HAL
open science

# Théorie des bifurcations appliquée à l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères

Sébastien Kolb

**To cite this version:**

Sébastien Kolb. Théorie des bifurcations appliquée à l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT : . tel-00199793

**HAL Id: tel-00199793**

**https://theses.hal.science/tel-00199793**

Submitted on 19 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE*

*N° attribué par la bibliothèque*

**THESE**

pour obtenir le grade de **DOCTEUR DE L'INP Grenoble**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

préparée aux laboratoires ONERA/DCSD et IMAG/LJK (UMR 5224)

dans le cadre de **l'École Doctorale**
**Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

présentée et soutenue publiquement par

Sébastien Kolb

le 27 juin 2007

# Théorie des bifurcations appliquée à l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères

*sous la direction de P.-M. Basset et J. Della Dora*

**JURY**

| | | |
|---|---|---|
| M. Bernard Brogliato, | INRIA Rhône Alpes | Président |
| M. Tarek Hamel, | Univ. Nice Sophia Antipolis | Rapporteur |
| M. Nicolas Petit, | ENS Mines de Paris | Rapporteur |
| M. Bernard Benoit, | EUROCOPTER | Examinateur |
| M. Olivier Montagnier, | CReA | Examinateur |
| M. Jean Della Dora, | INP Grenoble | Directeur de thèse |
| M. Pierre-Marie Basset, | ONERA | Co-encadrant |

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Pierre-Marie Basset, mon responsable ONERA, pour m'avoir donné la possibilité de faire cette thèse, pour m'avoir formé en mécanique du vol et pour le travail effectué en commun pendant ces quatre années.

Je remercie Jean Della Dora pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse, pour avoir lu et corrigé mon manuscrit.

J'exprime mes remerciements à l'égard de Bernard Brogliato pour avoir consenti à présider mon jury de thèse.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Tarek Hamel et Nicolas Petit pour avoir accepté d'être mes rapporteurs, et également à Bernard Benoit et Olivier Montagnier qui ont bien voulu faire partie de mon jury.

Je souhaite aussi remercier Dominique Tristrant, chef d'unité de PSEV du département DCSD de Salon-de-Provence, pour avoir partagé son expérience passée sur l'étude de la dynamique non-linéaire des avions de combat et pour ses recadrages opportuns.

Je suis très reconnaissant vis-à-vis des ingénieurs hélicoptéristes de l'équipe DCSD de Salon-de-Provence, André Desopper, Armin Taghizad, Laurent Binet, pour leurs contributions et les renseignements qu'ils ont pu me fournir tout au long de ce travail.

J'exprime ma sympathie pour mon collègue de bureau, Frank Descatoire, ingénieur en mécanique du vol et passionné par l'aviation, pour sa bonne humeur inaltérable. J'espère que son traitement lui permettra de guérir complètement de sa maladie dans les mois à venir.

Je remercie le docteur Chang Chen et le professeur J. V. R. Prasad du Georgia Institute of Technology pour les publications que nous avons écrites en commun.

Je remercie les ingénieurs d'Eurocopter pour le temps qu'ils ont passé à répondre à mes interrogations.

Je remercie également toute l'équipe DCSD pour leur gentillesse et tous les bons moments passés ensemble.

Je remercie les autres doctorants de l'ONERA de Salon-de-Provence, Fabrice Cuzieux, Thomas Rakotomamonjy, Agnès Santori et consorts, pour les échanges d'informations et tous ces instants agréables que nous avons pu avoir.

Un grand merci notamment à Franck Garestier, doctorant AER, pour les préparations et les cours accomplis en commun à l'Ecole de l'Air.

Je ne délaisse pas les stagiaires. Les parties de football ont en effet animé tous les printemps et étés de ces années.

Je ne veux surtout pas oublier l'aide précieuse de l'ingénieur-réseau, Alain Lesain, du secrétariat et du service de documentation de l'ONERA.

Je remercie l'équipe pédagogique de l'Ecole de l'Air constituée de professeurs civils et militaires, pour l'esprit studieux et amical avec lequel nous avons travaillé.

Cette thèse n'aurait pu avoir lieu sans le soutien de l'Ecole de l'Air et de l'Armée de l'Air que je tiens tout particulièrement à remercier pour avoir financé ce projet pendant quatre ans et pour leur confiance.

Je remercie également tous les amis que j'ai connus dans ma vie salonaise extra-professionnelle, que ce soit au club d'échecs, au groupe de danses grecques, à la reconstitution historique,... Ils m'ont rendu l'existence dans la plaine de Crau plaisante et joyeuse.

J'exprime ma gratitude à l'égard d'Albert et de Domimique Fahed, pour tous les moments partagés ensemble. Ils m'ont fait oublier la solitude et l'isolement, qui incombent normalement à quiconque travaille loin de sa ville natale.

Je veux remercier du fond du cœur mes parents, mon frère, ma sœur et mes grands-parents pour leur soutien moral inconditionnel et leur sollicitude.

Merci enfin à tous ceux que j'oublie, aux contributeurs de l'ombre, qui sauront me pardonner je l'espère.

# Notations principales

| Variable | Désignation | Unité |
|---|---|---|
| $b$ | nombre de pales constituant le rotor | |
| $C_T$ | coefficient de traction du rotor : $\frac{F_Z}{\rho S(\Omega R)^2}$ | |
| $C_Q$ | coefficient de couple du rotor : $\frac{F_Z}{\rho S \Omega^2 R^3}$ | |
| $C_X$,$C_Z$ | coefficient de traînée et de portance | |
| $C_{Z_\alpha}, a_0$ | gradient de portance | $rad^{-1}$ |
| $c$ | corde de la pale | $m$ |
| $DDL$ | commande du pas cyclique latéral | % |
| $DDM$ | commande du pas cyclique longitudinal | % |
| $DDZ$ | commande du pas collectif du rotor principal | % |
| $DDN$ | commande du pas collectif du rotor arrière | % |
| $DTC$ | angle du pas cyclique latéral | $deg$ |
| $DTS$ | angle du pas cyclique longitudinal | $deg$ |
| $DT0$ | angle du pas collectif du rotor principal | $deg$ |
| $DTA$ | angle du pas collectif du rotor arrière | $deg$ |
| $g$ | accélération de la pesanteur | $m/s^2$ |
| $m$ | masse de l'hélicoptère | $kg$ |
| $p, q, r$ | vitesses angulaires de roulis, tangage et lacet | $deg/s$ |
| $P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}$ | vitesses angulaires suivant les axes de l'aéronef | $deg/s$ |
| $R$ | rayon du rotor | $m$ |
| $S$ | surface du disque rotor : $S = \pi R^2$ | $m^2$ |
| $U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}$ | vitesses de translation dans le repère appareil | $m/s$ |
| $V_X, V_Y, V_Z$ | vitesses de translation dans le repère terrestre | $m/s$ |
| $V_H$ (et $V_Z$) | vitesses horizontale (et verticale) dans le repère terrestre | $m/s$ |
| $V_i$ | vitesse induite | $m/s$ |
| $V_{i_m}$ | vitesse induite moyenne | $m/s$ |
| $V_{i_0}$ | vitesse induite moyenne de référence : $V_{i_0} = \sqrt{\frac{F_Z}{2\rho S}}$ | |
| $V_{i_c}, V_{i_s}$ | gradients longitudinal et latéral de vitesse induite | $m/s$ |

| Variable | Désignation | Unité |
|---|---|---|
| $\alpha$ | angle d'incidence | $deg$ |
| $\alpha_q$ | angle d'inclinaison du mât rotor par raport à l'axe $Z$ | $deg$ |
| $\beta$ | angle de dérapage | $deg$ |
| $\beta$ | angle de battement d'une pale | $deg$ |
| $\beta_0$ | conicité des pales | $deg$ |
| $\beta_{1c}$ | battement cyclique longitudinal | $deg$ |
| $\beta_{1s}$ | battement cyclique latéral | $deg$ |
| $\delta_0, \delta_{1c}, \delta_{1s}$ | mouvement de traînée des pales (premiers coefficients de Fourier) | $deg$ |
| $c$ | corde d'un profil de pale | $m$ |
| $\overline{\eta}$ | vitesse de l'hélicoptère normale au plan rotor normalisée par $V_{i_0}$ | |
| $\gamma$ | nombre de Lock : $\gamma = \rho a c R^4 / I_\beta$ | |
| $I_\beta$ | inertie de battement | $kg.m^2$ |
| $\overline{\lambda}$ | vitesse de l'air normale au plan rotor normalisée par $V_{i_0}$ | |
| $\overline{\mu}$ | vitesse de l'hélicoptère parallèle au plan rotor normalisée par $V_{i_0}$ | |
| $\overline{\nu}$ | vitesse induite moyenne normalisée par $V_{i_0}$ | |
| $\psi$ | azimut de rotation de la pale autour du mât rotor (référence arrière 0°) | $deg$ |
| $\rho$ | masse volumique de l'air | $kg/m^3$ |
| $\Phi, \Theta, \Psi$ | angles d'assiettes latérale, longitudinale et de cap du fuselage | $deg$ |
| $\sigma$ | solidité du rotor : surface des pales / surface du disque rotor | |
| $\theta$ | pas local en un point $(r, \psi)$ du disque rotor | $deg$ |
| $\theta_0$ | pas collectif des pales | $deg$ |
| $\theta_{1c}$ | pas cyclique latéral associé à $\cos\psi$ et à $DDL$ | $deg$ |
| $\theta_{1s}$ | pas cyclique longitudinal associé à $\sin\psi$ et à $DDM$ | $deg$ |
| $\Omega$ | vitesse angulaire de révolution du rotor | $rad/s$ |

**Conventions**

| | |
|---|---|
| $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ | dérivation par rapport au temps $t$ |
| $\beta' = \frac{d\beta}{d\psi}$ | dérivation par rapport à l'angle d'azimut $\psi$ ($\psi = \Omega \cdot t$) |
| $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ | dérivation d'une composante de force/moment par rapport à une variable d'état/commande |

**Abréviations**

| | |
|---|---|
| ARC | Aircraft Rotor Coupling |
| d.d.l. | degré de liberté |
| DER | Dérive |
| EMP | Empennage |
| FUS | Fuselage |
| PA | Pilote Automatique |
| PIO | Pilot Induced Oscillations |
| QDM | Quantité De Mouvement |
| RA | Rotor Arrière |
| RP | Rotor Principal |
| VRS | Vortex Ring State |

# Avant-propos

Cette thèse a été accomplie au sein de l'équipe de mécanique du vol des hélicoptères située au centre ONERA de Salon-de-Provence. Elle est rattachée à l'unité de recherche Pilotage, Simulation et Expérimentation en Vol (PSEV) appartenant au Département Commandes des Systèmes et Dynamique du vol (DCSD).

L'ONERA, acronyme d'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, est un établissement public à caractère industriel et commercial (EPIC), placé sous tutelle du Ministère de la Défense. La mission principale de l'ONERA est de conduire et de développer des recherches dans une large palette de disciplines puis de les valoriser pour l'industrie aérospatiale. Il gère entre autres le premier parc européen de souffleries et a de nombreux partenaires industriels et universitaires que ce soit en France, en Europe ou dans le monde. Ses activités sont regroupées sous quatre branches : Mécanique des Fluides et Energétique, Matériaux et Structures, Physique, Traitement de l'Information et Systèmes. Environ 2000 personnes, dont 1000 scientifiques, travaillent sur 8 sites géographiques.

Le centre de Salon-de-Provence se situe sur la base 701 de l'Armée de l'Air qui accueille l'Ecole de l'Air. Plusieurs équipes y sont regroupées dont celle évoquée qui est rattachée au département DCSD. Ce dernier a pour vocation la maîtrise du comportement dynamique des véhicules et il a pour domaines principaux d'expertise : la dynamique du vol, la commande des systèmes et les systèmes décisionnels.

Les travaux réalisés à l'ONERA sur les hélicoptères se font en concertation avec l'industriel EUROCOPTER dont le site industriel principal est basé à Marignane dans les Bouches-du-Rhône et les autres à La Courneuve en région parisienne ou à Donauwörth et Ottobrunn en Allemagne. Les hélicoptères fabriqués au cours de son histoire portent des noms tels que (la date de leur premier vol est donnée entre parenthèses) : Alouette (1955 pour II et 1959 pour III), Super Frelon (1962), Puma (1965), BO 105 (1967), Gazelle (1967), Dauphin (1972), Écureuil (1974), Super Puma (1978), Tigre (1991), EC 135 (1994), Colibri (1995), NH90 (1995), EC 145 (1999). EUROCOPTER a été formé en 1992, il est le résultat de la fusion de la division hélicoptères de l'entreprise française Aérospatiale Matra et de celle de la firme allemande DaimlerChrysler Aerospace AG.

En ce qui concerne cette thèse, il est à noter que la théorie des bifurcations d'une part et la modélisation de la dynamique du vol des hélicoptères d'autre part, sont deux domaines qui font l'objet d'investigations depuis de nombreuses années. Cependant, les méthodologies d'analyse des systèmes dynamiques non-linéaires n'ont quasiment pas été employées jusqu'à présent dans le domaine des hélicoptères. L'originalité de cette thèse réside donc dans son caractère de pionnier pour ce qui est de l'exploration de l'intérêt de telles méthodes pour l'étude de la dynamique du vol des hélicoptères.

En outre, il faut souligner que les travaux réalisés durant cette thèse s'efforcent de transférer vers une application industrielle complexe (l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères), des méthodes (et outils) mathématiques encore souvent cantonnées à l'étude de cas académiques où les systèmes dynamiques sont décrits par des équations nettement plus simples et en nombre plus réduit que celles mises au point par les "hélicoptéristes" durant des années d'efforts de modélisation. Par conséquent, dans cette thèse, les mathématiciens ne trouveront pas de théorèmes nouveaux et les ingénieurs en mécanique du vol des hélicoptères retrouveront les éléments de modélisation utilisés de nos jours à la fois par la recherche et l'industrie.

# Table des matières

**Remerciements** **4**

**Notations** **6**

**Avant-propos** **8**

**Introduction** **15**

**I Bases de l'étude** **19**

**1 Description de l'hélicoptère** **21**
1.1 Bref historique . . . . . 21
1.2 Utilisation . . . . . 22
1.3 Composition . . . . . 23
1.4 Fonctionnement . . . . . 23
1.5 Phases de vol . . . . . 26
1.6 Différents repères . . . . . 27

**2 Application de la théorie des bifurcations à la dynamique du vol des avions** **29**

**3 Application de la théorie des bifurcations à la dynamique du vol des hélicoptères** **37**

**4 Exemples de phénomènes non-linéaires de la dynamique du vol des hélicoptères** **43**
4.1 Exposé de l'état d'anneaux tourbillonnaires . . . . . 43
4.1.1 Historique de l'état d'anneaux tourbillonnaires . . . . . 43
4.1.2 Description physique de l'état d'anneaux tourbillonnaires . . . . . 44
4.1.3 Essais en vol menés par l'ONERA . . . . . 49
4.1.4 Les axes de recherche actuels . . . . . 50
4.2 Présentation du roulis hollandais . . . . . 51
4.2.1 Description . . . . . 51
4.2.2 Méthodologie d'analyse linéaire . . . . . 53
4.2.3 Perspectives sur l'analyse du roulis hollandais . . . . . 54
4.3 Eléments relatifs aux oscillations induites par le pilote . . . . . 54
4.3.1 Introduction . . . . . 54
4.3.2 Différents types de PIO . . . . . 56
4.3.3 Modèle pilote . . . . . 56
4.3.4 Méthode d'analyse . . . . . 57
4.3.5 Non-linéarité particulière : la limitation en vitesse . . . . . 60

4.3.6 Approximation du premier harmonique du limiteur en vitesse . . . . . 61
4.3.7 Exemple : le PIO de l'arrondi à l'atterrissage du X-15 . . . . . 64
4.3.8 PIO recensés apparus sur des hélicoptères . . . . . 74

**5 Présentation des codes de calcul disponibles 75**
5.1 Code d'analyse des systèmes dynamiques ASDOBI . . . . . 75
5.1.1 Présentation . . . . . 75
5.1.2 Fondements mathématiques de l'algorithme de continuation . . . . . 75
5.1.3 Description de l'algorithme de continuation . . . . . 76
5.1.4 Différents types de problèmes traités . . . . . 79
5.2 Code de mécanique du vol des hélicoptères HOST . . . . . 81
5.2.1 Présentation . . . . . 81
5.2.2 Calculs disponibles . . . . . 82
5.2.3 Modélisation selon un libre choix . . . . . 82
5.2.4 Exploitation des résultats . . . . . 83
5.2.5 Architecture informatique du logiciel . . . . . 83
5.2.6 Architecture d'un modèle d'hélicoptère dans HOST . . . . . 83
5.2.7 Données du HOST . . . . . 86
5.3 Modèles physiques du HOST . . . . . 87
5.3.1 Modèles rotor . . . . . 87
5.3.2 Autres éléments constitutifs . . . . . 90
5.4 Détails sur l'appareil et le modèle choisis . . . . . 90

**II Couplage des modèles de la dynamique du vol et des outils d'analyse 93**

**6 Modélisation simplifiée de la dynamique du vol d'un hélicoptère 95**
6.1 Cahier des charges . . . . . 95
6.2 Cadre général . . . . . 96
6.3 Sources : documentation et logiciels utilisés . . . . . 96
6.4 Conditions d'application du principe fondamental de la dynamique à l'hélicoptère 97
6.4.1 Système auquel le principe fondamental de la dynamique est appliqué . . 98
6.4.2 Degrés de liberté . . . . . 98
6.4.3 Hypothèses . . . . . 98
6.5 Description mathématique du modèle . . . . . 99
6.5.1 Équations de la mécanique du vol . . . . . 99
6.5.2 Modélisation du rotor principal . . . . . 99
6.5.3 Modélisation du rotor arrière . . . . . 105
6.5.4 Modélisation de l'empennage horizontal . . . . . 106
6.5.5 Modélisation de la dérive . . . . . 107
6.5.6 Modélisation du fuselage . . . . . 107
6.5.7 Sommation des torseurs au centre de gravité . . . . . 108
6.6 Validation . . . . . 108
6.7 Conclusion . . . . . 110

**7 Mise en place de la méthodologie 111**
7.1 Objectifs . . . . . 111
7.2 Données d'entrée d'ASDOBI . . . . . 111
7.3 Structure informatique du couplage . . . . . 112
7.4 Modélisation du problème et paramètres caractéristiques . . . . . 114
7.5 Définition du critère de stabilité . . . . . 115

7.6 Organisation d'un calcul HOST-ASDOBI . . . . . 116

**III Contributions à l'analyse de la dynamique du vol non-linéaire des hélicoptères 119**

**8 Etude d'un cas de bifurcation réelle : l'état d'anneaux tourbillonnaires 121**
8.1 Courbe caractéristique des points d'équilibre (diagramme de bifurcation) . . . . . 121
8.1.1 Mise en forme du problème pour le calcul de la courbe des points d'équilibre 121
8.1.2 Résultat et interprétation . . . . . 124
8.2 Lieu des points de bifurcation . . . . . 125
8.3 Simulations temporelles associées . . . . . 127
8.4 Stratégie d'échappement de la zone critique . . . . . 128
8.5 Comparaison avec d'autres critères qui délimitent la zone de VRS . . . . . 128
8.6 Analyse de sensibilité du domaine de VRS vis-à-vis du modèle de vitesse induite 130
8.7 Variabilité du domaine de VRS en fonction du niveau de modélisation . . . . . 133
8.8 Variabilité du domaine de VRS en fonction de différents paramètres . . . . . 136
8.9 Conclusions sur l'analyse de l'état d'anneaux tourbillonnaires par la théorie des bifurcations . . . . . 138

**9 Etude d'un cas de bifurcation complexe : le roulis hollandais 139**
9.1 Calcul et analyse de la bifurcation avec le modèle HOST . . . . . 140
9.1.1 Détermination du point de bifurcation de Hopf . . . . . 140
9.1.2 Lieu des points de bifurcation de Hopf . . . . . 141
9.1.3 Analyse de la bifurcation de Hopf . . . . . 141
9.1.4 Conclusion sur les investigations menées avec le HOST . . . . . 148
9.2 Calcul et analyse de la bifurcation avec le modèle analytique . . . . . 149
9.2.1 Formulation du problème . . . . . 149
9.2.2 Simulations temporelles . . . . . 150
9.2.3 Continuation des orbites périodiques . . . . . 153
9.2.4 Conclusion sur les investigations menées avec le modèle analytique . . . . 157
9.3 Conclusion générale sur l'étude du roulis hollandais de l'hélicoptère . . . . . 157

**10 Analyse de bifurcations de cycles limites : les oscillations induites par le pilote 159**
10.1 Premier cas de PIO : le vol en stationnaire du concept ADOCS . . . . . 159
10.1.1 Présentation de l'appareil et du cas de vol . . . . . 159
10.1.2 Mise en équation du problème . . . . . 160
10.1.3 Analyse . . . . . 161
10.1.4 Conclusion sur l'étude du premier cas de PIO . . . . . 166
10.2 Deuxième cas : le pilote automatique complet du concept ADOCS . . . . . 166
10.2.1 Présentation . . . . . 166
10.2.2 Première non-linéarité : la sensibilité non-linéaire du manche . . . . . 170
10.2.3 Deuxième non-linéarité : la limitation en vitesse de l'actionneur . . . . . 175
10.2.4 Conclusion sur l'étude du deuxième cas de PIO . . . . . 182
10.3 Conclusion générale sur l'étude des oscillations induites par le pilote de l'hélicoptère 183

**Conclusion générale et perspectives** **187**

**Annexes** **193**

**A Eléments de théorie des bifurcations** **193**
A.1 Présentation . . . . . 193
A.2 Ensemble limite . . . . . 193
A.3 Bifurcations réelles de points d'équilibre . . . . . 196
A.4 Bifurcations complexes de points d'équilibre . . . . . 197
A.5 Bifurcations de cycles limites . . . . . 199
A.6 Méthode des projections . . . . . 200
A.7 Différents codes de calcul disponibles pour l'analyse par la théorie des bifurcations 202

**B Modélisation et prédiction de l'état d'anneaux tourbillonnaires** **205**
B.1 Modélisation des vitesses induites en état d'anneaux tourbillonnaires . . . . . 205
B.2 Enveloppe de l'état d'anneaux tourbillonnaires . . . . . 210

**C Approximations du premier harmonique de quelques non-linéarités** **215**

**D Mail d'acceptation d'une publication** **219**

**Bibliographie** **220**

**Table des figures** **230**

# Introduction

# Introduction

## Contexte

La théorie des bifurcations a pour objet l'étude des changements de type topologique des trajectoires solution d'un système dynamique non-linéaire quand les paramètres de contrôle varient. Elle porte son attention principalement sur l'évolution des points d'équilibre et des orbites périodiques (qui constituent des états asymptotiques), leur multiplicité et leurs propriétés de stabilité.

La dynamique du vol des hélicoptères, qui décrit le comportement global de l'aéronef à voilure tournante, présente de nombreuses non-linéarités qui sont dues aux efforts aérodynamiques (rotors, fuselage, empennage, etc.), aux couplages inertiels, aux interactions aérodynamiques ... Ces non-linéarités influencent le comportement en vol de l'hélicoptère qui ne peut être rendu par une étude qui se limite à des modèles linéaires.

L'intérêt de la théorie des bifurcations réside dans le fait qu'elle fournit des informations sur le comportement d'un modèle non-linéaire et contribue à l'analyse de ses propriétés qualitatives et de leurs changements aux valeurs critiques.

De nombreux travaux ont été menés pour appliquer cette démarche à la dynamique du vol des avions [Paranjape *et al.* 2007]. Ils portent principalement sur les vols aux grandes incidences des avions de combat (e.g [Mehra *et al.* 1977, Guicheteau 1993a, Goman *et al.* 1997]) et leurs départs en vrille, mais aussi sur leurs modes propres [Macmillen et Thompson 1998], leurs couplages [Goman et Khramtsovsky 1997, Jahnke 1998] ou sur la robustesse de leur pilote automatique [Avanzini et de Matteis 1996, Goman et Khramtsovsky 1998, Sinha et Ananthkrishnan 2002].

Par contre, en ce qui concerne les hélicoptères, très peu d'investigations ont été menées. Ces dernières se concentrent sur des cas de vol assez rares dans la pratique (comme dans l'œuvre de K. Sibiliski [Sibilski 1998, Sibilski 1999] à la fin des années 90) ou assez incomplets dans leur modélisation (pour ce qui est des étudiants de M. H. Lowenberg [Bedford et Lowenberg 2003, Bedford et Lowenberg 2004, Rezgui *et al.* 2006] à partir de 2003). P.-M. Basset, quant à lui, a initié de telles recherches en 2002 à l'ONERA par l'examen de l'aérodynamique du rotor principal quand l'appareil rentre en état d'anneaux tourbillonnaires (vol de descente à forte pente) [Basset 2002].

Les études prédictives sur le comportement en vol des hélicoptères sont la plupart du temps effectuées par des simulations non-linéaires directes et/ou en procédant à des analyses où le modèle est linéarisé autour d'un point d'équilibre. Les travaux de thèse concernant la dynamique du vol des aéronefs à voilures tournantes ont donc jusqu'à présent essentiellement porté sur la modélisation. Cela s'explique par une plus grande difficulté à modéliser ce type d'appareil comparé aux avions. En particulier, l'influence prédominante du sillage tourbillonnaire d'un rotor sur lui-même et sur les autres éléments de l'aéronef est complexe à mettre en équations. Corrélati-

vement, le compromis entre réalisme et coût en temps de calcul afin de simuler de façon fiable et courante des vols de manœuvre est délicat à déterminer (et dépend grandement de l'application visée).

## Objectifs

Cette thèse a pour objectif d'explorer les possibilités offertes par la théorie des bifurcations dans le cadre d'une étude concrète de la dynamique du vol des hélicoptères. Elle vise à définir son champ d'application, à mieux comprendre la dynamique sous-jacente à certains phénomènes et à montrer comment en tirer des enseignements sur des cas pratiques.

Les codes de mécanique du vol disponibles à l'ONERA n'ont pas encore été exploités pour ce type d'applications et il conviendra d'évaluer comment les utiliser et quelles sont leurs limitations. C'est un des objectifs de cette thèse que de démontrer la faisabilité et le potentiel de telles approches compte tenu de la complexité des modèles. Le couplage d'un outil d'analyse non-linéaire avec le code de simulation de la dynamique du vol des hélicoptères le plus réaliste dont dispose l'industriel (Eurocopter) sera le premier point important de cette thèse. Une autre voie consistera à étudier l'intérêt du développement d'un modèle analytique simplifié plus adapté aux méthodes d'analyse non-linéaire (telles que la théorie des bifurcations).

Ce travail sera aussi l'occasion de créer et de développer les outils logiciels et mathématiques propres à de telles approches.

L'étude se déroulera de sorte à parcourir différents types de bifurcations. Comme illustrations de celles-ci, des phénomènes et des cas de vol très concrets issus de la dynamique du vol des hélicoptères seront choisis. Ils seront analysés et les résultats comprendront les différents diagrammes caractéristiques de la théorie des bifurcations, mais aussi les interprétations physiques du point de vue de l'ingénierie.

## Démarche

Dans l'optique d'atteindre les objectifs fixés, la démarche suivie s'organisera de la façon exposée ci-après.

La théorie des bifurcations étant relativement connue, plutôt que d'en faire une présentation détaillée en tant que partie intégrante de cette thèse, l'option préférée finalement sera de proposer un rappel synthétique de ses fondements en annexe (Annexe A).

Dans une première partie, un état de l'art sera dressé. Il présente les bases de l'étude selon la logique suivante. Une description succincte de l'hélicoptère (chapitre 1) sera d'abord donnée. Puis, l'état d'avancement de la recherche sur l'analyse par la théorie des bifurcations de la dynamique du vol des avions (chapitre 2) et des hélicoptères (chapitre 3) sera présenté. Pour finir, des éléments explicatifs sur les différents phénomènes non-linéaires issus de la dynamique du vol des hélicoptères, qui seront abordés au cours de cette thèse, seront fournis (chapitre 4). Ce sera l'occasion d'évoquer un certain nombre de défis très actuels dans l'ingénierie des hélicoptères.

Dans une deuxième partie, il s'agira de mettre en place la méthodologie d'analyse (dont la théorie des bifurcations est le fondement théorique). Pour cela, il faudra choisir un modèle qui

rend compte du comportement global de l'hélicoptère dans les cas de vol abordés ainsi qu'un critère de stabilité associé. Le choix du modèle est une étape qui consistera : soit à sélectionner un code de simulation déjà existant (chapitre 5), puis à sélectionner pour les cas de vol étudiés les variables d'état et de commande représentatives (chapitre 7), soit à développer une modélisation propre dédiée à cette application (chapitre 6). Les préliminaires contiendront aussi une phase de mise en équation des problèmes sous forme d'un système dynamique adéquat. Des développements informatiques seront indispensables pour coupler le module d'analyse avec celui modélisant l'aéronef et pour mener à bien le calcul d'informations concrètes.

Dans la troisième partie de cette thèse, la méthodologie sera appliquée à divers cas de vol illustrant différents phénomènes non-linéaires de la dynamique du vol des hélicoptères.

Tout d'abord, l'instabilité aérodynamique liée à la formation d'anneaux tourbillonnaires à la périphérie du rotor (dans certains cas de vol) fera l'objet d'une première application de la méthode qui montrera que cette perte de stabilité peut être caractérisée par une bifurcation de valeur propre réelle. L'analyse se basera sur le calcul du diagramme de bifurcation (lieu des points d'équilibre) et le lieu des points de bifurcation (chapitre 8).

Puis, un cas sera identifié comme pouvant être assimilé à une bifurcation de valeur propre complexe (dénommée bifurcation de Hopf), i.e. le changement de stabilité du roulis hollandais, sera examiné par l'intermédiaire du tracé du diagramme de bifurcation, du lieu des points de bifurcation de Hopf et de l'ensemble des orbites périodiques créées (chapitre 9).

Enfin, l'investigation portera sur un phénomène associé à une bifurcation de cycles limites. Pour cela, le phénomène d'oscillations induites par le pilote sera étudié, ce qui nécessitera de considérer le système hélicoptère étendu à une représentation simplifiée du pilote et de son système de contrôle et de stabilisation. L'analyse se fondera sur la méthode du premier harmonique afin de diagnostiquer l'existence ou l'apparition de cycles limites (chapitre 10).

Dans toutes les situations, la caractérisation mathématique sera recherchée (évolution de la stabilité et multiplicité des états d'équilibre ou des cycles limites, type de bifurcation mis en jeu) pour déboucher sur une interprétation pratique du point de vue de la mécanique du vol et une confrontation avec les résultats obtenus par d'autres méthodologies déjà utilisées. La "dangerosité" de la bifurcation, ses implications physiques seront identifiées et des moyens d'y remédier seront proposés.

Finalement, l'analyse critique montrera les éclairages que la théorie des bifurcations peut apporter dans l'étude de la dynamique du vol des hélicoptères et le champ d'investigations qu'elle peut couvrir, tout comme les difficultés inhérentes à l'utilisation d'une telle méthodologie.

# Première partie

# Bases de l'étude

# Chapitre 1

# Description de l'hélicoptère

**Introduction :** Une description générale succincte de l'hélicoptère est proposée ici. De plus amples détails pourront être trouvés dans diverses références françaises [Lefort et Hamann 1999, Raletz 1990] ou anglaises [Johnson 1994, Padfield 1996] par exemple.

## 1.1 Bref historique

L'étymologie du mot hélicoptère provient du grec "*helix*" (hélice) et "*pteron*" (aile). Dès le $XV^e$ siècle, Léonard de Vinci a esquissé l'ébauche d'une machine à voilure tournante. En 1907, le Gyroplane, un aéronef conçu par Louis Breguet et Charles Richet, effectue un vol stationnaire à 50 cm du sol retenu par quatre personnes tandis que la même année Paul Cornu réussit le premier vol libre d'un pilote à bord d'un hélicoptère.

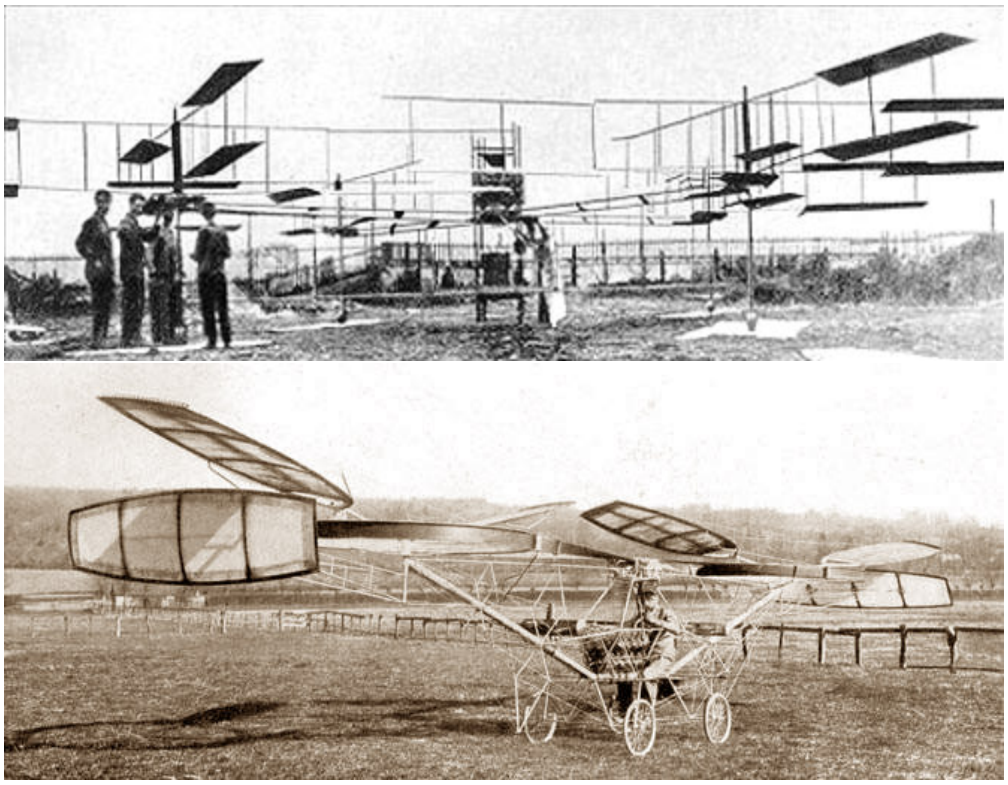


Fig. 1.1. Gyroplane de L. Breguet et P.Richet (en haut) & Hélicoptère de P. Cornu (en bas)

Mais c'est durant la seconde guerre mondiale que les premiers appareils opérationnels prennent leur envol avec la mise au point par les allemands du "*Flettner Fl 282 Kolibri*" et du "*Focke-Achgelis FA 223 Drache*".

Fig. 1.2. Flettner Fl 282 Kolibri

Fig. 1.3. Focke-Achgelis FA 223 Drache

Son utilisation véritablement militaire remonte aux combats de la seconde guerre mondiale en Asie. Le Sikorsky R-4B fut le premier à être construit en série pour répondre à ce besoin.

Fig. 1.4. Sikorsky R-4B

Les premiers industriels à concevoir et à produire des hélicoptères en série étaient Sikorsky aux Etats-Unis et Sud-Aviation en France. Aujourd'hui, Eurocopter est le constructeur européen du groupe EADS qui a pris le relais de Sud-Aviation et qui est leader mondial sur le marché civil. Quant aux hélicoptères, ils sont amenés à remplir des missions de plus en plus diversifiées et des concepts nouveaux d'engins font et feront encore leur apparition chez les constructeurs.

## 1.2 Utilisation

L'intérêt de l'hélicoptère réside principalement dans sa capacité à décoller et à atterrir verticalement, ce qui l'affranchit de la nécessité d'une piste. Il permet en outre le vol stationnaire et offre une grande agilité, par exemple lors des vols arrière, latéral, des vols en montagne ou en milieu urbain. Sa capacité de décollage et d'atterrissage verticaux ainsi que de vols stationnaire et à basse vitesse font qu'il est seul à pouvoir accomplir certaines missions par exemple de sécurité civile (évacuation sanitaire, recherche et sauvetage, lutte contre les incendies, etc.) ou de combat militaire (lutte anti-char, soutien aux troupes terrestres, etc.), mais aussi pour les missions sur plate-forme off-shore, ...

## 1.3 Composition

La construction la plus répandue d'un hélicoptère repose sur une architecture constituée des éléments suivants : le rotor principal, le rotor arrière, la dérive, l'empennage horizontal, tous fixés au fuselage de l'appareil.

Une description de chacun de ces éléments est donnée et leur rôle principal est décrit ci-après.

Le **rotor principal**, d'axe quasi-vertical, assure la sustentation de l'appareil, la translation dans toutes les directions, le contrôle de l'engin en altitude, tangage et roulis.

Le **rotor arrière**, d'axe quasi-horizontal, est aussi appelé rotor anti-couple car son rôle est d'empêcher l'hélicoptère de tourner sur lui-même en contrant le couple du rotor principal. Ce dernier tend à faire tourner la cellule dans le sens contraire de la rotation du rotor principal du fait de traînée aérodynamique des pales. Il sert aussi au contrôle du cap et des mouvements de lacet de l'appareil.

La **dérive** est une aile placée verticalement à l'arrière de la poutre de queue qui assure la stabilité directionnelle de l'appareil. Elle contre l'influence du rotor principal qui fait tourner l'appareil dans le sens contraire de sa rotation : elle supplée à la fonction anti-couple du rotor arrière et cela d'autant plus efficacement que la vitesse de l'appareil augmente.

L'**empennage horizontal**, quant à lui, est composé des ailerons horizontaux et son objectif est de réduire l'attitude à piquer de l'hélicoptère en vol d'avancement en créant une force de déportance vers le bas à l'arrière du centre de gravité.

Les formules plus rares sont par exemple celles pour lesquelles l'hélicoptère dispose de deux rotors de sustentation qui tournent en sens inverse, ou bien l'un derrière l'autre ou bien sur le même axe (rotors coaxiaux comme en fabrique Kamov). Dans ces configurations, le rotor arrière disparaît car il n'est plus nécessaire dans son rôle d'anti-couple.

## 1.4 Fonctionnement

Le **rotor principal** est constitué de pales qui tournent autour du moyeu, entraînées par un moteur. Le rotor tourne à vitesse angulaire quasi-constante. Le profil de la pale crée une différence de pression entre les deux faces de la pale qui est à l'origine d'une force de portance : pour **monter**, l'incidence de toutes les pales est accrue et pour **descendre**, elle est réduite. Ceci est effectué au moyen du **pas collectif** aussi appelé pas général car il fait varier le pas de toutes les pales d'une même valeur de façon axisymétrique.

Pour diriger l'hélicoptère, il faut contrôler la direction de la traction globale du rotor. Pour atteindre cet objectif, l'angle d'incidence des pales (figure 1.6) est modifiée de façon dissymétrique : en fait, la pale qui a l'incidence la plus grande créera une portance plus importante, ce qui entraînera l'inclinaison de la traction globale du rotor.

Le fonctionnement du rotor principal (à commandes et conditions de vol fixées) fait que l'incidence d'une pale varie au cours d'une rotation pour revenir à la même valeur et que chaque pale suit la même trajectoire. L'évolution (périodique) de l'incidence des pales au cours d'une rotation peut être commandée grâce au pas cyclique. La force de portance totale garde la même

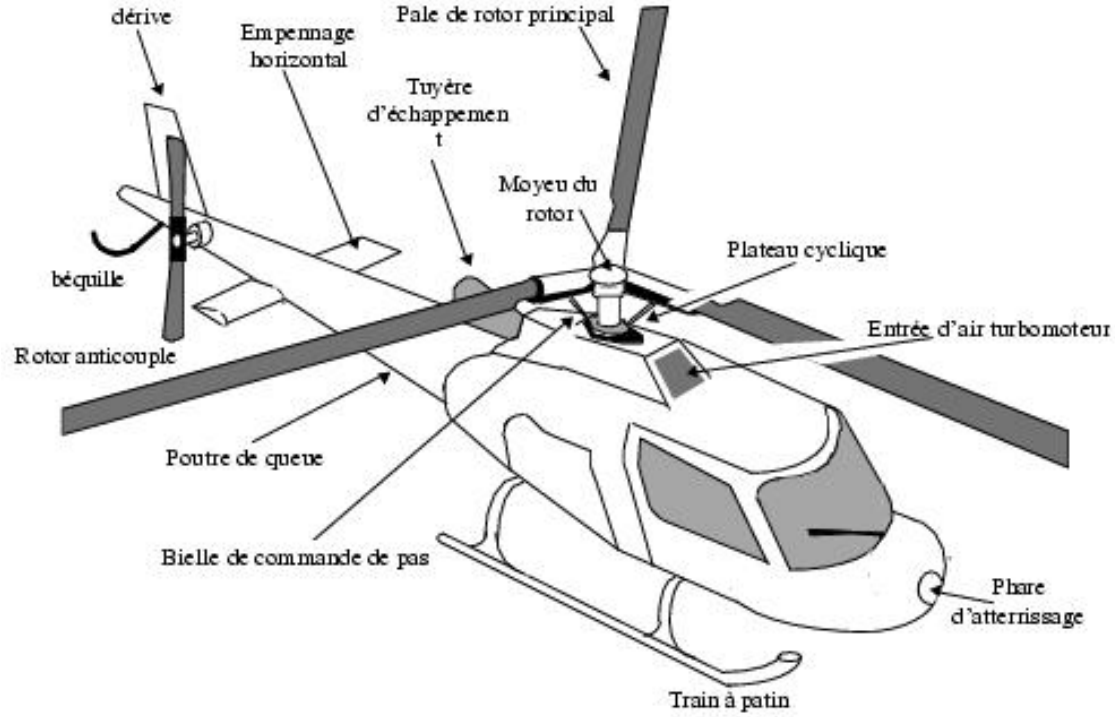



FIG. 1.5. Différents éléments d'un hélicoptère

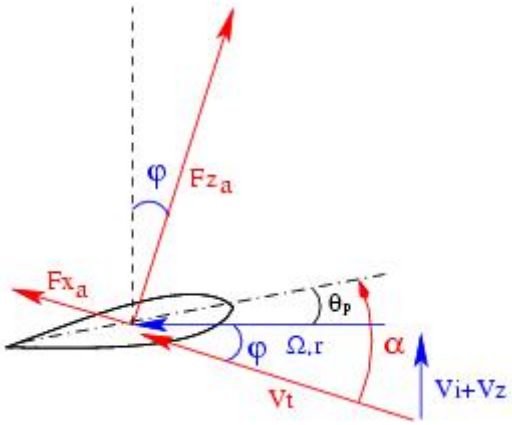



FIG. 1.6. Profil d'une pale : incidence $\alpha$, calage géométrique de la section de pale $\theta_p$, angle de l'écoulement $\varphi = \arctan\left(\frac{Cx_a}{Cz_a}\right)$

valeur, mais par contre l'angle qu'elle fait avec l'appareil change et permet de prendre la direction désirée. Les commandes du pilote qui permettent de modifier l'inclinaison de la force se nomment les **pas cycliques**. En résumé, le pas collectif contrôle l'intensité de la traction développée par le rotor et les pas cycliques sa direction.

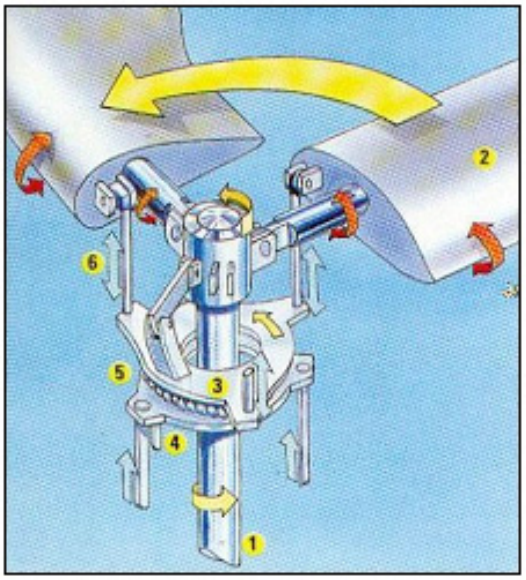



Fig. 1.7. Mécanisme gouvernant le rotor

| composant | numéro |
|---|---|
| moyeu entraîné par le moteur | (1) |
| pale | (2) |
| plateau cyclique supérieur | (3) |
| plateau cyclique inférieur | (4) |
| roulement à billes | (5) |
| biellettes se levant et s'abaissant | (6) |

Fig. 1.8. Pièces constitutives du rotor

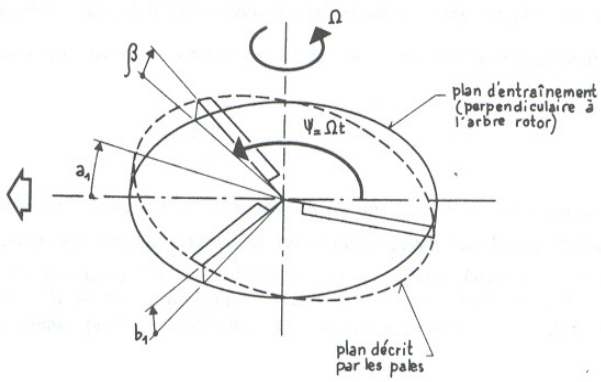



Fig. 1.9. Plan dissymétrique décrit par les pales [Lefort et Hamann 1999]

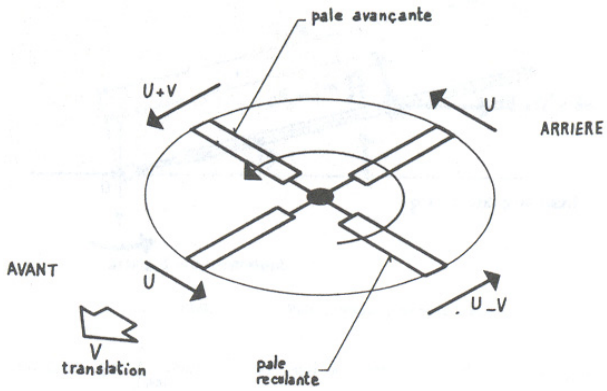
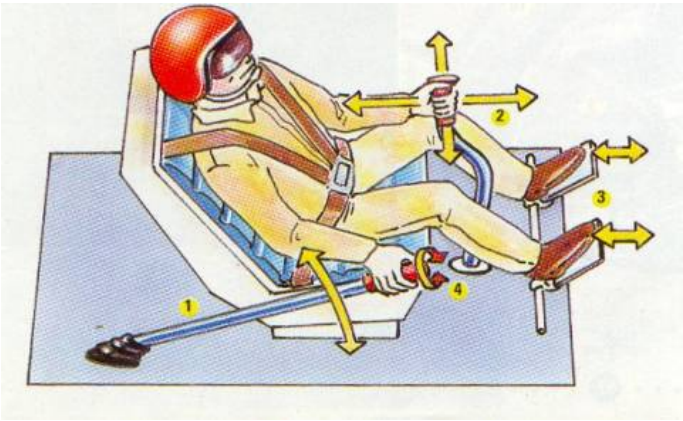



Fig. 1.10. Pale avançante et pale reculante [Lefort et Hamann 1999]

Le rotor arrière pour sa part est (environ cinq fois) plus petit que le rotor principal et tourne (environ cinq fois) plus vite. Sa force est réglée par l'intermédiaire de deux pédales situées au pied du pilote appelées les **palonniers**. Suivant la pédale enfoncée, l'incidence des pales est augmentée ou diminuée et pareillement pour l'amplitude de la force créée. Le côté duquel est orientée la force latérale générée par le rotor anti-couple dépend du sens de rotation du rotor principal.




| commande | numéro |
|---|---|
| levier de pas collectif | (1) |
| manche de pas cyclique | (2) |
| pédales du palonnier | (3) |
| manette des gaz | (4) |

Fig. 1.12. Commandes d'un hélicoptère

Fig. 1.11. Pilote et commandes de l'hélicoptère

Eurocopter a inventé un concept pour améliorer un certain nombre de problèmes liés au rotor arrière. Le fabriquant européen l'a encastré dans la poutre de queue et a baptisé un tel dispositif **fenestron** (figure 1.14). L'intérêt d'un tel dispositif est principalement la protection des pales qui tournent plus proche du sol que celles du rotor principal mais d'autres aspects comme l'aérodynamique ou l'acoustique en tirent également profit.

Fig. 1.13. Hélicoptère EC 135 d'Eurocopter et son fenestron

Fig. 1.14. Fenestron d'un hélicoptère Dauphin

## 1.5 Phases de vol

Quand la portance générée par le rotor s'oppose exactement au poids de l'appareil, l'hélicoptère est dit en **vol stationnaire**. L'hélicoptère est alors **immobile**.

L'articulation et la souplesse en battement rendent possibles le comportement gyroscopique du rotor qui consiste en un déphasage de 90° entre la cause (forces aérodynamiques de portance) et la conséquence, le basculement du plan des extrémités de pale et donc de la traction résultante. Il peut alors exister une composante horizontale de la force de traction en plus de la composante verticale qui compense le poids de l'appareil. Ce dernier se met alors en **mouvement d'avancement**, c'est le **vol de translation**.

Dans les situations où la rotation du rotor est entretenue par l'écoulement de l'air et non par le couple moteur, les spécialistes parlent d'**autorotation** ou de descente en régime moulinet-frein (cas de fonctionnement-type "éolienne"). Les hélicoptères utilisent l'autorotation après une perte totale du fonctionnement du moteur ou du rotor anti-couple et la manœuvre d'atterrissage dans de telles conditions fait partie intégrante de la formation du pilote.

## 1.6 Différents repères

En mécanique du vol, trois types de référentiels et de repères associés sont utilisés : les trièdres terrestre, appareil et aérodynamique.

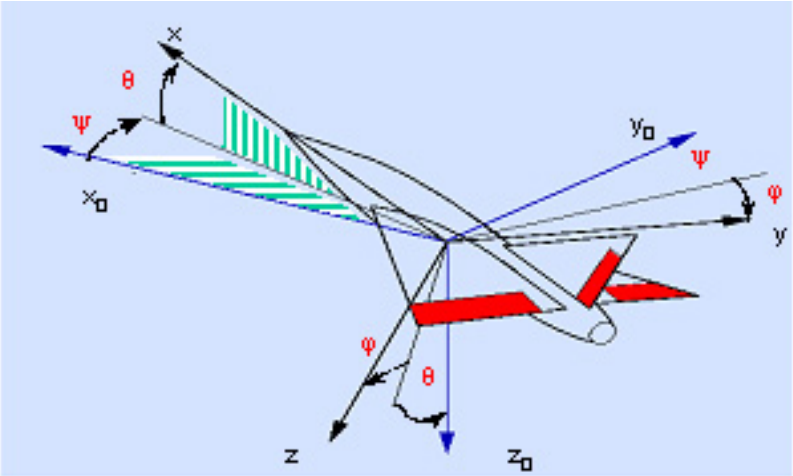



FIG. 1.15. Trièdres terrestre et appareil

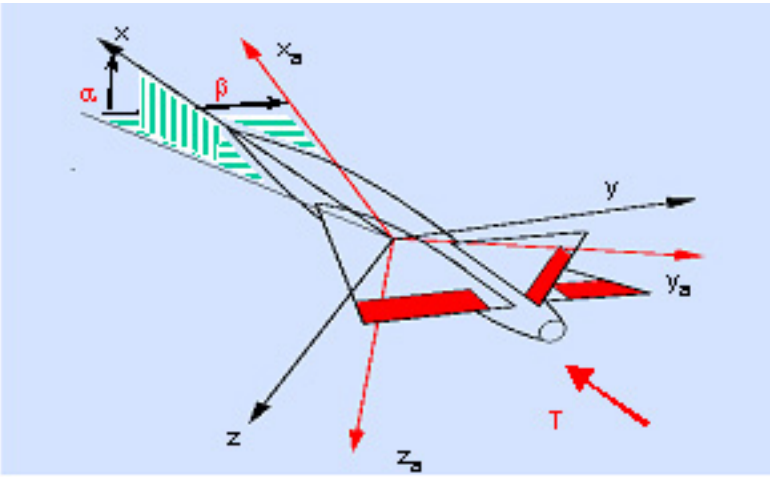



FIG. 1.16. Trièdres aérodynamique et appareil

$Gxyz$ est le trièdre appareil (avion, hélicoptère) lié aux axes de l'aéronef, $Gx_ay_az_a$ le trièdre aérodynamique associé à la vitesse relative hélicoptère/air et $Gx_0y_0z_0$ le trièdre terrestre rattaché à la verticale terrestre, au plan horizontal, avec $\vec{x}_0$ dans la direction du Nord.

Pour ce qui est des axes d'un aéronef, la terminologie usuellement utilisée est présentée succinctement dans le tableau (1.1).

| désignation | angle | vitesse angulaire | vecteur | axe |
|---|---|---|---|---|
| roulis | $\phi$ | $p$ | $\vec{x}$ | longitudinal |
| tangage | $\theta$ | $q$ | $\vec{y}$ | latéral |
| lacet | $\psi$ | $r$ | $\vec{z}$ | vertical |

TAB. 1.1. Terminologie propre aux axes d'un aéronef

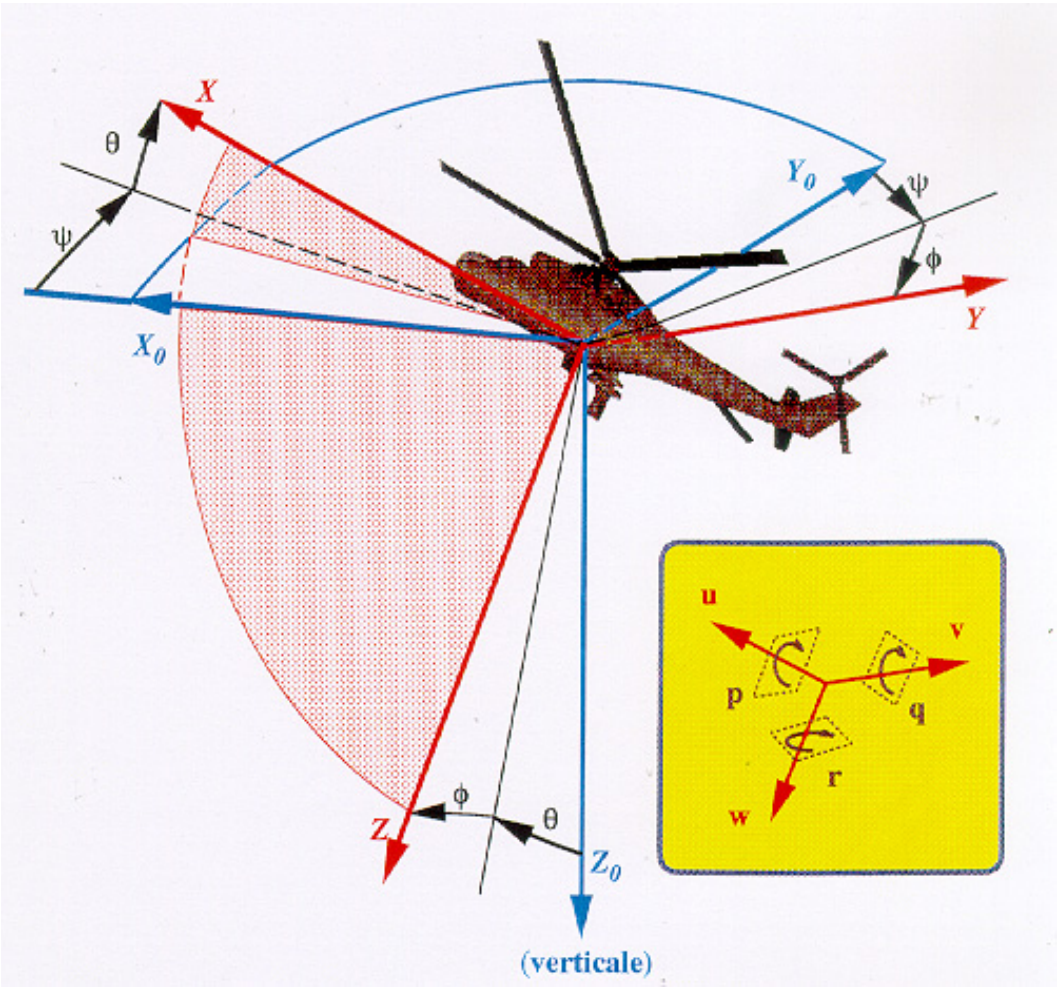



FIG. 1.17. Axes et principales variables de mécanique du vol d'un hélicoptère

# Chapitre 2

# Application de la théorie des bifurcations à la dynamique du vol des avions

**Introduction :** La notion de bifurcation a émergé très tôt dans les études de systèmes dynamiques. I. Newton identifie des bifurcations dans les solutions d'équations différentielles ordinaires au $XVII^e$ siècle et d'Alembert dans les équations aux dérivées partielles au $XVIII^e$ siècle. La théorie des bifurcations trouve ses lettres de noblesse plus tard avec J. H. Poincaré et A. M. Liapounov à la fin du $XIX^e$ siècle dans leurs considérations sur la stabilité des formes possibles de la terre. Le siècle dernier, un développement majeur a encore été apporté avec R. Thom et son livre *Stabilité Structurelle et Morphogénèse* [Thom 1972].

La méthodologie a été utilisée avec succès pour analyser toute une palette d'applications [Gilmore 1981]. De telles études se partagent en deux catégories. D'une part, il y a celles universitaires et théoriques qui portent leur attention sur des problèmes académiques dont la description mathématique est parfaitement connue et qui sont souvent résolus analytiquement. D'autre part, il y a les études plus appliquées qui essaient d'analyser des problèmes concrets dont le modèle mathématique plus complexe n'est souvent connu qu'approximativement i.e. pour lequel l'incertitude de modélisation vis-à-vis d'un système réel doit être prise en compte et qui nécessite l'utilisation plus systématique de codes numériques pour tracer les différentes courbes et mener à bien l'exploration. La présente étude s'inscrit dans ce cas.

L'état de l'art sur l'analyse par la théorie des bifurcations s'attachera à présenter les travaux dont les thèmes sont proches du sujet de la thèse. Par souci de concision et de pertinence, il se limitera aux contributions déjà existantes dédiées à la mécanique du vol des avions et à celle des hélicoptères. L'objectif est de présenter les principaux travaux sur le sujet, les façons de procéder, des exemples de résultats et d'évaluer leur pertinence dans le cadre d'une activité éventuelle d'ingénierie.

De nombreuses études ont été entreprises pour étudier la dynamique du vol complexe des avions et en particulier des avions de combat. En effet, ces derniers sont amenés à effectuer une variété de manœuvres bien plus importantes et à voler dans des conditions beaucoup plus extrêmes et acrobatiques que les avions civils. De toute façon, piloter un avion est toujours une tâche difficile et dangereuse. Les concepteurs doivent ou bien interdire au pilote certaines zones de vol ou bien mettre en place un système de contrôle de vol automatique qui va gérer le vol ou

la restriction du vol dans ces conditions dangereuses.

La mécanique du vol des avions (de combat) pose donc des problèmes difficiles surtout aux limites du domaine de vol et nécessite une analyse approfondie qui peut facilement devenir très épineuse. Pour réussir à en capturer toutes les subtilités, beaucoup de configurations doivent parfois être explorées. Des outils d'analyse puissants contribuent fortement à mieux comprendre et à prédire les phénomènes se produisant dans de telles régions, mais aussi à réduire considérablement le nombre de simulations temporelles à réaliser pour capturer les points critiques et déterminer les différentes configurations possibles.

Nombreux sont les chercheurs qui ont contribué à améliorer la compréhension de la mécanique du vol des avions de combat par l'exploitation de différentes boîtes à outils mathématiques. Les pionniers dans l'analyse de tels problèmes par la théorie des bifurcations sont l'américain R. K. Mehra [Mehra *et al.* 1977] et les coauteurs russes G. I. Zagaynov, M. G. Goman et A. V. Khramtsovsky [Goman *et al.* 1997, Goman et Khramtsovsky 1997, Goman et Khramtsovsky 1998].

Dans la bibliographie présente, les travaux du premier seront tout d'abord évoqués succinctement. Parce qu'ils forment une entité intéressante, les travaux de thèse [Jahnke 1990] de C. C. Jahnke sous la direction de F. E. C. Culick seront ensuite relatés. Enfin, à l'ONERA, le spécialiste qui a approfondi le sujet pendant de nombreuses années est P. Guicheteau [Guicheteau 1993b, Guicheteau 1993c, Guicheteau 1993a]. Il a en particulier contribué à l'analyse des vrilles de l'Alpha-Jet aux grandes incidences [Guicheteau 1987, Guicheteau et Khac 1989].

Dans ses travaux précurseurs [Mehra *et al.* 1977], **R. K. Mehra** cherche à analyser le comportement de l'avion aux grands angles d'attaque et leur départ en vrille.

