., 2004).

Les avantages de la formulation fréquentielle sont multiples. Tout d'abord, le problème direct est efficacement et rapidement résolu par une formulation matricielle, particulièrement pour les acquisitions multisources et multirécepteurs (Stekl & Pratt, 1998). Ensuite, l'atténuation du milieu peut être introduite par l'ajout d'une partie imaginaire non nulle (Stekl & Pratt, 1998).

Pour le problème inverse, la reconstruction des paramètres des basses fréquences vers les hautes fréquences est effectuée naturellement. Ceci permet de prendre en compte la non linéarité et d'introduire facilement la notion de multiéchelle (Pratt et al., 1998; Ravaut, 2003; Operto et al., 2004; Dessa et al., 2004).

De plus, la formulation du problème inverse permet d'identifier clairement l'influence des points diffractants par la construction d'une matrice de points diffractants (Pratt et al., 1998).

Enfin, la résolution du problème inverse est plus rapide que dans le domaine temporel. D'après Mulder & Plessix (2004), un facteur 10 intervient.

L'inconvénient majeur de cette formulation réside dans les prétraitements effectués sur les données dans le domaine temporel (Ravaut, 2003). L'équivalence stricte de ces prétraitements en fréquence requiert le calcul de convolutions temporelles, très coûteuses. Des équivalences simples sont difficiles à obtenir.

1.4.9 Distance ou nombre d'onde

Plusieurs auteurs ont construit des images des petites structures du milieu en effectuant une inversion des sismogrammes dans le domaine des nombres d'onde (Ikelle et al., 1988; Kormendi & Dietrich, 1991; Cao et al., 1990; Devaney, 1984). Cette formulation décompose une onde en une sommation d'ondes planes et inverse séparément la contribution de chaque onde plane.

Devaney (1984) effectue une imagerie acoustique dans le domaine des fréquences temporelles. Il doit donc effectuer une transformée de Fourier inverse double pour obtenir une image des diffractants, ce qui peut poser des problèmes. De plus, Devaney (1984) étudie un milieu avec des enregistrements en transmission, qui balaient tous les angles d'incidence possibles puisqu'il peut entourer l'objet à imager par des récepteurs. Ceci est développé par Wu & Toksöz (1987) en géophysique et appliqué par Pratt & Worthington (1988) pour des configurations entre puits. Cependant, la plupart du temps en géophysique, les sources et les récepteurs se situent à la surface libre. Le spectre de nombre d'onde imagés est donc plus restreint et le calcul de la transformée de Fourier inverse peut comporter des erreurs notables.

Ikelle et al. (1988); Kormendi & Dietrich (1991) et Cao et al. (1990) considèrent un milieu tabulaire. Les ondes planes sont donc bien adaptées pour retrouver les variations de petite longueur d'onde du milieu puisqu'elles ne dépendent que de la profondeur. Cependant, comme nous travaillons à deux dimensions, il faudrait prendre en compte les variations du nombre d'onde verticales et horizontales, ce qui complique ensuite notablement le calcul de la transformée de Fourier inverse. C'est pourquoi l'inversion que nous effectuons a lieu dans le domaine des distances et non pas des nombres d'onde.

1.4.10 Sismique Réflexion ou Sismique Grand angle

Les dispositifs d'acquisition peuvent être en réflexion ou en grand angle, selon l'angle d'ouverture du dispositif. Lorsque le dispositif est peu étendu spatialement, la plupart des incidences sur les structures souterraines sont normales et il est dit "en réflexion". Avec les dispositifs d'acquisition grand angle, la distance entre une source et les récepteurs qui enregistrent les ondes est plus importante. Chaque point du milieu est ainsi éclairé avec des angles d'incidence très variés. Cette notion est néanmoins relative à la profondeur d'imagerie souhaitée.

Avec un dispositif en réflexion, les bas nombres d'onde et les grands nombres d'onde sont connus (Mora, 1988; Sirgue, 2003). En effet, l'analyse de vitesse par exemple, ou toute autre méthode permettant de déterminer un macromodèle, résout les bas nombres d'onde. Les méthodes de migration ou les méthodes équivalentes permettent de reconstruire les hautes longueurs.

Selon Mora (1988), bas et grands nombres d'onde sont découplés dans l'inversion de données en réflexion. Les bas nombres d'onde sont résolus par des données en transmission et les hauts nombres d'onde sont résolus par les données en réflexion (Mora, 1988). Les nombres d'onde élevés déterminent l'amplitude des ondes, et les nombres d'onde bas en conditionnent la forme.

Cependant, la difficulté principale réside dans la détermination des nombres d'onde intermédiaires. Selon Jannane et al. (1989), les données de proche surface pour des dispositifs d'acquisition en réflexion ne sont pas sensibles aux nombres d'onde intermédiaires. Avec les dispositifs grand angle, les nombres d'onde intermédiaires peuvent être résolus, enrichissant ainsi les images d'informations supplémentaires (Sirgue, 2003).

L'ouverture du dispositif d'acquisition détermine le plus petit nombre d'onde imagé possible (Sirgue, 2003). Des informations sur les faibles nombres d'onde du milieu peuvent ainsi être obtenues (Mora, 1989; Sun & McMechan, 1992; Pratt et al., 1996; Shipp & Singh, 2002). De plus, la redondance en nombre d'onde dans les données augmente avec le déport. Ainsi, les images obtenues avec des dispositifs plus étendus spatialement sont de meilleure qualité (Ravaut, 2003; Sirgue, 2003).

Ensuite, l'ouverture du dispositif est un des éléments permettant de choisir les fréquences discrètes à modéliser pour l'inversion. Plus le déport maximal est important, plus la redondance dans le domaine des nombres d'onde l'est (Sirgue, 2003). Chaque fréquence permet alors d'imager un domaine de nombre d'onde plus important et le nombre de fréquences à inverser diminue, et plus les fréquences inversées sont espacées. Le coût numérique de l'inversion est alors moindre (Sirgue, 2003).

1.5 L'imagerie quantitative de la subsurface

1.5.1 Qu'est ce que la subsurface

La subsurface est constituée des premiers mètres de terrain sous le sol. C'est un milieu extrêmement complexe, très hétérogène, dans lequel les ondes sismiques sont piégés, réfractées, diffractées, réfléchies



FIG. 1.2: Exemple de cavité effondrée à Bihorel, France

1.5.2 Pourquoi s'intéresser à la subsurface

Comme nous l'avons mentionné, la caractérisation de la subsurface est indispensable pour l'aménagement du territoire et l'évaluation du risque naturel, dans le cadre de l'évaluation des risques d'effondrement des cavités ou des effets de site par exemple.

La figure 1.2 montre une cavité effondrée dans un lotissement en Normandie. Ce type de phénomène est malheureusement déjà arrivé plusieurs fois dans certaines régions françaises comme la Normandie ou la Lorraine.

D'autre part, l'imagerie multiparamètres quantitative de la subsurface est également importante pour la détection d'hydrocarbures de manière indirecte. En effet, elle permet de modéliser la propagation des ondes dans les derniers mètres du sol, permettant de corriger ses effets sur les ondes contenant des informations sur les réflecteurs profonds. De plus, les ondes de surface ou "ground roll" ont tendance à masquer ces arrivées profondes, et donc à empêcher d'en extraire de l'information. Certaines techniques existent néanmoins pour éliminer ces ondes en créant des distributions de diffractants équivalentes (Blonk & Herman, 1994; Blonk et al., 1995; Ernst & Herman, 1998; Campman et al., 2004; Riyanti & Herman, 2004).

1.5.3 Particularités de la subsurface

Près de la surface libre se propagent à la fois des ondes de volume et de surface. La plupart des méthodes sismiques ne s'intéressent qu'à un seul type d'onde ou bien les étudient séparément. Notre but est d'étudier ces deux types d'onde simultanément. Néanmoins, comme les ondes de surface sont très énergétiques (Miller & Pursey, 1955), elles masquent les informations contenues dans les ondes de volume.

Afin d'utiliser également les ondes de volume dans l'inversion, nous avons effectué une sélection des données en fonction de la distance à la source (Shipp & Singh, 2002; Ji & Singh, 2005; Sirgue, 2003; Operto et al., 2004; Pratt et al., 1996). En effet, à proximité de la source, les ondes de surface ne sont pas encore formées et seules les ondes de volume diffractées, directes ou réfléchies apparaissent. Nous utilisons tout d'abord les informations contenues dans ces données. Puis, nous introduisons progressivement les ondes de surface par la prise en compte dans l'inversion de données situées à des distances de la source de plus en plus grandes, jusqu'à prendre en compte la totalité du sismogramme.

1.6 Le problème spécifique de la détection des cavités souterraines

1.6.1 Quelles cavités

Les cavités souterraines auxquelles nous nous intéressons sont d'origine naturelle ou anthropique. Parmi les cavités naturelles, citons les karsts, très nombreux dans la région Centre en France, ou les zones de gypse, facilement soluble. Dans ces deux cas, le sol situé au-dessus de la cavité subit une décompaction au fur et à mesure du temps et s'altère en raison des eaux d'infiltration. La cavité devient alors potentiellement dangereuse car elle est susceptible de s'effondrer à tout instant.

Les cavités d'origine anthropique peuvent être liées à d'anciennes exploitations, comme les mines en Lorraine, dont l'état d'altération est inconnu. Ces mines étaient exploitées par des techniques de chambre et pilier. Lors de la déprise minière, certains piliers ont été foudroyés. Néanmoins, certaines zones non foudroyées existent encore. Dans certains endroits, un tassement du sol se produit, fissurant les habitations qui se trouvent au-dessus. Les anciennes descenderies de mines peuvent aussi s'effondrer. Il peut également s'agir d'anciennes marnières, exploitées à la fin de *XIX^{ème}* siècle et dont les plans ont été perdus, rendant leur localisation précise difficile.

Dans le Nord de la France, des anciennes tranchées de la première guerre mondiale non remblayées s'effondrent régulièrement. Certains d'entre elles se situent à proximité de la voie de chemin de fer, pouvant entraîner le déraillement de trains (ce qui est déjà arrivé).

Les cavités sont donc nombreuses et potentiellement dangereuses, puisqu'elles peuvent entraîner l'effondrement de routes ou d'habitations. C'est pourquoi la caractérisation précise des cavités souterraines, la détermination de leurs propriétés physiques et géométriques ainsi que celles du milieu encaissant est indispensable.

1.6.2 Autres méthodes de détection des cavités souterraines

Plusieurs méthodes autres que l'inversion des formes d'onde élastiques existent actuellement pour imager les cavités à proximité de la surface. Ces techniques sont développées en particulier au sein du BRGM et ont toutes été testées sur des sites différents. Ainsi les cavités souterraines peuvent être détectées par :

La prospection par microgravimétrie

Elle consiste à mesurer le champ de gravité en plusieurs endroits du domaine d'étude. Au-dessus d'une cavité, le champ de gravité présente une anomalie négative (Florsch et al., 2002; Debeglia & Dupont, 2002). Il est néanmoins nécessaire que la cavité soit peu profonde, de manière à enregistrer une anomalie significative. D'autre part, cette méthode pose problème en milieu urbain en raison du bruit provenant d'autres cavités ou d'autres phénomènes (Radogna et al., 2003). Le signal dû à la cavité devient alors faible, de l'ordre du bruit, et il devient difficile de l'identifier clairement.

La prospection par radar

Son principe repose sur l'émission d'une onde électromagnétique en un point source et son enregistrement en un autre point du milieu, l'onde étant réfléchi par les contrastes diélectriques du terrain traversé et en reflétant les propriétés diélectriques (Leparoux, 1997). Le principal problème rencontré lors de son application est lié à la nature du sol : pour des milieux conducteurs (limoneux ou argileux), les ondes électromagnétiques sont absorbées et ne pénètrent que quelques mètres du sous-sol (Leparoux et al., 2002b). D'autre part, les remblais en milieu urbain constituent des milieux très hétérogènes par rapport aux longueurs d'onde radar propagées.

Le radar est également un outil adapté pour délimiter la géométrie des plumes de contamination (Grumman & Daniels, 1995) ou imager les zones de déchet (Orlando & Marchesi, 2001). Il faut néanmoins que le milieu soit suffisamment résistif.

Dans certains cas, le radar et la microgravimétrie sont couplés pour détecter des cavités souterraines (Beres et al., 2001).

La prospection électrique

Cette méthode fonctionne bien dans les milieux conducteurs (De Lima & Sato, 1995). Elle permet de détecter des cavités comme étant des zones plus conductrices, mais ne permet pas de distinguer une cavité vide ou plein d'eau.

La prospection sismique

La méthode de sismique haute résolution Elle consiste à suivre un réflecteur particulier continu, horizontal et bien visible. Quand une cavité se trouve au-dessus de ce réflecteur, il devient moins visible car moins énergétique : la cavité agit comme un masque sur le réflecteur (Grandjean et al., 2002; Driad & Piwakowski, 2002; Léonard, 1997). L'inconvénient majeur de cette méthode provient de l'hypothèse de l'existence d'un réflecteur fort continu sous la cavité, qui n'existe pas toujours dans la réalité.

La méthode de sismique par ondes de surface Cette méthode présente l'avantage d'être efficace en milieu urbain, puisque les ondes de surface, très énergétiques, dominent alors le bruit. La source sismique peut être constituée d'une simple chute de poids. Plusieurs utilisations des ondes de surface sont possibles pour rendre compte de la présence d'une cavité. Elles sont principalement basées sur le contenu fréquentiel des ondes de surface.

Certaines méthodes de détection de cavités utilisent la dispersion des ondes de surface comme indice de la présence d'une cavité. En 1968, Woods & Asce (1968) montrent les effets de filtrage en fréquence d'une tranchée. Ces résultats sont repris par Hévin (1992) pour détecter et caractériser des fissures dans les bâtiments en génie civil.

Leparoux & Abraham (2002) ont montré l'effet coupe-bande d'une cavité dans le domaine des fréquences temporelles. La taille, la forme ainsi que la profondeur d'une cavité contrôlent la largeur et la valeur de cette bande, bien qu'il soit difficile de quantifier précisément l'influence de chaque paramètre. Notons néanmoins l'importance de la profondeur de la cavité. En effet, lorsqu'une cavité est trop profonde, les ondes de surface ne l'atteignent pas et aucune signature n'apparaît dans le diagramme de dispersion.

1.6.3 L'application de l'inversion des formes d'onde élastique

Nous avons développé la méthode d'inversion des formes d'onde élastique dans le but de l'appliquer à la caractérisation des cavités souterraines de proche surface.

Les cavités, objets diffractants très hétérogènes, se situent parfaitement dans le domaine d'application de l'inversion, puisqu'elles sont de petite taille, sont situées proches de la surface libre et ont une amplitude significative. Cependant, elles représentent un cas extrême d'application de la méthode puisque aucune linéarisation directe ne peut être effectuée entre perturbations des données et des paramètres.

De plus, le milieu encaissant peut être endommagé. Ce dernier peut également être caractérisé à l'aide de notre méthode d'inversion. Il ne s'agit donc pas uniquement de détecter la cavité mais également d'évaluer son potentiel d'effondrement et donc sa dangerosité (Gélis et al., 2005).

D'autres facteurs peuvent intervenir et rendre l'inversion difficiles. Ils sont liés à des phénomènes non pris en compte dans la modélisation du problème, comme les effets latéraux de propagation des ondes par exemple.

1.7 Plan de la thèse

Dans cette thèse, nous allons dans un premier temps nous intéresser au **problème direct**, qui fait l'objet du **chapitre 2**. Nous modélisons la propagation des ondes en deux dimensions dans un milieu élastique linéaire isotrope et nous nous intéressons particulièrement à la modélisation de la propagation des ondes de surface. Nous validons l'implémentation numérique de la surface libre. Nous effectuons une comparaison entre les approches temporelle et fréquentielle et examinons la propagation des ondes dans le domaine fréquentiel.

Dans le **chapitre 3**, nous exposons les méthodes classiques d'obtention d'un **macromodèle**. Celles que nous présentons sont basées sur l'inversion des temps d'arrivées des ondes de volume ou du contenu fréquentiel des ondes de surface. Elles sont appliquées en surface ou en profondeur, à l'échelle globale ou géotechnique.

Dans le **chapitre 4**, nous présentons **l'inversion des formes d'onde élastique** en deux dimensions dans un milieu élastique linéaire isotrope et dans le domaine fréquentiel. Nous étudions plus particulièrement l'influence du choix des paramètres inversés, du choix de l'approximation choisie pour la linéarisation effectuée à chaque itération et l'importance des termes négligés. Nous évaluons également l'influence du dispositif d'acquisition, de la surface libre et de l'amplitude des hétérogénéités.

Enfin, dans le **chapitre 5**, nous appliquons la méthode à un cas concret. Nous montrons les limites de la méthode et ses potentialités dans le cas de la détection de cavités souterraines.

Chapitre 2

Problème direct : Propagation des ondes élastiques en deux dimensions : modélisations temporelle et fréquentielle

Nous nous intéressons à la modélisation de la propagation des ondes élastiques dans un milieu élastique, linéaire et isotrope en deux dimensions. Le milieu de propagation, la subsurface, est par définition un milieu complexe hétérogène contenant la surface libre.

La propagation des ondes est gouvernée par un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1, qui peut être transformé en un système hyperbolique aux dérivées partielles d'ordre 2 en temps. Afin de résoudre ce système pour un milieu complexe hétérogène, les équations sont discrétisées numériquement par une méthode de différences finies. Ainsi, tous les types d'onde qui se propagent sont modélisés : ondes réfléchies, diffractées, réfractées, converties. De plus, cette discrétisation permet d'introduire la surface libre de manière simple et de simuler à la fois la propagation des ondes de volume et de surface. Des conditions absorbantes sont implémentées aux bords du modèle de manière à y empêcher les réflexions et à simuler un milieu infini latéralement et en profondeur.

La propagation des ondes s'effectue physiquement dans l'espace et dans le temps. Pour la modéliser, ces espaces ou leurs espaces duaux peuvent être considérés. Nous avons choisi de modéliser la propagation des ondes dans le domaine spatial et de considérer le domaine temporel puis le domaine fréquentiel. Avec la modélisation temporelle, une relation causale peut être établie entre la valeur des champs et de leurs dérivées spatiales à un instant donné et à un instant ultérieur. Au contraire, la modélisation fréquentielle s'intéresse à toutes les valeurs des champs en tout point de l'espace pour une certaine fréquence, sans relation causale ni dérivée temporelle : ce sont les composantes harmoniques. Il est alors possible de construire une matrice d'impédance, contenant la discrétisation spatiale des équations de propagation des ondes et la dépendance fréquentielle.

Nous présentons dans cette partie les deux approches et choisissons finalement l'approche fréquentielle en raison de son efficacité numérique pour les acquisitions multisources et multirécepteurs et pour la prise en compte efficace de paramètres complexes tels que l'atténuation du milieu.

Enfin, nous illustrons la méthode à l'aide de certains exemples numériques de propagation des ondes dans le domaine fréquentiel, dans un milieu complexe hétérogène contenant une surface libre. Nous mettons en évidence des phénomènes liés aux cavités, aux zones de décompaction et aux topographies non planes, qui sont enregistrés sur des capteurs en surface.

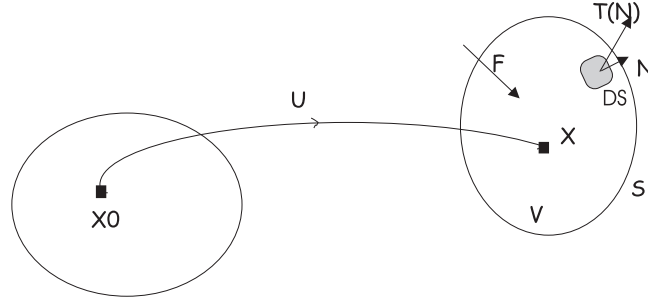


FIG. 2.1: Schéma du déplacement d'un corps dans l'espace et dans le temps. A $t=0$, le point matériel \mathbf{x} est en \mathbf{x}_0 . A $t>0$, le point matériel est en \mathbf{x} et a effectué un déplacement \mathbf{u} . Le volume V est soumis à des forces volumiques \mathbf{f} et à des forces surfaciques \mathbf{T} s'exerçant sur S , sa surface.

2.1 Equations de propagation des ondes élastiques en deux dimensions dans un milieu linéaire élastique isotrope

2.1.1 Ecriture des équations

Nous allons dans un premier temps présenter l'équation de l'élastodynamique issue des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus. Nous rappelons brièvement les différentes étapes permettant d'obtenir le système d'équations régissant la propagation des ondes dans un milieu linéaire élastique isotrope. De plus amples détails peuvent être trouvés dans Duvaut (1990), Aki & Richards (2002) et Forgues (1996).

Contraintes et déplacements

Plaçons-nous dans un référentiel fixe de l'espace. Soit \mathbf{u} le déplacement d'une particule, \mathbf{u} étant la différence de position de cette particule entre un temps t et un temps t' ultérieur : $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. $\partial\mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial t$ représente la vitesse de ce point et $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial t^2$, son accélération. Considérons le déplacement d'un élément de volume élémentaire dans un système de coordonnées cartésiennes à deux dimensions (Ox, Oz) (formulation Lagrangienne). L'élément de volume est soumis à des forces volumiques \mathbf{f} et à des forces surfaciques $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ s'exerçant sur sa surface. V est le volume considéré, sa surface est notée S .

D'après le premier principe de la dynamique (conservation de la quantité de mouvement), nous pouvons écrire :

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS, \quad (2.1)$$

où ρ est la masse volumique (en kg/m^3), \mathbf{f} est la densité volumique de forces extérieures (en N/m^3), $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ est la force surfacique ou traction appliquée en tout point de la surface du volume (en N/m^2), \mathbf{n} étant la normale sortante à la surface.

Lorsqu'un corps se déforme sous l'action de forces extérieures, des forces intérieures s'opposent à la déformation. Elles s'expriment en fonction de σ , tenseur des contraintes d'ordre 2 tel que σ_{ij} soit la i ème composante de la force de traction s'exerçant sur le plan normal à la j ème direction de l'espace. La i ème composante de la traction \mathbf{T} s'exerçant sur le plan dont la normale est définie par le vecteur unitaire \mathbf{n} s'écrit : $T_i = \sigma_{ij}n_j$, expression dans laquelle la sommation est sous-entendue (convention de Einstein).

Grâce au théorème de la divergence, l'intégrale de surface sur la traction se transforme en une intégrale de volume dont l'intégrande est

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

où x_j est la j ème direction de l'espace. Les contraintes s'expriment en Pascal ou $kg/m/s^2$. Comme cette relation est valable pour tout volume élémentaire, nous en déduisons :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sigma_{ij,j} = f_i \quad (2.3)$$

Déformations et déplacements

Définissons maintenant les déformations d'un corps physique. Un corps physique se déforme lorsque les distances relatives entre ses points matériels varient avec le temps. En négligeant les termes du 2^{ème} ordre, le tenseur de déformations s'exprime par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

Les déformations sont sans dimension.

Déformations et contraintes : loi de comportement

Ensuite, une loi de comportement généralisée est introduite pour relier contraintes et déformations. Un matériau est élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé à partir de cet état de référence. La loi de comportement d'un matériau est une relation entre ses contraintes et ses déformations. La loi la plus simple est la loi de comportement de l'élasticité linéaire qui correspond à une linéarisation autour d'un état d'équilibre. Le matériau est alors linéairement élastique. La loi de comportement liant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.5)$$

où C_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 d'élasticité linéaire (loi de Hooke généralisée). Ce tenseur possède certaines symétries liées à celles des tenseurs de déformations et des contraintes : $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$.

Pour un milieu linéaire élastique isotrope, le tenseur élastique peut s'écrire en fonction de deux constantes indépendantes : λ et μ , appelés les paramètres de Lamé et déterminés expérimentalement pour chaque matériau. Ainsi :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.6)$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon. Donc pour un milieu linéaire élastique isotrope, le tenseur des contraintes s'exprime en fonction du tenseur des déformations comme

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.7)$$

Les variations temporelles des paramètres du milieu peuvent être négligées.

Equation de propagation d'onde

Dans le cas de la propagation en deux dimensions d'une onde élastique P-SV, les équations précédentes donnent, avec $u_x(\mathbf{x}, t)$ et $u_z(\mathbf{x}, t)$ les déplacements dans les directions x et z et t le temps, les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + F_x(\mathbf{x}, t) \\ \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + F_z(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les composantes horizontales et verticales des forces extérieures appliquées au système sont nommées $F_x(\mathbf{x}, t)$ et $F_z(\mathbf{x}, t)$ et dépendent du temps. Les paramètres du milieu sont considérés comme stationnaires. Pour la loi constitutive de Hooke, les équations 2.6 et 2.7 donnent :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\mathbf{x}, t) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x})\frac{\partial u_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \\ \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t) &= \lambda(\mathbf{x})\frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\frac{\partial u_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \\ \sigma_{xz}(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x})\left(\frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Les dérivées de $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ et $\rho(\mathbf{x})$ par rapport à x et z sont ainsi considérées comme négligeables devant les dérivées des déplacements par rapport à x et z .

2.1.2 Propagation des ondes de volume

D'après Aki & Richards (2002) et Nkemzi (1997), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.10)$$

et le système d'équations 2.9 devient :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x}\right) \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}\right) \\ \sigma_{xz} &= \mu\left(2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2.12)$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned}V_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ V_s &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

où Φ est le potentiel scalaire de Lamé et Ψ la composante en y du potentiel vectoriel, et V_p et V_s sont les vitesses respectives des ondes P et des ondes S (figure 2.2). Les ondes P sont des ondes de compression-décompression car elles vibrent dans la direction de propagation de l'onde. Au contraire, le passage des ondes S provoque des mouvements du sol perpendiculaires à la direction de propagation. Les ondes S ne se propagent pas dans les liquides car le paramètre μ y est nul. Ce dernier est également appelé coefficient de cisaillement. Connaissant les vitesses V_p et V_s , il est

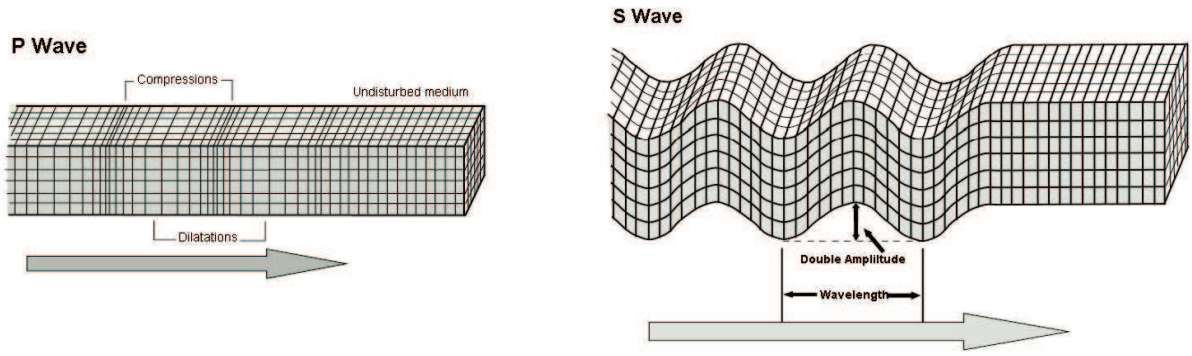


FIG. 2.2: Schéma de la propagation des ondes P et S.

possible de calculer le coefficient de Poisson ν , paramètre élastique caractérisant un milieu, et égal à :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.14)$$

$$\nu = \frac{V_p^2 - 2V_s^2}{2(V_p^2 - V_s^2)}$$

2.1.3 Propagation des ondes de Rayleigh

Les ondes de Rayleigh résultent d'une combinaison d'ondes P et SV qui peuvent exister au toit d'un demi-espace homogène. Graff (1975) considère la propagation des ondes P et SV dans un plan $Ox - Oz$ où la surface libre est localisée à $z = 0$ et l'axe Oz est orienté vers le bas. Pour des ondes P et SV planes monochromatiques dans un milieu homogène, les potentiels P et SV peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\Phi = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_x r_p z)} \quad (2.15)$$

$$\Psi = Be^{i(\omega t - k_x x - k_x r_s z)}$$

où x et z sont les coordonnées horizontales et verticales ($z > 0$ vers la profondeur), ω est la pulsation de l'onde plane qui se propage, $\mathbf{k}(k_x, k_z)$ est le nombre d'onde, caractérisant la direction de propagation de l'onde et les deux quantités

$$r_p = \sqrt{c_x^2/V_p^2 - 1} \quad (2.16)$$

$$r_s = \sqrt{c_x^2/V_s^2 - 1}$$

s'expriment en fonction de la vitesse de propagation apparente c_x , le long de la surface libre, de l'onde recherchée.

Pour que ces potentiels décrivent l'énergie piégée près de la surface libre, deux conditions sont appliquées : la solution doit assurer que l'énergie ne se propage pas loin de la surface libre et la condition de surface libre doit s'appliquer.

Pour que l'énergie reste piégée près de la surface libre, les exponentielles $e^{-ik_x r_p z}$ et $e^{-ik_x r_s z}$ doivent être des exponentielles réelles négatives, de manière à ce que le déplacement décroisse quand $z \rightarrow \infty$. La relation 2.17 requiert que $c_x < V_s < V_p$. Donc c_x , la vitesse apparente des ondes de Rayleigh le long de la surface, doit être inférieure à V_s . Donc les deux racines r_p et r_s sont

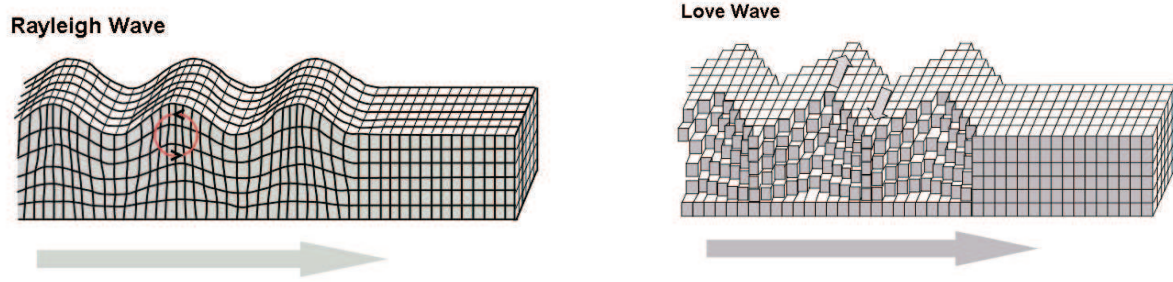


FIG. 2.3: Schéma de la propagation des ondes de Rayleigh (à gauche) et de Love (à droite). Tiré du site internet www.geo.mtu.edu/UPSeis/waves.html

imaginaires et valent :

$$\begin{aligned} r_p &= -i\sqrt{1 - c_x^2/V_p^2} \\ r_s &= -i\sqrt{1 - c_x^2/V_s^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

La deuxième condition, l'annulation de la traction à la surface libre, se produit pour une réflexion P-SV à la surface libre. Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, z = 0, t) &= 0 = 2r_p A + (1 - r_s^2)B \\ \sigma_{zz}(x, z = 0, t) &= 0 = (\lambda(1 + r_p^2) + 2\mu r_p^2)A + 2\mu r_s B \end{aligned} \quad (2.18)$$

En éliminant les paramètres de Lamé de la deuxième équation, en utilisant $1 + r_p^2 = c_x^2/V_p^2$ et les définitions des vitesses V_p et V_s , un système homogène de deux équations à deux inconnues A et B est obtenu :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{c_x^2/V_p^2 - 1}A + (2 - c_x^2/V_s^2)B &= 0 \\ (c_x^2/V_s^2 - 2)A + 2\sqrt{c_x^2/V_s^2 - 1}B &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Comme cette égalité est vraie pour toute valeur de A et B , le déterminant de ce système est nul, donc :

$$(2 - c_x^2/V_s^2)^2 + 4\sqrt{c_x^2/V_p^2 - 1}\sqrt{c_x^2/V_s^2 - 1} = 0 \quad (2.20)$$

L'équation 2.20 est l'équation de dispersion des ondes de Rayleigh. Pour la résoudre et déterminer c_x , il faut d'abord connaître le rapport V_s/V_p , grâce au coefficient de Poisson par exemple.

Les ondes de Rayleigh (figure 2.3) sont donc liées à la présence de la surface libre sur laquelle les contraintes et les déplacements sont nuls. Ceci est également vrai au niveau de toute interface séparant deux milieux dont les propriétés physiques sont très différentes et pour lesquelles contraintes et déplacements sont nuls.

D'autre part, l'étude de la propagation des ondes SH montre l'existence d'un autre type d'ondes de surface : les ondes de Love, qui vibrent dans la direction perpendiculaire au plan de propagation et qui proviennent d'une combinaison des ondes SH (figure 2.3). La vitesse des ondes de Love dépend uniquement de celles des ondes de cisaillement S, alors que la vitesse des ondes de Rayleigh dépend à la fois des vitesses des ondes compressives et cisailantes (par l'intermédiaire du coefficient de Poisson). Les ondes de Love se propagent plus rapidement que les ondes de Rayleigh pour une fréquence donnée.

Une onde de Rayleigh est considérée comme une "vraie" onde de surface, puisqu'elle est toujours générée en présence de la surface libre, même lorsque le milieu sous-jacent est homogène. Plus généralement, les ondes de ce type générées en présence d'une interface entre deux milieux s'appellent

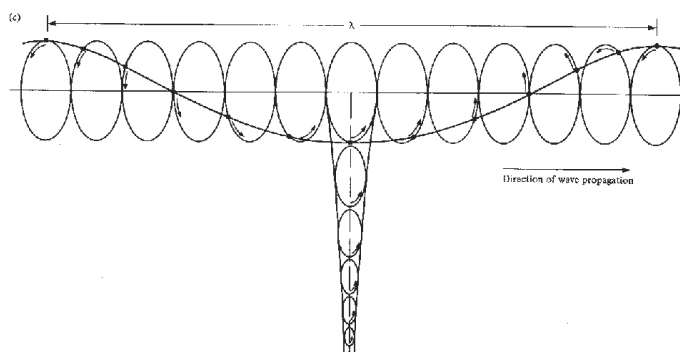


FIG. 2.4: Polarisation de l'onde de Rayleigh et diminution exponentielle avec la profondeur. Tiré de Sheriff & Geldart (1995)

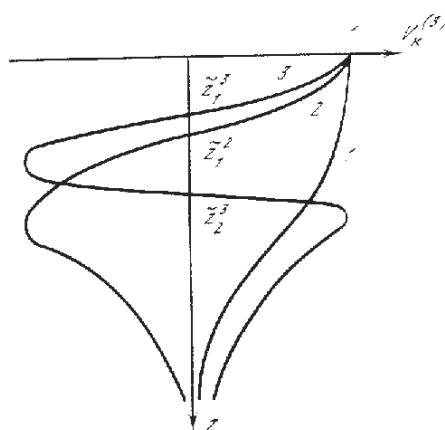


FIG. 2.5: Diminution de l'amplitude des différents modes des ondes de Love avec la profondeur. Tiré de Keilis-Borok (1986)

des ondes de Stoneley (Aki & Richards, 2002). Elles existent sous certaines conditions en présence d'une interface entre deux milieux très différents, même lorsque les deux milieux sont homogènes. En revanche, une onde de Love n'existe que lorsqu'il y a au moins une couche et lorsque la vitesse des ondes S dans la couche inférieure est supérieure à celle de la couche supérieure. L'onde de Love est piégée dans les couches de terrain, l'angle d'incidence avec laquelle elle arrive à l'interface séparant deux couches de terrain ne lui permettant pas d'être transmise dans le milieu sous-jacent. Nous ne détaillons pas la relation de dispersion des ondes de Love car nous allons nous focaliser sur le mode P-SV de propagation. En effet, ce dernier se propage en deux dimensions, dans un plan vertical.

En milieu homogène, l'expression des potentiels Φ et Ψ montre que les ondes de surface possèdent une amplitude qui décroît de manière exponentielle en fonction de la profondeur (figure 2.4). Cette décroissance commence à une certaine distance de la surface libre, mais pas tout de suite comme le montre la figure 2.5. Les ondes de Rayleigh ont un mouvement elliptique, rétrograde dans les premiers mètres de la subsurface, puis prograde pour une profondeur supérieure à environ un cinquième de leur longueur d'onde (figure 2.4). En sismique, la composante verticale d'un champ d'onde propagé est souvent la seule composante enregistrée, donc seules les ondes de Rayleigh sont étudiées. Cependant, dans des enregistrements à trois composantes, les ondes de Rayleigh et de Love sont étudiés, ainsi que la polarisation des ondes de Rayleigh (Scherbaum et al., 2003).

Dans un milieu stratifié, les ondes de surface contiennent différents modes : pour une fréquence

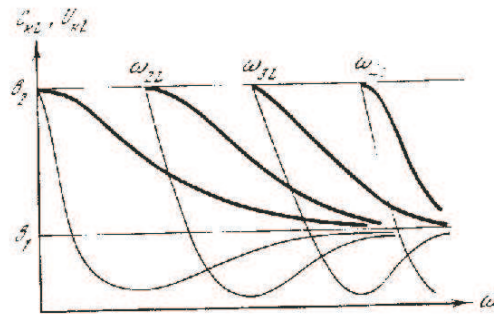


FIG. 2.6: Apparition des différents modes des ondes de Love selon la fréquence considérée. . Tiré de Keilis-Borok (1986)

donnée, plusieurs trains d'onde peuvent se propager car ils satisfont tous l'équation d'onde, ainsi que les conditions aux limites et les conditions initiales. Ces modes sont continus ou discrets, selon que l'exponentielle considérée dans l'équation d'onde est réelle ou complexe (Keilis-Borok, 1986)). Seuls les modes discrets nous intéressent ici car ils se propagent, les modes continus sont évanescents et ne transportent donc aucune énergie. Le mode qui se propage le plus lentement est appelé le mode fondamental (Sheriff & Geldart, 1995). Les autres constituent l'ensemble des modes supérieurs. Pour une fréquence f donnée, un certain nombre de modes se propagent, ceux pour lesquels la fréquence de coupure (fréquence minimale à laquelle un mode apparaît) est inférieure à la fréquence concernée f (figure 2.6).

Lorsque le milieu est homogène, seul le mode fondamental de Rayleigh se propage. Quand le milieu devient faiblement hétérogène, le mode fondamental de Rayleigh reste le plus énergétique. Mais lorsque le milieu se complexifie davantage, les modes supérieurs deviennent de plus en plus énergétiques, parfois plus que le mode fondamental. La génération des modes dépend donc de la fréquence considérée et de l'hétérogénéité du milieu. Quand le point d'observation se situe suffisamment loin de la source, les modes s'individualisent bien dans le domaine temporel en raison des différences entre leur vitesse de propagation. Ce genre de propriété de séparation des modes dans le temps a été utilisé par Snieder (1986) et Ernst & Herman (2000).

La profondeur où l'énergie véhiculée par un mode est maximale dépend du mode considéré (figure 2.5). Ainsi, les différents modes sont porteurs d'informations relatives à des profondeurs variables. Cette propriété des ondes de surface sert de base à des méthodes comme la SASW (Spectral Analysis of Surface Waves, (Nazarian & Stokoe, 1984)). Nous détaillerons cette méthode dans le chapitre suivant.

Les ondes de Rayleigh et de Love sont dispersives, c'est-à-dire que leur vitesse de propagation dépend de la fréquence. Par conséquent, dans un milieu tabulaire, les différents modes se propagent à des vitesses différentes. Ainsi, les composantes haute fréquence, qui parcourent la partie superficielle du sol où les vitesses de propagation des ondes sont généralement plus basses, se propagent plus lentement que les composantes basse fréquence, qui atteignent des profondeurs plus importantes où les vitesses sont plus élevées. En effet, la vitesse de propagation de l'onde prend en compte les vitesses des ondes sur toute l'épaisseur du sol sondée.

Enfin, les ondes de surface sont très énergétiques, puisque environ 2/3 de l'énergie émise par une source est convertie en onde de surface en milieu homogène (Miller & Pursey, 1955). De plus, elles s'atténuent beaucoup moins rapidement que les ondes de volume. Leur énergie diminue en effet en $1/r$ (atténuation cylindrique) alors que, pour les ondes de volume, l'énergie décroît en $1/r^2$ (atténuation sphérique) pour un milieu homogène élastique isotrope.

Comme elles sont très énergétiques, les ondes de surface générées en milieu urbain sont d'amplitude relativement élevée. Elles peuvent alors servir de source pour enregistrer la réponse du sol

en milieu urbain (Scherbaum et al., 2003)). Les ondes de surface ont également un effet majeur dans les tremblements de terre car ce sont les ondes de plus forte amplitude et elles engendrent des effets de site importants dans les bassins sédimentaires (à Mexico par exemple). Elles sont donc également étudiées dans le cadre de la quantification du risque sismique.

Dans un milieu élastique linéaire isotrope en deux dimensions comportant une surface libre, trois types d'ondes directes sont donc susceptibles de se propager dans le plan vertical : les ondes de volume P de pression-décompression, les ondes de volume S de cisaillement et les ondes de surface de Rayleigh. C'est la propagation P-SV.

2.1.4 Systèmes d'équations hyperbolique d'ordre 1 et d'ordre 2 en temps

Le système composé des équations 2.8 et 2.9 peut être exprimé à l'aide des contraintes et des vitesses $V_x = \partial u_x / \partial x$ et $V_z = \partial u_z / \partial z$ au lieu des déplacements (Madariaga, 1976; Virieux, 1986). De plus, afin d'isoler les dérivées temporelles, la densité $\rho(\mathbf{x})$ est passée au second membre, puisqu'elle n'est jamais nulle strictement. Les forces $F_x(\mathbf{x}, t)$ et $F_z(\mathbf{x}, t)$ deviennent égales à $f_x(\mathbf{x}, t) = F_x(\mathbf{x}, t) / \rho(\mathbf{x})$ et $f_z(\mathbf{x}, t) = F_z(\mathbf{x}, t) / \rho(\mathbf{x})$. Ce système, dit élastodynamique, est le système hyperbolique d'ordre 1 régissant la propagation des ondes élastiques dans le domaine temps-espace (Virieux, 1986). Il s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} + f_x(\mathbf{x}, t) \\
\frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} + f_z(\mathbf{x}, t) \\
\frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Dans cette étude, nous nous intéressons à la propagation et aux enregistrements des vitesses de déplacement du sol. Nous pouvons donc éliminer les contraintes du système d'équations hyperbolique précédent (equation 2.21), de manière à exprimer les vitesses de déplacement en fonction des paramètres élastiques du milieu $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ et $\rho(\mathbf{x})$. Ainsi, le système d'équations 2.21 devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)) \right\} + f_x(\mathbf{x}, t) \\
\frac{\partial^2 V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z}) \right\} + f_z(\mathbf{x}, t). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Cette formulation traduit la propagation des ondes dans le domaine temporel. C'est un système hyperbolique d'ordre 2.

2.2 De la formulation temporelle à la formulation fréquentielle

2.2.1 Transformée de Fourier de données continues

Il est également possible d'exprimer les équations dans le domaine dual du temps, *i.e.* dans le domaine des fréquences temporelles f . La transformée de Fourier permet de passer d'une équation

exprimée dans un domaine donné à une équation exprimée dans son domaine dual. En effet, les fonctions sinusoïdales du type $e^{-2i\pi ft}$ forment une base sur laquelle toute fonction réelle h peut se décomposer selon :

$$h(t) = \int_f H(f)e^{-2i\pi ft} df \quad (2.23)$$

où $H(f)$ est la transformée de Fourier de $h(t)$ et f est la fréquence. La transformée de Fourier inverse permet d'effectuer l'application inverse :

$$H(f) = \int_t h(t)e^{2i\pi ft} dt. \quad (2.24)$$

$H(f)$ et $h(t)$ doivent être considérées comme deux représentations équivalentes de la même fonction h .

Lorsque la fréquence f concerne le domaine temporel, la pulsation $\omega = 2\pi f$ lui est souvent préférée. La transformée de Fourier et sa réciproque s'expriment alors par :

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_\omega H(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \\ H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_t h(t)e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.2.2 Systèmes d'équations en fréquence

D'après la section précédente, une dérivée par rapport au temps dans le domaine temporel correspond à une multiplication par $-i\omega$ dans le domaine fréquentiel. Les systèmes précédents 2.21 et 2.22 deviennent pour une composante fréquentielle donnée ω :

$$\begin{aligned} -i\omega V_x(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right\} + f_x(\mathbf{x}, \omega) \\ -i\omega V_z(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right\} + f_z(\mathbf{x}, \omega) \\ -i\omega \sigma_{xx}(\mathbf{x}, \omega) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \\ -i\omega \sigma_{zz}(\mathbf{x}, \omega) &= \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \\ -i\omega \sigma_{xz}(\mathbf{x}, \omega) &= \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

et conduit au système elliptique d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} -\omega^2 V_x(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\mu(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right) \right\} + f_x(\mathbf{x}, \omega) \\ -\omega^2 V_z(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(\mathbf{x})) \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right\} + f_z(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ces équations permettent donc de modéliser la propagation des ondes dans le domaine fréquentiel. Se pose maintenant le problème du choix des fréquences. Ce dernier est basé sur l'équivalence entre modélisation temporelle et fréquentielle, comme nous allons le voir maintenant.

2.2.3 Transformée de Fourier de données discrètes échantillonnées

Fréquence de Nyquist et théorème d'échantillonnage

Nous avons présenté dans la section 2.2.1 la transformée de Fourier pour des variables continues t et f . Cependant, en pratique, les sismogrammes sont échantillonnés avec un pas de temps Δ et enregistrent les ondes dans un intervalle de temps donné T . Nous ne pouvons donc plus utiliser la transformée de Fourier continue, mais devons nous servir de la transformée de Fourier discrète et de son implémentation optimisée, la FFT (Fast Fourier Transform) (Press et al., 1989).

A tout intervalle d'échantillonnage Δ est associée une fréquence appelée la fréquence de Nyquist telle que :

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} \quad (2.28)$$

A cette fréquence, deux points par longueur d'onde sont échantillonnés.

La fréquence de Nyquist constitue la base du théorème d'échantillonnage suivant : " Si une fonction continue $h(t)$ échantillonnée à un intervalle Δ est bande limitée telle que $H(f) = 0$ pour tout $|f| > f_c$ alors la fonction $h(t)$ est complètement déterminée par ses échantillons h_n , où $h_n = h(n\Delta)$ est l'échantillonnage de la fonction discrète f dans le domaine temporel."

En revanche, s'il existe une fréquence f supérieure à f_c telle que $H(f) \neq 0$, le phénomène de repliement ou aliasing se produit : cette fréquence, échantillonnée à moins de deux points par longueur d'onde, est faussement considérée comme une fréquence plus basse, en raison de la périodicité et de la symétrie conjuguée de la transformée de Fourier discrète (Stekl, 1997).

En pratique, les sources sismiques possèdent un contenu fréquentiel limité. Il faut cependant vérifier que la plus haute fréquence considérée est inférieure à la fréquence de Nyquist. Dans ce cas, si N est le nombre d'échantillons temporels, $h_k = h(t_k)$ où $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, considérons les fréquences dans l'intervalle $[-f_c, f_c]$ et les valeurs discrètes :

$$f_n = \frac{n}{N\Delta} \quad (2.29)$$

où n est compris entre $-\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}$. Notons que les deux fréquences extrêmes ne sont pas indépendantes et qu'il y a bien N valeurs indépendantes. L'équation 2.24 devient alors :

$$H(f) = \int_t h(t) e^{2i\pi f t} dt = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2i\pi f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2i\pi k n / N} \quad (2.30)$$

La transformée de Fourier discrète H_n est définie par :

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2i\pi k n / N} \quad (2.31)$$

Choix des fréquences à modéliser

Nous cherchons à établir une équivalence entre modélisation temporelle et fréquentielle. Nous choisissons de modéliser la propagation des ondes dans le domaine fréquentiel (section 2.2.2) et cherchons ensuite à reconstruire les sismogrammes temporels, réels par définition. Nous devons donc choisir les fréquences convenablement, de manière à pouvoir effectuer une transformée de Fourier inverse, de la fréquence vers le temps.

Un théorème similaire au théorème d'échantillonnage est valable si nous cherchons à reconstruire une série temporelle à partir d'un nombre limité d'échantillons en fréquence, comme c'est le cas pour notre modélisation fréquentielle. La série temporelle est à valeurs réelles et se termine à un

temps T déterminé. Sous ces conditions, en utilisant la symétrie conjuguée dans le domaine des fréquences, un échantillonnage de Nyquist df_{nyq} fréquentiel peut être déterminé par :

$$df_{nyq} = \frac{1}{T} = \frac{1}{Nt * dt} \quad (2.32)$$

où Nt est le nombre d'échantillons temporels et dt est l'échantillon temporel.

En réalité, pour des raisons pratiques liées à la transformée de Fourier numérique FFT (Press et al., 1989), Nt doit être une puissance de 2. Le dénominateur n'est donc pas exactement T , mais $dt * Nt_f$, où Nt_f est la puissance de 2 plus grande la plus proche de Nt .

Les équations en fréquence des systèmes 2.26 et 2.27 sont résolues pour des fréquences espacées de $df_{nyq} = 1/(dt * Nt_f)$.

Il est donc possible d'exprimer les équations de propagation des ondes dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Ces équations modélisent la propagation de toutes les ondes dans un milieu défini par les paramètres physiques $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ et $\rho(\mathbf{x})$ ou un triplet de paramètres sismiques équivalent. Nous allons maintenant présenter la manière dont nous avons résolu le problème direct : la discrétisation en temps et en espace à l'aide des différences finies pour la modélisation temporelle, et en espace uniquement pour la modélisation fréquentielle avec des composantes fréquentielles discrètes.

2.3 Discrétisation avec les différences finies : le stencil spatial de Saenger et al. (2000)

2.3.1 Différentes méthodes de résolution du système d'équations différentielles

La résolution des systèmes 2.22 et 2.27 peut s'effectuer à l'aide de solutions analytiques pour des milieux homogènes (Morse & Feshbach, 1953; Garvin, 1956; Hudson, 1980). Des méthodes intégrales permettent également de résoudre le problème direct. Elles sont basées sur une transformation dans un nouvel espace (k, ω) , où k est le nombre d'onde et ω la fréquence, dans lequel la résolution des équations s'effectue par sommation de solutions analytiques élémentaires. Citons la méthode de réflectivité (Fuchs & Muller, 1971) et la méthode des nombres d'onde discrets (Bouchon, 1981). Ces techniques sont très précises et donnent des solutions semi-analytiques du champ d'onde. Néanmoins, ces méthodes sont limitées à des milieux stratifiés ou suffisamment simples pour limiter la complexité de la résolution.

Lorsque le milieu devient plus complexe, comme c'est le cas pour la proche surface, les solutions analytiques et intégrales ne sont plus valables et il faut avoir recours à des approximations de l'équation d'onde ou à une résolution numérique des équations complètes. Nous présentons ces deux dernières catégories dans cette partie.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre les équations précédentes. Tout d'abord, il existe des méthodes asymptotiques, comme l'approche par **tracé de rai** (Cerveny et al., 1977; Chapman, 1985). Cette méthode repose sur une approximation haute fréquence (valable quand la longueur d'onde est beaucoup plus petite que la taille des hétérogénéités étudiées) de l'équation de propagation des ondes du système 2.22. L'onde qui se propage est exprimée comme le produit d'une fonction fortement oscillante (le terme de phase $i\omega T(\mathbf{x})$, où $T(\mathbf{x})$ est le temps de trajet indépendant de la fréquence) et d'une partie moins oscillante $A(\mathbf{x})$ (amplitude de l'onde). En approximant l'amplitude de l'onde par une fonction indépendante de la fréquence (ordre 0 du développement asymptotique en $1/\omega$) dans l'équation de l'eikonal et l'équation de transport, les équations des rai sont obtenues, permettant de calculer le trajet et l'amplitude d'une onde dans un milieu donné.

Cette méthode donne de bons résultats d'imagerie dans le cas d'un milieu homogène ou faiblement hétérogène (Jin, 1992; Lambaré et al., 1992; Forgues, 1996). En pratique, cette approche devient non valable pour les milieux complexes. De plus, cette méthode ne convient pas si la taille des hétérogénéités est de l'ordre de la longueur d'onde propagée et elle néglige les effets de diffraction multiple.

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles 2.22 et 2.27, une possibilité consiste à utiliser les **méthodes pseudo-spectrales** (Fornberg, 1998). Les méthodes spectrales permettent de décomposer une fonction sur une base de fonctions dans l'espace dual, par exemple sur une base de fonctions exponentielles (spatiales) complexes (Fuchs & Muller, 1971). Par analogie, dans le cas des méthodes pseudo-spectrales, la fonction à différencier est décomposée en une série tronquée de fonctions de base, comme par exemple des polynômes de Chebyshev (Tessmer & Kosloff, 1994), des fonctions trigonométriques (Kosloff & Baysal, 1982) ou des transformées en ondelettes (Hustedt et al., 2003; Operto et al., 2002). Dans ces cas, il faut adapter la distribution spatiale des points aux fonctions de base. La fonction souhaitée est ensuite différenciée par la différenciation de la somme et donc de chacun de ses termes un par un. Cependant, ces méthodes sont parfois longues et trouver un ensemble de fonctions de base adaptées au problème à résoudre se révèle parfois difficile. De plus, selon la famille de fonctions considérées, le nombre de points nécessaires pour appliquer ces méthodes est susceptible de devenir très grand. Enfin, ces méthodes peuvent être instables dans certains cas.

Une autre méthode utilisée fréquemment est la technique des **éléments finis** (Zienkiewicz & Morgan, 1982). Elle consiste à définir une fonctionnelle à minimiser par la solution numérique. Par exemple, l'énergie d'un système est une bonne fonctionnelle. Le système différentiel à résoudre et les conditions aux limites sont ainsi exprimés sous forme d'une intégrale volumique et/ou surfacique à minimiser : c'est la formulation variationnelle du problème. Résoudre l'équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites choisies revient à minimiser la fonctionnelle. Cette dernière est projetée sur une base de fonctions tests (formulation faible) qui doivent être convenablement choisies pour décrire l'espace des solutions. Puis le domaine d'étude est partitionné en sous-domaines. La forme et la taille des éléments dépendent de la précision souhaitée : plus les éléments sont petits, plus l'approximation numérique sera proche de la solution exacte. Il faut ensuite définir la famille de champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des noeuds dans les sous-domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent l'interpolation du champ local en fonction des valeurs aux noeuds (et éventuellement des dérivées). Le système à résoudre est ainsi ramené à un problème discret puisque toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux noeuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux noeuds pour décrire une solution approchée. La principale difficulté de cette méthode consiste à choisir un problème discret suffisamment proche du problème initial. Cette méthode présente l'avantage de parfaitement bien modéliser les interfaces car la forme des éléments est choisie. Cependant, le coût de calcul excessif de cette méthode (Robertsson, 1996) rend son utilisation plus lourde dans le cas de milieux complexes.

Notons que dans la méthode des éléments finis, une matrice nommée matrice d'impédance est créée (Zienkiewicz & Morgan, 1982). Elle permet de traduire numériquement la discrétisation spatiale des équations et relie, pour chaque point de chaque élément, la valeur d'un champ en ce point aux valeurs de ce champ (ou d'un autre) prises aux points voisins. Cette matrice doit être inversée pour déterminer les champs en tout point du modèle, à partir de la connaissance de la source. La méthode des éléments spectraux (Komatitsch, 1997) fait partie des méthodes par éléments finis mais assure une convergence de type spectral. Le choix particulier des polynômes d'interpolation et des points d'intégration rendent la matrice d'impédance diagonale et facilement inversible.

Les **volumes finis** permettent de modéliser les flux se propageant d'un élément à l'autre et

sont par exemple utilisés pour discrétiser les équations de Maxwell (Remaki, 1999) ou les équations de propagation des ondes élastiques (Dormy & Tarantola, 1995). Cependant, leur utilisation est relativement peu courante en sismique.

Enfin, la dernière méthode présentée ici est celle des **différences finies** (Alford et al., 1974; Kelly et al., 1976; Virieux, 1986; Levander, 1988; Marfurt, 1984; Graves, 1996). Elle consiste à discrétiser le milieu à l'aide d'une grille de points équidistants, ce qui permet d'approximer les dérivées d'une fonction par des combinaisons linéaires de valeurs discrètes, basées sur le développement en série de Taylor de la fonction concernée, comme nous allons le voir maintenant.

2.3.2 Le choix des différences finies

Dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes dans un milieu aussi complexe que la proche surface, nous avons choisi d'utiliser les différences finies.

D'abord, elles permettent de décrire et d'étudier un milieu hétérogène complexe, dont les propriétés varient très rapidement. Les interfaces séparant deux milieux très différents (comme la limite air/sol ou sol/eau) sont ainsi facilement modélisables (Virieux, 1986). La valeur même des paramètres du milieu permet de fixer les conditions aux limites (Kelly et al., 1976). Par exemple, la surface libre est matérialisée par une vitesse de propagation des ondes nulle au-dessus et non nulle en-dessous (Saenger et al., 2000). Cette prise en compte des conditions aux limites est différente de celle des méthodes par éléments finis (Zienkiewicz & Morgan, 1982; Komatitsch, 1997), dans laquelle les conditions aux limites sont prises en compte explicitement dans la formule variationnelle du problème. Dans ce cas, la solution obtenue satisfait donc automatiquement les conditions aux limites.

Ensuite, tous les types d'onde sont modélisés puisque la physique du problème est considérée. En effet, il n'y a pas d'approximation physique de l'équation d'onde, la méthode permet donc de simuler la propagation des ondes directes, mais également des ondes réfléchies (une ou plusieurs fois), réfractées, converties, diffractées, des ondes de surface, des ondes coniques ou de tout autre type d'onde générée.

Enfin, les différences finies permettent de modéliser numériquement de manière simple et rapide la propagation des ondes. Comme nous utiliserons le problème direct de nombreuses fois dans l'inversion des formes d'onde élastique, il est impératif que la modélisation du problème direct soit efficace.

2.3.3 Les différences finies en temps et en espace

Nous illustrons la méthode des différences finies dans le domaine spatial pour une fonction d'une seule variable et une approximation à l'ordre 2. Soit f une fonction d'une seule variable x , de classe \mathcal{C}^∞ en x_0 . Soit x un point proche de x_0 . Le développement en séries de Taylor de f en x_0 à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + o(x^2) \quad (2.33)$$

où $o(x^2) = x^2 o(1)$ représente le produit d'une fonction négligeable devant 1 et d'une fonction en x^2 . Ce terme est donc négligeable devant x^2 .

Définissons maintenant une grille de points équidistants d'un intervalle h . Si $x = x_0 + h$, l'expression 2.33 devient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)h + o(x^2) \quad (2.34)$$

De même, en $x = x_0 - h$, l'expression 2.33 devient :

$$f(x_0 - h) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)h + o(x^2) \quad (2.35)$$

Pour approximer la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, nous pouvons donc utiliser uniquement l'équation 2.34, l'équation 2.35 ou une combinaison linéaire de ces deux équations en négligeant les termes faisant intervenir les dérivées secondes. Ceci mène aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + o(h^2) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + o(h^2) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + o(h^2)\end{aligned}\tag{2.36}$$

Ces équations permettent d'approximer une dérivée première par un terme en $o(h^2)$: ce sont donc des approximations à l'ordre 2 de la dérivée première, comme une différence avant, après ou centrée selon les points spatiaux utilisés. Ces équations signifient que localement, la dérivée de la fonction est assimilée à sa pente. Pour que ces approximations soient valables, les points x et x_0 doivent être proches l'un de l'autre et que la fonction f ne doit pas varier trop rapidement.

Les opérateurs de différences finies à l'ordre 4 (Levander, 1988; Hustedt et al., 2004) s'appuient sur des combinaisons linéaires faisant intervenir les valeurs de f pour des points plus lointains que les points voisins immédiats et permettent de négliger des termes en $o(h^4)$.

En temps, il est possible de procéder de la même manière qu'en espace. Néanmoins, le schéma choisi couramment correspond à l'ordre 2 et à une différence avant (Levander, 1988; Virieux, 1984). Il se nomme "schéma saute-mouton". Ainsi, une relation causale est établie entre la valeur de la fonction f à l'instant t_0 et sa valeur à l'instant $t_0 - dt$. La dérivée temporelle d'une fonction f par rapport au temps t s'écrit alors, étant donné un pas d'échantillonnage temporel dt :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0) = \frac{f(t_0) - f(t_0 - dt)}{dt}\tag{2.37}$$

En fréquence, seules les différences finies spatiales interviennent, toutes les ondes étant modélisée pour une fréquence donnée. Dans ce cas, une matrice d'impédance peut être construite, traduisant les relations spatiales entre les valeurs discrètes des champs (Marfurt, 1984). Cette matrice peut être comparée à la matrice d'impédance construite avec les éléments finis (Zienkiewicz & Morgan, 1982). Avec les différences finies, les fonctions d'interpolation sont des fonction linéaire en $O(h^2)$ et les fonctions tests sont des peignes de Dirac. Les noeuds solution vérifient exactement les équations aux dérivées partielles 2.21 ou 2.26.

2.3.4 Les différences finies en quinconce de Yee (1966); Madariaga (1976); Virieux (1986)

Le système 2.21 doit être discrétisé spatialement et temporellement à l'aide des différences finies. Virieux (1984) crée une maille de différences finies en quinconce pour l'équation de propagation des ondes SH en 2D. Dans cette maille numérique, les composantes du tenseur des contraintes et les vitesses sont calculées en des points différents espacés de $h/2$, choisis à partir du calcul de dérivées premières spatiales centrées. Les contraintes et les vitesses sont calculées à des temps différents en quinconce, espacés de $dt/2$. Virieux (1986) développe la maille en quinconce pour la propagation des ondes P-SV en 2D (figure 2.8). Dans cette maille numérique, les contraintes sont calculées à un instant donné t et les vitesses à $t + dt/2$. Les composantes du tenseur des contraintes et celles du champ des vitesses sont calculées en des noeuds de la grille numérique différents (figure 2.8). Leur position est basée sur le calcul de dérivées spatiales premières centrées.

Levander (1988) a ensuite utilisé la même grille numérique pour discrétiser les équations de propagation des ondes (système 2.21) à l'ordre 4. Dans ce cas, les coefficients s'appliquant aux différents champs sont : $\pm 9/8$ pour les valeurs de la fonction en $x + h/2$ et $x - h/2$ et $\pm 1/24$ pour

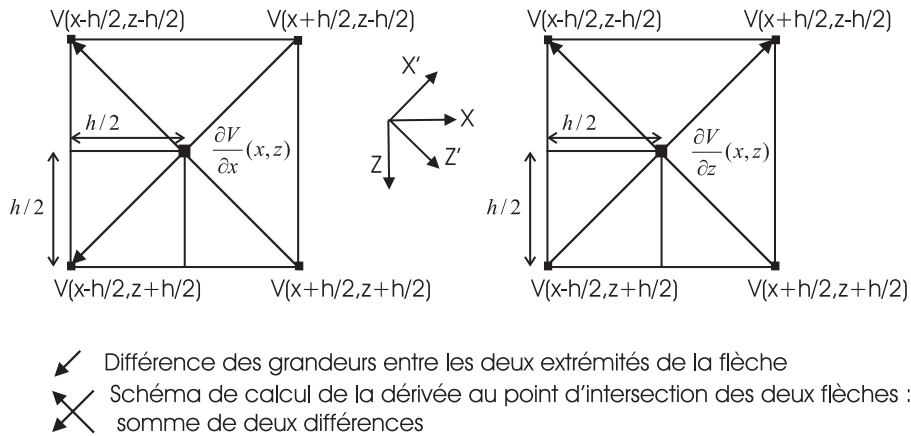


FIG. 2.7: Schéma du calcul des dérivées spatiales dans le stencil de différences finies de Saenger et al. (2000)

les valeurs de la fonction en $x + 3h/2$ et $x - 3h/2$ (Levander, 1988).

La condition de stabilité pour cette maille de différences finies en quinconce est, pour un pas d'échantillonnage horizontal h_x et vertical h_z (Virieux, 1986) et pour le cas d'un modèle à 2 dimensions spatiales :

$$V_p dt / \sqrt{h_x^2 + h_z^2} \leq 1 \quad (2.38)$$

soit, dans le cas de mailles numériques carrées ($h_x = h_z = h$) :

$$V_p dt / (\sqrt{2} * h) \leq 1 \quad (2.39)$$

Cette relation signifie que le pas en temps doit être inférieur à $dt_{lim} = \sqrt{2} * h / V_p$ qui représente un temps de propagation numérique d'onde. Si $dt \geq dt_{lim}$, le temps de propagation de l'onde devient supérieur au temps de propagation numériquement possible et l'algorithme devient instable.

Une fois que la stabilité est établie et que le rapport $V_p dt / (\sqrt{2} * h)$ est fixé et inférieur à 1, il faut minimiser la dispersion numérique. Cette dernière est liée au nombre de points par longueur d'onde choisi pour discrétiser l'équation continue (système 2.21). Avec le stencil de Virieux (1986), 10 points par longueur d'onde sont en général utilisés, et 5 avec le stencil de Levander (1988).

La particularité du stencil de Virieux (1986) est son indépendance par rapport au coefficient de Poisson, contrairement à des stencils classiques, qui ne sont pas en quinconce (Bamberger et al., 1980; Jo et al., 1996).

Cependant, le stencil de Virieux (1986) rend toute rotation du repère cartésien d'origine compliqué, ainsi que l'implémentation de la surface libre, comme nous le verrons dans la partie 2.4.1. Ce dernier point est particulièrement important dans notre étude puisque nous souhaitons modéliser précisément la surface libre et les ondes de surface. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers le stencil de Saenger et al. (2000).

2.3.5 Le stencil de Saenger et al. (2000)

Discrétisation des dérivées spatiales

Dans cette thèse, nous avons choisi le stencil de Saenger et al. (2000), à l'ordre 2 en temps et en espace. Dans ce stencil, les dérivées spatiales sont calculées selon des axes tournés à 45° par rapport au repère cartésien d'origine (figure 2.7).

D'après Saenger et al. (2000), soient x et z les directions des axes cartésiens, et x' et z' les directions des axes tournés à 45° (figure 2.8). Les pas numériques de discrétisation sont h_x et

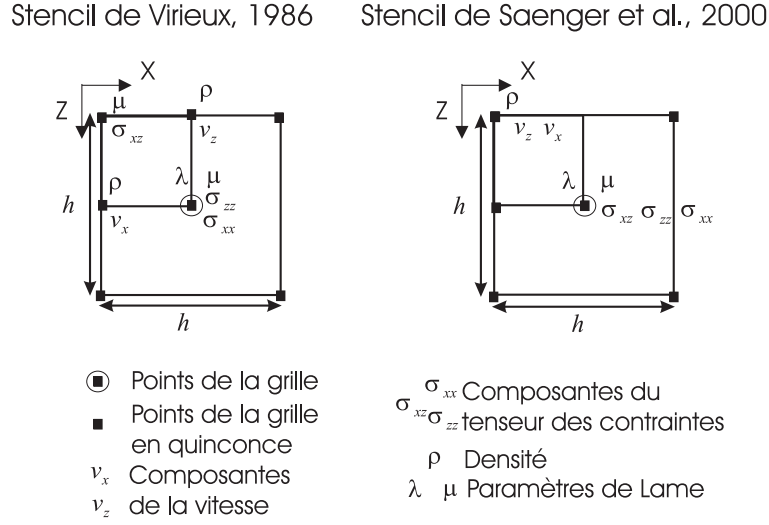


FIG. 2.8: Comparaison entre la grille en quinconce du stencil de Virieux (1986) et celui de Saenger et al. (2000)

h_z dans les directions horizontale et verticale. D_x et D_z sont les opérateurs de différences finies effectuant les dérivées $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial z$. Les opérateurs de second ordre calculant les dérivées dans les directions x et z sont, pour un champ donné \mathbf{u} , au point \mathbf{x} de coordonnées (z, x) et au temps t sont :

$$\begin{aligned} D_x(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{h_x} [\mathbf{u}(z, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ D_z(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{h_z} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x, t)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Des expressions analogues sont obtenues pour les opérateurs de différenciation D'_x et D'_z effectuant les dérivées et $\partial/\partial x'$ et $\partial/\partial z'$ dans les directions x' et z' :

$$\begin{aligned} D'_x(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} [\mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ D'_z(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les opérateurs de différenciation calculant les dérivées spatiales en x et z dans la nouvelle grille sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}}{2h_z} [D'_z(\mathbf{u}(z, x, t)) - D'_x(\mathbf{u}(z, x, t))] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}}{2h_x} [D'_z(\mathbf{u}(z, x, t)) + D'_x(\mathbf{u}(z, x, t))] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h_z} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t) \\ &\quad - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) + \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h_x} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t) \\ &\quad + \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour des échantillonnages spatiaux du milieu vertical et horizontal égaux $h_x = h_z = h$, les dérivées partielles selon x et z deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h}[\mathbf{u}(z + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}, t) \\ &\quad - \mathbf{u}(z - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}, t) + \mathbf{u}(z + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}, t)] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h}[\mathbf{u}(z + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}, t) \\ &\quad + \mathbf{u}(z - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}, t) - \mathbf{u}(z + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}, t)]\end{aligned}\quad (2.44)$$

Discrétisation des dérivées temporelles

Les dérivées temporelles sont inchangées par rapport au stencil de (Virieux, 1986) et sont toujours basées sur un schéma en quinconce décentré vers l'arrière, de telle sorte que le calcul d'un champ à t soit basé sur la valeur des champs numériques à $t - dt/2$ et $t - dt$ (schéma saute-mouton). De plus, contraintes et vitesses sont encore calculés à des pas de temps décalés de $dt/2$. Par exemple, le calcul des vitesses au temps t requiert la connaissance des vitesses au temps $t - dt$ et celle des dérivées spatiales des contraintes au temps $t - dt/2$.

Propriétés de la maille numérique

D'après le schéma de la maille numérique et les équations utilisées, les contraintes et les vitesses apparaissent découplées (figure 2.8), les composantes du tenseur des contraintes sont calculées en un seul point de la maille numérique, tout comme celles du champ des vitesses. Les deux points considérés sont décalés de $\sqrt{2} * h$ le long de la diagonale. Ceci rend l'implémentation numérique plus simple que dans le cas de la grille en quinconce de Virieux (1986).

De plus, les paramètres λ et μ ne sont définis qu'en un seul point dans la maille numérique, ce qui évite d'effectuer des moyennes arithmétiques, géométriques ou harmoniques pour connaître leur valeur en d'autres points de la maille (Graves, 1996; Moczo et al., 2002). Ceci réduit les erreurs numériques liées à ces approximations et permet de modéliser la propagation des ondes dans des milieux complexes, comme des milieux fracturés (Saenger et al., 2002).

Par ailleurs, l'inversion des formes d'onde élastique, effectuée dans cette thèse, a pour but l'imagerie quantitative des paramètres de la proche surface. Leur utilisation en un seul point de la grille numérique est ainsi très importante pour le problème inverse.

En revanche, si la masse volumique ρ est définie sur un noeud de contraintes comme λ et μ , il est nécessaire d'effectuer une moyenne locale pour la connaître au noeud de vitesse où elle est utilisée. Dans ce cas, nous effectuons une moyenne arithmétique entre ses valeurs aux 4 points voisins où elle est définie Saenger & Bohlen (2004); Moczo et al. (2002). Ce paramètre ne sera pas inversé par la suite dans ce travail.

Stabilité et dispersion

La méthode présentée ici s'avère aussi stable que le schéma des grilles en quinconce de Virieux (1986) d'après (Saenger et al., 2000).

En ce qui concerne la dispersion numérique, l'erreur numérique sur la vitesse de phase V_{ph} est la même que celle obtenue avec le stencil de Virieux (1986) le long des axes cartésiens avec un même échantillonnage spatial, mais dans ce cas, l'erreur maximale à 45 °est plus importante. Avec un nombre de points par longueur d'onde multiplié par $\sqrt{2}$ ou un paramètre de dispersion $V_{ph}dt/h$ multiplié par $\sqrt{2}$, l'erreur maximale sur la vitesse de phase se trouve toujours à 45 °des axes, mais devient égale à celle du stencil de Virieux (1986). Ceci signifie que, pour conserver la

même précision numérique, il faut soit diminuer le pas spatial de $\sqrt{2}$, soit augmenter le nombre de points par longueur d'onde de $\sqrt{2}$. La deuxième solution est préférable car le pas de temps n'est pas changé. Le nombre de points nécessaire par longueur d'onde augmente donc pour conserver la même dispersion numérique, passant de 10 pour un stencil de différences finies en quinconce sans rotation des axes des dérivées (Virieux, 1986) à $10 * \sqrt{2} = 14$ points pour le stencil de Saenger et al. (2000).

Comparaison avec d'autres stencils de différences finies

La comparaison de ce stencil avec celui de Virieux (1986) et avec la solution analytique de Garvin (1956) sera présentée dans la section 2.4.3 pour le cas d'un milieu avec une surface libre, interface mettant en contact des milieux très contrastés. Saenger et al. (2000), Bohlen & Saenger (2003) et Saenger & Bohlen (2004) ont validé ce stencil.

D'autres auteurs (Jo et al., 1996; Stekl & Pratt, 1998) utilisent une combinaison linéaire des dérivées calculées selon un stencil tourné et un stencil non tourné. Des coefficients de pondération permettent de minimiser la dispersion numérique et de n'utiliser que 4 points par longueur d'onde pour le calcul des dérivées. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans sa dépendance au coefficient de Poisson (Jo et al., 1996). Ainsi, au passage d'une interface liquide-solide, le stencil non tourné devient instable et il ne faut conserver que le calcul des dérivées selon les axes tournés. Ceci pose un problème pour l'inversion, puisque notre but est de déterminer les paramètres du milieu a priori inconnus.

Hustedt et al. (2004) ont comparé le stencil de Jo et al. (1996); Stekl & Pratt (1998) et celui de Levander (1988). Les précisions et dispersions numériques obtenues sont du même ordre de grandeur. Néanmoins, le stencil de Levander (1988) fait intervenir des points plus éloignés spatialement. Ceci entraîne un coût numérique plus élevé, comme nous le verrons par la suite, puisque la bande de coefficients non nuls dans la matrice d'impédance devient plus large.

Min et al. (2000) se sont intéressés à un stencil comportant 25 points, permettant de diminuer encore le nombre de points par longueur d'onde. Seuls 3,3 points par longueur d'onde de cisaillement deviennent nécessaires pour assurer une dispersion numérique faible.

Nous avons donc présenté le stencil de Saenger et al. (2000). Les équations discrètes complètes du système 2.21 seront exposées dans la section 2.5.1, lorsque les conditions aux bords du modèle auront été introduites. Le stencil de Saenger et al. (2000) permet d'implémenter facilement la surface libre, comme nous allons maintenant le voir.

2.4 Modélisation de la surface libre

2.4.1 Différentes manières de modéliser la surface libre

Physiquement, les conditions à la surface libre sont : $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$, correspondant à la nullité de la traction à la surface libre. Les modélisations de la surface libre et de la topographie sont souvent sources de difficultés dans les méthodes numériques. Plusieurs auteurs se sont penchés sur la question et ont résolu le problème de différentes façons. Avec les différences finies, le principal problème rencontré pour une topographie quelconque réside dans l'obligation de la discrétiser en marches d'escaliers. Le nombre de points par longueur d'onde est généralement fort pour limiter cet effet.

Avec la grille de différences finies en quinconce de Virieux (1986) présentée sur la figure 2.8, les conditions à la surface libre sont exprimées par la nullité d'une contrainte (σ_{zz} par exemple pour Graves (1996)), et la nullité de σ_{zz} est obtenue par la méthode des images (Graves, 1996). Dans celle-ci, une couche numérique virtuelle est ajoutée au-dessus de la surface libre. Les valeurs de σ_{zy} y sont opposées à celles de σ_{zz} juste en-dessous de la surface libre, de manière à annuler les contraintes σ_{zz} exactement au niveau de la surface libre.

Robertsson (1996) a étendu cette méthode à la méthode des images généralisées. Il décrit les conditions aux limites liées à la surface libre pour une maille par 7 combinaisons typiques, la contrainte cisailante étant nulle à la surface libre. Ceci lui permet de généraliser les conditions de surface libre, il n'y a pas de limitation sur la forme du relief sauf pour de forts changements de topographie et la nécessité d'un nombre de points minimal pour certaines formes du relief. Cette technique demande des grilles numériques comportant 15 points par longueur d'onde (Robertsson, 1996). Ainsi, certaines parties du modèle sont suréchantillonnées. L'augmentation du nombre de points par longueur d'onde améliore la précision numérique pour des structures ayant une pente arbitraire.

D'autres auteurs ont préféré un maillage déformable près de la topographie : la grille de différences finies est ainsi modifiée pour épouser exactement la forme de la surface libre (Tessmer et al., 1992; Hestholm & Ruud, 1994). Cette méthode se révèle efficace quand la topographie est très marquée, mais reste cependant très coûteuse pour des topographies plus lisses.

Une possibilité serait de modifier le stencil à proximité de la surface libre (Kristek et al., 2002; Carpenter et al., 1999), ce qui augmente le nombre d'opérations à effectuer et le coût de calcul. Il est également possible de mélanger la méthode des différences finies et celle des éléments finis près de la surface libre (Jianfeng & Tielin, 1999; Moczo et al., 1997). Mais le coût de calcul se révèle ici aussi élevé.

La topographie peut être également modélisée en utilisant le multigrille local (Hayashi et al., 2001). Pour les zones proches de la surface ou les zones à moindre vitesse, la grille est raffinée trois fois (le pas de la grille est trois fois plus petit). Ceci correspond à une méthode de grille discontinue qui prend en compte les effets de la topographie très efficacement. Dans la maille plus lâche, les différences finies d'ordre 4 en espace sont appliquées. Pour les zones où la maille est plus fine, l'ordre 2 est utilisé. Les champs de la grille grossière et de la grille fine sont calculés par interpolation linéaire.

Enfin, il est également possible d'étudier le multigrille total (Hustedt et al., 2003) à l'aide de transformées en ondelettes, permettant de modéliser la propagation des ondes à des échelles différentes. Les grilles lâches et fines sont interpolées bilinéairement. Cette méthode fournit de très bons résultats. Cependant, elle s'avère très coûteuse numériquement.

2.4.2 Implémentation de la surface libre

Dans notre approche, la topographie est modélisée à partir des valeurs des vitesses et de la densité, exprimant ainsi une condition aux limites implicite (Kelly et al., 1976) par la méthode du vide (selon Hayashi et al. (2001); Graves (1996); Ohminato & Chouet (1997)). La masse volumique ρ est quasiment nulle dans l'air et souvent considéré comme nulle par rapport à celle du sol. Mais numériquement, ce paramètre ne doit pas être nul car il apparaît au dénominateur dans les équations du mouvement. De même, si ρ était nul, V_p et V_s seraient infinis.

Par ailleurs, les vitesses dans l'air sont considérées comme nulles, en raison du contraste entre les vitesses de propagation des ondes P et S dans le milieu et dans l'air. Ceci permet d'implémenter numériquement la surface libre (Hayashi et al., 2001; Graves, 1996; Ohminato & Chouet, 1997) et d'annuler les contraintes dans l'air (les conditions initiales sont des vitesses et des contraintes nulles partout, *i.e.* l'équilibre du milieu). Cette condition constitue cependant un abus, puisque les conditions de surface libre stipulent que les tractions sont continues à la surface libre, donc que σ_{xz} et σ_{zz} sont nulles. Aucune condition sur σ_{xx} n'existe normalement. Néanmoins, en raison du terme en $1/\rho$, $\partial\sigma_{xz}/\partial x$ peut être négligé dans la première équation des systèmes 2.21 et 2.26.

Saenger et al. (2000) et Ohminato & Chouet (1997) ont validé cette méthode numériquement. D'après Saenger & Bohlen (2004); Graves (1996), cette méthode de modélisation de la surface libre est valable uniquement avec un stencil d'ordre 2 en espace. Notons que Kneib & Leykam (2004) utilisent également le stencil de Saenger et al. (2000) pour modéliser la propagation des ondes à

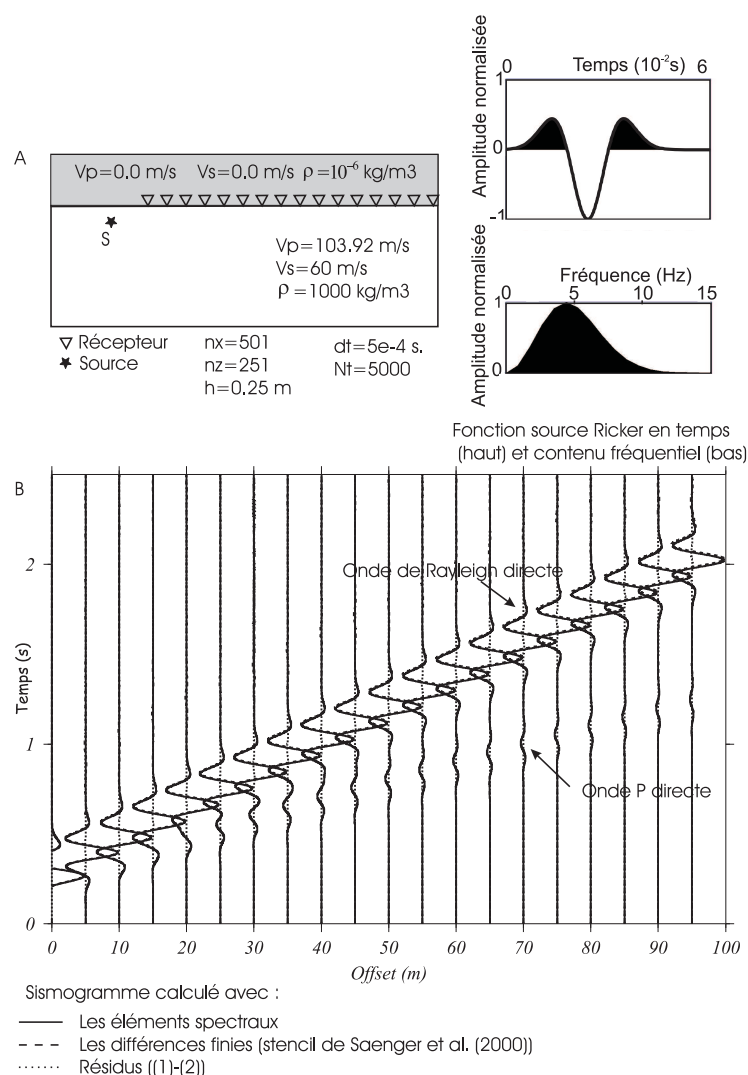


FIG. 2.9: Comparaison de sismogrammes obtenus à partir du stencil de différences finies de Saenger et al. (2000) et des éléments spectraux (Komatitsch, 1997)

proximité d'un tunnel, sans introduire de vitesse nulle. Dans ce cas, le contraste de vitesses entre l'air ($V_p = 331,3$ m/s et $V_s = 0,1$ m/s) et dans le milieu ($V_p = 5300$ m/s et $V_s = 2950$ m/s) assurent un coefficient de réflexion proche de 1 au niveau de la surface libre. Cependant, la nullité des contraintes σ_{xz} et σ_{zz} n'est pas respectée strictement.

Pour correctement modéliser la surface libre avec le stencil de Saenger et al. (2000), Bohlen & Saenger (2003) et Saenger & Bohlen (2004) préconisent l'utilisation de 25 à 30 points par longueur d'onde. Ceci permet de correctement modéliser la surface libre et les ondes de surface, quelle que soit la profondeur de la source (figure 2.10).

2.4.3 Validation de l'implémentation de la surface libre

Afin de valider l'implémentation numérique de la surface libre, nous avons effectué une comparaison avec la méthode numérique des éléments spectraux (Komatitsch, 1997; Festa & Vilotte, 2004) et la méthode analytique de Garvin (1956) pour des sources explosives.

Les figures 2.9 et 2.10 montrent un très bon ajustement entre les sismogrammes calculés à partir du stencil de différences finies de Saenger et al. (2000) et la méthode des éléments spectraux d'une part, et la solution analytique de Garvin (1956) d'autre part.

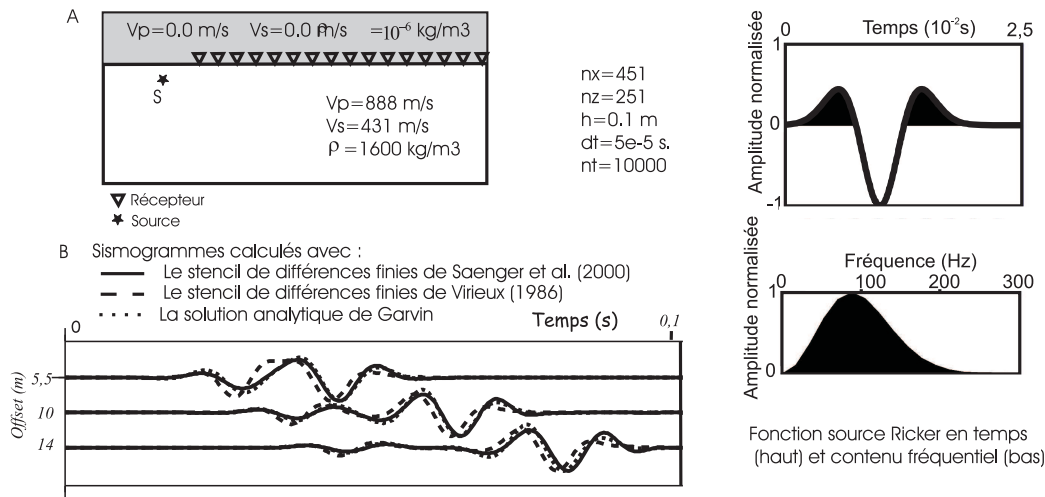


FIG. 2.10: Comparaison de sismogrammes obtenus à partir du stencil de différences finies de Saenger et al. (2000), de Virieux (1986) et de la méthode analytique de Garvin (1956)

De plus, la figure 2.10 montre les difficultés rencontrées avec des sources superficielles (0.5m de profondeur) et le stencil de Virieux (1986). En effet, la comparaison entre les sismogrammes calculés avec cette méthode et ceux obtenus avec la solution analytique de Garvin (1956) montre un décalage temporel avec le stencil de Virieux (1986), inexistant avec le stencil de Saenger et al. (2000) pour une discrétisation spatiale des milieux identique. Ceci valide le stencil que nous avons choisi pour l'étude de la propagation des ondes en subsurface avec des sources localisées près de la surface libre. La propagation des ondes de surface est particulièrement bien modélisée avec le stencil de différences finies de Saenger et al. (2000) à condition d'inclure un nombre adéquat de points par longueur d'onde. Dans nos simulations, nous avons respecté le nombre de 25 à 30 points par longueur d'onde indiqué par Saenger et al. (2000), Bohlen & Saenger (2003) et Saenger & Bohlen (2004).

2.5 Les conditions absorbantes aux bords du modèle

Les équations 2.21 et 2.26 traduisent la propagation des ondes dans un domaine infini latéralement et en profondeur. Cependant, numériquement, le domaine de propagation des ondes est borné. Il faut donc empêcher les réflexions parasites sur les bords du modèle.

L'approximation paraxiale 45° de l'équation d'onde (Approximation A3 de Clayton & Engquist (1977)), modélisant la propagation d'un champ en négligeant la partie rétropropagée, représente une manière d'empêcher les réflexions sur les bords du modèle numérique.

Dans le modèle des éponges (Cerjan et al., 1985), les bords absorbants sont modélisés de la manière suivante. Le champ est inchangé (multiplié par 1) dans la partie centrale où les ondes se propagent réellement. En revanche, sur les bords, le champ est multiplié par un facteur correctif différent de 1, de telle sorte qu'il diminue vers le bord, ce qui équivaut à un déphasage spatial de l'onde. En effet, lors de l'application des différences finies dans les parties où l'onde est déphasée, les signaux ne sont plus en phase et l'amplitude de l'onde décroît à mesure qu'elle s'approche du bord.

Les PML (Perfectly Matched Layer; Bérenger (1994) permettent d'annuler la composante normale au bord réfléchissant d'un champ. Un matériau virtuel possédant certaines propriétés dans une bande parallèle au bord réfléchissant, est défini de manière à assurer la continuité de la composante parallèle et à amoindrir la composante perpendiculaire au bord considéré. Chiu & Liu (1996) et Hastings et al. (1996) appliquent cette technique à la propagation des ondes élastiques. Collino

& Tsogka (2001) étendent la méthode à des milieux anisotropes et Liu & Tao (1997) à des milieux absorbants. Operto et al. (2002) montrent le lien entre les PML et les éponges et appliquent les PML dans un code en différences finies pour la propagation des ondes SH. Hustedt et al. (2004) implémentent les PML dans la formulation fréquentielle. Enfin Festa & Nielsen (2003) appliquent la méthode en trois dimensions et montrent que les PML permettent d'absorber efficacement les ondes de volume mais aussi de surface, bien que l'épaisseur des PML devienne inférieure à la longueur d'onde.

2.5.1 Système hyperbolique d'ordre 1 discrétisé dans le domaine temporel

Dans la technique utilisée par Operto et al. (2002) et Hustedt et al. (2004), chaque champ est découplé en deux sous-champs dont les directions sont perpendiculaires aux bords du modèle. Cette séparation est nécessaire à proximité des bords du modèle, là où les champs doivent être atténués, mais n'est pas indispensable dans les zones du modèle où les ondes se propagent physiquement. Comme les bords du modèle sont parallèles aux directions cartésiennes du repère principal x et z , le champ $V_x(\mathbf{x})$ est décomposé selon : $V_x(\mathbf{x}) = V_{xx}(\mathbf{x}) + V_{xz}(\mathbf{x})$. A proximité de chaque bord, l'un des deux sous-champs est déphasé et atténué par l'intermédiaire d'un facteur multiplicatif réel γ ou η appliqué sur le champ à déphaser, perpendiculaire au bord du modèle (Wang & Tang, 2003; Chiu & Liu, 1996). Ainsi, près d'un bord vertical (resp. horizontal), le sous-champ $V_{xx}(\mathbf{x})$ (resp. $V_{xz}(\mathbf{x})$) est atténué et déphasé par l'intermédiaire d'un facteur multiplicatif $\gamma_x(\mathbf{x})$ ou $\eta_x(\mathbf{x})$ (resp. $\gamma_z(\mathbf{x})$ ou $\eta_z(\mathbf{x})$). Ces coefficients sont nuls lorsque les ondes se propagent physiquement, *i.e.* au centre du domaine étudié : il n'y a pas d'atténuation ni de déphasage du champ. Ainsi, seuls $\gamma_x(\mathbf{x})$ et $\eta_x(\mathbf{x})$ sont non nuls dans les bandes verticales et leurs valeurs dépendent de la distance horizontale au bord réfléchissant. Nous les noterons donc $\gamma_x(x)$ et $\eta_x(x)$. De même, seuls $\gamma_z(\mathbf{x})$ et $\eta_z(\mathbf{x})$ sont non nuls dans les bandes horizontales et leurs valeurs dépendent de la distance verticale au bord réfléchissant. Nous les noterons donc $\gamma_z(z)$ et $\eta_z(z)$. Afin d'assurer la continuité des champs, $\gamma_x(x)$, $\eta_x(x)$, $\gamma_z(z)$ et $\eta_z(z)$ sont nuls à la frontière entre les zones PML et le milieu de propagation réel.

Notons que nous avons distingué formellement deux types de coefficients : $\gamma(\mathbf{x})$ et $\eta(\mathbf{x})$, puisqu'ils s'appliquent en des noeuds de la grille numérique en quinconce de Saenger et al. (2000) différents. Ces coefficients ne dépendent que de leur position dans le modèle numérique, ils sont stationnaires.

Le système d'équations hyperboliques d'ordre 1 en temps 2.21 devient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \gamma_x(x)V_{xx}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xxx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xxz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} + f_x(\mathbf{x}, t) \\
\frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \gamma_z(z)V_{xz}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xzx}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\
\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \gamma_x(x)V_{zx}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xzx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} + f_z(\mathbf{x}, t) \\
\frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \gamma_z(z)V_{zz}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \left\{ \frac{\partial \sigma_{zzx}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zzz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\
\frac{\partial \sigma_{xxx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_x(x)\sigma_{xxx}(\mathbf{x}, t) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xxz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_z(z)\sigma_{xxz}(\mathbf{x}, t) &= \lambda(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xzx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_x(x)\sigma_{xzx}(\mathbf{x}, t) &= \lambda(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_z(z)\sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{zzx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_x(x)\sigma_{zzx}(\mathbf{x}, t) &= \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

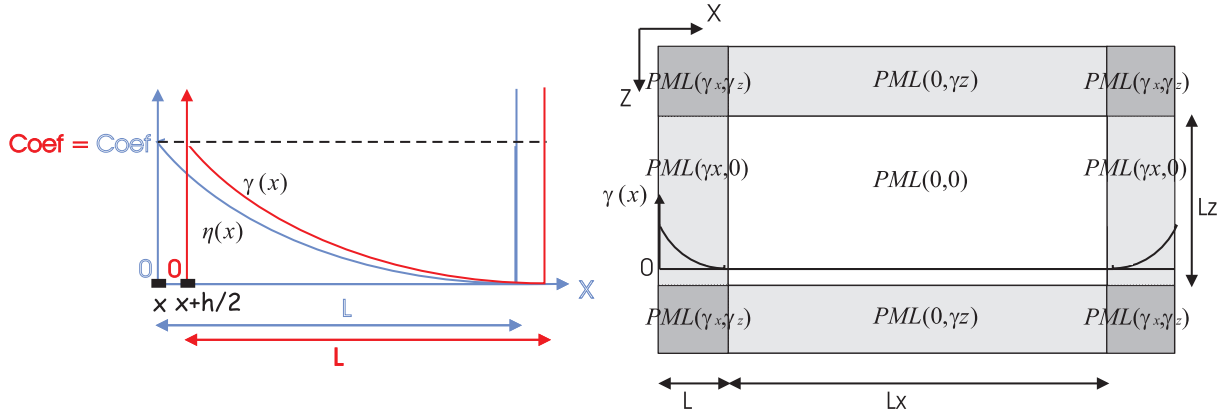


FIG. 2.11: Modélisation numérique des conditions aux limites. À gauche : coefficients $\gamma(\mathbf{x})$ et $\eta(\mathbf{x})$ permettant de déphaser les champs. La grille en quinconce impose de décaler spatialement les coefficients $\gamma(\mathbf{x})$ et $\eta(\mathbf{x})$. Le paramètre coef varie selon les cas étudiés. À droite, type de PML appliqué aux différents bords du domaine et valeur de $\gamma(\mathbf{x})$ sur les bords verticaux. D'après Operto (2001)

$$\frac{\partial \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \eta_z(z) \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right) \quad (2.45)$$

où

$$\begin{aligned} V_{xx}(\mathbf{x}, t) + V_{xz}(\mathbf{x}, t) &= V_x(\mathbf{x}, t) \\ V_{zx}(\mathbf{x}, t) + V_{zz}(\mathbf{x}, t) &= V_z(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{xxx}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{xxz}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{zzx}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{zzz}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{xzx}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{xzz}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

La décroissance de l'onde s'effectue sur une certaine épaisseur. Des tests de Operto (2001) ont montré que plus la couche sur laquelle les PML sont appliqués est épaisse physiquement (plus il y a de points dans la bande PML), plus l'absorption de l'onde incidente est efficace et plus l'amplitude de l'onde réfléchie parasite est faible. Cependant, lorsqu'une certaine épaisseur est atteinte, toutes les ondes peuvent être atténuées efficacement (Festa & Nielsen, 2003).

Le système 2.45 contenant 10 équations requiert le stockage numérique de 10 champs. Ceci rend deux fois plus coûteuse que précédemment la méthode de propagation des ondes dans le domaine temporel. Néanmoins, si la séparation des champs est appliquée seulement dans les zones PML, le coût de l'implémentation numérique des PML diminue et se limite au stockage des 10 champs dans les zones PML.

Dans nos modèles numériques, l'épaisseur de ces couches atténuantes est la même sur les bords latéraux et sur le bord inférieur. Le nombre de points sur lequel les PML sont appliqués est généralement de 20 (Operto, 2001; Hustedt et al., 2004), correspondant à une à deux longueurs d'onde. Festa & Nielsen (2003) ont cependant montré que 5 à 10 points suffisent généralement. Ici, $\gamma_x(x)$, $\eta_x(x)$, $\gamma_z(x)$ et $\eta_z(x)$ sont des fonctions décroissant en cosinus, valant 0.12 sur le bord extérieur du domaine étudié, et 0 sur le bord intérieur du PML (figure 2.11).

Pour résoudre ce système hyperbolique d'ordre 1 (équation 2.45), il faut ensuite le discrétiser à l'aide des différences finies. Avec les différences finies en quinconce du type Saenger et al. (2000), les contraintes sont calculées à un temps t et aux noeuds numériques (x, z) tandis que les vitesses sont calculées à des intervalles de temps décalées de $dt/2$: $t + dt/2$, et aux noeuds numériques décalés d'un demi pas spatial le long de la diagonale, $(x + h/2, z + h/2)$. Le système 2.45 devient donc :

$$V_{xx}(x + h/2, z + h/2, t + dt/2) = (1 - dt \gamma_x(x + h/2)) V_{xx}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{dt}{2h\rho(x+h/2, z+h/2)} \{ \{ \sigma_{xxx}(x+h, z+h, t) + \sigma_{xxx}(x+h, z, t) \\
& - \sigma_{xxx}(x, z+h, t) - \sigma_{xxx}(x, z, t) \\
& + \sigma_{xxz}(x+h, z+h, t) + \sigma_{xxz}(x+h, z, t) \\
& - \sigma_{xxz}(x, z+h, t) - \sigma_{xxz}(x, z, t) \} + f_x(\mathbf{x}, t) \} \\
V_{xz}(x+h/2, z+h/2, t+dt/2) & = (1-dt \gamma_z(z+h/2))V_{xz}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) \\
& + \frac{dt}{2h\rho(x+h/2, z+h/2)} \{ \{ \sigma_{xzx}(x+h, z+h, t) - \sigma_{xzx}(x+h, z, t) \\
& + \sigma_{xzx}(x, z+h, t) - \sigma_{xzx}(x, z, t) \\
& + \sigma_{xzz}(x+h, z+h, t) - \sigma_{xzz}(x+h, z, t) \\
& + \sigma_{xzz}(x, z+h, t) - \sigma_{xzz}(x, z, t) \} \} \\
V_{zx}(x+h/2, z+h/2, t+dt/2) & = (1-dt \gamma_x(x+h/2))V_{zx}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) \\
& + \frac{dt}{2h\rho(x+h/2, z+h/2)} \{ \{ \sigma_{xzx}(x+h, z+h, t) + \sigma_{xzx}(x+h, z, t) \\
& - \sigma_{xzx}(x, z+h, t) - \sigma_{xzx}(x, z, t) \\
& + \sigma_{xzz}(x+h, z+h, t) + \sigma_{xzz}(x+h, z, t) \\
& - \sigma_{xzz}(x, z+h, t) - \sigma_{xzz}(x, z, t) \} + f_z(\mathbf{x}, t) \} \\
V_{zz}(x+h/2, z+h/2, t+dt/2) & = (1-dt \gamma_z(z+h/2))V_{zz}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) \\
& + \frac{dt}{2h\rho(x+h/2, z+h/2)} \{ \{ \sigma_{zzx}(x+h, z+h, t) - \sigma_{zzx}(x+h, z, t) \\
& + \sigma_{zzx}(x, z+h, t) - \sigma_{zzx}(x, z, t) \\
& + \sigma_{zzz}(x+h, z+h, t) - \sigma_{zzz}(x+h, z, t) \\
& + \sigma_{zzz}(x, z+h, t) - \sigma_{zzz}(x, z, t) \} \} \tag{2.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxx}(x, z, t) & = (1-dt \eta_x(x))\sigma_{xxx}(x, z, t-dt) + dt \left\{ \frac{\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{xx}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) + V_{xx}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& - V_{xx}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{xx}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& + V_{xz}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) + V_{xz}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& \left. - V_{xz}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{xz}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \} \right\} \\
\sigma_{xxz}(x, z, t) & = (1-dt \eta_z(z))\sigma_{xxz}(x, z, t-dt) + dt \left\{ \frac{\lambda(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{zx}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{zx}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& + V_{zx}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{zx}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& + V_{zz}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{zz}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& \left. + V_{zz}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{zz}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \} \right\} \\
\sigma_{zxx}(x, z, t) & = (1-dt \eta_x(x))\sigma_{zxx}(x, z, t-dt) + dt \left\{ \frac{\lambda(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{xx}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) + V_{xx}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& - V_{xx}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{xx}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& + V_{xz}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) + V_{xz}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2) \\
& \left. - V_{xz}(x-h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{xz}(x-h/2, z-h/2, t-dt/2) \} \right\} \\
\sigma_{zzz}(x, z, t) & = (1-dt \eta_z(z))\sigma_{zzz}(x, z, t-dt) + dt \left\{ \frac{\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{zx}(x+h/2, z+h/2, t-dt/2) - V_{zx}(x+h/2, z-h/2, t-dt/2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + V_{zx}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{zx}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& + V_{zz}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{zz}(x + h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& + V_{zz}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{zz}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \} \\
\sigma_{xx}(x, z, t) & = (1 - dt \eta_x(x))\sigma_{xx}(x, z, t - dt) + dt \left\{ \frac{\mu(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{zx}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2) + V_{zx}(x + h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& - V_{zx}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{zx}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& + V_{zz}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2) + V_{zz}(x + h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& \left. - V_{zz}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{zz}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \} \right\} \\
\sigma_{zz}(x, z, t) & = (1 - dt \eta_z(z))\sigma_{zz}(x, z, t - dt) + dt \left\{ \frac{\mu(x, z)}{2h} \{ \right. \\
& V_{xx}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{xx}(x + h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& + V_{xx}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{xx}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& + V_{xz}(x + h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{xz}(x + h/2, z - h/2, t - dt/2) \\
& \left. + V_{xz}(x - h/2, z + h/2, t - dt/2) - V_{xz}(x - h/2, z - h/2, t - dt/2) \} \right\} \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Notons que la structure de ces équations reste la même quel que soit le champ. Un champ donné $C(x, z, t)$ est calculé à un temps t selon :

$$C(x, z, t) = (1 - dt \tau_{PML})C(x, z, t - dt) + \frac{dt}{2h} \{ \Sigma(t - dt/2) + f \} \quad (2.49)$$

où $\Sigma(t - dt/2)$ symbolise une combinaison linéaire des autres champs (formant une dérivée spatiale) à un temps $t - dt/2$, τ_{PML} représente le coefficient d'atténuation générique lié aux PML et f est la force appliquée au champ C .

Il est possible de substituer les contraintes (équations 2.48) dans les équations 2.47 et de n'avoir plus qu'un système en (V_x, V_z) . Luo & Schuster (1990) ont réduit ce système en ne conservant que la valeur des vitesses $V_x(x + h/2, z + h/2, t - dt/2)$ et $V_z(x + h/2, z + h/2, t - dt/2)$ grâce à des différences finies en quinconce (Virieux, 1986) dans le domaine temporel. L'avantage de cette méthode est la capacité de stockage nécessaire plus faible. Effectuer de cette manière deux dérivées spatiales premières consécutivement par substitution de certains champs dans les équations revient à définir un opérateur de différences finies de dérivée seconde de manière univoque pour les équations écrites sous la forme d'un système hyperbolique d'ordre 2 (équation 2.22). Néanmoins, la définition des PML sur la maille numérique en quinconce nécessite de calculer explicitement le système hyperbolique précédent (équations 2.47 et 2.48) avant de substituer les contraintes.

2.5.2 Système discrétisé dans le domaine fréquentiel

Nous allons maintenant exprimer ces équations dans le domaine fréquentiel. Comme dans le domaine temporel, chaque champ est séparé en deux sous-champs. Les PML sont introduites dans le système 2.26. Comme Hustedt et al. (2004), nous définissons deux nouvelles variables $\xi(\mathbf{x})$ et $\zeta(\mathbf{x})$ en fonction de la fréquence ω non nulle telles que : $\xi_x(\mathbf{x}) = 1 + i \gamma_x(\mathbf{x})/\omega$, $\xi_z(\mathbf{x}) = 1 + i \gamma_x(\mathbf{x})/\omega$, $\zeta_x(\mathbf{x}) = 1 + i \eta_x(\mathbf{x})/\omega$ et $\zeta_z(\mathbf{x}) = 1 + i \eta_z(\mathbf{x})/\omega$. Le système 2.26 devient, en introduisant les PML sans discrétisation :

$$\begin{aligned}
-i\omega\xi_x(\mathbf{x})V_{xx}(\mathbf{x}, \omega) & = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial\sigma_{xxx}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xxz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right\} + f_x(\mathbf{x}, \omega) \\
-i\omega\xi_z(\mathbf{x})V_{xz}(\mathbf{x}, \omega) & = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial\sigma_{xzx}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{xzz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right\} \\
-i\omega\xi_x(\mathbf{x})V_{zx}(\mathbf{x}, \omega) & = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial\sigma_{xzx}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xzz}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right\} + f_z(\mathbf{x}, \omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\omega\xi_z(\mathbf{x})V_{zz}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\left\{\frac{\partial\sigma_{zzx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{zzz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}\right\} \\
-i\omega\zeta_x(\mathbf{x})\sigma_{xxx}(\mathbf{x},\omega) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\left\{\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x}\right\} \\
-i\omega\zeta_z(\mathbf{x})\sigma_{xxz}(\mathbf{x},\omega) &= \lambda(\mathbf{x})\left\{\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}\right\} \\
-i\omega\zeta_x(\mathbf{x})\sigma_{zzx}(\mathbf{x},\omega) &= \lambda(\mathbf{x})\left\{\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x}\right\} \\
-i\omega\zeta_z(\mathbf{x})\sigma_{zzz}(\mathbf{x},\omega) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\left\{\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}\right\} \\
-i\omega\zeta_x(\mathbf{x})\sigma_{xzx}(\mathbf{x},\omega) &= \mu(\mathbf{x})\left\{\frac{\partial V_{zx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{\partial V_{zz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x}\right\} \\
-i\omega\zeta_z(\mathbf{x})\sigma_{xzz}(\mathbf{x},\omega) &= \mu(\mathbf{x})\left\{\frac{\partial V_{xx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{\partial V_{xz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}\right\}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Les coefficients $\xi_x(\mathbf{x})$, $\xi_z(\mathbf{x})$, $\zeta_x(\mathbf{x})$ et $\zeta_z(\mathbf{x})$ ne sont jamais nuls par définition. En divisant les différentes équations par $i\omega\xi_x(\mathbf{x})$, $i\omega\xi_z(\mathbf{x})$, $i\omega\zeta_x(\mathbf{x})$ ou $i\omega\zeta_z(\mathbf{x})$ et en rassemblant chaque sous-champ grâce aux égalités 2.46, le système s'écrit :

$$\begin{aligned}
V_x(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})}\frac{\partial\sigma_{xx}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_z(\mathbf{x})}\frac{\partial\sigma_{xz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})}f_x(\mathbf{x},\omega) \\
V_z(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})}\frac{\partial\sigma_{xz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_z(\mathbf{x})}\frac{\partial\sigma_{zz}(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})}f_z(\mathbf{x},\omega) \\
\sigma_{xx}(\mathbf{x},\omega) &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})}\frac{\partial V_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})}\frac{\partial V_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} \\
\sigma_{zz}(\mathbf{x},\omega) &= \lambda(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})}\frac{\partial V_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})}\frac{\partial V_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} \\
\sigma_{xz}(\mathbf{x},\omega) &= \mu(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})}\frac{\partial V_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \mu(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})}\frac{\partial V_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Une expression de ce type, qui n'utilise pas de sous-champ, a également été obtenue par Wang & Tang (2003) dans le domaine temporel pour des coordonnées cylindriques. Ils appliquent une transformée de Fourier des équations de propagation des sous-champs, identifient certains opérateurs appliqués aux sous-champs, regroupent ces derniers, et en effectuent la transformée de Fourier inverse.

Ce système peut être discrétisé avec les différences finies de Saenger et al. (2000), de manière à obtenir une expression discrète du système dans le domaine fréquentiel.

2.5.3 Système elliptique d'ordre 2 discrétisé dans le domaine fréquentiel

Pour écrire les équations de propagation des ondes dans un système elliptique, nous avons développé ce système numériquement et éliminé les contraintes. Nous allons cependant poursuivre le développement des équations formelles, afin de montrer la simplicité de la formulation fréquentielle avec les PML.

Les contraintes sont éliminées dans le système précédent :

$$\begin{aligned}
V_x(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})}\frac{\partial V_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial x}\right. \\
&+ \left.\lambda(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})}\frac{\partial V_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial z}\right\} \\
&+ \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}\frac{1}{i\omega\xi_z(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu(\mathbf{x})\frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})}\frac{\partial V_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial x}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} + \frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})} f_x(\mathbf{x}, \omega) \\
 V_z(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} \\
 & + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{i\omega\xi_z(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda(\mathbf{x}) \frac{1}{i\omega\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{1}{i\omega\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} + \frac{1}{i\omega\xi_x(\mathbf{x})} f_z(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par $(i\omega)^2$, le système 2.52 s'écrit suivant un système elliptique d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 V_x(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{\xi_x(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{1}{\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + \lambda(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} \\
 & + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{\xi_z(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} - i\omega \frac{1}{\xi_x(\mathbf{x})} f_x(\mathbf{x}, \omega) \\
 -\omega^2 V_z(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{\xi_x(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} \\
 & + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \frac{1}{\xi_z(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda(\mathbf{x}) \frac{1}{\zeta_x(\mathbf{x})} \frac{\partial V_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right. \\
 & + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{1}{\zeta_z(\mathbf{x})} \frac{\partial V_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \} - i\omega \frac{1}{\xi_x(\mathbf{x})} f_z(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Ce système correspond aux équations de Helmholtz dans lesquelles sont implémentées les PML. Il peut être discrétisé à l'aide des différences finies. Pour cela, il faut fixer une manière de calculer les dérivées secondes et déterminer les coefficients PML à appliquer pour déphaser les champs. Comme dans le domaine temporel, la substitution des contraintes dans le système discrétisé donne une manière unique de calculer les dérivées à l'ordre 2 (Luo & Schuster, 1990) et d'affecter les bons coefficients des PML (Hustedt et al., 2004).

Après développement numérique à l'aide des différences finies d'ordre 2 de Saenger et al. (2000) et substitution des contraintes, le système 2.51 devient :

$$\begin{aligned}
 V_x(x + 3h/2, z + 3h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ (\lambda(x + h, z + h) \right. \\
 & + 2\mu(x + h, z + h)) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \} \\
 & + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ \mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \right\} \} \\
 + V_x(x + 3h/2, z + h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ (\lambda(x + h, z + h) \right. \\
 & + 2\mu(x + h, z + h)) + \frac{1}{\zeta_x(x + h)} + (\lambda(x + h, z) + 2\mu(x + h, z))
 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \\
& -\mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} - \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
+V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ -(\lambda(x+h, z+h) \\
& +2\mu(x+h, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \\
& -(\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \\
& \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} + \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \} \} \\
+V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) & \{ \omega^2 + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ \\
& -(\lambda(x+h, z+h) + 2\mu(x+h, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} - (\lambda(x+h, z) \\
& +2\mu(x+h, z)) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} - (\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \\
& -(\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ -\mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \\
& -\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} - \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} - \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
+V_x(x+3h/2, z-h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ (\lambda(x+h, z) + 2\mu(x+h, z)) \\
& + \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \} \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
+V_x(x+h/2, z-h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ -(\lambda(x+h, z) + 2\mu(x+h, z)) \\
& \frac{1}{\zeta_x(x+h)} - (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \\
& \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} + \{ \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} + \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
+V_x(x-h/2, z+3h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ (\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h)) \\
& \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \} \} \\
+V_x(x-h/2, z+h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ (\lambda(x, z+h) \\
& +2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x)} + (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \\
& \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ -\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \\
& -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
+V_x(x-h/2, z-h/2, \omega) & \{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \\
+V_z(x+3h/2, z+3h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ \lambda(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right\} \right. \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ -\lambda(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right. \right. \\
& + \lambda(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \right. \\
& \left. - \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ \lambda(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right. \right. \\
& - \lambda(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \left. \right\} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ \right. \\
& \left. - \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} + \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ -\lambda(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right. \right. \\
& + \lambda(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} + \lambda(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} - \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ -\mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \right. \\
& + \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} + \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} - \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \left. \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x+3h/2, z-h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ -\lambda(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right. \right. \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ -\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x+h/2, z-h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ -\lambda(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} + \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \right. \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right. \\
& + \mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \left. \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ -\lambda(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right. \right. \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ -\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \left. \right\} \\
+V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) & \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \left\{ +\lambda(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \right. \right. \\
& - \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \left\{ -\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} + \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +V_z(x - h/2, z - h/2, \omega) \quad \left\{ \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \right\} \\
& = \quad i\omega \frac{1}{\xi_x(x + h/2, z + h/2)} f_x(x + h/2, z + h/2, \omega) \\
\\
V_x(x + 3h/2, z + 3h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ \mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right\} \\
& \quad + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ \lambda(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \right\} \\
V_x(x + 3h/2, z + h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ -\mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right. \\
& \quad \left. + \mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right\} + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ \right. \\
& \quad \left. \lambda(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} - \lambda(x + h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \\
V_x(x + h/2, z + 3h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ \mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right. \\
& \quad \left. - \mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ \right. \\
& \quad \left. -\lambda(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} - \lambda(x, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \right\} \\
V_x(x + h/2, z + h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ -\mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right. \\
& \quad \left. + \mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} + \mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} - \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \\
& \quad + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ -\lambda(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \right. \\
& \quad \left. + \lambda(x + h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} + \lambda(x, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} - \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \\
V_x(x + 3h/2, z - h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ -\mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right\} \\
& \quad + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ -\lambda(x + h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \\
V_x(x + h/2, z - h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ -\mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \right. \\
& \quad \left. + \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \\
& \quad \left\{ \lambda(x + h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} - \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \right\} \\
V_x(x - h/2, z + 3h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ -\mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right\} \\
& \quad + \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \left\{ -\lambda(x, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \right\} \\
V_x(x - h/2, z + h/2, \omega) & \quad \frac{1}{4h^2\rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \left\{ +\mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \right.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(z + h/2)} \\
 & \{ -\lambda(x, z + h) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} + \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
 V_x(x - h/2, z - h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \\
 & + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \{ \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
 V_z(x + 3h/2, z + 3h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ \mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \} \\
 & + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \{ \\
 & (\lambda(x + h, z + h) + 2\mu(x + h, z + h)) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \} \} \\
 V_z(x + 3h/2, z + h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ \mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \\
 & + \mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \} + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \{ \\
 & -(\lambda(x + h, z + h) + 2\mu(x + h, z + h)) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \\
 & -(\lambda(x + h, z) + 2\mu(x + h, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
 V_z(x + h/2, z + 3h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ -\mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \\
 & -\mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \\
 & \{ (\lambda(x + h, z + h) + 2\mu(x + h, z + h)) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \\
 & + (\lambda(x, z + h) + 2\mu(x, z + h)) \frac{1}{\zeta_z(z + h)} \} \} \\
 V_z(x + h/2, z + h/2, \omega) & \{ \omega^2 + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ -\mu(x + h, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \\
 & -\mu(x, z + h) \frac{1}{\zeta_x(x)} - \mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} - \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \\
 & + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \{ -(\lambda(x + h, z + h) \\
 & + 2\mu(x + h, z + h)) + \frac{1}{\zeta_z(z + h)} - (\lambda(x + h, z) + 2\mu(x + h, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \\
 & -(\lambda(x, z + h) + 2\mu(x, z + h)) \\
 & \frac{1}{\zeta_z(z + h)} - (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
 V_z(x + 3h/2, z - h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ \mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)} \} \\
 & + \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_z(z + h/2)} \{ (\lambda(x + h, z) + 2\mu(x + h, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \} \\
 V_z(x + h/2, z - h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2 \rho(x + h/2, z + h/2)} \frac{1}{\xi_x(x + h/2)} \{ -\mu(x + h, z) \frac{1}{\zeta_x(x + h)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{(\lambda(x+h, z) \\
& + 2\mu(x+h, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} + (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \\
& + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ (\lambda(x, z+h) \\
& + 2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \} \\
V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ \mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \\
& + \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \\
& -(\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} - (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
V_z(x-h/2, z-h/2, \omega) & \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \{ \mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \} + \frac{1}{4h^2\rho(x+h/2, z+h/2)} \\
& + \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_z(z)} \} \\
= & i\omega \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} f_z(x+h/2, z+h/2, \omega)
\end{aligned}$$

C'est ce système que nous avons implémenté et utilisé au cours de cette thèse. Il traduit la propagation des ondes dans le domaine fréquentiel. Ceci constitue la base de la construction de la matrice d'impédance, comme nous le verrons dans la section 2.7. Cependant, avant de poursuivre, détaillons le dernier terme de l'équation : la source sismique et son implémentation numérique à l'aide des différences finies, en temps et en fréquence.

2.6 Valeur et implémentation numérique du terme source

La source est implémentée via les termes f_x et f_z dans les équations 2.21 et 2.26. Comme nous l'avons vu, cette source peut être implémentée dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, via la transformée de Fourier.

2.6.1 Notion de fonction de Green

Lorsque la source correspond à un Dirac spatial et temporel, agissant dans une seule direction ($f_x(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})\delta(t - t_0)$ et $f_z(\mathbf{x}, t) = 0$, où la source est émise en \mathbf{s} à t_0 , les champs de vitesse $V_x(\mathbf{x}, t)$ et $V_z(\mathbf{x}, t)$ sont par définition des fonctions de Green, traduisant la propagation d'une source ponctuelle agissant dans une direction et enregistrée dans une autre direction (qui peut être la même). Dans ce cas, les champs $V_x(\mathbf{x}, t)$ et $V_z(\mathbf{x}, t)$ sont notés :

$$\begin{aligned}
V_x(\mathbf{x}, t) &= G_{xx}(\mathbf{x}, t, \mathbf{s}) \\
V_z(\mathbf{x}, t) &= G_{zx}(\mathbf{x}, t, \mathbf{s})
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Lorsque la source est une force verticale telle que $f_x(\mathbf{x}, t) = 0$ et $f_z(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})\delta(t - t_0)$, les champs $V_x(\mathbf{x}, t)$ et $V_z(\mathbf{x}, t)$ sont notés :

$$\begin{aligned}
V_x(\mathbf{x}, t) &= G_{xz}(\mathbf{x}, t, \mathbf{s}) \\
V_z(\mathbf{x}, t) &= G_{zz}(\mathbf{x}, t, \mathbf{s})
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Un Dirac temporel correspond à une contribution égale de toutes les fréquences dans le domaine fréquentiel. La même notion de fonction de Green existe pour un Dirac spatial pour une fréquence donnée ω . Dans ce cas, la source vaut $f_x(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ et $f_z(\mathbf{x}, \omega) = 0$, où la source est émise en \mathbf{s} à la fréquence ω . Dans ce cas, les champs $V_x(\mathbf{x}, \omega)$ et $V_z(\mathbf{x}, \omega)$ sont notés :

$$\begin{aligned} V_x(\mathbf{x}, \omega) &= G_{xx}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\ V_z(\mathbf{x}, \omega) &= G_{zx}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Si la source vaut $f_x(\mathbf{x}, \omega) = 0$ et $f_z(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$, où la source est émise en \mathbf{s} à la fréquence ω , les champs $V_x(\mathbf{x}, \omega)$ et $V_z(\mathbf{x}, \omega)$ sont notés :

$$\begin{aligned} V_x(\mathbf{x}, \omega) &= G_{xz}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\ V_z(\mathbf{x}, \omega) &= G_{zz}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Pour des milieux homogènes, des solutions analytiques des fonctions de Green ont été établies par Morse & Feshbach (1953); Hudson (1980).

2.6.2 Linéarité des équations de propagation des ondes par rapport à la source

Notons que les équations 2.21 et 2.26 sont linéaires par rapport à la source. En effet, ces équations montrent qu'une source deux fois plus forte donnera lieu à des vitesses de déplacement du sol deux fois plus importantes. De même, une source S composée de deux sources S^1 et S^2 donne des vitesses de déplacement du sol égales à $v_x = v_x^1 + v_x^2$ et $v_z = v_z^1 + v_z^2$, où v_x^1 et v_z^1 sont les vitesses de déplacement horizontal et vertical du milieu pour la source S^1 et v_x^2 et v_z^2 , pour la source S^2 .

2.6.3 Implémentation numérique de la source

Physiquement, la source peut être par exemple une force ponctuelle, une explosion ou un double couple de forces. Dans tous les cas, la source est discrétisée spatialement sur la grille de différences finies, faisant apparaître une combinaison linéaire de forces dans certains cas. En effet, une explosion peut être modélisée numériquement par 2 couples de forces opposées, agissant dans des directions perpendiculaires. Grâce à la linéarité du problème direct par rapport à la source, une explosion au point (x, z) nommée $E(x, z)$ est ainsi modélisée spatialement par la superposition de 4 forces :

$$E(x, z) = f_x(x, z) - f_x(x - h, z) + f_z(x, z) - f_z(x, z - h) \quad (2.60)$$

Numériquement, la source est implémentée à l'aide d'une gaussienne spatiale normalisée, permettant de l'étaler numériquement sur plusieurs points. En effet, certains essais numériques ont montré qu'avec le stencil de Saenger et al. (2000), une source numérique implémentée en un seul point, sur la grille des contraintes par exemple, pose des problèmes d'excitation de la grille numérique contenant les vitesses. Il faut alors étaler la source localement de manière à exciter les deux grilles portant les deux champs. Des tests numériques ont montré qu'un écart-type de la gaussienne de h ou $2h$ suffit.

La profondeur de la source conditionne l'apparition des ondes de surface. Les exemples permettant de valider l'implémentation de la surface libre (figures 2.9 et 2.10) comportent des sismogrammes obtenus avec des sources proches de la surface libre. Lorsque la source est plus profonde, l'amplitude des ondes de surface diminue.

Après avoir présenté la source sismique, passons maintenant à la résolution du problème direct.

sous la forme :

$$X(t) = (I - dt \tau_{PML})X(t - dt) + AdtX(t - dt/2) + dtf \quad (2.61)$$

où la matrice \mathcal{A} contient les dérivées partielles premières des champs. Ici τ_{PML} est un vecteur contenant le coefficient d'atténuation générique lié aux PML, I est la matrice identité et f est un vecteur contenant les forces appliquées pour chaque sous-champ. \mathcal{A} est une matrice creuse, dont les coefficients non nuls sont situés près de la diagonale.

Si le système précédent est transformé en système elliptique contenant les vitesses, le nombre de champs est réduit (seuls V_{xx} et V_{xz} , V_{zx} et V_{zz} interviennent) et le système s'écrit à l'aide d'une matrice \mathcal{B} de taille $(4 * nxe * nze)^2$:

$$X(t) = 2\eta_{PML}^1 X(t - dt) - \eta_{PML}^2 X(t - 2dt) + \mathcal{B}dt^2 X(t - dt) \quad (2.62)$$

où la matrice \mathcal{B} contient les dérivées partielles secondes des champs. Les vecteurs η_{PML}^1 et η_{PML}^2 s'expriment en fonction des coefficients PML appliqués aux champs et de dt . \mathcal{B} est une matrice creuse, dont les coefficients non nuls sont également situés près de la diagonale.

Les matrices construites \mathcal{A} et \mathcal{B} sont de taille conséquente mais creuses et ne sont jamais construites dans la pratique pour cette raison. Pour un temps t donné, les équations 2.47 et 2.48 sont résolues en stockant les valeurs des 10 champs à chaque incrémentation en temps de $dt/2$: les champs calculés en $t - dt$ sont stockés en mémoire, ainsi que les autres champs permettant d'écrire les dérivées spatiales calculées à $t - dt/2$. Nous allons voir que ce n'est pas le cas en fréquence.

2.7.3 Résolution numérique des équations dans le domaine fréquentiel

Grâce à la simplicité de l'implémentation numérique des PML en fréquence, le système composé des équations 2.55 et 2.56 peut être exprimé sous la forme d'un système du type (Marfurt, 1984; Pratt et al., 1998) :

$$W X = S \quad (2.63)$$

où W est une matrice de taille $(2 * nze * nxe)^2$. Elle dépend des paramètres physiques du milieu comme les paramètres de Lamé et la masse volumique par exemple, de la fréquence considérée et des coefficients PML. X est un vecteur de taille $2 * nze * nxe$ (figure 2.13) et contient les champs recherchés V_x et V_z . S est un vecteur de taille $2 * nze * nxe$ contenant les sources. nxe et nze étant le nombre de points du milieu dans les directions x et z . La structure de la matrice d'impédance est présentée sur la figure 2.13.

En raison du choix du stencil de Saenger et al. (2000), chaque ligne de la matrice d'impédance contient 18 coefficients non nuls (voir section 2.5.3). C'est donc une matrice creuse. Le nombre de coefficients non nuls est lié directement au choix du stencil de différences finies et à l'ordre des opérateurs. Afin de résoudre numériquement l'équation matricielle 2.63, la largeur de la bande de coefficients non nuls doit être minimisée. Ainsi, un schéma numérique à l'ordre 4 requiert un temps de calcul plus long qu'un schéma numérique à l'ordre 2. Ceci constitue également un argument en faveur du stencil de Saenger et al. (2000). Stekl & Pratt (1998) construisent également une matrice d'impédance, basée sur le stencil de Jo et al. (1996) dans lequel les dérivées spatiales sont calculées à partir d'une combinaison linéaire d'un stencil tourné et non tourné.

Si la source S est une force ponctuelle agissant dans une direction donnée, nous pouvons écrire : $W W^{-1} = I$, où I est la matrice identité. Ceci indique que les colonnes de W^{-1} contiennent les fonctions de Green du type $G_{ij}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})$ définies dans la section 2.6.1, selon (Pratt et al., 1996; Pratt, 1999; Pratt et al., 1998; Stekl & Pratt, 1998). D'après le principe de réciprocité (Aki & Richards, 2002), $G_{ij}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) = G_{ji}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{x})$. Ceci signifie que les colonnes de W^{-1} sont égales à ses lignes, et donc que W^{-1} est symétrique. W est donc également symétrique. Ceci est valable uniquement pour les zones où les ondes se propagent réellement, *i.e.* en dehors des zones PML.

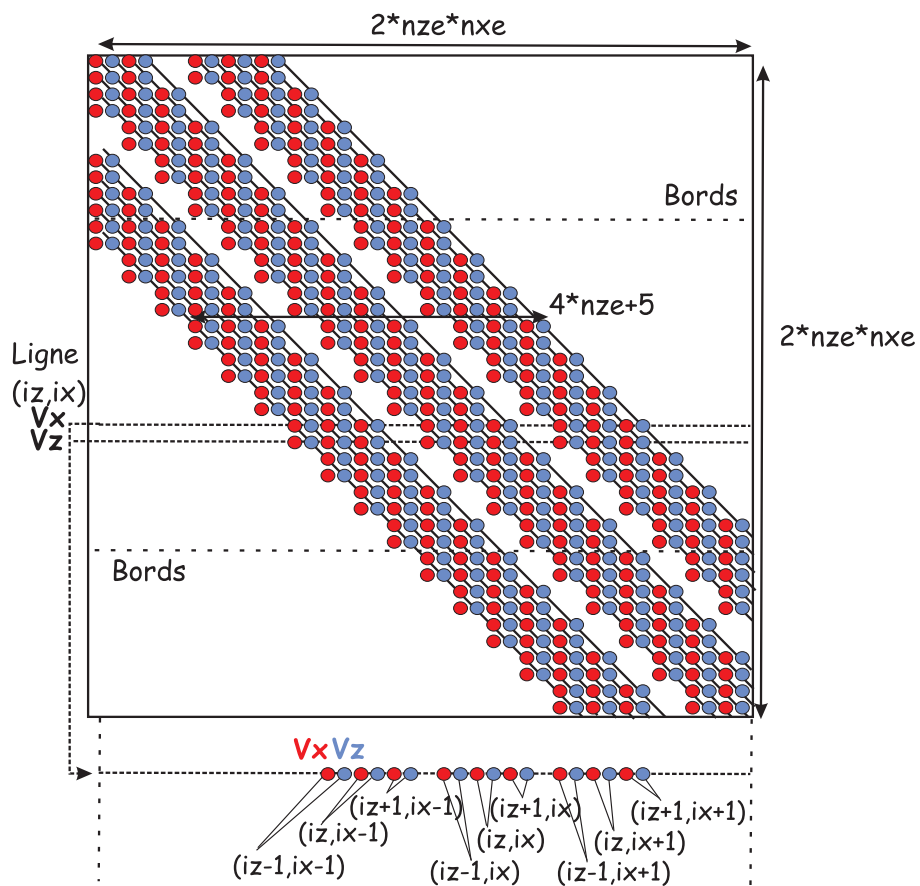


FIG. 2.13: Structure de la matrice d'impédance X pour la formulation elliptique fréquentielle

Milieu considéré	V_p (m/s)	V_s (m/s)	$\rho(10^3kg/m^3)$
Milieu 1	888	431	1,6
Milieu 2	1350	606	1,9
Air (surface libre et cavité)	0	0	10^{-6}
Zone altérée	444	200	1,2

TAB. 2.1: Valeur des paramètres du milieu

2.7.4 Résolution de l'équation matricielle en fréquence

Ce système est résolu par une décomposition LU de la matrice W , où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel MUMPS écrit par Amestoy et al. (2000, 2001). Le schéma numérique est le suivant. Après avoir décomposé W en LU , le système $W X = S$ équivaut à $(LU) X = S$ ou $L(UX) = S$. Soit $Y = UX$. Nous résolvons $Y = L^{-1}S$ par une méthode de substitution, puis $X = U^{-1}Y$ par la même méthode.