La première étape est de construire un modèle adapté à la méthodologie : il doit contenir toutes les caractéristiques nécessaires afin de rendre compte du comportement objet de l'étude et être suffisamment compact grâce à des simplifications appropriées.

| variable | gouverne de | mécanique | pilotage | contrôle le |
|---|---|---|---|---|
| $\delta a$ ou $\delta l$ | gauchissement | ailerons (en bout d'aile, braquages dissymétriques) | manche | roulis (un peu le lacet) |
| $\delta e$ ou $\delta m$ | profondeur | empennage horizontal | manche | tangage (cabrer/piquer) |
| $\delta r$ ou $\delta n$ | direction | dérive | palonnier | lacet |

Tab. 2.1. Variables de la mécanique du vol

La seconde étape est de rechercher tous les états d'équilibre $\left(\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0\right)$ pour chaque combinaison du triplet des braquages de l'aileron, de la profondeur horizontale et de la dérive $(\delta a, \delta e, \delta r)$. Pour définir l'évolution dynamique qui se produit au franchissement d'une surface de bifurcation, il faut avoir recours à des simulations temporelles. Elles sont effectuées avec ou sans les simplifications envisagées afin d'estimer la validité de ces hypothèses simplificatrices dans les calculs de bifurcations.

L'ensemble des points d'équilibre du système est donné par une exploration sur les commandes $\delta e$ et $\delta r$ et par la relation polynomiale $F$ de degré 5 en roulis $p$, $F(p, \delta a) = 0$. Elle définit une surface dans l'espace $(p, \delta a, \delta e)$. La projection des points vérifiant $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ dans le plan $(\delta a, \delta e)$ le

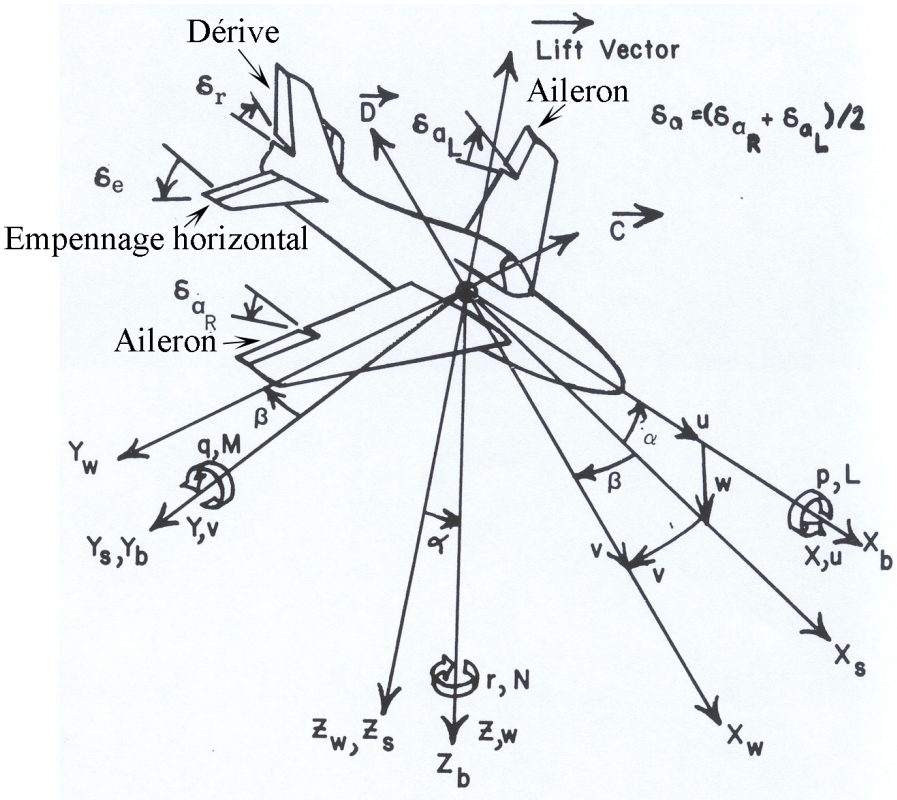



FIG. 2.1. Avion avec ses variables caractéristiques et son système d'axes [Mehra *et al.* 1977, page 45]

divise en des régions comportant un nombre différent de points d'équilibre et le passage d'une telle frontière correspond à un saut. L'analyse de l'avion H (un avion de combat F-80A avec aile en flèche) dont le modèle contient des non-linéarités inertielles et aérodynamiques permet de montrer qu'il existe au maximum 9 états d'équilibre possibles pour un triplet $(\delta a, \delta e, \delta r)$. La stabilité d'un point d'équilibre est perdue lorsque le système possède deux valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe des imaginaires, auquel cas le système rencontre une bifurcation de Hopf. En plus du phénomène d'hystérésis dû à l'existence de sauts qui se produisaient déjà dans les modèles plus simples d'avions A (un avion F100A) et B (un petit jet manœuvrable mono-moteur) dont les coefficients aérodynamiques étaient linéaires, la dynamique de l'avion H, dont l'aérodynamique est non-linéaire et qui présente des effets gyroscopiques dus à la rotation du moteur, peut donner lieu à des cycles limites. Ce comportement correspond aux cas du couplage par inertie et de l'auto-tonneau (rotation permanente en roulis à incidence modéré). Grâce à l'étude des surfaces de bifurcation, des lois de commande sur $(\delta a, \delta e, \delta r)$ sont construites pour que l'avion n'évolue jamais au voisinage d'une singularité de sa surface d'équilibre.

Beaucoup de chercheurs américains ont pris la suite des travaux de R. K. Mehra comme W.H. Hui et M. Tobak [Hui et Tobak 1984, Hui et Tobak 1985], B. S. Liebst [Liebst 1998]. Un exemple de cette engouement est la thèse de C. C. Jahnke [Jahnke 1990].

Dans son mémoire de thèse, **C. C. Jahnke** a analysé trois modèles d'avions : un avion générique avec une configuration canard, un avion de combat générique et un F-14.

Dans son examen du modèle générique d'avion, il a étudié une instabilité longitudinale qui donne naissance à du décrochage dynamique (chute brutale de la portance accompagnée de vibrations). Le lieu des points d'équilibre permet de prédire quelles sont les combinaisons de commandes qui mènent à un comportement indésirable. Son analyse permet une bonne investigation de la modélisation et des lois de contrôle choisies. Le tracé de la courbe des points d'équilibre en fonction du braquage de la gouverne de profondeur montre qu'il peut y avoir des zones comportant trois points d'équilibre qui correspondent respectivement aux vols aux petits angles, aux angles intermédiaires et aux grands angles d'attaque. Ce sont des bifurcations nœuds-selles qui sont responsables des changements de stabilité et de comportement. Quand la branche associée au vol aux grands angles est stable (du point de vue mathématique i.e. le système converge vers un tel point), il y a un risque de voir une petite perturbation par rapport à un vol de croisière normal faire partir l'avion en vrille. Pour corriger cette situation indésirable, il faut modifier la commande de façon à se ramener à une zone où il n'y a plus qu'un seul point d'équilibre. Un contrôle de l'angle de dérapage autorise des braquages plus grands de l'aileron. En effet, la bifurcation nœud-selle associée à l'instabilité du couplage en roulis se produit plus tard, cependant, le braquage de l'aileron est quand même limité en amplitude par une bifurcation de Hopf. Quant à l'instabilité aux grands angles d'attaque, elle se produit à peu près pour les mêmes valeurs de braquages pour les trois modèles et elle s'explique par une perte de stabilité directionnelle pour des grands angles d'attaque. Une boucle de retour du dérapage sur la gouverne de profondeur accroît la stabilité directionnelle de l'appareil : en effet, l'instabilité se produit pour des braquages de la gouverne de profondeur plus grands.

En ce qui concerne l'avion de combat générique, C. C. Jahnke a passé en revue un couplage en roulis et des instabilités aux grands angles d'attaque. Il compare les différences de dynamiques quand l'influence de la gravité est négligée ou que la vitesse est supposée constante. Dans le modèle complet incluant la gravité, il trouve une branche d'états d'équilibre supplémentaire qui correspond à des mouvements spiraux inversés et constate la disparition d'une bifurcation fourche aux grands angles d'attaque. L'instabilité du couplage en roulis apparaît quand l'avion est dans un vol piqué raide et les bifurcations donnent lieu à un saut entre un piqué inversé et un piqué vertical. Quant à l'instabilité du couplage en roulis, elle n'apparaît que pour des angles d'attaque négatifs.

Enfin, dans ses considérations sur la mécanique du vol du F-14, C. C. Jahnke a examiné le "wing rock" (un phénomène d'oscillations en roulis dû à un faible amortissement aux grands angles d'attaque qui mène généralement à une perte de contrôle), la divergence directionnelle et des instabilités aux grands angles d'attaque. L'analyse du F-14 a été effectuée sur un modèle très complet comprenant toutes les équations de la mécanique du vol et une modélisation non-linéaire de l'aérodynamique. L'instabilité du "wing rock" a été éliminée par une boucle de retour de la vitesse de roulis sur l'aileron, ce qui a permis d'augmenter l'amortissement en roulis de l'avion. Quant à la divergence spirale, elle a été supprimée en utilisant une boucle de retour de l'angle de dérapage sur l'aileron afin d'augmenter l'effet dièdre de l'avion (moment de roulis opposé au vent relatif et à l'angle de dérapage). L'élève de F. E. C. Culick a par ailleurs constaté que, quand le braquage de l'aileron est augmenté, des instabilités apparaissent à cause de l'existence de bifurcations nœuds-selles et donnent lieu à un saut d'états responsable d'une entrée en vrille. Malheureusement, C. C. Jahnke n'a pas réussi à construire dans ce cas une technique de reprise de contrôle à cause de l'existence de vrilles stables et du manque d'efficacité de la dérive aux grands angles d'attaque.

En Europe aussi, des spécialistes de la mécanique du vol se sont intéressés à cette approche. C'est le cas de D. M. Littleboy [Patel et Littleboy 1998] et M. H. Lowenberg (originaire d'Afrique

du Sud) [Lowenberg 1997, Lowenberg 1998, Lowenberg et Champneys 1998] en Angleterre ou de G. Avanzini et G. de Matteis [Avanzini et de Matteis 1996, Avanzini et de Matteis 1997] en Italie.

A l'ONERA, **P. Guicheteau** a commencé ses travaux d'analyse de la mécanique du vol des avions de combat en prenant la suite des études initiatrices de R. K. Mehra [Guicheteau 1979] en 1979. Il a par la suite étudié, entre autres, la protection contre les pertes de contrôle et la dynamique de l'Alpha-jet aux grands angles dans les années 80.

Dans sa contribution à la protection contre les pertes de contrôle [Guicheteau et Guittard 1984], il tente de qualifier les bifurcations que rencontre l'avion en projetant les équations du mouvement sur l'espace propre associé à la (ou aux) valeur(s) propre(s) critique(s) i.e. dont la partie réelle est nulle. De cette façon, il peut estimer le taux de divergence des bifurcations réelles ou la nature de l'oscillation naissant au point de bifurcation de Hopf i.e. divergente -donc dangereuse- ou non.

Une contribution majeure de P. Guicheteau est sa participation au projet "Alpha-Jet grandes incidences". L'objectif de ce projet piloté par l'ONERA était de modéliser le comportement de l'Alpha-Jet, un avion franco-allemand de Dassault Aviation, dans un domaine à la limite de son enveloppe de vol. Il s'agissait d'examiner les départs en vrille et les vrilles elles-mêmes (qui sont, par définition, une évolution à incidence élevée, positive ou négative, au cours de laquelle l'angle de dérapage et les vitesses angulaires, en particulier celle de lacet, sont importants).

Trois modèles ont été développés, de plus en plus réalistes : les modèles M1, M2 ne contiennent qu'une description des efforts stationnaires, le premier étant quasi-statique aux grands angles, le deuxième comprenant les termes d'amortissement sur tout le domaine de vol ; M3 incorpore également les efforts instationnaires pour lesquels l'état présent dépend aussi du passé. Le recours à la théorie des bifurcations permet d'analyser les différents modèles et d'en vérifier les propriétés. En particulier, il autorise leur validation en vérifiant par exemple si le modèle donne bien lieu aux vrilles observées expérimentalement.

Par exemple, il montre que le modèle M2 prédit bien les états d'équilibre à faible incidence ou à incidence négative ou les changements brutaux de comportement liés à une instabilité du régime de vol initial [Guicheteau 1987]. Il montre aussi que, par contre, la prédiction des "vrilles ventre" (d'incidence positive) est mauvaise et devine le motif : la mauvaise connaissance des coefficients aérodynamiques régissant les mouvements oscillatoires du modèle M1 ainsi que la mauvaise prédiction de l'efficacité des gouvernes.

Dans une autre étude, P. Guicheteau cherche à caractériser le modèle M3 qui prend en compte les effets instationnaires [Guicheteau et Khac 1989]. L'objectif est de raffiner la prévision du comportement de l'Alpha-Jet lorsque la profondeur est à cabrer et dans le cas de la vrille à gauche à 45° notamment. Il analyse, par exemple, la surface d'équilibre "profondeur à cabrer" dont la courbe des points de bifurcation de Hopf permet de préciser la stabilité. Il distingue dans le plan gauchissement-direction, les trois différents régimes de vol stables : un tonneau à gauche dont le domaine de stabilité est réduit, la vrille moyennement piquée à gauche dont le domaine de stabilité est plus grand mais est très étroit et la vrille moyennement piquée à droite dont le domaine de stabilié est vaste lorsque le braquage de direction est positif et plus étroit quand il devient négatif. Les frontières des trois régimes de vol sont constituées de points de retournement et de points de bifurcation de Hopf. Les premiers conduisent à un saut sur les variables d'état et à une modification rapide du comportement de l'avion, les seconds à l'apparition d'orbites périodiques responsables de l'agitation du mouvement, mais qui est souvent suffisamment faible

pour considérer qu'un régime stationnaire est atteint. Dans l'analyse spécifique de la vrille à gauche (configuration où $r < 0$ et $\delta_l < 0$), il constate que la branche d'équilibre associée existe seulement pour des braquages négatifs du gauchissement. En outre, quand le gauchissement croît en valeur absolue, les états d'équilibre deviennent instables oscillatoires.

En faisant varier le braquage du gauchissement, un point de bifurcation de Hopf est franchi, à partir duquel se développe un ensemble d'orbites périodiques. La projection de l'enveloppe des orbites périodiques dans l'espace $(\alpha, \beta, \delta l)$ montre que près du point de bifurcation de Hopf, l'amplitude du cycle est très petite ; plus loin, l'amplitude augmente considérablement. Dans l'espace incidence-dérapage $(\alpha, \beta)$, l'amplitude ne varie pas régulièrement et il existe des orbites de retournement.

Les résultats recherchés par P. Guicheteau portent sur la vrille, l'entrée en vrille et la récupération de la vrille. A partir d'un vol en ligne droite à faible angle d'attaque, le pilote tire la gouverne de profondeur pour relever complètement le nez (attitude à cabrer). Des états d'équilibre multiples apparaissent aux grands angles d'attaque. La projection de la surface d'équilibre dans les trois sous-espaces caractéristiques $(\alpha, \delta_l, \delta_n)$, $(r, \delta_l, \delta_n)$ et $(p, \delta_l, \delta_n)$ permet de reconnaître les domaines de vrille et de roulis. La vrille à droite est stable et celle à gauche instable oscillante et les états d'équilibre aux angles d'attaque modérés correspondent à un mouvement de roulis.

Par ailleurs, le chercheur utilise également dans ses travaux le calcul du domaine d'attraction d'un point d'équilibre afin de concevoir des lois de commande non-linéaires et d'optimiser les manœuvres [Guicheteau 1993c, Guicheteau 1998].

P. Guicheteau a également effectué des travaux plus théoriques de mécanique analytique [Guicheteau 1993a, Guicheteau 1998] comme sur l'instabilité spirale (engagement progressif en virage sans action sur les gouvernes) dont le cas est développé ci-après. Le mouvement se produit aux faibles angles d'attaque avec un modèle aérodynamique symétrique. Alors, le couplage inertiel est négligeable et l'aérodynamique linéaire. Lorsque l'angle de dérapage $\beta$ est nul, seule la gravité et l'angle de tangage ont un effet sur la stabilité du mouvement. En ne considérant que les non-linéarités principales, les équations du mouvement peuvent se réduire à une seule équation scalaire comprenant les angles de roulis $\phi$, de tangage $\theta$ et les commandes. L'ingénieur de l'ONERA réussit à montrer plusieurs résultats. Premièrement, quand les commandes latérales (i.e gouvernes de gauchissement $\delta a$ et de direction $\delta r$) sont au neutre, l'instabilité spirale coïncide avec l'existence de deux bifurcations fourches dans le diagramme des variables latérales en fonction de l'angle de braquage de la gouverne de profondeur $\delta_e$ comme l'illustre la figure (2.2). Le diagramme montre aussi les équilibres stables atteints par le système, une fois l'instabilité rencontrée.

Deuxièmement, la bifurcation du mouvement spiral apparaît dans le plan aileron/gouverne de direction i.e. le plan $(\delta a, \delta r)$, même lorsque le vol à angle de dérapage nul est stable. Quant à l'instabilité du roulis hollandais (oscillations combinant roulis et lacet), la qualification de la bifurcation de Hopf sous-jacente, sous-critique ou supercritique, permet de donner une indication sur l'évolution de l'amplitude des orbites périodiques.

**Conclusion :** Les travaux de P. Guicheteau sont très complets et ont la particularité de proposer des résultats effectifs vis-à-vis de l'analyse du comportement de l'appareil. Ils servent à diagnostiquer les zones dangereuses et à effectuer des études paramétriques très utiles pour la conception. Un autre atout est que la méthodologie permet de certifier un modèle et de vérifier

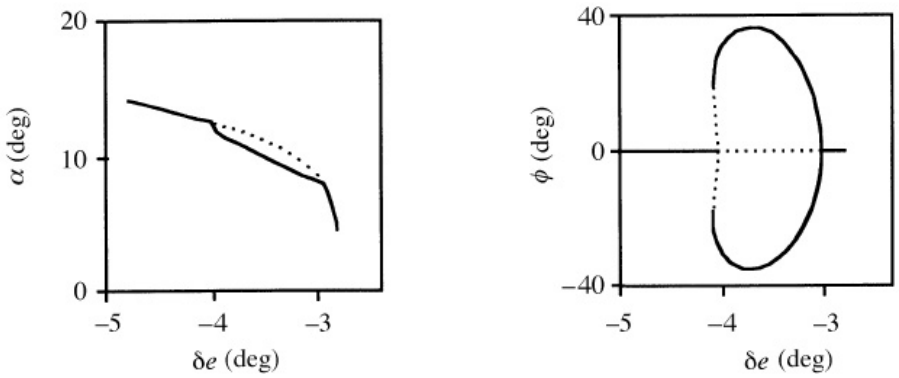



FIG. 2.2. Bifurcation du mouvement spiral [Guicheteau 1998]

si la modélisation choisie rend bien compte des propriétés requises. Les autres chercheurs ont fourni des analyses tout à fait pertinentes vis-à-vis de la mécanique du vol des avions, mais elles sont plus théoriques ou se situent au niveau de la phase amont d'avant-projet.

# Chapitre 3

# Travaux déjà existants sur l'application de la théorie des bifurcations à la dynamique du vol des hélicoptères

**Introduction :** En premier lieu, il convient de préciser que des travaux portant sur l'utilisation de la théorie des bifurcations pour l'analyse de la mécanique du vol des hélicoptères ou pour l'analyse des hélicoptères en général ne sont pas très nombreux. Ceci est peut-être paradoxal en comparaison de la multitude d'études menées sur les avions. Mais, effectivement, seuls deux auteurs ont employé la méthodologie afin de scruter la mécanique du vol des hélicoptères : en Pologne, K. Sibilski depuis 1998 et, en Angleterre, des étudiants sous la conduite de M. H. Lowenberg, issu originellement d'Afrique du Sud, à partir de 2003. Dans la même famille de problèmes, à l'ONERA, P.-M. Basset a appliqué la méthodologie à l'analyse d'un rotor isolé en état d'anneaux tourbillonnaires en 2002.

Dans ses travaux, **K. Sibilski** s'est intéressé à plusieurs configurations : une manœuvre à fortes variations d'attitude (le "hump witch snatch up"), la vrille et le vol de l'hélicoptère auquel est suspendue une charge.

S'agissant d'une première application de l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères par la théorie des bifurcations, K. Sibilski s'inspire directement de ce qui a été traité dans le domaine du vol des avions de combat à grande incidence. Il s'intéresse donc à une manœuvre agressive qui bien qu'à la limite du domaine de vol des hélicoptères est représentative de cas de manœuvres d'évitement lors de vols tactiques à très basse altitude ("Nap of the Earth" : N.O.E.).

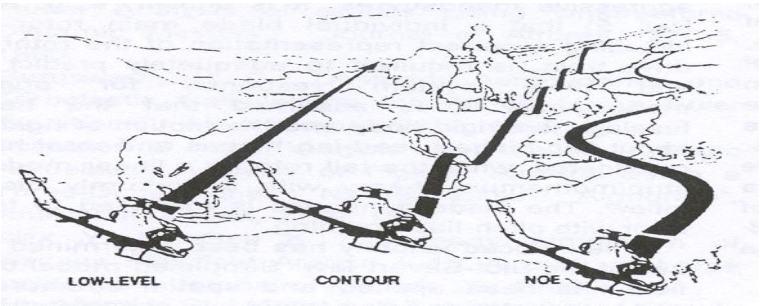



Fig. 3.1. Manœuvres de suivi de terrain

Dans son analyse de la manoeuvre du **"hump witch snatch up"** [Sibilski 1998], il étudie les caractéristiques des états d'équilibre instables ainsi que la nature des bifurcations rencontrées. Il espère observer un phénomène chaotique dans la phase suivant le décrochage dynamique d'une partie des profils de pale du rotor principal et il souhaite réussir à caractériser la réponse de l'hélicoptère.

Des travaux de modélisation préliminaires sont indispensables afin de rendre compte des propriétés du cas de vol abordé. Un modèle de rotor principal du type "éléments de pale" est utilisé, ce qui rend possible la détermination des mouvements et des charges ainsi que la description d'une aérodynamique non-linéaire et instationnaire. Dans sa description de l'aérodynamique des pales, K. Sibilski tient compte des effets de compressibilité et du décrochage dynamique.

Au bout de cette première phase, le chercheur polonais écrit son modèle mathématique sous la forme $\dot{X} = f(X, S)$ où le vecteur des états $X$ est :

$$\left[u, v, w, p, q, r, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_n, \dot{\zeta}_1, \ldots, \dot{\zeta}_n, \Omega, \psi_1, \ldots, \psi_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \Theta_e, \Phi_e, \Psi_e\right].$$

Il est constitué des variables classiques de la mécanique du vol [Wanner 1983] c'est-à-dire les trois composantes de la vitesse de translation $(u, v, w)$, les trois composantes de la vitesse de rotation $(p, q, r)$, les angles d'Euler $(\Theta_e, \Phi_e, \Psi_e)$ décrivant l'attitude de l'aéronef, et des variables décrivant le rotor que sont les angles de battement des pales $(\beta_i)_i$, les angles de traînée des pales $(\zeta_i)_i$, les azimuts des pales $(\psi_i)_i$. Le vecteur des commandes est $S = [\theta_0, \kappa, \eta, \phi_T]$ où $\theta_0$ est le pas collectif, $\kappa$ est le pas cyclique longitudinal, $\eta$ le pas cyclique latéral et $\phi_T$ le pas collectif du rotor arrière.

L'hélicoptère sujet de l'étude est un "PZL Sokol" en vol d'avancement dont le poids est 6500 kg. La manœuvre observée se place à la limite de l'enveloppe de vol de l'hélicoptère qui est restreinte à cause du décrochage dynamique se produisant sur la pale reculante de l'hélicoptère (cf. illustration (1.10)) : en effet, plus la vitesse de l'hélicoptère augmente, plus celle de la pale reculante diminue ; pour créer la même portance, afin d'équilibrer l'appareil, elle doit donc augmenter son angle d'attaque, ce qui peut donner lieu au décrochage de la pale. Le décrochage dynamique est lié aux variations rapides et d'amplitudes élevées de l'incidence de la pale qui engendrent des efforts aéro instationnaires importants associés à un phénomène d'hystérésis.

Dans son analyse, K. Sibilski met en évidence l'existence de points d'équilibre multiples. Dans le cas du "hump witch snatch up", quand le pilote pousse sur le manche, l'angle de tangage $\Theta$ augmente durant les premières secondes du mouvement, alors que normalement, il devrait diminuer. Sibilski montre que c'est la conséquence d'une bifurcation nœud-selle qui rend cette manœuvre de bosse instable.

Dans d'autres travaux, K. Sibilski cherche à analyser un vol plané spiral intense (**"intense spiral glide motion"**), la vrille de l'hélicoptère (**"spin of the helicopter"**) [Sibilski 1999], là encore directement inspiré des cas traités dans le domaine des avions [Mehra *et al.* 1977, Jahnke 1990, Lowenberg 1997].

Il y a des plages de valeurs du pas cyclique latéral pour lesquelles la vrille est instable et la plupart du temps, de multiples états d'équilibre existent. Il existe des configurations présentant trois points d'équilibre stables, l'hélicoptère peut alors se retrouver dans n'importe lequel de ces états dont l'un correspond au vol horizontal à l'équilibre $(p = q = r = \Theta = \Phi = 0)$ et les deux autres aux modes-spiraux. Ce sont des bifurcations de Hopf et nœuds-selles qui donnent naissance aux branches instables. Près d'un de ces points, une petite perturbation du pas cyclique latéral peut être responsable d'un départ en vrille de taux de roulis positif. Le scientifique remarque

aussi que la prise en compte d'une aérodynamique instationnaire des pales du rotor et d'un effet d'hystérésis sur les coefficients aérodynamiques peut donner lieu à un comportement chaotique des mouvements de battement ou en tangage.

Un autre thème abordé par K. Sibilski avec ses collègues de l'Air Force Institute of Technology de Varsovie est celui de l'**hélicoptère portant une charge** [Buler *et al.* 2001]. Les paramètres de l'élingue sont la longueur du cable ($0 < l < 55m$) et la masse de la charge ($0 < m < 1500kg$) et les cas de vol étudiés sont un vol stationnaire et un cas de vol d'avancement.

Les chercheurs de Pologne constatent que, dans la majorité des configurations, il y a plusieurs états d'équilibre et que des bifurcations nœuds-selles et de Hopf sont responsables de l'existence de branches instables. Ils remarquent que la charge a beaucoup d'influence sur le roulis hollandais de l'appareil et peu sur le mode phugoïde et que les oscillations des mouvements de battement, tangage et roulis peuvent comporter un caractère chaotique.

L'analyse par la méthode des bifurcations permet, dans cette étude de l'hélicoptère avec une charge suspendue, de déterminer quelles sont les configurations de masse de la charge et de longueur du cable qui sont dangereuses.

Des travaux de K. Sibilski, il ressort que la théorie des bifurcations est un outil intéressant pour étudier le comportement de l'hélicoptère. Il rend possible de déterminer avec précision quelles sont les zones dangereuses et quels sont les états d'équilibre possibles dans chacune des configurations. La méthodologie met en évidence l'origine des instabilités et permet d'éclaircir la complexité d'un phénomène.

Cependant, les résultats obtenus restent difficilement exploitables pour des tâches de conception : il n'est pas toujours facile de tirer des conclusions claires à partir des diagrammes calculés. Le modèle de dynamique du vol est trop succinctement évoqué et les graphiques obtenus sont peu commentés et donc difficiles à interprêter.

Une autre contribution revient à **M. H. Lowenberg**, chercheur du département d'ingénierie aéronautique de l'université de Bristol. **Ses étudiants R. G. Bedford** (en thèse) et **D. Rezgui** (en postdoc) se sont penchés sur le cas des hélicoptères alors que jusqu'à présent, ses travaux ne concernaient que les avions. Ils ont essayé de contribuer à la conception et à l'analyse de lois de commande [Bedford et Lowenberg 2003] ainsi qu'à l'examen de l'hélicoptère avec une charge suspendue [Bedford et Lowenberg 2004]. D. Rezgui a, quant à lui, examiné la stabilité du mouvement de battement des pales en autorotation [Rezgui *et al.* 2006].

Le code générique de mécanique du vol hélicoptère Helilink fourni par QinetiQ, la compagnie des technologies de défense anglaise issue de la séparation de l'agence gouvernementale, est utilisé. Il contient les équations du mouvement qui décrivent les dynamiques du fuselage, la modélisation du rotor principal et du rotor arrière est celle d'un disque porteur, celle des battements est régie par une dynamique du second ordre, le champ des vitesses induites à travers le rotor principal est rendu par un modèle de Pitt et Peters à trois états.

Pour l'étude de l'**hélicoptère en boucle fermée** [Bedford et Lowenberg 2003] est rajoutée au modèle d'hélicoptère une boucle de contrôle qui peut utiliser différents systèmes. Le SAS ("stability augmentation system") comprend un retour proportionnel de l'angle de tangage et de la vitesse angulaire de tangage sur le pas cyclique longitudinal, de l'angle de roulis et de la vitesse angulaire de roulis sur le pas cyclique latéral, de l'angle de lacet et de la vitesse angulaire de lacet

sur le palonnier. En rajoutant un CAS ("control augmentation system"), il obtient un SCAS qui est, en pratique, un correcteur proportionnel intégral qui agit sur les quatre commandes à partir des valeurs de la vitesse verticale, de l'angle de tangage et de roulis, du taux de lacet.

L'analyse par continuation et par la théorie des bifurcations va permettre de comparer les différents dispositifs de stabilisation. Elle va aussi permettre d'examiner comment les saturations affectent le système en boucle fermée.

M. H. Lowenberg et R. G. Redford étudient quelles sont les valeurs du pas cyclique longitudinal ou du gain de la boucle de retour sur l'assiette longitudinale pour lequel le système est stable ou instable et quels sont les effets de l'ajout d'un pilote automatique. C'est le tracé du lieu des points de bifurcation de Hopf qui permet de déterminer les valeurs critiques de consigne ou de pas cyclique pour lesquelles le système sature en fonction de l'autorité du SAS.

Les auteurs portent ensuite leur investigation sur le cas d'un virage avec le SAS activé et déterminent les valeurs du pas cyclique latéral pour lequel le système sature et l'influence de l'augmentation de l'autorité du système de contrôle.

En résumé de cette étude de l'hélicoptère muni d'un pilote automatique, l'analyse par la théorie des bifurcations a permis de mettre en évidence la nature asymétrique et couplée de la dynamique du vol de l'hélicoptère ainsi que d'évaluer l'effet des variations du contrôleur sur les propriétés du système en boucle fermée. Il s'agit d'une première étude sur cette problématique et un manque de maturité est visible. Les pilotes automatiques proposés ne sont pas complètement réalistes et la méthodologie de conception d'un PA n'est pas tout à fait respectée.

Dans une deuxième publication [Bedford et Lowenberg 2004], M. H. Lowenberg et R. G. Redford se sont fixés pour objectif d'étudier la dynamique de l'**hélicoptère avec une charge suspendue**.

La charge choisie ne crée qu'une force de traînée quasi-statique, ce qui élimine l'existence possible de beaucoup de phénomènes. Le câble est supposé rigide et de masse nulle. En plus des efforts de traînée, la charge est soumise aux efforts de pesanteur et à son accélération, qui comprend les termes d'accélérations d'entraînement, de Coriolis et centrifuge.

Le théorème fondamental stipule que le moment des efforts extérieurs appliqués à la charge au point d'attache est nul, ce qui s'écrit : $\overrightarrow{M}_{hook} = \overrightarrow{R}_{load} \wedge \overrightarrow{F}_{load} = \overrightarrow{0}$. Cette relation fournit des équations différentielles du second ordre pour les angles du câble $\theta_u, \phi_u$ au niveau du point d'attache. Après avoir relaté brièvement la modélisation de l'élingue, l'état de l'art va s'attacher à décrire les travaux d'analyse.

R. G. Redford et M. H. Lowenberg commencent par étudier l'hélicoptère muni d'un pilote automatique mais sans la charge. En calculant le diagramme de bifurcation suivant la commande cyclique longitudinale, ils déterminent quelles sont les plages de commandes pour lesquelles le système est stable ou instable et diagnostiquent l'existence de phénomènes de saut et la présence de bifurcations de Hopf. Ils réussissent à fixer les valeurs pour lesquelles le SAS sature et font correspondre l'information qu'ils obtiennent sur le diagramme avec le type de saturation rencontré.

Une fois que cette analyse de l'hélicoptère seul a été effectuée, R. G. Redford et M. H. Lowenberg examinent les effets de la charge suspendue sur le vol de l'appareil et l'apparition de

nouvelles instabilités.

Une des premières conséquences de la présence d'une charge est la réduction de la plage de valeurs pour laquelle la branche de solutions est stable. Certaines saturations restent inchangées, mais d'autres apparaissent plus tôt. Ils diagnostiquent lequel des retours du pilote automatique sature et dans quelle situation.

Une fois ces comparaisons effectuées, ils étudient l'influence de paramètres caractéristiques de la charge tels que la masse de la charge suspendue ou la position longitudinale de l'attache dans le cas d'un vol d'avancement à faible vitesse. Une première constatation est que le système est stable pour toutes les positions à l'arrière du centre de gravité. Par contre, si l'élingue est attachée trop en avant, le système peut devenir instable du fait d'une bifurcation de Hopf. Une deuxième constatation est que, si la charge est de masse trop faible, le système peut devenir instable. Les auteurs déterminent la stabilité en fonction de la masse et de la position longitudinale de la charge. Ils tracent les frontières des régions de stabilité et d'instabilité. Leurs observations mettent en évidence qu'il existe des points de vol pour lesquels il n'est pas dangereux de voler et d'autres qui sont dangereux à cause de l'étroitesse de la région de stabilité.

En conclusion, l'analyse par l'intermédiaire de la théorie des bifurcations a permis de diagnostiquer l'influence de l'ajout d'une charge suspendue sur le fonctionnement du SAS qui sature plus facilement. Elle a aussi rendu possible la mise en évidence d'une zone d'instabilité que les méthodes traditionnelles ne pouvaient pas détecter. Une autre contribution est que la méthodologie a permis de diagnostiquer quelles sont les zones qui nécessitent d'approfondir le travail d'analyse ou pour lesquelles la marge de stabilité n'est pas suffisante afin de voler en toute sécurité. En fait, une telle étude est plutôt à situer du côté de la mécanique analytique ou de l'avant-projet. Cependant, la modélisation proposée des différents éléments est très simplifiée et la pertinence des résultats pour l'aide à la conception n'est pas évidente.

Jusque là, ce sont les études portant sur l'analyse de la mécanique du vol des hélicoptères par l'intermédiaire de la théorie des bifurcations qui ont été présentées. L'exposé va s'étendre dans la suite aux études voisines de la problématique de mécanique du vol qui concernent le rotor isolé et dont l'une est à l'origine de ce sujet de thèse.

Avec P. C. Bunniss et M. H. Lowenberg, D. Rezgui s'est penché sur le cas d'un rotor en autorotation [Rezgui *et al.* 2006]. La modélisation se base sur l'équation de Hill

$$\ddot{\beta} + p(t)\dot{\beta} + s(t)\beta = E\left(\Omega t\right)$$

où $\beta$ est l'angle de battement des pales, $\Omega$ la vitesse du rotor et $p, s, E$ des fonctions périodiques. Ils supposent que la pale est rigide et choisissent le modèle de Pitt et Peters à trois états pour décrire le champ des vitesses induites.

En choisissant une vitesse d'avancement de $200m/s$ et un angle d'inclinaison du rotor $\theta_{shaft} = 0^\circ$, le processus de continuation sur la pas collectif rencontre un point de retournement en $\theta_{col} \approx 11.3^\circ$ où une branche stable se sépare en une branche stable et une branche instable ainsi qu'en $\theta_{col} \approx 3.22^\circ$. Il existe donc trois plages de valeurs de $\theta_{col}$ à distinguer : entre $0^\circ$ et $3.22^\circ$, il n'y a qu'une seule branche stable ; entre $3.22^\circ$ et $11.3^\circ$, il y a une branche stable et une branche instable ; pour $\theta_{col} > 11.3^\circ$, il n'y a plus d'orbites périodiques. Les auteurs notent que l'instabilité observée concerne la cinématique de la pale ("blade sailing") qui affecte les rotors évoluant à faible vitesse dans un fort vent ou de celle rencontrée lors d'une ressource.

A l'ONERA, **P.-M. Basset** a analysé un **rotor isolé en Vortex Ring State** [Basset 2002]. Pour cela, il a adopté comme modélisation de l'écoulement au niveau du rotor celle fournie par le modèle FiSuW, acronyme anglais de "Finite State Unsteady Wake" [Basset *et al.* 2001]. La description de la dynamique du champ des vitesses induites à travers le rotor par un nombre fini d'états permet d'écrire le modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires. Il correspond à la projection d'équations de la mécanique des fluides sur une base orthogonale en coordonnées ellipsoïdales. La forme matricielle des équations dynamiques du flux induit s'écrit sous la forme :

$$[M]\left\{\dot{\nu}^r_{i_f}\right\} + \left[\hat{L}\right]^{-1}[\overline{B}][V]\left\{\nu^r_{i_f}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\tau^h_f\right\}$$

où $[M]$ est la matrice des masses apparentes et $[V]$ la matrice des vitesses. Il a décidé de se limiter aux trois états de flux induit axisymétrique $\left(\nu^0_{i_1}, \nu^0_{i_3}, \nu^0_{i_5}\right)$.

Dans un premier temps, l'auteur a fixé la distribution de portance du rotor $\left(\tau^h_f\right)$ : le système correspond dans ce cas à un oscillateur forcé. L'analyse a porté sur les effets des termes non-linéaires, des vitesses de descente et d'avancement et des effets de la distribution de portance sur le rotor. Le tracé des "nullclines" a été effectué et les points d'équilibre ont été déterminés. La conclusion est que dans un tel cas, le système ne présente pas de dynamique complexe.

C'est pourquoi, dans un deuxième temps, la distribution de portance a été libérée et couplée avec le flux induit qui se comporte alors comme un oscillateur libre. Le diagramme de bifurcation est plus riche et complexe et présente différents types de bifurcations, des cycles limites et des vibrations propres à un comportement chaotique associé à un attracteur étrange dont l'auteur a essayé de déterminer le bassin d'attraction.

Cette première étude plutôt théorique, menée à l'ONERA, visait à apporter un éclairage nouveau sur la dynamique chaotique de l'écoulement d'un rotor en Vortex Ring State et à ouvrir la voie à ce type d'investigation dans l'analyse de la dynamique non-linéaire de la mécanique du vol des hélicoptères.

**Conclusion :** Les travaux d'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères par la théorie des bifurcations sont peu nombreux et la moitié d'entre eux ont été publiés pendant le déroulement de cette thèse et sont donc récents. Ils se concentrent tous sur des problèmes de mécanique analytique mais ne présentent pas encore de résultats concrets vraiment exploitables par des ingénieurs pour la conception d'appareils. En comparaison de ce qui a déjà été fait sur les avions, les études actuelles se situent clairement au début de telles investigations.

# Chapitre 4

# Exemples de phénomènes non-linéaires de la dynamique du vol des hélicoptères

**Introduction :** La dynamique du vol des hélicoptères est sujette à des phénomènes qu'il est parfois difficile d'appréhender et qui nécessitent de longues années d'efforts et d'investigations avant de réussir à être compris et maîtrisés suffisamment. Trois d'entre eux sont exposés dans ce chapitre et seront analysés grâce à la méthodologie de la théorie des bifurcations au cours de cette thèse. Il s'agit de l'état d'anneaux tourbillonnaires, du roulis hollandais et des oscillations induites par le pilote.

## 4.1 Exposé de l'état d'anneaux tourbillonnaires

### 4.1.1 Historique de l'état d'anneaux tourbillonnaires

#### Danger rencontré depuis les origines

Dès les premiers prototypes d'hélicoptères, les pilotes d'essais ont rencontré des problèmes dus à l'instabilité aérodynamique du rotor principal dans l'état d'anneaux tourbillonnaires couramment désigné par le terme anglophone "Vortex Ring State" (VRS). Charles MORRIS relate avoir déjà rencontré de telles mésaventures lors d'un essai sur le SIKORSKY R-4 le 20 avril 1942 [Boulet 1982].

*"Je commençais à réduire le pas, mais immédiatement se produisirent une série d'évènements inquiétants : l'appareil se mit à se secouer assez violemment, à se balancer en demi-cercle, il semblait presque hors de contrôle. Pendant quelques secondes qui me parurent longues, je me battis avec le manche en me demandant ce qui n'allait pas et ce qu'il fallait faire, et je pensais même à mon parachute. L'instinct du pilote d'avion me poussa à mettre du manche en avant pour reprendre de la vitesse, et quelques secondes après, je me retrouvais en descente normale. Je terminais par une autorotation jusqu'au sol."*

Le phénomène était encore inconnu à l'époque, par contre les conséquences du VRS sur le comportement de l'appareil sont très bien exposées : des instabilités importantes forçant le pilote à un niveau d'attention élevé pour maintenir les attitudes constantes et la stratégie d'échappement qui consiste à prendre de la vitesse d'avancement.

**Accidents**

B.H. Moore recense de nombreuses phases de vol dans lesquelles l'état d'anneaux tourbillonnaires est identifié comme responsable d'accidents [Moore 1999]. Les statistiques qu'il a trouvées dans les archives de 1983 à 1997 sont les suivantes :
- 16% en approche finale
- 20% au décollage
- 39% lors de manœuvres stationnaires ou en autorotation
- 25% en vol (cas de vol non identifié)

Une première constatation est qu'il ne s'agit pas seulement de phases d'approche. Une autre est qu'un facteur favorisant l'apparition de l'état d'anneaux tourbillonnaires est la présence de turbulences atmosphériques. Enfin, la majorité des accidents sont une conséquence d'un régime rotor insuffisant.

### 4.1.2 Description physique de l'état d'anneaux tourbillonnaires

#### 4.1.2.1 Mécanique du vol

Quand un hélicoptère effectue une manœuvre de descente (ou une approche) à forte pente, la voilure tournante constituée par le rotor principal risque d'évoluer dans son propre sillage, des "recirculations" d'air ont lieu au niveau du rotor rendant l'appareil instable. Le pilote peut perdre momentanément le contrôle de son appareil entre autres à cause de l'incapacité du rotor à créer la puissance nécessaire. C'est cette situation qui se dénomme **"état d'anneaux tourbillonnaires"**.

Quand il atteint ces vitesses de descente importantes, le pilote cherche à les réduire en augmentant le pas collectif pour avoir plus de portance. Mais cela ne sert à rien, l'hélicoptère ne réagit pas assez : c'est le phénomène de *power settling*. Le rotor n'arrive pas à créer la portance nécessaire. Il faudrait en fait des variations bien plus importantes du pas collectif pour sortir de cet état.

Près du sol, cette augmentation importante du taux de descente a des conséquences catastrophiques : le pilote n'a pas le temps de remédier à la situation.

La bonne stratégie pour quitter la zone instable du VRS consiste, en fait, à augmenter la vitesse d'avancement. Ce sont actuellement les recommandations données au pilote. C'est la manœuvre la plus simple, elle est conseillée dans ce cas afin de favoriser la convection des anneaux tourbillonnaires loin du rotor et de récupérer de la portance.

En effet, le VRS se produit lorsqu'un hélicoptère a une vitesse d'avancement faible et que le pilote désire effectuer une descente à forte pente pour atterrir par exemple ou dans le cadre d'une mission spécifique (qui nécessite de la discrétion). Ce phénomène peut aussi apparaître lors d'une manœuvre quelconque de descente où le pilote décélère : il y a alors un effet de surprise et le pilote non entraîné risque de ne pas prendre les bonnes décisions dans les délais impartis (la formation pour acquérir le brevet de pilote n'initie pas l'élève à ce genre de situations). La manœuvre la plus commune qui mène à cet état reste le cas où un hélicoptère en vol stationnaire ou à basse vitesse décide de chuter verticalement en diminuant de façon importante la portance.

#### 4.1.2.2 Sillage du rotor

Le mécanisme sous-jacent à la création du sillage permet d'expliquer la géométrie de la trace d'air perturbée que laisse le rotor principal derrière lui.

Les variations de circulation de l'air $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot \vec{dl}$ autour des profils de pale de section $\vec{dl}$ et au niveau desquels la vitesse de l'air est $\vec{v}$ sont responsables de la création de tourbillons. Ces différences apparaissent en des azimuts différents, en des rayons différents ou le long du bord de la pale, en particulier, ce sont les tourbillons créés sur le bord d'attaque, le bord de fuite et l'extrémité d'une pale en mouvement qui sont principalement pris en compte dans les modèles. Les vitesses locales les plus importantes se situent en extrémité de pale, celles des pales avançantes étant encore plus grandes que celles des pales reculantes par rapport au sens de déplacement de l'hélicoptère. C'est donc là que prennent naissance les tourbillons marginaux de vorticité la plus importante i.e. d'intensité tourbillonnaire la plus grande. Chaque pale déploie une nappe tourbillonnaire hélicoïdale. Un modèle simplifié de sillage va décrire la courbe-hélice formée par les centres de ces tourbillons d'intensité importante. En vol de descente, ces hélices tourbillonnaires peuvent se compacter en anneaux tourbillonnaires à proximité sous le rotor.

Leur vitesse d'éjection est supposée être la somme vectorielle de la vitesse d'écoulement de l'air et de la vitesse induite moyenne (le deuxième terme de vitesse rendant compte de l'accélération moyenne de l'air par le rotor). La forme du sillage est donc déterminée par la trajectoire du rotor et la loi d'évolution : $V_{i0} = f\left(C_T\right)$.

Si, par hypothèse, le sillage est simplifié en un ensemble d'anneaux tourbillonnaires éjecté un à un par le rotor, la distance entre chaque anneau est donnée par $dH = (V_Z - V_{i0}) \times \frac{2\pi}{b\Omega}$.
Les anneaux tourbillonnaires ont une vorticité qui dépend de la variation de la circulation autour des profils de pale, laquelle est donnée localement par la loi de Kutta-Joukowski $\Gamma = \frac{c}{2} V_{air} C_Z$ et se contractent suivant une loi qui dépend de l'âge de l'anneau, par exemple la loi de Landgrebe [Basset 1995, Johnson 1994].

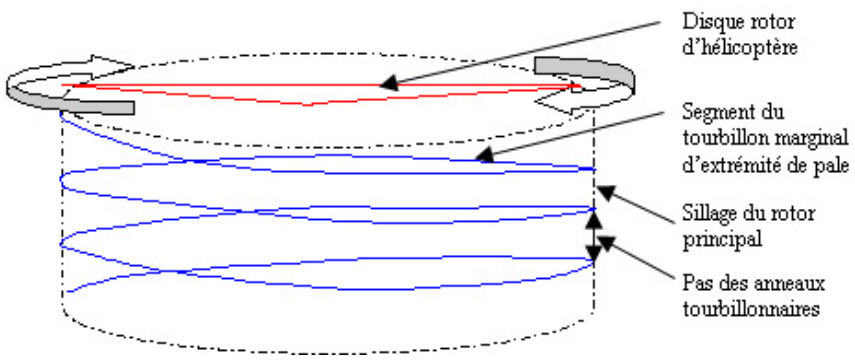



FIG. 4.1. Sillage d'un disque rotor

#### 4.1.2.3 Mise en VRS du disque rotor

Il s'agit de décrire l'aérodynamique au niveau du rotor dans les différentes phases de vol.

En stationnaire et en vol de montée, le rotor aspire de l'air par le haut et la refoule vers le bas. Soit $V_i$ la vitesse induite par le disque rotor, $V_Z$ la vitesse de descente du disque rotor, $F_Z$ la

portance du disque rotor. L'écoulement de l'air dans une telle situation est illustré par le schéma (4.2).

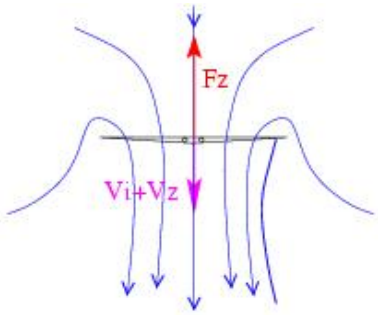



FIG. 4.2. Disque rotor de l'hélicoptère en vol stationnaire

Pour des vitesses de descente faibles, une partie de l'air qui traverse le rotor provient du bas pour passer vers le haut. Les tourbillons d'extrémité de pales même s'ils restent proches du rotor sont encore lâchés vers le bas, la vitesse induite est de sens opposé à celui de la portance, comme le montre la figure (4.3).

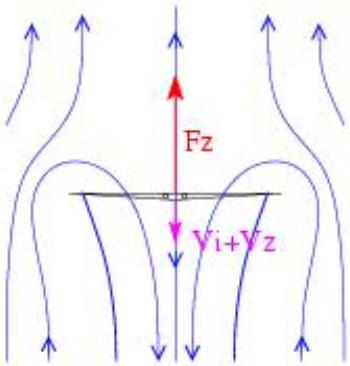



FIG. 4.3. Disque rotor en vol à faible taux de descente

Pour des vitesses de descente moyennes (schéma (4.4)), les tourbillons d'extrémité de pale restent collés au plan du rotor et forment des anneaux tourbillonnaires. Le rotor se retrouve isolé dans un tore aérodynamique et la portance, tout comme la vitesse induite, chute.

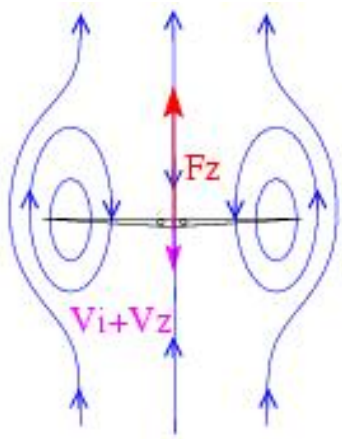



FIG. 4.4. Disque rotor en vol à des taux de descente moyens

Pour des taux de descente importants (illustration (4.5)), l'écoulement de l'air se fait de bas en haut. Les anneaux tourbillonnaires sont éjectés vers le haut. A des vitesses de descente un peu plus importantes, l'hélicoptère se retrouve en autorotation : la puissance nécessaire au rotor est nulle, c'est l'air qui fait tourner les pales.

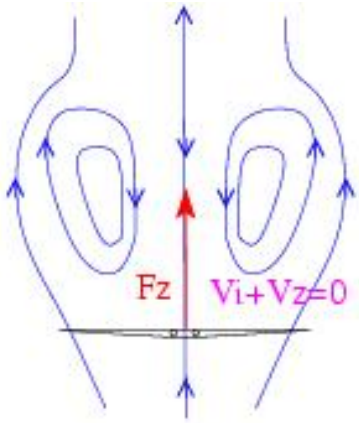



FIG. 4.5. Disque rotor (en autorotation) à des taux de descente importants

A des vitesses de descente supérieures à celle de l'autorotation, le rotor est en régime de descente "moulinet-frein" (qui s'apparente au mode de fonctionnement d'une éolienne, comme présenté dans (4.6)).

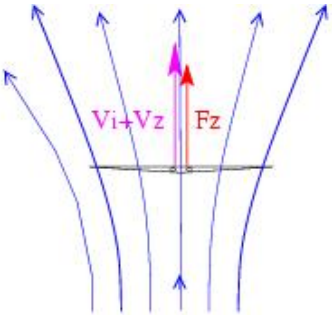



FIG. 4.6. Disque rotor (en moulinet-frein) à des taux de descente très importants

Les différentes phases de vol de l'hélicoptère sont résumées sur le diagramme (4.7) exposant la vitesse induite moyenne à travers le rotor en fonction de la vitesse de descente pour une vitesse d'avancement donnée.

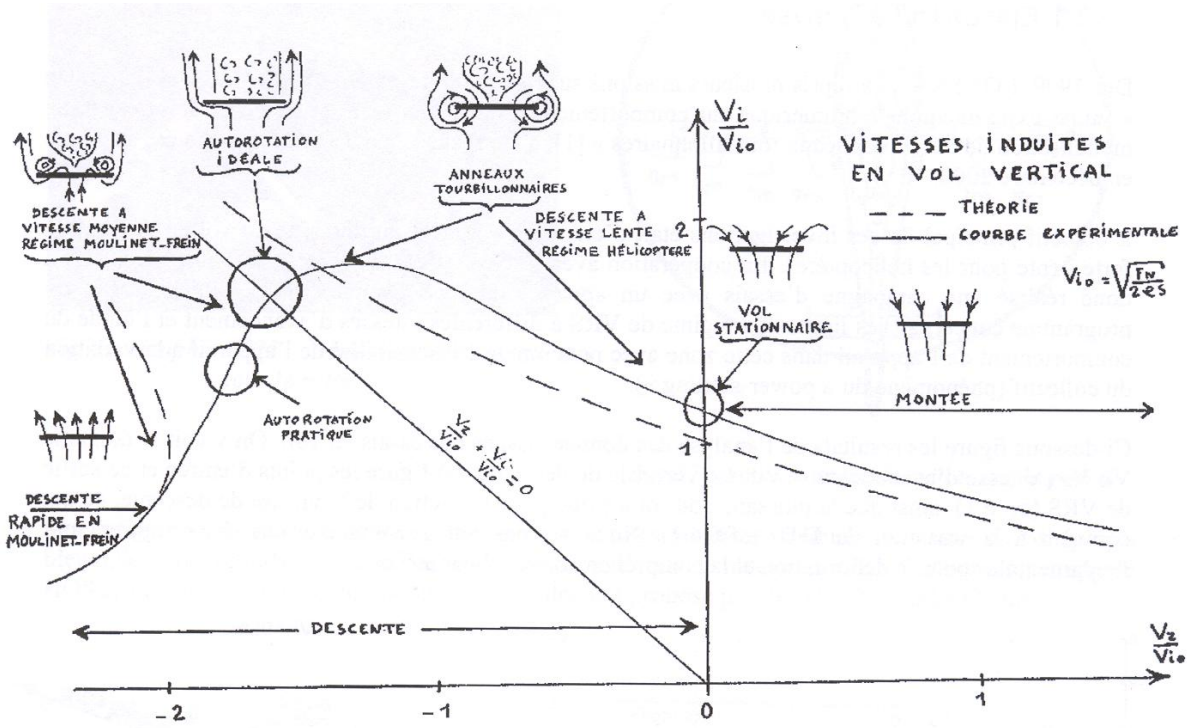



FIG. 4.7. Différentes phases de l'écoulement d'air à travers un disque rotor dans un diagramme représentant le taux de vitesse induite en fonction du taux de chute [Rollet 1994]

Pour un vol de montée, un vol stationnaire ou avec de faibles taux de descente, le disque rotor se trouve sur la branche de fonctionnement en régime hélicoptère. Quand il augmente son taux de descente, il passe en VRS. Pour des taux de descente importants, il se trouve sur la branche moulinet-frein où se situe l'autorotation.

A noter que ce diagramme est normalisé sur les deux axes (vitesse de descente et vitesse induite) par la vitesse induite en stationnaire i.e. nécessaire pour créer la portance compensant

uniquement le poids.

La vitesse induite dépend de la vitesse de descente, mais aussi de la vitesse d'avancement. Quand un hélicoptère prend de la vitesse d'avancement, les anneaux tourbillonnaires sont entraînés plus loin vers l'arrière du rotor, l'augmentation de vitesse induite dans la zone intermédiaire (entre le régime hélico et le régime moulinet-frein) est donc moins importante et une fois que l'hélicoptère avance au-delà d'une certaine vitesse, l'état d'anneaux tourbillonnaires disparaît même et il n'y a plus d'instabilité.

### 4.1.3 Essais en vol menés par l'ONERA

#### 4.1.3.1 Moyens d'essais

L'ONERA a organisé plusieurs campagnes d'essais. Elles ont été réalisées sur l'hélicoptère SA 365N Dauphin 6075 du Centre d'Essais en Vol d'Istres. L'hélicoptère a une masse à vide de 2.4 tonnes et une masse maximale de 4 tonnes. Comme c'est un moyen d'essai, il est équipé de capteurs et systèmes de mesure installés en cabine qui permettent de récupérer les valeurs des commandes, des puissances consommées, des attitudes, des vitesses linéaires et angulaires de l'appareil, des données anémobarométriques (vitesse du vent, pressions, etc.) ainsi que de capteurs installés sur le rotor (pont de jauges) qui récupèrent les mesures de battements des pales, le couple rotor, les moments et les efforts au niveau du rotor. L'azimut rotor est déterminé par un dispositif optique. La centrale inertielle fournit les vitesses dans le repère terrestre. L'ajout de la vitesse du vent donne la vitesse aérodynamique.

#### 4.1.3.2 Démarche

L'objectif de la campagne a été de déterminer les limites de l'état d'anneaux tourbillonnaires [Jimenez *et al.* 2002].

Il s'agit de donner une estimation de la région d'anneaux tourbillonnaires dans le plan $(V_H, V_Z)$ de la vitesse horizontale et de la vitesse verticale.

Les deux procédures d'investigation consistent à :
- *diminuer le pas collectif :* depuis un vol en palier à vitesse d'avancement, fixée, le pas collectif est progressivement réduit. Les cas de vol correspondent à des valeurs de vitesses d'avancement différentes et permettent de déterminer la limite haute du VRS. Le point d'entrée en VRS est détecté lorsque le taux de descente subit un fort accroissement. Quand la vitesse se restabilise, l'appareil a atteint le point de sortie du VRS.
- *décélérer l'hélicoptère :* partant d'un vol avec un taux de descente, fixé, et avec une vitesse d'avancement $V_H$ assez importante pour être en dehors du VRS, l'amplitude de $V_H$ est diminuée afin de déterminer l'entrée en VRS. Pendant la manœuvre, le pilote doit maintenir la vitesse de descente constante afin de bien fixer la frontière latérale du domaine de VRS. L'entrée est plus dure à détecter dans ce cas, l'accroissement en vitesse verticale n'est pas un critère exploitable ici : il faut prendre pour indicateur le niveau de fluctuations des accélérations linéaires et angulaires.

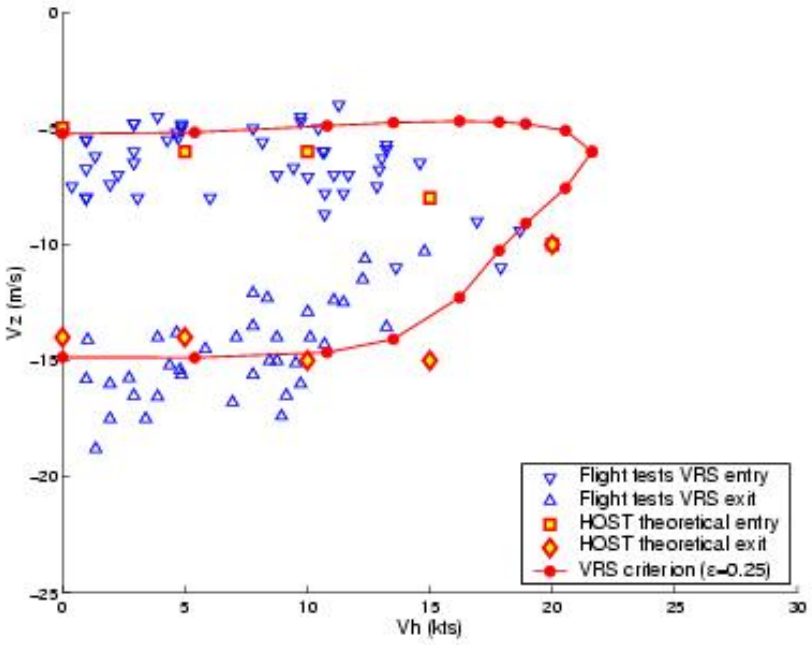



FIG. 4.8. Essais en vol du Dauphin et modélisation des limites du domaine de VRS

#### 4.1.3.3 Comportement de l'appareil

Quand l'hélicoptère se rapproche de l'état d'anneaux tourbillonnaires, le niveau de vibrations augmente. A son entrée en VRS, l'appareil subit une augmentation brutale du taux de descente. La tentative de stabiliser l'appareil en augmentant le pas collectif est sans effet : c'est ce qu'on appelle le *power-settling* (le rotor n'arrive pas à créer la portance nécessaire pour équilibrer l'appareil). La manœuvre la plus directe pour quitter le VRS est d'augmenter la vitesse d'avancement : l'hélicoptère stabilise alors sa vitesse de descente.

Les caractéristiques du VRS sont toujours les mêmes, mais sont plus brutales pour des vitesses d'avancement plus faibles. Par ailleurs, même pour des conditions de vol très proches, le comportement de l'appareil peut être très différent à cause de l'écoulement turbulent autour du rotor caractéristique du VRS. A noter que ces fluctuations transforment la campagne d'essai en un exercice de rodéo selon les propos des pilotes eux-mêmes.

### 4.1.4 Les axes de recherche actuels

L'état d'anneaux tourbillonnaires est l'objet actuellement de recherches intensives et approfondies. Les premiers modèles ont été développés et des campagnes expérimentales organisées à l'ONERA ou ailleurs. Mais il reste encore beaucoup de travail aux ingénieurs et aux chercheurs avant que ce phénomène ne soit bien compris, que ce soit du point de vue de la mécanique du vol ou de l'aérodynamique. Cette thèse essaiera d'apporter sa contribution grâce à l'analyse par la théorie des bifurcations faite au chapitre 8.

## 4.2 Présentation du roulis hollandais

### 4.2.1 Description

Le roulis hollandais est un mouvement oscillatoire naturel de l'hélicoptère concernant essentiellement les variables de roulis et de lacet. Le nom tire son origine de la ressemblance de la trajectoire avec celle que font les couples hollandais patinant dans le fond d'un canal gelé bras-dessus bras-dessous. Il est aggravé par trop d'*effet dièdre* et par peu de *stabilité directionnelle* et il peut être excité par une bourrasque ou par un coup de palonnier sur le rotor arrière [Prouty 1992].

L'effet dièdre existe à la fois pour les avions et les hélicoptères. Il s'agit d'un phénomène qui consiste en la création d'un couple de roulis dans le sens opposé au dérapage. Pour ce qui est de la stabilité directionnelle, appelée également "effet girouette", elle découle principalement de l'action de la dérive en dérapage [Lefort et Hamann 1999, Wanner 1983] et crée un moment de lacet provoquant une rotation en lacet afin d'annuler le dérapage.

Le roulis hollandais est un comportement qui se retrouve pour tous les aéronefs. Quand un passager regarde par la fenêtre d'un avion par exemple, il observe qu'un élément de l'appareil monte et descend relativement à l'horizon : c'est une illustration du mouvement de roulis lié à ce phénomène (à moins qu'il soit compensé par le système de stabilisation, auquel cas le braquage alterné des ailerons sera une manifestation du phénomène).

Dans l'analyse du roulis hollandais d'un avion, comme les variables longitudinales et les variables latérales sont découplées, un ingénieur n'a pas besoin de prendre en compte l'intégralité des équations du mouvement. Il peut se limiter au bloc latéral (i.e. aux équations décrivant le mouvement latéral) et fixer le bloc longitudinal (i.e. aux équations représentant le mouvement longitudinal) qui comprend la portance, la traînée et le tangage de l'appareil. Dans le cas de l'hélicoptère, malheureusement, le couplage (fort) entre toutes les variables oblige à prendre en compte toutes les équations. Par exemple à forte vitesse, le niveau de pas collectif requis pour maintenir l'équilibre est tel qu'une augmentation de l'angle d'attaque du rotor induit un couple moteur beaucoup plus fort, ce qui illustre le couplage entre tangage et lacet.

Quand le roulis hollandais est légèrement instable, le pilote arrive instinctivement à le stabiliser. Cependant, en vision dégradée, par temps de pluie ou de brouillard, le pilote ne peut plus prendre l'horizon comme référence et un roulis hollandais instable devient alors très dangereux. C'est pourquoi les normes de certification exigent qu'il soit stable pour autoriser l'appareil à voler dans de telles conditions ("Instrument Meteorological Conditions I.M.C." qui classe le vol dans la catégorie "Instrument Flight Rules" vol I.F.R. [Prouty 1992]).

Dans le cas des hélicoptères, les ingénieurs ont du mal à prédire la stabilité du roulis hollandais par le calcul et à en comprendre les raisons notamment parce qu'il est difficile de simuler la façon dont l'écoulement du sillage du rotor évolue et les perturbations aérodynamiques sur les différents éléments. Ces difficultés de simulation inhérentes à la complexité des phénomènes à modéliser, font qu'encore de nos jours la démarche pour garantir une stabilité du mode roulis hollandais (ou d'une stabilité marginale) reste empirique. Des essais en vol sont effectués sur des prototypes, et ensuite des surfaces verticales (petites ailes ou carénages) sont parfois rajoutées au-dessus ou en dessous du centre de gravité pour améliorer la stabilité de l'appareil [Prouty 1992, Kampa *et al.* 1997].

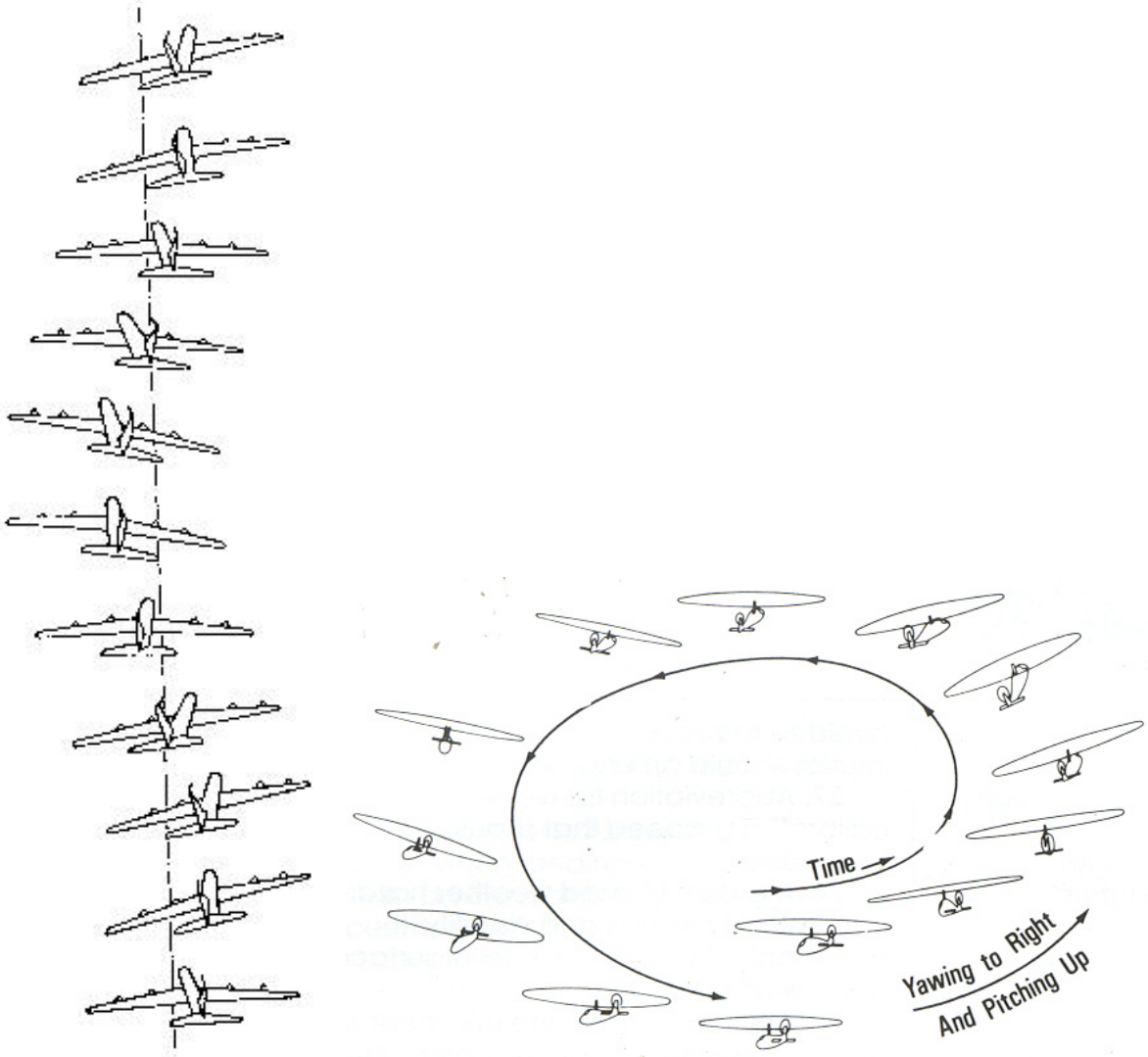



FIG. 4.9. Roulis hollandais d'un avion et d'un hélicoptère [Prouty 1992]

### 4.2.2 Méthodologie d'analyse linéaire

La méthodologie d'analyse actuelle repose bien souvent sur une analyse linéaire complétée par des simulations temporelles du modèle non-linéaire complet. Une présentation succincte est donnée ci-après et de plus amples informations sont disponibles dans [Padfield 1996, page 245]. Les équations linéarisées du mouvement latéral obtenues en remplaçant l'angle de roulis par la composante de vitesse de déviation latérale $\nu_0 \cong \nu + U_e\psi$ (où $U_e$ est la vitesse de translation à l'équilibre) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{\nu}_0 \\ \hline \nu \\ \dot{\nu} \\ \hline p \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & Y_v & g \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -N_r & -U_eN_v & N_r + Y_v & g - N_pU_e \\ \hline L_r/U_e & L_v & -L_v/U_e & L_p \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\nu}_0 \\ \hline \nu \\ \dot{\nu} \\ \hline p \end{bmatrix} = 0 \tag{4.1}$$

Plusieurs modes propres impliquant les angles de roulis, lacet et dérapage existent. Deux modes sont apériodiques : le mouvement de roulis (autour de l'axe correspondant et bien amorti à cause du fort amortissement de roulis dû au rotor) et le mouvement spiral (mouvement de virage permanent). Il reste un mode complexe, le roulis hollandais. Ce dernier est oscillatoire, de faible période et se traduit par un mouvement couplé autour de l'axe de roulis et de lacet. Il est solution de l'équation :

$$\lambda^2 + 2\zeta_d\omega_d\lambda + \omega_d^2 = 0 \tag{4.2}$$

où l'amortissement est donné par :

$$2\zeta_d\omega_d \cong -\left(N_r + Y_v + \sigma_d\left\{\frac{L_r}{U_e} - \frac{L_v}{L_p}\right\}\right) / \left(1 - \frac{\sigma_d L_r}{L_p U_e}\right) \tag{4.3}$$

et la pulsation par :

$$\omega_d^2 \cong (U_eN_v + \sigma_d L_v) / \left(1 - \frac{\sigma_d L_r}{L_p U_e}\right) \tag{4.4}$$

avec $\sigma_d = \frac{g - N_pU_e}{L_p}$.

C'est la connaissance des termes des matrices de sensibilité des dynamiques vis-à-vis des états et des commandes qui permet de déterminer les caractéristiques du roulis hollandais e. g. sa stabilité. Les études paramétriques portent sur l'évolution des dérivées que sont la stabilité directionnelle $N_v$, l'effet dièdre $L_v$, l'amortissement en lacet $N_r$ ou en roulis $L_p$ par exemple.

La figure (4.10) extraite de [Kampa *et al.* 1997] présente une décomposition des dérivées qui influencent l'amortissement (et la pulsation) du roulis hollandais.

La stabilité directionnelle $N_v$ ("Weather-Cock-Stability") résulte de l'action de la dérive et du fenestron, le fuselage ayant pour sa part un effet déstabilisant qu'il faut compenser. L'amortissement en lacet $N_r$ ("Yaw Damping") provient principalement de composants tels que le fenestron et la dérive, $N_r$ ne souffre pas de l'influence négative du fuselage car aucun moment dû à la vitesse de lacet n'est créé. L'effet dièdre $L_v$ ("Dihedral Stability") reçoit une forte contribution du rotor principal et de l'ensemble fenestron/dérive. Il peut être modifié par l'ajout de petites ailes verticales au bout de l'empennage horizontal ("endplates"), au-dessus de la dérive ou au-dessous du fuselage, ce qui donne lieu à un (intéressant) anti-couple au centre de gravité de l'appareil. Par ailleurs, l'amortissement en roulis $L_p$ dépend essentiellement du type de rotor principal. Ce dernier est sans articulation dans le cas de l'EC 135, $L_p$ est donc fortement amorti.

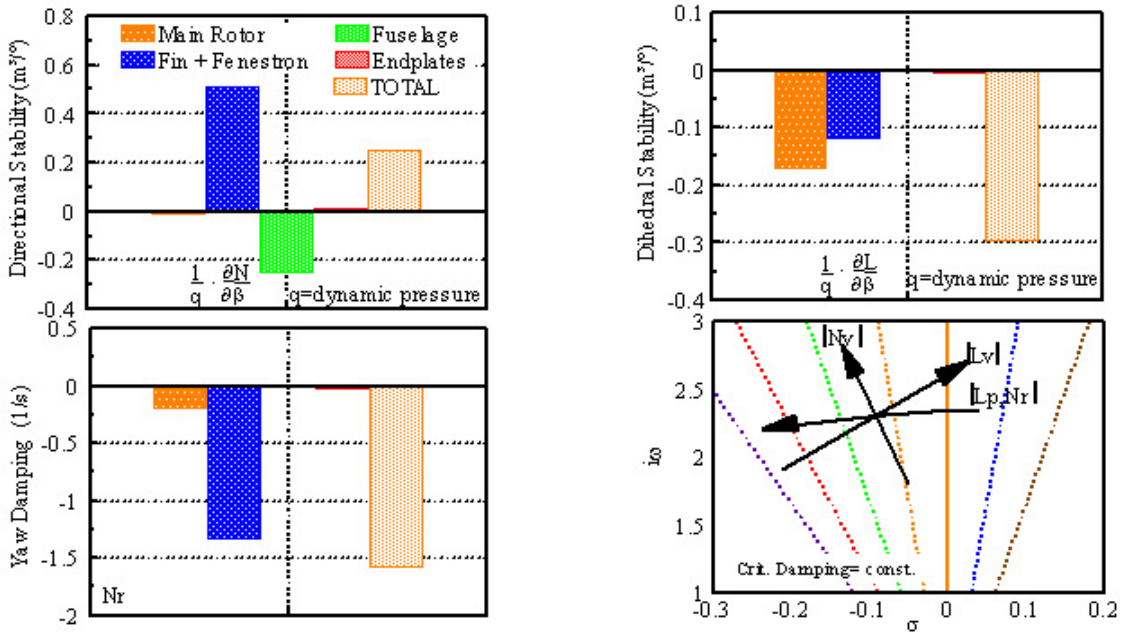



FIG. 4.10. Analyse de la stabilité du roulis hollandais de l'hélicoptère EC 135 [Kampa *et al.* 1997]

En jouant sur ces dérivées, il est possible de faire évoluer la valeur propre (et donc l'amortissement) associé au roulis hollandais comme le montre la quatrième figure de (4.10). Pour atteindre les caractéristiques spécifiées par les instances officielles, les concepteurs cherchent un compromis technologique entre les effets contradictoires qu'une modification de l'appareil peut induire sur les valeurs des dérivées. Par exemple, l'accroissement de la surface des ailes verticales augmente $N_v$ (donc la fréquence et seulement marginalement l'amortissement). Mais, si la surface est placée trop haut relativement au centre de gravité de l'appareil, $L_v$ est plus grand, ce qui contribue à réduire (négativement) l'amortissement du roulis hollandais.

### 4.2.3 Perspectives sur l'analyse du roulis hollandais

L'analyse linéaire du roulis hollandais permet de diagnostiquer la stabilité locale du point d'équilibre associé au cas de vol et, dans l'examen du comportement global de l'aéronef, l'existence éventuelle d'une orbite périodique n'est généralement pas envisagée. Les conclusions déduites sont directes et sont celles d'un vol stable ou instable. Or, la présence d'un cycle limite implique par exemple que les oscillations ont une amplitude bornée et non plus infinie. Les prévisions relatives au comportement qualitatif de l'engin et à la dangerosité du point de vol ne sont plus du tout les mêmes.

## 4.3 Eléments relatifs aux oscillations induites par le pilote

### 4.3.1 Introduction

Le terme "oscillations induites par le pilote", qui est également connu sous la dénomination de "pompage piloté" ou "pilote-dans-la-boucle", correspond à mouvement oscillatoire incontrôlé

d'un aéronef, résultant d'un déphasage critique entre l'action du pilote sur les commandes et la réponse de l'appareil. Le sigle communément employé est celui de PIO en référence à la traduction anglaise de "Pilot Induced Oscillations". Le PIO est constitué de trois composantes : le pilote, le véhicule et l'élément déclenchant. Il est une conséquence des efforts du pilote pour contrôler l'aéronef qui, involontairement, donnent lieu à des oscillations.

En ce qui concerne les avions, un regain d'intérêt important est apparu à cause des accidents du YF-22 (en 1992), du Saab Gripen (en 1989 et 1993) ou plus anciennement du X-15 (en 1959). Mais les origines du PIO sont aussi vieilles que l'existence des avions. Le premier incident remonte à Wilbur et Orville Wright en 1903, à Kity Hawk en Californie, lors duquel ils ont ressenti une "légère oscillation longitudinale du Wright Flyer".

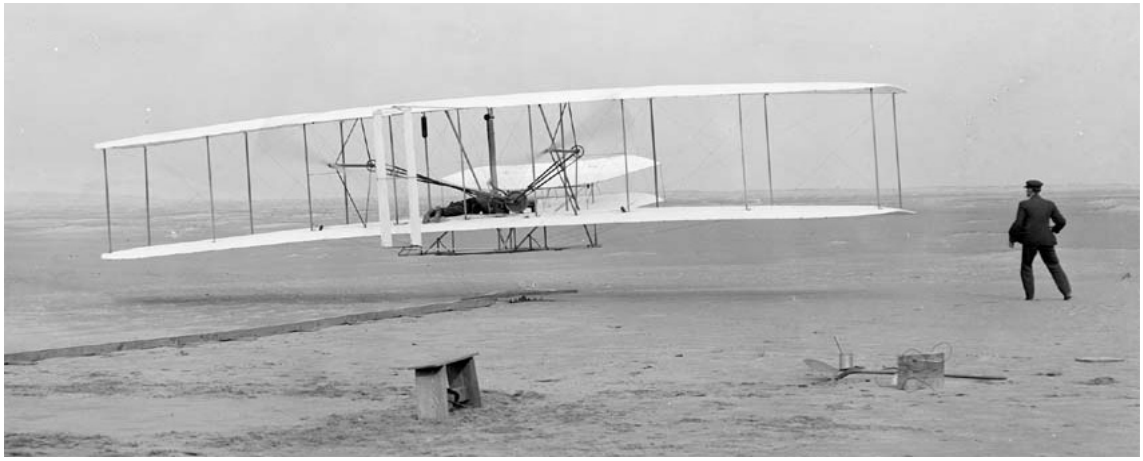


Fig. 4.11. Wright Flyer

La recherche actuelle se concentre sur la définition de critères de PIO afin de diagnostiquer l'existence d'éventuelles oscillations et les spécialistes en qualités de vol ont déjà fourni un travail important pour construire des tests qui fournissent une réponse à cette interrogation vis-à-vis de l'occurrence de PIO pour un appareil et des configurations de vol donnés [Mitchell et Klyde 2004].

En dehors de ces critères, la modélisation du pilote, qui joue activement son rôle dans la boucle, intervient aussi, que ce soit dans sa façon de réagir ou dans sa manière de percevoir les indices extérieurs.

Pour rester objectif, il est à noter que les ingénieurs en mécanique du vol tentent de disculper le pilote dans sa responsabilité envers ce genre d'évènement. C'est pourquoi les terminologies de "couplage avion-pilote" ou de "pilote-dans-la-boucle" sont souvent utilisées : le pilote est un acteur malgré lui et les remèdes proposés mettent plutôt l'accent sur la conception de l'appareil, du système de contrôle ou sur la formation du pilote.

Eu égard au centre d'intérêt de cette thèse, l'attention se concentrera, pour sa part, sur l'analyse du PIO grâce à un critère issu de la théorie des bifurcations qui inclut, entre autre, l'exploitation de la méthode du premier harmonique [Viault et Boucher 1983, Ljung et Glad 2000].

Au cours de ce chapitre, les différents types de PIO, la modélisation du pilote, la méthodologie d'analyse seront passés en revue puis l'attention se portera sur une non-linéarité qui suscite un

intérêt particulier, le limiteur en vitesse, et sur l'étude d'un cas concret de PIO qu'un avion a rencontré.

### 4.3.2 Différents types de PIO

L'état de l'art actuel, comme rapporté par le National Research Council on the Effects of Aircraft on Flight Safety [McRuer 1997], considère qu'il existe trois types de PIO : les PIO linéaires, quasi-linéaires et non-linéaires avec des transitoires [Klyde et Mitchell 2005].

Les PIO (de catégorie I) linéaires ont pour origine des retards excessifs au niveau de l'aéronef, qui peuvent apparaître dans certaines configurations, en plus de ceux inhérents au pilote. Ils sont dus au filtrage du signal, à une sensibilité incorrecte de la réponse au contrôle, aux capteurs, aux calculateurs, aux actionneurs...

Les PIO (de catégorie II) quasi-linéaires correspondent aux cas où l'élément déclenchant est une non-linéarité qui peut être isolée. Ils proviennent principalement des saturations ou des limitations en vitesse affectant les servocommandes.

Les PIO (de catégorie III) non-linéaires avec transitoires se produisent quand il y a des changements abrupts de la dynamique de l'élément contrôlé ou du comportement du pilote. Ce sont les plus dangereux mais aussi les plus difficiles à prévoir. Heureusement, ils sont assez rares.

Les PIO de catégorie II sont ceux sur lesquels se focalisera l'intérêt de cette étude des bifurcations se produisant dans la dynamique du vol des hélicoptères. Ils sont par ailleurs ceux qui, pour les avions, sont le plus fréquemment rencontrés.

### 4.3.3 Modèle pilote

Le pilote perçoit un certain nombre d'informations et en déduit le comportement à adopter. Principalement, il voit un écart entre la consigne et le comportement de l'aéronef et essaie d'appliquer une correction en conséquence. Les modèles structurels de pilote essaient d'affiner la façon de percevoir et de réagir du pilote en proposant une modélisation du système nerveux central et du système neuro-musculaire. Quelques-uns des modèles de pilote couramment utilisés sont présentés [McRuer 1995].

La **modélisation la plus simple** est celle d'un **gain pur** : l'écart observé est corrigé par une commande proportionnelle immédiate du pilote. Elle permet déjà d'étudier un bon nombre de PIO. Sa fonction de transfert est une constante notée $K_p$. La pratique montre que c'est une modélisation tout à fait correcte du pilote quand le PIO est pleinement développé.

Souvent, l'identification estime que le pilote ne réagit pas immédiatement, c'est pourquoi un **retard** $T$ est rajouté. La fonction de transfert s'écrit alors $K_p e^{-Ts}$.

Le modèle de pilote de **Neal-Smith**, quant à lui, est couramment utilisé pour l'analyse en boucle fermé d'un système pilote-aéronef lors de simulations informatiques. Le modèle est construit à partir des propriétés de résonance en boucle fermée, de gradient de variation et de largeur de bande. La fonction de transfert de ce modèle est $K_p \frac{(T_{p1}s+1)}{T_{p2}s+1} e^{-Ts}$ où $K_p$ est le gain pilote, $T_{p1}$ l'avancement requis, $T_{p2}$ le retard requis, $e^{-Ts}$ le déphasage neuro-musculaire du pilote pour lequel généralement la constante de temps est comprise entre 0.2 et 0.3 seconde.

Des **modèles structurels** de pilote humain ont aussi été développés afin de mieux approcher le comportement du pilote. Le système nerveux central et le système neuro-musculaire font l'objet d'une modélisation plus fine et approfondie. La figure (4.12) en donne une illustration. Les blocs sont donnés par

$$\begin{aligned} Y_{P_n} &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta_n\omega_n+\omega^2} \\ Y_f &= \frac{K_p}{s+1/T_1} \\ Y_m &= \frac{K_2}{(s+1/T_2)^{k-1}} \end{aligned}$$

Ces derniers sont identifiés en fonction entre autres de la tâche à accomplir, de la fréquence de "crossover" $\omega_c$, du type de compensation et de la charge de travail du pilote. De plus amples renseignements sont fournis dans [Perhinschi et Prasad 1995].

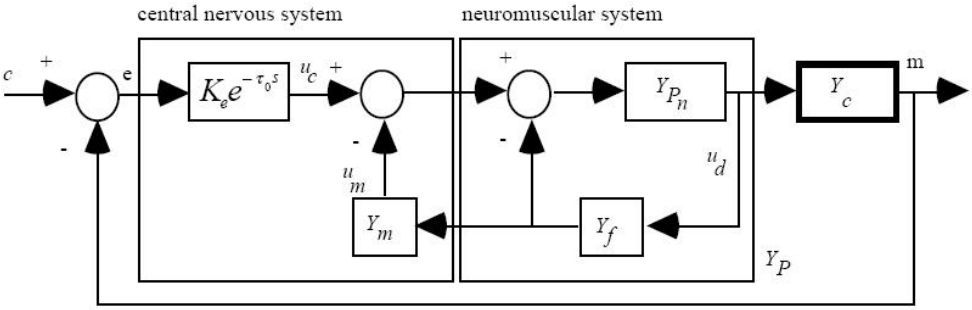



FIG. 4.12. Modèle structurel de pilote humain [Perhinschi et Prasad 1995]

Certains modèles de pilote comportent même un élément **non-linéaire** comme par exemple un **relais** pour rendre compte des commandes discontinues d'un pilote qui ne place le manche que dans deux positions distinctes dépendant du signe de l'indicateur observé et dont la stratégie de pilotage s'appelle en outre "méthode Klonk" où "Klonk" provient du son caractéristique du manche heurtant sa butée [Rundqwist *et al.* 1997].

Les paramètres intervenant dans les modèles de pilote ($K_p$,$T$, etc.) sont identifiés grâce aux théories du "crossover model" ou de l'"optimal control model" (OCM) comme l'explique [McRuer *et al.* 1989] et certains de leurs principes sont exposés ci-après.

### 4.3.4 Méthode d'analyse

#### 4.3.4.1 Systèmes linéaires

Au cours de ce paragraphe, la méthodologie d'analyse des PIO de catégorie I linéaires sera abordée. Elle ne sera pas appliquée directement dans cette thèse, mais son exposé reste un préambule très instructif.

Il existe plusieurs théories de contrôle du pilote sur le véhicule, à savoir les contrôles compensatoire et précognitif principalement.

Dans les hypothèses du **contrôle compensatoire**, le pilote tente de minimiser l'erreur qu'il voit en ajustant les commandes. Il justifie par là le modèle du "crossover". Ce dernier consiste à étudier le système pilote-véhicule de fonction de transfert $Y_pY_c$, produit de la fonction de transfert du pilote $Y_p$ et de celle du véhicule $Y_c$. Comme le pilote compense de façon à minimiser

l'erreur qu'il perçoit, au voisinage de la fréquence de "crossover" pour laquelle le gain du système pilote-véhicule est de 1 (0 dB), les recherches montrent que le système pilote-véhicule a une fonction de transfert proche de $\frac{K}{j\omega}e^{-\tau j\omega}$ qui correspond à un intégrateur plus un retard [McRuer 1974].

En **contrôle précognitif**, le pilote gouverne le véhicule grâce à un comportement qui est le fruit d'un apprentissage et de l'expérience. En effet, une fois que le pilote est devenu complètement familier avec les caractéristiques de la réponse de l'aéronef et avec le champ de perception, il se comporte de façon adroite et précise, d'où résulte la réponse exacte et désirée de l'aéronef. Par exemple dans le cas d'entrées sinusoïdales appliquées au système, le pilote agit comme un gain pur qui réussit à suivre la fréquence de la sinusoïde, sans retard dans le temps entre l'observation et la réaction humaine. En pratique, quand le PIO est parfaitement développé, l'hypothèse supplémentaire d'un comportement synchrone du pilote se vérifie tout à fait. De plus, la simplification opérée en réduisant le pilote à un gain pur est bien utile : seule l'analyse de la dynamique (linéaire) de l'aéronef suffit pour tirer des conclusions.

Dans l'analyse du système, sa phase est observée et si celle-ci devient grande c'est-à-dire que le retard est trop important dans la réponse du système, alors un risque de PIO est décelé (positivement : le pilote ne réussit pas à asservir l'aéronef correctement).

#### 4.3.4.2 Systèmes non-linéaires

Dans cette partie, les cas examinés sont les systèmes en boucle fermée sans excitation extérieure. Alors que pour un système linéaire, l'ensemble des configurations à l'équilibre contient soit des points d'équilibre, soit des centres, pour des systèmes non-linéaires, cet ensemble contient aussi entre autres des cycles limites, éventuellement. Ce sont ces derniers que les investigations tenteront de diagnostiquer et de caractériser à l'aide de la méthode du premier harmonique dans ces travaux sur le PIO. Il s'agit de déterminer leur existence éventuelle ainsi que leurs propriétés i.e. leur stabilité et une estimation de la valeur de leur période et de leur amplitude.

La théorie stipule que des cycles limites peuvent exister s'il y a des pôles de la fonction de transfert (de la boucle fermée) qui sont imaginaires purs i.e. sans partie réelle. De plus, si $H_{BO}$ est la fonction de transfert en boucle ouverte, la fonction de transfert du système en boucle fermée est $H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1+H_{BO}}$.

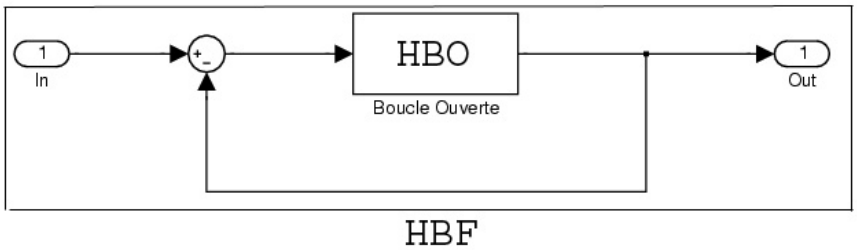



Fig. 4.13. Fonction de transfert de la boucle fermée en fonction de celle de la boucle ouverte

En appelant d'une part, $L(j\omega)$ la partie linéaire composée généralement de l'aéronef, du système de contrôle, du pilote et d'autre part $N(A,\omega)$ la partie non-linéaire, la condition nécessaire d'existence d'oscillations s'écrit alors [Biannic 2000] :

$$\det\left(1 + L(j\omega)N\left(A,\omega\right)\right) = 0$$

Cette équation s'appelle l'"**équation de balance harmonique**" ou l'"**équation d'auto-oscillations**". Elle nécessite la résolution des variables $(A, \omega)$ et de toute autre inconnue du modèle linéaire.

Pour un système mono-dimensionnel (à un seul état), l'équation se réécrit

$$L\left(j\omega\right) = -\frac{1}{N\left(A,\omega\right)}$$

La mise en œuvre pratique et graphique de résolution de l'équation d'auto-oscillations consiste à **tracer le graphe de $L(j\omega)$ et $-\frac{1}{N(A,\omega)}$ dans le diagramme de Nichols** qui représente le gain avec une échelle logarithmique (en décibels) en fonction de la phase (en degrés) ou **dans le diagramme de Nyquist** i.e. le graphe de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle. L'**existence de points d'intersection** rend compte de l'**existence de cycles limites**. Les **valeurs de $\omega$ et de $A$** pour lesquels les courbes se croisent livrent les informations respectives correspondant à la **pulsation** et à l'**amplitude** des cycles limites. Quant à la **stabilité**, elle est donnée par un théorème dont voici l'énoncé [Viault et Boucher 1983] dans le cas où le gain complexe $N$ ne dépend que de l'amplitude $A$.

**Théorème 1 (Critère de Loeb)** L'oscillation est stable si l'intersection de $L(j\omega)$ et de $-1/N(A)$ est telle que, en parcourant le lieu de Nyquist $L(j\omega)$ dans le sens des fréquences croissantes, on laisse à gauche la direction des A croissants sur le lieu critique. Si l'analyse de stabilité est faite dans le plan de Nichols, on remplacera "gauche" par "droite" dans l'énoncé. □

La généralisation de ce théorème s'exprime comme ci-après. Soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} L(j\omega) & = & U(\omega) + iV(\omega) \\ -\frac{1}{N(A,\omega)} & = & X\left(A,\omega\right) + iY\left(A,\omega\right) \end{array}\right.$$

Un développement en premier ordre (seuls les termes du développement de Taylor en $A$ et $\omega$ jusqu'à l'ordre 1 sont pris en compte) de l'équation $L\left(j\omega\right) = -\frac{1}{N(A,\omega)}$ permet de montrer que l'oscillation est stable si [Fossard et Ortiz 2002]

$$\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\frac{\partial Y}{\partial A} - \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)\frac{\partial X}{\partial A}\right]_{A_c,\omega_c} > 0$$

Cette inégalité peut s'interpréter géométriquement en tenant compte des vecteurs gradients au :

- lieu de transfert $\overrightarrow{\tau_l} = \left[\frac{\partial U}{\partial \omega}, \frac{\partial V}{\partial \omega}\right]^t$
- lieu critique $\overrightarrow{\tau_{N_A}} = \left[\frac{\partial X}{\partial A}, \frac{\partial Y}{\partial A}\right]^t_{A_c}$ gradient par rapport à $A$ en $(A_c, \omega_c)$
- lieu critique $\overrightarrow{\tau_{N_\omega}} = \left[\frac{\partial X}{\partial \omega}, \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right]^t_{\omega_c}$ gradient par rapport à $\omega$ en $(A_c, \omega_c)$

**Théorème 2 (Critère de Loeb)** *L'oscillation est stable si* $(\overrightarrow{\tau_l} - \overrightarrow{\tau_{N_\omega}}) \wedge \overrightarrow{\tau_{N_A}} > 0$. □

**Remarque 1** *La relation précédente revient à dire que l'oscillation est stable si la rotation qui fait passer du vecteur* $(\overrightarrow{\tau_l} - \overrightarrow{\tau_{N_\omega}})$ *au vecteur* $\overrightarrow{\tau_{N_A}}$ *s'effectue dans le sens trigonométrique.*

L'analyse par la méthode du premier harmonique, qui consiste à remplacer une non-linéarité par un gain linéaire dépendant du signal [Viault et Boucher 1983], est un outil puissant et pratique, mais il faut bien être conscient de ses limitations théoriques : il est possible de construire

des cas pathologiques qui sortent du cadre proposé et où des orbites périodiques non prévues peuvent apparaître. Cependant, dans les cas concrets abordés, considérer qu'elle est valide et exacte est une hypothèse tout à fait réaliste. En effet, la théorie estime que la méthode s'applique lorsque ce qui concerne la fréquence (le comportement dynamique) peut être séparé de ce qui est relatif à l'amplitude (comportement statique) et quand la partie linéaire est proche d'un filtre passe-bas afin que les harmoniques d'ordre supérieur à 1 puissent être négligés.

**Transition :** Après avoir présenté le phénomène des oscillations induites par le pilote et la théorie générale associée, c'est l'analyse d'un élément déclenchant particulier qui va jouer un rôle important : le limiteur en vitesse. L'objectif est également d'exposer des éléments concrets afin d'illustrer la méthodologie et de faire le point sur l'état de l'art en matière de PIO des avions. Enfin, quelques cas de PIO qui ont été diagnostiqués sur les hélicoptères seront cités. Par contre, il faut insister sur le fait que les PIO de catégories I et II concernant les avions ont été étudiés en profondeur, mais que, pour l'instant, très peu de matière existe concernant les hélicoptères.

### 4.3.5 Non-linéarité particulière : la limitation en vitesse

Le limiteur en vitesse est une non-linéarité qui est l'élément déclenchant d'un grand nombre de PIO pour les avions à commandes de vol électriques ("fly-by-wire") comme les crashs du YF-22 et du JAS-39 en témoignent. Le limiteur en vitesse, comme son nom l'indique, limite le taux de variation d'un signal. Il restreint la dérivée première du signal qui passe à travers lui : quand la dérivée du signal d'entrée est au-dessus de la borne supérieure du limiteur en vitesse (ou en dessous de la borne inférieure), la valeur de la dérivée du signal de sortie est ramenée à celle de la borne supérieure (ou inférieure).

Au premier abord, des réflexions intuitives laisseraient à penser, par exemple, que, comme les variations en vitesse de l'angle de braquage des ailerons ou de l'allongement des vérins sont physiquement restreintes, elles sont à l'origine de tels ennuis. Seulement le constructeur prend ses précautions en faisant en sorte que la marge de sécurité soit suffisante. Les défauts mécaniques au niveau des actionneurs, même s'ils peuvent être à l'origine de PIO, n'en sont pas la principale cause. C'est l'utilisation de calculateurs embarqués dans les systèmes de contrôle qui impliquent généralement une limitation du taux de variation des servocommandes ou des boucles de rétro-action.

Simulink© propose à un utilisateur potentiel un limiteur en vitesse dont le symbole est :

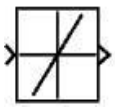


Fig. 4.14. Symbole d'un limiteur en vitesse

Il peut être remplacé par le schéma équivalent (4.15) [Klyde et Mitchell 2003], parfois considéré comme une représentation plus réaliste du comportement d'une servocommande, où $V_L$ est la valeur de la limitation en vitesse, $e_L$ l'écart à partir duquel la non-linéarité est active et $\omega_a$ la valeur de la bande passante.

Le fonctionnement du schéma équivalent (4.15) est le suivant. Tant que le signal d'erreur $e$ reste en dessous du point de saturation $e_L$, le système équivalent se comporte comme un système

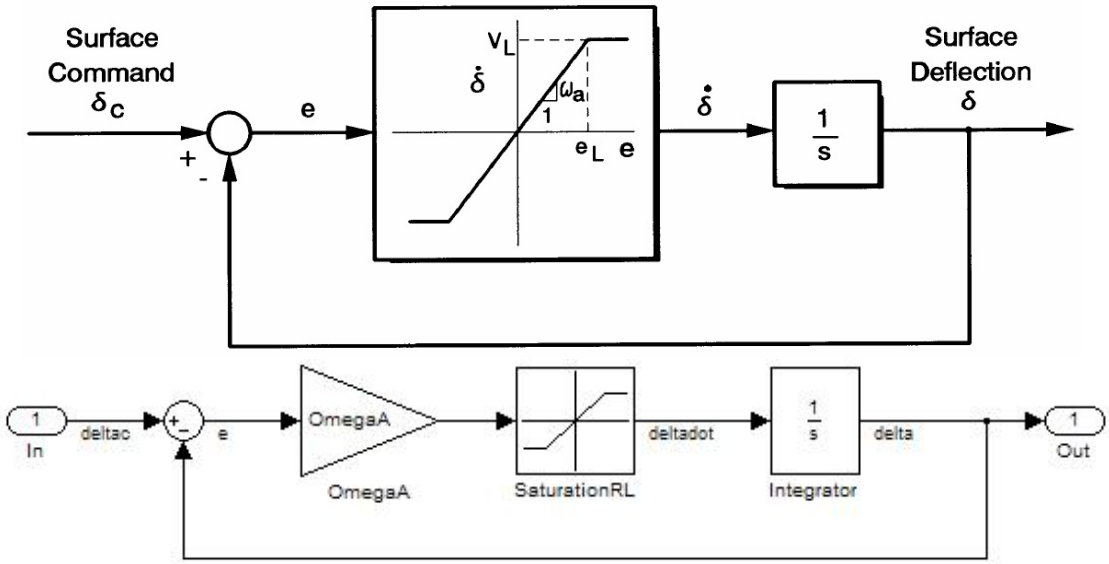



FIG. 4.15. Schéma équivalent d'un limiteur en vitesse

du premier ordre dont la constante de temps est $1/\omega_a$. Quand l'erreur du signal $e$ dépasse le point de saturation $e_L = V_L/\omega_a$, le taux monte et se bloque à la valeur de saturation $V_L$ jusqu'à ce que l'amplitude ou la fréquence diminue.

Par ailleurs, il est à remarquer qu'un limiteur pleinement saturé transforme un signal sinusoïdal en signal triangulaire comme l'illustre la figure (4.16) où $\delta_c$ est la consigne et $\delta$ l'état (limité en vitesse de variation).

### 4.3.6 Approximation du premier harmonique du limiteur en vitesse

Pour un système linéaire, le signal de sortie correspondant à une consigne sinusoïdale est une autre sinusoïde de même pulsation dont le gain et la phase par rapport au signal d'entrée ne dépendent que de la pulsation de la consigne. Pour un système non-linéaire (quasi-linéaire dans ce cas), le gain et la phase dépendent de la pulsation comme précédemment, mais l'amplitude du signal d'entrée doit, dans ce cas, également être pris en compte. Le signal de sortie associé à une sinusoïde pure en entrée n'est plus obligatoirement sinuoïdal. La méthode du premier harmonique revient à considérer que, si le signal d'entrée $E$ est une sinusoïde et si le signal de sortie $S$ est remplacé par son premier harmonique, alors le rapport $\frac{S}{E}$ est une fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$ : elle se note $N(A, \omega)$. Cette linéarisation se dénomme "approximation du premier harmonique" et, en anglais, elle s'appelle "describing function" (cf. annexe C).

La formule de la "describing function" du schéma équivalent (4.15) s'établit grâce aux développements mathématiques suivants. Tout d'abord, quand la saturation est active, le gain de la saturation a pour expression :

$$N_{sat}(A, \omega) = N_{sat}(A) = \frac{2 \times pente}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{A_{saturation}}{A}\right) + \left(\frac{A_{saturation}}{A}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{A_{saturation}}{A}\right)^2} \right)$$

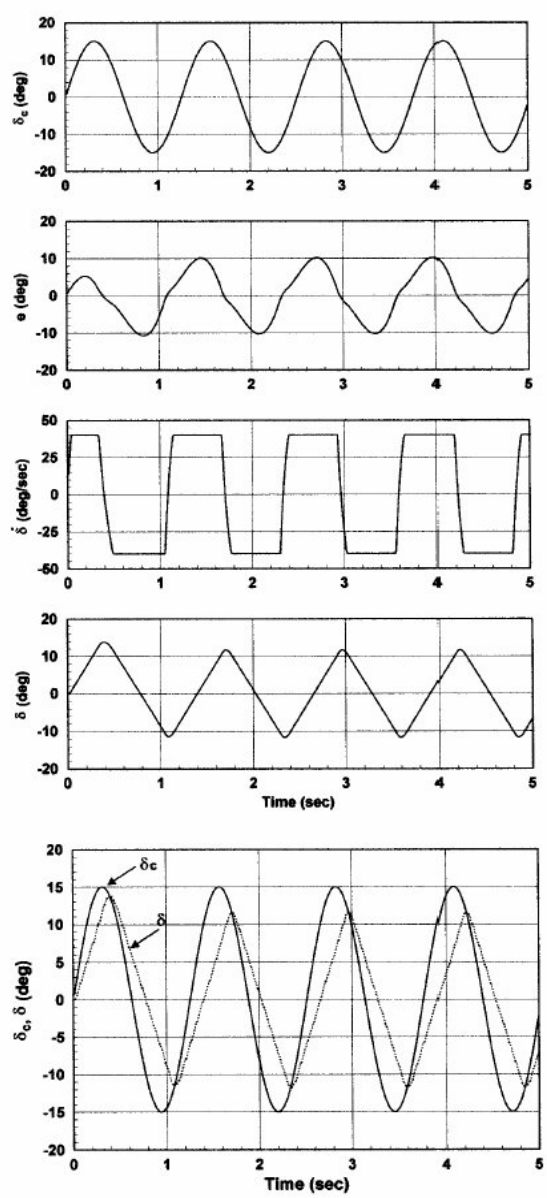



FIG. 4.16. Limiteur en vitesse saturé : signal sinusoïdal transformé en signal triangulaire

dont le remplacement par les variables du schéma (4.15) donne :

$$N_{sat}\left(E,\omega\right)=\frac{2\omega_a}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{e_L}{E}\right)+\frac{e_L}{E}\sqrt{1-\frac{e_L^2}{E^2}}\right)$$

Le développement limité en $\frac{e_L}{E}$ s'écrit :

$$N_{sat}\left(A,\omega\right)=\frac{4\omega_a}{\pi}\frac{e_L}{E}$$

et en substituant $V_L=\omega_a e_L$, l'expression obtenue est :

$$N_{sat}\left(A,\omega\right)=\frac{4}{\pi}\frac{V_L}{E}$$

La boucle ouverte a pour gain $N_{sat}\left(\omega_a E\right)/s$ et le passage à la boucle fermée permet de déduire alors que :

$$N_{ratelimiter}=\frac{N_{sat}/s}{1+N_{sat}/s}$$

Le module et la phase du gain complexe ont finalement pour formules respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left|N_{ratelimiter}\right| & = & \frac{4}{\pi}\frac{V_L}{A\omega}\\ \arg\left(N_{ratelimiter}\right) & = & -\arctan\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{A\omega}{V_L}\right)^2-1}\right)\end{array}\right.$$

Dans les considérations sur le limiteur en vitesse, il faut distinguer trois phases de fonctionnement :

- Ou bien les fréquences du signal d'entrée ne dépassent pas la valeur du seuil, auquel cas le signal reste inchangé et $N\left(A,\omega\right)=1$.
- Ou bien le signal a une pente qui parfois dépasse le seuil et parfois repasse en dessous, auquel cas $N\left(A,\omega\right)$ a une expression compliquée approchée par un polynôme interpolateur.
- Enfin, le signal peut être complètement saturé et $N\left(A,\omega\right)=\frac{4}{\pi}\frac{V_L}{A\omega}\exp\left(-j\arccos\left(\frac{\pi}{2}\frac{V_L}{A\omega}\right)\right)$.

Dans l'étude de la non-linéarité du limiteur en vitesse, il est important de remarquer que la "describing function" de celui-ci ne dépend que du rapport $X=A\omega/V_L$ où $A$ est l'amplitude de l'orbite périodique, $\omega$ sa pulsation et $V_L$ la borne du limiteur en vitesse. Sur les diagrammes de Nyquist ou de Nichols, le lieu correspondant à $-1/N$ est toujours le même quelle que soit la valeur de la limitation $V_L$. C'est pourquoi, les constatations graphiques de présence d'une intersection ne sont pas suffisantes. Aussi est-il nécessaire de calculer l'amplitude des orbites périodiques associées afin de vérifier si elle a une valeur réaliste pour le système physique considéré. C'est une des motivations qui a poussé le chercheur du DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, homologue de l'ONERA en Allemagne) H. Duda à développer le critère OLOP qui signifie en anglais Open Loop Onset Point, il indique les paramètres critiques du signal pour lesquels le limiteur en vitesse devient actif et évalue la dangerosité [Duda 1995, Duda 1997, Duus et Duda 1999].

Voici les tracés respectifs des graphes types que l'étude utilisera plus tard : le diagramme de Bode du premier harmonique du limiteur en vitesse $N(X)$, qui indique l'amplitude ou la phase en fonction de la pulsation $\omega$, ainsi que les diagrammes de Nyquist et de Nichols de $-1/N(X)$.

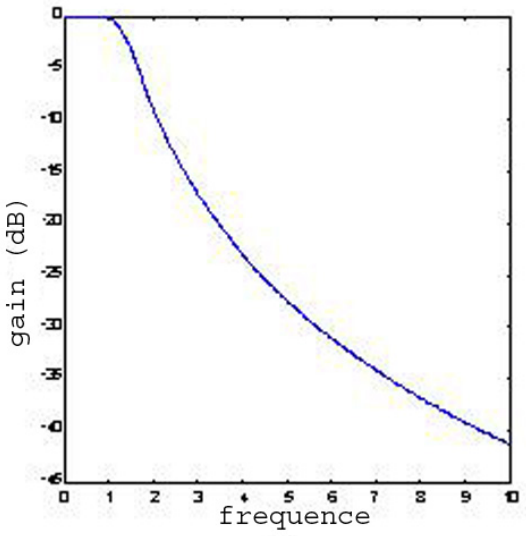



FIG. 4.17. Gain du premier harmonique du limiteur en vitesse $N(X)$

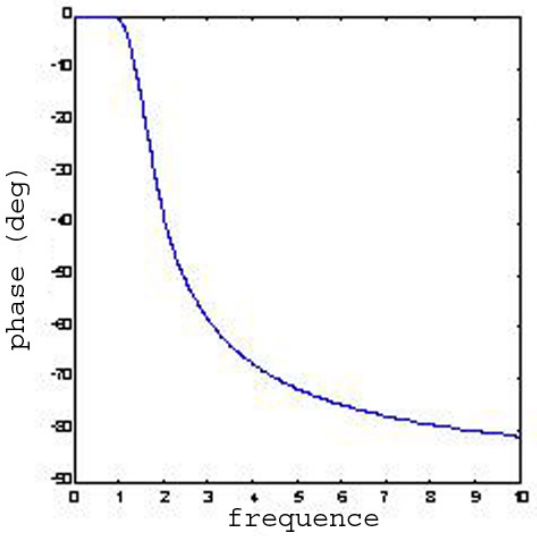



FIG. 4.18. Phase du premier harmonique du limiteur en vitesse $N(X)$

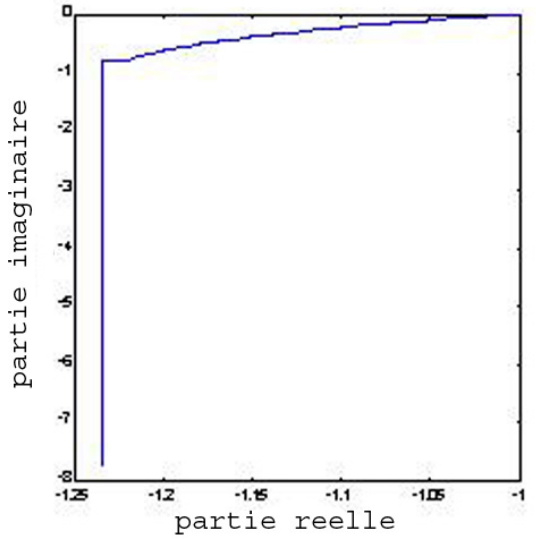



FIG. 4.19. Diagramme de Nyquist de $-1/N(X)$

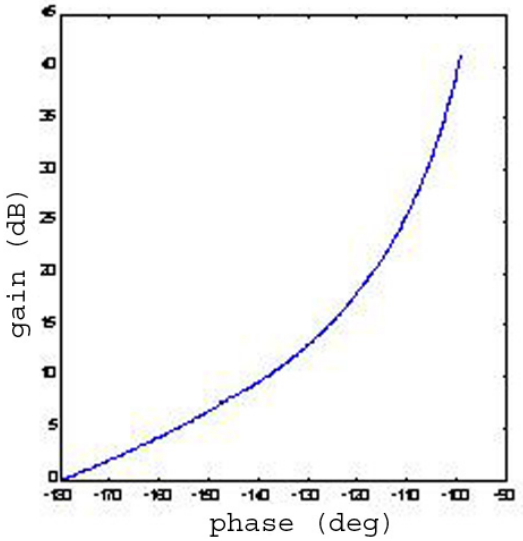



FIG. 4.20. Diagramme de Nichols de $-1/N(X)$

**Transition :** La théorie relative au couplage aéronef-pilote a été présentée et un exposé plus approfondi des PIO de catégorie II, en particulier de l'ensemble des éléments relatifs au limiteur en vitesse qui est la source principale de tels PIO, a été développé. Pour illustrer l'état de l'art, un cas complet de PIO de catégorie II qui s'est produit pour un avion est traité ci-après.

### 4.3.7 Exemple : le PIO de l'arrondi à l'atterrissage du X-15

Lors de la phase d'arrondi à l'atterrissage, le X-15 a connu un cas de PIO en 1959. Ce vol, désigné 1-1-5, était un vol plané au cours duquel le contrôleur latéral était utilisé et pour lequel le système de stabilisation en tangage était désactivé [Klyde et Mitchell 2003].

Le X-15 est un programme de l'armée américaine et de NACA qui s'est déroulé du début des années 50 jusqu'à la fin des années 60 et dont l'objectif était de sonder différents domaines dont l'aérodynamique, la stabilité, le contrôle, les facteurs humains à des vitesses (Mach 7) et des altitudes extrêmement élevées (250 000 pieds). Au cours de ce programme, la construction d'appareils concrets a été sous-traitée à des entreprises aéronautiques et des campagnes d'essais en vol ont été réalisées. C'est un monoplace dont les performances de pointe sont atteintes pendant peu de temps grâce à des propulseurs de fusée. Après cette phase, un vol plané, moteur coupé, mène à l'atterrissage. Le X-15 a des ailes épaisses au bout desquelles se trouvent des volets. Les servocommandes des surfaces de contrôle aérodynamiques sont des systèmes hydrauliques irréversible.

FIG. 4.21. Avion de recherche : le X-15

L'arrondi à l'atterrissage constitue une des étapes les plus délicates pour poser un aéronef. Il doit au cours de celle-ci garder une assiette longitudinale stable (voire quasi-constante).

Le dépouillement des données en vol (figure 4.22) montrent des oscillations sur les composantes longitudinales. Le phénomène de limitation en vitesse est visible sur la courbe de l'angle de braquage du stabilisateur longitudinal $\delta_h$ : le signal triangulaire observé dans l'évolution de $\delta_h$ est la preuve que la servocommande opère dans une zone fortement saturée.

Il s'agit tout d'abord de fournir une description mathématique du cas de vol présent i.e. il faut disposer d'un modèle comportemental de l'avion et de la servocommande. Comme le PIO apparut dans une configuration où le système de stabilisation en tangage n'était pas activé, la fonction de transfert $\frac{\theta}{\delta_h}$ à utiliser est celle de l'aéronef sans pilotage automatique. Un modèle identifié du X-15 dans le plan longitudinal est disponible et voici leurs valeurs numériques [Alcala *et al.* 2004] :

$$\frac{\theta}{\delta_h} = \frac{3.476(.0292)(.883)}{[.19, .1][.366, 2.3]}$$

où $(a)$ est équivalent à $(s + a)$ et $[\zeta, \omega_n]$ représente $\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)$.

La réponse de la fonction de transfert $\frac{\theta}{\delta_h}$ à un échelon unitaire est donnée par la figure (4.23) en boucle ouverte et (4.24) en boucle fermée.

Les caractéristiques de la surface de contrôle en tangage sont celles d'un système du premier ordre de paramètre $\omega_a = 25 rad/s$ dont la vitesse de variation sature quand elle atteint

$V_L = 15deg/s$. Dans un premier temps, le limiteur en vitesse est supposé parfait i.e. sans bande passante $\omega_a$.

Quant au pilote, il est modélisé par un gain pur. Au final, le modèle identifié du X-15 a pour représentation la figure (4.25) et (4.26) sous Simulink© .

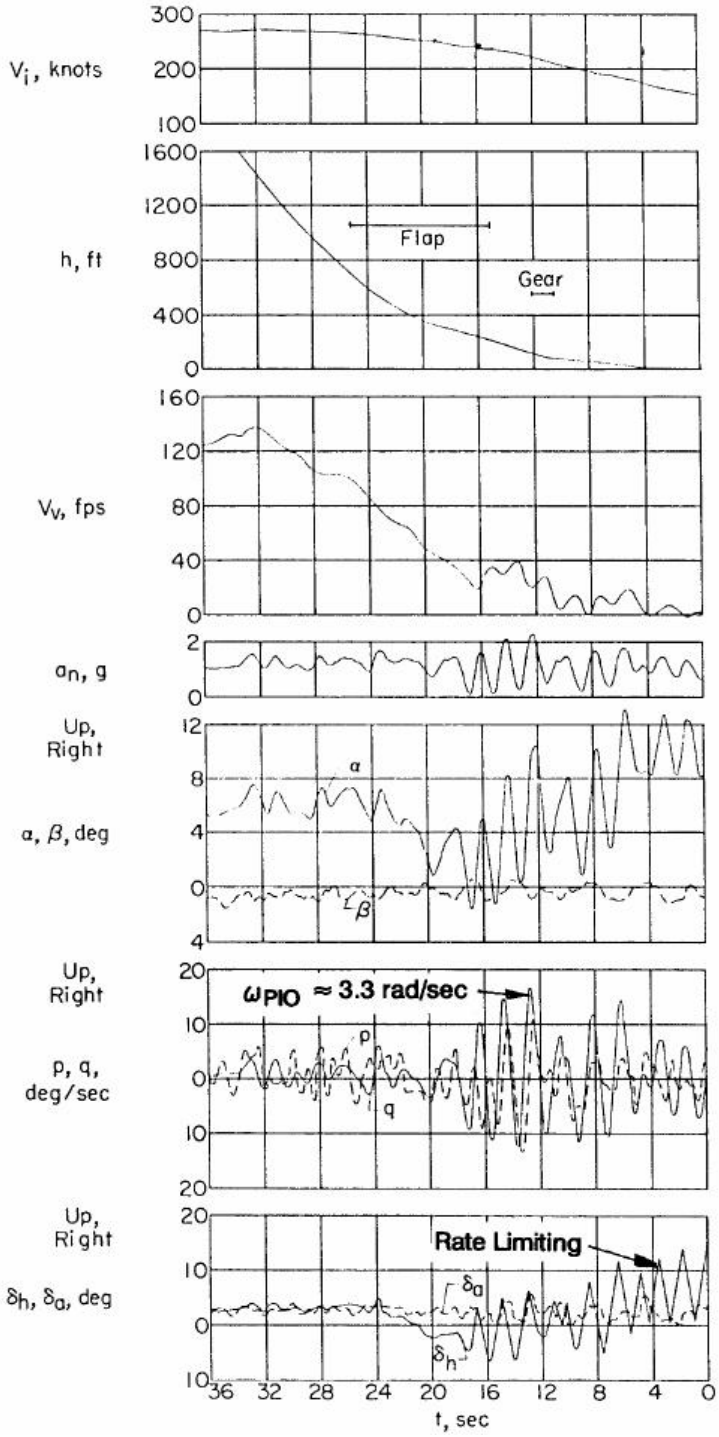



FIG. 4.22. Dépouillement du vol de l'arrondi à l'atterrissage du X-15 [Klyde et Mitchell 2003]

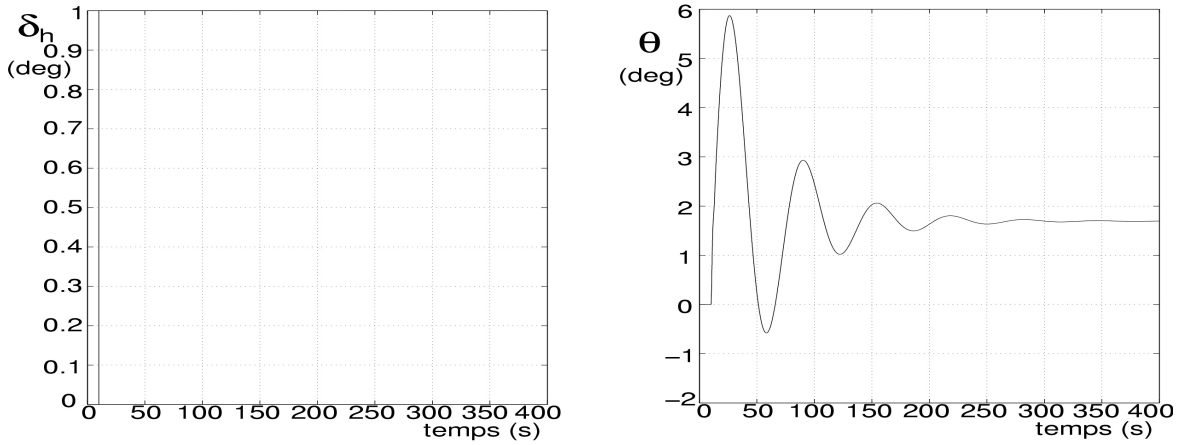



FIG. 4.23. Réponse à un échelon unitaire en boucle ouverte

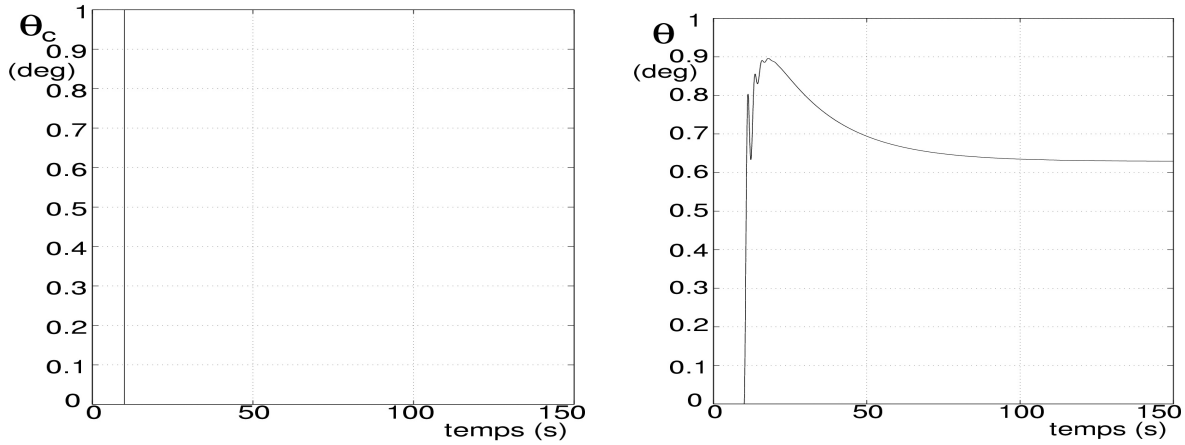



FIG. 4.24. Réponse à un échelon unitaire en boucle fermée

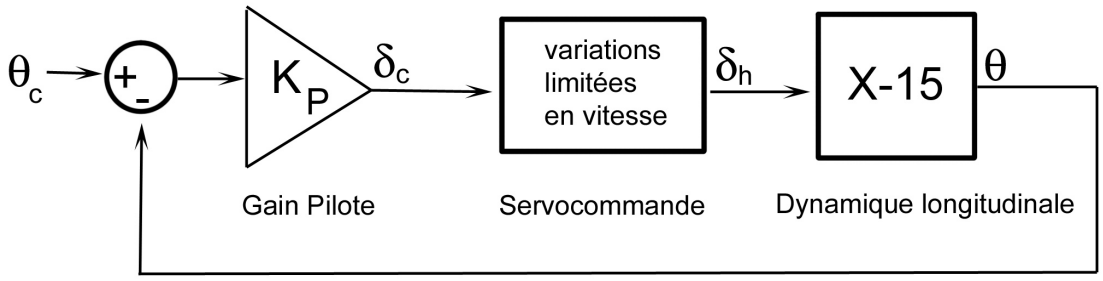



FIG. 4.25. Schéma du X-15 identifié en tangage

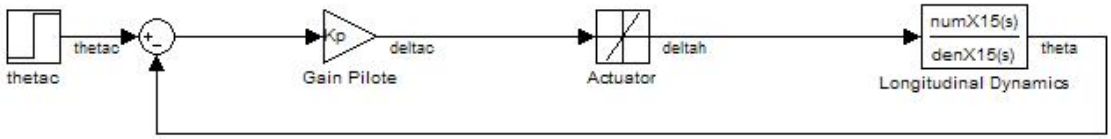



FIG. 4.26. Schéma Simulink du X-15 identifié en tangage

A titre indicatif, diverses observations peuvent être soulignées à savoir que d'une part, l'avion vérifie des niveaux de qualités de vol élevés étant donné qu'il est de niveau 1 pour la majorité des tests et que d'autre part, les critères de caractérisation des PIO de catégorie I n'ont révélé aucune propension de l'appareil à de tels phénomènes.