Le choix de cette méthode de résolution directe est basée sur plusieurs arguments. Tout d'abord, une décomposition directe du système est effectuée, en opposition à une décomposition itérative (avec des méthodes du type LSQR (Paige & Saunders, 1982)), en raison du grand nombre de sources dans les acquisitions sismiques (Stekl & Pratt, 1998). Ensuite, en raison de la présence des PML, la matrice W n'est pas symétrique. Il n'est donc pas possible d'utiliser des méthodes basées sur l'utilisation de la symétrie de la matrice pour accélérer la convergence.

Les acquisitions multisources et multirécepteurs sont ainsi modélisées efficacement, par substitutions successives de la matrice S et résolutions successives du système. En effet, le coût de calcul de la décomposition LU demande 80% du temps total de calcul, alors que les substitutions successives n'en requièrent que 20%. Avec une méthode itérative, le coût de calcul aurait été trop important pour des acquisitions multisources et multirécepteurs.

2.8 Exemples numériques de résolution de l'équation matricielle

Dans ce qui suit, des simulations numériques de propagation des ondes dans le domaine fréquentiel sont présentées. Les paramètres du milieu que nous avons considéré sont issus d'une expérience de détection de cavités souterraines, à proximité immédiate d'une voie de chemin de fer, à côté de Chaulnes (Picardie, France) (Leparoux & Abraham, 2002; Leparoux et al., 2002a). Ils ont été établis par Demand (2002) et sont présentés dans le tableau 2.1.

La source explosive est un Ricker de fréquence centrale 88 Hz (figure 2.14). L'énergie est principalement concentrée entre 10 et 200 Hz. Nous avons donc choisi de simuler la propagation des ondes pour des fréquences entre 10 et 200 Hz, soit pour des pulsations ω comprises entre $10 * 2 * \pi = 62,83Hz$ et $200 * 2 * \pi = 1256,64Hz$. Cette bande de fréquence est réaliste, d'autant que les géophones utilisés enregistrent les ondes pour des fréquences supérieures à 14 Hz.

Le pas d'échantillonnage spatial est de 0.1m dans les directions horizontales et verticales. Ceci permet de satisfaire la condition de 30 points par longueur d'onde recommandée par Bohlen & Saenger (2003); Saenger & Bohlen (2004) pour modéliser correctement la surface libre. Les milieux de propagation contiennent 301 points dans les directions horizontales et verticales, donc simulent un milieu large et profond de 30 m. Les couches PML contiennent 20 points et sont donc épaisses de 2 m. Festa & Nielsen (2003) ont montré que, même si l'épaisseur des PML est inférieure à la longueur d'onde, ces dernières assurent néanmoins une atténuation du champ efficace, pour les ondes de volume et les ondes de Rayleigh.

L'échantillonnage temporel choisi à l'aide de la relation de dispersion vaut $dt = 5.10^{-5}s$. Nous avons simulé 2000 pas de temps, soit une durée totale de 0.1 s. En fréquence, $df_{nyq} = 1/(nt_f * dt)$,

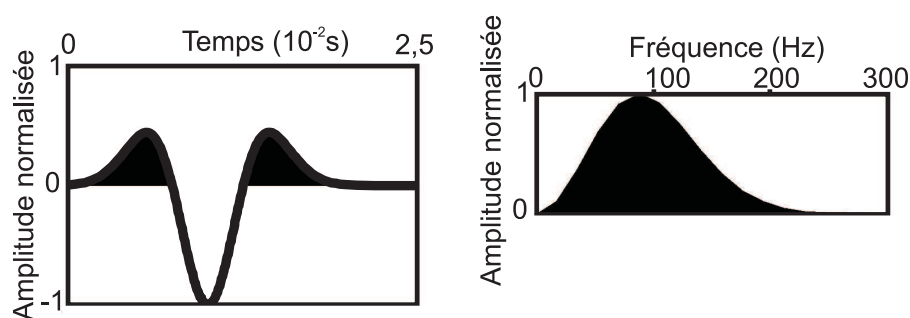


FIG. 2.14: *Ricker temporel (gauche) et contenu fréquentiel (droite)*

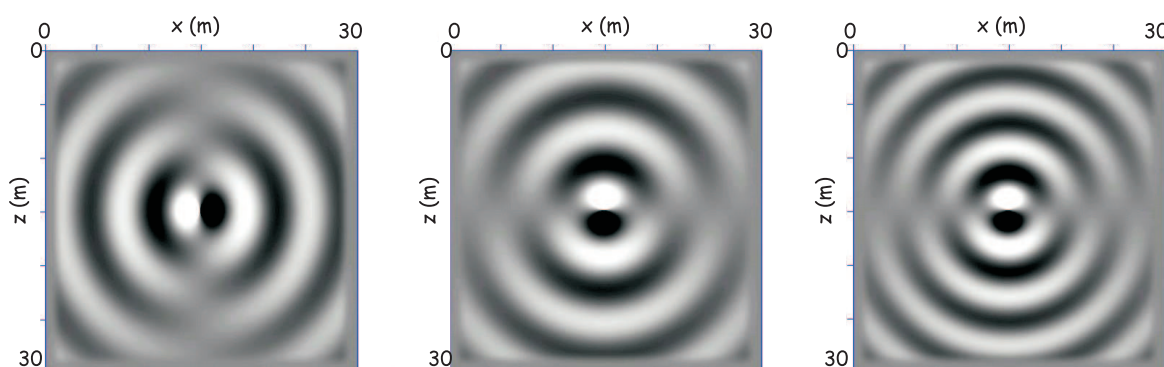


FIG. 2.15: *Carte en fréquence pour la partie réelle de V_x (gauche) et V_z pour une fréquence de 147 Hz (milieu) et V_z pour une fréquence de 195 Hz (droite)*

soit $d\omega_{nyq} = 2\pi/(nt_f * dt) = 61,34\text{Hz}$ (section 2.2.3). Pour couvrir l'intervalle de fréquences choisi, il faut donc simuler 20 composantes fréquentielles, espacées de l'intervalle de fréquence df_{nyq} .

Nous avons tout d'abord considéré un milieu sans surface libre, de manière à illustrer les résultats obtenus (les cartes en fréquence) sur un cas de référence. Puis nous avons introduit la surface libre grâce à la méthode décrite dans la section 2.4. Nous y avons considéré une source profonde, ne générant pas d'onde de surface, puis une source superficielle, donnant lieu à des ondes de surface de Rayleigh. Nous avons également introduit une cavité pleine d'air, ainsi qu'une zone de décompaction du sol. Dans ces deux cas, nous mettons en évidence la dispersion des ondes et les interactions entre cavité, surface libre et zone de décompaction. Enfin, nous avons simulé une surface topographique non plane, de manière à illustrer la complexité de la propagation des ondes de surface dans ce cas.

Milieu sans surface libre

Nous simulons tout d'abord un milieu complètement homogène, dont les propriétés sont celles du milieu 1 dans le tableau 2.1. La figure 2.15 est une carte en fréquence montrant la partie réelle de la composante verticale et de la composante horizontale du champ de vitesse en chaque point du milieu pour une fréquence de 147Hz . Cette dernière a été choisie de manière à montrer la propagation de plusieurs longueurs d'onde dans le milieu.

Le système d'équations 2.55 et 2.56 est résolu en chaque point du milieu. Concrètement, nous avons extrait du vecteur X (équation 2.63) les composantes verticales puis horizontales, pour une source explosive située au centre du milieu.

La figure 2.15 illustre également l'effet de la fréquence dans la propagation. Les franges blanches

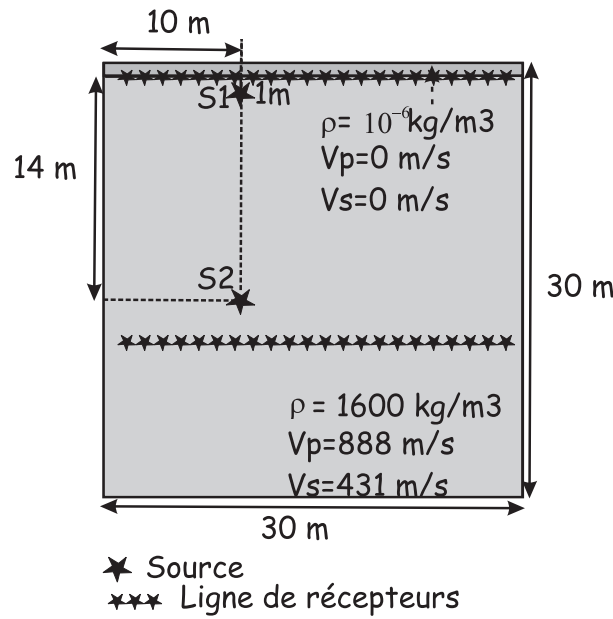


FIG. 2.16: Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre

et noires constituent des oscillations de l'onde et traduisent la propagation spatiale d'une composante sinusoïdale des champs V_x et V_z . Lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde diminue et les franges se rapprochent (figure 2.15).

La carte en fréquence de V_x montre une symétrie du champ selon l'axe Oz , passant par la source. De même, la carte en fréquence de V_z montre une symétrie du champ selon l'axe Ox , passant par la source. Ceci est dû à l'isotropie de la source explosive et du milieu. De plus, ceci illustre l'efficacité des PML puisqu'aucune onde réfléchi venant des PML n'apparaît.

Milieu avec surface libre et source profonde

Nous avons ensuite implémenté la surface libre 2.4 et placé une source explosive au centre du milieu (figure 2.16). Les cartes en fréquence obtenues sont présentées sur la figure 2.17. Par rapport à la figure 2.15, des phénomènes de superposition et d'interférence des ondes apparaissent. Ainsi, la réflexion à la surface libre est clairement visible et se superpose au champ direct. Les cartes en fréquence contiennent toutes les ondes, qu'elles soient réfléchies, directes, converties, réfractées, qui existent dans le milieu à une fréquence donnée. Aucune onde de surface n'apparaît à la surface libre car la source est trop profonde. Notons que la signature de la surface libre est différente selon la composante du champ considérée.

La superposition de toutes les composantes fréquentielles en un point, à l'aide de la transformée de Fourier inverse (section 2.2.1), donne la vitesse de déplacement horizontal et vertical pour chaque point du milieu. Les figures 2.18 et 2.19 illustrent l'équivalence entre les sismogrammes temporels (carte en temps) et les sismogrammes issus de la sommation des contributions de toutes les fréquences. Les récepteurs se situent dans ce cas à 3m en-dessous de la source (figure 2.16). Ils sont espacés régulièrement de 1m et sont placés sur toute la largeur du modèle. Dans ce qui suit, nous montrerons donc les cartes en fréquence et les sismogrammes, afin de bien comprendre les phénomènes physiques sous-jacents.

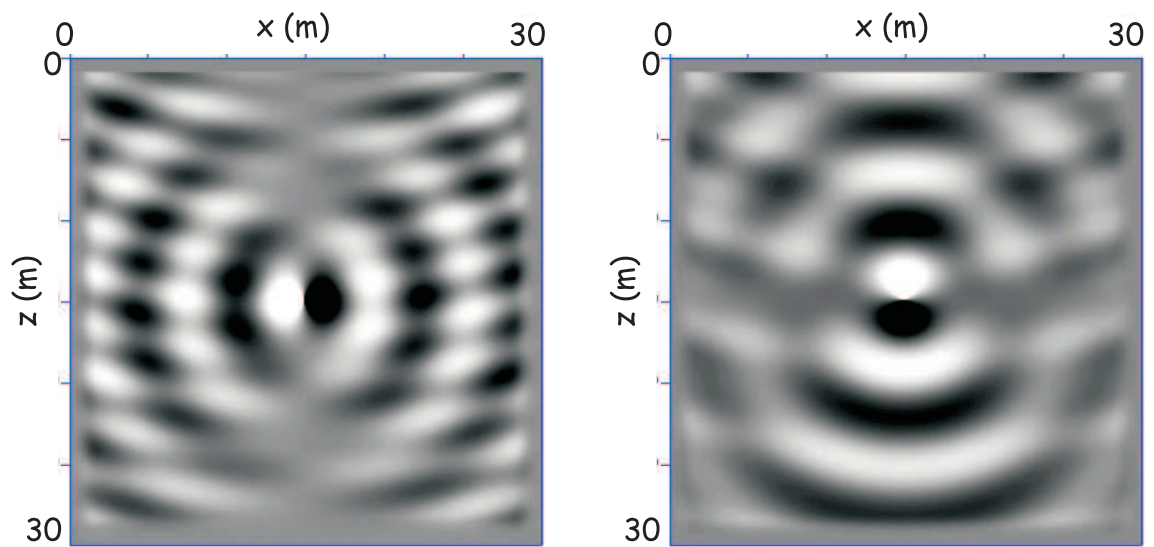


FIG. 2.17: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147Hz et une source profonde S_2 (figure 2.16) et les récepteurs au-dessous

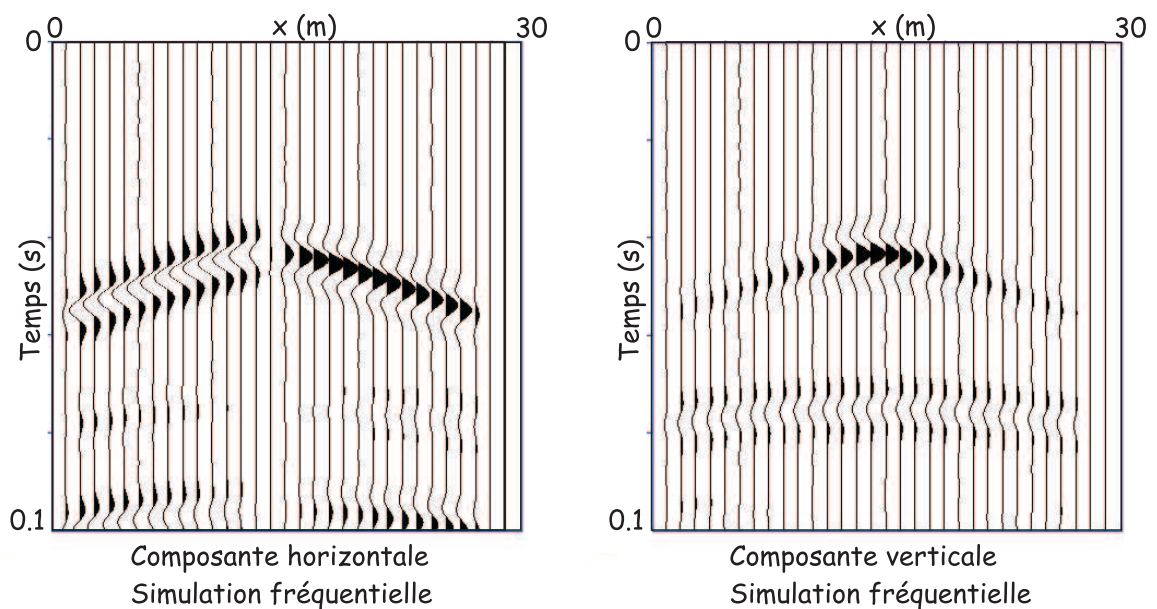


FIG. 2.18: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations fréquentielles pour une source localisée en S_2 et les récepteurs au-dessous (figure 2.16)

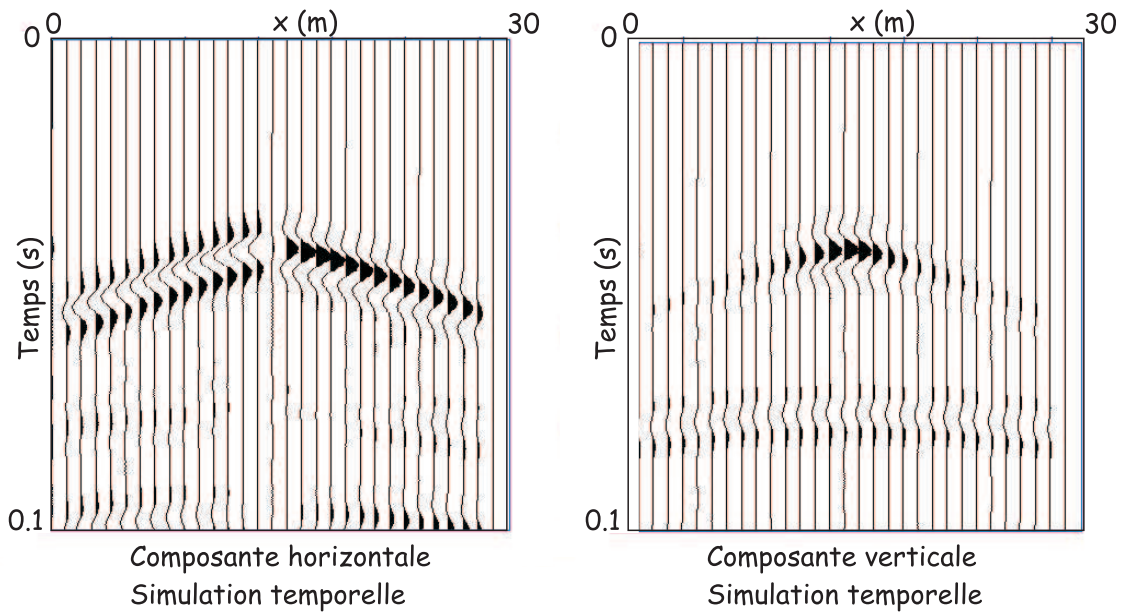


FIG. 2.19: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S_2 et les récepteurs au-dessous (figure 2.16)

Milieu avec surface libre et source superficielle

Si la source est superficielle (figure 2.16), la superposition entre ondes directes et ondes réfléchies est différente en profondeur par rapport au cas précédent. Ondes directes et réfléchies se mélangent en fréquence pour donner des franges dont l'épaisseur varie latéralement en raison des angles d'incidence et de réflexion différents à la surface libre. Près de la surface libre, des ondes de surface sont générées (figure 2.20, source en S_1), elles résultent d'interférences constructives entre ondes P réfléchies et S réfléchies converties à la surface libre. Leur profondeur augmente lors de leur propagation en s'éloignant de la source, ce qui traduit leur construction latérale progressive. Ensuite, elles se propagent dans une épaisseur de sol constante, dépendant de leur fréquence. L'espacement entre leurs franges est plus faible que pour les ondes de volume car ces ondes se propagent plus lentement (voir section 2.1.3). Ceci est également visible sur les sismogrammes (figure 2.21). Il n'y a pas d'onde S car la source est explosive.

Milieu avec surface libre, source superficielle et cavité

Introduisons maintenant une cavité pleine d'air (figure 2.22). Des ondes supplémentaires apparaissent, alors que d'autres sont modifiées ou atténuées par rapport au cas précédent. Afin de quantifier précisément l'influence de la surface libre, les cartes en fréquence avec et sans cavité sont soustraites l'une de l'autre (figures 2.23 et 2.20). La figure 2.24 montre les ondes modifiées entre ces deux cas. A l'aide des simulations temporelles, une interprétation des différentes ondes est proposée (figure 2.24). Notons que les ondes modifiées se réfléchissent également à la surface libre, augmentant ainsi la complexité des phénomènes puisque deux surfaces libres interviennent (celle du sol et celle de la cavité).

Lorsque la fréquence change, l'interaction entre l'onde et la cavité est différente (figure 2.25) puisque le rapport entre taille de la cavité et longueur d'onde change.

Les sismogrammes (figure 2.26) illustrent également la complexité des phénomènes physiques : apparition d'une onde réfléchi au toit de la cavité, perturbation des ondes de volume P directes et des ondes de Rayleigh directes.

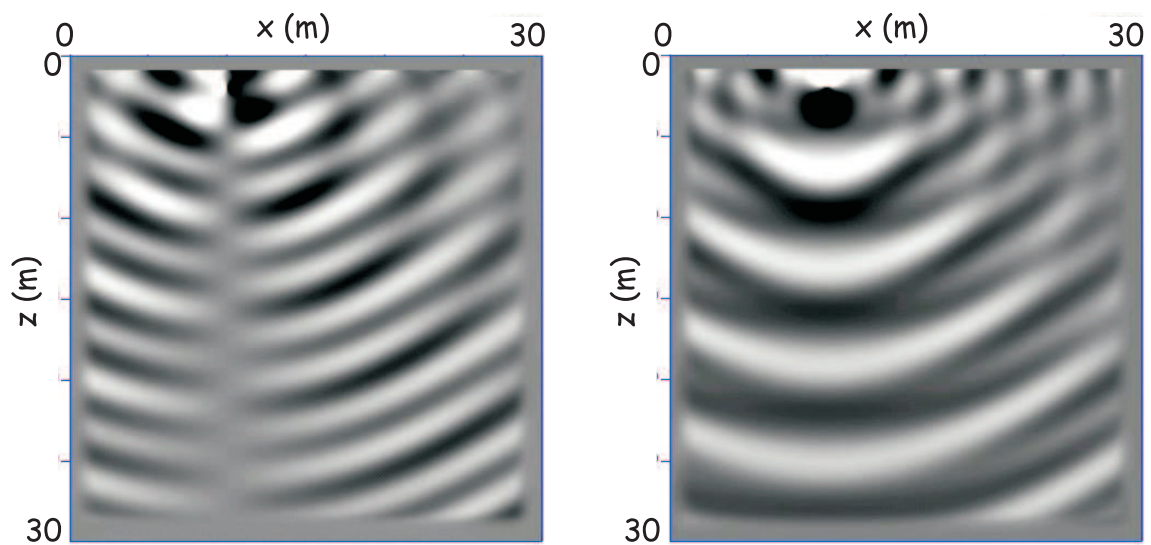


FIG. 2.20: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147Hz et une source superficielle S_1 (figure 2.16)

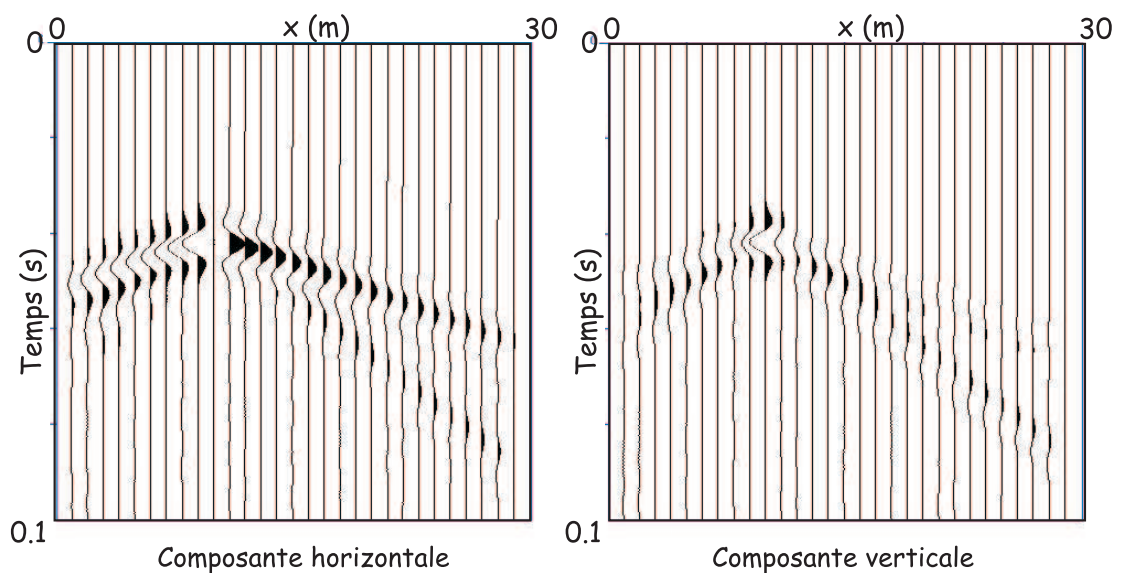


FIG. 2.21: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S_1 et les récepteurs à la surface libre (figure 2.16)

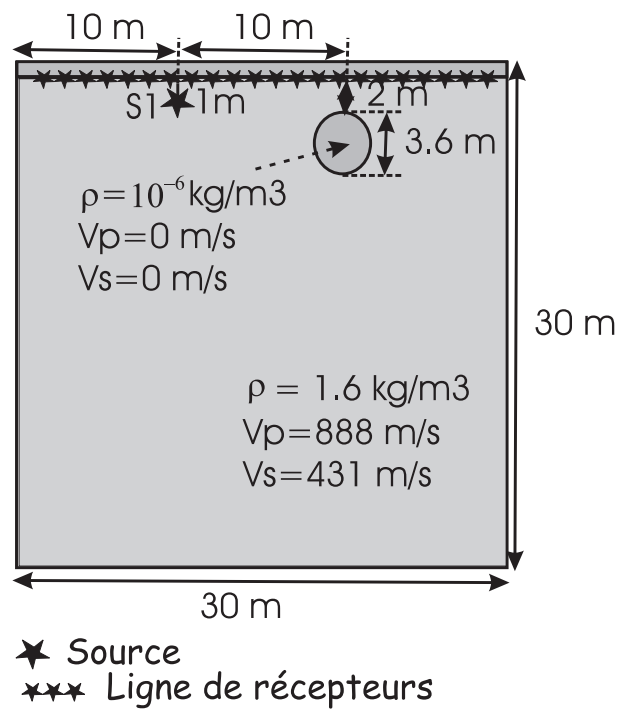


FIG. 2.22: Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre

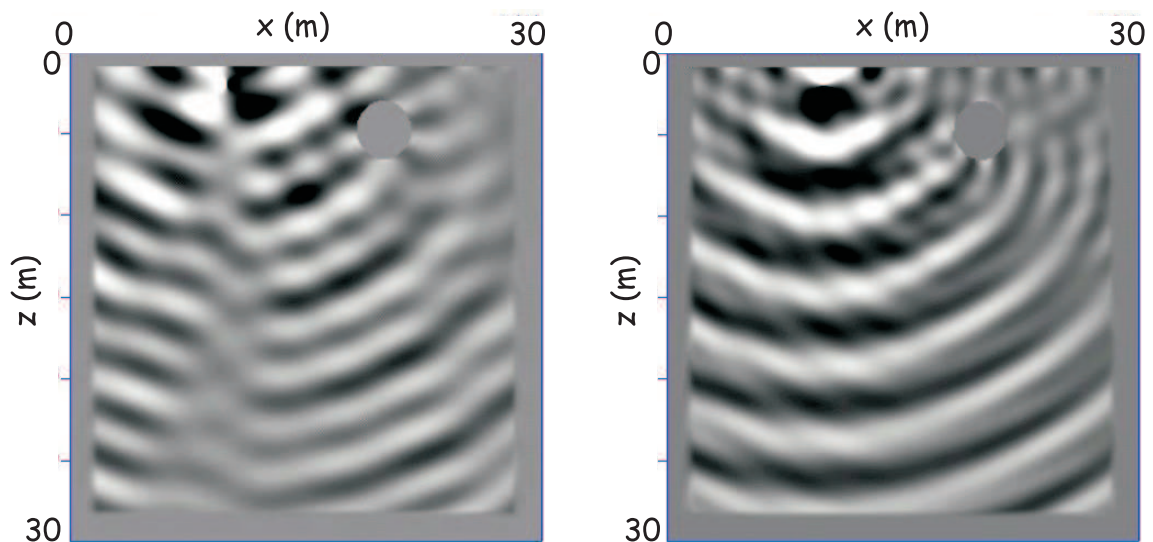


FIG. 2.23: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147 Hz , une source superficielle et une cavité (figure 2.22)

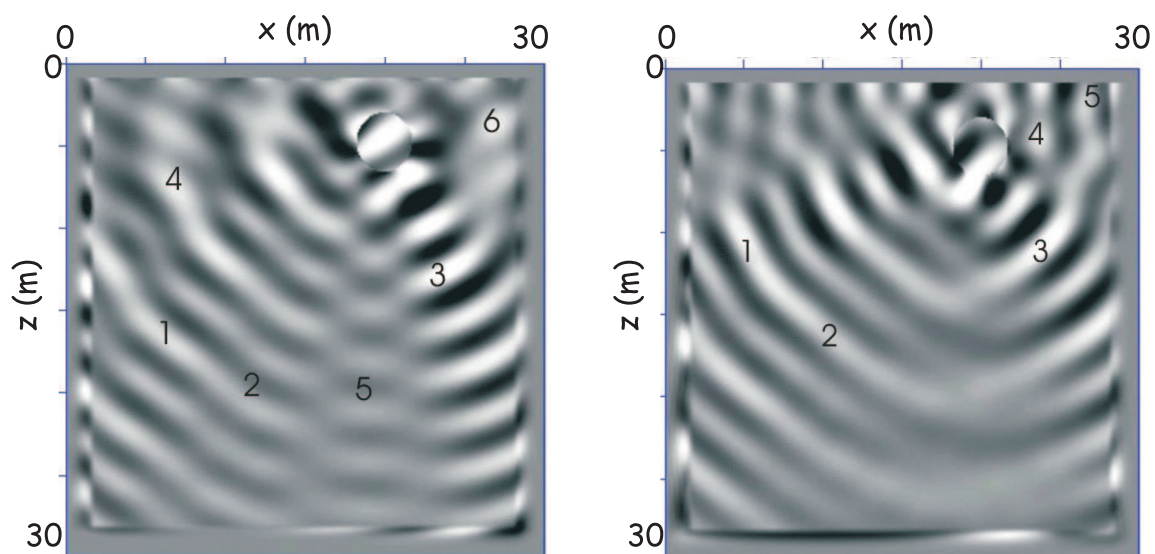


FIG. 2.24: Mise en évidence de l'influence de la cavité par la soustraction des cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) avec une cavité (figure 2.23) et sans cavité (figure 2.20). A droite : Onde 1 : réfléchié de l'onde de volume; onde 2 : réfléchié de l'onde de surface; onde 3 : onde retardée par le passage de la cavité; onde 4 : onde réfléchié sur la cavité puis sur la surface libre; onde 5 : autre réfléchié de l'onde de volume. Onde 6 : onde réfléchié sur le toit de la cavité et onde réfléchié sur le toit de la cavité puis à la surface libre. A gauche : Onde 1 : réfléchié de l'onde de volume; onde 2 : réfléchié de l'onde de surface; onde 3 : onde retardée par le passage de la cavité. Onde 4 : onde réfléchié sur le toit de la cavité. Onde 5 : onde réfléchié sur le toit de la cavité puis sur la surface libre

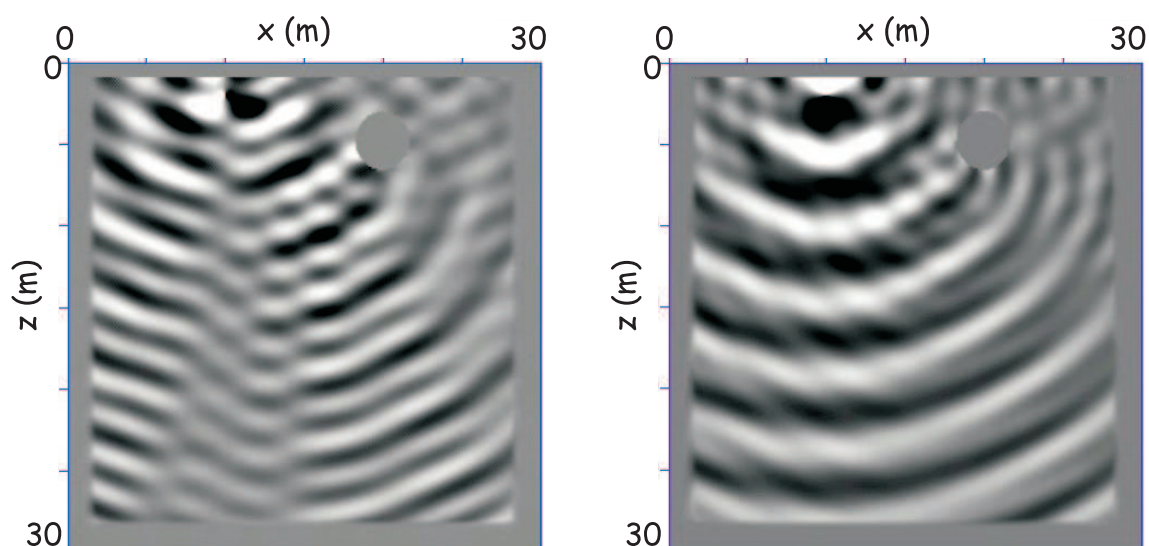


FIG. 2.25: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 195Hz, une source superficielle et une cavité (figure 2.22)

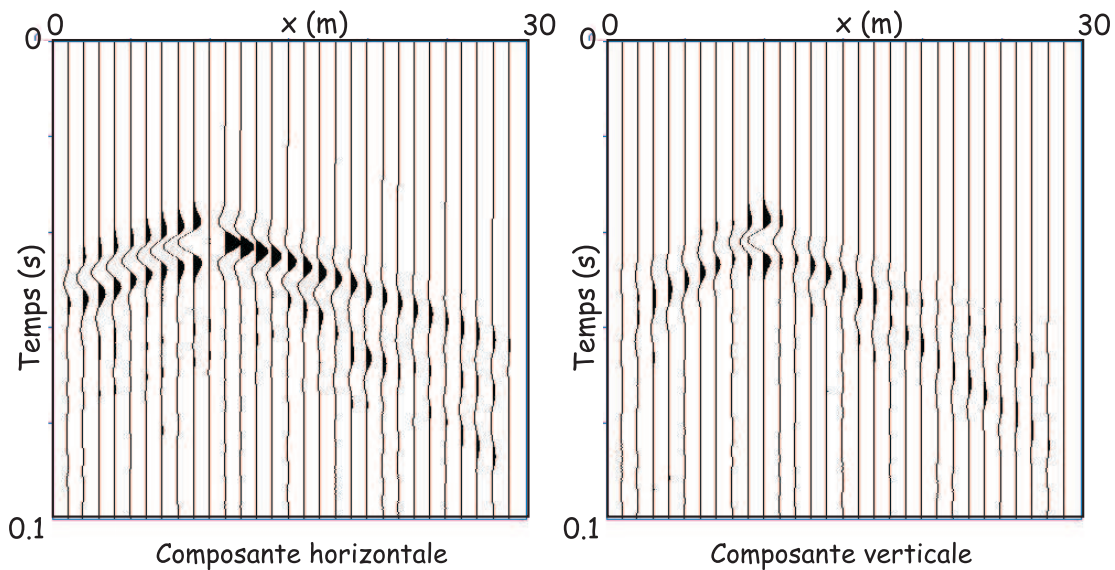


FIG. 2.26: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22)

Le fait que la cavité atténue globalement les ondes après leur passage est utilisé dans la méthode mise au point par le BRGM avec les ondes de surface (Leparoux et al., 2000). En effet, la cavité modifie les ondes de volume et de surface directe. Ces ondes sont réfléchies et diffractées sur la cavité et sur la surface libre proche. Juste à droite de la cavité, le signal est perturbé et il y a une lacune d'énergie, une sorte de zone d'ombre, révélatrice de la présence de la cavité. Plus loin, les ondes réfléchies à la surface libre et/ou sur le toit de la cavité se recombinaient pour donner à nouveau une onde de surface (onde 6 sur V_x , ondes 4 et 5 sur V_z sur la figure 2.29).

Milieu avec surface libre, source superficielle, cavité et zone de décompaction au-dessus de la cavité

Simulons maintenant la présence d'une zone décompactée à l'aplomb de la cavité, comme c'est le cas dans les milieux réels. La figure 2.27 montre la forme et les paramètres physiques du cône d'altération que nous avons simulé. La figure 2.28 montre que le cône d'altération piège de l'énergie juste au-dessus de la cavité, en raison de ses vitesses sismiques plus faibles. La figure 2.29 présente des cartes en fréquence contenant uniquement le champ dû au cône d'altération. Ici encore, une interprétation des différentes ondes modifiées par la présence du cône d'altération est proposée. Néanmoins, les phénomènes tendent à se complexifier fortement en raison des nombreux réflexions (surface libre, cavité) et du ralentissement et du piégeage des ondes dans le cône d'altération.

Les sismogrammes (figure 2.30) illustrent la complexité des phénomènes physiques et le piégeage des ondes dans la zone altérée. Ce phénomène domine les sismogrammes : l'empreinte de la cavité est peu visible. Sur le terrain, ceci signifie que des zones à plus faible vitesse sont préférentiellement détectées. Ceci est très utile en pratique puisque les cavités qui nous intéressent, susceptibles de s'effondrer, présentent toujours une zone de décompaction juste au-dessus. Ainsi, les zones potentiellement dangereuses sont tout d'abord détectées. Il faut ensuite déterminer la présence ou non de la cavité.

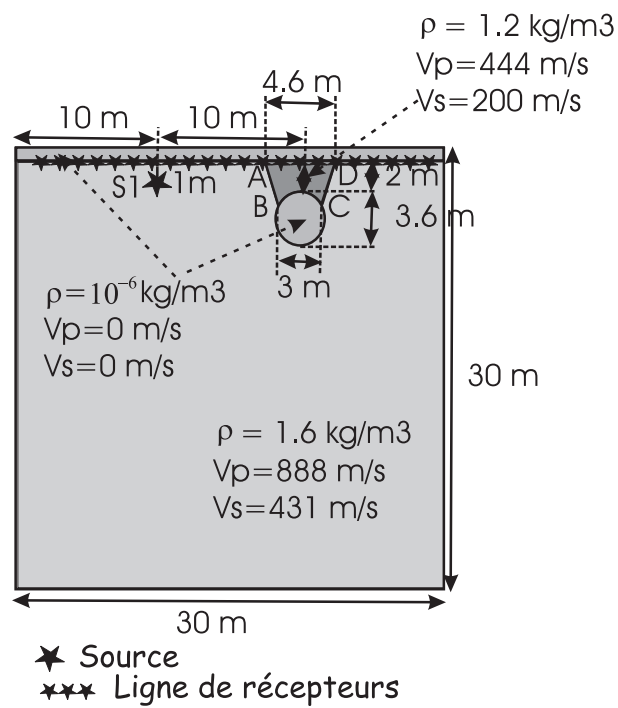


FIG. 2.27: Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre

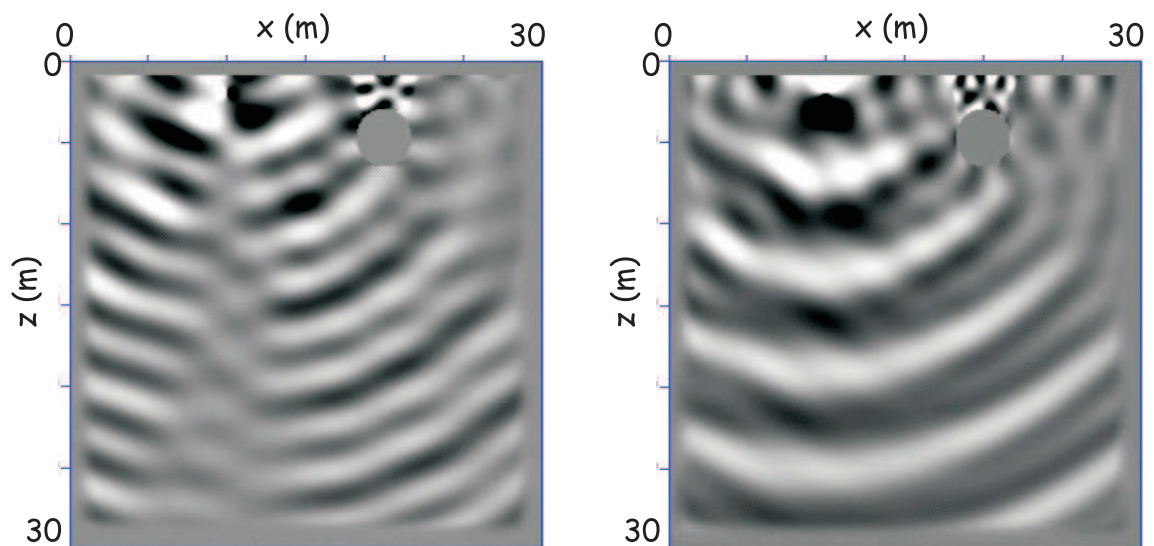


FIG. 2.28: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147 Hz, une source superficielle, une cavité et un cône d'altération (figure 2.27)

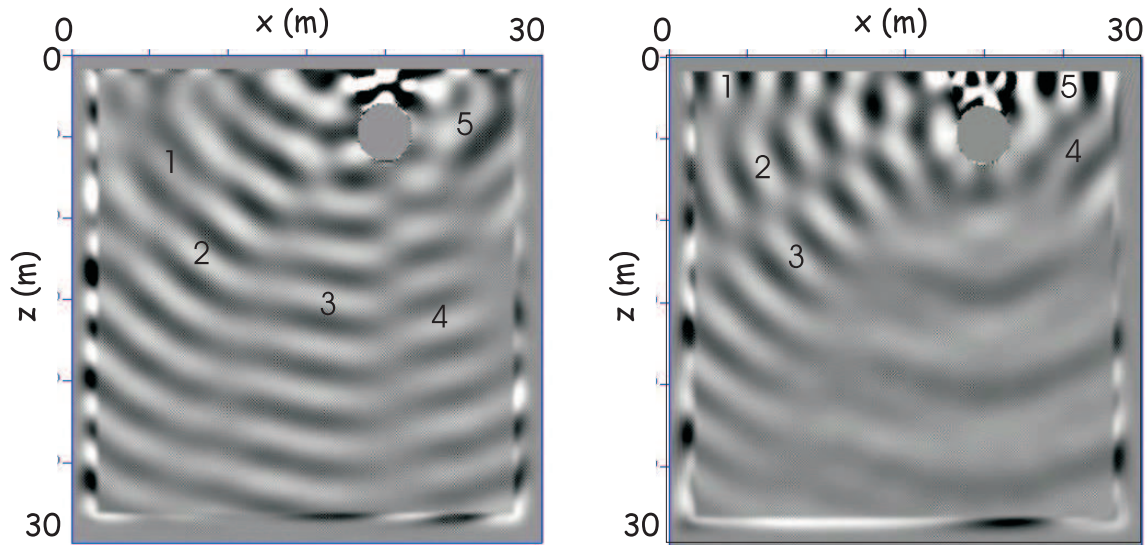


FIG. 2.29: Mise en évidence de l'influence de la cavité par la soustraction des cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) avec une cavité (figure 2.23) et sans cavité (figure 2.20). A droite : Onde 1 : onde réfléchie par le point A sur la surface libre; onde 2 : onde de volume réfléchie sur le segment AB; onde 3 : réfléchie de l'onde de surface sur le segment AB, onde diffractée par B; onde 4 : onde diffractée par C; onde 5 : onde diffractée par le cône d'altération (D) et la surface libre. A gauche : Onde 1 : onde de surface réfléchie par la cône d'altération (A); onde 2 : onde de volume directe réfléchie par la cône d'altération; réfléchie de l'onde de surface par AB, onde diffractée par la cône d'altération (B); onde 4 : onde diffractée par C; onde 5 : onde de surface diffractée par D.

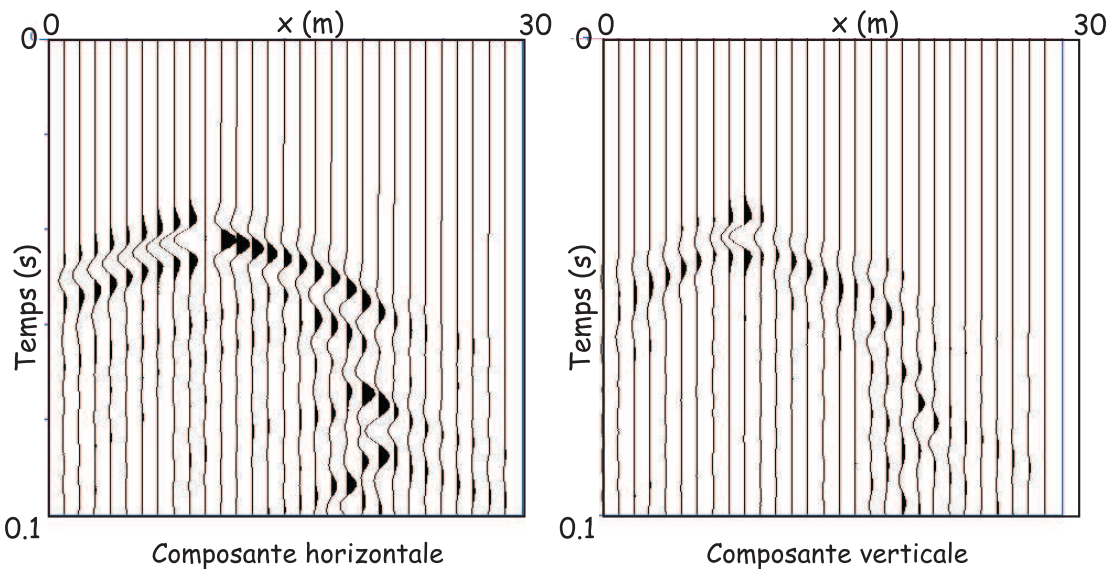


FIG. 2.30: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22)

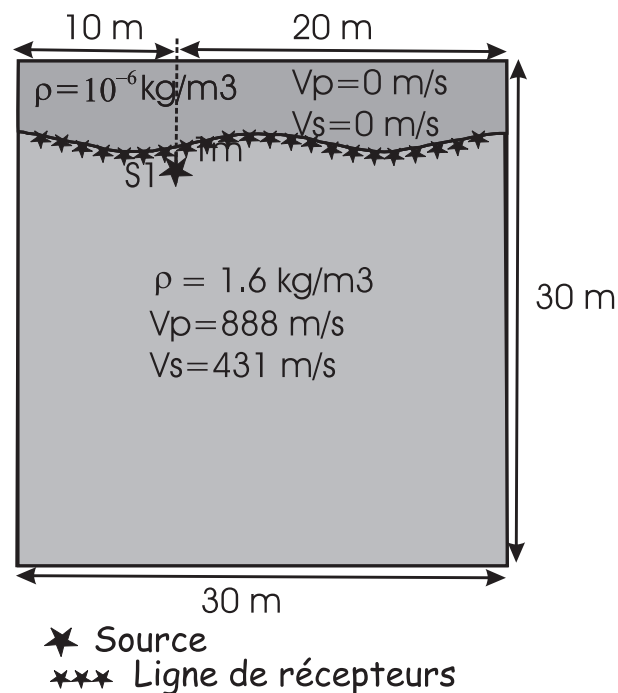


FIG. 2.31: Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre

Milieu avec surface libre, source superficielle et topographie variable

Afin de mettre en valeur l'influence de la topographie, nous avons simulé un milieu contenant une topographie non plane et 2 couches (figure 2.31). La figure 2.32 illustre la sensibilité des ondes de surface à la topographie.

Les sismogrammes (figure 2.33) montrent bien l'influence de la topographie et l'allure différente des ondes de surface dans le cas d'une topographie sinusoïdale. Ainsi, sur le terrain, la connaissance de la topographie est un élément indispensable pour la modélisation de la propagation des ondes, particulièrement des ondes de surface.

Milieu avec surface libre, source superficielle, cavité et topographie variable

Enfin, nous avons simulé un milieu contenant une topographie non plane, deux couches et une cavité (figure 2.34). Dans ce cas, les phénomènes de propagation des ondes deviennent complexes (figure 2.35).

Les sismogrammes (figure 2.36) illustrent l'influence de la topographie, de la cavité et de la couche sous-jacente. Ils se complexifient et l'identification des différentes ondes devient difficile.

2.9 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté le problème direct de la propagation des ondes dans un milieu élastique, linéaire et isotrope. Les particularités de ce milieu sont qu'il est complexe, hétérogène et qu'il contient une surface libre.

Pour modéliser les ondes qui s'y propagent, nous avons développé une méthode numérique basée sur les différences finies (stencil de Saenger et al. (2000)), permettant de modéliser toutes les ondes qui se propagent dans un milieu donné : ondes diffractées, réfléchies, réfractées, converties De plus, nous avons implémenté la surface libre dans ce code numérique, ainsi que des conditions absorbantes aux bords du modèle (PML).

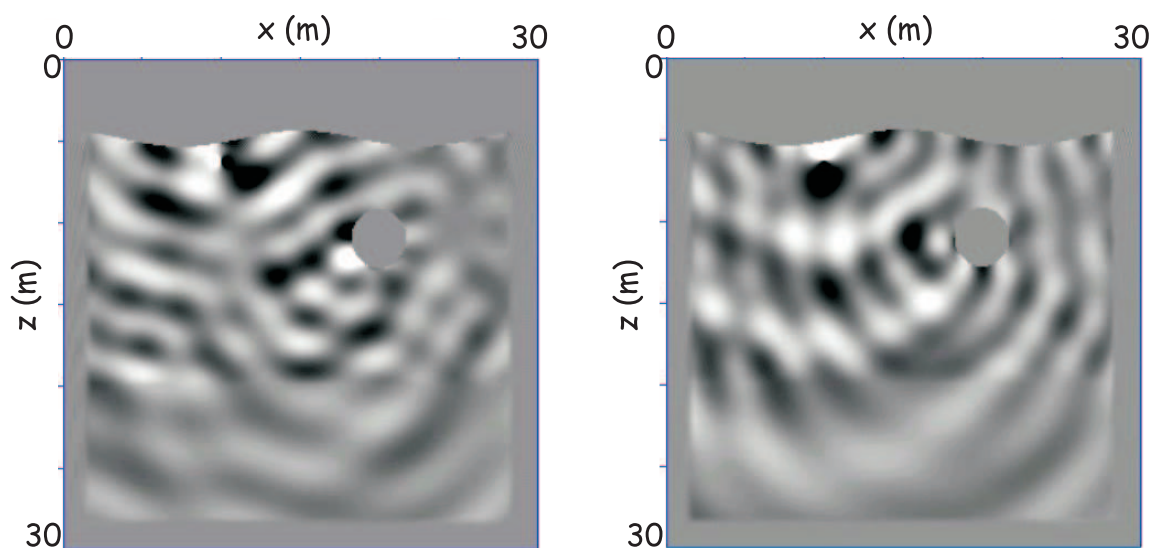


FIG. 2.32: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147Hz, une source superficielle, une topographie non plane et deux couches de terrain (figure 2.31)

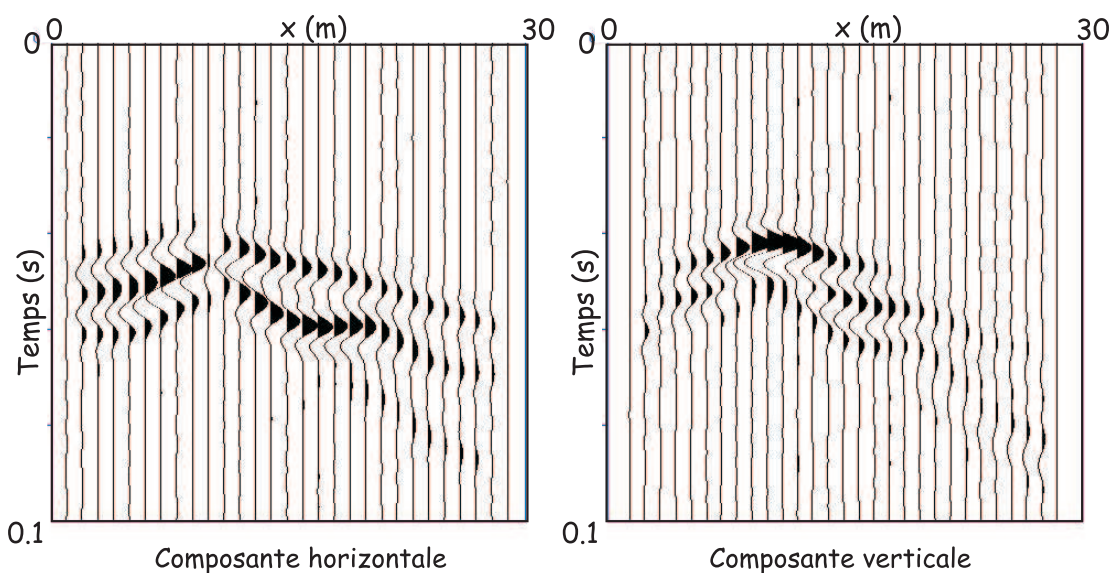


FIG. 2.33: Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22)

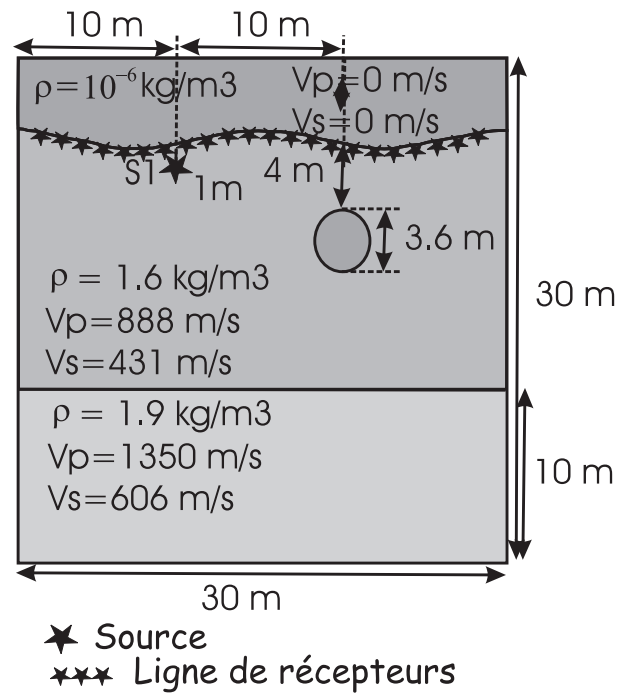


FIG. 2.34: Position de la source et paramètres du milieu utilisés pour la simulation avec surface libre

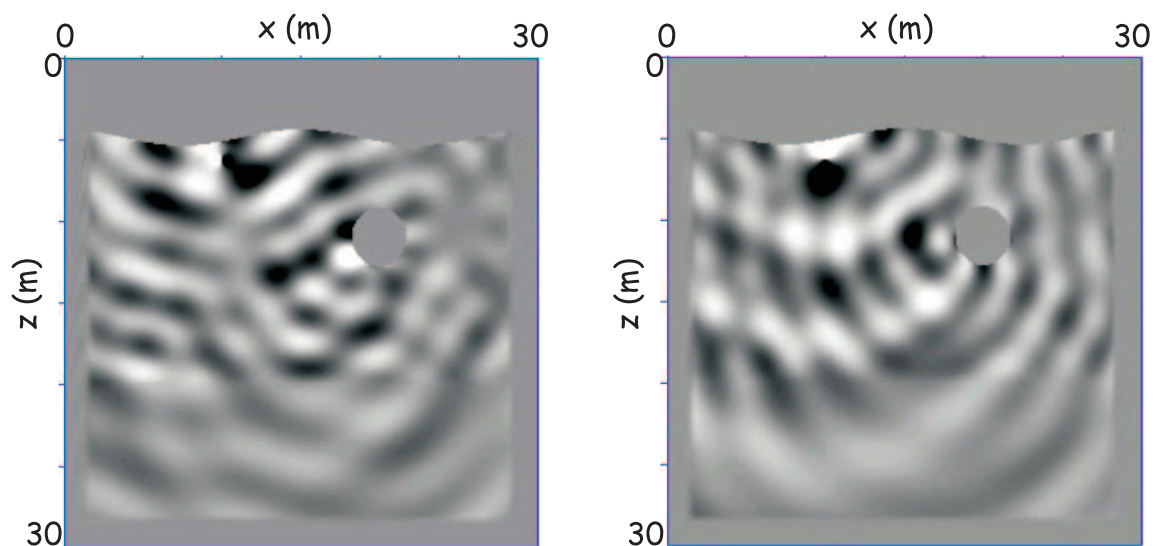


FIG. 2.35: Cartes en fréquence des parties réelles de V_x (gauche) et V_z (droite) pour une fréquence de 147Hz, une source superficielle, une cavité, un topographie non plane et deux couches de terrain (figure 2.34)

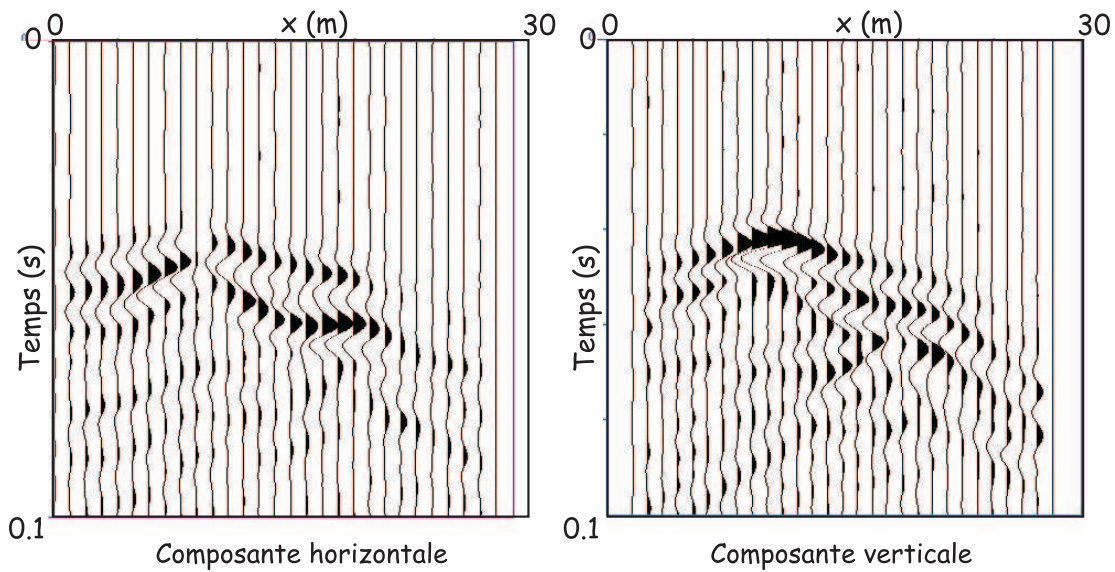


FIG. 2.36: *Sismogrammes horizontaux et verticaux obtenus à partir de simulations temporelles pour une source localisée en S et les récepteurs à la surface libre (figure 2.22)*

Nous avons ensuite exprimé le système discrétisé des équations de propagation des ondes sous forme matricielle, en suivant le formalisme de Pratt et al. (1998); Stekl & Pratt (1998). Après résolution de l'équation matricielle, des cartes en fréquence sont construites, montrant la répartition des ondes dans un milieu pour une fréquence donnée.

Nous avons appliqué cette méthode sur des exemples numériques contenant une surface libre plane ou non, une cavité et un cône d'altération lié à la décompaction du milieu situé au-dessus d'une cavité. Les cartes en fréquence permettent de voir toutes les ondes qui existent pour une fréquence donnée, et d'apprécier la complexité des phénomènes. Ces applications numériques s'intéressent uniquement à la propagation des ondes. Dans l'annexe B, nous étudions également les diagrammes de dispersion et la signature de la cavité sur ces derniers, selon sa taille, sa forme, sa profondeur.

Chapitre 3

Construction d'un macromodèle de vitesse

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, l'inversion des formes d'onde élastiques nécessite la connaissance au préalable d'un modèle de vitesse lisse, contenant les grandes longueurs d'onde du milieu. En effet, la détermination des hétérogénéités locales d'un milieu nécessite celle de la structure lisse du milieu (Robein, 2003; Snieder et al., 1989; Mora, 1988, 1989; Cao et al., 1990; Delprat-Jannaud & Lailly, 2005). Nous présentons ici certaines méthodes d'obtention d'un macromodèle de vitesse. Nous n'en avons développé aucune. Néanmoins, il est nécessaire de les connaître et d'en cerner les potentiels et limites, afin de choisir la méthode la plus adaptée à notre situation pour obtenir un macromodèle de vitesse précis.

Toutes ces méthodes résolvent un problème inverse, visant à retrouver certains paramètres du milieu en extrayant des informations pertinentes des données. D'une méthode à l'autre, le type d'information à modéliser, *i.e.* les données, s'avère différent. Par exemple, les méthodes de tomographie des temps de première arrivée, que nous détaillons dans ce chapitre (partie 3.2.3) s'appuient sur la modélisation des temps d'arrivée (figure 3.1). Les méthodes d'inversion des formes d'onde, que nous présenterons dans le chapitre 4, prennent en compte le temps d'arrivée et l'amplitude de l'onde (figure 3.1). La différence de nature des données modélisées entraîne une connaissance du milieu à des échelles caractéristiques différentes.

Dans cette partie, nous nous focalisons préférentiellement sur les méthodes de résolution des problèmes inverses non linéaires. Nous mentionnerons brièvement le cas des problèmes inverses linéaires. Nous distinguons deux sortes de méthode de résolution de problèmes non linéaires : les méthodes globales (ou semi-globales) et locales. La liste présentée ici n'est pas exhaustive. Elle permet seulement de donner des éléments de compréhension des performances et limites des méthodes couramment utilisées en sismique et en sismologie. Nous donnerons ensuite quelques exemples d'utilisation combinée de méthodes d'inversion linéaires et non linéaires.

Ensuite, nous présenterons plusieurs méthodes d'inversion visant à construire un macromodèle de vitesses à l'aide d'un type spécifique de données. Ainsi, les temps d'arrivée des premières ondes,

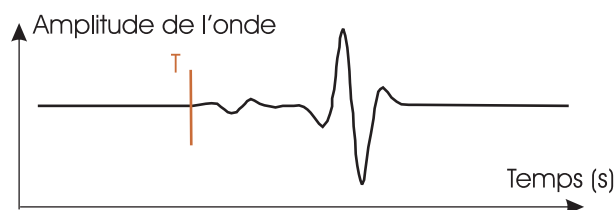


FIG. 3.1: Exemple d'une trace sismique. *T* : Temps d'arrivée de l'onde

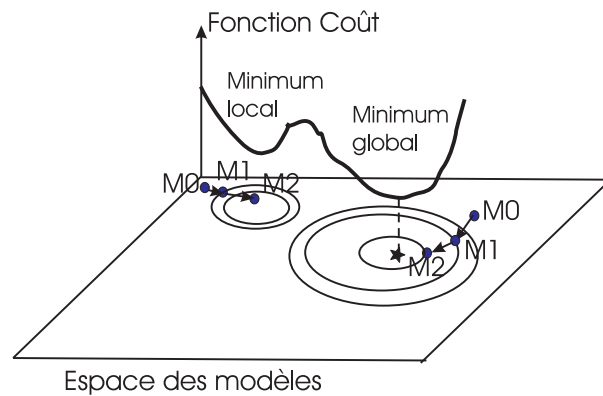


FIG. 3.2: Exemple d'une trace sismique. T : Temps d'arrivée de l'onde

les vitesses de phase des ondes de surface ou les courbes de dispersion sont autant de données permettant de déterminer un macromodèle de vitesse. Ces méthodes s'appuient sur des ondes de volume (analyse de vitesse, tomographie des écarts de temps des premières arrivées, doubles différences, tomographie à fréquence finie) ou bien sur des ondes de surface (SASW, tomographie des ondes de surface, tomographie des temps généralisés). Les domaines d'application concernent des milieux allant de la subsurface (les premiers mètres du sol) à l'échelle globale (imagerie crustale).

3.1 Méthodes générales de résolution du problème inverse non linéaire

En physique, la plupart des problèmes inverses sont non linéaires, *i.e.* les données sont reliées aux paramètres à modéliser par une relation non linéaire. Par exemple, dans le cas de l'inversion des formes d'onde élastiques présentée dans le chapitre 4 de ce manuscrit, le problème inverse est non linéaire. Dans ce cas, les données sont les sismogrammes pour une fréquence donnée et les paramètres sont les vitesses des ondes P et S par exemple.

Les méthodes de résolution d'un problème inverse sont en général basées sur une fonction coût à minimiser. Cette dernière contient les écarts entre données observées et données calculées. Si la norme de l'espace est une norme l^1 Crase et al. (1990), la fonction coût est égale à la somme des valeurs absolues des écarts entre données observées et calculées. Si la norme de l'espace est une norme l^2 , elle est définie comme la somme des carrés des différences entre données observées et calculées. Cette fonction présente la plupart du temps une allure complexe et comporte plusieurs minima (figure 3.2). La résolution du problème direct doit nous mener au minimum global.

La recherche de ce minimum peut s'effectuer localement ou globalement. L'inconvénient du premier type de méthode est sa forte dépendance au modèle initial. L'inconvénient du second type de méthode est son coût de calcul important. Nous allons maintenant détailler ces différentes techniques.

3.1.1 Méthodes globales et semi-globales de résolution du problème inverse

Pour résoudre un problème inverse non linéaire, plusieurs approches sont envisageables. La plus générale, appelée aussi méthode globale, consiste à parcourir tout l'espace des modèles systématiquement ou aléatoirement et à choisir celui ou ceux qui permettent de reproduire les données observées le plus fidèlement possible, *i.e.* de minimiser la fonction coût.

Les méthodes de Monte Carlo (Snieder et al., 1989; Sen & Stoffa, 1995) parcourent aléatoirement l'espace des modèles à la recherche du minimum global. C'est la méthode la plus générale possible. Cependant, elle requiert un coût de calcul important.

D'autres méthodes permettent de ne pas explorer tout l'espace des modèles, mais seulement les zones dans lesquelles la valeur de la fonction coût est plus faible. Ce sont les méthodes semi-globales. Par exemple, les méthodes de recuit simulé (Sen & Stoffa, 1995) permettent de parcourir l'espace des modèles de manière guidée, en explorant plus en détail certaines parties de l'espace des modèles mais évitant de rester bloqué au voisinage d'un minimum local, permettant ainsi à la fonction coût d'augmenter temporairement.

L'algorithme génétique (Sen & Stoffa, 1995; Jin & Madariaga, 1993; Ji & Singh, 2005) est basé sur la combinaison des "bons" modèles entre eux pour créer un nouveau modèle, susceptible d'être encore meilleur. Par exemple, une partie d'un modèle ayant une fonction coût basse est combinée à une autre partie d'un modèle ayant également une fonction coût basse. L'espoir est que le nouveau modèle aura une fonction coût encore plus basse.

L'algorithme de voisinage (Sambridge, 1999a,b) permet également de raffiner l'exploration de certaines parties du milieu et de ne sélectionner que les modèles pour lesquels la fonction coût associée est faible.

3.1.2 Méthodes locales de résolution du problème inverse

Théorie générale d'après Tarantola (1987)

La plupart des méthodes locales de résolution du problème inverse sont basées sur l'approche de Tarantola (1987). Il s'agit de résoudre le problème direct de manière itérative, à l'aide d'une inversion linéaire ou linéarisée. Cette inversion repose sur la connaissance du gradient de la fonction coût, donnant la direction de plus grande pente. Son opposé donne le sens de descente vers le minimum voisin. De plus, dans certains cas, le Hessien peut également être calculé. Il contient la courbure de la fonction coût. Nous allons maintenant formaliser ces notions en suivant l'approche de Tarantola (1987).

La relation générale entre le modèle \mathbf{m} et les données \mathbf{d} peut être exprimée à l'aide de la fonction non linéaire g telle que :

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}). \quad (3.1)$$

La fonction coût peut être exprimée par :

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}), \quad (3.2)$$

où \mathbf{d}_{obs} représente les données observées et $\mathbf{d} = g(\mathbf{m})$ représentent les données calculées dans le modèle \mathbf{m} . Le symbole † correspond à l'opérateur adjoint. Cette fonction peut être pondérée de manière à accroître l'importance de certaines données (Operto et al., 2004). Les différences entre données observées et calculées se nomment les résidus et sont notés $\Delta\mathbf{d}$.

Dans l'approche de Tarantola (1987), la fonction coût est développée au deuxième ordre autour du modèle initial \mathbf{m}_0 à l'aide d'un développement de Taylor-Lagrange :

$$E(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}_0) + \nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} + 1/2\delta\mathbf{m}^\dagger H(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m}, \quad (3.3)$$

où $\delta\mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$ est l'écart entre le modèle initial et le modèle \mathbf{m} , le gradient est noté $\nabla_{\mathbf{m}}E$ et le Hessien H . Cette approximation nécessite que le modèle de départ \mathbf{m}_0 soit proche du minimum recherché. Dans le cas contraire, l'algorithme peut converger vers un minimum secondaire, comme le montre la figure 3.2.

Dans l'approche linéaire, ce développement est considéré comme exact et la fonction coût est parabolique. En revanche, dans l'approche non linéaire, ce développement est une approximation et la fonction coût est considérée comme localement parabolique. Nous détaillons ici la méthode générale de l'inversion non-linéaire. La démarche est également valable pour l'inversion linéaire.

Un minimum de E est atteint lorsque l'incrément $\delta\mathbf{m}$ vérifie l'équation suivante :

$$H(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} = -\nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}_0). \quad (3.4)$$

Les dérivées de Fréchet sont notées $B_0 = (\partial g/\partial\mathbf{m})(\mathbf{m}_0)$. La taille de B_0 est donc $p * n$ où p est le nombre de paramètres et n le nombre de données. En dérivant l'équation 3.2 par rapport au modèle \mathbf{m} , nous obtenons :

$$\nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}) = \left\{ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}} \right\}^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}). \quad (3.5)$$

Lorsque $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, le premier terme du membre de droite est l'opérateur adjoint des dérivées de Fréchet et le second correspond aux résidus des données $\Delta\mathbf{d}$. Donc le vecteur gradient peut être exprimé par l'opérateur adjoint B_0^\dagger appliqué aux résidus $\Delta\mathbf{d}$ (Tarantola, 1987). Le gradient de la fonction coût donne la direction de descente pour minimiser la fonction coût.

En dérivant encore une fois la fonction coût par rapport au modèle \mathbf{m} , nous obtenons l'expression du Hessien :

$$H(\mathbf{m}) = \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial\mathbf{m}^2} \right\}^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + \left\{ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}} \right\}^\dagger \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}}. \quad (3.6)$$

Le premier terme est généralement supprimé dans les inversions non linéaires (Tarantola, 1987), puisqu'il est négligeable sur les résidus sont faibles ou si le problème est peu non linéaire. De plus, ce terme est très coûteux à calculer. Nous ne conservons donc que le second terme $B_0^\dagger B_0$ dans l'espace des modèles (Pratt et al., 1998).

Nous obtenons ainsi les équations normales :

$$\Re[B_0^\dagger B_0]\delta\mathbf{m} = \Re[B_0^\dagger \Delta\mathbf{d}], \quad (3.7)$$

où \Re est la partie réelle.

L'utilisation de la partie réelle permet de prendre le conjugué de l'expression et d'obtenir :

$$\Re[B_0^\dagger \Delta\mathbf{d}] = \Re[B_0^t \Delta\mathbf{d}^*], \quad (3.8)$$

où B_0^t est la transposée de B_0 et les résidus rétropropagés sont notés $\Delta\mathbf{d}^*$. Nous verrons la signification de ce terme pour l'inversion des formes d'onde dans la section 4.1.3.

De même, nous pouvons écrire :

$$\Re[B_0^\dagger B_0] = \Re[B_0^t B_0^*] \quad (3.9)$$

Nous verrons également la signification physique de ce terme pour l'inversion des formes d'onde dans la section 4.4.4.

Ainsi, en utilisant les équations 3.8 et 3.9, l'équation 3.7 devient :

$$\Re[B_0^t B_0^*]\delta\mathbf{m} = \Re[B_0^t \Delta\mathbf{d}^*], \quad (3.10)$$

Méthodes de Newton, Gauss-Newton, du gradient et du gradient conjugué

Méthode de Newton et de Gauss-Newton $B_0^\dagger B_0$ renseigne sur la quantité dont il faut se déplacer dans l'espace des modèles pour atteindre le minimum, *i.e.* sur le pas de descente. Il correspond à un opérateur de filtre spatial, prenant en compte les effets de bande passante limitée et d'extension limitée du dispositif (Lambaré et al., 2003; Pratt et al., 1996).

Lorsque l'expression complète du Hessien est utilisée (équation 3.6), l'inversion est dite "full Newton" (Tarantola, 1987). Lorsque seule la partie $B_0^\dagger B_0$ du Hessien est utilisée, c'est une inversion de Gauss-Newton (Tarantola, 1987).

La matrice $B_0^\dagger B_0$ contient $(p * m) * (p * m)$ coefficients. Dans les cas réels, cette matrice a donc une taille considérable. De plus, lorsque le nombre de degrés de liberté est important, l'inversion de cette matrice devient très complexe. Dans de nombreux cas, seule la partie diagonale de $B_0^\dagger B_0$ est conservée (Ravaut, 2003; Operto et al., 2004).

Méthode du Gradient La méthode du gradient consiste à considérer que $B_0^\dagger B_0$ est égale à αI où α est un scalaire et I est la matrice identité (Tarantola, 1987). Le pas de descente α , qui remplace le Hessien, peut être trouvé par essai-erreur ou par recherche linéaire (Tarantola, 1987).

Méthode du Gradient conjugué Polak (1971); Mora (1988); Luo & Schuster (1991); Pica et al. (1990); Kormendi & Dietrich (1991); Mulder & Plessix (2004) utilisent une méthode de gradient conjugué pour trouver le minimum de la fonction coût. D'après Tarantola (1987), l'idée est la suivante. Etant donné un modèle initial \mathbf{m}_0 et le gradient correspondant γ_0 , le modèle \mathbf{m}_1 est trouvé le long de la direction de γ_0 . Au lieu de chercher \mathbf{m}_2 le long de la direction de γ_1 , \mathbf{m}_2 est recherché dans le sous-espace généré par γ_0 et γ_1 . Cette méthode permet d'accélérer la convergence vers le minimum (Tarantola, 1987).

Inversion linéaire ou linéarisée

Inversion linéaire Dans l'inversion linéaire, la fonction coût (équation 3.3) est considérée comme parabolique. Le modèle \mathbf{m}_0 , utilisé comme modèle initial, est conservé tout au long des itérations. Dans ce cas, B_0 est constant. Le modèle \mathbf{m} à l'itération l est calculé selon :

$$\mathbf{m}^{l+1} = \mathbf{m}^0 - (\Re[B_0^\dagger B_0])^{-1} \Re[(B_0^t \Delta \mathbf{d}_l^*], \quad (3.11)$$

Ainsi, les différentes contributions des inversions s'ajoutent pour atteindre le modèle final, correspondant à un minimum.

L'équation 3.11 (ou 3.7) peut être résolue à l'aide de méthodes itératives spécifiques, comme la méthode *LSQR* (Paige & Saunders, 1982) ou la méthode *GMRES* (Frayssé et al., 1997, 1998; Frayssé et al., 2003).

La méthode *LSQR* (Paige & Saunders, 1982) permet de résoudre un système du type $AX = b$, où A et b sont connus et X est l'inconnue. Cette méthode est basée sur une technique de gradient conjugué. La matrice A contient en réalité le gradient ou l'inverse du Hessien multiplié par le gradient. Des matrices de corrélation et de lissage peuvent également être ajoutées au système (Ravaut, 2003).

La méthode *GMRES* résout le même système pour une matrice A définie positive et est basée sur la décomposition de l'espace des modèles en domaines de Krylov (Frayssé et al., 1997, 1998; Frayssé et al., 2003).

Ce genre de méthode est utilisée en sismique par exemple par Snieder (1986); Snieder et al. (1989); Ikelle et al. (1988); Cao et al. (1990); Ravaut (2003); Tarantola (1984b).

Inversion linéarisée Dans l'inversion non linéaire, la fonction coût n'est pas quadratique. L'équation 3.3 est seulement une approximation locale parabolique de la fonction coût. Pour le calcul du modèle \mathbf{m} à l'itération l , Le modèle \mathbf{m}^0 est égal au modèle de l'itération précédente \mathbf{m}^l .

Calcul de la dérivée de Fréchet

La dérivée de Fréchet, *i.e.* la matrice B_0 peut être calculée de deux manières principalement. Il est tout d'abord possible d'utiliser les différences finies et d'écrire :

$$B_0 = \frac{\partial g}{\partial m} = \frac{g(m + \delta m) - g(m)}{\delta m} \quad (3.12)$$

Cette technique a été employée par Ji & Singh (2005). Cependant, elle s'avère coûteuse généralement et est donc peu utilisée.

Une autre possibilité consiste à effectuer des approximations basées sur des considérations physiques. Par exemple, dans l'approximation de Born (Dietrich & Kormendi, 1990; Lambaré et al.,

1992; Pratt et al., 1996), les perturbations des paramètres du milieu et les perturbations de vitesses de déplacement sont linéairement reliées (Lambaré et al., 1992; Pratt et al., 1996). Dans l'approximation de Rytov, les perturbations des paramètres du milieu sont reliées linéairement aux perturbations des phases des vitesses de déplacement (Woodwards, 1992; Spetzler & Snieder, 2004). Dans ces deux cas, chaque point du milieu est considéré de manière indépendante par rapport aux autres points : chaque point émet un champ secondaire, correspondant au champ diffracté, en suivant le principe de Huyghens. Ainsi, une interface est considérée comme la juxtaposition de points diffractants.

Ceci s'oppose à l'approximation de Kirchhoff (Bleistein, 1987) dans laquelle les diffractants sont reliés continûment les uns aux autres et forment une interface qui réfléchit globalement les ondes. Tous les points de l'interface participent au champ réfléchi, que la réflexion soit spéculaire ou diffuse.

3.1.3 Utilisation combinée de méthodes linéaires et non linéaires

Nous avons donc présenté les différentes familles de méthode existant pour résoudre un problème inverse non linéaire. Nous citons ici des exemples caractéristiques de combinaison des méthodes globales et locales, linéaires et non linéaires pour résoudre un problème inverse non linéaire.

Une manière de prendre en compte la non linéarité du problème consiste à coupler une méthode globale et une méthode locale. Par exemple, Improtta et al. (2002) effectuent une tomographie des écarts de temps à l'aide d'une approche multi-échelle suivie d'une inversion non linéaire. Ils utilisent tout d'abord un algorithme de Monte Carlo puis une méthode de simplex.

Ji & Singh (2005) utilisent un algorithme génétique (méthode semi-globale) suivi d'une méthode de gradient conjugué (méthode locale) pour déterminer les paramètres anisotropes d'un milieu stratifié horizontalement.

Pour résoudre le problème inverse non linéaire de la détermination de diffractants, nous avons vu que deux étapes sont généralement nécessaires : d'abord, l'obtention d'un macromodèle (bas nombres d'onde) de vitesse puis la détermination des diffractants (nombres d'onde élevés).

Par exemple, Snieder et al. (1989) construit un modèle de vitesse à l'aide de la méthode globale de Monte-Carlo et détermine ensuite les impédances du milieu grâce à une méthode de gradient (inversion linéaire dans ce cas) pour des configurations en réflexion. (L'impédance est un paramètre physique caractéristique du milieu, elle se calcule comme le produit de la vitesse par la masse volumique. En sismique, l'impédance est souvent utilisée pour caractériser les réflecteurs (Robein, 2003).) Les vitesses sont paramétrisées sur une grille grossière et les impédances sur une grille fine.

Ravaut (2003) utilise une méthode linéaire de tomographie des temps de trajet pour construire un macromodèle de vitesse. Une inversion linéarisée des formes d'onde acoustique est ensuite appliquée pour imager les structures plus fine.

Meier et al. (1997) a recours à une stratégie en deux étapes pour effectuer une tomographie en diffraction multimodale des ondes de surface, *i.e.* une inversion des formes d'onde des ondes de surface prenant en compte le couplage entre modes pour reconstruire la structure en vitesse des ondes S. Nolet (1990) a en effet montré que le partitionnement de l'inversion des formes d'onde de surface en une partie linéaire et une partie non-linéaire peut faciliter considérablement l'interprétation de grands jeux de données. Une première inversion non linéaire permet de construire un macromodèle, suivie d'une inversion linéaire des ondes de surface à l'aide de l'approximation de Born.

3.2 Différentes méthodes d'obtention d'un macromodèle de vitesse

Les méthodes présentées ici permettent de construire un macromodèle de vitesse sismique. Cependant, cette liste n'est pas exhaustive et présente seulement les méthodes les plus couramment

utilisées.

3.2.1 Analyse de vitesse

Cette méthode est utilisée classiquement en sismique active pour la détection d'hydrocarbures et se base sur l'étude des ondes réfléchies, sur des diffractants ou des réflecteurs, dans les sections sismiques, terrestres ou marines (Yilmaz, 2001; Robein, 2003). Les vitesses de propagation des ondes sont supposées constantes latéralement mais variables en profondeur. Grâce à la connaissance du point de tir et du point d'enregistrement, les traces sismiques sont regroupées en Point Milieu Commun. Dans un milieu tabulaire, des traces ayant le même point milieu commun éclairent les mêmes points à la surface libre et en profondeur, quelque soit la distance entre la source et le récepteur. Pour des traces dont le déport n'est pas nul, les temps de propagation sont retardés par rapport aux traces à déport nul, la relation avec le déport étant hyperbolique et gouvernée par la connaissance de la vitesse de propagation des ondes, variant avec la profondeur, dans le milieu. Cette correction s'appelle la correction NMO (Normal Move Out) et constitue la base de l'analyse de vitesse : les hyperboles de diffraction, apparaissant sur plusieurs traces voisines et dues à des réflexions sur des diffractants ou des réflecteurs, sont corrigées grâce à une vitesse sismique à déterminer, de manière à les horizontaliser ou à obtenir l'amplitude maximale par sommation des traces voisines. La deuxième technique (détermination de l'amplitude maximale) est souvent préférée car elle permet d'améliorer le rapport signal/bruit et de diminuer l'influence des multiples.

Cette méthode permet d'attribuer une vitesse sismique pour chaque temps d'arrivée de chaque réflecteur ou point diffractant. Il est ensuite possible de déterminer ensuite la structure en une dimension du milieu de vitesse des ondes P. En considérant successivement les différents Points Milieu Communs, un macromodèle en deux dimensions hétérogène latéralement, voire en trois dimensions selon les acquisitions, peut être construit. L'inconvénient de cette méthode est l'hypothèse de milieu tabulaire, qui peut se révéler fausse dans des milieux complexes comme la subsurface.

3.2.2 L'inversion non linéaire du modèle de vitesse

Certains auteurs déterminent le macromodèle de vitesse à l'aide d'une méthode non linéaire, globale ou locale. Citons Snieder et al. (1989) qui utilisent une méthode de Monte Carlo, Cao et al. (1990) dont l'inversion est basée sur une méthode de simplex et Jin & Madariaga (1993) et Ji & Singh (2005) qui ont recours à l'algorithme génétique.

3.2.3 La tomographie des écarts de temps des premières arrivées

Cette méthode vise à obtenir une image lisse d'un milieu à l'aide de la modélisation des temps des premières arrivées (Zelt & Smith, 1992; Le Meur, 1994; Improta et al., 2002; Ravaut, 2003). Une approximation haute fréquence de l'équation d'onde est effectuée, permettant de caractériser l'onde qui se propage par un temps et une amplitude (Cerveny et al., 1977). Grâce au principe de Fermat, les trajectoires des rais et les fronts d'onde sont calculés pour un milieu donné (Podvin & Lecomte, 1991). Le problème direct, reliant perturbation des temps de la première arrivée et perturbation d'un paramètre choisi (souvent la vitesse) du milieu, peut être linéarisé (Ravaut, 2003) et le problème inverse, résolu à l'aide d'une méthode itérative de type LSQR (Paige & Saunders, 1982). D'autres approches sont basées sur une inversion non linéaire de données grand angle (Improta et al., 2002) ou de données de réflexion (Farra & Madariaga, 1988). Selon que les ondes pointées sont des ondes P ou des ondes S, cette méthode permet de déterminer les vitesses de propagation des ondes P ou S à grande échelle (Latorre et al., 2004; Vanorio et al., 2005). Néanmoins, la plupart du temps, les ondes P sont pointées seulement.

La tomographie des écarts de temps des premières arrivées peut être utilisée avec des données de sismique ou de sismologie. Dans le premier cas, la position des sources est connue et seul le

modèle de vitesse est recherché. Dans le second cas, la distribution spatiale des vitesses ainsi que la localisation des sources (séismes) sont inversés.

Récemment, Dahlen et al. (2000) ont amélioré la méthode en s'affranchissant de l'approximation de fréquence infinie effectuée lors du calcul du trajet du rai. Ils ont introduit la fréquence dans le noyau de l'inversion, prenant ainsi en compte des informations situées à proximité du rai, et non plus seulement sur le rai. Pour cela, ils introduisent les volumes de Fresnel (Woodwards, 1992; Spetzler & Snieder, 2004), zone spatiale contrôlant la vitesse de propagation des ondes autour du rai.

D'autres approches permettent également d'intégrer cette notion de fréquence finie. Ainsi, Grandjean & Sage (2004) ont développé une méthode de tomographie basée sur les volumes de Fresnel, introduits par un algorithme SIRT (Watanabe et al., 1999) et une approche probabilistique. Un milieu de vitesse de propagation des ondes P est ainsi obtenu.

Enfin, l'une des évolutions récentes de ce type de méthode s'appuie sur les doubles différences (Waldhauser & Ellsworth, 2000; Monteiller, 2005). Il s'agit, en tomographie passive, de modéliser la propagation des rais de sources à des récepteurs, mais également de prendre en compte les similitudes de formes d'ondes entre des séismes voisins, de manière à affiner localement la connaissance du milieu et à localiser précisément deux événements voisins l'un par rapport à l'autre, en s'affranchissant des erreurs de modélisation de la propagation jusqu'aux stations sismologiques.

3.2.4 La tomographie des ondes de surface

En 1987, Nolet s'est intéressé à la tomographie des ondes de surface (Nolet, 1987). Cette méthode s'appuie sur les enregistrements d'ondes de surface émises lors d'un tremblement de terre. Ces ondes, très énergétiques, effectuent plusieurs fois le tour de la terre après un fort tremblement de terre et échantillonnent ainsi la croûte terrestre sur de grandes distances. La méthode utilisée ici consiste à retrouver la vitesse de phase des ondes de surface en fonction de leur fréquence, en divisant la terre en blocs au sein desquels ces vitesses sont supposées homogènes. Cette méthode repose sur une inversion linéarisée des données dans le domaine fréquentiel. Kennett & Yoshizawa (2002); Debayle & Kennett (2000b) ont également effectué une tomographie des ondes de surface. Montagner & Nataf (1988); Montagner & Tanimoto (1991); Debayle & Kennett (2000a) ont inversé les vitesses et l'anisotropie des ondes de surface.

3.2.5 La tomographie des temps généralisés à l'échelle géotechnique

L'idée de tomographie par ondes guidées a été développée par Ernst & Herman (2000) à l'échelle géotechnique. La vitesse de groupe des ondes de surface est estimée en tenant compte de leur dispersion. Ainsi, un temps de trajet dit "généralisé" est calculé pour chaque fréquence. Par hypothèse, le milieu étudié est formé de couches horizontales dont les paramètres varient faiblement latéralement par rapport à la longueur d'onde dominante. Ceci permet de négliger le couplage entre les différents modes et d'étudier chaque mode séparément : c'est l'hypothèse des modes adiabatiques. D'autre part, la distance à la source est considérée comme suffisamment grande pour que les modes soient bien individualisés dans le temps et l'approximation haute fréquence est utilisée pour calculer les temps de propagation. Cette méthode permet de reconstruire une image lisse du milieu dans laquelle les hétérogénéités n'apparaissent pas clairement.

3.2.6 La SASW : Spectral Analysis of Surface Waves

Nazarian & Stokoe (1984) ont utilisé la propriété de dispersion des ondes de surface pour reconstituer un milieu en une dimension caractérisé par les vitesses sismiques et la densité; c'est la méthode SASW (Spectral Analysis of Surface Waves), qui correspond à un problème inverse non linéaire. La vitesse des ondes de surface s'exprime en effet en fonction de leur fréquence mais

également en fonction de la vitesse des ondes de cisaillement (et de celle des ondes compressives, ramenée par un facteur constant à celle des ondes de cisaillement ou également inversées). Notons que le principal paramètre qui contrôle la dispersion des ondes de surface est la vitesse des ondes S (Xia et al., 2003), la vitesse des ondes P, l'épaisseur des couches et la densité ayant une influence secondaire sur le résultat.

Cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs en géotechnique (Xia et al., 1999; Ganji et al., 1997; Bitri et al., 1997; Grandjean et al., 2000) et est mise en oeuvre dans le programme SURF de Herrmann (1991) utilisé au BRGM. Elle a fait l'objet de diverses améliorations. En effet, la SASW est basée sur le déphasage des ondes de surface entre deux récepteurs et a été étendue à la MASW (Multichannel Analysis of Surface Waves) utilisant davantage de récepteurs dans le calcul des courbes de dispersion, permettant ainsi d'extraire plusieurs modes des ondes de surface et améliorant ainsi le rapport signal / bruit et donc la qualité des courbes de dispersion (Xia et al., 1999; Park et al., 1998, 1999; Miller et al., 1999). Une autre extrapolation de cette méthode est la méthode des "Beam Forming " (Rix et al., 2001, 2002) qui s'appuie sur une matrice de corrélation spectrale pour calculer les nombres d'onde des ondes se propageant effectivement.

D'autre part, la propriété de polarisation des ondes de Rayleigh constitue un paramètre qui peut également être introduit dans l'inversion des ondes de surface. La polarisation de l'onde de Rayleigh s'obtient en effectuant le rapport entre composantes horizontales et verticales des ondes de surface. Ce seul facteur ne permet pas de connaître de façon précise les variations de la vitesse de cisaillement avec la profondeur. En revanche, ajouté à la courbe de dispersion, il affine la connaissance de l'épaisseur des différentes couches constituant le sol (Scherbaum et al., 2003).

Pour reconstituer un milieu variable latéralement, il est possible d'utiliser plusieurs fois la SASW pour des domaines spatiaux différents. Ainsi, des profils de vitesses de cisaillement du sol sont obtenus pour des positions de tir et de récepteurs fixes relativement les unes aux autres mais mobiles latéralement. En juxtaposant tous les profils de vitesse obtenus, un profil des vitesses variant latéralement est reconstruit (Bitri et al., 2002).

Dans certains milieux, la SASW met en évidence des contrastes de vitesse importants. Ils peuvent être liés par exemple à des karsts remplis d'eau. Dans ce cas, l'utilisation de la SASW s'avère plus délicate, en particulier pour le cas de couches de vitesses V_s plus faibles que les couches supérieures (Foti, 2000).

Il est alors possible d'utiliser davantage de données pour améliorer la méthode. Ainsi, Xia et al. (2003) ont effectué l'inversion simultanée du mode fondamental et des modes supérieurs d'ondes de surface haute fréquence (2 à 40 Hz). Ces derniers sont en effet sensibles à des profondeurs plus élevées que le mode fondamental pour une longueur d'onde donnée. De plus, la résolution des vitesses des ondes S peut être améliorée. Dans certains cas, les modes supérieurs portent davantage d'énergie que le mode fondamental, particulièrement pour des ondes haute fréquence.

Xia et al. (2002) ont également inversé le coefficient d'atténuation Q_R des ondes de Rayleigh, considéré comme indépendant de la fréquence et dépendant de la profondeur, afin d'en déduire les coefficients d'atténuation Q_P et Q_S des ondes P et S.

L'annexe B présente une étude de la variabilité des courbes de dispersion selon la profondeur, la taille et la forme d'une cavité superficielle dans un milieu homogène. Cet exemple permet d'illustrer la manière dont sont extraites les informations des sismogrammes. Les données, correspondant aux courbes de dispersion, sont ensuite inversées pour reconstruire un milieu de vitesse en une dimension. Cette étude a fait l'objet d'un article publié (Gélis et al., 2005).

3.2.7 Quelle méthode pour la détermination d'un macromodèle en subsurface

A partir de la modélisation et de l'inversion d'une partie du sismogramme, toutes ces méthodes permettent de construire un milieu lisse. Dans notre cas, nous nous intéressons particulièrement à la tomographie des écarts de temps (inversion linéaire) (Ravaut, 2003) et à la SASW (Bitri et al.,

2002). Ces deux méthodes modélisent chacune une partie différente du sismogramme et permettent donc a priori d'obtenir des informations complémentaires sur le milieu.

Tomographie des écarts de temps d'arrivée

Cette méthode s'appuie sur la modélisation du temps d'arrivée de la première arrivée, *i.e.* sur l'onde P directe ou réfractée. Elle permet donc théoriquement de localiser grossièrement une zone de forts contrastes de vitesse correspondant à une interface profonde et d'en trouver la vitesse. Elle permet également de trouver une vitesse moyenne dans la partie supérieure du modèle.

Le problème de ce type de méthode est l'atténuation des ondes de volume P dans des milieux très hétérogènes et atténuants comme la subsurface.

SASW

La SASW s'appuie sur les ondes de surface pour déterminer un milieu tabulaire. La profondeur et les vitesses caractéristiques des principales couches sont obtenues par l'inversion d'un ou plusieurs modes. Cependant, les ondes de surface sont très sensibles à de petites variations du milieu et une petite variation dans les données peut entraîner une différence notable entre les milieux reconstruits par inversion. Le milieu tabulaire inversé doit donc être validé par un problème direct afin de comparer l'allure des données réelles et calculées avec la SASW.

La SASW ne reconstruit pas à proprement parler un milieu lisse puisque des interfaces sont construites, séparant des couches homogènes. Néanmoins, dans la pratique, le nombre de couches inversé est généralement important, de manière à permettre à l'inversion de reconstruire des gradients et à éviter des contrastes de vitesses trop fort.

Tomographie des écarts de temps d'arrivée ou SASW ?

Les deux méthodes précédentes permettent de reconstruire un milieu lisse. Cependant, les données de subsurface contiennent des ondes de surface très énergétiques qui dominent le sismogramme et doivent être reproduites avec précision. Est-il alors justifié de tirer des informations des ondes de volume avec la tomographie des temps de trajet alors que l'énergie est principalement portée par les ondes de surface et que ces dernières sont également inversées ? Autrement dit, les ondes de volume sont-elles sensibles aux mêmes phénomènes physiques que les ondes de surface et contiennent-elles les mêmes informations sur le modèle ?

Les ondes de surface sont très sensibles aux hétérogénéités du milieu ? Est-il alors justifié d'utiliser cette méthode lorsque le but est de construire une image lisse du milieu, *i.e.* peu sensibles aux petites anomalies ?

Si les informations extraites des deux types d'onde sont différentes, situation plus que probable avec les données réelles, comment alors combiner les deux modèles ? Faut-il en privilégier un des deux ?

Nous devons répondre à ces questions dans l'étude des données réelles au chapitre 5. Cependant, nous devons également nous interroger sur la signification et l'importance de reconstruire un bon modèle "lisse" pour l'application de l'inversion des formes d'onde à l'imagerie de diffractants près de la surface libre.

Milieu lisse : une approximation adaptée ?

Un milieu lisse contient par définition les grandes longueurs d'onde du milieu. De plus, la résolution spatiale des méthodes visant à construire un macromodèle est souvent limitée et ne permet pas de descendre en-deçà d'une distance caractéristique. Or la subsurface est un milieu très complexe et très hétérogène, dans lequel les ondes sont piégées, diffractées, réfractées, réfléchies ... Une

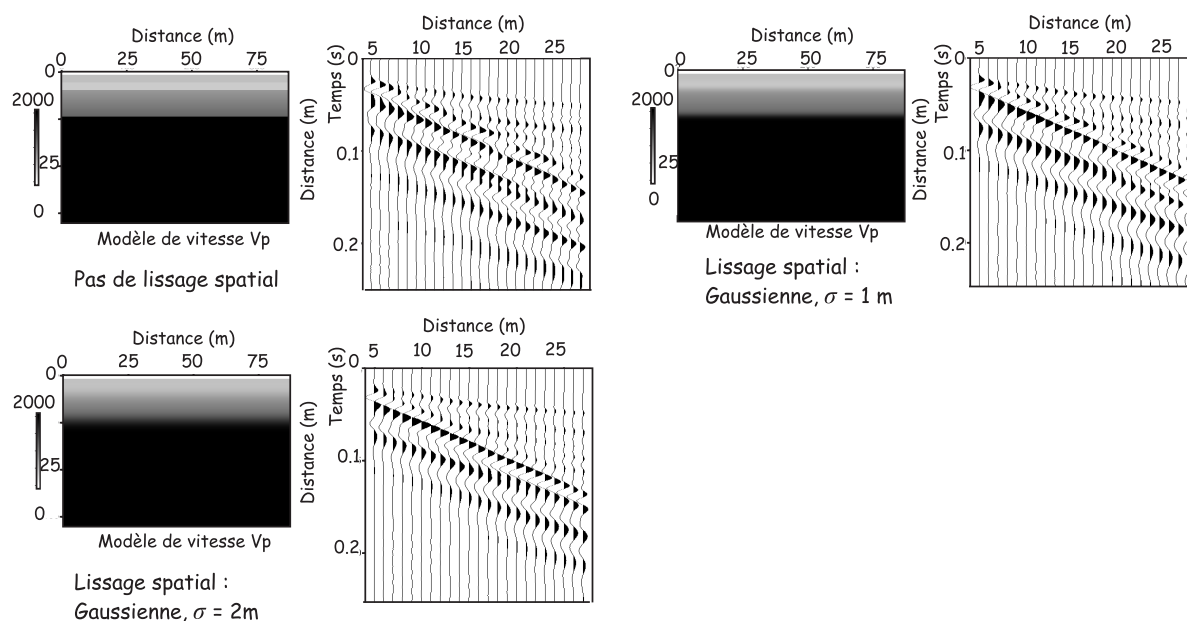


FIG. 3.3: Variation des sismogrammes verticaux en fonction du lissage spatial du milieu pour un milieu dont la vitesse augmente globalement avec la profondeur. Le coefficient de Poisson vaut 2.

approximation lisse de ce milieu ne permet pas de propager correctement les ondes réfractées par exemple, ou les ondes piégées dans les premiers mètres du sol. Ceci pose un problème d'autant plus que ces ondes sont susceptibles de porter une partie importante de l'énergie dans les sismogrammes.

Afin d'évaluer si l'approximation de milieu lisse est adaptée à notre cas d'étude, supposons que nous connaissons le milieu de propagation réel. Il est représenté par exemple en haut à gauche sur la figure 3.3. Lisons-le à l'aide d'une gaussienne spatiale dont la longueur de corrélation augmente. Nous voyons clairement sur la figure 3.3 que le lissage progressif du milieu modifie de façon notable l'allure du sismogramme, particulièrement celui des ondes de surface. Ainsi, lorsqu'un milieu contenant des couches est lissé, les contrastes spatiaux s'atténuent, laissant place à un gradient et les phénomènes physiques qui se produisent sont complètement différents.

Cela ne signifie pas nécessairement que le contenu fréquentiel des sismogrammes est changé, cela implique simplement que l'application de l'inversion des formes d'onde sur les différents macromodèles modélise une cinématique des ondes différente.

Lorsqu'une zone à moindre vitesse est présente dans les premiers mètres du sol par exemple (figure 3.3), la modification du sismogramme en fonction du lissage spatial devient dramatique.

Cela veut donc dire que les ondes se propageant près de la surface libre sont extrêmement sensibles au lissage spatial du milieu et que l'obtention d'un macromodèle de vitesse lisse respectant la cinématique des ondes n'est pas chose aisée. Ce dernier doit donc être choisi avec soin. Des modèles directs doivent obligatoirement compléter cette approche pour l'étude des cas réels, afin de vérifier la bonne cinématique entre données réelles et calculées dans le modèle initial.

Toutes ces questions ne sont pour le moment que des considérations théoriques sur les modèles lisses obtenus pour modéliser les ondes près de la subsurface. Nous verrons comment les utiliser dans l'étude d'un cas réel au chapitre 5.

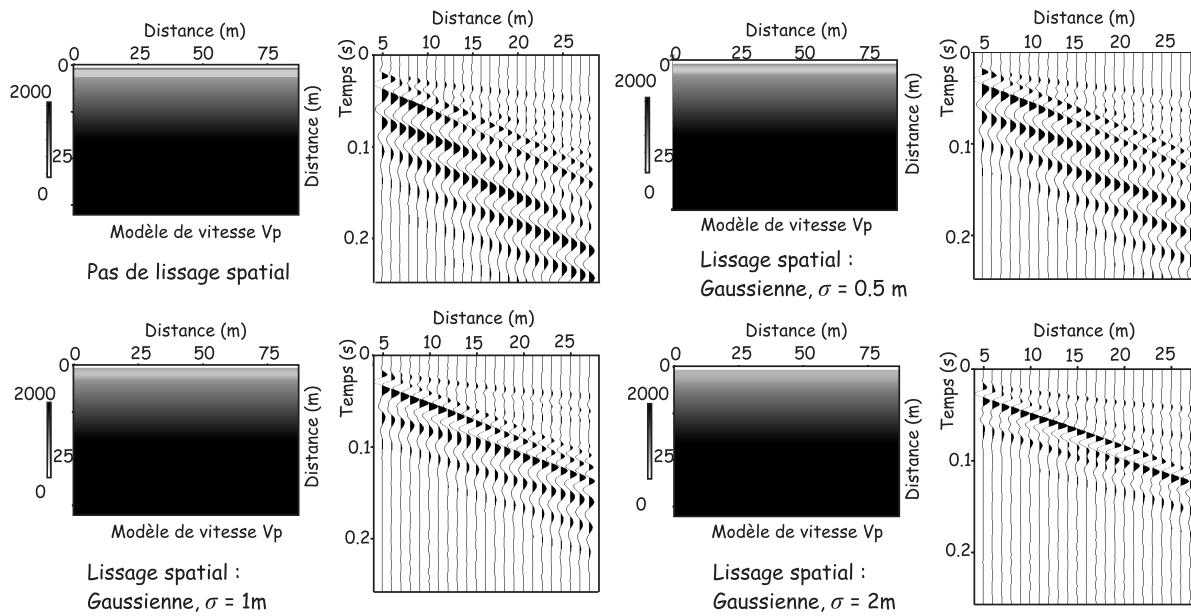


FIG. 3.4: Variation des sismogrammes verticaux en fonction du lissage spatial du milieu pour un milieu contenant une zone à moindre vitesse. Le coefficient de Poisson vaut 2.

3.3 Conclusion

Toutes ces méthodes visent à déterminer un macromodèle de vitesse et à en tirer des informations sur la structure lisse du milieu. Nous avons vu qu'elles s'appuient toutes sur une partie des informations contenues dans les données, comme le contenu fréquentiel des ondes de surface ou temps d'arrivée des ondes de volume par exemple.

Néanmoins, les cavités que nous cherchons à étudier sont ponctuelles et leur présence ne peut pas être déterminée par ce type de méthode, dans la mesure où elles sont de petite taille par rapport à la longueur d'onde dominante, et agissent plutôt comme des diffractants.

C'est la raison pour laquelle nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes d'imagerie des diffractants, en considérant qu'un macromodèle de vitesse a été calculé au moyen d'une des méthodes précédentes. Le macromodèle sert de modèle initial et doit permettre de reproduire les principales arrivées présentes dans les données.

Pour l'application aux données réelles, nous construirons des macromodèles à l'aide de la tomographie des écarts de temps des premières arrivées (Ravaut, 2003) et de la SASW (Bitri et al., 2002). Nous évaluerons la validité des modèles obtenus par comparaison avec les données. Puis nous appliquerons l'inversion des formes d'onde élastique, que nous allons maintenant détailler.

Chapitre 4

Le problème inverse : l'inversion des formes d'onde élastiques dans le domaine fréquentiel

Nous supposons qu'un macromodèle de vitesse a été trouvé, contenant les grandes longueurs d'onde du milieu, à l'aide d'une des méthodes présentées dans le chapitre 3 ou de toute autre manière. Ce macromodèle est lisse et ne contient pas les courtes longueurs d'onde du milieu, *i.e.* aucun diffractant n'est présent. Or, nous souhaitons imager le plus précisément possible la subsurface, en localiser les diffractants et déterminer leurs caractéristiques, comme leur forme, leur taille, leur profondeur et les anomalies des propriétés physiques. Après avoir présenté plusieurs méthodes existantes de caractérisation de diffractants, nous détaillons la méthode que nous avons choisie et développée : l'inversion des formes d'onde élastique. Cette méthode consiste à utiliser comme données les formes de l'onde et non plus les temps de trajet comme en tomographie des écarts de temps des premières arrivées.

Nous effectuons une inversion linéarisée au sens des moindres carrés (Tarantola, 1987). Nous nous focalisons sur deux paramètres à inverser (les vitesses sismiques des ondes P et S par exemple). Dans toute cette étude, nous négligeons l'inversion de la masse volumique, celle-ci ayant une influence faible sur les données et étant mal résolue par l'inversion Tarantola (1987); Mora (1988); Ikelle et al. (1988); Beydoun et al. (1990); Kormendi & Dietrich (1991); Mulder & Plessix (2004). Certains auteurs la déduisent néanmoins de la vitesse de propagation des ondes P (Pica et al., 1990).

Nous suivons le formalisme développé par Pratt et al. (1996, 1998) dans le domaine fréquentiel et l'appliquons pour le cas des ondes élastiques. Nous examinons deux manières de calculer les dérivées de Fréchet et d'établir une relation linéaire entre perturbations des données et des paramètres du milieu : l'approximation de Born et l'approximation de Rytov. Nous étudions la structure du gradient de cette relation linéaire pour ces deux approximations nécessaires dans les schémas d'approximation mis en oeuvre et nous examinons leur influence sur les images inversées. Puis nous évaluons l'importance du choix des paramètres inversés.

Nous examinons également l'influence du préconditionnement des données, *i.e.* du choix des données inversées. Nous montrons que l'inversion effectuée avec des dépôts croissants donne de meilleurs résultats que les cas où aucun fenêtrage n'est appliqué aux données ou bien dans le cas où les données inversées sont d'abord les dépôts lointains puis les dépôts proches.

Ensuite, nous introduisons la surface libre, dont la présence engendre les ondes de surface. L'inversion simultanée des ondes de volume et de surface rend la convergence vers le minimum global plus délicate. L'application du préconditionnement des données des dépôts proches vers les dépôts lointains permet une séparation des ondes de volume et de surface, et par conséquent une

meilleure reconstruction des anomalies.

4.1 Différentes méthodes d'imagerie des diffractants

Plusieurs types de méthodes existent actuellement pour caractériser des diffractants. Elles s'appuient, comme précédemment, sur les ondes de surface ou les ondes de volume, et s'appliquent des échelles métriques aux échelles kilométriques.

4.1.1 Inversion linéaire des ondes de surface diffractées à l'échelle globale

Snieder (1986) étudie la diffraction des ondes de surface au niveau d'hétérogénéités localisées dans un milieu latéralement homogène ou faiblement hétérogène. Cela signifie que les variations horizontales du milieu sont considérées comme faibles par rapport à la longueur d'onde dominante. Il utilise l'approximation (simple diffractant) de Born, qui suppose que le champ se propageant dans un milieu contenant une anomalie est égal à la superposition du champ se propageant dans le même milieu sans l'anomalie (milieu de référence) et du champ diffracté par l'anomalie. Dans ce cas, Snieder (1986) établit une relation linéaire entre les variations des paramètres du milieu au niveau de chaque diffractant et le champ diffracté.

Snieder (1986) utilise ensuite un formalisme spécifique aux ondes de surface et effectue une décomposition des fonctions de Green en somme de modes d'onde de surface. Pour une excitation du milieu donnée, le champ diffracté enregistré à un récepteur est constitué de la somme (sur tous les modes) de la propagation d'un mode de la source au diffractant, de son interaction avec le diffractant, de sa conversion en un nouveau mode et de la propagation du mode converti jusqu'au récepteur. L'hypothèse du champ lointain est utilisée et les différents modes sont étudiés séparément car bien séparés dans le temps. L'inversion effectuée est linéaire (Tarantola, 1984a) et appliquée à chaque mode séparément. Lorsque le milieu est considéré comme suffisamment lisse, seul le mode fondamental peut être inversé. Ainsi, dans la pratique, Snieder (1986) n'utilise pas les modes supérieurs.

Passier & Snieder (1995) étendent la méthode à l'étude des formes d'ondes des ondes de surface et effectuent une inversion en deux étapes : premièrement, les paramètres de la source et le milieu de propagation entre source et récepteur le plus proche sont inversés linéairement. Ensuite, une inversion non linéaire permet de retrouver la structure du milieu en vitesse des ondes S.

Marquering & Snieder (1997) développent une méthode d'inversion qui prend en compte les diffractions-avant (ondes diffractées dans le sens de propagation) multiples et le couplage entre modes.

Meier et al. (1997) modifient la méthode et utilisent plusieurs modes des ondes de surface. A partir d'un macromodèle obtenu grâce à la méthode de Nolet (1990), l'approximation de Born est utilisée pour résoudre le problème inverse linéaire de la détermination des vitesses des ondes S.

4.1.2 La simulation d'une distribution de diffractants pour modéliser les ondes de surface diffractées

En sismique traditionnelle, les ondes de surface sont souvent considérées comme du bruit ("ground roll") car, étant sensibles aux hétérogénéités du proche sous-sol, elles sont diffractées et arrivent aux récepteurs en même temps que des réflexions profondes à modéliser. C'est pourquoi la démarche classique consiste à éliminer ces ondes de surface diffractées plutôt que de les conserver. Des méthodes ont été mises au point par Blonk & Herman (1994) et par Blonk et al. (1995) pour résoudre ce problème dans un milieu homogène. Une distribution de diffractants équivalente est créée, de manière à expliquer les ondes de surface diffractées. En étudiant l'onde de surface directe, la tomographie des temps de trajet généralisés, précédemment exposée, permet de calculer

des propriétés du milieu et de la source. Ensuite, grâce à un processus d'inversion par moindres carrés (Tarantola, 1987) et l'approximation de Born, une distribution spatiale à une dimension des diffractants de subsurface est obtenue, expliquant la présence des ondes de surface diffractées. Ernst & Herman (1998) ont ensuite généralisé cette technique à un milieu variable latéralement.

Cette répartition n'est pas forcément réelle, elle permet juste de reproduire le plus fidèlement possible les signaux diffractés observés. De plus, les hétérogénéités reconstruites doivent être situées loin des sources et des récepteurs, en raison de l'hypothèse de champ lointain. Dans la dernière étape de ce traitement, les ondes diffractées simulées à l'aide des diffractants sont retirées du signal. Dans le sismogramme final, l'amplitude des ondes de surface diffractées apparaît bien atténuée, alors que le signal lié aux réflecteurs profonds n'a pas été modifié et devient donc plus visible.

Récemment, Campman et al. (2004) ont modifié la méthode de manière à localiser les hétérogénéités de densité près de la surface, en suivant une inversion linéarisée (Tarantola, 1984a) basée sur des ondes de surface directes et diffractées. Ils ont mis en évidence la présence d'une cavité dans un bloc d'aluminium (Campman et al., 2004). Riyanti & Herman (2004) ont également étudié les interactions entre une onde de volume incidente et une onde de surface diffractée. Riyanti & Herman (2005) ont cherché à déterminer une distribution de diffractants en densité, en tenant compte des effets de champ proche et en utilisant un tenseur de Green en trois dimensions pour un milieu supposé tabulaire. La composition du milieu est retrouvée par une inversion linéarisée et s'appuie sur une méthode de gradient conjugué.

4.1.3 Les méthodes d'imagerie quantitative

En sismique, la **migration avant sommation** (Yilmaz, 2001; Robein, 2003) permet de retrouver la position des interfaces ou réflecteurs dans un milieu donné, soit dans le temps, soit en profondeur. Pour cela, trois étapes sont nécessaires pour déterminer la réflectivité R en un point donné du milieu (Robein, 2003) : la rétropropagation du champ enregistré aux récepteurs, la propagation du champ direct depuis la source et la condition d'imagerie. La première étape s'effectue par exemple en propageant les champs enregistrés dans la direction opposée et dans le sens des temps décroissants (Robein, 2003). La deuxième étape constitue le problème direct de propagation des ondes d'une source vers un point donné. Enfin, la condition d'imagerie définie par Claerbout (1976) stipule que " une réflexion à l'intérieur de la subsurface existe à l'endroit où la première arrivée de l'onde descendante coïncide en temps avec celle de l'onde ascendante " (principe de coïncidence). Le rapport entre champ réfléchi et champ incident permet alors de définir la réflectivité R .

La détermination quantitative des paramètres du milieu constitue un problème inverse qui s'apparente au problème de l'**imagerie** (Claerbout, 1971) comme l'ont montré Lailly (1984) et Tarantola (1984a). La corrélation entre champ propagé depuis la source et champ rétropropagé depuis les récepteurs est effectuée en tout point du milieu, à la différence près que le champ rétropropagé est constitué de résidus calculés aux récepteurs, c'est-à-dire des différences entre champs calculés et observés. Cette différence permet de quantifier les variations de paramètres physiques pour un point du milieu donné.

La corrélation entre champs propagé et rétropropagé résulte dans ce cas de la minimisation d'une fonction coût, contenant les écarts entre données observées et calculées et exprimée dans la norme l^2 (Tarantola, 1987). Cette corrélation est contenue dans le gradient de la fonction coût, qui donne la direction de descente la plus forte le long de la fonction coût pour atteindre le minimum global et reconstruire les paramètres physiques. Le gradient est un opérateur allant de l'espace des données vers l'espace des modèles. Nous avons déjà expliqué en détail cette démarche dans la partie 3.1.2.

La formulation du problème inverse de Tarantola (1987) conduit à une inversion linéarisée, dans laquelle le problème direct peut être linéarisé ou non. Un exemple du premier cas est la **migration Rai+Born**, dans laquelle le problème direct est linéarisé au moyen de l'approximation haute fréquence (Beylkin, 1985; Bleistein, 1987; Lambaré et al., 1992; Jin et al., 1992; Forgues, 1996; Agudelo, 2005). Le problème direct est linéarisé au moyen de l'approximation haute fréquence, *i.e.* il modélise la propagation des rais. Beylkin (1985) exprime le problème inverse avec le formalisme des rais (amplitude et temps de trajet) et l'approximation de Born. Une seule itération est effectuée. En un point donné, la contribution des différents récepteurs est pondérée par un facteur dépendant de l'angle entre le rai venant de la source et celui venant du récepteur au niveau du point imagé. Bleistein (1987) s'affranchit en partie de l'approximation de Born et prend en compte les effets de bande spectrale finie. De plus, le coefficient de pondération utilisé correspond au coefficient de réflexion lorsque le point imagé appartient à l'interface. La migration réalisée est comparable à une migration de Kirchhoff où les contributions des différents couples source-récepteurs sont pondérées et filtrées. Beydoun et al. (1990) considèrent un milieu représenté par une grille de points diffractants, indépendants les uns des autres. Ils effectuent également une sommation pondérée de la contribution des couples source-récepteurs différents pour imager les paramètres du milieu en chaque point. L'inversion effectuée est élastique et des images des vitesses des ondes P et S sont obtenues. Jin et al. (1992) développent une méthode d'inversion linéarisée (Tarantola, 1987) élastique, basée sur des itérations successives, et construisent une norme permettant de rendre le Hessien diagonal et donc de calculer facilement son inverse. Cette norme est reliée à la pondération de la fonction coût. Physiquement, la contribution des différents récepteurs à l'image en un point du milieu dépend de l'angle d'incidence des rais allant de la source au point et du point à la source et des vitesses du milieu. Jin et al. (1992) effectuent donc une imagerie quantitative élastique. Forgues (1996) applique la méthode à des données synthétiques réalistes et à des données réelles. Ribodetti & Virieux (1998) étend la méthode à l'inversion du paramètre d'atténuation Q . Enfin, Agudelo (2005) utilise et développe la méthode pour l'imagerie de zones de subduction. Lambaré et al. (2003) appliquent la méthode sur des milieux à trois dimensions. Cependant, comme le problème direct est linéarisé au moyen de l'approximation haute fréquence, certaines ondes (réfractées, guidées) ne peuvent pas être étudiées et certaines anomalies, comme des contrastes forts, des diffractions multiples ou des zones à moindre vitesse, sont mal imagées.

Un autre exemple d'inversion linéarisée dans laquelle le problème direct est linéarisé et le milieu considéré est stratifié, consiste à résoudre le problème direct et le problème inverse dans le domaine (ω, k) , où ω est la pulsation et k est le nombre d'onde (Ikelle et al., 1988; Cao et al., 1990; Singh et al., 1989b,a). Dans ce cas, le problème direct est linéarisé (Ikelle et al., 1988; Cao et al., 1990; Kormendi & Dietrich, 1991) au moyen de l'approximation de Born et de la méthode WKBJ (Clayton & Stolt, 1981). Singh et al. (1989a) et Singh et al. (1989b) examinent la conversion des ondes P et S pour déterminer un modèle de vitesse à une dimension pour les vitesses des ondes P et des ondes S.

Dans le deuxième cas, le problème direct reste non linéaire, modélisant ainsi toutes les ondes qui se propagent et utilisant l'équation de propagation des ondes complète. Cette méthode se nomme l'inversion des formes d'onde et jusqu'à présent, elle a seulement été appliquée en deux dimensions (à notre connaissance).

Ces deux approches visent à déterminer la valeur d'un paramètre sismique (comme la vitesse de propagation des ondes ou l'impédance) en tout point du milieu, considéré comme une grille de points diffractants (principe de Huyghens).

L'inversion des formes d'ondes acoustiques a été développée par Gauthier et al. (1986) dans le **domaine temporel**. Mora (1987b) a également étudié l'inversion des formes d'onde élas-

tique dans le domaine temporel : deux paramètres, la vitesse des ondes P et celle des ondes S, sont inversés. Tarantola (1987) a extrapolé cette étude en évaluant l'influence du choix des paramètres inversés. Mora (1988) et Tarantola (1987) étudient la sensibilité de l'inversion aux différents paramètres et montrent que les vitesses sismiques sont mieux résolues que la densité. Luo & Schuster (1991) ont mis au point une technique intermédiaire entre tomographie des temps et inversion des formes d'onde, en définissant une relation entre le temps d'arrivée de l'onde et la pression. Cette méthode permettrait de reconstruire des perturbations du milieu de l'ordre de 80 %, au lieu de 10 à 20 % avec l'inversion linéarisée des formes d'onde (Gauthier et al., 1986). Néanmoins, la résolution spatiale de cette méthode est moins bonne que celle de l'inversion des formes d'onde (Luo & Schuster, 1991).

La formulation temporelle permet de sélectionner les ondes inversées, et d'éliminer par exemple les arrivées tardives, résultant de multiples diffractions. Ainsi, Kolb et al. (1986) a effectué une inversion à une dimension du milieu dont la profondeur dépendait de la longueur de la fenêtre temporelle sélectionnée, en considérant que les arrivées tardives venaient de domaines spatiaux plus profonds. Kormendi & Dietrich (1991) effectuent également une sélection des données en temps pour des ondes élastiques et reconstruisent ainsi un milieu à une dimension de plus en plus profond dans le domaine τ, p , où τ est le temps intercepté et p est le paramètre de rai. Ces deux termes sont définis dans le cadre de la théorie des rais (Cerveny et al., 1977; Chapman, 1985) et permettent de caractériser des ondes planes (Aki & Richards, 2002; Stein & Wysession, 2003).

Pratt & Worthington (1990); Pratt et al. (1996, 1998); Ravaut (2003); Ravaut et al. (2004); Dessa et al. (2004); Operto et al. (2004); Sirgue & Pratt (2004) ont effectué **l'inversion des formes d'ondes acoustiques dans le domaine fréquentiel**. En raison du problème direct effectué dans le domaine fréquentiel (voir section 2.7.4), cette méthode permet de prendre en compte efficacement le grand nombre de sources et de récepteurs classiquement présent en sismique (Marfurt, 1984).

L'inversion est effectuée des basses fréquences vers les hautes fréquences, de manière à mieux introduire la non linéarité, puisque, aux basses fréquences, les relations entre perturbations des données et des paramètres sont plus linéaires que pour les hautes fréquences (Sirgue, 2003; Operto et al., 2004). Ceci permet d'éviter certains minima locaux. Ensuite, cette formulation permet de décimer la redondance des données et de ne s'intéresser qu'à certaines fréquences tout en conservant un spectre de nombre d'onde imagé continu (Sirgue & Pratt, 2004). Ce point est particulièrement intéressant pour les données grand-angle (Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003; Ravaut et al., 2004; Operto et al., 2004). Nous reviendrons sur ce point dans ce qui suit. Enfin, un avantage notable de cette approche fréquentielle réside dans le vaste spectre de longueurs d'onde couvert, ce qui en fait une méthode multi-échelle et multi-résolution.

Cette approche multi-fréquentielle, déterminant le contenu en nombre d'onde des données choisies dans l'inversion, a également été utilisée pour une inversion effectuée dans le domaine temporel par Kolb et al. (1986) et Pica et al. (1990). Dans ce cas, les données sont filtrées au moyen d'un filtre passe-bande. De même, l'approche multi-échelle peut également être envisagée en temps par l'application de plusieurs filtres spatiaux de moins en moins lisses, donnant des images de plus en plus détaillées. Certaines méthodes utilisent explicitement les méthodes multi-échelles par l'utilisation de bases d'ondelettes (Hustedt et al., 2003; Yu et al., 2004).

Un des éléments clé de l'inversion des formes d'onde est le contenu fréquentiel de la source (Pratt et al., 1998; Sirgue, 2003). Si les données comportent des signaux basse fréquence, les grandes longueurs d'onde du milieu sont correctement modélisées et certains minima locaux peuvent être évités. De plus, l'ouverture du dispositif joue un rôle important puisqu'il détermine le contenu en nombre d'onde des données et donc l'éclairage du milieu et des anomalies qui s'y trouvent (Sirgue & Pratt, 2004).

Les applications de l'inversion des formes d'onde acoustiques concernent pour l'instant l'imagerie de grandes structures, à l'échelle crustale. Ainsi, Dessa et al. (2004) ont imagé la partie Est de la fosse de Nankai au large du Japon. Ravaut et al. (2004); Operto et al. (2004) se sont intéressés à des structures localisées sous les Apennins et relevant d'une ancienne zone de subduction (Improta et al., 2002).

L'inconvénient principal de l'inversion des formes d'onde acoustique réside dans l'interprétation des **ondes converties**. En effet, comme seule la vitesse de propagation des ondes de pression est modélisée, les phénomènes de conversion entre les ondes P et les ondes S ne peuvent pas être pris en compte. De même, les ondes de surface sont éliminées lors des prétraitements (Operto et al., 2004), alors qu'elles sont systématiquement présentes sur le terrain et porteuses d'informations, comme nous l'avons mentionné (méthodes de Herman et al. (2000); Nolet (1987); Snieder (1986)).

De plus, notre objet d'étude, la subsurface, se trouve près de la surface libre, ce qui induit nécessairement la présence d'ondes de surface énergétiques dans les enregistrements sismiques. Ces dernières doivent donc être correctement modélisées.

4.1.4 Vers une nouvelle approche : l'inversion des formes d'onde élastique pour l'imagerie de la subsurface

Nous proposons d'élargir l'inversion des formes d'onde acoustique dans le domaine fréquentiel, telle qu'elle a été étudiée par (Pratt & Worthington, 1990; Pratt et al., 1996, 1998; Ravaut, 2003; Ravaut et al., 2004; Dessa et al., 2004; Operto et al., 2004; Sirgue & Pratt, 2004) à des données multicomposantes en deux dimensions, pour l'imagerie de deux paramètres du milieu. C'est l'inversion des formes d'ondes élastiques. Cette méthode a été présentée par Pratt (1990) succinctement pour des milieux sans surface libre, il utilise l'approximation de Born pour le calcul des dérivées de Fréchet.

Comme notre cible se trouve à quelques mètres du sol, nous prendrons également en compte les **ondes de surface** dans l'inversion. Ceci nous conduit à modéliser précisément la **surface libre** dans le problème direct (section 2.4). Puisque notre but final est d'imaginer la subsurface, et de détecter des cavités, les exemples numériques que nous simulons sont à l'échelle géotechnique : nous imageons les premiers 50 mètres du sol.

De plus, nous introduisons l'approximation de Rytov dans le calcul des dérivées de Fréchet et comparons les résultats à ceux obtenus avec l'approximation de Born. Ceci a déjà été fait par Woodward (1992) dans le cas acoustique. Cette phase exploratoire est nécessaire en raison des phénomènes de diffractions complexes avec les ondes de surface.

En outre, nous étudions l'influence du choix du couple de paramètres physiques inversés. Ceci a été réalisé par Tarantola (1987) dans le domaine temporel et par Forgues (1996) avec l'approximation Rai+Born. Dans notre cas, cependant, nous n'inversons pas la densité, paramètre considéré comme constant pour toutes les inversions.

Nous considérerons dans tous les exemples synthétiques et applications, qu'un macromodèle de vitesse a préalablement été établi par une des méthodes présentées dans le chapitre 3. La résolution de ce type de méthode et celle de l'inversion des formes d'onde s'avèrent très différentes. Par exemple, la résolution de la tomographie des temps d'arrivée, permettant d'obtenir un macromodèle, est de l'ordre de la largeur de la première zone de Fresnel (*i.e.* $\sqrt{\lambda L}$, où λ est la longueur d'onde et L est la demi-ouverture du dispositif) (Williamson, 1991), alors que la résolution de l'inversion des formes d'onde, permettant de caractériser les diffractants, est de l'ordre de $\lambda/2$ (Ravaut, 2003). Dans le cas de la détection des cavités en géotechnique, la longueur d'onde dominante est de l'ordre de 10 à 20 mètres et l'ouverture du dispositif de 30 à 60 mètres. La tomographie des écarts

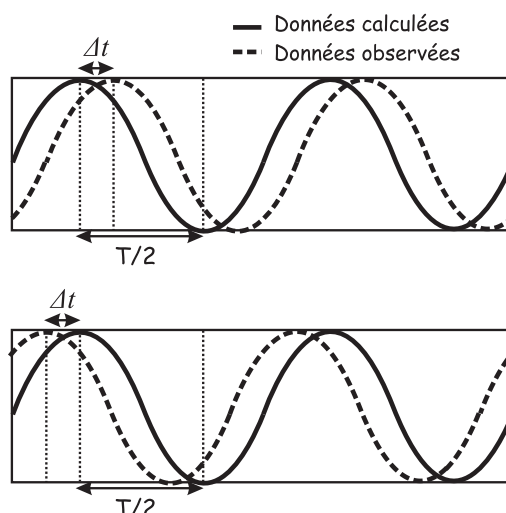


FIG. 4.1: Phénomène d'ambiguïté de phase illustré pour une sinusoïde (une composante fréquentielle) en temps pour les données calculées et observées. La différence des temps de trajet est inférieure à une demi-période (à gauche) et supérieure à une demi-période (à droite). Les méthodes de gradient interprètent les différences entre données observées et calculées selon la manière de gauche. Si l'ambiguïté de phase se produit, l'inversion ajuste les données avec le mauvais cycle, ce qui augmente l'erreur des temps de trajet. D'après Sirgue (2003)

des temps de trajet permet donc de détecter des anomalies de taille caractéristique allant de 17 à 35 mètres, alors que l'inversion des formes d'onde permet d'imager des objets de taille caractéristique allant de 5 à 10 mètres. L'inversion des formes d'onde élastique augmente ainsi la résolution spatiale.

Il est néanmoins nécessaire que le macromodèle reproduise correctement les composantes basses fréquences des modèles (Gauthier et al., 1986; Pratt, 1990; Pratt et al., 1996, 1998). En pratique, cela signifie que les temps des principales arrivées doivent être reproduits avec une erreur inférieure à une demi longueur d'onde (Pratt et al., 1998; Ravaut, 2003) pour éviter tout phénomène d'ambiguïté de phase (ou cycle-skipping) et appliquer l'inversion des formes d'onde élastique. L'ambiguïté de phase (figure 4.1) est en effet un phénomène dans lequel la différence en temps entre les données observées et calculées est supérieure à une demi-période. Dans ce cas, l'inversion cherche à minimiser des écarts qui ne correspondent pas aux phénomènes physiques, puisqu'un saut de cycle n'est pas pris en compte, et la direction du gradient est fautive.

4.2 Différences entre Born et Rytov : éléments de la bibliographie

Nous avons vu dans la partie 3.1.2 que l'opérateur adjoint linéaire B_0^\dagger est lié aux dérivées de Fréchet. Dans l'inversion linéarisée de Tarantola (1987), une linéarisation est effectuée pour calculer les dérivées de Fréchet, et les perturbations des paramètres sont linéairement reliées aux perturbations du champ. Nous insistons sur le fait que cette linéarisation n'intervient que dans le calcul des dérivées de Fréchet. De plus, les paramètres du milieu et les champs sont calculés à chaque itération au moyen d'un problème direct résolu avec les différences finies (donc les ondes multi-diffractées sont modélisées), ce qui permet de prendre en compte la non linéarité du problème.

L'approximation de Born permet de linéariser la relation entre perturbations du champ et perturbations des paramètres du milieu, alors que celle de Rytov établit une relation linéaire entre perturbations de la phase complexe du champ et perturbations du milieu. Les domaines de validité respectifs de ces deux approximations et leur possible équivalence ont fait l'objet de nombreuses

discussions dans la littérature. La plupart des auteurs étudient le problème direct résolu avec une de ces deux approximations. Leurs observations permettent de tirer certaines conclusions sur les situations dans lesquelles la linéarisation donne de bons résultats pour le calcul des dérivées de Fréchet. Dans cette partie nous distinguons rétrodiffusion et diffraction avant, qui sont chacune une partie du champ diffracté, respectivement dans la direction opposée à la propagation ou dans la direction de propagation. Ici le terme de diffusion est improprement employé au lieu du terme de diffraction. La synthèse de la bibliographie effectuée ici s'appuie sur des cas acoustiques. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature, le développement de l'approximation de Rytov pour le cas élastique. Ce dernier figure donc dans l'annexe B du papier présenté dans la section 4.3. Comme les phénomènes physiques sous-jacents restent les mêmes, les considérations relatées ici sont également valables pour le cas élastique.

L'approximation de Rytov a été utilisée par Devaney (1981) pour la tomographie en diffraction. Un objet est illuminé par une configuration en transmission à l'aide d'une onde plane. Ce dispositif effectue une rotation autour de l'objet, éclairant ainsi l'objet selon tous les angles possibles. Le contraste de vitesses de l'objet est reconstruit à l'aide de la rétropropagation, basée sur la somme d'images filtrées dans le domaine des nombres d'onde. Selon Nahamoo et al. (1984), l'approximation de Rytov donne de meilleurs résultats mais elle est plus sensible au bruit contenu dans les données pour la tomographie en diffraction. Rühl & Hubral (1996) a développé la méthode de Devaney (1982) dans une formulation espace-temps au lieu de la formulation espace-nombre d'onde originale.

Beydoun & Tarantola (1988) montrent que, dans le cas acoustique à une dimension, l'approximation de Rytov au premier ordre donne de meilleurs résultats pour modéliser le champ transmis ou le champ direct, alors que l'approximation de Born au premier ordre est plus performante pour étudier la première onde réfléchie ou le champ rétrodiffusé. Ceci est repris par Beylkin & Oristaglio (1985) qui affirment que le champ transmis est mieux reconstruit avec l'approximation de Rytov. Woodward (1992) considère également que l'approximation de Rytov est plus performante pour les configurations en transmission.

Rajan & Frisk (1989) trouvent que l'approximation de Rytov en une dimension en réflexion permet de mieux reconstruire les contrastes de vitesse que l'approximation de Born. En revanche, ces deux approximations conduisent à des erreurs comparables pour détecter la position des réflecteurs. L'approximation de Rytov serait moins sensible au choix de la vitesse de référence, mais moins performante avec des zones à moindre vitesse. Druzhinin et al. (2000) appliquent les approximations de Born et de Rytov pour une migration avant sommation de données bruitées et irrégulièrement échantillonnées. Ils constatent que l'approximation de Rytov permet d'imager des zones de faille que l'approximation de Born ne détecte pas, confirmant ainsi les résultats de Rajan & Frisk (1989).

Weston (1985) montre que le domaine de convergence de l'approximation de Rytov est plus étendu que celui de l'approximation de Born. Pour Keller (1969), la zone de validité spatiale de l'approximation de Rytov est plus large que celle de Born, mais ceci s'avère faux quand il y a plusieurs ondes car chaque onde doit être considérée séparément, au contraire de l'approximation de Born. Ceci est également repris par Woodward (1992); Pratt et al. (1996). Pour Taylor (1967), les deux approximations sont valables dans le même domaine pour la résolution du problème direct : l'approximation simple diffractant de petite taille par rapport à la longueur d'onde dominante. Brownlee (1973) partage cet avis, vivement critiqué par Wolf (1973), pour qui le domaine de validité spatiale de l'approximation de Rytov est plus étendu. Pour Heidebreder (1967), l'approximation de Rytov prend mieux en compte les diffractions multiples.

Selon Lin & Fiddy (1992), l'approximation de Rytov donne de meilleurs résultats pour calculer le champ diffracté dans un demi-espace homogène. Cependant, lorsque l'anomalie traversée par les ondes s'épaissit, aucune des deux approximations ne permet de calculer correctement le champ diffracté. Ainsi, l'approximation de Rytov n'est pas plus performante lorsque la taille du diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde.

Tous ces éléments ont été récemment synthétisés et expliqués par Wu (2003). Selon lui, l'approximation de Born, portant sur des faibles diffractions, n'est pas valable pour des hétérogénéités étendues spatialement et pour des distances de propagation importantes. Le domaine de validité de l'approximation de Born est plus étendu pour calculer le champ diffracté rétrodiffusé que le champ diffracté avant. L'approximation lisse de Rytov est performante pour des distances de propagation importantes et des angles faibles mais devient non valable pour des problèmes où les angles de diffraction sont élevés. L'approximation de Rytov présente donc un intérêt potentiel pour l'inversion des ondes de surface.

Ceci s'explique en fait par l'analyse des caractéristiques de la diffraction d'après Wu (2003). La diffraction avant est contrôlée par la composante continue du spectre moyen $W(0)$ alors que la rétrodiffusion est contrôlée par le contenu spectral à la fréquence spatiale $2k$ où k est le nombre d'onde du champ se propageant dans le milieu de référence. La composante continue du spectre moyen augmente linéairement avec la distance de propagation en général, alors que $W(2k)$ est généralement plus faible et augmente moins vite que $W(0)$. Ainsi, comme la condition de validité de l'approximation de Born est la petitesse du champ diffracté par rapport au champ incident, le domaine de validité de l'approximation de Born est plus grand pour la rétrodiffusion que pour la diffraction avant.

D'après Wu (2003), une autre différence entre les champs diffractés avant et rétrodiffusés est leur réponse à différents types d'hétérogénéités. La rétrodiffusion est sensible à l'impédance de l'hétérogénéité alors que la diffraction avant est plus sensible à la vitesse de l'hétérogénéité. Des perturbations en vitesse peuvent causer des changements de temps ou des déphasages qui peuvent s'accumuler jusqu'à devenir suffisamment grands pour rendre l'approximation de Born non valable. Ce genre d'accumulation de changement de phase peut être facilement pris en compte dans l'approximation de Rytov. C'est pourquoi l'approximation de Rytov montre de meilleures performances pour la diffusion avant et a été utilisée pour des longues distances de propagation avec seulement de la diffraction-avant, ou des diffractions à angle faible (Chernov, 1960; Devaney, 1982, 1984; Flatté & Wu, 1988; Wu & Flatté, 1990; Wu & Toksöz, 1987).

Enfin, Pratt & Worthington (1988) s'intéressent au sens des approximations de Born et de Rytov pour le calcul des dérivées de Fréchet dans le cadre de la tomographie en diffraction acoustique (Devaney, 1984; Wu & Toksöz, 1987). Selon Pratt & Worthington (1988), l'approximation de Born permet d'exprimer le champ en un point donné comme la somme des champs diffractés provenant de chaque point dans le diffractant. L'approximation de Rytov se prête plus facilement à des problèmes de transmission où un champ incident traverse le milieu et devient progressivement modifié. Pratt & Worthington (1988) estiment que l'approximation de Born impose une restriction sur la magnitude du champ diffracté par rapport au champ incident, alors que l'approximation de Rytov impose une restriction sur le gradient de la différence de la phase complexe. Ils pensent également qu'aux bords d'un objet diffractant, le gradient de la phase complexe présente des discontinuités et donc que l'approximation de Born est plus adaptée pour étudier les bords d'objets discrets.

4.3 L'inversion des formes d'onde élastiques

[2D Elastic Waveform Inversion in the Frequency Domain] 2D Elastic Waveform Inversion using Born and Rytov Approximations in the Frequency Domain

[C. Gélis, J. Virieux and G. Grandjean] C. Gélis¹, J. Virieux¹ and G. Grandjean²

¹ Géosciences Azur, Nice, France

² BRGM, Orléans, France

summary

We perform the full elastic waveform inversion in the frequency domain in a 2D geometry. This method allows us to image two physical seismic parameters, using vertical and horizontal field components. The forward problem is discretized using finite differences in the frequency domain, a fast approach for multisource and multireceiver acquisition. The inversion is linearized in a least-square sense, using Born and Rytov approximations. Parameter perturbations depend linearly on fields perturbations in the first case, and on the generalized complex phases of fields in the second case. These two approaches therefore converge to different minima in the model space. A gradient method is used to find the optimization direction, preconditionned with the diagonal part of the inverse Hessian matrix. We proceed from low frequencies to high frequencies so that smaller wavelengths are progressively introduced in parameters images. Non-linearity is taken into account by updating parameters at each iteration. On a very simple synthetic example, we examine the way the inversion determines the V_p (P-wave velocity) and V_s (S-wave velocity) images. Furthermore, we highlight that inversion performed with Lamé parameters set better locate edges whereas seismic velocities parameters set inversion allows to better characterize anomaly amplitudes. Of course, this performance depends strongly on the medium wavenumber illumination which is related somehow to the acquisition geometry. Both body waves and surface waves influence this reconstruction. Some applications to simple synthetic surface data acquisitions are presented with discussion on images with partial illumination. By feeding the optimisation procedure with selected data, we improve the convergence which shows us how critical are the initial model and the preparation of the seismic data before the inversion.

keywords Seismic imaging, Waveform inversion, Diffraction tomography, Finite difference methods, Born and Rytov approximations, medium wavenumber illumination

4.3.1 Introduction

Quantitative imaging using full wave equation has been achieved through the use of adjoint formulation problem for seismic data in the last twenty years. Both formulations in time domain (Lailly, 1984; Tarantola, 1984a; Gauthier et al., 1986) and in frequency domain (Pratt et al., 1996; Pratt, 1999; Ravaut et al., 2004) have been implemented and applied to various synthetic and real data examples with specific advantages on both sides. Easier seismic traces processing in time domain will allow progressive introduction of phases by increasing the time domain window in both observed and synthetic data (Kolb et al., 1986; Shipp & Singh, 2002; Sheng, 2004). Efficient ways of solving the forward problem in the frequency domain with the progressive introduction of higher frequencies and, therefore, with the progressive recovery of shorter and shorter heterogeneities (Pratt, 1999; Sirgue, 2003) make the frequency formulation appealing. Moreover, for wide-angle data acquisitions, it efficiently takes benefit of the wavenumber redundancy by limiting the number of inverted frequencies (Pratt, 1990).

Other alternatives for efficient quantitative imaging have been provided by using ray theory for the forward problem (Beylkin, 1985). While retaining the same adjoint formulation for fitting waveforms, the so-called Ray+Born formulation has provided a better control of the diffracting point illumination, leading to rather efficient algorithms by adapting locally the weighting used in the optimisation scheme for both the acoustic case (Lambaré et al., 1992) and the elastic one (Jin, 1992; Jin et al., 1992; Forgues, 1996). Moreover, attenuation reconstruction has been considered by Tarantola (1988) and Ribodetti & Virieux (1998).

While time domain formulation has been applied for recovering elastic parameters using multi-components data (Tarantola, 1987; Mora, 1987b, 1988), frequency formulation for elastic parameters reconstruction has only been applied by Pratt (1990) for cross-hole data to our knowledge. Moreover, investigations on the misfit function definition have not been performed as for time domain formulation where Crase et al. (1990) has introduced a norm which mimics a L1 norm, allowing Fréchet derivatives to be estimated. Questions about data and parameter sets we should consider

have not been addressed for the frequency approach in the elastic case.

We shall concentrate our attention on the reconstruction of elastic parameters in a 2D medium using either single-component data or multi-component data. The attenuation parameter will not be considered in this study although such extension is possible. The minimisation of particle velocity trace residues or complex phase trace residues using iterative linearized algorithm will be outlined. Then, we shall consider how to solve efficiently in the frequency domain full wave equation by a finite difference scheme different from the one already used by Stekl & Pratt (1998) or by Virieux (1986). The numerical estimation of the Fréchet derivatives will be discussed using both Born and Rytov approximations. On simple synthetic examples, we shall analyze the influence of both approaches as well as the effect of different sets of elastic parameters. The influence of the data acquisition geometry will be discussed for the reconstruction of different types of anomalies. Finally, the importance of the free surface will be analyzed and compared with previous reconstructions, for addressing the specific contribution of both body and surfaces waves in the resulting images.

This will allow us to draw potentialities of the method for addressing challenging problems as crustal imaging, reservoir characterization, subsurfaces reconstructions, cavity detections and so on. We shall concentrate in this article on issues of the proposed method when elastic waves are considered. Realistic examples will be considered in another forthcoming paper.

4.3.2 Inversion formulation

The reconstruction of medium parameters from seismograms is a rather non-unique inverse problem because non-linearity is present in the relation between the model and the data spaces. Wriggle ambiguity in seismograms requires a rather precise initial guess of the parameter model to start with. Phase wavelets should be roughly in phase before ajustement. The general relation g between the model \mathbf{m} and the data \mathbf{d} can be expressed by

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}). \quad (4.1)$$

We choose to perform a linearized inversion (Tarantola, 1984a, 1987) in the least-square sense because Fréchet derivatives can be efficiently computed. The misfit function E is equal to

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^\dagger(g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}), \quad (4.2)$$

where \mathbf{d}_{obs} represents observed data whereas $\mathbf{d} = g(\mathbf{m})$ are the calculated data with the \mathbf{m} model. The symbol \dagger stands for the adjoint operator. Weighted least squares can be introduced to increase the importance of a specific subset as far-offset traces for example (Operto et al., 2004). The misfit function contains the sum of squares of the differences between the observed and calculated data, i.e. the data differences or residues $\Delta\mathbf{d}$.

In the Born formulation, data are particle velocity fields. We shall consider a data space of particle velocities recorded at receivers for different sources and for different frequencies. The misfit function E_b at a given pulsation ω will be equal to

$$E_b(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}} (V^{\text{calc}}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) - V^{\text{obs}}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}))^\dagger (V^{\text{calc}}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) - V^{\text{obs}}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})), \quad (4.3)$$

where \mathbf{s} represents sources and \mathbf{r} stands for receivers. This misfit function will be considered as the Born misfit function because of the Born approach used in the linearization of the wave equation as we shall see later on. An alternative will be the so-called Rytov misfit function E_r where the data \mathbf{d} is the generalized complex phase of the particle velocity field which includes the Neperian logarithm of the velocity amplitude as the real part and the phase of the velocity field as the imaginary part.

The misfit function is expressed for each pulsation ω as

$$E_r(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}} (Ln(V^{calc}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})) - Ln(V^{obs}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})))^\dagger (Ln(V^{calc}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})) - Ln(V^{obs}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}))), \quad (4.4)$$

where the complex Neperian logarithm is denoted Ln . Phases unwrapping is necessary for avoiding jumps in the phase perturbation estimation. Because the data space is different, we may expect different behaviours of the minimisation procedure for these two formulations.

The misfit function has an arbitrary shape and we may proceed to a second order local linearization around a given initial model \mathbf{m}_0 leading to

$$E(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}_0) + \nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} + 1/2\delta\mathbf{m}^\dagger H(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m}, \quad (4.5)$$

where the gradient is denoted $\nabla_{\mathbf{m}}E$ and the Hessian H . A minimum of E is reached when the increment in the model $\delta\mathbf{m}$ verifies the following equation,

$$H(\mathbf{m}_0)\delta\mathbf{m} = -\nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}_0). \quad (4.6)$$

The Fréchet derivative is denoted as $B_0 = (\partial g/\partial\mathbf{m})(\mathbf{m}_0)$. How to estimate this matrix and the way it is involved in the gradient estimation will be discussed in a later paragraph. Deriving equation 4.2 with respect to the model \mathbf{m} gives the following expression :

$$\nabla_{\mathbf{m}}E(\mathbf{m}) = \left\{ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}} \right\}^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}). \quad (4.7)$$

When $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, the first term of the right-hand side is the adjoint operator of the Fréchet derivative and the second one is the data residuals $\Delta\mathbf{d}$. Therefore, the gradient vector may be expressed by the adjoint operator B_0^\dagger applied to data residuals $\Delta\mathbf{d}$ following the linearized inversion formalism (Tarantola, 1987). Derivating once more the misfit function with respect to the model \mathbf{m} gives the Hessian operator expression :

$$H(\mathbf{m}) = \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial\mathbf{m}^2} \right\}^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}) + \left\{ \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}} \right\}^\dagger \frac{\partial g}{\partial\mathbf{m}}. \quad (4.8)$$

The first term is generally dropped off in linearized problems (Pratt et al., 1998). We only keep the second term, which turns out to be the matrix $B_0^\dagger B_0$ in the model space (Tarantola, 1987). The following normal equation

$$\Re[B_0^\dagger B_0]\delta\mathbf{m} = \Re[B_0^\dagger \Delta\mathbf{d}], \quad (4.9)$$

where \Re indicates the real part, should be verified by the model increment for reducing the misfit function. The Hessian matrix is difficult to invert especially when the model space has a high number of degrees of freedom. We shall assume that this matrix is diagonally behaving for solving the system through a gradient method. Since we take its real part, the right-hand side of equation 4.9 may be written as :

$$\Re[B_0^\dagger \Delta\mathbf{d}] = \Re[B_0^t \Delta\mathbf{d}^*], \quad (4.10)$$

where B_0^t stands for the B_0 transpose and back-propagated residues are denoted by the complex conjugate $\Delta\mathbf{d}^*$.

Any preconditioning transforming the system 4.9 into an improved diagonal construction of the Hessian matrix will speed up the convergence towards the minimum of the misfit function (Shin et al., 2001a). This has been achieved, for example, in the Ray+Born method because the diagonal structure of the Hessian matrix, depending strongly on the data acquisition geometry, has a simple interpretation with rays (Jin et al., 1992).

We shall add a constant coefficient ϵ to avoid divisions by too small numbers when inverting the diagonal approximation of the Hessian matrix. This is a way to avoid too excessive model modifications. Therefore, when this coefficient increases, the inverse diagonal Hessian provides a weaker influence. The new model is estimated through

$$\mathbf{m}^{l+1} = \mathbf{m}^l - \alpha_l (\text{diag}(\Re[B_0^\dagger B_0])^{(l)} + \epsilon^l I)^{-1} \Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}_l^*], \quad (4.11)$$

where the model \mathbf{m}^l corresponds to the model \mathbf{m} at the l^{th} iteration, the number α_l is the stepping at the l^{th} iteration. Because data residues $\Delta \mathbf{d}_l^*$ are estimated at each iteration with the new model, the non-linear inverse problem is solved through a linearized approach, sometimes stressed as an iterative linearized approach. The stepping α_l is obtained by sampling a parabolic shape along the gradient direction. This requires two additional forward modelling at each iteration.

With Gauss-Newton or full Newton methods (Pratt et al., 1998), the complete Hessian matrix given by equation 4.8 has to be inverted. It contains the second term of the Hessian operator in the full Newton method, which deals with multiple diffractions. The first term of the Hessian operator allows us to take into account the source band-limited frequency content and the incomplete medium illumination by the acquisition system. Nevertheless, inverting the complete Hessian matrix is time-consuming and requires significant numerical resources although not unrealistic in 2D geometry.

4.3.3 Born forward and inverse formulations

The forward model will be solved for each new medium in the frequency domain because it allows to consider efficiently multi-sources approach. The propagation of 2D P-SV waves in elastic media obeys the following wave equation

$$-\omega^2 \rho(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) = S_i(\mathbf{x}, \omega), \quad (4.12)$$

where $V_i(\mathbf{x}, \omega)$ represents the i^{th} component of the particle velocity field $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \omega)$. The spatially variable properties of the medium are described by the density $\rho(\mathbf{x})$ and the fourth-order elastic tensor $C_{ijkl}(\mathbf{x})$. This tensor could be complex for taking attenuation into account. The pulsation is denoted by ω while Cartesian coordinate x_l is the component in the l^{th} direction. The source function, denoted by $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \omega)$, is a vector. If the source time function is a dirac, elementary solutions correspond to the Green functions of the medium : $G_{ip}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$ is the velocity field recorded at \mathbf{x} in the i^{th} direction and emitted by a ponctual force source located at \mathbf{s} and acting in the p^{th} direction at the frequency ω . In the following, we shall apply the implicit Einstein convention for summation.

The equation 4.12 may be written formally as

$$\mathcal{W} \mathcal{X} = \mathcal{S}, \quad (4.13)$$

where \mathcal{X}^t is the $[V_x(\mathbf{x}, \omega) \ V_z(\mathbf{x}, \omega)]^t$ velocity field vector, \mathcal{S}^t is the $[S_x(\mathbf{x}, \omega) \ S_z(\mathbf{x}, \omega)]^t$ source vector and $\mathcal{W}(\mathbf{x}, \omega)$ is the wave operator defined as

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}, \omega) = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega) & \mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega) & \mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega) &= -\omega^2 \rho(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{\partial}{\partial x} \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{\partial}{\partial z} \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega) &= -\omega^2 \rho(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

for the elastic linear isotropic case, we shall consider using the following relations :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \lambda(\mathbf{x})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\mathbf{x})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ \lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x})V_p(\mathbf{x})^2 \\ \mu(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x})V_s(\mathbf{x})^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

The field component \mathcal{X}_i of equation 4.13 can be written as the product of the Green function $G_{ip}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$ calculated at the position \mathbf{r} with the source frequency content $S_p^f(\omega, \mathbf{s})$. This Green function, representing the forward field propagation emitted by a ponctual force source acting in the p^{th} direction at \mathbf{s} and recorded in the i^{th} direction at \mathbf{r} , depends on the medium velocity structure and is modified by the presence of scatters. We are interested in a linear relation between medium parameters and Green functions. In the Born approximation, multiple diffractions are neglected and we only focus on simple scattering. Consequently, the Born approximation of the Green function $G_{ip}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$ will be a sum over diffracting points through the Born Kernel, denoted by $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)$ and defined in the next paragraph. Let us remind that the Born approximation is only used for estimating Fréchet derivatives while the forward problem performed by a finite-difference method does include multiple scattering effects.

Therefore, the elastic adjoint operator may be factorized as

$$B_0^t(\mathbf{x}, \omega) = \begin{bmatrix} S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Please note that linear combination of sources can be considered. One can write the multi-parameter gradient as

$$\Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*] = \Re \left[\sum_{\mathbf{s}} \begin{bmatrix} S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V_x^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \\ \delta V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \right\} \right]. \quad (4.18)$$

Estimating each component of the elastic adjoint operator of the misfit function goes through the estimation of Fréchet derivatives with respect to medium parameters. We shall proceed through Born approximation for such estimation : the unknown medium is the superposition of a reference background and a small perturbation which may be described by the following quantities

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \rho^0(\mathbf{x}) + \delta\rho(\mathbf{x}) \\ C_{ijkl}(\mathbf{x}) &= C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) + \delta C_{ijkl}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

As described in many textbooks (Tarantola, 1987; Chapman, 2004), the perturbation of the Green function component along the direction q at the receiver position \mathbf{r} for a point source \mathbf{s} applied along the direction p is given for the first-order Born approximation, also denoted Born approximation, by the expression

$$\delta G_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) = \int_M \{\omega^2 \delta\rho(\mathbf{x}) G_{ip}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) G_{iq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$$

$$\begin{aligned}
& -\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{ip}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x_j} \frac{\partial G_{kq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x_l} \} d\mathbf{x} \\
& = - \int_M \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

where $G_{ip}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})$ is the Green function propagating in the background medium characterized by density ρ^0 and elastic coefficients C_{ijkl}^0 . The Born kernel \mathbf{K} is now defined. This expression, which has been obtained using the reciprocity theorem, allows estimation of Fréchet derivatives with respect to velocities. We neglect here derivatives with respect to the ρ parameter which is kept constant throughout this study. As an explicit example, the Green function $\delta G_{zz}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$ can be expressed with respect to the Born kernel $K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)$ which includes variations with respect to V_p and V_s physical parameters. One may write

$$\begin{aligned}
\delta G_{zz}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) & = - \int_M K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) d\mathbf{x} \\
& = \int_M \{ (2\rho^0(\mathbf{x})V_p^0(\mathbf{x})\delta V_p^0(\mathbf{x}) - 4\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x})) \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\
& + (2\rho^0(\mathbf{x})V_p^0(\mathbf{x})\delta V_p^0(\mathbf{x}) - 4\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x})) \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_s^0(\mathbf{x})\delta V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_p^0(\mathbf{x})\delta V_p^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
& + 2\rho^0(\mathbf{x})V_p^0(\mathbf{x})\delta V_p^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \} d\mathbf{x}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Therefore, Born kernel partial derivative $\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p$ could be obtained through

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} & = -2V_p^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\
& \quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

and partial derivative $\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$ may be written as

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} & = -2V_s^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\
& \quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} \\
& \quad - 2 \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\
& \quad - 2 \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Other components of Fréchet matrix could be similarly estimated for V_p and V_s giving following expressions

$$\frac{\partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} = -2V_p^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

We have now written down the general misfit function gradient expression 4.19 where the contribution of both horizontal and vertical components are identified as well as the influence of sources. Let us give explicitly the component term of the elastic adjoint operator with respect to the V_p parameter for vertical particle motion and a vertical force which could be written as

$$\begin{aligned} \Re[(B_0^b)^t \Delta \mathbf{d}_b^*]_{zz}^{V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}} S_z^f(\mathbf{s}, \omega) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \delta V_z^*(\omega, \mathbf{r}) \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Similar equations are obtained following the Pratt et al. (1998) matrix formalism as shown in appendix A for completeness.

4.3.4 Discretization of equations with finite differences

Because we consider full wave propagation effects in the selected medium, we choose a numerical method for solving the equation 4.12. Finite difference techniques are very efficient methods and will be considered here. The spatial stencil we use is a popular P1 finite element stencil (Abramowitz & Stegun, 1965) which is equivalent to a second-order finite difference stencil. This stencil has been shown to have enough accuracy in a velocity-stress staggered grid by Saenger et al. (2000). We apply twice this stencil of first-order derivatives to get second-order derivatives, following the parsimonious approach of Luo & Schuster (1990) and Hustedt et al. (2004). A rather simple way to introduce the free surface boundary conditions is zeroing elastic coefficients above the free surface, making this stencil a very attractive one (Saenger & Bohlen, 2004; Gélis et al., 2005).

This stencil defines elastic properties at a single node of the finite difference grid and density at another single node diagonally shifted making a partially staggered grid different from the one of Virieux (1986) (figure 4.2). It prevents any spurious spatial interpolation problem between our reconstructed medium through the inversion procedure and the medium description for the forward calculation.

Because the numerical grid is always finite, we introduce absorbing boundary conditions using Perfectly Matched Layers procedure (Bérenger, 1994; Hastings et al., 1996; Hustedt et al., 2004). This efficient technique for avoiding numerical reflections from grid edges is a key element for the frequency formulation. It prevents any frequency resonance from the grid itself which would have complicated the frequency sampling strategy in our inversion procedure.

All kinds of waves are considered in the forward modelling and it will avoid any ghost images arising in the imaging procedure from incomplete wave reconstitution as it may happen when considering ray seismograms (Lambaré et al., 1992; Jin, 1992; Forgues, 1996). Still, the capacity of Ray+Born formulation of considering high frequencies should be acknowledged, especially in 3D geometry (Lambaré et al., 2003).

The discretisation in the frequency domain of equation 4.13 could be expressed in a matrix formalism (Pratt et al., 1996; Stekl & Pratt, 1998) and leads to the following rather sparse system

$$W X = S, \quad (4.31)$$

where the vector X combines the horizontal particle velocity denoted as V_x and the vertical particle velocity denoted as V_z for each point of the medium. The so-called impedance matrix W is a square matrix of dimension $(2 * nx * nz)^2$ where the number of nodes in the x and z directions are denoted nx and nz respectively. Only 18 coefficients are non-zero for each line of the matrix and the block-diagonal shape is related to the selected vertical dimension. The source function $S(\omega)$ is applied at prescribed positions.

In practice, we solve this system by decomposing W in a LU form, where L is a lower triangular matrix and U is an upper one. By performing direct and back substitutions, the forward problem is efficiently solved for each source. One may be aware that this decomposition fills up the matrix and the LU decomposition has no more a sparse structure. We have selected the MUMPS software (Amestoy et al., 2000, 2001) which helps handling this fill-in of the matrix through parallel computing using MPI library. Once this decomposition is performed which is the most CPU-demanding part (around 70% of the total forward computational effort), computing the solution for different sources is simply a matter of substitution, and this can be done efficiently with an incremental augmentation as the number of sources increases.

The impedance matrix W is a symmetric matrix except in PML zones, thanks to the reciprocity principle (Aki & Richards, 2002). Each column of the inverse matrix W^{-1} corresponds to the Green function value at each point in the medium. More precisely, the Green function $G_{xz}(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$ which is the horizontal particle velocity recorded at position \mathbf{x} for a vertical point source emitted in \mathbf{s} is equal to the Green function $G_{zx}(\mathbf{s}, \omega, \mathbf{x})$ which is the vertical particle velocity recorded in \mathbf{s} for

a horizontal point source emitted in \mathbf{x} . As the matrix W depends on the frequency, considering constant values of the ponctual source at each frequency leads to a dirac function in the time domain if enough frequencies are considered. This property will be used when constructing the effect of the adjoint operator on data residuals. Vertical and horizontal velocity components frequency maps are shown in the top right of figure 4.3 for a vertical force source in an infinite heterogeneous medium.

When applying inversion procedure, the Green function will be required at each point of the grid. In order to emphasize this practical point of view for discrete numbers, one may note, at the observation point \mathbf{x} , the Green function as

$$G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) = G_{xz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{s}), \quad (4.32)$$

where integers ix and iz denotes a node in the FD grid mesh. With the help of the finite difference stencil used in the forward problem, we may express partial derivatives of the Born kernel in the expression 4.19 using equations 4.23 to 4.29. Because of tedious notation, let us write down only one component term of the elastic adjoint operator 4.31 which gives the following expression :

$$\begin{aligned} \Re[(B_0^b)^t \Delta \mathbf{d}_b^*]_{zz}^{V_p} &= -V_p^0(ix, iz)/2h^2 \sum_{\mathbf{s}} \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \left\{ \right. \right. \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{r}) - G_{zz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{r}) \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{r}) + G_{zz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{r}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{r}) - G_{zz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{r}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{r}) + G_{zz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{r}) \left. \right\} \delta V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \left. \right\} \\ &\left\{ - G_{xz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{s}) - G_{zz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{s}) \right. \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{s}) + G_{zz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{s}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{s}) - G_{zz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{s}) \\ &\left. + G_{xz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{s}) + G_{zz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{s}) \right\} S_z^f(\omega, \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

This deduced numerical discretisation of the misfit function gradient is identical as the discretisation through the discrete matrix formulation of Pratt et al. (1996, 1998) as shown in appendix A and is the one implemented in our algorithm for the estimation of the elastic adjoint operator.

4.3.5 Rytov approach - the gradient estimation for V_p and V_s velocity parameters

Fitting observed and calculated field complex phases leads to another data space. The non-linear relation g relates complex phase perturbations to parameters perturbations. The Fréchet derivative is defined by a matrix, denoted B_0^r . In order to compute this matrix, parameters perturbations have to be linearly related to field complex phase perturbations. This constitutes the Rytov approximation. We shall outline the procedure on a single component of the misfit function gradient. Other components could be estimated using the same procedure as we have done it explicitly for the Born approximation.

The unknown medium is the superposition of a reference background and of small perturbations. The i^{th} field velocity component $V_i(\mathbf{x})$ that propagates in the medium is linked to the i^{th} velocity field component $V_i^0(\mathbf{x})$ that propagates in the reference background and to the complex generalized phase shift $\delta\psi_i(\mathbf{x})$ due to the presence of small perturbations in the medium through

$$V_i(\mathbf{x}) = V_i^0(\mathbf{x}) e^{\delta\psi_i(\mathbf{x})}. \quad (4.34)$$

Since the misfit function contains field complex phases, we focus on the complex Neperian logarithm of the velocity field $V_i(\mathbf{x})$.

By inserting the equation 4.34 into the equation 4.12 and by isolating parts of the field that can be expressed as diffractors, we obtain a relation between perturbations of the complex phase $\delta\psi_p(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$ of the p^{th} velocity field component and perturbations of the medium parameters $\delta\rho(\mathbf{x})$ and $\delta C_{ijkl}(\mathbf{x})$ for a given source. In order to build this linear relation, we follow the analytical method principle of Wu (2003) and apply it to the elastic case. Details of the procedure appear in appendix B. We must introduce a phase Green function which is the phase shift $\delta\psi_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$ for the p^{th} component of the velocity phase induced by a force component in the q^{th} direction. As previously done, neglecting terms containing $\delta\rho(\mathbf{x})$ leads us to

$$\delta\psi_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) = -\frac{1}{G_{pq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \int_M \left\{ \delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{ip}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x_j} \frac{\partial G_{kq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x_l} \right\} dx, \quad (4.35)$$

which could be easily connected to the Born perturbation (equation 4.20) through

$$\delta G_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) = G_{pq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \delta\psi_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}). \quad (4.36)$$

In the weak-scattering limit, the Rytov direct formulation reduces to the Born direct formulation. This has been already pointed out in the acoustic case by Devaney (1981); Woodward (1992); Wu (2003).

With the help of the equation 4.16, we introduce V_p and V_s parameters in this linearized relation between field perturbations and complex phase perturbations, leading to extensive sets of equations similar to those of Born approximation. Let us explicit one particular configuration. The component term of the elastic adjoint operator with respect to the V_p parameter for one given pulsation ω for a vertical point force and a vertical geophone can be expressed as

$$\Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*]_{zz}^{V_p} = \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \psi_{zz}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})}{\partial V_p} \right) \delta[\text{Ln}(V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}))], \quad (4.37)$$

leading to

$$\begin{aligned} \Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*]_{zz}^{V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{S_z^f(\mathbf{s}, \omega) G_{zz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})}, \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \delta[\text{Ln}(V_z^*(\omega, \mathbf{r}))] \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\} S_z^f(\mathbf{s}, \omega), \right. \end{aligned} \quad (4.38)$$

which is slightly different from the similar Born expression 4.31. The source term $S_z^f(\mathbf{s}, \omega)$ has been involved through the following equation :

$$\frac{1}{S_z^f(\mathbf{s}, \omega) G_{zz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} = \frac{1}{V_z^0(\mathbf{s}, \omega)}, \quad (4.39)$$

which allows to highlight computed fields used in practical situations.

Similarly to the Born approximation, the perturbation of complex phases due to scatterers in the medium can be equivalently deduced and discretized from the approach of Pratt et al. (1998) as shown in appendix C.

For other source or/and receiver configurations, we follow the same approach for both V_p and V_s parameters, filling in each component of the elastic adjoint operator. We now focus on the convergence behaviour of Born and Rytov approximations in the reconstruction of synthetic simple structures.

4.3.6 Convergence behaviour for Born and Rytov formulations

Let us consider a very simple example in order to analyze how linearized optimisation performs both for Born and Rytov formulations. Comparative quantifications is difficult because one method may be more efficient for a specific data acquisition geometry and for different types of heterogeneities. By considering rather simple diffracting elements, convergence is analyzed regardless deeper efficiency investigation of Born and Rytov methods.

Let us consider an infinite medium with a P-wave velocity of 1500 m/s and an S-wave velocity of 1200 m/s . Two finite-sized anomalous disks of radius 100 m are inserted with P-wave velocity of 1800 m/s and an S-wave velocity of 1440 m/s . The numerical grid size is 201 by 201 points with a spatial step of 10 m . The vertical point force source is a Ricker signal centered on 5 Hz which represents a rather impulsive signal. Fifteen shots are defined per edge separated by 100 meters (figure 4.4). Each source is recorded by thirty-six geophones located on the opposite side along the bold line with a stepping of 40 m . This transmission acquisition geometry allows to densely sample the medium and illuminates anomalies with different diffracting angles. We choose to image two anomalies because multiple scattering occurs. The forward problem should take care of that and ghost images, if any, should vanish.

The initial medium is the constant velocity medium without anomalies and we proceed from low frequencies towards high frequencies. This allows us to reconstruct long wavelength anomalies before going into details. This careful introduction of the frequency content will also prevent fast focusing of anomalies that may lead to some local minimum in the model space. One may hope we avoid somehow cycle skipping which is often more dramatic at high frequency than at low frequency. For each frequency, the initial model comes from the inversion of the previously inverted frequency. Twenty iterations are performed at each frequency. We progressively introduce details in the reconstructed images. The inverted frequencies are 1.75 Hz , 3 Hz , 4.25 Hz and 10.25 Hz . Their choice depends on the acquisition geometry and on the anomaly position to be reconstructed (Sirgue & Pratt, 2004). The selected frequencies are chosen such as to cover a continuous wavenumber spectrum in the target zone.

Figures 4.5 and 4.6 show the progressive reconstruction of anomalies both in shape and in velocity amplitude for V_p and V_s parameters when considering the Born approximation. V_p and V_s parameters are simultaneously inverted. Rytov formulation although equivalent for weak anomalies, behaves differently when considering this example where anomalies have amplitude perturbation as high as 20% (see figures 4.7 and 4.8).

The size of reconstructed scatterers depends on the selected wavelength λ . Details progressively appear when the inverted frequency increases, allowing to characterize scatterers more finely. The way anomalies are recovered differs whether the inverted parameter, as already noticed by Mora (1987b).

The choice of the first frequency is not critical in this very specific example of very localized anomalies but one may see that broad reconstruction at low frequencies does not prevent further refinements in this case. The frequency content will be essentially limited by the source spectrum in real applications (Sirgue, 2003). Similar results are obtained when considering negative anomalies. In this case, the Rytov approximation focusing of anomalous disks is slightly improved.

To better understand differences between Born and Rytov approximations, we focus on the gradient of the misfit function expression. Figure 4.3 shows Born and Rytov approximation so-called wavepaths (Woodwards, 1992) that represent the kernels of the misfit function gradient for the V_p and V_s parameters for one source-receiver couple. They are obtained here by simultaneously inverting the V_p and V_s parameters. This wavepath describes the path followed by a scattered wavefield from the source to the scatterer and from the scatterer to the receiver. Once more, this highlights that one simple diffraction is considered with the Born and Rytov approximations. The central area is equivalent to the first Fresnel zone (Woodwards, 1992; Pratt et al., 1996). The width

of the first Fresnel zone for one wavepath depends on the inverted frequency through the considered wavelength L and the distance between the source and the receiver O since the first Fresnel zone width equals $\sqrt{L * O}$ (Pratt et al., 1998). For higher frequencies, the wavelength is smaller and positive and negative variations zones are closer. By summing up such wavepaths for all source-receiver couples, Fresnel zones containing significant energy (due to scatterers) are progressively surimposed and finally allow to locate the scatterers. As each wave going from one source to one receiver illuminates differently anomalies, denser and wider acquisitions geometries provide better images in practice (Pratt et al., 1996).

As figures 4.5, 4.7, 4.6 and 4.8 show, images obtained from Born and Rytov approximations differ. Differences are weak and mainly located in the first Fresnel zone. This was already noticed by Woodward (1992) who shows Rytov and Born wavepaths for the acoustic case. When considering the time domain and therefore the contribution of all frequencies, Woodward (1992); Dahlen et al. (2000); Dahlen & Baig (2002); Spetzler & Snieder (2004) noticed that heterogeneities located on the ray path do not affect traveltimes but only wave amplitudes.

We now focus on the practical way Born and Rytov approximations allow to reconstruct anomalies for the V_p and V_s parameters. The Born approximation images heterogeneities in the medium as a series of independent simple scatterers. The diffracted field is therefore considered as a series of neighboring hyperbolae due to the presence of simple scatterers. These hyperbolae result from the convolution in the time domain of the forward field and the backpropagated field residuals. These hyperbolae constructively and successively are added in the time domain, thus reproducing the desired diffracting wavefield. The figure 4.9 shows three differential seismograms for the vertical component, a source located on the bottom left of the model and the corresponding receivers. The first differential seismogram represents the difference between the initial field and the data field, the second one shows the difference between the initial field and the field calculated in the final inverted model. The third seismogram, called residual seismogram, contains the difference between the first and second seismograms. The inversion allows to explain 92 % of the vertical seismograms energy and 87 % for horizontal seismograms energy. Unexplained energy mainly comes from small phases shifts, indicating that the final inverted model corresponds to a minimum model.

The Rytov approximation proceeds in a different manner. The medium perturbations are reconstructed owing to the phase shifts and logarithmic amplitude variations they induce on receivers. The diffracted field is considered as a serie of waves of different phase shifts, coming from different scatterers. Residuals (figure 4.10) calculated in the Rytov approximation contains almost the same level of energy as for the one deduced by the Born approximation : 93 % of the vertical seismograms energy and 88 % of the horizontal seismograms energy are explained.

We then consider the same sources and receivers positions but a different recording system : sources are recorded by receivers located on the same line instead of the opposite line as previously. In this case, the Born approximation better succeeds in finding the anomalies amplitudes, locations and shapes than the Rytov approximation. This is in good agreement with Woodward (1992) results.

As a partial conclusion, scatterers are well located spatially. They have the correct size and the velocity amplitude is fairly well estimated. Optimisation is quite robust leaving unexplained energy in residuals.

4.3.7 Choice of inverted parameters

Selection of the parameter space is important and non-linear relations may lead to different results. Based on radiation pattern diagrams (Forgues, 1996), we may consider four other parameters couples, denoted (V_ϕ, V_s) , (λ, μ) , (κ, μ) and $(Ln(V_p), Ln(V_s))$. V_ϕ and κ are defined by relation 4.16

and following expressions

$$\begin{aligned} V_\phi(\mathbf{x})^2 &= \rho(\mathbf{x})(V_p(\mathbf{x})^2 - \frac{4}{3}V_s(\mathbf{x})^2) \\ \kappa(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x})(V_p(\mathbf{x})^2 - \frac{4}{3}V_s(\mathbf{x})^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

The bulk velocity is denoted by V_ϕ (Gorbatov & Kennett, 2003) and is currently inverted in the acoustic case (Ravaut et al., 2004; Operto et al., 2004; Dessa et al., 2004). By choosing V_ϕ instead of V_p , we separate strict acoustic phenomena to shear ones in model reconstruction. We consider as well Lamé parameters couples : (λ, μ) and also (κ, μ) . The parameter set $(Ln(V_p), Ln(V_s))$ may be of interest because derivatives are related to relative variations of seismic velocities V_p and V_s .

The geometry and amplitudes of anomalous disks to be recovered are identical to the previous example as well as the acquisition geometry. Selected parameters are simultaneously inverted. After the inversion, we reconstruct the V_p and V_s parameters for analysis and horizontal profiles crossing the lowest anomaly (figure 4.4 are shown in figures 4.11 and 4.12).

Whatever the inverted couple we select, final images show Gaussian-shape amplitude variations due to the finite frequency effects that do not allow to recover sharp velocity contrasts. The Born and Rytov approximations similarly reconstruct scatterers in amplitudes and in shapes. With the Rytov approximation, we have not tried to unwrap the phase and have adopted to cancel out any data with a phase shift higher than 2π .

The seismic velocities couples inversion allows to reach anomalies amplitudes closer to the true values than the Lamé parameters inversion. The (V_ϕ, V_s) couple particularly well reconstructs anomalies amplitudes. This must be related to the physical independance of parameters : V_ϕ is the acoustic pressure velocity and V_s is the shear wave velocity. The Lamé parameters inversion better reproduces sharp velocity gradients on anomalies edges.

4.3.8 The acquisition geometry influence

The acquisition geometry plays a key role in the image reconstruction (Mora, 1988; Pratt et al., 1998). We now illustrate its influence in a synthetic example based on the geometry of a real experiment which has taken place in the North of France near a railway. Detection of identified near-surface cavities, embedded at a maximal depth of 5 m, was the objective. We consider a zone of 45 m width and 20 m depth (figure 4.13). Two disk anomalies are inserted with roofs located at 2 m and 4 m depths respectively and their radiuses equal to 1.2 m. The background medium has following properties : V_p equals 888 m/s, V_s equals 431 m/s and ρ equals 1600 kg/m³. The model is discretized with a 0.1 m numerical spatial step and contains 451 points horizontally and 201 points vertically.

In this synthetic simulation, we do not introduce yet the free surface for better appreciation with respect to the previous example. Sources and receivers are located above anomalies. The acquisition configuration is expected to influence the parameters final images since anomalies are differently lightened with respect to the previous transmission acquisition configuration example.

If sources and receivers are located on opposite sides with respect to scatterers, the latter will be contained in the first Fresnel zone for some source-receiver couples and therefore the full waveform inversion performs more or less like a travelttime tomography (Pratt et al., 1996). On the contrary, if sources and receivers are located on the same side with respect to scatterers, the latter are located on external Fresnel zones corresponding to high phase shifts, and, therefore, will influence later times in seismograms. One may think that the full waveform inversion provides migration-like tomography (Pratt et al., 1996).

Fourty-three receivers record horizontal and vertical velocity fields coming from thirty-seven vertical force sources. The spacing between sources is 1 m as well as for receivers. Each source is

recorded by all receivers. The source is a Ricker wavelet. The frequency content is centered around 88 Hz. We select four inverted frequencies at 10 Hz, 20 Hz, 50 Hz and 130 Hz.

We choose to perform the elastic full waveform inversion with the Born approximation. Moreover, as our main goal is locating anomalies and determining perturbation amplitudes in real cases, we select the (V_p, V_s) seismic velocities as inverted parameters.

The background structure is known as for the previous example. We focus our attention on anomalies reconstruction. We assume that long wavelengths of the model have already been determined with another method such as the first arrival traveltime tomography (Improta et al., 2002) or the Spectral Analysis of Surface Waves (Nazarian & Stokoe, 1984).

Results obtained from the inversion are presented on the figure 4.13. In the V_p and V_s parameters images, we clearly distinguish the two anomalies although small ghosts appear beneath them. They are due to the limited aperture of the acquisition configuration. Moreover, as the background is homogeneous, no diving wave propagates, thus preventing us from getting some knowledge about the medium parameters from grazing angles. We explain 60 % of energy in vertical seismograms and 45 % of energy in horizontal seismograms.

4.3.9 The free surface influence

Let us now introduce the free surface in our previous example. The effect of the free surface is taken into account by the finite difference modelling of the vacuum zeroing elastic coefficients above the free surface while keeping a small density (Saenger et al., 2000). Stresses are zero on the free surface. The free surface has a stair-case geometry and we must include thirty points per wavelength in our simulations for accurate modelling (Bohlen & Saenger, 2003; Gélis et al., 2005).

The reflection acquisition geometry remains the same as for the previous realistic example. Receivers are located at the free surface whereas sources are embedded at 1 m depth in order to properly emit downwards the energy inside the solid medium (figure 4.14).

The presence of strong surface waves in seismograms may introduce a supplementary difficulty for the optimisation scheme : surface waves result from constructive interferences of reflected/transmitted body waves at the free surface. One may wonder how velocity anomalies are extracted from surface waves.

By performing the inversion with the whole data set, V_p and V_s anomalies are correctly detected and located, but spurious features appear (figure 4.14). The comparison with the previous example without free surface indicates that this convergence towards a local minimum can be attributed to surface waves and to the difficulty to fit both body and surface waves. We may consider first body waves and introduce surface waves later on. This data preconditioning can be performed by considering short-offset data containing mainly diffracted body waves and by progressively introducing higher-offset data during the inversion with more and more surface wave content. The entire inversion is performed through the frequency range with a preconditioned data before moving to the other selected dataset. This near-to-far offset data selection is possible because the background model is known in this synthetic example and anomalies will focus at the right place. More realistic strategies could be envisioned although it is more complex in the frequency domain than in the time domain. An (ω, k) filtering will reduce effects of surface waves but it must be handled with care for erasing initially surface waves. Let us remind that the frequency increase during the inversion is also a data preconditioning.

The V_p and V_s parameter images show better reconstructed anomalies (figure 4.14). Anomalie amplitudes have been increased. We are able to explain 59 % of the vertical component when inverting directly the whole dataset and 97 % with offset preconditioning. Similarly, we improve fitted amplitude from 48 % for the horizontal component to 91 %. When data are preconditioned, the energy left in residual seismograms is considerably reduced (figure 4.15). Because surface waves contain most of energy, they control the way optimisation is performed : incorrect interpretation

of these surface wave in diffracted body waves will drive the optimisation to a local minimum.

4.3.10 Discussion and conclusion

The optimisation method

In this paper, we perform the elastic full waveform inversion following an iterative gradient optimisation scheme. Other approaches may be applied to find the global minimum. First, conjugate gradient methods allow to differently explore the model space to reach the global minimum (Polak, 1971; Luo & Schuster, 1991). The Hessian matrix is as well considered as diagonal behaving (Zadler et al., 2004). The main advantage of this method is its faster convergence but final models remain in the same misfit function area (Molinari et al., 2002). In the Ray-Born approach (Jin et al., 1992), the Hessian diagonal approximation is counterbalanced by a local illumination coefficient depending on the considered point. Pratt et al. (1998) show that iterations in the gradient method allows to progressively introduce Hessian matrix out of diagonal terms, related to the data acquisition aperture and the limited frequency bandwidth. Shin et al. (2001b) uses the virtual source concept developed by Pratt (1999) and modify them to render the Hessian matrix more diagonal, considering that virtual sources are more uncorrelated than when using backpropagated residues. However, this approach is more time-consuming since each virtual source must be calculated to construct the Hessian matrix. Plessix & Mulder (2004) show that, in the acoustic case, the diagonal approximation of the Hessian misleads the inversion engine. Moreover they show that the non-diagonal elements size depends on the background velocity and on the depth. By including some non diagonal terms in the diagonal Hessian matrix, medium imaging is improved. This could be a further improvement of our optimization scheme in the elastic case.

The main difficulty with gradient or Newton methods (Pratt et al., 1998) remains the error estimation and incertitude assessment to define the quality of final parameters images.

The data and model spaces choice

In this study, we highlight the data and model spaces choice influence by considering Born and Rytov approximations and several inverted parameters couples. Model space explorations performed with Born and Rytov approximations differently converge to the global minimum. When the problem is ill-posed, for example with limited aperture acquisition geometries, different model exploration may lead to different local minima. On the contrary, similar results coming from different approximations indicate the good final parameters images quality. Moreover, the inverted parameters couple choice will influence the final parameters images by better recovering anomalies amplitudes or edges. This effect becomes more important when the number of inverted parameters increases. For example, if one aims at recovering seismic velocities and density, several couples of physical parameters may be chosen as Fergues (1996) shows and final images may differ. In order to choose parameters couples, diffraction patterns must be considered. Kormendi & Dietrich (1991) find that seismic impedances inversion gives better results than seismic velocities inversion. To strictly reconstruct three parameters, we should perform the inversion with three components data.

Data preconditioning

Another way to modify the misfit function or better control its gradient direction concerns the data preconditioning. In this study, we perform two kinds of data selection by isolating only near-offset data or by ignoring out-of-phase data with the Rytov approximation. This data discrimination is closely related to the L2 norm choice very sensitive to few outliers. Operto et al. (2004) strongly weights far offset data in their inversion scheme to first reconstruct background parameters. Our data preconditioning with offset represents an extreme case of this offset weighting when the long wavelengths of the background are known. Moreover, in our elastic case, we have searched to increase horizontal seismograms weights to first extract energy coming from them because they are often less well reproduced than vertical seismograms. In this case, final inverted images do not

significantly differ from the ones calculated without weighing. Therefore the algorithm seems to be more sensitive to offsets than to particle motion directions. Tuning the inversion with selected data is a key point to avoid local minima and better converge towards the global one. The weighting choice depends on the background knowledge and the type of information we first aim to recover.

The surface waves modelling

In this approach, we do not discriminate surface waves from body waves in the inversion. The frequency modelling allows to take into account all waves propagating at a given frequency. In practice, this may give rise to some difficulties since surface waves are stronger than body waves in recorded seismograms and contain lower frequencies. As the inversion begins with low frequencies and progressively considers higher frequencies, surface waves normally first control the inversion. Methods using surface waves have been developed by Campman et al. (2004) and Herman et al. (2000) to eliminate scattered surface waves masking waves coming from deeper areas. They construct an effective medium containing anomalies explaining observed scattered waves but they do not search to finely image these anomalies. This method allows to roughly detect scatterers and may be used in our approach as first indicator of medium anomalies. This method allows to construct a less smooth background than the SASW (Nazarian & Stokoe, 1984) and / or the traveltimes tomography (Improta et al., 2002).

Conclusion

In this paper, we have performed the elastic full waveform inversion following a gradient optimization method. The forward problem allows to model all waves propagation in complex media and to properly simulate the free surface. We highlight that the reconstruction of multi parameters is possible as long as data allow to extract information. This means that we need to know the background medium and that this inverse scheme works for backscattering as long as macromodel is available. The next step of this study is to apply the method to real data sets.

acknowledgments We thank P. R. Amestoy and I. S. Duff and J.-Y. L'Excellent for allowing us to use the MUMPS free software (web page : <http://www.enseeiht.fr/lima/apo/MUMPS/>). We greatly thank S. Operto for his very useful comments and precise review. This work has been supporter by BRGM through a contract xxxx. This paper is contribution number XXX of the UMR Géosciences Azur 6526.

4.3.11 Appendix A : Green functions versus propagation operators and impedance matrix for the Born approximation

Diffraction kernels and, therefore, elastic adjoint operator terms have been reconstructed through Green function notation (Tarantola, 1987) and associated discrete formulae have been obtained. One further step has been achieved by expressing spatial derivatives of Green functions using the propagator \mathcal{W} previously defined in equation 4.15. Pratt et al. (1996) and Pratt et al. (1998) have proposed a more compact procedure through the wave operator. We shall show here that this procedure leads to the same adjoint operator discretisation when consistent discretisation is used. After Pratt et al. (1996) and Pratt et al. (1998), the adjoint operator $\Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*]$ for the acoustic case is equal to

$$\Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*] = -\mathcal{S}^t (\mathcal{W}^{-1})^t \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \mathcal{W}^{-1} \Delta V^*. \quad (4.41)$$

The elastic adjoint operator (Pratt, 1990) could be written as

$$\Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*] = -\mathcal{S}^t \partial K / \partial m \Delta V^*, \quad (4.42)$$

where

$$[\partial K / \partial m]_{ij} = \left[(\mathcal{W}^{-1})^t \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \mathcal{W}^{-1} \right]_{ij}. \quad (4.43)$$

We may end up with an expression

$$\Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*] = \Re \left[\begin{array}{cccc} S_x^t(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) & S_z^t(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_x^t(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) & S_z^t(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_p (\mathcal{W}^{-1})^t]_x \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_p (\mathcal{W}^{-1})^t]_z \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_s (\mathcal{W}^{-1})^t]_x \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_s (\mathcal{W}^{-1})^t]_z \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \delta V_x^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \\ \delta V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \end{array} \right] \end{array}, \quad (4.44)$$

with the connection between the Born kernel \mathbf{K} and the \mathcal{W} operator :

$$\left[\begin{array}{c} [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_p (\mathcal{W}^{-1})^t]_x \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_p (\mathcal{W}^{-1})^t]_z \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_s (\mathcal{W}^{-1})^t]_x \\ [(\mathcal{W}^{-1})^t \partial \mathcal{W}^t / \partial V_s (\mathcal{W}^{-1})^t]_z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_p & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_p \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_p & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_p \\ \partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_s & \partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_s \\ \partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_s & \partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) / \partial V_s \end{array} \right] \quad (4.45)$$

an important result obtained by Pratt et al. (1998). From the expression $\mathcal{W}\mathcal{W}^{-1} = \mathcal{I}$ where \mathcal{I} is the identity matrix, one may deduce that the first appearing \mathcal{W}^{-1} matrix in the Born kernel (equation 4.45) contains Green functions and may be written as

$$\left[\begin{array}{cc} G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) & G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\ G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) & G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \end{array} \right]. \quad (4.46)$$

Thanks to the reciprocity principle, $(\mathcal{W}^{-1})^t = \mathcal{W}^{-1}$ and the second appearing \mathcal{W}^{-1} matrix in the Born kernel (equation 4.43) is equal to

$$\left[\begin{array}{cc} G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) & G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) \\ G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) & G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) \end{array} \right]. \quad (4.47)$$

Moreover, the operator $\partial \mathcal{W} / \partial V_p$ is equal to

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial V_p}(\mathbf{x}, \omega) = \left[\begin{array}{cc} \partial \mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega) / \partial V_p & \partial \mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega) / \partial V_p \\ \partial \mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega) / \partial V_p & \partial \mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega) / \partial V_p \end{array} \right], \quad (4.48)$$

with following expressions of partial derivatives :

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_p &= -\frac{\partial}{\partial x}2V_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x} \\
\partial\mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_p &= -\frac{\partial}{\partial x}2V_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z} \\
\partial\mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_p &= -\frac{\partial}{\partial z}2V_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x} \\
\partial\mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_p &= -\frac{\partial}{\partial z}2V_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Similarly, $\partial\mathcal{W}/\partial V_s$ is equal to

$$\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial V_s}(\mathbf{x}, \omega) = \begin{bmatrix} \partial\mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s & \partial\mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s \\ \partial\mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s & \partial\mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s \end{bmatrix}, \tag{4.50}$$

with following expressions of partial derivatives :

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{W}_{xx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s &= \frac{\partial}{\partial x}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z} \\
\partial\mathcal{W}_{xz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s &= -\frac{\partial}{\partial x}4V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x} \\
\partial\mathcal{W}_{zx}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s &= -\frac{\partial}{\partial z}4V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z} \\
\partial\mathcal{W}_{zz}(\mathbf{x}, \omega)/\partial V_s &= \frac{\partial}{\partial z}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}2V_s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Operators $\partial\mathcal{W}/\partial V_p(\mathbf{x}, \omega)$ and $\partial\mathcal{W}/\partial V_s(\mathbf{x}, \omega)$ are diffracting kernels, expressing the interaction of propagating and retropropagating fields with medium parameters (Pratt et al., 1998). For outlining the procedure of discretisation, let us develop only one term $\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p$ corresponding to the elastic adjoint operator part due to a vertical point force source and vertical geophones. Similar procedures will give the other terms. Using equations 4.43, 4.46 and 4.47 and 4.50, we obtain the following expression :

$$\begin{aligned}
\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p &= G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})\{-\partial/\partial x\{2V_p(\mathbf{x})\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})/\partial x\} \\
&\quad - \partial/\partial x\{2V_p(\mathbf{x})\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})/\partial z\}\} \\
&\quad + G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})\{-\partial/\partial z\{2V_p(\mathbf{x})\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})/\partial x\} \\
&\quad - \partial/\partial z\{2V_p(\mathbf{x})\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})/\partial z\}\}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

We need to express spatial derivatives using a finite difference stencil to calculate derivatives appearing in coefficients of the Born Kernel matrix (equation 4.45). This matrix is sparse thanks to the finite difference construction of the matrix W and can be readily estimated from it. We discretize expression 4.52 by applying twice the stencil of Saenger et al. (2000) for the first-order spatial derivatives, following the parsimonious strategy (Luo & Schuster, 1990; Hustedt et al., 2004). Eight non-zero coefficients per line appear in the finite difference matrix nearby the diagonal, depending on the diffracting point position. These coefficients are equal to $\pm 1/2V_p/h^2$ (they are equal to $\pm 1/2V_s/h^2$ or $\pm 3/2V_s/h^2$ when considering V_s as parameter), where the finite difference grid step is denoted h . Injecting these values in equation 4.52 will provide the discrete formulae. This discrete formulae is inserted in the component term of the elastic adjoint operator and gives an expression identical to the expression 4.34. Therefore, this shows the equivalence between the discrete approach of Pratt et al. (1998) and the analytical discrete expressions of Tarantola (1987).

4.3.12 Appendix B : Elastic Rytov analytical approximation

We first recall that equations governing the waves propagation in a homogeneous elastic medium defined by the homogeneous density $\rho^0(\mathbf{x})$ and the fourth-order elastic tensor $C_{ijkl}^0(\mathbf{x})$ are

$$-\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) = S_i(\mathbf{x}, \omega). \quad (4.53)$$

We then consider weak heterogeneities (scatters) in the medium that perturb waves through equation 4.19. Therefore equation 4.53 can be written as

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) \\ & = S_i(\mathbf{x}, \omega) + \omega^2 \delta \rho(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Because of the scatters presence, propagating fields $V_i(\mathbf{x}, \omega)$ are perturbed and are shifted with respect to referenced propagating fields $V_i^0(\mathbf{x}, \omega)$ in the homogeneous medium through

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{x}, \omega) & = V_i^0(\mathbf{x}, \omega) e^{\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)} \\ V_k(\mathbf{x}, \omega) & = V_k^0(\mathbf{x}, \omega) e^{\delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Therefore the left hand side of equation 4.54 equals to

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) \\ & = (-\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) e^{\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega) - \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)} \\ & \quad - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_k \partial x_l} \\ & \quad - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \\ & \quad - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2 \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_k \partial x_l}) e^{\delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

We perform a first order Taylor-Lagrange development of $e^{\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)}$ and $e^{\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega) - \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}$ since $\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)$ and $\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega) - \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)$ are considered as small perturbations. Therefore, we approximate these expressions using $e^{\mathbf{x}} = 1 + \mathbf{x}$. We develop equation 4.53 and eliminate common terms which gives us the following expression

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) = -\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) (\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega) - \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)) \\ & \quad - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l \partial x_j} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\ & \quad - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \frac{\partial (\delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega))}{\partial x_j} (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)) - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial (\delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega))}{\partial x_l} (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)) \\ & \quad - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \frac{\partial (\delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega))}{\partial x_l} (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)) - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2 \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l \partial x_j} (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

The last expression is equal to $\delta \rho(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) + S_i(\mathbf{x}, \omega)$ since it is the right hand side of equation 4.54. Since

$$\begin{aligned} & \delta \rho(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) + S_i(\mathbf{x}, \omega) \\ & = \delta \rho(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial (V_k^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)))}{\partial x_l}) + S_i(\mathbf{x}, \omega), \end{aligned} \quad (4.58)$$

we get the expression

$$-\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) \delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial (V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega))}{\partial x_l}) = \omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)$$

$$\begin{aligned}
& -C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& -C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2 \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l \partial x_j} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& + \delta \rho(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial (V_k^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)))}{\partial x_l}).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

The right hand side of the equation is the source term $S_c^i(\mathbf{x}, \omega)$ corresponding to scatters effects. The propagating field is now $V_i^0(\mathbf{x}, \omega) \delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)$ instead of $V_i^0(\mathbf{x}, \omega) e^{\delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)}$ as in equation 4.53. Following the classical scattering field formulation, we write

$$V_n^0(\mathbf{r}, \omega) \delta \psi_n(\mathbf{r}, \omega) = \int_M G_{ni}^0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) S_c^i(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}. \tag{4.60}$$

By replacing $S_c^i(\mathbf{x}, \omega)$ with its value, we finally obtain

$$\begin{aligned}
\delta \psi_n(\mathbf{r}) V_n^0(\mathbf{r}, \omega) &= \int_M (\omega^2 \rho^0(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& - \frac{\partial C_{ijkl}^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& - C_{ijkl}^0(\mathbf{x}) V_k^0(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2 \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l \partial x_j} \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega) \\
& + \delta \rho(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_i(\mathbf{x}, \omega)) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial (V_k^0(\mathbf{x}, \omega) (1 + \delta \psi_k(\mathbf{x}, \omega)))}{\partial x_l}) G_{ni}^0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

By neglecting multiple scattering terms as for the Born approximation, performing integration by part for the second remaining term of the right-hand side and considering no perturbation on the model edges, we finally get the perturbed phase

$$\begin{aligned}
\delta \psi_n(\mathbf{r}) V_n^0(\mathbf{r}, \omega) &= \int_M (\omega^2 \delta \rho(\mathbf{x}) V_i^0(\mathbf{x}, \omega) G_{ni}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{x}) \\
& - \frac{\partial G_{ni}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{x})}{\partial x_j} \delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial V_k^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_l}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Following the Born approximation approach, we factorize the source term $S_q^f(\mathbf{r}, \omega)$ in the previous equation and, therefore, we obtain

$$\begin{aligned}
\delta \psi_{nq}(\mathbf{x}) G_{nq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) &= \int_M (\omega^2 \delta \rho(\mathbf{x}) G_{iq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) G_{ni}^0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \\
& - \frac{\partial G_{ni}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{x})}{\partial x_j} \delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{kq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x_l}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Dividing by the reference Green function $G_{nq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$, we obtain at last

$$\begin{aligned}
\delta \psi_{nq}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{G_{nq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \int_M (\omega^2 \delta \rho(\mathbf{x}) G_{iq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) G_{ni}^0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \\
& - \frac{\partial G_{ni}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{x})}{\partial x_j} \delta C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{kq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x_l}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

This equation linearly connects model parameters and complex phases through Rytov approximation. The elastic adjoint operator will be deduced and discretized (see equation 4.39 for one component term) as for the Born approximation (see equation 4.31 for one component term).

4.3.13 Appendix C : Green function versus impedance matrix for Rytov approximation

We follow the same procedure detailed in Appendix A. As already pointed out, the data we shall consider in the Rytov approximation are complex phases. These complex source phase \mathcal{S}_r and receiver phase \mathcal{X}_r are related to the field source \mathcal{S} and synthetic receiver seismograms \mathcal{X} through $\mathcal{X}_r = Ln(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}_r = Ln(\mathcal{S})$. Real seismograms are denoted by d . The Rytov elastic adjoint operator is equal to

$$\Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*] = \left(\frac{\partial \mathcal{X}_r}{\partial m}\right)^t \Delta d_r^*, \quad (4.65)$$

where B_0^r is the Fréchet derivatives matrix for a forward problem with a \mathcal{S}_r source. The complex phase shift Δd_r^* may be written as $\Delta[Ln(d)^*]$. Moreover, partial derivatives of seismograms with respect to model parameters may be expressed as

$$\frac{\partial \mathcal{X}_r}{\partial m} = \frac{\partial Ln(\mathcal{X})}{\partial m} = \mathcal{X}^{-1} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial m}. \quad (4.66)$$

Therefore, the equation 4.65 becomes

$$\Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*] = \frac{\partial \mathcal{X}^t}{\partial m} (\mathcal{X}^{-1})^t \Delta[Ln(d^*)]. \quad (4.67)$$

As $\partial \mathcal{X}^t / \partial m = \mathcal{X}^t \partial \mathcal{W} / \partial m \mathcal{W}^{-1}$ (equations 15 and 16 of Pratt et al. (1998)), we get

$$\Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*] = -\mathcal{S}^t (\mathcal{W}^{-1})^t \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \mathcal{W}^{-1} \mathcal{W}^t (\mathcal{S}^{-1})^t \Delta[Ln(d^*)]. \quad (4.68)$$

The interpretation of this misfit function gradient will distinguish three terms which are different from Born ones but similar : the forward propagating field $\mathcal{W}^{-1} \mathcal{S}$, the backpropagated complex phase residues weighted by the reference forward propagating field $\mathcal{W}^{-1} \mathcal{W}^t (\mathcal{S}^{-1})^t \Delta[Ln(d^*)]$ which is specific to Rytov approach and their interaction with local medium parameters variations $\partial \mathcal{W} / \partial m$. For a vertical force source and vertical receivers, the component term of the Rytov elastic adjoint operator turns out to be

$$\begin{aligned} \Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*]_{zz}^{V_p} &= -V_p^0(ix, iz)/2h^2 \sum_{\mathbf{s}} \frac{1}{S_z^f(\omega, \mathbf{s}) G_{zz}^0(\mathbf{s}, \omega, \mathbf{r})} \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \{ \right. \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{r}) - G_{zz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{r}) \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{r}) + G_{zz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{r}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{r}) - G_{zz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{r}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{r}) + G_{zz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{r}) \} \delta Ln(V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})) \} \\ &\{ - G_{xz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{s}) - G_{zz}^0(ix-1, iz-1, \omega, \mathbf{s}) \\ &- G_{xz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{s}) + G_{zz}^0(ix-1, iz, \omega, \mathbf{s}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{s}) - G_{zz}^0(ix, iz-1, \omega, \mathbf{s}) \\ &+ G_{xz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{s}) + G_{zz}^0(ix, iz, \omega, \mathbf{s}) \} S_z^f(\omega, \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (4.69)$$

This equation corresponds to the discretized expression of the equation 4.39 with the finite difference stencil of Saenger et al. (2000). For other geometries of sources and receivers, similar expressions could be deduced. Consequently, for the Rytov approximation, discretizing the Green function spatial derivatives or discretizing the wave operator leads to same discrete formulations of the elastic adjoint operator as for the Born approximation. This discretisation will be used in our numerical applications.

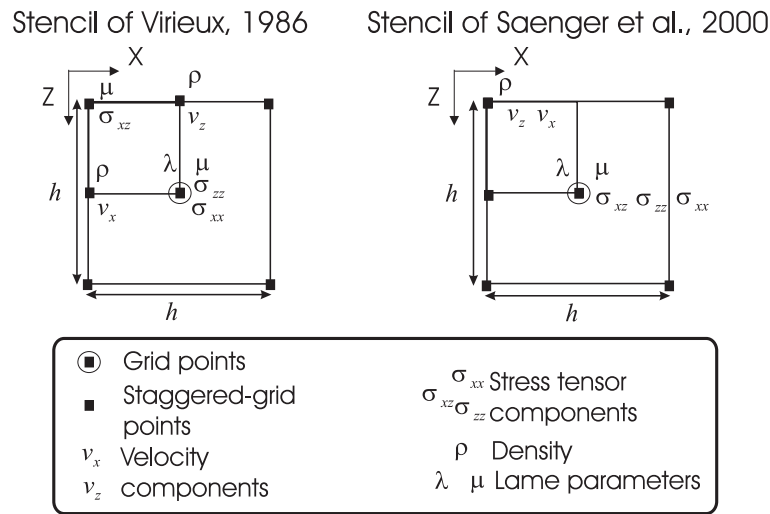


FIG. 4.2: Comparison between the 2nd order finite difference stencils of Virieux (1986) (left) and Saenger et al. (2000) (right)

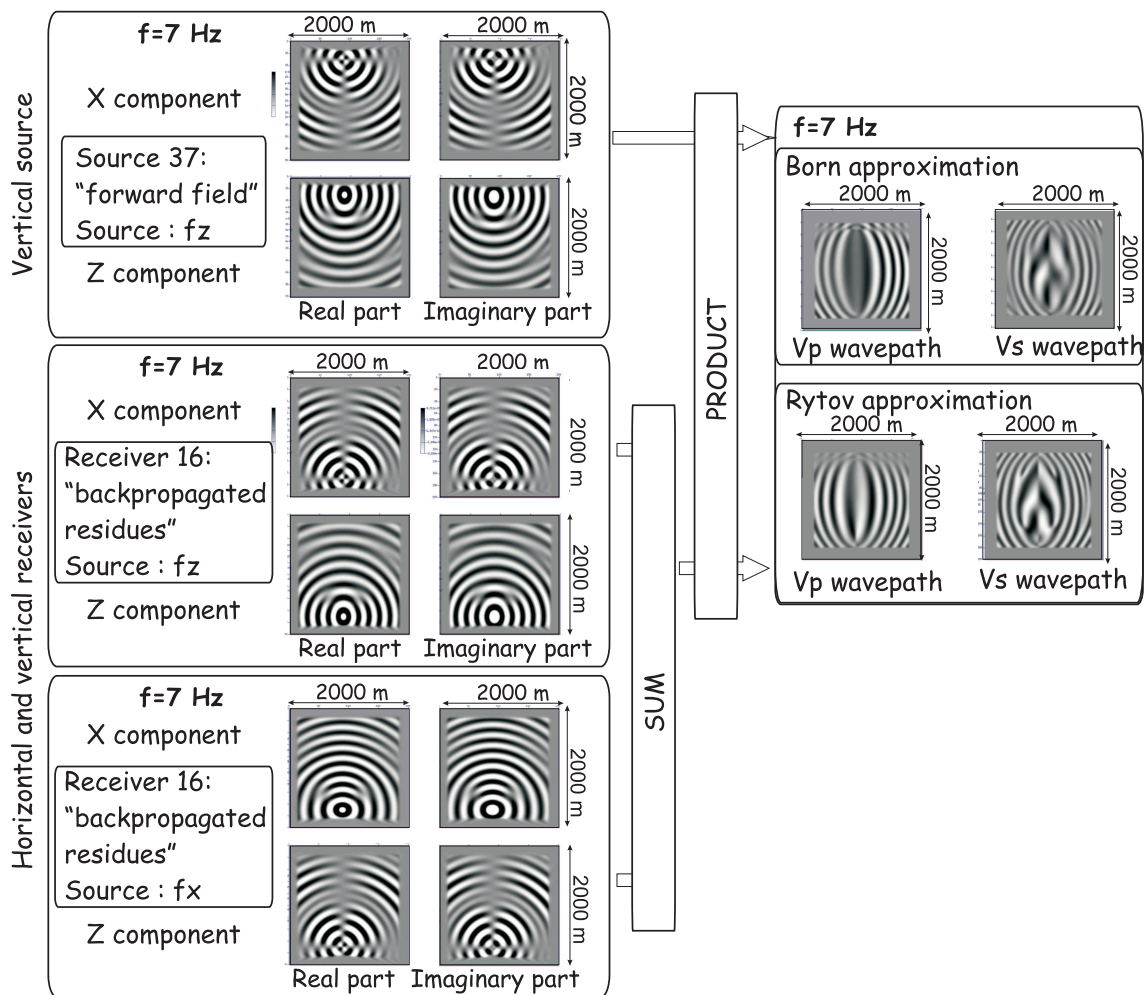


FIG. 4.3: Gradient kernel construction with the Born and Rytov approximations. Frequency maps show the waves propagation at a given frequency on the left. On the right gradients are displayed for one source-receiver couple with the Fresnel zone interpretation.

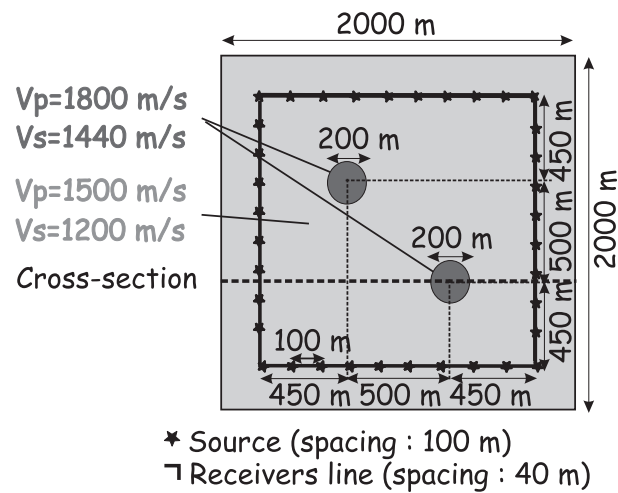


FIG. 4.4: Background and transmission acquisition geometry synthetic example for illustration of Born and Rytov approximations performances. Background medium is homogeneous. Perturbations are 20 % high. Acquisition geometry provides transmission effects.

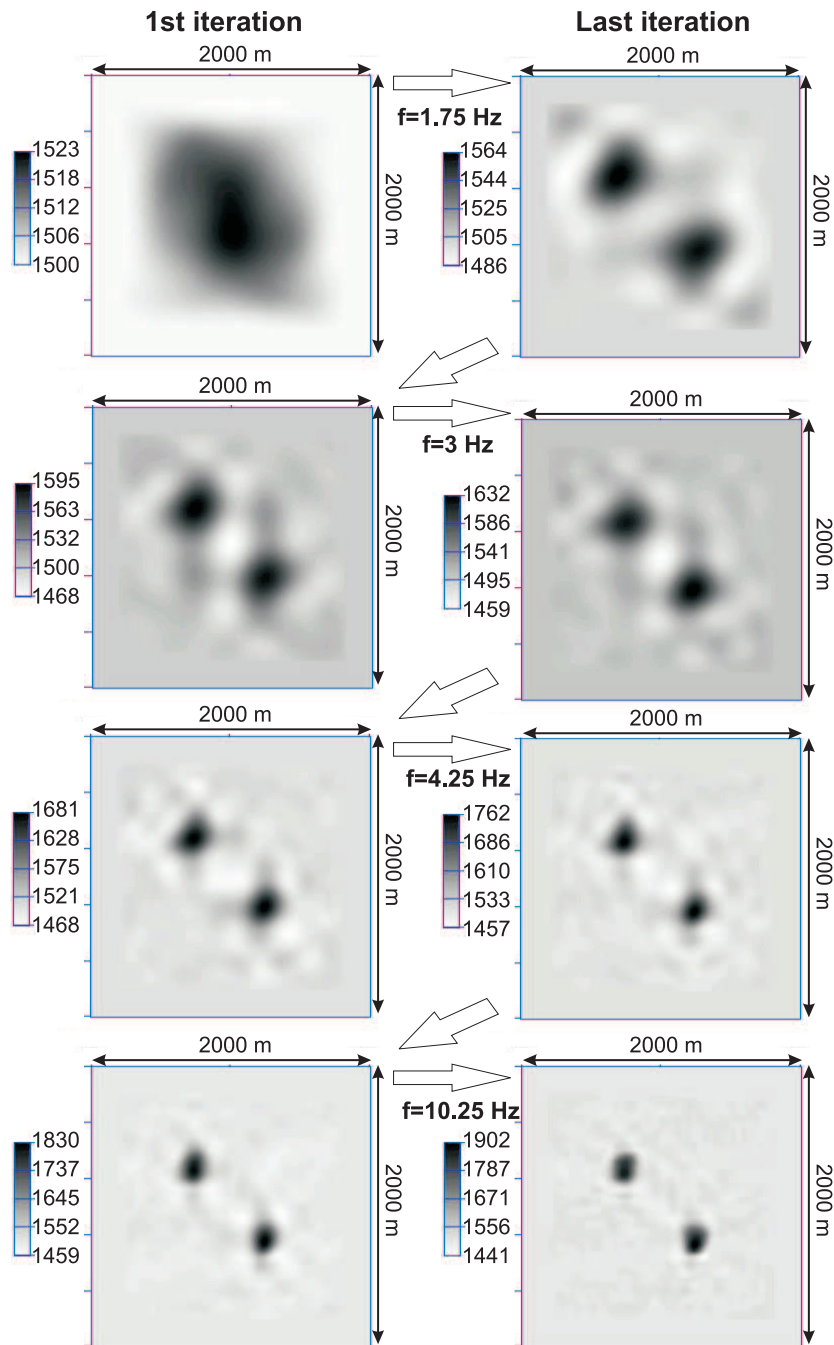


FIG. 4.5: V_p progressive imaging with the frequency increase in the Born approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.

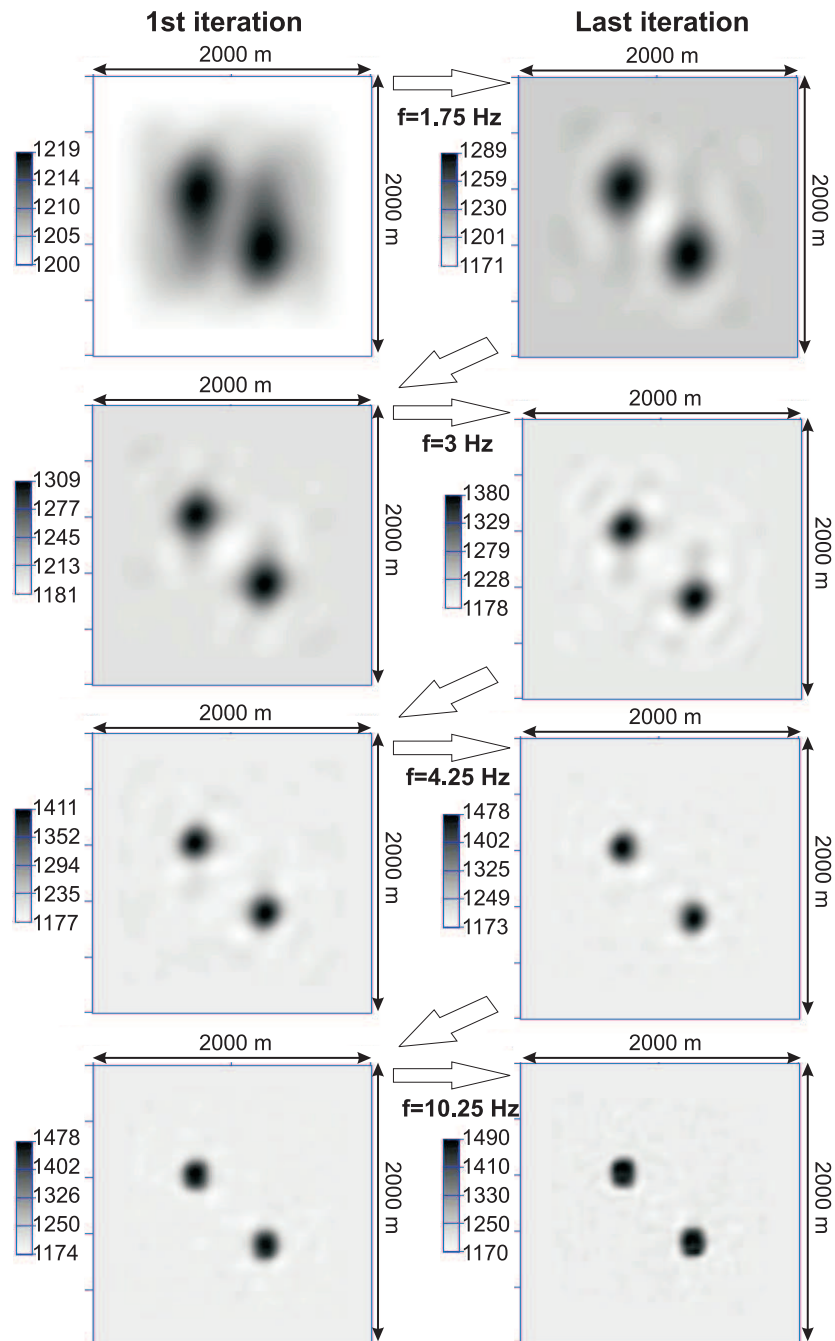


FIG. 4.6: V_s progressive imaging with the frequency increase in the Born approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.

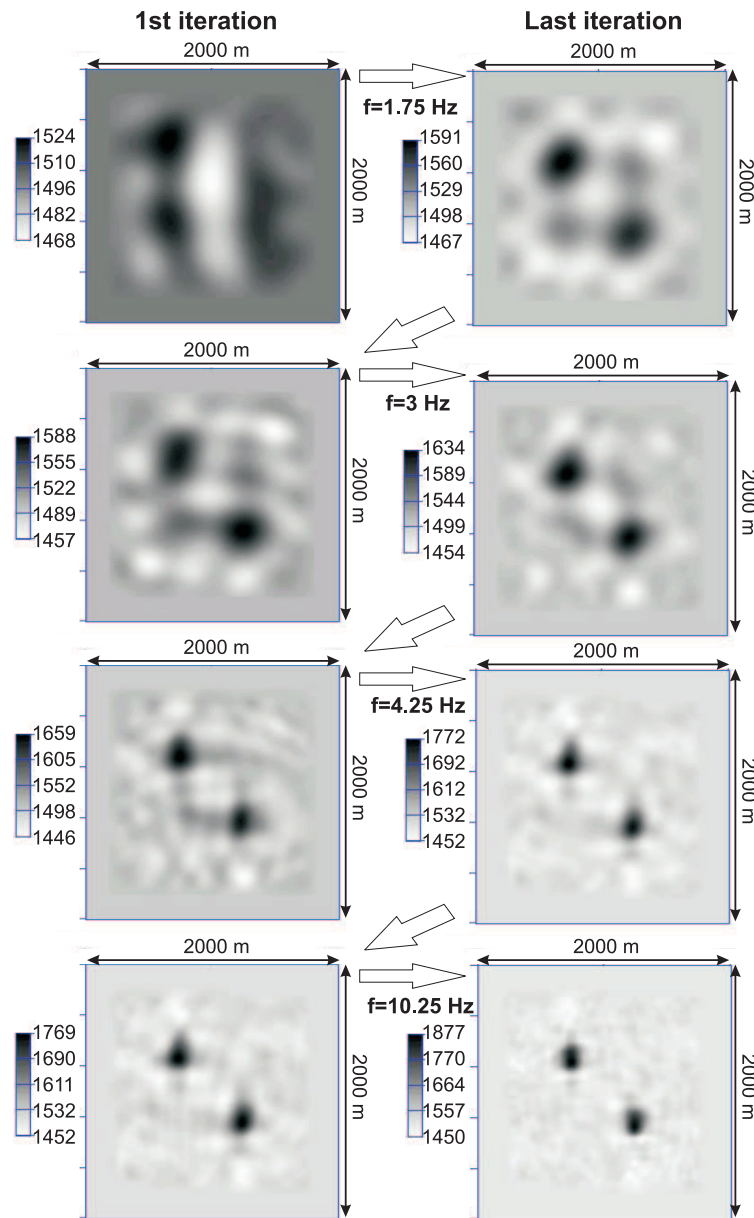


FIG. 4.7: V_p progressive imaging with the frequency increase in the Rytov approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.

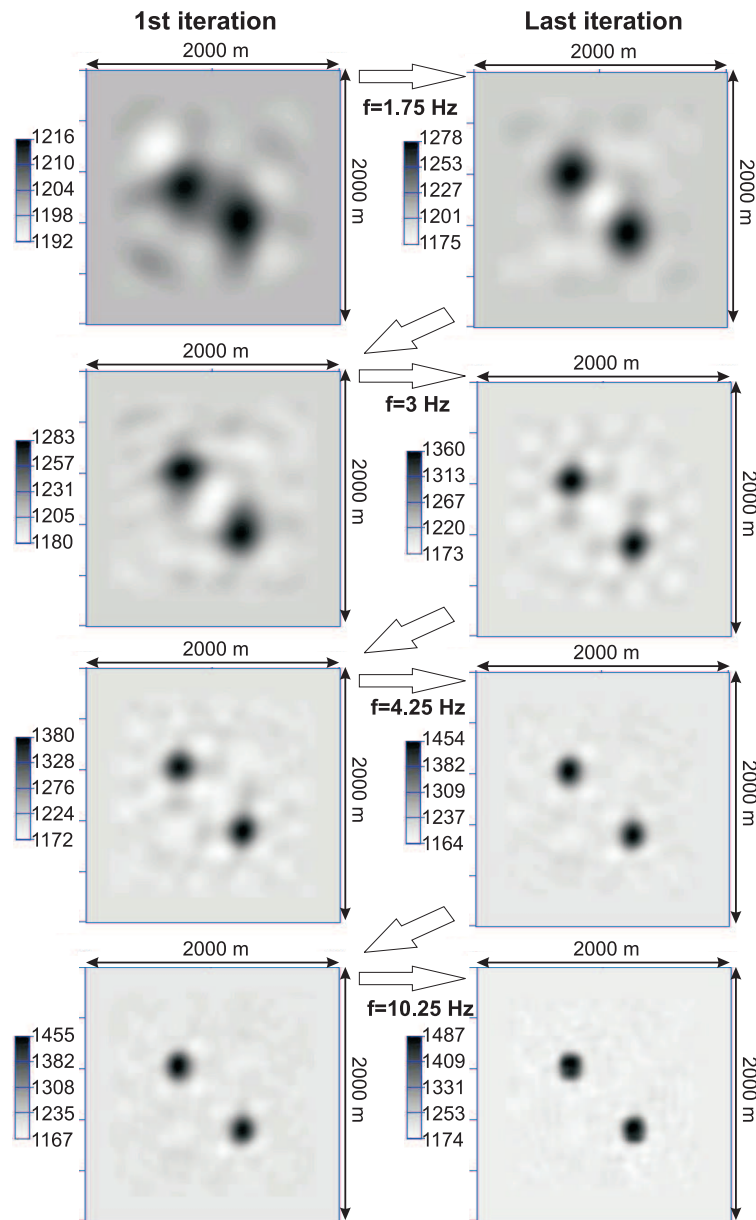


FIG. 4.8: V_s progressive imaging with the frequency increase in the Rytov approximation. Please note the importance of frequency in focusing anomalies.

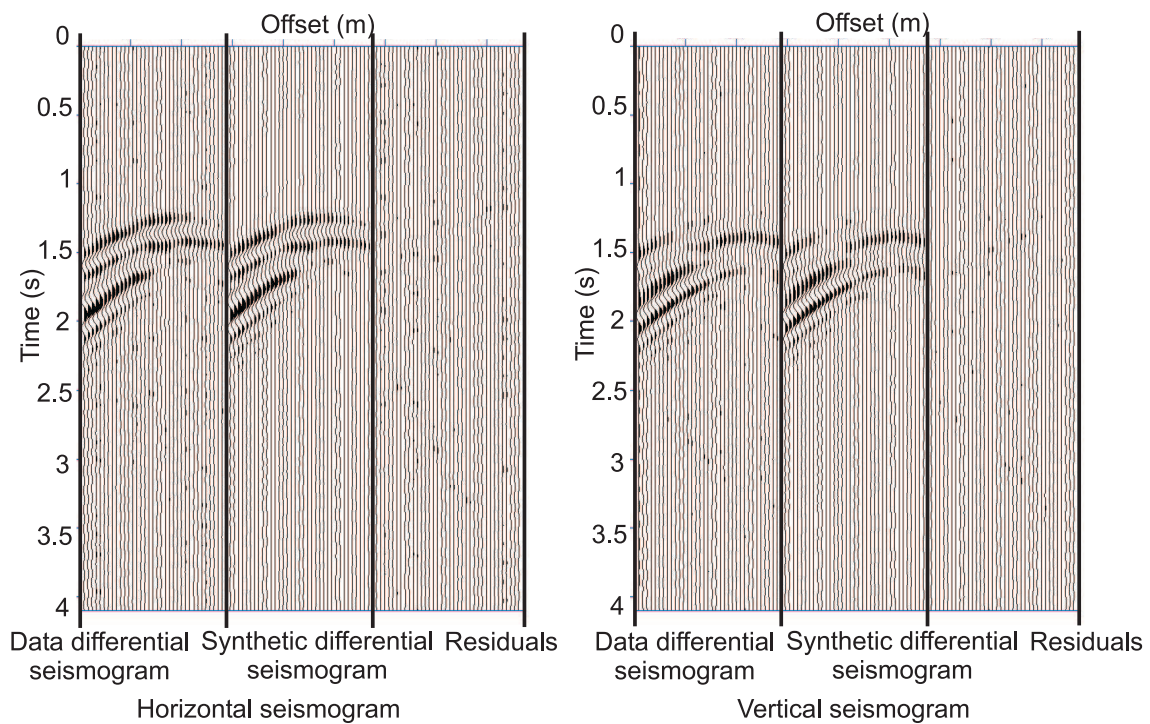


FIG. 4.9: Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) with the Born approximation.

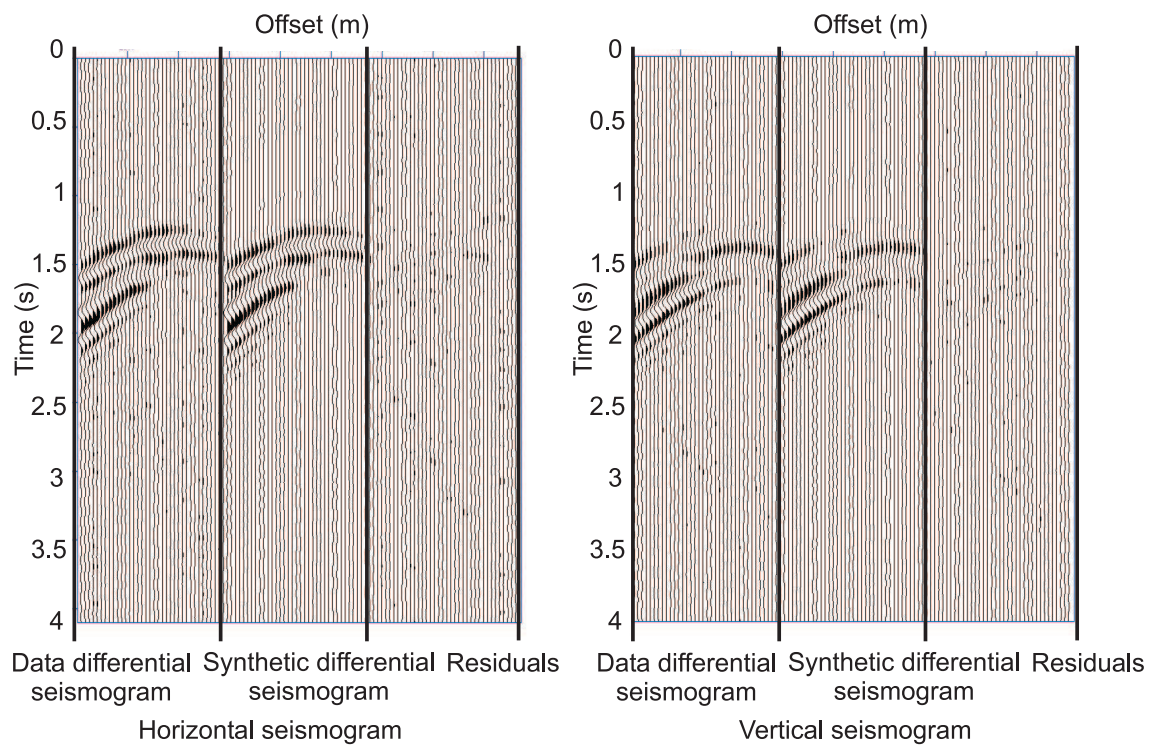


FIG. 4.10: Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) with the Rytov approximation.

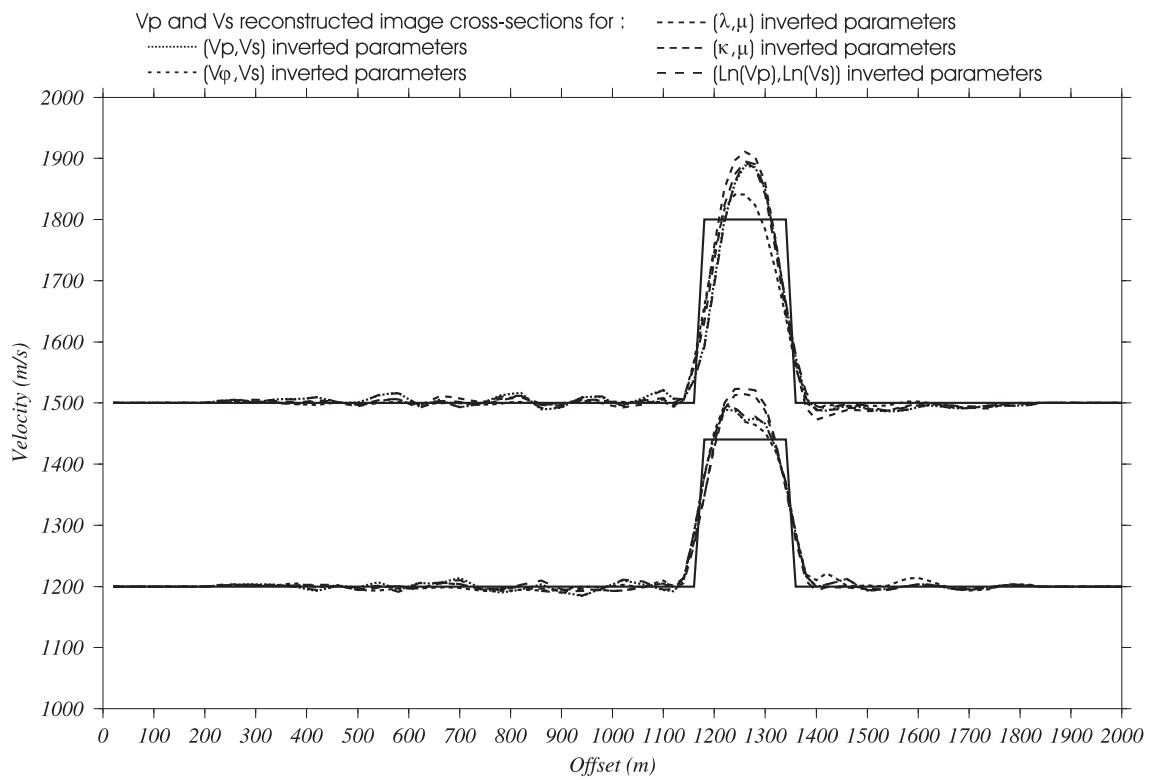


FIG. 4.11: V_p and V_s parameters cross-sections extracted along a horizontal line crossing the lowest anomaly (see figure 4.4) and calculated with the Born approximation for different parameters couples.

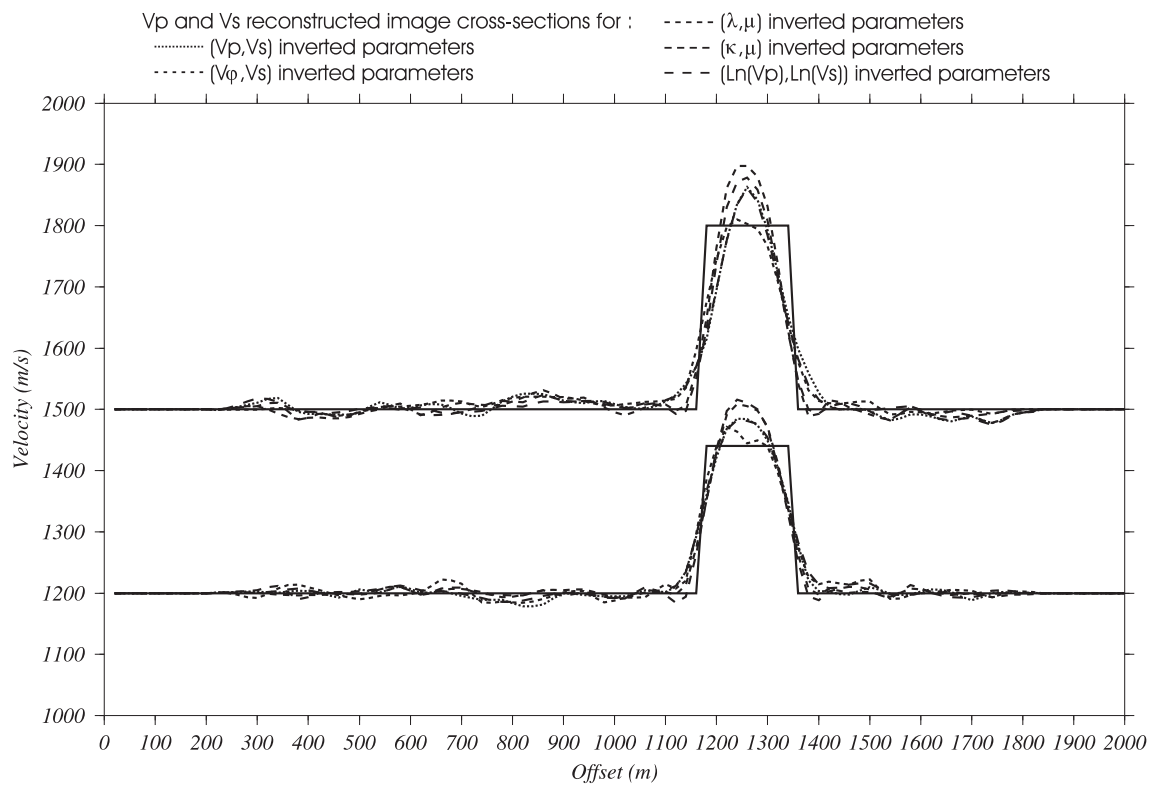


FIG. 4.12: V_p and V_s parameters cross-sections extracted along a horizontal line crossing the lowest anomaly (see figure 4.4) and calculated with the Rytov approximation for different parameters couples.

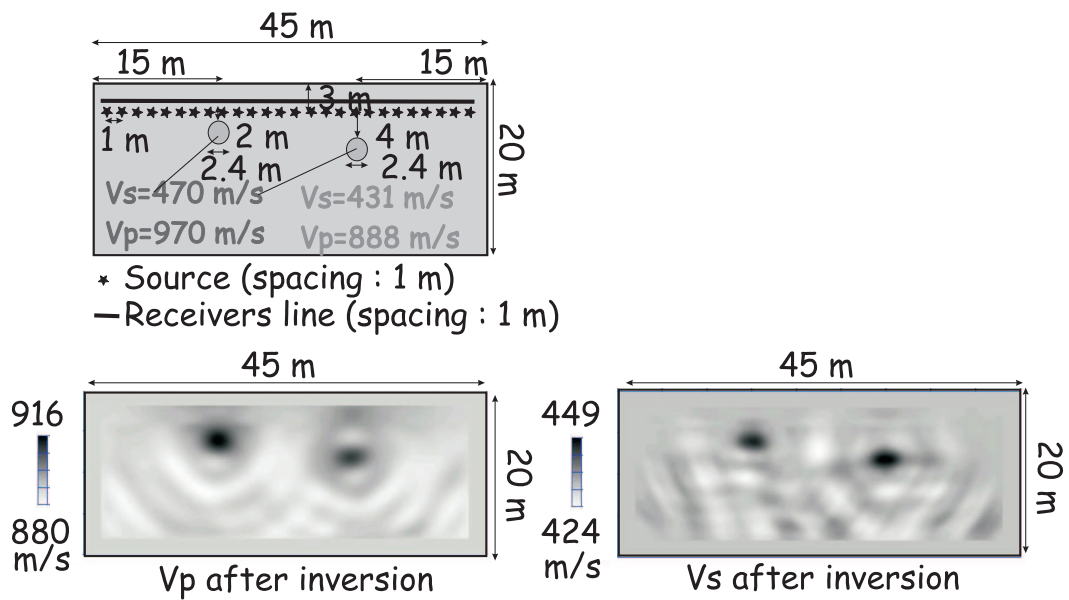


FIG. 4.13: Top : Background and reflection acquisition geometry. Bottom : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation

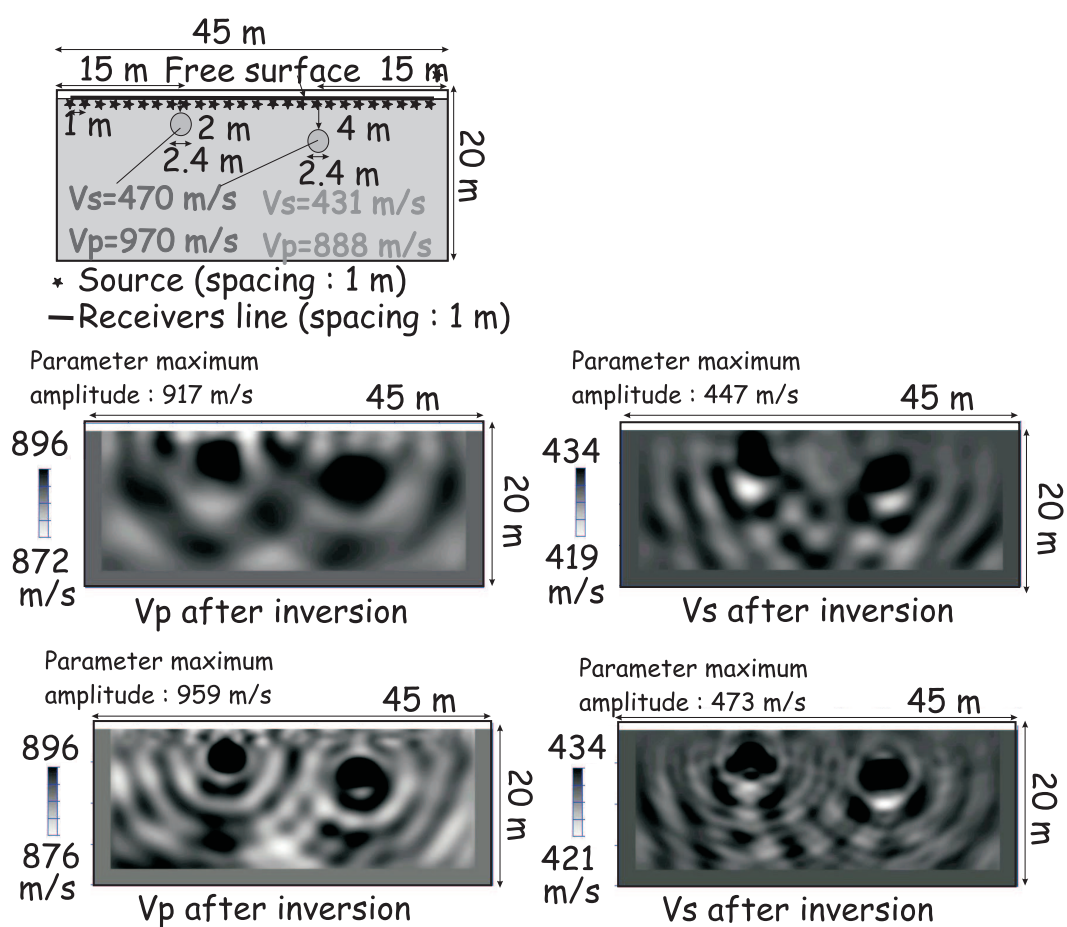


FIG. 4.14: Top : Background, free surface and reflection acquisition geometry. Middle : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation and the full data set. Bottom : V_p (left) and V_s (right) parameters calculated with the Born approximation and progressively introduced data set. Parameters maps colors are saturated to highlight reconstructed anomalies.

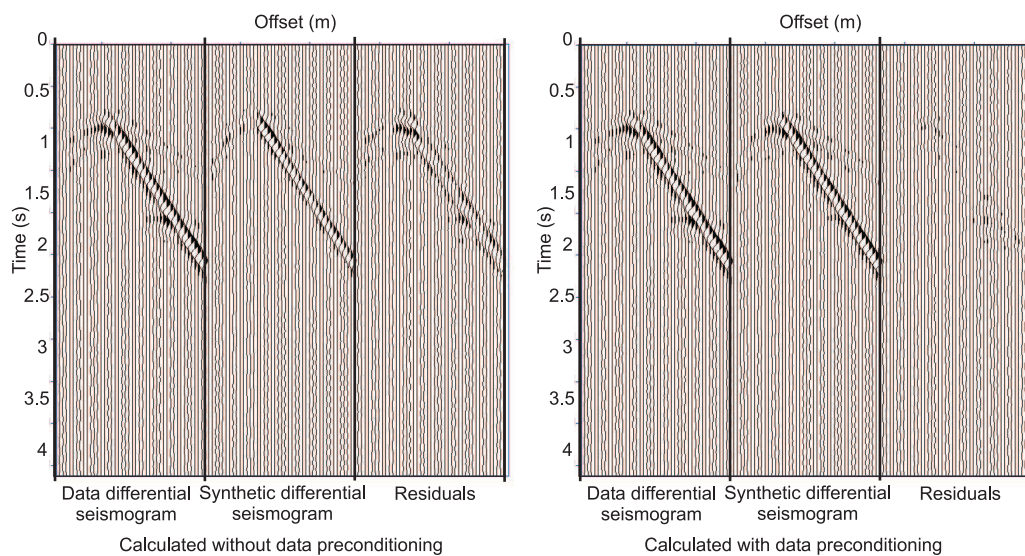


FIG. 4.15: Comparison of data differential seismograms (difference between data to be inverted and data calculated in the initial model), synthetic differential seismograms (difference between data calculated in the final model and data calculated in the initial model) and residuals (difference between data differential seismograms and synthetic differential seismograms) calculated without and with data preconditioning for the horizontal component with the Born approximation.

4.4 Quelques points de l'article détaillés

4.4.1 Calcul détaillé des dérivées de Fréchet avec l'approximation de Rytov

Soulignons la structure des sommations effectués dans les équations 4.19, dans lesquelles les expressions telles que 4.23 constituent les termes sommés. Pour chaque source, le calcul des résidus rétropropagés est effectué pour tous les capteurs et champs directs et champs rétropropagés sont multipliés (ou convolués à phase nulle dans le domaine temporel). Les contributions de ce type sont ensuite sommées pour chaque source, permettant d'obtenir l'image finale.

Nous avons également implémenté l'inversion pour l'approximation de Rytov. L'opérateur adjoint élastique B_0^r pour l'approximation de Rytov est exprimé par :

$$(B_0^r)^t(\mathbf{x}, \omega) = \begin{bmatrix} S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \\ \partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Le gradient est donc égal à :

$$\Re[(B_0^r)^t \Delta \mathbf{d}_r^*] = \Re \left[\sum_{\mathbf{s}} \begin{bmatrix} S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_x^f(\omega, \mathbf{s}) & S_z^f(\omega, \mathbf{s}) \end{bmatrix} \left\{ \sum_{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} \partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p & \partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p \\ \partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \\ \partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s & \partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \text{Ln}(V_x^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})) \\ \delta \text{Ln}(V_z^*(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})) \end{bmatrix} \right\} \right]. \quad (4.71)$$

Donc les dérivées partielles du kernel de Rytov $\partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p$ sont obtenus par :

$$\frac{\partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} = -2V_p^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_z^f(\omega, \mathbf{s})G_{zz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\} \quad (4.72)$$

et les dérivées partielles $\partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$ sont égales à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_z^f(\omega, \mathbf{s})G_{zz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} - 2 \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &- 2 \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}. \end{aligned}$$

Les autres composantes de la matrice des dérivées de Fréchet peuvent être estimées pour V_p and V_s à l'aide des relations suivantes :

$$\frac{\partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} = -2V_p^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_x^f(\omega, \mathbf{s})G_{xx}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_z^f(\omega, \mathbf{s})G_{xz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_x^f(\omega, \mathbf{s})G_{zx}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_x^f(\omega, \mathbf{s})G_{xx}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} - 2 \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_z^f(\omega, \mathbf{s})G_{xz}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} - 2 \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -2V_s^0(\mathbf{x}) \frac{1}{S_x^f(\omega, \mathbf{s})G_{zx}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})} \left\{ \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \right\} - 2 \frac{\partial G_{xz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ces notations sont valables strictement pour des fonctions de Green. Si la source est explosive et résulte de la superposition de plusieurs fonctions de Green, le coefficient en $1/(S_y^f(\omega, \mathbf{s})G_{yy'}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}))$, où y et y' sont des indices égaux à x ou z , se transforme en une somme de fonctions de Green telle que : $1/\sum_y(S_y^f(\omega, \mathbf{s})G_{yy'}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})) = 1/V_y^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s})$.

Ces équations proviennent de l'égalité suivante, valable strictement pour des perturbations du champ et des paramètres faibles :

$$\delta G_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) = G_{pq}^0(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}) \delta \psi_{pq}(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{s}). \quad (4.79)$$

4.4.2 Calcul de la dérivée de la matrice d'impédance

Nous présentons ici la structure de la dérivée de la matrice d'impédance W présentée dans la section 2.7.3. Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.7.3, la structure de cette matrice est complètement liée au choix du stencil de différences finies d'ordre 2 de Saenger et al. (2000). Nous présentons ici la structure de la matrice $\partial W/\partial V_p$ et $\partial W/\partial V_s$ sur les figures 4.16 et 4.17.

Ces matrices sont creuses comme le montrent les figures 4.16 et 4.17. Le nombre de coefficients non nuls par ligne (8 coefficients) est inférieur à celui de la matrice d'impédance W (18 coefficients).

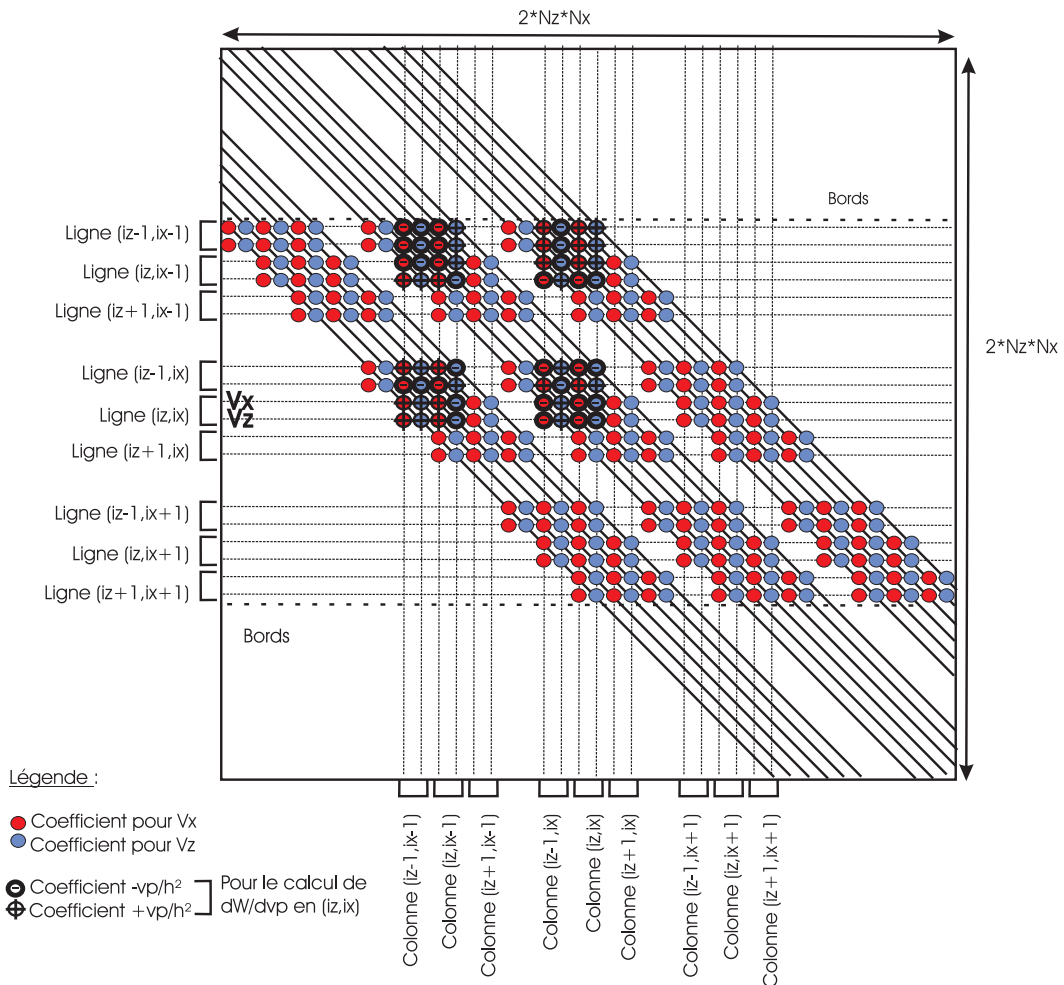


FIG. 4.16: Structure de la matrice $\partial W/\partial V_p$, dérivée de la matrice d'impédance W par rapport à V_p . Notons la structure bande-diagonale liée au stencil utilisé de Saenger et al. (2000). Les termes entourés sont les termes non nuls dans la matrice $\partial W/\partial V_p$. Les non entourés sont les termes nuls dans la matrice $\partial W/\partial V_p$ mais non nuls dans la matrice W (voir la figure 2.13)

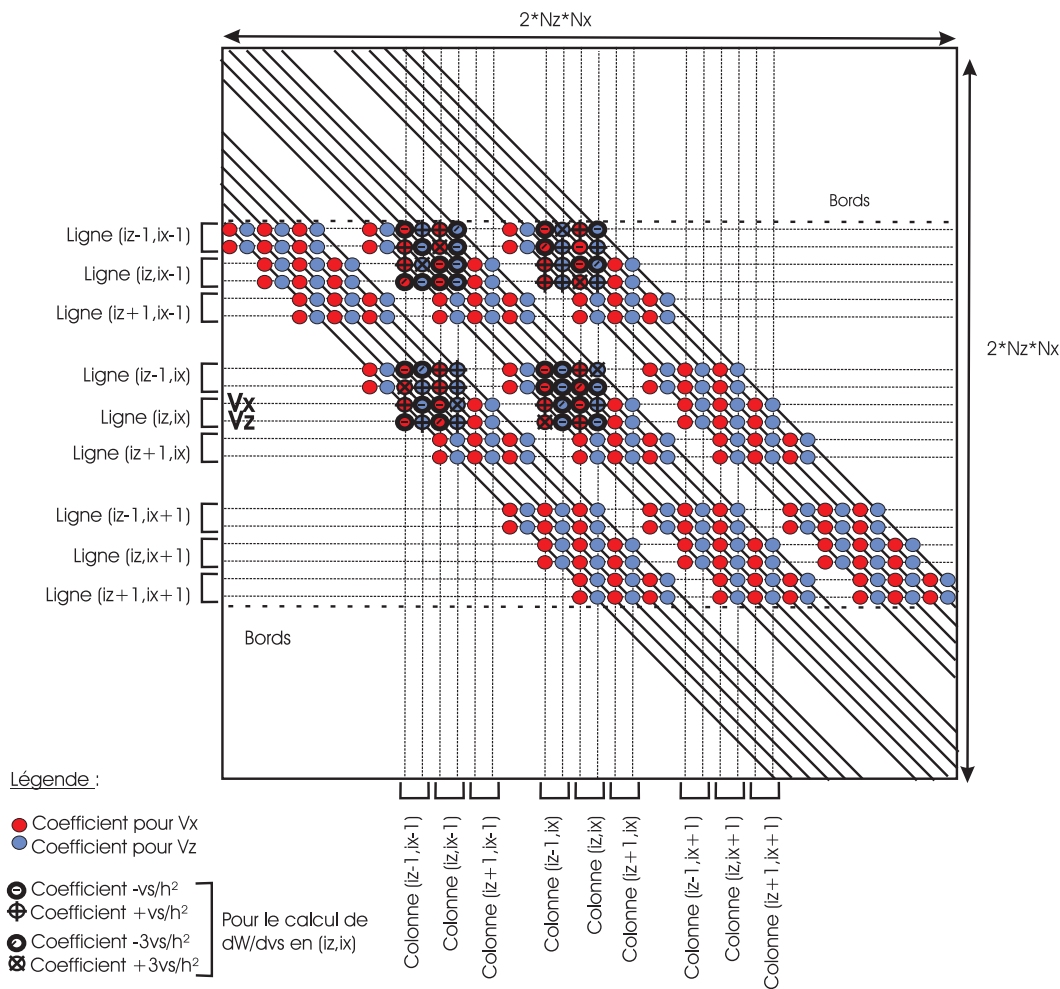


FIG. 4.17: Structure de la matrice $\partial W/\partial V_s$, dérivée de la matrice d'impédance W par rapport à V_s . Notons la structure bande-diagonale liée au stencil utilisé de Saenger et al. (2000). Les termes entourés sont les termes non nuls dans la matrice $\partial W/\partial V_s$. Les non entourés sont les termes nuls dans la matrice $\partial W/\partial V_s$ mais non nuls dans la matrice W (voir la figure 2.13)

Les matrices du type $\partial W/\partial m_1$ et $\partial W/\partial m_2$, où (m_1, m_2) est un couple de paramètres physiques (comme les paramètres de Lamé (λ, μ) par exemple) sont reliées aux matrices $\partial W/\partial V_p$ et $\partial W/\partial V_s$ grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial m_1} &= \frac{\partial W}{\partial V_p} \frac{\partial V_p}{\partial m_1} + \frac{\partial W}{\partial V_s} \frac{\partial V_s}{\partial m_1} \\ \frac{\partial W}{\partial m_2} &= \frac{\partial W}{\partial V_p} \frac{\partial V_p}{\partial m_2} + \frac{\partial W}{\partial V_s} \frac{\partial V_s}{\partial m_2}\end{aligned}\quad (4.80)$$

Les termes du type $\partial V_p/\partial m_1$ sont des matrices diagonales si les grandeurs physiques sont situées sur le même point de la grille numérique de Saenger et al. (2000). Cependant, si les grandeurs physiques sont définies sur le maillage en quinconce, *i.e.* sur la grille portant les contraintes, les matrices du type $\partial V_p/\partial m_1$ deviennent bande diagonale, les coefficients non nuls se situant près de la diagonale.

A titre de remarque, certains couples de paramètres résultent d'une combinaison linéaire d'autres paramètres. Par exemple, les paramètres (V_p, V_s) peuvent être reliés linéairement aux paramètres (V_ϕ, V_s) par la relation 4.40. En revanche, d'autres couples de paramètres ont des relations non linéaires entre eux, comme les paramètres (V_p, V_s) et (λ, μ) .

4.4.3 Paramétrisation du problème inverse

Ainsi, le problème inverse est paramétrisé de la même manière que le problème direct, à l'aide d'une grille cartésienne régulière uniforme. Cette grille peut néanmoins être décimée par rapport à la grille de différences finies du problème direct, de manière à diminuer le coût de calcul. Cette implémentation paraît en effet naturelle lorsque le problème direct est résolu sur une grille de différences finies (Ravaut, 2003). Néanmoins, d'autres paramétrisations comme les B-splines (Pratt et al., 1996) ou une décomposition en ondelettes (Hustedt et al., 2003) pourraient également être implémentées.

4.4.4 Structure du Hessien

D'après Pratt et al. (1998), le Hessien est égal à $B_0^t B_0^* + R$ (voir section 4.3) où R est un terme permettant de prendre en compte les diffractions secondaires. Il est la plupart du temps négligé dans l'inversion. En effet, d'après Tarantola (1987), il est négligeable lorsque les résidus sont faibles ou lorsque le problème direct est quasi-linéaire. De plus, le calcul de ce terme se révèle très coûteux numériquement. Nous nous concentrons donc exclusivement sur le terme $H_a = \Re[B_0^t B_0^*] = \Re[B_0^\dagger B_0]$.

Dans l'inversion présentée dans la partie 4.3, nous ne conservons que la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$. Pratt et al. (1996) a montré que l'utilisation de l'inverse de $\Re[B_0^t B_0^*]$ dans l'inversion (méthode de Gauss-Newton) améliore considérablement la solution. Dans cette partie, nous examinons l'importance de l'approximation de la partie $\Re[B_0^t B_0^*]$ du Hessien par sa diagonale pour des configurations d'acquisition et des fréquences différentes.

Structure générale du Hessien

La matrice $\Re[B_0^t B_0^*]$ va de l'espace des modèles vers l'espace des modèles. Elle permet d'évaluer *a priori* le potentiel d'imagerie d'une acquisition et ne dépend pas des données.

En effet, en reprenant les notations de Pratt et al. (1998) déjà présentées dans l'article (section 4.3), $B_0^t = \partial X^t/\partial m$. Comme le problème direct s'exprime par $W X = S$ (voir le problème direct dans la section 2.7.3) et puisque la source ne dépend pas des paramètres du milieu, $W \partial X/\partial m = -b \partial W/\partial m X$, ou alors : $\partial X/\partial m = -W^{-1} \partial W/\partial m X$. Pratt et al. (1998) interprètent les termes $-\partial W/\partial m X$ comme des sources fictives, liées à l'excitation par l'onde incidente X des points

diffRACTANTS du milieu contenus dans $\partial W/\partial m$. Ainsi, $B_0^t = \partial X^t/\partial m = -X^t \partial W^t/\partial m (W^t)^{-1}$. Comme W est une matrice symétrique (voir partie 2.7.3), $B_0^t = -X^t \partial W/\partial m W^{-1}$. Donc

$$\Re[B_0^t B_0^*] = -X^t \partial W/\partial m W^{-1} (W^*)^{-1} \partial W^*/\partial m X^* \quad (4.81)$$

$\Re[B_0^t B_0^*]$ ne dépend que de la matrice d'impédance, *i.e.* des paramètres du milieu, et du champ direct X . Les résidus n'interviennent pas dans l'expression. Selon Shin et al. (2001b), cette interprétation de $\Re[B_0^t B_0^*]$ avec des sources virtuelles secondaires et des champs diffractés n'est valable que pour le cas d'un problème direct simulé avec des différences finies ou une méthode numérique équivalente.

La figure 4.18 montre la structure de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour l'inversion de V_p et de V_s lors d'une acquisition en transmission totale, *i.e.* les sources positionnées sur un côté émettent des ondes enregistrées par des capteurs situés sur le côté opposé. Ces sources sont localisées sur les 4 côtés du modèle sans surface libre et sont enregistrées par des récepteurs situés sur les 4 côtés. La figure 4.18 montre que $\Re[B_0^t B_0^*]$ est bande diagonale pour les deux paramètres V_p et V_s .

En effet, suivons Pratt et al. (1998) et revenons à une interprétation de $\Re[B_0^t B_0^*]$ à l'aide de sources secondaires. $\Re[B_0^t B_0^*] = \partial X^t/\partial m (\partial X/\partial m)^*$ est le produit de deux champs de dérivées partielles dont l'un des deux est conjugué. Dans le temps, cela correspond à une convolution à décalage nul. Les champs de dérivées partielles $\partial X^t/\partial m$ sont largement non corrélés les uns avec les autres. Pour une fréquence infinie, ils sont parfaitement non corrélés. Cependant, comme la fréquence est finie, ils sont corrélés l'un avec l'autre. Donc la matrice H_a est diagonale dominante (autocorrélation des champs de dérivées partielles au centre) mais présente une structure en bande en raison des effets de fréquence finie. De plus, le dispositif éclaire les anomalies partiellement, ce qui diminue la séparabilité de deux points et engendre également des effets de corrélation entre les champs de dérivées partielles de points voisins. D'après Sirgue (2003), les termes diagonaux sont reliés à la pondération des données, les termes hors diagonale sont reliés au filtrage spatial lié à l'acquisition.

Ainsi, d'après Pratt et al. (1996), $\Re[B_0^t B_0^*]$ permet de prendre en compte l'ouverture finie du dispositif et les effets de fréquence finie. Cette matrice agit comme une sorte de filtre de l'image du milieu. Autrement dit, $\Re[B_0^t B_0^*]$ prédit la défocalisation qui affecte le gradient à cause de l'illumination incomplète et irrégulière de la cible, et la défocalisation naturelle qui se produit en raison de la bande limitée de l'expérience. La structure de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est similaire à celle d'un opérateur de lissage de convolution. Selon (Shin et al., 2001b), $\Re[B_0^t B_0^*]$ corrige également la mauvaise mise à l'échelle par l'expansion géométrique.

Approximation de $\Re[B_0^t B_0^*]$ et régularisation

En pratique, $\Re[B_0^t B_0^*]$ est une matrice contenant $(p * m) * (p * m)$ coefficients (voir la section 3.1.2), où p est le nombre de paramètres et m est le nombre de données. Le calcul de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est donc beaucoup trop coûteux pour des modèles réalistes.

C'est pourquoi dans l'inversion, seule la diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est conservée. En pratique, un terme de régularisation est appliqué afin d'éviter les divisions par des nombres proches de 0 (Pratt et al., 1998). Ainsi, l'inverse de $\Re[B_0^t B_0^* + \epsilon I]$ est introduit, où I est la matrice identité.

D'après Sirgue (2003), introduire un coefficient ϵ pour régulariser $\Re[B_0^t B_0^*]$ revient à pondérer la fonction coût (équation 3.2) comme :

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^\dagger (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + \epsilon (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)^\dagger (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \quad (4.82)$$

L'introduction de ϵ permet d'imposer à l'algorithme de ne pas trop s'éloigner du modèle initial \mathbf{m}_0 . ϵ est donc un coefficient d'amortissement. La valeur de ϵ est déterminée en fonction de la marge de manoeuvre laissée à l'inversion. Dans notre cas, ϵ est multiplié par le coefficient de la

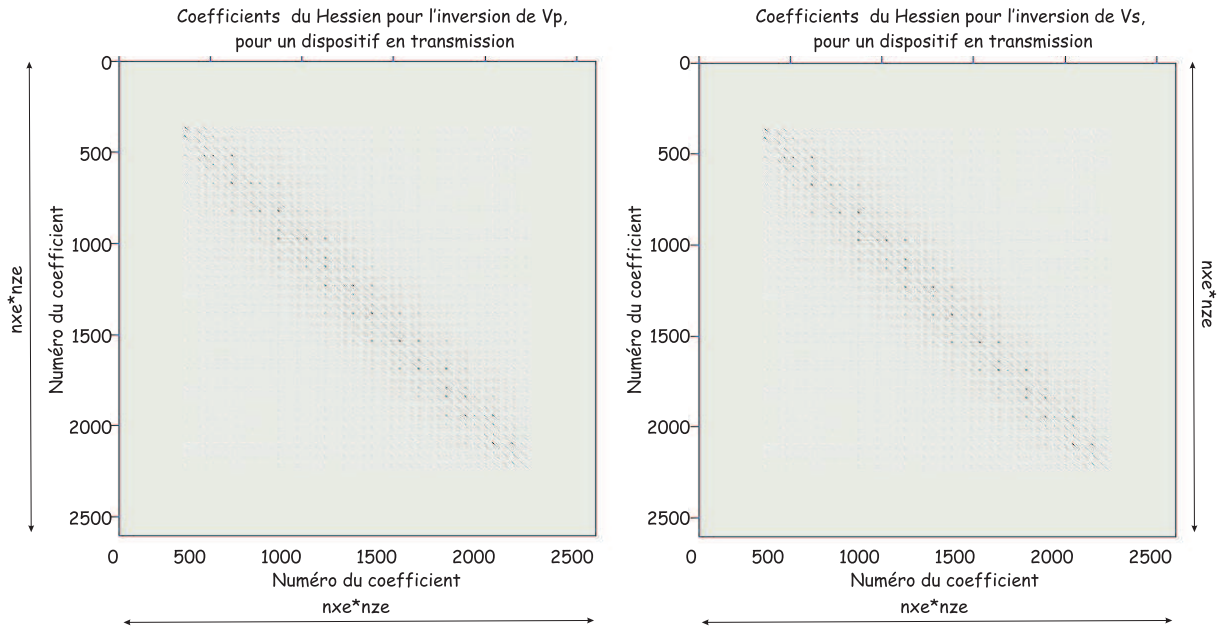


FIG. 4.18: Coefficients du Hessian pour V_p et V_s dans une configuration d'acquisition en transmission et une fréquence de 1.75Hz . Notons la structure bande-diagonale du Hessian pour les paramètres V_p et V_s

diagonale maximal et est donc sans dimension. Il s'agit donc d'un amortissement adaptatif. Pour Ravaut (2003), ϵ est de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-3} .

L'influence de ce coefficient dans l'inversion est peu importante dans les cas synthétiques. La figure 4.19 montre un exemple de résultats de l'inversion avec différentes valeurs de ϵ . En revanche, avec les données réelles, ce paramètre peut avoir une influence plus importante sur les images finales, comme l'indique Ravaut (2003) et comme nous verrons dans la partie concernant l'application de l'inversion des formes d'onde élastiques à des données réelles (partie 5).