L'analyse est ensuite réalisée en plusieurs étapes. Dans un premier temps, la configuration est étudiée pour un gain pilote donné et les questions relatives à l'existence de cycles limites et à leur caractérisation sont soulevées et trouvent une réponse. Des simulations temporelles illustrent ce phénomène. Dans un deuxième temps, c'est le problème global qui est traité c'est-à-dire que les différentes plages de gain pilote sont différentiées en fonction du comportement que le système fournit. Enfin, une petite digression est faite en comparant certains résultats avec la configuration dans laquelle le limiteur en vitesse est remplacé par un dispositif quasi-équivalent.

Un pilote de comportement modéré est choisi, il est tel que le gain pilote $K_p = 5$. L'analyse effective fait intervenir les tracés du diagramme de Nyquist et du diagramme de Nichols de la partie linéaire constituée de l'aéronef et du pilote ($G$ en vert) d'une part, et, d'autre part, de l'opposé de l'inverse du premier harmonique du limiteur en vitesse ($-1/N$ en rouge).

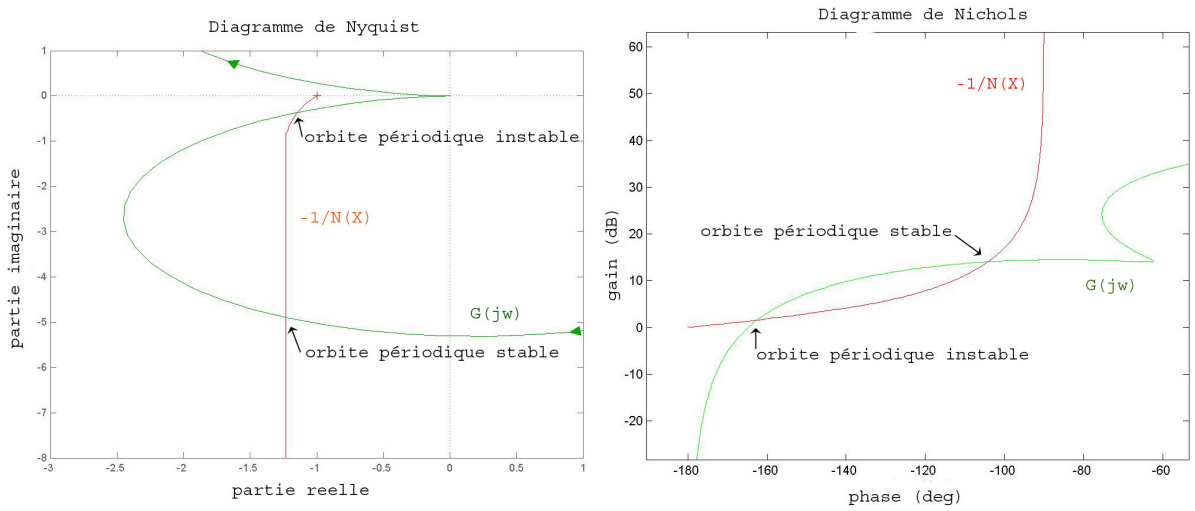



FIG. 4.27. Diagramme de Nyquist et de Nichols pour un gain pilote $K_p = 5$

Sur les figures précédentes, les courbes s'intersectent en deux points : il y a donc **deux cycles limites**. Le diagramme de Nyquist montre le sens de parcours de la partie linéaire $G(j\omega)$ quand la pulsation $\omega$ croît et la courbe représentative de $-1/N(X)$ qui part de $(-1, 0)$ et descend quand le rapport $X = \frac{A\omega}{V_L}$ croît. Le critère de Loeb permet de conclure que **l'intersection du**

**bas** correspond à un **cycle limite stable** et celle **du haut** à un cycle limite **instable**.

Les valeurs du couple $(\omega, X)$ correspondant aux points d'intersection sont $(4.26, 1.53)$ pour le point d'intersection supérieur (instable) et $(2.19, 6.43)$ pour le point d'intersection inférieur (stable). Elles s'obtiennent en déterminant la pulsation $\omega$ et le paramètre $X$ pour lesquels respectivement $G(j\omega)$ et $-1/N(X)$ se retrouvent au niveau du point d'intersection.

Comme, par ailleurs, en appelant $A$ l'amplitude des cycles limites et $V_L$ la vitesse limite imposée par le limiteur en vitesse, le rapport $X$ vérifie $X = \frac{A\omega}{V_L}$. Par déduction, la formule permet une estimation de l'amplitude des cycles limites qui a pour formule $A = \frac{V_L X}{\omega}$ et dont les valeurs sont respectivement $5.5deg$ et $44.0deg$. Il convient de noter que le cycle instable est à l'intérieur du cycle stable et, au passage, que les amplitudes qui viennent d'être calculées sont celles des cycles de l'état d'entrée de la servocommande.

Pour illustrer ces propos, les simulations temporelles associées sont effectuées : une dont la condition initiale est à l'intérieur du cycle limite instable et une autre dont la condition initiale est à l'extérieur de celui-ci.

La fonction de transfert est transformée en la représentation $\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & A \cdot X + B \cdot U \\ Y & = & C \cdot X + D \cdot U \end{array} \right.$ afin de pouvoir fixer les conditions initiales. Voici le nouveau schéma Simulink© sur lequel les différentes variables sont observées :

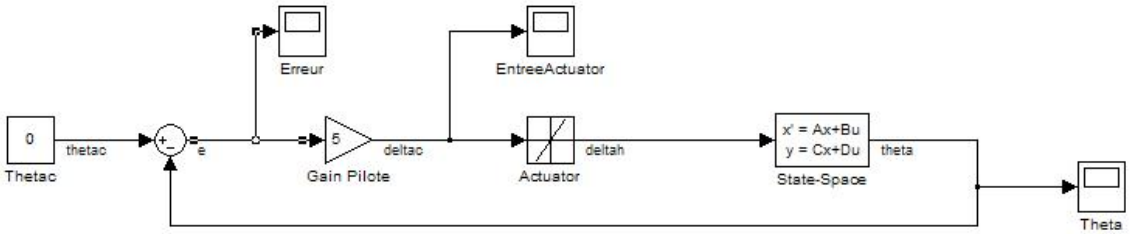



FIG. 4.28. Fichier Simulink utilisé pour les simulations temporelles

Pour initialiser la simulation à l'intérieur du cycle instable, il faut, au début, fixer $\theta$ de telle façon que la valeur initiale $\delta_c$ ait une amplitude inférieure à 5. Or, au temps $t = 0$, $\delta_c(0) = -K_p\theta(0)$. En appliquant cette identité à cette situation, la contrainte obtenue est

$$|\theta(0)| \leq |\delta_c(0)| / K_p \approx 5/5 \approx 1$$

Deux simulations temporelles sont accomplies : une avec $\theta(0) = 0.9deg$ et une autre avec $\theta(0) = 1.2deg$.

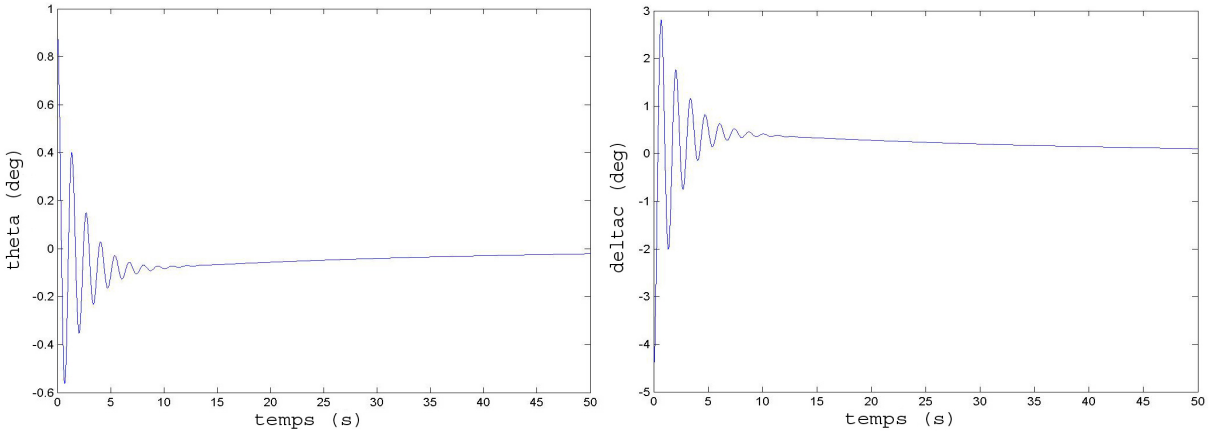



FIG. 4.29. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 0.9deg$ et $K_p = 5$

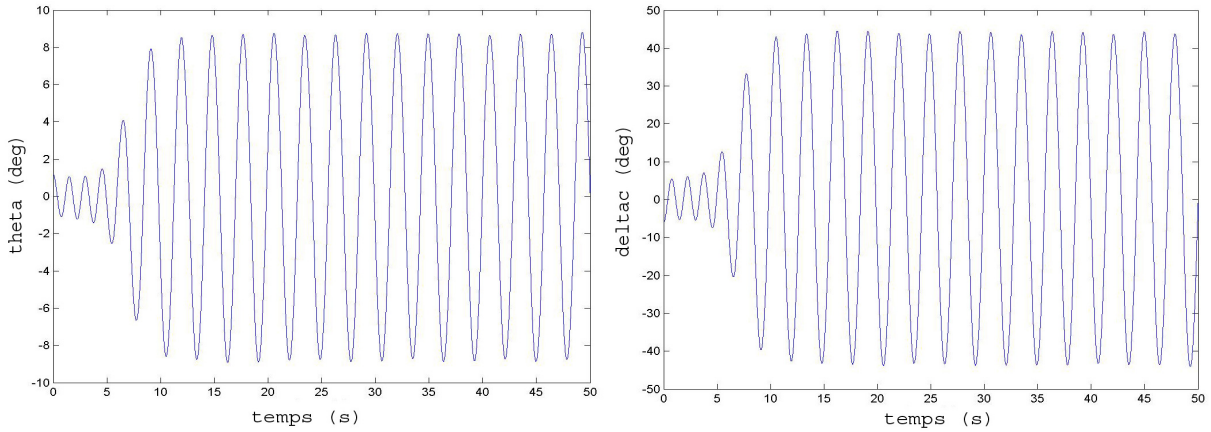



FIG. 4.30. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 1.2deg$ et $K_p = 5$

Les prévisions faites par l'intermédiaire de la méthode du premier harmonique sont vérifiées par ces simulations temporelles. Quand le système est initialisé à l'intérieur du cycle instable, il converge vers le point d'équilibre à l'origine. Quand sa valeur initiale est à l'extérieur du cycle instable, le système s'enroule sur le cycle stable. Par ailleurs, l'amplitude prédite, à savoir $44.0deg$ à l'entrée de la servocommande, se révèle aussi être exacte.

Le cas particulier dans lequel le gain pilote $K_p$ était fixé à 5 vient d'être étudié et les caractéristiques du système pilote-véhicule-servocommande ont été déterminées dans une telle configuration. Il s'agit dans la suite de l'étude de prévoir le comportement du système pour les différentes valeurs de gain pilote et de diagnostiquer quelles sont les valeurs de $K_p$ pour lesquelles la topologie des trajectoires possibles change.

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de résoudre l'équation d'auto-oscillations. En appelant $H$ la fonction de transfert décrivant le comportement de l'assiette longitudinale du X-15, $\theta/\delta_h$, cette équation s'écrit :

$$K_p H\left(j\omega\right) = -\frac{1}{N\left(\omega A/V_L\right)}$$

Trouver les solutions éventuelles en $(A, \omega)$ puis caractériser leur stabilité permet de conclure quant à l'aspect des trajectoires possibles. Après calcul, les courbes suivantes sont obtenues. Elles présentent le gain pilote en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$.

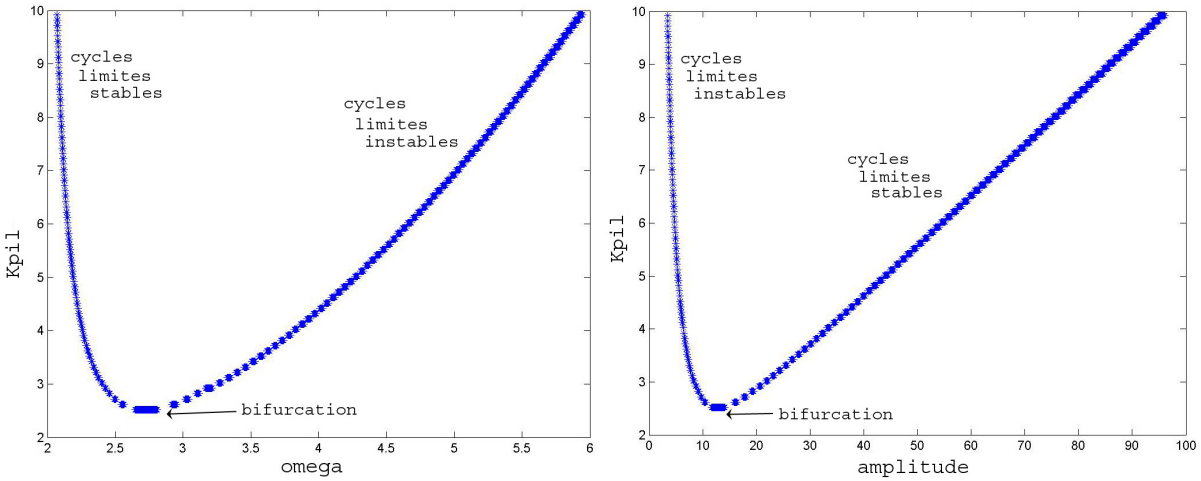



FIG. 4.31. Courbes du gain pilote $K_p$ en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$

Une constatation est que la valeur la plus petite du gain pilote $K_p$ pour laquelle se produisent des oscillations induites par le pilote est $K_p = 2.52$. Pour des valeurs plus grandes, il y a deux cycles limites. Le critère de Loeb permet d'affirmer que le cycle de pulsation la plus faible et d'amplitude la plus grande est un cycle limite stable alors que l'autre est instable.

Etant donné le sujet de cette thèse, un des objectifs consiste à fournir une **interprétation qualitative** des résultats du point de vue de la **théorie des bifurcations**. Dans la terminologie dédiée, le problème admet pour **paramètre de contrôle** le **gain pilote** $K_p$ et $K_p^* = 2.52$ correspond à une **bifurcation nœud-selle d'orbites périodiques**.

Il reste à confirmer cette affirmation par deux simulations temporelles initialisées à des valeurs bien plus grandes que l'amplitude de l'orbite périodique stable afin qu'elles convergent vers celle-ci si elle existe. Un gain pilote est sélectionné inférieur puis supérieur à $K_p^*$ et la simulation est initialisée avec $\theta(0) = 50/K_p^* \approx 10$.

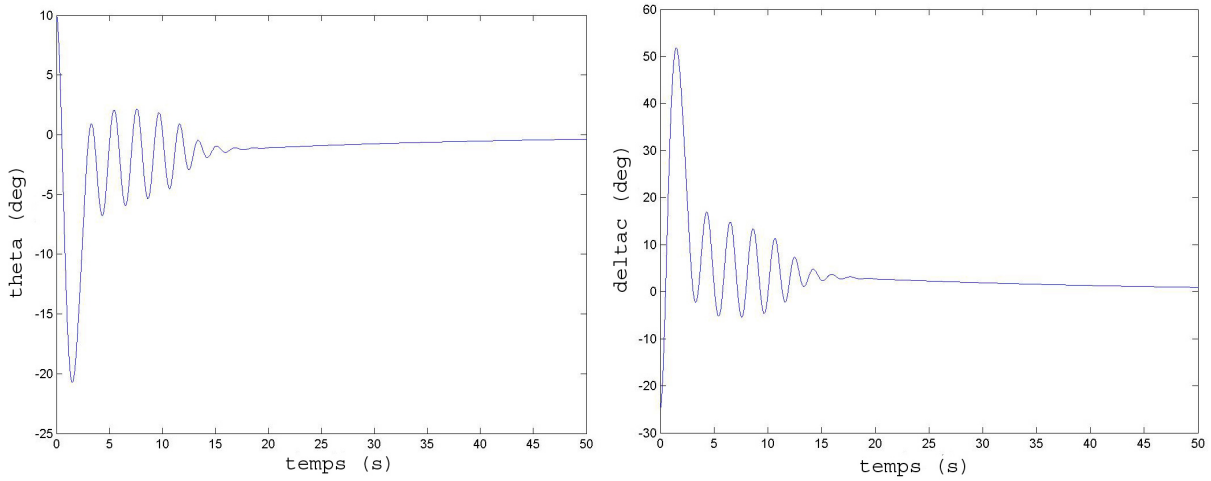



FIG. 4.32. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 10deg$ et $K_p = 2.5$

Le constat est que, au cours de la simulation précédente, le X-15 se stabilise bien sur le point d'équilibre à l'origine pour un gain pilote $K_p = 2.5 < K_p^*$. D'un autre côté, un cas dans lequel du PIO est prévu est simulé en (4.33).

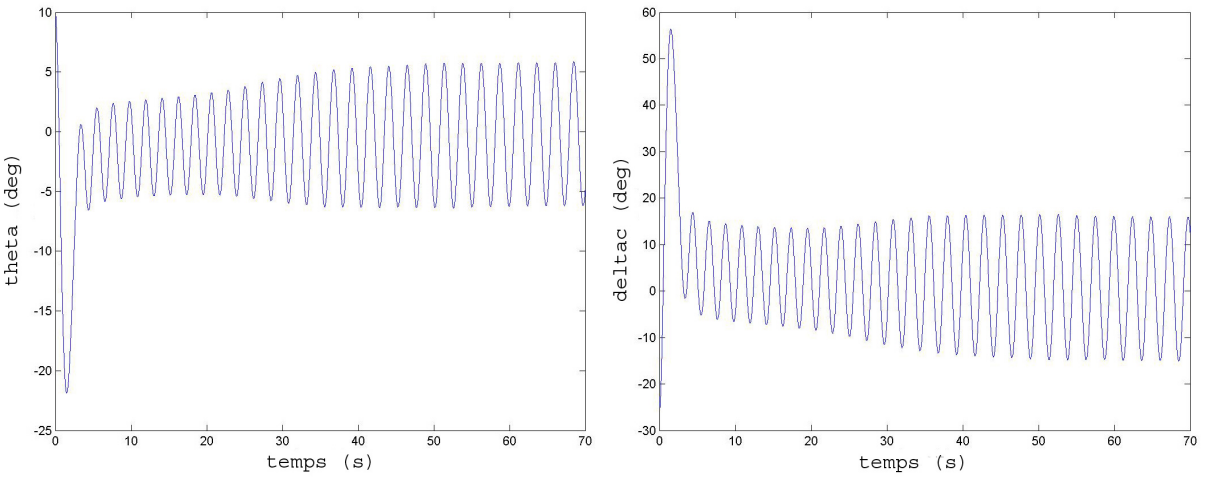



FIG. 4.33. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 10deg$ et $K_p = 2.8$

La figure ci-dessus montre que le X-15 converge effectivement vers une orbite périodique pour un gain pilote $K_p = 2.8 > K_p^*$. Il est à noter que le paramètre de contrôle a dû être choisi légèrement éloigné de la valeur de bifurcation $K_p^*$ afin que les simulations effectuées avec Simulink correspondent aux prévisions issues de la méthode du premier harmonique.

Tous les résultats théoriques ont été vérifiés et sont conformes à ceux de la littérature [Alcala *et al.* 2004, Amato *et al.* 1999, Amato *et al.* 2000, Wu et Perng 2004, AGARD 2000]. Un panorama des différentes configurations possibles de trajectoires et des propriétés qualitatives pour le vol lors de l'arrondi à l'atterrissage du X-15 a été dressé avec succès. Cependant, la servocommande était modélisée par un limiteur en vitesse idéal et il est intéressant d'évaluer ce que la prise en compte du schéma équivalent non-idéal apporte.

Pour cela, la boîte à outils du logiciel Matlab développée par le DLR (le centre allemand de recherche aérospatiale) et dénommée PARADISE pour "PArametric Robust Analysis and Design Interactive Software Environment" est utilisée [Sienel *et al.* 1996a]. Le schéma Simulink© équivalent est le suivant.

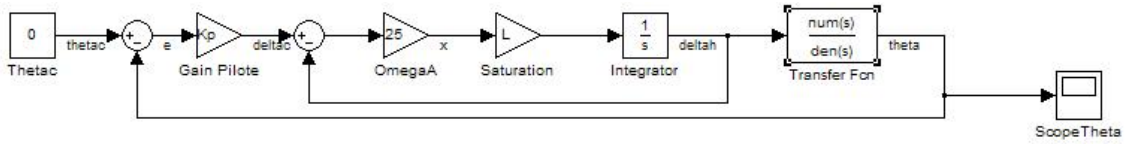



FIG. 4.34. Schéma équivalent du X-15 pour une analyse avec PARADISE

La région de stabilité de Hurwitz [Sienel *et al.* 1996b, Amato *et al.* 1999] calculée est donnée dans la figure (4.35) à titre indicatif. Dans le dispositif, l'élément non-linéaire a été remplacé par le gain linéaire $L$ qui prend la valeur 1 quand il n'est pas saturé.

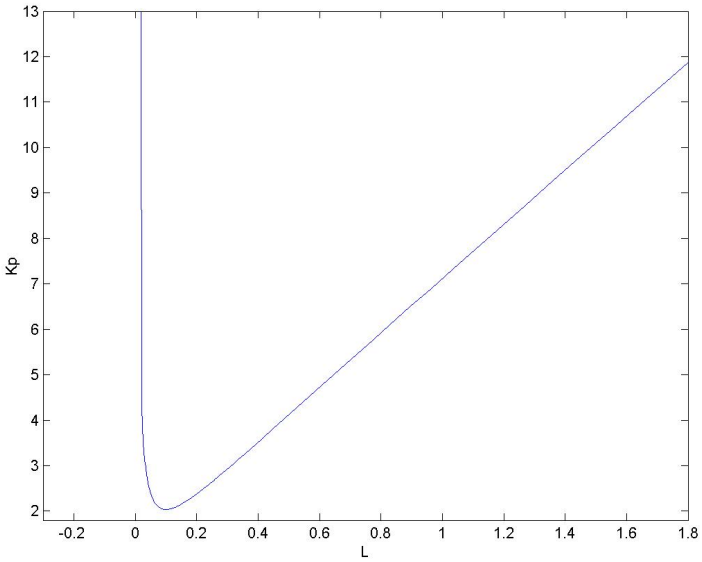



FIG. 4.35. Zone de stabilité de Hurwitz

Asymptotiquement, le comportement du système est quasiment le même que dans le cas précédent quand la saturation devient suffisamment active. Ceci indique donc que dans les travaux à suivre les deux représentations pourront être exploitées légitimement.

**Transition :** Un état de l'art du couplage aéronef-pilote et en particulier des recherches déjà effectuées concernant les avions a été donné. Aucune étude aussi approfondie n'a été menée sur les hélicoptères. Cependant, quelques cas de PIO ont déjà été répertoriés par la communauté des hélicoptéristes.

### 4.3.8 PIO recensés apparus sur des hélicoptères

Les standards en qualités de vol des hélicoptères ne sont pas encore bien définis pour les PIO. Ils se limitent pour l'instant aux recommandations des normes ADS-33 [ADS 2000] auxquelles entre autres [Ockier et Pausder 1994, McRuer 1997] font référence. Certains constructeurs ou chercheurs mènent des campagnes sur simulateurs de vol afin de prévoir leur apparition comme J. A. Schroeder [Schroeder *et al.* 1998, Schroeder *et al.* 1999] ou G. J. Jeram [Jeram et Prasad 2003, Jeram 2004].

Les couplages aéronef-pilote de catégorie I sont liés aux retards cumulés dans la chaîne de re-bouclage : retards capteurs, fréquence de calcul du PA, déphasage des actionneurs, temps de stabilisation du rotor $\left(\Omega = \frac{16}{\gamma\Omega}\right)$ dépendant des propriétés aéroélastiques ...

Ce type de PIO commence à être au cœur de projets comme en témoignent le lancement d'un groupe de travail européen GARTEUR AG16 en 2005 dont l'intitulé est "Rigid body and aeroelastic rotorcraft-pilot coupling - prediction tools and means of prevention" auquel participe l'ONERA et dans lesquels s'inscrivent notamment les travaux de l'université technologique de Delft [de Groot et Pavel 2006].

Une recherche bibliographique dans les comptes-rendus de l'Advisory Group for Aerospace Research & Development [McRuer 1994, Hamel 1996] ou dans les Advisory Circulars de la Federal Aviation Administration [Cer 2004, pages MG 17-8 & MG 17-59] a permis de recueillir plusieurs occurrences ou causes de **PIO de catégorie(s) II (et III)**, qui sont ceux qui intéressent ce travail d'analyse de la dynamique non-linéaire de l'hélicoptère.

Une première origine est à trouver dans les systèmes de contrôle de vol avancés. En effet, la conception des modèles de commandes dites de "feed-forward" fait intervenir des saturations en vitesse qui, comme cela a déjà été mentionné, sont des éléments déclenchants potentiels. Des éléments comme la sensibilité non-linéaire du manche (commande pilote) ou les caractéristiques aérodynamiques peuvent aussi avoir une influence.

Une deuxième provenance de tels phénomènes est la chaîne de commande entre le moyeu du rotor et les pales : elle peut présenter des hystérésis dans la transmission du mouvement. Des limitations physiques en vitesse des vérins ou de certains actionneurs peuvent aussi être responsables de couplage aéronef-pilote.

Par ailleurs, l'hélicoptère américain Sikorsky CH-53 a déjà été l'objet de tous les regards suite à plusieurs incidents. Il a rencontré de graves problèmes dus aux interactions avec les modes de dynamique du vol de faibles fréquences lors du transport d'une charge suspendue en vol stationnaire ou à basse vitesse.

Enfin, le couplage tangage/roulis peut occasionner, en vol stationnaire ou à basses vitesses, des difficultés dans l'accomplissement de tâches de pilotage de haute précision.

**Conclusion :** Des possibilités de rencontrer ce genre de problèmes apparaissent aussi dans le cas des hélicoptères mais des travaux de synthèse ou d'analyse manquent encore. Des investigations sur les phénomènes de PIO des hélicoptères (surtout de catégories autres que les cas linéaires) sont quasi-inexistantes ou tout au moins beaucoup moins avancées que dans le domaine des avions.

# Chapitre 5

# Présentation des codes de calcul disponibles

**Introduction :** Au cours de ce travail, deux logiciels ont été exploités : le code ASDOBI d'analyse des systèmes dynamiques et le code HOST de mécanique du vol des hélicoptères. L'objet de ce chapitre est de présenter les différents programmes de calcul à disposition, en particulier leurs fondements mathématiques et leur architecture.

## 5.1 Code d'analyse des systèmes dynamiques ASDOBI

### 5.1.1 Présentation

Le code ASDOBI dont le nom signifie Analyse des Systèmes Différentiels Ordinaires au moyen de la théorie des BIfurcations a été développé à l'ONERA par Philippe Guicheteau dans le cadre de travaux méthodologiques sur l'analyse du comportement des avions de combat [Sollier 1997]. Le code permet d'étudier les systèmes dynamiques continus (ou depuis peu à temps discret) en caractérisant le comportement asymptotique du système. Afin d'analyser les systèmes différentiels autonomes (indépendant du temps), le calcul de plusieurs types de courbe peut être réalisé : la courbe des points d'équilibre communément appelée diagramme de bifurcation, la courbe des points de bifurcation réelle, la courbe des points de bifurcation de Hopf et l'enveloppe des cycles limites.

### 5.1.2 Fondements mathématiques de l'algorithme de continuation

Pour effectuer l'analyse, ASDOBI est basé, du point de vue informatique, sur l'**algorithme de continuation**. Ce dernier a pour objectif de traiter les problèmes de la forme $F(y) = 0$ où $F$ est un ensemble de $n$ fonctions non-linéaires de classe $\mathcal{C}^k$, pour un entier $k > 0$, dépendant du vecteur $y$ de dimension $p \geq n$. Dans un problème classique de système dynamique, $F$ est constitué des équations régissant la dynamique des états et $y$ des états et des paramètres de contrôle [Kubicek et Marek 1983, Kelley 2005].

En appelant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les inconnues du système étudié et $u \in \mathbb{R}$ l'un des paramètres, les problèmes résolus sont du type :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \end{cases}$$

où les fonctions $F_1, \ldots, F_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ pour un entier $k > 0$.

L'algorithme de continuation d'ASDOBI cherche à résoudre un système de $n$ équations et $(n+1)$ variables. Il s'agit d'une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ qui, dans le cas présent, est de dimension 1, ce qui signifie qu'ASDOBI permet en fait de trouver numériquement une courbe-solution.

L'existence de cette dernière se justifie par le **théorème des fonctions implicites** dont l'énoncé est le suivant :

**Théorème 3 (Théorème des fonctions implicites)** *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $(X, U) \in \mathcal{O}$ tel que $F(X, U) = 0$ et $\det D_X F(X, U) \neq 0$.*
*Alors :*
- *Il existe $\mathcal{V}$, voisinage ouvert de $X$ dans $\mathbb{R}^n$,*
- *Il existe $\mathcal{W}$, voisinage ouvert de $U$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$,*
- *Il existe $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^k$,*

*de sorte que :*

$$\begin{pmatrix} (X, U) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \\ F(X, U) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U \in \mathcal{W} \\ X = \varphi(U) \end{pmatrix} \qquad \square$$

Un algorithme classique comme Newton-Raphson pourrait déterminer une grande partie des points de la courbe-solution, mais si le système est non-linéaire, il présente des singularités qui, pour être traitées, nécessitent un algorithme adapté.

En effet, soit $(X_0, u_0)$ une solution de $F(X, u) = 0$ et $X_0' \equiv \frac{dX}{du}$ un vecteur-direction. Pour trouver la solution $X_1$ en $u_1 = u_0 + \Delta u$ de $F(X, u) = 0$, la méthode de Newton nécessite de réaliser les itérations suivantes :

$$\begin{aligned} D_X F\left(X_1^{(\nu)}, u_1\right) \cdot \Delta X_1^{(\nu)} &= -F\left(X_1^{(\nu)}, u_1\right) \\ X_1^{(\nu+1)} &= X_1^{(\nu)} + \Delta X_1^{(\nu)} \\ \nu &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

avec

$$X_1^{(0)} = X_0^{(0)} + \Delta u \cdot X_0'$$

Si $D_X F(X_1, u_1)$ est non-singulière (i.e. inversible) et $\Delta u$ suffisamment petit, alors les itérations vont converger et la nouvelle direction $X_1'$ est la solution de l'équation obtenue en différentiant $F(X(u), u) = 0$ par rapport à $\Delta u$ en $u = u_1$ :

$$D_X F(X_1, u_1) \cdot X_1' = -D_u F(X_1, u_1)$$

Cependant, une courbe comme (5.1) a un pli en lequel les systèmes linéaires contenant $D_X F(X, u)$ ne peuvent être résolus (inversion de la matrice impossible) et donc en lequel un tel algorithme de continuation sur le paramètre $u$ échoue. C'est pourquoi l'exploitation de l'abscisse curviligne dans l'algorithme de continuation est indispensable.

### 5.1.3 Description de l'algorithme de continuation

L'intégralité du logiciel ASDOBI est organisé autour du calcul, par continuation, des courbes solution d'un système d'équations algébriques dont la formulation dépend du problème traité. Cet algorithme de continuation se décompose en 4 étapes distinctes. Pour effectuer le calcul des

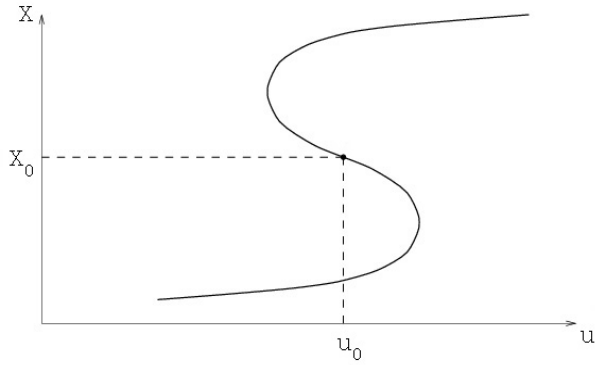



FIG. 5.1. Courbe-solution ayant des plis

courbes-solutions, ASDOBI procède à l'itération de ces étapes.

Dans un premier temps, ASDOBI essaie de **trouver un (premier) point** de la courbe. Puis il calcule la **direction de la tangente** en évaluant la matrice jacobienne. Il effectue ensuite une **prédiction du point suivant** et enfin **corrige le point** ainsi prédit.

Les différentes étapes du calcul de continuation sont illustrées dans le schéma (5.2) pour lequel les dérivées employées par l'algorithme de continuation sont celles par rapport à l'abscisse curviligne $s$ : $X' = \frac{dX}{ds}$.

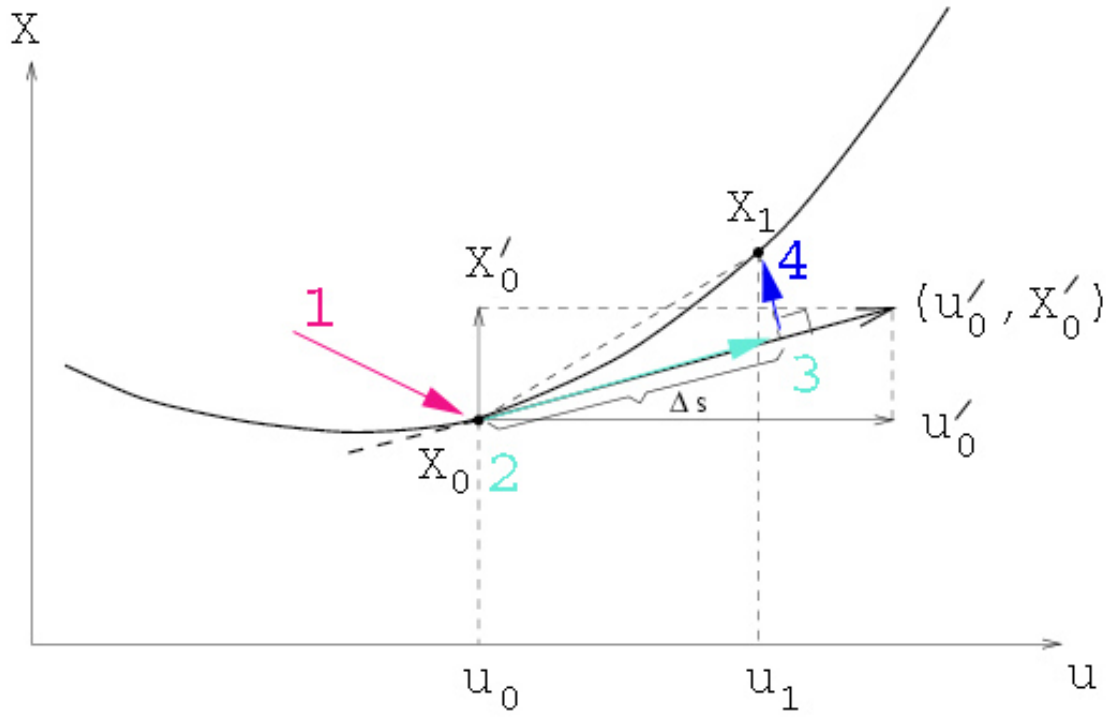



FIG. 5.2. Différentes étapes de l'algorithme de continuation

Chacune des étapes est expliquée, dans ce qui suit, avec ses objectifs et les types de calculs numériques réalisés.

*1è étape : trouver un point de la courbe*

La méthode de Newton est utilisée pour trouver un point de la courbe à partir d'un point initial $y_{(0)} = \left(x_{(0)}, u_{(0)}\right)$.

Le système a $n$ équations et $(n+1)$ inconnues $y = (x, u)$. Pour chaque itération, il faut déterminer la variable la plus singulière $(y_k)$ qui est laissée fixée dans le processus de convergence et qui correspond à la ligne possédant l'élément le plus petit en valeur absolue dans la procédure d'inversion matricielle (pivot de Gauss transformant la matrice à inverser en matrice triangulaire).

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}_{(l)} &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{k-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_{k-1}} & \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{k-1}}{\partial y_{n+1}} \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial y_{k-1}} & \frac{\partial F_k}{\partial y_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{k-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n+1}} \end{pmatrix}_{(l)}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1(y) \\ \vdots \\ F_{k-1}(y) \\ F_k(y) \\ \vdots \\ F_n(y) \end{pmatrix}_{(l)} \\
y_{k_{(l+1)}} &= y_{k_{(l)}}
\end{aligned}$$

Le calcul peut ainsi gérer les points singuliers de rang 1 i.e. en lesquels la matrice jacobienne $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est de rang $(n-1) < n$ et la matrice jacobienne généralisée $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n+1}$, contenant les dérivées relatives à toutes les composantes du vecteur $y = (x, u)$, de rang $n$. L'algorithme peut ainsi parcourir sans échec la majorité des points de bifurcation rencontrés dans la pratique.

*2è étape : trouver la direction de la tangente*

Afin de garder un degré de liberté, l'abscisse curviligne est introduite :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} {dx_i}^2 + d\alpha^2 = 1$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} F_1\left(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, s\right) = 0 \\ \vdots \\ F_n\left(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, s\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} dy_i^2 = 1 \end{cases}$$

Et sa linéarisation donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{ds} \\ \vdots \\ \frac{dy_{n+1}}{ds} \end{bmatrix} = B \cdot \frac{dy}{ds}$$

Si $(y_k)$ est la variable par rapport à laquelle le système est le plus singulier, la dynamique des autres $(y_i)$ peut s'exprimer en fonction de celle de $(y_k)$ sous la forme :

$$\frac{dy_i}{ds} = \beta_i \cdot \frac{dy_k}{ds} \quad \forall i \neq k$$

La normalisation de l'abscisse curviligne permet d'établir la relation :

$$\frac{dy_k}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1,n+1;i\neq k} \beta_i^2}}$$

où le choix du signe de $\frac{dy_k}{ds}$ fixe le sens de déplacement.

Pour déterminer le signe de $\frac{dy_k}{ds}$, une hypothèse est faite à savoir que le produit scalaire des vecteurs tangents $\left(\frac{d\vec{y}}{ds}\right)_{(q)}$ et $\left(\frac{d\vec{y}}{ds}\right)_{(q+1)}$ à la courbe-solution en deux points consécutifs (d'indices respectifs $q$ et $q+1$) est positif. La positivité de $\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{dy_i}{ds}\right)_{(q)} \cdot (\beta_i)_{(q+1)} \cdot \left(\frac{dy_k}{ds}\right)_{(q+1)}$ permet de déduire le signe de $\left(\frac{dy_k}{ds}\right)_{(q+1)}$.

*3è étape : trouver une prédiction du point suivant*

Les dérivées des états par rapport à l'abscisse curviligne étant connues, il faut choisir un schéma d'intégration pour prédire la solution voisine. Un schéma de type Adams-Bashford à pas variable est sélectionné parce qu'il présente plusieurs avantages. Un premier est que, suivant les portions de courbe évaluées, plus ou moins de points sont calculés. Une autre propriété du schéma est qu'il est explicite, ce qui implique une économie de temps de calcul par rapport à un schéma implicite. En effet, un peu d'espace mémoire est utilisé afin de sauvegarder les anciennes dérivées, mais en contrepartie il n'y a pas de système linéaire à inverser dans le processus.

*4è étape : Correction de la prédiction*

La prédiction de la $3^e$ étape est corrigée en effectuant des itérations de Newton initialisées avec la valeur précédente. Elles permettent finalement de trouver un nouveau point sur la courbe d'équilibre.

**Transition :** La façon de procéder du noyau d'ASDOBI a été présentée. Il s'agit dans la suite de lister succinctement les différentes fonctionnalités de calculs disponibles.

### 5.1.4 Différents types de problèmes traités

Pour les différents types de calculs disponibles dans ASDOBI, le contenu des équations algébriques est explicité. Dans tous les cas, ils correspondent à la résolution d'un système de $n$ équations et $(n+1)$ variables. Les propriétés mathématiques des points de la courbe-solution recherchée permettent de définir le système à résoudre.

Dans le cas du calcul du **diagramme de bifurcation** qui représente les **états d'équilibre** en fonction du paramètre de contrôle, le système d'équations est constitué des dynamiques des

variables d'état, ce qui revient à rechercher la solution implicite de :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, \ldots, x_n, u\right) = 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, \ldots, x_n, u\right) = 0 \end{cases}$$

Pour calculer le **lieu des points de bifurcation**, une équation correspondant à la non-inversibilité de la jacobienne est rajoutée : $\det\left(D_X F\left(X, U\right)\right) = 0$. Le système d'équations est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2\right) = 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2\right) = 0 \\ \det\left(D_X F\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2\right)\right) = 0 \end{cases}$$

ASDOBI détermine aussi le **lieu des points de bifurcation de Hopf** c'est-à-dire les points d'équilibre pour lesquels la matrice des dérivées partielles a une paire de valeurs propres imaginaires pures. Pour cela, les équations $\mathbb{R}(\lambda) = 0$ et $\mathbb{I}(\lambda) = \omega$ caractérisent les parties réelle et imaginaire d'une valeur propre (imaginaire pure) $\lambda$ de la jacobienne. Elles complètent le système d'équations de base :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2, \omega\right) = 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2, \omega\right) = 0 \\ \mathbb{R}(\lambda) = 0 \\ \mathbb{I}(\lambda) = \omega \end{cases}$$

Enfin, pour calculer l'**enveloppe des orbites périodiques**, qui est constituée de l'ensemble des orbites périodiques pour les différentes valeurs du paramètre de continuation, il faut exprimer le fait qu'après une intégration du système $\dot{x} = f\left(x, u\right)$ pendant une période $T$, l'état $x$ a la même valeur.

En appelant $F$ la fonction qui, à une valeur donnée $x_0$, associe la valeur que prend $x$ quand le système est intégré pendant un temps $T$, le système algébrique à résoudre est :

$$x_0 - F\left(T, x_0, u\right) = 0$$

C'est un système de $n$ équations et $(n+2)$ inconnues $(T, x_0, u)$. Il est par conséquent nécessaire de prendre en compte une équation supplémentaire afin de pouvoir résoudre le système avec un algorithme de continuation. La relation additionnelle correspond à l'orthogonalité entre la tangente initiale du point $x_0^{(i)}$ du $i^e$ cycle et le vecteur qui permet de faire la translation du point $x_0^{(i)}$ du $i^e$ cycle à $x_0^{(i+1)}$ du $(i+1)^e$ :

$$\langle x_0^{(i+1)} - x_0^{(i)} | \dot{x}_0^{(i)} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left( x_{0j}^{(i+1)} - x_{0j}^{(i)} \right) \cdot \dot{x}_{0j}^{(i)} = 0$$

D'un point de vue pratique, afin d'accélérer la convergence de l'algorithme, cette relation est remplacée par $\langle x_f^{(i+1)} - x_0^{(i)} | \dot{x}_0^{(i)} \rangle$ où $x_f^{(i+1)}$ est l'état du système intégré pendant un temps $T$ à partir de la condition initiale $x_0^{(i+1)}$ afin que ce point demeure dans le plan orthogonal à $\dot{x}_0^{(i)}$ passant par $x_0^{(i)}$, comme l'illustre la figure (5.3).

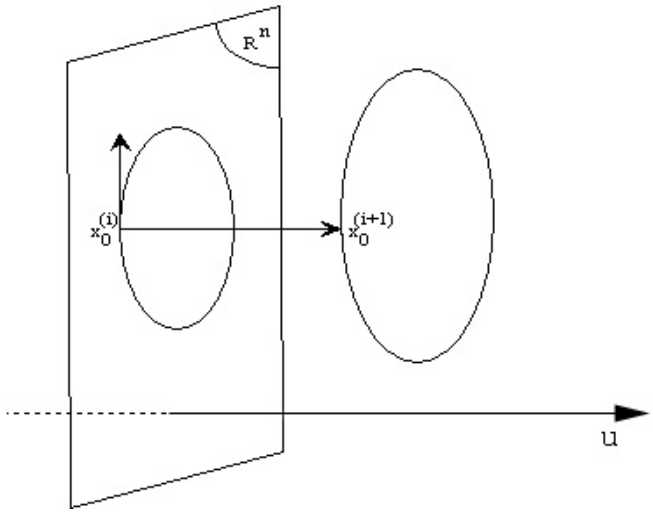



FIG. 5.3. Continuation des orbites périodiques

**Transition :** Jusqu'à ce point, c'est le code d'analyse des systèmes dynamiques ordinaires ASDOBI qui a été décrit. Cet inventaire des logiciels exploités se poursuit et focalise son attention sur les différents aspects du code HOST de mécanique du vol des hélicoptères qu'EUROCOPTER a développé.

## 5.2 Code de mécanique du vol des hélicoptères HOST

Le code de simulation de dynamique du vol des hélicoptères utilisé en premier lieu est le code HOST [Benoit *et al.* 2000]. Il a l'avantage d'être très complet et est le code industriel disponible qui rend compte le plus exactement du comportement d'un hélicoptère.

Il contient une grande partie du savoir-faire d'EUROCOPTER et les contributions de nombreux travaux de l'ONERA (e.g. [Basset 1996, Basset et Omari 1999, Basset et Brocard 2004] ou [Jimenez *et al.* 2001, Jimenez *et al.* 2002], ...). Son but est de modéliser différents types d'aéronefs à voilures tournantes avec toutes leurs caractéristiques technologiques. Il a d'abord été conçu pour l'hélicoptère dont le comportement simulé a été validé sur une grande partie du domaine de vol. Les ingénieurs valorisent leur travail quasi-systématiquement par la programmation informatique d'une portion de code qui correspond à leur tâche de modélisation, d'analyse ou d'exploitation d'essais expérimentaux.

### 5.2.1 Présentation

Le HOST a été développé en 1994 par Eurocopter. HOST signifie "Helicopter Overall Simulation Tool". Comme l'indique son nom, le HOST a pour objectif de simuler le comportement de l'hélicoptère dans l'intégralité des situations possibles, que ce soit en vol ou au sol et ceci, pour n'importe quel type d'hélicoptère (ou de convertible). Il a été créé pour répondre au besoin d'EUROCOPTER qui est de disposer d'un puissant outil de simulation et d'organiser en une structure d'accueil très ordonnée et très flexible les codes de calcul déjà existants tels que le R85 ou le S89 qui étaient moins modulaires et moins lisibles et pour lesquels toute modification était plus laborieuse à implémenter. Il a aussi permis d'une part de réunir dans une même entité

différents codes comme par exemple ceux modélisant les pales rigides ou souples et d'autre part de standardiser tout le développement informatique des modèles dès l'origine.

Le HOST est programmé en FORTRAN 77 qui est un langage très répandu dans la communauté scientifique et aéronautique. Il est constitué de plus de 300 000 lignes de code (comprenant les commentaires), un peu moins de 50 % dédiées aux modèles sur lesquels interviennent constamment les ingénieurs en dynamique du vol et un peu plus de 50 % au noyau qui évolue maintenant beaucoup moins que les modèles.

### 5.2.2 Calculs disponibles

Pour l'instant, les options de calcul dont dispose le HOST sont tout d'abord le **calcul** et le **balayage d'équilibre** c'est-à-dire une recherche itérative d'un état d'équilibre de l'hélicoptère au sens d'une certaine loi choisie par l'utilisateur dans un cas de vol et des conditions de vol fixés. De tels calculs reposent sur une implémentation d'un algorithme de Newton-Raphson. L'utilisateur précise la loi d'équilibre pour laquelle des paramètres sont imposés, tels que les accélérations par exemple, et pour laquelle d'autres variables sont libérées, telles que celles qui relèvent typiquement des commandes et de l'attitude de l'aéronef. La recherche fait aussi intervenir des variables internes rajoutées automatiquement comme une représentation harmonique équivalente des états du rotor.

Le HOST dispose, d'autre part, de la **simulation temporelle en boucle ouverte** et de la **simulation inverse** qui fournissent le comportement de l'appareil au cours du temps en fonction de l'évolution des commandes ou des conditions de vol. L'intégration numérique s'effectue à l'aide des méthodes numériques du type Runge et Kutta ou Gill. Elle intègre deux ensembles de vecteurs qui sont ceux qui ont trait aux mouvements du corps rigide et du rotor et aux états internes. L'utilisateur dispose en particulier d'une fonctionnalité, qui consiste en la simulation à partir de données issues d'un fichier d'essais en vol, afin d'effectuer des comparaisons calculs/mesures.

Enfin, le HOST propose un calcul de **linéarisation** afin d'obtenir la matrice de sensibilité aux variations des variables d'état et de commande. Les dérivées calculées peuvent éventuellement être exploitées pour effectuer une simulation linéaire, ou étudier la stabilité dynamique pour des petites perturbations autour d'un état d'équilibre (analyse des modes, etc.) et les constantes de temps caractéristiques du point d'équilibre.

En ce qui concerne les modules du noyau, ils ne consomment pas un temps de calcul important : ce dernier se chiffre en secondes. C'est la détermination de la dynamique de certains modèles numériques de rotor ou la prise en compte d'un modèle de sillage qui peut se révéler desfois très coûteuse. Mais, dans tous les cas, l'évaluation d'un algorithme de Runge et Kutta ou de Newton-Raphson prend moins de temps que celle d'un programme d'éléments finis (en aérodynamique par exemple).

### 5.2.3 Modélisation selon un libre choix

Le HOST met à disposition tous les modèles des différents éléments nécessaires afin de traiter les problèmes de mécanique du vol des hélicoptères : qualité de vol, performances, trajectographie, ...

Il exige de l'utilisateur qu'il précise les niveaux et les options de modélisation. Le modèle est construit à partir de la définition d'un ensemble de données qui comprennent les choix de modélisation et les valeurs numériques et qui sont consignées dans des fichiers. Le noyau du

HOST lit ces fichiers, appelle les modèles physiques à mettre en œuvre et définit les liaisons et les transferts entre les différents éléments. Au final, les modèles simulés vont du rotor isolé jusqu'à l'hélicoptère complet.

### 5.2.4 Exploitation des résultats

Le HOST permet à l'ingénieur d'avoir accès à un logiciel interactif offrant une grande flexibilité dans le choix des paramètres, dans l'emploi des différents types de calcul et dans l'exploitation des résultats. L'évolution des variables, que ce soit en fonction du paramètre de balayage pour les points d'équilibre ou du temps pour les simulations temporelles, est stockée dans des fichiers de sortie.

### 5.2.5 Architecture informatique du logiciel

C'est une des forces du HOST que d'avoir une architecture qui a été bien soignée et bien organisée en comparaison des anciens codes utilisés tels que le S80 ou le S89.

Sa conception même a eu pour objectif principal de faciliter le développement et l'intégration des différents modèles. C'est pour cette raison que les parties générales et les modèles spécifiques ont été séparés de façon à obtenir une structure modulaire.

Par ailleurs, plusieurs principes régissent le HOST dans son élaboration. D'une part, le **développement des modèles est indépendant de celui du noyau**. En effet, la mise en œuvre d'un nouveau modèle ne nécessite que de le traduire en FORTRAN et d'en préciser sa dynamique : l'interfaçage entre le noyau réalisant les calculs généraux et les modèles ne requiert qu'un minimum d'investissements.

D'autre part, le **noyau du HOST gère toutes les tâches**, que ce soit l'affectation des données des modèles de simulation, l'initialisation des calculs, l'échange d'informations d'un modèle à l'autre ou l'exploitation des résultats.

### 5.2.6 Architecture d'un modèle d'hélicoptère dans HOST

Un hélicoptère se décompose en **éléments** organisés comme suit. Le fuselage (FUS sur la figure 5.4) est l'élément le plus amont, il comporte les informations relatives au centre de gravité et aux caractéristiques massiques et inertielles de l'appareil. Il se décompose en éléments aérodynamiques : la cellule (CEL), l'empennage horizontal (EMP), la dérive (DER) et en éléments liés à la transmission (TSM) et à la motorisation. Au fuselage sont reliés le rotor principal (RP) et le rotor arrière (noté ici FAN dans le cas d'un fenestron : un rotor arrière caréné). En fonction du niveau de modélisation choisi, les rotors peuvent eux-mêmes se décomposer en sous-éléments (pales, plateau cyclique, etc.). Chaque élément est associé à un **modèle**. Celui-ci correspond à une modélisation déjà programmée caractérisée par un ensemble préfixé de données et d'options.

Les éléments d'un hélicoptère du HOST sont organisés en couches comme le montre la figure (5.4). Tous les traitements, que ce soit l'initialisation, la recherche d'équilibre, la simulation ou la linéarisation, sont effectués couche par couche. Le code HOST impose la définition d'un modèle comportemental tout comme les échanges de données entre les éléments qui sont établis par des liaisons de différents types (liaisons mouvements, commandes, interactions, etc.).

L'illustration ci-dessous donne un exemple d'hélicoptère construit dans le HOST à partir des différents éléments constitutifs du plus global (le fuselage) ou plus locaux (les pales).

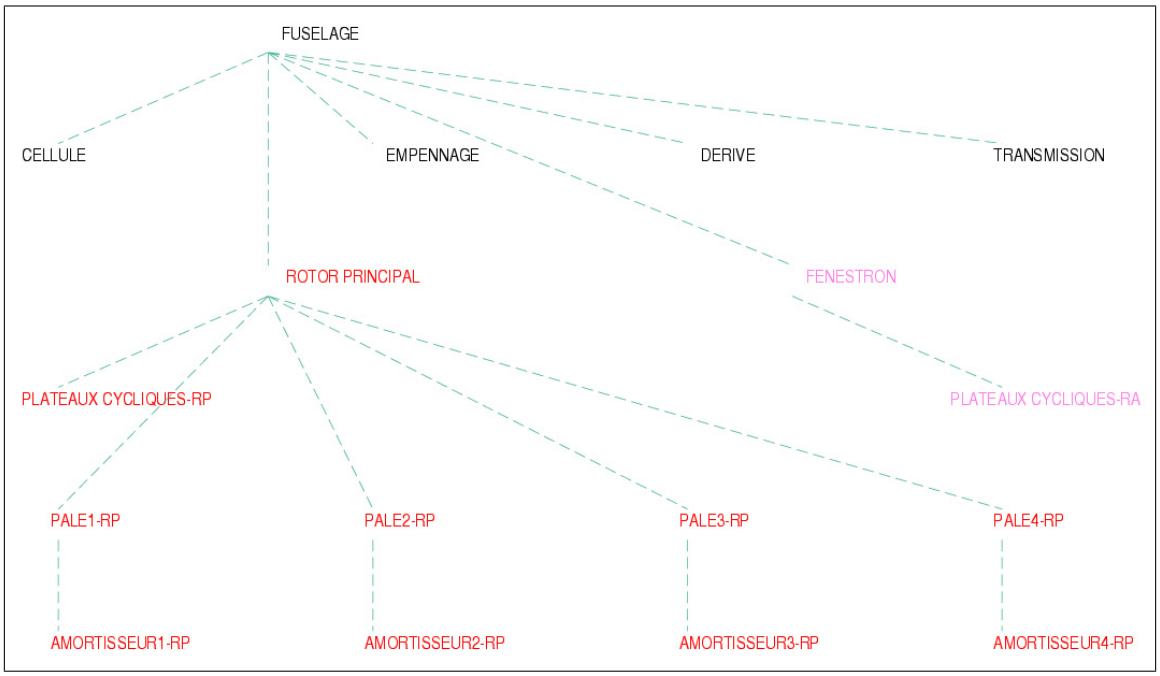



Fig. 5.4. Architecture d'un modèle du HOST

Le fuselage est le point de base auquel vont être transmis les torseurs des efforts de tous les éléments pour y appliquer le principe fondamental de la dynamique. Les éléments directement rattachés au fuselage sont la cellule, l'empennage horizontal, la dérive et les rotors. Les rotors vont récupérer les torseurs d'efforts transmis par les pales et doivent pour convertir les commandes du pilote en angles de braquage des pales utiliser des plateaux cycliques.

Pour tous les calculs, tous ces éléments vont être parcourus deux fois : lors des deux phases dénommées "parcours cinématique" et "parcours efforts" (figure 5.5).

Le premier passage est le **parcours cinématique**. Il part des éléments de la couche amont pour transmettre de couche en couche la cinématique d'un élément à l'autre i.e. les modèles calculent et fournissent au HOST les mouvements des éléments avals en fonction de ceux des éléments amonts.

Le deuxième passage est le **parcours efforts**. Il calcule le torseur des efforts globaux résultant au centre de gravité de l'hélicoptère en intégrant les efforts des éléments avals.

La phase d'initialisation fait également intervenir un double parcours de tous les éléments de l'appareil comme exposé dans le schéma (5.6). La lecture des données et des options de chaque modèle commence à la racine formée par la cellule puis se fait pas à pas des éléments amonts aux éléments avals. Les pré-calculs et les tests débutent, quant à eux, avec les ramifications terminales de l'arborescence et remontent les nœuds, les opérations exécutées prenant souvent en compte les résultats précédents.