Structure du Hessian diagonal pour différentes configurations

Dans l'inversion des formes d'onde élastique telle qu'elle est effectuée dans la section 4.3, nous conservons seulement la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$. Les figures 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, et 4.25 montrent la structure de la partie diagonale du Hessian pour V_p et V_s dans différentes configurations d'acquisition.

Pour des configurations de transmission et des sources explosives (figures 4.20 et 4.23), le potentiel d'imagerie est relativement uniforme spatialement. La position des sources est caractérisée par les zones plus énergétiques car elles contiennent l'énergie du champ incident, présent doublement dans l'expression de $\Re[B_0^t B_0^*]$. Notons que l'empreinte des sources est différente pour V_p et pour V_s , ce qui est lié à la composition différente des matrices $\partial W / \partial V_p$ et $\partial W / \partial V_s$ comme nous l'avons vu dans la section 4.4.2.

Lorsque toutes les sources correspondent à des forces verticales, une anisotropie apparaît, due à l'anisotropie de la source et donc des champs. Les figures 4.21 et 4.24 montrent les contributions de chaque ligne de sources à la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ et expliquent l'anisotropie constatée lorsque toutes les sources sont utilisées. La structure de la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est également différente pour V_p et V_s . Ceci signifie qu'avec des forces verticales et un dispositif en transmission, le potentiel d'imagerie en certains points du milieu est différent pour V_p et V_s . Néanmoins, la structure de ces deux matrices est voisine, et montre que l'inversion résout mieux les parties du modèle situées au centre, et moins bien celles qui se trouvent sur les bords.

Enfin, examinons le cas d'une configuration en réflexion totale, *i.e.* les sources émettent des

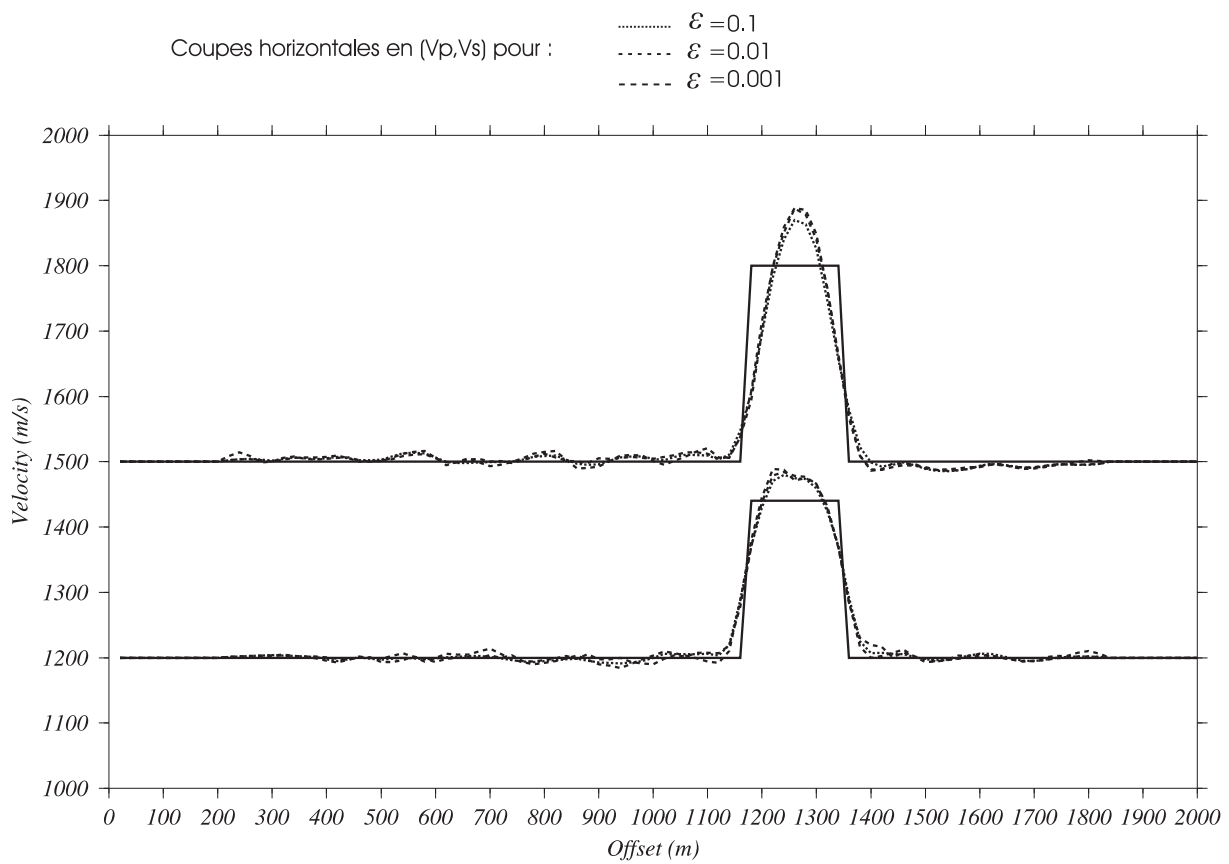


FIG. 4.19: Profils de vitesse horizontaux pour l'inversion de (V_p, V_s) avec l'approximation de Born et différentes valeurs de ϵ . Les courbes sont très proches les unes des autres. Néanmoins, dans les cas réels, l'influence de ϵ est plus importante (Ravaut, 2003)

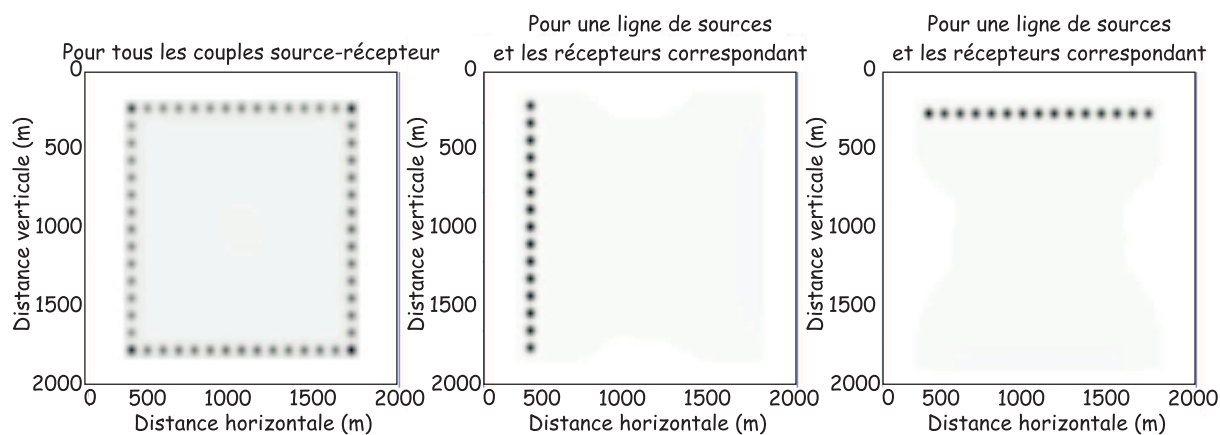


FIG. 4.20: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources explosives. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.

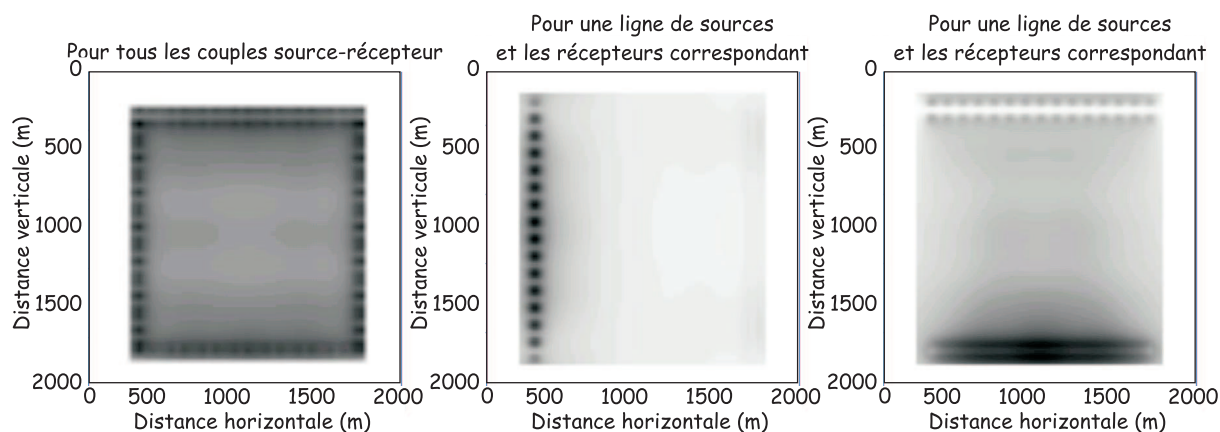


FIG. 4.21: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches. Notons la différence entre le cas où les sources verticales sont alignées verticalement (milieu) et celui où elles sont alignées horizontalement (à droite) : la répartition spatiale de l'énergie est différente en raison de la directivité de la source.

ondes enregistrées par des capteurs situées sur le même côté, et ce pour les 4 côtés du modèle. L'influence de la directivité spatiale de la source semble diminuée. Les figures 4.22 et 4.25 montrent la contribution d'une ligne de sources et les récepteurs correspondant. Dans ce cas, l'amplitude diminue fortement avec la distance à la ligne de sources-récepteurs. Dans les acquisitions réelles, sources et récepteurs se situent à la surface libre. La structure de la diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ correspond à celles présentées sur les figures 4.22 et 4.25 pour une ligne de sources horizontale. Le rôle de la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est alors de réhausser les parties profondes du modèle, peu éclairées (Pratt et al., 1998; Sirgue, 2003).

Importance des termes hors diagonale négligés

Afin d'évaluer l'importance des termes non diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$, nous avons calculé cette matrice dans différents cas de figure. Les coûts de calcul requis pour le calcul de $\Re[B_0^t B_0^*]$ sont environ de 12 heures, alors que le calcul du Hessien diagonal pour le même modèle, la même grappe

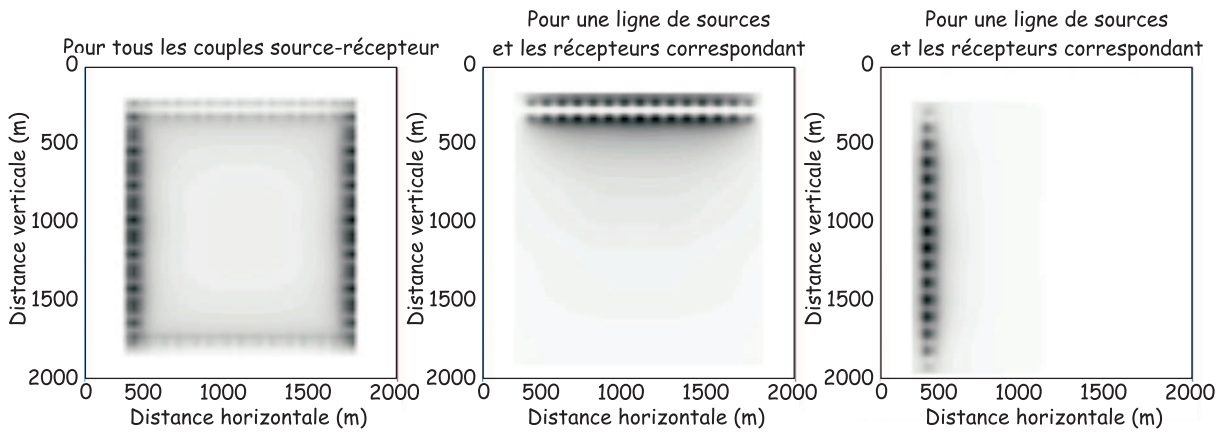


FIG. 4.22: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p dans une configuration d'acquisition en réflexion avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.

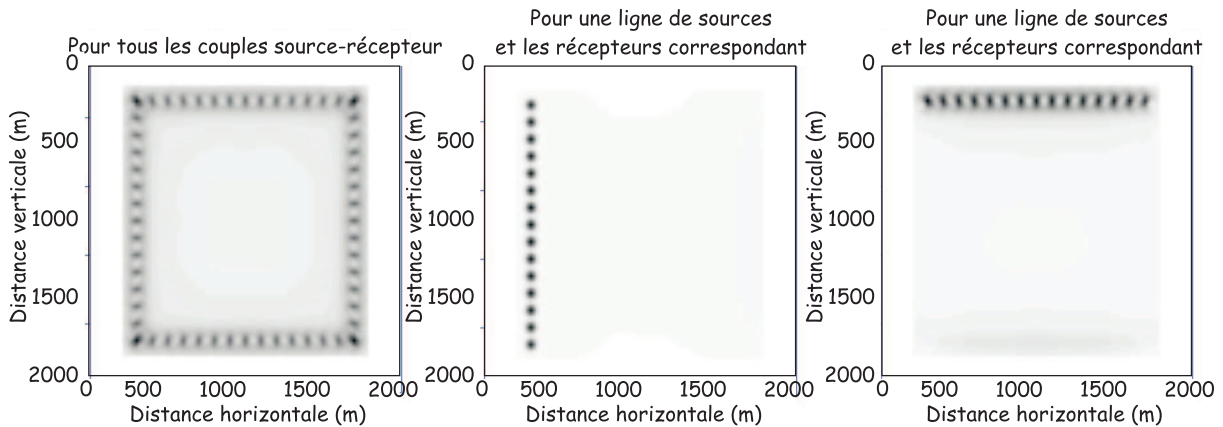


FIG. 4.23: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.

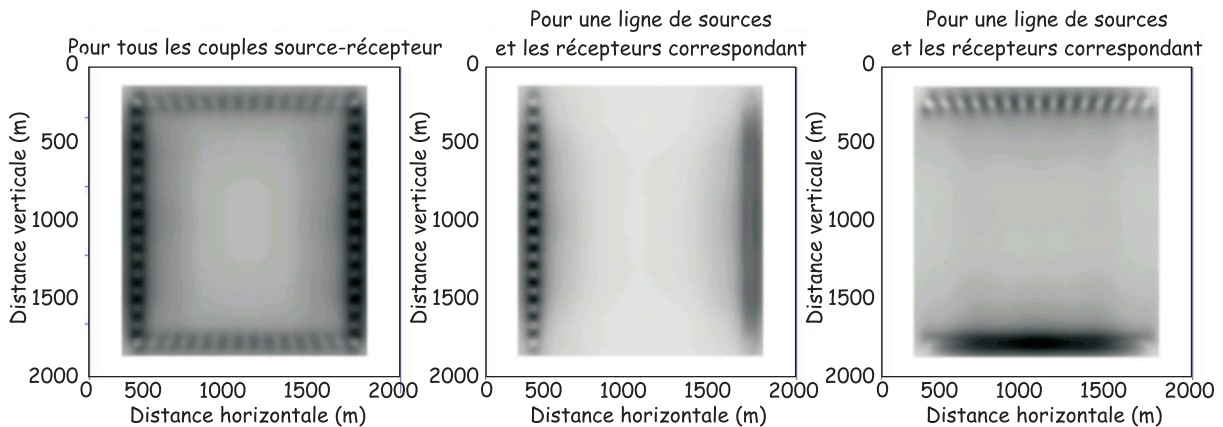


FIG. 4.24: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en transmission avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches. Par rapport à la figure 4.21 calculée pour le paramètre V_p , la directivité de la source joue un rôle moins important pour le paramètre V_s .

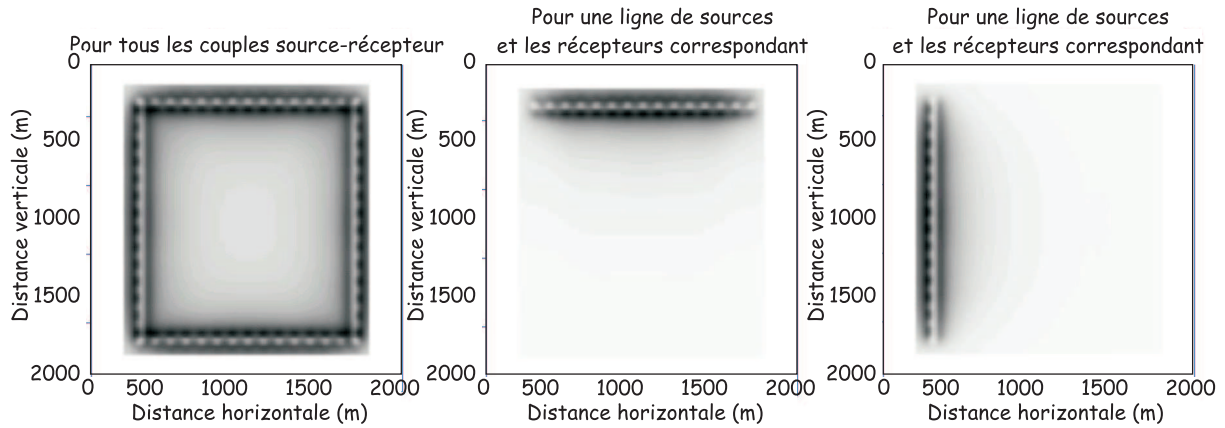


FIG. 4.25: Coefficients diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_s dans une configuration d'acquisition en réflexion avec des sources égales à des forces verticales. Les points noirs correspondent aux positions des sources qui constituent des zones plus énergétiques. Les zones grisées sont traversées par un nombre plus important d'ondes que les zones blanches.

d'ordinateurs et les mêmes processeurs, est d'environ 5 minutes. Dans ces exemples, $\Re[B_0^t B_0^*]$ est calculé sur une grille numérique de 51×51 points pour deux paramètres V_p et V_s . Le nombre de paramètres à inverser est donc de $2 \times 51 \times 51 = 5202$. 60 tirs sont émis, chacun étant enregistré par 36 capteurs à deux composantes. Donc le nombre de données est $60 \times 36 \times 2 = 4320$.

Les figures 4.26, 4.27, 4.28 et 4.29 sont des coupes extraites de la matrice $\Re[B_0^t B_0^*]$ (figure 4.18) pour des dispositifs d'acquisition et une fréquence différents. La surface libre est également introduite. Ceci permet d'apprécier l'importance des termes non diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$, qui sont négligés dans l'inversion.

La figure 4.26 montre la structure d'une ligne de $\Re[B_0^t B_0^*]$ pour V_p et V_s , pour une fréquence de $1.75Hz$ et une acquisition en transmission totale. Ainsi, les valeurs importantes de $\Re[B_0^t B_0^*]$ se situent près de la diagonale. Néanmoins, la structure bande-diagonale apparaît, liée aux effets de fréquence finie et d'ouverture finie du dispositif Pratt et al. (1998).

Symétrie de $\Re[B_0^t B_0^*]$ La figure 4.27 montre les coefficients extraits de la matrice $\Re[B_0^t B_0^*]$ le long d'une ligne horizontale pour les mêmes indices que la figure 4.26. Les coefficients extraits le long d'une ligne horizontale et d'une ligne verticale sont identiques, ce qui montre la symétrie de la matrice $\Re[B_0^t B_0^*]$.

Influence de la fréquence inversée De plus, cette figure montre que, quand la fréquence augmente, la largeur de la bande diagonale diminue. Ceci est lié à la diminution de la longueur d'onde et donc de la corrélation spatiale entre points voisins. Ceci met en évidence l'influence de la fréquence inversée.

Influence du dispositif d'acquisition La figure 4.28 montre des coupes horizontales de la matrice avec une configuration en réflexion générale. Les termes en dehors de la diagonale deviennent plus importants. Ceci indique que la corrélation spatiale entre différents points du milieu augmente, ce qui est lié à la diminution des angles d'incidence avec un dispositif en réflexion. Ceci illustre l'influence du dispositif d'acquisition.

Influence de la surface libre Enfin, la figure 4.29 montre le cas d'une configuration de surface avec des sources et des récepteurs situés à la surface libre. Dans ce cas, les termes non diagonaux deviennent très importants. Les points à forte amplitude correspondent en réalité aux points situés

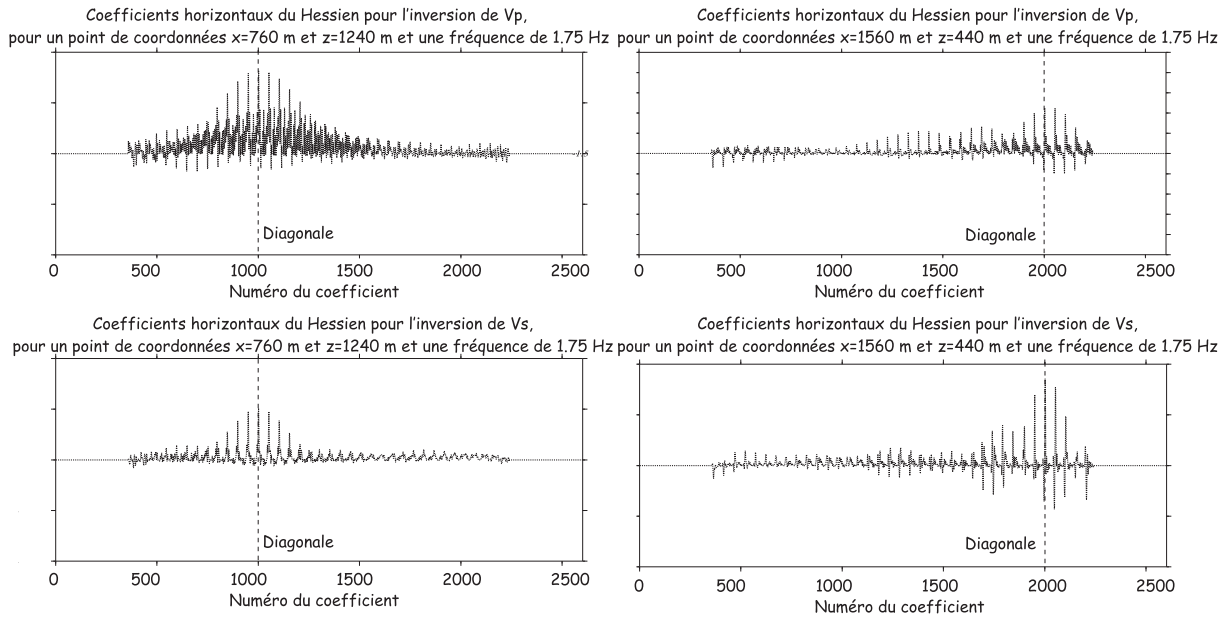


FIG. 4.26: Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en transmission. Deux points du milieu sont considérés. Notons la présence de coefficients situés près de la diagonale et non nuls. La largeur de la bande aux coefficients non négligeables est plus importante avec V_p car la longueur d'onde des ondes P est plus grande que celle des ondes S . Les échelles considérées sont arbitraires.

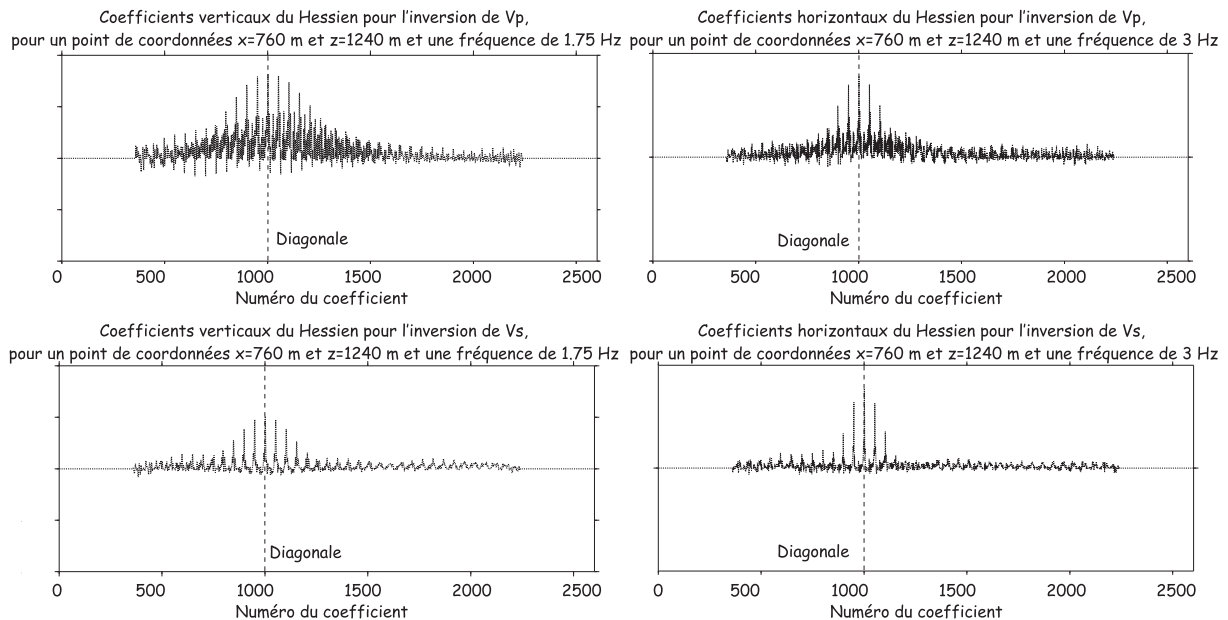


FIG. 4.27: Coefficients de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en transmission pour un seul point du milieu. A gauche : coefficients extraits le long d'une ligne verticale de la matrice. Ils sont égaux à ceux de la figure 4.26 à gauche, ce qui prouve la symétrie de la matrice. A droite : coefficients pour une fréquence plus élevée égale à 3 Hz. La largeur de la bande diagonale dont les coefficients sont non négligeables diminue.

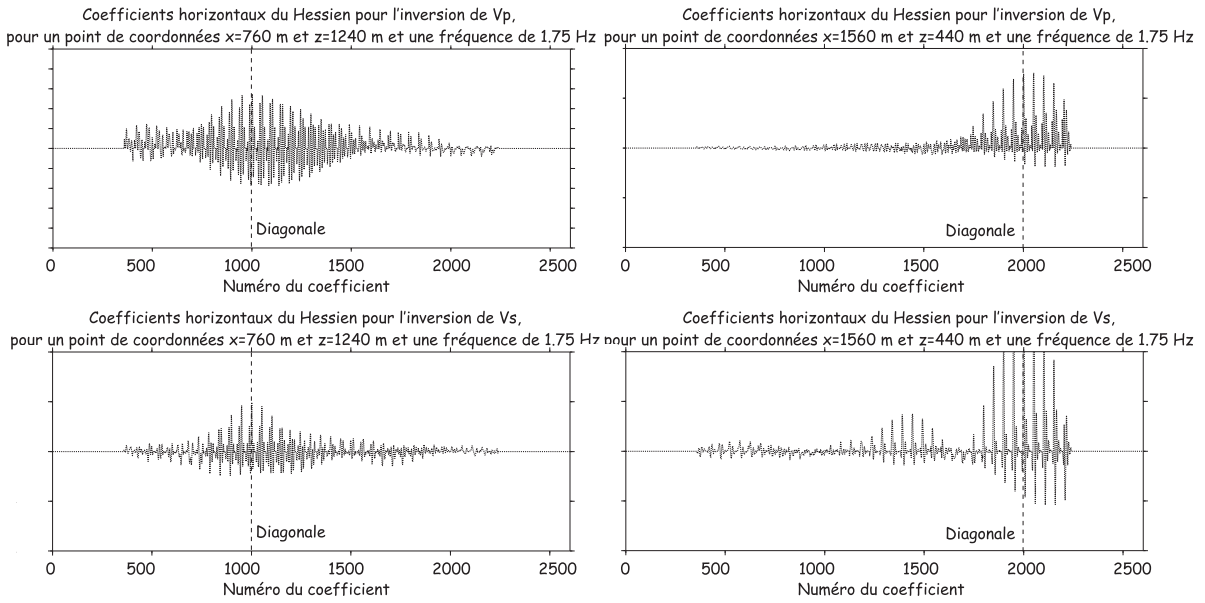


FIG. 4.28: Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle sans surface libre et un dispositif d'acquisition en réflexion. Deux points du milieu sont considérés. La largeur de la bande diagonale dont les coefficients sont non négligeables est équivalente à celle de la figure 4.26 mais ils sont dans l'ensemble plus élevés que ceux calculés avec un dispositif en transmission, ce qui signifie que les coefficients hors diagonale non nul jouent un rôle plus important.

près de la surface libre, qui sont illuminés par des ondes de surface et contiennent donc davantage d'énergie que les points profonds. De plus, certaines réflexions à la surface libre peuvent se produire et l'algorithme peut corrélérer des points plus éloignés que dans les cas sans surface libre.

Ceci montre que le dispositif d'acquisition et les effets de fréquence finie dégradent l'image fournie par le gradient. L'utilisation de la partie diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ permet en partie de prendre en compte certains effets, comme l'atténuation de l'énergie avec la profondeur (Pratt et al., 1998; Sirgue, 2003). Cependant, les termes non diagonaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$, négligés dans l'inversion, sont en réalité non négligeables dans certains cas, comme celui d'un dispositif d'acquisition de surface avec une surface libre.

Dans l'approche Rai+Born (Jin et al., 1992), l'approximation diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ est contre-balançée par un coefficient d'illumination local qui dépend du point considéré. Shin et al. (2001b) utilisent le concept de sources virtuelles développé par Pratt et al. (1998) et les modifient pour rendre $\Re[B_0^t B_0^*]$ plus diagonal, en considérant que les sources virtuelles sont davantage non corrélées que l'utilisation des résidus rétro-propagés. Cependant, cette approche est très coûteuse numériquement puisque chaque source virtuelle doit être calculée pour reconstruire $\Re[B_0^t B_0^*]$. Plessix & Mulder (2004) montrent dans le cas acoustique que l'approximation diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$ fausse la convergence. De plus, ils mettent en évidence que la taille des éléments non diagonaux dépend de la vitesse du milieu et de la profondeur du point considéré. Ainsi, le milieu de propagation détermine également la structure du Hessien. En incluant certains termes non diagonaux dans la diagonale de $\Re[B_0^t B_0^*]$, l'imagerie du milieu est améliorée.

4.5 Éléments techniques relatifs au gradient

4.5.1 Recherche du pas de descente α

Dans la méthode du gradient (section 3.1.2), un scalaire α remplace le Hessien. Dans notre cas, l'inverse de la diagonale de $B_0^t B_0^*$ est inclus dans l'inversion et joue uniquement un rôle de

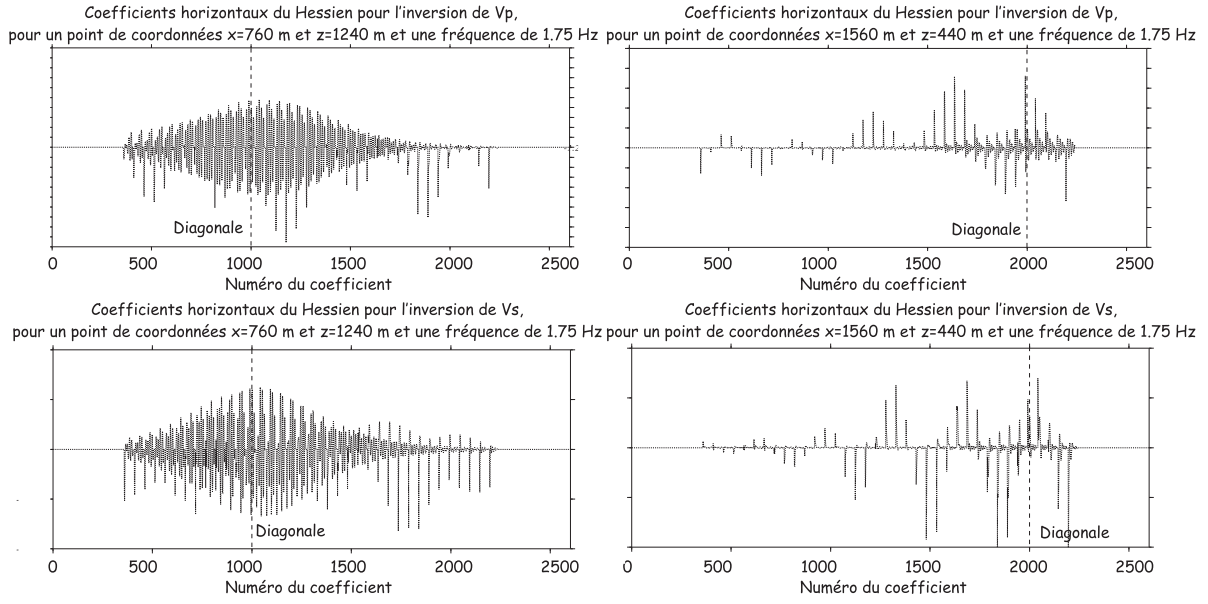


FIG. 4.29: Coefficients horizontaux de $\Re[B_0^t B_0^*]$ calculé pour un modèle avec surface libre et un dispositif d'acquisition en réflexion. Deux points du milieu sont considérés. Les termes hors diagonale non nuls sont plus éloignés de la diagonale que précédemment.

préconditionnement. Nous conservons donc la présence d'un scalaire α permettant d'ajuster le pas de descente.

Pour un problème inverse linéaire, α est donné par la formule (Pratt et al., 1996) :

$$\alpha = \frac{|\nabla E_m|^2}{|J\nabla E_m|^2} \quad (4.83)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne des vecteurs, ∇E_m est le gradient de la fonction coût pour le paramètre m et J est la matrice jacobienne.

Pour trouver α dans un problème inverse non linéaire, deux possibilités existent (Tarantola, 1987) : une technique par essai-erreur ou une recherche linéaire. La méthode par essai-erreur est coûteuse puisqu'elle nécessite autant de problème direct que de valeurs de α testées. C'est pourquoi nous utilisons la seconde méthode.

Elle requiert seulement la résolution de deux problèmes directs supplémentaires. Lorsque deux modèles \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont trouvés tels que (figure 4.30) :

$$E(\mathbf{m}_1) > E(\mathbf{m}_2) \text{ et } E(\mathbf{m}_3) > E(\mathbf{m}_2), \quad (4.84)$$

une parabole est ajustée par ces trois points. Le minimum de la parabole correspond au pas de descente optimal recherché.

4.5.2 Régularisation du gradient

En pratique, afin d'éviter des perturbations locales trop forte dans les images issues de l'inversion, nous appliquons un terme de régularisation au gradient (Ravaut, 2003). Elle peut être exprimée par une matrice de covariance C_m . Elle est implémentée sous la forme d'une Gaussienne en deux dimensions dont les longueurs de corrélation dépendent de la fréquence inversée. Etant donnée une vitesse moyenne dans le milieu c_m et une fréquence f , les longueurs de corrélation horizontale et verticale des filtres gaussiens sont des fractions de la longueur d'onde moyenne $\lambda = c_m/f$.

L'expression 4.11 devient donc :

$$\mathbf{m}^{l+1} = \mathbf{m}^l - \alpha_l C_m (\text{diag}(\Re[B_0^\dagger B_0])^{(l)} + \epsilon^l I)^{-1} \Re[B_0^t \Delta \mathbf{d}^*], \quad (4.85)$$

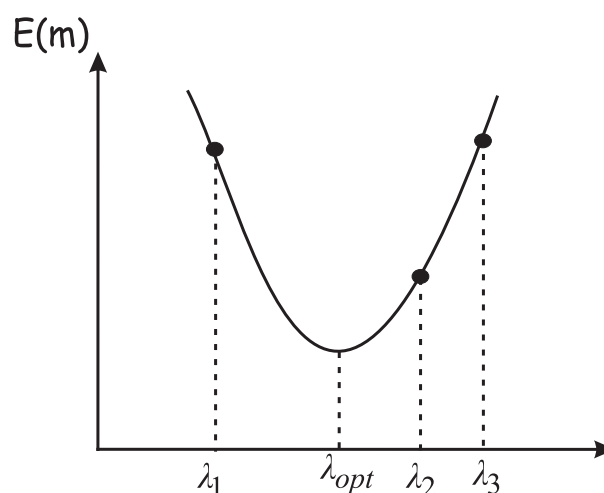


FIG. 4.30: Obtention du pas de descente optimal α_{opt} à partir des pas de descente α_1 et α_2 associés aux modèles \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2

La figure 4.31 montre l'influence faible de ce facteur de lissage dans les résultats de l'inversion.

4.5.3 Méthode du gradient ou de Gauss-Newton ?

Pratt et al. (1996); Ravaut (2003) analysent le coût de calcul relatif de la méthode du gradient et de celle du gradient préconditionné par l'inverse de la diagonale de $\Re[B_0^\dagger B_0]$, en fonction du dispositif d'acquisition choisi. Effectuons le même calcul d'ordre de grandeur pour le cas de l'inversion des formes d'onde élastique.

Lors du calcul du gradient, $3N_{tirs}$ problèmes directs sont nécessaires (N_{tirs} est le nombre de tirs) : le problème direct correspondant à la propagation des sources, le problème direct correspondant à la rétropropagation des résidus correspondant, horizontaux et enfin verticaux. Le calcul de la diagonale de $B_0^\dagger B_0$ nécessite $N_{tirs} + 2N_{rec}$ problèmes directs (N_{rec} est le nombre de récepteurs) : le problème direct correspondant à la propagation des sources et le problème direct correspondant à la propagation des forces verticales et horizontales en chaque récepteur.

En sismique terrestre, le nombre de tirs est souvent supérieur ou égal au nombre de récepteurs. Ainsi, l'utilisation de la diagonale de $B_0^\dagger B_0$ n'entraîne pas de surcoût numérique. Nous avons donc choisi de conserver la formulation précédente du problème où la diagonale intervient (expression 4.85).

4.6 Différences entre Born et Rytov : interprétation du noyau comme un chemin d'onde

D'après Spetzler & Snieder (2004), la zone de Fresnel et les noyaux de sensibilité (équation 4.19) sont connectés par le concept d'interférences constructives des ondes. C'est pourquoi l'étude des zones de Fresnel renseigne sur les noyaux de sensibilité et permet de comprendre comment les différentes ondes interagissent pour imager les anomalies à reconstruire.

4.6.1 Principe de construction des noyaux

La figure 4.32 illustre la manière dont les noyaux de Born et Rytov sont reconstruits. Les calculs sont basés sur les équations des sections 4.3.3 et 4.4.1 et mêlent contributions des parties réelles et imaginaires de chaque champ (figure 4.32). En raison de l'utilisation des différences finies pour le

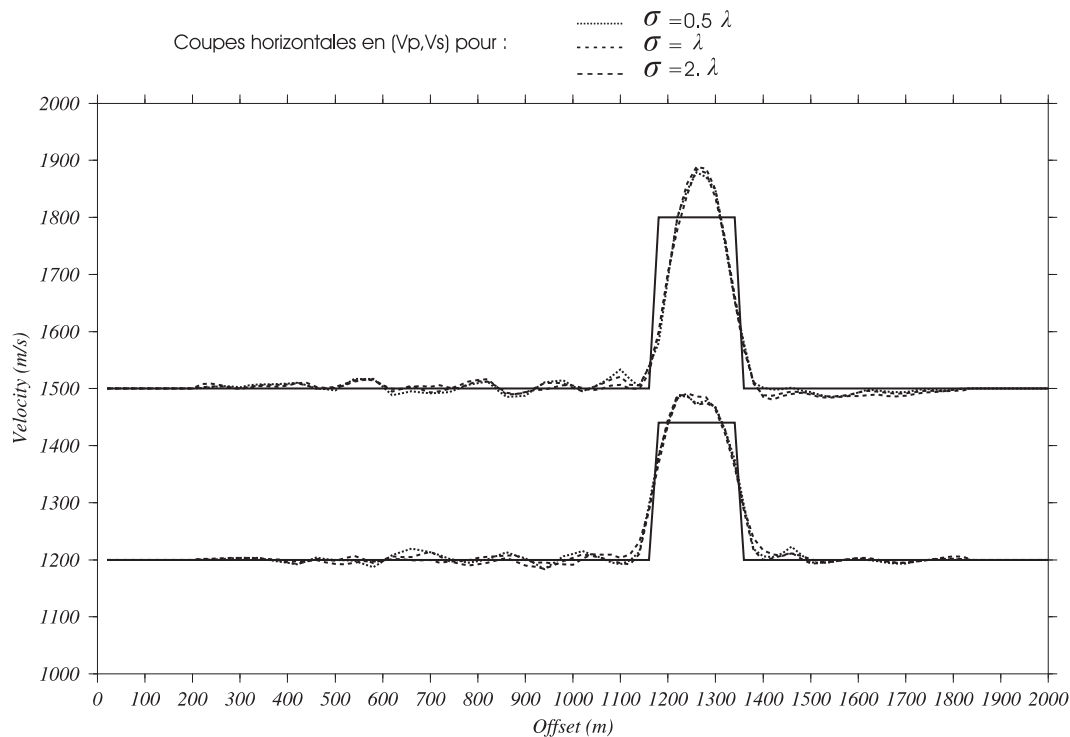


FIG. 4.31: Profils de vitesse horizontaux pour l'inversion de (V_p, V_s) avec l'approximation de Born et différentes valeurs de lissage spatial. σ est la valeur de la longueur de corrélation de la gaussienne spatiale, λ est la longueur d'onde.

calcul du problème direct utilisé dans les dérivées de Fréchet, les parties réelles et imaginaires de chaque champ sont combinées linéairement de manière à former des dérivées spatiales des champs. Une combinaison linéaire des ces dernières est calculée, pour les champs directs se propageant entre la source et le point diffractant considéré d'une part, et pour les résidus rétro-propagés, se propageant des récepteurs vers le point diffractant d'autre part. Ces deux parties sont ensuite multipliées en fréquence (et donc convoluées en temps) pour chaque couple source-récepteur. Les contributions de tous les couples source-récepteur sont ensuite sommées pour obtenir l'imagerie du milieu en un point. Enfin, ces calculs sont effectués pour chaque point du milieu, permettant ainsi d'obtenir une image du milieu pour un paramètre donné.

Pour un couple source-récepteur donné, l'image du milieu obtenue, mêlant contributions des champs directs et rétro-propagés, se nomme "chemin d'onde" ou "wavepath" (Woodwards, 1992). Elle permet d'évaluer la contribution à l'image finale de chaque couple source-récepteur et de comprendre comment l'algorithme procède pour assembler le champ direct et les résidus rétropropagés en chaque point.

4.6.2 Chemins d'onde de Born et Rytov

Les figures 4.33 et 4.37 illustrent ces phénomènes plus en détail et montrent la contribution d'un couple source-récepteur dans l'opérateur élastique adjoint, pour les approximations de Born et de Rytov. Nous étudions les cas de source explosive et de source égale à une force ponctuelle. Nous simulons ici la première itération d'une inversion commençant à 7 Hz. Le champ direct résulte de l'explosion ou de la force verticale et correspond, en chaque point du milieu, aux vitesses de déplacement horizontales et verticales calculées dans le milieu de référence (sans anomalie). Le champ rétro-propagé contient les résidus, *i.e.* les différences entre le champ incident (calculé dans le modèle de référence) et le champ observé (calculé dans un modèle contenant les deux anomalies

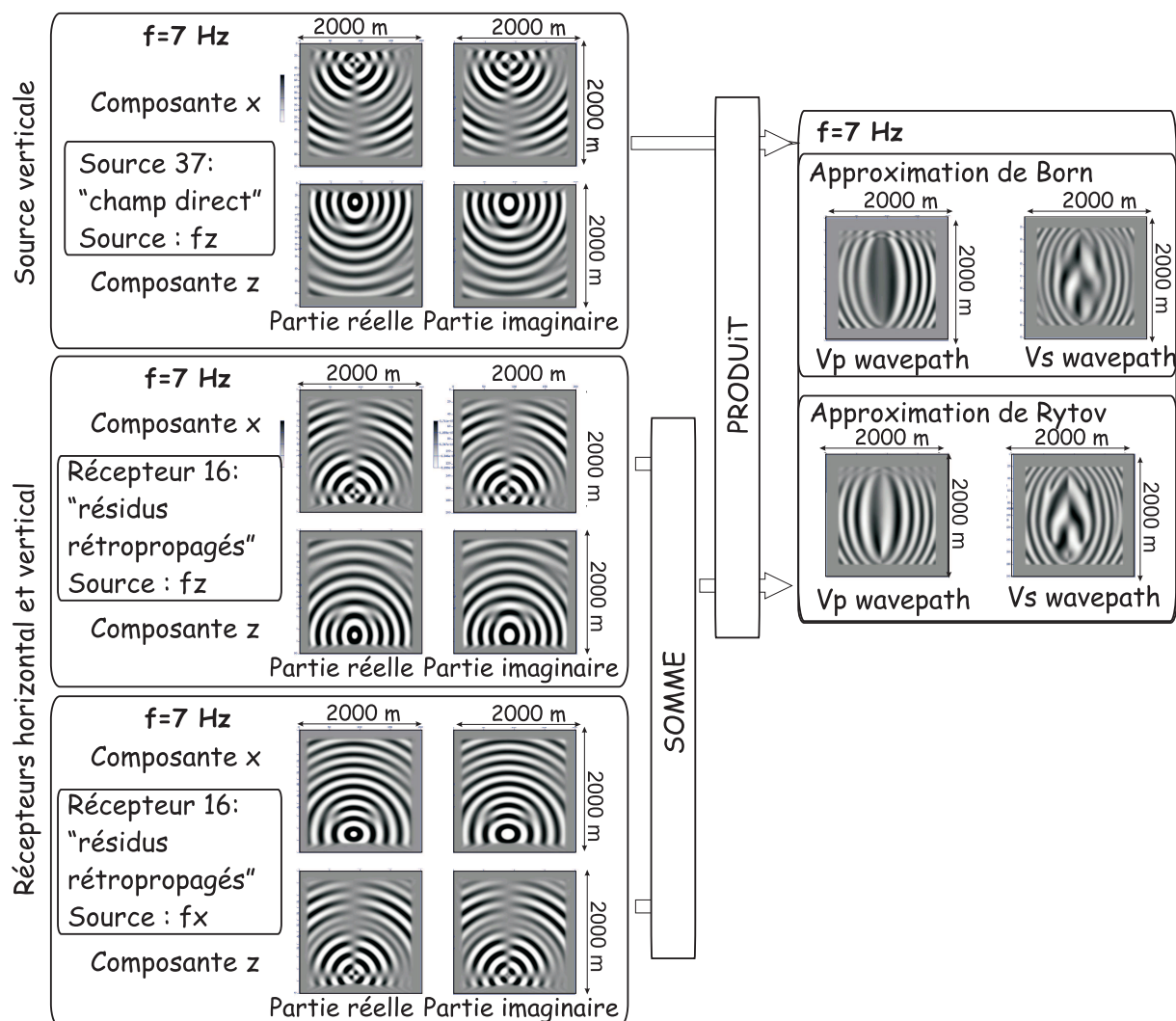


FIG. 4.32: Illustration de la reconstruction du chemin d'onde pour un couple source-récepteur

en vitesse à 20%, présentées dans la figure 4.4) au récepteur choisi. Les résidus calculés selon la composante verticale (resp. horizontale) sont rétropropagés grâce à une force verticale (resp. horizontale). Dans le cas d'un seul chemin d'onde, l'imagerie est effectuée pour chaque point du milieu en ne considérant qu'un seul couple source-récepteur.

Chemins d'onde de Born

Chemin d'onde pour V_p La forme des chemins d'onde de V_p pour l'approximation de Born et une source explosive (figure 4.33) est similaire à celle obtenue par Ravaut (2003) dans le cas acoustique. Ceci est en effet lié à la structure de l'équation 4.19, dont l'équation 4.31 est un cas particulier. Pour une source explosive et l'utilisation des composantes verticales et horizontales dans les résidus pour le calcul de l'opérateur élastique adjoint selon V_p , la divergence du champ incident (correspondant à une source acoustique) et une sorte de divergence du champ rétro-propagé pondérée par les résidus apparaissent. Ce cas correspond au cas général (équation 4.19). La pondération par les résidus dans le cas élastique, inexistante dans le cas acoustique, explique la petite différence entre le chemin d'onde acoustique et ce chemin d'onde en V_p calculé avec l'approximation de Born.

Avec une source égale à une force verticale, la forme du chemin d'onde est également un peu modifiée par rapport au cas acoustique (figure 4.34). La disposition des franges spatiales à proximité de la source est liée à la nature de la source (explosion ou force ponctuelle).

Lorsque la nature des résidus change, la forme du chemin d'onde en V_p change également : lorsque la taille de l'anomalie augmente, la largeur de la zone centrale augmente, ainsi que l'amplitude des variations (figures 4.35 et 4.36). Lorsqu'il y a deux anomalies au lieu d'une, la zone centrale du chemin d'onde en V_p contient deux maxima latéraux séparés par un minimum local (figure 4.34, au lieu de contenir un maximum global (figure 4.35)).

Chemin d'onde pour V_s Le chemin d'onde pour V_s est plus complexe et fait apparaître des zones positives et négatives au centre (figures 4.33 et 4.34). Cette forme est due à l'équation 4.19 pour le paramètre V_s . La nature des combinaisons linéaires des dérivées partielles spatiales des champs intervenant dans le calcul de l'opérateur adjoint pour V_s sont différentes de celles de V_p . Ceci montre que la sensibilité de la reconstruction des anomalies en V_p et en V_s sont différentes, d'autant plus que la longueur d'onde P est plus grande que la longueur d'onde S .

Notons une certaine dissymétrie axiale dans la forme du chemin d'onde dans les deux cas (figures 4.33 et 4.34). Ce phénomène est lié à la forme, la position et l'amplitude des anomalies à reconstruire. En effet, les figures 4.35 et 4.36 montrent les chemins d'onde reconstruits pour des anomalies recherchées du champ, et contenues dans les données, différentes. Dans ce cas, les chemins d'onde en V_s sont très différents de ceux observés pour le cas de deux anomalies d'amplitude 20% (figure 4.34), ce qui illustre la forte sensibilité du chemin d'onde en V_s .

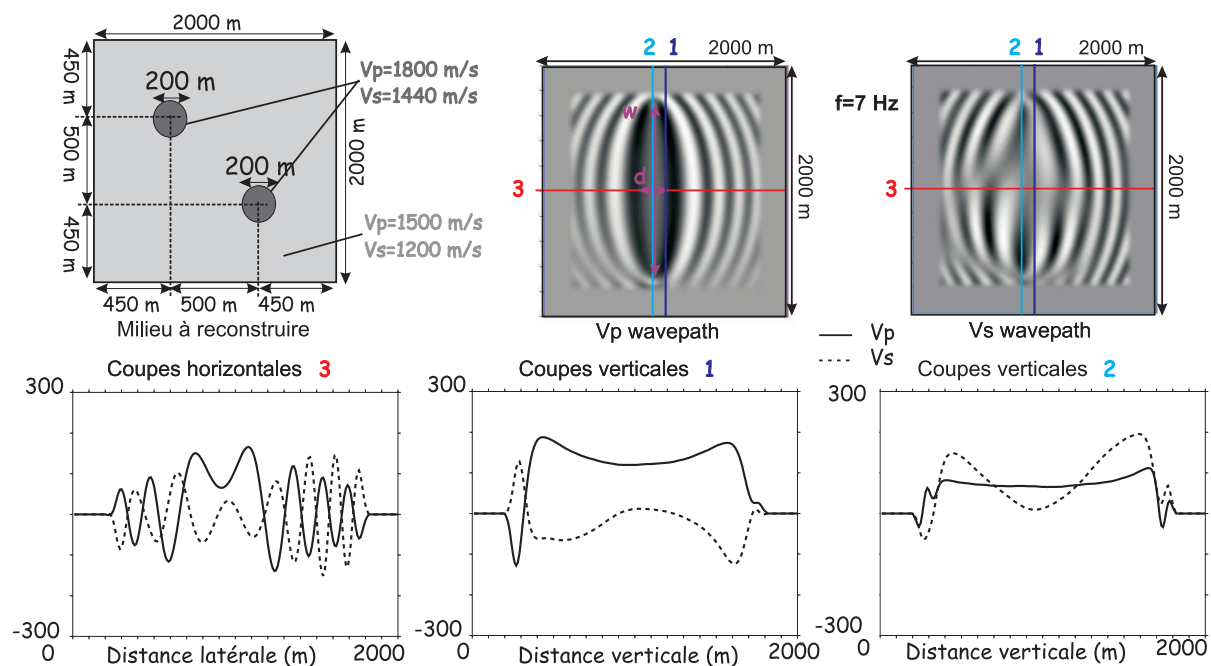


FIG. 4.33: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source explosive et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

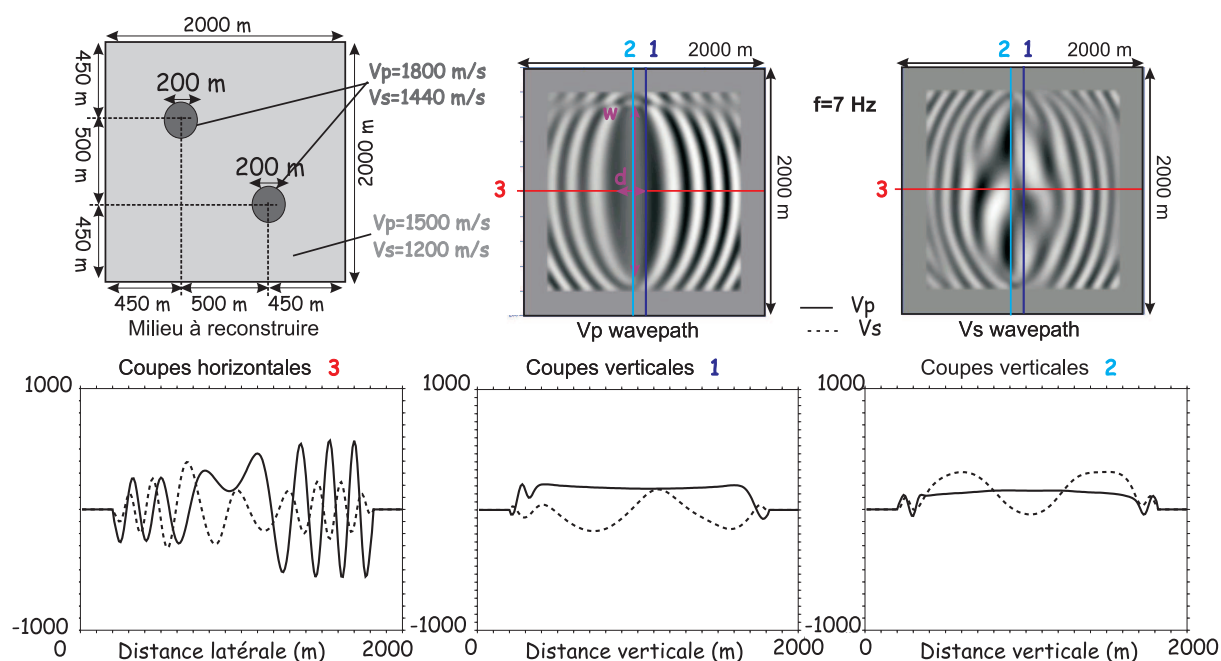


FIG. 4.34: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

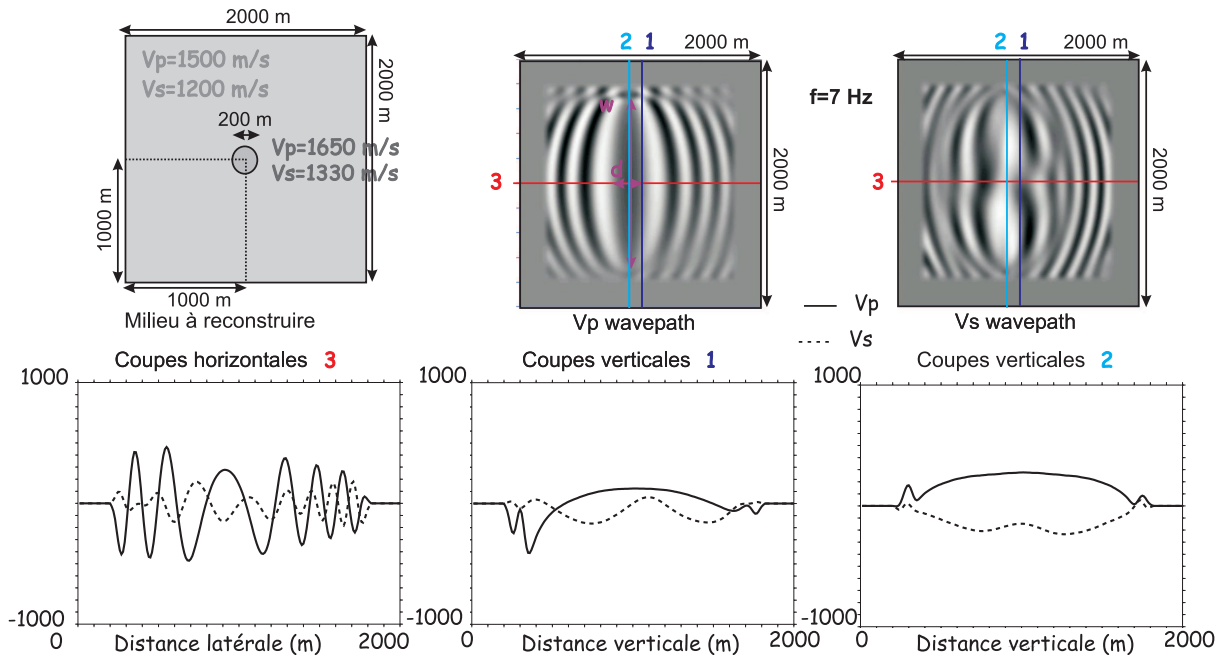


FIG. 4.35: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

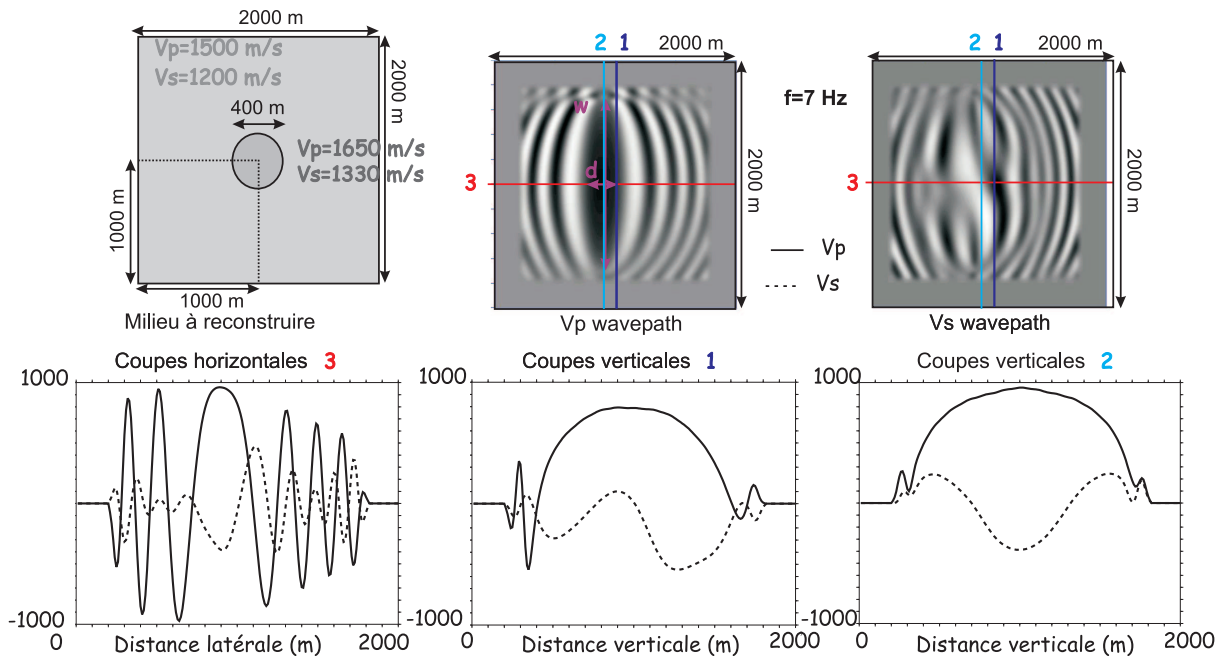


FIG. 4.36: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Born. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

Chemins d'onde de Rytov

Intéressons-nous maintenant à l'approximation de Rytov. La formule 4.79 montre que les noyaux, et donc les chemins d'onde, de Born et de Rytov sont reliés, le deuxième contenant le déphasage complexe entre le chemin d'onde de Born et le champ de référence calculé de la source au récepteur. Les figures 4.37 et 4.38 montrent la forme et la structure des chemins d'onde calculés avec l'approximation de Rytov pour une source explosive ou une source égale à une force horizontale. Dans ces deux cas, les données observées proviennent d'un milieu contenant deux anomalies, que l'inversion doit permettre de reconstruire. Dans les figures 4.39 et 4.40, les données observées sont issues d'un milieu contenant une anomalie, de taille variable.

Les figures 4.37, 4.38, 4.39 et 4.40 montrent une sensibilité différente du noyau de Rytov par rapport à celui de Born. La forme des chemins d'onde de Rytov évolue peu en fonction des anomalies recherchées. Ceci indique que, pour la première itération, la sensibilité du noyau de Born aux anomalies à reconstruire se situe principalement au niveau de l'amplitude et non de la phase.

Notons que les profils extraits des chemins d'onde calculés avec l'approximation de Rytov (figures 4.39 et 4.40) montrent que l'amplitude des perturbations dépend de la taille de l'anomalie à reconstruire. En revanche, la comparaison des coupes horizontales des figures 4.38 et 4.39 indique que les chemins d'onde sont peu sensibles à la position des anomalies. Ainsi, l'approximation de Rytov permet de prendre en compte des faibles perturbations non localisées.

De plus, notons que les figures 4.37, 4.38, 4.39 et 4.40 indiquent qu'il n'y a pas de sensibilité au centre du chemin d'onde de Rytov. Ceci a déjà été noté par Woodward (1992) dans le cas acoustique avec l'approximation de Rytov. Selon cette dernière, un point sur la ligne médiane diffracte de l'énergie en phase avec l'onde incidente (ou onde se propageant dans le milieu de référence) et ne génère donc aucun déphasage. Ainsi, au centre du chemin d'onde, seule l'amplitude dans le chemin d'onde de Born est prise en compte. Ceci est repris par Spetzler & Snieder (2004) dans le cas acoustique également, qui montre qu'il n'y a pas de sensibilité des noyaux au centre de la zone de Fresnel, la sensibilité étant plus forte en s'éloignant du rai. Le temps de trajet n'est pas modifié au centre du rai en raison du principe de Fermat. Selon Spetzler & Snieder (2004), l'information sur l'amplitude se révèle peu utile dans la réalité en raison des pertes d'énergie, de l'expansion géométrique ...

Ceci peut également être mis en parallèle avec les travaux de Dahlen et al. (2000); Dahlen & Baig (2002) qui montre, pour la tomographie des temps et pour la sommation de toutes les fréquences, que la sensibilité des temps de trajet aux anomalies le long du rai est nulle alors que l'amplitude est sensible aux hétérogénéités le long du rai.

Notons que les amplitudes relatives des chemins d'onde de Born et de Rytov sont différentes. Elles sont reliées aux ordres de grandeur des champs propagés, qui dépendent des paramètres du milieu et de la source. Notons également que ces figures ne permettent pas de dire si les approximations de Born et de Rytov sont plus sensibles à la transmission ou à la réflexion.

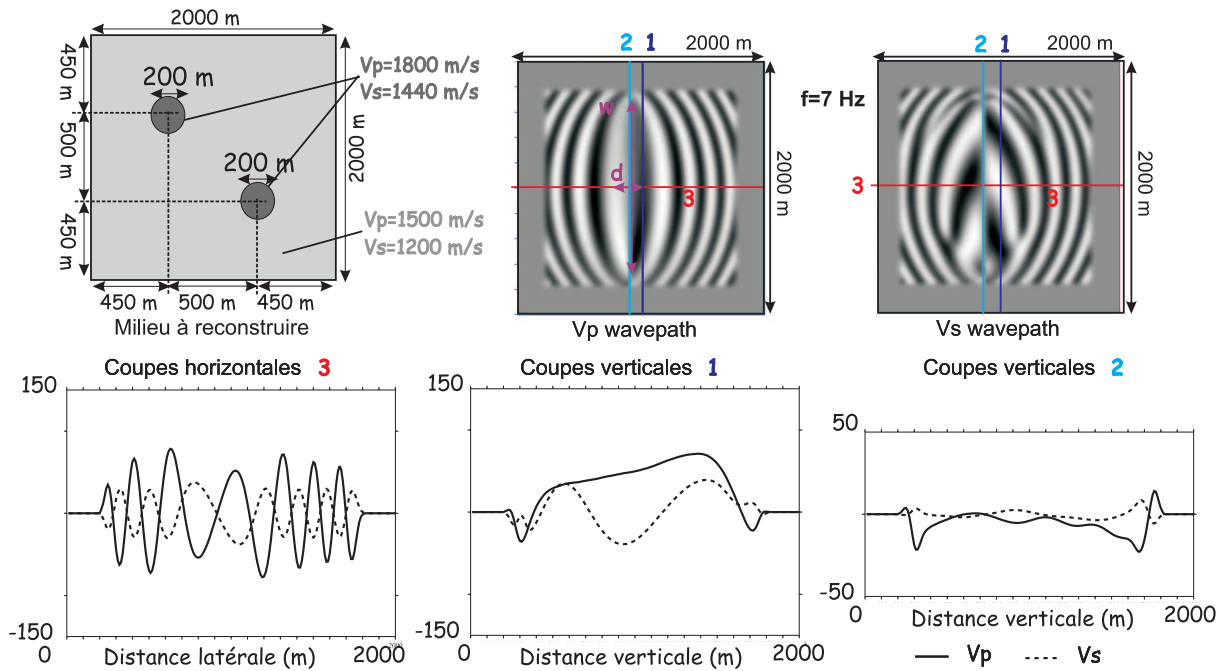


FIG. 4.37: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source explosive et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

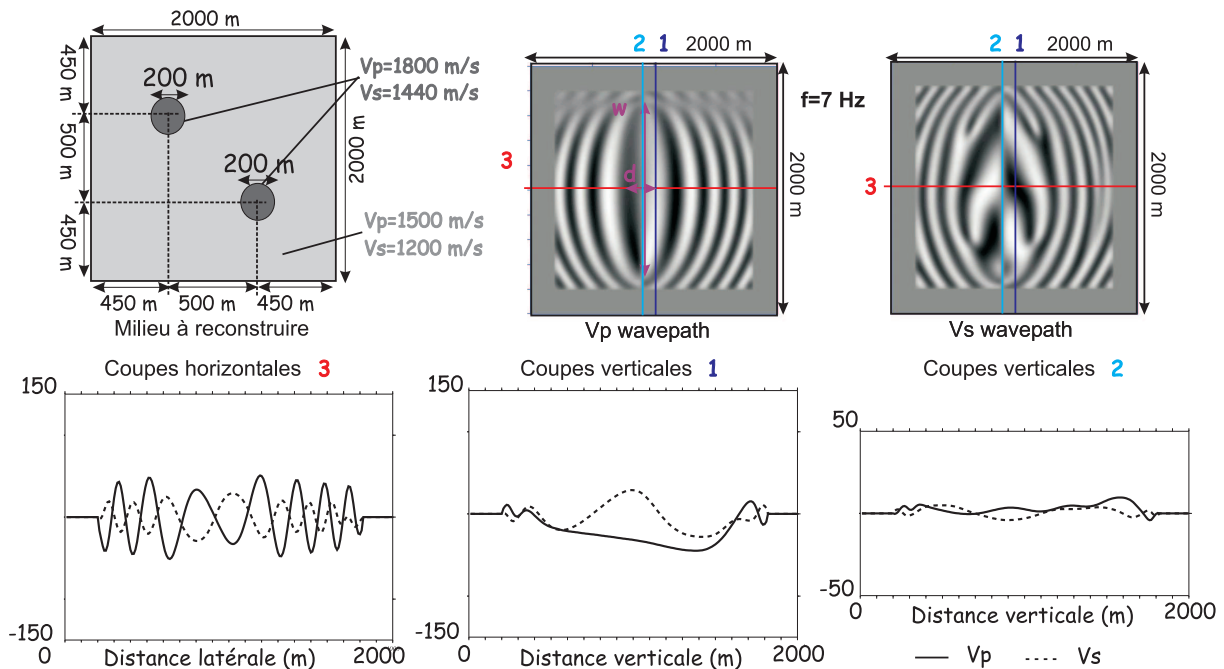


FIG. 4.38: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

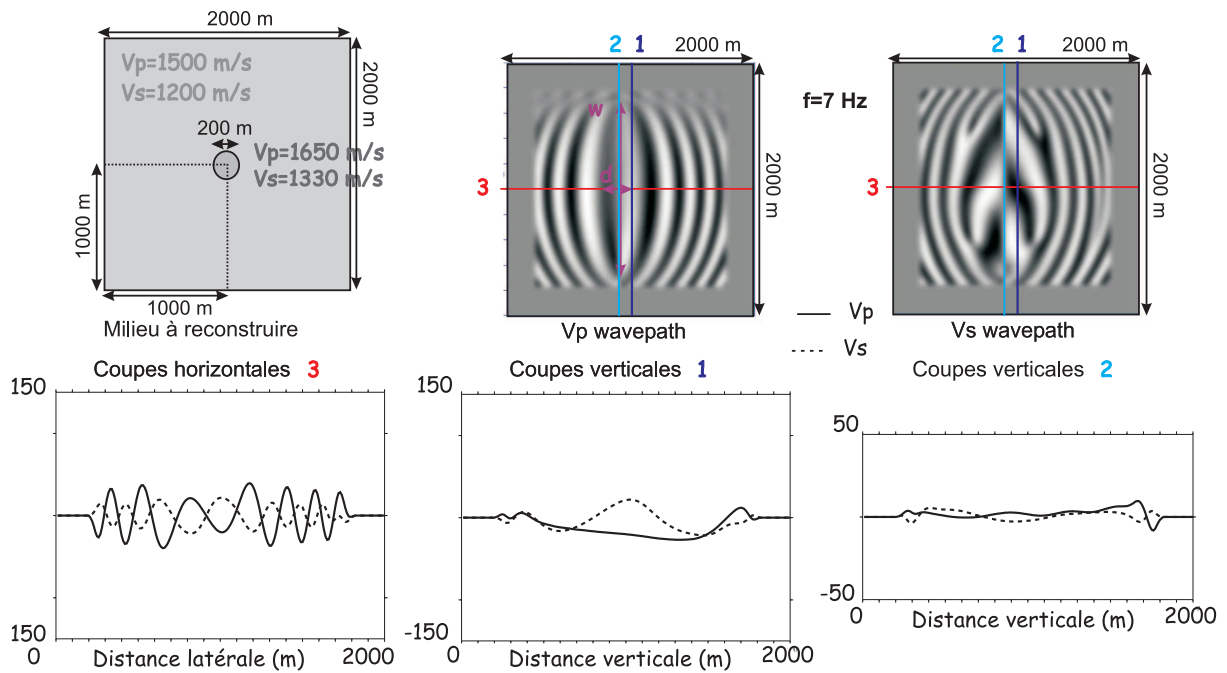


FIG. 4.39: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

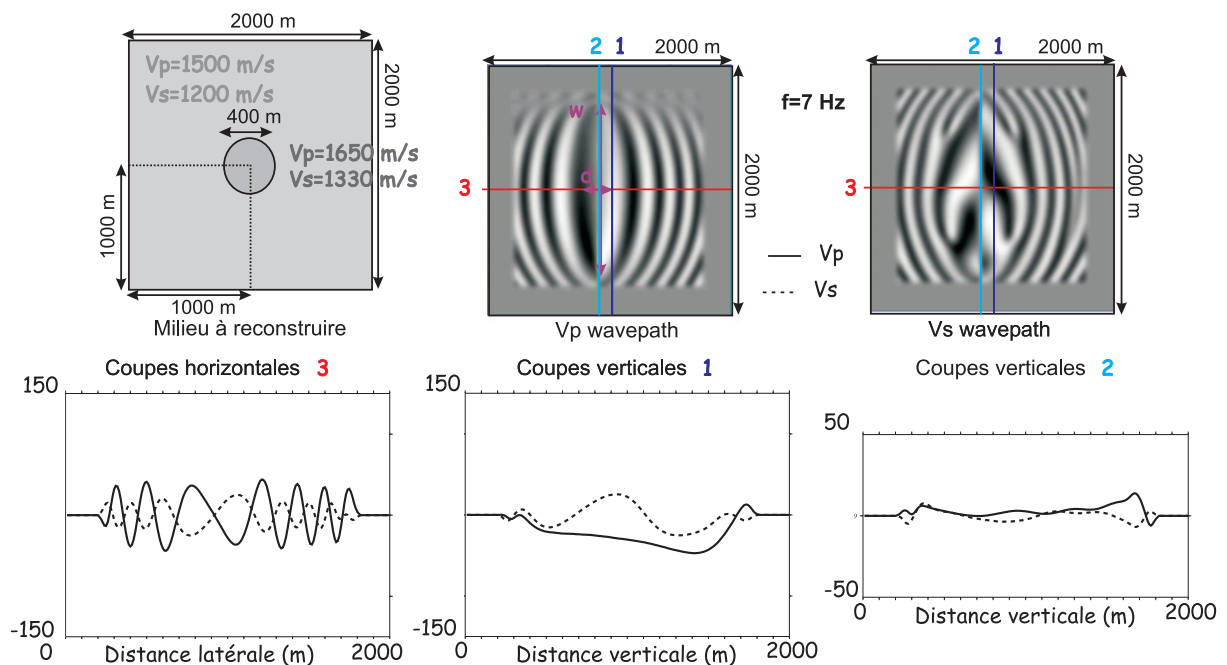


FIG. 4.40: Contribution d'un couple source-récepteur dans le calcul du gradient de la fonction coût pour une source égale à une force verticale et l'approximation de Rytov. Le milieu à reconstruire est le milieu dans lequel les données ont été calculées. d est la distance entre la source et le récepteur. w est la largeur de la première zone de Fresnel.

4.6.3 Structure des chemins d'onde et migration

Au centre du chemin d'onde se trouve la première zone de Fresnel. Comme Woodward (1992) et Pratt et al. (1996) l'ont expliqué, une onde émise par la source et diffractée par l'un de ces points, arrive au récepteur avec un décalage temporel inférieur à la demi-période. Si l'anomalie de vitesse est positive, l'onde diffractée est plus rapide et arrive en avance. Sinon, elle arrive en retard. La largeur de la première zone de Fresnel est égale à $\sqrt{\lambda d}$ où λ est la longueur d'onde et d est la distance entre la source et le récepteur (Woodward, 1992). Cette grandeur est représentée sur les chemins d'onde dans les figures précédentes (figures 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39 et 4.40). Cette zone a été récemment incluse dans le noyau de la tomographie des temps de première arrivée à fréquence finie par Dahlen et al. (2000); Dahlen & Baig (2002), permettant ainsi de prendre en compte les écarts de temps dus aux perturbations à proximité du rai et non plus uniquement sur le rai. Cette zone correspond également à la résolution maximale attendue avec la tomographie des temps des premières arrivées Williamson (1991); Ravaut (2003).

La frange de signe opposée, venant après la première zone de Fresnel en s'éloignant du centre, correspond à la deuxième zone de Fresnel et contient les points engendrant un décalage temporel compris entre la demi-période et la période au niveau du récepteur. Les franges suivantes obéissent au même principe et contiennent des points diffractants engendrant des décalages temporels de plus en plus importants. Ces zones sont de plus en plus étroites spatialement, à mesure que la distance à la première zone de Fresnel augmente.

Pratt et al. (1996) a montré que, lorsque les anomalies se situent loin de la première zone de Fresnel, la première itération de l'inversion des formes d'onde se comporte comme une migration, modélisant des arrivées tardives. Les interférences entre champs directs et rétropropagés ne sont constructives qu'au niveau de l'anomalie, très localement. En effet, les directions des gradients de la phase pour le champ direct et les résidus rétro-propagés sont différentes et les champs ne sont en phase que localement, au niveau de l'hétérogénéité (Mora, 1987a; Pratt et al., 1996). Cependant, dans ce cas, les basses longueurs d'onde manquent et l'inversion se comporte comme une migration. La localisation et la polarité de l'interface sont bien retrouvées. Néanmoins, l'amplitude est sous-estimée.

En revanche, d'après Pratt et al. (1996), lorsque les anomalies se situent dans la première zone de Fresnel, les interférences sont constructives dans une zone plus étendue et l'inversion se comporte comme une tomographie. Les directions des gradients de phase pour le champ direct et les résidus rétropropagés sont voisines, et une zone étendue apparaît, dans laquelle la phase du produit varie peu (Mora, 1987a). Spatialement, une version lissée de l'anomalie vraie apparaît. La sommation des contributions de plusieurs paires source-récepteurs et de plusieurs fréquences permet de reconstruire précisément la localisation, la forme et l'amplitude de l'anomalie.

La première zone de Fresnel peut également être vue comme une zone contenant des réflecteurs superficiels, permettant d'imager des nombres d'onde plus bas (Pratt et al., 1996). Il faut néanmoins que ces réflexions soient suffisamment énergétiques pour pouvoir être prises en compte dans l'inversion.

4.6.4 Equivalence entre la première itération du gradient et la migration avant sommation

Plusieurs auteurs (Tarantola, 1986; Mora, 1987b; Kolb et al., 1986) ont montré l'équivalence cinématique entre la première itération du gradient et la migration avant sommation dans le domaine temporel. Selon Tarantola (1984b), en milieu homogène, l'inversion des formes d'onde est équivalente à la migration de Kirchhoff (Tarantola, 1984b), effectuant une imagerie des diffractants à l'aide d'hyperboles de diffractions et considérant des réflecteurs continus. Dans ce cas, il s'agit d'une inversion linéaire : la fonction coût est quadratique, le minimum global est unique et les différentes contributions au modèle apportées par les itérations se superposent. En milieu hétéro-

gène, l'inversion des formes d'onde équivaut au principe d'imagerie de Claerbout (1971) d'après Tarantola (1984a). Ce principe permet de retrouver la réflectivité du milieu. Un réflecteur existe quand champ direct et champ rétro-propagé aux récepteurs se rencontrent.

Pratt (1990); Pratt & Worthington (1990); Pratt et al. (1998) ont montré l'équivalent cinématique dans le domaine fréquentiel. En effet, dans le modèle lisse de départ, aucune onde réfléchie n'existe, seules des ondes transmises sont présentes. Les résidus contiennent donc les ondes réfléchies. Après avoir enlevé les premières arrivées (généralement supprimée car le modèle lisse permet de les calculer précisément), la migration projette les données sous forme d'isochrones (en temps) dans le domaine des modèles (Miller et al., 1987) ou d'ellipses en profondeur (Shin et al., 2001a) alors que le gradient projette les résidus sur le chemin d'onde, *i.e.* sur les ellipses correspondant aux différentes zones de Fresnel et montrées sur les figures 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39 et 4.40 (Woodwards, 1992; Sirgue, 2003). Les événements transmis sont localisés dans la première zone de Fresnel, les événements réfléchis se trouvent dans les zones de Fresnel supérieures. Ainsi, la première itération de l'inversion est cinématiquement équivalente à la migration.

Cependant, l'inversion des formes d'onde procède de manière itérative, alors que la migration est effectuée une seule fois. Elle ne contient pas les bas nombres d'onde et ne permet que de reconstruire les hauts nombres d'onde. De plus, d'après Shin et al. (2001b), les données observées sont rétro-propagées dans la migration, alors que les résidus, *i.e.* les différences entre données observées et calculées, sont rétro-propagées dans l'inversion. Ceci permet la quantification des anomalies de vitesse. Luo & Schuster (1991) ont mis au point une méthode intermédiaire entre migration et inversion, permettant de prendre en compte les résidus ou les données observées selon la qualité du macromodèle. Ainsi, la migration ne donne pas une image quantifiée des anomalies mais plutôt une carte des réflecteurs (Robein, 2003). Des techniques récentes permettent néanmoins de prendre en compte l'amplitude dans la migration (Schleicher et al., 1993).

4.6.5 Influence du dispositif d'acquisition

Dans cette partie, nous comparons des images issues de l'inversion de données acquises en réflexion (figures 4.42, 4.43, 4.46 et 4.47) ou en transmission (figures 4.44 et 4.45). Les figures 4.11 et 4.11, montrant des coupes horizontales pour des dispositifs en transmission, complètent cette comparaison. Nous avons également représenté les fonctions coût correspondantes sur les figures 4.48, 4.50, 4.49 et 4.51.

Le dispositif d'acquisition général est présenté sur la figure 4.4. Dans l'acquisition en transmission, une source est enregistrée par des récepteurs situés sur le côté opposé au modèle. Dans le dispositif en réflexion, une source est enregistrée par des récepteurs situés sur le même côté. Les fréquences choisies, ainsi que le nombre et la position des sources et des récepteurs sont identiques à la simulation numérique présentée dans l'article dans la section 4.3.6. La source est présentée sur la figure 4.41.

Les figures 4.42 et 4.43 présentent des courbes de vitesses V_p et V_s extraites le long de profils horizontaux traversant l'anomalie à gauche dans le modèle (figure 4.4). Les courbes issues d'inversions avec des données en transmission sont plus proches du modèle réel que celles calculées avec un dispositif en réflexion.

L'allure de ces courbes, contenant des variations de vitesse rapides à des endroits où les vitesses sont *a priori* homogènes, est liée au dispositif d'acquisition et aux variations latérales de vitesse sur des petites distances dans les zones de Fresnel éloignés de la zone centrale. Ce même phénomène a été montré par Pratt et al. (1996) pour la reconstruction d'un modèle de vitesse 1D dans le cas acoustique à l'échelle crustale.

Cependant, comme Pratt et al. (1996) l'a mentionné, ces images peuvent être améliorées en utilisant un lissage spatial adapté. Néanmoins, notre objectif ici était de montrer l'influence du dispositif d'acquisition dans des conditions équivalentes, donc tous les coefficients sont identiques

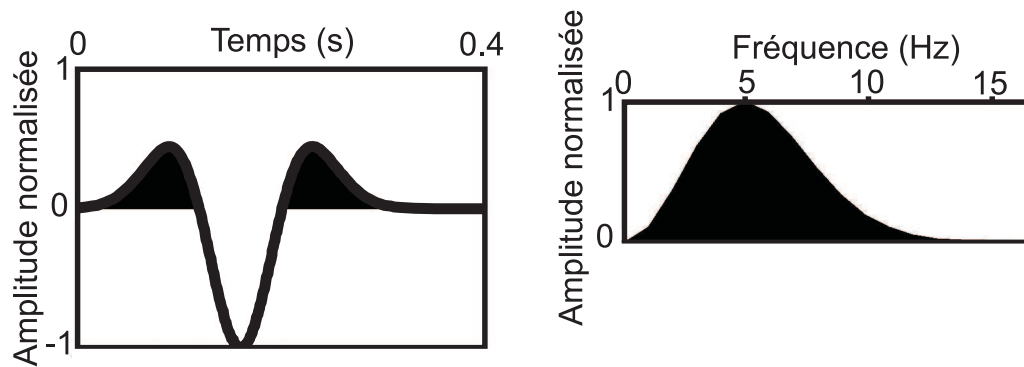


FIG. 4.41: Source temporelle et contenu fréquentiel de la source

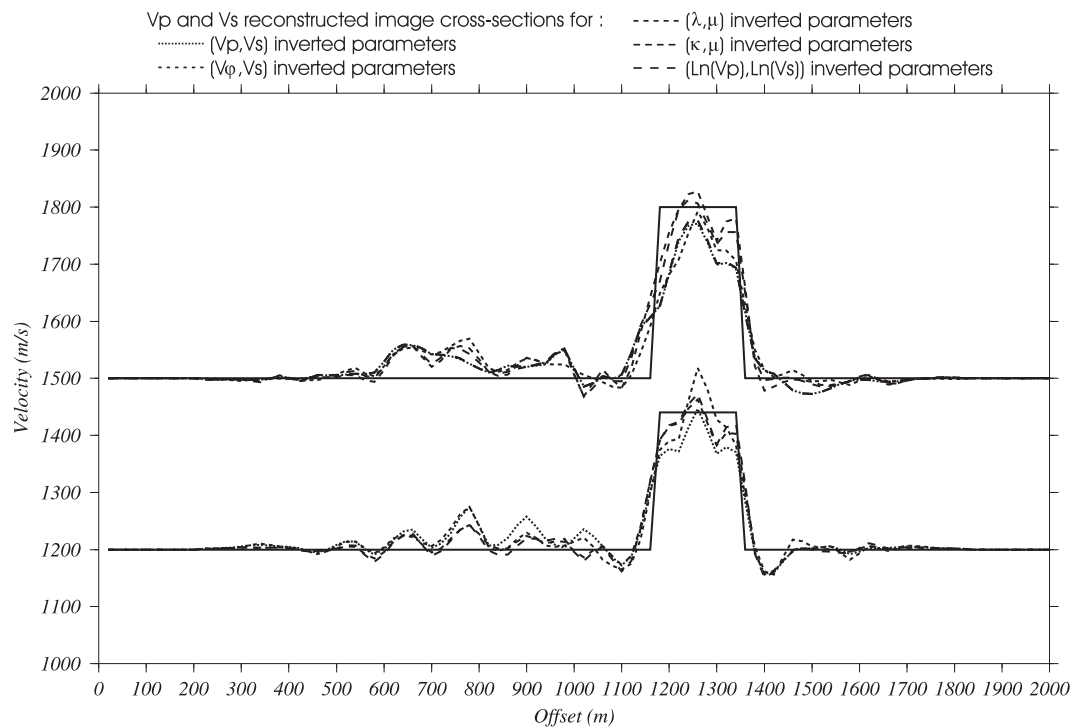


FIG. 4.42: Profil horizontal de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born

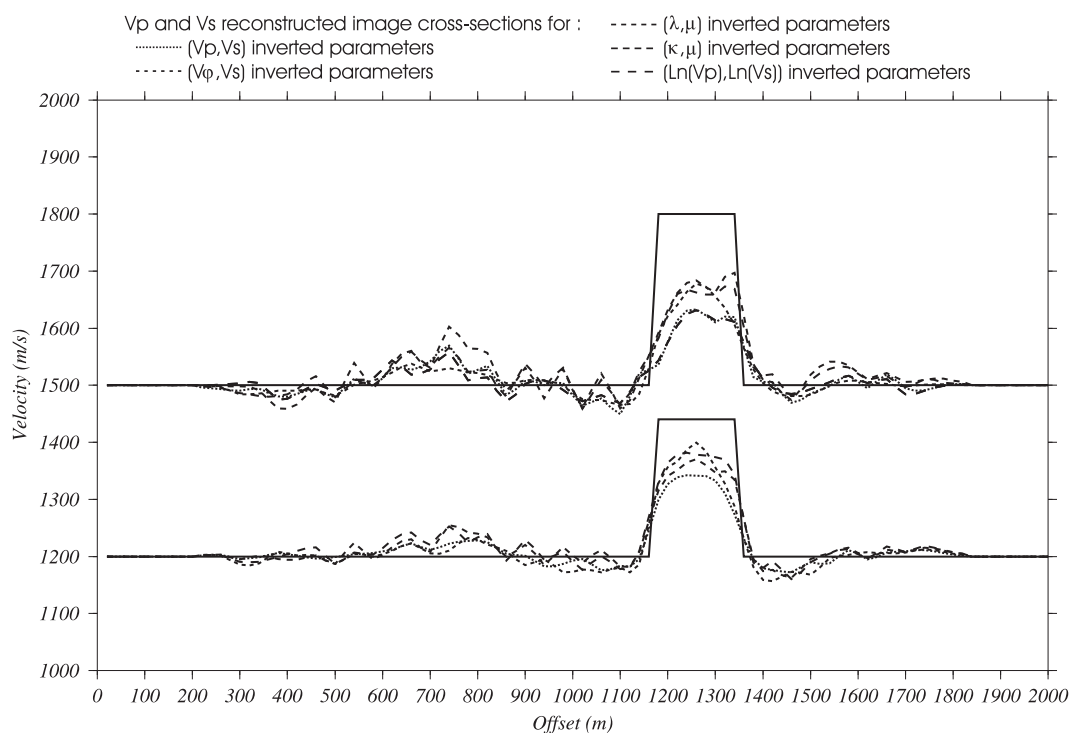


FIG. 4.43: Profil horizontal de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov

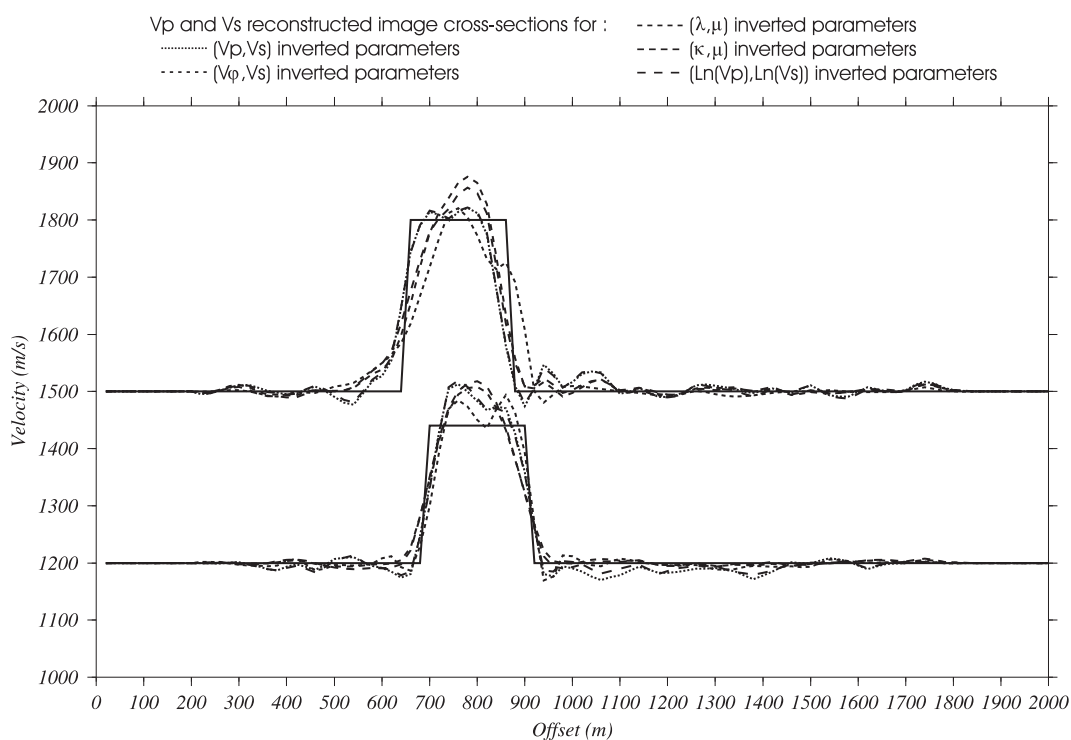


FIG. 4.44: Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Born

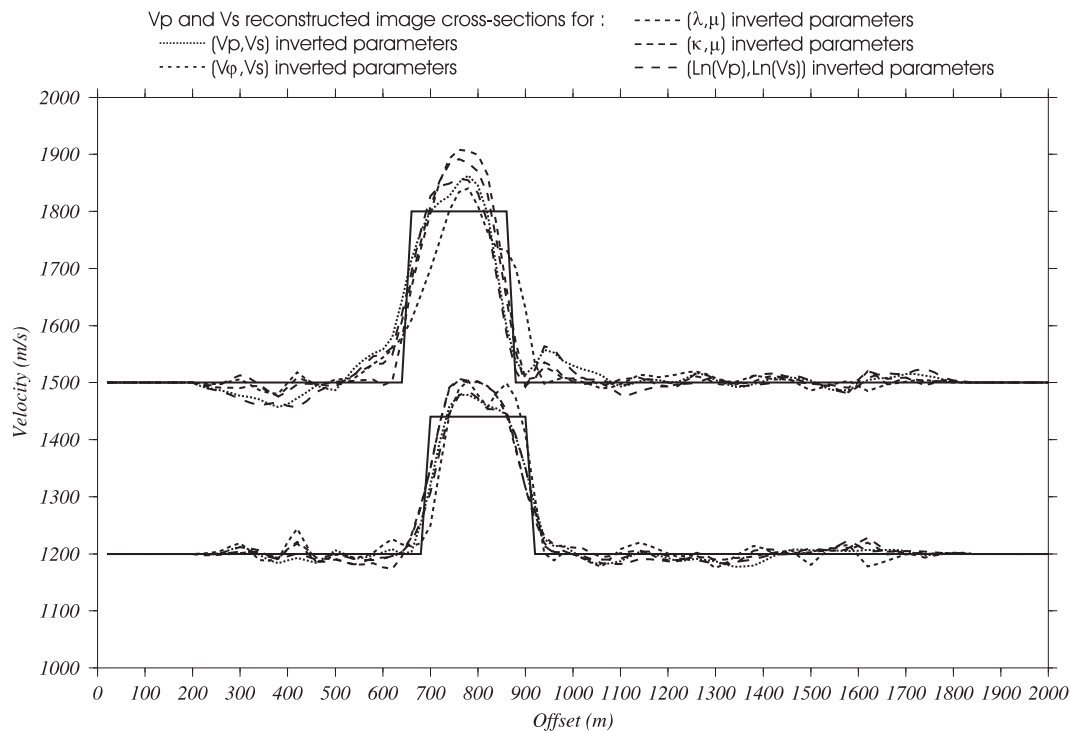


FIG. 4.45: Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Rytov

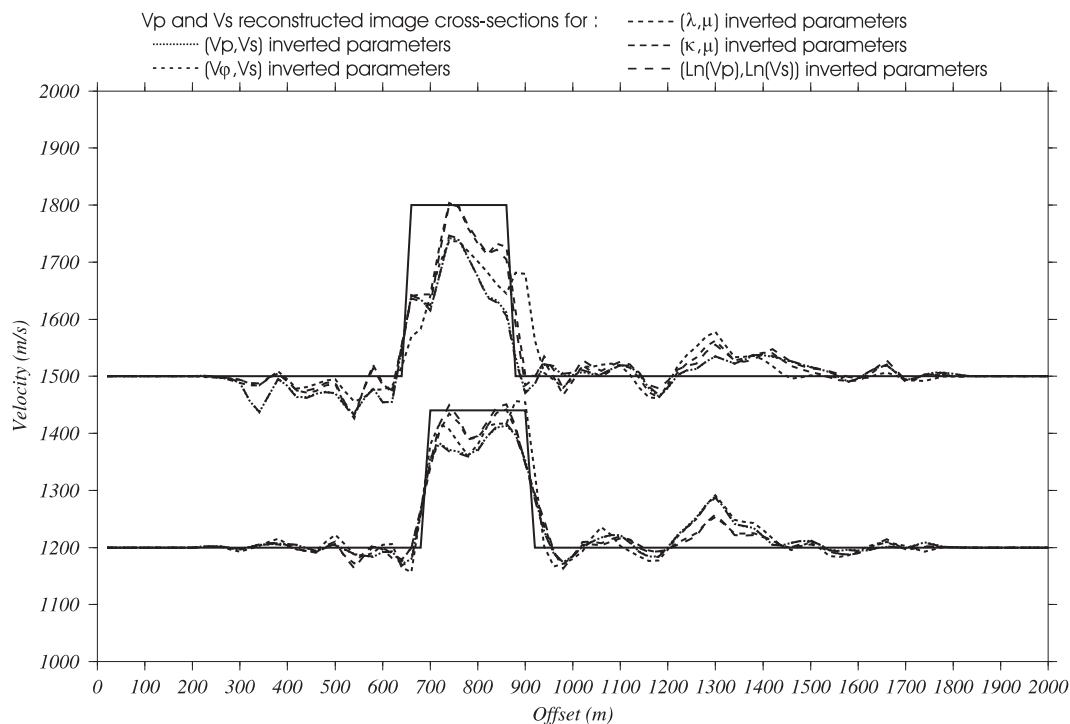


FIG. 4.46: Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born

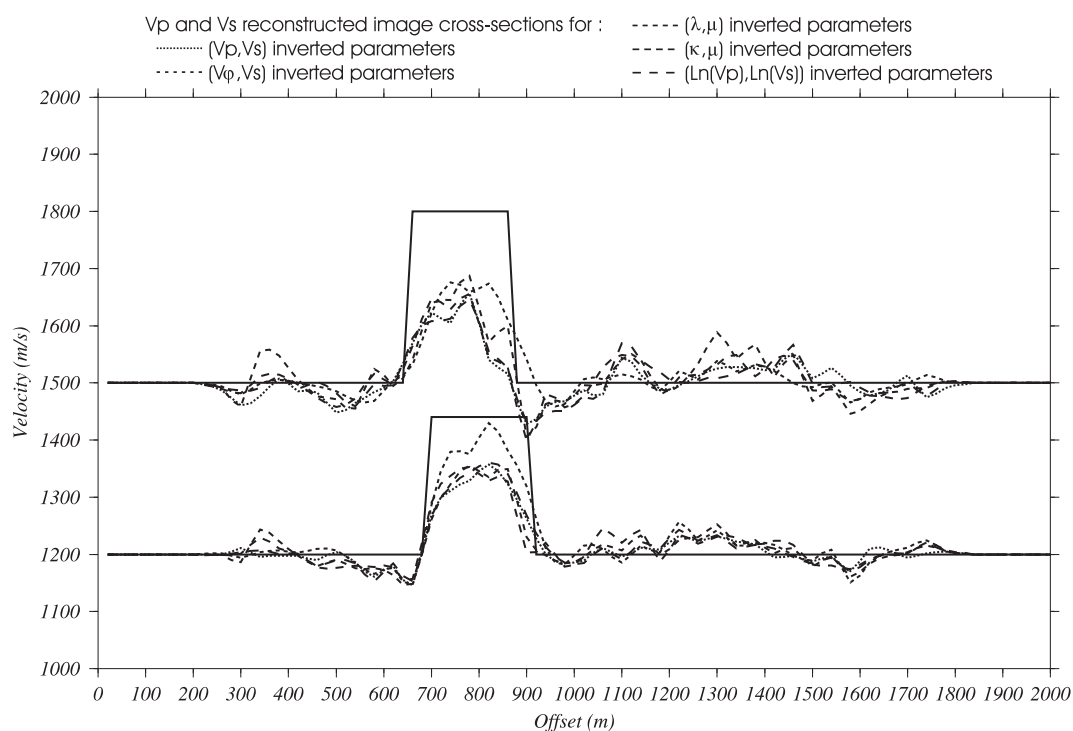


FIG. 4.47: Profil vertical de vitesses V_p (haut) et V_s (bas) pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov

à ceux de la section 4.3.6.

La comparaison entre les figures 4.46 et 4.47, montrant des profils verticaux extraits de modèles obtenus avec des données en réflexion, et les figures 4.44 et 4.45, présentant les mêmes coupes obtenues avec des données en transmission, indique également que les anomalies sont mieux retrouvées avec des acquisitions en transmission. Ceci a déjà été observé par Gauthier et al. (1986).

La meilleure reconstruction des anomalies pour un dispositif en transmission est également visible par la comparaison des fonctions coût calculées pour un dispositif en transmission avec l'approximation de Born (figure 4.48) ou de Rytov (figure 4.49) avec les fonctions coût calculées pour des données en réflexion avec l'approximation de Born (figure 4.50) ou de Rytov (figure 4.51). En effet, les fonctions coût calculées pour des dispositifs en réflexion sont en général plus élevées. Ceci est particulièrement notable pour l'inversion des données avec l'approximation de Rytov, ce qui rejoint la discussion de la partie 4.2. Cela constitue un argument en faveur du choix de l'approximation de Born plutôt que de Rytov dans les exemples où les acquisitions contiennent des sources et des récepteurs localisés à la surface libre.

Mora (1988) explique également la moins bonne qualité des images reconstruites en réflexion par les arguments suivants. Les données de réflexion contiennent les hauts nombres d'onde, celles en transmission contiennent les bas nombres d'onde. Si les deux types de données sont utilisés, les bas nombres d'onde sont d'abord imagés (modélisation de la cinématique) suivis des hauts nombres d'onde (modélisation de la réflectivité). Si les données sont en réflexion seule, la résolution des hauts nombres d'onde est insuffisante et les bas nombres d'onde sont mal construits.

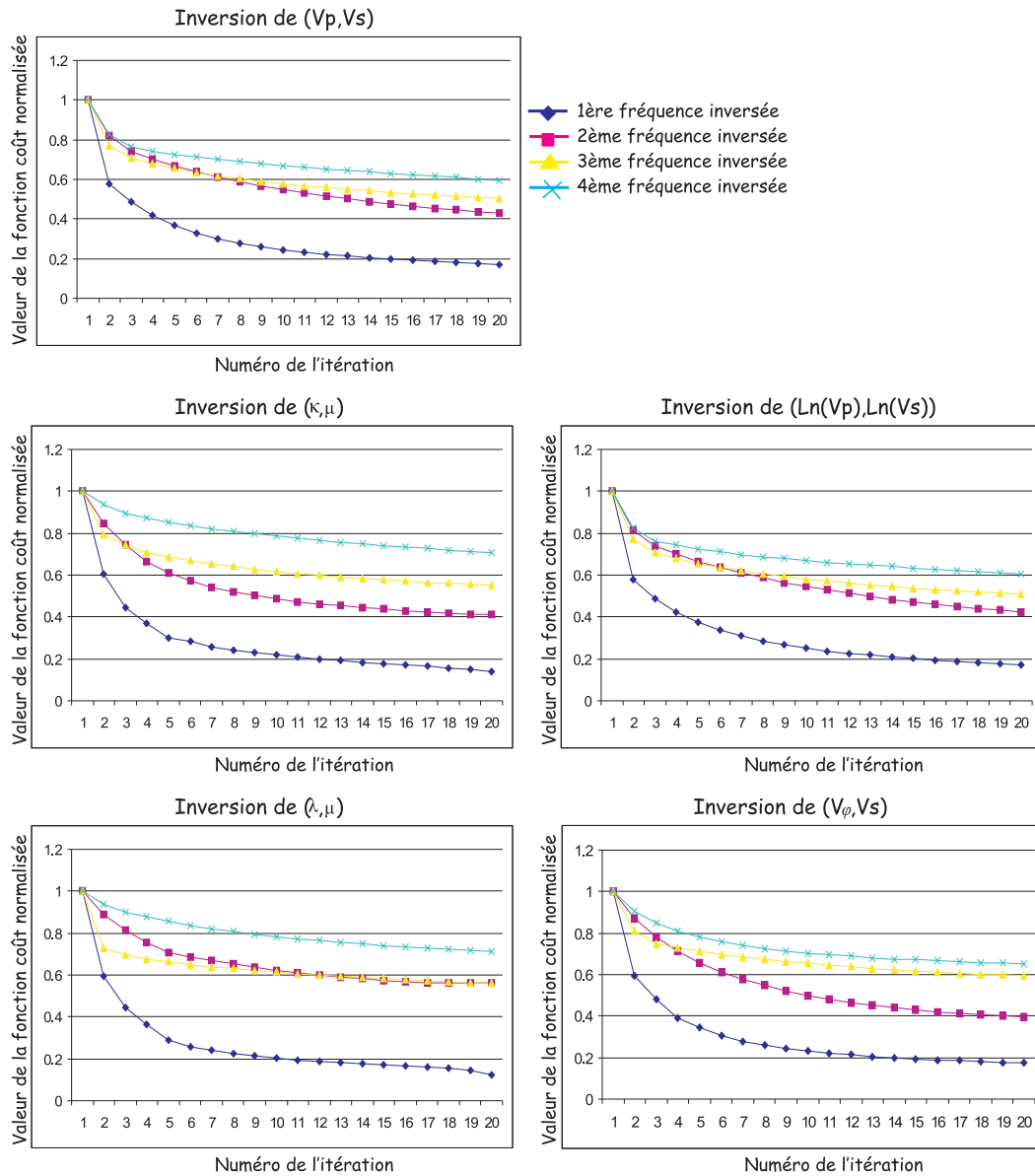


FIG. 4.48: Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Born

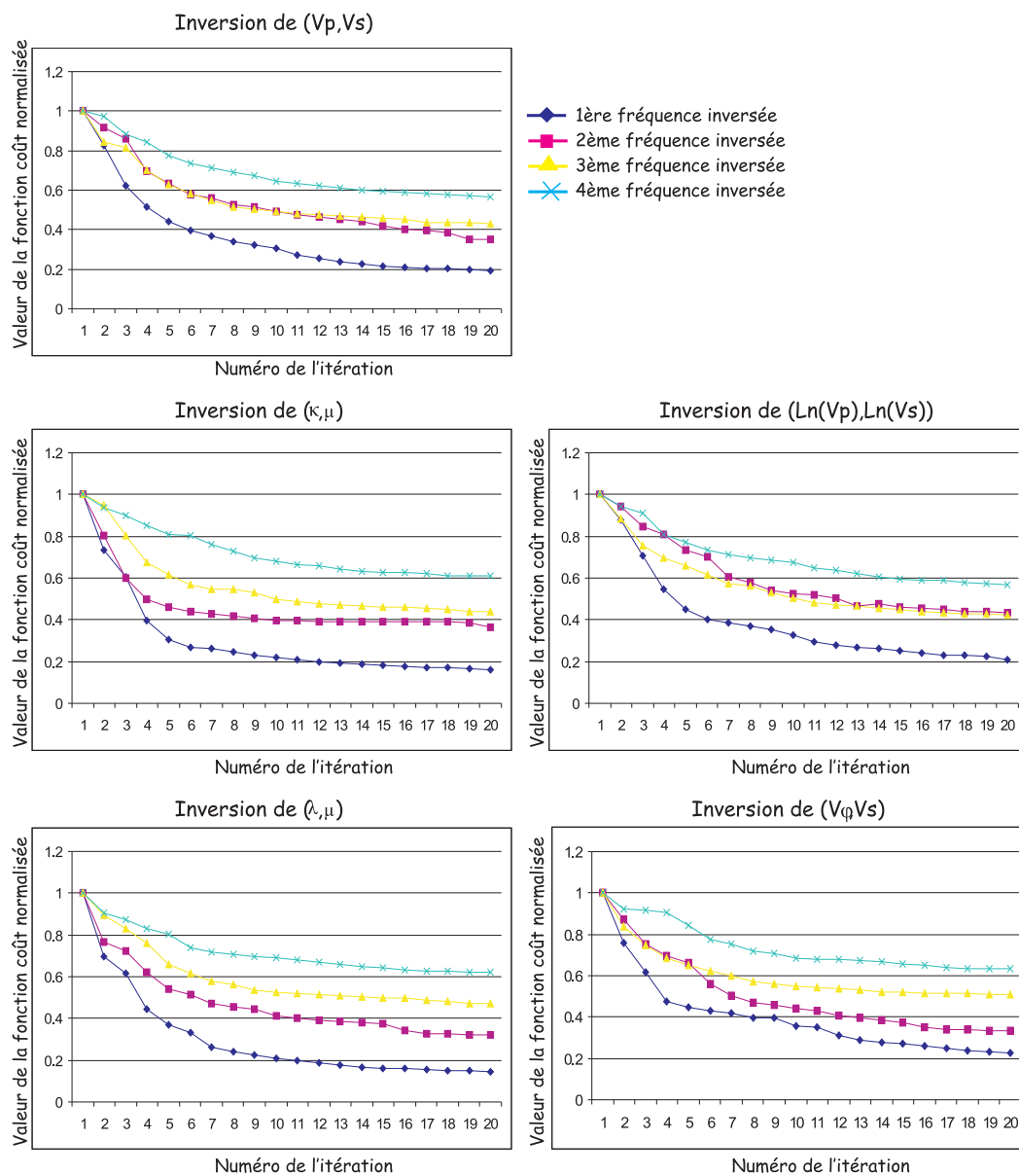


FIG. 4.49: Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en transmission avec l'approximation de Rytov

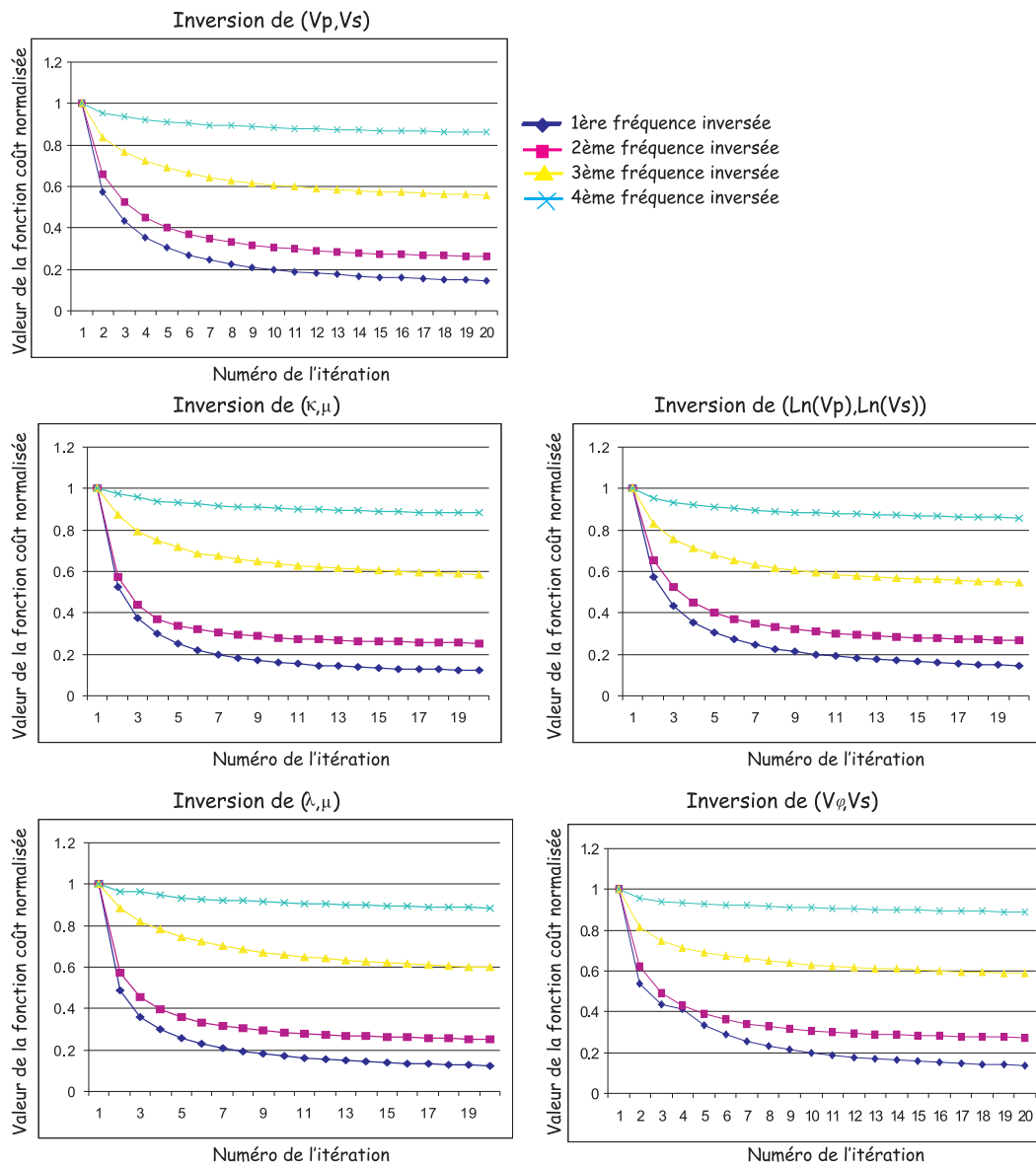


FIG. 4.50: Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Born

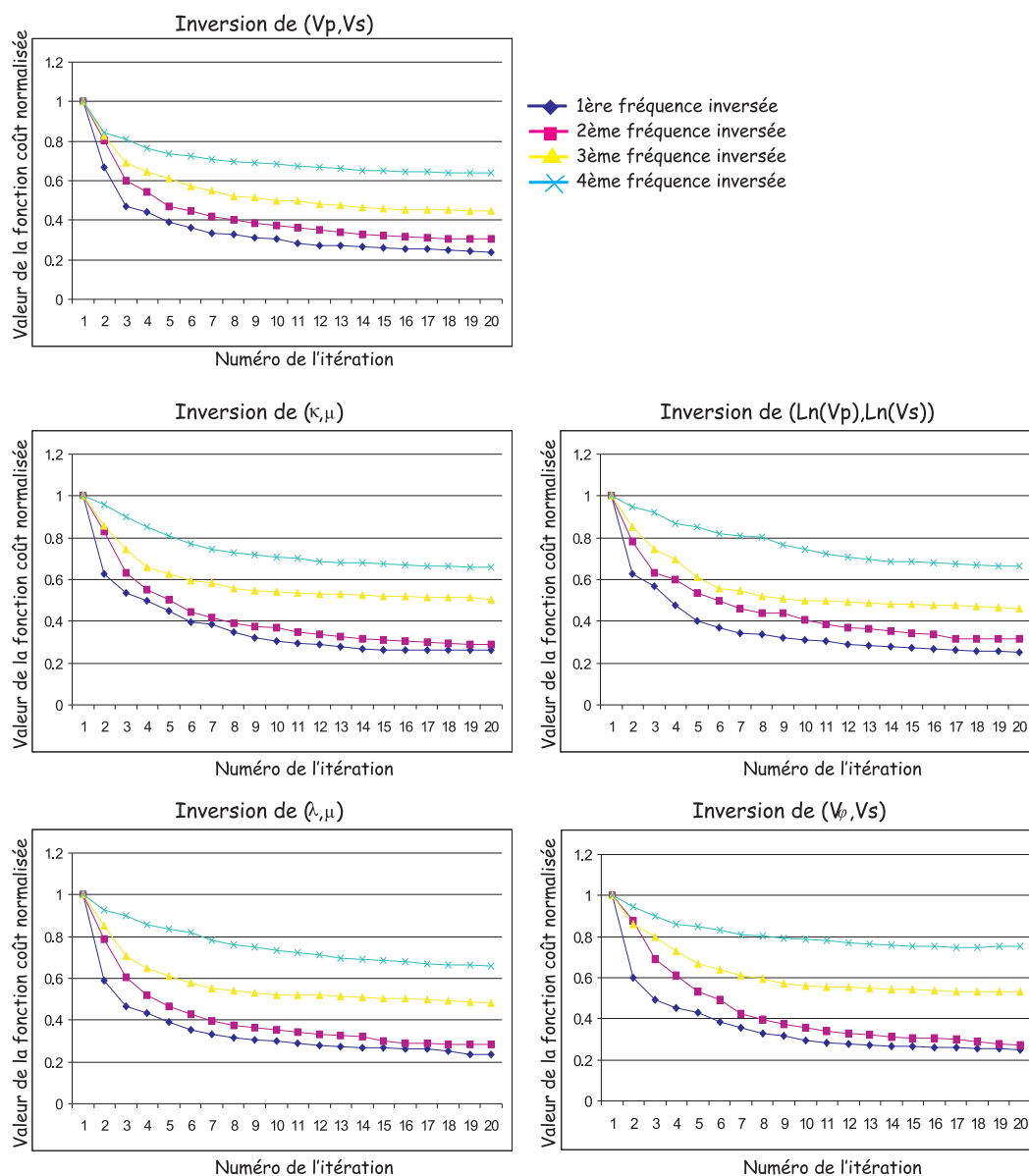


FIG. 4.51: Fonctions coût pour l'inversion de différents couples de paramètres dans une configuration en réflexion avec l'approximation de Rytov

Notons également que le comportement des fonctions coût ne change pas de manière significative en fonction du couple de paramètres inversés. Ceci signifie que du point de vue de l'inversion, la qualité des différents modèles est équivalente. Ceci indique également que la meilleure reconstruction des amplitudes maximales pour l'inversion des paramètres de Lamé et la meilleure détection des bords des anomalies pour l'inversion des vitesses sismiques est davantage liée à la sensibilité des paramètres inversés à des phénomènes physiques différents qu'à la qualité des images finales. A titre de remarque, pour l'approximation de Rytov et des données en transmission, l'allure des fonctions coût change un peu selon les paramètres inversés. En réalité, c'est le comportement de l'inversion en fonction des fréquences qui change un peu, mais les coûts finaux sont très voisins.

La fonction coût diminue davantage aux basses fréquences par rapport aux hautes fréquences. En effet, l'inversion reconstruit déjà correctement les anomalies aux basses fréquences, comme le montrent les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8.

Enfin, avec l'approximation de Born et un dispositif en réflexion, la décroissance de la fonction coût (figure 4.50) pour chaque fréquence se produit à 90% lors des cinq premières itérations. Ceci justifie le nombre de cinq itérations maximal utilisé par la suite avec d'autres modèles.

Nous avons donc vu que le dispositif d'acquisition conditionne la qualité de l'inversion. L'ouverture du dispositif joue également un rôle (Sirgue, 2003) : plus l'angle d'ouverture maximal est élevé, plus le spectre de nombres d'onde imagés est large et meilleure est la résolution de l'image (Pratt et al., 1998; Ravaut et al., 2004; Operto et al., 2004). Nous allons maintenant détailler ce point et expliquer comment les fréquences à inverser sont choisies.

4.7 Imagerie, spectre de nombre d'onde et choix des fréquences inversées

L'un des avantages importants de l'inversion des formes d'onde effectuée dans le domaine fréquentiel réside dans la possibilité d'inverser un nombre limité de fréquences (Pratt & Worthington, 1988; Liao & McMechan, 1996; Forgues et al., 1998; Sirgue, 2003; Ravaut, 2003). Cette observation est cohérente avec les résultats de Wu & Toksöz (1987) qui ont montré qu'une seule composante fréquentielle d'une géométrie d'acquisition donnée fournit des informations sur une portion finie du modèle dans le domaine des nombres d'onde.

4.7.1 Gradient et contenu en nombre d'onde

Sirgue & Pratt (2001) utilise une approximation en onde plane et un milieu homogène à une dimension (vitesse variant avec la profondeur) pour établir les fréquences à inverser (figure 4.52). Il faut garder en tête que cette estimation donne un échantillonnage minimal des fréquences. Pour des milieux complexes comme la subsurface, il est souvent nécessaire d'augmenter le nombre de fréquences inversées. Sirgue & Pratt (2001) examinent la contribution d'un couple source-récepteur et d'une composante fréquentielle. Procédons de la même manière pour le cas élastique. Nous ne considérons ici que les ondes de volume. Comme Sirgue (2003), nous négligeons les effets d'amplitude, nous supposons que le milieu de référence est homogène avec une vitesse générique c_0 . Cette dernière représente V_p ou V_s selon le cas considéré, et les fonctions de Green sont des ondes P ou S. Nous nous situons en champ lointain, de telle sorte que les fonctions de Green peuvent être remplacées par des approximations en onde plane. Ces hypothèses paraissent restrictives mais d'après Sirgue (2003), aucune d'entre elles n'est strictement requise dans les cas réels.

Par définition, une fonction de Green $G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$ correspond à la vitesse de déplacement enregistrée selon la direction i et émise selon la direction j . L'onde plane en question est une onde P ou une onde S. Par définition, une onde plane peut être décrite sous la forme : $exp(ik_0 \vec{s} \cdot \mathbf{x})$ dans le domaine des nombres d'onde. Nous décomposons donc les vecteurs \vec{s} et \vec{r} correspondant aux vecteurs unitaires allant de la source au point diffractant ou du récepteur au point diffractant (figure 4.52), de manière à respecter ces définitions, selon :

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) &= exp(ik_0 \vec{s}_j \cdot x_i \vec{x}_i) \\ G_{kl}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) &= exp(ik_0 \vec{r}_l \cdot x_k \vec{x}_k) \end{aligned} \quad (4.86)$$

où $k_0 = \omega/c_0$ est le nombre d'onde dans le milieu de référence homogène. \vec{x}_i et \vec{x}_k sont les vecteurs unitaires le long des axes i et k du repère cartésien. c_0 est la vitesse de référence, correspondant à V_p ou V_s selon qu'une onde plane P ou S est étudiée. La formulation par ondes planes entraîne que les fonctions de Green $G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$ telles que $i \neq j$ valent 1.

Les dérivées des fonctions de Green apparaissent dans le calcul des dérivées de Fréchet, que ce soit avec l'approximation de Born ou de Rytov. La dérivation spatiale équivaut à une multiplication par ik_0 pour une fonction de Green $G_{ij}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})$ telle que $i \neq j$.

Approximation de Born

Commençons par le cas des dérivées de Fréchet calculées avec l'approximation de Born. L'opérateur adjoint élastique contient des coefficients $\partial K_{pq}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_p$, s'exprimant sous la forme de produits de dérivées spatiales selon x et z de fonctions de Green. Afin de prendre en compte tous les types d'onde, les fonctions de Green des expressions suivantes peuvent être des ondes P ou des ondes S. Le nombre d'onde considéré k_0 et la vitesse du milieu c_0 seront donc écrits comme k_0^s et c_0^s pour le cas de l'onde (P ou S) provenant de la source et k_0^r et c_0^r pour le cas de l'onde (P ou S) provenant des récepteurs.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= -2V_p^0(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \right\} \\
&\quad \left\{ \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} + \frac{\partial G_{zx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \right\} \\
&= -2V_p^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
&= 2V_p^0(\mathbf{x}) k_0^s k_0^r G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\
&= 2V_p^0(\mathbf{x}) k_0^s k_0^r \exp(i(k_0^s \vec{s}_x \cdot x \vec{x}_x + k_0^r \vec{r}_x \cdot x \vec{x}_x))
\end{aligned} \tag{4.87}$$

En suivant le même raisonnement,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_z z \vec{x}_z + k_0^r \vec{r}_x \cdot x \vec{x}_x)) \\
\frac{\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_x x \vec{x}_x + k_0^r \vec{r}_z \cdot z \vec{x}_z)) \\
\frac{\partial K_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_z \cdot z \vec{x}_z + k_0^r \vec{r}_z \cdot z \vec{x}_z))
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Les coefficients de l'opérateur adjoint élastique par rapport au paramètre V_s s'écrivant $\partial K_{pq}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$ se comportent différemment. En effet, dans l'approximation en onde plane, tous les termes du type $\frac{\partial G_{pq}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial r}$ où r et p sont différents s'annulent puisque dans ce cas, la direction de dérivation est perpendiculaire à la direction d'enregistrement. Restent donc les contributions des coefficients $\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$ et $\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$, et plus particulièrement des termes suivants : $\frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x}$ et $\frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z}$. Ainsi, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -4V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial z} \\
&= 4V_s^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\
&= 4V_s^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_z \cdot z \vec{x}_z + k_0^r \vec{r}_x \cdot x \vec{x}_x))
\end{aligned} \tag{4.89}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= -4V_s^0(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r})}{\partial z} \frac{\partial G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s})}{\partial x} \\
&= 4V_s^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s G_{zz}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{r}) G_{xx}^0(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{s}) \\
&= 4V_s^0(\mathbf{x}) k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_x \cdot x \vec{x}_x + k_0^r \vec{r}_z \cdot z \vec{x}_z))
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Ces équations montrent les contributions des différents coefficients en terme d'imagerie des nombres d'onde. Les figures 4.53, 4.54, 4.55 et 4.56 montrent la contribution de chaque terme dans le plan (k_x, k_z) . Les figures 4.53 et 4.55 constituent des cas particuliers où les ondes issues de la source et du récepteur sont de même nature. Les figures 4.54 et 4.56 traitent le cas plus général d'ondes de nature différente.

En terme d'imagerie, les résultats sont inchangés que la nature des ondes soit la même ou non. En effet, le calcul du coefficient de réflexion au point de réflexion sur la couche inférieure pour des angles quelconques (figure 4.52) permet d'établir que (Aki & Richards, 2002) :

$$\sin \beta / c_0^s = \sin \alpha / c_0^r \tag{4.91}$$

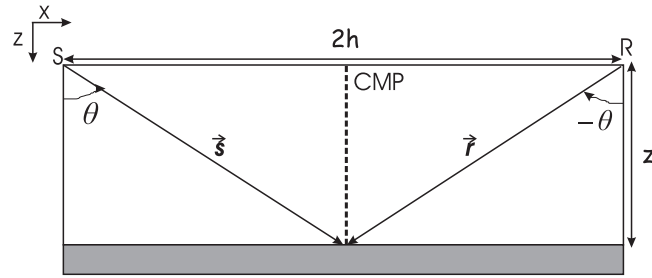


FIG. 4.52: Schéma de base de la diffraction 1D. L'onde incidente est diffractée par une couche fine à une dimension au centre entre la source et le récepteur. Dans le cas à une dimension pour deux ondes quelconques, les angles des rais sont notés β et $-\alpha$ et ne sont pas égaux. Dans le cas particulier d'ondes de même nature, les angles θ et $-\theta$ sont égaux. Modifié d'après Sirgue (2003)

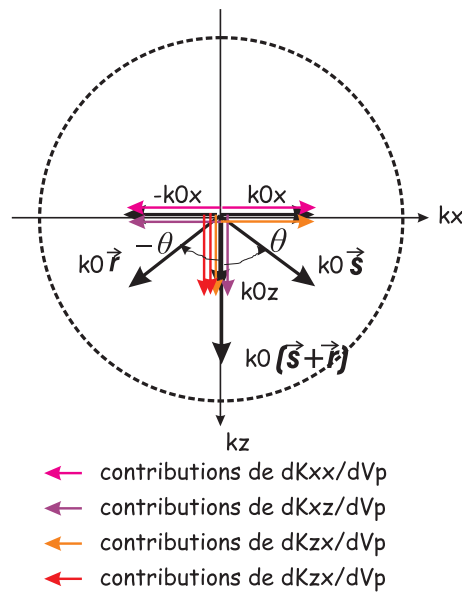


FIG. 4.53: Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_p . Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde

Donc les normes des contributions en nombre d'onde horizontal sur la figure 4.54 sont égales et le vecteur final a une direction verticale.

Ainsi, pour une configuration telle que sources et récepteurs se situent à la surface et pour un milieu à une dimension (figure 4.52), les contributions horizontales des différents termes s'annulent quel que soit les types d'onde directe ou rétro-propagée. Nous retrouvons les mêmes résultats qu'en acoustique (Sirgue, 2003; Ravaut, 2003) et les mêmes résultats s'appliquent pour déterminer les fréquences à imager.

Approximation de Rytov

Avec l'approximation de Rytov, les résultats sont différents et le noyau par rapport à V_p s'écrit :

$$\frac{\partial K_{xx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} = 2V_p^0(\mathbf{x})k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_x \cdot x \vec{x}_x + k_0^r \vec{r}_x \cdot x \vec{x}_x - k_0^s \vec{s}_x \cdot r_x \vec{r}_x)) \quad (4.92)$$

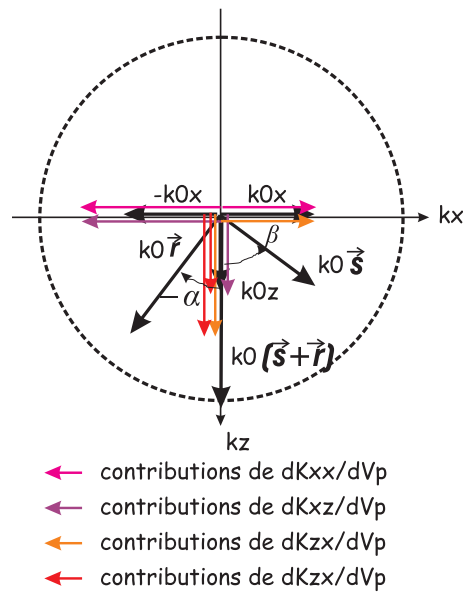


FIG. 4.54: Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_p et des ondes directes et rétropropagées de nature différente. Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde

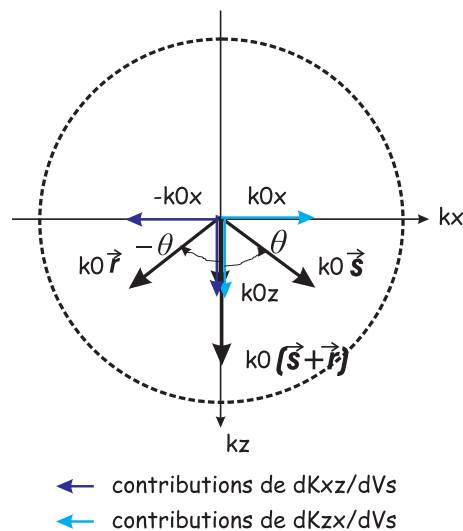


FIG. 4.55: Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_s . Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde

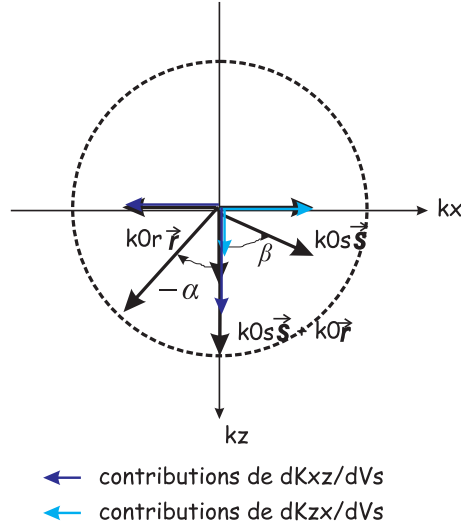


FIG. 4.56: Contribution de chaque coefficient du noyau de Born dans le spectre de nombre d'onde total pour le paramètre V_s des ondes directes et rétropropagées de nature différente. Pour une acquisition de surface et un milieu à une dimension, les composantes horizontales s'annulent par la contribution des différents termes. Seules restent les composantes verticales du nombre d'onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x})k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_z \cdot z\vec{x}_z + k_0^r \vec{r}_x \cdot x\vec{x}_x - k_0^s \vec{s}_z \cdot r_x \vec{r}_x)) \\ \frac{\partial K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x})k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_x \cdot x\vec{x}_x + k_0^r \vec{r}_z \cdot z\vec{x}_z - k_0^s \vec{s}_x \cdot r_z \vec{r}_z)) \\ \frac{\partial K_{zz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p} &= 2V_p^0(\mathbf{x})k_0^r k_0^s \exp(i(k_0^s \vec{s}_z \cdot z\vec{x}_z + k_0^r \vec{r}_z \cdot z\vec{x}_z - k_0^s \vec{s}_z \cdot r_z \vec{r}_z))\end{aligned}$$

Les grandeurs r_x et r_z désignent les distances horizontales et verticales entre source et récepteur. Les termes $\vec{s}_x r_z \vec{r}_z$ et $\vec{s}_z r_x \vec{r}_x$ s'annulent en raison de l'orthogonalité des vecteurs. De plus, si source et récepteur sont situés à la surface, $r_z = 0$. La seule contribution supplémentaire est donc celle de $\vec{s}_x r_x \vec{r}_x$ pour $\frac{\partial K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_p}$. Ainsi, l'approximation de Rytov comporte également une contribution dans le domaine des nombres d'onde horizontaux.

Calculons maintenant $K_{xz}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$ et $K_{zx}^r(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)/\partial V_s$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{xz}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= 4V_s^0(\mathbf{x})k_0^2 \exp(ik_0(\vec{s}_z \cdot z\vec{x}_z + \vec{r}_x \cdot x\vec{x}_x - \vec{s}_z \cdot x\vec{r}_x)) \\ \frac{\partial K_{zx}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)}{\partial V_s} &= 4V_s^0(\mathbf{x})k_0^2 \exp(ik_0(\vec{s}_x \cdot x\vec{x}_x + \vec{r}_z \cdot z\vec{x}_z - \vec{s}_x \cdot z\vec{r}_z))\end{aligned}\quad (4.93)$$

Les produits scalaires $\vec{s}_z x \vec{r}_x$ et $\vec{s}_x z \vec{r}_z$ sont nuls. Donc en terme de contribution dans le spectre des nombres d'onde, il n'y a pas de changement par rapport à l'approximation de Born.

Ainsi, par rapport à l'approximation de Born, l'approximation de Rytov contient une contribution des nombres d'onde horizontaux pour V_p . Le terme $\exp(ik_0^s(-\vec{s}_x r_x \vec{r}_x)) = \exp(ik_0^s r_x)$ peut également s'écrire comme $\exp(ik_0^s d)$, où d est le déport ou distance horizontale entre la source et le récepteur. Ceci est un élément permettant de comprendre les différences entre les approximations de Born et de Rytov pour le calcul des dérivées de Fréchet. Avec l'approximation de Rytov, le déphasage de l'onde par rapport au champ propagé direct en un point donné est pris en compte dans l'imagerie de V_p .

La contribution de tous les termes (figures 4.54 et 4.56) avec l'approximation de Born revient à la contribution d'un terme en $\exp(i(k_0^s \vec{s} + k_0^r \vec{r}) \cdot \mathbf{x})$ pour le calcul du noyau en V_p et $\exp(i(k_0^s \vec{s} + k_0^r \vec{r}) \cdot \mathbf{x})$ pour le calcul du noyau en V_s .

Dans le cas de l'approximation de Rytov, nous avons vu qu'un terme supplémentaire apparaît pour le terme V_p , contenant une contribution à l'image des nombres d'onde horizontaux. Cependant, le contenu des nombres d'onde verticaux est inchangé et nous pouvons nous baser sur le même contenu en nombre d'onde vertical pour le choix des fréquences à inverser. L'effet du terme en nombre d'onde horizontal augmente simplement la redondance dans l'espace des nombres d'onde, puisqu'une fréquence inversée couvre un spectre en nombre d'onde plus large.

Nous étudions donc le cas d'une onde plane $\exp(i(k_0^s \vec{s} + k_0^r \vec{r}) \cdot \mathbf{x})$, correspondant au cas générique. De plus, comme nous avons vu qu'en terme d'imagerie, le vecteur nombre d'onde résultant est vertical pour l'approximation de Born et pour la restriction de Rytov correspondante, nous pouvons nous situer dans le cas particulier où $\beta = \alpha$ (figure 4.52) sans perdre de généralité.

4.7.2 Illumination en nombre d'onde pour le cas à une dimension

Dans cette partie, nous nous intéressons à la manière de choisir les fréquences à inverser. Les équations 4.88, 4.89, 4.90 et 4.91 sont valables pour un couple source-récepteur et une fréquence ω donnée, et nous permettent d'obtenir la contribution d'un nombre d'onde $k_0(\vec{s} + \vec{r}) \cdot \mathbf{x}$. Or, afin d'obtenir la meilleure image possible, nous souhaitons imager le plus grand spectre de nombre d'onde possible. Deux solutions sont possibles (Sirgue, 2003) : augmenter le nombre de fréquences et/ou augmenter le nombre de couples source-récepteur. L'équation 4.19 indique que nous sommes ces contributions pour toutes les sources et tous les récepteurs présents. Ceci permet d'augmenter le nombre de nombres d'ondes imagés. Ainsi, le nombre de fréquences inversées peut être choisi de manière à éviter la redondance de l'information en nombre d'onde. Il est également possible de rajouter des fréquences à ce choix minimal, de manière à tirer profit de la redondance dans les données pour augmenter la qualité des images finales.

La figure 4.52 montre le schéma d'une acquisition en une dimension et une diffraction ou réflexion sur une couche fine. Dans le cas où deux ondes de même nature sont considérées, les angles à la source et au récepteur sont égaux. D'après Sirgue (2003) et en utilisant les relations trigonométriques, les composantes du vecteur $k_0(\vec{s} + \vec{r})$ sont :

$$\begin{aligned} k_x &= 0 \\ k_z &= 2k_0\gamma \end{aligned} \quad (4.94)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma &= \cos(\alpha + \beta)/2 \\ &= 1/\sqrt{1 + R^2} \end{aligned} \quad (4.95)$$

où $R = h/z$ est le rapport entre le demi-déport maximal h et la profondeur à atteindre z (figure 4.52)

Ceci indique que chaque paire source-récepteur contribue différemment à l'image finale. Plus le déport maximal est élevé, plus le nombre d'onde vertical est petit. Donc, pour une fréquence et une ouverture de dispositif donnée, le nombre d'onde vertical augmente avec la profondeur, diminuant ainsi la résolution de l'imagerie puisque la bande passante en angles de diffractions diminue (Ravaut, 2003). De plus, l'image s'appauvrit en basses fréquences temporelles, correspondant aux faibles nombres d'onde. Cette formule indique également que, pour une fréquence et un point donné, l'intervalle de nombres d'onde imagés augmente avec le déport maximal. Ceci explique l'intérêt porté aux dispositifs grand angle (Lambaré et al., 1992; Jin et al., 1992; Forgues, 1996; Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003; Operto et al., 2004; Ravaut, 2003). Enfin, ceci montre que, pour des angles de diffraction faible, *i.e.* pour des angles θ , α ou β faibles et des distances source-récepteur faibles, les courtes longueurs d'onde sont bien imagées, alors que les angles de diffraction importants permettent de prendre en compte des nombres d'onde plus petits donc des longueurs d'onde plus

élevées. A l'extrême, pour une distance source-récepteur infinie, la norme du nombre d'onde vaut $2k_0 = 2\omega/c$, et donc la résolution maximale est de $\lambda/2$, λ correspondant à la longueur d'onde P ou S, selon l'onde considérée. Ceci montre que l'inversion des formes d'onde résout mieux les images que la tomographie, pour laquelle la résolution maximale est de l'ordre de la largeur de la première zone de Fresnel, *i.e.* $\sqrt{\lambda d}$ où d est la distance entre la source et le récepteur.

4.7.3 Règle de choix des fréquences inversées

D'après Sirgue (2003), pour une acquisition de surface caractérisée par un intervalle de dépports $[0, x_{max}]$, la couverture en nombre d'onde vertical k_z pour une couche fine à une dimension d'épaisseur z à une fréquence donnée ω est limitée à l'intervalle $[k_{zmin}, k_{zmax}]$ où :

$$\begin{aligned} k_{zmin} &= 2k_0\gamma_{min} \\ k_{zmax} &= 2k_0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

avec $\gamma_{min} = 1/\sqrt{1+R^2}$ où $R = h/z$ est le rapport entre le demi-déport maximal h et la profondeur à atteindre z (figure 4.52). k_{zmin} et k_{zmax} sont les nombres d'onde associés aux dépports les plus lointains et les plus proches, respectivement. Notons que ces conditions dépendent exclusivement de la configuration géométrique, et non de la vitesse de propagation des ondes.

Le choix des fréquences doit assurer la continuité du spectre des nombres d'onde imagés. Ainsi, si une fréquence f_n a été inversée, la fréquence suivante à inverser doit être telle que :

$$k_{zmin}(f_{n+1}) = k_{zmax}(f_n) \quad (4.97)$$

En pratique, afin d'assurer la continuité du spectre, cette fréquence est choisie telle que :

$$k_{zmin}(f_{n+1}) \leq k_{zmax}(f_n) \quad (4.98)$$

D'après Sirgue & Pratt (2001), l'écart entre les fréquences à inverser augmente linéairement avec la valeur de la fréquence. En effet, d'après les équations 4.97 et 4.97, $f_{n+1} = f_n/\gamma_{min}$. L'incrément en fréquence Δf_{n+1} vaut :

$$\begin{aligned} \Delta f_{n+1} &= f_{n+1} - f_n \\ \Delta f_{n+1} &= \frac{1 - \gamma_{min}}{\gamma_{min}} f_n \\ \Delta f_{n+1} &= (1 - \gamma_{min}) f_{n+1} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Notons que tout ceci est indépendant de la vitesse de propagation des ondes, et donc de l'onde considérée. Ainsi, une même couverture en nombre d'onde est obtenu par cette condition, pour les ondes P et S.

A titre de remarque, ce choix de fréquence constitue un choix minimal et optimiste (Sirgue & Pratt, 2004). En effet, quand le milieu est complexe, la redondance dans le domaine des nombres d'onde est un élément qui améliore la convergence. De plus, il est souhaitable de diminuer le rôle des dépports lointains car ils sont moins linéaires que les dépports proches. Une solution consiste donc à choisir des fréquences inversées plus rapprochées que celles estimées dans un milieu homogène (Sirgue & Pratt, 2004). Nous verrons dans la partie 4.10.1 et 4.11, comportant une surface libre, l'influence du nombre et du choix des fréquences inversées.

4.7.4 Choix de la fréquence minimale

Sirgue (2003); Sirgue & Pratt (2004) ont montré l'importance du choix de la fréquence minimale inversée. En effet, la non linéarité augmente avec la fréquence (Sirgue, 2003). Si la première fréquence inversée est trop élevée, le risque d'ambiguïté de phase (figure 4.1) augmente et l'inversion

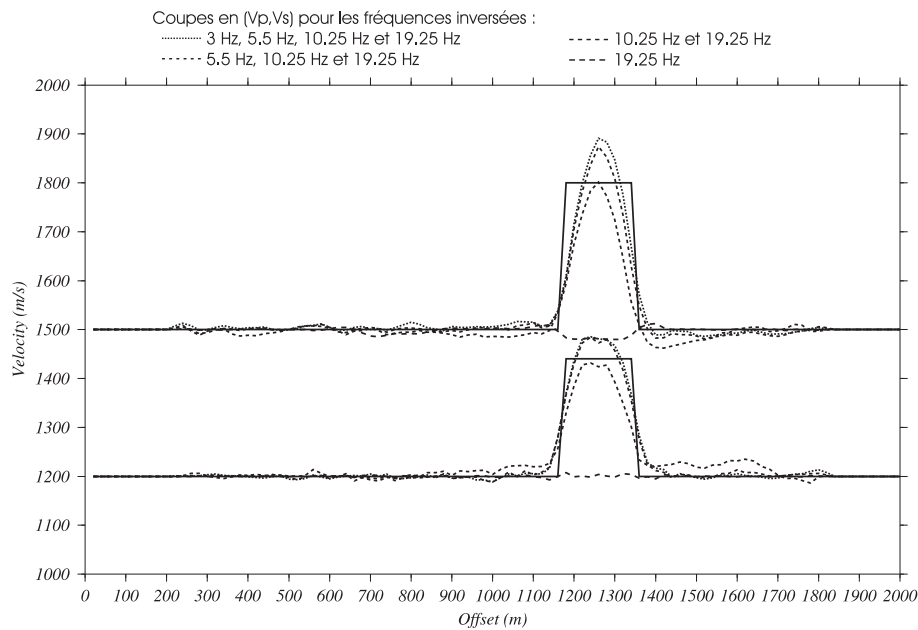


FIG. 4.57: Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p , V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

risque de rester bloquée dans un minimum local. Il devient alors impossible de retrouver les basses fréquences du modèle. Dans les acquisitions réelles, la plus basse fréquence possible doit donc être choisie pour commencer l'inversion Sirgue (2003).

Les figures 4.57, 4.58, 4.59 et 4.60 montrent l'influence du choix de la première fréquence pour une acquisition en transmission. Les figures 4.61, 4.62, 4.63 et 4.64 montrent l'influence du choix de la première fréquence pour une acquisition en réflexion. Dans les deux configurations d'acquisitions, les fréquences commençant à des fréquences plus élevées convergent moins bien vers la solution. Les hautes fréquences injectent dans l'image des courtes longueurs d'onde, correspondant à la fréquence choisie. Si les basses fréquences du modèle sont mal reconstruites ou ne sont pas reconstruites (comme c'est le cas en commençant l'inversion aux hautes fréquences), les hautes fréquences ne réussissent pas à reconstruire les anomalies.

Ce phénomène est fortement amplifié lorsque l'acquisition est en réflexion. Ceci montre le couplage entre la fréquence inversée et la localisation de l'anomalie dans le chemin d'onde. De plus, ce phénomène dépend de l'ouverture du dispositif. Ainsi, l'équation 4.97 montre que, plus le dispositif d'acquisition est grand angle, plus le spectre de nombre d'onde couvert atteint des valeurs basses pour une fréquence donnée, meilleure sera l'imagerie (Sirgue, 2003).

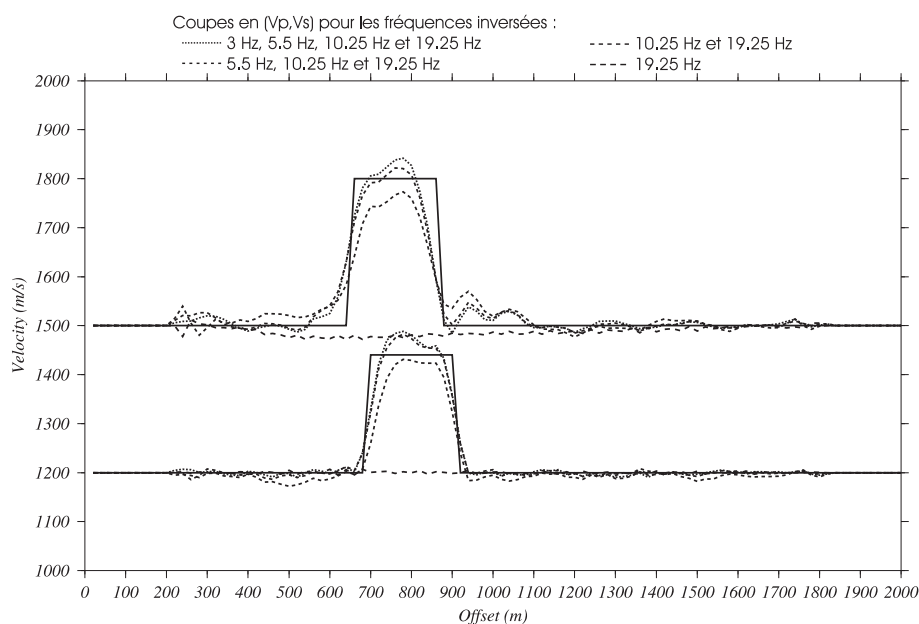


FIG. 4.58: Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

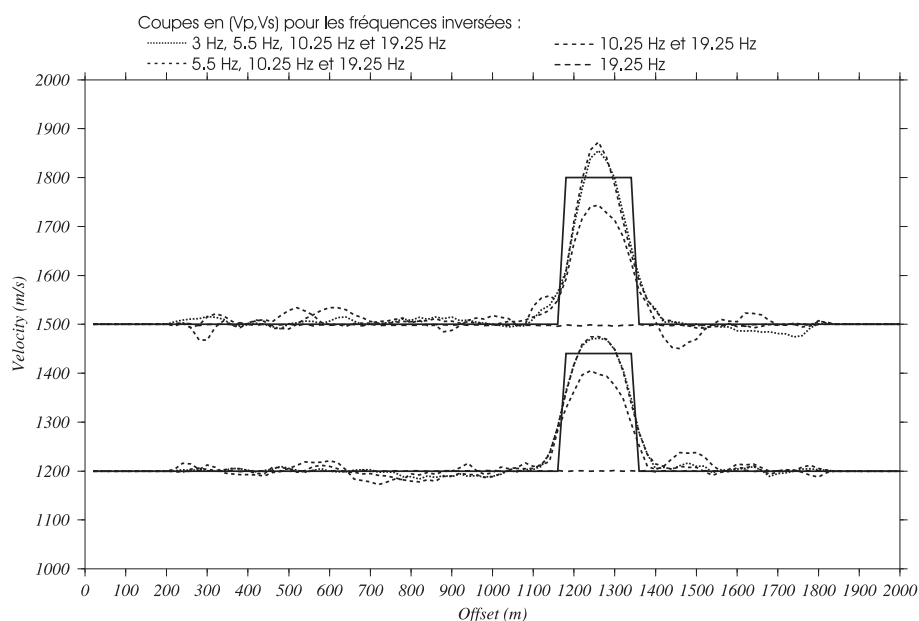


FIG. 4.59: Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

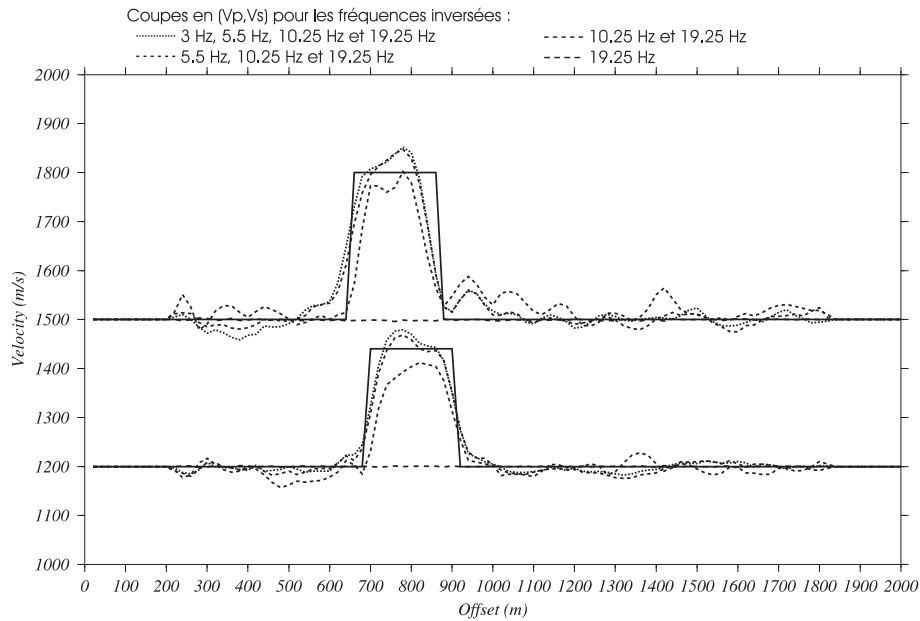


FIG. 4.60: Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en transmission. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

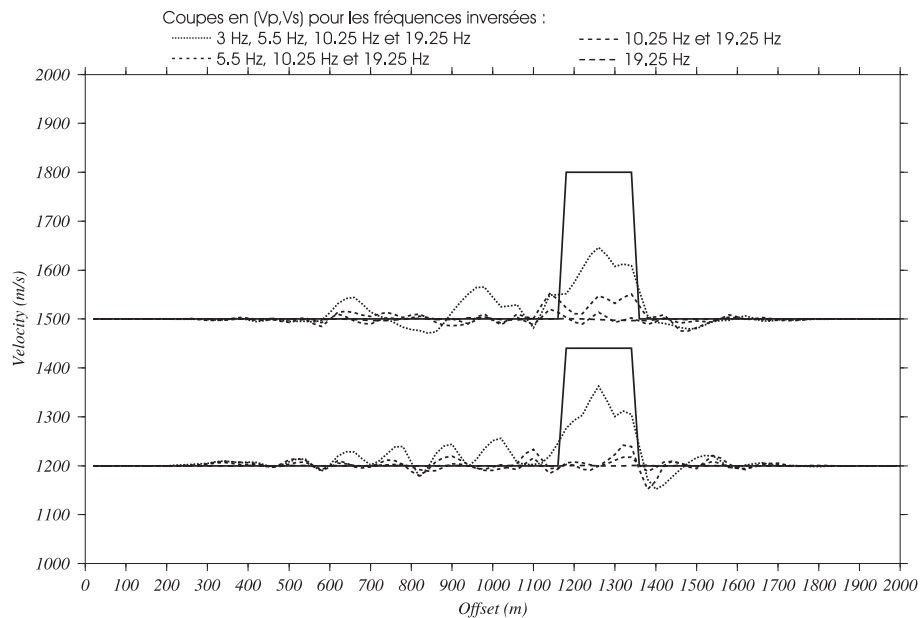


FIG. 4.61: Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

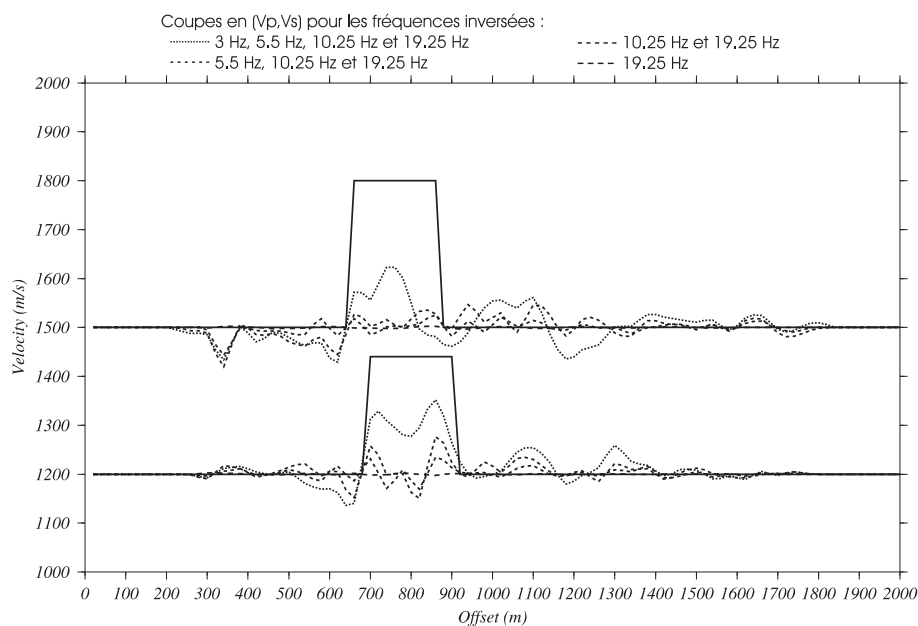


FIG. 4.62: Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Born, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

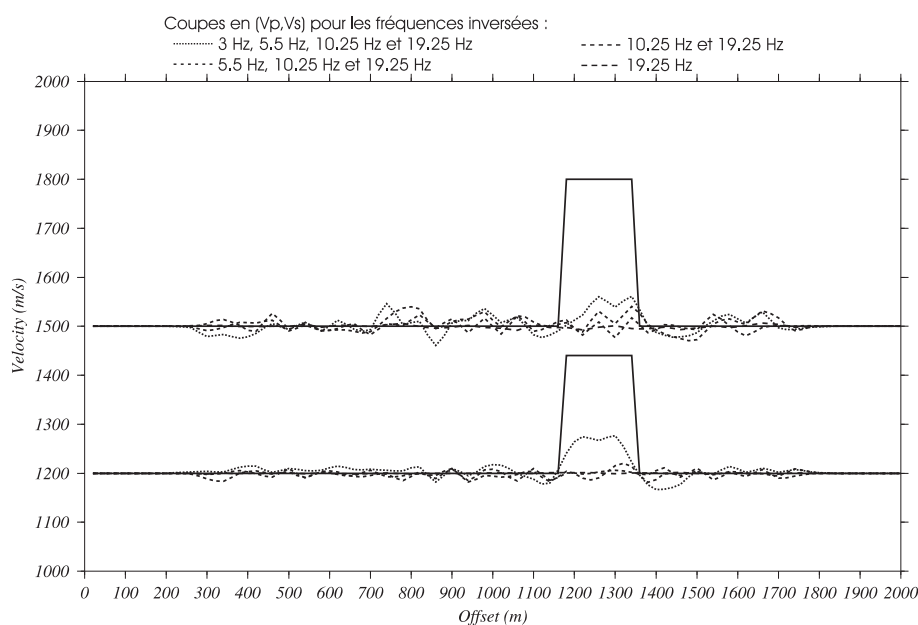


FIG. 4.63: Profils horizontaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

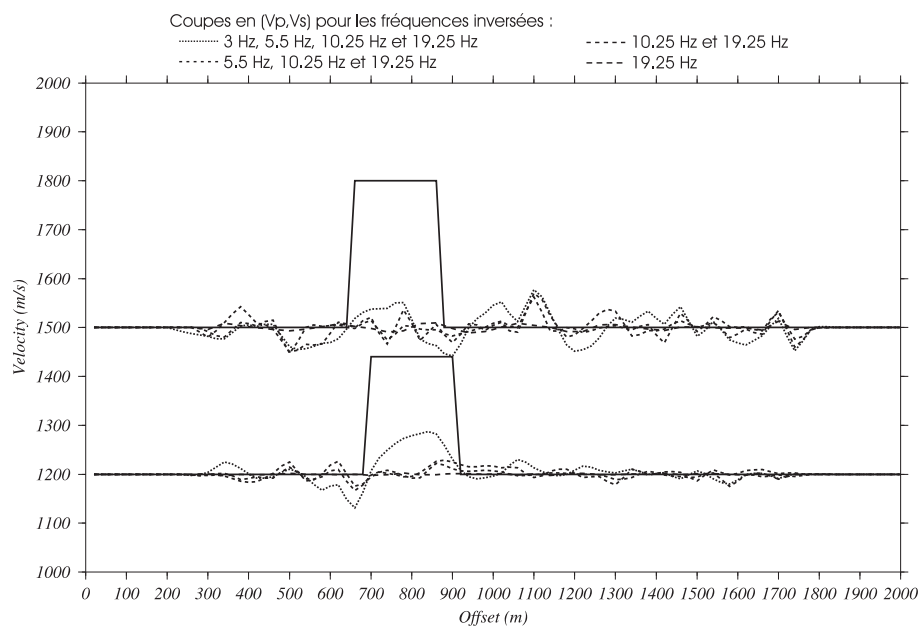


FIG. 4.64: Profils verticaux extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre avec l'approximation de Rytov, le couple de paramètres inversés (V_p, V_s) et un dispositif en réflexion. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. La première fréquence inversée augmente et les courbes s'éloignent du modèle vrai.

4.8 Choix de l'approximation de Born pour les acquisitions de surface

Dans les acquisitions de surface, les résidus contiennent principalement des ondes réfléchies et peu d'ondes transmises. Les différents travaux présentés dans la partie bibliographique (section de la bibliographie 4.2) sont en faveur du choix de l'approximation de Born, reconstruisant mieux les ondes réfléchies. De plus, les résultats présentés dans les parties 4.6.5 et 4.7.4 indiquent que les résultats obtenus avec l'approximation de Born sont meilleurs que ceux issus de l'approximation de Rytov pour une configuration en réflexion.

Ensuite, l'approximation de Rytov requiert la séparation des différentes ondes (Woodwards, 1992; Keller, 1969; Pratt et al., 1996). En effet, il est difficile de modéliser des écarts de phase complexe égale à une somme d'écarts de phases complexes provenant d'ondes différentes. Il faut donc séparer les différentes ondes pour correctement attribuer les écarts de phases aux ondes correspondantes et bien les modéliser. La séparation des différentes ondes constitue un prétraitement que nous souhaitons éviter, particulièrement pour les cas réalistes avec surface libre. Ainsi, même si l'approximation de Rytov paraît intéressante de prime abord pour l'application de l'inversion à des ondes de surface en raison de la modélisation de la phase complexe, la mise en pratique est en réalité plus difficile.

Des tests numériques confirment cette interprétation. La figure 4.65 montre que la qualité de la reconstruction est inférieure avec l'approximation de Rytov, lorsque toutes les données sont utilisées dans l'inversion ou lorsqu'elles sont fenêtrées, comme nous l'avons effectué dans l'article (section 4.3.9 de la partie 4.3). Notons que le paramètre V_p est particulièrement mal imagé. Ceci est à mettre en corrélation avec les résultats de la section 4.7.1 dans laquelle nous avons vu que le kernel de V_p calculé avec l'approximation de Rytov contenait une contribution en nombre d'onde vertical.

La mauvaise reconstruction des anomalies lorsque les données sont fenêtrées peut paraître surprenante puisque les ondes de surface et de volume sont a priori séparées avec le préconditionnement des données comme nous le verrons dans la section 4.10. Néanmoins, comme nous l'avons vu dans la section 4.6.5, l'approximation de Rytov est moins efficace lorsque le dispositif d'acquisition est en réflexion, ce qui justifie ces résultats.

Ces différentes considérations nous ont menés à choisir l'approximation de Born pour les exemples plus réalistes à venir. De plus, comme le montrent les fonctions coût calculées pour différents couples de paramètres inversés avec l'approximation de Born et des données en réflexion (section 4.6.5), l'inversion est peu sensible au choix du couple de paramètres inversés. Comme nous souhaitons précisément détecter les bords des anomalies, nous avons choisi le couple de paramètres (V_p, V_s) .

4.9 Pondération des données

La pondération des données est fréquemment utilisée en sismique pour prendre en compte certains types de phénomènes ou limiter l'influence de certaines données, contenant du bruit ou ayant une relation moins linéaire avec les paramètres que d'autres données. Ainsi, par exemple, Mora (1987b) et Tarantola (1984a) introduisent des matrices de covariance des données, prenant en compte les erreurs dans les données pour chaque source et chaque récepteur.

Dans l'article présenté dans la section 4.3, nous avons eu recours à un type de préconditionnement des données, *i.e.* à la pondération des données avec le déport. En effet, dans l'exemple comportant la surface libre et deux anomalies superficielles, nous avons effectué plusieurs inversions successives, dans lesquelles les données étaient sélectionnées en fonction de leur déport, ce qui constitue une pondération par 1 ou 0. Les résultats obtenus avec et sans pondération étaient différents (figure 4.14), montrant ainsi la présence de minima locaux dans l'espace des modèles et l'influence forte des pondérations choisies.

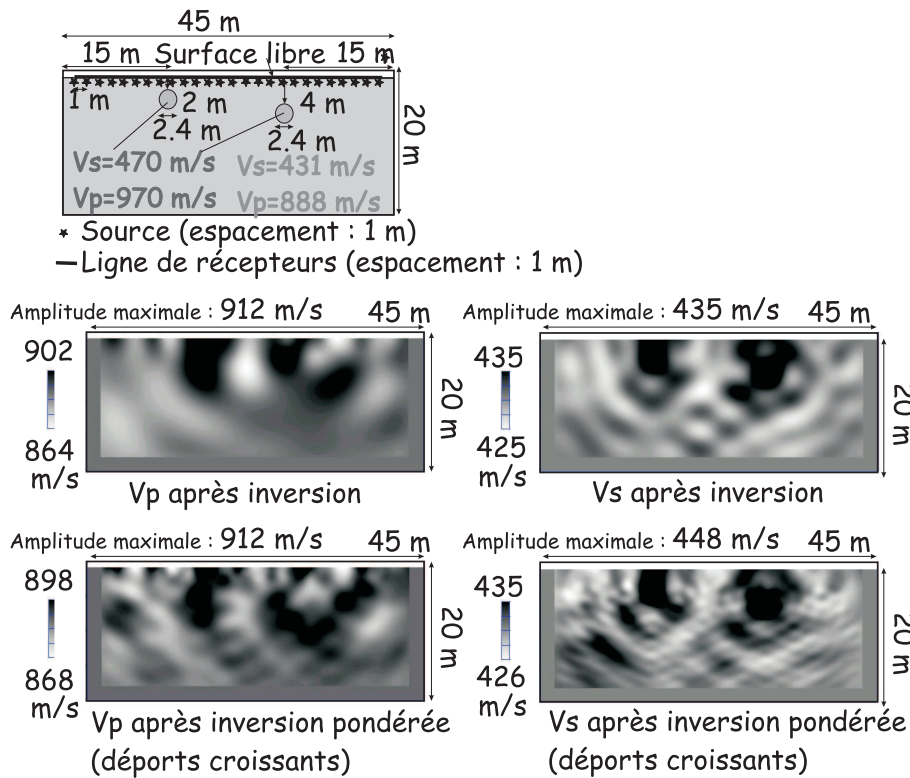


FIG. 4.65: Modèles de vitesses obtenus après inversion avec l'approximation de Rytov

4.9.1 D'autres pondérations envisageables

Cette pondération est efficace mais doit être adaptée l'exemple étudié. Dans notre cas, le macromodèle de vitesse est connu précisément et les ondes de surface doivent être séparées des ondes de volume. En effet, la prise en compte de toutes les ondes diffractées, qu'elles soient diffractées avant ou rétrodiffusées, de surface ou de volume, ne permet pas de reconstruire précisément les deux anomalies. De plus, la zone que nous souhaitons imager est la subsurface, les anomalies recherchées se situent donc dans les premières zones de Fresnel.

Operto et al. (2004) ont effectué l'inversion des formes d'onde acoustique de données sismique grand angle en utilisant une pondération des données croissante avec le déport, de manière à augmenter le poids des déports lointains permettant de retrouver les grandes longueurs d'onde du milieu à l'aide des ondes réfractées. Dans leur cas, le but de l'inversion était d'imager des zones profondes, appartenant à des zones de Fresnel éloignées de la première zone de Fresnel.

Ceci n'est pas contradictoire avec notre approche car, dans notre exemple synthétique, il n'y a pas d'onde réfractée : le milieu environnant est homogène et connu. Nous n'avons donc pas besoin de pondérer les données lointaines. D'autre part, nous souhaitons imager les zones proches de la surface libre et non pas les zones profondes. Ainsi, ces deux pondérations des données ne sont pas contradictoires mais répondent à des problématiques et des exemples différents.

S'il y avait des ondes réfractées, le problème se poserait différemment et leur prise en compte serait nécessaire. Dans ce cas, une stratégie différente pourrait être proposée : tout d'abord l'utilisation de sismogrammes à déport lointain permet de prendre en compte les ondes réfractées et d'affiner la connaissance du macromodèle. Ensuite, les déports proches sont utilisés pour retrouver les anomalies ponctuelles. Cette approche par déports lointains puis proches a été utilisée par Shipp & Singh (2002) pour l'imagerie d'une zone de basalte profonde. Nous verrons dans le chapitre 5 quelle stratégie adopter avec des données réelles acquises près de la surface libre.

4.9.2 Sélection des données par déport croissant : une manière de prendre en compte de la non linéarité pour l'imagerie de la subsurface

L'utilisation de traces à court déport dans des configurations d'acquisition de surface permet, d'après Pratt et al. (1996), d'obtenir une image précise du milieu de subsurface et d'assurer la validité de l'approximation de Born. En effet, de courtes distances de propagation garantissent que l'approximation de Born reste valable, *i.e.* que l'ambiguïté de phase (figure 4.1) peut être évitée. Sirgue (2003) reprend cet argument et montre, à l'aide d'une décomposition du gradient en valeurs singulières, que les grands déports sont davantage non linéaires que les courts déports et davantage exposés au risque d'ambiguïté de phase. Ce phénomène peut être atténué par la pondération plus élevée des premières arrivées par rapport aux arrivées tardives, comme l'effectuent Operto et al. (2004).

Malheureusement, dans ce cas, les informations apportées sont relatives aux parties profondes du modèle et les faibles nombres d'onde de la partie superficielle ne sont pas contraints par l'inversion (Operto et al., 2004). Les faibles nombres d'onde renseignant sur la partie superficielle du modèle arrivent plus tardivement et sont davantage soumis au risque d'ambiguïté de phase. L'utilisation des grands déports et arrivées tardives doit être évitée dans l'inversion pour imager les parties superficielles du modèle.

Les arrivées premières des déports proches donnent des informations sur les bas nombres d'onde de la partie superficielle (Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003). Ces informations sont relatives à des nombres d'onde plus élevés que les arrivées tardives à grand déport mais sont plus linéaires car elles correspondent à une distance de propagation plus courte (Sirgue, 2003) et les interactions avec le milieu sont moindres.

De plus, les anomalies près de la surface se situent de la première zone de Fresnel pour les acquisitions de surface (voir la section 4.6.5). La première zone de Fresnel peut ainsi être considérée comme une zone contenant des réflecteurs superficiels, permettant d'imager des nombres d'onde plus bas (Pratt et al., 1996). Sirgue (2003) montre qu'aux déports proches, les vecteurs propres du gradient correspondant aux bas nombres d'onde ont de l'énergie dans la partie superficielle du modèle. Il faut néanmoins que ces réflexions soient suffisamment énergétiques pour pouvoir être prises en compte dans l'inversion.

Enfin, la prise en compte de traces à déports de plus en plus grands permet d'obtenir des modèles plus précis à des profondeurs plus élevées (Pratt et al., 1996). Ceci permet de procéder selon une technique d'imagerie des couches de plus en plus profondes (Kolb et al., 1986). Cette approche permet de limiter à chaque étape les erreurs relatives à l'inversion en s'affranchissant des erreurs relatives aux zones plus superficielles déjà imagées. Cette technique est également employée par Zelt & Smith (1992) en tomographie des écarts de temps des premières arrivées. Ils utilisent les modèles issus des inversions précédentes et inversant les parties plus superficielles du milieu pour imager des milieux plus profonds.

Shipp & Singh (2002) suivent une stratégie similaire et s'intéressent à la reconstruction d'un modèle à une dimension pour l'imagerie d'une zone de basalte. Les grands déports sont d'abord inversés pour l'imagerie de parties peu profondes. Puis les grands déports sont utilisées pour déterminer les propriétés de tout le milieu. Puis seuls les premières arrivées sont utilisées pour imager tout le modèle, suivi de l'inversion des données à faibles déports pour tout le modèle. Enfin, les déports à grande ouverture sont inversés pour imager tout le modèle. Néanmoins, dans ce cas, le but est d'imager une zone profonde et cette stratégie ne peut être appliquée pour l'imagerie des diffractants de la subsurface, milieu complexe dans lequel les déports lointains sont davantage non linéaires. En revanche, cette stratégie peut être en partie suivie pour l'obtention d'un macromodèle préalable à l'imagerie des diffractants.

Ji & Singh (2005) s'intéressent à l'inversion d'un modèle anisotrope à une dimension. Ils montrent que l'inversion de déports proches donne de mauvais résultats, que l'inversion des dé-

ports intermédiaires permet de reconstruire le milieu avec des données multi-composantes mais les données simple composantes ne suffisent pas. Enfin, avec les dépôts proches, l'utilisation de données simple composante ou multi-composantes donne des résultats satisfaisants. Cependant, ici encore, cette méthode permet de reconstruire un macromodèle et non les diffractants.

De même, Kormendi & Dietrich (1991) inversent des données dans le domaine (ω, p) et (τ, p) . Les données sont fenêtrées en espace et en temps pour la reconstruction de milieux de plus en plus profonds.

Enfin, Delprat-Jannaud & Lailly (2005) s'intéresse à l'imagerie d'un milieu à une dimension en présence de la surface libre. Ils montrent que l'utilisation de données à déport multiple ne contraint pas toujours mieux les solutions.

Pour résumer, Sirgue (2003) propose une stratégie pour inverser les arrivées premières, des dépôts proches vers les dépôts lointains. Ceci est justifié car :

1. les arrivées premières des dépôts faibles donnent des informations à faible nombre d'onde pour la partie superficielle du modèle
2. les données à faible déport correspondent à la distance de propagation la plus faible et sont moins sujet à l'ambiguïté de phase
3. l'inversion des données des faibles dépôts vers les grands offsets est cohérente avec l'implémentation de Kolb et al. (1986) qui procède des profondeurs faibles aux profondeurs élevées et vise à réduire le risque d'ambiguïté de phase dans les données à grand offset
4. le fenêtrage en déport assure que l'information à grand déport associée aux faibles valeurs propres du gradient est bien prise en compte.

Les figures 4.66 et 4.67 montrent les résultats de l'inversion effectuée avec des données non fenêtrées, fenêtrées des grands dépôts vers les faibles dépôts et enfin fenêtrées des faibles dépôts vers les grands dépôts. Le milieu inversé correspond à un milieu contenant deux anomalies superficielles proches éclairées par un dispositif en réflexion (figure 4.14). L'approximation choisie est celle de Born. Les différents paramètres du modèle numérique sont présentés dans la section 4.3.9. L'inversion des données des dépôts proches aux dépôts lointains donne de meilleurs résultats. Notons également que les amplitudes sont mieux reconstruites pour le cas de l'anomalie superficielle. En effet, celle-ci se trouve plus proche de la première zone de Fresnel et l'inversion la reconstruit mieux (voir la section 4.6.5).

Les fonctions coût (figures 4.68 et 4.69) montrent que l'inversion effectuée avec uniquement les courts dépôts ajuste mieux les données que celle effectuée avec les grands dépôts. Les inversions successives effectuées avec des dépôts croissants ne modifient pas notablement les modèles. En revanche, les inversions successives effectuées par déport décroissant apportent chacune des informations au modèle, notamment l'inversion finale contenant les données à court déport.

Si le milieu n'était pas homogène, les ondes réfractées permettraient également de reconstruire le milieu et l'inversion des grands dépôts vers les courts dépôts serait plus efficace que dans le cas présent (Operto et al., 2004).

Le préconditionnement par fenêtrage des données vers les grands dépôts donne également de meilleurs résultats que pour le cas sans préconditionnement, comme le montre les fonctions coût (figure 4.68) et les coupes (figures 4.66 et 4.67).

Notons que dans ce cas, l'inversion avec les courts dépôts a été effectuée avec des fréquences égales à celles choisies pour l'inversion de grands dépôts. En réalité, ceci ne satisfait pas strictement le critère de Sirgue & Pratt (2004). Nous approfondirons ce point dans les parties 4.10.2 et 4.10.3 lors de l'application de la méthode aux données contenant la surface libre.

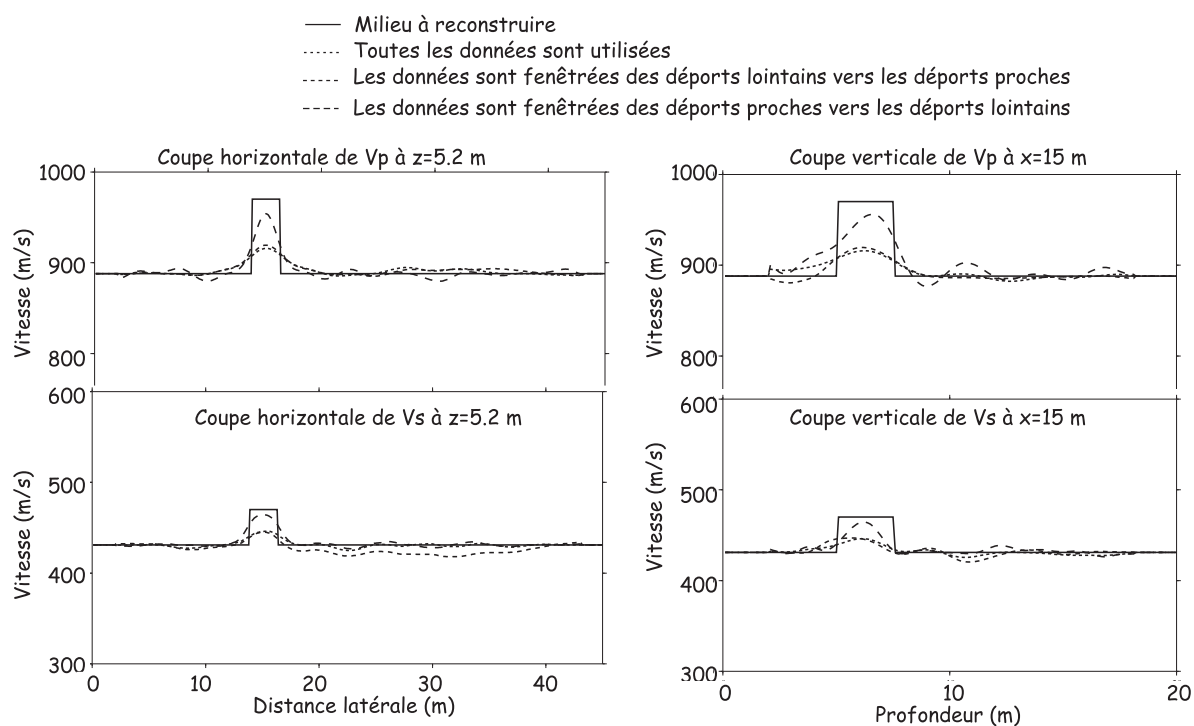


FIG. 4.66: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils traversent l'anomalie supérieure.

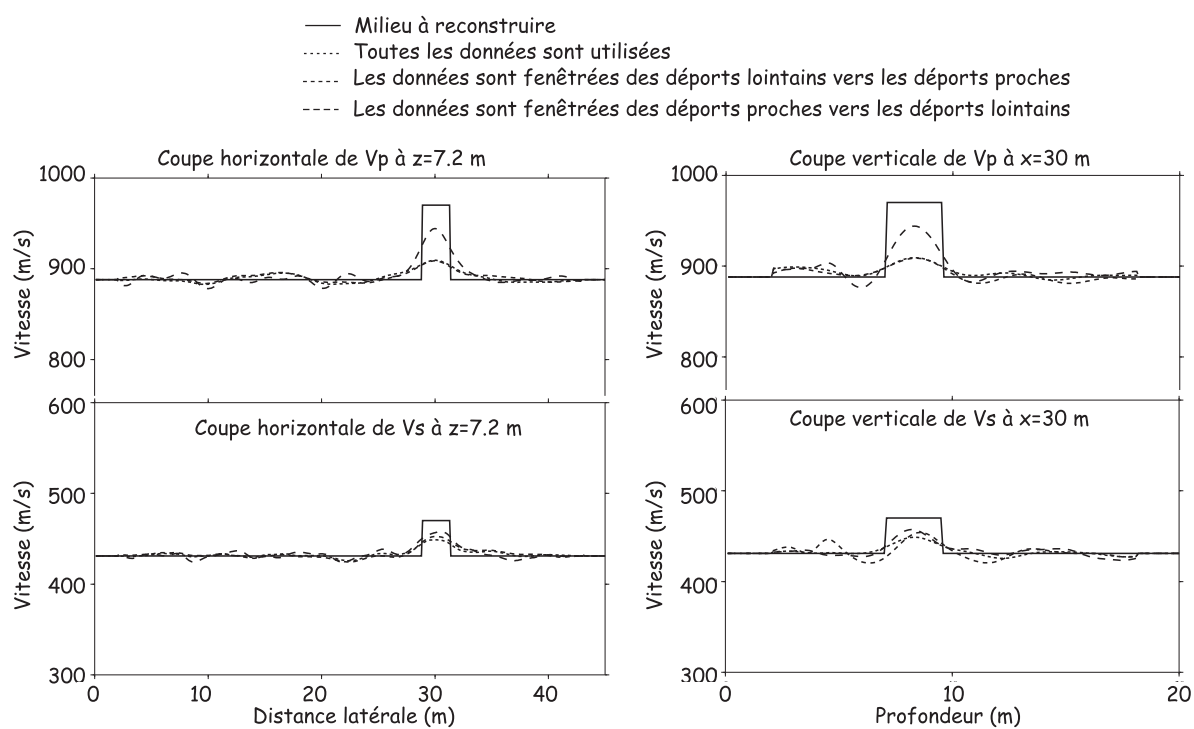


FIG. 4.67: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils traversent l'anomalie inférieure.

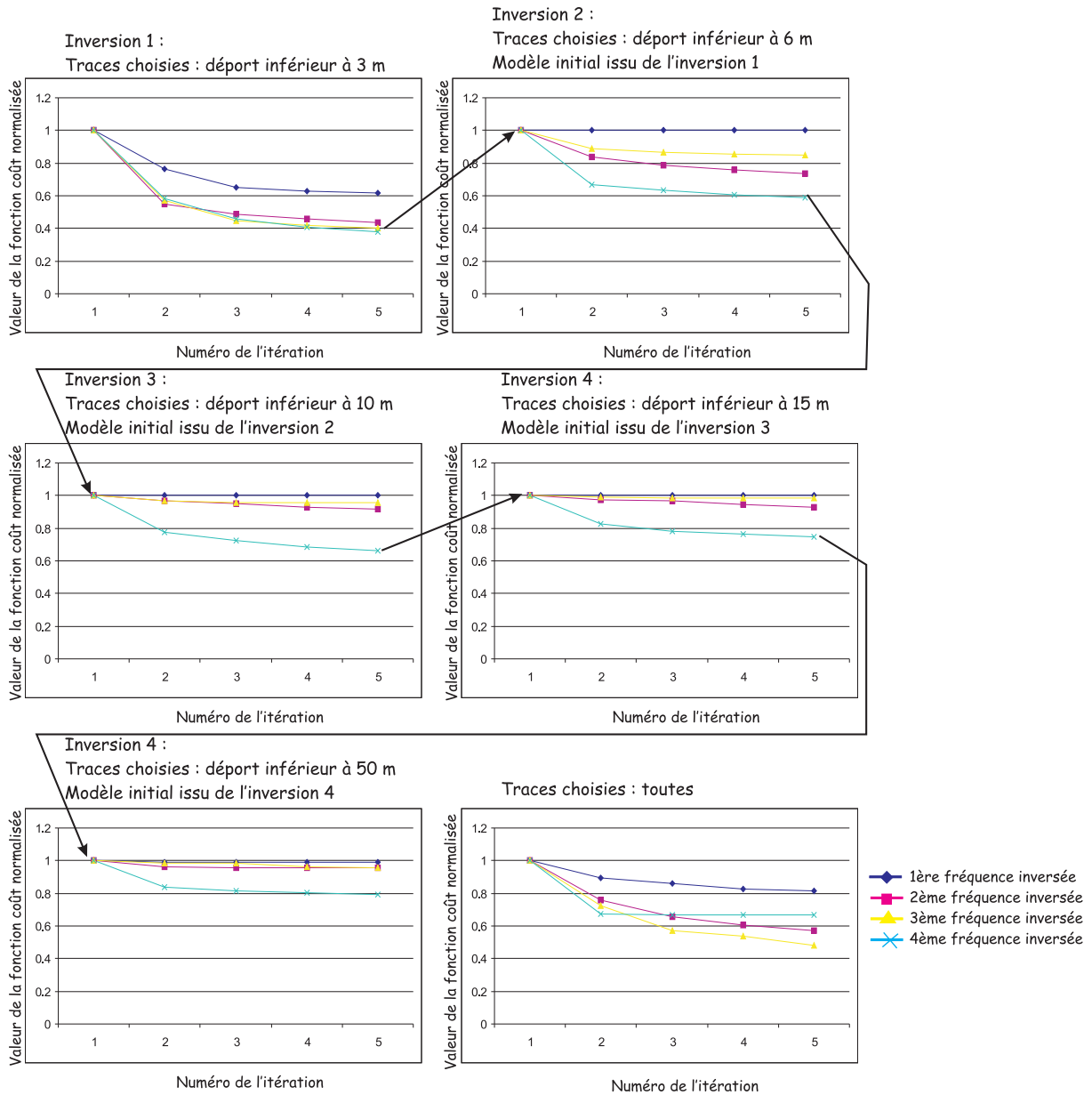


FIG. 4.68: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

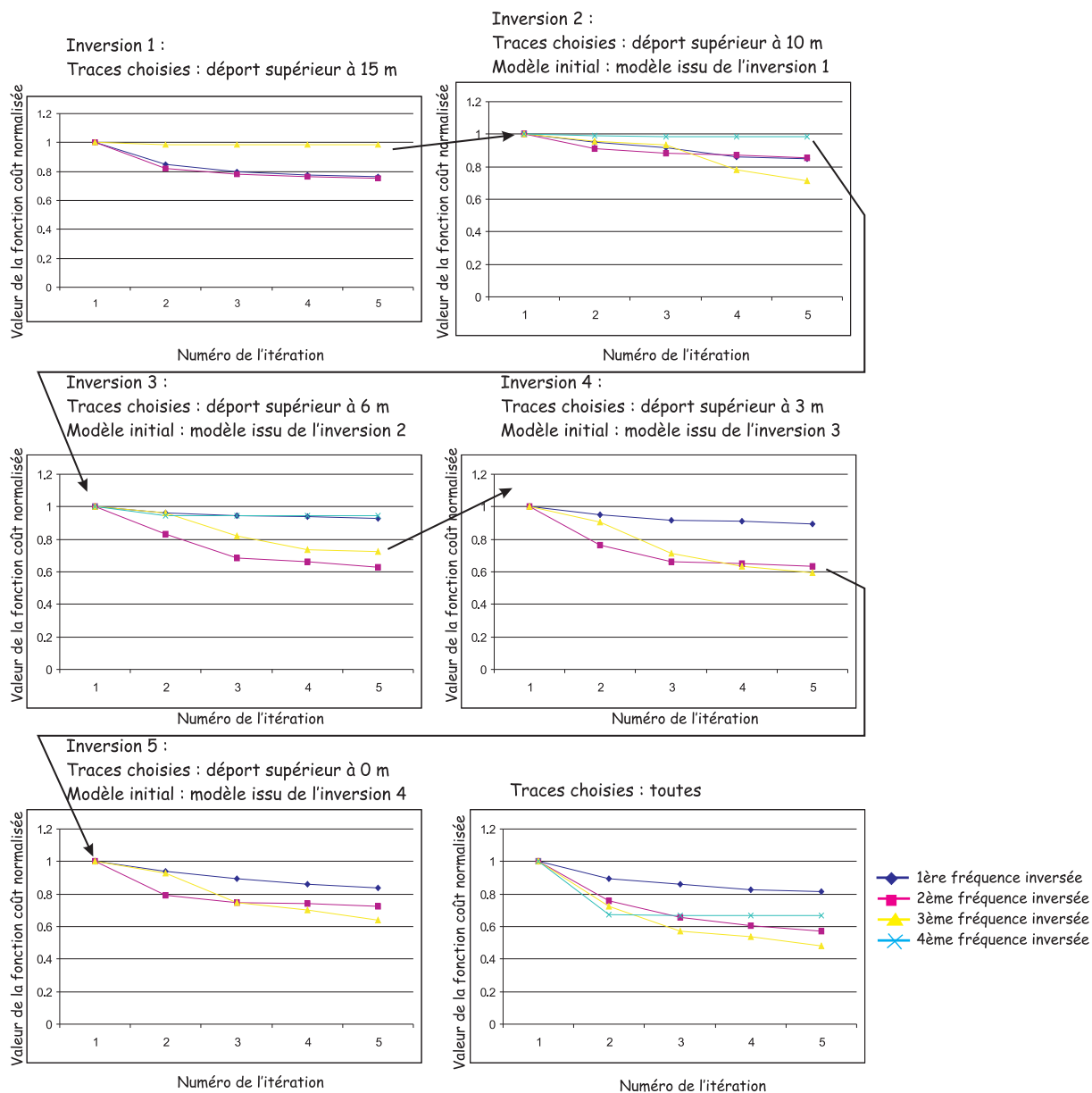


FIG. 4.69: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun preconditionnement n'est appliqué

4.10 Prise en compte des ondes de surface et influence de la surface libre

Dans l'inversion des formes d'onde élastique que nous avons développée, la position et la forme de la surface libre sont supposées connues et ne sont pas recherchées. Elle donne lieu à des ondes de surface qui doivent être ensuite inversées dans les données. Grâce au préconditionnement précédemment introduit, les ondes de surface peuvent être prises en compte dans l'inversion de manière efficace. Nous allons détailler ce point dans la prochaine section. Ensuite, nous examinerons l'influence de la surface libre, prise en compte par l'algorithme comme une interface brutale à modéliser avec un contenu en nombre d'onde limité pour chaque fréquence.

4.10.1 Prise en compte des ondes de surface

Tout d'abord, aucun formalisme spécifique n'est appliqué pour les ondes de surface, à la différence de la méthode développée par Snieder (1986). Les ondes de surface sont en effet modélisées complètement dans le problème direct, donc elles sont contenues dans les parties du gradient correspondant à la propagation du champ direct et à la rétropropagation des résidus. De plus, les approximations de Born et de Rytov, approximations simple diffractant reliant linéairement champ diffracté et perturbations des paramètres, sont valables pour les ondes de volume (Tarantola, 1987; Forgues, 1996; Sirgue, 2003) et les ondes de surface (Snieder, 1986; Campman et al., 2004). Ainsi, lors de l'inversion de chaque composante fréquentielle, ondes de volume et de surface sont simultanément prises en compte. Cependant, leur poids relatif dans l'inversion est directement lié à l'énergie que chaque type d'onde porte dans les sismogrammes. Ainsi, pour les basses fréquences auxquelles commence l'inversion, les ondes de surface ont une influence prépondérante, au détriment des ondes de volume, et contrôlent donc la convergence de l'algorithme.

Par ailleurs, l'inversion des ondes de surface diffractées est rendue plus difficile en raison de la nature de ces dernières. En effet, elles résultent d'interférences d'ondes P et S réfléchies à la surface libre. Afin de les prendre correctement en compte dans l'inversion, les ondes P et S doivent être préalablement bien modélisées à la surface libre. Or, nous avons vu dans la partie B que les anomalies situées près de la surface libre entraînent des phénomènes complexes, retardant certaines ondes ou en convertissant d'autres à la surface libre. Les interactions entre surface libre et diffractants ajoutent donc une difficulté supplémentaire à l'inversion et rendent les ondes de surface très sensibles aux petites variations des paramètres (Herman et al., 2000; Campman et al., 2004). C'est la raison pour laquelle les ondes de surface ne sont tout d'abord pas utilisées dans l'inversion.

4.10.2 Préconditionnement des données : une manière de séparer ondes de volume et de surface

Nous avons ainsi appliqué le préconditionnement présenté dans la section 4.9. En présence de la surface libre, ce préconditionnement s'interprète également en terme de sélection d'onde.

Avec la surface libre, les ondes de surface rendent encore plus difficiles l'utilisation des données à grand départ. Deux stratégies sont envisageables : soit les ondes de volume diffractées sont d'abord utilisées pour guider l'algorithme vers la zone du minimum global et les ondes de surface permettent de renforcer les anomalies détectées. Soit les ondes de surface doivent être filtrées ou éliminées des données, au moyen d'une transformation dans le domaine (ω, k) , où ω est la pulsation, correspondant au domaine fréquentiel dans lequel les données sont déjà inversées, et k est le nombre d'onde. Dans le domaine (ω, k) , ondes de volume et de surface sont individualisées en raison de leurs vitesses de propagation apparentes différentes et éliminées (Yilmaz, 2001). Une transformée de Fourier spatiale puis son inverse seraient donc appliquées, rendant nécessaire la répartition spatiale régulière des récepteurs, ce qui peut poser des problèmes avec les données réelles lorsque

certaines traces sont bruitées. De plus, la distance d'intertrace doit être choisie de manière à éviter les problèmes de repliement.

Une autre manière plus simple de séparer les ondes consiste à les sélectionner en fonction de leur déport, en notant que les ondes de surface n'apparaissent qu'à une certaine distance de la source. Afin de vérifier que l'utilisation première des traces à faible déport puis des traces à grand déport est également efficace dans ce contexte, d'autant plus qu'elle est reliée à la séparation des ondes de volume diffractées et des ondes de surface diffractées, nous avons effectué le même type d'inversion que précédemment, en utilisant d'abord les données à grand déport puis en introduisant les données à court déport.

Par le préconditionnement des données décrit dans la section 4.9, les faibles déports, dont les résidus contiennent uniquement les ondes de volume diffractées, sont tout d'abord inversées. L'inversion des données proches donne déjà de bons résultats sur la localisation, la forme et l'amplitude des anomalies (figures 4.70). Ceci est dû à la bonne connaissance du macromodèle de vitesse. Puis, lorsque le déport augmente, les ondes de surface sont progressivement introduites dans l'inversion. Elles permettent de renforcer l'amplitude des anomalies détectées et d'en affiner la forme (figures 4.71 et 4.72). Les figures 4.70, 4.71 et 4.72) montrent l'importance de l'inversion avec les faibles déports.

La figure 4.73 montre les images obtenues pour l'inversion de données sans fenêtrage des données, puis pour un fenêtrage des données des courts déports vers les grands déports ou des grands déports vers les faibles déports. Les figures 4.74 et 4.75 montrent les résidus correspondants. Les résidus sont plus faibles quand les données sont sélectionnées par déport croissant.

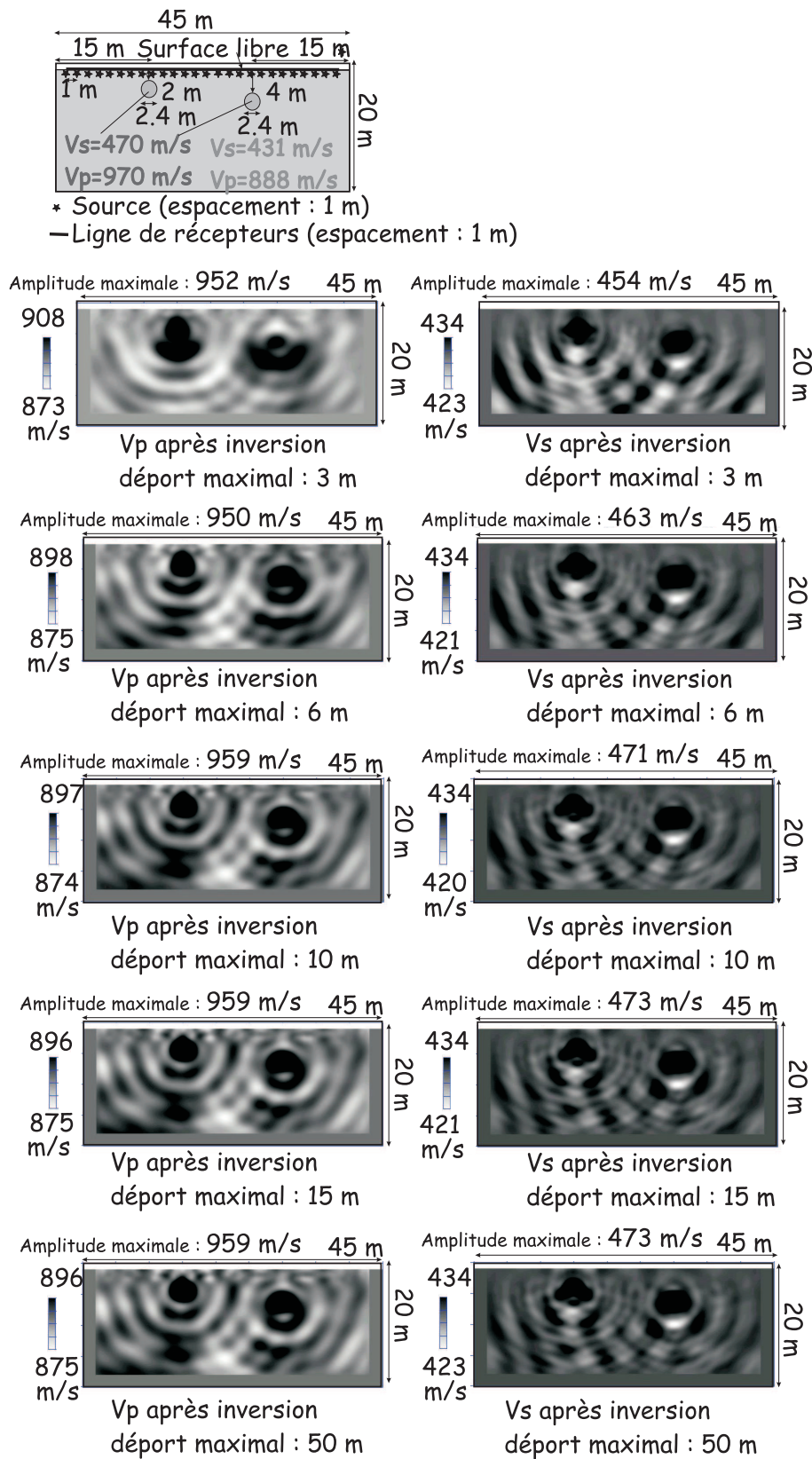


FIG. 4.70: Modèles de vitesse finaux obtenus après inversion des données fenêtrées à différents déports

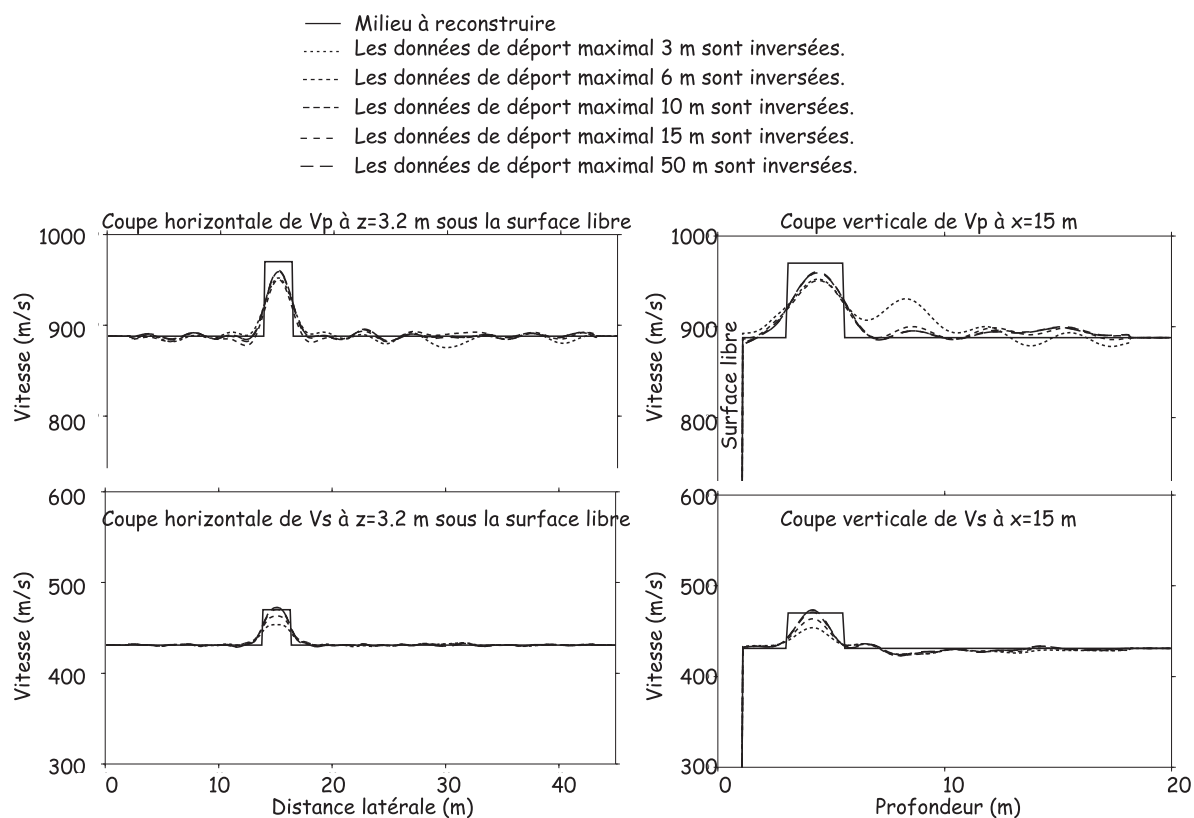


FIG. 4.71: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion dont les données sont fenêtrées avec le déport. Les profils traversent l'anomalie supérieure.

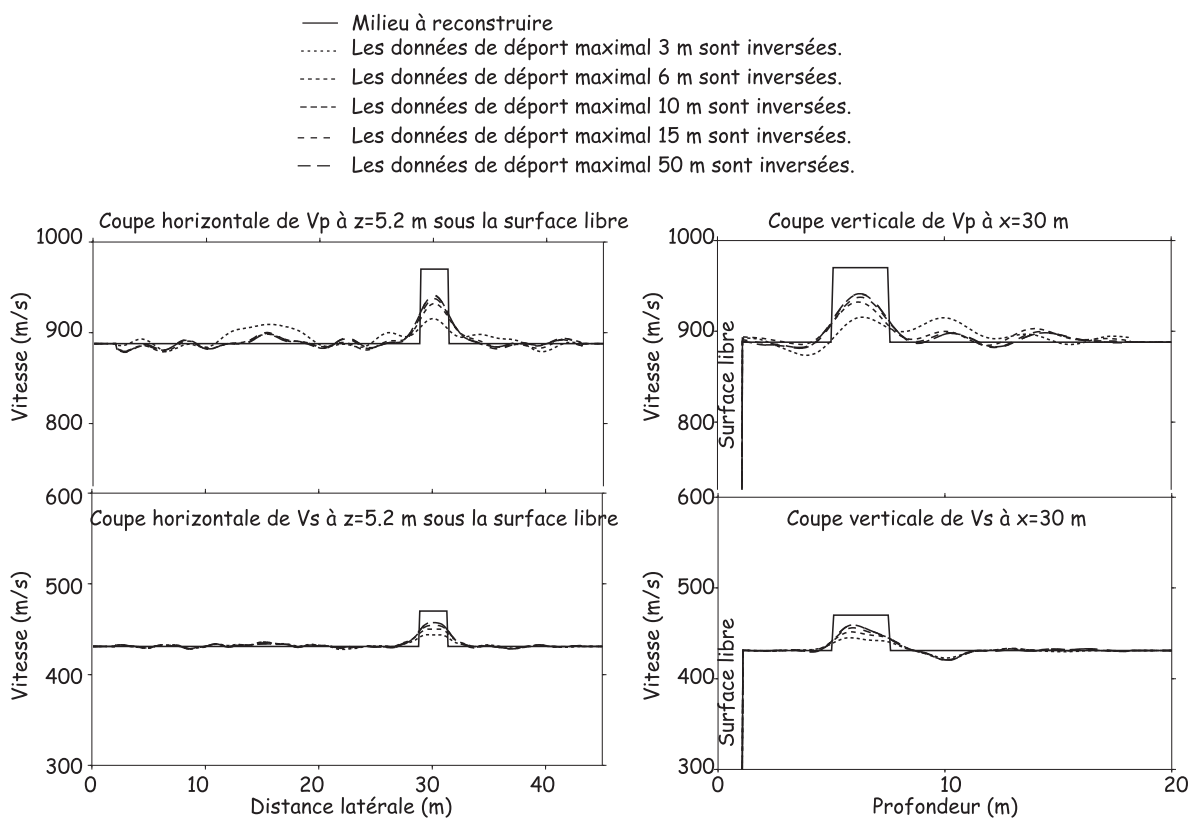


FIG. 4.72: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion dont les données sont fenêtrées avec le déport. Les profils traversent l'anomalie inférieure.

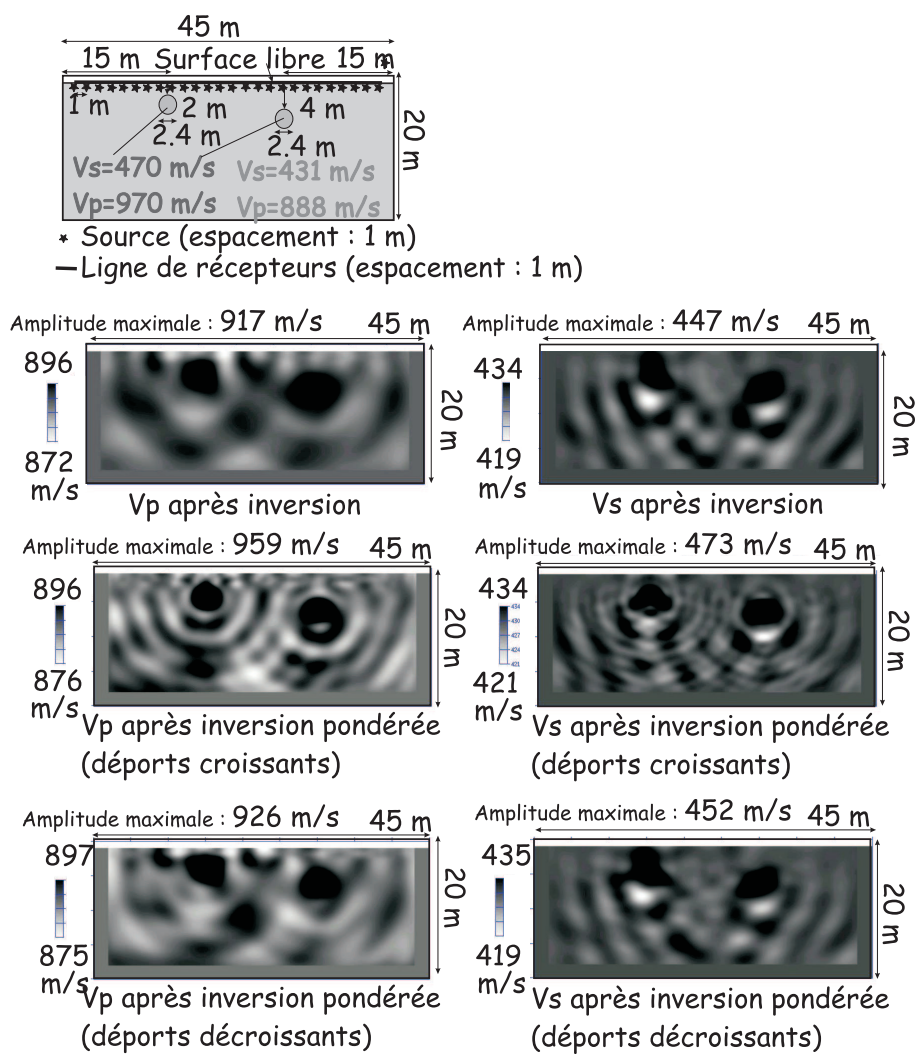


FIG. 4.73: Modèles de vitesses obtenus après inversion, en fonction des données sélectionnées

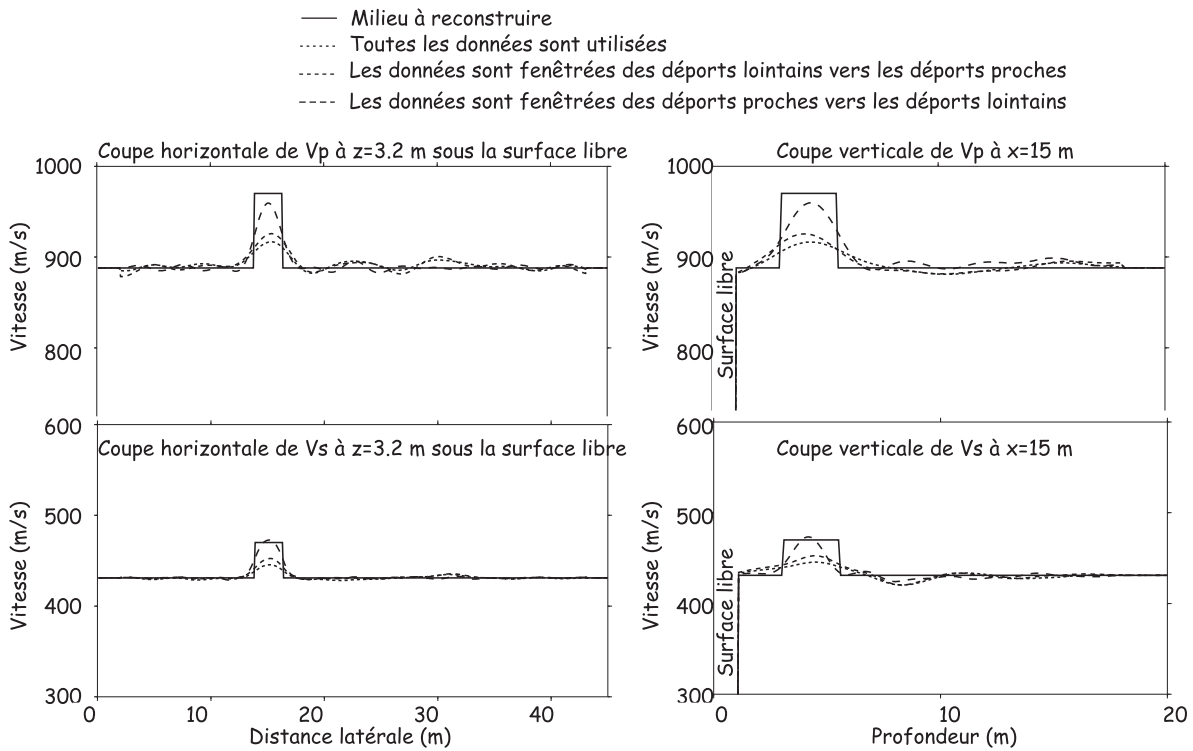


FIG. 4.76: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie supérieure.

Les figures 4.76 et 4.77 montrent des coupes traversant les images précédentes à différentes profondeurs. L'inversion effectuée avec des données à déport croissant donne de meilleurs résultats. De plus, comme dans le cas sans surface libre (section 4.9), l'anomalie supérieure est mieux reconstruite que l'anomalie inférieure. Un argument supplémentaire entre en jeu dans ce cas, relié à la profondeur de pénétration des ondes de surface. En effet, comme nous l'avons expliqué dans la partie 2.1.3, la profondeur des ondes de surface dépend de leur fréquence et l'énergie des ondes de surface décroît avec la profondeur (voir la section B.0.5). Ainsi, l'anomalie inférieure est moins bien éclairée que l'anomalie supérieure.

Les fonctions coût indiquent également que le préconditionnement par sélection des données à faible déport constitue une manière efficace d'améliorer les images finales. Les figures 4.78 et 4.79 montrent les fonctions coût pour chaque inversion effectuée avec des données dont le déport maximal et donc le nombre sont différents. A chaque fois, ces fonctions coût sont comparées avec le cas où toutes les données sont inversées en une seule fois (en bas à droite des figures 4.78 et 4.79).

Les fonctions coût sont généralement plus basses lorsque les données sont fenêtrées des faibles dépôts vers les grands dépôts, ce qui indique que l'ajustement des données, et donc la qualité des modèles, sont meilleurs. Notons sur la figure 4.79 que la fonction coût baisse davantage lorsque les faibles dépôts sont introduits. Ceci met en évidence le rôle important des faibles dépôts dans l'inversion. Remarquons également que les fonctions coût pour l'inversion avec uniquement les données à grand déport et toutes les données (figure 4.79) ont une allure similaire. Ceci indique que les grands dépôts contrôlent l'inversion lorsque toutes les données sont utilisées. Ceci confirme notre interprétation : les ondes de volume (donc les faibles dépôts) sont masquées par les ondes de surface quand aucun préconditionnement n'est appliqué.

Notons que dans toute cette étude, les fréquences inversées demeurent les mêmes quel que soit

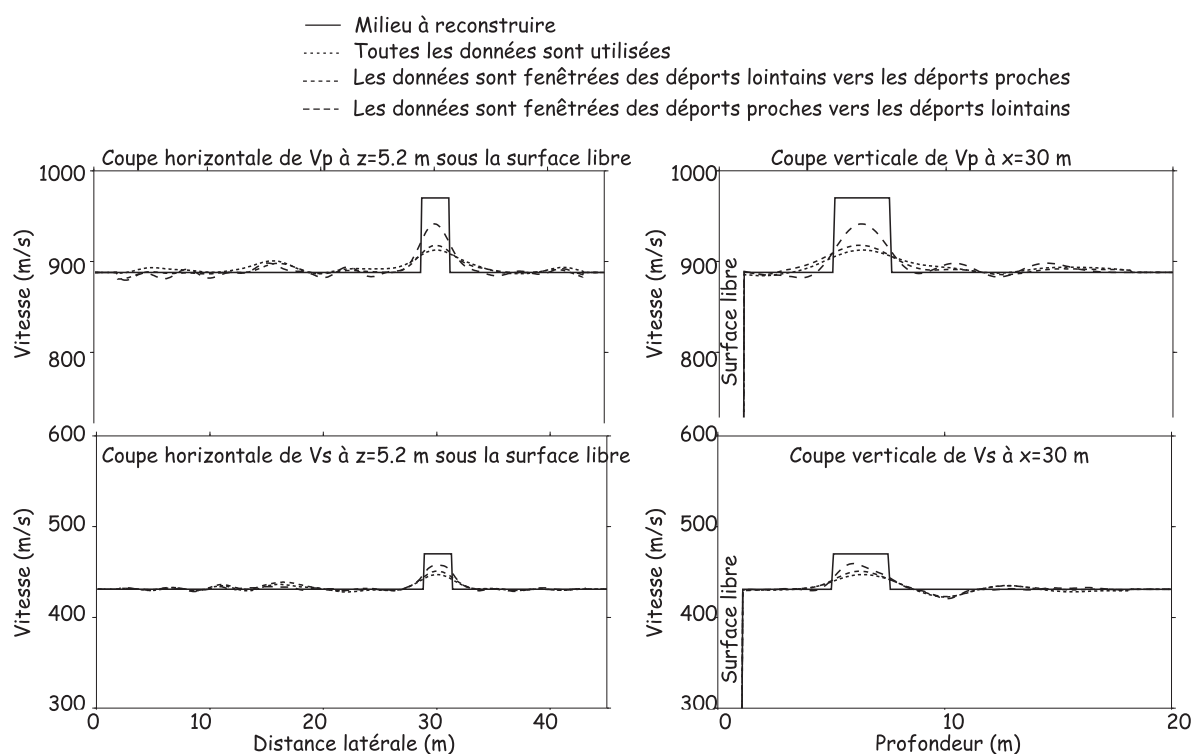


FIG. 4.77: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie inférieure.

le déport maximal considéré. Ceci ne respecte pas strictement le critère de choix des fréquences, dont le nombre devrait normalement augmenter lorsque l'ouverture du dispositif diminue (voir la section 4.7.3). Nous avons procédé de cette manière car nous souhaitons imager le milieu avec un déport maximal identique, avec et sans préconditionnement. Néanmoins, cette manière de faire implique que le spectre du nombre d'onde imagé n'est pas complet pour les courts dépôts.

Intéressons-nous maintenant à l'importance du choix des fréquences inversées.

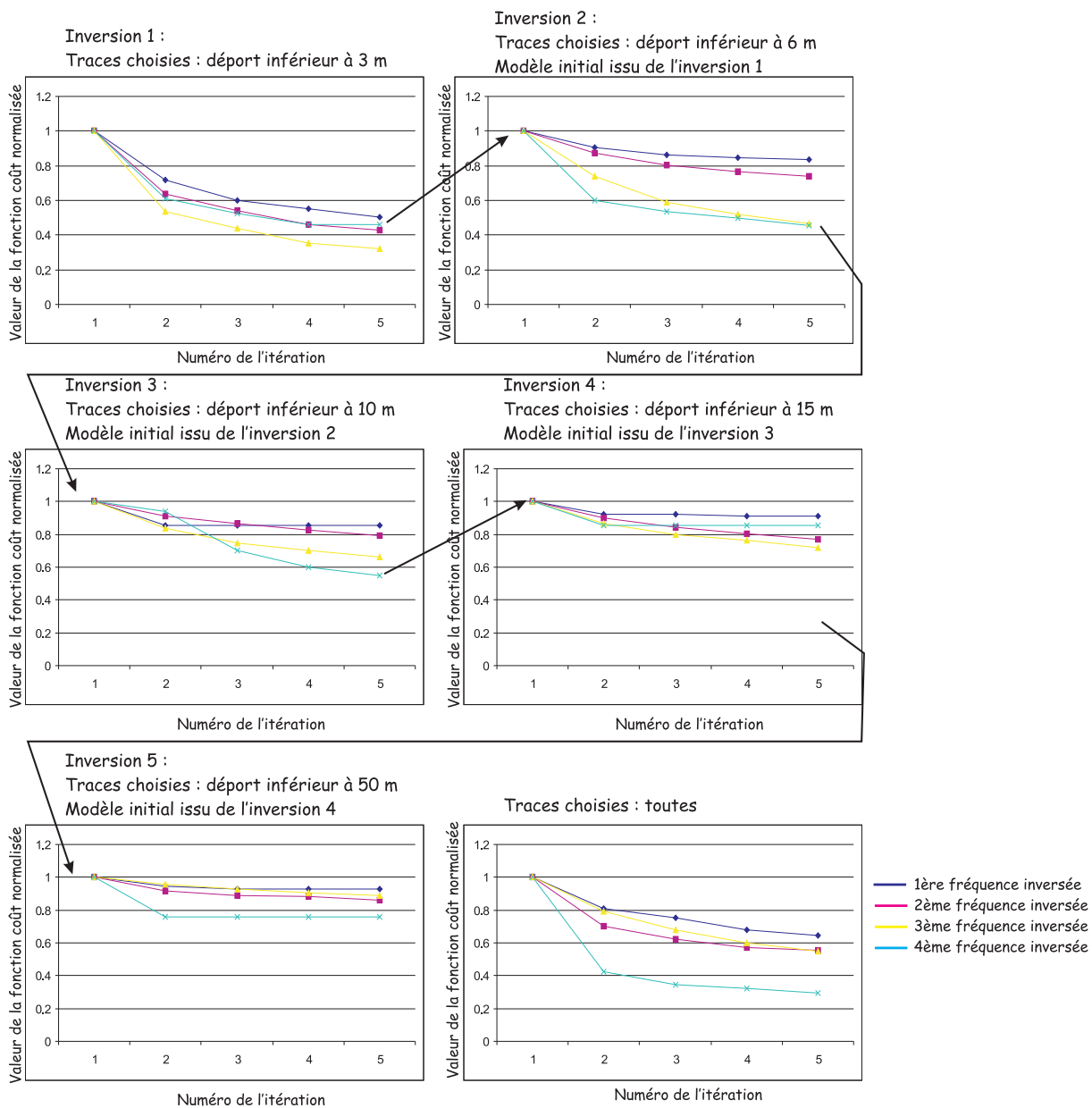


FIG. 4.78: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

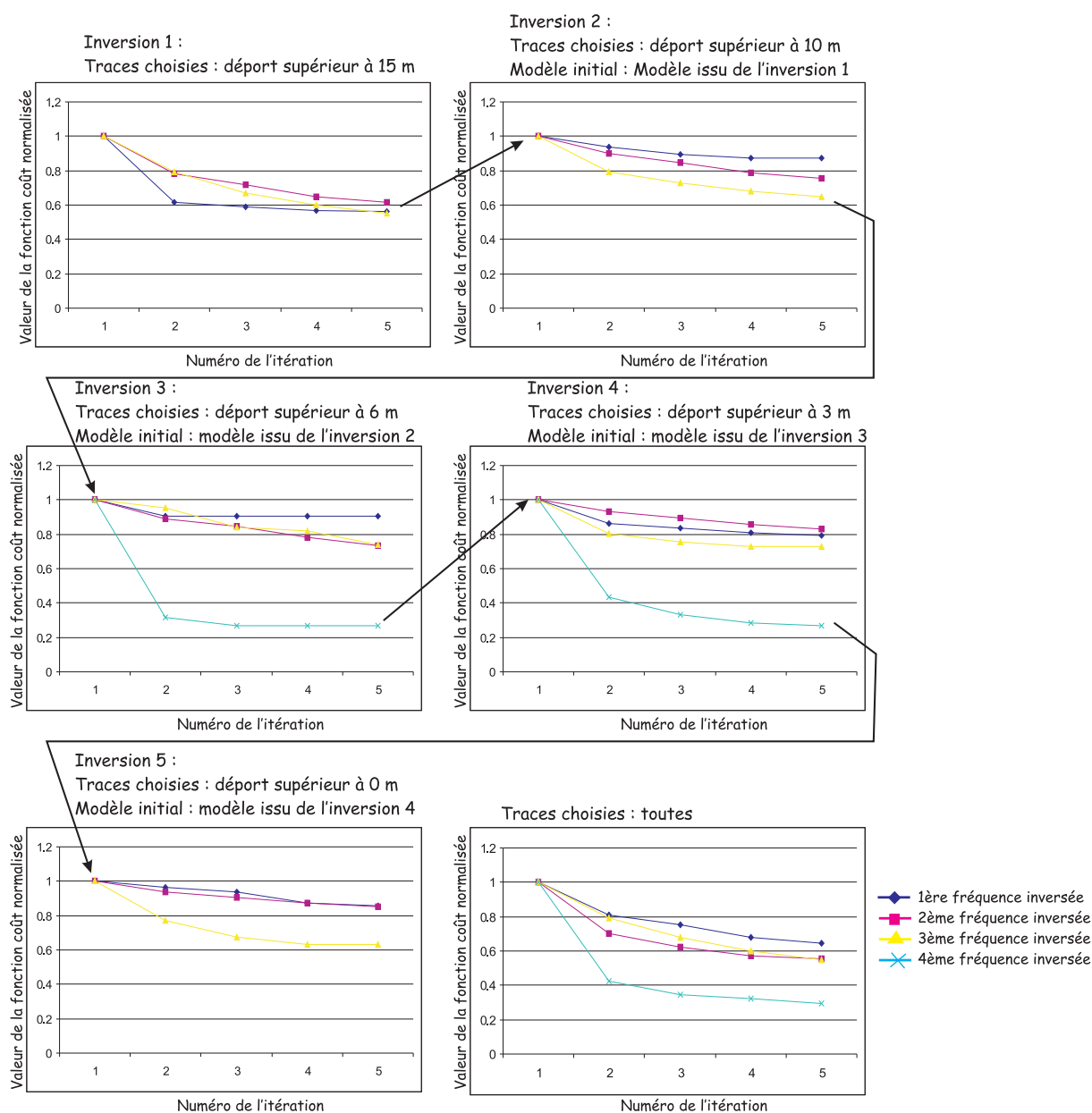


FIG. 4.79: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

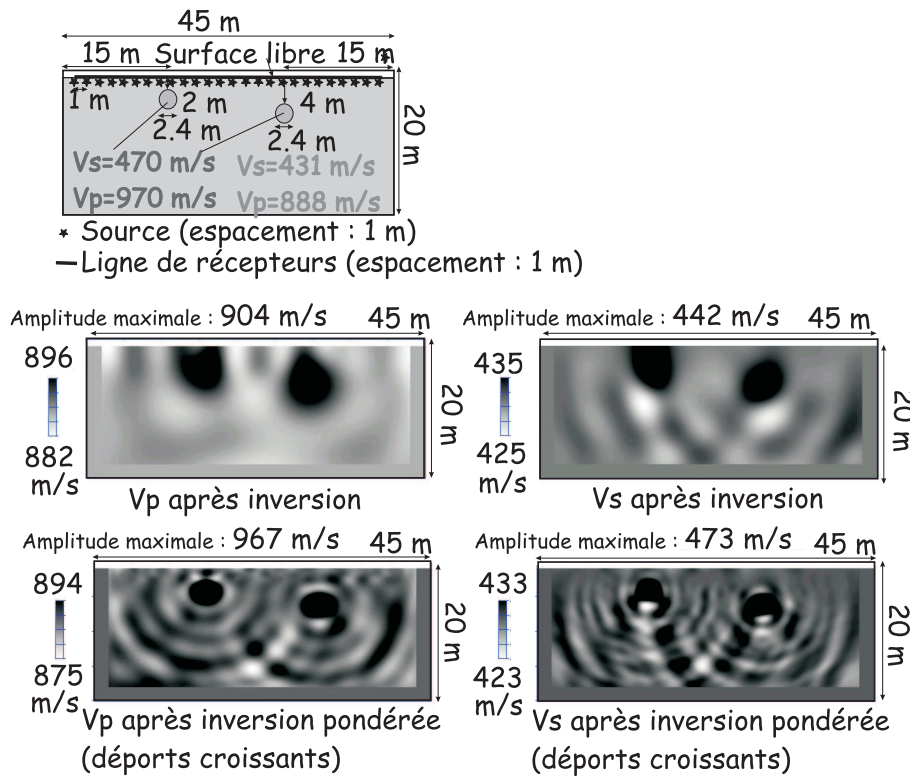


FIG. 4.80: Modèles de vitesses obtenus après inversion avec et sans préconditionnement des données, pour des fréquences deux fois plus nombreuses

4.10.3 Influence du nombre de fréquences inversées

Nous avons effectué la même approche que précédemment mais les fréquences choisies, deux fois plus nombreuses, respectent le critère de continuité du spectre des nombres d'onde imagés. La figure 4.80 montre les résultats de l'inversion avec et sans fenêtrage des données pour les fréquences inversées : $f = 1, 2, 3, 6, 9, 17$ et $25 Hz$.

La figure 4.81 montre les différents modèles de vitesse obtenus à l'issue de chaque inversion, réalisée avec des déports maximaux différents. Notons que l'apport des inversions avec des déports plus grands est plus important que dans le cas précédent.

Les figures 4.82 et 4.83 présentent des coupes extraits des modèles de vitesse. Il apparaît clairement que les deux anomalies sont bien reconstruites en amplitude et bien localisées. L'algorithme construit néanmoins une version lisse de l'anomalie.

Les fonctions coût tracées pour chaque inversion (figure 4.84) montrent que, lorsque les fréquences sont plus nombreuses, l'apport de l'inversion des données à des déports différents est significatif. Le modèle obtenu après inversion de tous les déports est donc meilleur.

Enfin, les figures 4.85 et 4.86 montrent les résidus pour les inversions avec et sans préconditionnement. Les données sont beaucoup mieux reproduites avec préconditionnement, l'ajustement est remarquable.

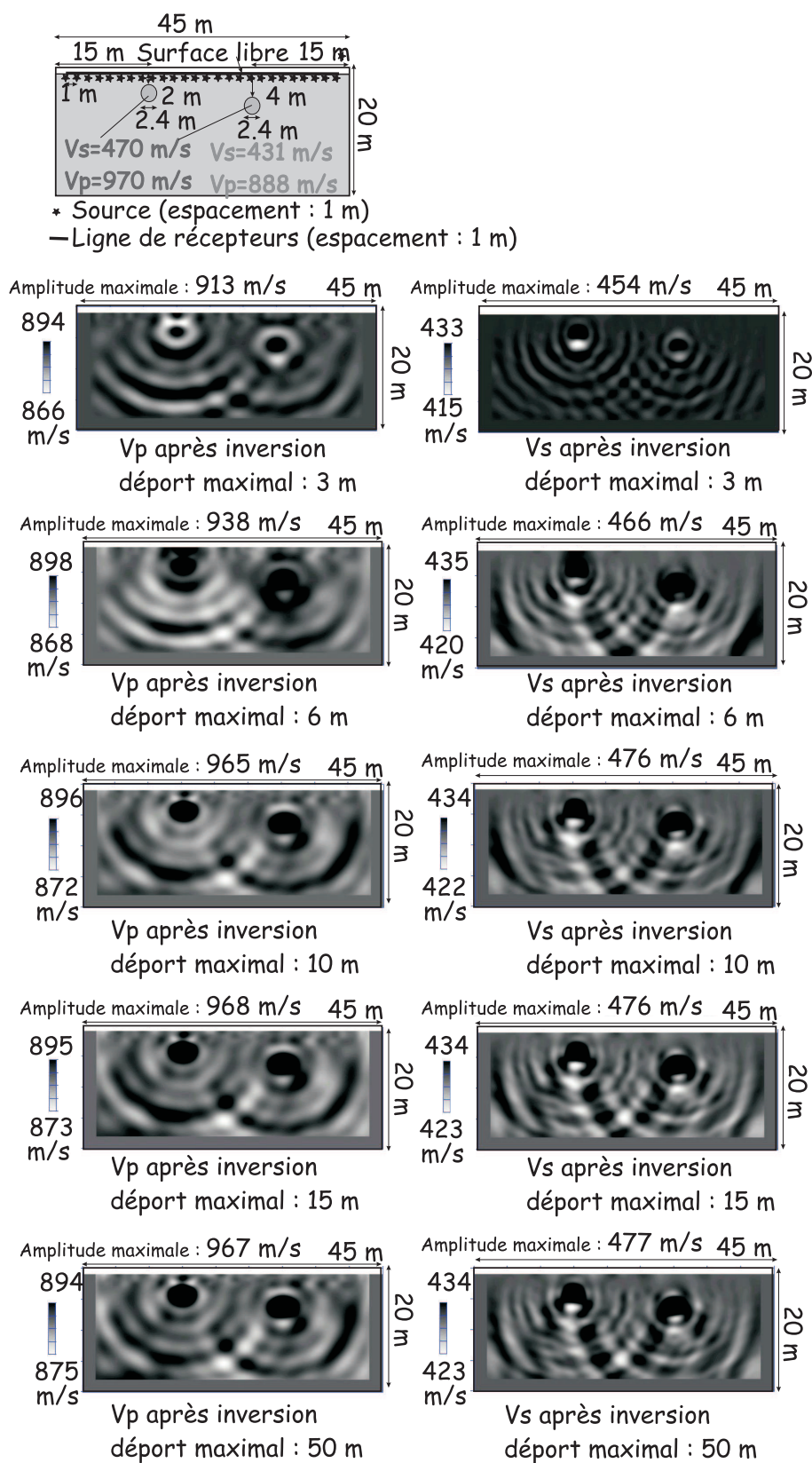


FIG. 4.81: Modèles de vitesses obtenus après inversion, en fonction des données sélectionnées, pour des fréquences inversées deux fois plus nombreuses

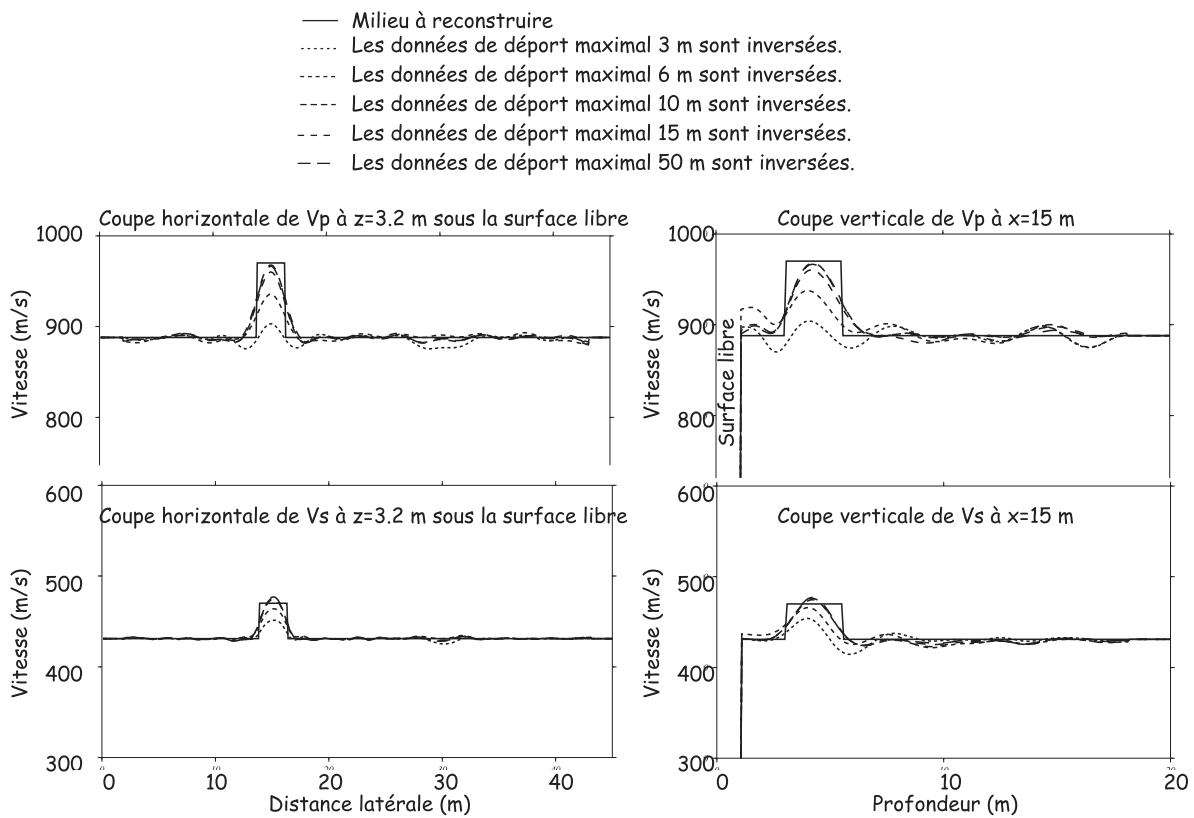


FIG. 4.82: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie supérieure. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment

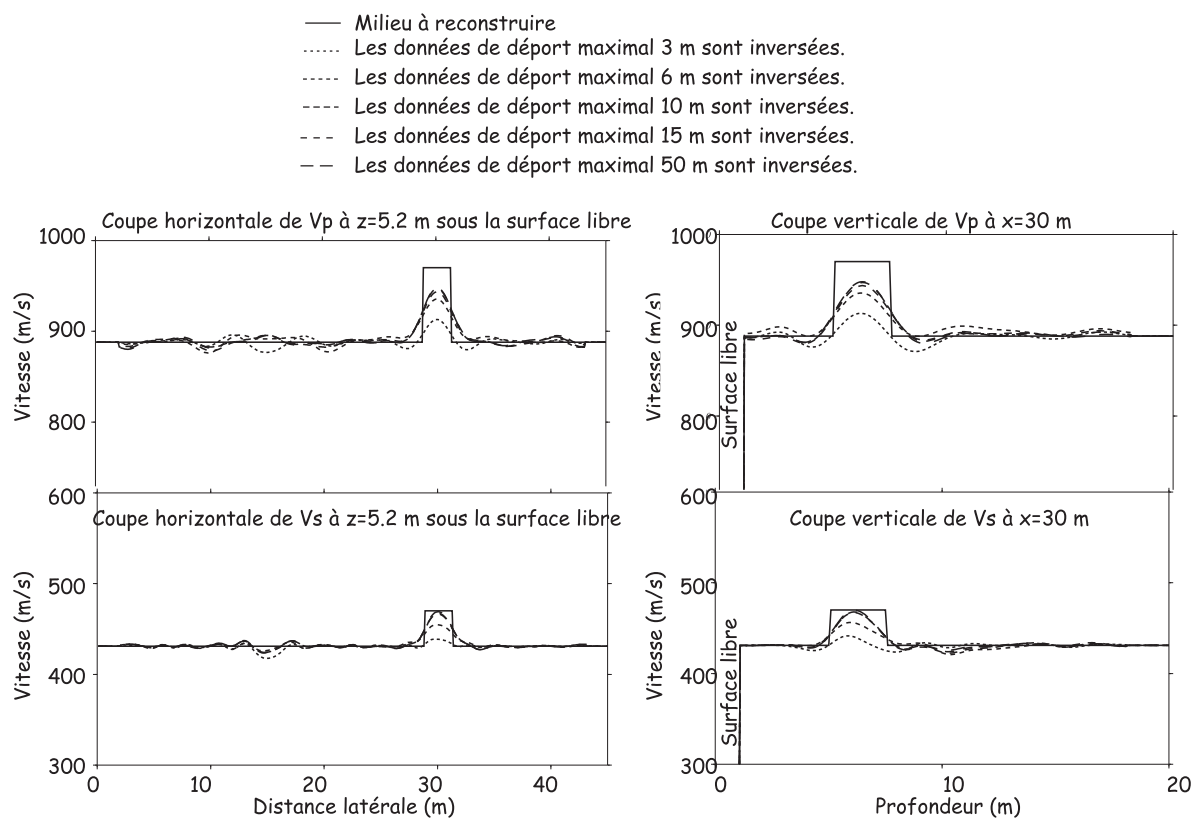


FIG. 4.83: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas avec surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. Les profils choisis traversent l'anomalie inférieure. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment

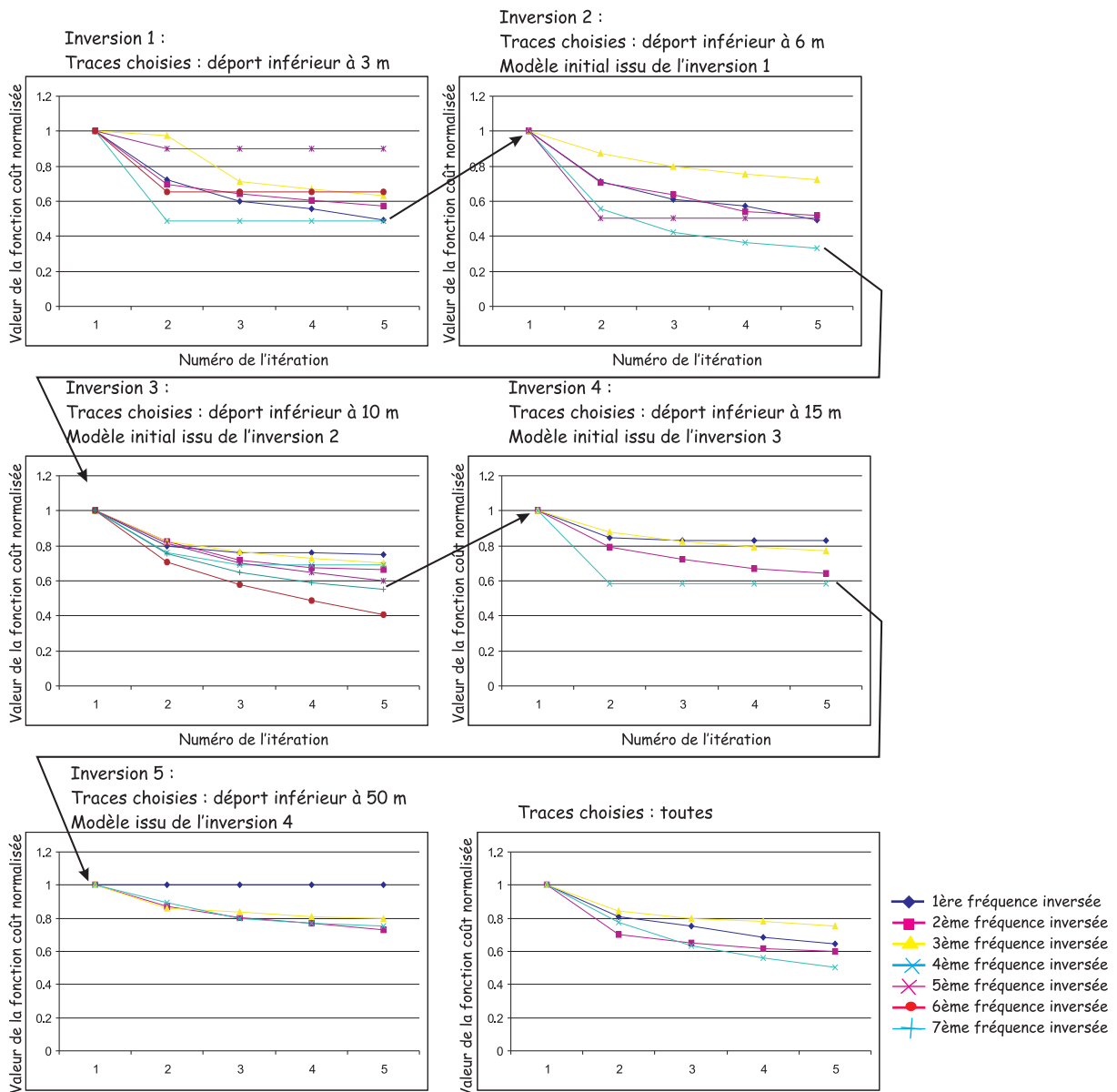


FIG. 4.84: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant et avec davantage de fréquences inversées. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

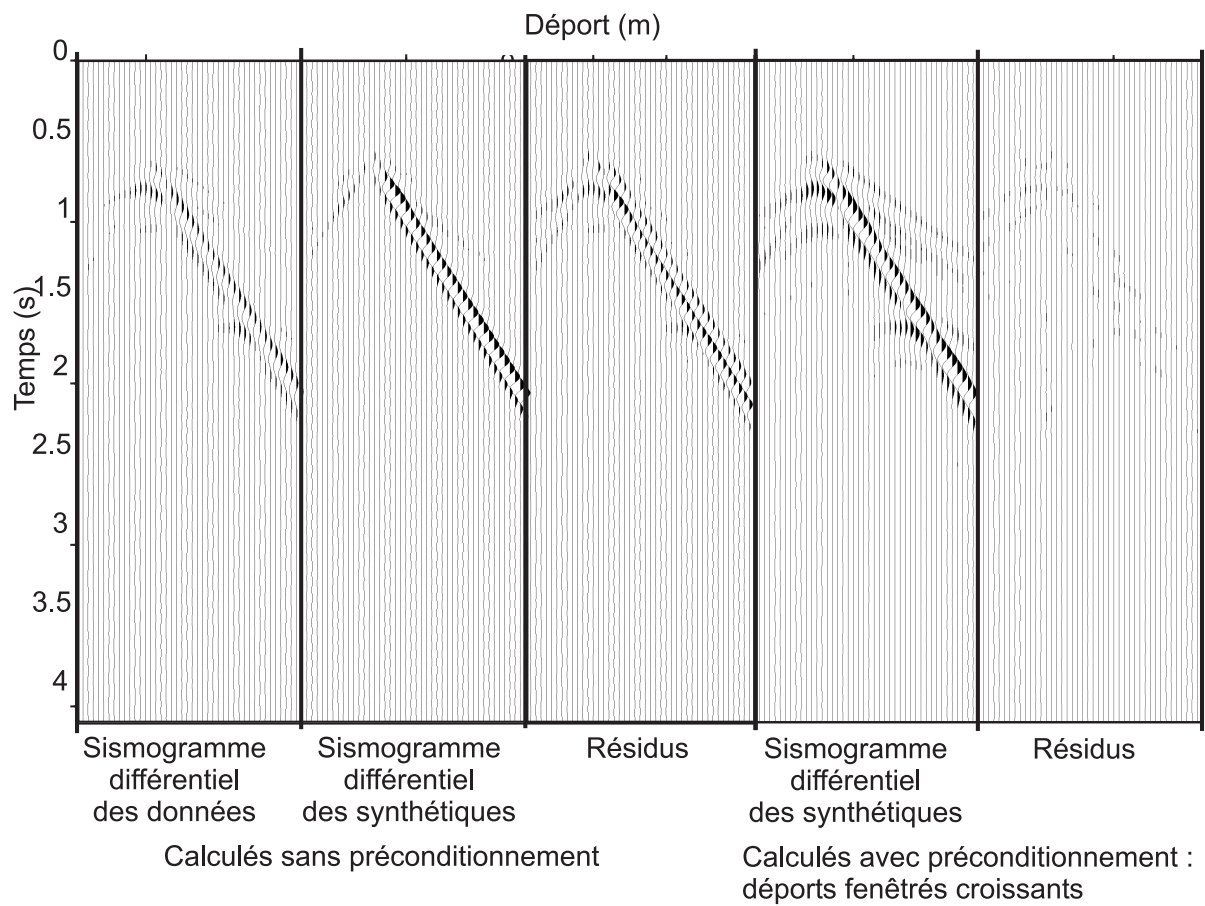


FIG. 4.85: Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec preconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.

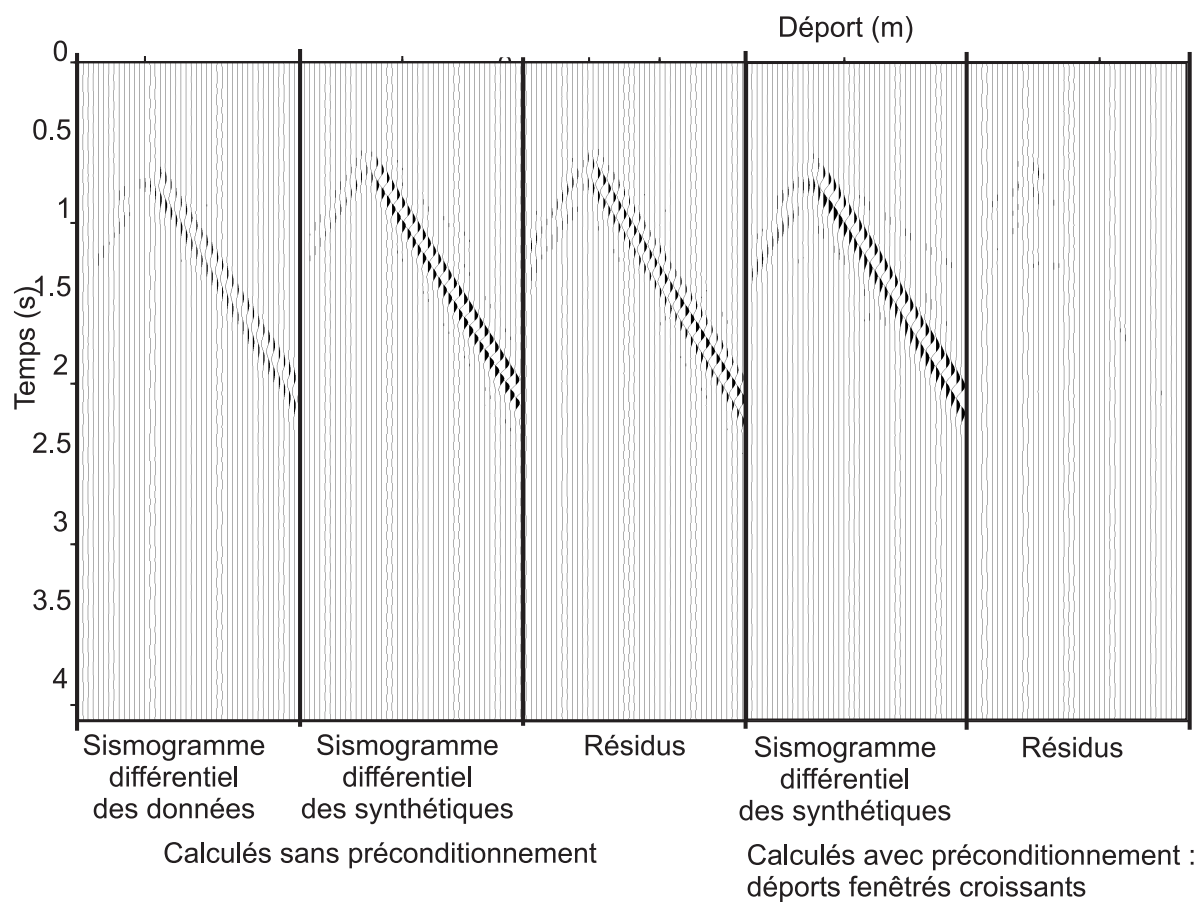


FIG. 4.86: Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.

4.11 Application à la détection de cavités souterraines

Appliquons maintenant les résultats précédents au cas de la détection d'une cavité souterraine. La figure 4.87 présente le dispositif d'acquisition et l'anomalie à détecter.

La détection d'une anomalie aussi forte qu'une cavité pleine d'air constitue un problème à la limite du domaine d'application de la méthode, voire même en dehors. En effet, cette anomalie est très non linéaire. Ainsi, même si l'algorithme procède par des linéarisations successives, considérant la fonction coût comme localement quadratique, le risque est très important de se trouver bloqué dans un minimum local. Les figures 4.87 et 4.89 montrent les résultats de l'inversion lorsque toutes les données sont prises en compte.

Afin de mieux prendre en compte la non linéarité, le préconditionnement des données précédemment présenté est appliqué. Les résultats de l'inversion présentés sur les figures 4.87 et 4.89 indiquent que le fenêtrage des données permet de mieux imaginer la cavité. Cependant, les vitesses estimées à l'intérieur de la cavité demeurent importantes. Nous avons également testé le cas d'un fenêtrage des données dans le sens contraire : des grands dépôts vers les petits dépôts. Dans ce cas, les vitesses atteintes maximales sont encore plus importantes et constituent des artefacts importants. Ceci est lié au fort contraste de vitesse et à la non linéarité qui augmente avec le dépôt (Sirgue, 2003) lorsque le macromodèle est bien connu.

La figure 4.88 montre la reconstruction des modèles de vitesse en fonction du dépôt maximal sélectionné. Notons que l'inversion à courts dépôts contrôle l'allure des images finales, les inversions à dépôt plus important renforcent l'amplitude des anomalies mais ne modifient pas notablement la forme et la localisation de l'hétérogénéité.

La figure 4.89 montre l'apport des inversions effectuées avec des dépôts maximaux différents. Dans l'ensemble, chaque intervalle de dépôt apporte des informations, les hautes fréquences en apportant moins lorsque le dépôt augmente. Les fonctions coût sont équivalentes lorsque seuls les courts dépôts sont utilisés et lorsque tous les dépôts sont utilisés. Néanmoins, les inversions effectuées avec des données à offset plus grand permettent de mieux résoudre le modèle.

Les résidus présentés sur les figures 4.90 et 4.91 illustrent bien la meilleure qualité des images obtenues avec le fenêtrage des données par dépôt croissant. Les ondes de surface sont prépondérantes dans les résidus et sont mieux reproduites lorsque les données sont fenêtrées des bas vers les grands dépôts.

L'inversion de données des dépôts lointains vers les dépôts proches (figure 4.89) montre que les images finales sont de moins bonne qualité. Ceci est confirmé par les fonctions coût (figure 4.93) qui sont globalement plus élevées que pour un fenêtrage des courts dépôts vers les grands dépôts. Ceci signifie que les grandes longueurs d'onde du milieu ne peuvent pas être correctement reconstruites lorsqu'une anomalie fortement non linéaire est présente dans le milieu. En pratique, un macromodèle de vitesse doit être déterminé au préalable. Si sa résolution est suffisante, il permet d'imager une version lissée du milieu et de détecter globalement une anomalie.

Intéressons-nous enfin à l'influence du choix des fréquences inversées pour la reconstruction d'une anomalie fortement non linéaire.

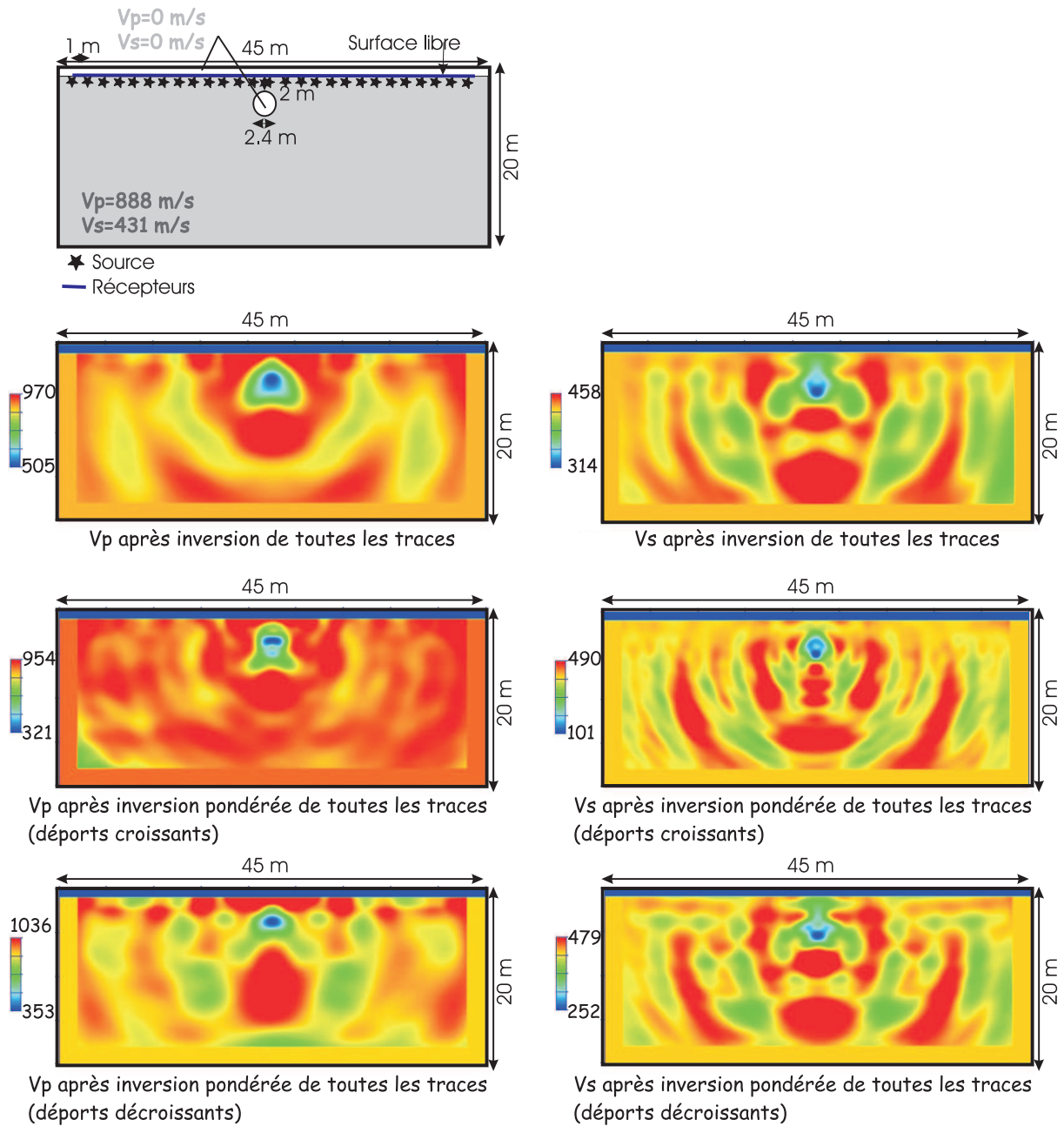


FIG. 4.87: Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion de toutes les données ou inversion pondérée des données, en injectant des données à déport croissant. L'inversion pondérée permet de reconstruire des contrastes de vitesse beaucoup plus importants et plus proches des contrastes réels. Les contrastes de vitesses sont saturés.

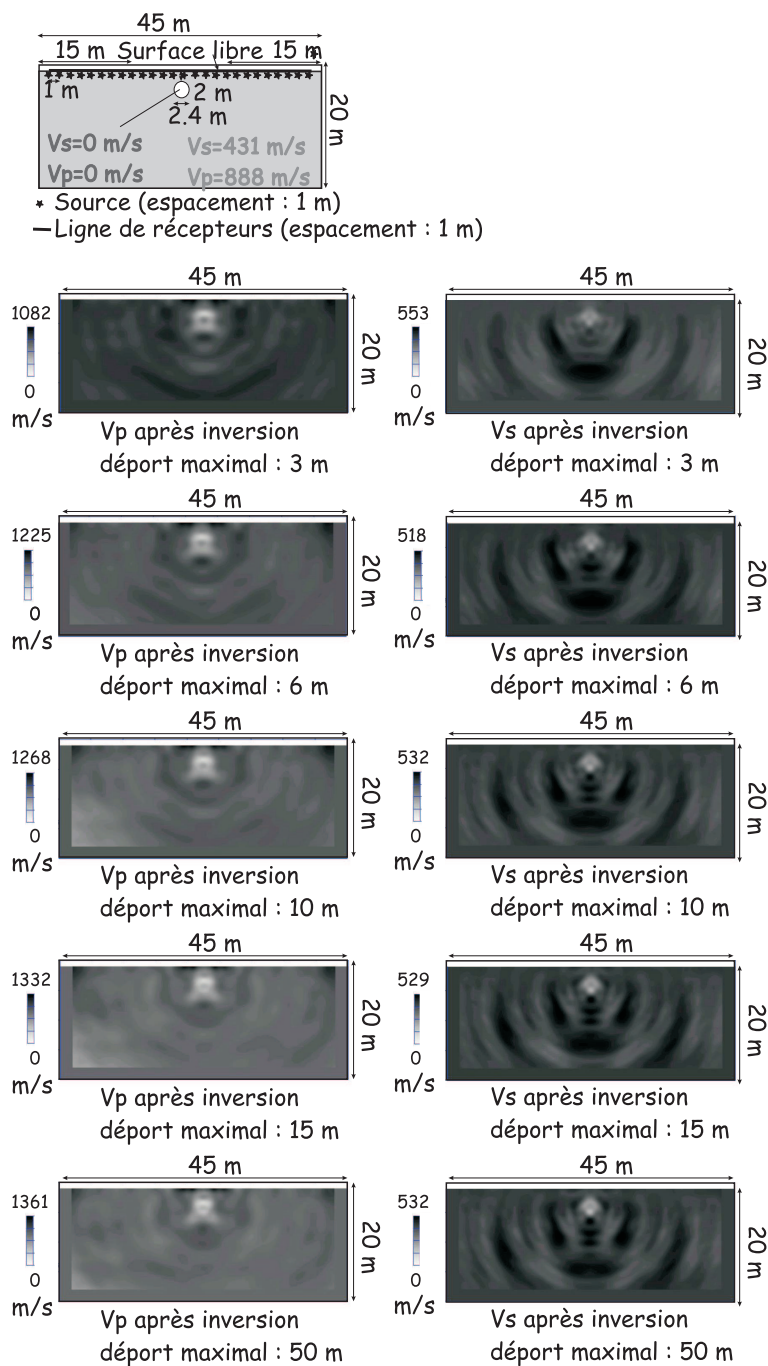


FIG. 4.88: Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion des données sélectionnées par déport croissant. Les contrastes de vitesse ne sont pas saturés.

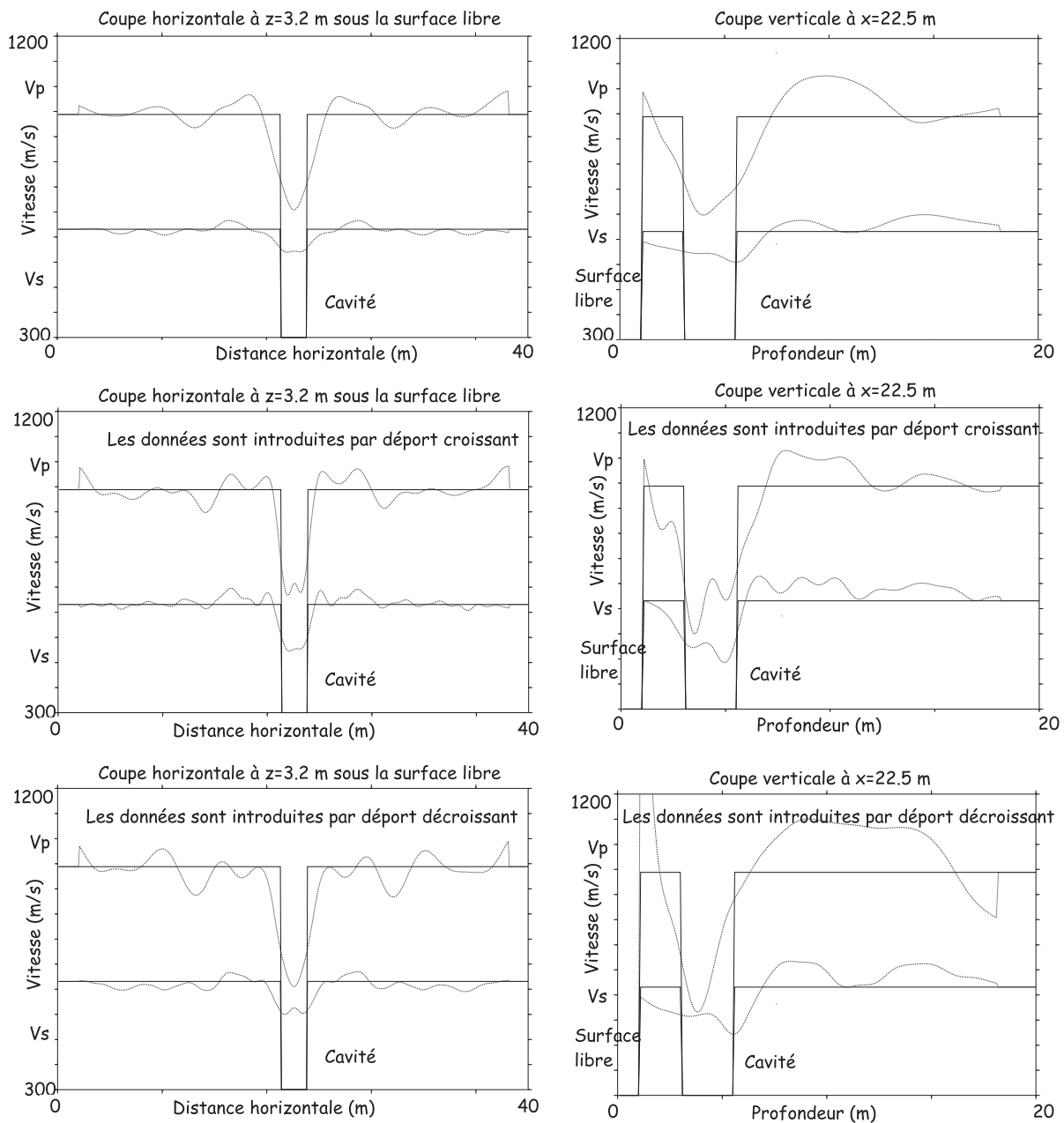


FIG. 4.89: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. En haut : pas de préconditionnement des données. Au milieu : données fenêtrées des courts vers les grands déports. En bas : données fenêtrées des grands vers les courts déports.