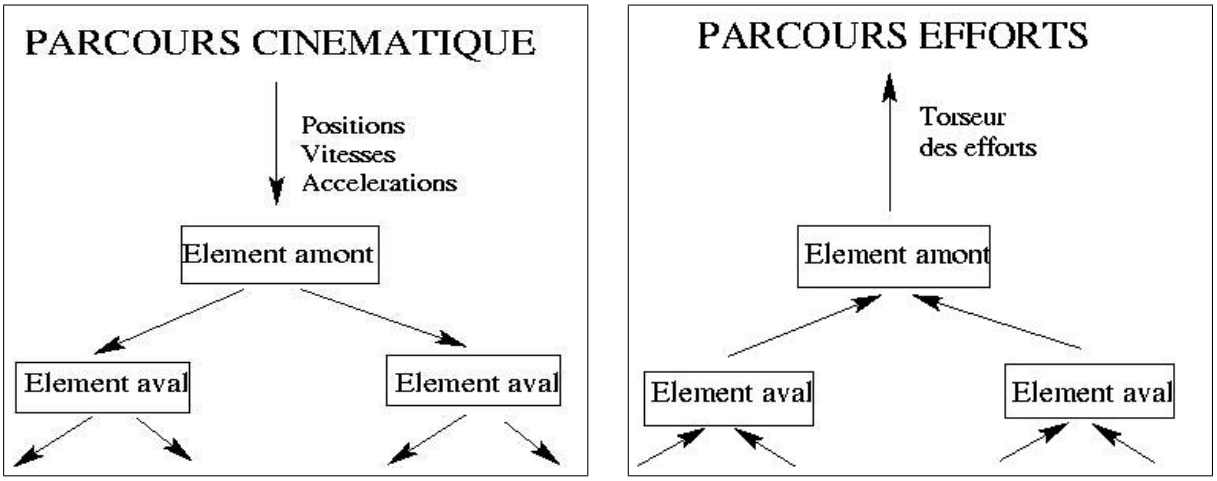



FIG. 5.5. Parcours cinématique et parcours efforts dans le HOST

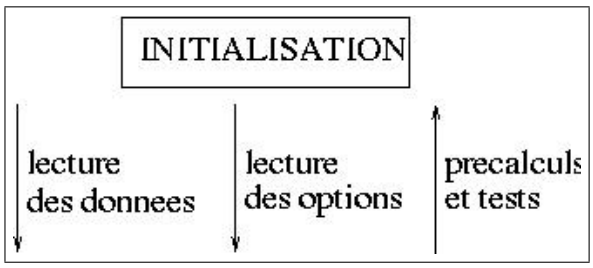



FIG. 5.6. Initialisation des modèles du HOST

L'intégration d'un modèle dans le HOST nécessite donc la programmation de plusieurs fichiers de base dont les rôles respectifs sont :
- la mise à zéro
- la lecture des données
- l'initialisation des valeurs numériques et les pré-calculs
- le choix des options
- le calcul de la cinématique
- le calcul du torseur des efforts

Chacun est utilisé lors d'une phase spécifique d'un calcul HOST.

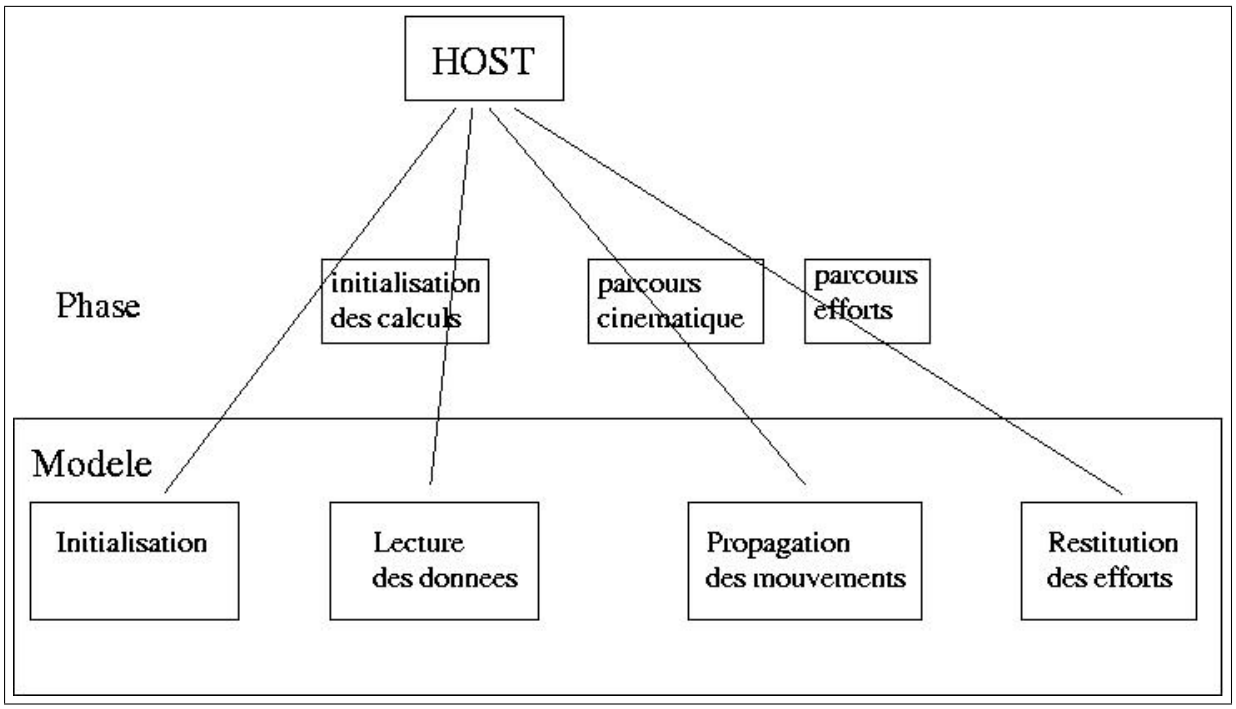



FIG. 5.7. Différentes phases d'un calcul HOST

### 5.2.7 Données du HOST

Pour que le HOST puisse effectuer ses calculs de mécanique du vol, plusieurs types de données doivent lui être fournis. La première catégorie concerne les données nécessaires à la **description du modèle**, la deuxième aux **conditions de calcul**.

#### 5.2.7.1 Données et options décrivant les éléments et leurs liaisons

La description du modèle nécessite de préciser les éléments et les liaisons qui le constituent. Le HOST a besoin qu'on lui donne 4 types d'arborescence pour décrire les échanges d'informations qui correspondent respectivement aux commandes, aux mouvements, aux observations et aux interactions.

Les données et options des modèles sont à renseigner pour chacun des éléments. Elles ont des valeurs différentes d'un élément à l'autre comme c'est le cas par exemple pour l'empennage

et la dérive qui sont tous les deux des éléments aérodynamiques décrits par la même modélisation.

Le rôle du noyau du HOST est de récupérer les données et de les fournir aux modèles. C'est aux modèles de les stocker et de les utiliser dans la définition des valeurs des paramètres et dans l'activation de certains types de modélisation. Cette approche permet de gérer de façon simple et flexible la construction et les variations de modèles ou de paramètres.

Des données complémentaires dédiées aux options du modèle pour le calcul sont à préciser dans un fichier d'options. Elles comportent d'une part les options générales du HOST et d'autre part les options spécifiques au modèle, qui précisent quel type de modélisation utiliser et quelle variante prendre en compte.

#### 5.2.7.2 Données spécifiant les conditions de calcul

Les données liées aux conditions de calcul, quant à elles, contiennent :
- les informations liées aux conditions de vol comme la masse, l'altitude, la température, etc.
- celles liées à la loi d'équilibre i.e. les commandes et variables libérées, les variables contraintes.
- celles concernant les lois de pilotage de la simulation qui sont, pour une simulation en boucle ouverte, l'évolution des commandes en fonction du temps et, pour une simulation inverse, les commandes libérées et l'évolution des variables contraintes en fonction du temps.

## 5.3 Modèles physiques du HOST

Pratiquement tous les modèles physiques dont disposait EUROCOPTER ont été incorporés dans le HOST.

C'est le cas par exemple du code R85 de simulation aéromécanique d'un rotor isolé. Il fournit au HOST un modèle numérique par "éléments de pale" avec une formulation pales rigides ou pales souples. Des modèles analytiques du rotor de type "disque porteur" sont aussi disponibles et diffèrent par leurs hypothèses simplificatrices.

### 5.3.1 Modèles rotor

#### 5.3.1.1 Modèles par éléments de pale

La modélisation numérique dont voici une description sommaire est la plus usitée. Les efforts du rotor ont pour point d'application la tête rotor et proviennent de la sommation des contributions de nature aérodynamique et inertielle de chacune des pales. La constitution de la pale est faite entre autres d'une partie profilée et d'une chaîne cinématique de transmission du mouvement. Chaque élément de pale réparti radialement au niveau de la partie profilée apporte une contribution aérodynamique et chaque segment de la chaîne cinématique une contribution inertielle. Le calcul de la première nécessite de connaître une estimation de la vitesse d'attaque du profil par l'air et celui de la deuxième une estimation de l'accélération locale.

Dans le modèle par éléments de pale, chaque pale est discrétisée en éléments répartis radialement depuis son attache au mât rotor jusqu'à son extrémité. La discrétisation radiale le long de l'envergure de pale est plus fine vers son extrémité où les vitesses dues à la rotation sont les plus fortes ($\Omega \times R$) car c'est dans cette zone que les variations d'efforts aérodynamiques sont les plus marquées. Cette discrétisation permet à la fois une meilleure prise en compte de la cinématique

et de l'aérodynamique de la pale.

En ce qui concerne la cinématique, les différentes séquences d'articulation peuvent être représentées. Une pale peut se mouvoir (ou se déformer) selon trois types de mouvements outre leur rotation à la vitesse $\Omega$ autour du mât rotor :

- mouvement (ou flexion) en battement : mouvement vertical ou plus généralement dans un plan contenant le mât rotor. Ce mouvement est déphasé de 90° par rapport aux forces de portance aérodynamique qui le provoquent du fait du comportement gyroscopique du rotor ;
- mouvement (ou flexion) en traînée : mouvement avant-arrière dans le plan de rotation normal au mât rotor ("leag-lag motion"). Il est dû à la variation des forces de traînée aérodynamique exercées sur la pale au cours de sa rotation et des forces d'inertie de Coriolis (engendrées par les variations de rayon de giration lors du battement de la pale) ;
- variation de pas, vrillage, torsion : la pale comporte une partie profilée où sont principalement générés les efforts aérodynamiques, l'angle entre la corde d'un profil (segment joignant bord d'attaque et bord de fuite) et le plan de rotation normal au mât rotor est appelé angle de pas. Cet angle qui fait varier l'incidence du profil (angle entre la corde et le vecteur vitesse de l'air par rapport au profil dans le plan de celui-ci) est piloté par les déplacements du plateau cyclique commandés par le pilote. Par construction, la pale est en général vrillée au sens où les angles de calage des profils sont plus forts en pied de pale qu'en extrémité pour compenser les différences de vitesse dues à la rotation autour du mât rotor. Cependant les efforts aérodynamiques varient quand même le long de l'envergure de pale. Les différences de moments aérodynamiques de tangage exercés sur les profils conduisent à des déformations en torsion (dans de nouveaux concepts de pilotage des rotors, la pale pourrait être commandée par des variations de torsion).

Les polaires sont des caractéristiques aérodynamiques intrinsèques des profils de pale. Elles ont pour données d'entrée l'incidence et le nombre de Mach qui dépendent de la vitesse relative locale entre l'air et l'élément de pale considéré. Cette vitesse dépend non seulement des mouvements de l'hélicoptère et de la cinématique de la pale, mais aussi de la vitesse induite localement par le sillage du rotor. En effet, une spécificité majeure de l'aérodynamique des rotors (voilures tournantes) réside dans l'importance de la prise en compte des perturbations de vitesse qu'ils génèrent ("souffle du rotor"). Ces vitesses induites influencent fortement non seulement les efforts aérodynamiques développés par les pales, mais peuvent aussi modifier de façon significative en fonction du cas de vol les efforts aérodynamiques générés par les autres éléments qui composent l'hélicoptère, en particulier l'empennage horizontal, la dérive et le rotor arrière qui peuvent être "soufflés" par le sillage du rotor principal.

Pour ce qui est de la modélisation par éléments de pale du rotor principal du HOST, les polaires utilisées sont issues d'essais en soufflerie. Elles sont du type 2D non-linéaires quasi-statiques permettant de prendre en compte les effets de compressibilité et de décrochage statique.

#### 5.3.1.2 Modèles analytiques

Différents types de modèles de vitesse induite du rotor sont disponibles dans le code HOST. Les modèles les plus simples comportent trois états pour décrire le champ des vitesses induites selon la direction normale au disque rotor (composante la plus forte). Cela correspond à une description limitée au premier harmonique : une composante moyenne $V_{i_m}$ (ou $V_{i_0}$) et deux gradients de vitesse ($V_{i_c}$ : gradient longitudinal, $V_{i_s}$ : gradient latéral).

Le modèle de Meijer-Drees en est un exemple. En notant $r$ le rayon de l'élément de pale, $\psi$ son angle d'azimut dont la référence est de $0^\circ$ à l'arrière du rotor, $\chi$ l'angle de sillage qui vaut $0^\circ$ en vol stationnaire et $\mu$ la vitesse de l'hélicoptère normalisée par la vitesse en bout de pale $(\Omega \times R)$, la loi s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_i\left(r,\psi\right) & = & V_{i_0} + \frac{r}{R}\left[V_{i_{1c}}\cos(\psi) + V_{i_{1s}}\sin(\psi)\right] \\ V_{i_{1c}}\left(\chi,\mu\right) & = & \frac{4}{3}\left(1 - 1.8\mu^2\right)\tan\left(\chi/2\right)V_{i_0} \\ V_{i_{1s}}\left(\mu\right) & = & -2\mu V_{i_0} \end{array} \right.$$

Un facteur correctif $\frac{K}{B} \approx 1.1$ corrige la vitesse induite moyenne $V_{i_0}$ déterminée par la théorie de Froude pour tenir compte des pertes de portance en extrémité de pales. En outre, les modèles de vitesse induite de Pitt & Peters ou de Coleman-Glauert sont aussi à disposition. La composante moyenne $V_{i_0}$ est une fonction de la portance du rotor $F_{Z_{rotor}}$ et des conditions de fonctionnement.

Ces premiers modèles sont à l'origine quasi-statique (réponse instantanée du champ des vitesses aux perturbations notamment des commandes). Néanmoins, le temps d'établissement du champ des vitesses induites est pris en compte lors des simulations temporelles grâce à une pseudo-dérivée faisant intervenir une constante de temps $\tau_{v_{i_0}}$ qui vaut de l'ordre de $1s$ pour le rotor principal :

$$\frac{\partial V_{i_0}}{\partial t} = \frac{f_0\left(F_{Z_{rotor}}\right) - V_{i_0}\left(t - dt\right)}{\tau_{v_{i_0}}}$$

Le modèle de Pitt et Peters également limité au premier harmonique fournit des équations dynamiques du premier ordre basées sur des considérations aérodynamiques de masse et inertie apparentes du volume de fluide sollicité par le rotor [Basset 1995]. Ces modèles peuvent être utilisés à la fois par les modèles de rotor numérique et analytique. D'autres modèles de vitesse induite plus élaborés sont disponibles dans le cas du modèle par éléments de pale. Le modèle FiSuW ("Finite State Unsteady Wake"), propose une représentation dynamique qui n'est pas limitée a priori en terme de nombre d'harmoniques représentant les variations de vitesse rencontrées par une pale au cours de sa rotation, ni en terme d'ordre des polynômes de Legendre représentant les variations de vitesse le long du rayon de la pale. L'utilisateur choisit le nombre d'états qu'il juge nécessaire dans le cadre de son application.

La modélisation analytique d'un rotor est telle que les pales sont identiques, rectangulaires (même corde, même profil) et ont un vrillage linéaire. En outre, l'aérodynamique des profils de pale est supposée linéaire (la portance dépend linéairement de l'incidence).

#### 5.3.1.3 Modèles de sillage

Une modélisation encore plus réaliste et concrète est rendue possible en activant un modèle de sillage comme METAR [Toulmay 1987], MESIR [Michea 1992] ou le modèle d'anneaux tourbillonnaires [Basset 1995, Basset 1996, Basset et Omari 1999]. Le calcul du champ des vitesses induites est basé sur la méthode des singularités tourbillonnaires. La vitesse induite est calculée par la loi de Biot et Savart en fonction de la géométrie du sillage et des intensités des tourbillons qui le composent. Optionnellement, les interactions du sillage sur le fuselage, l'empennage horizontal, la dérive et le rotor arrière peuvent être prises en compte.

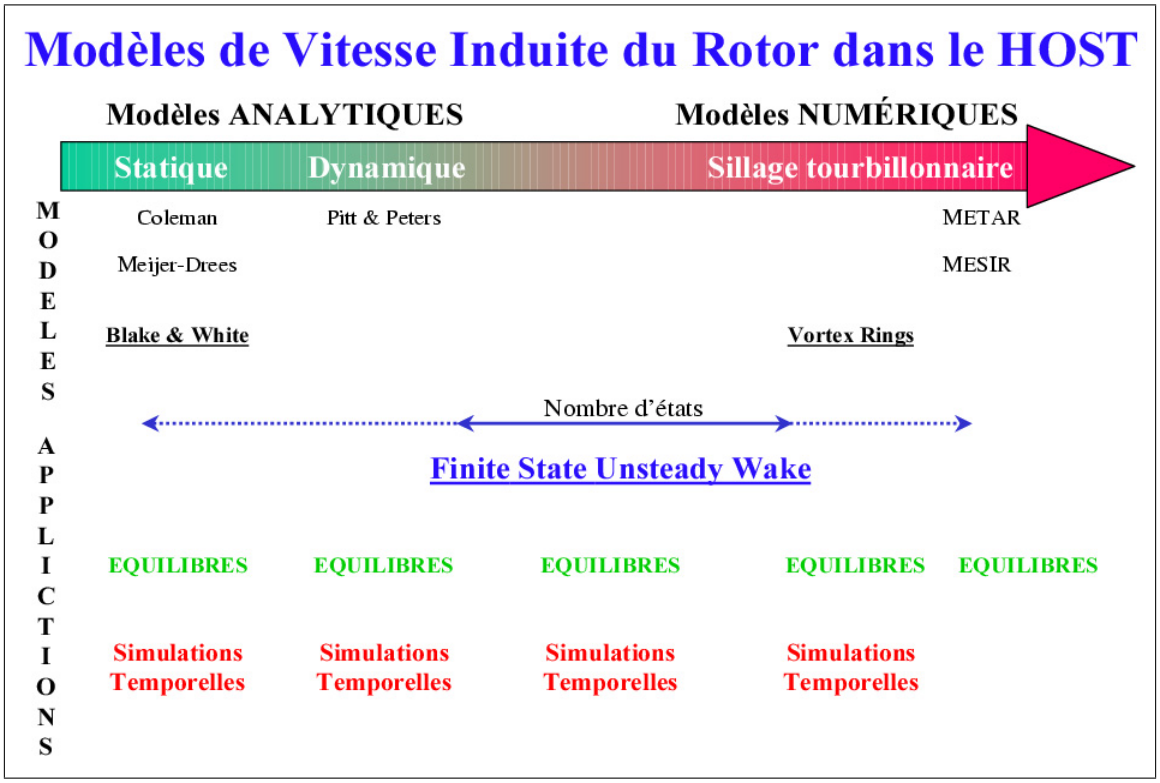



FIG. 5.8. Modèles de rotor et de sillage disponibles dans le HOST

### 5.3.2 Autres éléments constitutifs

Pour ce qui est du rotor arrière, il peut être représenté par les mêmes modèles que ceux disponibles pour le rotor principal, mais bien souvent un modèle rotor analytique est utilisé avec une une constante de temps d'établissement des vitesses induites (de l'ordre de $0.1s$). Si c'est un fenestron, une modélisation spécifique du rotor caréné est disponible (e.g. [Basset et Brocard 2004]).

Enfin, les éléments de cellule comme le fuselage, la dérive ou l'empennage ont des caractéristiques aérodynamiques indépendantes du Mach (écoulement incompressible) et extrapolées aux grands angles d'incidence et de dérapage à partir de mesures en soufflerie.

Globalement, le HOST décrit complètement un hélicoptère et propose au travers de ses options et de ses données toute une palette de modèles et de configurations.

## 5.4 Détails sur l'appareil et le modèle choisis

Pour effectuer cette étude, l'hélicoptère "Dauphin" a été utilisé (SA365N, qui fait partie de la gamme d'Eurocopter). Ce choix résulte du fait que l'ONERA dispose d'un hélicoptère dédié à la recherche (propriété de la D.G.A.) sur lequel il propose et supervise des campagnes de mesures en vol au Centre d'Essais en Vol d'Istres.

En règle générale, au cours de cette étude, le rotor sera représenté en utilisant le premier niveau de modélisation du rotor, le modèle analytique, bien que le modèle numérique par éléments de pale ait également été utilisé à titre comparatif. L'expression des efforts des différents éléments est décrite par des formules explicites ou par l'intermédiaire de l'interpolation de données

FIG. 5.9. Hélicoptère Dauphin 6075 du CEV d'Istres

expérimentales. Le modèle rotor est un modèle "disque porteur" dont les efforts sont moyennés en azimut et intégrés préalablement en une formulation analytique dépendant des commandes, vitesses, battement, ...

Y compris dans le modèle analytique de rotor, plusieurs modélisations sont disponibles pour décrire le mouvement de battement des pales (noté $\beta$) :

- l'hypothèse quasi-statique ("QS") qui considère que les angles $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}$ s'établissent dans leur régime permanent de façon immédiate i.e. $\begin{cases} \dot{\beta}_0 = \dot{\beta}_{1c} = \dot{\beta}_{1s} = 0 \\ \ddot{\beta}_0 = \ddot{\beta}_{1c} = \ddot{\beta}_{1s} = 0 \end{cases}$
- l'hypothèse ("B1") qui ne prend en compte que les dérivées premières de ces coefficients de Fourier i.e. $\ddot{\beta}_0 = \ddot{\beta}_{1c} = \ddot{\beta}_{1s} = \dot{\beta}_0 = 0$

Le modèle de rotor analytique est couramment employé en considérant que la dynamique du battement des pales est quasi-statique relativement à la dynamique plus lente des variables d'état de la mécanique du vol : elles sont données par des formules qui ne dépendent que des états instantanés de l'hélicoptère.

**Conclusion :** Le HOST est un outil très performant mis à la disposition des ingénieurs en mécanique du vol qui rassemble et partage les travaux menés de parts et d'autres sur les hélicoptères. Il est devenu une pierre angulaire du développement chez EUROCOPTER comme des études et des recherches menées à l'ONERA. Dans la continuité des travaux accomplis jusqu'à présent, il a été logiquement choisi comme le modèle initial d'hélicoptère (ainsi que comme modèle de référence).

# Deuxième partie

# Couplage des modèles de la dynamique du vol et des outils d'analyse

# Chapitre 6

# Modélisation simplifiée de la dynamique du vol d'un hélicoptère

**Introduction :** Un code de simulation aussi complexe que le code HOST s'avère parfois inapproprié pour l'analyse non-linéaire (cas notamment de l'analyse de la bifurcation de Hopf associée au roulis hollandais, cf. chapitre 9). **Disposer d'un outil de simulation adapté aux méthodes de l'analyse non-linéaire est indispensable**. C'est pourquoi une étape incontournable de cette thèse est de développer une modélisation simplifiée de la dynamique du vol de l'hélicoptère.

## 6.1 Cahier des charges

L'objectif est de disposer d'un code de mécanique du vol de l'hélicoptère adapté à l'analyse par la théorie des bifurcations. Pour cela, les **propriétés requises** sont les suivantes.

D'une part, la description des efforts et moments des différents éléments doit être analytique, les boucles itératives ou de sommation sur un nombre important de sous-éléments, tel que c'est le cas dans le modèle rotor par éléments de pale, doivent être évitées autant que possible.

D'autre part, la modélisation doit être compacte mais suffisamment riche pour contenir l'information nécessaire afin de rendre compte des phénomènes et de leur dynamique.

Enfin, le modèle doit s'écrire complètement sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires autonomes :

$$\dot{X} = F\left(X, U\right)$$

Dans un premier temps, il s'agit de faire un état de l'art de la littérature et des modèles relatifs à la dynamique du vol des hélicoptères afin de sélectionner les éléments qui seront les plus utiles. Dans un second temps, il convient de fixer les bases théoriques du modèle, par exemple dans quels repères les équations newtoniennes seront écrites. Enfin, chacun des éléments est modélisé, les hypothèses, les simplifications choisies sont émises et une description mathématique proposée.

Un compromis est à trouver afin de garder un niveau de réalisme suffisant malgré les contraintes mathématiques et informatiques imposées qui empêchent l'exploitation de certains types de modèles largement usités par ailleurs dans les autres codes de calcul.

Le travail aboutira à un code programmé en fortran et chaque élément aura une modélisation décrite en un seul fichier. Le modèle développé sera validé avec des comparaisons par rapport aux résultats d'autres logiciels.

Des raffinements de la modélisation (optionnels compte tenu des objectifs de l'étude) pourront être apportés plus tard, que ce soit pour étendre le domaine de validité du modèle, améliorer les parties déjà satisfaisantes ou simplifier la mise en forme mathématique.

## 6.2 Cadre général

Avant tout travail de modélisation, il est toujours indispensable d'expliciter l'environnement et les finalités de l'étude. C'est la définition de tels objectifs qui va déterminer le type de modèle à développer.

Un modèle est une représentation d'un système réel avec un certain degré de réalisme. Un modèle mathématique est caractérisé par le choix des variables décrivant le système et des phénomènes qui sont pris en compte, souvent en fonction de l'importance de leur influence sur le comportement à étudier.

Des travaux de modélisation conduisent principalement à la description de modèles "universels" ou de modèles "identifiés". L'objectif des modèles de la première catégorie est d'améliorer la compréhension du système c'est-à-dire de déterminer les phénomènes physiques qui jouent un rôle dans le comportement et d'essayer d'en rendre compte par des équations théoriques. Le développement des structures du deuxième type vise pour sa part à disposer d'un outil de conception industrielle ou de simulation d'entraînement, ce qui requiert un domaine de validité très large ainsi qu'un réalisme et une précision importante basés sur l'exploitation de données concrètes issues d'essais en soufflerie ou en vol.

Les connaissances utilisées pour réaliser un modèle ont, quant à elles, plusieurs sources. Elles peuvent être théoriques et donc dériver des équations de base de la mécanique du vol et de la mécanique des fluides. Il est également possible qu'elles soient expérimentales grâce à l'exploitation de données issues des essais en soufflerie ou en vol et à l'intuition de l'ingénieur. Chacune joue, de toute façon, un rôle important pour la construction de tels modèles.

L'avantage des connaissances de la première catégorie est, qu'une fois acquises, elles sont complètement paramétrables et réexploitables pour un grand nombre d'appareils et de configurations. Les connaissances de la deuxième catégorie, quant à elles, sont indispensables dans un contexte industriel afin de disposer de valeurs très concrètes pour des besoins de conception, mais elles ne pourront pas toujours être réutilisées pour un autre appareil ou cas de vol, ou alors plus difficilement.

## 6.3 Sources : documentation et logiciels utilisés

La modélisation mathématique des différents éléments de l'hélicoptère sur laquelle le modèle simplifié (par rapport au HOST) se base est celle proposée par G. Padfield dans son livre [Padfield 1996] et par des articles portant sur la description de modèles analytiques d'hélicoptère utilisée lors de travaux sur les drones comme ceux de Gavrilets, Mettler et Feron [Gavrilets *et al.* 2001, Gavrilets *et al.* 2003].

Pour construire le modèle de mécanique du vol de l'hélicoptère propre à ce travail, un inventaire des codes déjà disponibles à l'ONERA a été fait. Comme jusqu'à présent, seul le code HOST avait été exploité, l'espoir était, en première approche, de pouvoir le simplifier afin de le ramener à la formulation recherchée. Mais en fait, la description des modèles dans le HOST est bien trop prolixe et complètement immergée dans une architecture assez imposante et complexe. L'évaluation des dynamiques des états est longue et coûteuse en opérations, cela implique des durées de calcul trop importantes dans le temps. Les différents modèles qui correspondent aux diverses parties de l'hélicoptère ont des formulations assez riches, afin de garder une grande généricité, dont une conséquence est qu'il devient périlleux de bien distinguer les contributions et nuances de chacun des termes dans l'étude de l'influence d'un paramètre. En outre, les modèles ne sont pas tous écrits sous forme analytique, mais résultent de l'évaluation d'expressions analytiques par morceaux, de l'interpolation de mesures en soufflerie, parfois de sommations ou d'itérations soumises à un critère de convergence, d'où découle une formulation entraînant des discontinuités (et numérique), difficile à exploiter pour les investigations fines que sont les analyses non-linéaires.

Comme fondement du modèle dédié à l'analyse non-linéaire, c'est un autre code, EUROPA [Serr *et al.* 1999], qui a finalement été sélectionné. Son nom est un acronyme de "EUROpean Performance Analysis". Deux éléments principaux le constituent à savoir une unité de simulation des performances et une unité de contrôle pour procéder aux simulations multiples. Les objectifs du code sont l'optimisation de manœuvres, la recherche et le calcul de données relatives aux performances de l'aéronef. Il a été développé et est utilisé dans le cadre du projet européen "RESPECT" (Rotorcraft Efficient and Safe Procedures for Critical Trajectories) qui étudie les caractéristiques d'un hélicoptère lors de différentes situations de décollage et d'atterrissage afin de définir des marges de sécurité et des manœuvres-tests pour l'identification de paramètres.

Dans la construction du logiciel de simulation, les fichiers-sources repris sont ceux qui calculent les efforts de chacun des éléments qui composent l'hélicoptère et celui qui intègre la cinématique au niveau du centre de gravité. Seule la partie contenant la modélisation est gardée et, afin de déterminer les hypothèses et de procéder à des simplifications, elle est confrontée avec celle fournie par les autres références, qui incluent les articles, la modélisation décrite dans [Padfield 1996] et le code HOST [Benoit *et al.* 2000].

Tout d'abord, le système auquel le principe fondamental de la dynamique de Newton est appliqué est spécifié. Sont passés ensuite en revue les différents éléments constitutifs de l'hélicoptère pour lesquels une modélisation, argumentée, est à chaque fois proposée.

## 6.4 Conditions d'application du principe fondamental de la dynamique à l'hélicoptère

Les mouvements de l'hélicoptère sont souvent décrits dans deux référentiels :
- le référentiel terrestre lié à la terre,
- le référentiel hélicoptère lié à l'aéronef,

les repères associés à ces référentiels sont présentés sur les figures (1.15) et (1.16) du chapitre 1.

Les équations de base de la mécanique du vol sont les équations différentielles qui régissent l'évolution des variables d'état décrivant les mouvements de tout aéronef vu comme un corps rigide se déplaçant dans l'espace à trois dimensions. Ces variables d'état sont communes à la dynamique du vol de tout aéronef et sont les composantes scalaires de la vitesse de translation $\overrightarrow{v} = (u, v, w)$ et de la vitesse de rotation $\overrightarrow{\omega} = (p, q, r)$ ainsi que les angles d'Euler $(\phi, \theta, \psi)$

décrivant l'attitude ou le positionnement angulaire de l'appareil. D'un type d'aéronef à un autre (hélicoptère, avion, dirigeable, etc.), ce qui change essentiellement, ce sont les modèles décrivant les efforts auxquels ils sont soumis et qui peuvent eux-même nécessiter l'utilisation d'autres variables d'état.

La formulation issue de la mécanique newtonienne nécessite de respecter la démarche suivante afin de mettre en équations le modèle de l'hélicoptère et de ses sous-éléments :

1. définition du référentiel et du repère
2. définition de ses degrés de liberté
3. choix des hypothèses simplificatrices
4. bilan des efforts transmis au centre de gravité
5. mise en forme des équations régissant le comportement du système

### 6.4.1 Système auquel le principe fondamental de la dynamique est appliqué

Il est formé de l'hélicoptère, qui peut être lui-même modélisé comme une combinaison d'un grand nombre de sous-systèmes interagissants. Les efforts engendrés par les différents éléments constitutifs de l'aéronef sont ramenés au centre de gravité par l'intermédiaire des liaisons solides existant entre les points d'application de ces forces et le centre d'inertie.

### 6.4.2 Degrés de liberté

Ils sont constitués des translations et des rotations dans l'espace à trois dimensions. Les termes de vitesses de la mécanique du vol sont calculés par rapport au référentiel terrestre et exprimés dans le repère hélicoptère, essentiellement afin que les inerties soient constantes dans les équations angulaires. D'autres variables d'état peuvent être introduites pour rendre plus réaliste l'estimation des efforts, notamment au niveau de la cinématique et de l'aérodynamique des rotors.

### 6.4.3 Hypothèses

L'hélicoptère est assimilé à un **solide indéformable**, bien qu'**articulé** en ce qui concerne les rotors. Pour les études de stabilité, la **masse** est supposée **constante**. En effet, il ne s'agit pas ici de simuler une mission de vol complète, cas dans lequel il faudrait tenir compte de la diminution de la masse due à la consommation de carburant. La répartition massique, entre la cellule et les deux rotors par exemple, et la position du centre de gravité ainsi que les inerties sont aussi supposées constantes. Il est également admis que l'architecture de l'appareil ne varie pas au cours du temps.

Comme usuellement, le référentiel terrestre est supposé galiléen car le temps de vol des cas abordés est court, voire nul (cas des calculs d'équilibre et des analyses de stabilité).

Par ailleurs, l'altitude de vol est supposée ne varier que très peu de telle sorte que l'accélération gravitationnelle et la température sont à peu près constantes. En outre, la densité de l'air est une fonction de l'altitude pression et de la température, représentée ici d'après la norme de l'atmosphère standard.

**Transition :** Après avoir, d'une part, fixé le cadre de l'étude et les objectifs à atteindre, et, d'autre part, émis les hypothèses concernant le système et son environnement, il s'agit maintenant de construire le modèle complet d'hélicoptère et d'établir les équations associées à la modélisation de chacun des éléments constitutifs de l'hélicoptère.

## 6.5 Description mathématique du modèle

### 6.5.1 Équations de la mécanique du vol

Les équations du mouvement de l'appareil par rapport au référentiel terrestre s'écrivent dans le repère hélicoptère avec des masses et des inerties constantes. Puisque le repère hélicoptère est non galiléen, il faut tenir compte des termes d'inertie.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m \cdot \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} & = & \sum \overrightarrow{F}_{helico} + m\overrightarrow{g} - m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{V} \\ I \cdot \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} & = & \sum \overrightarrow{M}_{helico} - \overrightarrow{\omega} \wedge I \cdot \overrightarrow{\omega} \end{array} \right.$$

Pour des raisons de symétrie, $I_{xy}$ et $I_{yz}$ sont négligés et le seul produit d'inertie pris en compte est $I_{xz}$. Aussi les équations s'écrivent-elles, en notant $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$ la matrice d'inertie, $\overrightarrow{F}_{helico} = (X, Y, Z)$ le vecteur des forces, $\overrightarrow{M}_{helico} = (L, M, N)$ le vecteur des moments, $\overrightarrow{V} = (u, v, w)$ le vecteur des vitesses de translation et $\overrightarrow{\omega} = (p, q, r)$ le vecteur des vitesses de rotation (dans le repère hélicoptère) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & \frac{X}{m} - g \cdot \sin\theta + r \cdot v - q \cdot w \\ \dot{v} & = & \frac{Y}{m} + g \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta + p \cdot w - r \cdot u \\ \dot{w} & = & \frac{Z}{m} + g \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta + q \cdot u - p \cdot v \\ \dot{p} & = & \frac{I_{zz} \cdot L + I_{xz} \cdot N}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} + \frac{(I_{zz} \cdot (I_{yy} - I_{zz}) - I_{xz}^2) \cdot q \cdot r + I_{xz} \cdot (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \cdot p \cdot q}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} \\ \dot{q} & = & \frac{M}{I_{yy}} + \frac{I_{xz} \cdot (r^2 - p^2) + (I_{zz} - I_{xx}) \cdot p \cdot r}{I_{yy}} \\ \dot{r} & = & \frac{I_{xx} \cdot N + I_{xz} \cdot L}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} \cdot (-I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \cdot q \cdot r + (I_{xx} \cdot (I_{xx} - I_{yy}) + I_{xz}^2) \cdot p \cdot q}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} \end{array} \right.$$

Les efforts transmis au centre de gravité de l'hélicoptère proviennent du poids et des efforts générés par les différents éléments :

- les rotors : le rotor principal, le rotor arrière
- les éléments aérodynamiques : le fuselage, l'empennage horizontal, la dérive

A la fin est effectué le bilan des torseurs d'efforts des différents éléments résultant au centre de gravité afin d'appliquer le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum (\overrightarrow{F}_{ext}, \overrightarrow{M}_{ext}) = \sum_{RP,RA,FUS,EMP,DER} \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \right)$$

### 6.5.2 Modélisation du rotor principal

#### 6.5.2.1 Hypothèses

Pour effectuer l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères par la théorie des bifurcations, utiliser un modèle analytique de rotor est recommandé. Les modèles numériques plus précis et complets pour le calcul de la cinématique et de l'aérodynamique des pales ainsi que des efforts résultants au niveau du rotor sont à éviter voire à bannir des travaux réalisés ici.

Le rotor principal est l'élément dont la description des forces et des moments est la plus importante en terme d'influence sur la dynamique du vol de l'hélicoptère, mais aussi la plus complexe. C'est la mécanique du mouvement cyclique des pales qui contrôle la direction et l'amplitude de la force de traction et du couple appliqués au niveau du moyeu-rotor. Cette description nécessite d'établir les équations régissant la dynamique des mouvements de battement et de traînée des

pales.

Plusieurs hypothèses sont faites :

1. L'aérodynamique des profils de pale est supposée 2D, quasi-statique ; en outre, la portance locale est une fonction linéaire de l'incidence et la traînée une fonction quadratique de la portance.
2. La portance générée par le rotor résulte d'une intégration préalable des portances développées localement par les profils de pale. Pour aboutir à une formulation analytique de cette intégration, certaines hypothèses d'intégration sont effectuées.
3. L'aérodynamique instationnaire des profils de pale n'est pas prise en compte.
4. Les pertes de portance en bout de pale sont ignorées.
5. La variation non-linéaire de la distribution de vitesse induite le long de la pale est négligée.
6. Les effets de la région d'écoulement inversé sont négligés parce qu'elle n'apparaît qu'à grande vitesse d'avancement (les profils en pied de pale reculante par rapport à l'avancement de l'hélicoptère peuvent alors être attaqués par le bord de fuite).

En écrivant les vitesses adimensionnées tangentielles (dans le plan) et normales à la pale

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{U}_T & = & \overline{r}\left(1+\overline{\omega}_x\beta\right)+\mu\sin\psi \\ \overline{U}_P & = & \left(\mu_z-\lambda_0-\beta\mu\cos\psi\right)+\overline{r}\left(\overline{\omega}_y-\beta'-\lambda_1\right) \end{array}\right.$$

où les variables s'expriment en fonction des vitesses de translation $(u_h, v_h, w_h)$ et de rotation $(\omega_x, \omega_y)$ dans les axes des pales, de la distance $r$ entre le moyeu et la section de pale, de l'angle de battement $\beta$, des termes de vitesse induite $(\lambda_0, \lambda_1)$ de la distribution uniforme et variant linéairement $\lambda = \frac{\nu_i}{\Omega R} = \lambda_0 + \lambda_1(\psi)\,\overline{r}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{r} & = & \frac{r}{R} \\ \mu & = & \frac{\sqrt{u_h^2+v_h^2}}{(\Omega R)} \\ \mu_z & = & \frac{w_h}{\Omega R} \\ \overline{\omega}_x & = & \frac{\omega_x}{\Omega} \\ \overline{\omega}_y & = & \frac{\omega_y}{\Omega} \end{array}\right.$$

les forces aérodynamiques par unité de longueur de rayon le long de la pale $(dr)$ ont pour expression analytique, avec $U_T = \overline{U}_T \cdot (\Omega R)$ et $U_P = \overline{U}_P \cdot (\Omega R)$ :

– pour la portance $l(\psi, r) = \frac{1}{2}\rho\left(U_T^2 + U_P^2\right) ca_0\left(\theta + \frac{U_P}{U_T}\right)$

– pour la traînée $d(\psi, r) = \frac{1}{2}\rho\left(U_T^2 + U_P^2\right) c\delta$

où $\delta$ représente la traînée générée par la section de pale vérifiant $\delta = \delta_0 + \delta_2 C_T^2$, $a_0$ le gradient de portance et $\left(\theta + \frac{U_P}{U_T}\right)$ la valeur de l'angle d'incidence de la pale.

#### 6.5.2.2 Équations de battements

Les efforts aérodynamiques par unité de longueur $f_z$ dans le système d'axes de la pale se développent en fonction de la portance et de la traînée :

$$f_z = -l\cos\phi - d\sin\phi \approx -l - d\phi$$

où $\phi$ est l'angle d'incidence entre le flux d'air vu par le profil de pale et le plan normal au rotor.

Le bilan des moments pour la i-è pale au centre de l'articulation de constante de raideur $K_\beta$ donne :

$$\int_0^R r\left(f_z(r) - ma_{zb}\right) dr + K_\beta \beta_i = 0$$

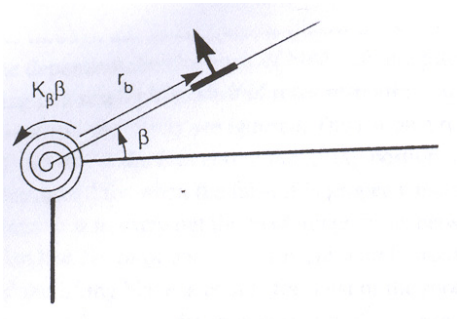



FIG. 6.1. Modèle ressort équivalent de la souplesse en battement du rotor [Padfield 1996]

Le comportement gyroscopique qui gouverne la dynamique de la majorité des rotors est lié à leur articulation (ou souplesse) en battement : le plan des extrémités de pale s'incline avec un retard de 90° d'azimut par rapport aux efforts aérodynamiques qui causent ce mouvement de basculement. L'accélération normale à l'élément de pale $a_{zb}$ inclut l'effet gyroscopique dû à la rotation du fuselage et du moyeu, elle s'exprime en fonction de l'azimut $\psi_i$ de la $i^e$ pale et des vitesses de rotation $(p_{hw}, q_{hw})$ du moyeu dans le système d'axes moyeu-rotor/vent :

$$a_{zb} \approx r\left(2\Omega\left(p_{hw}\cos\psi_i - q_{hw}\sin\psi_i\right) + \left(\dot{q}_{hw}\cos\psi_i + \dot{p}_{hw}\sin\psi_i\right) - \Omega^2\beta_i - \ddot{\beta}_i\right)$$

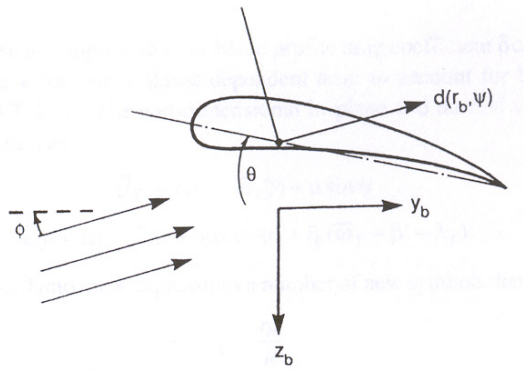



FIG. 6.2. Notations au niveau de la section de pale [Padfield 1996]

Les équations de battements s'écrivent sous la forme d'une équation différentielle du second ordre. L'équation différentielle de battement d'une pale par rapport à l'angle d'azimut $\psi$ est, avec $\overline{p}_{hw} = \frac{p_{hw}}{\Omega}$ et $\overline{q}_{hw} = \frac{q_{hw}}{\Omega}$ :

$$\beta_i'' + \lambda_\beta^2\beta_i = 2\left(\left(\overline{p}_{hw} + \frac{\overline{q}_{hw}'}{2}\right)\cos\psi_i - \left(\overline{q}_{hw} - \frac{\overline{p}_{hw}'}{2}\right)\sin\psi_i\right) + \frac{\gamma}{2}\int_0^1 \left(\overline{U}_T^2\theta + \overline{U}_T\overline{U}_P\right)_i \overline{r}d\overline{r}$$

Ces équations tiennent compte, dans leur formulation, du nombre de Lock $\gamma$ qui est le rapport des forces aérodynamiques sur les forces inertielles agissant sur la pale, de la fréquence de battement $\lambda_\beta$ qui dépend elle-même de la raideur en battement $K_\beta$ et du moment d'inertie en battement $I_\beta$.

La forme générique des équations de battement s'obtient en effectuant un développement harmonique (dans les coordonnées multi-pales) :

$$\beta_M'' + C_M(\psi)\beta_M' + D_M(\psi)\beta_M = H_M(\psi)$$

Seules les moyennes azimutales des termes sont gardées dans le développement des coefficients $C_M(\psi), D_M(\psi)$ et $H_M(\psi)$ de l'équation.

Au final, dans la modélisation retenue ici du mouvement des pales, seuls les mouvements de battement sont considérés, les mouvements de traînée sont ignorés. Le comportement périodique est rendu par les harmoniques du premier ordre uniquement. Les angles de battement des pales ne sont pas calculés directement mais sont représentés par l'intermédiaire des variables $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}$ de la transformée harmonico-temporelle.

Après la présentation de la modélisation du battement des pales, l'exposé porte dans la suite sur le calcul des efforts du rotor.

#### 6.5.2.3 Forces et moments du rotor

Les forces et moments du rotor ont des expressions assez complexes et nécessitent des développements algébriques parfois très fastidieux. L'objectif de la description qui va en être donnée n'est pas de rédiger l'intégralité des équations et des hypothèses du modèle, mais de fournir les éléments suffisants pour comprendre et divulguer les caractéristiques et les formules choisies. L'exposé détaille d'abord les efforts du rotor puis les moments.

Les efforts au centre du rotor résultent de la sommation de ceux développés par chaque pale à l'azimut $\psi_i$. Eux-mêmes découlent de l'intégration des efforts le long de l'envergure de la pale. Ils s'expriment dans le repère moyeu-rotor/vent qui a un axe $O\vec{x}$ dans le sens du vent relatif (positif vers l'arrière du rotor), un axe $O\vec{z}$ dans la direction du mât rotor et un axe $O\vec{y}$ tel que le trièdre $(Oxyz)$ soit direct et orthogonal :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_{hw} & = & \sum_{i=1}^{N_b}\int_0^R \left(-(f_z - ma_{zb})_i\beta_i\cos\psi_i - (f_y - ma_{yb})_i\sin\psi_i + ma_{xb}\cos\psi_i\right)dr \\ Y_{hw} & = & \sum_{i=1}^{N_b}\int_0^R \left(-(f_z - ma_{zb})_i\beta_i\sin\psi_i - (f_y - ma_{yb})_i\cos\psi_i + ma_{xb}\sin\psi_i\right)dr \\ Z_{hw} & = & \sum_{i=1}^{N_b}\int_0^R (f_z - ma_{zb} + ma_{xb}\beta_i)_i dr \end{array}\right.$$

Les charges aérodynamiques sont évaluées en ne prenant en compte que les forces de portance et de traînée et en supposant les angles d'attaque petits :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_z & = & -l\cos\phi - d\sin\phi \simeq -l - d\phi \\ f_y & = & d\cos\phi - l\sin\phi \simeq d - l\phi \end{array}\right.$$

En développant l'expression des forces et en ne gardant que les harmoniques jusqu'au deuxième ordre, les efforts s'expriment sous une forme qui contient les termes $F_k^{(j)}$ du développement harmonique de $F$ où l'indice $k$ désigne l'harmonique (1c,1s,2c,2s, ...) et l'exposant $(j)$ vaut (1) quand il est associé à la force normale (de portance)

$$F^{(1)}(\psi_i) = -\int_0^1 \left\{\overline{U}_T^2\theta_i + \overline{U}_P\overline{U}_T\right\}d\overline{r}$$

et (2) quand il relate de la force tangentielle comprenant les traînées induite et de profil

$$F^{(2)}(\psi_i) = -\int_0^1 \left\{ \overline{U}_P \overline{U}_T \theta_i + \overline{U}_P^2 - \frac{\delta_i \overline{U}_T^2}{a_0} \right\} d\overline{r}$$

où l'indice $i$ dénote le numéro de pale que la variable décrit.

Concrètement, les coefficients sont, avec $\beta_0$, $\beta_{1cw}$ et $\beta_{1sw}$ les angles de conicité et de battement des pales dans le repère moyeu/vent :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \left(\frac{2C_{xw}}{a_0 s}\right) & = & \frac{X_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} & = \left(\frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4}\right)\beta_{1cw} + \frac{F_{1c}^{(1)}}{2}\beta_0 + \frac{F_{2s}^{(1)}}{4}\beta_{1sw} + \frac{F_{1s}^{(2)}}{2} \\ \left(\frac{2C_{yw}}{a_0 s}\right) & = & \frac{Y_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} & = \left(-\frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4}\right)\beta_{1sw} - \frac{F_{1s}^{(1)}}{2}\beta_0 - \frac{F_{2s}^{(1)}}{4}\beta_{1cw} + \frac{F_{1c}^{(2)}}{2} \\ \left(\frac{2C_{zw}}{a_0 s}\right) & = & \frac{Z_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} & = -\left(\frac{2C_T}{a_0 s}\right) = -F_0^{(1)} \end{array} \right.$$

Quant aux moments de roulis ($L$) et de tangage ($M$) exercés sur le mât rotor dus à la raideur du rotor en battement, ils s'écrivent, avec le nombre de termes du développement harmonique $N_b$ et les angles de battement longitudinal et latéral $\beta_{1c}$ et $\beta_{1s}$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_h & = & -\frac{N_b}{2} K_\beta \beta_{1s} \\ M_h & = & -\frac{N_b}{2} K_\beta \beta_{1c} \end{array} \right.$$

où la raideur du moyeu $K_\beta$ s'exprime en fonction de la fréquence de battement $\lambda_\beta$ : $K_\beta = \left(\lambda_\beta^2 - 1\right) I_\beta \Omega^2$.

Enfin, il reste à calculer le moment de lacet (couple résistant à la rotation du rotor) qui joue un rôle proéminent pour la mécanique du vol des hélicoptères. Il est obtenu en intégrant le long des pales les moments de traînée résistant à la rotation :

$$N_h = \sum_{i=1}^{N_b} \int_0^R r(f_y - m a_{yb})_i dr$$

ce qui donne, en développant les calculs :

$$\left(\frac{2C_Q}{a_0 s}\right) = \frac{N_h}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^3 s a_0} = -(\mu_Z - \lambda_0)\left(\frac{2C_T}{a_0 s}\right) + \mu\left(\frac{2C_{xw}}{a_0 s}\right) + \frac{\delta}{4a_0}\left(1 + \frac{7}{3}\mu^2\right)$$

et les composantes du couple dans le repère du moyeu-rotor sont, en tenant compte des angles de battement des pales :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_Q & = & -\frac{Q_R}{2}\beta_{1s} \\ M_Q & = & -\frac{Q_R}{2}\beta_{1c} \end{array} \right.$$

où le couple du rotor principal est défini par :

$$Q_R = \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^3 a_0 s \left(\frac{2C_Q}{a_0 s}\right)$$

#### 6.5.2.4 Flux induit du rotor

Une chose importante à calculer est le flux induit par le rotor. Il intervient, entre autre, dans le calcul de l'incidence locale et de la pression dynamique au niveau des (sections de) pales. Il résulte de la vorticité (i.e. l'écoulement tourbillonnaire) qui prend naissance au niveau du rotor et se propage dans le sillage.

La représentation du rotor choisie est celle d'un disque-porteur : c'est la plus simple, elle considère que le rotor est composé d'un nombre infini de pales accélérant l'air et qu'il y a un saut de pression entre les deux faces.

Comme usuellement pour la théorie monodimensionnelle de calcul d'hélice (Rankine, Froude), le fluide est supposé parfait et incompressible (masse volumique $\rho = \rho_0$ constante) et l'écoulement permanent, non visqueux et non turbulent. Un bilan de quantité de mouvement est effectué. Il est important de remarquer que celui-ci n'est cependant plus valide en vol de descente dans le régime d'anneaux tourbillonnaires (cf. annexe B).

Soit $T$ la traction du rotor, $V_Z$ la vitesse verticale, $A_d$ l'aire du disque rotor, $\nu_i$ la vitesse induite, $m$ est la masse d'air mise en jeu. Le débit massique du flux d'air à travers le rotor est

$$\dot{m} = \rho A_d \left(V_Z + \nu_i\right)$$

La variation de quantité de moments entre l'"infini amont" et l'"infini aval" est égale aux efforts appliqués (la traction) :

$$T = \dot{m}\left(V_Z + \nu_{i_\infty}\right) - \dot{m}V_Z = \dot{m}\nu_{i_\infty}$$

En outre, la variation d'énergie cinétique du flot est égale au travail du rotor :

$$T\left(V_Z + \nu_{i_\infty}\right) = \frac{1}{2}\dot{m}(V_Z + \nu_{i_\infty})^2 - \frac{1}{2}\dot{m}V_Z^2 = \frac{1}{2}\dot{m}\left(2V_Z\nu_{i_\infty} + \nu_{i_\infty}^2\right)$$

En introduisant la relation supplémentaire mettant en avant le fait que la vitesse induite à l'infini aval est deux fois celle au niveau du rotor (théorie de Froude),

$$\nu_{i_\infty} = 2\nu_i$$

la traction du rotor s'écrit en fonction de paramètres du disque-rotor :

$$T = 2\rho A_d \left(V_Z + \nu_i\right)\nu_i$$

La vitesse induite est ainsi fournie par une équation implicite. Pour en estimer la valeur en fonction de la traction ou de la vitesse, une résolution numérique est nécessaire. Par ailleurs, d'autres itérations plus globales sont effectuées pour équilibrer la portance créée au niveau du rotor avec la vitesse induite.

En vol d'avancement, il faut tenir compte de la non-uniformité de la distribution de vitesse induite sur le rotor. Son expression se limitera à la prise en compte du gradient longitudinal (terme en cosinus) du développement au premier ordre de l'azimut $\psi$ et fait intervenir l'angle du sillage avec le rotor $\chi = \arctan\left(\frac{\mu}{\lambda_0 - \mu_z}\right)$ :

$$\frac{\nu_i}{\Omega R} = \lambda_i = \lambda_0 + \frac{r_b}{R}\lambda_{1cw}\cos\psi$$

où $r_b$ est la distance par rapport au centre du rotor, $R$ le rayon du rotor et l'expression du gradient longitudinal :

$$\begin{cases} \lambda_{1cw} &= \lambda_0 \tan\left(\frac{\chi}{2}\right), \quad \chi < \frac{\pi}{2} \\ \lambda_{1cw} &= \lambda_0 \cot\left(\frac{\chi}{2}\right), \quad \chi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'origine physique du gradient longitudinal est l'inclinaison du sillage du rotor vers l'arrière à cause de la vitesse d'avancement. Pour le modèle développé, la dissymétrie latérale de distribution de vitesse induite sur le rotor est négligée, soit $\lambda_{1sw} = 0$. Ce gradient latéral ($\lambda_{1sw}$) qui provient des différences entre pale avançante et pale reculante du fait de la vitesse d'avancement, augmente moins vite que le gradient longitudinal ($\lambda_{1cw}$). Les grandes vitesses d'avancement n'étant pas précisément le sujet de cette thèse, cette dissymétrie latérale est ici négligée. Des modifications pourront être apportées ultérieurement.

Une des différences, marquante, entre un modèle d'avion et un modèle d'hélicoptère est l'interdépendance des variables caractérisant le rotor (traction - vitesse induite - battement) qui rend impossible l'écriture complète d'un modèle en se passant de certaines boucles. C'est un inconvénient pour l'exploitation d'outils algébriques d'analyse des systèmes dynamiques de la forme $\dot{X} = F(X, U)$. En fait, comme la vitesse induite se calcule en cherchant la solution implicite d'une équation algébrique, une meilleure formulation est d'écrire le modèle sous forme d'un système algébro-différentiel et d'exploiter la théorie relative à la stabilité de tels systèmes.

### 6.5.3 Modélisation du rotor arrière

Le rotor arrière opère souvent dans un écoulement d'air complexe. En effet, le sillage du rotor principal, perturbé par ailleurs au cours de son évolution par différents éléments comme le mât-rotor ou le fuselage-arrière, interagit avec le rotor arrière pour créer un écoulement fortement non-uniforme qui peut perturber la portance du rotor arrière et nuire aux performances en commande de celui-ci. Par souci de simplification, en ce qui concerne ce modèle, de telles interactions sont négligées.

La force latérale du rotor arrière s'écrit sous la forme :

$$Y_T = \rho(\Omega_T R_T)^2 s_T a_{0T} \left(\pi R_T^2\right) \left(\frac{C_{T_T}}{a_{0T} s_T}\right)$$

où $\Omega_T$ est la vitesse de rotation du rotor arrière et $R_T$ son rayon, $s_T$ la plénitude du rotor et $a_{0T}$ le gradient de portance en fonction de l'incidence, $C_{T_T}$ le coefficient de portance normalisé.

Pour exprimer les efforts et les moments générés par le rotor arrière, les composantes de la vitesse locale de l'air dans le plan du disque rotor et normale à celui-ci sont introduites.

$$\begin{cases} \mu_T &= \frac{\sqrt{U_T^2 + W_T^2}}{\Omega_T R_T} \\ \mu_{z_T} &= -signe(\Omega_T) \frac{V_T}{\Omega_T R_T} \end{cases}$$

Le rotor arrière crée une force de traction qui contre le couple du rotor principal mais qui génère aussi une traînée et un couple.

L'expression du coefficient de portance normalisé du rotor arrière fait intervenir le pas collectif du rotor arrière $\theta_{0T}$ et la vitesse induite moyenne normalisée $\lambda_{0T}$ :

$$C_{T_T} = \frac{1}{2} a_{0T} s_T \left(\frac{\theta_{0T}}{3}\left(1 + 1.5\mu_T^2\right) + \left(\mu_{z_T} - \lambda_{0T}\right)/2\right)$$

De même que pour le rotor principal, la traînée $\delta_T$ est une fonction quadratique de la portance dont les facteurs sont $\delta_{0T}$ et $\delta_{2T}$ :

$$\delta_T = \delta_{0T} + \delta_{2T} C_{T_T}^2$$

Enfin, le couple est la somme du couple induit et du couple de la traînée de profile :

$$Q_T = \left(\rho\pi R_T^4 \Omega_T^2\right) R_T \left(CQ_{ind} + CQ_{prof}\right)$$

où

$$\begin{cases} CQ_{ind} = (\lambda_{0T} - \mu_{z_T}) \times C_{T_T} \\ CQ_{prof} = s_T \delta_T \left(1 + \mu_T^2\right)/8 \end{cases}$$

Ce modèle de rotor arrière est assez simple, mais il convient quand même de ne pas se limiter à une force n'ayant qu'une composante latérale. La direction de la force est donnée par les angles de battement :

$$\begin{aligned} \beta_{1swT} &= -\left(\frac{8}{3}\mu_T \frac{1}{2}\frac{\gamma}{8\lambda_{\beta 2}}\theta_{0T} + \mu_T \frac{\gamma}{8\lambda_{\beta 2}}(4/3)^2 (\lambda_{0T} - \mu_{z_T})\right) \\ \beta_{1cwT} &= -\frac{8}{3}\mu_T \theta_{0T} - 2\mu_T (\lambda_{0T} - \mu_{z_T}) \end{aligned}$$

Dans le cas pratique du Dauphin qui est l'hélicoptère étudié principalement dans cette thèse et que son rotor arrière est un fenestron (figure (1.14)), il n'y a ni battement des pales, ni de liaison $K$.

### 6.5.4 Modélisation de l'empennage horizontal

Pour la construction du modèle analytique, l'empennage horizontal est supposé produire essentiellement de la portance et la traînée est négligée. Les interactions aérodynamiques avec le sillage du rotor principal sont ignorées. Cela peut être fait dans certaines zones de vol car l'influence forte du souffle du rotor principal sur l'empennage se produit aux basses vitesses d'avancement : il faut donc vérifier -dans des calculs annexes- que l'aéronef reste bien dans le domaine de validité de l'hypothèse.

Une modélisation assez classique est choisie. Pour calculer le coefficient de portance, la loi suivie est une fonction de l'angle d'attaque $\alpha$, quasi-affine en 0. L'existence d'un angle de calage $\alpha_0$ rend compte de la portance qui est créée à angle de calage nulle. En vol rectiligne, l'empennage produit une force qui compense l'effet cabreur du rotor principal. Une relation de la forme suivante est adoptée :

$$C_Z = C_{Z_\alpha} \sin(\alpha - \alpha_0)$$

Cette loi est complétée de telle sorte que le coefficient de portance sature i.e. ne peut dépasser une certaine valeur : si $C_{Z_\alpha} \sin(\alpha - \alpha_0) \geq C_{Z_{max}}$, alors $C_Z = C_{Z_{max}}$. Le phénomène de décrochage n'est donc traduit que partiellement.

En résumé, le torseur des efforts au niveau de l'empennage ne contient qu'une composante :

$$Z_{HT} = \frac{1}{2} C_Z \rho S_{HT} V_{HT}^2$$

Dans le HOST, les coefficients aérodynamiques sont calculés grâce à des polynômes issus de mesures en soufflerie qui sont fonctions des incidence ($\alpha$) et dérapage ($\beta$) locaux pour les

petits angles et grâce à des extrapolations de polaires à iso-$\alpha$ et à iso-$\beta$ approchées par des polynômes pour les grands angles, un raccord est effectué pour déterminer les angles intermédiaires. Cependant, une modélisation pareille pose problème pour cette application. Tout d'abord, elle induit une mauvaise visibilité sur leur évolution, ce qui rend difficile toute interprétation vis-à-vis d'études paramétriques. Ensuite, elle donne lieu à des artefacts numériques qui nuisent au bon déroulement de l'algorithme de continuation. Une modélisation simplifiée telle que présentée ci-dessus est donc préférable pour notre application.

### 6.5.5 Modélisation de la dérive

La modélisation adoptée pour la dérive est la même que pour l'empennage horizontal et s'inspire aussi de la formulation la plus simple disponible. La portance latérale générée par la dérive a pour expression générique :

$$Y_{VT} = \frac{1}{2} C_Y \rho S_{VT} V_{VT}^2$$

où $S_{VT}$ est la surface de la dérive et $V_{VT}$ la vitesse de l'air au niveau de celle-ci.

Une description du coefficient de portance $C_Y$ est choisie telle qu'elle soit localement affine vis-à-vis de l'angle d'attaque au voisinage de 0 :

$$C_Y = C_{Y_\beta} \sin(\beta_V - \beta_{V0})$$

Et il sature quand il dépasse une certaine valeur :

$$\text{si } C_{Y_\beta} \sin(\beta_V - \beta_{V0}) \geq C_{Y_{max}} \text{ alors } C_Y = C_{Y_{max}}$$

L'angle de calage $\beta_{V0}$ est non nul parce que le rôle de la dérive est de contribuer à la stabilité directionnelle et que le couple du rotor tend à faire tourner l'appareil dans le sens contraire de la rotation du rotor. En vol rectiligne à dérapage nul ($\beta_V \approx 0$), la dérive crée une force contribuant à compenser cet effet de façon à décharger le rotor arrière.

Finalement, pour ce modèle simplifié d'hélicoptère, le torseur au niveau de la dérive ne contient qu'une seule composante $Y_{VT}$.

### 6.5.6 Modélisation du fuselage

La modélisation du fuselage est entièrement décrite par la donnée des six coefficients aérodynamiques, correspondant aux trois coefficients de forces et aux trois coefficients de moments, qui sont déduits d'essais en soufflerie.

Le domaine de vol de l'hélicoptère est étendu en terme d'incidence et de dérapage par rapport à un avion. Il peut voler aux basses vitesses, comme c'est sa spécificité, mais aussi en vols vertical, latéral, arrière : il faut donc disposer d'un modèle sur de grandes plages de valeurs en $\alpha$ (incidence) et $\beta$ (dérapage). C'est pour cela que les calculs des différents domaines de vol sont distingués.

Voici la description des trois domaines :

- aux petits angles, c'est-à-dire dont la valeur est environ inférieure à 15° et qui correspondent à des vitesses de vol moyennes ou élevées, les coefficients sont calculés grâce à un polynôme interpolateur de données issues de mesures en soufflerie.

- aux grands angles, i.e. de valeurs supérieures à 25°, les coefficients aérodynamiques sont déterminés par l'interpolation linéaire d'une liste de valeurs tabulées.
- quant aux angles intermédiaires, le calcul de la polaire dans une telle plage s'effectue par un raccord entre la polaire aux grands angles et celle aux petits angles.

Pour ce qui est du fuselage, le modèle est empirique et les données sont issues d'essais en soufflerie. Dans les codes EUROPA et HOST, la structure et les informations exploitées pour décrire les efforts et les moments générés par cet élément sont à peu près identiques.

### 6.5.7 Sommation des torseurs au centre de gravité

Tous les efforts et moments générés par les différents éléments ont un point d'application propre. Les coordonnées d'un élément sont notées $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ dans le repère hélicoptère $\left(G, \vec{i}_H, \vec{j}_H, \vec{k}_H\right)$ où $G$ est le centre de gravité.

Pour déplacer les torseurs du point d'application $X_i$ au centre de gravité $G$, il faut appliquer la loi de changement de point de réduction d'un torseur. Ce déplacement est nécessaire afin d'effectuer le bilan dans le cadre du principe fondamental de la dynamique.

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M} \end{array} \right\}_{X_i} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M} + \vec{X}_i \wedge \vec{F} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_X \\ F_Y \\ F_Z \\ M_X + y_i \cdot F_Z - z_i \cdot F_Y \\ M_Y + z_i \cdot F_X - x_i \cdot F_Z \\ M_Z + x_i \cdot F_Y - y_i \cdot F_X \end{array} \right\}$$

Cela permet de rendre compte du fait qu'une force appliquée en un point autre que $G$ crée un moment au niveau du centre de gravité.

## 6.6 Validation

Afin de vérifier le réalisme du modèle qui vient d'être programmé, des comparaisons sont faites entre les résultats de ce dernier et du code EUROPA. Deux cas de vol sont choisis pour les tests. A une altitude de $1000m$, des balayages de points d'équilibre sont réalisés pour plusieurs cas de vol dont deux sont présentés ici. Le premier est un vol en palier (i.e. $V_Z = 0m/s$) et à faible vitesse d'avancement (où $V_H$ prend des vitesses de 0 à $40km/h$).

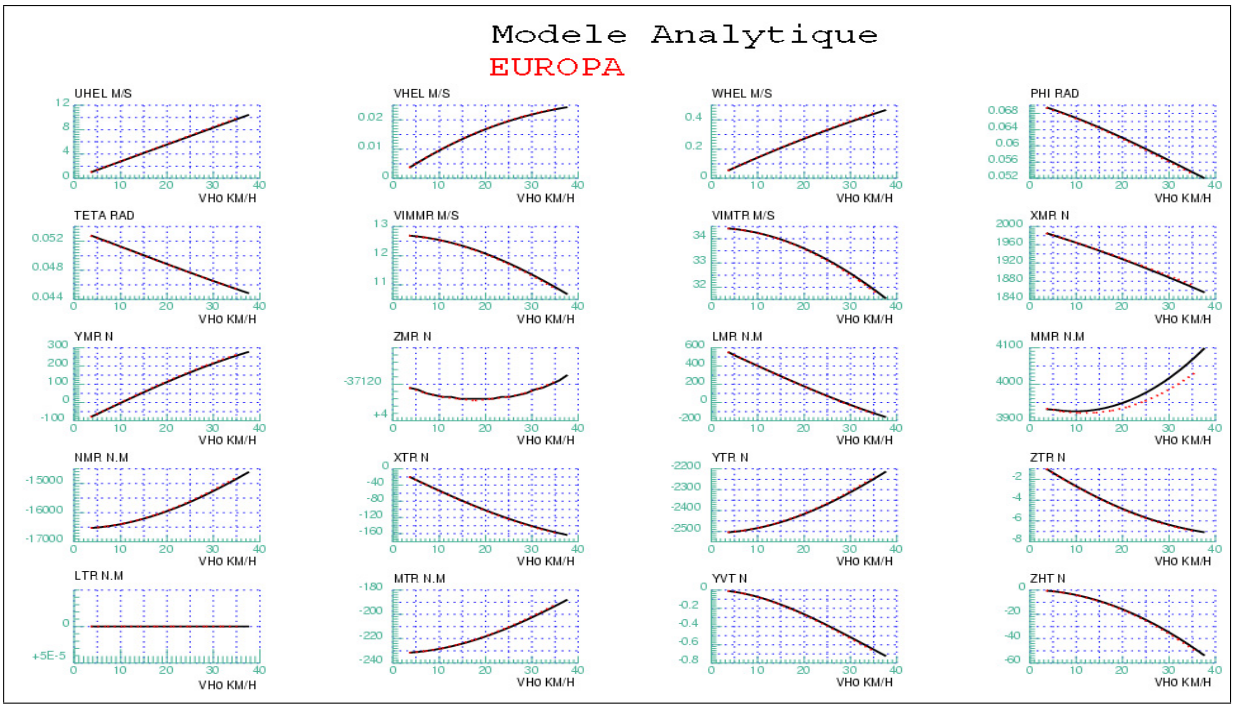



FIG. 6.3. Comparaison d'un vol en palier simulé avec le modèle analytique ou EUROPA

Le deuxième cas est un vol de montée à $V_Z = 5m/s$ et est animé de faibles vitesses d'avancement ($V_H = 0$ à $40km/h$) également.

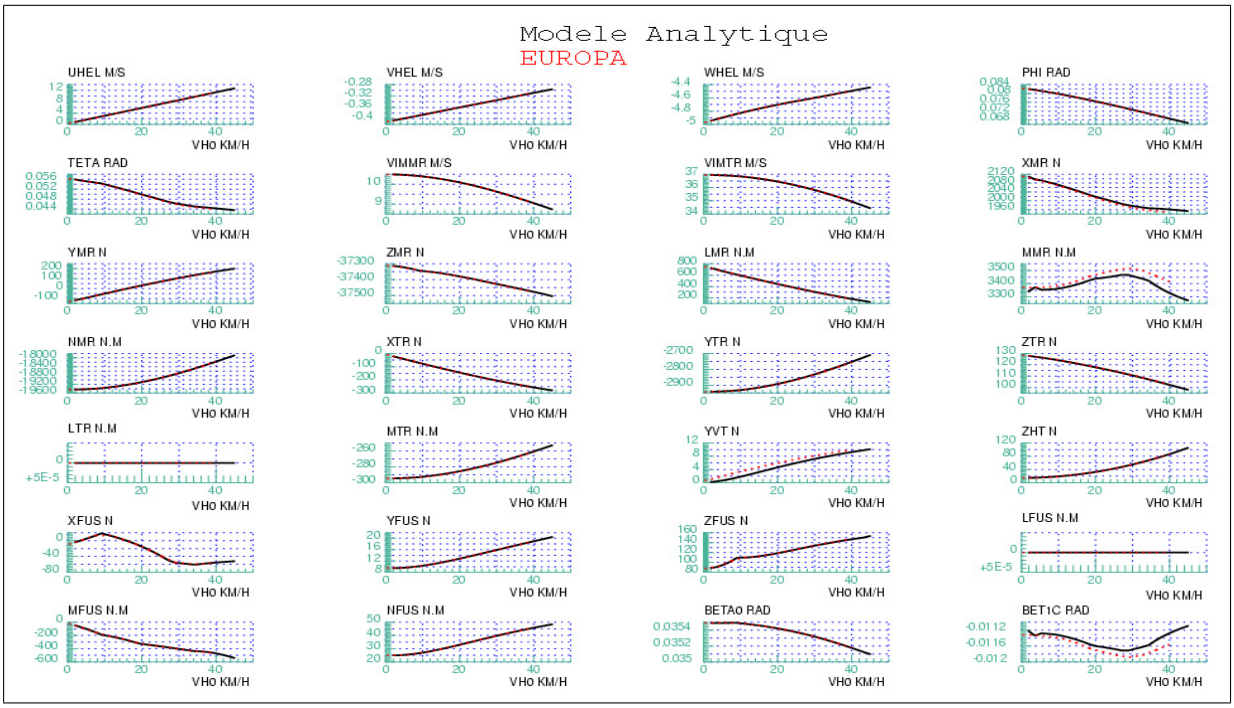



FIG. 6.4. Comparaison d'un vol de montée simulé avec le modèle analytique ou EUROPA

Dans les deux situations-tests, les valeurs des états, l'amplitude des efforts et celle des moments sont proches pour les deux logiciels. Cette constatation permet de vérifier que les deux modèles ont des propriétés communes et de valider le code développé.

## 6.7 Conclusion

Des travaux de modélisation étaient indispensables pour permettre certaines analyses (en particulier celle des cycles limites) et ils ont été effectués au cours de cette partie. Un modèle d'hélicoptère adapté aux besoins de cette thèse est ainsi à disposition. Du point de vue mathématique, le modèle est donné par des expressions analytiques et s'écrit explicitement sous la forme $\dot{X} = F(X, U)$ avec des vecteurs d'états $X$ et de commandes $U$ respectivement égaux à $X = \{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta\}$ et $U = \{DT0, DTC, DTS, DTA\}$. Elle contient néanmoins des boucles itératives dans le calcul des vitesses induites et des efforts des rotors (par la suite elles ont pu être évitées). En ce qui concerne la pertinence de la modélisation, elle définit un modèle simplifié de mécanique du vol. Cette dernière respecte les ordres de grandeur et reproduit les phénomènes principaux, elle convient principalement pour une utilisation dédiée à une phase d'avant-projet ou à des développements méthodologiques comme ceux étudiés dans cette thèse.

# Chapitre 7

# Mise en place de la méthodologie

**Introduction :** Dans la continuité des travaux accomplis jusqu'à présent à l'ONERA et à EUROCOPTER, pour mener à bien l'étude de théorie des bifurcations appliquée à la dynamique du vol de l'hélicoptère, la première approche fut d'utiliser d'abord le modèle d'hélicoptère complet que le code de mécanique du vol HOST fournit et de l'étudier grâce au code dédié aux systèmes dynamiques ASDOBI. Une première étape a consisté à réaliser le couplage entre ces deux codes de calcul. Ce travail complexe (et sans précédent), qui nécessite une bonne connaissance des deux codes, est présenté ci-après.

## 7.1 Objectifs

Le code ASDOBI a été intégré dans le code HOST comme une fonctionnalité de calcul supplémentaire à celles déjà existantes. Un répertoire *hostnl* a été créé pour accueillir les sources du module d'analyse non-linéaire et une **librairie hostnl.a** a été générée.

**Deux objectifs** ont dû être satisfaits et ont entraîné des modifications ou adaptations du code de calcul ASDOBI. Il s'agit, d'une part, de gérer l'**utilisation du code HOST** comme modèle et, d'autre part, de tenir compte du fait que l'**hélicoptère** est **d'un point de vue strictement mathématique toujours instable** et qu'il faut donc définir un peu **différemment la notion de stabilité**.

## 7.2 Données d'entrée d'ASDOBI

Le code ASDOBI, pour fonctionner, nécessite que plusieurs types d'informations lui soient fournis. Certaines doivent être précisées pour chacune des variables ou paramètres de contrôle, d'autres sont globales et servent à caractériser le type de calcul à effectuer, ses propriétés ainsi que les paramètres numériques de l'algorithme.

Le HOST pour sa part dispose déjà d'une grande partie de ces informations. En particulier, certaines données associées à chaque variable sont déjà utilisées dans les calculs propres au HOST. Il reste à définir les données manquantes dans le fichier de configuration d'ASDOBI.

Les données que le HOST fournit sont les suivantes :
- Données caractérisant le type de calcul : nombre de variables d'état, pas de temps pour les simulations temporelles
- Données caractérisant chacune des variables : incrément pour le calcul (par différence finie) des dérivées, valeurs initiales des états et des paramètres de contrôle

Quant aux informations que le HOST ne procure pas, ce sont :
- celles caractérisant le calcul :
  nombre de paramètres de contrôle, nombre de variables auxiliaires, type de calcul, sens de parcours de la continuation, valeur de la pulsation pour le calcul de l'enveloppe des cycles limites ainsi que ses caractéristiques, epsilons pour les critères de convergence des itérations de Newton ou d'existence d'une courbe d'équilibre fermée, valeur maximale de l'abscisse curviligne, durée d'une intégration temporelle, nombres maximaux d'itérations de Newton (au début et au cours de la continuation), nombre de points de sortie, méthode d'estimation de la jacobienne utilisée (décentrée ou centrée, estimée éventuellement par une méthode de quasi-Newton de Broyden), cadence d'écriture des sorties ;
- celles caractérisant les variables :
  bornes inférieure et supérieure, poids des variables dans le critère de convergence de Newton, écart maximal entre deux points consécutifs, préférence dans le choix de la variable la plus singulière, facteur de mise à l'échelle

Pour fournir à ASDOBI les informations dont il a besoin et que ne peut lui donner le HOST, un fichier de données est utilisé : *helico.d*. Il a la même structure que le fichier généralement utilisé avec ASDOBI. Il faut juste veiller à ce que les variables soient ordonnées dans le même sens que celui choisi dans le HOST.

## 7.3 Structure informatique du couplage

Les différentes informations doivent être échangées entre le code de simulation HOST et le code d'analyse ASDOBI. Le code HOST est très volumineux et il est donc hors de question d'intervenir directement au niveau des sources (en fortran) correspondant aux modélisations des éléments. Il faut choisir dans le HOST une interface qui gère les différents modèles et fournit les informations recherchées comme un oracle ou une boîte noire. Une telle démarche présente beaucoup d'avantages. En effet, avec le HOST, l'hélicoptère est construit avec toutes ses caractéristiques et les conditions de vol sont fixées. Cela permet de disposer d'une très grande modularité et flexibilité dans la définition du modèle. Ce dernier est ensuite utilisé tel quel pour effectuer les calculs de continuation.

**Les orientations concrètes choisies pour réaliser le couplage HOST-ASDOBI sont les suivantes :**

Afin de pouvoir échanger les données dans de telles conditions, d'un point de vue pratique, **l'étude se base sur les vecteurs et les routines utilisés lors d'un calcul de linéarisation avec le HOST**. Elles permettent de récupérer les valeurs des dynamiques des états en fonction des valeurs de ces mêmes états et de celles des commandes. Ce choix a été motivé par le fait que les variables utilisées lors d'analyses linéaire ou non-linéaire sont en réalité les mêmes. La différence est que **l'analyse linéaire se contente d'une étude locale** du comportement de l'aéronef tandis que **l'analyse non-linéaire va permettre d'étudier le comportement global** de l'appareil par rapport au(x) paramètre(s) de continuation. Un avantage de la stratégie adoptée est qu'en appelant les routines de la linéarisation, tous les vecteurs du HOST sont mis à jour. Dans la suite, les correspondances entre les routines du HOST et celles d'ASDOBI sont présentées pour chacune des étapes.

Lors de l'**étape d'initialisation** effectuée par la routine PARIN d'ASDOBI, plusieurs types d'initialisation doivent être faits dans le code HOST. Il y a tout d'abord celle de l'environnement comme le nom, les unités des positions et des vitesses des éléments. Puis il faut récupérer les valeurs calculées à l'équilibre, (qui sont obtenues éventuellement par la transformation harmonique/temporelle et) qui servent à fixer les valeurs initiales des vecteurs d'état et de commande.

Pour effectuer des **appels au modèle d'hélicoptère** que constitue le **HOST**, plusieurs étapes sont nécessaires. Dans un premier temps, les valeurs des états et des commandes du système dynamique présentes dans ASDOBI doivent être transmises aux vecteurs correspondant du HOST, que ce soient ceux contenant les vitesses ou les commandes de l'hélicoptère ou ceux plus spécialisés que sont la masse de l'appareil ou l'efficacité de la dérive. Dans un deuxième temps, l'évaluation des dynamiques s'ensuit grâce à la routine du code HOST qui réalise le calcul des fonctions de décision (utilisées jusqu'à présent lors d'une opération de linéarisation du HOST). Enfin, les valeurs des fonctions de décision vont compléter le vecteur accueillant les valeurs du membre de droite des équations : $\dot{X} = F(X, U)$.

Pour mener à bien ce couplage, il a fallu intégrer ces différents éléments dans l'architecture du code HOST.

| **HOST** | | |
|---|---|---|
| **hostg**<br>répertoire général | **hostnl**<br>répertoire non-linéaire (NL) | **hostl**<br>repértoire linéaire |
| **utilisation interactive**<br>* exécution des calculs<br><br><br><br><br><br><br><br><br>* exploitation des résultats | **gestion de l'analyse NL**<br><br>* initialisation du module d'analyse NL<br>* initialisation des vecteurs de l'analyse NL avec les valeurs à l'équilibre<br><br>**appel à ASDOBI**<br>* initialisation d'un calcul d'ASDOBI<br>* définition du système différentiel | **gestion de l'analyse linéaire**<br><br>* initialisation du module de linéarisation<br>* initialisation des vecteurs de la linéarisation avec les valeurs à l'équilibre<br><br>**appel au modèle HOST**<br><br><br>* calcul des fonctions de décision du modèle |

Tab. 7.1. Imbrication des différents éléments d'ASDOBI dans l'architecture du HOST

Le menu des calculs d'ASDOBI a été complété avec un menu donnant accès aux fonctionnalités de l'analyse non-linéaire. Les différentes parties nécessaires à l'analyse non-linéaire ont été programmées en respectant l'architecture typique d'un module du HOST. Au cours des différentes étapes, le recours aux routines déjà prêtes du répertoire "hostl" a permis d'utiliser le modèle d'hélicoptère du HOST assez efficacement.

Au-delà des travaux informatiques indispensables à la réalisation du couplage, il est nécessaire de préciser quels sont les choix de modélisation qui sont effectués et quels sont les paramètres caractéristiques du problème physique.

## 7.4 Modélisation du problème et paramètres caractéristiques

Pour analyser la dynamique d'un système par la théorie des bifurcations, il est nécessaire de déterminer, d'une part, les variables d'état caractéristiques du système (i.e. dont la dynamique permet de capturer le comportement) et, d'autre part, les commandes ou les paramètres de contrôle qui vont gouverner le système.

Les *variables d'état* de base qui caractérisent la dynamique du vol de l'hélicoptère sont (en règle générale) :

$$X = \{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta, Vim_{RP}, Vim_{RA}\}$$

soit 10 variables.

Elles regroupent celles classiques de la mécanique du vol de l'avion (ou de tout corps rigide en mouvement dans l'espace à 3 dimensions) $\{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta\}$ et d'autres spécifiques à la mécanique du vol de l'hélicoptère $\{Vim_{RP}, Vim_{RA}\}$ qui représentent les vitesses induites moyennes à travers le rotor principal (RP) et le rotor arrière (RA). Les variables classiques de la mécanique du vol contiennent les vitesses de translation, les vitesses de rotation et les angles d'Euler de l'aéronef. Elles sont résumées dans la figure (7.1), où MR est le sigle anglais de "Main Rotor" (Rotor Principal RP) et TR de "Tail Rotor" (Rotor Arrière RA).

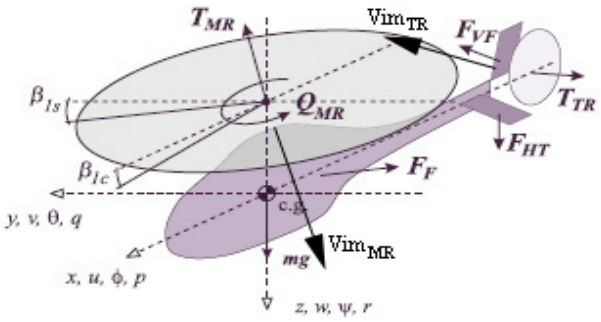



FIG. 7.1. Variables de la mécanique du vol de l'hélicoptère

Le cap $\psi$ n'a pas été pris en compte parce que la dynamique de l'appareil est analysée indépendamment de son déplacement ou de sa navigation dans un référentiel terrestre (le cap étant défini par rapport à la direction Nord magnétique, l'angle de route par rapport au Nord géographique). Le problème de dynamique du vol pur est donc indépendant de $\psi$. Il ne le serait plus si l'analyse portait sur une mission dans sa globalité, incluant une certaine tâche de navigation.

Dans le cas d'une modélisation analytique des rotors, ces derniers peuvent alors être caractérisés uniquement par leurs vitesses induites $\{Vim_{RP}, Vim_{RA}\}$ qui représentent les variables caractéristiques minimales. Si une modélisation numérique (par éléments de pale) est adoptée, la description du rotor principal tient aussi compte des mouvements de battement et de traînée des pales qui ont des dynamiques du second ordre, ainsi que de la dissymétrie du champ des vitesses induites sur le rotor. Les variables d'état relatives aux rotors sont alors :

$$\left\{Vim_{RP}, Vic_{RP}, Vis_{RP}, \delta_0, \delta_{1c}, \delta_{1s}, \beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}, Vim_{FAN}, \dot{\delta}_0, \dot{\delta}_{1c}, \dot{\delta}_{1s}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{1c}, \dot{\beta}_{1s}\right\}$$

où $Vim_{FAN}$ est la vitesse induite à travers le rotor arrière dans le cas d'un fenestron c'est-à-dire un rotor arrière caréné ou fan ($Vim_{TR} = Vim_{RA} = Vim_{FAN}$).

Les fonctions *dynamiques* qui vont caractériser le modèle d'hélicoptère sont :
– pour les variables classiques de la mécanique du vol :

$$\dot{X} = \left\{\dot{U}_{hel}, \dot{V}_{hel}, \dot{W}_{hel}, \dot{P}_{hel}, \dot{Q}_{hel}, \dot{R}_{hel}, \dot{\phi}, \dot{\theta}\right\}$$

– pour celles décrivant les rotors :
$\left\{\frac{dVim_{RP}}{dt}, \frac{dVim_{FAN}}{dt}\right\}$ (modèle rotor analytique) ou
$\left\{\frac{dVim_{RP}}{dt}, \frac{dVic_{RP}}{dt}, \frac{dVis_{RP}}{dt}, \dot{\delta}_0, \dot{\delta}_{1c}, \dot{\delta}_{1s}, \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{1c}, \dot{\beta}_{1s}, \frac{dVim_{FAN}}{dt}, \ddot{\delta}_0, \ddot{\delta}_{1c}, \ddot{\delta}_{1s}, \ddot{\beta}_0, \ddot{\beta}_{1c}, \ddot{\beta}_{1s}\right\}$ (modèle rotor numérique)

Les commandes gouvernant l'hélicoptère sont au nombre de 4 et sont notées :

$$\{DT0, DTC, DTS, DTA\}$$

Elles correspondent respectivement au pas collectif $DT0$, au pas cyclique latéral $DTC$, longitudinal $DTS$ et au pas collectif du rotor arrière $DTA$. Les 3 premières gouvernent le rotor principal et la dernière le rotor arrière. L'exposé présentera plus tard comment les utiliser pour une telle application et quelles sont les adaptations à apporter afin de rendre effective la méthodologie d'analyse.

## 7.5 Définition du critère de stabilité

Une définition rigoureusement mathématique de la stabilité du système ne peut pas convenir dans ce cas. En effet, si toutes les variables d'état sont prises en compte pour le calcul du spectre, il est possible qu'un tel système soit toujours considéré comme instable.

Cette constatation est étayée dans la suite. Le nombre de variables est assez important et il est indispensable de toutes les garder afin que les valeurs numériques restent réalistes. Les forts couplages qui existent pour un hélicoptère entre les différents états le caractérisant rendent impossibles toute réduction du nombre d'états comme l'exige la méthodologie et comme le serait la procédure dans une étude de théorie des bifurcations appliquée à un autre sujet (avions de combat, sous-marins, ...)

Par contre, elles peuvent être superflues quand il s'agit de déterminer la stabilité physique du système. D'autant plus qu'avec un grand nombre de variables, des valeurs propres de partie réelle positive peuvent exister de façon assez probable, mais celles-ci ne correspondent en fait qu'à une instabilité marginale.

Pour déterminer la stabilité de l'hélicoptère, le critère se contente donc de prendre en compte un ensemble réduit de variables d'état qui dépend du type de vol associé au phénomène considéré.

Par exemple, dans le cas du VRS, c'est le sous-ensemble de variables d'état $\{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, Vim_{RP}\}$ qui est choisi, c'est-à-dire que la stabilité du système vis-à-vis du phénomène aérodynamique de VRS est déterminée en calculant le spectre de la matrice $\left[\frac{d(\dot{U}_{hel}, \dot{V}_{hel}, \dot{W}_{hel}, \dot{Vim}_{RP})}{d(U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, Vim_{RP})}\right]$. Pour l'étude du roulis hollandais, la stabilité vis-à-vis du mode propre oscillant est caractérisée par les variables du bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$.

Cette restriction intervient dans l'évaluation de l'indice de stabilité en un point d'équilibre, mais aussi quand il s'agit de calculer le lieu des points de bifurcation : ce n'est pas le déterminant du système complet qui est évalué, mais seulement celui de la jacobienne extraite.

## 7.6 Organisation d'un calcul HOST-ASDOBI

Tout calcul HOST-ASDOBI fait intervenir différentes étapes explicitées dans cette section.

Un calcul HOST, que ce soit une simulation temporelle ou une linéarisation par exemple, est toujours précédé d'un calcul d'équilibre. De la même façon, quelle que soit la fonctionnalité exécutée avec ASDOBI, la première étape est toujours de **chercher un premier point d'équilibre** $(X_0, U_0)$ grâce au HOST. A noter que, d'un point de vue pratique, ce premier point est choisi, en général, loin de la région qui contient des bifurcations. C'est seulement dans un second temps qu'est parcourue la zone plus complexe de dynamique plus riche (zone dite "catastrophique" au sens où les bifurcations sont assimilables à des "catastrophes" selon la théorie de René Thom [Thom 1972]).

La deuxième étape est l'initialisation des données d'ASDOBI. Ces données servent, d'une part, à caractériser le calcul ou à définir les paramètres numériques nécessaires à son exécution. Elles permettent, d'autre part, d'initialiser les valeurs des états et des commandes avec celles à l'équilibre calculées précédemment avec le HOST.

La troisième étape est le calcul des **nouvelles valeurs des états et du (ou des) paramètre(s) de contrôle** $(X, U)$ par ASDOBI. En effet, afin de décrire par continuation toute la courbe d'équilibre, ASDOBI perturbe le vecteur $(X, U)$ en fonction des données du calcul et des valeurs d'équilibre des équations ou dynamiques des états que lui fournit le modèle HOST.

La quatrième étape correspond à l'**évaluation des équations et des dérivées** du modèle pour ces nouvelles valeurs d'états et de paramètres de contrôle. Elle est effectuée grâce à un appel au HOST qui détermine la cinématique et les efforts aéromécaniques dans la configuration actuelle de l'hélicoptère.

Le cœur de la résolution est constitué par les étapes 3 et 4 qui bouclent jusqu'à la fin du calcul de continuation.

Toutes ces informations sont résumées dans un schéma (7.2). Il illustre le rôle du programme ASDOBI. Ce dernier est le noyau de calcul qui procède à la description par continuation de la courbe solution. Il fait varier les vecteurs d'états et de commandes et récupère les valeurs des équations dont il a besoin afin de réaliser l'intégration du modèle.

Le HOST, quant à lui, fournit le système d'équations qui est constitué entre autres des dynamiques des variables d'états et des conditions de vol. Il construit le modèle d'hélicoptère et effectue les initialisations nécessaires afin de préparer le calcul de continuation.

Le schéma (7.2) et le tableau (7.2) présentent une synthèse de l'organisation d'un **calcul HOST-ASDOBI**.

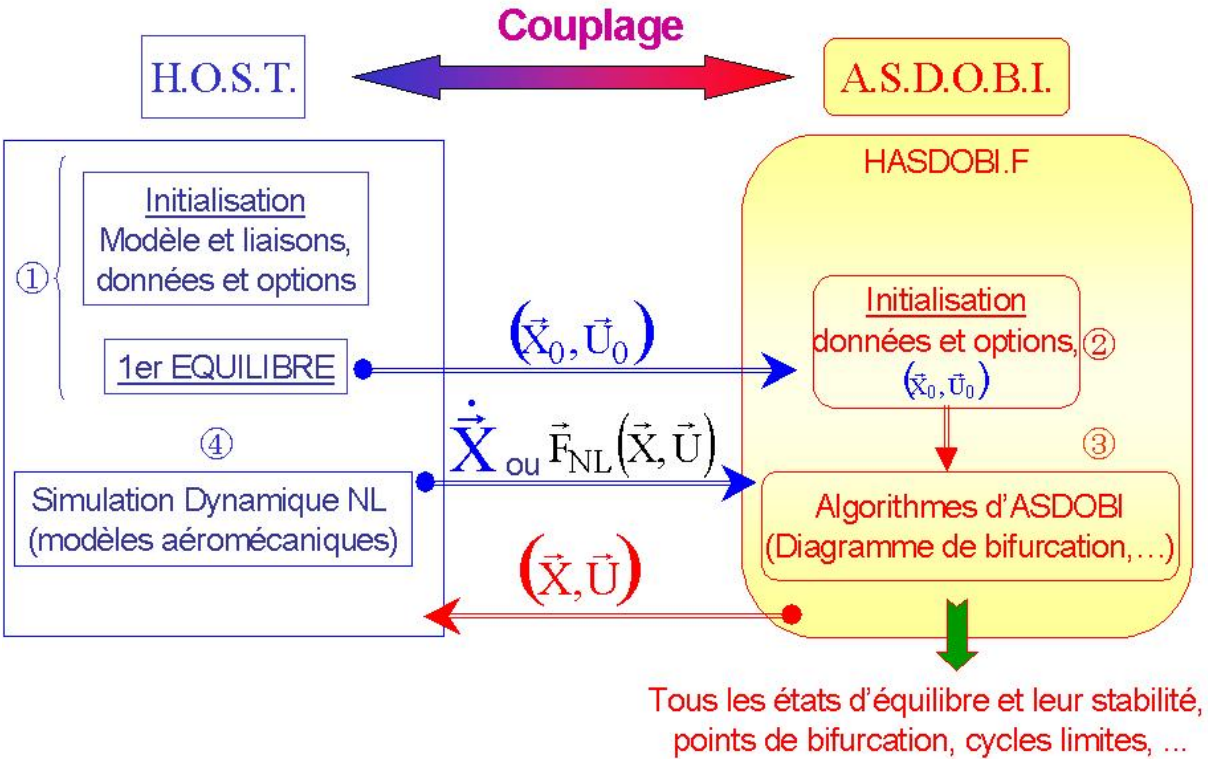



FIG. 7.2. Couplage du code HOST avec le code ASDOBI

| phase | actions |
|---|---|
| 1 | création et initialisation du modèle HOST |
| | calcul d'un premier état d'équilibre dans le HOST (algorithme de Newton-Raphson) |
| 2 | communication par HOST de l'état d'équilibre $(X_0, U_0)$ à ASDOBI |
| | initialisation des données et des options d'ASDOBI |
| | dont les valeurs d'entrée des états et des commandes |
| 3 | estimation du point suivant $(X, U)$ de la courbe grâce à l'algorithme de continuation |
| 4 | évaluation par le HOST des dynamiques $\dot{X}$ ou des équations |
| | non-linéaires $F_{NL}(X, U)$ |

TAB. 7.2. Phases d'un calcul HOST-ASDOBI

**Transition :** Les explications détaillaient quels sont les travaux informatiques effectués afin de coupler le code d'analyse des systèmes dynamiques avec le code de mécanique du vol des hélicoptères et quels sont les choix qui ont été faits pour le mener à bien. Cependant, force est de constater que, dans le cas des hélicoptères, la méthodologie ne peut toujours pas être appliquée telle quelle. Une description mathématique particulière est bien souvent à adopter et des travaux supplémentaires de mise en forme sont à mener. Ce sont ces aspects qui vont être décrits dans la partie suivante. La première application aura pour sujet d'étude les cas de vol de descente associés au phénomène aérodynamique de l'état d'anneaux tourbillonnaires par continuité avec l'étude initiale menée dans [Basset 2002].

# Troisième partie

# Contributions à l'analyse de la dynamique du vol non-linéaire des hélicoptères

# Chapitre 8

# Application de la méthodologie au cas d'une bifurcation associée à une valeur propre réelle : l'état d'anneaux tourbillonnaires

**Introduction :** Afin de mener à bien cette étude, une caractérisation mathématique du phénomène doit d'abord être donnée. Pour cela, il faut fournir une formulation mathématique adaptée au problème avant de pouvoir calculer la courbe des points d'équilibre et le lieu des points de bifurcation. Par la suite, il conviendra d'interpréter les résultats et de mettre en évidence les contributions pratiques que la méthodologie peut apporter : la création d'un nouveau critère de prédiction de la région de Vortex Ring State et l'exploitation d'un nouvel outil pour l'analyse de la sensibilité de la zone de VRS vis-à-vis de paramètres spécifiques.

## 8.1 Courbe caractéristique des points d'équilibre (diagramme de bifurcation)

### 8.1.1 Mise en forme du problème pour le calcul de la courbe des points d'équilibre

Soit un système dynamique $\dot{X} = f(X, U)$ dont les points d'équilibre sont recherchés. Ces derniers sont assimilés aux valeurs d'états et de commandes $(X, U)$ qui annulent la dynamique du système.

La mise en œuvre de la méthodologie nécessite l'utilisation de l'algorithme de continuation. Cependant, comme expliqué dans la section 5.1, l'**algorithme de continuation résout un problème implicite** ayant $n$ équations et $(n+1)$ variables. Il s'ensuit qu'il n'utilise qu'un seul paramètre de contrôle et qu'il est nécessaire de choisir celui à faire varier pour cette étude de bifurcation.

Pour un hélicoptère, la traction développée par le rotor est directement liée à l'angle d'attaque des pales dont la valeur moyenne est commandée par le pas collectif $DT0$ du rotor principal, c'est donc cette commande qui a été choisie comme paramètre de contrôle du diagramme de bifurcation dans le cas de l'étude du Vortex Ring State. En effet, ce phénomène apparaissant au niveau du rotor principal en vol de descente, le pas collectif est la commande prédominante dans

ce type de vol.

Dans un premier temps, une tentative est faite de procéder de la même façon que pour les études menées sur les avions. Elle consiste à concevoir des lois qui font varier les autres commandes de façon linéaire par rapport à $DT0$ en rajoutant des équations qui gouvernent les commandes directement, comme $DTA = k_0 \times DT0 + k_1$.

Mais la dynamique non-linéaire très forte et les couplages importants de l'hélicoptère rendent de telles lois totalement inefficaces pour fixer le cas de vol et stabiliser l'appareil en un point donné. Même en asservissant chacune des commandes (par des lois linéaires), l'hélicoptère devient immédiatement instable dès qu'il s'éloigne légèrement du point d'équilibre initial.

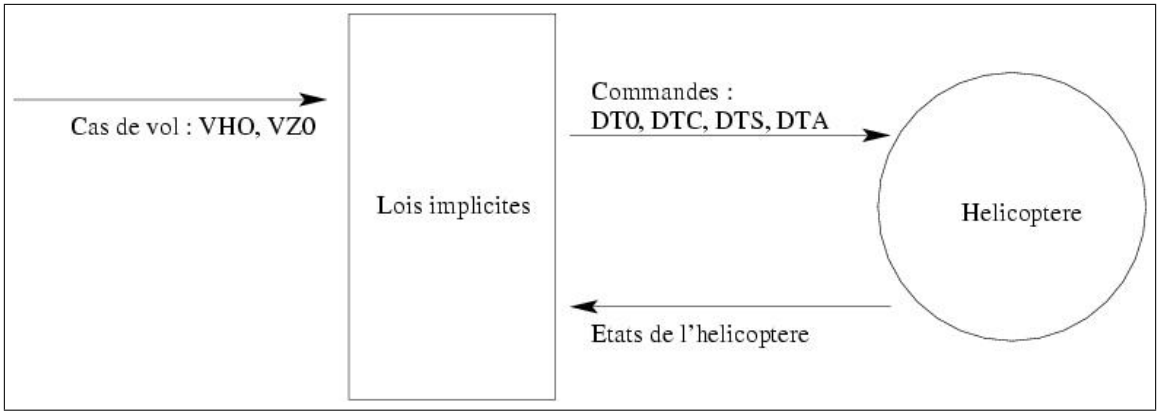



FIG. 8.1. Lois implicites pour imposer le cas de vol

Par conséquent, la décision est prise d'imposer les conditions de vol avec des lois qui sont en fait définies de façon implicite (schéma 8.1). Elles sont construites par l'intermédiaire des équations algébriques qui correspondent au cas des vols de descente i.e. dans un plan vertical et de vitesse de lacet nulle :

$$\begin{cases} R_{hel}\left(X, U, DTC, DTS, \mathbf{DTA}\right) & = 0 \\ V_Y\left(X, U, \mathbf{DTC}, DTS, DTA\right) & = 0 \\ V_X\left(X, U, DTC, \mathbf{DTS}, DTA\right) & = const \end{cases}$$

La commande qui se retrouve principalement déterminée par chaque équation est marquée en gras :

- la condition de vitesse de lacet nulle détermine la commande du rotor arrière $DTA$
- la condition de vitesse latérale nulle impose le pas cyclique latéral $DTC$
- la condition de vitesse longitudinale constante fixe le pas cyclique longitudinal $DTS$

Ces équations algébriques permettent de spécifier ou d'imposer un cas de vol donné sans qu'il ne soit nécessaire de construire une loi de commande explicite qui, de toute façon, ne serait valide qu'aux alentours immédiats du point choisi pour la conception de cette loi. En effet, les très nombreux couplages et les fortes non-linéarités de l'hélicoptère rendent (la validité de) toute boucle de retour figée inadaptée dès que l'état s'écarte du point de conception de cette loi de commande. En agissant de la sorte, le pas collectif $DT0$ peut être choisi comme paramètre de continuation tandis que les trois commandes $(DTC, DTS, DTA)$ sont déterminées par les équations algébriques complémentaires.

En résumé, la description mathématique du problème est la suivante. Le modèle d'hélicoptère se compose de 13 équations pour 14 variables. Les variables sont constituées de 10 états et de 4 commandes. Quant aux équations, il y a d'une part celles qui correspondent à l'annulation des dynamiques :

$$\dot{X} = \left\{\dot{U}_{hel}, \dot{V}_{hel}, \dot{W}_{hel}, \dot{P}_{hel}, \dot{Q}_{hel}, \dot{R}_{hel}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{V}im_{RP}, \dot{V}im_{RA}\right\} = 0$$

et d'autre part celles qui correspondent aux contraintes algébriques imposant le cas de vol :

$$\{R_{hel}, V_Y, V_X\} = \{0, 0, const\}$$

La commande principale est le pas collectif $DT0$ et les commandes supplémentaires sont $\{DTC, DTS, DTA\}$.

La formulation mathématique adoptée n'est plus celle usuelle d'un système différentiel. Comme des équations algébriques sont prises en compte, il s'agit en fait d'un **système algébro-différentiel (DAE)**. La méthodologie d'analyse devra s'adapter à cette situation.

La figure (8.2) montre une comparaison de la courbe de gauche obtenue par balayage avec l'algorithme de Newton-Raphson du HOST avec celle de droite issue de la continuation d'ASDOBI. Elle certifie que les mêmes valeurs sont bien retrouvées et valide le travail de couplage.

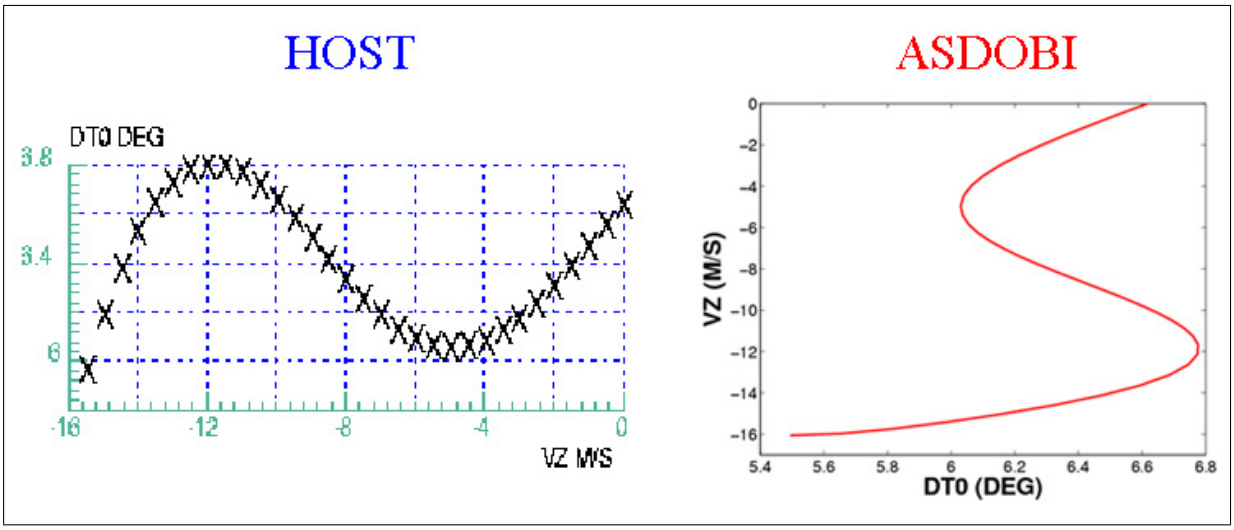



FIG. 8.2. Comparaison des courbes de points d'équilibre obtenues par balayage avec le HOST (à gauche) ou par continuation avec ASDOBI (à droite)

Les travaux de théorie des bifurcations appliquée recherchent souvent à appliquer la méthodologie sur le modèle le plus réduit possible et commencent la plupart du temps par une phase de réduction de modèles. Suivant cette démarche habituelle et dans un premier temps, les investigations se limitaient aux états $\{W_{hel}, Vim_{RP}\}$ afin de choisir un modèle de petite taille mais contenant toute l'information nécessaire au cas de vol étudié i.e. l'état d'anneaux tourbillonnaires en vol de descente. Cependant, l'approximation se révèle mauvaise après comparaison avec le balayage d'équilibre correspondant. Cela provient du fait que dans le cas du système restreint les autres états de l'hélicoptère ne varient pas, comme les assiettes latérales et longitudinales $\phi$ et $\theta$. Les couplages importants propres à l'hélicoptère ne permettent pas de telles approximations.

A noter qu'à première vue, il peut sembler paradoxal de considérer les vitesses induites comme des variables d'état mais en fait pour un hélicoptère, il est important d'avoir des variables qui caractérisent le rotor et en particulier sa dynamique représentée ici par la vitesse induite moyenne. Par ailleurs, la prise en compte de la dynamique de la vitesse induite permet aussi d'équilibrer celle-ci, la traction et les angles de conicité, qui sont tous interdépendants, la conicité désignant l'angle de battement moyen des pales $\beta_0$.

Une alternative pratique à cette première formulation consiste à réécrire le problème en rajoutant l'équation algébrique : $V_Z\left(X, U, \mathbf{DT0}, DTC, DTS, DTA\right) = V_{Z0}$. Le pas collectif $DT0$ est alors gouverné grâce à une équation implicite et le paramètre de contrôle devient alors la vitesse de descente verticale $V_{Z0}$.

Le problème est alors décrit par **14 équations** et **15 variables**. Les paramètres de contrôle sont $V_{Z0}$ et $V_{H0}$, ces derniers définissent les conditions du vol de descente.

### 8.1.2 Résultat et interprétation

L'application du couple de codes HOST-ASDOBI au cas du vol de descente de l'hélicoptère Dauphin traversant le Vortex Ring State permet de déterminer la courbe des points d'équilibre, appelée **diagramme de bifurcation**, obtenue après calcul avec l'algorithme de continuation et illustrée par (8.3). Le paramètre de contrôle utilisé est ici le pas collectif $DT0$. C'est donc lui qui se retrouve en abscisse. Les états du système et les variables contraintes sont en ordonnée.

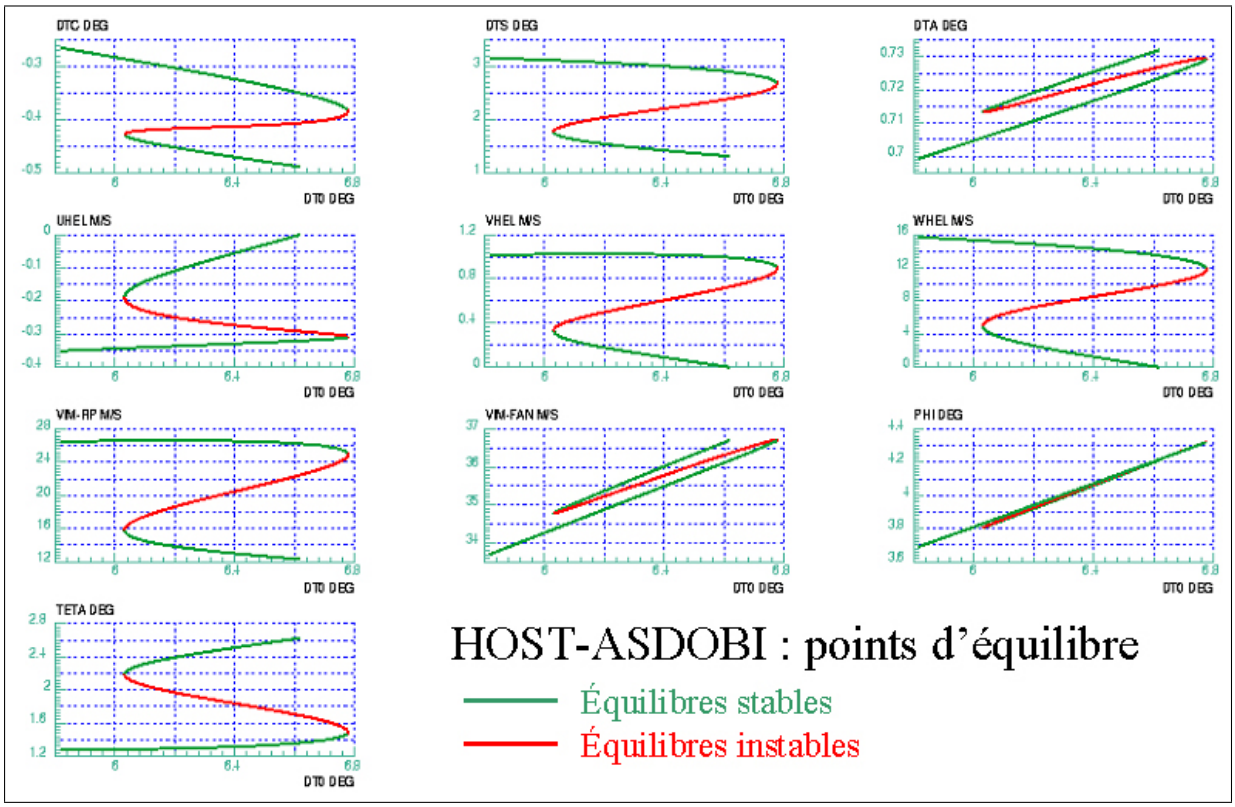



FIG. 8.3. Diagramme de bifurcation caractéristique du VRS

Il y a **2 branches d'équilibres stables** (en vert) **au milieu desquelles se trouve une branche instable** (en rouge). Les deux **bifurcations** sont des **points de retournement**, cas particulier de **bifurcation (associée à une valeur propre) réelle**. Entre les deux points de bifurcation, la branche est instable et pour une valeur du paramètre de contrôle comprise entre ces deux valeurs critiques, il apparaît 3 états d'équilibre. En dehors de cette zone, il ne reste plus qu'un seul état d'équilibre stable. Le **diagramme de bifurcation** est typique d'un **hystérésis**.

Concrètement, pour le type de vol étudié (descente dans un plan vertical), l'instabilité possible liée au VRS apparaît sur le mouvement du centre de gravité. La stabilité du système peut donc être caractérisée par le jeu de variables $\{V_X, V_Z, Vim_{RP}\}$, ce qui dans le repère hélicoptère correspond à $\{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, Vim_{RP}\}$. Les autres variables sont prises en compte afin d'avoir des résultats réalistes (sinon des variables resteraient fixées arbitrairement). Mais ces dernières ne caractérisent pas physiquement la stabilité du système.

Au niveau du premier point de bifurcation dont la vitesse de descente est la moins forte et du deuxième de vitesse de descente la plus importante, les matrices jacobiennes du système complet ont pour vecteurs propres associés à la valeur propre nulle :

```
 0.0212   -0.0039
-0.0464    0.0511
-0.6957    0.6968
-0.0000    0.0000
 0.0000    0.0000
 0.0000    0.0000
-0.0000   -0.0001
 0.0011   -0.0012
-0.7162    0.7146
 0.0205   -0.0337
-0.0001    0.0002
-0.0013    0.0018
 0.0000   -0.0000
```

Les composantes dominantes sont $W_{hel}$ et $Vim_{RP}$ qui sont effectivement des variables fortement liés à l'état d'anneaux tourbillonnaires.

Au point de bifurcation, comme le système ne peut se stabiliser sur une branche instable et que le nombre de points d'équilibre pour une commande donnée change, il se produit un **saut** qui s'observe sur le diagramme de bifurcation (8.3). Il rend compte de la **perte de stabilité** de l'hélicoptère quand il **rentre en état d'anneaux tourbillonnaires** et des **vitesses de descente importantes** qui animent **soudainement** l'appareil.

**Transition :** La courbe des points d'équilibre de l'hélicoptère en Vortex Ring State a été déterminée par continuation et ses propriétés ont été dégagées. Le calcul du lieu des points de bifurcation permettra ensuite de délimiter la zone critique du VRS.

## 8.2 Lieu des points de bifurcation

Il s'agit de déterminer quels sont les **couples de commandes pour lesquels une bifurcation apparaît**.

La caractérisation d'un point de bifurcation fait intervenir une équation supplémentaire qui correspond à l'existence d'une valeur propre nulle : $\det(D_X F) = 0$. Puisque l'algorithme de continuation résout un problème implicite de $n$ équations et de $(n+1)$ variables, le système associé au calcul des points de bifurcation requiert donc une équation algébrique en moins que

celui lié au calcul des points d'équilibre.

Pour ce problème, le choix des différents éléments peut se faire de la façon suivante. Les commandes sont $\{DT0, DTS\}$ où le pas collectif $DT0$ régit la vitesse verticale et la commande cyclique longitudinale $DTS$ régit la vitesse horizontale, les équations de contraintes sont alors réduites à $\{R_{hel}, V_Y\} = 0$ et les commandes supplémentaires sont $\{DTC, DTA\}$.

Une autre possibilité est d'utiliser une formulation faisant intervenir l'intégralité des contraintes algébriques

$$\begin{cases} R_{hel}\left(X, U, DT0, DTC, DTS, \mathbf{DTA}\right) & = & 0 \\ V_Y\left(X, U, DT0, \mathbf{DTC}, DTS, DTA\right) & = & 0 \\ V_X\left(X, U, DT0, DTC, \mathbf{DTS}, DTA\right) & = & V_{H0} \\ V_Z\left(X, U, \mathbf{DT0}, DTC, DTS, DTA\right) & = & V_{Z0} \end{cases}$$

Les paramètres de contrôle sont dans ce cas la vitesse d'avancement $V_{H0}$ et la vitesse de descente $V_{Z0}$.

Le critère servant à détecter le point de bifurcation ne fait intervenir cependant que les dynamiques, les équations algébriques ne sont pas prises en compte : il s'écrit $\det\left(D_X\dot{X}\right) = \det\left(\frac{\partial X_i}{\partial \dot{X}_j}\right)_{(i,j)}$.

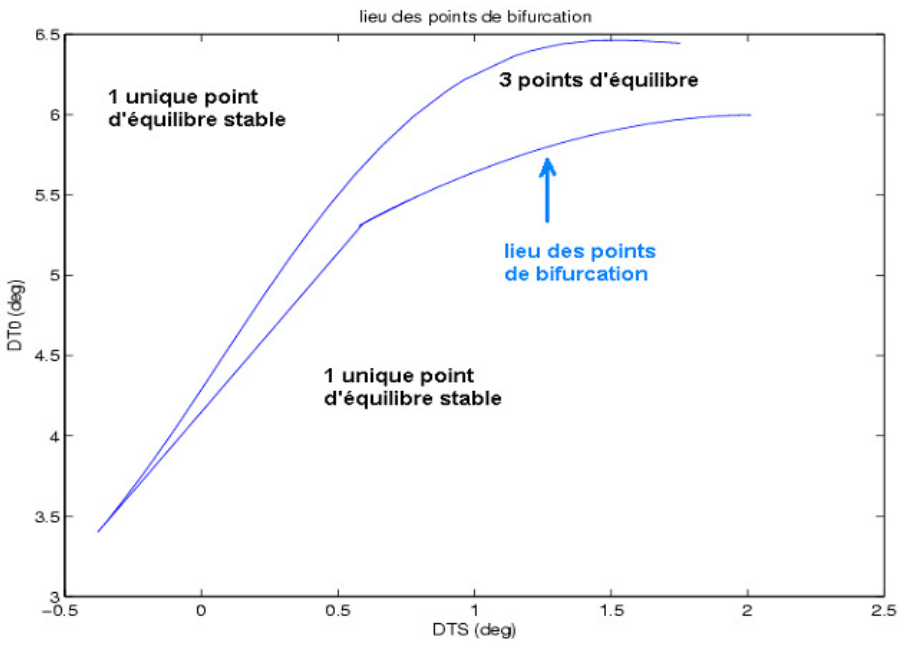



FIG. 8.4. Lieu des points de bifurcation projetés sur l'espace des commandes

Grâce au lieu des points de bifurcation, il est possible de circonscrire avec succès la zone de couples de commandes pour laquelle il y a 3 états d'états d'équilibre et qui contient en particulier un état d'équilibre instable. Ce diagramme exhibe aussi les points pour lesquels il y a un saut d'un état à un autre. Il détermine l'entrée dans la zone d'instabilité du VRS.

## 8.3 Simulations temporelles associées

Dans l'étude du diagramme de bifurcation, il est toujours important de faire le lien avec le comportement temporel du système. L'étude des états d'équilibre informe sur le comportement asymptotique du système i.e. il donne l'état du système au bout d'un temps (infini) pour un jeu fixé de commandes. Il faut cependant lui laisser le temps de se stabiliser. Le diagramme de bifurcation indique quels sont les états répulsifs ou attracteurs pour des valeurs fixées de commandes. Il ne donne cependant aucun ordre de grandeur sur le temps pour atteindre ces états asymptotiques. C'est cette information complémentaire que les simulations temporelles peuvent apporter. Elles ont aussi pour rôle de faire constater le comportement effectif du système. En effet, il ne faut pas oublier que la théorie des bifurcations est une méthodologie d'analyse. Il est très important de pouvoir faire le lien entre les différents diagrammes fournis par la théorie des bifurcations et le comportement dynamique de l'appareil, sur lequel ces diagrammes caractéristiques renseignent.

Pour le cas du Vortex Ring State étudié ici, la simulation temporelle illustre bien l'hystérésis prédite. Une petite perturbation de pas collectif au voisinage du point de bifurcation en régime hélicoptère suffit pour faire rentrer l'appareil en VRS, mais il faut une augmentation beaucoup plus importante pour remonter le long de la branche moulinet-frein, jusqu'à atteindre l'autre point de bifurcation, et ainsi voir le système revenir sur la branche correspondant au mode hélicoptère.

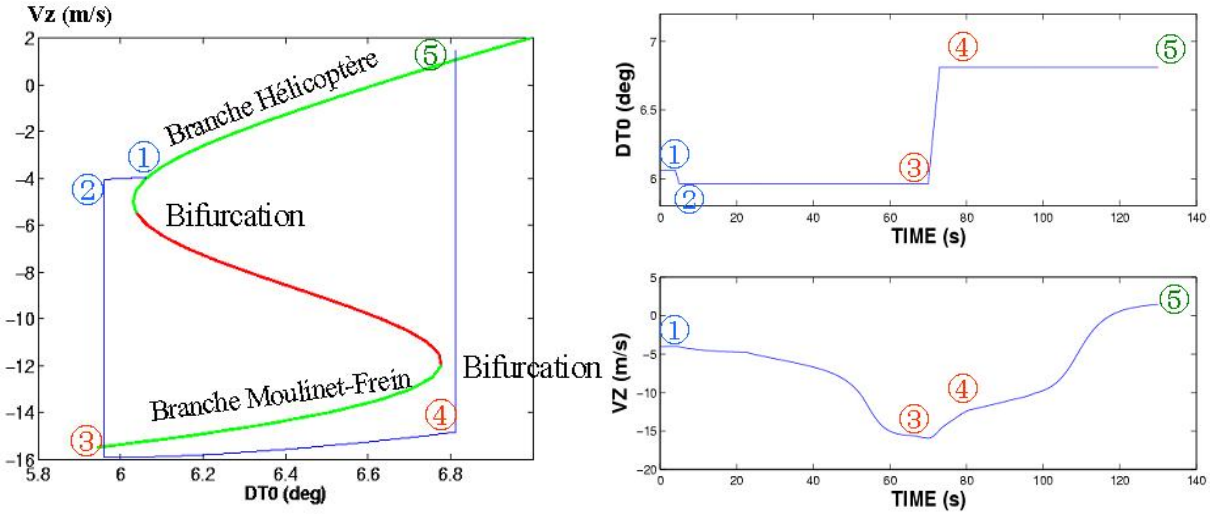



FIG. 8.5. Diagramme de bifurcation et simulation temporelle associée

Les numéros permettent de faire correspondre les états du diagramme de bifurcation avec ceux de la simulation temporelle. Le comportement intuitif du pilote qui consiste à faire légèrement revenir sa commande à sa valeur antérieure n'est pas suffisant pour rattraper un appareil qui vient de rentrer en VRS et dont la vitesse de descente augmente brutalement. Une fois en VRS, le pilote doit en fait donner un très grand coup de collectif pour en sortir, comme l'illustrent bien les simulations temporelles. Il est donc indispensable de trouver une autre stratégie pour quitter la zone dangereuse.

## 8.4 Stratégie d'échappement de la zone critique

D'un point de vue pratique, pour sortir d'un état d'anneaux tourbillonnaires, plutôt que d'agir sur le collectif, il vaut mieux prendre de la vitesse d'avancement. La surface des points d'équilibre permet d'illustrer cette technique de sortie du VRS. En effet, elle correspond tout à fait à une surface classique de type "cusp".