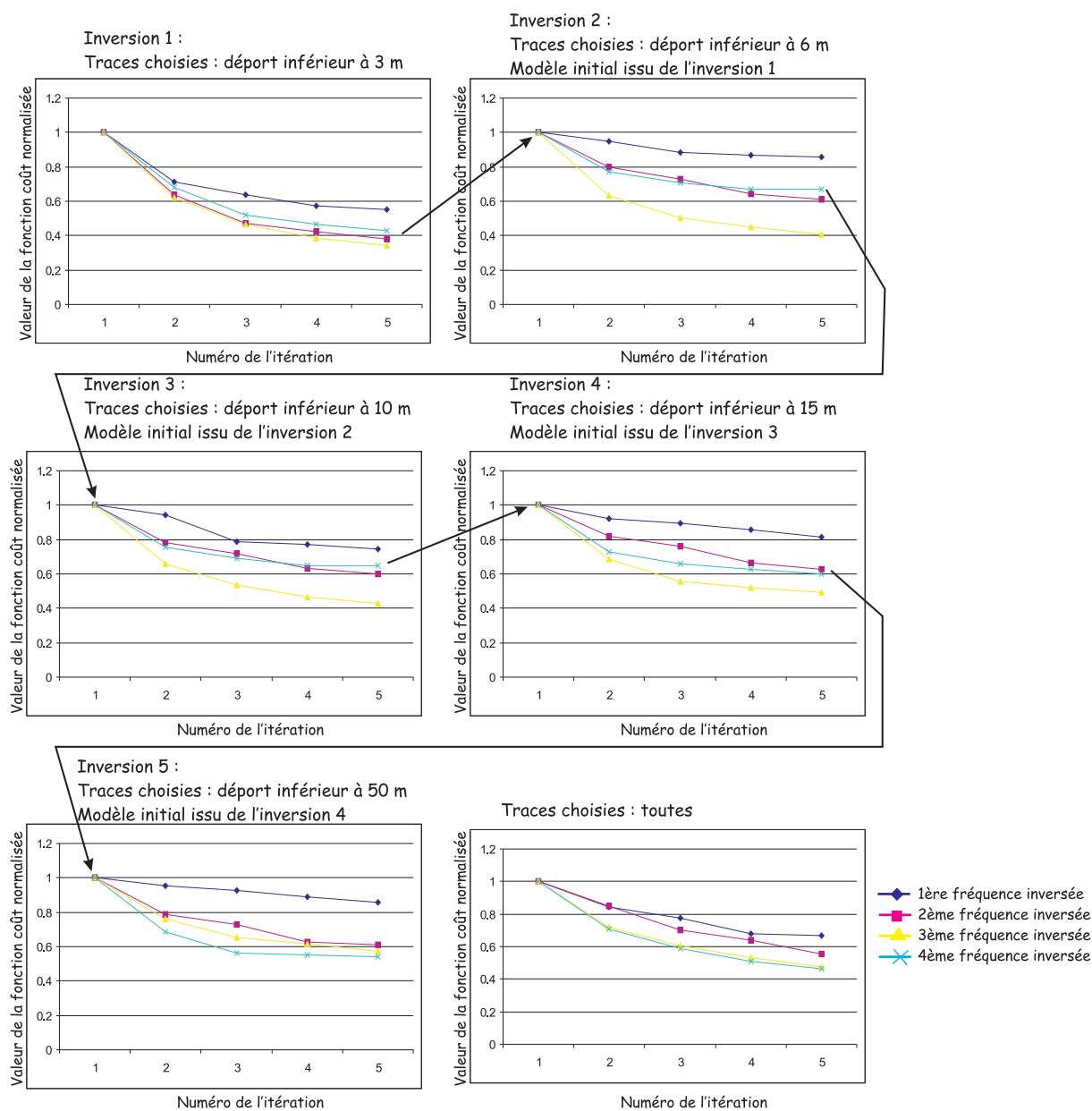


FIG. 4.92: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

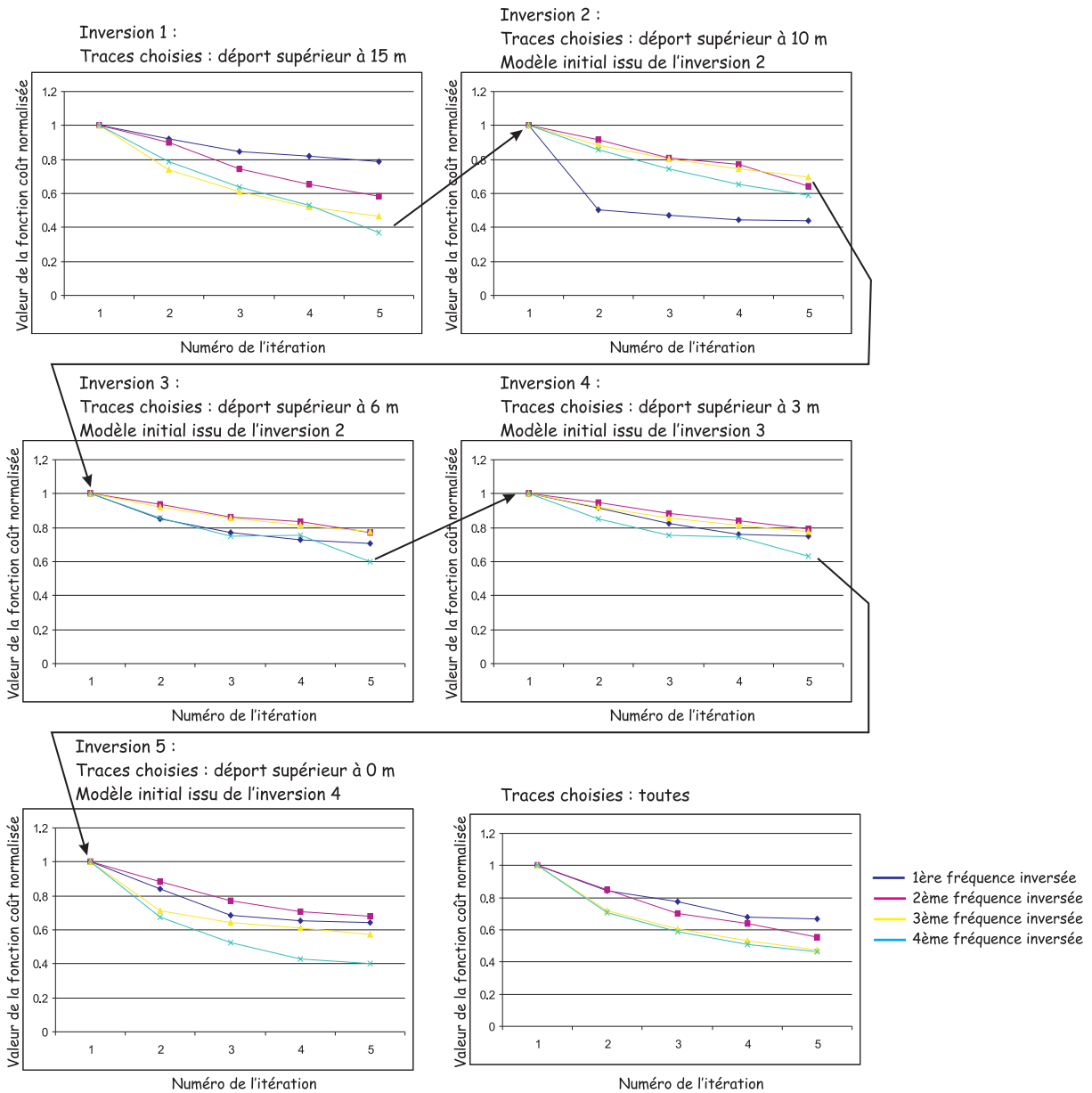


FIG. 4.93: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport décroissant. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun préconditionnement n'est appliqué

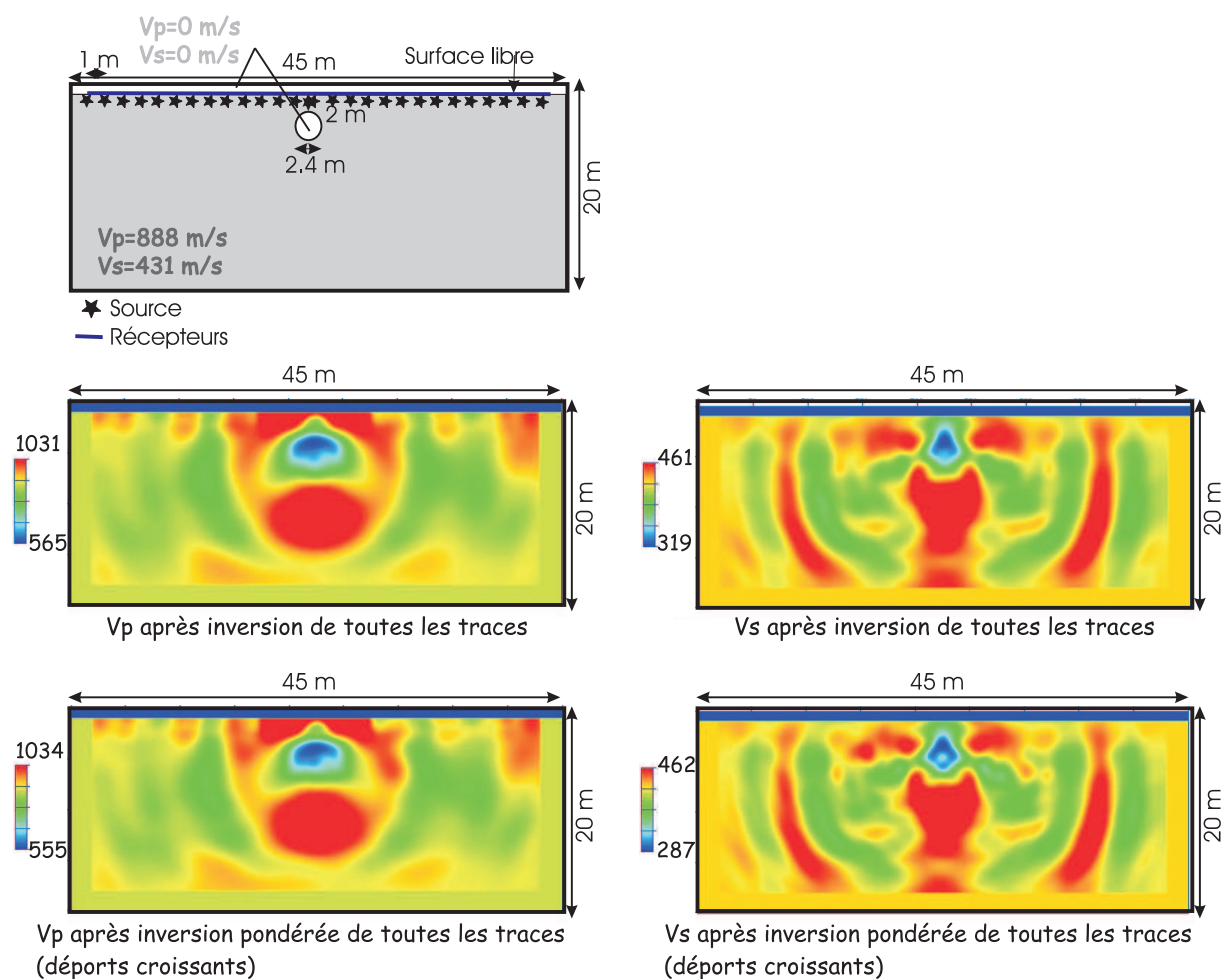


FIG. 4.94: Modèle à reconstruire et modèles de vitesse obtenus après inversion de toutes les données ou inversion pondérée des données, en injectant des données à déport croissant. L'inversion pondérée permet de reconstruire des contrastes de vitesse beaucoup plus importants et plus proches des contrastes réels. Les contrastes de vitesses sont saturés. Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment.

4.11.1 Influence du nombre de fréquences inversées

Enfin intéressons-nous à l'importance du choix des fréquences inversées. Comme dans la section 4.10.3, nous inversons deux fois plus de fréquences. La figure 4.94 montre les modèles finaux pour V_p et V_s lorsque toutes les données sont utilisées ou lorsqu'elles sont fenêtrées. Globalement, l'allure des anomalies ne varie pas beaucoup selon le type de préconditionnement. En revanche, l'amplitude des anomalies est plus importante lorsque le nombre de fréquences inversées augmente. De plus, la figure 4.96 montre que les fonctions coût sont globalement plus basses lorsque davantage de fréquences sont utilisées, et donc que les modèles sont de meilleure qualité.

Néanmoins, même lorsque davantage de fréquences sont introduites, les hétérogénéités fortes sont mal reconstruites par l'algorithme. Ceci est également montré par les figures 4.95, 4.97 et 4.97.

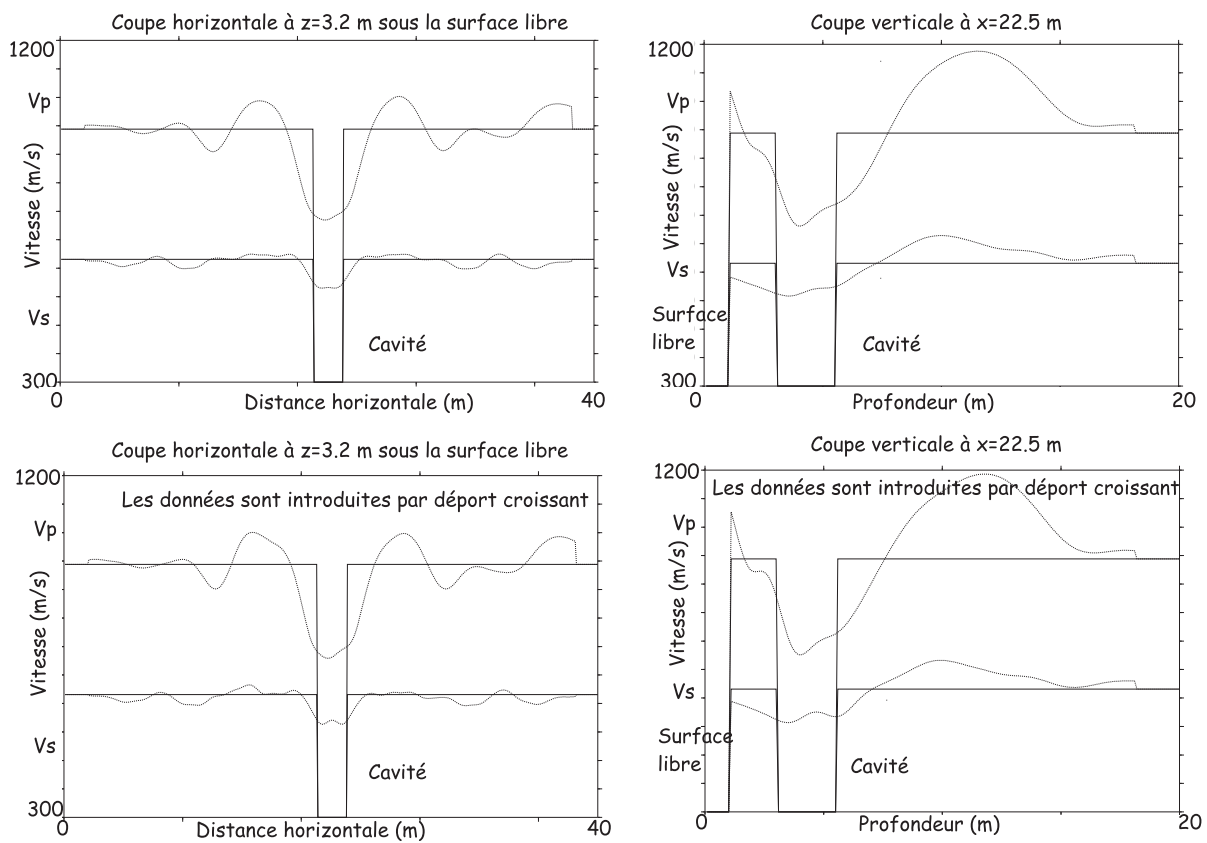


FIG. 4.95: Profils extraits des modèles de vitesse pour le cas sans surface libre. En trait continu : profils extraits des modèles de référence. En trait pointillé : profils extraits des images de l'inversion. En haut : pas de préconditionnement des données. En bas : données fenêtrées des courts vers les grands déports. Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment.

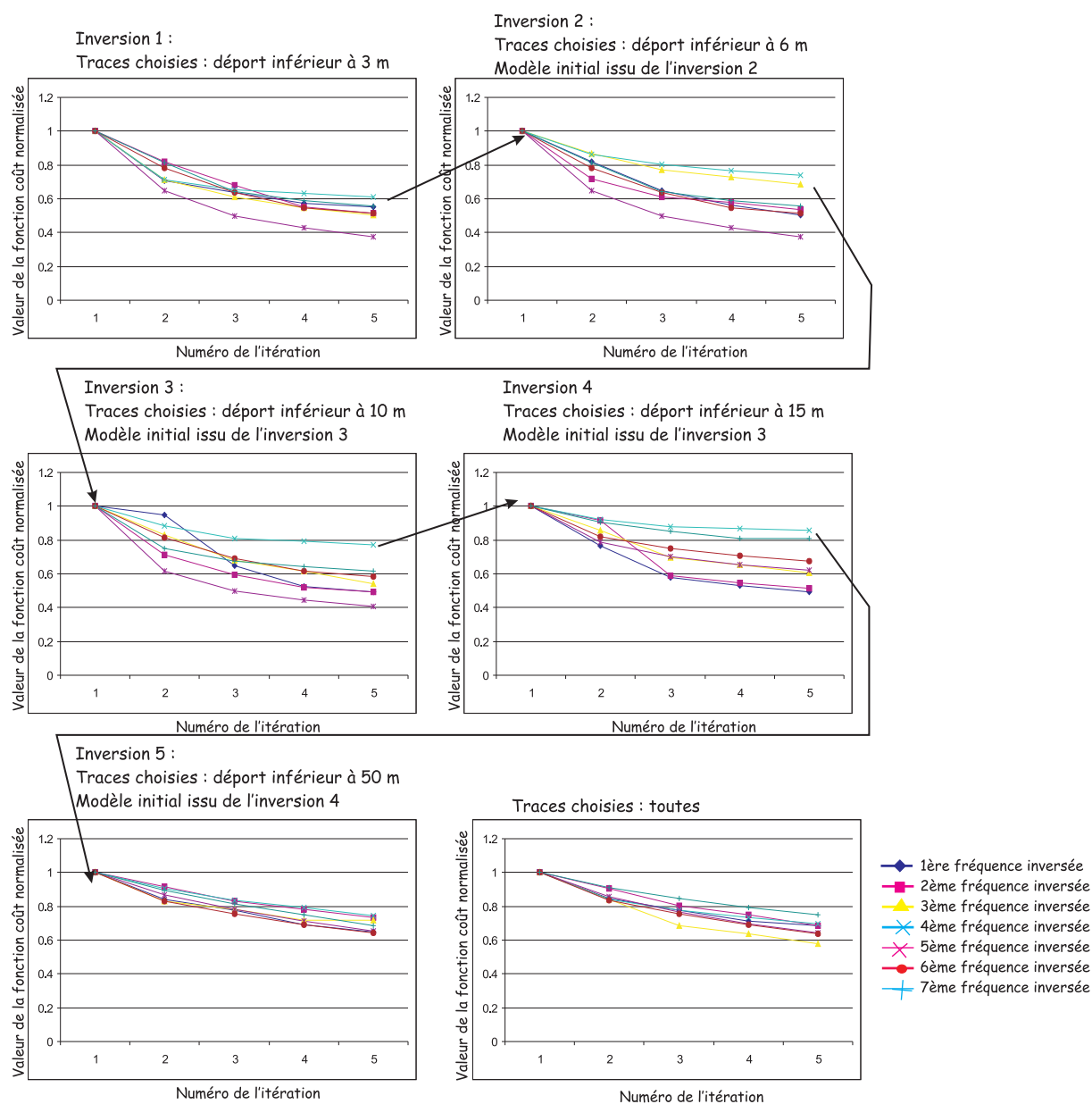


FIG. 4.96: Fonctions coût calculées pour les inversions successives lorsque les données sont fenêtrées par déport croissant et davantage de fréquences. En bas à droite : fonction coût lorsque aucun preconditionnement n'est appliqué. Les fréquences inversées sont deux fois plus nombreuses que précédemment

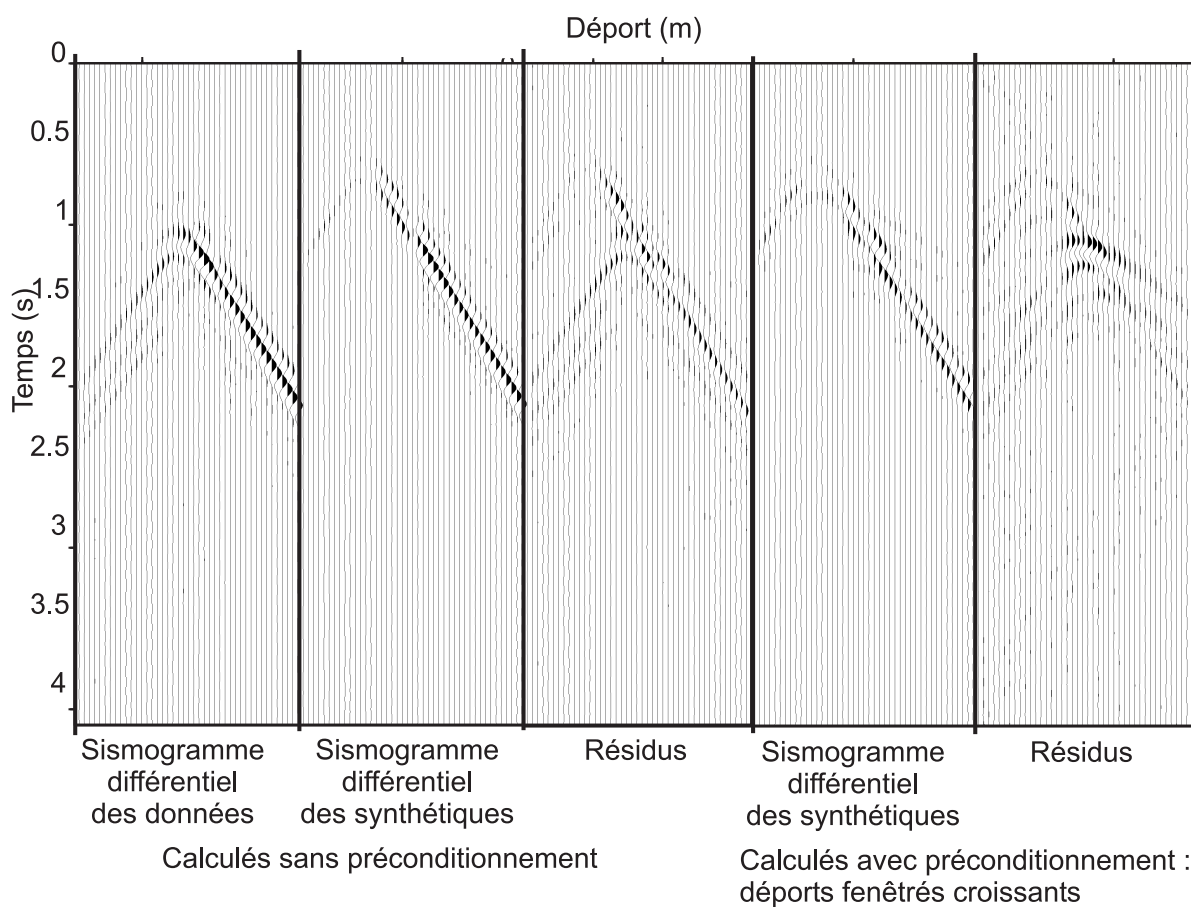


FIG. 4.97: Résidus horizontaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.

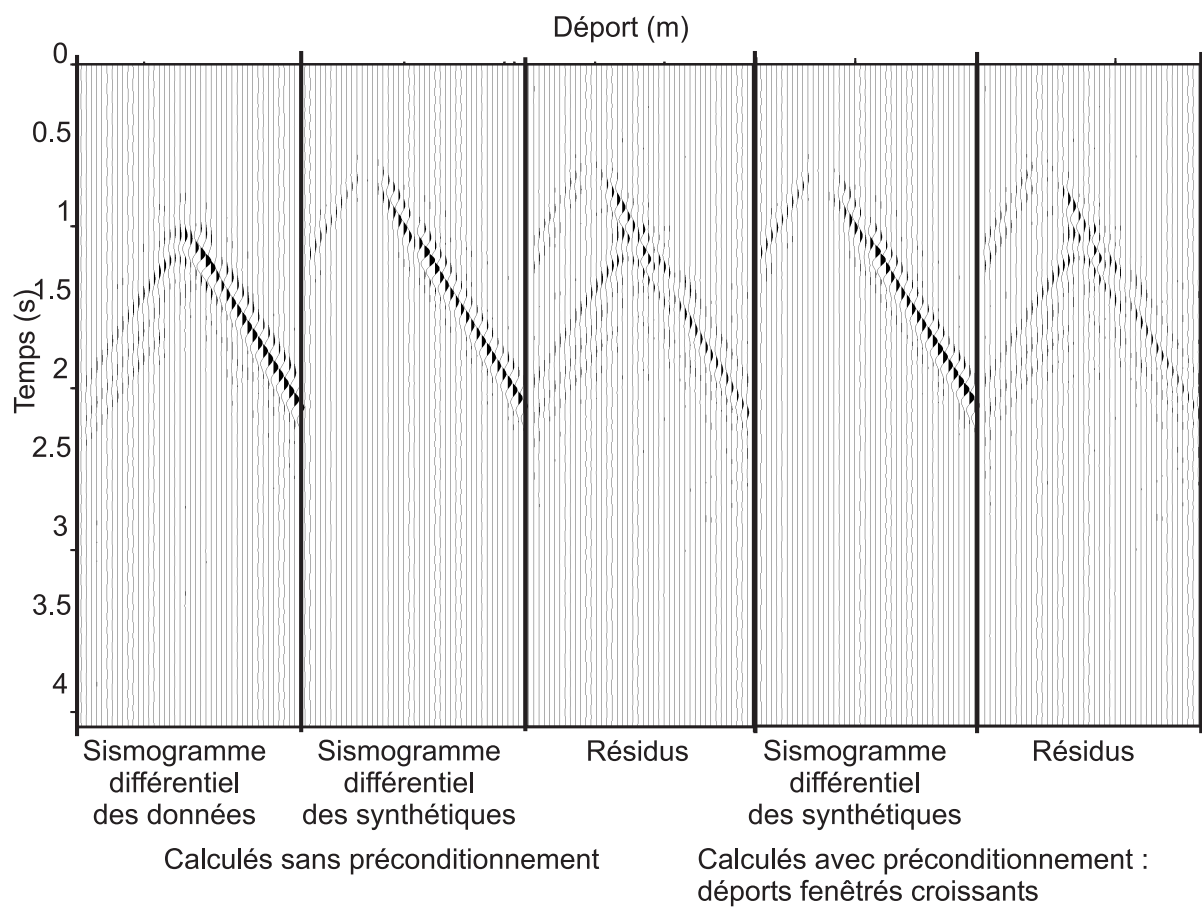


FIG. 4.98: Résidus verticaux calculés pour une inversion sans (à gauche) et avec préconditionnement par déport croissant (à droite). Les fréquences sont deux fois plus nombreuses que précédemment. Le sismogramme différentiel des données est commun à tous les cas.

4.11.2 Synthèse : influence des différents facteurs

Nous avons donc vu au cours des deux dernières parties que :

- le préconditionnement des données par déport croissant dans un macromodèle parfaitement connu permet de mieux prendre en compte la non linéarité du problème et de diminuer les fonctions coût, particulièrement lorsque le milieu comporte une surface libre (sélection des ondes de volume diffractées puis des ondes de surface déphasées)
- le préconditionnement des données par déport décroissant dans un macromodèle parfaitement connu contenant une surface libre donne des résultats équivalents à ceux obtenus sans préconditionnement des données en raison de la présence des ondes de surface très énergétiques
- l'augmentation du nombre des fréquences inversées permet de tirer profit de la redondance en nombre d'onde présente dans les données et améliore notablement les résultats.

4.12 Conclusion

Dans cette partie, nous avons développé l'inversion des formes d'onde élastique pour l'imagerie quantitative de deux paramètres. Elle est basée sur une méthode de gradient appliquée à des données exprimées dans le domaine des fréquences temporelles et le domaine spatial, des basses vers les hautes fréquences. Nous avons tout d'abord présenté la méthode d'un point de vue théorique. Nous avons cherché à comprendre l'influence de certaines approximations effectuées : la prise en compte d'un Hessien diagonal et non pas total, les approximations de Born et de Rytov pour le calcul des dérivées de Fréchet. Nous avons également mis en évidence l'influence du choix des paramètres inversés et celle des fréquences inversées, en particulier de la première fréquence. Nous avons essayé de prendre davantage en compte la non linéarité du problème par l'introduction de dépôts tout d'abord faibles dans les données. Ceci correspond à un préconditionnement des données.

Tout ceci a été étudié dans un milieu sans surface libre. La présence de la surface libre donne lieu à des ondes de surface très énergétiques qui dominent les sismogrammes. Nous avons tenté de limiter le rôle des ondes de surface par la prise en compte de données à déport faible, ne contenant pas d'onde de surface. Les résultats montrent l'efficacité de ce type de préconditionnement.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la détection d'une cavité pleine d'air. L'application de l'inversion à ce type d'objet est à la limite de validité et d'application de la méthode, puisque la cavité a une petite taille mais ne peut être considérée comme un diffractant de faible amplitude, le contraste avec le milieu environnant étant très important. Néanmoins, nous avons vu que l'application de la méthode donne des informations valables sur la position et la forme de l'anomalie.

Dans tous les exemples étudiés ici, les milieux sont homogènes et le macromodèle n'a pas besoin d'être trouvé. Dans les cas réels, l'application de l'inversion des formes d'onde élastique passe d'abord par la détermination d'un macromodèle. Ce dernier a une importance considérable puisque son choix guide l'inversion vers un minimum local ou vers le minimum global. Dans le chapitre suivant, nous appliquons la méthode de l'inversion des formes d'onde élastiques après avoir précisément déterminé un macromodèle de vitesse.

Chapitre 5

Application à un cas réel : Détection d'une cavité maçonnée

Nous avons présenté dans le chapitre précédent l'inversion des formes d'onde élastique et nous l'avons appliquée à des données synthétiques. Appliquons maintenant cette méthode à des données réelles acquises dans le cadre de la détection de cavités souterraines, thématique soutenue par le BRGM. Les résultats présentés ici permettent d'évaluer les performances et limites de la méthode dans un cas concret : l'imagerie de la proche surface, milieu particulièrement complexe.

5.1 Problématique

Les données dont nous disposons sont acquises sur un site naturel dont nous ne connaissons pas la composition. Nous devons donc effectuer l'ensemble des étapes nécessaires à l'imagerie quantitative multiparamètres :

1. la détermination d'un macromodèle de vitesse expliquant les principales arrivées des sismogrammes à moins d'une demi-longueur d'onde
2. l'application de la méthode d'inversion des formes d'onde élastique pour caractériser les petites structures, plus particulièrement une cavité.

La proche surface est un milieu complexe dans lequel de nombreux phénomènes se produisent. La détermination du macromodèle est cruciale et doit être effectuée avec soin. L'anomalie à détecter, la cavité, est une anomalie fortement contrastée, donnant lieu à des phénomènes tels que des diffractions ou des déphasages de certaines ondes. Nous allons donc tester l'inversion des formes d'onde élastique dans un cas à la limite de son domaine de validité présenté dans le chapitre précédent. En effet, l'inversion des formes d'onde élastique permet de reconstruire des faibles perturbations en deux dimensions lorsque le macromodèle et la source sismique sont bien connus. Dans le cas concret de Jargeau, nous cherchons à reconstruire des fortes perturbations de vitesse dans un milieu complexe où la propagation a lieu en trois dimensions. De plus, le macromodèle de vitesse et la source sismique ne sont pas connus exactement comme dans le cas synthétique.

Néanmoins, il est intéressant d'évaluer la pertinence des modèles finaux par rapport aux données et de déterminer les parties des données effectivement reproduites par cette inversion linéarisée dont le principe est de n'expliquer que les parties des données compatibles avec le modèle.

Nous souhaitons reconstruire les paramètres V_p et V_s du milieu pour caractériser les zones hétérogènes, comme une zone de décompaction, une zone plus humide ou des possibles cavités. Les ondes de surface sont présentes dans les sismogrammes et contiennent la majeure partie de l'énergie. De plus, la surface libre entraîne des réflexions multiples qu'il faudra interpréter. Nous allons donc effectuer l'inversion des vitesses sismiques dans un milieu contenant la surface libre et générant des ondes de surface.

Nous allons dans un premier temps présenter les données acquises. Puis nous exposerons les différentes approches effectuées pour déterminer le macromodèle. Enfin, nous appliquerons l'inversion des formes d'onde élastique et évaluerons la pertinence des modèles obtenus, ainsi que l'influence de certains facteurs, comme le choix du ou des paramètre(s) inversé(s), l'élimination de certaines ondes des données ou l'inversion de la source sismique.

5.2 Présentation des données

Les données que nous avons étudiées ont été acquises par le BRGM à Jargeau (Loiret, France). Elles ont fait l'objet d'un article publié par Leparoux et al. (2000) dans lequel elles étaient utilisées pour tester la faisabilité de la méthode de détection de cavité par ondes de surface. Dans cette méthode, des diagrammes de dispersion sont calculés et pointés de manière à établir une loi de vitesse des ondes de surface en fonction de la fréquence. Les diagrammes de dispersion présentent des zones où l'amplitude est plus faible, correspondant à la signature de la cavité (voir l'annexe B).

Les données sont ensuite ramenées à déport nul par correction des sismogrammes avec cette vitesse dispersive (correction DLMO : Dynamic Linear Move Out, d'après Yilmaz (2001)) et par la prise en compte de l'atténuation et de l'expansion géométrique. Les ondes de surface corrigées s'alignent horizontalement. Les autres ondes ont été corrigées avec une vitesse ne correspondant pas à leur vitesse de propagation et ne s'alignent donc pas. Les ondes diffractées sont alors bien identifiables, ainsi que les déphasages de l'onde de surface liées à la présence de la cavité et de la zone d'ombre créée juste derrière.

La méthode développée par Leparoux et al. (2000) exploite donc les phases des ondes de surface pour localiser latéralement la cavité. Sa profondeur est déduite par un coefficient empirique entre profondeur et longueur d'onde affectée par la cavité. Les caractéristiques physiques (valeur des vitesses des ondes) et géométriques (taille, forme) de la cavité sont inconnues.

Nous utilisons les mêmes données pour essayer d'en extraire des informations plus précises sur la localisation et la forme de la cavité et trouver les contrastes de vitesse, en nous basant sur les amplitudes et les phases des ondes.

5.2.1 Dispositif d'acquisition

La figure 5.1 montre le dispositif d'acquisition utilisé pour l'enregistrement des vitesses de déplacement du sol verticales.

Les données sont acquises le long d'une ligne parallèle à la Loire, sur une route goudronnée. Un mur de digue se situe de l'autre côté du profil d'acquisition à une distance d'environ 7 à 8m (d'après Adnand Bitri, chercheur BRGM, communication orale) et est susceptible d'occasionner des effets de propagation en trois dimensions, non modélisés dans notre méthode. La cavité à imager est une conduite d'eau qui se jette dans la Loire. Elle est a priori maçonnée mais nous ne savons pas si elle contient de l'eau ou de l'air, ni quel est son état d'altération et celui du milieu environnant. La figure 5.1 présente la position latérale supposée de la cavité, établie d'après la position des hyperboles de diffraction observées sur les données et d'après l'article de Leparoux et al. (2000).

Les positions relatives des sources et des récepteurs sont fixes d'un tir à l'autre. En revanche, ce dispositif se déplace latéralement d'un mètre entre tirs. La distance entre la source et le premier récepteur est de 5 mètres pour tous les tirs. Ceci signifie que nous ne pouvons avoir accès à l'ondelette temporelle de la source car cette dernière n'est pas enregistrée par le dispositif. Cela implique également que les dépôts proches ne sont pas présents dans les données et que les ondes de surface existent quel que soit le déport considéré. Enfin, les ondes sont enregistrées sur une distance maximale de 29 m. Ce dispositif a donc une ouverture limitée, ce qui implique que nous ne pourrions enregistrer certaines ondes de volume réfractées par exemple.

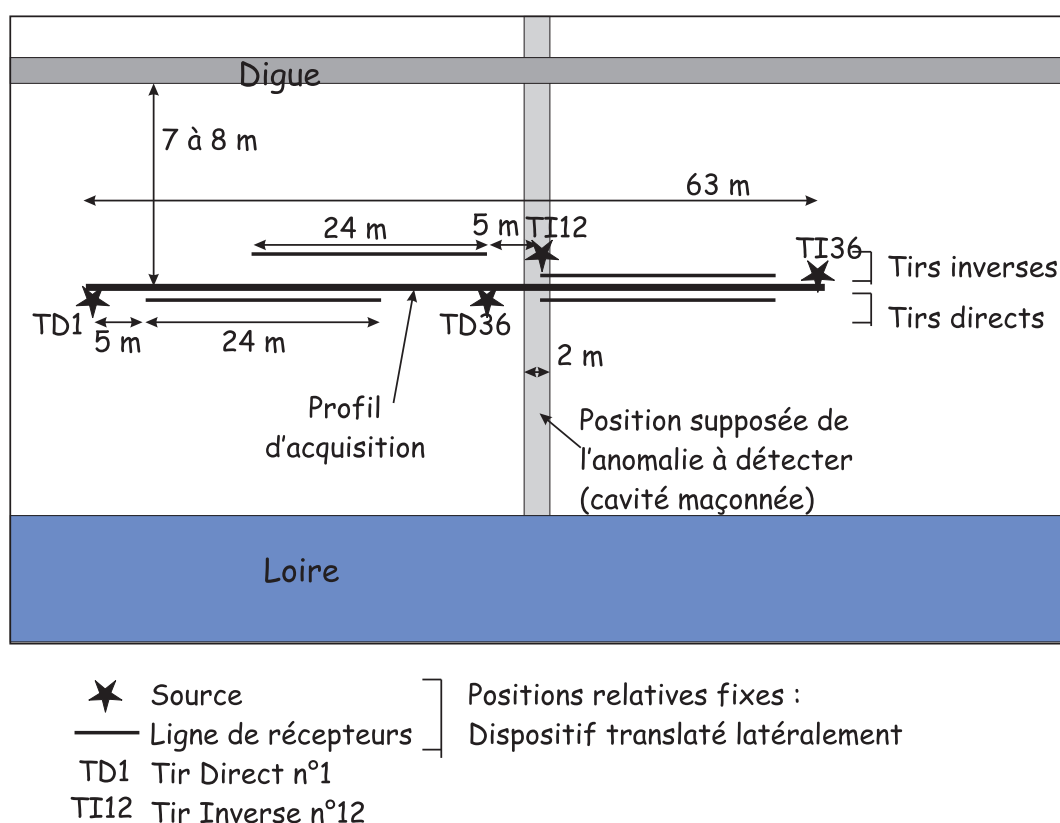


FIG. 5.1: Dispositif d'acquisition utilisé pour l'enregistrement de données sismiques verticales à Jargeau (Loiret, France)

Les données sont acquises par des géophones dont la fréquence propre (fréquence d'enregistrement la plus basse) est de 10Hz . Le pas d'échantillonnage temporel d'enregistrement est de 10^{-3} seconde. Chaque récepteur enregistre 1024 échantillons temporels. La source est constituée d'un marteau.

5.2.2 Allure des sismogrammes

La figure 5.2 montre un exemple de tir direct et la figure 5.3 montre un exemple de tir inverse. Dans les deux cas, les ondes de surface sont présentes sur tout le profil et très énergétiques. Au total, 36 tirs directs et 25 tirs inverses sont effectués.

La figure 5.4 montre les diagrammes de dispersion calculés par Adnand Bitri (chercheur BRGM) associés aux tirs présentés sur les figures 5.2 et 5.3. Les diagrammes de dispersion sont semblables, indiquant que le contenu fréquentiel des sismogrammes (et donc des ondes de volume et des ondes de surface dispersives) est similaire : deux modes apparaissent et leurs vitesses sont équivalentes sur les deux profils. Notons qu'une lacune d'énergie apparaît entre 25 et 30 Hz sur le diagramme de dispersion du tir direct 1.

La similitude des sismogrammes et des diagrammes de dispersion pour les tirs directs et inverses, calculés pour deux tirs sismiques différents, laisse penser que l'approximation d'un milieu stratifié (sans pendage des couches car les ondes de volume ont des vitesses de propagation apparente identiques (Lay & Wallace, 1995; Stein & Wysession, 2003)) constitue une bonne approximation pour définir un modèle initial. Des variations latérales doivent néanmoins être reconstruites par l'inversion.

La figure 5.5 montre le contenu fréquentiel pour le tir sismique direct n°1 et le tir sismique inverse n°12. Les ondes contiennent de l'énergie pour des fréquences comprises entre 10 et 200Hz

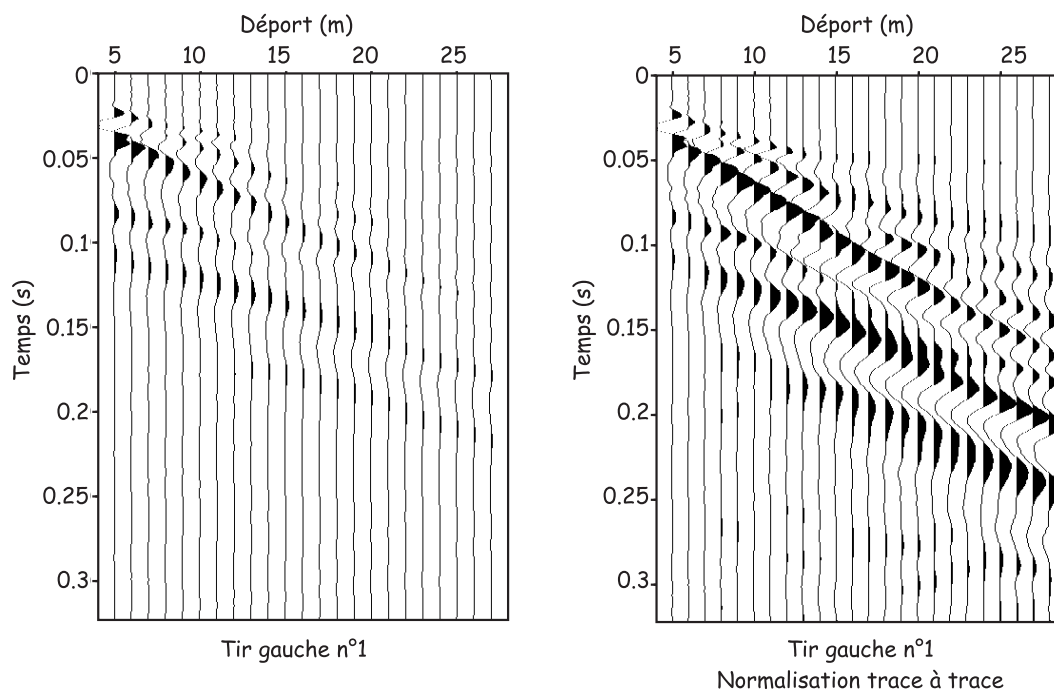


FIG. 5.2: Sismogrammes enregistrés pour le tir direct 1 (voir la figure 5.1 pour la localisation du profil).

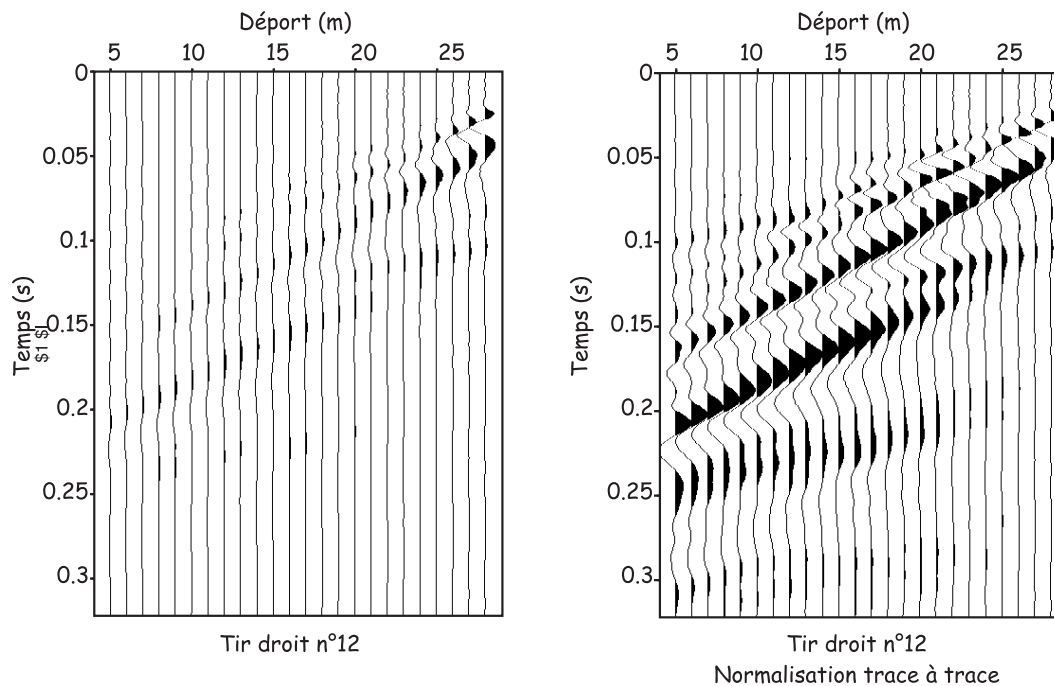


FIG. 5.3: Sismogrammes enregistrés pour le tir inverse 12 (voir la figure 5.1 pour la localisation du profil)

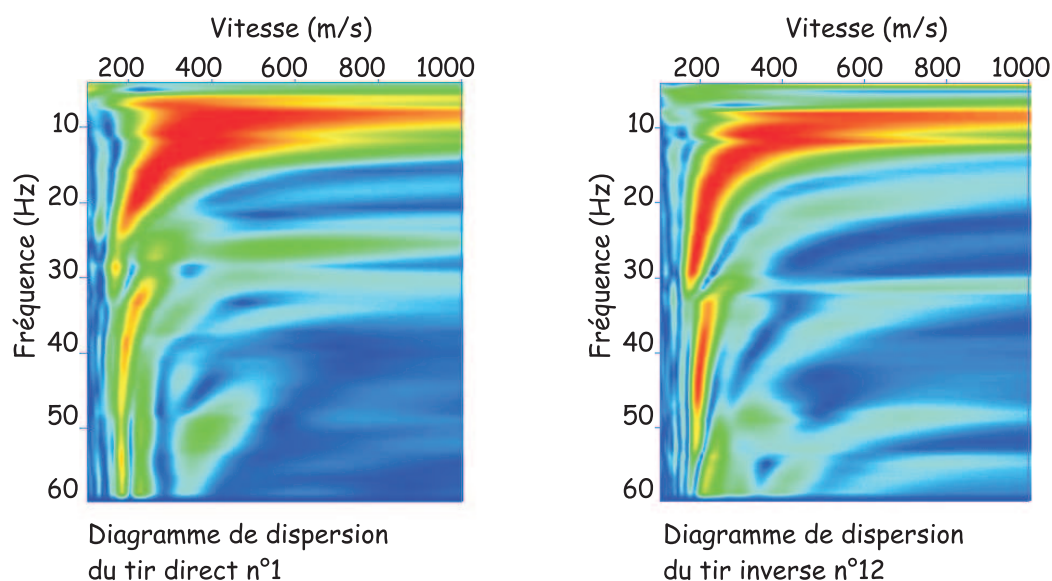


FIG. 5.4: Diagrammes de dispersion associés au tir direct 1 (à gauche) et au tir inverse 12 (à droite). Les diagrammes de dispersion ont été calculés par Adnand Bitri du BRGM.

environ, l'énergie entre 100 et 200 Hz étant plutôt faible et présente uniquement pour les dépôts les plus petits. Il apparaît clairement que le contenu haute fréquence des ondes (ondes de volume) est atténué avec la distance alors que les ondes basse fréquence (ondes de surface) se propagent sur des distances plus importantes.

Ceci met en évidence l'importance de la bonne modélisation des ondes de surface, puisqu'elles sont énergétiques sur toutes les traces et que l'inversion commence par les basses fréquences.

5.3 Premières observations

Avant d'appliquer l'inversion des formes d'onde à ce jeu de données, nous devons tout d'abord évaluer un certain nombre de facteurs. Tout d'abord, nous devons savoir si la signature de la cavité est significative dans les données et s'il est raisonnable d'espérer la détecter. Ensuite, nous devons identifier les principales arrivées dans le sismogramme, de manière à évaluer la complexité du milieu de propagation. Ce dernier point est crucial et conditionne le choix de la méthode d'obtention du macromodèle.

5.3.1 Complexité du milieu de propagation

Les sismogrammes présentés sur les figures 5.2, 5.3 et 5.6 illustrent la complexité du milieu de propagation. En effet, plusieurs ondes réfractées et réfléchies apparaissent, ainsi que des ondes de surface et une arrivée basse fréquence beaucoup plus tardive et très énergétique.

L'utilisation de l'inversion des formes d'onde requiert la connaissance précise du milieu de propagation. En effet, pour que cette méthode donne de bons résultats, la cinématique des ondes doit être respectée, chaque onde doit être modélisée avec un décalage maximal d'une demie longueur d'onde pour éviter toute ambiguïté de phase (figure 4.1 de la section 4.1.4).

5.3.2 Signature de la cavité

La figure 5.6 montre les tirs sismiques enregistrés au-dessus de la position supposée de la cavité. Des hyperboles de diffraction des ondes de surface apparaissent clairement sur les profils. Elles

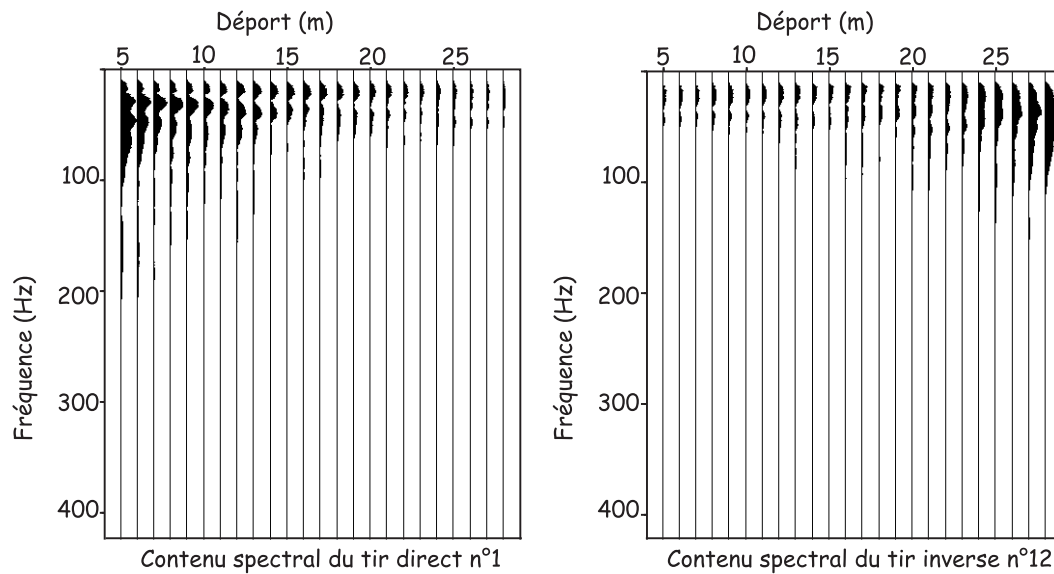


FIG. 5.5: Contenu fréquentiel du tir sismique direct n° 1 (gauche) et du tir sismique inverse n° 12 (droite). L'énergie est principalement concentrée à des fréquences inférieures à 100 Hz. Notons la décroissance de l'énergie avec le déport.

permettent de situer latéralement la cavité. Elles sont utilisées par Leparoux et al. (2000) comme indices caractéristiques de la présence de la cavité.

Il est également possible que d'autres ondes soient affectées par la présence de la cavité, comme nous l'avons vu dans l'annexe B. Evaluons l'empreinte d'une cavité sur les sismogrammes dans un milieu donné. Nous supposons ici que le milieu de propagation est stratifié. Nous plaçons une cavité d'un mètre de diamètre à deux mètres de profondeur. La figure 5.7 montre les sismogrammes calculés avec et sans une cavité située sous les géophones. La cavité déphase les ondes directes, les ondes rétro-diffusées ont une amplitude moindre malgré le fort contraste de vitesse présent au niveau de la cavité. Les capteurs situés après la cavité sont davantage affectés par sa présence. Lorsque la cavité est située au niveau du premier géophone, tous les récepteurs enregistrent des ondes modifiées par rapport au cas sans cavité.

Ceci indique tout d'abord que le champ diffracté en avant est mélangé au champ direct qu'il déphase. Ceci montre également que la cavité peut être localisée latéralement par la présence de ces ondes déphasées après la cavité. Ces phénomènes concernent surtout les ondes de surface. Les ondes de volume sont peu énergétiques par rapport aux ondes de surface et l'empreinte de la cavité y est moins visible.

Notons qu'avec ces modèles, nous ne reproduisons pas dans les données synthétiques (figure 5.7) l'arrivée très énergétique basse fréquence présente sur les enregistrements sismiques (figures 5.6) ni le champ rétro-diffusé de cette onde au niveau de la cavité.

Nous pouvons simplement conclure de cette partie que théoriquement, la signature de la cavité dans les données est significative d'un point de vue énergétique.

Ceci est également comparable aux exemples synthétiques présentés dans la section 4.11 où une anomalie fortement contrastée (cavité vide) est détectée. Les inversions effectuées montraient que l'algorithme était capable d'apporter certaines informations relatives aux caractéristiques géométriques et physiques de la cavité, bien que ces dernières soient sous-estimées.

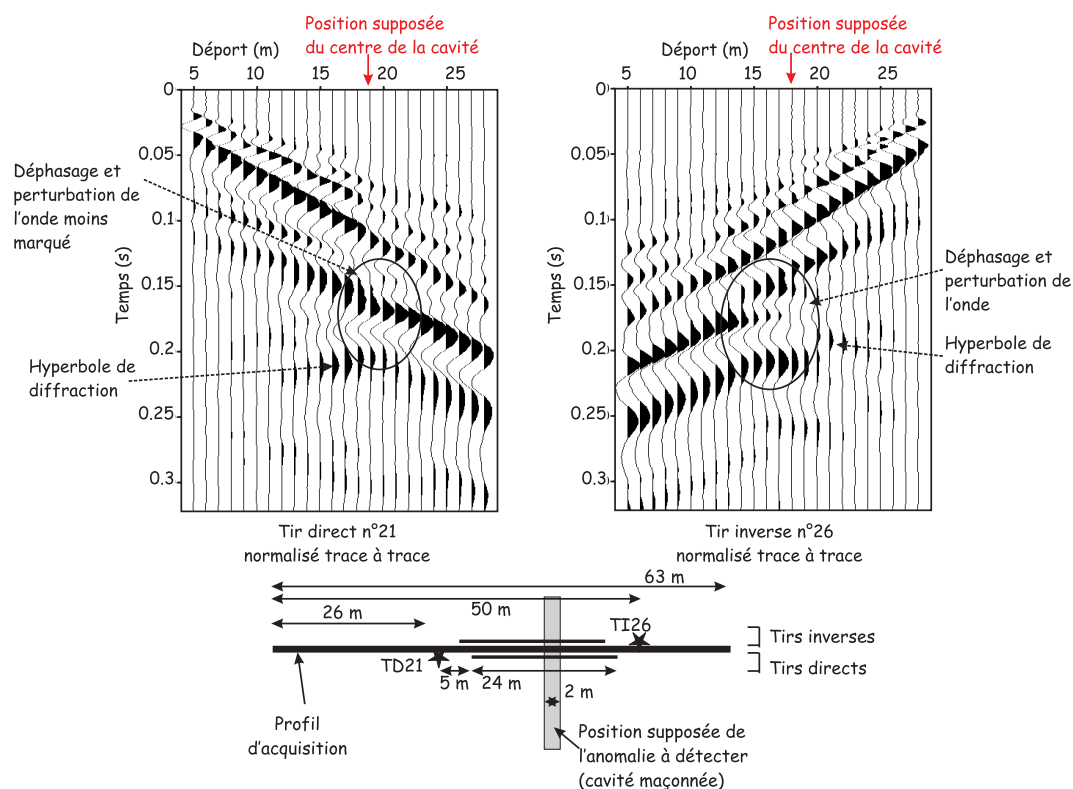


FIG. 5.6: Tirs contenant des hyperboles de diffraction liées à la présence de la cavité : tir direct n ° 21 (gauche) et tir inverse n ° 26 (droite)

5.3.3 L'arrivée tardive basse fréquence

Les ondes de volume, réfractées ou réfléchies, et les ondes de surface existent toujours lorsque le milieu est stratifié et contient une surface libre (voir la figure 5.7). En revanche, l'onde énergétique basse fréquence qui arrive tardivement dans les sismogrammes (nommée "onde tardive" sur la figure 5.8) est plus difficilement expliquée. Notons également la présence d'une deuxième onde tardive (nommée "onde tardive 2" sur la figure 5.8), onde réfléchi à la pente un peu différente et localisée uniquement dans la partie gauche du domaine d'étude.

Son contenu basse fréquence ainsi que son fort contenu énergétique laissent penser qu'il s'agit d'une onde de surface. Deux possibilités sont alors envisageables : soit c'est une onde de surface diffractée par la digue voisine parallèle au profil, soit c'est un mode supérieur de l'onde de surface dû à une zone à faible vitesse en profondeur. Examinons la validité de ces deux hypothèses.

Arguments en faveur d'une arrivée latérale

Examinons la première possibilité et effectuons un calcul rapide pour évaluer la validité de cette hypothèse. Ce type de phénomène peut se produire avec une structure parallèle au dispositif d'acquisition. Par exemple, Blonk & Herman (1996) ont identifié dans leurs données une onde de surface réfléchi latéralement par une digue. En considérant le sismogramme de la figure 5.3, la vitesse apparente des ondes de surface vaut environ 192m/s . La figure 5.9 résume les distances et vitesses mises en jeu. La figure 5.8 montre les temps d'arrivée théoriques associés à une arrivée latérale sur la digue. Dans ce cas, sur le premier récepteur, l'onde réfléchi doit arriver à un temps compris entre 0.077s . et 0.087s ., ce qui correspond à une différence de temps d'arrivée entre l'onde de surface directe et l'onde de surface réfléchi sur la digue à une durée comprise entre 0.05s . et 0.06s .. Ceci correspond effectivement au temps d'arrivée de l'onde réfléchi enregistrée par le

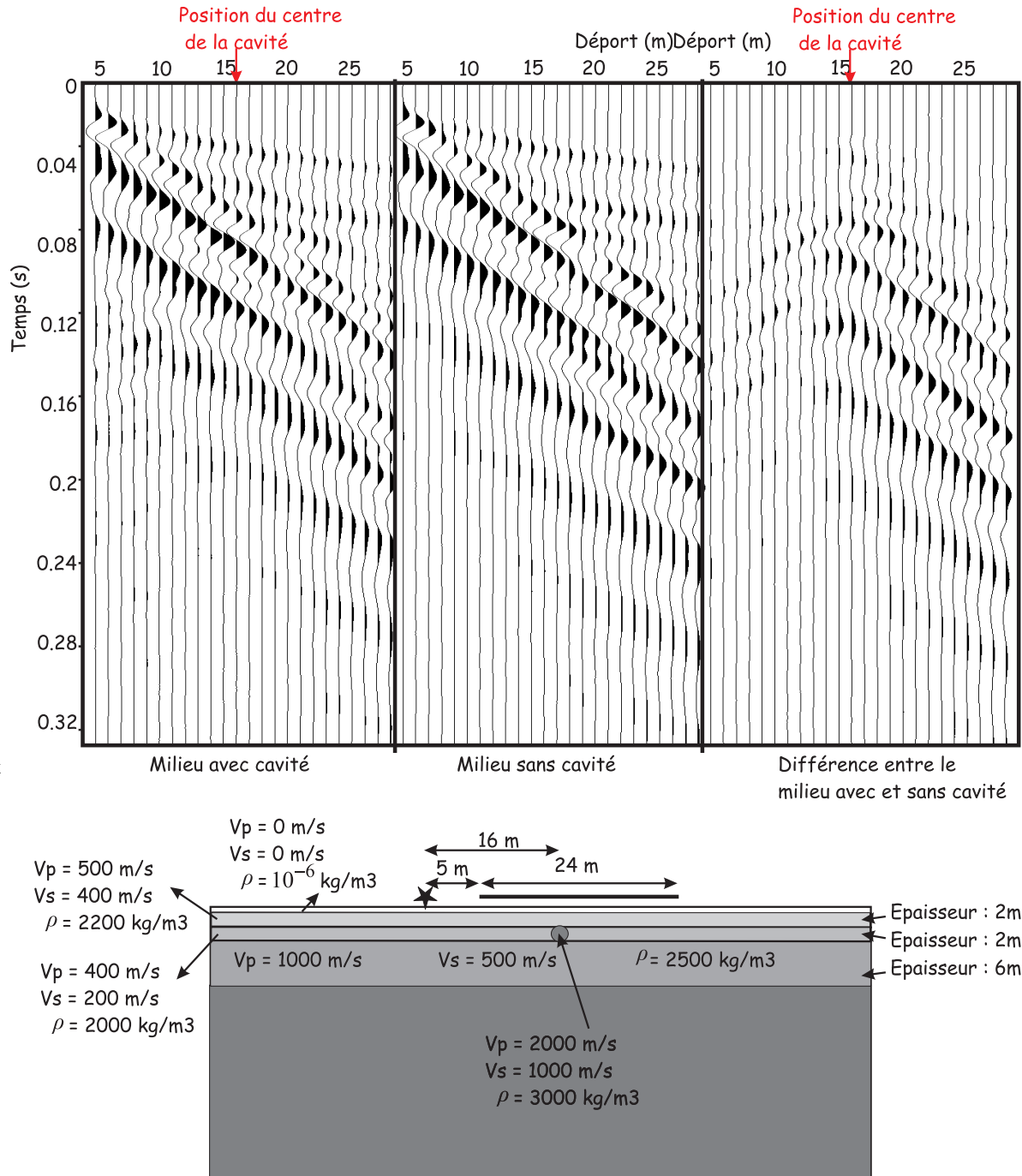


FIG. 5.7: Effet d'une cavité circulaire située à 2 m de profondeur, de rayon 1 m sur un profil où la cavité est localisée latéralement au déport 16 m. A gauche : sismogramme avec la cavité. Au milieu : sismogramme de référence. A droite : différence entre les deux sismogrammes.

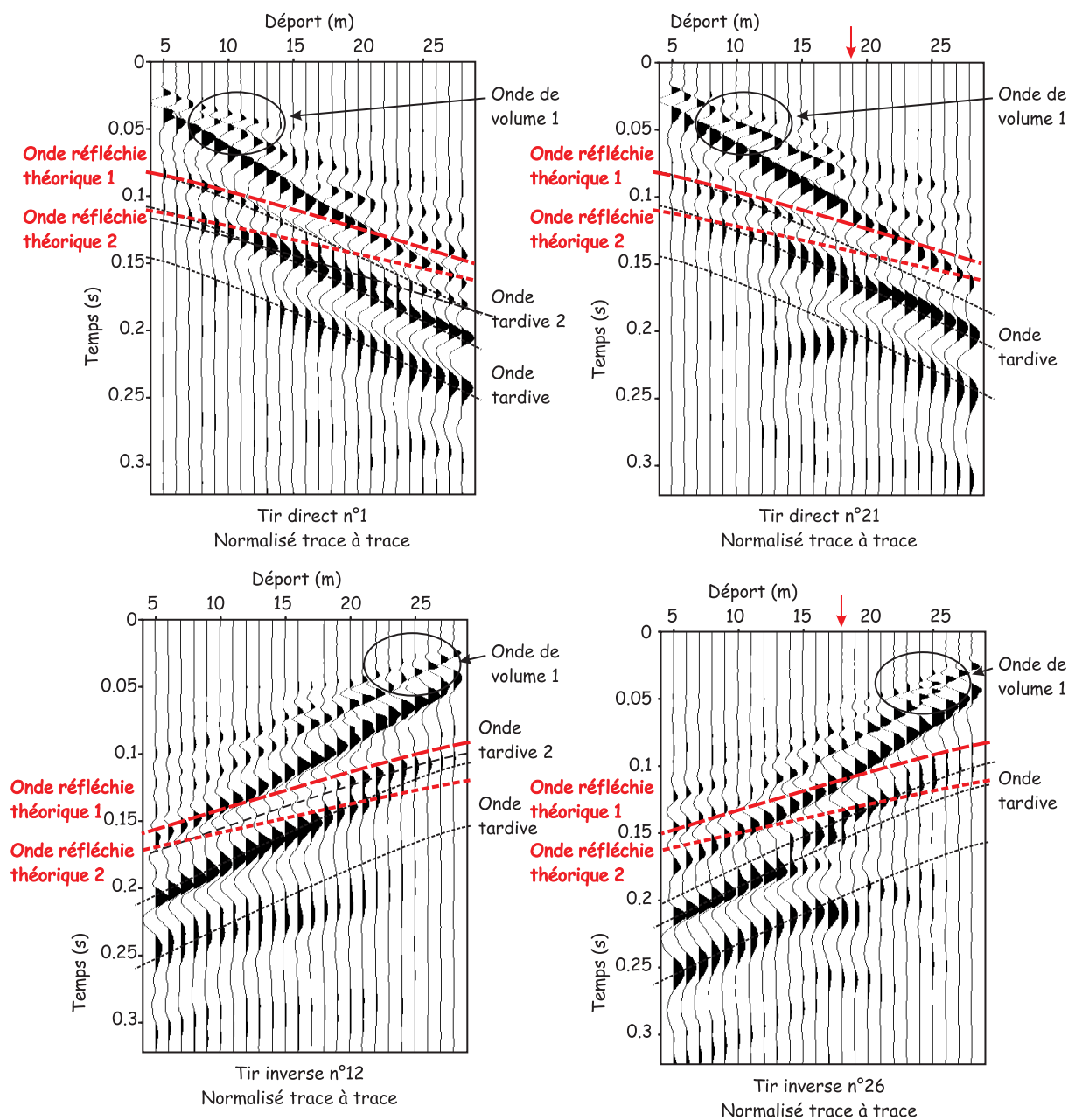


FIG. 5.8: Mise en évidence des deux arrivées tardives sur les données réelles. Les sismogrammes enregistrés pour ces quatre tirs sismiques montrent la variabilité de cinématique le long du profil d'acquisition. Les ondes de volume et les ondes tardives basse fréquence sont soulignées pour les mettre en évidence. Les temps d'arrivée d'une onde réfléchie latéralement (équation 5.1) sont également représentés en rouge. L'onde réfléchie théorique 1 est l'onde réfléchie par une digue parallèle au profil à 7.5 m de distance. L'onde réfléchie théorique 2 est l'onde réfléchie par une digue parallèle au profil à 10 m de distance.

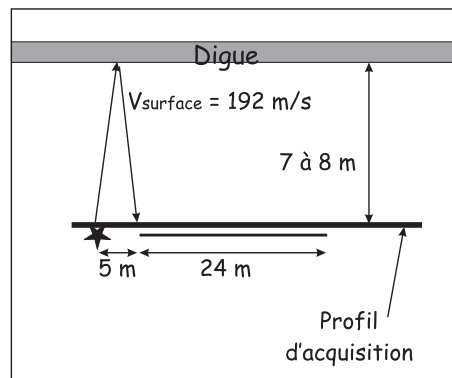


FIG. 5.9: Schéma des vitesses et des distances pour le calcul des temps d'arrivée de l'onde tardive

premier récepteur (figure 5.8).

Regardons maintenant l'évolution de cette onde avec le déport. Supposons que la vitesse des ondes de surface est constante égale à 192m/s et que la distance entre la digue et le profil est de 7.5m . Dans ce cas, l'équation du temps d'arrivée t de l'onde est en fonction du déport x :

$$t = \frac{1}{192} \sqrt{7.5^2 + \frac{x^2}{2}} \quad (5.1)$$

La figure 5.8 montre l'allure de cette courbe en fonction de la distance à la source. Pour une digue située à 7.5m de distance latérale, le temps d'arrivée de l'onde tardive ne correspond pas à celui observé sur les sismogrammes. En revanche, si la digue se trouve à une distance de 10m , les temps d'arrivée correspondent mieux pour les grands déports mais sont trop grands pour les courts déports.

Pour expliquer l'onde tardive comme une réfléchie latérale, il faut modifier certains paramètres : ne pas considérer une vitesse de propagation des ondes constante (par la présence d'un milieu hétérogène latéralement, comme une zone à faible vitesse verticale parallèle à la digue) ou bien considérer une digue légèrement oblique par rapport au profil. Cette dernière hypothèse est peu compatible avec les données puisque le temps d'arrivée de cette onde basse fréquence est relativement constant sur tous les profils sismiques.

La réflexion latérale permettrait d'expliquer l'énergie importante présente sur les sismogrammes au niveau de la diffraction des ondes sur la cavité maçonnée. En effet, lorsque les profils sismiques sont acquis au-dessus de la cavité, l'onde réfléchie est captée latéralement par la conduite maçonnée, qui constitue alors un guide d'onde, et enregistrée au niveau de cette dernière avec une forte intensité.

Arguments en faveur d'une zone à faible vitesse en profondeur

Examinons maintenant l'hypothèse d'une zone de moindre vitesse en profondeur. Nous parlons en effet de zone à moindre vitesse pour expliquer l'amplitude forte des ondes tardives et leur temps d'arrivée, si éloigné de celui de l'onde de surface directe à une distance relativement faible (5m) de la source. Il peut également s'agir d'un mode supérieur, créé par un contraste de vitesse important comme une zone à moindre vitesse. Cette hypothèse implique la présence d'une zone à moindre vitesse à 7 à 10m de profondeur, puisque cette profondeur permettrait d'expliquer les temps de propagation.

Des tests numériques effectués montrent que les ondes de surface sont peu sensibles à une zone à moindre vitesse située à une profondeur dont le toit est situé à 7 ou 10m et que ce contraste ne crée pas des ondes aussi basse fréquence, aussi tardives et aussi énergétiques.

Dans certains cas, nous avons réussi à reproduire des ondes basse fréquence avec des zones à faible vitesse plus superficielles. La figure 5.8 montre un exemple d'onde tardive basse fréquence. Cette onde est créée par le choix bien particulier des contrastes de vitesses et des épaisseurs des couches. De plus, notons que cette onde apparaît dans un milieu où la limite des couches est nette, donc un milieu non lisse. Enfin, remarquons que les différentes arrivées ne correspondent pas à celles observées : le milieu est globalement plus rapide.

Il paraît donc possible de modéliser cette arrivée tardive par la présence d'une couche à moindre vitesse. Néanmoins, la figure 5.7 montre des arrivées successives tardives (plusieurs lobes) alors que les données (figures 5.2 et 5.3) n'en comportent pas. Il est possible que cette arrivée tardive basse fréquence soit due à d'autres structures qu'une zone à faible, qui piègeraient l'énergie différemment et donneraient lieu à cette onde tardive basse fréquence.

Dicussion

Nous nous sommes intéressés à l'onde tardive et nous avons mis en évidence que sa présence est plus vraisemblablement due à une zone à moindre vitesse qu'à une réflexion latérale. Néanmoins, le choix des vitesses et épaisseurs des couches permettant de la générer constitue un problème délicat.

La deuxième onde tardive (figure 5.8) semble plutôt être liée à une réflexion, latérale ou non. Son contenu fréquentiel n'est pas aussi basse fréquence que la première onde tardive. Nous ne l'étudions pas davantage car elle est présente uniquement sur les quatre premiers tirs sismiques.

5.3.4 Signature d'une couche de vitesse plus rapide

Les données sismiques ont été acquises sur le goudron (Leparoux et al., 2000) (confirmation par Adnand Bitri). Nous pouvons nous demander si la présence de cette couche à vitesse très rapide doit être modélisée dans le problème direct.

En effet, sa prise en compte ou non change la vitesse des ondes de surface. La figure 5.10 montre les sismogrammes pour des milieux dont la seule différence est la présence d'une couche de vitesse rapide, localisée juste sous la surface libre et épaisse de 20 cm. Un filtrage spatial à l'aide d'une gaussienne de longueur de corrélation 1m est ensuite appliqué pour obtenir un milieu lisse, plus réaliste. Il apparaît clairement que la présence de la zone rapide modifie la vitesse de l'onde de surface. Son introduction ou non dans le modèle initial constitue donc un point important.

Afin de prendre en compte les informations que nous avons sur le site où ont été acquises les données, nous tiendrons compte de cette couche à vitesse rapide dans la construction du macromodèle.

5.3.5 Synthèse des observations

Nous avons donc vu dans cette section que la cavité, si elle possède effectivement les dimensions et la position que nous avons supposées, a une signature visible dans les sismogrammes, majoritairement dans le champ diffracté en avant. L'énergie contenue dans le champ rétro-diffusé est beaucoup plus faible, en raison de la taille de l'anomalie par rapport à la longueur d'onde dominante. Néanmoins, nous ne savons pas exactement quelles sont les propriétés géométriques et physiques de cette anomalie et sa signature dans les données pourrait être plus importante.

Ensuite, le milieu de propagation semble complexe. Ceci implique que le macromodèle de vitesse doit être suffisamment précis pour que l'inversion des formes d'onde élastique puisse être appliquée. Afin de tenir compte de la réalité de l'acquisition, nous introduirons une zone de vitesse plus rapide juste sous la surface libre.

Nous avons enfin montré que l'arrivée tardive basse fréquence n'est probablement pas due à une réflexion latérale. Nous pouvons donc l'inclure dans les données et la considérer comme un effet à deux dimensions. Néanmoins, nous envisagerons également le cas où cette onde est absente,

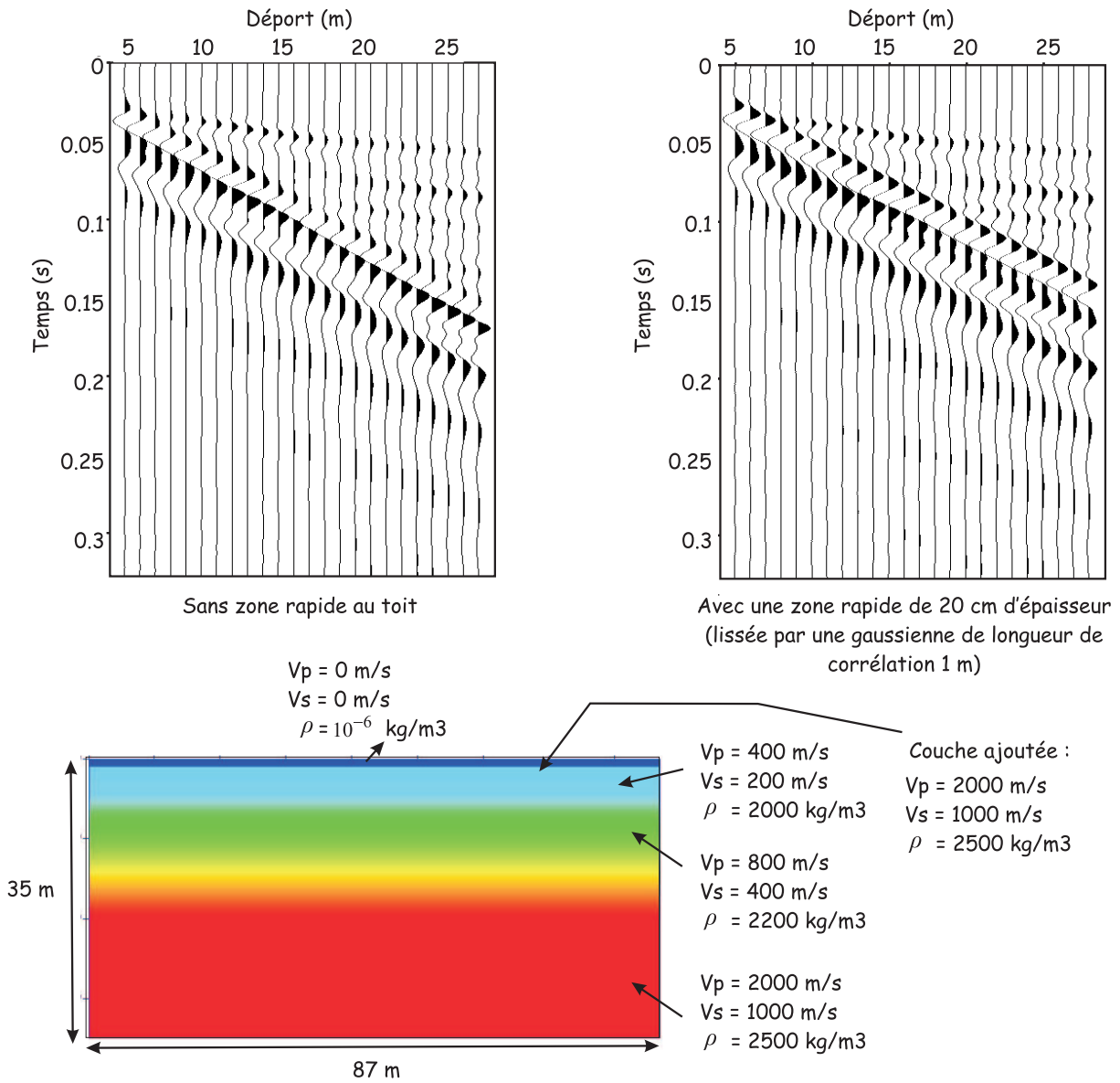


FIG. 5.10: Sismogrammes calculés avec et sans une couche de vitesse rapide juste en-dessous de la surface libre

puisque la figure 5.7 montre que la cavité modifie également la propagation des ondes de surface (champ diffracté-avant).

Ces observations permettent déjà de cerner les différentes difficultés que nous risquons de rencontrer par la suite. Avant d'appliquer l'inversion des formes d'onde élastiques aux données, nous allons essayer de déterminer un macromodèle de vitesse permettant de reproduire les principales arrivées présentes dans les données observées.

5.4 Détermination d'un macromodèle de vitesse

Nous avons tenté d'utiliser deux méthodes mentionnées dans le chapitre 3 pour obtenir le macromodèle de vitesse : la tomographie des temps de trajet et l'analyse spectrale des ondes de surface. Nous présentons ici en détail les deux méthodes et les modèles obtenus.

5.4.1 Résultats avec la tomographie des écarts de temps

La tomographie des temps permet d'obtenir une image lisse du milieu pour le paramètre V_p en étudiant les temps de premières arrivées des ondes P. Le programme utilisé dans cette partie est celui que Céline Ravaut (Ravaut, 2003) a développé pendant sa thèse avec l'aide de Stéphane Operto (chercheur CNRS au laboratoire Géosciences Azur).

Prétraitements effectués

Nous avons dans un premier temps tenté d'utiliser la tomographie des écarts de temps en pointant les temps d'arrivée des premières arrivées (ondes P nommées ondes directes 1 sur la figure 5.8) dans les sismogrammes. Sur les conseils de Stéphane Operto, nous avons effectué un blanchiment à phase minimale et un filtrage spectral passe-bande. Les codes utilisés ont été écrits par Céline Ravaut et Stéphane Operto.

Ces prétraitements permettent de rehausser l'énergie contenue dans ces ondes cohérentes, d'améliorer le rapport signal sur bruit et de prendre en compte les variations de puissance des tirs et l'atténuation. Nous utilisons les données prétraitées uniquement pour l'application de la tomographie des écarts de temps. Nous utiliserons d'autres prétraitements pour l'application de l'inversion des formes d'onde élastique.

Le blanchiment à phase minimale C'est un outil de déconvolution spectrale prédictive (Ravaut, 2003; Yilmaz, 2001; Mari et al., 1997). Son effet sur les données est de normaliser et d'aplatir le spectre d'amplitude des données (Ravaut, 2003). Cela permet de rendre le signal plus impulsionnel car un poids équivalent est donné à chaque composante fréquentielle des données. De plus, les effets d'amplitude liés à la directivité de la source et à l'atténuation intrinsèque sont pris en compte (Ravaut, 2003).

Cet outil est donc adapté pour le pointé des premières arrivées. En revanche, ce prétraitement élimine les ondes de surface. En effet, ces dernières sont dispersives et une modification de la contribution de chaque composante fréquentielle n'entraîne plus d'interférences constructives. De plus, dans l'étude de la détection de cavité souterraines, nous cherchons justement à prendre en compte les effets d'atténuation, indiquant la présence d'une anomalie. Nous n'utiliserons donc pas ce prétraitement pour l'application de l'inversion des formes d'onde élastique, nous l'utilisons uniquement pour effectuer la tomographie des écarts de temps des premières arrivées.

Le blanchiment à phase minimale permet cependant de construire une ondelette temporelle dont les données sont ensuite déconvoluées. Cela permet de mettre en valeur les principales ondes

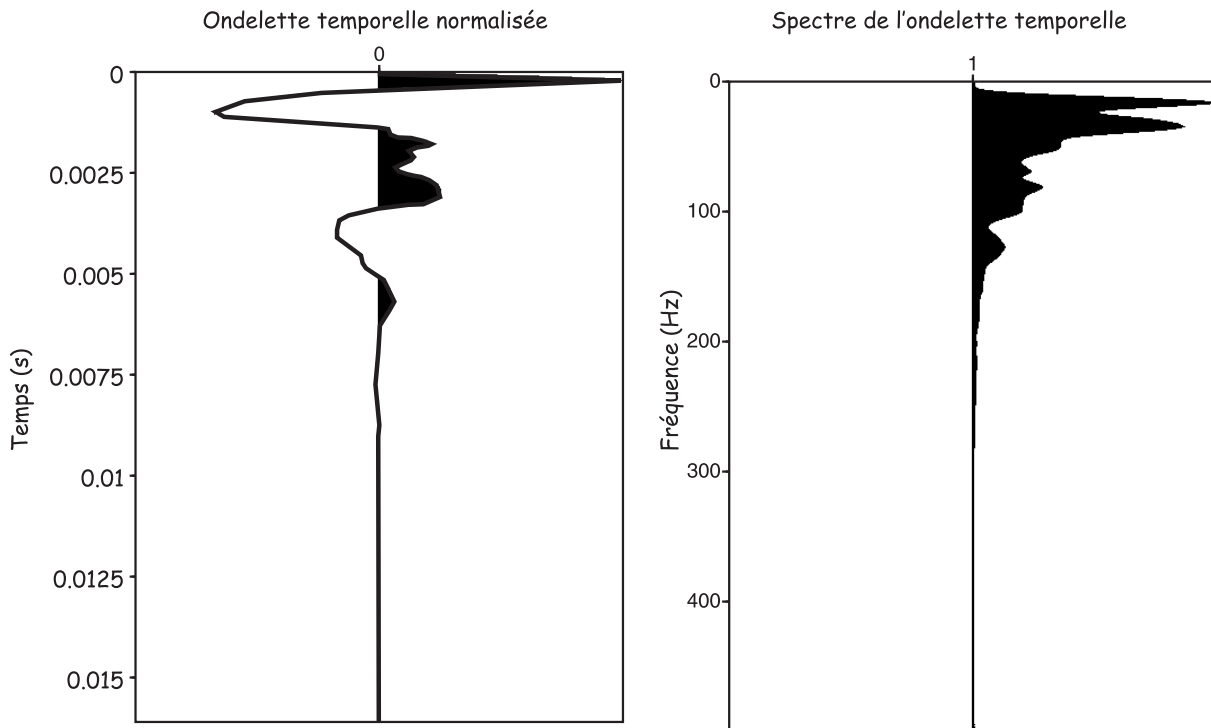


FIG. 5.11: Source temporelle calculée à partir du blanchiment des données et contenu fréquentiel associé

dans le sismogramme. Nous utiliserons cette ondelette comme source tout au long de cette étude. La figure 5.11 montre l'ondelette temporelle et son contenu fréquentiel.

Filtrage fréquentiel Nous avons vu sur la figure 5.5 que les données ont un contenu fréquentiel significatif entre 10 et 100 Hz. Afin de limiter la présence des ondes de surface basse fréquence dans cette étude des ondes de volume, nous avons appliqué un filtre passe-bande et conservé l'énergie comprise entre 30 et 100 Hz.

Allure des sismogrammes après prétraitement des données La figure 5.12 montre le sismogramme n°1 (tir brut : figure 5.2) lorsque les deux prétraitements précédents ont été appliqués. Les ondes de surface sont effectivement tuées. Les ondes de volume cohérentes sont préservées, le rapport signal sur bruit est amélioré.

Différents modèles initiaux testés

Nous avons pointé les temps des premières arrivées sur les sismogrammes précédents et nous les avons inversé à l'aide de la tomographie des écarts de temps des premières arrivées développée par Ravaut (2003) et avec l'aide de Stéphane Operto. Nous avons créé plusieurs modèles différents à une dimension sans surface libre, ayant tous une structure de gradient, donc une évolution progressive des vitesses en profondeur. Le pas d'échantillonnage spatial est de 1 m, la taille du modèle inversé est de 20 m * 100 m. Chaque modèle est défini par la vitesse à la surface libre V_{sup} (non modélisée) et la vitesse à 20 m de profondeur V_{inf} . Tout d'abord, 36 modèles ont été générés, en prenant toutes les combinaisons possibles des vitesses V_{sup} et V_{inf} suivantes : $V_{sup} = 1000 \text{ m/s}, 1100 \text{ m/s}, 1200 \text{ m/s}, 1300 \text{ m/s}, 1400 \text{ m/s}, 1500 \text{ m/s}$ et $V_{inf} = 2000 \text{ m/s}, 2100 \text{ m/s}, 2200 \text{ m/s}, 2300 \text{ m/s}, 2400 \text{ m/s}, 2500 \text{ m/s}$. Peu de rais se propageaient dans ces milieux. Nous avons ensuite créé des milieux aux vitesses plus lentes, résultant de toutes les combinaisons possibles de V_{sup} et V_{inf} suivantes : $V_{sup} = 400 \text{ m/s}, 500 \text{ m/s}, 600 \text{ m/s}$ et $V_{inf} =$

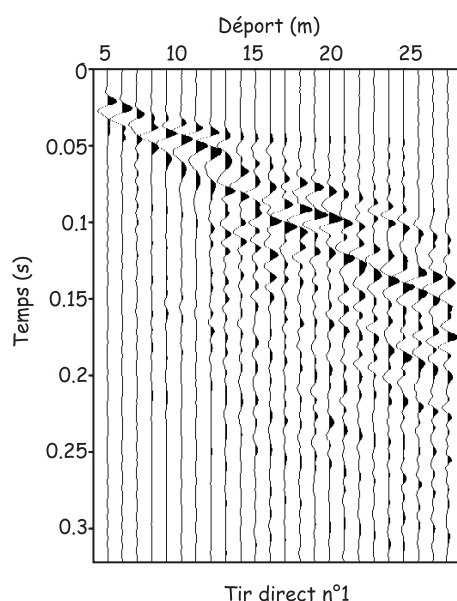


FIG. 5.12: Sismogramme du tir direct n°1 après prétraitement. Les ondes de surface ont été éliminées.

1800 m/s , 1900 m/s , 2000 m/s . Afin de tester les milieux aux vitesses intermédiaires, nous avons testé les modèles : $V_{sup} = 600 m/s$, 800 m/s , 1000 m/s et $V_{inf} = 2000 m/s$, 2200 m/s , 2500 m/s .

Le modèle initial permettant d'obtenir la plus petite fonction coût est présenté sur la figure 5.13, où se trouve également la couverture du milieu par les rais. Cette dernière est similaire à celles des autres meilleurs modèles. Le modèle final en V_p , à une dimension et issu de la tomographie est présenté sur la figure 5.13. Les modèles obtenus à l'aide d'un modèle initial différent contiennent le même type d'anomalie.

Résultats de la tomographie

La forme des anomalies apparaissant dans le modèle issu de la tomographie est peu réaliste : toutes les perturbations de vitesse sont localisées à la même profondeur, des artefacts apparaissent sur les côtés (dus à la couverture limitée en rais sur les bords du modèle) et les vitesses ne sont pas modifiées en-dessous de cette zone, alors que le milieu devrait y être plus rapide. En effet, ce modèle ne donne pas d'information à une profondeur supérieure à 7m puisque les rais sont piégés dans la zone de vitesse rapide. De plus, l'interruption de la zone de vitesse rapide est vraisemblablement liée à la couverture en rais du milieu puisque le dispositif n'est pas symétrique.

Afin d'estimer la pertinence de ce milieu par rapport aux données, nous avons introduit une surface libre. En effet, nous utiliserons les ondes de surface dans l'inversion. Nous devons donc évaluer la pertinence de ce modèle par rapport aux données brutes. De plus, nous avons prolongé latéralement et en profondeur la zone de vitesse rapide, qui est alors considérée comme le toit d'une couche plus rapide.

Afin de vérifier que ce modèle ajuste effectivement les temps des premières arrivées, nous avons effectué un problème direct dans ce modèle. Pour cela nous avons considéré que le coefficient V_p/V_s était constant dans tout le modèle et égal à 1.75 ou 2. La première valeur correspond à la valeur commune de V_p/V_s dans les milieux secs. La deuxième valeur prend en compte le fait que le milieu peut contenir de l'eau, ralentissant la propagation des ondes S (Stekl, 1997). De plus, nous avons considéré des variations de la masse volumique linéaires par rapport à la vitesse des ondes P.

La figure 5.14 montre le modèle final construit et le sismogramme synthétique associé, calculé avec un rapport V_p/V_s égal à 2. Les temps des premières arrivées sont effectivement bien reproduits. La tomographie des écarts de temps des premières arrivées permet donc de créer un modèle de

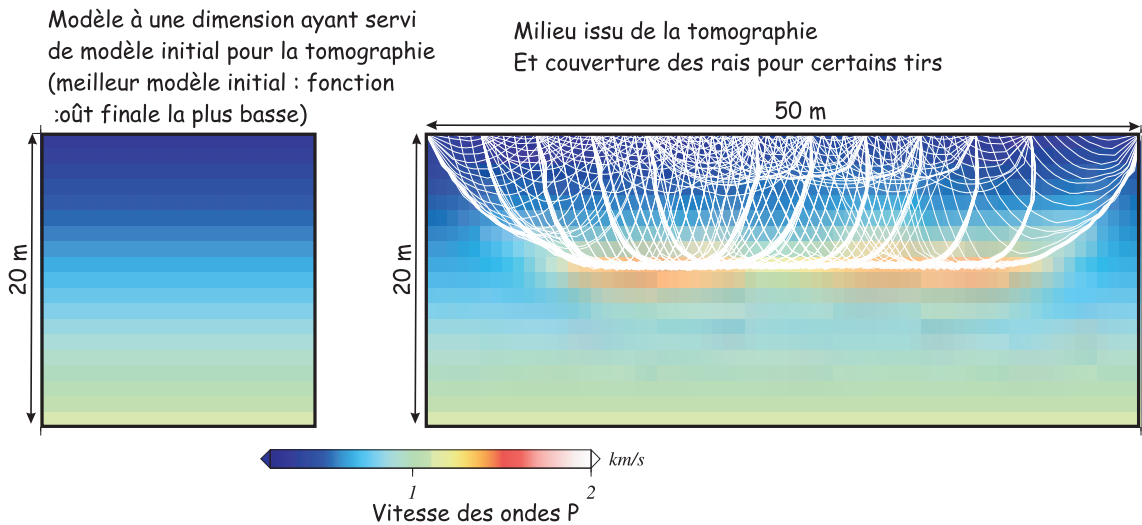


FIG. 5.13: Meilleur modèle initial pour la tomographie des temps et couverture du milieu par les rais. Le milieu en V_p est peu réaliste car des anomalies rapides se trouvent au milieu d'une zone de vitesse plus lente. En réalité, aucune information n'est apportée par la tomographie des écarts de temps en-dessous de 7 m de profondeur.

vitesse expliquant les temps d'arrivée observés. Nous n'avons pas introduit de zone de vitesse plus rapide correspondant à la zone de goudron, puisque la figure 5.10 montre que les temps de propagation des premières arrivées sont peu affectés par la présence de la zone à moindre vitesse. En effet, la première arrivée se propage en profondeur (comme le montrent les trajets des rais de la figure 5.13). La partie du rai appartenant à la zone de vitesse plus rapide juste sous la surface libre est donc petite par rapport à la totalité du rai. De plus, comme cette couche est à vitesse rapide, le temps de propagation de l'onde y est petit par rapport à la totalité du temps de propagation. La présence ou non de cette zone a donc une influence mineure sur la propagation des temps des premières arrivées. C'est pourquoi nous ne l'incluons pas dans le modèle de vitesse.

Regardons maintenant si les sismogrammes calculés dans le milieu obtenu avec la tomographie des écarts de temps des premières arrivées permet de reproduire également d'un point de vue cinématique les ondes de surface présentes dans les sismogrammes. La comparaison des figures 5.2, 5.3 et 5.14 montre que l'allure des sismogrammes calculés dans le milieu issu de la tomographie des écarts de temps ne correspond pas à celle des données. De plus, certaines arrivées importantes manquent ou ne sont pas ajustées à moins d'une demi-longueur d'onde. Nous ne pouvons donc pas considérer ce modèle comme un modèle de vitesse initial pertinent pour l'inversion des formes d'onde élastiques.

De plus, ce modèle ne donne pas d'information à une profondeur supérieure à 7 m puisque les rais sont piégés dans la zone de vitesse rapide. Or nous avons besoin de connaître la structure du modèle de vitesse à une profondeur plus importante que la profondeur maximum de réfraction des ondes de volume (Gilles Grandjean, communication orale). En effet, pour une gamme de dépôts donnée, les ondes de surface sont affectées par des structures plus profondes que celles qui réfractent les ondes de volume.

5.4.2 Résultats avec l'analyse spectrale des ondes de surface

L'analyse spectrale des ondes de surface est généralement utilisée pour construire un modèle à une dimension du paramètre V_s . Cette méthode est basée sur l'inversion des courbes de dispersion des ondes de surface (voir la section 3.2.6).

Gilles Grandjean (chercheur BRGM) a pointé les courbes de dispersion du premier tir pour le

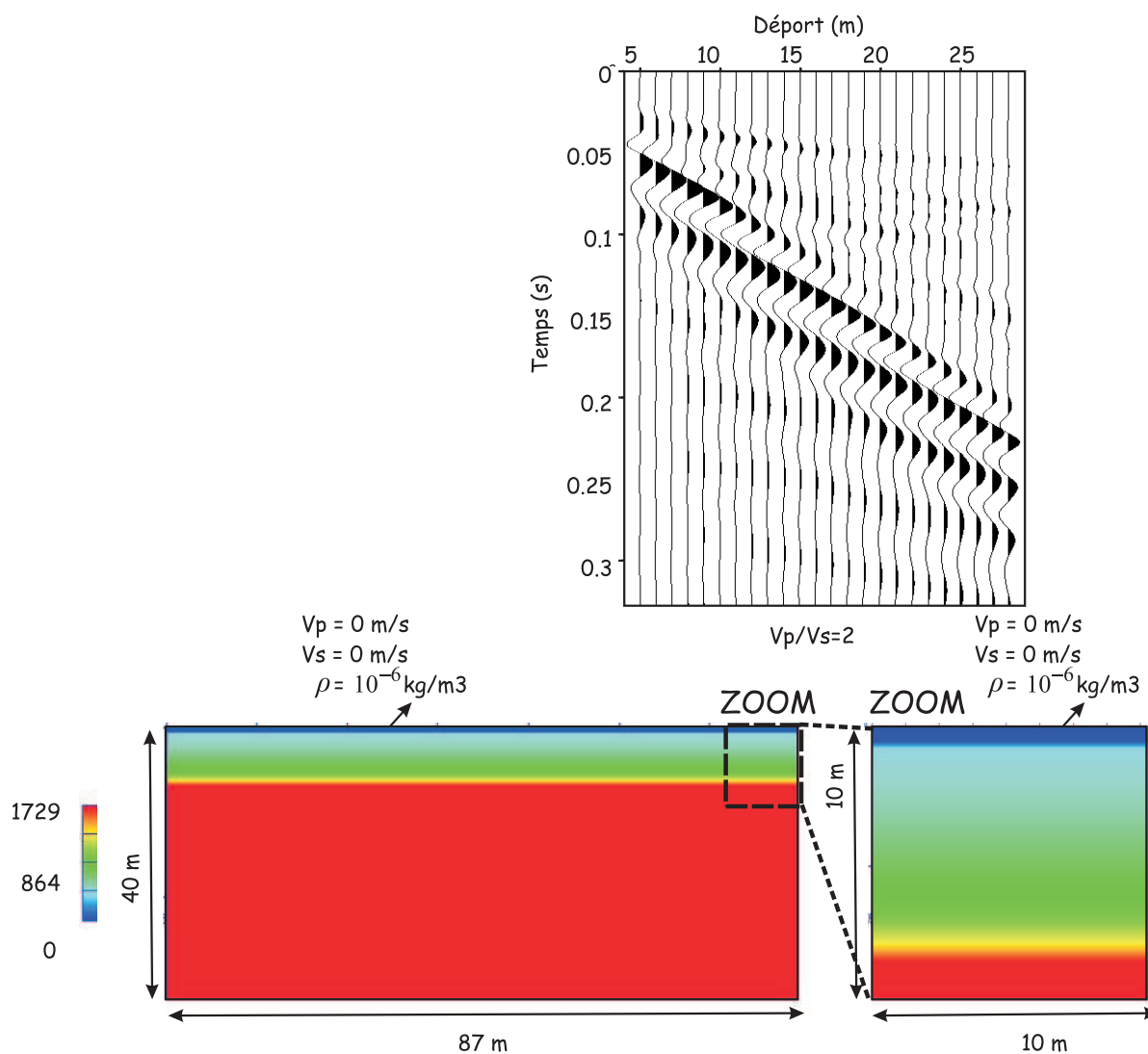


FIG. 5.14: Meilleur modèle issu de la tomographie des temps et sismogrammes calculés pour deux valeurs du ratio V_p/V_s différentes. Les sismogrammes correspondent au tir direct n° 15 (source à 19 m de la source du premier tir). Le milieu en V_p est peu réaliste car des anomalies rapides se trouvent au milieu d'une zone de vitesse plus lente. En réalité, aucune information n'est apportée par la tomographie des écarts de temps en-dessous de 7 m de profondeur.

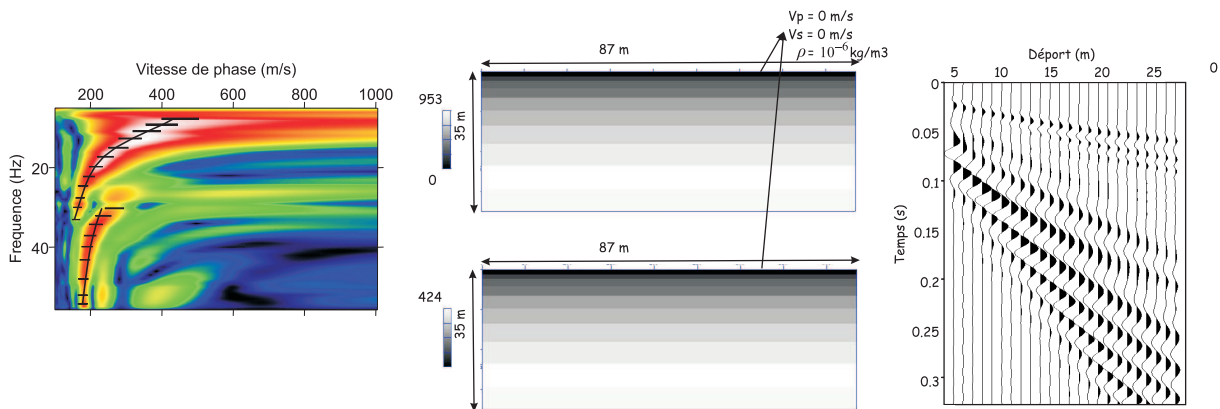


FIG. 5.15: Exemple de calcul d'un profil en une dimension de V_s : calcul et pointé du diagramme de dispersion (à gauche), obtention d'un modèle de vitesse à une dimension en V_p et V_s (au milieu) et calcul du sismogramme associé (à droite). Le diagramme de dispersion, son pointé et le calcul du modèle à une dimension ont été effectués par Gilles Grandjean.

mode fondamental et le mode supérieur (figure 5.15) et calculé un modèle à une dimension de la vitesse des ondes de cisaillement. La vitesse des ondes P est déduite de celle des ondes S par un coefficient constant. Les modèles obtenus sont présentés sur la figure 5.15. La masse volumique est homogène égale à 4000 kg/m^3 . La vitesse des ondes de surface est globalement bien reproduite, malgré l'apparition de plusieurs arrivées.

Adnand Bitri a pointé les courbes de dispersion du mode fondamental (figure 5.4) et appliqué la SASW pour chaque tir. La vitesse des ondes P et la masse volumique sont déduites par un coefficient constant pour chaque tir. Adnand Bitri a ainsi construit un modèle stratifié pour chaque tir. Le profil à une dimension obtenu pour chaque tir sismique est localisé à l'aplomb du récepteur situé au milieu du tir sismique. Les différents modèles sont ensuite juxtaposés et interpolés pour construire des modèles en deux dimensions. Afin d'atténuer les contrastes de vitesse entre tirs et de modéliser les hétérogénéités latérales lisses, nous avons choisi d'effectuer un lissage spatial avec une Gaussienne de longueur de corrélation $2m$.

Les modèles obtenus en V_p et V_s sont présentés sur la figure 5.16. Notons les différences de vitesses entre les parties gauche et droite du modèle. Le modèle issu de l'inversion pour la masse volumique montre de faibles évolutions de cette dernière : elle varie entre 1.78 et $1.89 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Notons le rapport supérieur à 2 (variant entre 2.25 et 2.5) entre les vitesses des ondes P et celles des ondes S pour le milieu présenté sur la figure 5.4, compatible avec la présence d'eau dans le milieu. Pour le modèle issu de l'inversion du mode fondamental et du mode supérieur (figure 5.4), le rapport entre V_p et V_s vaut 2.6, ce qui renforce l'hypothèse d'un milieu contenant de l'eau.

La figure 5.16 montre également le sismogramme obtenu pour le tir sismique direct n°24 et le tir sismique inverse n°26. Dans ce cas, la cinématique des ondes de surface est globalement bien reproduite. Cependant, les différentes ondes présentes dans les données réelles, en particulier les ondes de volume diffractées, ne sont pas toutes modélisées.

La SASW est une méthode permettant de reproduire les ondes de surface. Néanmoins, les modèles obtenus varient beaucoup en fonction du nombre de couches choisi pour l'inversion et de la possibilité ou non de construire des zones à moindre vitesse.

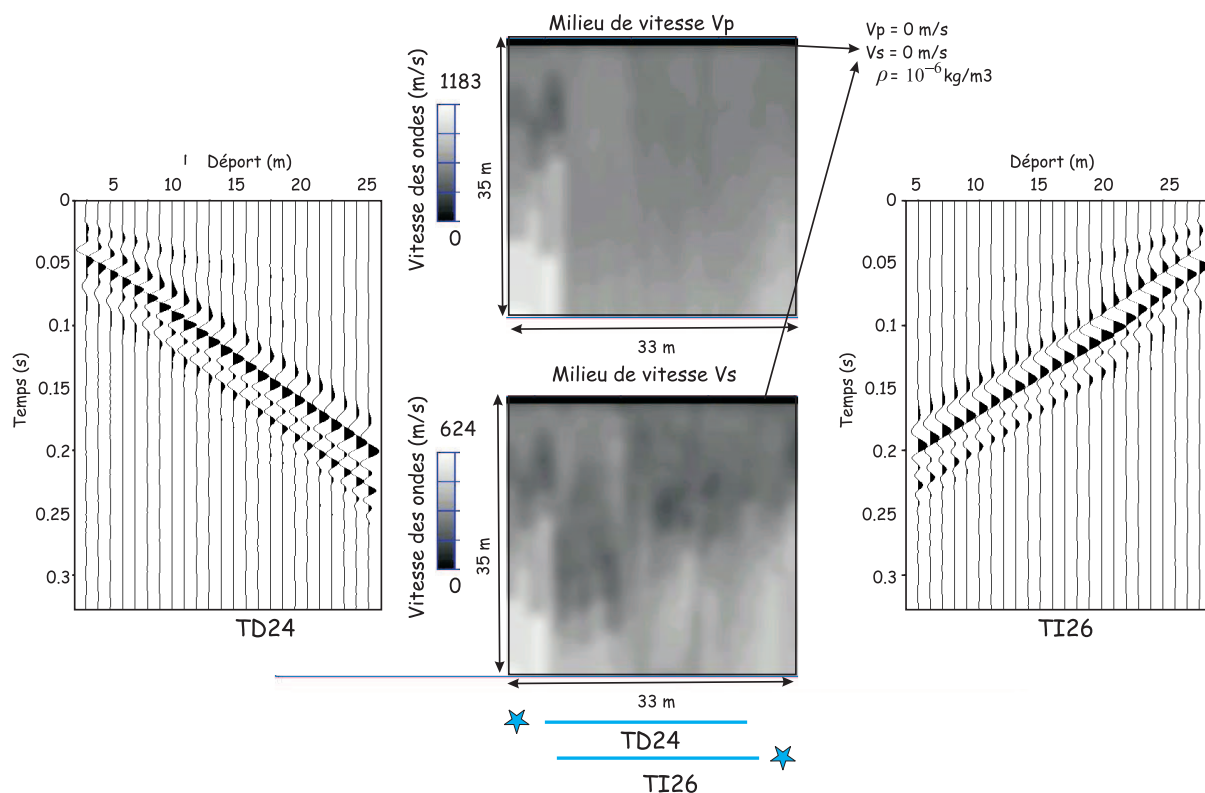


FIG. 5.16: Modèles de V_p et V_s issus de l'analyse de dispersion des ondes de surface et sismogramme calculé dans ce milieu. Les sismogrammes correspondent au tir direct n°24 et au tir inverse n°26. Les milieux de vitesse 2D sont obtenus par juxtaposition des milieux 1D issus de l'inversion des courbes de dispersion calculée pour chaque tir sismique par Adnan Bitri (BRGM). Lorsqu'un milieu 1D est calculé, le profil de vitesse correspondant est placé latéralement sous le récepteur localisé au milieu du tir sismique. Les milieux 1D obtenus pour les différents tirs sont ensuite juxtaposés et interpolés latéralement. Ici les milieux en V_p et V_s sont limités latéralement aux zones où un profil de vitesse 1D est reconstruit par la SASW. Ainsi, seuls 33 m sont représentés ($33\text{ m} = 87\text{ m (total)} - 2 \times (10\text{ m (PML)} - 5\text{ m (déport minimal)} - 12\text{ m (milieu du profil)})$)

5.4.3 Bilan : pertinence des modèles obtenus

Nous avons donc utilisé la tomographie des écarts de temps pour construire un modèle en V_p et la SASW pour construire un modèle en V_s . Nous avons vu que la tomographie des temps ne permet pas d'imager le milieu à plus de $7m$ de profondeur en raison de l'ouverture limitée du dispositif d'acquisition. En revanche, les ondes de surface sont sensibles aux vitesses des ondes S à des profondeurs plus importantes. Nous devons donc construire un milieu donnant des informations sur V_p et V_s aux mêmes profondeurs.

Les milieux obtenus avec la SASW permettent globalement de bien reproduire l'onde de surface mais les autres ondes sont absentes. Or nous devons modéliser les principales arrivées à moins d'une demi-longueur d'onde, y compris les ondes réfractées.

Pour toutes ces raisons, nous avons décidé d'utiliser une méthode essais-erreurs pour élaborer le macromodèle de vitesse en y intégrant les caractéristiques du modèle de V_p obtenu avec la tomographie des temps, celles du modèle V_s obtenu par SASW et en essayant de mieux reproduire les données observées.

5.4.4 Stratégie choisie : la méthode essais-erreurs

Déterminer à la fois la profondeur et la vitesse des couches pour reproduire un sismogramme s'avère un problème compliqué puisque ces deux paramètres influencent tous les deux les temps d'arrivée et la forme des ondes. Ainsi, une vitesse des ondes élevée dans une couche épaisse peut engendrer une cinématique équivalente à une vitesse des ondes plus faibles dans une couche plus fine.

Plus de 200 modèles ont été générés pour cette étude. Nous ne les détaillerons pas ici. Néanmoins, cette étude du problème direct nous a permis de mettre en valeur certains phénomènes, que nous exposons après avoir décrit les modèles numériques.

Présentation des modèles numériques

Dans toute cette étude, la source temporelle est celle présentée sur la figure 5.11 de la section 5.4.1. Le contenu fréquentiel est dominant pour des fréquences inférieures à $60Hz$. Le milieu est discrétisé par une grille dont la maille spatiale est carrée, de côté égal à $0.2m$. Le nombre de points verticaux est de 175, soit une taille verticale de $35m$. Horizontalement, 435 points modélisent une distance de $87m$. Le pas de temps vaut $2.10^{-5}s$. et 16384 pas de temps sont simulés. Ces paramètres ont été choisis de manière à respecter les limites de validité du stencil de Saenger et al. (2000). Les zones PML contiennent chacune 50 points et ont donc une épaisseur de $10m$. Elles permettent d'éviter les réflexions sur les bords du modèle. La source spatiale est une force verticale ponctuelle, modélisant le tir au marteau. Elle est néanmoins lissée spatialement avec une gaussienne de longueur de corrélation égale à 1 m.

Les simulations sont effectuées dans le domaine temporel, permettant de comprendre d'où viennent les ondes et comment elles se propagent. Cela permet d'ajuster au fur et à mesure les milieux initiaux, de manière à bien reproduire la cinématique.

L'inversion nous a également aidé pour la détermination d'un macromodèle de vitesse ajustant les principales arrivées. Par exemple, les modèles issus de l'inversion nous renseignent sur des phénomènes à prendre en compte, des vitesses à rectifier ou des couches à approfondir.

Seules les 3.24 premières secondes des sismogrammes réels sont simulés. En effet, au-delà de 3.24s. d'enregistrement, le signal enregistré est quasiment nul.

Enfin, nous avons multiplié les données par un coefficient en \sqrt{t} pour transformer l'atténuation géométrique sphérique en cylindrique (Zhou et al., 1997; Pica et al., 1990; Shipp & Singh, 2002). Nous avons également appliqué une convolution par $1/\sqrt{t}$ pour transformer un point source en ligne source (Pica et al., 1990). Ceci est l'équivalent temporel d'une multiplication par un facteur

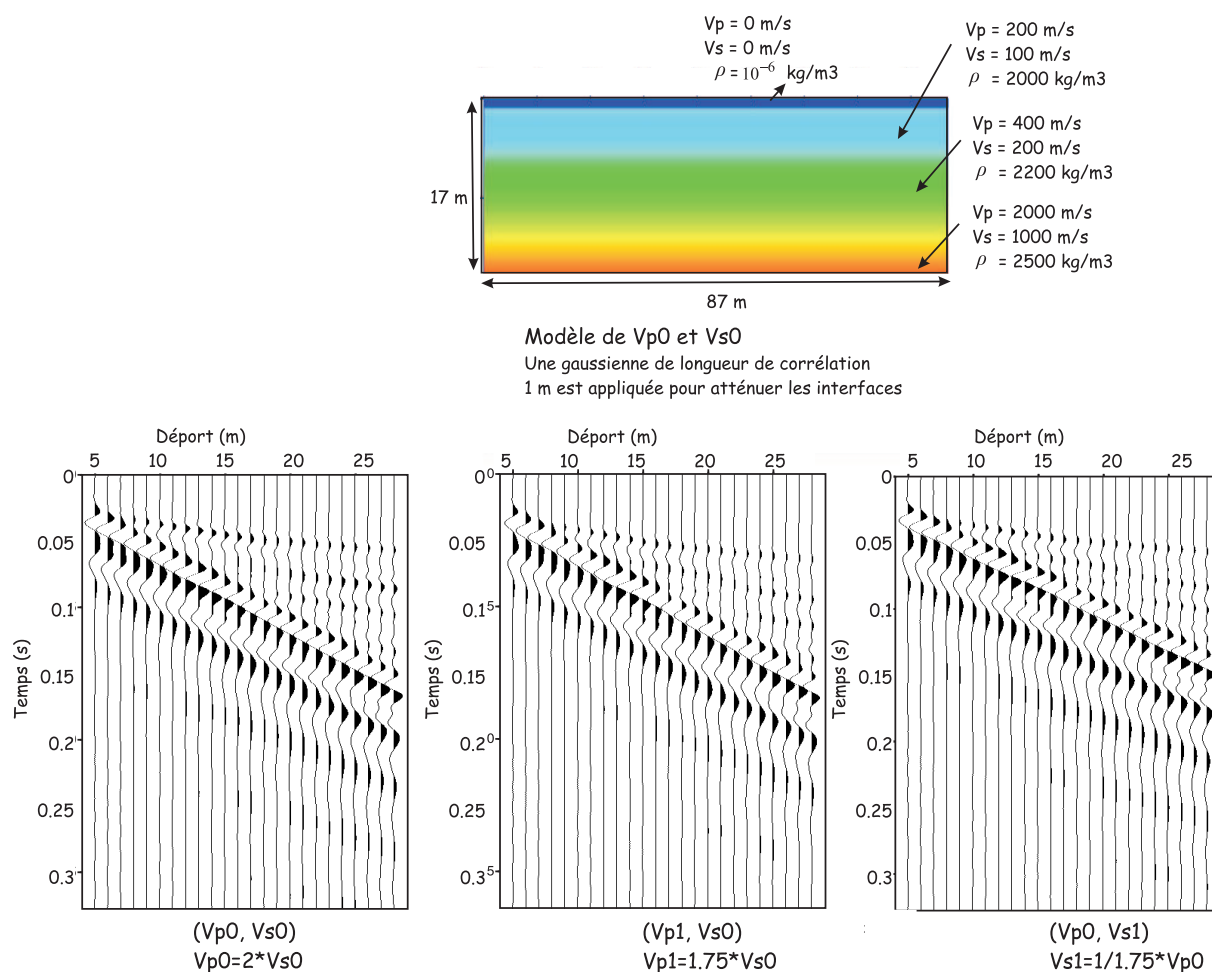


FIG. 5.17: Influences respectives de V_p et V_s sur les sismogrammes

de $\sqrt{-i/\omega}$ sur les données calculées pour transformer une ligne source infinie en deux dimensions en une source ponctuelle (Zhou et al., 1997).

Influences respectives de V_p et V_s

Bien que ces points soient déjà connus, les simulations numériques permettent également de mettre en valeur les points suivants :

- la vitesse des ondes de cisaillement contrôle la vitesse des ondes de surface
- la vitesse des ondes longitudinales a une influence moindre sur la vitesse des ondes de surface, elle influence plutôt l'amplitude et la vitesse des ondes de volume réfractées.

La figure 5.17 montre l'influence d'un changement des vitesses des ondes P ou des ondes S. Dans cet exemple, un coefficient constant est appliqué entre V_p et V_s , ce qui signifie que le rapport V_p/V_s est constant dans tout le modèle. Le rapport entre V_p et V_s est ensuite modifié. Cela permet de montrer l'influence prépondérante de V_s sur les vitesses de propagation des ondes de surface et le rôle secondaire de V_p .

Ceci permet d'ores et déjà de déterminer une stratégie pour l'inversion : les vitesses de cisaillement doivent être obligatoirement inversées. Les vitesses des ondes P peuvent l'être également, mais leur influence sur les ondes de surface, prépondérantes dans les sismogrammes, est moindre.

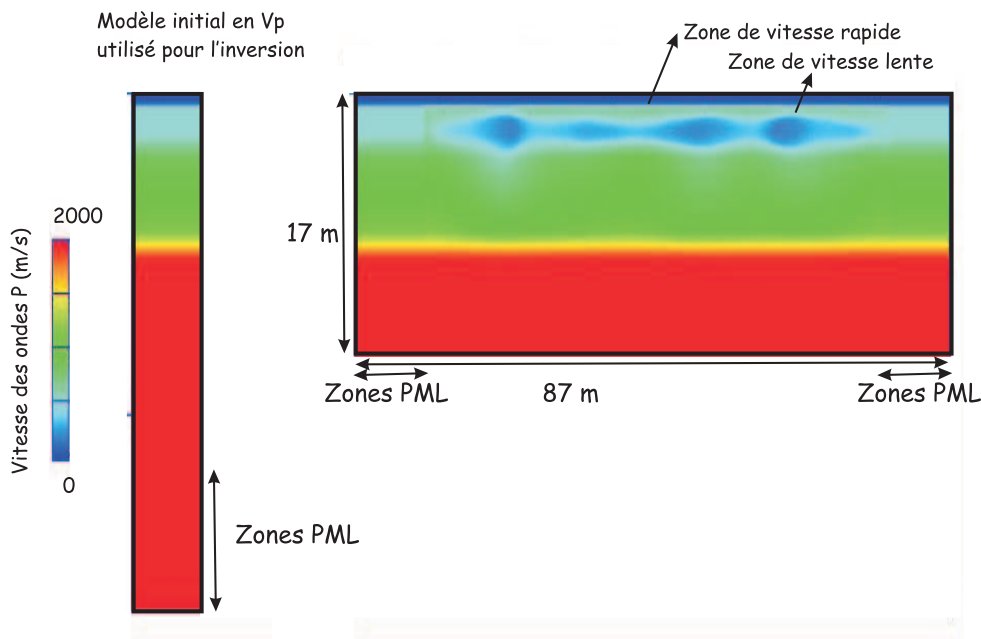


FIG. 5.18: Exemple de résultat d'une inversion pour V_p . Une couche rapide est créée juste sous la surface libre, une couche de vitesse plus lente apparaît en-dessous

Existence de la couche de vitesse rapide

Dans ce paragraphe, nous quittons momentanément la modélisation directe pour l'inversion. Nous illustrons ici le fait que l'inversion peut être considérée comme un guide pour déterminer un meilleur modèle de départ. Nous présentons un argument supplémentaire à l'introduction d'une zone à vitesse rapide juste sous la surface libre. La figure 5.18 montre le modèle de départ et les résultats d'une inversion dont nous détaillerons les principaux paramètres plus tard. Nous avons obtenu ce type de résultats de nombreuses fois, ce qui nous a conduit à introduire systématiquement une couche de vitesse rapide dans les modèles de vitesses. Elle est systématiquement accompagnée d'une zone à moindre vitesse juste en-dessous qui piège l'énergie.

Influence de l'épaisseur de la couche rapide superficielle

Nous avons cherché à tester son impact sur les sismogrammes. La figure 5.10 montre l'influence de sa présence. La figure 5.19 illustre la différence entre une couche de vitesse rapide épaisse de $0.2m$ ou de $0.4m$.

La présence de cette couche à vitesse rapide juste sous les géophones pourrait expliquer les difficultés rencontrées avec la tomographie des écarts des temps : nous avons pointé des ondes dont la propagation est modifiée par la présence de la couche de vitesse plus rapide. Ceci permettrait de comprendre pourquoi une anomalie en vitesse aussi forte apparaît.

Influence de l'épaisseur de la zone à vitesse lente sous la zone de vitesse rapide

Sous la zone de vitesse rapide, peu épaisse, se trouve une zone de vitesse plus lente, dont la vitesse des ondes de cisaillement contrôle la vitesse de propagation des ondes de surface. Son épaisseur et sa profondeur conditionne les temps d'arrivée des ondes réfléchies. Elle détermine également la forme de l'onde de surface et le décalage entre les deux arches de l'onde de surface. Si la couche est trop profonde, l'onde de surface est piégée mais elle arrive trop tard pour reproduire correctement les deux arches de l'onde de surface observées sur les données. La figure 5.20 montre comment une

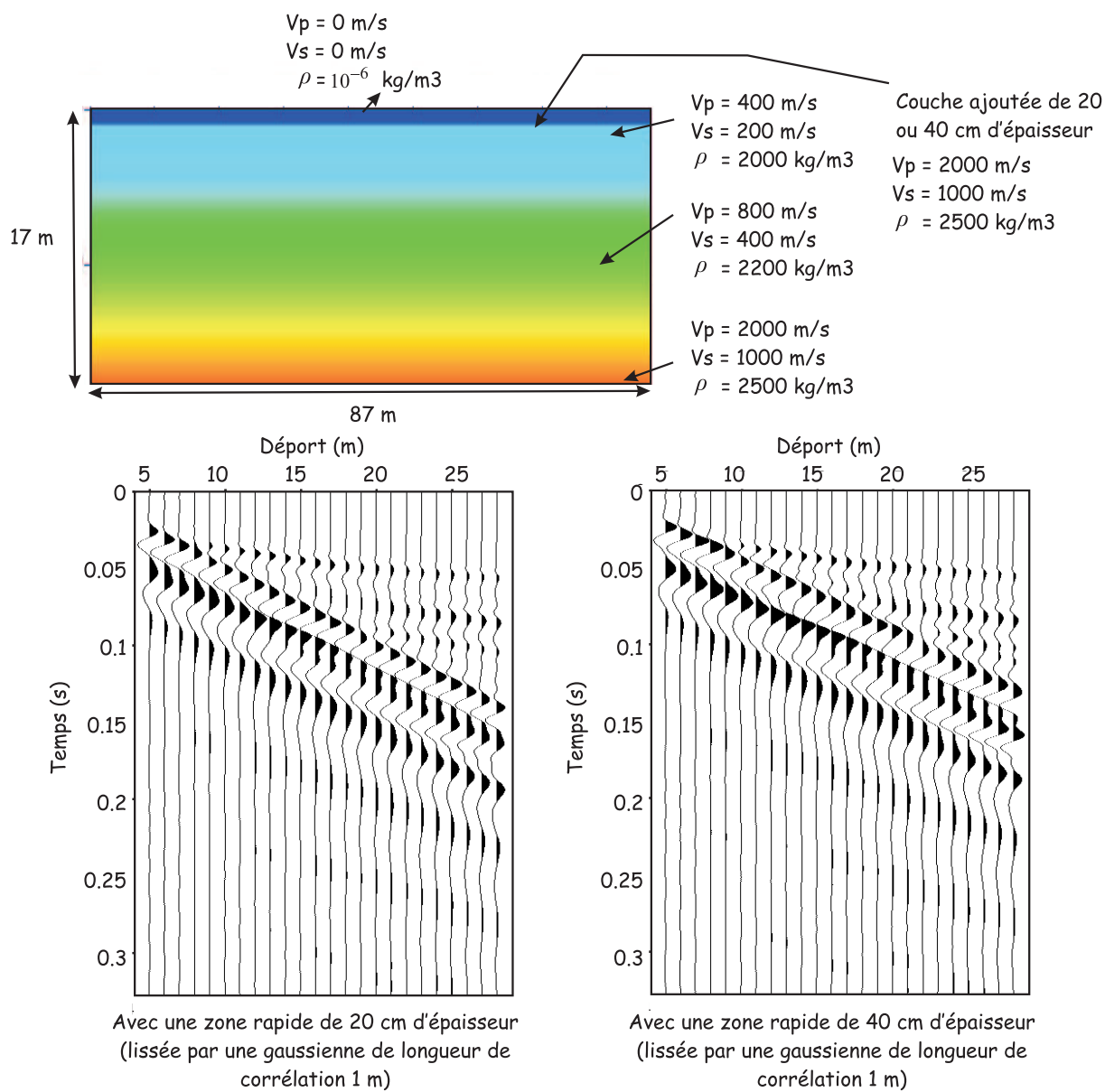


FIG. 5.19: Sismogrammes calculés pour une épaisseur variable de la zone de vitesse rapide

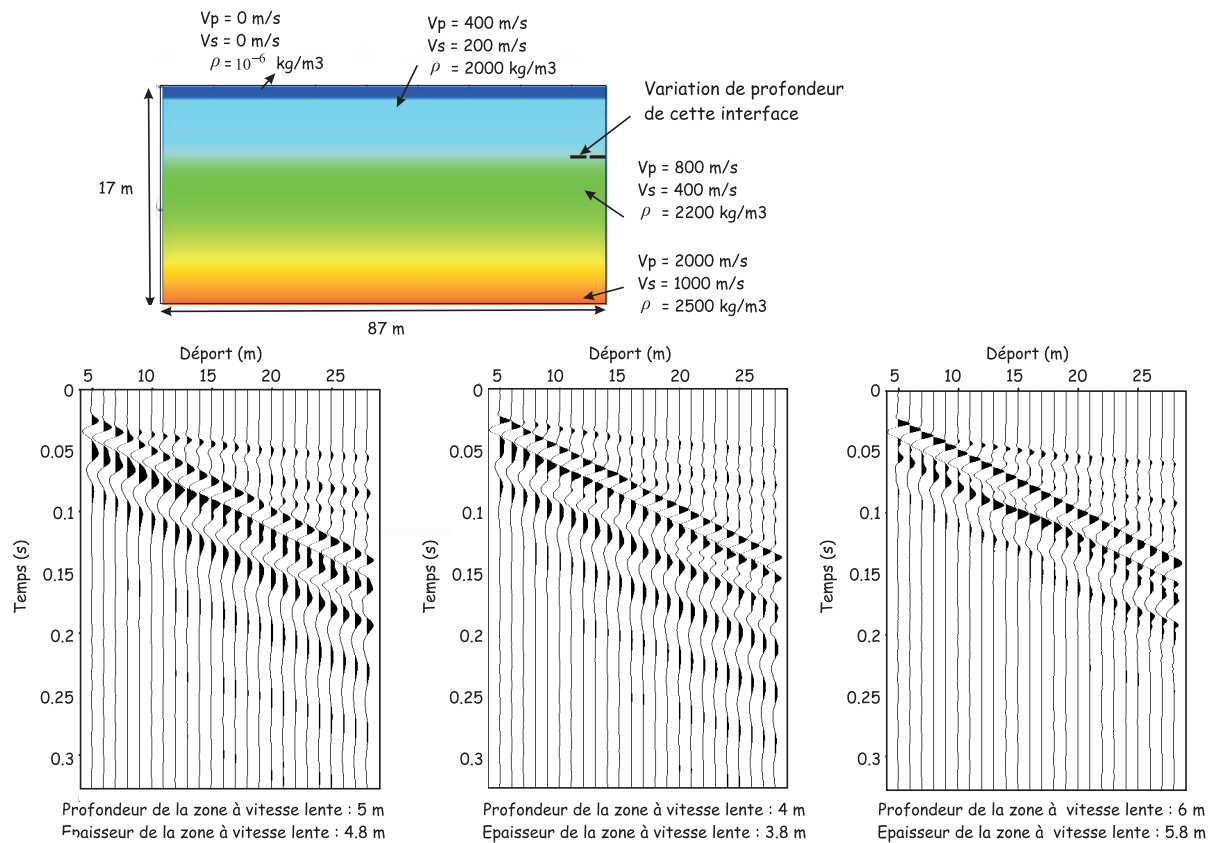


FIG. 5.20: Sismogrammes calculés pour une épaisseur variable de la zone à moindre vitesse

profondeur de 4m permet de bien reproduire l'onde de surface, alors que des profondeurs de 5 et 6m produisent des décalages temporels.

Notons que l'apparition d'onde basse fréquence se produit lorsque la zone à vitesse lente est moins épaisse et donc la base de la couche plus superficielle.

L'existence de cette couche peut expliquer pourquoi l'analyse spectrale des ondes de surface n'a pas permis de déterminer un macromodèle pertinent.

Influence du lissage spatial

Nous avons mentionné à plusieurs reprises le fait que nous lissions les modèles avec une gaussienne. Le but de ce lissage est d'essayer de trouver un compromis entre, d'une part, la modélisation de réfléchies ou de réfractées dans les sismogrammes, dues à des contrastes importants de vitesse, et d'autre part, la nécessité de commencer l'inversion avec un milieu relativement lisse (Pratt et al., 1998; Ravaut, 2003; Sirgue, 2003), de manière à permettre à l'algorithme de ne pas devoir reproduire certaines arrivées qui pourraient être expliquées cinématiquement par d'autres structures.

C'est pourquoi nous avons la plupart du temps construit les modèles grâce à des milieux à couches, lissés ensuite par une gaussienne dont les longueurs de corrélation horizontale et verticale valent 1m. La figure 5.21 illustre l'influence de ce lissage : les amplitudes des réfractées et réfléchies sont moindres et la cinématique est légèrement changée. Ce phénomène est d'autant plus prononcé qu'une zone à moindre vitesse est présente dans le modèle. Un lissage plus important, de 2m, change davantage la cinématique.