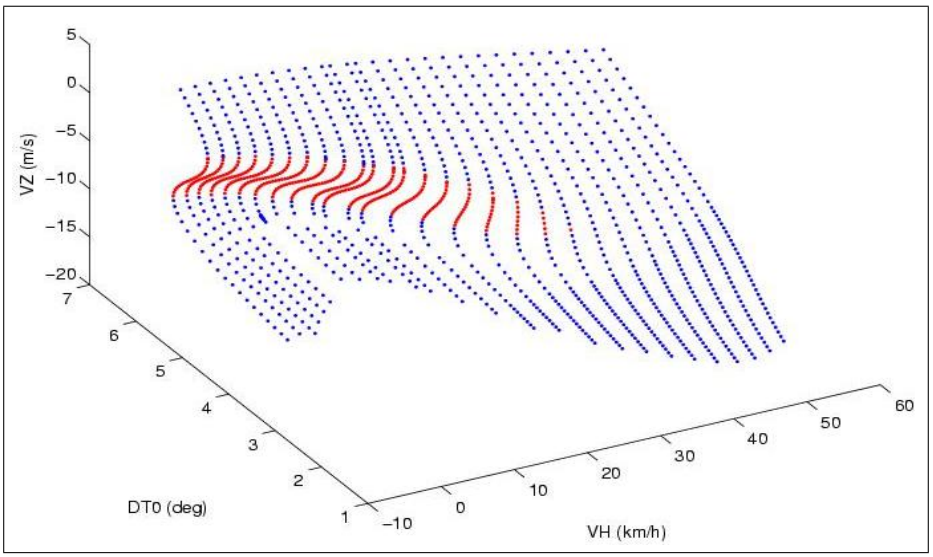



Fig. 8.6. Surface d'équilibre

Elle est caractérisée par l'existence d'un **repliement** c'est-à-dire d'une zone avec 3 points d'équilibre alors qu'ailleurs il n'y a qu'un unique point d'équilibre. Sur la figure (8.6), les points bleus correspondent aux points stables et les points rouges aux points instables. Une stratégie d'échappement de la zone instable se révèle directement. Dans le cas où l'état d'équilibre de l'appareil "a sauté soudainement" sur la branche avec de forts taux de descente depuis la branche hélicoptère, il se trouve sur la branche basse de la zone contenant trois points d'équilibre. En prenant de la vitesse d'avancement, la zone instable se réduit et finit par disparaître de telle sorte qu'il n'y a plus qu'un unique point d'équilibre. Ce point d'équilibre est stable : l'hélicoptère a été ramené dans une zone sans danger.

**Transition :** Le Vortex Ring State a été étudié grâce à l'outil de la théorie des bifurcations et certains résultats caractérisant le VRS ont été obtenus. Il est intéressant de les confronter avec ceux acquis différemment. En particulier, les hélicoptéristes sont intéressés par délimiter l'enveloppe du VRS.

## 8.5 Comparaison avec d'autres critères qui délimitent la zone de VRS

Les critères utilisés généralement pour prévoir la zone du VRS sont basés sur une annulation de la vitesse de convection des anneaux tourbillonnaires au niveau du rotor (cf. annexe B). Un nouveau critère est proposé, il est basé sur la détection d'une bifurcation qui correspond au changement effectif de stabilité du système, il ne fait donc pas appel à d'autres hypothèses que celles du modèle de mécanique du vol.

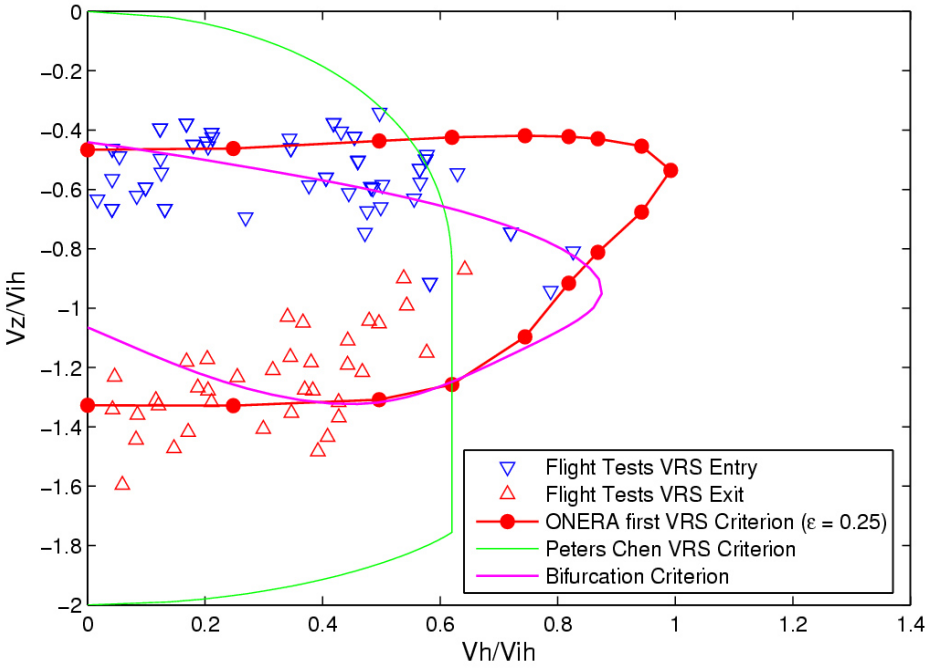



FIG. 8.7. Zone du VRS

La figure (8.7) présente les régions d'instabilité prédites par différents critères comme ceux de J. Jimenez (dont le label est "ONERA first VRS Criterion") ou de Peters D.A. & Chen S.-Y. (dont le label est "Peters Chen VRS Criterion") évoqués tous deux dans [Jimenez 2002]. Le dépouillement de la campagne d'essais menée par l'ONERA au Centre d'Essais en Vol d'Istres [Jimenez *et al.* 2002] fournit d'un autre côté les points de vol en lesquels la chute brusque de l'hélicoptère (Dauphin 365N) s'est produite et ceux en lesquels l'appareil s'est stabilisé. Ces points expérimentaux sont aussi reportés sur (8.7). La comparaison des diverses sources relatives à l'établissement d'une frontière de l'état d'anneaux tourbillonnaires permet d'évaluer l'intérêt de la détection des points de bifurcation.

Un résultat important est que le **lieu des points de bifurcation délimite bien la zone d'instabilité caractéristique du VRS**. La frontière obtenue recoupe bien les essais en vol pour la frontière supérieure.

Un **écart** est cependant observé pour la **frontière inférieure**. Il provient du fait que l'**essai en vol** diagnostique les conditions de **stabilisation de la chute**, tandis que le critère de **bifurcation** correspond au **saut entre la branche moulinet-frein et la branche hélicoptère**. Le premier point a une vitesse de descente plus forte que le deuxième. Cependant, effectuer une campagne d'essais au cours de laquelle la frontière est traversée de bas en haut est difficile car le vol dans l'état de moulinet-frein est difficilement praticable. La figure (8.8) expose cette situation.

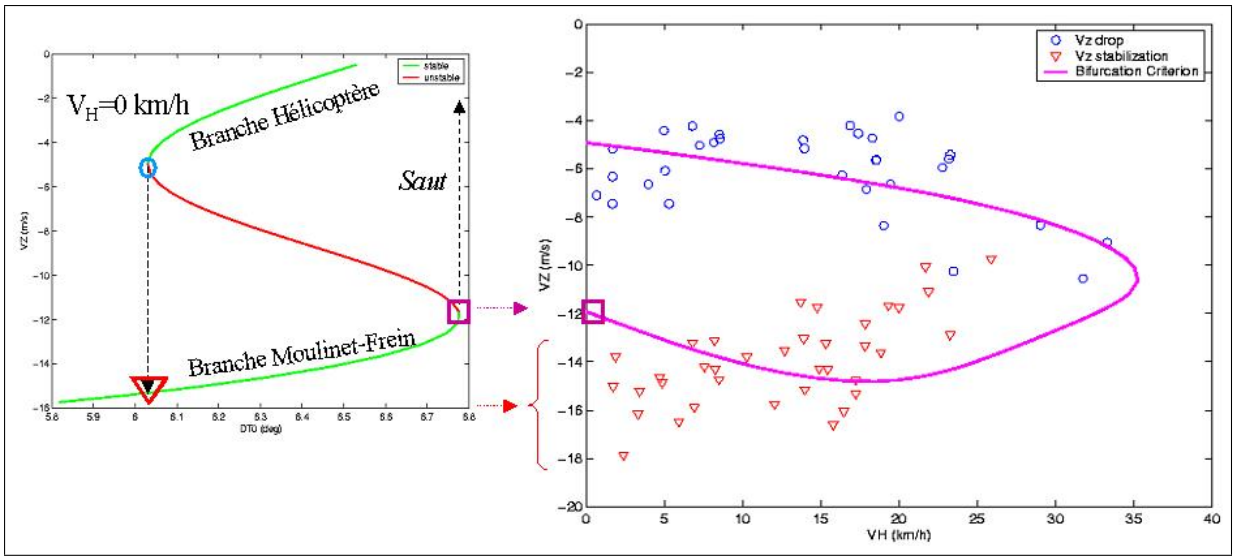



FIG. 8.8. Explication de la frontière inférieure du VRS

Un écart par rapport au critère de J. Jimenez est aussi constaté pour la frontière supérieure. En effet, comme le montre la figure (8.7), l'autre critère ("ONERA first VRS criterion") a une frontière supérieure horizontale i.e. l'entrée en état d'anneaux tourbillonnaires se produit pour une vitesse de descente $V_Z$ quasi-identique quelle que soit la vitesse d'avancement $V_H$. Cette nuance s'explique comme suit.

Le critère de bifurcation ("Bifurcation Criterion") met en évidence un point de retournement de $V_Z = f(DT0)$ qui est également le minimum du pas collectif $DT0 = f(V_Z)$ nécessaire au trim (équilibrage) de l'hélicoptère. Quand la vitesse d'avancement $V_H$ augmente, ce point particulier a une vitesse de descente $V_Z$ plus importante. Comme le pas collectif $DT0$ suit la même loi de variation que celle de la puissance requise par le rotor principal et est proche de celle du flux d'air axial moyen à travers le rotor $(V_{i_m} + V_Z)$, le minimum de cette dernière est atteint quand $\frac{d(V_{i_m}+V_Z)}{dV_Z} = 0$, ce qui est équivalent à $\frac{dV_{i_m}}{dV_Z} = -1$. Les résultats sont proches de ceux obtenus en considérant la stabilité de la dynamique verticale ("heave stability method") [Chen *et al.* 2006, Basset *et al.* 2007] et le point critique a une vitesse de descente plus importante quand la vitesse d'avancement augmente. Dans le cas du critère de Wolkowitch étendu (ou "ONERA first VRS Criterion" de la figure (8.7)), le point correspondant au minimum de vitesse induite de convection est situé à une vitesse de descente plus faible lorsque la vitesse d'avancement augmente, ceci est dû essentiellement au fait que la vitesse induite moyenne diminue avec la vitesse d'avancement. Mais, comme le critère détecte en fait les vitesses relatives inférieures à $\epsilon$, la frontière supérieure du domaine de VRS reste plus ou moins horizontale.

## 8.6 Analyse de sensibilité du domaine de VRS vis-à-vis du modèle de vitesse induite

Il s'agit d'étudier la façon dont évolue la zone critique circonscrite par le lieu des bifurcations en fonction des caractéristiques du modèle de vitesse induite. Le modèle de vitesse induite dans le VRS se base sur les valeurs de la théorie de la quantité de mouvement (interpolées entre les branches hélico et moulinet-frein) auxquelles est rajouté un surplus de vitesse induite correspondant au phénomène de recirculation de l'air à travers le rotor. Ce modèle est établi sur la base

d'essais en vol de l'hélicoptère Dauphin [Jimenez 2002]. Dans cette étude, la paramétrisation de la modélisation fait varier la courbure de ce surplus pour obtenir une famille de courbes de vitesse induite. Les évolutions en vol de descente sont tracées ci-dessous ainsi que les lieux des points de bifurcation. Le modèle original correspond à "$expo = 4$". La vitesse de l'air à travers le rotor $(V_{i_m} + V_Z)$ évolue comme le pas collectif nécessaire à la création d'une portance qui équilibre l'hélicoptère.

Les variations de différentes variables sont tracées en fonction de la vitesse de descente pour différents modèles de vitesse induite qui s'obtiennent en faisant varier cette augmentation non-linéaire de $V_{im}$ en fonction du taux de descente [Prasad *et al.* 2004].

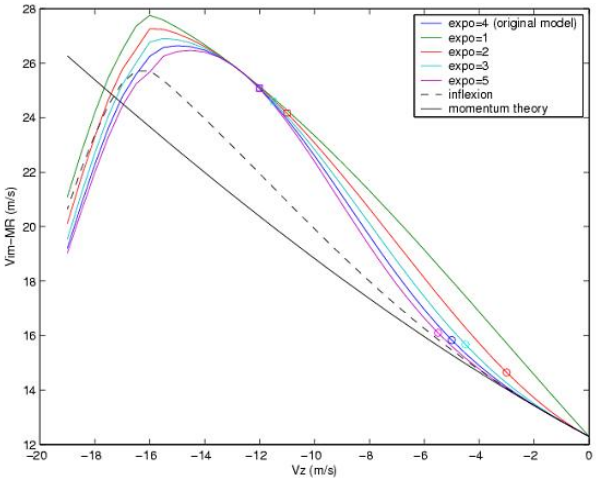



FIG. 8.9. Vitesse induite moyenne

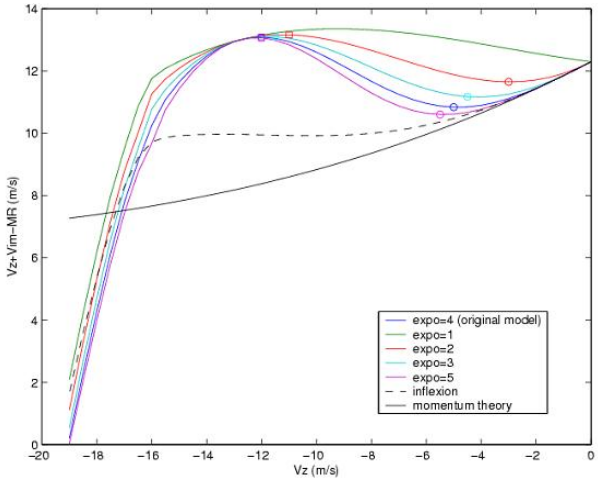



FIG. 8.10. Flux moyen d'air

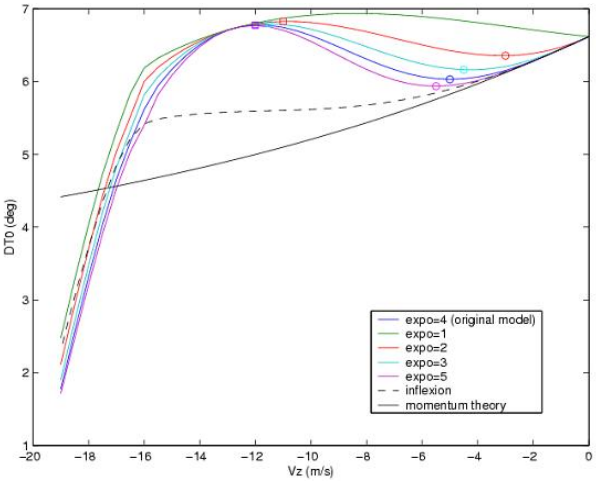



FIG. 8.11. Pas collectif

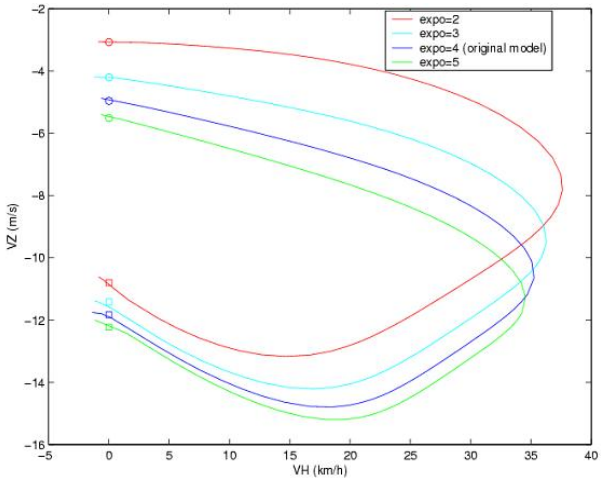



FIG. 8.12. Frontière du VRS

Les points d'équilibre critiques (bifurcations) sont effectivement déterminés par le critère $\frac{d(V_{i_m}+V_Z)}{dV_Z} = 0$. L'existence du VRS est donc conditionnée par l'existence de deux points tels que $\frac{dV_{i_m}}{dV_Z} = -1$. L'un de ces points correspond à un minimum et l'autre à un maximum de la fonction $(V_{i_m} + V_Z) = f(V_Z)$.

L'importance de l'**influence des variations non-linéaires du surcroît de vitesse induite** moyenne en descente sur l'établissement du VRS est constatée. Plus précisément, le fait

mis en évidence est que, pour faire apparaître une zone d'instabilité de type VRS, il n'est pas suffisant d'introduire dans le modèle un surcroît non-linéaire de vitesse induite par rapport à la théorie de la quantité de mouvement, mais il faut que cet accroissement non-linéaire vérifie certaines propriétés.

Dans les figures ci-dessus (8.9, 8.10, 8.11, 8.12), à l'exception des courbes dont le label est "momentum theory" (i.e. "théorie de la quantité de mouvement" en français), "expo=1" et "inflexion", il y a trois équilibres pour un intervalle de $(DT0)$ compris entre les deux valeurs de bifurcation.

Les conditions requises sur le modèle de flux induit du rotor qui entraînent l'instabilité du VRS peuvent être déterminées.

Afin qu'**il existe une région instable de VRS**,
- il doit y avoir deux points pour lesquels $\frac{d(V_Z+Vim_{RP})}{dV_Z} = 0$, ce qui est équivalent à affirmer l'**existence de deux points pour lesquels** $\left(\frac{dVim_{RP}}{dV_Z} = -1\right)$
- ces **deux points**, qui correspondent en fait à un minimum et à un maximum de la vitesse de l'air à travers le rotor, doivent être **séparés par un point d'inflexion** i.e un point pour lequel $\left(\frac{d^2Vim_{RP}}{dV_Z^2} = 0\right)$. La bifurcation se produisant sur la branche hélicoptère doit être un minimum de $(V_Z + Vim_{RP}) = f(V_Z)$ et celle se produisant sur la branche moulinet-frein un maximum de $(V_Z + Vim_{RP}) = f(V_Z)$.

Un contre-exemple est la courbe notée "inflexion" de (8.9). Bien qu'elle ait un point d'inflexion, elle ne donne pas lieu à du VRS, puisqu'elle n'a pas deux points ayant la pente requise $\left(\frac{dVim_{RP}}{dV_Z} = -1\right)$.

En conclusion, **pour reproduire un comportement de VRS**, il n'est **pas suffisant pour un modèle de vitesse induite de prédire une augmentation du flux d'air supérieure à celle donnée par théorie de la quantité de mouvement**, comme l'illustre bien les cas de labels "expo = 1" et "inflexion". Il est indispensable, en fait, que l'augmentation du flux induit moyen en vol de descente soit non-linéaire et telle que :
- sur la branche hélico : $dV_{i_m} < -dV_Z$
- au premier point de point bifurcation : $dV_{i_m} = -dV_Z$
- entre les deux bifurcations : $dV_{i_m} > -dV_Z$
- au deuxième point de bifurcation : $dV_{i_m} = -dV_Z$
- sur la branche moulinet-frein : $dV_{i_m} < -dV_Z$ jusqu'à ce que $(Vim)$ atteigne un maximum et puis décroisse avec un taux de descente qui augmente.

Un outil tel que la théorie des bifurcations pourrait aussi, par ailleurs, permettre de recaler le modèle de vitesse induite de façon à retrouver la zone de VRS telle qu'établie par les essais en vol. Enfin, il ressort de cette étude que la **courbure du surplus de vitesse induite a plus d'importance que les valeurs associées au maximum de vitesse induite** $(V_{Zmax}, Vim_{max})$.

Par ailleurs, les considérations précédentes sur le modèle de vitesse induite sont proches de celles du critère de stabilité de la dynamique verticale ("heave stability"). Comme exposé dans [Chen *et al.* 2006, Basset *et al.* 2007], l'effet global d'une diminution du taux de descente $(\Delta\eta > 0)$ sur l'angle d'attaque de la pale $(\alpha)$ et donc l'amortissement de la force de sustentation du rotor $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ est tel que :

$$\left[\Delta\alpha \text{ "proportionnel à" } - \Delta\eta\left(1+\frac{d\nu}{d\eta}\right)\right] < 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \eta} < 0$$

pour la théorie de la quantité de mouvement et :

$$\left[\Delta\alpha \text{ "proportionnel à" } - \Delta\eta\left(1+\frac{d\nu}{d\eta}\right)\right] > 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \eta} > 0$$

avec un modèle de vitesses induites adapté au VRS tel que celui de l'ONERA [Jimenez 2002] ou celui présenté dans [Basset *et al.* 2007, Chen 2006].

Avec ces dernières modélisations, pour des valeurs du taux de descente $\eta$ comprises entre 0.5 et $-1.5$, une augmentation de $\eta$ implique une diminution de la portance du rotor, ce qui résulte en un amortissement négatif de la dynamique verticale (instable) $\frac{\partial T}{\partial \eta} > 0$.

## 8.7 Variabilité du domaine de VRS en fonction du niveau de modélisation

Il s'agit d'estimer comment le domaine de VRS varie quand une modélisation numérique du rotor est utilisée, au lieu d'une modélisation analytique. Dans le modèle numérique, chaque pale est discrétisée en éléments répartis le long de son envergure, ce qui permet une description beaucoup plus fine de la géométrie, du mouvement et de l'aérodynamique du rotor. Par exemple, les mouvements des pales sont rendus par des dynamiques du deuxième ordre. Les équations des mouvements de battement et de traînée des pales sont ici développées jusqu'au premier harmonique de même que la représentation du champ des vitesses induites.

Pour tracer le lieu des points de bifurcation, il faut en fait ici détecter les points de retournement dans la courbe d'équilibre. Précédemment, les points de retournement coïncidaient approximativement avec les points pour lesquels changeait la stabilité du système dynamique réduit $\{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, Vim_{RP}\}$. Par contre, quand un modèle numérique de rotor est choisi, l'approximation n'est plus valide. C'est pourquoi la préférence est donnée à une formulation de base plus générique qui caractérise le lieu des points de bifurcation et explicite l'existence de plusieurs branches-solutions fonctions du pas collectif $DT0$. Elle embrasse l'ensemble des points où le théorème des fonctions implicites n'est pas vérifié et l'équation rajoutée est donc :

$$\det\left(D_{X,\{DTC,DTS,DTA\}}\left(\dot{X}, V_Y, V_X - V_{H0}, R_{hel}\right)\right) = 0$$

Si $n$ est le nombre de variables d'état, le calcul du lieu des points de bifurcation est un problème implicite de $(n+1)$ équations pour $(n+2)$ variables possédant deux paramètres de contrôle qui sont ici les vitesses d'avancement $V_{H0}$ et de descente $V_{Z0}$. Dans le cas d'un rotor numérique, le vecteur d'état $X$ est constitué des variables suivantes rassemblées dans le tableau (8.1).

| variables | unité | désignation |
|---|---|---|
| $U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}$ | m/s | vitesses de translation |
| $P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}$ | rad/s | vitesses de rotation |
| $\phi, \theta$ | rad | angles d'Euler |
| $Vim_{RP}, Vic_{RP}, Vis_{RP}$ | m/s | vitesses induites du rotor principal |
| $Vim_{RA}$ | m/s | vitesse induite moyenne du rotor arrière |
| $\delta_0, \delta_{1c}, \delta_{1s}$ | rad | mouvement de traînée |
| $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}$ | rad | mouvement de battement |
| $\dot{\delta}_0, \dot{\delta}_{1c}, \dot{\delta}_{1s}$ | rad/s | vitesses du mouvement de traînée |
| $\dot{\beta}_0, \dot{\beta}_{1c}, \dot{\beta}_{1s}$ | rad/s | vitesses du mouvement de battement |

TAB. 8.1. Variables du rotor numérique

Il y a cependant quelques remarques importantes à faire. Dans le cadre du calcul du lieu des points de bifurcation quand une modélisation numérique des rotors est adoptée, deux problèmes apparaissent. Le premier est que le calcul complet n'aboutit pas. Au point de tangente verticale, l'algorithme se bloque à cause de la singularité de la jacobienne du système en un tel point et de ses dimensions. Il faut donc effectuer le calcul des branches supérieure et inférieure séparément.

Le second problème concerne le temps d'exécution du calcul. Pour évaluer les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i} \det(D_X F(X))$, il est nécessaire en fait d'estimer $D_X F(X)$, en $x_i$ et en $x_{i+1}$. Si $X$ est un vecteur de taille $n$, $D_X F(X)$ nécessite $n$ appels à la fonction $F$. Calculer $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \det(D_X F(X))\right)_{i=1,n}$ nécessite donc $n \times n = n^2$ évaluations de $F$.

En utilisant une modélisation fine de l'aérodynamique au niveau du rotor dont chaque évaluation est longue, le temps de calcul global devient trop important : déterminer le lieu des points de bifurcation prend plusieurs heures. L'utilisation d'une telle modélisation est donc problématique.

Dans cette partie, les lieux des points de bifurcation (figure 8.13) sont comparés dans les cas d'un **rotor analytique quasi-statique en battement** (courbes noires), d'un rotor **analytique** avec une **dynamique du premier ordre** pour **les mouvements de battement** (courbes rouges) et d'un **rotor** avec une **modélisation numérique fine** de 20 éléments de pales pour laquelle seul **le premier harmonique** est gardé dans les équations de battement et de traînée des pales (courbe verte).

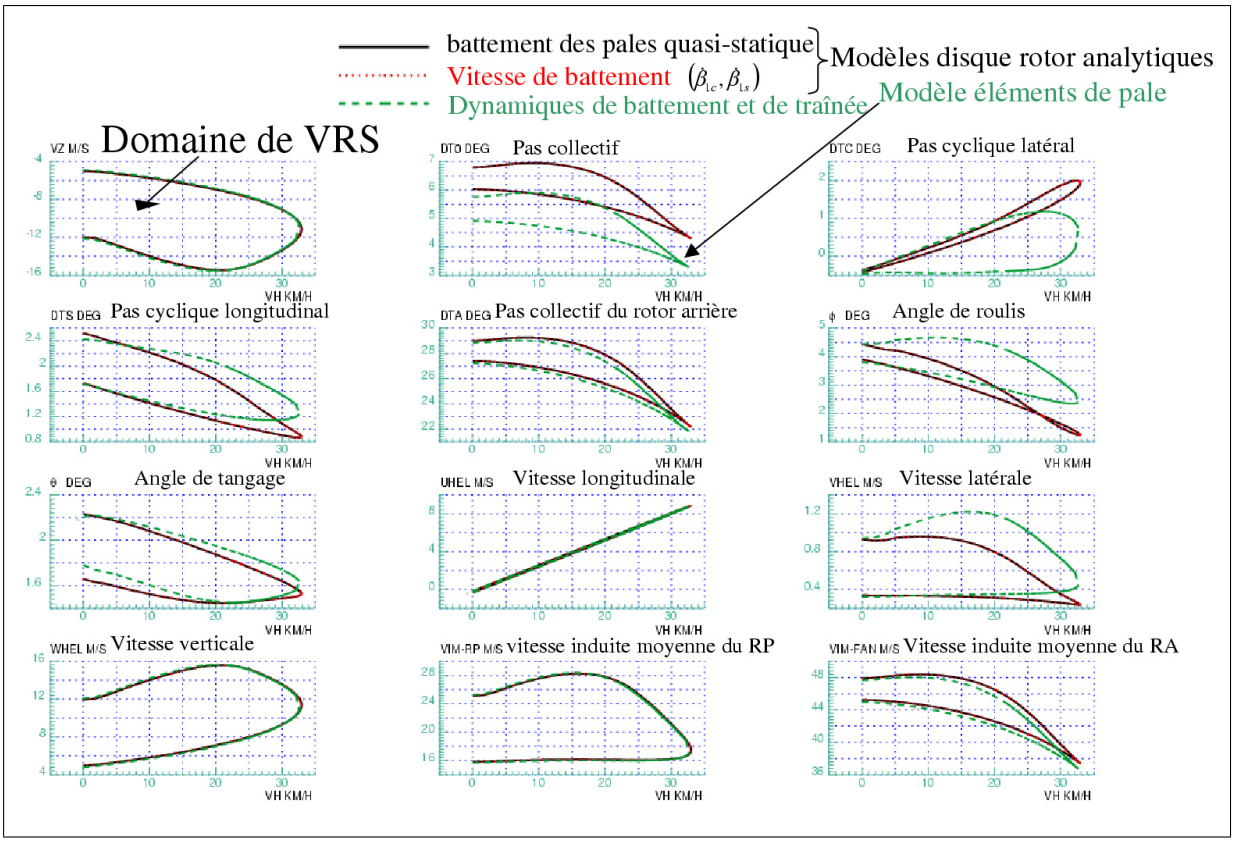



FIG. 8.13. Comparaison du lieu des points de bifurcation pour différents modèles

Certaines différences apparaissent entre les résultats obtenus avec le modèle de rotor numérique par rapport à ceux acquis avec les deux types de modèles de rotor analytique, qui eux sont quasiment identiques, qu'ils soient quasi-statique (en noir) ou muni d'une dynamique de battement des pales du premier ordre (en rouge). Néanmoins, un constat est que le lieu des points de bifurcation dans le diagramme $(V_Z, V_H)$ est presque le même quel que soit le modèle de rotor utilisé.

Ceci s'explique par les propriétés de la modélisation choisie. Les seuls paramètres de vol que le modèle de vitesse induite utilise sont les vitesses d'avancement et de descente de l'hélicoptère. Quant aux paramètres caractéristiques de l'hélicoptère, sont pris en compte la masse de l'appareil, la densité de l'air, le rayon du rotor et sa vitesse de rotation essentiellement. Les différences dues au changement de modèle rotor sont comme absorbées ou compensées par les écarts sur les commandes $(DT0, DTC, DTS)$. Quel que soit le modèle rotor (ou tout au moins l'un des trois évalués), les forces et moments que le rotor principal doit développer pour assurer l'équilibre de l'hélicoptère dans des conditions de vol données sont les mêmes. La portance et son pendant, la vitesse induite moyenne, sont donc quasi-indépendantes du modèle rotor considéré ici, ce qui explique l'invariance du domaine de VRS dans le diagramme global $V_Z = f(V_H)$. En revanche, le lieu des points de bifurcation dans le diagramme $(V_Z, V_H)$ varie en fonction du modèle de vitesse induite, du critère de VRS et des conditions de vol comme présenté dans [Basset *et al.* 2007].

Par contre, il est à remarquer que les commandes à appliquer sont clairement différentes d'un modèle à l'autre : leur contribution dans le calcul des efforts aérodynamiques au niveau du rotor principal n'est pas la même pour les modèles numérique et analytique.

Il se déduit de ces constatations que pour calculer l'enveloppe du VRS dans le diagramme classique $V_Z = f(V_H)$ par le critère de bifurcation, il est suffisant et recommandé d'utiliser le niveau de modélisation analytique du HOST.

## 8.8 Variabilité du domaine de VRS en fonction de différents paramètres

Après avoir construit un critère qui délimite le domaine de VRS, basé sur l'existence d'un point de bifurcation, il est intéressant d'étudier quels sont les effets des variations des paramètres du modèle sur l'enveloppe ainsi définie. Un des objectifs pratiques d'une telle étude est aussi de déterminer la pente maximale que peut prendre un hélicoptère sans risquer de rentrer en VRS. Des procédures d'atterrissage avec des pentes d'approche plus élevées sont à l'étude afin de réduire le bruit généré au niveau du sol (qui est une des principales nuisances qui freinent l'utilisation des hélicoptères en milieu urbain). Quelques exemples de ces études paramétriques sont présentés ci-après.

Cette étude de sensibilité a porté sur les conditions de vol que sont la masse, l'altitude, la température, le centrage mais aussi sur certains paramètres du modèle, notamment :
- Le surplus de vitesses induites $COEF = 0$ ou $COEF \neq 0$.
- Le coefficient qui règle la courbure du modèle de vitesse induite $V_i = f(V_Z)$ pour $2 < EXPOCOEF < 10$.
- Les différentes vitesses de rotation du disque (régime nominal $\Omega = 350tr/min$ ou régime panne d'un moteur sur deux : $\Omega = 330tr/min$).
- Les interactions du sillage sur le fuselage (cellule de l'aéronef), sur l'empennage horizontal.

Quelques exemples de ces études paramétriques sont présentés ci-après.

L'influence du surcroît de vitesse induite en vol de descente, et plus précisément de l'effet non-linéaire dû à la courbure de ce terme supplémentaire de vitesse induite dans le modèle a été présenté au paragraphe 8.6 (influence de EXPOCOEF).

Des variations sur le régime rotor sont accomplies ici. Les tracés du domaines de VRS pour le régime nominal $\Omega = 350tr/min$ et pour le régime panne d'un moteur $\Omega = 330tr/min$ sont réalisés et présentés sur la figure (8.14).

La vitesse-limite d'avancement du domaine de VRS augmente légèrement lorsque le régime rotor diminue. Ceci s'explique par le fait que si la vitesse de rotation du rotor est plus grande, la vitesse induite est plus importante, ce qui augmente la stabilité et réduit le domaine de VRS.

Le critère de bifurcation met en évidence l'influence du régime rotor, alors que le critère de convection des anneaux ne rend pas compte de la modification de valeur de $DT0$ nécessaire afin d'équilibrer l'appareil quand la vitesse de rotation du rotor change. L'effet présenté sur la figure (8.14) est faible compte tenu de la faible variation du régime rotor considérée. Dans le cas d'un hélicoptère (classique), le régime rotor est quasi-constant sauf en cas de panne d'un ou de tous les moteurs (autorotation). Cependant certains nouveaux concepts d'hélicoptère utilisent

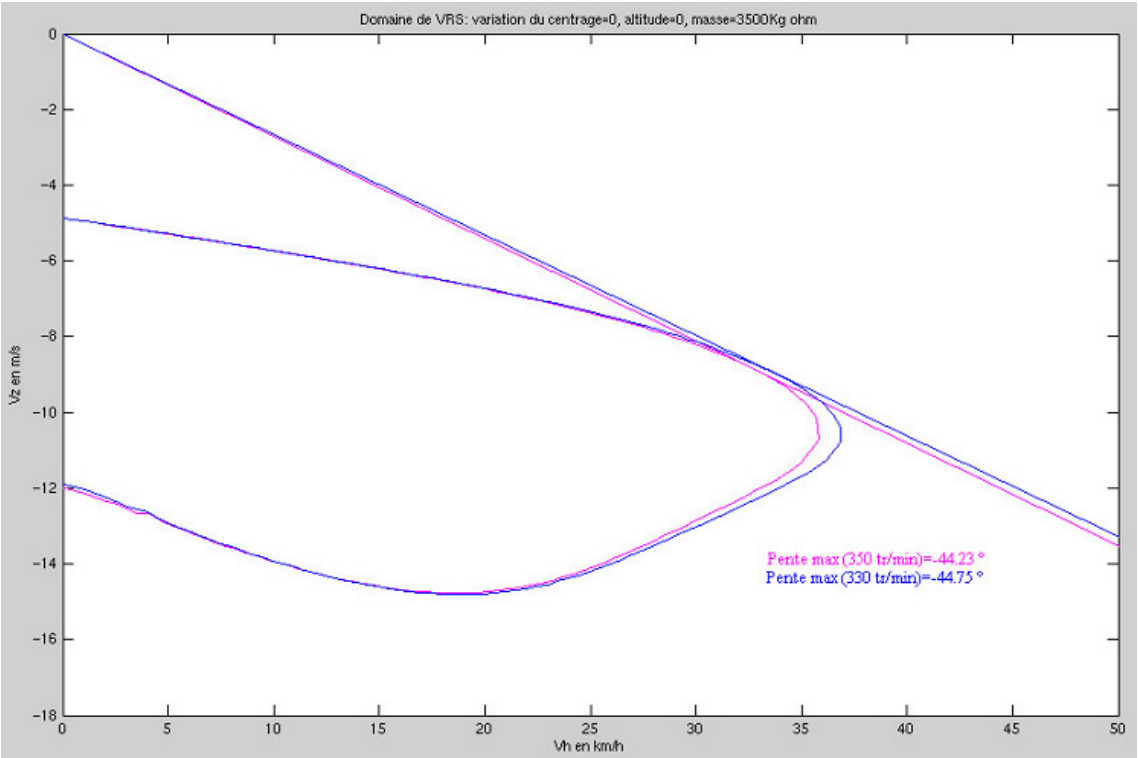



FIG. 8.14. Domaines de VRS pour différents régimes du rotor

des régimes rotor variables par exemple pour augmenter l'endurance (cas du drone Fire Scout [Fir 2007]) ou la vitesse d'avancement (e. g. les concepts "Reverse Velocity Rotor" ou "Advancing Blade Concept" [Johnson *et al.* 2006]). Dans ces cas, la capacité du critère de bifurcation à tenir compte de l'effet des variations du régime rotor prendrait alors toute sa valeur.

Différents types d'**interactions** sont ensuite pris en compte comme l'illustre (8.15) :
- Interactions du sillage sur le fuselage
- Interactions du sillage sur l'empennage horizontal

L'interaction rotor-fuselage n'introduit pas de changement significatif dans le domaine de VRS. Par contre, avec l'interaction rotor-empennage, la limite basse du domaine de VRS diminue. Ceci se justifie par le surplus de moment de tangage que les interactions engendrent du fait de l'effet du souffle du rotor principal sur l'empennage horizontal.

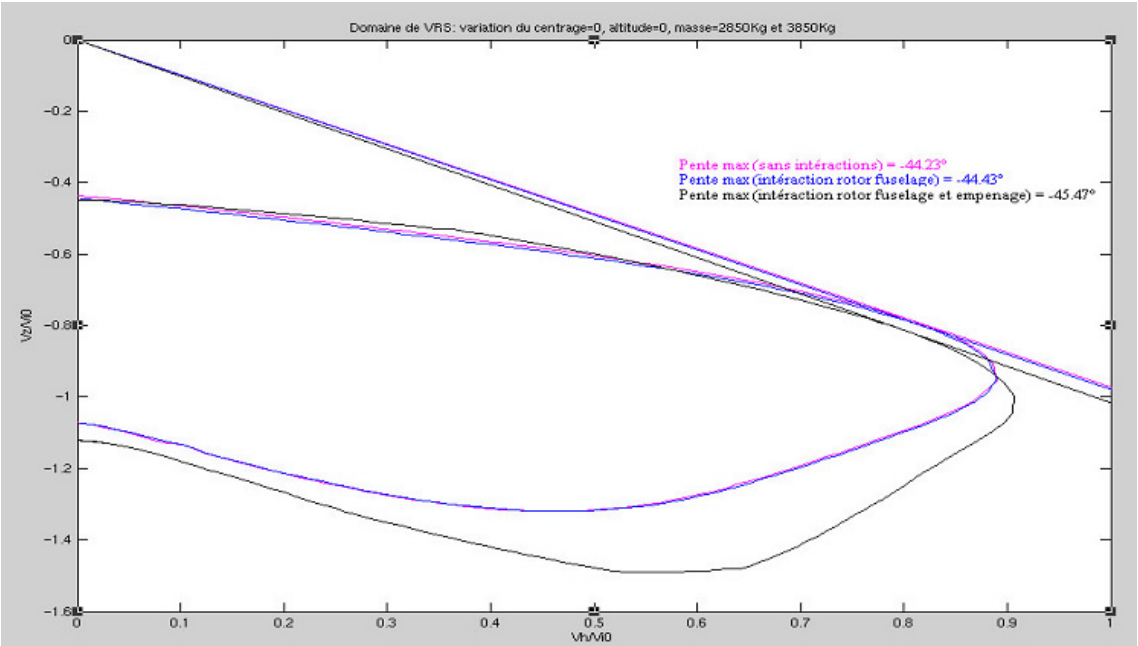



FIG. 8.15. Domaines de VRS prenant en compte divers types d'interactions

## 8.9 Conclusions sur l'analyse de l'état d'anneaux tourbillonnaires par la théorie des bifurcations

Après avoir choisi un modèle d'hélicoptère et une modélisation du VRS, une description mathématique du phénomène est donnée. Comme le montre le diagramme de bifurcation, le phénomène d'instabilité dans le régime d'anneaux tourbillonnaires est à interpréter comme un hystérésis et les points de bifurcation sont des points de retournement. De l'analyse de la surface d'équilibre qui est un "cusp" se déduit une stratégie d'échappement du Vortex Ring State qui consiste à augmenter la vitesse d'avancement. Enfin, le lieu des points de bifurcation permet de délimiter la région de VRS. La zone provenant du critère de bifurcation a été comparée avec celle obtenue par d'autres critères et il ressort que le lieu des points de bifurcation circonscrit bien l'enveloppe du VRS. Les avantages et inconvénients d'un tel critère ont été exposés et il a surtout été mis en évidence qu'il permet de sonder les propriétés intrinsèques du modèle alors que d'autres critères (notamment celui basé sur la vitesse de convection des tourbillons d'extrémité de pale) comportent des paramètres empiriques. Des études paramétriques ont aussi été accomplies afin d'étudier la façon dont évolue le lieu des points de bifurcation et par là l'influence de différents paramètres sur la zone d'instabilité.

# Chapitre 9

# Application de la méthodologie au cas d'une bifurcation associée à une valeur propre complexe : le roulis hollandais

**Introduction :** Parmi les considérations sur le mode propre du roulis hollandais, une constatation est qu'il peut être soit stable soit instable oscillant. C'est un des problèmes auquel la communauté des hélicoptéristes n'est toujours pas arrivée à apporter une réponse que de savoir dans quelles configurations exactement l'appareil est instable et quelles en sont les raisons. Cela suscite encore de nos jours des recherches, notamment des travaux de modélisation (par exemple ceux du groupe de travail européen GARTEUR HC-AG11 sur la dynamique en lacet qui n'est pas encore clos).

Dans l'état actuel de la modélisation ("HOST de base"), la valeur propre du roulis hollandais ne coupe l'axe imaginaire qu'aux basses vitesses (30 à $50km/h$). Dans de telles conditions de vol, le roulis hollandais se rapproche du mouvement pendulaire latéral et il a une pseudo-période de l'ordre de $8s$, alors qu'en général pour un appareil de 3 à 4 tonnes, elle est de l'ordre de $2.5s$ à $4s$ (pour des vitesses plus grandes). Il peut exister des configurations, pour lesquelles le roulis hollandais change de stabilité, à des vitesses plus importantes comme relaté dans [Padfield 1996]. Il est alors "plus pur" dans la mesure où il est moins perturbé par le mode de tangage phugoïde. Mais, pour que le modèle de mécanique du vol de l'hélicoptère en rende compte, il faudrait réaliser des travaux de modélisation complémentaires concernant par exemple la variation d'efficacité de la dérive dans certaines configurations.

En prenant le modèle tel qu'il est, seule l'instabilité qui apparaît aux basses vitesses peut donc être considérée. L'analyse développée ici de la bifurcation de Hopf associée au changement de stabilité du roulis hollandais reste cependant la même en terme de méthode. Ce ne sont pas tant les résultats quantitatifs qui importent ici, mais bien la méthode d'analyse non-linéaire qui pourra être appliquée ultérieurement en utilisant d'autres modèles.

Dans la continuité des travaux menés jusqu'à présent, la méthodologie est appliquée dans un premier temps en utilisant le code HOST comme modèle informatique de dynamique du vol des hélicoptères. Etant donné que les différentes pistes envisagées rencontrent des difficultés du fait des perturbations engendrées par le mode phugoïde, dans un second temps l'étude met en œuvre un modèle analytique, plus adapté à une analyse non-linéaire, développé et programmé au cours de cette thèse (cf. chapitre 6).

## 9.1 Calcul et analyse de la bifurcation avec le modèle HOST

Les étapes de l'étude du roulis hollandais par la théorie des bifurcations sont les suivantes. Il est important tout d'abord de déterminer la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle la bifurcation de Hopf se produit. Ensuite, cette dernière peut être analysée par la méthode des projections ou par des simulations temporelles bien choisies et la démarche inclut aussi, éventuellement, le calcul du lieu des points de bifurcation de Hopf. Malheureusement, le constat qui résulte de ces travaux est que l'utilisation du code HOST suscite des difficultés numériques qui ne permettent pas l'étude des cycles limites associés à cette bifurcation.

### 9.1.1 Détermination du point de bifurcation de Hopf

#### 9.1.1.1 Formulation du problème

La modélisation est la même que celle choisie lors de l'étude de l'état d'anneaux tourbillonnaires. Le code HOST est sélectionné, dans la continuité des travaux qui ont été menés jusqu'à présent, comme le modèle d'hélicoptère. Les variables d'état et de commande sont celles de la mécanique du vol de l'hélicoptère :

$$X = \{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta, Vim_{RP}, Vim_{RA}\} \text{ et } U = \{DT0, DTC, DTS, DTA\}$$

Une mise en forme du problème similaire à celle déjà présentée dans l'étude de la bifurcation réelle (considérée chapitre 8) est adoptée, soit une description sous forme d'un système algébro-différentiel. Des équations algébriques supplémentaires permettent de fixer le cas de vol et sont :

$$\{V_X = V_{H0}, V_Y = 0, V_Z = V_{Z0}, R_{hel} = 0\}$$

Elles ont pour objectif de forcer le parcours des états d'équilibre avec les caractéristiques et dans les conditions de vol désirées, même si la notion de stabilité employée renvoie quant à elle directement à celle de la stabilité dynamique de l'aéronef en boucle ouverte. D'une part, les commandes de l'hélicoptère deviennent des variables contraintes et d'autre part, les paramètres de contrôle sont les vitesses d'avancement $V_{H0}$ et de descente $V_{Z0}$ de l'appareil. Au final, le problème mettant en jeu les vecteurs de variables d'état $X$, de paramètres de contrôle $U$ et d'équations à annuler $F$, définit une solution implicite qui se résout par continuation. Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} F(X,U) &= \Big\{\dot{U}_{hel}, \dot{V}_{hel}, \dot{W}_{hel}, \dot{P}_{hel}, \dot{Q}_{hel}, \dot{R}_{hel}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \tfrac{dVim_{RP}}{dt}, \tfrac{dVim_{FAN}}{dt}, \\ &\quad V_X - V_{H0}, V_Y, V_Z - V_{Z0}, R_{hel}\} \\ X &= \{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta, Vim_{RP}, Vim_{RA}, DT0, DTC, DTS, DTA\} \\ U &= \{V_{H0}, V_{Z0}\} \end{aligned}$$

Un hélicoptère est un système instable quand il est en boucle ouverte (sans pilote ou pilote automatique). C'est pourquoi, pour capturer une bifurcation de Hopf responsable d'un changement de stabilité, il est indispensable de réduire l'ensemble des variables prises en compte. Comme le roulis hollandais fait partie des mouvements naturels de l'hélicoptère relatifs à la stabilité dynamique latérale, l'ensemble des variables caractérisant la **stabilité du roulis hollandais** est restreint sciemment à celles du **bloc latéral** $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$.

#### 9.1.1.2 Résultats

Il apparaît que l'algorithme converge avec succès et efficacement vers les points de bifurcation de Hopf. Cependant, il faut déterminer les conditions de vol pour lesquelles de tels points peuvent exister. En effet, l'instabilité du roulis hollandais n'apparaît pas dans tous les cas de vol. Il faut que la puissance nécessaire au rotor principal soit proche de sa limite supérieure pour qu'il y ait des problèmes de contrôlabilité et, en ce qui concerne le phénomène abordé ici, de stabilité directionnelle. Pour se placer dans une telle situation, l'aéronef est chargé avec une masse proche de la masse admissible maximale et l'hélicoptère est mis en vol de montée. Comme appareil et configuration, c'est le **Dauphin** qui est choisi dans un **vol de montée** à $V_Z = 5m/s$ et de **masse** $m = 3830kg$. Si le paramètre de continuation est la **vitesse d'avancement**, la **valeur critique** est de l'ordre de $V_{H_{crit}} \approx 34km/h$.

### 9.1.2 Lieu des points de bifurcation de Hopf

Une fois une bifurcation de Hopf accrochée, il est possible de calculer la frontière entre la zone stable et la zone instable dans une configuration donnée. Il est intéressant de savoir comment cette frontière évolue en fonction de certaines caractéristiques. A titre illustratif, les paramètres vis-à-vis desquels les investigations cherchent à connaître la sensibilité peuvent être la vitesse de montée, la masse de l'appareil et l'efficacité de la dérive. La méthode consiste à calculer les lieux des points de bifurcation de Hopf dont les deux paramètres de contrôle sont la vitesse d'avancement et la masse d'une part, la vitesse d'avancement et l'efficacité de la dérive d'autre part.

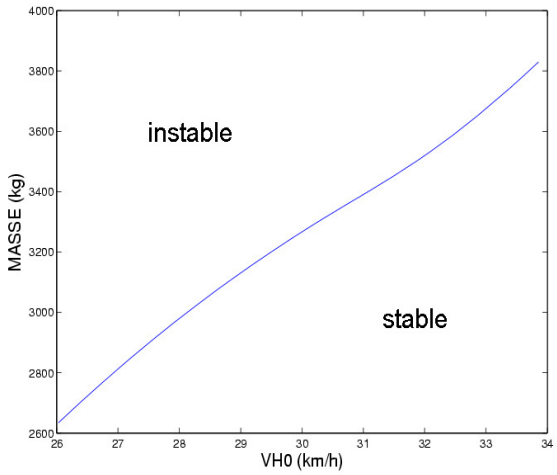



FIG. 9.1. Lieu des points de bifurcation de Hopf en fonction de la vitesse d'avancement $V_{H0}$ et de la masse

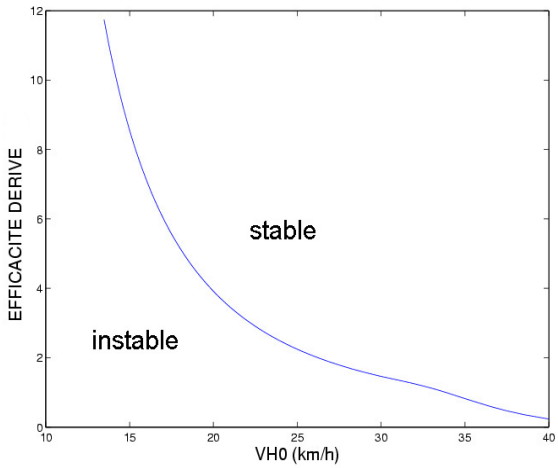



FIG. 9.2. Lieu des points de bifurcation de Hopf en fonction de la vitesse d'avancement $V_{H0}$ et de l'efficacité de la dérive

Ces courbes relativement simples donnent des informations utiles. De leur observation, il ressort que l'appareil doit voler à des vitesses plus importantes pour devenir stable quand il est plus lourd ou que l'efficacité de la dérive est plus faible.

### 9.1.3 Analyse de la bifurcation de Hopf

Une fois la bifurcation de Hopf associée au changement de stabilité du roulis hollandais localisée, des tentatives de la caractériser sont faites, en employant différentes stratégies qui se

basent sur la méthode des projections ou sur l'exécution de simulations temporelles exhaustives. Malheureusement, l'une et l'autre ont rencontré des difficultés.

#### 9.1.3.1 Méthode des projections

La méthode des projections permet de caractériser une bifurcation de Hopf en écrivant les équations différentielles des composantes associées au couple de valeurs propres imaginaires pures et en examinant les coefficients du développement de Taylor de celles-ci, comme expliqué dans l'annexe A.

Dans le cadre d'une telle procédure, l'exploitation du code HOST de mécanique du vol des hélicoptères est cependant confrontée à plusieurs obstacles qui sont liés à l'inhomogénéité des variables, au choix des perturbations à employer pour la discrétisation, à l'accumulation d'erreurs numériques.

Dans cette analyse du roulis hollandais qui se concentre sur le bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$, un premier problème est que, comme il y a un échange périodique entre un vecteur composé principalement de vitesses de translation $(m/s)$ et un vecteur constitué essentiellement de vitesses de rotation $(rad/s)$ et que l'ordre de grandeur de ces variables d'unités différentes n'est pas le même, le calcul numérique des vecteurs propres $v_1 \pm iv_2$ associés à $\pm i\omega$ aboutit à $v_2 \approx 0$, ce qui rend impossible la poursuite de l'étude.

Par exemple, après les itérations de convergence vers la bifurcation de Hopf, ASDOBI procède au calcul des vecteurs propres et livre les informations suivantes :

```
arret de la convergence au bout de  1 iterations : Re(val. pro.
critique) .23430E-02
 0.069283    8.734541    50.312396    9.487005    -4.601741    0.000000    0.000000    0.041137    0.000000
-0.346136     0.127221     0.001046     0.000220     0.535138     33.443031
      pulsation critique =    0.7234 rd/s           periode critique =    8.6861 s
      base de l espace tangent a la variete centrale
          0.023109    -0.061482     0.042897     2.000000
          0.000000     0.000000     0.000000     0.000000
```

La quasi-nullité de $v_2$ rend nécessaire de normaliser les composantes afin de les homogénéiser. En effet, le $rad/s$ est une unité qui caractérise un phénomène par des valeurs excessivement petites. Pour y remédier, les vitesses angulaires devraient être divisées par la vitesse de rotation du disque rotor $\Omega$ et les vitesses linéaires par $D \cdot \Omega$ ou $R \cdot \Omega$ où $D$ est le diamètre rotor et $R$ le rayon rotor, de façon à adimensionner toutes les variables.

Après considération de ce qui était déjà fait dans le code HOST au niveau de la procédure de linéarisation, une autre stratégie est adoptée. Elle consiste à convertir en degrés les valeurs angulaires exprimées en radians grâce à une multiplication par le facteur $180/\pi$ (en pratique, les changements d'unités effectués sont $rad \rightarrow deg$ et $rad/s \rightarrow deg/s$). Cette conversion suffit pour que les vecteurs propres de la jacobienne aient des composantes non nulles, ce qui permet de réaliser les calculs à venir.

Le premier problème dû à la différence d'ordre de grandeur des variables, est résolu mais d'autres difficultés restent à lever comme, par exemple, celles qui apparaissent lors de l'utilisation de la théorie des perturbations afin d'analyser un modèle numérique complexe.

En effet, le calcul des coefficients du développement de Taylor local nécessite l'évaluation des $F(X_0 + \varepsilon_1 \cdot v_1 + \varepsilon_2 \cdot v_2)$ pour différentes combinaisons linéaires des deux vecteurs de base $v_1, v_2$

du sous-espace propre. Les variations effectuées autour du point $X_0$ de bifurcation de Hopf ne doivent être ni trop importantes car, sinon, ce n'est plus le développement de Taylor local qui est calculé ni trop petites car, autrement, le code HOST ne prend pas en compte les différences (trop minimes) entre deux états distincts. C'est pourquoi les vecteurs propres calculés $v_1 \pm iv_2$ sont contraints à être de norme 1 et les perturbations $\begin{cases} \varepsilon_1 = k_1 \cdot eps_1, k_1 = 1 \ldots 5 \\ \varepsilon_2 = k_2 \cdot eps_2, k_2 = 1 \ldots 5 \end{cases}$ à s'accorder à des $eps_1, eps_2$ valant, par exemple, 1 ou 0.1. Ces perturbations doivent être sélectionnées en fonction des composantes des vecteurs propres complexes conjugués ; en outre, des résultats satisfaisants ne sont parfois obtenus qu'après plusieurs essais. Le critère algébrique de caractérisation d'une bifurcation de Hopf donne par exemple, quand les calculs se passent bien :

```
BASE DE L ESPACE TANGENT A LA VARIETE CENTRALE

    ep1 = 0.9418E-02     -.9224E+00
          0.2223E-02     -.2501E-03     -.6732E-01
          -.1173E-03     0.3279E-02     -.2232E-01     0.3878E-01

    ep2 = 0.7919E+00     -.2499E+00
          0.1084E-01     0.1224E-01     -.1631E-01
          -.7046E-03     -.1720E-02     0.5978E-02     -.2391E+00

ETAT STABLE : BIFURCATION SUPERCRITIQUE
```

Le "coefficient cubique" (cf. annexe A), combinaison des coefficients du développement de Taylor, permet, une fois déterminé, de conclure quant à la nature de la bifurcation de Hopf et à la stabilité de l'orbite périodique créée. Dans cette situation, il est négatif, ce qui implique que la bifurcation de Hopf est supercritique (cf. éventuellement [Guckenheimer et Holmes 2002] ou l'annexe A pour plus de précision sur la terminologie) et que les orbites périodiques sont stables.

Malgré les modifications apportées, des limitations importantes imposées par l'utilisation d'un code industriel de simulation rendent difficiles l'application de cette méthode. En effet, les erreurs numériques engendrées peuvent être assez importantes et les vecteurs propres tout comme les projections effectuées sur ceux-ci sont calculés approximativement.

Par ailleurs, la méthode des projections fait aussi intervenir un changement de base. En appelant $(e_i)_{i=1,n}$ la base canonique, elle procède au changement de la base $(e_i)_{i=1,n}$ en la base $(e_1, \ldots, e_{n-2}, v_1, v_2)$ et à tous les calculs nécessaires afin d'exprimer la jacobienne dans la nouvelle base. Ces étapes induisent des erreurs numériques importantes dans le cas d'un code aussi volumineux que le HOST, ce qui est rédhibitoire pour appliquer cette approche.

**Transition :** La partie précédente a montré que le calcul et l'analyse du développement de Taylor de la variété centrale (théorie des formes normales) est très compromise à cause de l'accumulation d'erreurs numériques dans le cas où le modèle est un code de simulation imposant. C'est pourquoi l'étude se rapproche d'une démarche plus pragmatique qui consiste à réaliser de nombreuses simulations temporelles du modèle non-linéaire.

#### 9.1.3.2 Simulations temporelles

Pour déterminer si un point de bifurcation de Hopf donne lieu à la création ou non d'un cycle limite, la méthode la plus simple et la plus directe est d'étudier le résultat de simulations temporelles au voisinage de ce point de bifurcation, pour différentes conditions initiales.

Malheureusement, deux écueils rendent ces calculs délicats.

- D'une part, les simulations en boucle ouverte -commandes bloquées- dans le HOST divergent de façon systématique ou ne durent au plus que cinq secondes, ce qui est inférieur à la période du roulis hollandais (aux basses vitesses considérées ici), de telle sorte qu'il est impossible de tirer des conclusions à partir de tels calculs.
- D'autre part, le roulis hollandais change de stabilité dans des conditions de vol telles qu'il reste un mode propre instable de l'aéronef i.e. un mode propre dont la valeur propre est de partie réelle positive : le mouvement longitudinal de la phugoïde.

Pour le rendre stable, il faut empêcher la vitesse d'avancement de croître et définir des stratégies de simulation adéquates.

La suite de cette étude présente les différentes tentatives qui ont été faites afin d'y parvenir à savoir les simulations inverses sur $V_H$, sur $\Theta$ (et $q$) d'une part, les simulations avec une boucle de retour sur $\Theta$ (et $q$) d'autre part.

L'analyse se base autour du même cas de vol que celui déjà cité précédemment dont les caractéristiques sont choisies afin de favoriser l'apparition d'une instabilité. Il s'agit d'un hélicoptère Dauphin, en vol de montée, qui est animé d'une vitesse $V_Z = 5m/s$ et dont la masse $m = 3830kg$ est près de sa charge maximale.

Afin de **stabiliser la vitesse d'avancement** $V_H$, une simulation inverse peut être réalisée en libérant le pas cyclique longitudinal $DTS$. Ainsi $DTS$ est-il calculé de telle sorte qu'il n'y ait pas de variations $\Delta V_H = 0$. Malheureusement, la contrainte est trop violente et les simulations divergent à chaque fois.

En fait, pour stabiliser la vitesse d'avancement d'un hélicoptère, il faut **stabiliser l'assiette longitudinale** $\Theta$. Plusieurs stratégies de calcul peuvent être mises en œuvre pour y parvenir à savoir la simulation inverse ou la simulation avec un pilote automatique.