Notons le comportement des ondes tardives basse fréquence, réfléchies dans la zone à moindre vitesse. Lorsque le lissage spatial est faible, les ondes sont piégées et les contrastes de vitesse sont

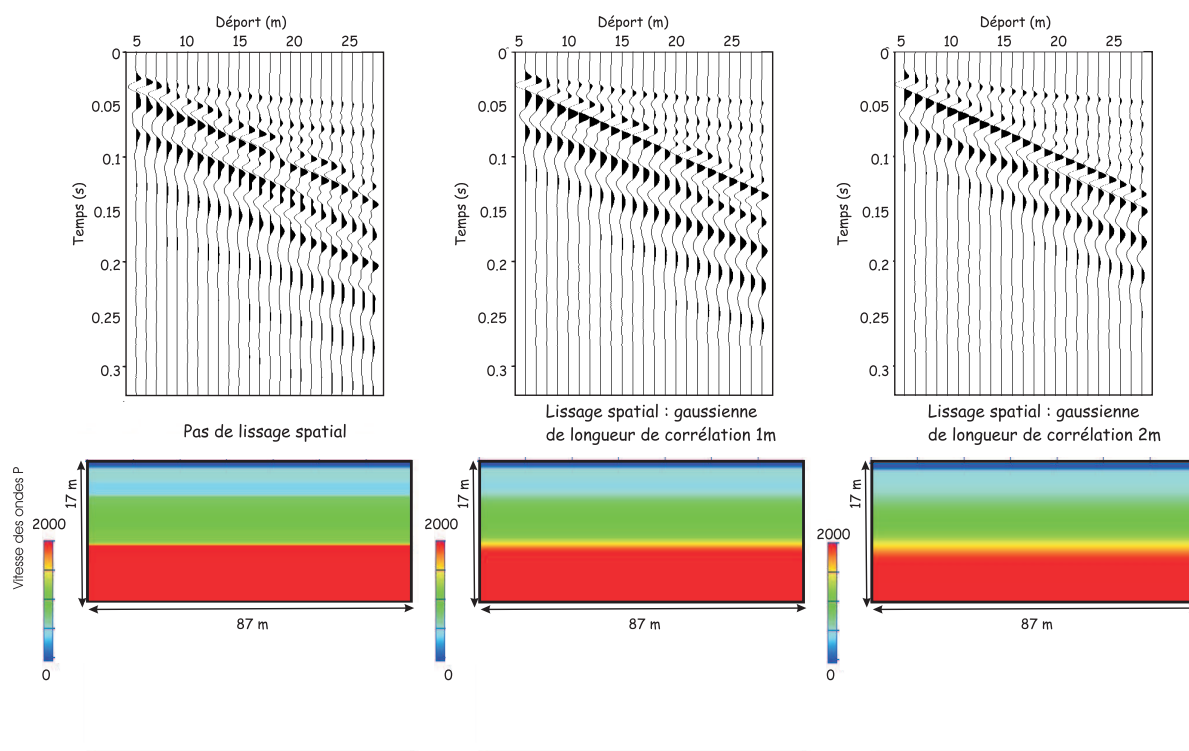


FIG. 5.21: Sismogrammes calculés pour des lissages spatiaux différents. Notons l'influence du lissage spatial sur l'arrivée tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence est préférentiellement générée pour les contrastes de vitesse les moins lisses.

importants, générant de nombreuses ondes. Lorsque la longueur de corrélation de la gaussienne augmente, les contrastes s'atténuent, l'énergie réfléchiée et piégée par les ondes diminue et les ondes tardives basse fréquence deviennent moins importantes.

Ceci révèle dans notre cas un contraste de vitesse très important et très brutal si une zone à faible vitesse existe, pour générer des arrivées tardives aussi énergétiques et basse fréquence que celle observées sur la figure 5.8.

Modèle initial choisi

Après construction de 200 modèles de vitesses des ondes P, S et de la masse volumique, nous avons choisi le modèle présenté sur la figure 5.22, contenant des couches homogènes et des couches à gradient. Dans ce modèle, vitesses des couches et épaisseurs sont des paramètres qui ont été modifiés et testés numériquement afin d'ajuster au mieux les sismogrammes. Les différentes observations présentées plus haut ont guidé ce choix.

Ce modèle est lissé par une gaussienne de longueur de corrélation égale à $1m$. En réalité la couche superficielle est plus complexe qu'elle n'apparaît sur la figure 5.22 en raison du lissage spatial. Nous avons en fait introduit une zone de vitesse rapide ($V_p = 1000m/s$ et $V_s = 500m/s$) au toit de la couche de 0 à $0.2m$. Puis nous avons défini une couche de vitesse lente ($V_p = 200m/s$ et $V_s = 100m/s$) entre $0.2m$ et $0.6m$ de profondeur. En effet, nous avons vu au cours de l'étude précédent que ce type de zone à moindre vitesse permet de piéger les ondes. Cette complexité en proche surface peut s'expliquer par la présence d'une zone de vitesse rapide (goudron ou zone compactée) surmontant une couche à faible vitesse composée d'un milieu décompacté. Ensuite, à $0.6m$ de profondeur, commence effectivement la couche homogène dont les vitesses sont $V_p = 400m/s$ et $V_s = 200m/s$. Les vitesses des ondes, la profondeur et l'épaisseur de cette couche permettent de

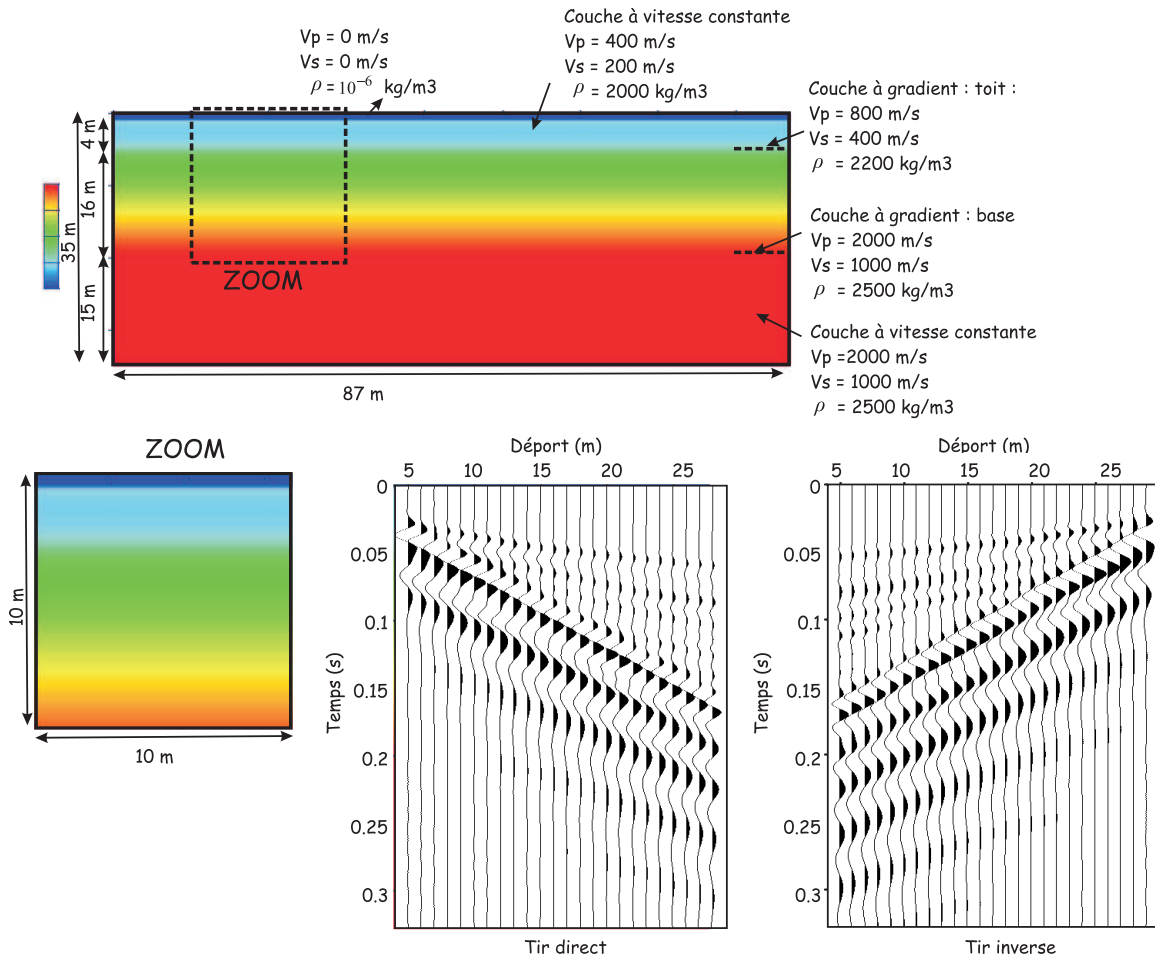


FIG. 5.22: Modèle construit reproduisant le mieux les observées parmi les 200 modèles créés

reproduire correctement les ondes de surface. La présence de la couche à gradient de 4m à 20m de profondeur permet de respecter la cinématique des ondes mais ne joue pas un rôle primordial. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché à détailler davantage sa composition. Au-delà de 20m de profondeur, les vitesses de propagation et la structure du milieu ne jouent quasiment aucun rôle. Nous avons donc introduit un demi-espace homogène.

Dans ce milieu, le rapport V_p/V_s vaut 2. Il est en effet élevé et correspond à des milieux saturés en eau. Un rapport de cet ordre est également indiqué par les valeurs des vitesses obtenues avec la SASW. Stekl & Pratt (1998) utilise un rapport V_p/V_s égal à 2 pour simuler la propagation d'ondes élastiques dans un milieu proche de la surface libre. Ce rapport est susceptible de changer au cours de l'inversion. Il est néanmoins considéré comme constant au début.

La complexité de ce milieu en surface est nécessaire pour reproduire convenablement les principales arrivées des sismogrammes observés à moins d'une demi-longueur d'onde (figure 5.22) : les principales ondes sont présentes et le contenu énergétique des ondes est retrouvé.

Notons cependant que nous ne sommes pas parvenu à reproduire correctement l'arrivée basse fréquence tardive malgré une complexification de la zone située juste sous la surface libre et à la présence de zones à faible vitesse.

Ce modèle correspond au meilleur modèle initial obtenu par la méthode essai-erreur. La détermi-

nation de ce modèle de manière précise est cruciale pour le succès de l'inversion. Avant d'appliquer la méthode d'inversion des formes d'onde élastique, nous présentons les prétraitements effectués.

5.5 Application de l'inversion des formes d'onde élastique aux données réelles

Appliquons maintenant l'inversion des formes d'onde aux données réelles, en utilisant comme modèle initial le modèle calculé dans la section précédente 5.4.4. Avant d'appliquer l'inversion aux données réelles, il est nécessaire de prétraiter les données afin de prendre en compte certains phénomènes.

5.5.1 Prétraitements appliqués aux données pour l'application des formes d'onde élastique

Comme nous l'avons précédemment expliqué, nous n'avons pas appliqué aux données de blanchiment à phase minimale pour l'inversion des formes d'onde élastique. En effet, nous souhaitons modéliser les ondes de surface et ce prétraitement les élimine.

Nous n'appliquons pas non plus de filtre passe-bande fréquentiel. En effet, avec l'inversion des formes d'onde élastique, les ondes sont étudiées en fréquence et non pas pointées en temps comme pour la tomographie. Appliquer un filtre passe-bande en fréquence n'a pas d'intérêt si les ondes sont étudiées pour des fréquences comprises entre les bornes inférieure et supérieure du filtre.

La pondération des données avec le temps ou l'élimination de certaines ondes concerne principalement l'onde basse fréquence tardive. En effet, toutes les autres ondes sont modélisées par l'algorithme, que ce soit des ondes de volume ou de surface. L'élimination de certaines d'entre elles, comme les ondes de surface, entraîne une contradiction puisque ces ondes seront simulées dans les données calculées et absentes dans les données observées.

Concernant l'onde basse fréquence tardive non reproduite dans le modèle initial, deux approches sont possibles. Tout d'abord, nous n'avons pas réussi à l'expliquer comme une onde réfléchi latéralement (section 5.3.3). Elle doit donc contenir des informations relatives à la structure du milieu en deux dimensions. De plus, si nous éliminons cette onde ou si nous l'atténuons, nous éliminons également les ondes arrivant en même temps, contenant éventuellement des informations sur la cavité. L'espoir est que l'inversion ne tirera des informations que des parties interprétables des sismogrammes et laissera l'onde basse fréquence tardive dans les résidus si elle n'apporte pas d'information pertinente.

L'autre approche considère que cette onde pollue le signal et ne peut être expliquée par notre modélisation. Par conséquent il faut l'éliminer sur des critères de temps d'arrivée. En la supprimant, une partie des basses fréquences des sismogrammes est également évincée.

Nous avons considéré les deux approches. Nous verrons laquelle donne les résultats permettant de mieux reproduire les données.

Nous avons ensuite normalisé chaque panneau de manière à donner une importance équivalente à tous les tirs sismiques. Nous avons également appliqué un coefficient multiplicatif avec le déport pour chaque panneau, suivant l'approche de Operto et al. (2004). Ce dernier pondère les déports lointains avec un coefficient variant exponentiellement avec le déport pour augmenter le poids des déports lointains. Dans notre cas, le coefficient multiplicatif vaut d , où d est le déport ou distance à la source. Ceci permet de donner davantage de poids aux déports lointains dans les données brutes. En effet, les figures 5.2 et 5.3 montrent l'atténuation forte du signal avec le déport sur les données brutes. Dans ce cas, l'allure des sismogrammes est voisine de celle des données normalisées (figures 5.2 et 5.3).

Enfin, un gain important était appliqué aux données réelles. Afin de rendre comparables les ordres de grandeur des données réelles et des données calculées dans le domaine fréquentiel, nous

les avons normalisées.

5.5.2 Application de la méthode

Nous allons maintenant présenter la stratégie employée pour inverser les données : le ou les paramètres inversés, les modèles numériques choisis, l'influence du paramètre d'amortissement et du choix des dépôts.

Quel(s) paramètre(s) inverser ?

Nous avons vu dans la section 5.4.4 et plus particulièrement la partie 5.4.4 que le paramètre V_s joue un rôle prépondérant et contrôle la vitesse de propagation des ondes de surface. Ce paramètre doit donc être forcément inversé.

La partie 5.4.4 montre également que le paramètre V_p a une influence sur les données : une fois que V_s est trouvée, le paramètre V_p modifie les ondes réfractées et la répartition énergétique. Or, au début de l'inversion, le rapport V_p/V_s est arbitraire et constant dans tous le milieu, alors que le milieu réel peut comporter des zones où ce rapport est différent. Afin de ne pas contraindre l'algorithme à respecter un rapport V_p/V_s choisi arbitrairement et constant, nous avons décidé d'inverser V_p et V_s simultanément dans un premier temps. De plus, nous avons vu dans la partie 4.3.6 que les paramètres V_p et V_s ne sont pas reconstruits de la même manière par l'inversion. Inverser un paramètre et le relier à l'autre par un coefficient constant risque d'introduire des artefacts dans les images finales. Nous n'imposons pas de rapport V_p/V_s limite à l'inversion, de manière à juger la pertinence des modèles obtenus. D'autres auteurs ont d'abord inversé un paramètre, puis l'autre. Par exemple, Cao et al. (1990) inverse d'abord les vitesses des ondes P puis celles des ondes S.

Dans un deuxième temps, nous testerons néanmoins cette approche, comme Shipp & Singh (2002) qui effectuent un couplage des paramètres par des relations empiriques et inversent la vitesse des ondes P uniquement.

L'inversion de V_s avec des données verticales et des sources verticales n'est pas une approche classique utilisée en sismique avec des données de réflexion où les ondes de surface sont absentes car éliminées. Généralement, la vitesse des ondes P est inversée et joue un rôle de premier ordre, celle des ondes S étant inversées dans un deuxième temps ou étant déduite par un coefficient constant. Par exemple, Zhou et al. (1997) estime que V_p peut être inversée et imagée même si V_s fausse. L'image finale en S retrouve les détails de structure mais pas les grands longueurs d'onde. Tarantola (1986) explique que V_p contrôle davantage l'inversion que V_s et estime que si le modèle des vitesses S est faux, l'inversion des vitesses P peut converger.

Jin et al. (1992) étudient des données de sismique réflexion ne contenant pas d'onde réfractée et expliquent que l'inversion de données verticales ne peut renseigner à la fois sur la structure du paramètre V_p et du paramètre V_s pour des sources explosives. Selon Jin et al. (1992), seul V_p peut être reconstruit avec la composante verticale des sismogrammes. Notre situation est différente : le dispositif d'acquisition n'est pas limité à une configuration en réflexion seule, les ondes réfractées sont présentes dans les données puisque nous conservons toutes les ondes. De plus, les ondes de surface, très énergétiques dans les sismogrammes, sont très sensibles aux variations de V_s qui doit être forcément inversé.

Nous inversons donc les vitesses des ondes P et S simultanément, ou des ondes P seules et des ondes S seules, à l'aide uniquement des composantes verticales des sismogrammes. D'après Mora (1988), l'inversion de V_s est plus facile lorsque des données horizontales sont également présentes.

Inversion de la source sismique

Nous avons également implémenté l'inversion de la source sismique suivant l'approche de Pratt (1999), Ravaut (2003) et Operto et al. (2004). Certains auteurs, comme Zhou et al. (1997) et Mora (1988), ne l'inversent pas. Nous mettrons néanmoins en évidence l'importance de l'inversion de la source sismique à l'aide des tests effectués suivants.

Nous décrivons la manière dont la source sismique est inversée dans l'annexe C.

D'après Ravaut (2003), cette approche permet d'injecter un degré de liberté supplémentaire. De plus, d'après Van Vossen et al. (2005), il faudrait également inverser les récepteurs, par souci de symétrie entre sources et récepteurs.

Description des modèles numériques

Dans un premier temps, nous avons considéré que le contenu énergétique des données et de la source (figures 5.5 et 5.11) ne permettait pas d'inverser des fréquences supérieures à $60Hz$. Nous avons donc utilisé le modèle numérique défini dans la partie 5.4.4 et utilisé pour la résolution des problèmes directs.

Pour choisir les fréquences à inverser, le critère de Sirgue & Pratt (2004) est choisi et densifié ensuite par l'ajout d'une fréquence intermédiaire entre deux fréquences précédemment obtenues. Huit fréquences sont ainsi inversées : $f = 10Hz, 13Hz, 16Hz, 19Hz, 22Hz, 25Hz, 34Hz, 43Hz$.

La vitesse moyenne des ondes est déterminée par les vitesses sismiques de la couche supérieure : $V_p = 400m/s$ et $V_s = 200m/s$. La longueur d'onde P modélisée la plus petite vaut donc : $\lambda_p = V_p/f_{max} = 400/43 = 9.3m$. Nous avons vu dans la partie théorique 4.1.3 et d'après Pratt et al. (1998) et Ravaut (2003), que la résolution attendue de la méthode est d'une demi-longueur d'onde. Ainsi, des objets diffractants d'une taille de $4.6m$ peuvent être imagés. Strictement, nous ne pouvons donc pas imaginer la cavité. Néanmoins, nous pouvons déjà identifier les hétérogénéités latérales dans le milieu, comme les zones à moindre vitesse.

Dans un deuxième temps, nous avons complété cette approche par l'inversion de deux fréquences supplémentaires plus élevées : $f = 103Hz, 166Hz$. Nous avons néanmoins conscience qu'à ces fréquences, le contenu énergétique des données est beaucoup plus faible (figure 5.5). Dans ce cas, nous avons dû raffiner le maillage pour satisfaire la condition de 25 à 30 points par longueur d'onde avec les différences finies et le stencil de Saenger & Bohlen (2004). Ici, nous considérons un pas spatial de $0.1m$. La grille numérique de différences finies contient 849 points horizontalement et 349 points verticalement. Les zones PML contiennent 100 points. Le pas en temps est de $10^{-5}s$. et 32768 pas en temps sont simulés.

La longueur d'onde P modélisée la plus petite vaut donc : $\lambda_p = V_p/f_{max} = 400/166 = 2.4m$. Ainsi, des objets diffractants d'une taille de $1.2m$ peuvent être imagés. L'anomalie diffractante que nous recherchons a une dimension caractéristique de $2m$, donc est détectable théoriquement par cette méthode.

Cependant nous sommes à la limite de détection de l'anomalie. Mais inverser des fréquences plus élevées serait irréaliste puisque l'énergie présente dans les données et la source n'y est plus significative (voir les figures 5.5 et 5.11).

Nous verrons dans les exemples suivants que, la plupart du temps, l'inversion ne permet pas d'extraire des informations des données aux fréquences les plus élevées, et reste ainsi bloquée dans un minimum local.

Détection théorique d'une anomalie dans ce modèle

Avant de présenter les résultats obtenus avec les données, effectuons d'abord des simulations numériques pour évaluer si la cavité est détectable dans notre modèle initial avec des données verticales. Nous avons introduit une cavité circulaire dans le modèle décrit dans la partie 5.4.4.

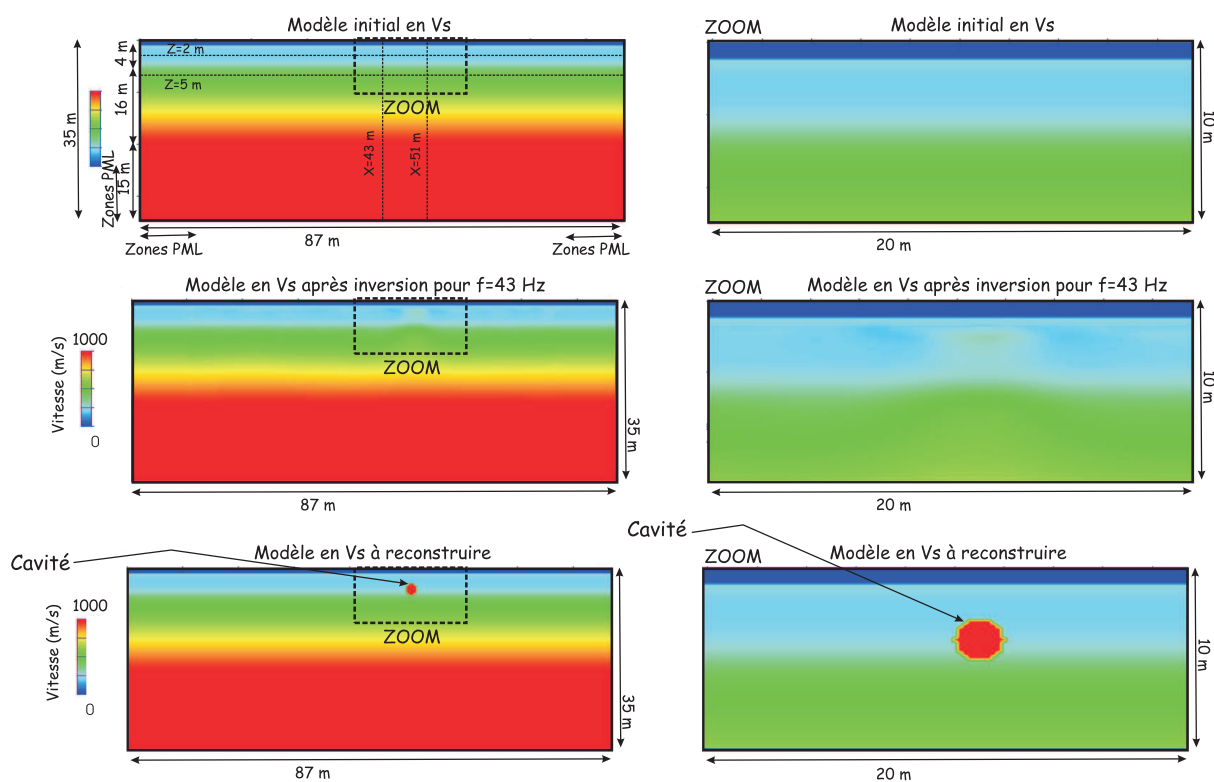


FIG. 5.24: *Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 1 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de 43Hz est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.*

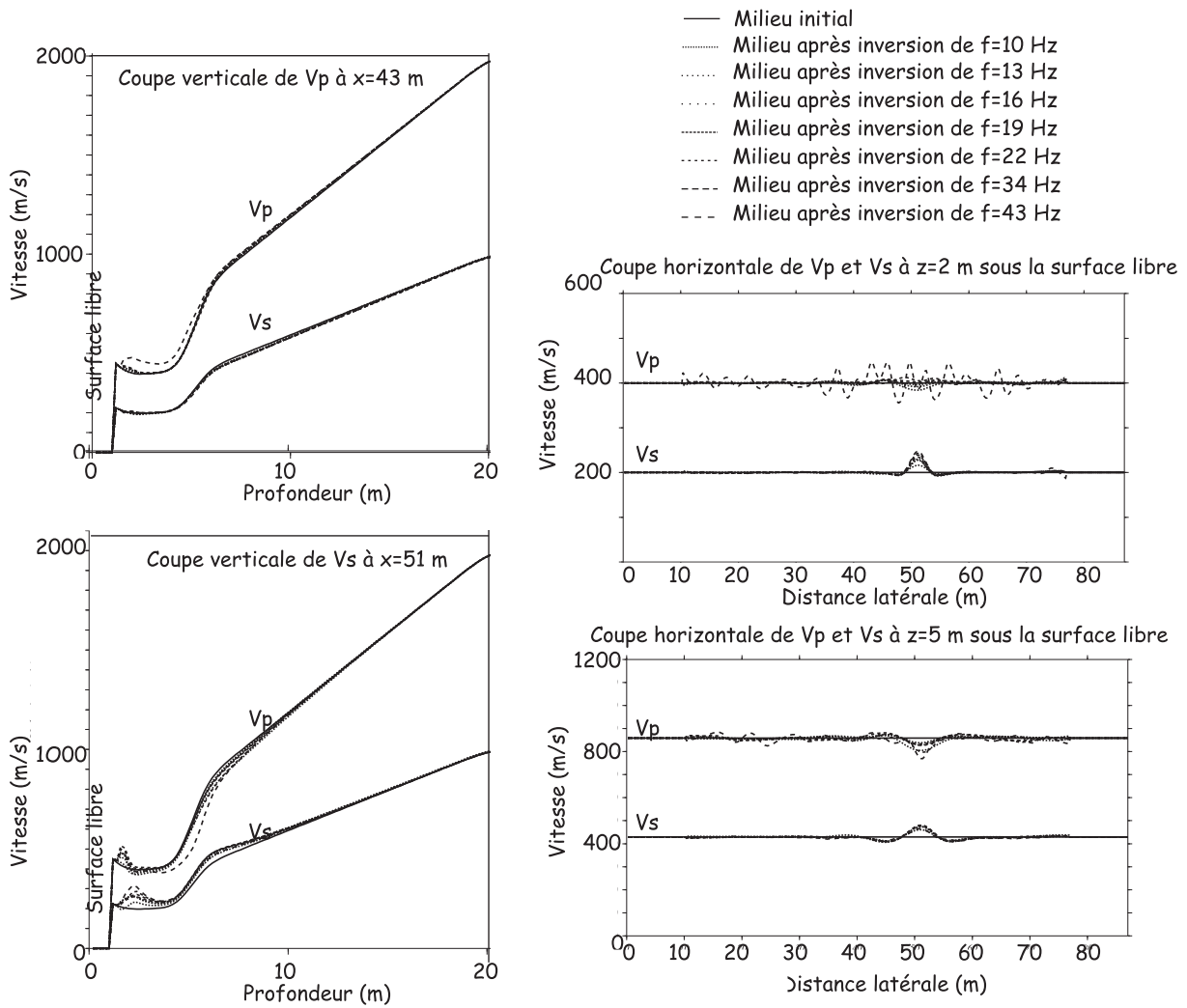


FIG. 5.25: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour le modèle issu de l'inversion des différences fréquences. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. Les zones PML sont larges de 10 m.

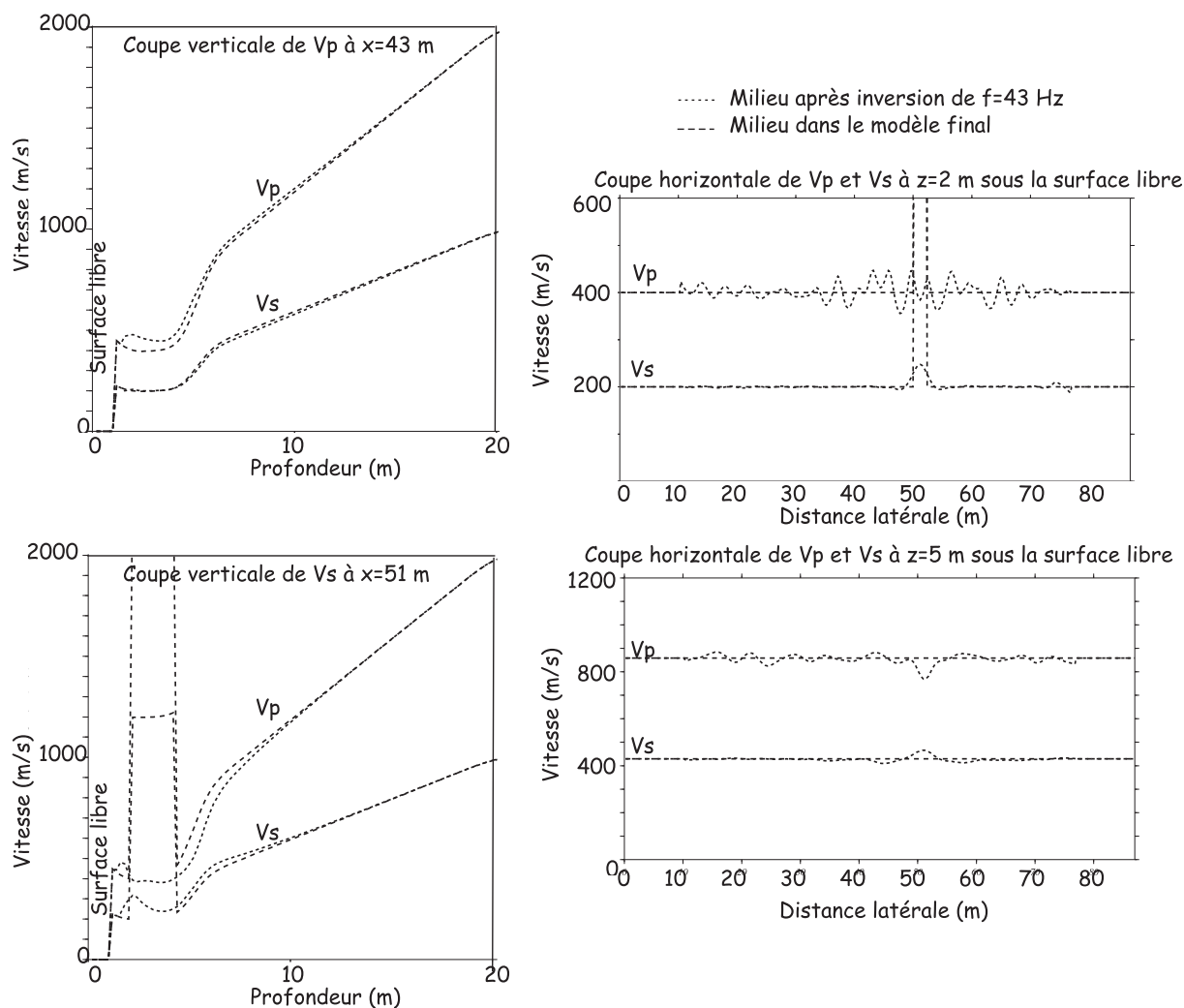


FIG. 5.26: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour la comparaison entre le modèle à reconstruire et le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43 Hz avec des données synthétiques. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. L'amplitude des anomalies reconstruites est sous-estimée, puisque l'approximation de Born reconstruit des perturbations de vitesses linéaires par rapport aux perturbations des paramètres. Les zones PML sont larges de 10 m.

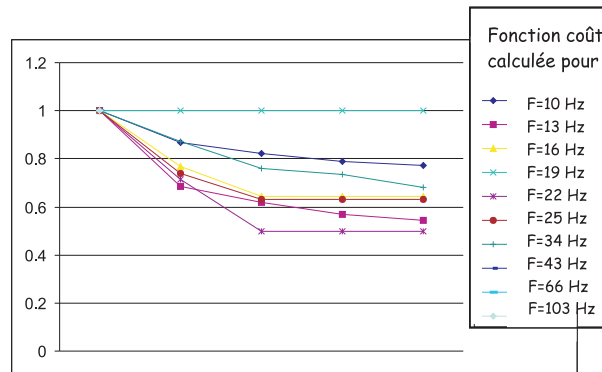


FIG. 5.27: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées dans le milieu obtenu dans la section 5.5.3 contenant une cavité artificiellement introduite de rayon 1 m et de profondeur 2 m.

(section 4.11) : la localisation, la taille et la forme étaient bien reconstruites mais l'amplitude était sous-estimée.

Lorsque la taille de l'anomalie est plus importante, sa signature est mieux visible sur les modèles de vitesse (figures 5.28 et 5.29). Les coupes (figures 5.30 et 5.31) montrent encore que les amplitudes sont sous-estimées et que le toit est un peu trop haut. De plus, l'anomalie est globalement mieux détectée pour l'inversion du paramètre V_s que pour celle du paramètre V_p . La fonction coût (figure 5.32) présente une allure similaire au cas où le rayon de la cavité vaut 1 m. Notons enfin que l'anomalie est située dans une zone à faible vitesse, difficulté supplémentaire pour l'inversion.

A titre de remarque, d'autres simulations numériques indiquent que, lorsque l'amplitude de l'anomalie à reconstruire est plus faible, le toit de l'anomalie détectée est encore localisé trop près de la surface libre. Sa localisation est améliorée lorsque la composante horizontale des sismogrammes est également inversée. En effet, le nombre de données permettant de contraindre le modèle devient plus important. De plus, la partie 4.10.2 montre que les résidus horizontaux contiennent des ondes de volume diffractées non négligeables par rapport aux résidus des ondes de surface, apportant ainsi des informations complémentaires sur la profondeur de l'anomalie. En revanche, les résidus verticaux sont dominés par les résidus des ondes de surface (section 4.10.2).

Ces deux exemples serviront de point de repère pour l'étude à suivre. Nous rechercherons en effet des signatures de ce type dans les images issues de l'inversion des données réelles. Néanmoins, avec les données réelles, la source sismique et le milieu de propagation sont mal connus. Nous connaissons donc vraisemblablement des difficultés pour détecter l'anomalie. Nous poursuivons cependant l'étude pour tester les performances et limites de l'inversion et évaluer la pertinence des milieux reconstruits. De plus, il est possible que la cavité réelle soit différente de la cavité modélisée. Elle pourrait, par exemple, être plus grande, plus superficielle ou avoir une forme différente.

Les différents tests effectués

Nous allons maintenant présenter les données obtenues en utilisant l'inversion des formes d'onde élastique. Nous allons évaluer l'influence de plusieurs facteurs :

- le ou les paramètre(s) inversé(s) : V_p et V_s , V_p seul ou V_s seul
- l'inversion de la source sismique
- l'élimination de l'onde tardive basse fréquence
- le choix du coefficient d'amortissement
- le fenêtrage des données des courts déports vers les grands déports

L'inversion des formes d'onde élastique permet de détecter et de caractériser les zones hétérogènes du milieu. La cavité que nous cherchons à détecter fait partie de ces diffractants mais d'autres hétérogénéités peuvent également exister.

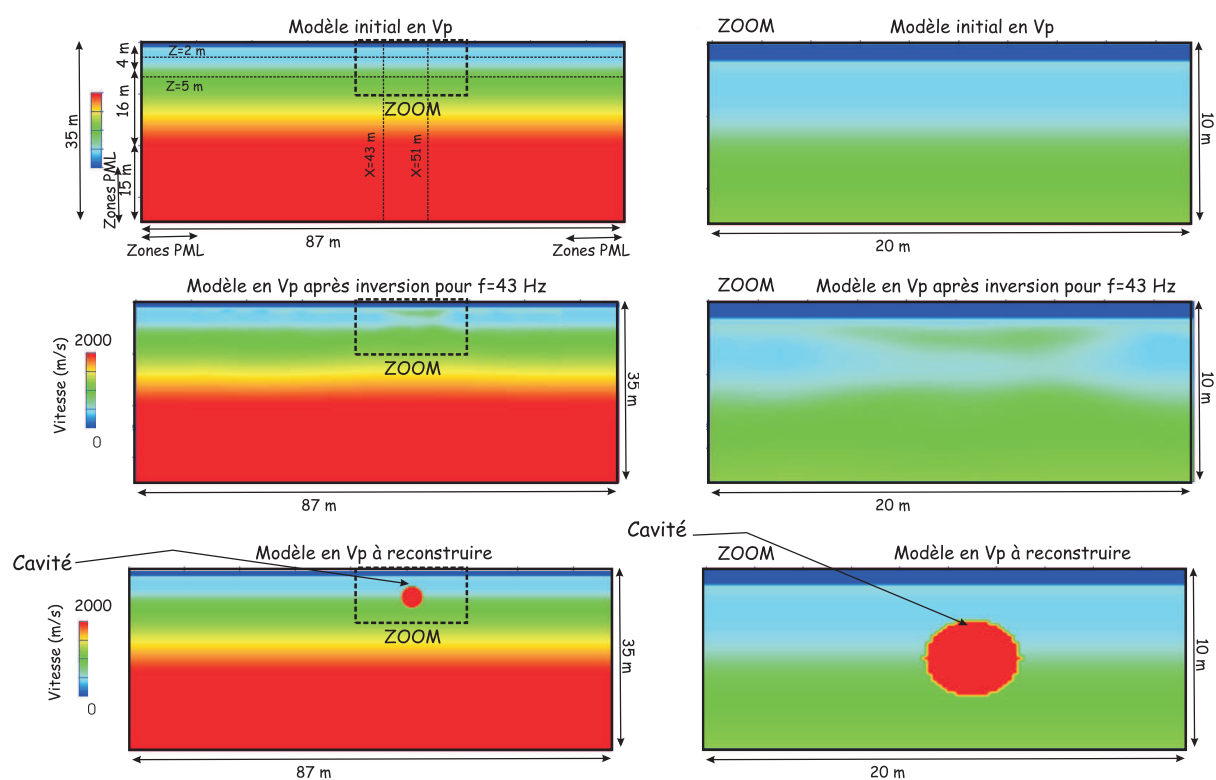


FIG. 5.28: *Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 2 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de 43Hz est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.*

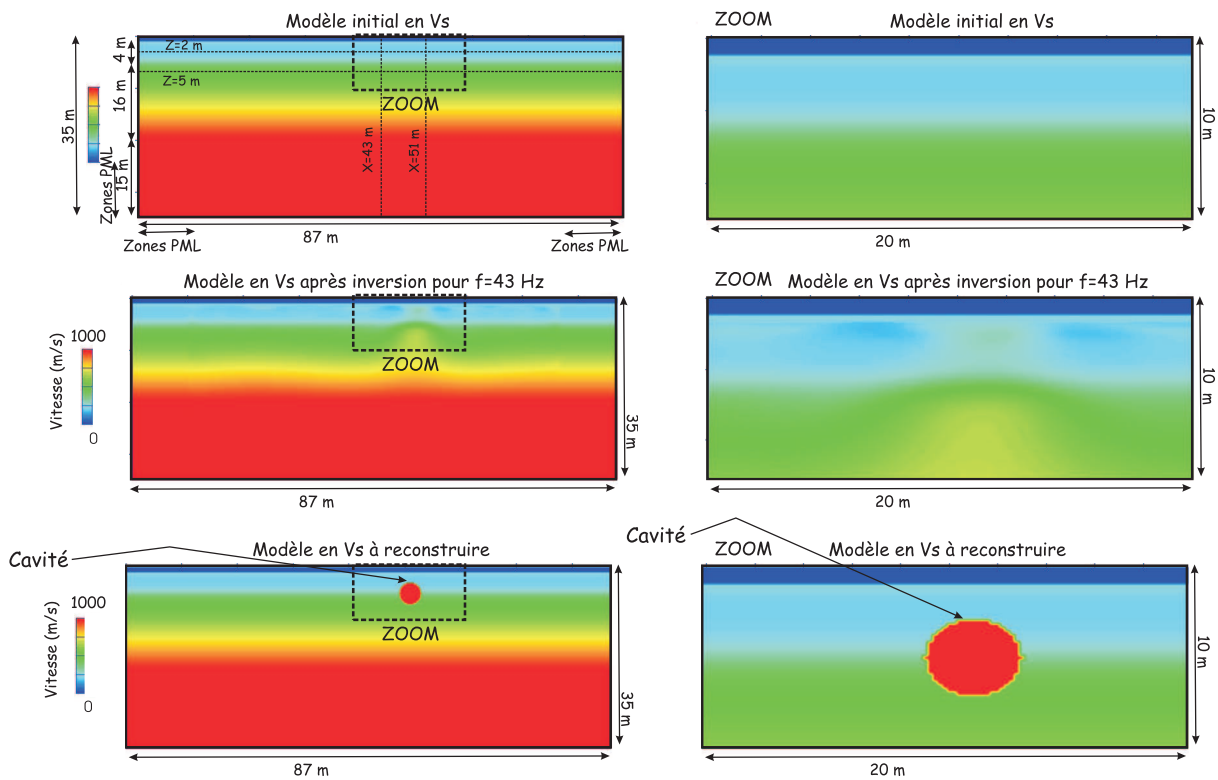


FIG. 5.29: *Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz avec des données synthétiques dans un milieu contenant une anomalie très forte de rayon 2 m et comparaison avec le milieu à reconstruire (bas). La fréquence de 43Hz est présentée car, avec les données réelles, l'inversion des fréquences plus élevées n'apporte généralement pas d'information. L'anomalie est détectée mais de faible amplitude. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone où est située l'anomalie à reconstruire. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.*

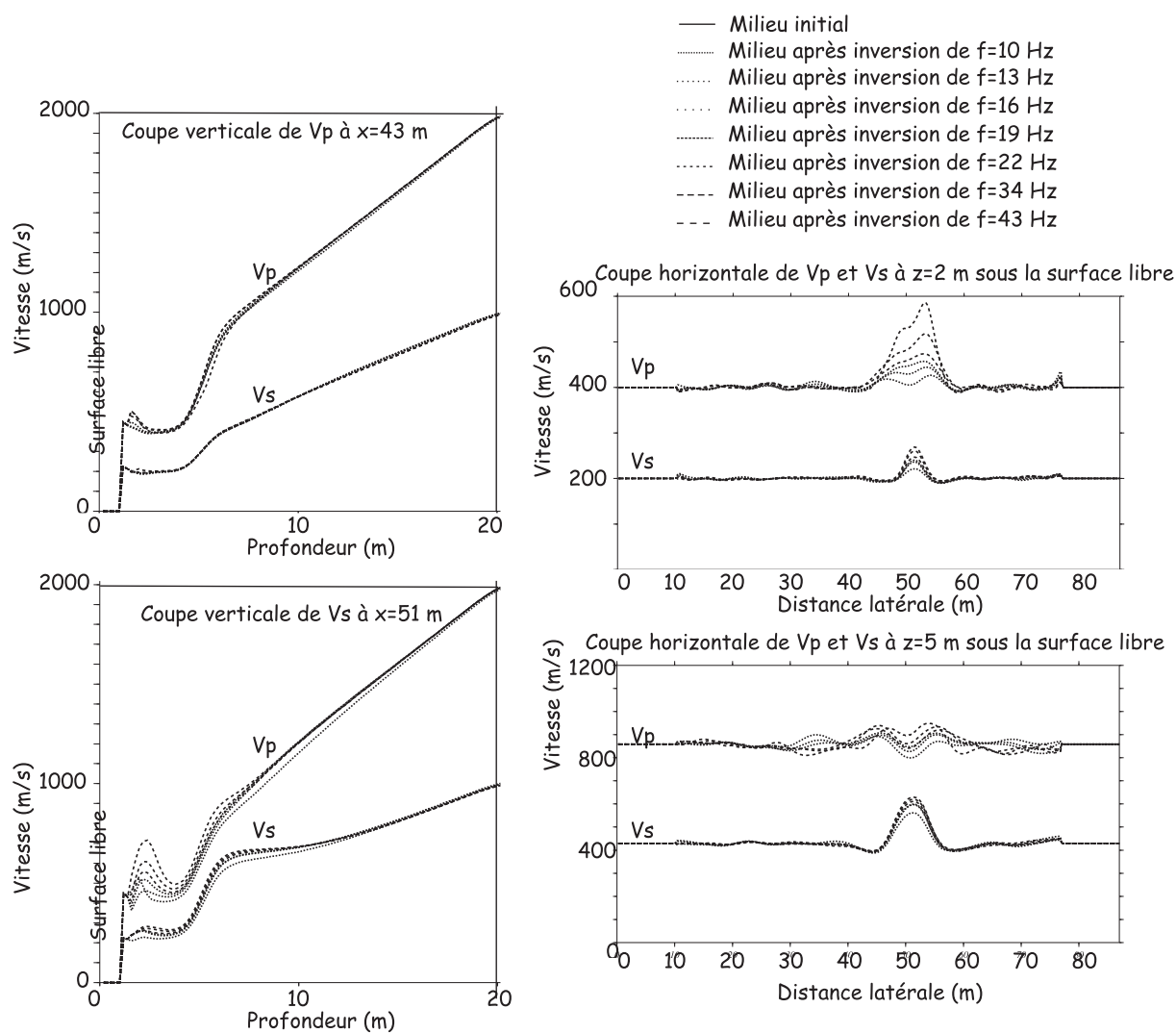


FIG. 5.30: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour le modèle issu de l'inversion des différences fréquences. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. Les zones PML sont larges de 10 m. Le rayon de la cavité vaut 2 m. La dissymétrie de l'anomalie reconstruite, observée sur le profil horizontal en V_p , est due au dispositif d'éclairage.

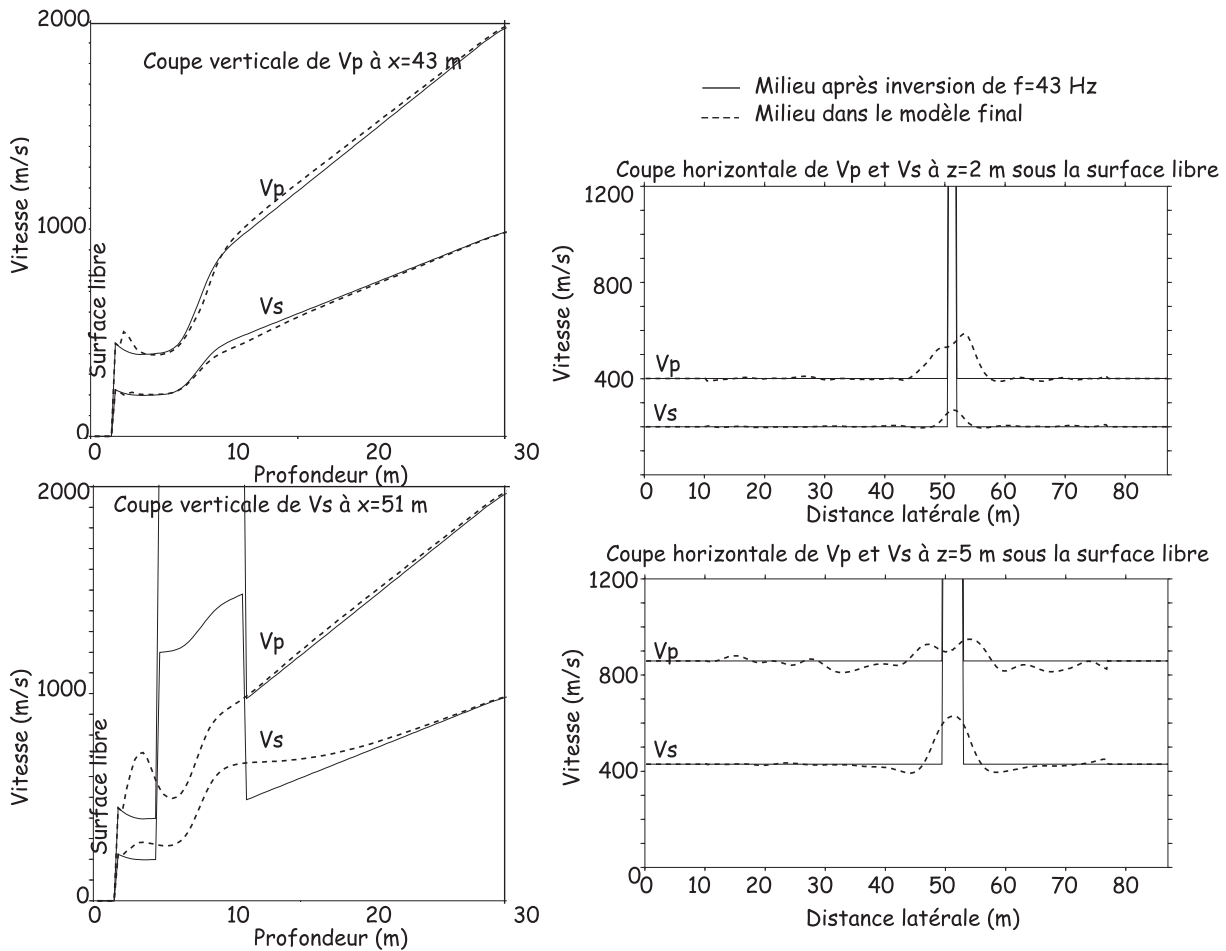


FIG. 5.31: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour la comparaison entre le modèle à reconstruire et le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43 Hz avec des données synthétiques. La localisation des coupes est montrée sur les figures 5.23 et 5.24. L'amplitude des anomalies reconstruites est sous-estimée, puisque l'approximation de Born reconstruit des perturbations de vitesses linéaires par rapport aux perturbations des paramètres. Les zones PML sont larges de 10 m. Le rayon de la cavité vaut 2 m.

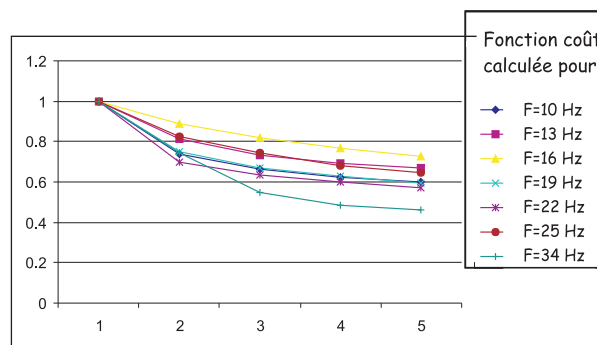


FIG. 5.32: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées dans le milieu obtenu dans la section 5.5.3 contenant une cavité artificiellement introduite de rayon 2 m et de profondeur du toit 2 m.

5.5.3 Résultats pour l'inversion simultanée de V_p et V_s en inversant la source sismique et comparaison avec les données

Nous avons réalisé l'inversion en utilisant comme modèle initial le modèle présenté dans la section 5.4.4. Nous avons choisi dans un premier temps pour valeur du coefficient d'amortissement : $\epsilon = 10^{-2}$ comme pour les données synthétiques. Toutes les traces sont utilisées, l'onde tardive basse fréquence n'est pas supprimée. La source sismique est inversée.

Les figures 5.33 et 5.34 montrent les modèles de vitesses issus de l'inversion des différentes fréquences. La fonction coût (figure 5.35) montre l'apport de l'inversion de chaque fréquence : les fréquences autour de 20Hz permettent d'améliorer significativement le modèle. Une zone de vitesse plus rapide se dessine pour V_p et V_s aux alentours de $x = 48\text{m}$ (figures 5.33 et 5.34).

La figure 5.36 montre des coupes extraites de ces modèles. Les coupes en profondeur montrent que, lors de l'inversion de fréquences plus hautes, le modèle en V_p évolue notablement. Des variations de vitesse de 100m/s apparaissent à une profondeur de 2 m. Au contraire, les coupes en V_s à une profondeur de 5 m présentent une structure en sinusoïde, caractéristique d'une longueur d'onde et correspondant donc à une fréquence spécifique inversée (19 Hz). Ainsi, l'algorithme reste bloqué dans un minimum local et n'injecte plus de courtes longueurs d'onde dans l'image pour le paramètre V_s .

Ce phénomène est certainement lié à la nature des ondes inversées et à leur contenu fréquentiel. La vitesse des ondes S influence davantage la cinématique des ondes de surface, basse fréquence, parmi lesquelles figure l'onde tardive basse fréquence très énergétique. L'influence de la vitesse des ondes P est plus forte sur les ondes de volume, plus haute fréquence. Ce phénomène a été mis en évidence dans la partie 5.4.4 lors de la construction du macromodèle de vitesse.

Les figures 5.38 et 5.37 montrent la comparaison entre les données et les synthétiques. Dans l'ensemble, la cinématique des ondes est bien reproduite. Notons que l'onde tardive basse fréquence, très énergétique, est particulièrement bien reproduite sur les différents sismogrammes. Notons également le contenu plus haute fréquence des données simulées. La source originale est en effet conservée pour le calcul des sismogrammes dans le modèle final, nous n'avons pas pris en compte ici le facteur multiplicatif s . En effet, pour reconstruire la source correctement, il faudrait inverser toutes les composantes fréquentielles (Ravaut, 2003). Nous pourrions également tenter d'effectuer une dilatation en temps pour retrouver la meilleure source possible. Cependant, dans ce cas, il faudrait connaître le signal pour davantage de fréquences. Nous avons donc conservé la source sismique d'origine bien qu'elle soit modifiée et ajustée par l'inversion.

Ainsi, le milieu obtenu est très hétérogène latéralement et permet de délimiter une zone de vitesse plus rapide en V_p et V_s à une abscisse de $x = 48\text{m}$. Cette zone est susceptible de contenir la cavité et permet de bien expliquer les données. Néanmoins, la forme de la cavité et sa taille n'apparaissent pas clairement. Son empreinte ne correspond pas à celle obtenue lors de l'inversion des données synthétiques (voir la section 5.5.2). Ceci est certainement lié à la complexité du milieu de propagation. Une autre zone de vitesse plus rapide apparaît dans la partie gauche du modèle. Elle est vraisemblablement liée à l'onde diffractée présente dans les données (voir l'onde tardive 2" sur la figure 5.8).

Inversion simultanée de V_p et V_s sans inversion de la source sismique et comparaison avec les données

Nous considérons dans ce test uniquement que la source sismique est suffisamment bien connue pour ne pas être inversée. La figure 5.39 montre les modèles obtenus après inversion des différentes fréquences. Les basses fréquences permettent d'extraire de l'information, l'inversion reste ensuite bloquée dans un minimum local. Ceci est certainement dû à l'ambiguïté de phase apparaissant aux fréquences plus élevées et ne permettant pas à l'algorithme de converger. Ainsi, le degré de

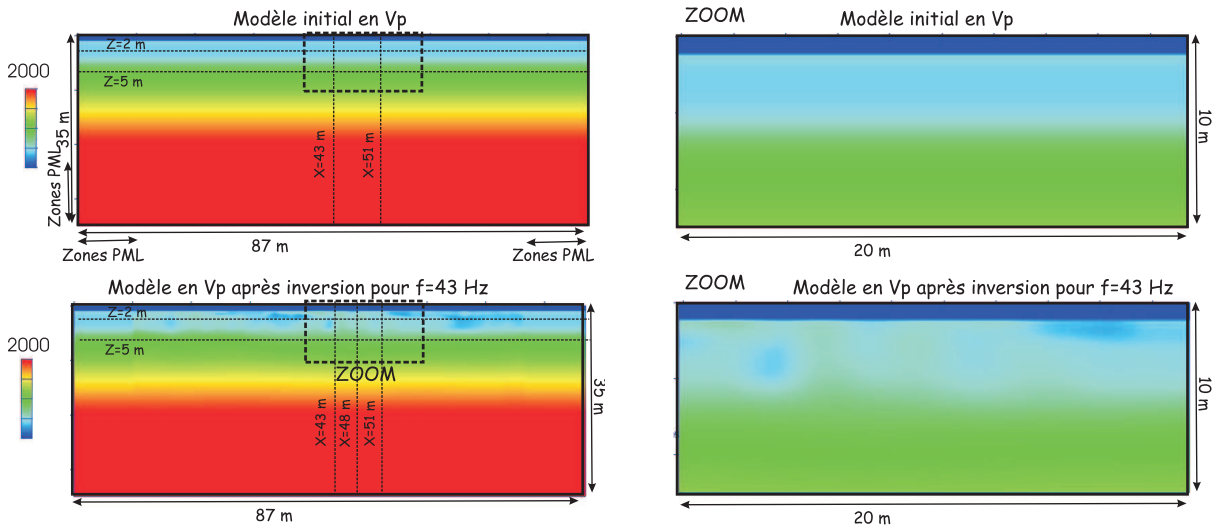


FIG. 5.33: Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence. Des variations de vitesse latérales apparaissent mais la signature de la cavité montrée dans le cas synthétique n'est pas présente dans les images de V_p . Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.

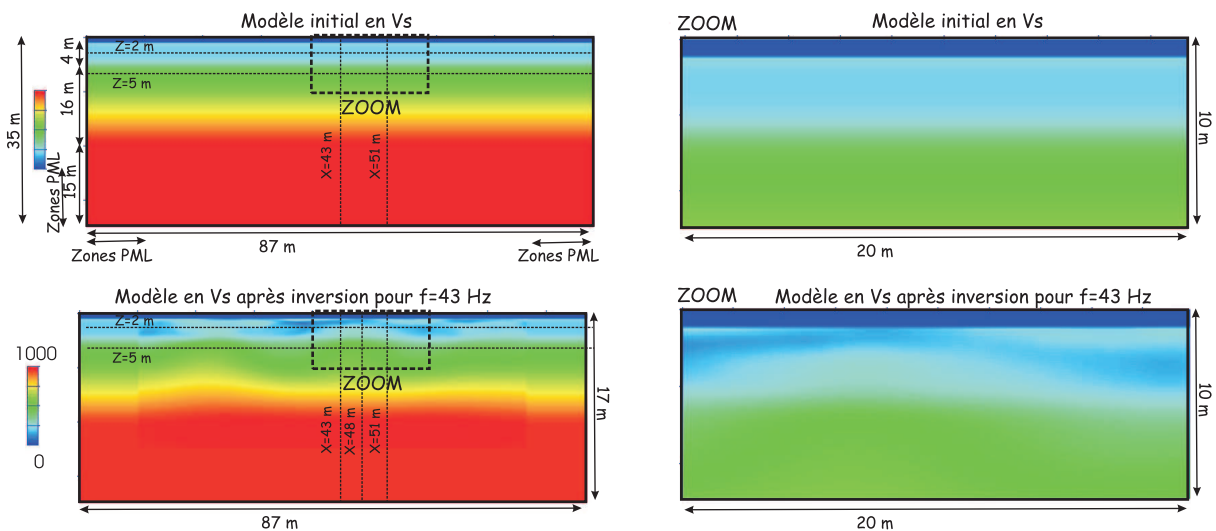


FIG. 5.34: Modèle initial en V_s (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence. Des variations de vitesse latérales apparaissent mais la signature de la cavité montrée dans le cas synthétique n'est pas présente dans les images de V_p . Notons la présence d'oscillations latérales dans le modèle de vitesse, caractéristiques d'une longueur d'onde et donc d'une fréquence inversée (la fréquence 19Hz). Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.

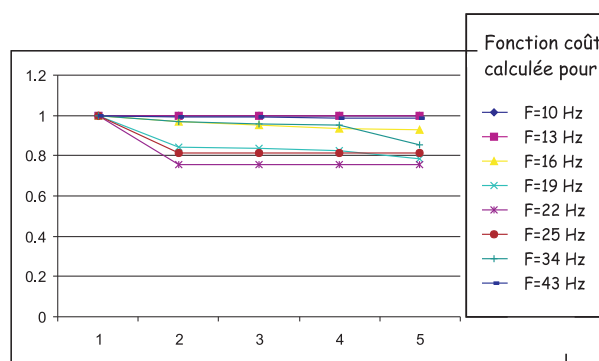


FIG. 5.35: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence.

liberté supplémentaire permis par l'inversion de la source sismique (Ravaut, 2003; Pratt, 1999) est déterminant.

La figure 5.40 montre des coupes issues des modèles en V_p et V_s . Globalement, les vitesses sont plus faibles et le milieu est peu hétérogène latéralement.

Les figures 5.41 et 5.42 illustrent la comparaison entre données observées et calculées. Les sismogrammes calculés dans le modèle final ressemblent fortement au sismogramme initial.

Enfin, la fonction coût (figure 5.43) montre également l'évolution faible du modèle et l'apport d'informations basse fréquence uniquement.

Tout ceci illustre l'importance de l'inversion de la source et le risque de rester bloqué dans un minimum local lorsque cette dernière n'est pas inversée. Ce risque est plus marqué lorsque la fréquence augmente.

Inversion de V_p seul ou de V_s seul avec inversion de la source sismique

Dans cette section, nous effectuons l'inversion de V_p et V_s seuls afin de comparer les résultats avec le cas où V_p et V_s sont inversés simultanément.

Le modèle initial est celui de la figure 5.22. La figure 5.44 montre les images de V_p obtenues pour chaque fréquence et pour l'inversion de V_p d'une part et de V_s d'une autre part. Dans chaque cas, un seul paramètre est inversé et l'autre est déduit à chaque itération par l'intermédiaire du rapport V_p/V_s égal à 2. Les fonctions coût associées aux inversions de V_p seul et de V_s seul (figures 5.45 et 5.46) montrent l'apport de chaque fréquence. Elles diminuent moins que la fonction coût calculée lorsque les paramètres V_p et V_s sont inversés (figure 5.35). Ceci signifie que l'inversion simultanée de V_p et V_s permet d'extraire davantage d'information des données.

Les modèles finaux présentent certaines caractéristiques similaires aux modèles obtenus par l'inversion simultanée de V_p et V_s : une zone de vitesse plus rapide au centre et une autre sur la gauche du modèle. L'inversion de chaque paramètre reconstruit une zone de vitesse plus rapide aux alentours de $x=48$ m (figure 5.44).

Néanmoins, les coupes (figure 5.47) montrent que l'inversion de V_p mène à un modèle contenant une zone de vitesse rapide en V_p à une profondeur de 5 m qui n'est pas présente lorsque V_p et V_s sont inversés. L'inversion de V_s permet de reconstruire une zone de vitesse plus rapide à gauche du modèle pour une profondeur de 2 m.

Dans l'ensemble, les coupes et les modèles obtenus pour l'inversion de V_s seul ressemblent davantage à ceux obtenus pour l'inversion simultanée de V_p et V_s que pour l'inversion de V_p seul. Ceci met en évidence l'importance de l'inversion de V_s . Les fonctions coût calculées pour l'inversion de V_p seul et de V_s seul montrent également que l'inversion de V_s seul permet d'extraire davantage

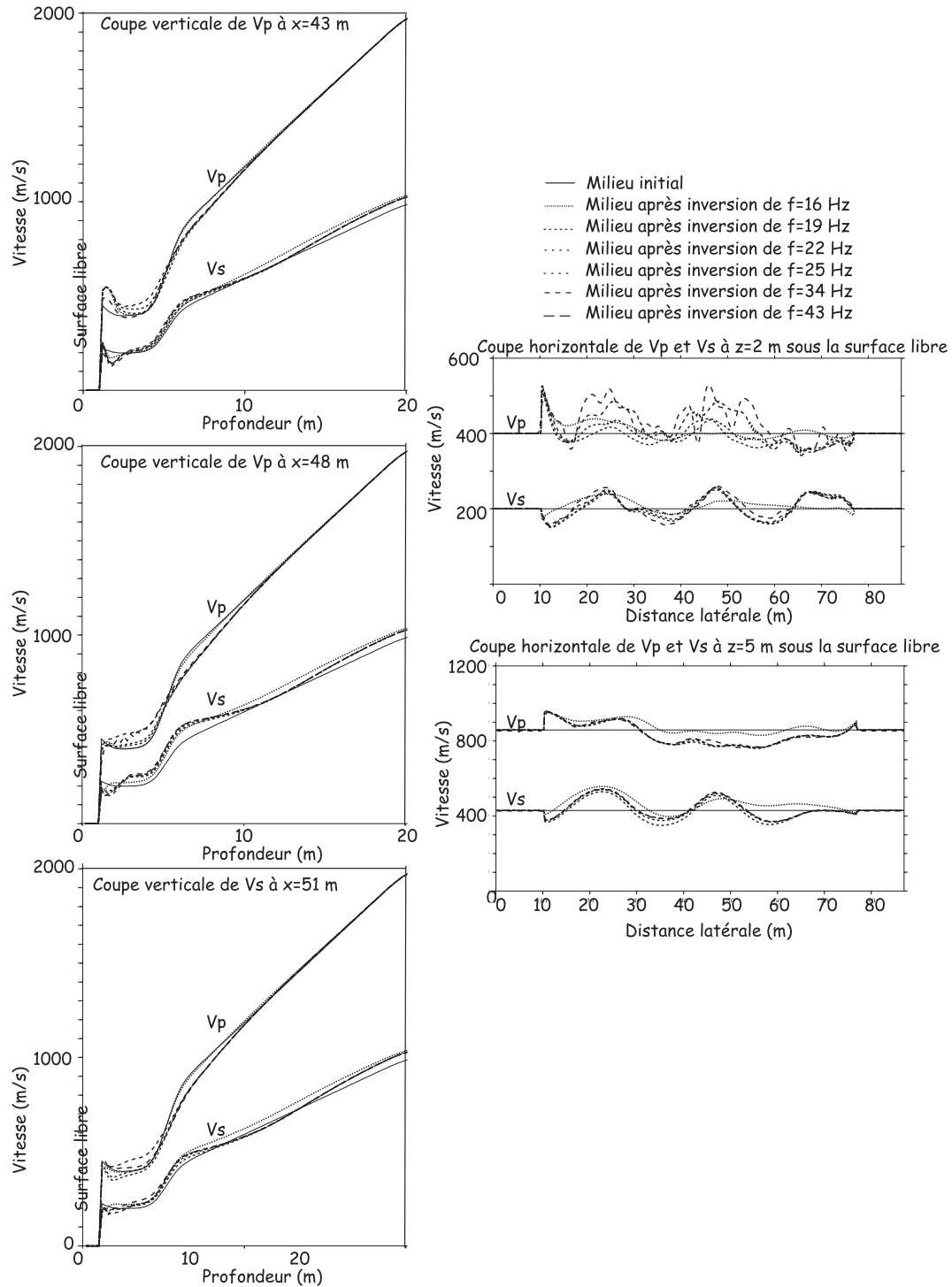


FIG. 5.36: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. Les zones PML sont larges de 10 m.

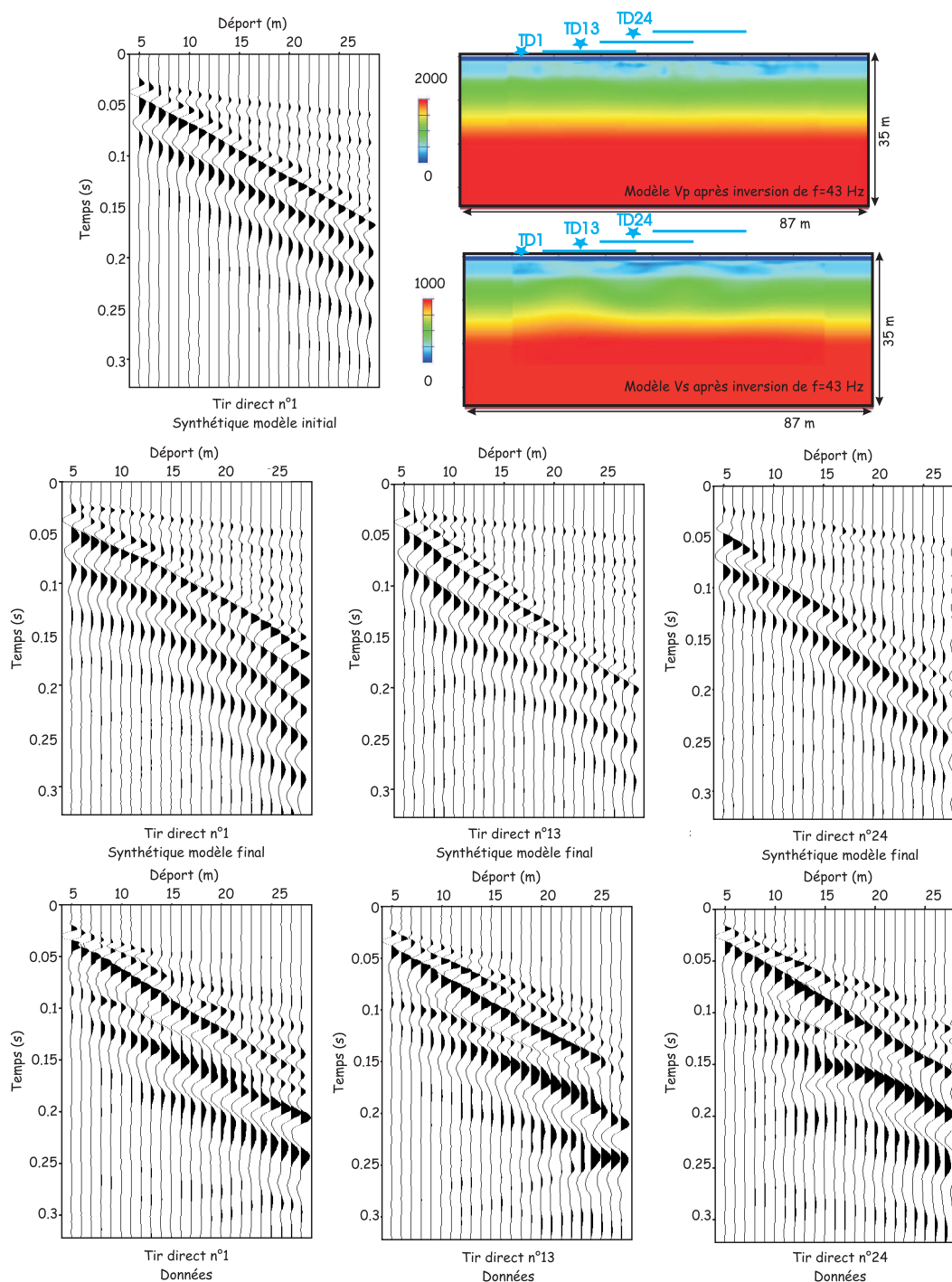


FIG. 5.37: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43Hz après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence, très énergétique, est bien reproduite dans les sismogrammes synthétiques calculés dans le modèle final.

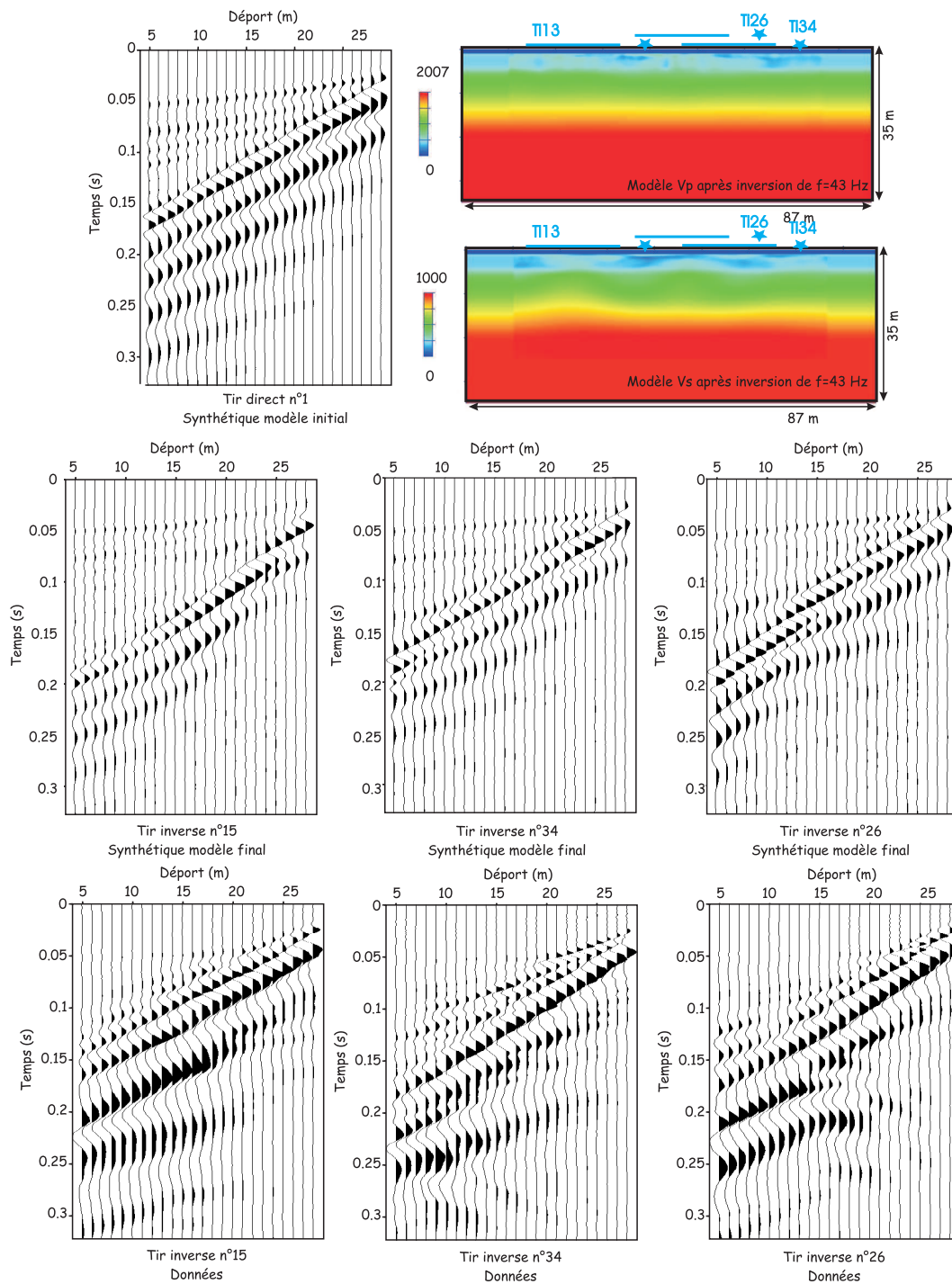


FIG. 5.38: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43Hz après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. L'onde tardive basse fréquence, très énergétique, est bien reproduite dans les sismogrammes synthétiques calculés dans le modèle final.

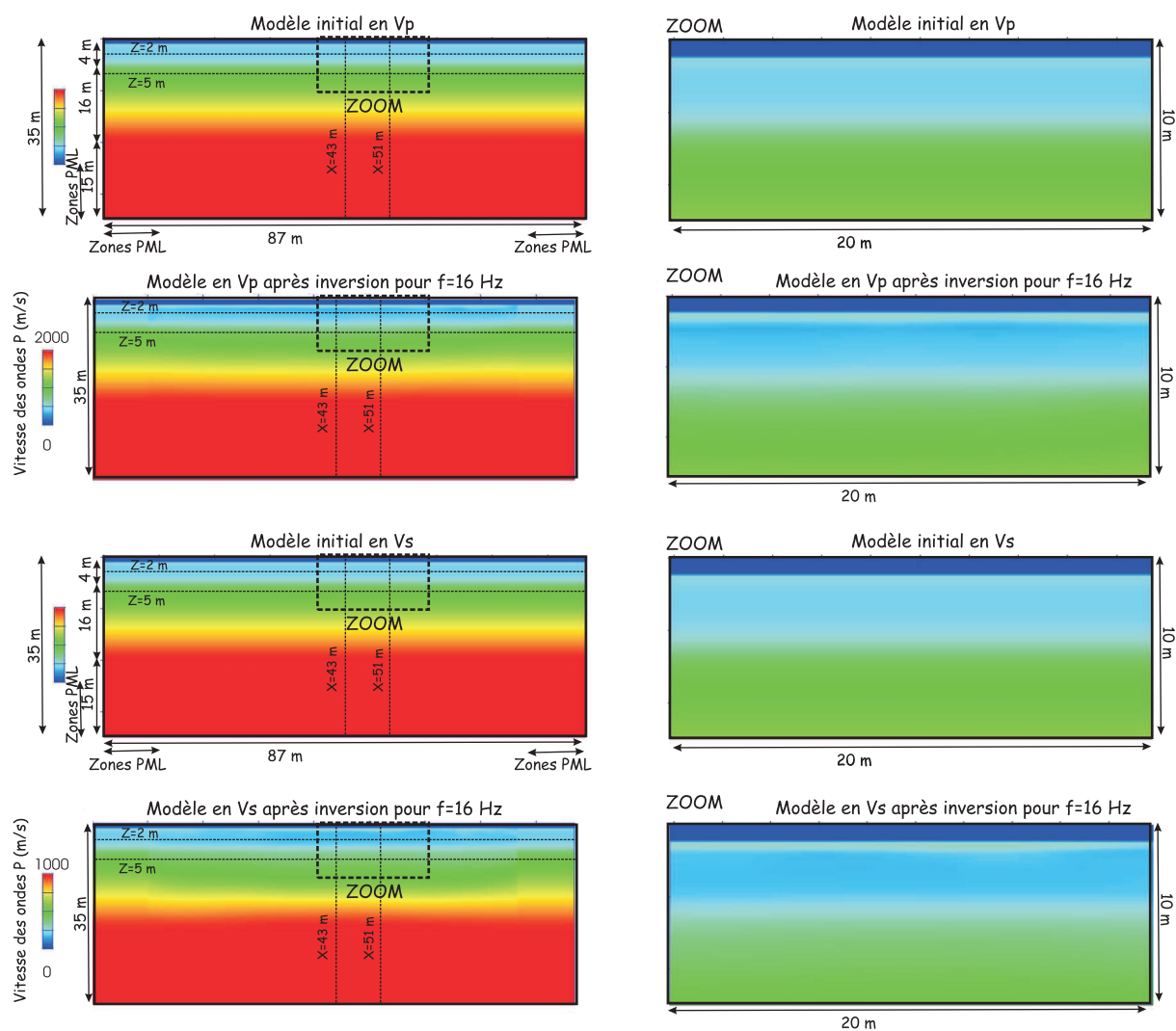


FIG. 5.39: *Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 16Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (2ème ligne). Modèle initial en V_s (3ème ligne), modèle final obtenu à la fréquence 16Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (bas). Le milieu est peu différent du milieu initial, il est globalement plus lent. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML, larges de 10 m, sont représentées sur le modèle initial.*

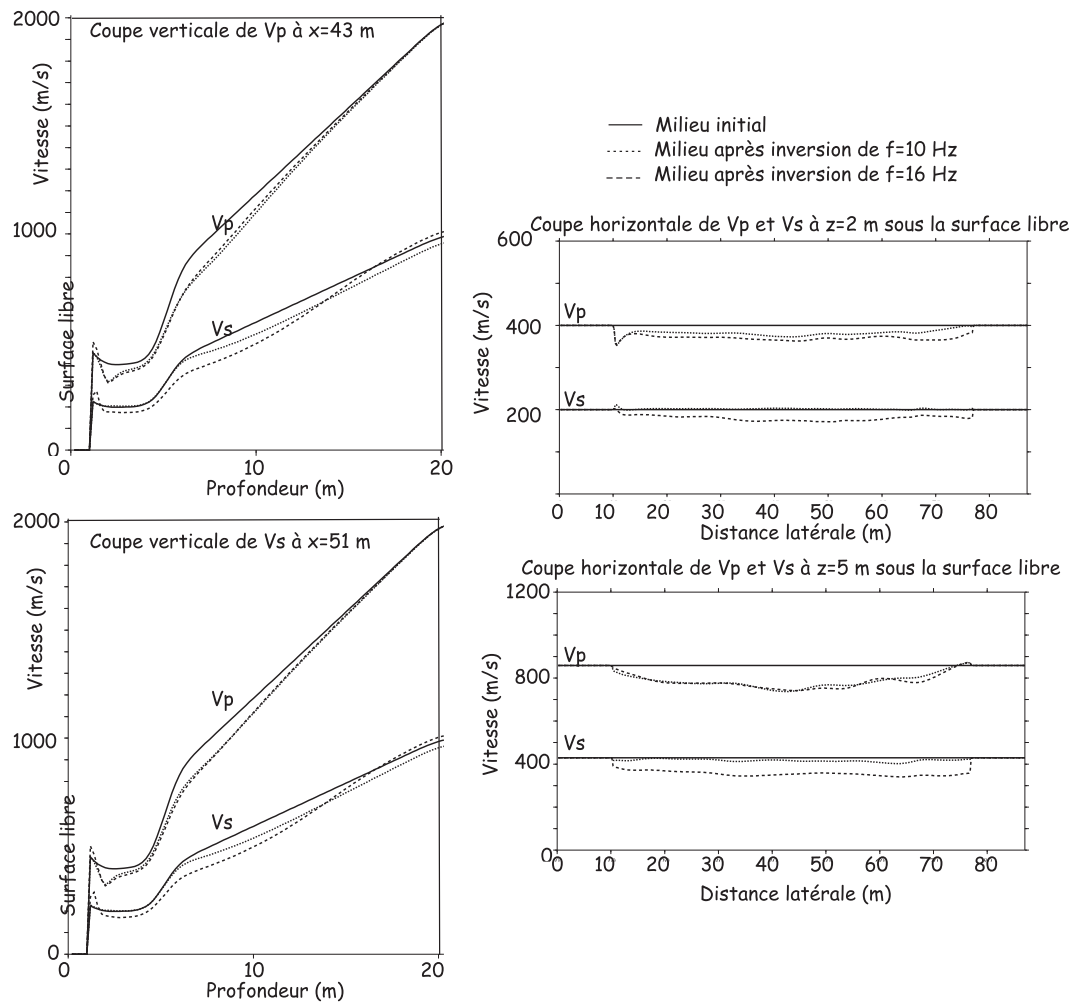


FIG. 5.40: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée. Le milieu est peu différent du milieu initial, il est globalement plus lent. Les zones PML sont larges de 10 m.

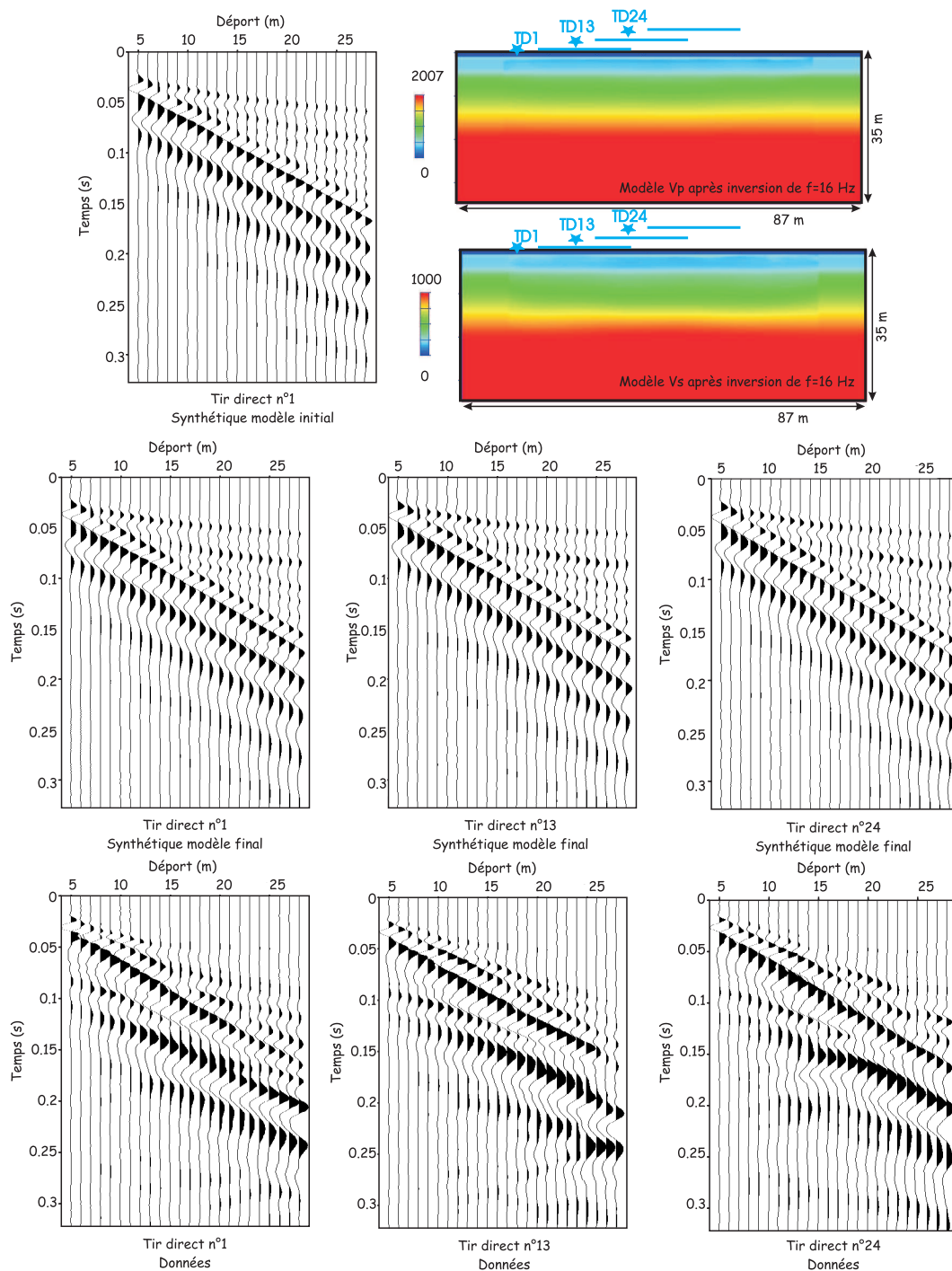


FIG. 5.41: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 16Hz après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée.

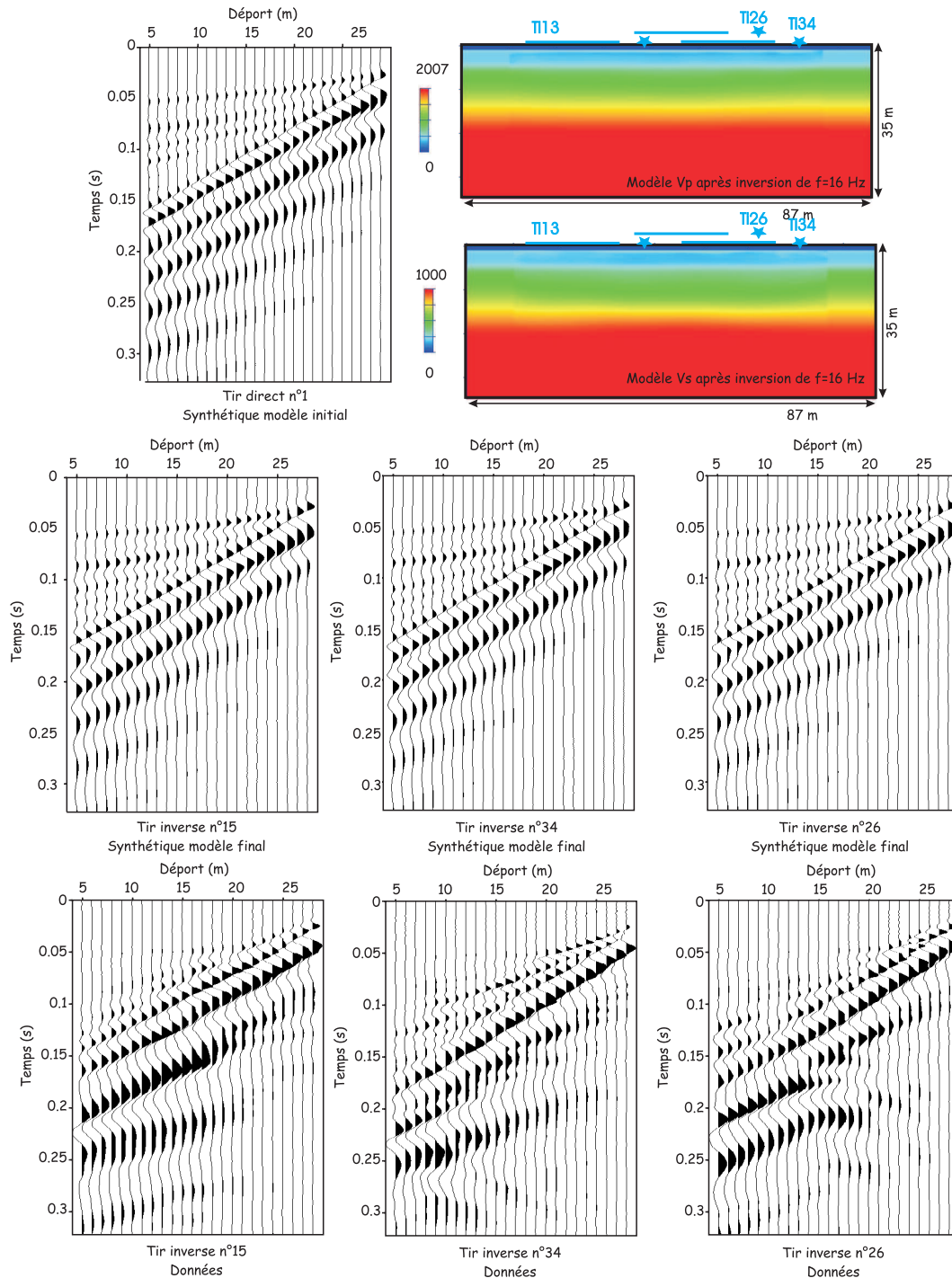


FIG. 5.42: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 16Hz après inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée.

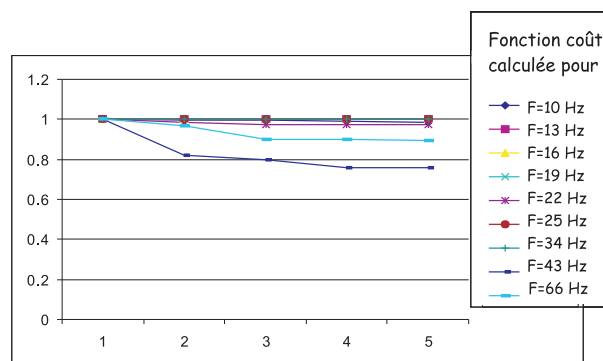


FIG. 5.43: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour des données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique n'est pas inversée. Seules les fréquences 10Hz et 16Hz permettent d'extraire de l'information des données.

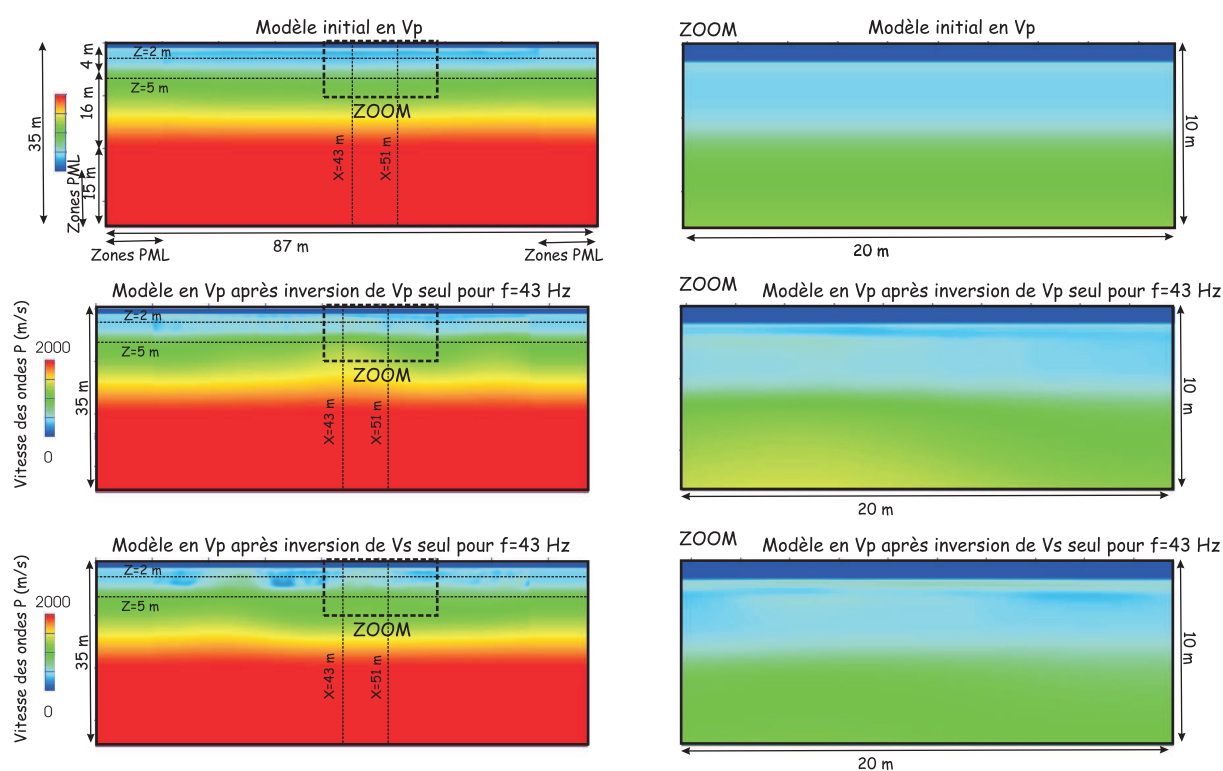


FIG. 5.44: Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_p seul avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (milieu), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_s seul avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (bas). V_s est déduit via le rapport V_p/V_s égal à 2. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Les zones PML sont larges de 10 m.

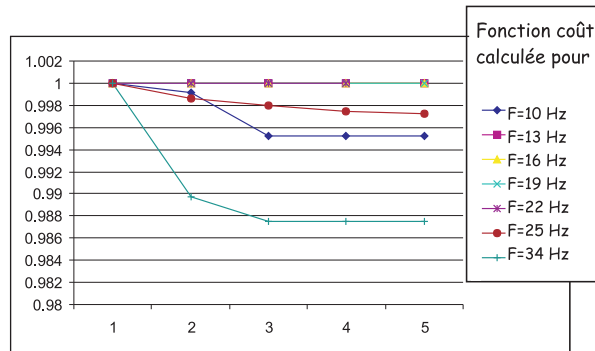


FIG. 5.45: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p seulement. La source sismique est inversée.

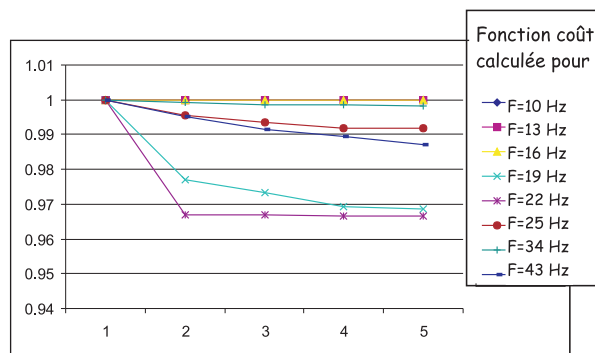


FIG. 5.46: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_s seulement. La source sismique est inversée.

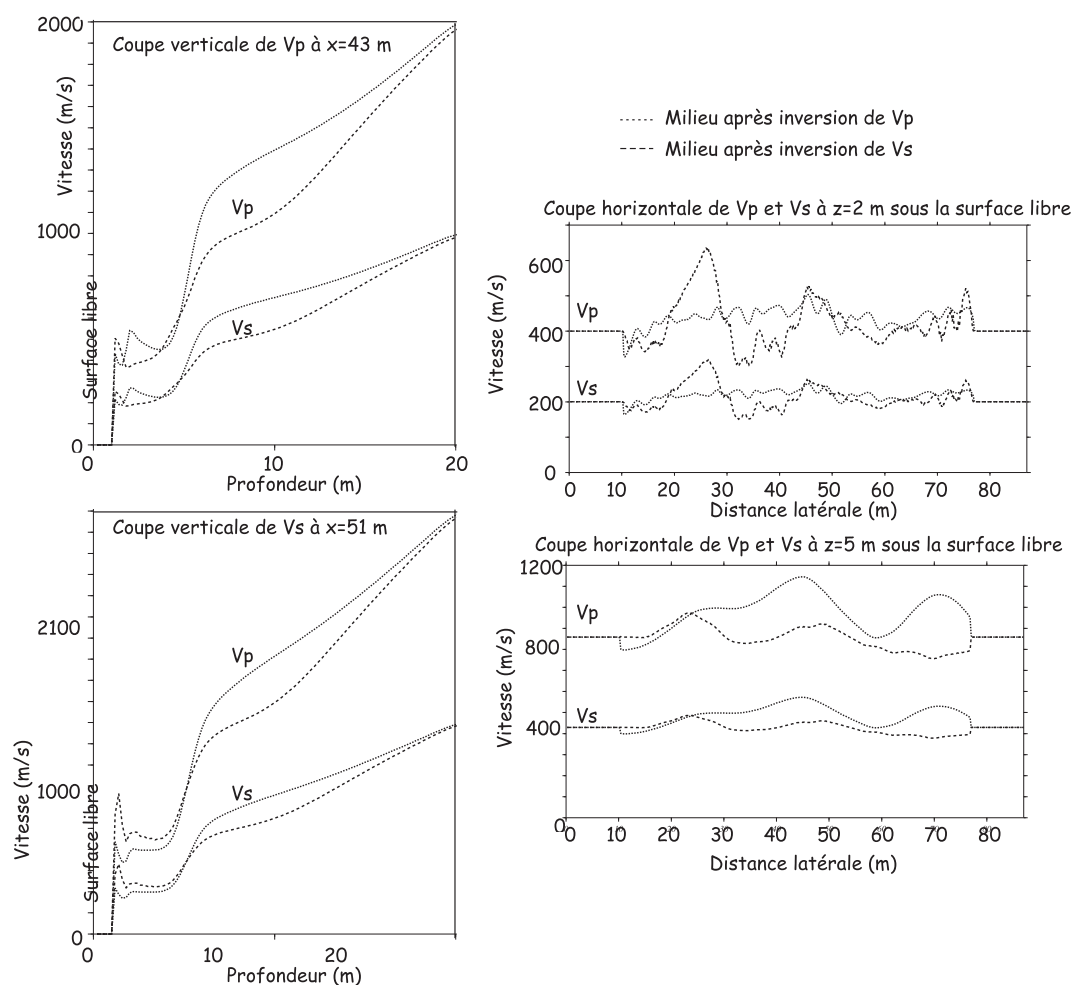


FIG. 5.47: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour un seul des deux paramètres inversés, l'autre étant calculé via le rapport V_p/V_s . Les zones PML sont larges de 10 m.

d'informations des données.

Ainsi, l'inversion simultanée de V_p et V_s ou l'inversion de V_p seul et de V_s seul mène à des modèles de vitesse voisins de ceux de la section 5.5.3. Ceci permet de valider les modèles obtenus.

Inversion simultanée de V_p et V_s avec des données sans l'arrivée tardive basse fréquence et avec inversion de la source sismique. Comparaison avec les données

Nous avons vu dans la section 5.5.3 que les modèles issus de l'inversion simultanée de V_p et V_s avec inversion de la source sismique permettent de bien reproduire l'onde tardive basse fréquence. Les informations extraites des données sont donc vraisemblablement principalement contenues dans l'onde de surface tardive. Afin d'évaluer l'influence des autres ondes, nous éliminons l'onde tardive basse fréquence. La figure 5.48 montre un exemple de sismogramme obtenu sans l'onde tardive basse fréquence et le spectre correspondant. Le contenu fréquentiel est globalement plus haute fréquence puisque l'arrivée tardive basse fréquence a été éliminée.

Dans ce test, les deux paramètres V_p et V_s sont inversés, ainsi que la source sismique. Lorsque l'onde tardive basse fréquence est éliminée, les vitesses du milieu augmentent en profondeur pour le paramètre V_p et une zone intermédiaire de vitesse plus rapide apparaît au milieu de la zone à moindre vitesse (figure 5.49). En revanche, le paramètre V_s (figure 5.49) évolue peu, les zones de vitesse plus rapide ne sont pas présentes, à la différence du cas où l'onde tardive basse fréquence est

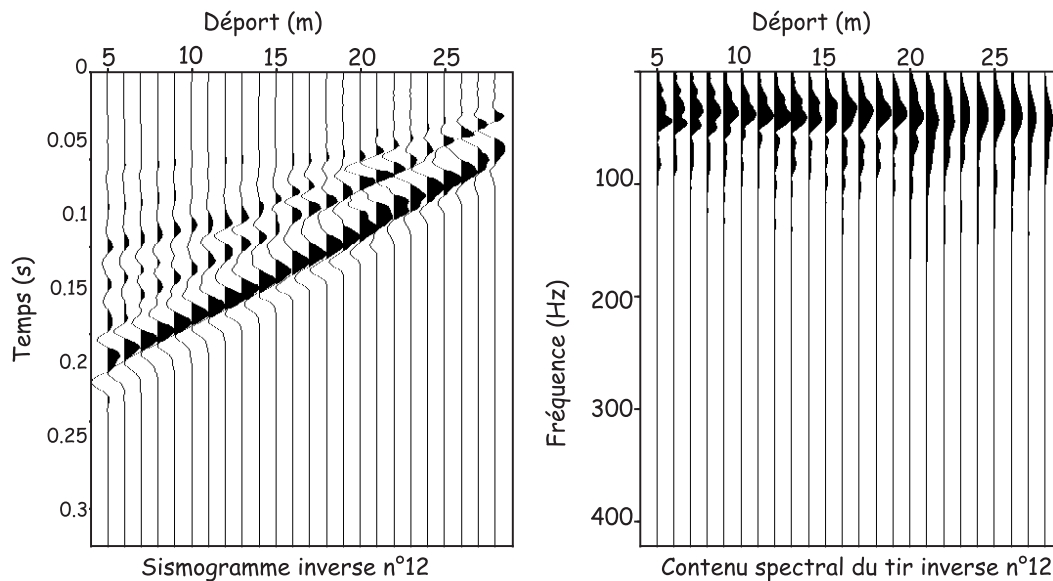


FIG. 5.48: *Sismogramme où l'arrivée tardive basse fréquence a été éliminée (gauche) et spectre correspondant (droite) pour le tir sismique inverse n°12*

contenue dans les données. Les coupes extraites des modèles (figure 5.50) montrent également cette augmentation globale de vitesse en profondeur pour V_p et le peu de changement pour le modèle en V_s . La fonction coût (figure 5.51) illustre l'apport de chaque fréquence à l'image finale. La fonction coût diminue globalement moins que pour le cas où l'onde tardive basse fréquence est incluse dans les données (figure 5.35).

Les figures 5.52 et 5.53 montrent les sismogrammes calculés dans le modèle final. L'onde tardive basse fréquence n'est plus reproduite, elle n'est plus dans les données. Ceci signifie qu'elle contient des informations que les autres ondes ne contiennent pas ou que l'algorithme n'extrait pas des autres ondes. Les ondes non éliminées sont bien reproduites, particulièrement leur cinématique. Lorsque l'onde tardive basse fréquence est absente des données, l'algorithme construit un milieu relativement homogène latéralement, correspondant aux temps d'arrivée des ondes conservées relativement constants latéralement. Le fait que le milieu évolue peu est également lié à la manière dont le modèle initial est construit : en calant les temps d'arrivée des ondes autres que l'onde tardive basse fréquence.

Ainsi, la prise en compte ou non de l'onde tardive basse fréquence modifie fortement l'image finale du milieu.

Inversion de V_p seul et de V_s seul avec des données sans l'arrivée tardive basse fréquence et avec inversion de la source sismique.

La figure 5.54 montre les modèles de vitesse finaux obtenus à la fréquence de 43 Hz pour l'inversion de V_p seul et de V_s seul sans l'onde tardive basse fréquence. Dans l'ensemble, les modèles de vitesses sont peu différents du modèle initial. Les figures 5.55 et 5.56 contenant les fonctions coût associées montrent que l'algorithme itère peu et que peu d'informations sont extraites des données. De même, les coupes extraites des modèles (figure 5.57) illustrent également que les modèles finaux sont peu différents du modèle initial.

Ainsi, l'inversion de V_p seul ou de V_s seul ne permet pas d'extraire beaucoup d'information des données lorsque l'onde tardive basse fréquence est éliminée. L'algorithme est vraisemblablement bloqué dans un minimum local. Les modèles finaux ne correspondent pas aux modèles obtenus avec

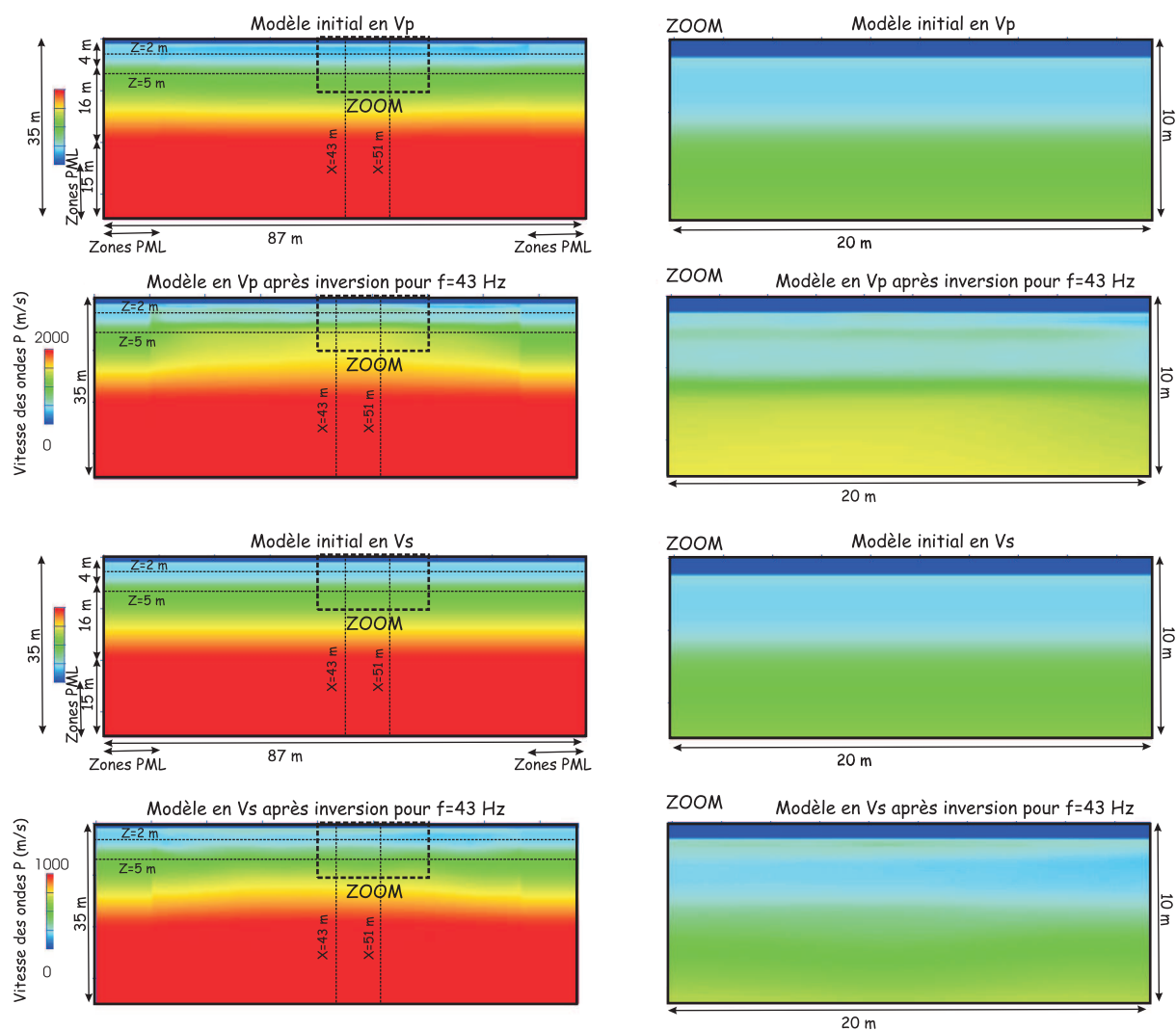


FIG. 5.49: *Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43 Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (2ème ligne). Modèle initial en V_s (3ème ligne), modèle final obtenu à la fréquence 43 Hz après inversion de V_p et V_s avec les données réelles contenant l'onde tardive basse fréquence sans inversion de la source sismique (bas). L'onde tardive basse fréquence a été éliminée. Les milieux issus de l'inversion sont agrandis pour mieux voir la zone superficielle où devrait se trouver la cavité. Le modèle de vitesse V_p final est globalement plus rapide que le modèle initial.*

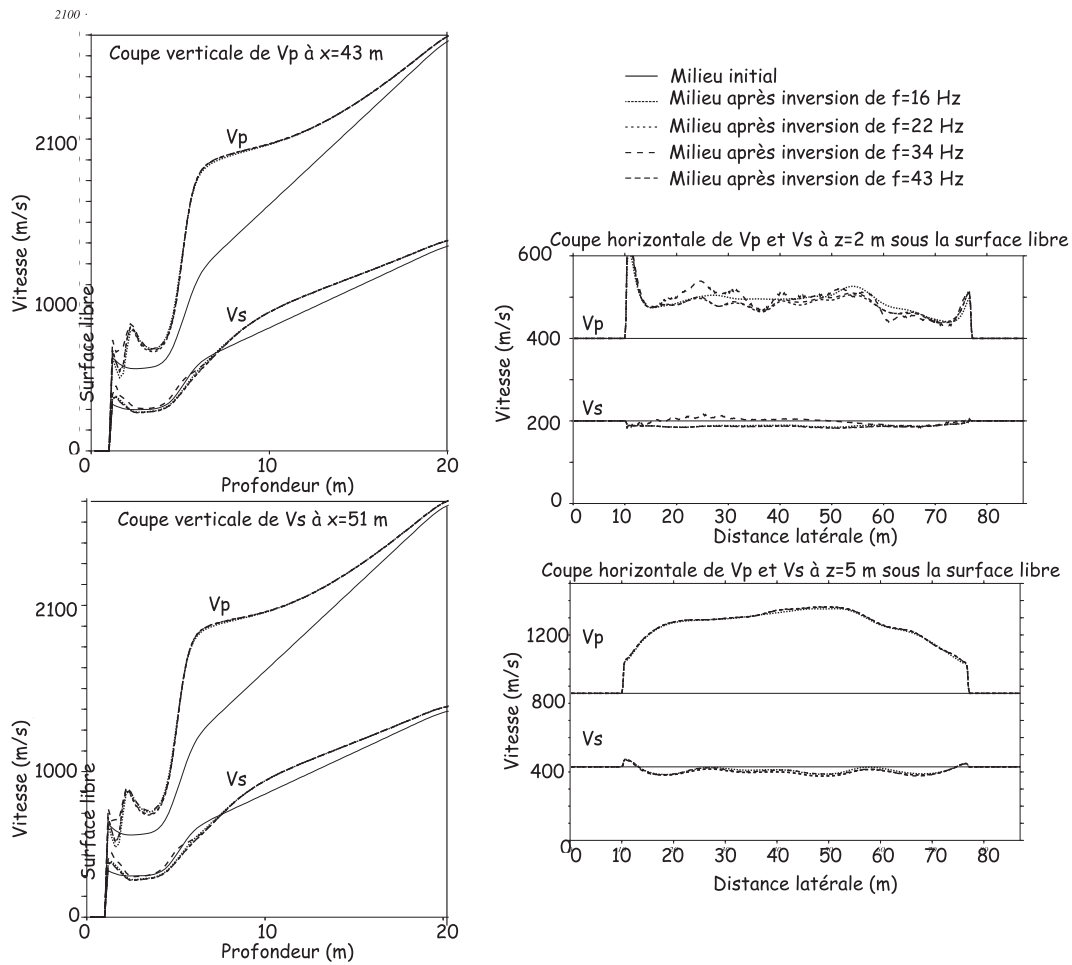


FIG. 5.50: Coupes verticales et horizontales avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Le modèle de vitesse V_p final est globalement plus rapide que le modèle initial et le modèle de vitesse V_s final évolue peu. Les zones PML sont larges de 10 m.

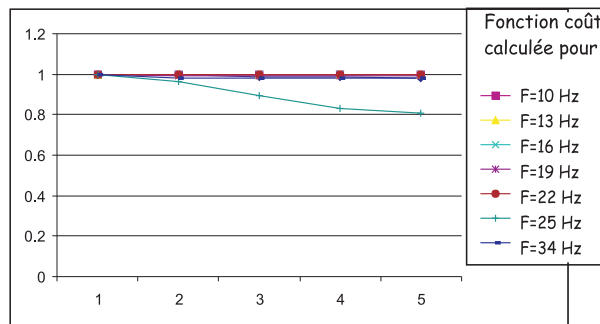


FIG. 5.51: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées. V_p et V_s sont inversés. Les données ne contiennent pas l'onde tardive.

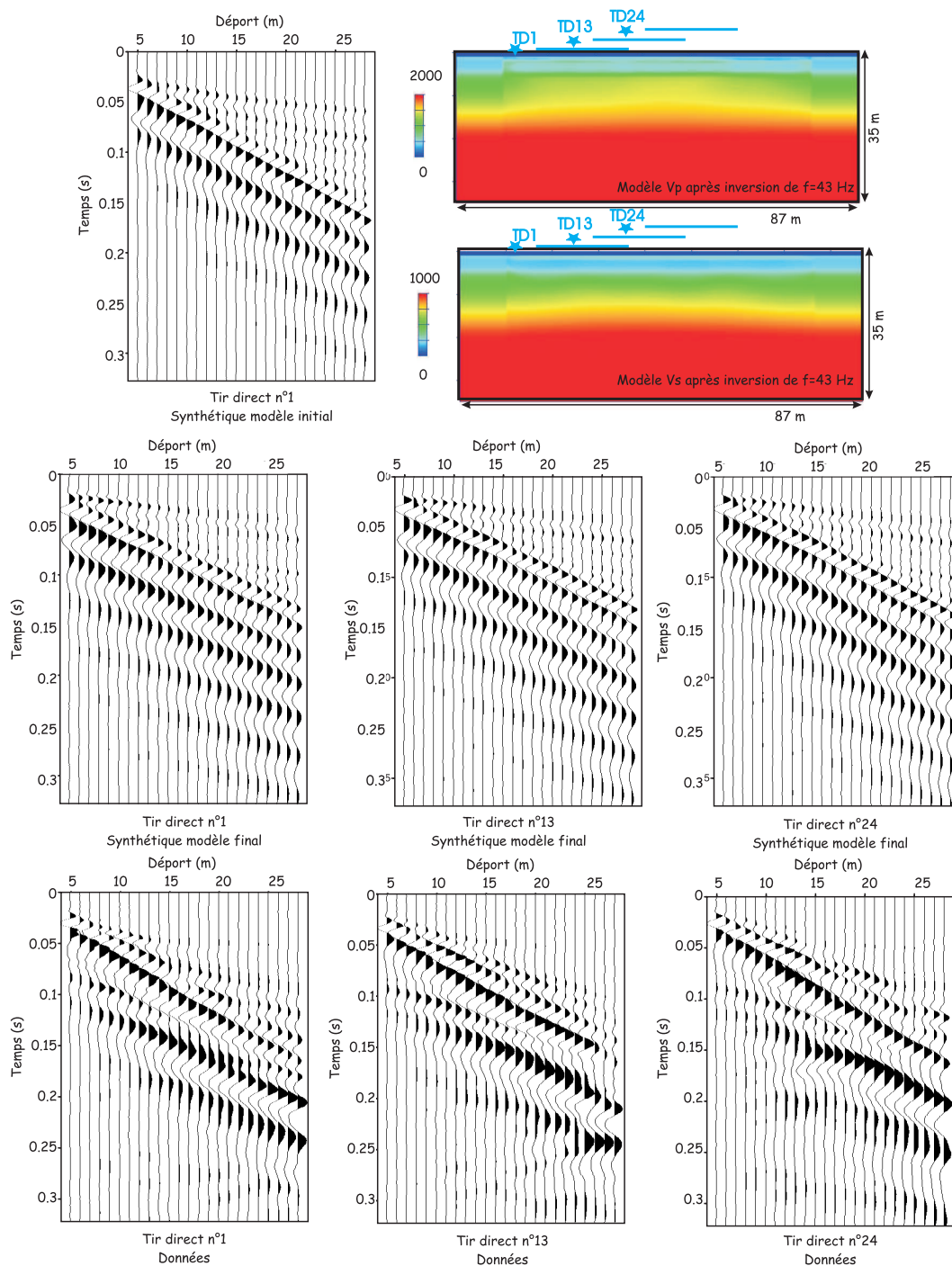


FIG. 5.52: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43Hz avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Les ondes autres que l'onde tardive basse fréquence, éliminée des données, sont bien reproduites.

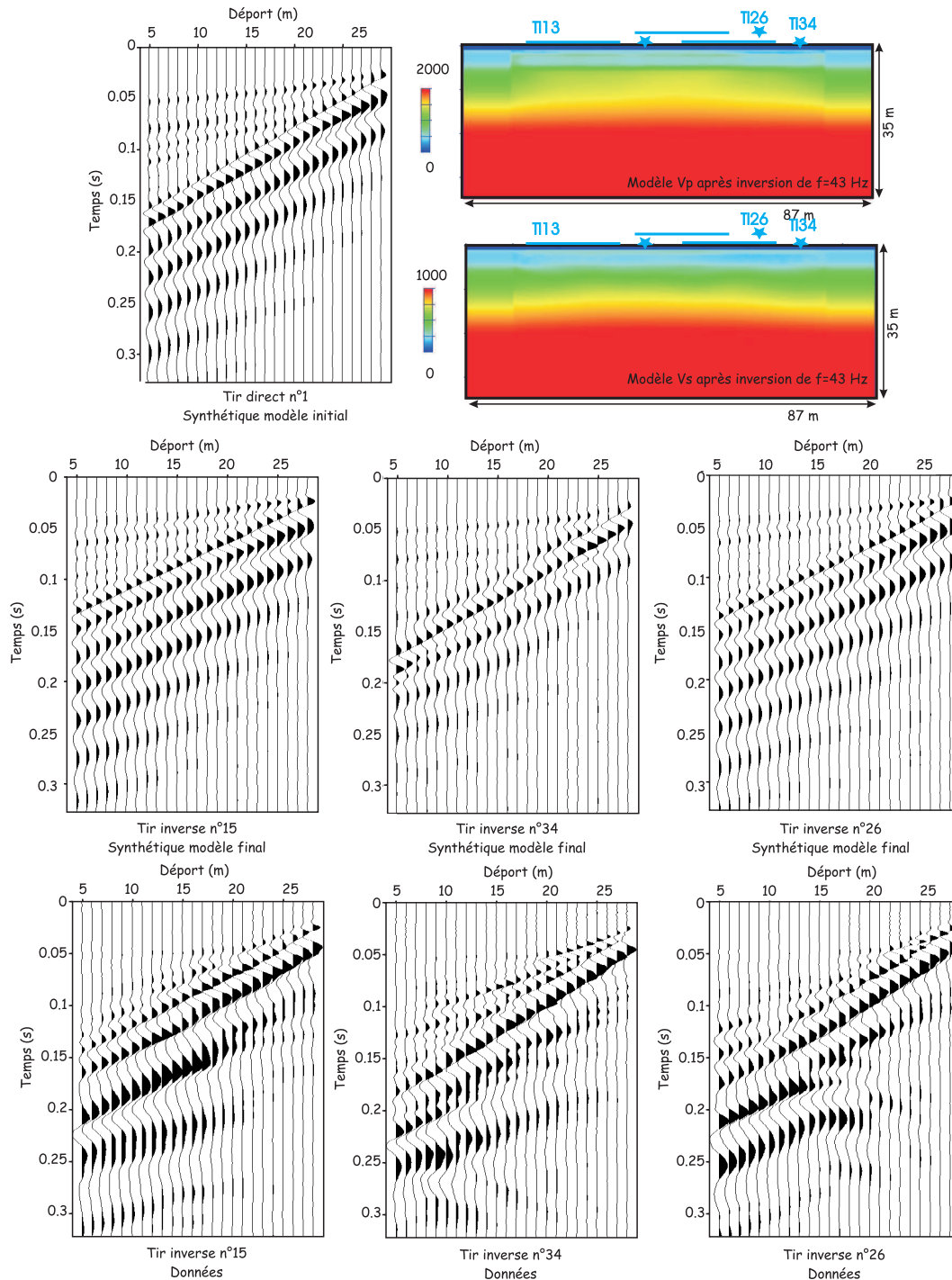


FIG. 5.53: Comparaison des sismogrammes synthétiques et des données avec le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43Hz avec des données où l'onde tardive basse fréquence est supprimée. Les ondes autres que l'onde tardive basse fréquence, éliminée des données, sont bien reproduites.

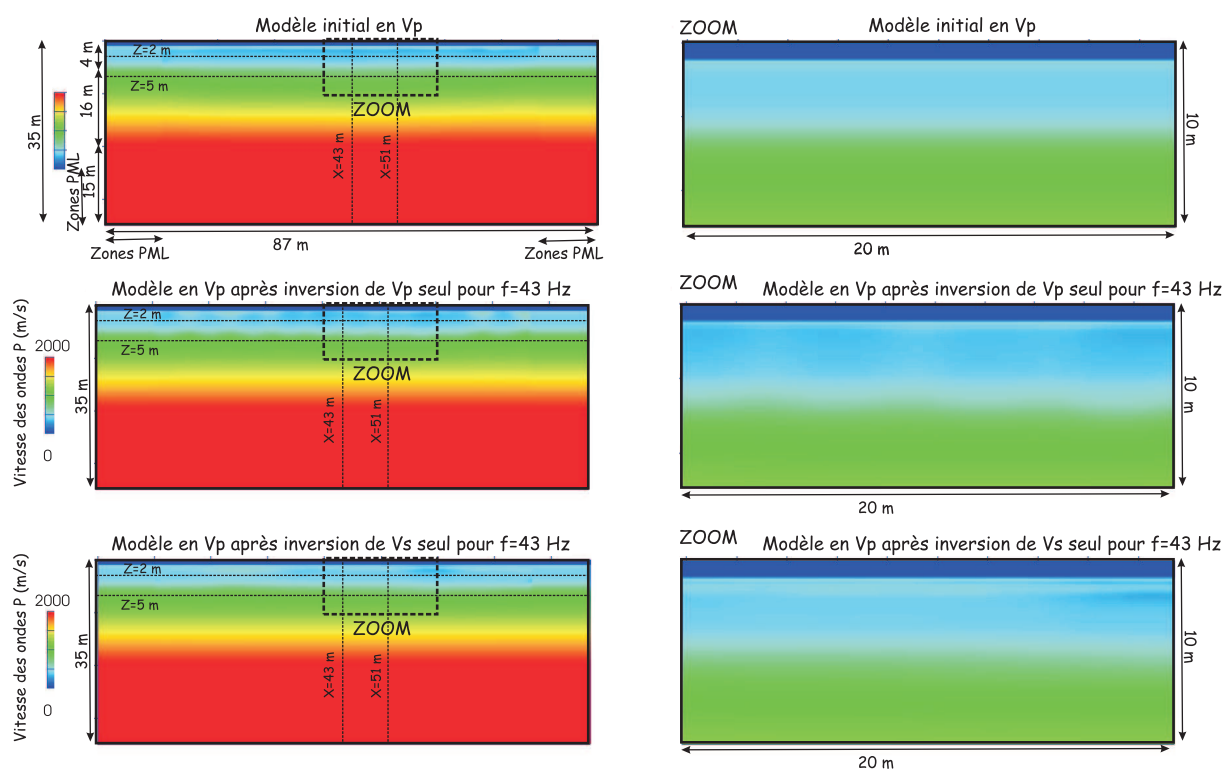


FIG. 5.54: *Modèle initial en V_p (haut), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_p seul avec les données réelles sans l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (milieu), modèle final obtenu à la fréquence 43Hz après inversion de V_s seul avec les données réelles sans l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique (bas). V_s est déduit via le rapport V_p/V_s égal à 2. Les milieux sont peu différents du milieu initial.*

l'inversion simultanée de V_p et V_s , à la différence du cas où l'onde tardive basse fréquence était présente.

Influence du coefficient d'amortissement

Nous avons également testé l'influence du coefficient d'amortissement (voir la section 4.4.4). La valeur de ce coefficient contrôle le rôle du Hessien diagonal (Sirgue, 2003). Plus ce coefficient est petit, plus il permet au modèle de s'éloigner du modèle initial. Plus il est grand, plus le modèle est contraint de suivre le modèle initial. Ce dernier cas permet d'éviter les instabilités mais empêche le milieu d'évoluer librement. Dans les cas précédents, la valeur de ce coefficient est intermédiaire et vaut 10^{-2} .

La figure 5.58 montre l'évolution des modèles en fonction de la valeur de ce coefficient pour une inversion simultanée de V_p et V_s avec l'onde tardive basse fréquence quand la source sismique est inversée. Plus il est faible, plus les variations des vitesses sont haute fréquence. À l'inverse, plus il est élevé, plus les variations sont faibles et lisses. Ceci a déjà été montré par (Ravaut, 2003) pour l'imagerie d'une zone beaucoup plus profonde (4 km de profondeur). Ainsi, par rapport au cas synthétique (section 4.4.4), le rôle de ϵ est beaucoup plus marqué dans les données réelles que dans les données synthétiques.

La figure 5.58 montre que les caractéristiques principales sont conservées lorsque le paramètre ϵ change. Les fonctions coût (figure 5.59) illustrent également une évolution équivalente pour les trois valeurs de ϵ testées. La similarité entre les modèles finaux obtenus avec différentes valeurs de ϵ permet de valider les images du milieu.

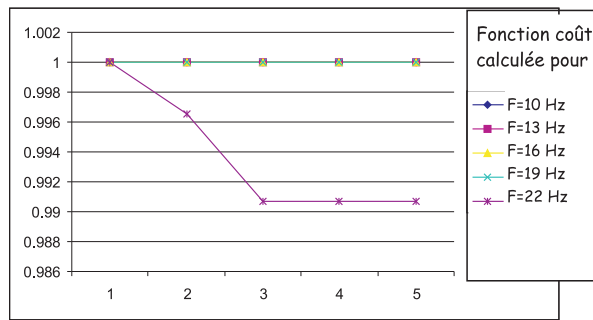


FIG. 5.55: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p seulement. L'onde tardive basse fréquence est éliminée.

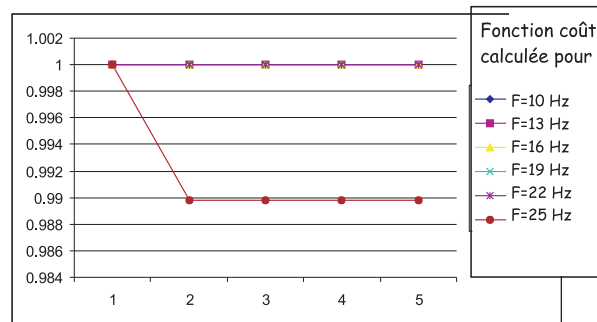


FIG. 5.56: Fonction coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_s seulement. L'onde tardive basse fréquence est éliminée.

Influence des dépôts sélectionnés

Enfin, nous évaluons l'influence de la sélection des données en fonction des dépôts. Nous effectuons une inversion en considérant uniquement les dépôts inférieurs à 15m. L'onde tardive basse fréquence n'est pas présente dans ces données. La source sismique est inversée. La figure 5.60 montre une comparaison entre les profils extraits des modèles finaux obtenus avec tous les dépôts (section 5.5.3) et avec les dépôts inférieurs à 15m.

Avec les dépôts inférieurs à 15 m seulement, les modèles de vitesse finaux présentent des caractéristiques similaires au cas où tous les dépôts sont utilisés dans l'inversion. Une zone de vitesse plus rapide au centre et une autre à gauche du modèle sont présentes pour le modèle issu de l'inversion de la fréquence 43Hz et le paramètre V_s (figure 5.60). Néanmoins, les contrastes de vitesse sont davantage marqués et le milieu en V_s est beaucoup plus rapide en profondeur. En réalité, les vitesses en profondeur sont moins bien contraintes lorsque les courts dépôts seuls sont utilisés que dans le cas où ils le sont tous, puisque l'ouverture du dispositif est plus petite.

De plus, le paramètre V_p a une allure différente du cas où tous les dépôts sont utilisés. La figure 5.60 montre que pour des faibles profondeurs (2 m), une anomalie de vitesse rapide en V_p est localisée au même endroit qu'une anomalie de vitesse rapide en V_s . Cependant, le profil vertical extrait à $x=43$ m (figure 5.60) montre que V_p et V_s sont localement très proches, voire égaux, ce qui est impossible physiquement pour ce type de milieu. Ce milieu paraît donc peu réaliste.

Enfin, la fonction coût présentée sur la figure 5.61 montre que dans l'ensemble, la fonction coût diminue moins que dans le cas où toutes les données sont prises en compte. Ceci indique que l'algorithme reste bloqué dans un minimum local.

Il semble donc que l'inversion avec les dépôts courts seuls contraignent moins bien les modèles que lorsque toutes les données sont utilisées. Par rapport au cas synthétique présenté dans la section 4.11, plusieurs facteurs entrent en jeu :

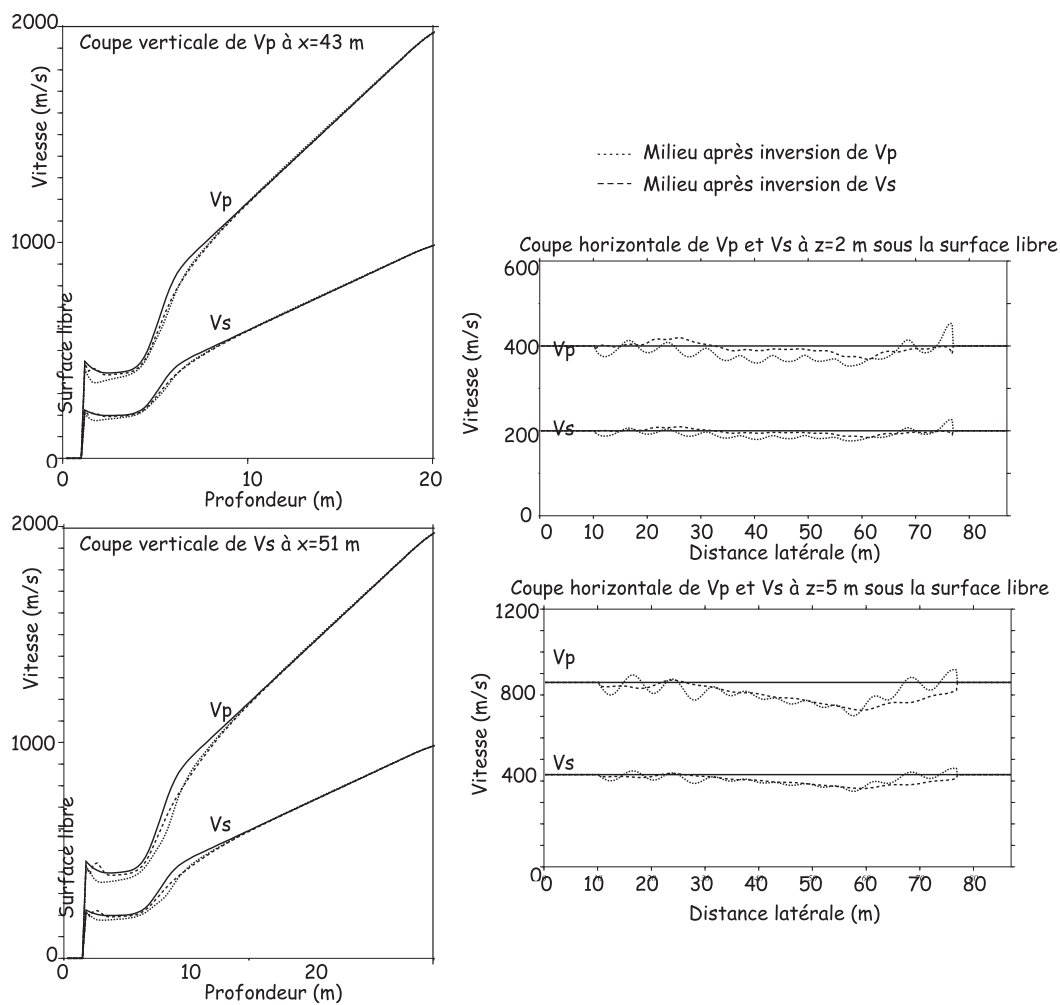


FIG. 5.57: Coupes verticales et horizontales en V_p et V_s pour un seul des deux paramètres inversés, l'autre étant calculé via le rapport V_p/V_s . L'onde tardive basse fréquence est éliminée. Les milieux sont peu différents du milieu initial. Les zones PML sont larges de 10 m.

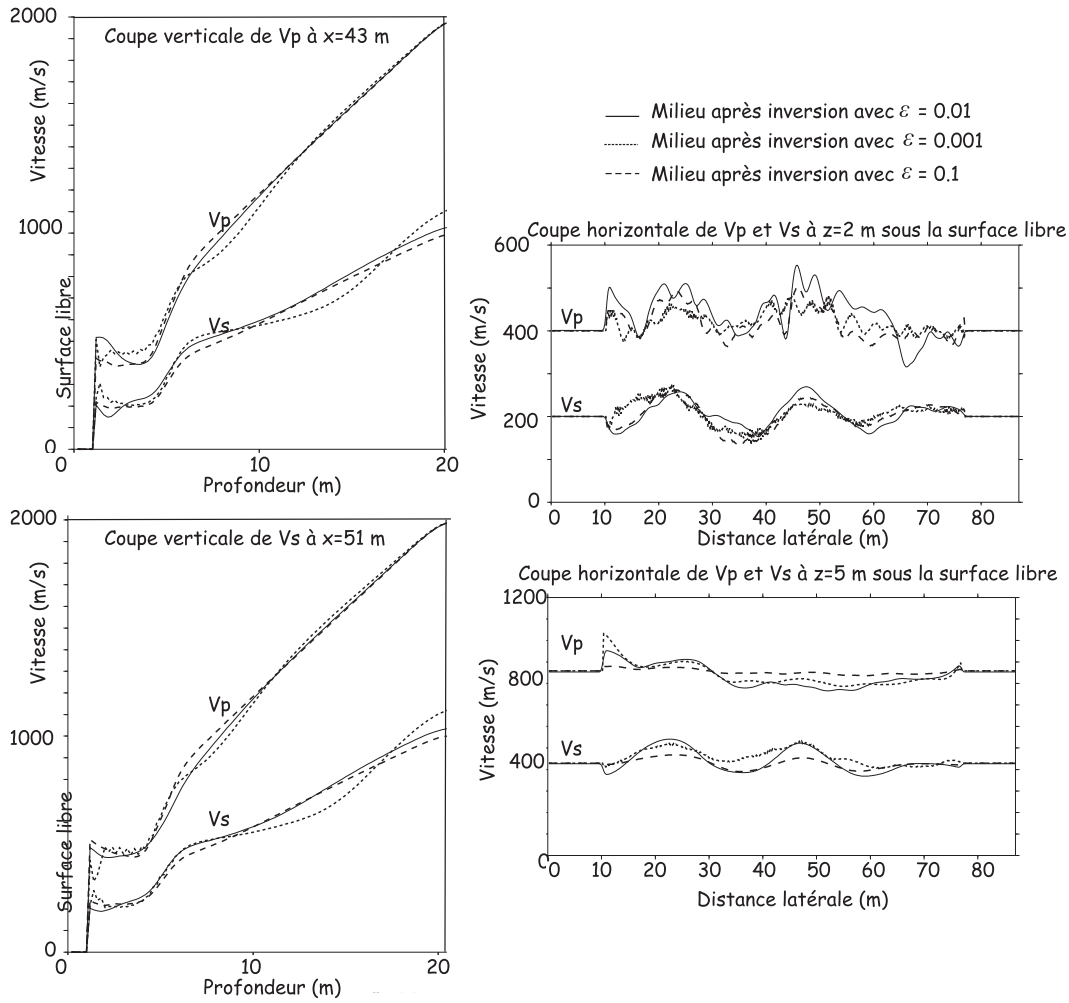


FIG. 5.58: Coupes extraites des modèles finaux pour l'inversion de V_p et V_s en fonction de la valeur de ϵ , coefficient d'amortissement. L'onde tardive basse fréquence est incluse dans les données. La source sismique est inversée. Les zones PML sont larges de 10 m. L'amplitude des perturbations est plus fortes lorsque le coefficient d'amortissement ϵ est plus faible. Les milieux sont plus lisses lorsque le coefficient d'amortissement ϵ est plus fort.

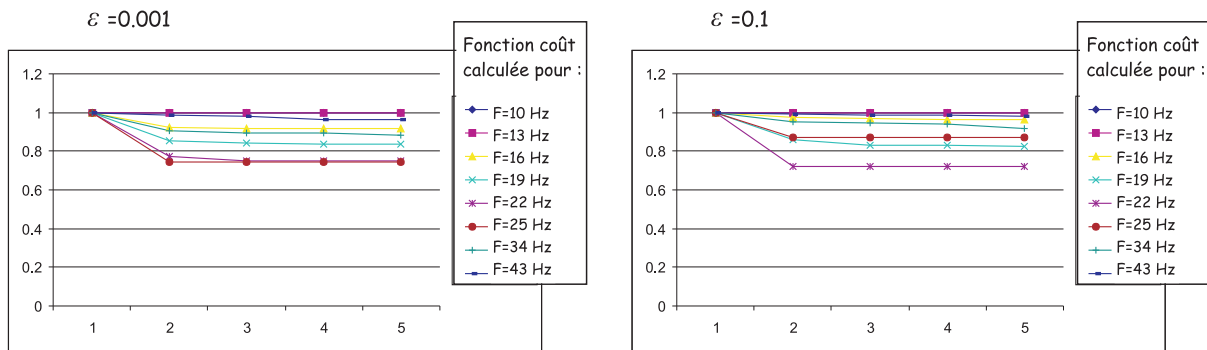


FIG. 5.59: Fonctions coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour différentes valeurs de ϵ , coefficient d'amortissement. A gauche : fonction coût pour $\epsilon = 10^{-3}$. A droite : fonction coût pour $\epsilon = 10^{-1}$. Les fonctions coût ont des allures similaires. Le nombre d'itérations effectué par fréquence est le même dans les deux cas et dans le cas où $\epsilon = 10^{-2}$.

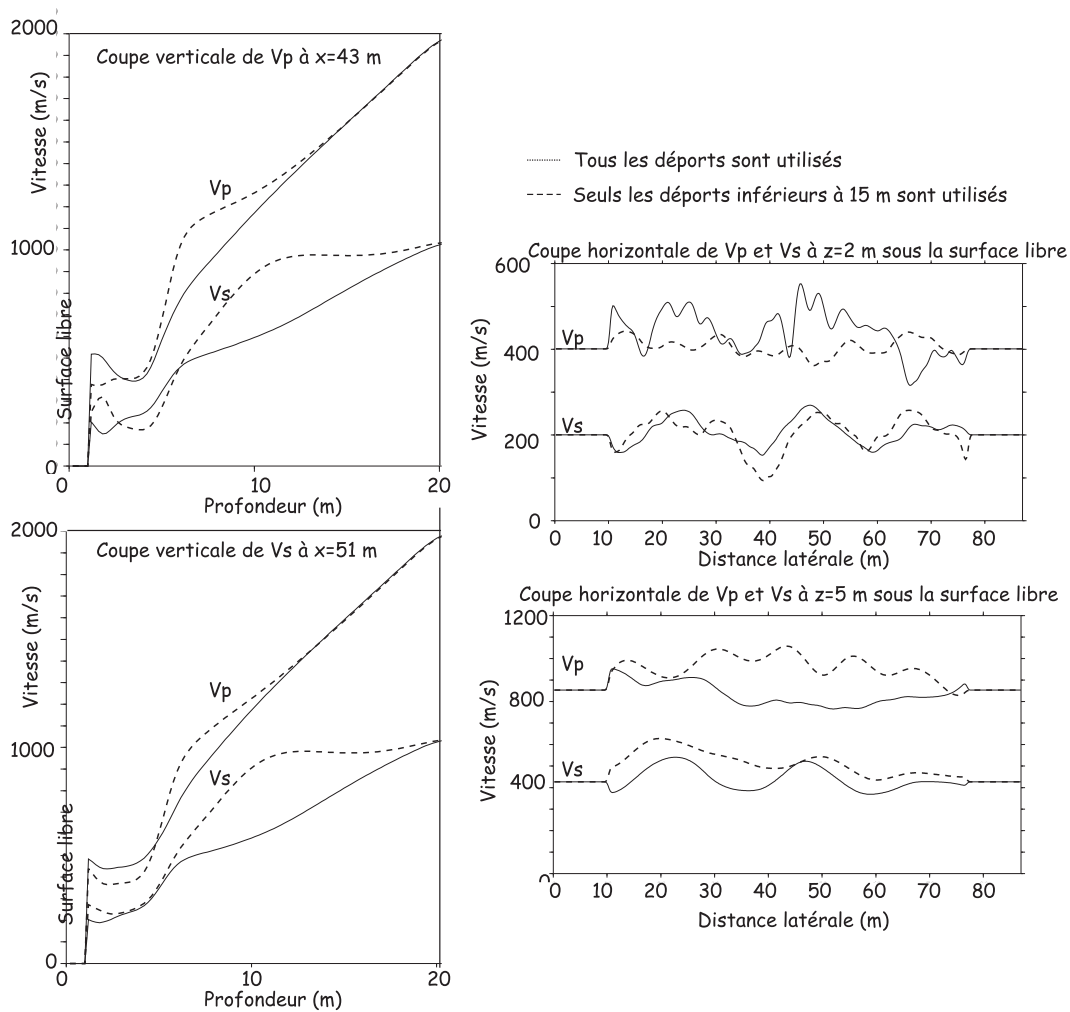


FIG. 5.60: Coupes extraites des modèles finaux pour l'inversion de V_p et V_s en fonction du dépôt maximal pour sélectionner les données contenant l'onde tardive basse fréquence. La source sismique est inversée. Les zones PML sont larges de 10 m. Notons que pour la coupe verticale extraite des modèles à $x=43$ m, les vitesses V_p et V_s sont très proches à faible profondeur, ce qui est peu réaliste physiquement.

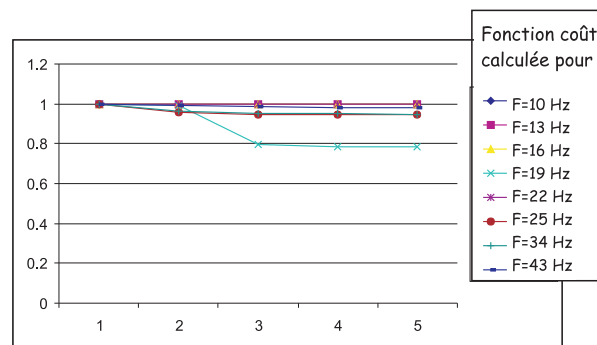


FIG. 5.61: Fonctions coût pour les différentes fréquences inversées avec l'inversion de V_p et V_s pour l'inversion de données dont le dépôt est inférieur à 15m uniquement.

- la source n'est pas bien connue. Ceci est plus important pour les proches dépôts que pour les grands dépôts.
- le milieu de propagation est mal connu.
- seule la composante verticale des sismogrammes est utilisée.
- le milieu de propagation n'est pas homogène et les ondes réfractées apportent des informations qui contraignent mieux le modèle final.

Ceci explique que l'inversion converge moins bien que dans le cas où les grands dépôts sont inclus dans les données, à la différence des données synthétiques.

Synthèse des tests effectués

Dans cette étude, nous avons testé l'influence de divers facteurs et tenté de détecter la cavité de plusieurs manières. Nous avons ainsi évalué le rôle de :

- le ou les paramètre(s) inversé(s) : V_p et V_s , V_p seul ou V_s seul
- l'inversion de la source sismique
- l'élimination de l'onde tardive basse fréquence
- le choix du coefficient d'amortissement
- le fenêtrage des données

Influence du choix des paramètres inversés Nous avons vu que l'inversion de V_p ne donne pas le même milieu que l'inversion de V_s . Ceci est en partie lié au fait que V_p et V_s sont reconstruits différemment par l'inversion. Ceci peut également indiquer que le rapport V_p/V_s n'est pas constant dans le milieu.

De plus, les modèles de V_p et V_s issus de l'inversion simultanée de V_p et V_s ou de l'inversion d'un seul paramètre V_p et V_s sont similaires lorsque toutes les ondes sont utilisées. Ceci indique que les paramètres V_p et V_s extraient des informations différentes des données et s'influencent peu mutuellement.

Inversion de la source sismique Nous avons vu l'influence déterminante de l'inversion de la source sismique. Celle-ci doit donc être inversée pour obtenir des modèles de vitesse réalistes.

Sélection des ondes prises en compte Lorsque l'onde tardive basse fréquence est prise en compte, des hétérogénéités latérales sont reconstruites. Deux anomalies de vitesses des ondes P et S plus rapides apparaissent à gauche et au centre du modèle. Les sismogrammes calculés dans le modèle final montrent que l'inversion ajuste principalement l'onde tardive basse fréquence.

Lorsque cette onde est éliminée, les hétérogénéités latérales sont plus faibles. Le milieu est globalement plus rapide. Les ondes contenues dans les données inversées sont bien ajustées dans le modèle final.

Ainsi, l'inversion de l'onde tardive basse fréquence influence fortement les modèles de vitesse reconstruits. Nous avons montré dans la section 5.3.3 que l'onde tardive basse fréquence ne peut être expliquée comme un effet latéral. Le milieu issu de l'inversion des données complètes est donc le milieu que nous considérons comme le plus réaliste.

Influence du coefficient d'amortissement Nous avons vu qu'un fort coefficient d'amortissement (égal à 10^{-1}) conduit à un modèle final plus lisse et plus proche du modèle initial que lorsque le coefficient d'amortissement est plus faible (égal à 10^{-3}).

Dans l'ensemble, les modèles obtenus avec différentes valeurs du coefficient d'amortissement sont similaires et les fonctions coût évoluent de la même manière. Ceci permet de s'assurer de la validité des résultats obtenus.

Influence du déport sélectionné Lorsque les courts déports seuls sont utilisés, l'ouverture maximale du dispositif et donc l'éclairage du milieu sont beaucoup plus limités. Le milieu final est peu réaliste en raison du rapport V_p/V_s proche de 1. Nous n'avons donc pas poursuivi dans cette voie.

Une cavité détectée ? Ainsi, nous avons réussi à mettre en évidence deux zones de vitesses V_p et V_s plus rapides. Ces zones permettent d'expliquer certaines arrivées contenues dans les sismogrammes. Plus particulièrement, l'onde tardive basse fréquence est bien reproduite.

La zone de vitesse plus rapide située au centre du milieu pourrait correspondre à la signature de la cavité. Cependant, par rapport à la signature de la cavité mise en évidence dans les données synthétiques, la zone de vitesse rapide est relativement étendue (largeur de 5 m environ) en V_s . Sa forme est caractéristique de l'inversion d'une longueur d'onde précise (correspondant à l'inversion de la fréquence $19Hz$), indiquant que les hautes fréquences ne permettent pas d'affiner l'image de la cavité. Si cette zone contient effectivement la cavité, sa forme, sa taille et sa profondeur ne sont pas bien caractérisées. De plus, la structure du milieu en V_p ne correspond pas à la signature de la cavité dans le cas synthétique.

Ainsi, l'inversion des formes d'onde élastiques appliquée au cas de Jargeau pour la détection d'une cavité maçonnée en proche surface ne permet pas de caractériser cette cavité. Il est possible que cette dernière n'ait pas les caractéristiques choisies dans l'exemple synthétiques. Ainsi, elle pourrait être de taille différente (si elle est plus petite, il devient très difficile de la détecter), de profondeur différente (elle est moins bien éclairée et donc moins facilement détectable) ou de forme différente. Il est également possible que la complexité du milieu environnant masque sa signature (voir annexe B pour la signature dans les sismogrammes d'une cavité vide dans un milieu hétérogène).

Par rapport au cas synthétique, les images issues de l'inversion mettent en évidence la complexité du milieu de propagation, rendant plus difficile la caractérisation d'un objet diffractant de petite taille.

Afin de mieux imager la cavité avec les données réelles disponibles, plusieurs pistes sont possibles :

- le macromodèle de vitesse peut être amélioré. Le milieu issu de l'inversion de V_p et V_s avec des données contenant l'onde tardive basse fréquence et inversion de la source sismique pourrait servir à son tour de modèle initial puisqu'il reproduit mieux les données
- la forme de la cavité maçonnée (circulaire) pourrait être considérée comme connue a priori. Un problème inverse permettant d'en déterminer la taille et la position pourrait être résolu, suivant la méthode développée par Ribodetti (1998).
- la connaissance de la source pourrait être améliorée. La source utilisée pourrait être extraite d'autres techniques que le blanchiment, comme l'explique Ravaut (2003). De plus, sa signature fréquentielle peut varier selon les tirs et introduire certains artefacts. Grandjean & Leparoux (2004) ont par exemple montré l'effet d'un objet diffractant situé juste sous la source sur le contenu fréquentiel de cette dernière.

Par ailleurs, pour déterminer si la zone de vitesse plus rapide située au centre correspond effectivement à la cavité maçonnée, il faudrait effectuer un sondage ou avoir recours à d'autres méthodes géophysiques.

Enfin, si d'autres acquisitions sismiques étaient réalisables dans le même zone, il faudrait enregistrer à la fois la composante verticale et la composante horizontale des sismogrammes, les proches déports (en particulier, enregistrer l'ondelette temporelle de la source) et étendre la dispositif de manière à mieux éclairer le milieu. Enfin, pour chaque ligne de récepteurs, il faudrait effectuer un tir direct et un tir inverse.

5.6 Conclusion

Nous avons appliqué la méthode d'inversion des formes d'onde élastique développée dans cette thèse au cas de données réelles (sismogrammes verticaux) acquises pour la détection de cavités souterraines en proche surface et plus généralement l'imagerie de la subsurface.

Les milieux de subsurface sont des milieux très complexes et très hétérogènes, dans lesquels de nombreux phénomènes se produisent : diffractions multiples sur des hétérogénéités ou à la surface libre, piégeage d'énergie dans certaines zones, couches à moindre vitesse ... La connaissance de la subsurface est donc un problème délicat, d'autant plus que les macromodèles sont parfois difficiles à obtenir.

Nous avons tout d'abord essayé de construire un macromodèle de vitesse avec des méthodes standard comme la tomographie des écarts de temps des premières arrivées ou l'analyse spectrale des ondes de surface. La première méthode ne permet pas d'obtenir des informations au-delà de 7m de profondeur. Or les ondes de surface sont influencées par les structures de vitesse à des profondeurs supérieures. La deuxième méthode reproduit correctement l'onde de surface mais modélise mal les ondes réfractées. Or nous devons construire un modèle qui explique les différentes arrivées à moins d'une demi longueur d'onde. A l'aide de ces modèles, nous avons donc construit par une méthode essais-erreurs d'autres modèles de vitesse, jusqu'à en trouver un qui reproduit correctement la cinématique des différentes ondes. Il sert de modèle initial pour l'inversion des formes d'onde élastique.

Ce macromodèle ne prend pas en compte les hétérogénéités latérales. L'algorithme, inversion linéarisée, cherche à améliorer ce modèle mais ne peut de toute façon pas s'en éloigner trop puisqu'elle explore un domaine voisin du modèle initial dans l'espace des modèles. Elle cherche à trouver le minimum global mais peut rester bloquée dans un minimum local si le macromodèle de vitesse est trop éloigné du milieu à reconstruire.

Nous avons ensuite appliqué l'inversion des formes d'onde élastique aux données réelles. Nous avons considéré l'inversion couplée de V_p et V_s à l'aide des sismogrammes verticaux. Nous avons en effet inversé le paramètre V_s puisque ce dernier contrôle la vitesse des ondes de surface, dominantes dans les sismogrammes. Nous avons toutefois effectué également l'inversion de V_p uniquement ou de V_s uniquement afin de comparer les images finales.

Nous avons testé l'influence du choix des données inversées (par l'élimination de l'onde tardive basse fréquence et la sélection des données en fonction du départ), l'influence du dispositif d'acquisition et l'influence du paramètre d'amortissement.

Les milieux que nous avons obtenus avec inversion de toutes les données, de V_p et de V_s et de la source sismique montrent que deux zones de vitesses V_p et V_s plus rapides sont détectées au centre et à gauche du milieu. Ce milieu permet de bien reproduire certaines ondes présentes dans les sismogrammes, particulièrement l'onde tardive basse fréquence. L'anomalie centrale correspond possiblement à la cavité. Néanmoins, la forme et la taille de l'anomalie sont mal déterminées. De plus, les oscillations présentes dans le milieu en V_s sont caractéristiques d'une longueur d'onde et indiquent que l'algorithme reste bloqué dans un minimum local. Nous ne pouvons ensuite affiner l'image de V_s .

Ainsi, nous n'avons pas caractérisé la cavité maçonnée. Cet exemple illustre les difficultés et limites rencontrées avec une méthode linéarisée pour l'imagerie de milieux complexes (et d'hétérogénéités fortement contrastées) à partir de sismogrammes verticaux. Il met en évidence l'importance du macromodèle de vitesse, de la source sismique, du choix des données inversées et des paramètres utilisés.

Cette méthode vient en complément d'autres méthodes sismiques utilisées pour la détection de cavités souterraines, comme la méthode basée sur les ondes de surface développée par Leparoux et al. (2000). Ces derniers ont réussi à isoler l'empreinte de la cavité maçonnée dans les données (figure 5.62). Cependant un traitement différent a été nécessaire : ils ont utilisé la correction DLMO

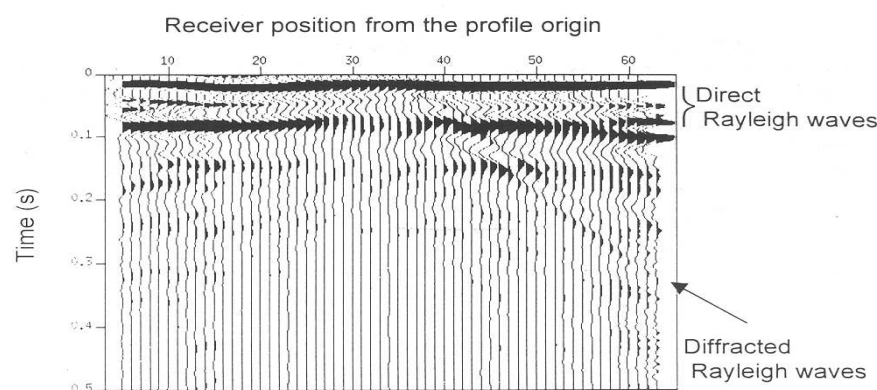


FIG. 5.62: Figure extraite de l'article de Leparoux et al. (2000). Profil en récepteurs communs sommés après correction DLMO

(Dynamic Linear Move Out) permettant d'horizontaliser l'onde de Rayleigh et d'isoler la diffraction par la cavité.

Pour d'améliorer les résultats, différentes pistes sont donc envisageables :

- le milieu de propagation pourrait être mieux connu et contenir des hétérogénéités latérales, permettant de déjà localiser des zones de vitesse plus rapides. Il pourrait également être calibré à l'aide d'autres méthodes géophysiques ou des sondages par exemple. Le milieu issu de l'inversion de toutes les données sismiques pour déterminer V_p et V_s simultanément en ajustant la source sismique pourrait servir de modèle initial à son tour.
- la composante horizontale des sismogrammes, si elle était disponible, pourrait également être inversée. En effet, les tests synthétiques réalisés dans la partie 4.10.2 montrent que les résidus horizontaux contiennent des ondes diffractées par une cavité qui pourraient apporter des informations sur sa localisation, particulièrement sur sa profondeur. De plus, des récepteurs localisés plus près de la source sismique permettraient de mieux connaître cette dernière.
- le dispositif d'acquisition pourrait être modifié : chaque tir sismique pourrait être enregistré par davantage de récepteurs et couvrir une distance plus importante de manière à mieux éclairer le milieu et former un dispositif grand angle. Ceci permettrait d'introduire un spectre de nombres d'onde plus étendu dans les images et de mieux imager le milieu.
- une autre méthode d'obtention de la source que le blanchiment pourrait être utilisée de manière à affiner sa connaissance. L'idéal serait de calculer une source par tir, de manière à prendre en compte la variabilité des tirs mais également l'influence sur la source sismique de certains diffractants présents dans le milieu, comme une cavité (Grandjean & Leparoux, 2004).

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

L'imagerie quantitative multiparamètres du milieu à partir de données sismiques constitue un problème inverse non linéaire. Afin de le résoudre, nous avons implémenté et appliqué à des données réelles et synthétiques l'inversion des formes d'onde élastique en deux dimensions dans un milieu linéaire isotrope.

Une méthode d'optimisation locale

L'inversion des formes d'onde élastique est une méthode d'optimisation locale, qui ne peut explorer des régions de l'espace des modèles trop éloignées du modèle initial. C'est pourquoi elle nécessite au préalable la connaissance d'un macromodèle de vitesse, qui doit être suffisamment précis pour reproduire les principales arrivées à moins d'une demi-longueur d'onde. L'inversion des formes d'onde élastique permet ensuite d'imager précisément les diffractants présents dans le milieu.

L'application de la méthode aux données réelles illustre l'importance de ce macromodèle. Il doit en effet permettre de modéliser précisément l'onde de Rayleigh, très énergétique, qui porte 67% de l'énergie. De plus, il est souhaitable qu'il varie en deux dimensions, de manière à contenir déjà une empreinte des hétérogénéités latérales.

Sensibilité de l'inversion aux différents facteurs

L'inversion des formes d'onde élastique s'appuie sur l'inversion des sismogrammes horizontaux et verticaux. Les performances de l'inversion dépendent de plusieurs facteurs : l'éclairage du milieu par le dispositif d'acquisition, l'approximation choisie pour calculer les dérivées de Fréchet, le choix des fréquences inversées, le choix des paramètres inversés et le préconditionnement des données.

Le dispositif d'acquisition contrôle la couverture en nombre d'onde du modèle. Ainsi, des dispositifs grand angle permettent d'obtenir des images du milieu de meilleure qualité en raison de leur contenu en nombre d'onde plus important.

L'approximation choisie pour calculer les dérivées de Fréchet influence également la qualité des résultats. Ainsi, l'approximation de Born permet de mieux imager les diffractants avec des dispositifs en réflexion.

Les fréquences inversées doivent être choisies de manière à assurer la continuité du spectre de nombre d'onde imagé. Néanmoins, une certaine redondance est préconisée, particulièrement dans le cas où le milieu contient une surface libre, et donc des ondes de surface.

Le choix des paramètres peut influencer la qualité des résultats dans certaines configurations. Deux paramètres indépendants sont inversés. Il peut s'agir de vitesses sismiques ou de coefficients de Lamé par exemple. Avec l'approximation de Born et un dispositif en réflexion, les inversions effectuées avec différents couples de paramètres donnent des images voisines.

Enfin, le préconditionnement des données permet d'améliorer les performances de l'inversion. Pour les courts déports, la relation entre perturbations des données et des paramètres est plus linéaire que pour les grands déports. La sélection et l'introduction des données en fonction du déport permet donc de prendre en compte la non linéarité du problème inverse. En présence d'une surface libre, la sélection des courts déports avec un macromodèle bien connu contenant une surface libre permet dans un premier temps de ne prendre en compte que les ondes de volume diffractées. L'insertion de déports plus grands contenant des ondes de surface permet ensuite d'amplifier les anomalies détectées et d'en affiner le contour.

Influence de la surface libre

La présence de la surface libre génère des ondes de surface très énergétiques qui dominent les sismogrammes. Le milieu de propagation à proximité immédiate de la surface libre est généralement très complexe. Par exemple, le rapport V_p/V_s peut varier notablement en raison de la présence d'eau, des couches à moindre vitesse peuvent exister, des réflexions latérales peuvent se produire ... Ce milieu de propagation très hétérogène donne lieu à des réflexions et des diffractions multiples.

Les ondes de surface peuvent être prises en compte dans l'inversion des formes d'onde élastique puisque le problème direct associé est non linéarisé et modélise la propagation des ondes élastique. Le problème direct est en effet résolu par une méthode de différences finies qui modélise précisément la surface libre.

L'application de la méthode à des données synthétiques de subsurface montre qu'il est possible d'imager des anomalies dont l'amplitude varie de 20% par rapport au modèle initial. Néanmoins, la présence de la surface libre et des ondes de surface nécessite d'utiliser davantage la redondance en nombre d'onde présente dans les données. Ainsi, des images plus précises sont obtenues lorsque les fréquences inversées sont plus nombreuses.

Contrastes des anomalies imagées

Les exemples numériques montrent que les diffractants reconstruits dans un macromodèle parfaitement connu peuvent atteindre des contrastes de vitesse de l'ordre de 20%. Avec un problème direct non linéarisé, des diffractions multiples peuvent être prises en compte et permettre la reconstruction de plusieurs anomalies.

La détection d'anomalies de forts contrastes est difficile avec une méthode linéarisée, puisque des perturbations des paramètres dépendant linéairement des perturbations des données sont considérées. Les exemples synthétiques effectués avec des anomalies fortement non linéaires (cavité vide ou anomalie très forte) montrent que la détection d'une anomalie très contrastée est possible lorsque le macromodèle est parfaitement connu puisque la forme et la taille de l'anomalie sont bien reconstruites. En revanche, la variation d'amplitude est sous-estimée. La caractérisation d'anomalies fortes devient plus difficile quand le macromodèle est mal connu.

Inversion de données réelles

Avec les données synthétiques, le modèle de vitesse initial et la source sismique sont parfaitement connus. De plus, les composantes verticales et horizontales des sismogrammes sont utilisées. Avec les données réelles étudiées, le macromodèle de vitesse est mal connu, seules les données verticales sont disponibles, la source est estimée. De plus, nous n'avons pas accès aux données à faible déport, ne contenant pas d'onde de surface et le déport maximal de 29m limite l'éclairage du milieu.

Ces différences expliquent les difficultés rencontrées avec les données réelles pour la caractérisation d'une anomalie fortement contrastée et de petite taille dans un milieu de propagation très complexe, donnant lieu à des ondes multiples. Les tests synthétiques correspondant montrent néanmoins qu'il est possible de détecter cette anomalie dans le cas idéal, en particulier grâce au

paramètre V_s . Cependant, la forme et la profondeur de l'anomalie sont mal déterminées et son amplitude est sous-estimée.

Les milieux que nous avons obtenus avec inversion de toutes les données, de V_p et de V_s et de la source sismique montrent que deux zones de vitesses V_p et V_s plus rapides sont détectées au centre et à gauche du milieu. Ce milieu permet de bien reproduire certaines ondes présentes dans les sismogrammes, particulièrement l'onde tardive basse fréquence. La cavité est localisée a priori dans la zone centrale plus rapide. Néanmoins, la forme et la taille de l'anomalie sont mal déterminées. De plus, les oscillations présentes dans le milieu en V_s sont caractéristiques d'une longueur d'onde et indiquent que l'algorithme reste bloqué dans un minimum local. Nous ne pouvons ensuite affiner l'image de V_s .

Ainsi nous n'avons pas caractérisé la cavité maçonnée. Cet exemple illustre les difficultés et limites rencontrées avec une méthode linéarisée pour l'imagerie de milieux complexes (et d'hétérogénéités fortement contrastées) à partir de sismogrammes verticaux. Il illustre l'importance de la connaissance du modèle de vitesse initial, de l'inversion de la source sismique qui devrait être mieux connue, du choix des données inversées, de la géométrie du dispositif d'acquisition et l'influence des paramètres.

Pour améliorer ces résultats, plusieurs pistes sont possibles. L'acquisition et la prise en compte de données horizontales permettraient de mieux imager le milieu. La calibration du macromodèle de vitesse par d'autres méthodes géophysiques ou par des sondages permettrait également de la calibrer. Un macromodèle variant latéralement situerait les hétérogénéités principales, dont la cavité. De plus, Le dispositif d'acquisition pourrait être modifié, de manière à éclairer le milieu sous des angles différents, à imager ainsi un spectre de longueurs d'onde plus étendu et à enregistrer les proches déports. Ensuite, une amélioration des prétraitements, dont la connaissance de la source sismique, pourrait également permettre d'améliorer les résultats. Enfin, la prise en compte d'effets latéraux aiderait éventuellement à comprendre certains phénomènes.

Implémentation en parallèle

D'un point de vue purement pratique, une possibilité pour accélérer la convergence consiste à paralléliser le code. Pour l'instant, certaines commandes MPI existent mais elles sont reliées à l'utilisation du logiciel MUMPS pour la résolution du problème direct.

Il pourrait également être intéressant de demander les calculs directs à différentes grappes de PC.

Modélisation en trois dimensions

L'inversion des formes d'onde élastique a été développée en deux dimensions. Le passage à trois dimensions est nécessaire pour prendre en compte des effets latéraux. Néanmoins résoudre le problème inverse en trois dimensions s'avère extrêmement coûteux numériquement et n'est pas réaliste pour le moment. Ceci passe obligatoirement par une implémentation préalable en parallèle.

Vers d'autres applications

Nous avons appliqué l'inversion des formes d'onde élastique à des données de subsurface acquises pour la détection de cavités souterraines. Ces milieux sont très complexes et nous avons vu qu'ils rendent la détection d'une anomalie fortement non linéaire difficile.

La méthode peut également être appliquée à des échelles différentes, pour la caractérisation de zones de faille par exemple, ou encore l'imagerie en profondeur de zones de subduction. Dans des configurations moins complexes que la subsurface, il serait intéressant de voir comment l'inversion linéarisée fonctionne et les informations qu'elle apporte sur le milieu.

Bibliographie

- Abraham, O., Leparoux, D., Bitri, A., Grandjean, G., & Milojevic, Y. (2001). Détection de cavités non maçonnées à l'aide d'ondes de surface. Rapport du projet national criterre. thème 1 : Reconnaissance des anomalies physiques de terrain, LCPC.
- Abramowitz, M. & Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York.
- Agudelo, W. (2005). *Imagerie sismique quantitative de la marge convergente d'Equateur-Colombie : application des méthodes tomographiques aux données de sismique réflexion multi-trace et réfraction-réflexion grand angle des campagnes SISTEUR et SALIERI*. Ph.D. thesis, Université Nice Sophia Antipolis.
- Aki, K. & Richards, P. (2002). *Quantitative seismology, theory and methods, second edition*. University Science Books, Sausalito, California.
- Alford, R., Kelly, K., & Boore, D. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**(6), 834–842.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., & L'Excellent, J.-Y. (2000). Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.*, **184**, 501–520.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., Koster, J., & L'Excellent, J.-Y. (2001). A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, **23**(1), 15–41.
- Andrews, D. & Ben-Zion, Y. (1997). Wrinkle-like slip pulse on a fault between different materials. *Journal of Geophysical Research*, **102**(B1), 553–571.
- Bamberger, A., Chavent, G., & Lailly, P. (1980). Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire. Rapports de recherche 41, INRIA.
- Ben Menahem, A. & Beydoun, W. (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general heterogeneous media -i. general theory. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 87–234.
- Bérenger, J. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Geophysics*, **114**, 185–200.
- Beres, M., Luetscher, M., & Olivier, R. (2001). Integration of ground penetrating radar and micro-gravimetric methods to map shallow cavities. *Journal of Applied Geophysics*, **46**, 249–262.
- Beydoun, W. & Tarantola, A. (1988). First born and rytov approximations : Modelling and inversion conditions in a canonical example. *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**, 1045–1055.
- Beydoun, W., Mendes, M., Blanco, J., & Tarantola, A. (1990). North sea reservoir description : Benefits of an elastic migration/inversion applied to multicomponent vertical seismic profile data. *Geophysics*, **55**(2), 209–217.

- Beylkin, G. (1985). Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized radon transform. *J. Math. Phys.*, **26**(1), 99–108.
- Beylkin, G. & Oristaglio, M. (1985). Distorted wave born and distorted wave rytov approximations. *Optics Comm.*, **53**, 213–216.
- Bitri, A., Le Bégat, S., & Baltassat, J. (1997). Détermination des vitesses de cisaillement des sols à partir de la dispersion des ondes de rayleigh. Rapport r39877, BRGM.
- Bitri, A., Le Bégat, S., & Baltassat, J. (1998). Shear wave velocity determination of soils from in-situ rayleigh waves measurements. In *Proceedings of the 4th Meeting EEGS*, pages 503–506, Barcelona, Spain.
- Bitri, A., Grandjean, G., & Baltassat, J. (2002). Caractérisation du proche sous-sol le long de tracés linéaires par profilage sasw. In *Journées AGAP*, LCPC, Nantes.
- Bleistein, N. (1987). On the imaging of reflectors in the earth. *Geophysics*, **52**(7), 931,942.
- Blonk, B. & Herman, G. (1994). Inverse scattering of surface waves : a new look at surface consistency. *Geophysics*, **59**(6), 963–972.
- Blonk, B. & Herman, G. (1996). Removal of scattered surface waves using multicomponent seismic data. *Geophysics*, **61**(5), 1483–1488.
- Blonk, B., Herman, G., & Drijkoningen, G. (1995). An elastodynamic inverse scattering method for removing scattered surface waves from field data. *Geophysics*, **60**(6), 1897–1905.
- Bohlen, T. & Saenger, E. (2003). 3D visco elastic finite difference modeling using the rotated staggered grid - tests of numerical accuracy. In *EAGE 65th conference and Exhibition, Stavanger, Norway*.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate green's function for layered media. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **71**, 959–971.
- Brownlee, L. (1973). Rytov's method and large fluctuations. *Journal of Acoustical Society of America*, **53**(2), 156–161.
- Campman, X., van Wijk, K., Riyanti, C. D., Scales, J. A., & Herman, G. (2004). Imaging scattered seismic surface waves. *Near Surface Geophysics*, **2**(4), 223–230.
- Cao, D., Beydoun, W., Singh, S., & Tarantola, A. (1990). A simultaneous inversion for background velocity and impedance maps. *Geophysics*, **55**(4), 458–469.
- Carpenter, M., Nordström, J., & Gottlieb, D. (1999). A stable and conservative interface treatment of arbitrary spatial accuracy. *Journal of Computational Physics*, **148**, 341–365.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., & Reshef, M. (1985). A non reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation. *Geophysics*, **50**(4), 705–708.
- Cervený, V., Molotkov, I., & Psencik, I. (1977). *Ray theory in Seismology*. Charles University Press, Praha.
- Chapman, C. (1985). Ray theory and its extension : WKBJ and maslov seismograms. *J. Geophysics*, **58**, 27–43.
- Chapman, C. (2004). *Fundamentals of seismic waves propagation*. Cambridge Press, Cambridge, England.

- Chernov, L. (1960). *Wave propagation in a random medium*. McGraw-Hill Inc.
- Chiu, W. & Liu, Q. (1996). Perfectly matched layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Geophysics*, **4**, 341–359.
- Claerbout, J. (1971). Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, **36**(3), 467–481.
- Claerbout, J. (1976). *Fundamental of Geophysical Data Processing*. McGraw-Hill Book Co., Hightstown.
- Clayton, R. & Engquist, B. (1977). Absorbing boundary condition for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of Seismological Society of America*, **67**, 1529–1540.
- Clayton, R. & Stolt, R. (1981). A born-WKBJ inversion method for acoustic reflexion data. *Geophysics*, **46**, 1559–1567.
- Collino, F. & Tsogka, C. (2001). Application to PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, **66**, 294–3070.
- Cruse, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J., & Tarantola, A. (1990). Robust elastic non-linear waveform inversion : application to real data. *Geophysics*, **55**, 527–538.
- Dahlen, F. & Baig, A. (2002). Fréchet kernels for body waves amplitudes. *Geophysical Journal International*, **150**, 440–466.
- Dahlen, F., Hung, S., & Nolet, G. (2000). Fréchet kernels for finite-difference traveltimes - i. theory. *Geophysical Journal International*, **141**, 157–174.
- De Lima, O. & Sato, H. (1995). Imaging industrial contaminant plumes with resistivity techniques. *Journal of Applied Geophysics*, **34**, 93–108.
- Debayle, E. & Kennett, B. (2000a). Anisotropy in the australian upper mantle from love and rayleigh waveform inversion. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **184**, 339–351.
- Debayle, E. & Kennett, B. (2000b). The australian continental upper mantle : structure and deformation inferred from surface waves. *Journal of Geophysical Research*, **105**(11), 25423–25450.
- Debeglia, N. & Dupont, F. (2002). Some critical factors for engineering and environmental micro-gravimetry investigation. *Journal of Applied Geophysics*, **50**, 435–454.
- Delprat-Jannaud, F. & Lailly, P. (2005). A fundamental limitation for the reconstruction of impedance profiles from seismic data. *Geophysics*, **70**(1), R1–R14.
- Demand, J. (2002). *Mise au point d'une méthode de surveillance de l'apparition des cavités*. Master's thesis, DESS de Géophysique appliquée de l'Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.
- Dessa, J., Operto, S., Kodaira, S., Nakanishi, A., Pascal, G., Virieux, J., & Kaneda, Y. (2004). Multiscale seismic imaging of the eastern nankai trough by full waveform inversion. *Geophysical Research Letters*, **31**, L18606.
- Devaney, A. (1981). Inverse scattering theory within the rytov approximation. *Optics Letters*, **6**, 374–376.
- Devaney, A. (1982). A filtered back-propagation algorithm for diffraction tomography. *Ultrasonic imaging*, **4**, 336–350.
- Devaney, A. (1984). Geophysical diffraction tomography. In *Trans. IEEE*, GE 22, pages 3–13.

- Dietrich, M. & Kormendi, F. (1990). Perturbation of the plane-wave reflectivity of a depth-dependent elastic medium by weak heterogeneities. *Geophysical Journal International*, **100**, 203–214.
- Dormy, E. & Tarantola, A. (1995). Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method. *Journal of Geophysical Research*, **100**(B2), 2123–2133.
- Driad, L. & Piwakowski, B. (2002). Détection et reconnaissance de l'état des cavités souterraines par sismique réflexion haute résolution (shr). In *Journées AGAP, LCPC, Nantes*.
- Druzhinin, A., Pajchel, J., Petersen, S., & Thierry, P. (2000). Improved born-rytov prestack depth imaging - oseberg field, north sea. In *62th EAGE Conference and Exhibition, Glasgow, Scotland*.
- Duvaut, G. (1990). *Mécanique des Milieux Continus*. Masson, Paris.
- Ernst, F. & Herman, G. (1998). Removal of guided waves from seismic data in laterally varying media. *Wave motion*, **28**, 173–189.
- Ernst, F. & Herman, G. (2000). Tomography of dispersive media. *Journal of Acoustic Society of America*, **108**(1), 105–116.
- Esmersoy, C. (1990). Inversion of P and SV waves from multicomponent offset vertical seismic profiles. *Geophysics*, **55**(1), 39–50.
- Farra, V. & Madariaga, R. (1988). Non-linear reflexion tomography. *Geophysical Journal*, **95**, 135–147.
- Festa, G. & Nielsen, S. (2003). Pml absorbing boundaries. *Bulletin of Seismological Society of America*, **93**(2), 891–903.
- Festa, G. & Vilotte, J. (2004). Spectral element simulation of earthquake rupturing along planar and nonplanar faults. In *European Geosciences Union, Nice, France*.
- Flatté, S. & Wu, R. (1988). Small-scale structure in the lithosphere and asthenosphere deduced from arrival-time and amplitude fluctuations at norsar. *Journal of Geophysical Research*, **93**, 6601–6614.
- Florsch, N., Cailloux, S., Camerlynck, C., Guyot, I., Hofbauer, F., Karpychev, M., Lulbes, M., Orseau, D., & Robain, H. (2002). Détection par microgravimétrie de latrines dans le sous-sol du château de chambord. In *Journées AGAP, LCPC, Nantes*.
- Forgues, E. (1996). *Inversion linéarisée multiparamètres via la théorie des rais*. Ph.D. thesis, Université Paris VII.
- Forgues, E., Scala, E., & Pratt, R. (1998). High resolution velocity model estimation from refraction and reflection data. In *68th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts Soc. of Expl. Geophys.*, pages 1211–1214.
- Fornberg, B. (1998). *A practical Guide to Pseudospectral methods*. Cambridge University Press.
- Foti, S. (2000). *Multistation method for geotechnical characterization using surface waves*. Ph.D. thesis, Politecnico di Torino, Italy.
- Fraysse, V., Giraud, L., & Gratton, S. (1997). A set of GMRES routines for real and complex arithmetics. Rapport technique tr/pa/97/49, CERFACS, Toulouse.

- Frayssé, V., Giraud, L., & Gratton, S. (1998). A set of flexible GMRES routines for real and complex arithmetics. Rapport technique tr/pa/98/20, CERFACS, Toulouse.
- Frayssé, V., Giraud, L., Gratton, S., & Langou, J. (2003). A set of GMRES routines for real and complex arithmetics. *Free software on <http://www.cerfacs.fr/algor/Softs/GMRES/>*.
- Fuchs, K. & Muller, K. (1971). Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. *Journal J. R. Astron. Soc.*
- Ganji, V., Gucunski, N., & Maher, A. (1997). Detection of underground obstacles by SASW method - numerical aspects. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **123**, 212–219.
- Garvin, W. (1956). Exact transient solution of the buried line source problem. *Proc. Roy. Soc. London*, **234**, 528–541.
- Gauthier, O., Virieux, J., & Tarantola, A. (1986). Two-dimensional non-linear inversion of seismic waveforms : numerical results. *Geophysics*, **51**, 1387–1403.
- Gélis, C., Leparoux, D., Virieux, J., Bitri, A., Operto, S., & Grandjean, G. (2005). Numerical modeling of surface waves over shallow cavities. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, **10**, 49–59.
- Gélis, C. (2002). *La crise sismique de Blausasc dans les Alpes Maritimes (2000) : localisations absolue et relative*. Master's thesis, DEA De Dynamique de la Lithosphère. Université de Nice - Sophia Antipolis.
- Gorbatov, A. & Kennett, B. (2003). Joint bulk-sound and shear tomography for western pacific subduction zones. *Earth and Planetary Science Letters*, **210**, 527–543.
- Got, J., Fréchet, J., & Klein, F. (1994). Deep fault plane geometry inferred from multiplet relative relocation beneath the south flank of kilauea. *J. Geophys. Res.*, **99**(B8), 15,375–15,386.
- Graff, K. (1975). *Wave motion in Elastic Solids*. Oxford University Press, London.
- Grandjean, G. & Leparoux, D. (2004). Potentiality of seismic methods to detect cavities and buried objects : experiments on a test site. *Journal of Applied Geophysics*, **56**, 93–106.
- Grandjean, G. & Sage, S. (2004). JaTS : a fully portable seismic tomography software based on fresnel wavepaths and a probabilistic reconstruction approach. *Computers and Geosciences*, **30**, 925–935.
- Grandjean, G., Leparoux, D., Bitri, A., & Baltassat, J. (2000). Imagerie SASW du sous-sol urbain en présence de cavités souterraines superficielles (moyeuve, lorraine). Technical Report RP 50209, BRGM.
- Grandjean, G., Bitri, A., & Sénéchal, G. (2002). Détection de carrières souterraines par sismique haute résolution à annet sur marne (france). *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, **334**, 441–447.
- Graves, R. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Journal of Acoustic Society of America*, **100**, 3061–3069.
- Grumman, J. D. & Daniels, J. (1995). Experiments on the detection of organic contaminants in the vadose zone. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, pages 31–38.
- Harris, R. & Day, S. (1997). Effects on a low velocity zone on a dynamic rupture. *BSSA*, **87**(5), 1267–1280.

- Hastings, F., Scheider, J., & Broschat, S. (1996). Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *Journal of Acoustic Society of America*, **100**, 3061–3069.
- Hayashi, K., Burns, D., & Toksöz, M. (2001). Discontinuous-grid finite-difference seismic modelling including surface topography. *Bulletin of Seismological Society of America*, **91**(6), 1750–1764.
- Heidbreder, G. (1967). Multiple scattering and the method of rytov. *Journal of the Optical Society of America*, **57**(12), 1477–1479.
- Herman, G., Milligan, P., Huggins, R., & Rector, J. (2000). Imaging shallow objects and heterogeneities with scattered guided waves. *Geophysics*, **1**, 247–252.
- Herrmann, R. (1991). Surf : Surface wave inversion program. *Saint Luis University (USA)*.
- Hestholm, S. & Ruud, B. (1994). 2d finite-difference elastic wave modeling including surface topography. *Geophysical Prospecting*, **42**, 371–390.
- Hudson, J. (1980). *The Excitation and Propagation of Elastic Waves*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hustedt, B., Operto, S., & Virieux, J. (2003). A direct-iterative solver for seismic wave propagation modelling : a space and wavelet approach. *Geophysical Journal International*, **155**(12), 953–980.
- Hustedt, B., Operto, S., & Virieux, J. (2004). Mixed-grid and staggered-grid finite difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling. *Geophysical Journal International*, **157**, 1269–1296.
- Hévin, G. (1992). *Utilisation des ondes de surface pour l'auscultation de structures en génie civil : application à la caractérisation des fissures de surface*. Thèse de doctorat en géosciences, Université Joseph Fourier. Grenoble I.
- Ikelle, L., Diet, J., & Tarantola, A. (1988). Linearized inversion of multi-offset seismic reflexion data in the (ω, k) domain : depth-dependant reference medium. *Geophysics*, **53**(1), 50–64.
- Improta, L., Zollo, A., Herrero, A., Frattini, R., Virieux, J., & Dell'Aversana, P. (2002). Seismic imaging of complex structures by non-linear traveltime inversion of dense wide-angle data : application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, **151**, 264–278.
- Jannane, M., Beydoun, W., Crase, E., Cao, D., Koren, Z., Landa, E., ans A. Pica, M. M., Noble, M., Roeth, G., Singh, S., Snieder, R., Tarantola, A., Trezeguet, D., & Zie, M. (1989). Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data (short note). *Geophysics*, **54**(7), 906–910.
- Ji, C., Helmberger, D., Wald, D., & Ma, K. (2003). Slip history and dynamic implications of the 1999 chi-chi, taiwan, earthquake. *Journal of Geophysical Research*, **108**(B9), 2412, doi :10.1029/2002JB001764.
- Ji, Y. & Singh, S. (2005). Anisotropy from full waveform inversion of multicomponent seismic data using a hybrid optimization method. *Geophysical Prospecting*, **53**, 435–445.
- Jianfeng, Z. & Tielin, L. (1999). P-SV-wave propagation in heterogeneous media : grid method. *Geophysical Journal International*, **136**, 431–438.
- Jin, S. (1992). *Inversion de données de sismique pétrolière : séparation des paramètres élastiques et détermination des vitesses de référence*. Ph.D. thesis, Institut de Géophysique du Globe de Paris.

- Jin, S. & Madariaga, R. (1993). Background velocity inversion with a genetic algorithm. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 93–96.
- Jin, S., Madariaga, R., Virieux, J., & Lambaré, G. (1992). Two-dimensional asymptotic iterative elastic inversion. *Geophysical Journal International*, **108**, 575–588.
- Jo, C., Shin, C., & Suh, J. (1996). An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space 2D scalar extrapolator. *Geophysics*, **61**, 529–537.
- Keilis-Borok, . (1986). *Seismic surface waves in a laterally inhomogeneous Earth*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Keller, J. (1969). Accuracy and validity of the born and rytov approximations. *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 1003–1004.
- Kelly, K., Ward, R., Treiten, S., & Alford, R. (1976). Synthetic seismograms : a finite-difference approach. *Geophysics*, **41**(1), 2–27.
- Kennett, B. & Yoshizawa, K. (2002). A reappraisal of regional surface waves tomography. *Geophysical Journal International*, **150**, 37–44.
- Kneib, G. & Leykam, A. (2004). Finite difference modelling for tunnel seismology. In *Near Surface 2004. 10th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*, Utrecht, The Netherlands.
- Kohrs-Sansorny, C., Courboulex, F., Bour, M., & Deschamps, A. (2005). A two stage method for ground motion simulation using stochastic summation of small earthquakes. *Bull. of Seismological Society of America*, **95**(4), 1387–1400.
- Kolb, P., Collino, F., & Lailly, P. (1986). Prestack inversion of 1d medium. *Proceedings of IEEE*, **74**, 498–508.
- Komatitsch, D. (1997). *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Ph.D. thesis, Institut de Géophysique du Globe de Paris.
- Kormendi, F. & Dietrich, M. (1991). Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media. *Geophysics*, **56**(5), 664–674.
- Kosloff, D. & Baysal, E. (1982). Forward modeling by a fourier transform. *Geophysics*, **47**, 1402–1412.
- Kristek, J., Moczo, P., & Archuleta, R. (2002). Efficient methods to simulate planar free surface in the 3d 4th-order staggered-grid finite-difference schemes. *Studia geophysica et geodectica*, ?, ?
- Lailly, P. (1984). *The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. In inverse scattering theory and applications*. SIAM, Philadelphia.
- Lambaré, G., Virieux, J., Madariaga, R., & Jin, S. (1992). Iterative asymptotic inversion in the acoustic approximation. *Geophysics*, **57**, 1138–1154.
- Lambaré, G., Operto, S., Podvin, P., & Thierry, P. (2003). 3-d ray-born migration/inversion : Theory. *Geophysics*, **68**(4), 1348–1356.
- Lanz, E., Mauer, H., & Green, A. (1998). Refraction tomography over a buried waste disposal site. *Geophysics*, **63**, 1414–1433.

- Latorre, D., Virieux, J., Monfret, T., Monteiller, V., Vanorio, T., Got, J., & Lyon-Caen, H. (2004). A new seismic tomography of aigion area (gulf of corinth, greece) from the 1991 data set. *Geophysical Journal International*, **159**, 1013–1031.
- Lay, T. & Wallace, T. (1995). *Modern Global Seismology*. Academic Press.
- Le Meur, H. (1994). *Tomographie tridimensionnelle à partir des temps des premières arrivées des ondes P et S. Application à la région de Patras (Grèce)*. Ph.D. thesis, Université de Paris VII.
- Leparoux, D. (1997). *Mise au point de méthodes radar pour l'auscultation structurale et texturale de milieux géologiques très hétérogènes (Modélisation, Migration, Expérimentation)*. Thèse de doctorat en sciences de la terre, Université de Rennes I et LCPC Nantes.
- Leparoux, D. & Abraham, O. (2002). Détection de galeries souterraines sous voie ferrée par ondes sismiques de surface (ondes de rayleigh). Technical report, BRGM et LCPC.
- Leparoux, D., Bitri, A., & Grandjean, G. (2000). Underground cavity detection : a new method based on seismic rayleigh waves. *European Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, **5**, 33–53.
- Leparoux, D., Bitri, A., & Grandjean, G. (2002a). Détection de cavités souterraines par ondes sismiques de surface le long de lignes tgv. expérimentation sur un site test. In *Journées AGAP*, LCPC, Nantes.
- Leparoux, D., Bitri, A., Jeune, F. L., & Grandjean, G. (2002b). Etude de faisabilité pour la détection de cavités souterraines par méthodes géophysiques dans la région de strasbourg. Technical Report R40266, BRGM.
- Levander, A. (1988). Fourth-order finite difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**, 1425–1436.
- Liao, Q. & McMechan, G. (1996). Multifrequency viscoacoustic modeling and inversion. *Geophysics*, **61**(5), 1371–1378.
- Lin, F. & Fiddy, M. (1992). The rytov-born controversy : I. comparing analytical and approximation expressions for the one-dimensional deterministic case. *J. Opt. Soc. Am.*, **9**(7), 1102–1110.
- Liu, Q. & Tao, J. (1997). The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *J. Acoust. Soc. Am.*, **102**(4), 2072–2082.
- Léonard, C. (1997). *Détection des cavités souterraines par Sismique Haute Résolution et par Impact-Echo*. Thèse de doctorat en génie civil, Université de Lille.
- Luo, Y. & Schuster, G. (1990). Parsimonious staggered grid finite-differencing of the wave equation. *Geophysical Research Letters*, **17**(2), 55–158.
- Luo, Y. & Schuster, G. (1991). Wave-equation travelttime inversion. *Geophysics*, **56**(5), 645–653.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of Seismological Society of America*, **66**, 163–182.
- Marfurt, V. (1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of geophysical exploration. *Geophysics*, **49**, 533–549.
- Mari, J., Glangeaud, F., & Coppens, F. (1997). *Traitement du signla pour géologues et géophysiciens*. TECHNIP.

- Marquering, H. & Snieder, R. (1997). Surface-wave mode coupling for efficient forward modeling and inversion of body-wave phases. *Geophysical Journal International*, **120**, 186–208.
- Meier, T., Lebedev, S., Nolet, G., & Dahlen, F. (1997). Diffraction tomography using multimode surface waves. *Journal of Geophysical Research*, **102**(B4), 8255–8267.
- Menke, W. (1989). *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic Press.
- Miller, D., Oristaglio, M., & Beylkin, G. (1987). A new slant on seismic imaging : migration and integral geometry. *Geophysics*, **58**(11), 943–964.
- Miller, G. & Pursey, H. (1955). *On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid*. Proceedings of the Royal Society of London, London.
- Miller, R., Xia, J., Park, C., & Ivanov, J. (1999). Multichannel analysis of surface waves to map bedrock. *Lead. Edge*, **18**, 1392–1396.
- Min, D., Shin, C., Kwon, B., & Chung, S. (2000). Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators. *Geophysics*, **65**(3), 884–895.
- Moczo, P., Bystricky, E., Kristek, J., Carcione, J., & Bouchon, M. (1997). Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bulletin of Geophysical Society of America*, **87**(5), 1305–1323.
- Moczo, P., Kristek, J., Vavrycuk, V., Archuleta, R., & Halada, L. (2002). 3d heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of Geophysical Society of America*, **92**(8), 3042–3066.
- Molinari, M., Cox, S., Blott, B., & Daniell, G. (2002). Comparison of algorithms for non-linear inverse 3D electrical tomography reconstruction. *Physiol. Meas.*, **23**, 95–104.
- Montagner, J. & Nataf, H. (1988). Vectorial tomography - theory. *Geophysical Journal International*, **94**, 295–307.
- Montagner, J. & Tanimoto, T. (1991). Global upper mantle tomography of seismic velocities and anisotropies. *Journal of Geophysical Research*, **96**(B12), 20337–20351.
- Monteiller, V. (2005). *Tomographie des décalages temporels*. Ph.D. thesis, Université de Savoie.
- Mora, P. (1987a). Elastic wavefield inversion for low and high wavenumbers of the P- and S-velocities , a possible solution. In *Deconvolution and inversion : proceedings of a workshop sponsored by the European Association of Exploration Geophysicists at al.*, pages 321–337. eds M. Bernabini, P. Carrion, G. Jacovetti, F. Rocca and S. Treitel. Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- Mora, P. (1987b). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multidéport seismic data. *Geophysics*, **52**, 1211–1228.
- Mora, P. (1988). Elastic wavefield inversion of reflection and transmission data. *Geophysics*, **53**, 750–759.
- Mora, P. (1989). Inversion = migration + tomography. *Geophysics*, **54**(12), 1575–1586.
- Morse, P. & Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics, Part II*. McGraw-Hill, New York.

- Mulder, W. & Plessix, R. (2004). A comparison between one-way and two-way wave-equation migration. *Geophysics*, **69**(6), 1491–1504.
- Nahamoo, D., Pan, S., & Kak, A. (1984). Synthetic aperture diffraction tomography and its interpolation-free computer implementation. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, **SU31**(4), 218–228.
- Nazarian, S. & Stokoe, K. (1984). In situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves. *Proc. 8th Conf. on Earthquake Eng., San Francisco*, **3**, 31–38.
- Nkemzi, D. (1997). A new formula for the velocity of rayleigh waves. *Wave motion*, **26**, 199–205.
- Nolet, G. (1987). *Seismic tomography*, chapter Seismic wave propagation and seismic tomography, pages 1–23. Nolet, G., Reidel, Dordrecht.
- Nolet, G. (1990). Partitioned waveform inversion and two-dimensional structure under the network of autonomously recording seismographs. *Journal of Geophysical Research*, **95**, 8499–8512.
- Ohminato, T. & Chouet, B. (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method. *Bulletin of Seismological Society of America*, **87**(2), 494–515.
- Olsen, K., Madariaga, R., & Archuleta, R. (1997). Three dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers earthquake. *Science*, **278**, 834–838.
- Operto, S. (2001). Implémentation d'une condition d'absorption mixte : PML-paraxial 45 dans un code de modélisation des ondes aux différences finies. cas de l'équation d'onde acoustique du second-ordre dans le domaine fréquence-espace. Rapport du groupe de recherche prosis3d, Géosciences Azur.
- Operto, S., Virieux, J., Hustedt, B., & Malfanti, F. (2002). Adaptive wavelet-based finite-difference modelling of sh-wave propagation. *Geophysical Journal International*, **148**, 1–29.
- Operto, S., Ravaut, C., Imbrota, L., Virieux, J., Herrero, A., & Dell'Aversana, P. (2004). Quantitative imaging of complex structures from multi-fold wide aperture seismic data. *Geophysical Prospecting*, **52**, 625–651.
- Orlando, L. & Marchesi, E. (2001). Georadar as a tool to identify and characterize solid waste dump deposits. *Journal of Applied Geophysics*, **48**, 163–174.
- Paige, C. & Saunders, M. (1982). LSQR : sparse linear equations and least square problem. *ACM transactions on mathematical software*, **8**(2), 195–209.
- Park, C., Miller, R., & Xia, J. (1998). Imaging dispersion curves of surface waves on multi-channel record. In *Society of Exploration Geophysics, New Orleans, Louisiana, USA*.
- Park, C., Miller, R., & Xia, J. (1999). Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, **64**, 800–808.
- Passier, M. & Snieder, R. (1995). Using differential waveform data to retrieve local P velocity structure or path-averaged S velocity gradients. *Journal of Geophysical Research*, **100**(B12), 24061–24078.
- Pica, A., Diet, J., & Tarantola, A. (1990). Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium. *Geophysics*, **55**(3), 284–292.

- Piwakowski, B., J.C., J. T., Léonard, C., Ouarradi, N., & Delannoy, B. (1997). Underground tunnels detection and localisation by high resolution seismic reflexion. In *IIIth Meeting of Environmental and Engineering Geophysical Society*, Aarhus, Denmark.
- Plessix, R. & Mulder, W. (2004). Frequency domain finite difference amplitude preserving migration. *Geophysical Journal International*, **157**, 975–987.
- Podvin, P. & Lecomte, I. (1991). Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity model : a massively parallel approach and its associate tools. *Geophysical Journal International*, **105**, 271–284.
- Polak, E. (1971). *Computational Methods in Optimization*. Academic Press, New York.
- Pratt, R. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. part ii : elastic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, **38**, 311–330.
- Pratt, R. (1999). Seismic waveform inversion in the frequency domain, part i : theory and verification in a physic scale model. *Geophysical Journal International*, **64**, 888–901.
- Pratt, R. & Worthington, M. (1988). The application of diffraction tomography to cross-hole seismic data. *Geophysics*, **53**(10), 1284–1294.
- Pratt, R. & Worthington, M. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. part i : acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, **38**, 287–310.
- Pratt, R., Song, Z., Williamson, P., & Warner, M. (1996). Two-dimensional velocity model from wide-angle seismic data by wavefield inversion. *Geophysical Journal International*, **124**, 323–340.
- Pratt, R., Shin, C., & Hicks, G. (1998). Gauss-newton and full newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, **133**, 341–362.
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., & Vetterling, W. (1989). *Numerical Recipiees*. Cambridge University Press.
- Radogna, P., Olivier, R., & Logean, P. (2003). Micro-gravimetry survey in urban environment : modelling, evaluation and correction of buiding influence. In *9th European Meeting of EEGS-EAGE*, Prague.
- Rajan, S. & Frisk, G. (1989). A comparison between the born and rytov approximations for the inverse backscattering problem. *Geophysics*, **54**(7), 864–871.
- Ramos-Martinez, J., Chavez-Garcia, F., Romero-Jimenez, E., Rodriguez-Zuniga, J., & Gomez-Gonzalez, J. (1997). Site effects in mexico-city : constraints from surface wave inversion of shallow refraction data. *Journal of Applied Geophysics*, **36**, 157–165.
- Ravaut, C. (2003). *Tomographie sismique haute résolution de la croûte terrestre : inversion combinée des temps de trajet et des formes d'ondes de données sismiques réflexion/réfraction grand angle multitracés*. Thèse de doctorat en géophysique, Université de Nice Sophia Antipolis.
- Ravaut, C., Operto, S., Improta, L., Virieux, J., Herrero, A., & Dell'Aversana, P. (2004). Quantitative imaging of complex structures from multifold wide angle seismic data by frequency domain full waveform inversion : application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, **159**, 1032–1056.
- Remaki, M. (1999). *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. Ph.D. thesis, ENPC.

- Rühl, T. & Hubral, P. (1996). Frequency-space domain diffraction tomography in practical applications. *Journal of Seismic Exploration*, **5**, 141–156.
- Ribodetti, A. (1998). *Imagerie sismique haute résolution pour les milieux dissipatifs*. Thèse de doctorat. Sciences de la Terre. Ph.D. thesis, Université de Nice Sophia Antipolis.
- Ribodetti, A. & Virieux, J. (1998). Asymptotic theory for imaging the attenuation factor Q . *Geophysics*, **31**(5), 1767–1778.
- Rix, G., Lai, C., & Foti, S. (2001). Simultaneous measurement of surface wave dispersion and attenuation curves. *Geotechnical Testing Journal*, **24**(4), 350–358.
- Rix, G., Hebel, G., & Orozco, M. (2002). New surface vs-profiling in the new madrid seismic zone using surface wave methods. *Seismological Research Letters*, **73**(3), 380–392.
- Riyanti, C. & Herman, G. (2004). Elastic modeling for near-surface scattering. In *66th EAGE Conference*, Paris, France.
- Riyanti, C. & Herman, G. (2005). Three-dimensional elastic scattering by near-surface heterogeneities. *Geophysical Journal International*, **160**, 609–620.
- Robein, E. (2003). *Velocities, Time-imaging and Depth-Imaging in Reflection Seismics. Principles and methods*. EAGE publications.
- Robertsson, J. (1996). A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, **61**(6), 1921–1934.
- Saenger, E. & Bohlen, T. (2004). Finite difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics*, **69**(2), 583–591.
- Saenger, E., Gold, N., & Shapiro, S. (2000). Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave motion*, **31**, 77–92.
- Saenger, E., Bohlen, T., & Shapiro, S. (2002). Effective velocities in fractured media : a numerical study using the rotated staggered finite-difference grid. *Geophysical Prospecting*, **50**, 183–194.
- Sambridge, M. (1999a). Geophysical inversion with a neighborhood algorithm i - searching for a parameter space. *Geophysical Journal International*, **138**, 479–494.
- Sambridge, M. (1999b). Geophysical inversion with a neighborhood algorithm ii - appraising the ensemble. *Geophysical Journal International*, **138**, 7272–746.
- Scherbaum, F., Hinzen, K.-G., & Ohrnberger, M. (2003). Determination of shallow shear wave velocity profiles in the cologne/germany area using ambient vibrations. *Geophysical Journal International*, **152**(3), 597–612.
- Schleicher, J., Tygel, M., & Hubral, P. (1993). 3D true amplitude finite offset migration. *Geophysics*, **58**(8), 1112–1126.
- Sen, M. & Stoffa, P. (1995). *Global optimization methods in geophysical inversion*. Elsevier Sci, New York.
- Sheng, J. (2004). *High Resolution Seismic Tomography With the Generalized Radon Transform and Early Arrival Waveform Inversion*. Ph.D. thesis, University of Utah.
- Sheriff, R. & Geldart, L. (1995). *Exploration seismology, 2nd edition*. Cambridge University Press.

- Shin, C., Yoon, K., Marfurt, K., Park, K., Yang, D., Lim, H., Chung, S., & Shin, S. (2001a). Efficient calculation of a partial-derivative wavefield using reciprocity for seismic imaging and inversion. *Geophysics*, **66**(6), 1856–1863.
- Shin, C., Jang, S., & Min, D. (2001b). Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical prospecting*, **49**, 592–606.
- Shipp, R. & Singh, S. (2002). Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine streamer data. *Geophysical Journal International*, **151**, 325–344.
- Shtivelman, V. (2000). Using surface waves for mapping lateral inhomogeneities in the shallow subsurface. In *Proc. 6th meeting Env. Eng. Geophys.*, volume 151, pages 325–344, European Section, Bochum.
- Singh, S., West, G., & Bregman, N. (1989a). Full waveform inversion of reflection data. *Journal of Geophysical Research*, **94**(B2), 1777–1794.
- Singh, S., West, G., Bregman, N., & Chapman, C. (1989b). Full waveform inversion of reflection data. *Journal of Geophysical Research*, **94**(B2), 1777–1794.
- Sirgue, L. (2003). *Inversion de la forme d'onde dans le domaine fréquentiel de données sismiques grands déports. Thèse de doctorat. Sciences de la Terre.* Ph.D. thesis, Laboratoire de géologie de l'Ecole Normale Supérieure. Université Paris XI.
- Sirgue, L. & Pratt, R. (2001). Frequency domain waveform inversion : a strategy for choosing frequencies. In *Expanded Abstracts, EAGE*, pages 631–634.
- Sirgue, L. & Pratt, R. (2004). Efficient waveform inversion and imaging : a strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, **69**(1), 231–248.
- Snieder, R. (1986). 3D linearized scattering of surface waves and a formalism for surface waves holography. *Geophysics J. R. astr. Soc.*, **84**, 581–601.
- Snieder, R., Xie, M., Pica, A., & Tarantola, A. (1989). Retrieving both the impedance contrast and background velocity : a global strategy for the seismic reflection problem. *Geophysics*, **54**(8), 991–1000.
- Soczkaewicz, E. (1996). Propagation of rayleigh surface waves and poisson's ratio of a medium. *Acoustics Lett.*, **19**, 223–226.
- Spetzler, J. & Snieder, R. (2004). The fresnel volume and transmitted waves. *Geophysics*, **69**(3), 653–663.
- Stein, S. & Wysession, M. (2003). *An introduction to seismology : earthquakes and earth structure.* Blackwell Publishong.
- Stekl, I. (1997). *Frequency domain seismic forward modelling : a tool for waveform inversion.* Ph.D. thesis, Department of Geology. Royal School of Mines. Imperial College London.
- Stekl, I. & Pratt, R. (1998). Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite difference using rotated operators. *Geophysics*, **63**, 1779–1794.
- Sun, R. & McMechan, G. (1992). 2-D full-wavefield inversion for wide-aperture, elastic, seismic data. *Geophysical Journal International*, **111**, 1–10.
- Tarantola, A. (1984a). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, **49**(8), 1259–1266.

- Tarantola, A. (1984b). Linearized inversion of seismic reflection data. *Geophysical Prospecting*, **32**, 998–1015.
- Tarantola, A. (1986). A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflexion data. *Geophysics*, **51**(10), 1893–1903.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory*. Elsevier Sci, New York.
- Tarantola, A. (1988). Theoretical background for the inversion of seismic waveforms including elasticity and attenuation. *Pageoph*, **128**, 365–399.
- Taylor, L. (1967). On rytov's method. *Radio Science*, **2**(4), 437–441.
- Tessmer, E. & Kosloff, D. (1994). 3D elastic modeling with surface topography by a chebychev spectral method. *Geophysics*, **59**, 464–473.
- Tessmer, E., Kosloff, D., & Behle, A. (1992). Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography. *Geophysical Journal International*, **108**, 621–632.
- Van Vossen, R., Curtis, A., & Trampert, T. (2005). Source and receiver equalization using reciprocity. In *Expanded Abstracts, EAGE Madrid*.
- Vanorio, T., Virieux, J., Copuano, P., & Guido, R. (2005). 3D seismic tomography from p and s microearthquakes traveltimes and rock physics characterization in the campi flegrei caldera. *Journal of Geophysical Research*, **110**(B03201), doi :10.1029/2004JB003102.
- Virieux, J. (1984). SH wave propagation in heterogeneous media : velocity stress finite-difference method. *Geophysics*, **49**(11), 1933–1957.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity stress finite-difference method. *Geophysics*, **51**(4), 889–901.
- Waldhauser, F. & Ellsworth, W. L. (2000). A double-difference earthquake location algorithm : Method and application to the northern hayward fault, california. *Bulletin of Seismological Society of America*, **90**(6), 1353–1368.
- Wang, T. & Tang, X. (2003). Finite-difference modeling of elastic wave propagation : a nonsplitting perfectly matched layer approach. *Geophysics*, **68**, 1749–1755.
- Watanabe, T., Matsuoka, T., & Ashida, Y. (1999). Seismic traveltime tomography using fresnel volume approach. In *69th Proc. SEG*.
- Wathelet, M., Ohrnberger, M., Jongmanns, D., Camelbeeck, T., & Scherbaum, F. (2002). Non linear inversion of noise array measurements for determining S-waves velocity vertical profiles. In *9th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*.
- Weston, V. (1985). On the convergence of the rytov approximation for the reduced wave equation. *J. Math. Phys.*, **26**(8), 1979–1985.
- Williamson, P. (1991). A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography. *Geophysics*, **56**, 202–207.
- Wolf, D. D. (1973). Comments on "rytov's method and large fluctuations". *Journal of Acoustical Society of America*, **54**, 1109–1110.
- Woods, R. & Asce, A. (1968). Screening of surface waves in soils. *Journal of the Soil Mechanics and foundations division. Journal of the American Society of Civil Engineers*, **631**(SM4), 951–979.

- Woodwards, M. (1992). Wave-equation tomography. *Geophysics*, **57**, 15–26.
- Wu, R. (2003). Wave propagation, scattering and imaging using dual-domain one-way and one-return propagation. *Pure Applied Geophysics*, **160**, 509–539.
- Wu, R. & Flatté, S. (1990). Transmission fluctuations across an array and heterogeneities in the crust and upper mantle. *Pure Applied Geophysics*, **132**, 175–196.
- Wu, R. & Toksöz, M. (1987). Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging. *Geophysics*, **52**, 11–25.
- Xia, J., Miller, R., & Park, C. (1999). Estimation of near-surface shear-wave velocity by inversion of rayleigh waves. *Geophysics*, **64**(3), 691–700.
- Xia, J., Miller, R., Park, C., & Tian, G. (2002). Determining Q of near-surface materials from rayleigh waves. *Journal of Applied Geophysics*, **51**, 121–129.
- Xia, J., Miller, R., Park, C., & Tian, G. (2003). Inversion of high frequency surface waves with fundamental and higher modes. *Journal of Applied Geophysics*, **52**, 45–57.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problem involving maxwell's equation in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas ans Propagation*, **14**, 302–307.
- Yilmaz, O. (2001). *Seismic data analysis*. Society of Exploration Geophysics.
- Yu, Z., McMEchan, G., Anno, P., & Ferguson, J. (2004). Wavelet transform-based prestack multiscale kirchhoff migration. *Geophysics*, **69**(6), 1505–1512.
- Zadler, B., Rousseau, J. L., Scales, J., & Smith, M. (2004). Resonant ultrasound spectroscopy : theory and application. *Geophysical Journal International*, **156**, 154–169.
- Zelt, C. & Smith, R. (1992). Seismic traveltime inversion for 2d crustal velocity structure. *Geophysical Journal International*, **108**, 16–34.
- Zhou, C., Schuster, G., Hassanzadeth, S., & Harris, J. (1997). Elastic wave equation traveltime and waveform inversion of crosswell data. *Geophysics*, **62**(4), 853–868.
- Zienkiewicz & Morgan (1982). *Finite elements and approximation*. John Wiley and sons, University of Wales, Swansea, United Kingdom.

Annexe A

Manipulation des équations de propagation en fréquence

Afin suivre les développements numériques effectués, nous explicitons l'étape intermédiaire de calcul suivante :

$$\begin{aligned} -\omega^2 V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) &= \frac{1}{\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \\ &\{(\lambda(x+h) + 2\mu(x+h)) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_x(x+3h/2, z+3h/2, \omega) + V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) \\ &- V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\ &+ (\lambda(x+h, z) + 2\mu(x+h, z)) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) + V_x(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\ &- V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\ &- (\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) + V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) \\ &- V_x(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\ &- (\lambda(x, z) + 2\mu(x, z)) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) + V_x(x+h/2, z-h/2, \omega) \\ &- V_x(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \\ &+ \{\lambda(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \{V_z(x+3h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) \\ &+ V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\ &+ \lambda(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \{V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\ &+ V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\ &- \lambda(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \{V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) \\ &+ V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\ &- \lambda(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \{V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega) \\ &+ V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \\ &+ \frac{1}{\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_z(z+h/2)} \{ \\ &+ \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_z(x+3h/2, z+3h/2, \omega) + V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& -V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) + V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) \\
& -V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& -V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +\mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \{V_x(x+3h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) \\
& +V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \{V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_z(z+h)} \{V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) \\
& +V_x(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_z(z)} \{V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_x(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& -i\omega \frac{1}{\xi_x(x+h/2, z+h/2)} f_x(x+h/2, z+h/2, \omega)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) = \frac{1}{\rho(x+h/2, z+h/2)} \frac{1}{\xi_x(x+h/2)} \\
& \left\{ \mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_z(x+3h/2, z+3h/2, \omega) + V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) \right. \\
& \left. -V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \right. \\
& +\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& \left. -V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \right. \\
& -\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) + V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) \\
& \left. -V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \right. \\
& -\mu(x, z) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& \left. -V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \right. \\
& +\mu(x+h, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_x(x+3h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) \\
& +V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& +\mu(x+h, z) \frac{1}{\zeta_x(x+h)} \{V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& \left. -\mu(x, z+h) \frac{1}{\zeta_x(x)} \{V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +V_x(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\mu(x, z)\frac{1}{\zeta_x(x)}\{V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_x(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z-h/2, \omega)\}\} \\
& +\frac{1}{\rho(x+h/2, z+h/2)}\frac{1}{\xi_z(z+h/2)}\{ \\
& \lambda(x+h, z+h)\frac{1}{\zeta_z(z+h)}\{V_x(x+3h/2, z+3h/2, \omega) + V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) \\
& -V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\lambda(x+h, z)\frac{1}{\zeta_z(z)}\{V_x(x+3h/2, z+h/2, \omega) + V_x(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& -V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +\lambda(x, z+h)\frac{1}{\zeta_z(z+h)}\{V_x(x+h/2, z+3h/2, \omega) + V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) \\
& -V_x(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -\lambda(x, z)\frac{1}{\zeta_z(z)}\{V_x(x+h/2, z+h/2, \omega) + V_x(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& -V_x(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_x(x-h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +(\lambda(x+h, z+h) + 2\mu(x+h, z+h))\frac{1}{\zeta_z(z+h)}\{V_z(x+3h/2, z+3h/2, \omega) \\
& -V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -(\lambda(x+h, z) + 2\mu(x+h, z))\frac{1}{\zeta_z(z)}\{V_z(x+3h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+3h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega)\} \\
& +(\lambda(x, z+h) + 2\mu(x, z+h))\frac{1}{\zeta_z(z+h)}\{V_z(x+h/2, z+3h/2, \omega) \\
& -V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) + V_z(x-h/2, z+3h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z+h/2, \omega)\} \\
& -(\lambda(x, z) + 2\mu(x, z))\frac{1}{\zeta_z(z)}\{V_z(x+h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x+h/2, z-h/2, \omega) \\
& +V_z(x-h/2, z+h/2, \omega) - V_z(x-h/2, z-h/2, \omega)\}\} \\
& -i\omega\frac{1}{\xi_x(x+h/2)}f_z(x+h/2, z+h/2, \omega)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Annexe B

Article de Gélis et al. (2005)

Numerical Modeling of Surface Waves Over Shallow Cavities

C. Gélis^{1,2}, D. Leparoux³, J. Virieux¹, A. Bitri², S. Operto¹ and G. Grandjean² 1 : Geosciences Azur (Valbonne, France) 2 : BRGM (Orleans, France) 3 : IPGP (Paris, France)

B.0.1 Abstract

A new stable and accurate, finite-difference 2D elastic seismic wave propagation modeling is developed, with a Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary condition to avoid reflections from the edges of the numerical model. This is used to study the interaction of seismic surface waves with near-surface heterogeneities. The effects of different empty cavity shapes and depths and altered zones, is evaluated from the direct and diffracted seismograms and corresponding Rayleigh wave dispersion images. Differential seismograms calculated both with and without cavity show a complex non-symmetrical diffraction pattern and their dispersion images show well-localized scattering from heterogeneities. Missing coherent energy appears in specific frequency bands, related to the cavity depth, shape and degree of modification of the surrounding medium.

The cavity more strongly affects seismograms when it is shallower. A 2m deep rectangular cavity generates more severe perturbations than a circular section, due to non-symmetrical back-scattered patterns, recognized in dispersion images. Furthermore, low velocity zones around and above the cavity, due to soil alteration, trap waves and lead to increased ground roll attenuation and strong footprints in dispersion images that can possibly mask the cavity signature. If the altered zone extends to the surface as a cone, trapping phenomena completely dominate seismograms. The detection of altered zones is a very useful indication in natural hazard assessment, making it possible to distinguish the signature of a 'safe' cavity from a potentially dangerous one.

B.0.2 Introduction

Detecting and localizing underground cavities is of prime importance because they constitute an important natural or human-made hazard. Other geophysical methods used for cavity detection may not perform in every context, such as gravimetry in urban areas (Radogna et al., 2003) or GPR (Ground Penetrating Radar) in clay. Thus, developing alternative methods using seismic surface waves may provide information about the subsurface in such cases. Diffracting objects can be detected in near-surface areas due to their strong influence on the "ground roll" wavetrain (Blonk et al., 1995; Ernst & Herman, 1998; Herman et al., 2000; Campman et al., 2004). Alternatively, the presence of a cavity can be deduced from local vertical and lateral variation of soils physical parameters. Methods such as SASW (Spectral Analysis of Surface Waves; Nazarian & Stokoe (1984); Ganji et al. (1997)), MASW (Multi Analysis of Surface Waves; Park et al. (1998, 1999)) and Beam Forming (Rix et al., 2001, 2002) aim to recover 1D V_s (S-wave velocity) profiles from

the surface wave phase velocity dispersion. V_p (P-wave velocity) models can then be deduced using empirical relations, for example a fixed V_p/V_s Poisson ratio, and soil heterogeneities as cavities can be imaged.

Other approaches focus on the effect of cavities masking deeper reflectors (Piwakowski et al., 1997; Léonard, 1997). Unfortunately this approach requires the presence of strong, deep reflectors that may be missing in real contexts. The filtering effects on Rayleigh waves in the frequency domain have first be noted by Hévin (1992) for superficial crack detection. Recent works (Leparoux et al., 2000; Shtivelman, 2000) based on numerical analysis in elastic media with 2^{nd} order finite differences method (Virieux, 1986) and experimental validation show the capability of Rayleigh waves to be filtered and thus to detect and laterally localize underground cavities. In order to define the potential and establish the limitations of surface waves to detect punctual heterogeneities, it is possible to study surface wave propagation in small-scale models. Grandjean & Leparoux (2004) validate the process using DLMO (Dynamic Linear Move Out) corrections to obtain stacked surface waves profiles where a cavity is imaged by an anomaly. However this anomaly is due to a combination of several physical effects on amplitude attenuation and phase propagation modification.

In this paper, we aim to isolate the effects of a shallow cavity on the surface waves phase propagation in order to better understand the capacity of Rayleigh waves to image such heterogeneities. Actually, in real cases, cavity typologies (shape, depth, size) or parameters of the surrounding medium and the alteration degree of the soil above the cavity vary from site to site. The influence of these parameters on seismic surface waves signals need to be quantified. With our new accurate numerical modeling, we can vary these parameters in order to study their influence on the surface waves propagation. To this end, we use a finite difference model which is able to simulate variable cavity shapes and surrounding medium structures in near-surface areas. This finite difference spatial tool is based on the stencil proposed by Saenger et al. (2000). It suffers less from numerical dispersion and, in this way, provides more realistic synthetic results.

We first describe the numerical principle and numerical tests of accuracy for the short-wavelength Rayleigh wave component. We then show numerical results for synthetic cavity model examples of various depths, shapes and surrounding medium.

B.0.3 New 2D elastic rotated staggered grid definition

In this section we present the numerical method we use to calculate seismograms. We consider a 2D P-SV elastic velocity-stress first-order hyperbolic system. We introduce a new second-order finite difference stencil, where derivatives are computed along 45° -rotated axes with respect to the original Cartesian axes (figure B.1). This new stencil leads to the computation of stress components at the same grid point, as well as to velocity components at another grid point, shifted by a half grid step along the diagonal from the other. Furthermore, physical parameters are also specified at the same grid point, thus avoiding the estimation of their spatial arithmetic or harmonic averages, source of numerical errors (figure B.1). Following Saenger et al. (2000), let \mathbf{x} and \mathbf{z} be the Cartesian axes directions, and \mathbf{x}' and \mathbf{z}' be the 45° rotated axes (figure B.1). The horizontal and vertical numerical grid steps are Δx and Δz . D_x and D_z are differentiation operators that perform the derivatives $\partial/\partial x$ and $\partial/\partial z$. The conventional second order operators that perform derivatives in \mathbf{x} and \mathbf{z} directions, for a given wavefield, \mathbf{u} , calculated in the point (z, x) at time t , are :

$$\begin{aligned} D_x(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{h_x} [\mathbf{u}(z, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ D_z(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{h_z} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x, t)] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Analogous equations can be obtained for $D_{x'}$ and $D_{z'}$ differentiation operators that perform the derivatives $\partial\partial x'$ and $\partial\partial z'$ in \mathbf{x}' and \mathbf{z}' directions :

$$\begin{aligned} D'_{x'}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} [\mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ D'_{z'}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Numerical differentiation operators are obtained that perform the spatial derivatives in \mathbf{x} and \mathbf{z} directions in the new grid :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}}{2h_z} [D'_{z'}(\mathbf{u}(z, x, t)) - D'_{x'}(\mathbf{u}(z, x, t))] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}}{2h_x} [D'_{z'}(\mathbf{u}(z, x, t)) + D'_{x'}(\mathbf{u}(z, x, t))] \\ \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h_z} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t) \\ &\quad - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) + \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(z, x, t)) &= \frac{1}{2h_x} [\mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t) \\ &\quad + \mathbf{u}(z - \frac{h_z}{2}, x + \frac{h_x}{2}, t) - \mathbf{u}(z + \frac{h_z}{2}, x - \frac{h_x}{2}, t)] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

The 2D P-SV propagation equations are discretized using this new stencil. This formulation of derivative operators minimizes azimuth dispersion (Saenger et al., 2000) and allows stable and accurate modeling of surface waves compared to existing 2nd finite difference modeling (Virieux, 1986) as discussed later on. As a matter of fact, Virieux (1986) stencil becomes unstable when the spatial grid step is decreased, whereas Saenger et al. (2000)'s remains stable in such cases. Moreover, dispersion relations for this rotated staggered grid are independent of any value of the Poisson ratio (Saenger et al., 2000). We have implemented the free-surface condition by zeroing the Lamé coefficients on nodes above and at the free surface which passes through stress points. This expresses the nullity of the stress tensor at and above the free surface. In the following simulations, we use 30 points per wavelength of P wave, which is necessary to reduce numerical dispersion for the surface waves (Bohlen & Saenger, 2003).

Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary conditions (Bérenger, 1994; Chiu & Liu, 1996; Hastings et al., 1996) have been introduced to prevent reflections from numerical model edges. This method is based on the decomposition of the fields components into 2 sub-fields, one in the vertical direction and the other in the horizontal direction. If the PML zone is vertical (resp. horizontal), the horizontal (resp. vertical) sub-field is spatially attenuated with a coefficient depending on its horizontal (resp. vertical) position inside the PML zone. Thus the horizontal (resp. vertical) sub-field is very weak when it arrives on the numerical model edge. This prevents normal reflections and allows wavefields to propagate parallel to the edges.

Figure B.2 shows the comparison between seismograms obtained with the Virieux (1986) finite difference stencil which was used by Grandjean & Leparoux (2004), the Saenger et al. (2000) one and the analytical solution given by Garvin (1956) for the physical model parameters that will be used throughout this paper and the same number of points per wavelength. Surface waves and body waves are much better modeled with the Saenger et al. (2000) stencil than with the Virieux (1986) one, regarding wave amplitudes as well as arrival times. Nevertheless, for deeper sources, differences between resulting seismograms decrease because the free surface plays a minor role and surface waves contain less energy.

In addition, we have compared finite-difference and spectral-elements (Komatitsch, 1997) seismograms for a homogeneous half-space (Figure B.3) with a 1m deep source and a medium designed for this comparison. They are in very good agreement for P-wave arrivals as well as surface wave arrivals (Figure B.3). This example confirms the satisfactory performance of the Saenger et al. (2000) stencil, already demonstrated for heterogeneous media containing cracks (Saenger et al., 2000) and in the presence of topography Saenger & Bohlen (2004). Moreover, Saenger & Bohlen (2004) made a successful comparison between seismograms calculated with their new rotated finite difference stencil and seismograms obtained by Ohminato & Chouet (1997). With this efficient and precise numerical tool, we now simulate the wave propagation for different near-surface media and contribute to better understand the underlying physical phenomena.

B.0.4 Dispersion Image Analysis

In this paper we focus on phase characteristics by computing the phase velocity of Rayleigh waves, which is the standard analysis method used by most practitioners. Leparoux et al. (2000) or Grandjean & Leparoux (2004) used this phase velocity analysis to perform DLMO correction and to stack common receiver gather data. They obtained a Rayleigh wave profile with anomalies corresponding to cavities or positions of shallow heterogeneities. The anomalies on the stacked profile can be due to phase perturbations but also to amplitude perturbations generated by heterogeneities like cavities. Although it provides an increase of the signal-to-noise-ratio for real field data, it is not possible to determine the physical origin of the anomaly on the profile.

The phase velocity dispersion image is calculated by Bitri et al. (1998); Park et al. (1998) :

$$E(\omega, c) = \int \frac{A(\mathbf{x}, \omega)}{|A(x, \omega)|} e^{-i\phi - \frac{\omega}{c}x} dx \quad (\text{B.4})$$

where $E(\omega, c)$ is the normalized image amplitude, $A(\mathbf{x}, \omega)$ is the amplitude spectrum of the seismic signal for a given shot gather, ϕ is the difference between the phases of the current and the first traces at the frequency, x is the distance between the first trace and the current trace, and c is the phase velocity of Rayleigh waves. By integrating over all offsets, the location of the maximum amplitude in the image indicates the phase velocity of the seismic surface waves.

We now show the effects of different cavity typologies on these dispersion images, firstly when the cavity depth and cavity shape vary and secondly when a weathered zone surrounds the cavity vault, employing these dispersion measures and comparing to a homogeneous reference case.

B.0.5 Synthetic cavity examples

Modeling parameters

The homogeneous model comprises the host medium of Figure B.4(a), the elastic parameters are $V_p = 888m/s$, $V_s = 431m/s$ and $\rho = 1600kg/m^3$. That means the Poisson coefficient is $\nu = 0.35$. It corresponds to a typical medium of a railway underground structure in North of France, where the problem of natural hazard has to be regarded with a great importance. The source is a Ricker signal and its frequency remains centered around $88.8Hz$ (Figure B.5). This high frequency source is used for near-surface characterization like in high-resolution seismic surveys (Piwakowski et al., 1997). As the source is explosive, we embed it at 1m depth. In this case, significant energy (amplitude greater than 30% of the maximum amplitude) propagated between $48Hz$ and $135Hz$, *i.e.* with a wavelength between $\lambda_{min} = 2.98m$ and $\lambda_{max} = 8.38m$.

For recording, the source and receiver geometry remains constant : the spacing distance between receivers is 1m and the first receiver is 5m away from the source. The finite difference spatial step is 0.1m in the vertical and horizontal directions, satisfying the condition of 30 points per wavelength (Bohlen & Saenger, 2003). The grid size is $451 * 251$ numerical cells. The time step is $5.10^{-5}s$

and we simulate 10000 time steps, *i.e.* 0.5s. We compute the dispersion image taking into account frequencies ranging between 10Hz and 200Hz since we deal with synthetic data only (the only noise is numeric) and because we do not care about the amplitude parameter. However, we have to keep in mind, in the analysis of temporal shot gather, that the dominant propagating frequency is about 90Hz.

Initial tests

Figure B.6(a) shows a shot gather simulated for an homogeneous medium while Figure B.6(b) shows a shot gather in case of a 2m deep circular cavity filled with air in the same homogeneous medium (Figure B.4(a)). We can clearly see on both figures different components of the direct arrival due to P waves and Rayleigh waves respectively. A diffraction pattern and significant attenuation due to the cavity is clearly visible in Figure B.6(b). The cavity acts as a filter, as early works have already shown (Leparoux et al., 2000). However, we focus here on the analysis of the influence on phase parameter only, without taking into account the amplitude parameter, since we simulate propagation in elastic media. In order to compute the spectral amplitude of direct surface waves, a temporal Hamming window filter is applied to the shot gathers (Figures B.6(a) and B.6(b)). Figures B.7(a) and B.7(b) show results in the absence and presence of the cavity.

Figure B.6(d) shows the dispersion image calculated with the shot gather on Figure B.6(a). It clearly shows the fundamental mode of propagation with a non-dispersive phase velocity of about 400m/s, and the loss of resolution and reduced phase velocity due to "near-field" effects at low frequency. Figure B.6(e) shows the dispersion image corresponding to the shot in the medium with a 2 m deep cavity (Figures B.4(a) and B.6(b)). There is a loss of coherent energy for frequencies ranging between 63Hz and 71Hz.

In order to better quantify the role and the influence of the cavity, we subtract seismograms with and without cavity (Figure B.6(c)) and then compute the dispersion image (Figure 6B.6f)) that we call "differential image". The temporal differential seismogram allows to isolate the cavity effects. It highlights the diffraction pattern of P waves and Rayleigh waves in backward and forward directions as well as the surface waves converted part. A first diffracted part of signal comes from P waves : it propagates symmetrically in the two directions with the P wave velocity. On the right side of the cavity, this diffracted part seems to be partly converted to surface waves at 19m offset (labeled "1" on Figure B.6(c)) to the end of the seismic profile. This conversion generates a phase shift on the Rayleigh-wave train (labeled "1b" on Figure B.6(c)). Such a feature is not so clear on the opposite side, where two diffracted Rayleigh waves propagate at later times (labeled "2" on Figure B.6(c)). Actually, P wave and surface waves are diffracted several times between the cavity and soil surface. This complex interaction makes the diffraction pattern asymmetrical with respect to the cavity position.

As a first conclusion, we notice that the secondary seismic field, propagating with the Rayleigh-wave velocity, partly comes from converted P-wave diffraction, generating a complex diffraction pattern. Indeed, the cavity size is small compared to the longest Rayleigh wavelengths and the cavity depth allows the smallest wavelengths to propagate above it. In this way, the smallest and longest wavelengths are not affected by the cavity. For intermediate frequencies, the cavity gives rise to diffractions. As a result, the diffracted Rayleigh waves are relatively weak compared to the direct ones. The differential dispersion image has no immediate interpretation but the influence of the cavity, and particularly the backscattered waves, are evident. This complex phenomenon appears as if an higher mode is involved and the diffraction pattern lowers the coherency of phases. Furthermore, the energy of the Rayleigh-wave lobe is dominant up to about 170Hz, above which P waves are dominant, albeit weak.

We will now compare this reference case to synthetic examples when the cavity depth and cavity

shape vary and in a final step, introduce a weathered zone above and around the cavity.

Effect of the cavity depth

For each example presented here, only the cavity depth varies (Figure B.4(a)). The results of Figure B.8 indicate that the deeper the cavity, the later the diffracted waves coming from the P-wave arrival in seismograms. Differential temporal seismograms (Figures B.8(g) and B.8(h)) show the complexity of interaction between different diffracted and converted waves. They are not symmetrical about the cavity position and some arrival trains are highly disturbed (labeled "3" on Figure B.8(g)). This is confirmed by the differential image (Figures B.8(j) and B.8(k)) where few coherent phases appear at frequencies above 60 Hz. On dispersion image of shot gathers, the band of frequencies of non-coherent energy increases for deeper cavities (Figures B.8(d), B.8(e)). The lower amplitude on the dispersion image indicates that waves of this frequency band do not propagate with a regular phase velocity in the forward direction. That can be explained by the backward diffraction pattern and the phase shift we showed previously. The frequency content obviously depends on the cavity depth, due to the Rayleigh diffracted part but also due to the interferences of several wave trains. This case shows that these interactions between converted waves and diffracted waves are not simple and nor is the phase interaction.

When the depth at the top of the cavity deepens, its influence on body waves increases as shown on differential seismograms (Figures B.8(g) and B.8(h)). Diffracted body waves appear as energetic as converted ones at nearly all offsets. For the frequencies we use, the cavity becomes too deep to significantly disturb the surface wave phase propagation. This is confirmed by the energy decrease in dispersion images, where for the shallowest cavity, the band of non-coherent energy contains 25 % less energy than other frequencies for Rayleigh waves phase velocities, whereas only 12% of energy is missing for the 5 m deep and the 8m deep cavity. According to Soczkiewicz (1996), 40 % of the maximal energy is located at 2m depth for $\lambda = 2.98m$ (minimum wavelength) and 89 % for $\lambda = 8.38m$ (maximum wavelength). At 5m depth, 0.03% of the maximal energy is present for $\lambda = 2.98m$ whereas 55% is still there for $\lambda = 8.38m$. Finally, only 0.002% of the maximal energy is present for $\lambda = 2.98$ m for a 8m depth and 26.7% for $\lambda = 8.38m$. It explains the weak break of energy on the dispersion image (Figure B.8(h)) at high frequencies when the cavity deepens.

Effect of the cavity shape

In order to test the influence of the cavity shape, we then introduce a rectangular, 2m deep, 2.5m high and 4m long cavity (Figure B.4(b)). The differential seismogram (Figure B.8(i)) indicates the presence of diffracted body (labeled "4") and surface waves (labeled "5"). Compared to the circular cavity case (Figure B.6), the diffracted wave in the backward direction appears stronger (labeled "4"), due to the presence of diffracting corners and to a locally plane free surface. The diffraction pattern is not symmetrical, as in the previous case. The dispersion image is modified (Figure B.8(f)), in particular, the bandwidth of less coherent Rayleigh wave energy. This is possibly related to the shallower floor of the cavity. The energy decrease in the dispersion image for non-coherent energy amounts to 25%, which was as well the case for the 2m deep circular cavity. The differential dispersion image (Figure B.8(l)) shows that the residual scattered energy is dominated by surface waves. These results underline the necessity to take into account the cavity shape in order to evaluate the feasibility of detection by seismic surface wave measurements.

Effect of an altered zone above and around the cavity

We evaluate the influence of a surrounding altered medium around the cavity by adding a $1m$ thick circular zone, where $V_s = 200m/s$, $V_p = 444m/s$ and $\rho = 1600kg/m^3$ (Figure B.4(c), zone A). The damaged zone around the cavity observed in real cases justifies this kind of shape. The seismogram (Figure B.9(a)) shows complex phenomena, and several waves propagate in the backward and forward directions. The dispersion image becomes more complex as if the weathered zone has generated higher modes, or overtones (Figure B.9(c)). The signature of the cavity at $60Hz$ is still present, but another phenomenon happens at approximately $105Hz$. It is due to the presence of the altered medium, which traps waves before their interaction with the cavity and retains the seismic energy.

The differential seismogram (Figure B.9(b)) highlights the ringing due to trapped waves in the low velocity zone. It also shows that the signature of the cavity and the altered zone can mainly be inferred from the abrupt offset-dependant attenuation of the Rayleigh wavetrain, as confirmed by the dispersion image (Figure B.9(d)). In the case where a collapsing conical-shape structure on top of the cavity (Figure B.4(c), zone B), as generally observed in real cases, waves are trapped above the cavity (Figure B.10(a)) and oscillate between the two free surfaces (the free surface of the cavity and the free surface of the soil), generating ringing phenomena. The corresponding dispersion image (Figure B.10(c)) is more perturbed than in the previous case (Figure B.9(a)), caused by interactions between the cavity and the altered zone.

To evaluate the influence of the altered medium influence on the wave propagation, we study a case containing the altered medium only, that is, without an underlying cavity (Figures B.10(b) and B.10(d)). Referring back to Figure B.10(a), it can be seen that when the cavity is present, waves are delayed, slowed down and a part is diffracted when going through the cavity. The cavity signature appears to be less energetic than of the altered medium alone. This suggests that it is easiest to detect areas of altered and weathered medium, and constitutes a useful result in practice, since natural cavities become dangerous when alteration of soil extends up to the surface. Detecting this characteristic is of great importance to prevent natural hazards.

B.0.6 Conclusions

We developed and used an accurate and stable 2D P-SV finite difference method, particularly efficient and well suited for near-surface media, in order to better understand the influence of a cavity and of several parameters on the propagation of seismic surface waves. We focused on the phase velocity analysis using dispersion images. It allowed us to identify several physical phenomena and important factors that perturb wave propagation when the medium contains a cavity or a weathered zone.

The main signature of a shallow cavity consists of a band of frequencies of non-coherent energy whose range depends on the cavity depth and shape, although relations remain complex. In our case study, the cavity more strongly affects seismograms when it is nearer to the surface and when its section is rectangular. It will be possible to obtain such information on seismograms for a deeper cavity when the frequency source is lower or if the velocity of the medium is higher than in the examples shown. A low velocity zone of conical shape above the cavity, generally caused by alteration of the medium, leads to trapped waves. This phenomenon modifies the structure of the dispersion images, more than a cavity without a surrounding altered zone. This means that, in real experiments, we are better able to detect a zone of altered medium due to the cavity than the cavity itself. We therefore recover heterogeneities at the same time, or even before, being able to infer the cavity geometry. Further work will employ numerical modeling in the frequency domain which is able to take into account physical phenomena of attenuation.

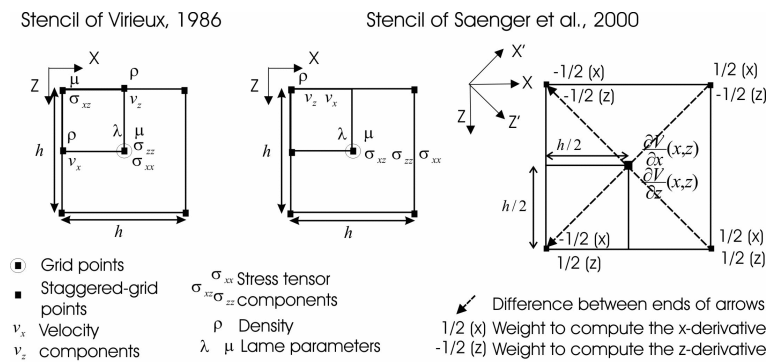


FIG. B.1: New staggered grid (left) and derivative stencil (right), after Saenger et al. (2000). In this Figure, $\Delta x = \Delta z = h$.

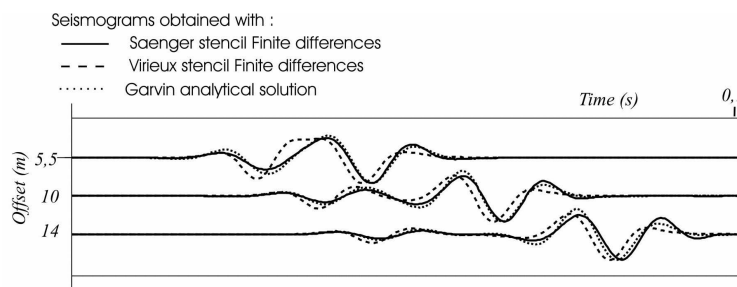


FIG. B.2: Comparison between seismograms obtained with the Saenger et al. (2000) finite difference stencil, the Virieux (1986) stencil and the Garvin (1956) analytical solution. Body waves as well as surface waves are better modeled with the Saenger et al. (2000) stencil. For this simulation, $V_p = 888\text{m/s}$, $V_s = 431\text{m/s}$ and $\rho = 1600\text{kg/m}^3$

Acknowledgements

I would like to thank Gaetano Festa (IPGP, France) for allowing me to compare his spectral elements seismograms with the finite difference ones. I also greatly thank the reviewers and especially the Associate Editor for their useful and constructive remarks. This work was funded by the BRGM in the framework of its project called "détection de cavités souterraines par méthodes géophysiques". Publications Géosciences Azur xxx

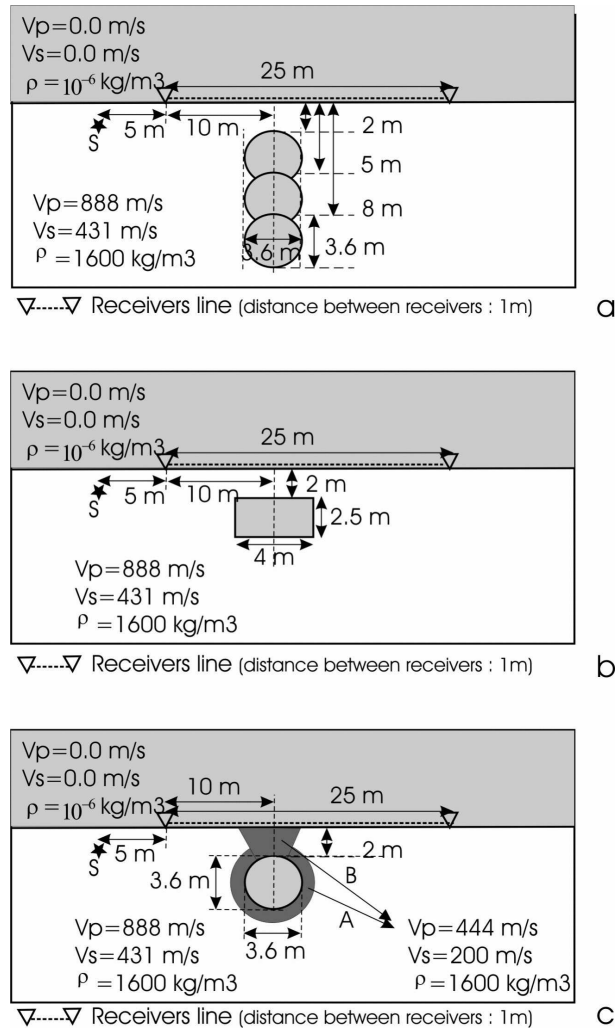


FIG. B.4: Positions of the source (S) and receivers for a medium containing circular cavities (a), rectangular cavity (b) and a circular cavity with altered zones (c)

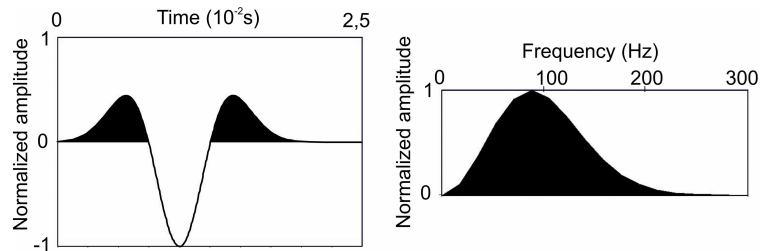


FIG. B.5: Time domain representation of the Ricker source centered around 88.8Hz (left) and frequency content of the source (right)

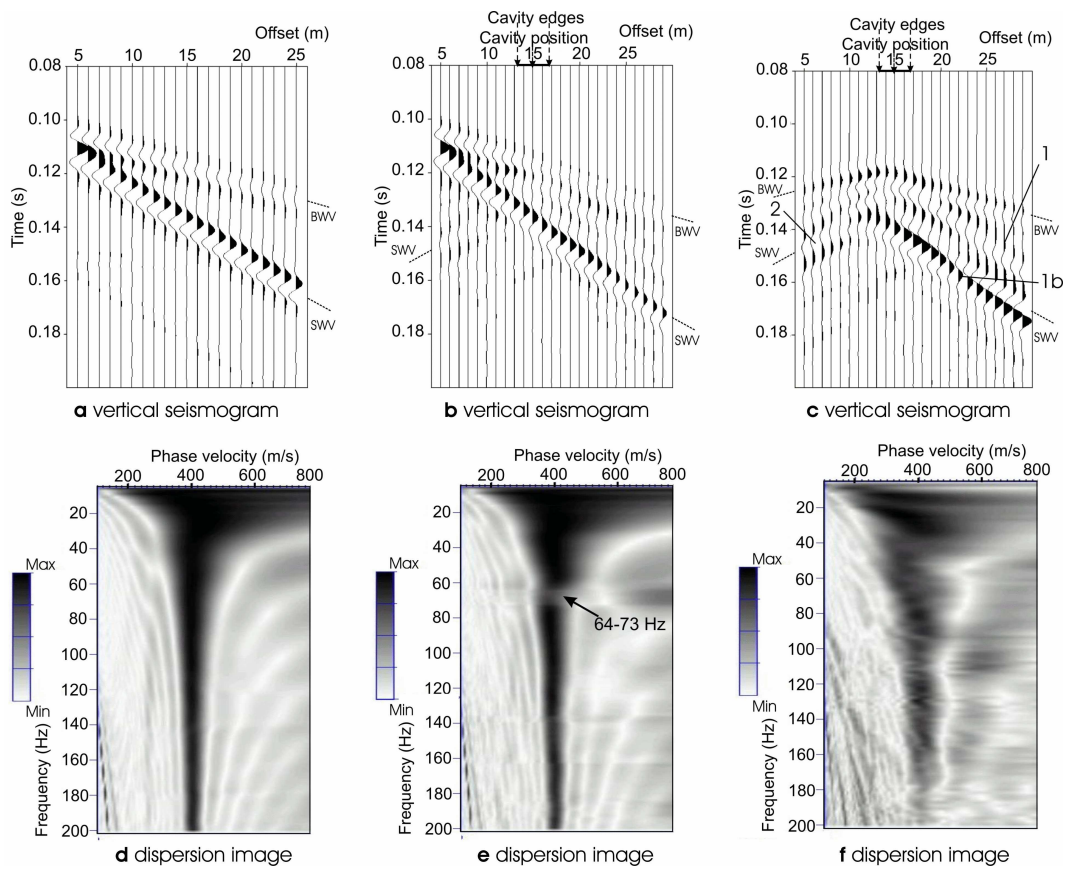


FIG. B.6: Vertical seismograms and dispersion images for the homogeneous medium (a and d), with a cylindrical cavity (b and e) and differences between both cases (c and f). Label 1 is for surface waves, label 1b, for surface waves shift and label 2, for diffracted Rayleigh waves. For (e), the attenuated zone presents a 25% energy decrease. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.

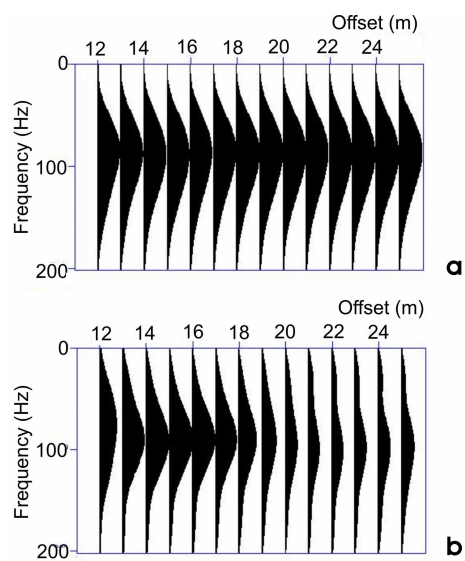


FIG. B.7: Spectral amplitude of the surface waves propagating in a medium without cavity (a) and with a 2m deep circular cavity (b). In this case, the circular cavity center is located at the offset 10m.

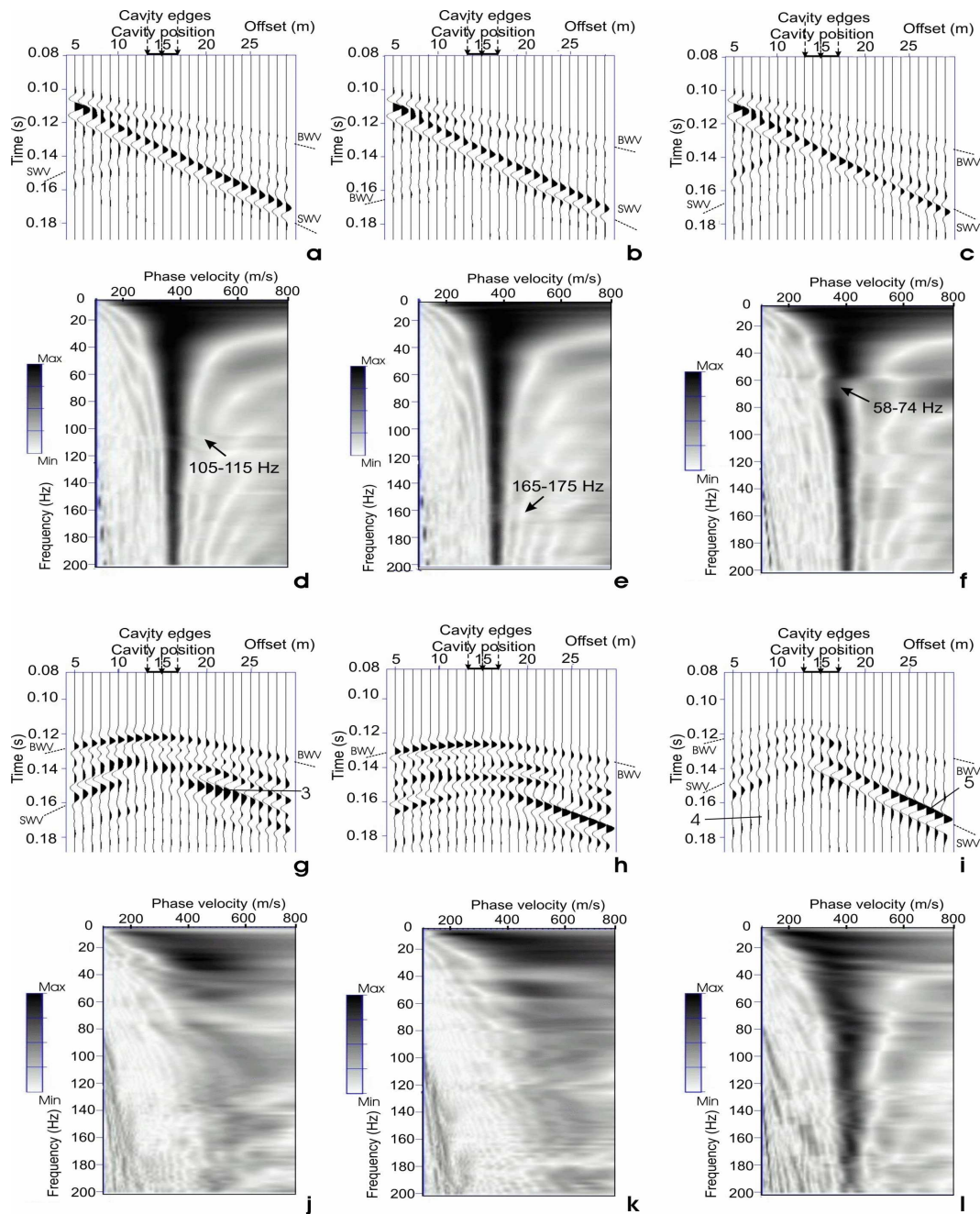


FIG. B.8: Seismograms (a,b,c), corresponding dispersion images (d,e,f), differential seismograms (g,h,i) and corresponding dispersion images (j,k,l) for the homogeneous medium with a 5m deep circular cavity (left column : a, d, g, j), a 8m deep circular cavity (central column : b, e, h, k) and 2 m deep rectangular cavity (right column : c, f, i, l). Label 3 is for disturbed arrival train, label 4, for diffracted body wave and label 5, for diffracted surface wave. For (d) and (e), the attenuated zone presents a 12% energy decrease. For (f), the attenuated zone presents a 25% energy decrease. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.

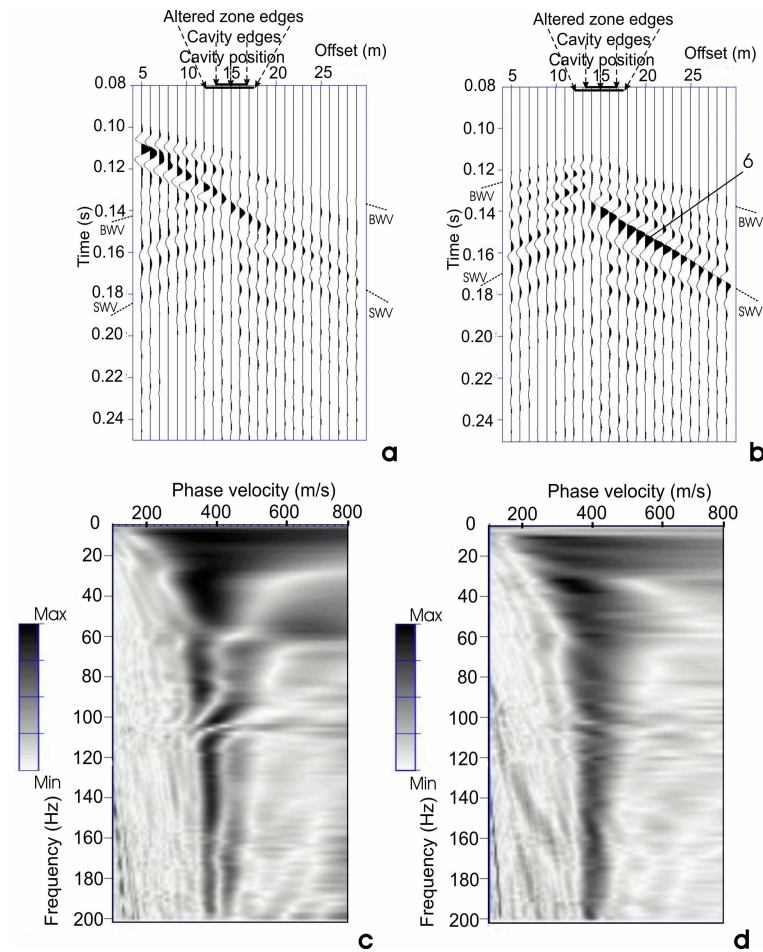


FIG. B.9: Seismogram (a), corresponding dispersion image (c), differential seismogram (b) and corresponding dispersion image (d) for the homogeneous medium with a 2m deep circular cavity and a surrounding circular zone of altered medium. Label 6 is for forward diffracted surface wave. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.

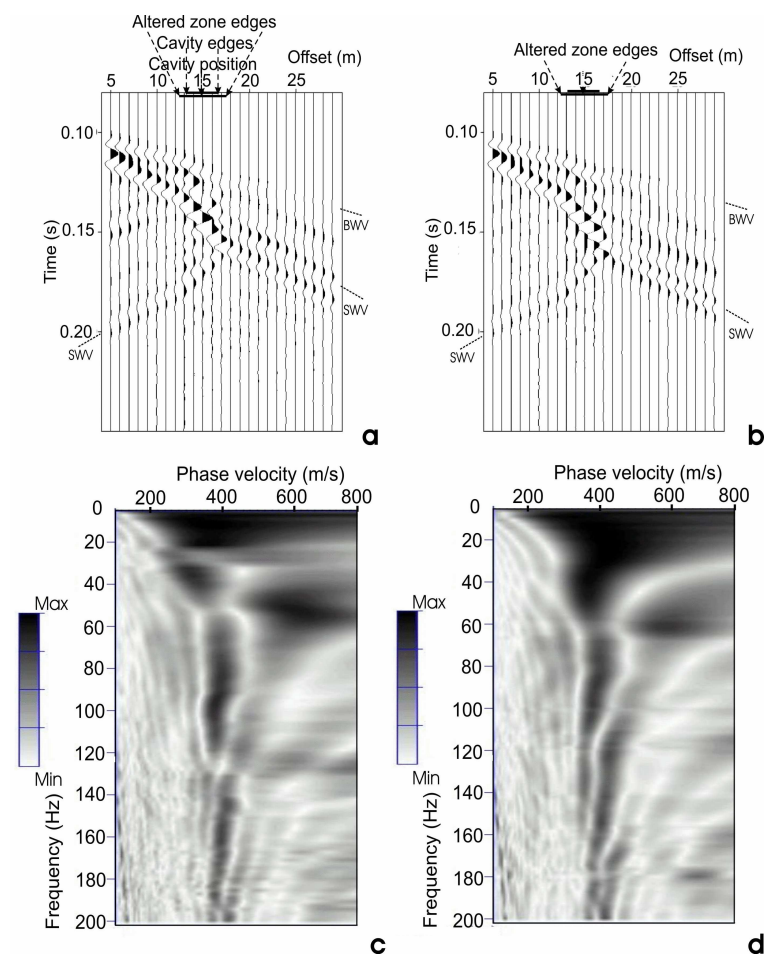


FIG. B.10: Seismograms and dispersion images in the homogeneous medium with a conical-shape altered zone with (a and c) or without (b and d) an underlying cavity. Labels BWV and SWV correspond to the waves propagating with the Body Wave Velocity and the Surface Wave Velocity.

Annexe C

Inversion de la source sismique d'après Ravaut (2003) et Pratt (1999)

Suivant Ravaut (2003) et Operto et al. (2004), voici comment nous avons implémenté la source sismique. Supposons connu un terme source \mathbf{S} estimé. Nous souhaitons améliorer la connaissance de la source en la corrigeant d'un facteur multiplicatif s à déterminer. Nous supposons que nous connaissons également un modèle de vitesse de départ.

Le champ des vitesses \mathbf{X} calculé dans le modèle de vitesse s'exprime en fonction du terme de source $s\mathbf{S}$ selon

$$\mathbf{W}\mathbf{X} = s\mathbf{S} \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{W} est la matrice d'impédance.

Comme s est un scalaire, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}^{-1}s\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{S}s = \mathbf{X}_{init}s \quad (\text{C.2})$$

où \mathbf{X}_{init} représente le champ des vitesses modélisé pour l'excitation de la source \mathbf{S} .

Ainsi, l'inconnue du problème s est reliée aux données \mathbf{X} par une relation linéaire. Elle peut être obtenue par minimisation au sens des moindres carrés d'une fonction coût $C(s)$ contenant l'écart entre données observées et calculées :

$$C(s) = 1/2 \|\mathbf{X}_{obs} - \mathbf{X}_{init}s\|^2 \quad (\text{C.3})$$

La solution est classiquement donnée par :

$$s = \frac{\mathbf{X}_{init}^t \mathbf{X}_{obs}^*}{\mathbf{X}_{init}^\dagger \mathbf{X}_{init}} \quad (\text{C.4})$$

D'après Ravaut (2003), cette formule est équivalente à celle établie par Pratt (1990). Comme Ravaut (2003), nous avons implémenté l'inversion de la source sismique dans le code d'inversion. Le terme de source est calculé dans le domaine des fréquences et recalculé à chaque itération et pour chaque fréquence. Cela implique que la source est estimée en considérant à chaque fois le modèle issu de l'itération précédente comme le modèle de vitesse.

**Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions.
Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines**

Résumé :

L'imagerie des paramètres physiques du sous-sol à partir d'enregistrements sismiques de surface constitue un problème inverse non linéaire. L'inversion des formes d'onde élastique est une méthode d'imagerie quantitative multiparamètres de diffractants, nécessitant au préalable la connaissance précise d'un macromodèle de vitesse.

Le problème direct associé, la propagation des ondes élastiques, est résolu dans le domaine fréquentiel, permettant la prise en compte efficace d'acquisitions multisources et multirécepteurs, par une méthode numérique de différences finies modélisant la propagation de tous les types d'onde (ondes de volume, de surface, diffractées, réfractées ...). Le stencil de différences finies choisi permet simule précisément la surface libre et la propagation des ondes de surface.

Cette inversion linéarisée s'appuie sur une méthode de gradient, qui minimise une fonction coût contenant les différences entre données observées et calculées. Deux paramètres sismiques sont reconstruits à partir de sismogrammes verticaux et horizontaux. L'inversion est effectuée des basses fréquences vers les hautes fréquences, introduisant des longueurs d'onde de plus en plus courtes dans les images des paramètres. Ces dernières sont sensibles au choix des approximations physiques effectuées pour calculer le gradient de la fonction coût (approximation de Born ou de Rytov), au dispositif d'acquisition, au préconditionnement des données et au choix des paramètres inversés.

Cette méthode est ensuite appliquée à des milieux contenant une surface libre. La surface libre est une interface très contrastée qui donne lieu à des ondes de surface très énergétiques dans les sismogrammes. Les milieux de subsurface sont complexes, les ondes qui s'y propagent subissent des réflexions ou diffractions multiples. Lorsque le milieu contient deux anomalies dont le contraste en vitesse vaut 20%, l'inversion les localise correctement dans un macromodèle connu. Les images sont améliorées et l'amplitude des anomalies est très bien reconstruite lorsque le nombre de fréquences inversées augmente et les données sont sélectionnées des faibles dépôts vers les grands dépôts. Avec une anomalie fortement contrastée comme une cavité vide, l'inversion retrouve correctement la position, la forme et la taille de l'objet mais son amplitude est sous-estimée.

L'application à des données réelles verticales de subsurface acquises dans un milieu complexe contenant une cavité maçonnée montre que le milieu hétérogène issu de l'inversion ajuste mieux les données et permet de bien reproduire les ondes inversées. Néanmoins, la cavité n'est pas imagée.

Mots-clés : propagation des ondes élastiques, inversion linéarisée, méthode de gradient, domaine fréquentiel, approximations de Born et de Rytov, dispositif d'acquisition, surface libre, ondes de surface, subsurface, détection de cavités.

Elastic full waveform inversion in the frequency-space domain in two dimensions.

Application to the subsurface characterization in the framework of underground cavities detection

Abstract :

Imaging the soil physical parameters with surface seismic recordings is a non linear inverse problem. The elastic full waveform inversion is a quantitative multiparameters imaging method of diffractors that requires beforehand the knowledge of an initial velocity model.

The corresponding forward problem, the elastic waves propagation, is solved in the frequency domain, allowing to efficiently take into account multisources and multireceivers acquisitions, with a finite difference method that modelizes the propagation of all wave types (body waves, surface waves, diffracted waves, refracted waves ...). The chosen finite difference stencil precisely simulates the free surface and surface waves propagation.

This linearized inversion is based on a gradient method that minimizes a misfit function containing the difference between observed and calculated data. Two seismic parameters are reconstructed from vertical and horizontal seismograms. The inversion is performed from low to high frequencies, allowing to progressively introduce higher wavelengths in the parameters images. The latter are sensitive to the choice of the physical approximations chosen to calculate the misfit function gradient (Born or Rytov approximation), to the acquisition geometry, to the data preconditionning and to the inverted parameters choice.

This method is then applied to media containing a free surface. The free surface is a very contrasted interface that generates very energetic surface waves in seismograms. Near-surface media are complex, propagating waves are reflected or diffracted several times. When the medium contains two anomalies whose velocity contrast is equal to 20%, the inversion correctly localize them in a known background model. Images are improved and anomalies amplitudes are very well recovered when the number of inverted frequencies increases and the data are selected from low to high offset. With a strongly contrasted anomaly like an empty cavity, the inversion correctly recovers the object position, shape and size but its amplitude is underestimated.

The application to subsurface real vertical data recorded in a complex medium containing a cavity shows that the inversion constructs a heterogeneous medium allowing to better fit data and allows to reproduce inverted waves. Nevertheless the cavity is not imaged.

Key-words : elastic waves propagation, linearized inversion, gradient method, frequency domain, Born and Rytov approximations, acquisition geometry, free surface, surface waves, near-surface, cavity detection.