Les investigations procèdent, premièrement, à des **simulations inverses**. Celles-ci ont pour but, à l'origine, de permettre à un ingénieur de retrouver les commandes à appliquer pour que l'hélicoptère suive l'évolution d'une observation au cours d'une simulation temporelle. Elles sont exploitées ici de façon à conserver l'assiette longitudinale constante (à sa valeur initiale), ce qui contribue indirectement à stabiliser la vitesse d'avancement de l'appareil. La loi appliquée est $DTS \rightarrow \Delta\Theta = 0$, elle consiste à déterminer la valeur du pas cyclique longitudinal $DTS$ de telle sorte que les variations de l'assiette longitudinale $\Theta$ restent nulles. Une constatation est que, dans ces conditions, les simulations durent plus longtemps et qu'elles divergent après des durées plus importantes, ce qui correspond aux attentes. Dans le cadre de cette analyse, deux simulations sont effectuées, une avant la valeur critique et une autre après la bifurcation.

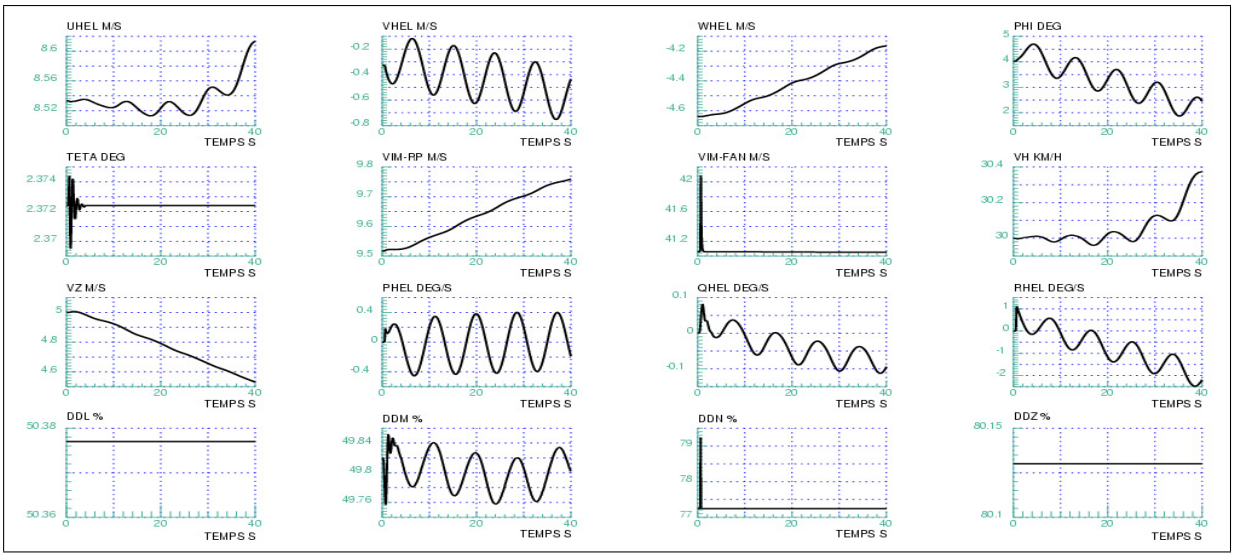



FIG. 9.3. Simulation inverse $DTS \rightarrow \Theta$ pour $VH < VH_{critique}$

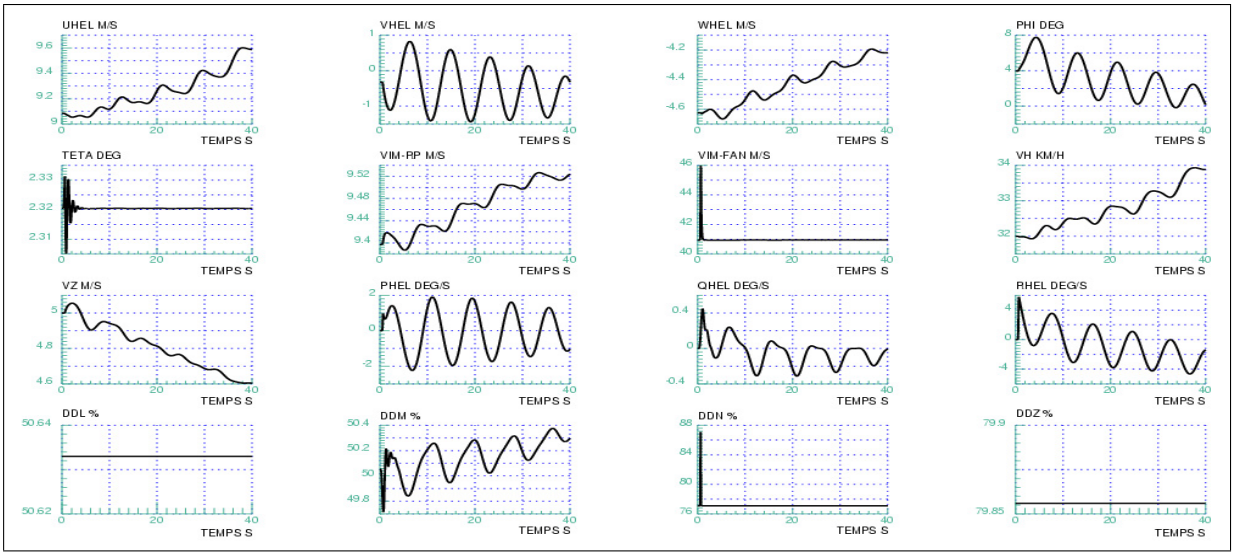



FIG. 9.4. Simulation inverse $DTS \rightarrow \Theta$ pour $VH > VH_{critique}$

Grâce aux simulations inverses, la présence d'un cycle limite est diagnostiquée quand la vitesse d'avancement est inférieure à la valeur critique de bifurcation de Hopf, sur la variable $P_{hel}$ par exemple ; la convergence du système vers un point d'équilibre lorsque l'appareil vole à une vitesse plus importante l'est également.

Dans le second volet de l'analyse, une autre stratégie est appliquée et consiste à utiliser un pilote automatique dont la **boucle de retour** a pour expression :

$$DTS \leftarrow DTS + k_q q + k_\theta \left(\Theta - \Theta_0\right)$$

Cette dernière modifie la valeur du pas collectif longitudinal $DTS$ en tenant compte des variations de $q$ et $\Theta$. L'objectif de cette loi est d'assigner l'assiette longitudinale à sa valeur initiale (celle calculée à l'équilibre) grâce à un asservissement du pas cyclique longitudinal. La loi fait intervenir la vitesse angulaire de tangage $q$, assimilable ici à la dérivée première de $\Theta$ afin de lisser les variations commandées. Avec cette stratégie, les résultats obtenus sont de même qualité que ceux issus des simulations inverses.

Dans l'étude des cycles limites menée présentement, il y a deux étapes. Dans un premier temps, il faut déterminer leur existence (ou non) en effectuant différentes simulations pour des paramètres de contrôle identiques et pour des conditions initiales différentes. Dans un second temps, si la création des cycles limites est diagnostiquée, il faut étudier la façon dont évolue leur amplitude quand le paramètre de contrôle varie.

Dans le HOST, toute simulation temporelle est initialisée avec les valeurs à l'équilibre et les valeurs initiales des variables d'état ne peuvent être choisies directement par l'utilisateur. C'est pourquoi, afin de faire comme si les simulations avaient des conditions initiales différentes, diverses excitations sont appliquées au palonnier $DDN$. Pour des conditions de vol $V_H = 20km/h$ et $V_Z = 5m/s$, des perturbations sont appliquées sur la commande de lacet $DDN$ de l'ordre de 15% et 20% (par rapport au débattement complet de la commande). Dans la configuration de calcul choisie, un pilote automatique simplifié stabilise l'assiette longitudinale $\Theta$ et est de la forme $DDM \leftarrow DDM + 0.5\,(\Theta - \Theta_0) + 0.5q_{hel}$.

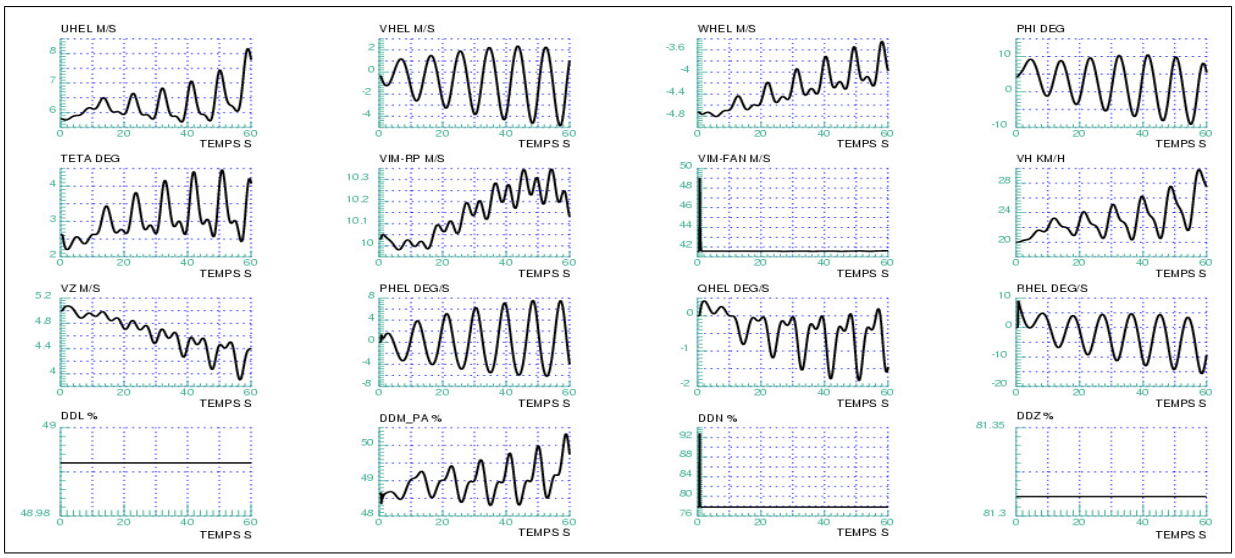



FIG. 9.5. Simulation à $V_H = 20km/h$ avec feedback et $\Delta DDN = 15\%$

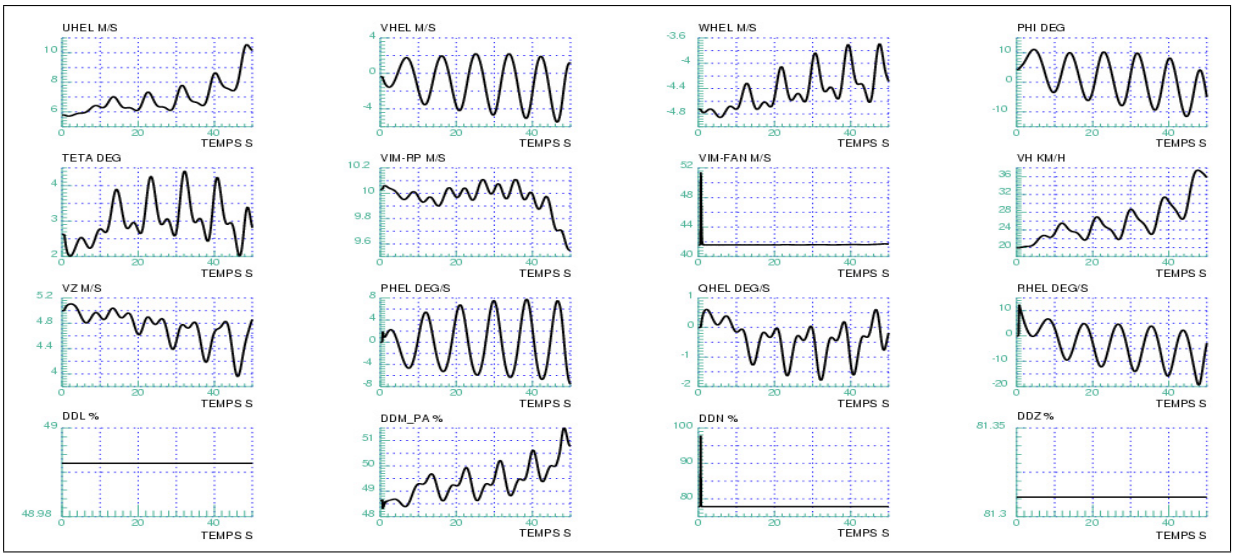



FIG. 9.6. Simulation à $V_H = 20km/h$ avec feedback et $\Delta DDN = 20\%$

L'observation de ces diagrammes permet d'estimer qu'un cycle limite stable est bien créé sur les variables du bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$. En effet, l'amplitude des composantes $V_{hel}$ ou $P_{hel}$ des cycles semble la même quelle que soit la perturbation initiale.

Partant de ce constat, les investigations cherchent alors à évaluer la façon dont **l'amplitude évolue avec l'éloignement par rapport au point de bifurcation**. Une première simulation est effectuée à une vitesse d'avancement $V_H = 30km/h$ dont les modes latéraux sont excités par un coup de palonnier $\Delta DDN = 10\%$ et une deuxième à $V_H = 25km/h$, avec une excitation identique.

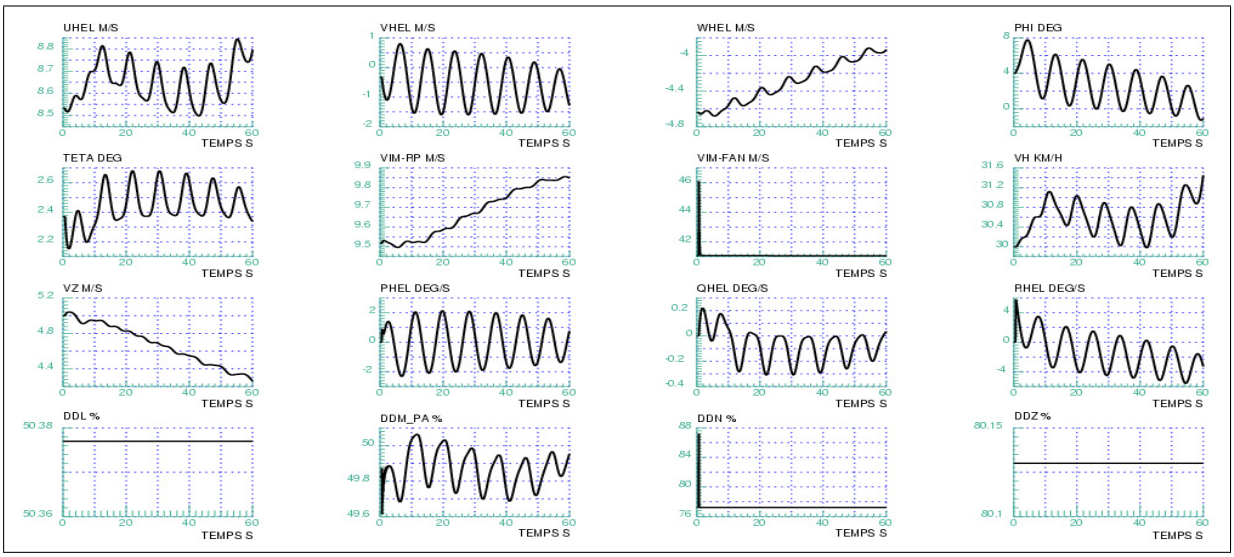



FIG. 9.7. Simulation à $V_H = 30km/h$ et d'excitation latérale initiale $\Delta DDN = 10\%$

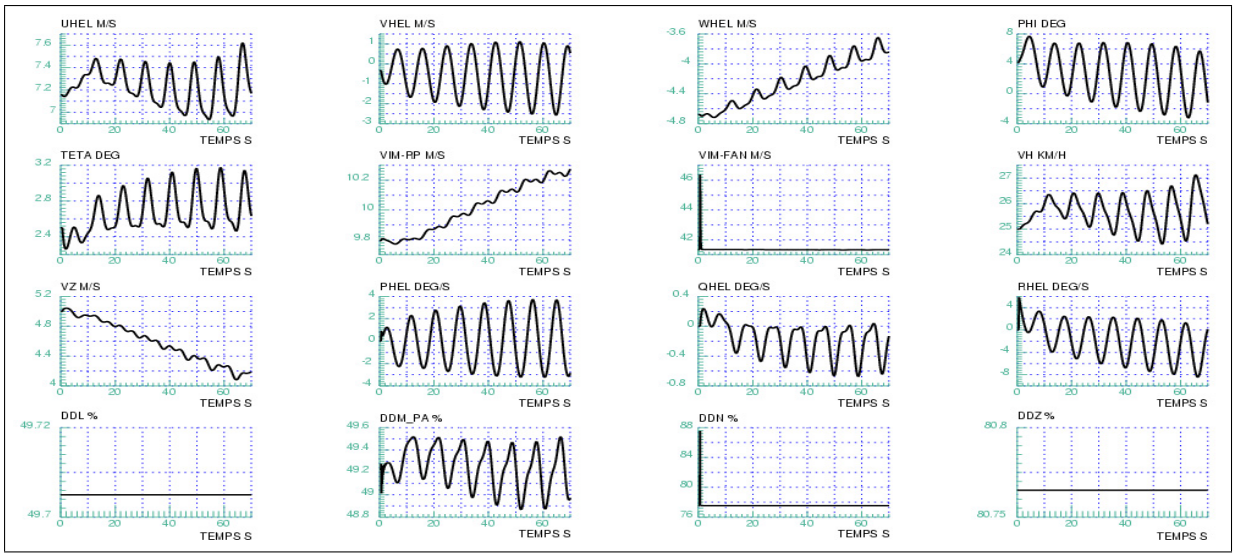



FIG. 9.8. Simulation à $V_H = 25km/h$ et d'excitation latérale initiale $\Delta DDN = 10\%$

L'observation des variables $V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}$ ou $\phi$ montre clairement que l'amplitude des oscillations croît quand le paramètre de contrôle s'éloigne de la bifurcation de Hopf i.e. lorsque la vitesse d'avancement diminue. Par contre, une estimation précise de leur amplitude est difficile à donner.

### 9.1.4 Conclusion sur les investigations menées avec le HOST

Les travaux accomplis ont réussi à définir des stratégies de simulation qui permettent de favoriser l'observation de cycles limites ainsi que l'étude de leurs caractéristiques. Néanmoins des phénomènes de dérive des variables existent et il est impossible de capturer vraiment une orbite périodique car les simulations temporelles ne repassent jamais véritablement par le même point. C'est pourquoi il est compliqué non seulement de tirer des conclusions quant à l'existence effective d'orbites périodiques mais aussi de disposer d'un cadre pour l'étude de leurs caractéristiques.

Par ailleurs, d'un point de vue scientifique, l'inconvénient majeur de tels artifices, même s'ils paraissent nécessaires, est que le roulis hollandais est déformé. En effet, le roulis hollandais d'un hélicoptère, contrairement à celui d'un avion, fait intervenir clairement des oscillations sur l'axe de tangage du fait du couplage roulis-tangage. Il n'est en toute rigueur pas possible de découpler le bloc latéral du bloc longitudinal. En procédant de la sorte, une approximation forte est donc faite.

Dans la pratique, effectuer des simulations temporelles est l'approche la plus basique pour analyser une bifurcation de Hopf et c'est celle qui est utilisée en premier lieu dans les études de théorie des bifurcations. Cependant, pour ce qui est des résultats disponibles ici, il faut reconnaître qu'à partir de l'observation de telles simulations, il est difficile de décider s'il y a effectivement apparition d'un cycle limite : la stabilité des simulations temporelles du HOST est insuffisante dans les cas de vol considérés et le diagnostic sur les propriétés qualitatives de la dynamique de l'appareil peut être faussé.

Dans tous les cas, les limites de l'utilisation du code industriel de simulation HOST sont atteintes. En effet, d'une part, la taille volumineuse et les méthodes itératives employées pour résoudre certaines équations ainsi que certaines discontinuités dans les modèles aérodynamiques (raccords entre les domaines aux petits et aux grands angles d'incidence et de dérapage) induisent des imprécisions numériques ainsi que des problèmes de divergence ou de dérive des simulations temporelles. D'autre part, les nombreux artefacts numériques qu'il contient, que ce soit au niveau des branchements conditionnels ("if-then-else-endif") ou des raccords, rendent l'application des outils d'analyse non-linéaire très laborieux voire impossibles, en particulier les dérivées d'ordre 2 ou 3 qui sont souvent indispensables, sont presque incalculables.

**Transition :** Les deux méthodes les plus utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques pour caractériser une bifurcation de Hopf se révèlent inapplicables et empêchent entre autres tout diagnostic vis-à-vis de l'existence éventuelle de cycles limites. Confronté à l'impossibilité d'analyser la bifurcation de Hopf du roulis hollandais en utilisant le code HOST et afin de disposer d'un code de simulation adapté à de telles méthodologies, l'état présent des travaux d'analyse requiert de développer un modèle d'hélicoptère propre à cette étude. Ce dernier a été présenté au chapitre 6 et il s'agit ici de l'utiliser pour mener à bien l'analyse.

## 9.2 Calcul et analyse de la bifurcation avec le modèle analytique

Il est indispensable tout d'abord de bien poser le problème, c'est-à-dire de définir quelle est la formulation qui permet d'étudier la dynamique du système et d'en capturer les modifications. Dès lors, la bifurcation pourra être caractérisée par des simulations temporelles ou par la continuation des orbites périodiques.

### 9.2.1 Formulation du problème

Dans le modèle analytique d'hélicoptère programmé au chapitre 6, les vecteurs d'état $X$ et de commande $U$ ont pour composantes respectives :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & \{U_{hel}, V_{hel}, W_{hel}, P_{hel}, Q_{hel}, R_{hel}, \phi, \theta\} \\ U & = & \{DT0, DTC, DTS, DTA\} \end{array} \right.$$

Les variables d'état ne sont cette fois-ci que celles classiques de la mécanique du vol. Les vitesses induites sont considérées comme des variables internes. Les équations du système sont constituées, quant à elles, des dérivées des variables d'état auxquelles sont rajoutées les équations algébriques fixant le cas de vol :

$$\{V_X - V_{H0}, V_Y, V_Z - V_{Z0}, R_{hel}\}$$

Dans la partie de l'étude effectuée sur le code HOST, une constatation était déjà que, pour les considérations de stabilité, il faut se limiter aux variables du bloc latéral à cause de l'instabilité naturelle de l'hélicoptère. Les différentes étapes sont donc les suivantes : choisir un cas de vol $(V_{H0}, V_{Z0})$, calculer un point d'équilibre avec le modèle complet, puis se limiter aux variables du bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$ pour l'analyse.

### 9.2.2 Simulations temporelles

Un cas de vol un peu extrême est choisi au début des travaux de caractérisation, mais la décision est motivée par la volonté de se placer dans une situation où le rotor évolue à la frontière de sa puissance maximale afin de favoriser l'apparition de l'instabilité. Dans le cas qui est sélectionné, l'hélicoptère effectue un **vol de montée** à une vitesse de $\underline{V_Z = 7m/s}$, à une **altitude** de $\underline{h = 1000m}$ et avec une **masse** totale de $\underline{m = 3800kg}$.

Le diagramme de bifurcation est tout d'abord calculé par continuation vis-à-vis du paramètre de contrôle qui est la vitesse d'avancement $V_H$. Les variables d'état du bloc longitudinal et les commandes $\{U_{hel}, W_{hel}, Q_{hel}, \theta, DT0, DTC, DTS, DTA\}$ sont ensuite fixés à leur valeur à l'équilibre. L'étude se limite enfin au comportement des variables du bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$.

Diverses simulations temporelles sont exécutées. D'une part, lorsque les vitesses d'avancement diffèrent, des comportements distincts peuvent apparaître. D'autre part, la synthèse des résultats obtenus pour plusieurs conditions initiales permettent de confirmer ou d'infirmer l'existence d'un cycle limite et d'en évaluer l'amplitude le cas échéant.

En ce qui concerne le premier cas de vol simulé à une vitesse d'avancement $V_H = 140km/h$, une constatation est qu'une fois qu'il a pris de la vitesse d'avancement, l'appareil se stabilise sur les mêmes valeurs de $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$ que celles du diagramme de bifurcation (ce dernier n'est pas très riche : il s'agit juste d'une ligne courbe de points d'équilibre qui sont stables d'un côté de l'unique bifurcation de Hopf et instables oscillants de l'autre).

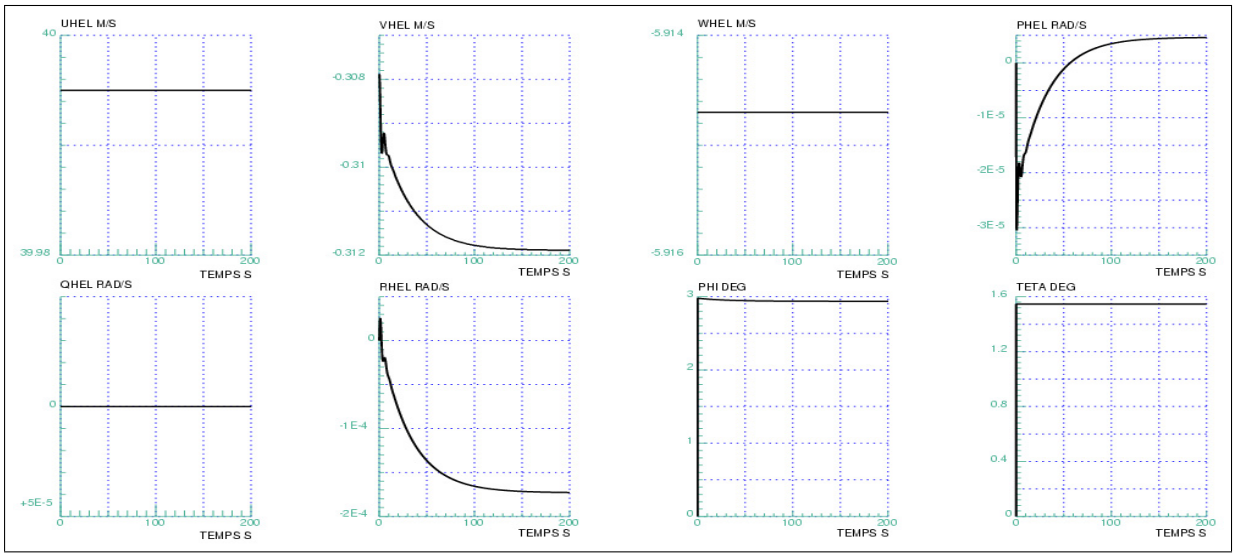



FIG. 9.9. Simulation temporelle pour une vitesse d'avancement grande de $V_H = 140km/h$

A basse vitesse par contre, comme le point d'équilibre est instable, une interrogation relative au devenir des simulations temporelles subsiste : vont-elles diverger ou converger vers un cycle limite ? Afin d'essayer d'apporter une réponse concrète, une simulation temporelle est effectuée pour un vol dont la vitesse d'avancement est $V_H = 33km/h$.

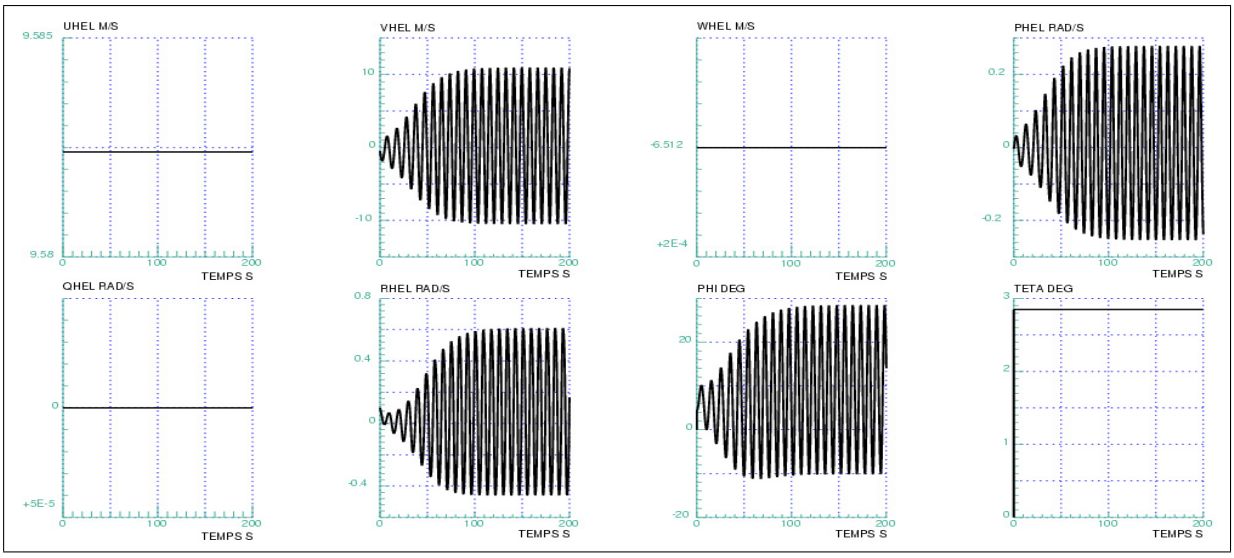



FIG. 9.10. Simulation temporelle pour une vitesse d'avancement faible de $V_H = 33km/h$

En considérant les variables $V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}$ et $\phi$, l'existence de cycles limites stables est de fait observée. Cependant, de tels comportements ne sont pas le fruit des premières simulations. Différentes tentatives ont été menées en réduisant progressivement le nombre de variables d'état. Mais l'instabilité de la phugoïde qui affecte les variables du bloc longitudinal oblige à les fixer toutes afin de satisfaire le souhait que les simulations des vols à faible vitesse ne divergent pas.

De l'observation de la simulation précédente (9.10), une conjecture réaliste peut être émise à savoir qu'il existe effectivement un cycle limite stable, mais il reste à le confirmer. Pour cela, un cas de vol doit être choisi, pour lequel des simulations temporelles dont les conditions initiales diffèrent sont expérimentées, en espérant assister à des enroulements autour de la même orbite périodique. Le choix se porte sur un vol dont la vitesse d'avancement est $V_H = 46km/h$ et pour lequel c'est la vitesse de lacet $R_{hel}$ qui est perturbée de $0.1rad/s$ dans le premier cas et tout le bloc latéral $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$ dans le deuxième.

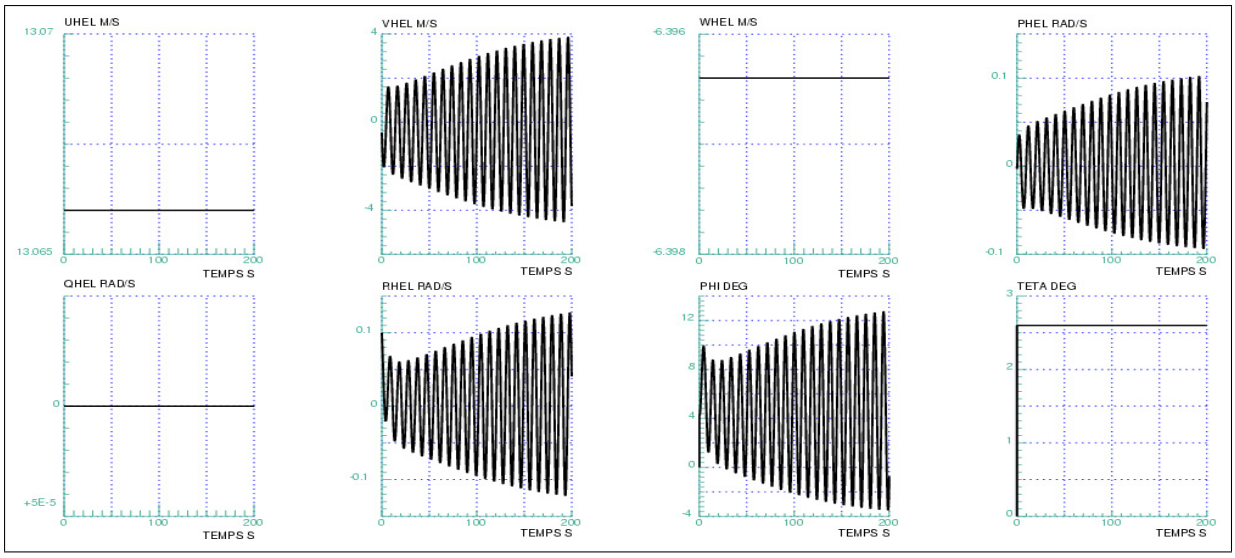



FIG. 9.11. Simulation pour une vitesse d'avancement $V_H = 46km/h$ et de perturbation initiale $\Delta R_{hel} = .1rad/s$

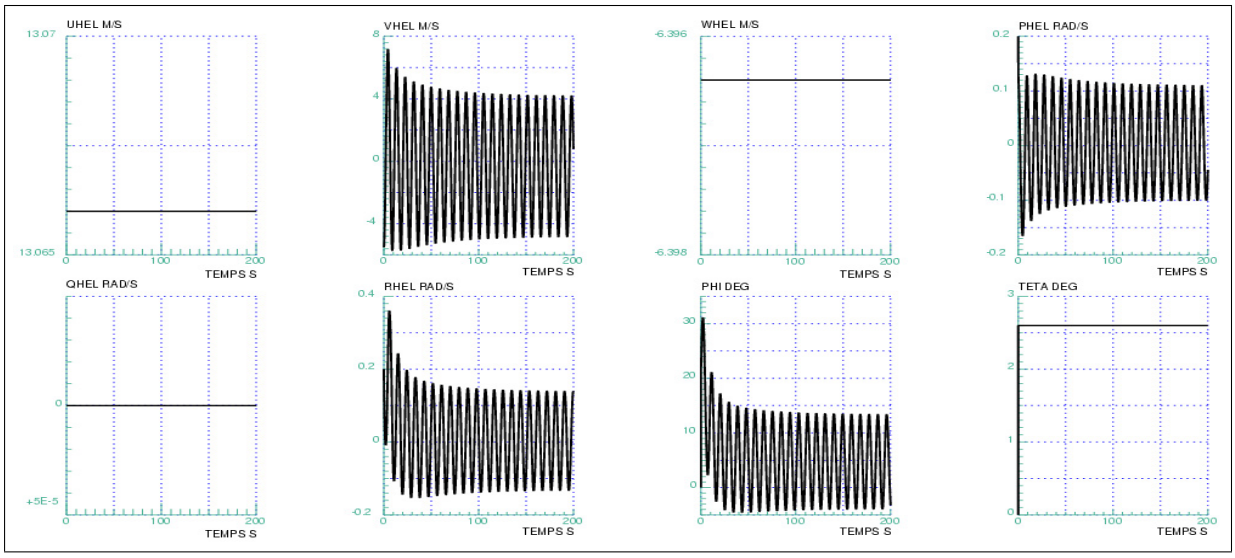



FIG. 9.12. Simulation pour une vitesse d'avancement $V_H = 46km/h$ et de perturbation initiale sur le bloc $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$

Pour les différentes conditions initiales, les mêmes oscillations sont au final retrouvées. Pour le vérifier, le tracé d'un portrait de phase permet d'observer que les simulations temporelles s'enroulent bien sur la même orbite périodique. Sur la figure (9.13), les courbes de couleurs différentes correspondent à différentes conditions initiales.

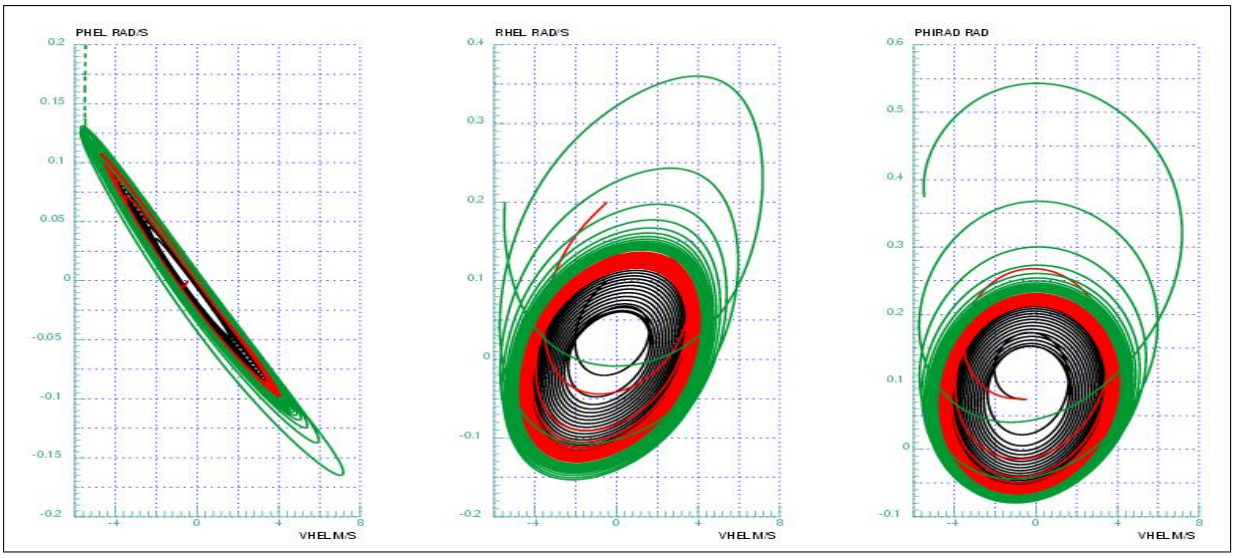



FIG. 9.13. Portrait de phase des simulations du bloc latéral pour une vitesse d'avancement de $V_H = 46km/h$

**Conclusion :** L'**existence de cycles limites stables dans le cas de la bifurcation du roulis hollandais** a été constatée et démontrée. Ces cycles limites ne pouvaient être observés auparavant parce que, comme il existait un mode propre divergent dans le mouvement longitudinal, l'hélicoptère prenait dans tous les cas de la vitesse d'avancement, ce qui rendait les simulations divergentes. Il s'agit d'un résultat intéressant : la théorie des bifurcations a suggéré l'existence de ces orbites périodiques qui étaient cachées et le travail d'analyse a réussi à les dévoiler.

### 9.2.3 Continuation des orbites périodiques

Les travaux cherchent à caractériser l'évolution des orbites périodiques en fonction de l'éloignement vis-à-vis de la valeur pour laquelle il y a une bifurcation, c'est-à-dire l'évolution de l'amplitude et de la pulsation en fonction du paramètre de contrôle $V_H$. Pour cela, de nombreuses simulations temporelles pourraient être effectuées, mais la préférence est accordée à la mise en œuvre de la continuation des orbites périodiques qui consiste à réaliser sa description mathématique et sa programmation informatique.

L'exploitation d'une telle fonctionnalité dans ASDOBI se fait dans le cadre des systèmes différentiels ordinaires. Les problèmes considérés sont du type $\dot{X} = F(X, u)$. Pour ce qui est de l'hélicoptère, une connaissance acquise est qu'il convient de donner une description mathématique sous forme d'un système d'équations algébro-différentielles. Dans le cas du Vortex Ring State, les équations algébriques permettaient de fixer le cas de vol. Pour l'étude du roulis hollandais, cela est aussi indispensable. Mais, en plus, il s'agit de faire en sorte que les variables du bloc longitudinal prennent les valeurs à l'équilibre qui correspondent aux conditions de vol fixées par le paramètre de continuation. Deux types de calculs devraient donc être réalisés en parallèle : celui de la courbe des points d'équilibre et celui de l'enveloppe des cycles limites.

D'une part, la courbe des points d'équilibre est solution du système suivant où $X$ est le vecteur des variables d'état, $U$ le vecteur des paramètres de contrôle, $F$ la fonction non-linéaire représentant le système d'équations :

$$\begin{cases} F(X,U)=0 \\ X=(U_{hel},V_{hel},W_{hel},P_{hel},Q_{hel},R_{hel},\phi,\theta,DT0,DTC,DTS,DTA) \\ U=(V_{H0},V_{Z0}) \\ F=\left(\dot{U}_{hel},\dot{V}_{hel},\dot{W}_{hel},\dot{P}_{hel},\dot{Q}_{hel},\dot{R}_{hel},\dot{\phi},\dot{\theta},V_X-V_{H0},V_Y,V_Z-V_{Z0},R_{hel}\right) \end{cases}$$

D'autre part, les cycles limites sont solutions du système ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{X}=F(X,U) \\ X=(V_{hel},P_{hel},R_{hel},\phi) \\ U=(U_{hel},W_{hel},Q_{hel},\theta,DT0,DTC,DTS,DTA) \\ F=\left(\dot{V}_{hel},\dot{P}_{hel},\dot{R}_{hel},\dot{\phi}\right) \end{cases}$$

En combinant les deux, la formulation finale qui est un système algébro-différentiel consiste en :

$$\begin{cases} \dot{X} & = & F(X,Y,U) \\ 0 & = & G(X,Y,U) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} X=\left(V_{hel}^{dyn},P_{hel}^{dyn},R_{hel}^{dyn},\phi^{dyn}\right) \\ Y=(U_{hel},V_{hel},W_{hel},P_{hel},Q_{hel},R_{hel},\phi,\theta,DT0,DTC,DTS,DTA) \\ U=(V_{H0},V_{Z0}) \\ F=\left(\dot{V}_{hel}^{dyn},\dot{P}_{hel}^{dyn},\dot{R}_{hel}^{dyn},\dot{\phi}^{dyn}\right) \\ G=\left(\dot{U}_{hel},\dot{V}_{hel},\dot{W}_{hel},\dot{P}_{hel},\dot{Q}_{hel},\dot{R}_{hel},\dot{\phi},\dot{\theta},V_X-V_{H0},V_Y,V_Z-V_{Z0},R_{hel}\right) \end{cases}$$

Une particularité de la formulation mathématique est que les variables du bloc latéral sont présentes deux fois, une fois dans les équations dynamiques, une autre fois dans les équations algébriques.

Pour procéder à la mise en œuvre effective, des travaux de programmation doivent également être réalisés et ont pour objectif de faire en sorte que le calcul des équations (et de la jacobienne associée) se fassent correctement. Il est nécessaire, en fait, de définir quel est le système d'équations que doit résoudre l'algorithme de continuation afin de parcourir l'enveloppe des orbites périodiques.

Le formalisme adopté dans la description mathématique est la suivante. La notation $X_{dyn}$ est "surchargée" et dénomme la fonction qui, à un vecteur initial $X_{(0)}$, associe le vecteur dont les composantes sont les valeurs prises par $X=\{V_{hel},P_{hel},R_{hel},\phi\}$ après un temps d'intégration $T$.

Les équations se distinguent en deux catégories : celles qui ont pour objet les variables dynamiques et celles qui régissent les variables statiques. En ce qui concerne les variables dynamiques $X$ sur lesquelles se produisent les cycles limites, il y a d'une part les équations définissant une orbite périodique de période $T$ qui sont au nombre de 4 et qui ont pour inconnues $\left(T,X_{(0)},Y,U\right)$ et d'autre part, la relation d'orthogonalité entre le $i^e$ et le $(i+1)^e$ cycle.

Les variables statiques $Y$, quant à elles, décrivent (uniquement) la courbe des points d'équilibre et ne dépendent donc pas des variables dynamiques $X$. Au final, le système d'équations algébro-différentielles suivant est obtenu :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_{(0)} - X_{dyn}\left(T, X_{(0)}, Y, U\right) & = & 0 \\ \langle X_{dyn}^{(i+1)}\left(T, X_{(0)}, Y, U\right) - X_{(0)}^{(i)} | \dot{X}_{(0)}^{(i)} \rangle & = & 0 \\ G\left(Y, U\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

Le travail a abouti, avec succès, à ce qu'une formulation sous forme d'un système d'équations algébro-différentielles soit donnée au problème de description des orbites périodiques du bloc latéral. L'analyse de la bifurcation de Hopf peut donc commencer.

#### 9.2.3.1 Résultats

Un cas de vol un peu moins violent que précédemment est choisi, mais sa **vitesse de montée** $V_Z = 5m/s$ est importante quand même. Dans une telle montée, la **bifurcation de Hopf** se produit pour une vitesse d'avancement $V_{H_{hopf}} \approx 40km/h$.

En initialisant le calcul avec un paramètre de contrôle légèrement inférieur à $V_{H_{hopf}}$, la détermination de l'enveloppe des cycles limites s'effectue correctement et la figure (9.14) en est une illustration.

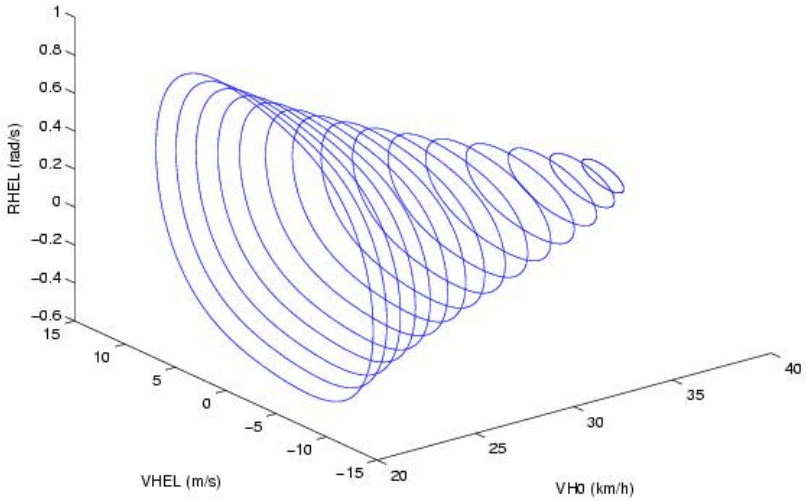



FIG. 9.14. Enveloppe des cycles limites

Comme la bifurcation donne naissance à des cycles limites stables que l'algorithme de continuation réussit à parcourir, la **bifurcation de Hopf** est donc **supercritique** suivant la terminologie détaillée dans l'annexe A ou dans [Guckenheimer et Holmes 2002].

#### 9.2.3.2 Comparaison avec la théorie

Il s'agit de vérifier si les lois mathématiques formulées par la théorie des bifurcations pour l'évolution de l'amplitude et de la pulsation des cycles limites correspondent à celles des simulations temporelles. La valeur maximale de chacune des composantes du bloc latéral pour une vitesse d'avancement donnée et la norme associée $N = \sqrt{V_{hel}^2 + P_{hel}^2 + R_{hel}^2 + \phi^2}$ sont tout d'abord calculées.

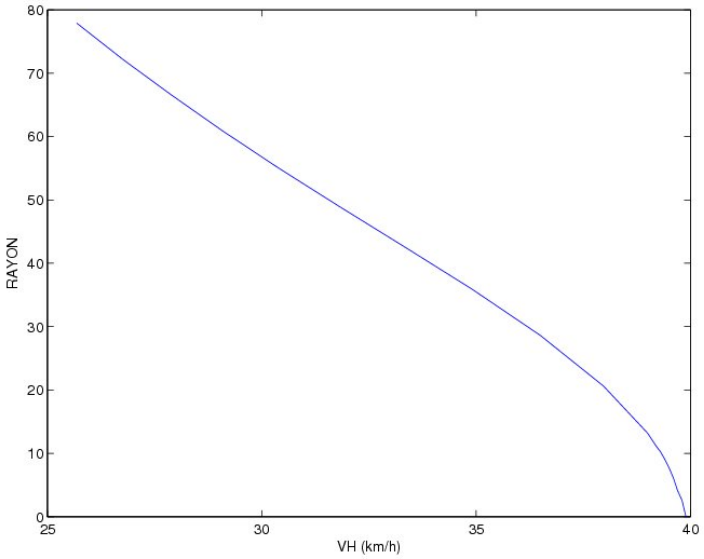



FIG. 9.15. Rayon des cycles limites

La théorie des bifurcations stipule que la loi de dépendance entre l'**amplitude** des cycles limites et le paramètre de contrôle est du type **racine-carré**. La figure (9.15) montre que c'est tout à fait le cas au voisinage de la bifurcation.

Ensuite, l'évolution de la pulsation des cycles limites en fonction du paramètre de continuation qu'est la vitesse d'avancement est également considérée.

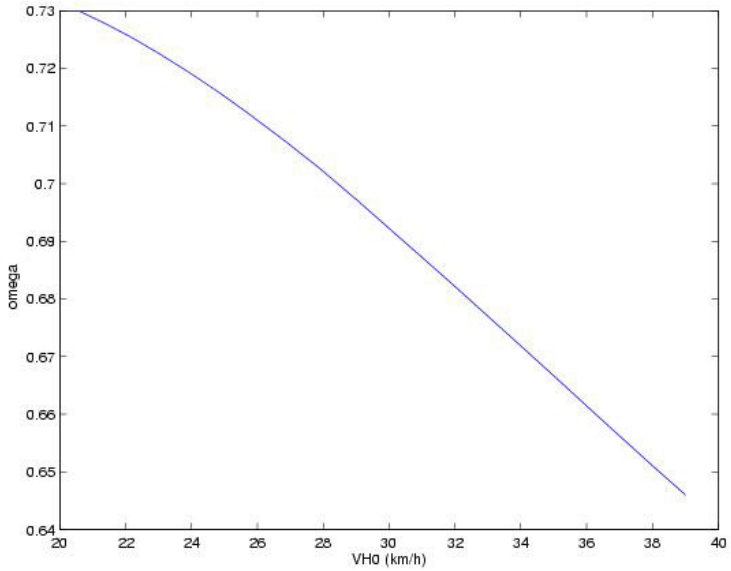



FIG. 9.16. Pulsation des cycles limites

Les enseignements de la théorie incluent que la **pulsation** des cycles limites varie de façon **linéaire** par rapport au paramètre de contrôle. Cette propriété est aussi retrouvée, tant que l'éloignement du point de bifurcation n'est pas trop grand.

### 9.2.4 Conclusion sur les investigations menées avec le modèle analytique

La **bifurcation de Hopf** du roulis hollandais donne bien naissance à des **orbites périodiques** qui mettent en jeu les variables du **bloc latéral** $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$. Ces orbites périodiques sont **stables** et la bifurcation est **supercritique**. Les **formules asymptotiques théoriques** au niveau du point de bifurcation de Hopf se révèlent **exactes**. Une des conséquences de l'existence de cycles limites est que la prévision issue de l'analyse linéaire, qui statue que le système est instable et que l'amplitude des oscillations diverge, est fausse. En fait, l'hélicoptère est animé d'un comportement latéral qui converge vers celui d'une orbite périodique dont l'amplitude et la pulsation évoluent vis-à-vis du paramètre de contrôle qu'est la vitesse d'avancement comme un système dynamique classique. Une telle information peut être utile par exemple lors de la programmation d'un simulateur pour lequel une estimation qualitative exacte du comportement en un point de vol est requise afin de recaler correctement le modèle.

## 9.3 Conclusion générale sur l'étude du roulis hollandais de l'hélicoptère

L'étude entreprise tout d'abord avec le code HOST a montré les limites de l'utilisation d'un tel code pour l'analyse non-linéaire. D'une part, des artefacts numériques gênants proviennent des raccords qui sont faits entre les différentes modélisations employées pour les diverses configurations de vol de l'appareil. D'autre part, des imprécisions numériques cumulées considérables proviennent de la taille importante du modèle informatique et des méthodes itératives choisies pour résoudre certains sous-problèmes à l'intérieur du programme. Ces inconvénients rendent impossibles plusieurs types d'investigations. Les méthodes fines d'analyse non-linéaire basées sur le calcul du développement de Taylor des équations différentielles ne peuvent pas être appliquées avec succès. Les simulations temporelles sont déstabilisées et aucune stratégie de calcul ne procure une stabilité suffisante des calculs pour simuler les cycles limites associés au roulis hollandais.

C'est pourquoi les recherches se sont poursuivies avec le modèle analytique simplifié développé au cours de cette thèse. En se limitant à l'examen de la dynamique latérale de l'appareil, le mouvement longitudinal instable lié à l'oscillation phugoïde est ignoré. Les simulations temporelles convergent vers un cycle limite (stable) quand la vitesse d'avancement est inférieure à la valeur de bifurcation. Cette constatation révèle que la bifurcation de Hopf sous-jacente au roulis hollandais est supercritique. Par ailleurs, la continuation des orbites périodiques stables se déroule bien et les évolutions asymptotiques de l'amplitude et de la pulsation en fonction du paramètre de contrôle vérifient la théorie.

# Chapitre 10

# Analyse de bifurcations de cycles limites : les oscillations induites par le pilote

**Introduction :** L'hélicoptère est un appareil dont la mécanique du vol est gouverné entre autres par un élément à ne pas négliger : le pilote humain. Ce dernier a une certaine perception du monde extérieur et une certaine façon de se comporter une fois qu'il a assimilé les informations externes. Pour examiner le comportement du système au cours d'une manœuvre, l'analyse de la dynamique de l'aéronef seule n'est plus suffisante : le pilote est aussi dans la boucle et il faut en tenir compte. Ce sont ces interactions et en particulier les phénomènes d'oscillations induites par le pilote d'hélicoptère (PIO) qui seront étudiés au cours de ce chapitre, sous le prisme de la théorie des bifurcations. Plusieurs cas concrets seront abordés comme base de l'étude.

## 10.1 Premier cas de PIO : le vol en stationnaire du concept ADOCS

### 10.1.1 Présentation de l'appareil et du cas de vol

Le concept ADOCS est un hélicoptère-prototype muni d'un système de contrôle optique digital avancé. Le sigle est un acronyme anglais d' "Advanced Digital Optical Control System" [Tischler 1987].

L'objectif de ce programme américain était de fournir une base pour le développement d'un système de contrôle de vol avancé pour des missions de combat. Il comprend plusieurs volets : l'amélioration des aptitudes en mission, l'amélioration des qualités de vol, la diminution de la charge du pilote. Un tel programme a permis à la NASA et à son homologue canadien des investigations sur la conception, les campagnes d'essais et l'analyse de l'enveloppe de vol complète d'un hélicoptère de combat avancé.

Dans l'étude est considéré un vol proche du stationnaire au cours duquel le pilote veut maintenir son assiette longitudinale. Néanmoins la chaîne de commande a des aptitudes restreintes en taux de variation, ce qui est souvent le cas pour la conception des systèmes qui ont une bande passante importante. Pour remédier à ce problème, les constructeurs ont incorporé un élément dénommé "derivative rate limiter" qui empêche aux mouvements brusques du manche d'être transmis à l'ensemble constitué de l'aéronef et de son pilote automatique. Malheureuse-

FIG. 10.1. Prototype ADOCS de démonstration : l'UH-60 Black Hawk [Tischler *et al.* 1989]

ment cette limitation en vitesse de variation peut donner lieu à du PIO. C'est cet écueil qui est examiné en détail ci-après.

### 10.1.2 Mise en équation du problème

Le modèle comportemental de l'hélicoptère UH-60 Black Hawk équipé d'un système ADOCS de démonstration est établi en considérant un schéma simplifié de la chaîne de contrôle en tangage. La figure (10.2) en présente les différents éléments constitutifs ainsi que les retards $\tau$ qu'ils induisent et qui contribuent à aggraver les oscillations induites par le pilote (de catégorie II qui intéressent cette thèse).

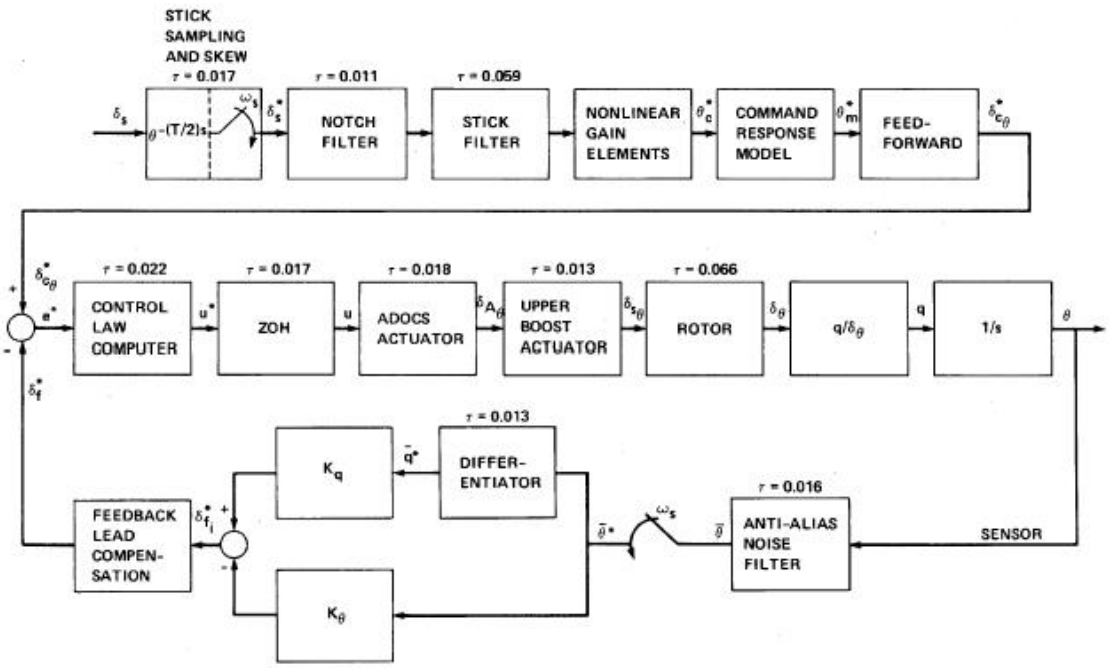



FIG. 10.2. Chaîne de commande en tangage de l'ADOCS [Tischler *et al.* 1989]

Le pilote agit sur le manche dont les entrées sont filtrées et échantillonnées avant de parvenir au calculateur embarqué. Les dynamiques couplées du rotor et du fuselage interviennent dans la dynamique globale de l'aéronef. La réponse en fréquence de l'assiette longitudinale $\theta$ en fonction de la position du manche $\delta_s$ est caractérisée par un système du deuxième ordre (avec un retard) [Tischler *et al.* 1989, page 7] :

$$\frac{\theta}{\delta_s} = \frac{5.26(0.2)e^{-0.244s}}{s\,[0.964, 2.35]}$$

écrit avec les notations abrégées, $(a)$ pour $(s+a)$ et $[\zeta, \omega_n]$ pour $\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)$.

Par ailleurs, la vitesse de variation de la servocommande est limitée à $15deg/s \approx 0.26rad/s$. Le pilote est modélisé par un gain pur comme cela a déjà été fait dans l'étude du PIO du X-15 (section 4.3). Au final, le problème peut se résumer par le schéma Simulink© suivant.

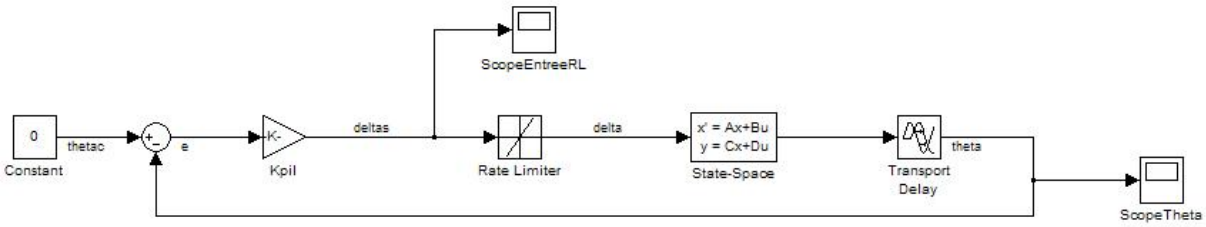



FIG. 10.3. Fichier Simulink représentant la réponse de l'ADOCS en tangage

### 10.1.3 Analyse

Il existe plusieurs méthodes pour examiner les propriétés d'une orbite périodique, afin de savoir principalement si l'orbite périodique est attractive ou répulsive et à quelle vitesse les trajectoires convergent ou divergent. En théorie des bifurcations, la méthode employée généralement est l'application de premier retour (section de Poncaré) [Guckenheimer et Holmes 2002, Perko 1996].

Dans le cadre de cette étude, la préférence est donnée à la méthode du premier harmonique qui permet de diagnostiquer l'existence (ou non) de cycles limites mais également leurs caractéristiques comme la pulsation, une amplitude approximative ou la stabilité. Elle a aussi l'avantage d'être plus facile à mettre en œuvre par un ingénieur qui a des connaissances théoriques mathématiques moins importantes qu'un chercheur et qui préfère toujours les outils les plus pragmatiques.

L'analyse du problème se décompose en deux parties. Dans un premier temps, une configuration dont la nervosité du pilote a été choisie est étudiée et l'existence éventuelle de cycles limites ainsi que leurs propriétés sont déterminées. Dans un deuxième temps, la topologie des trajectoires du système est caractérisée en fonction de la nervosité du pilote $K_{pil}$. Enfin, les résultats sont interprétés du point de vue de la théorie des bifurcations et de l'ingénierie en mécanique du vol. La démarche et les théorèmes utilisés dans l'étude de cas de la partie bibliographique portant sur le PIO de l'arrondi à l'atterrissage du X-15 (section 4.3) sont en grande partie respectés.

Dans la configuration adoptée, le gain pilote est tout d'abord fixée à $K_{pil} = 3.9$. Une étape de l'analyse est de tracer le diagramme de Nyquist relatif à la partie linéaire (en bleu) constituée de l'aéronef et du pilote ainsi que celui relatif à l'opposé de l'inverse du premier harmonique de la partie non-linéaire (en rouge) i.e. la servocommande limitée en vitesse.

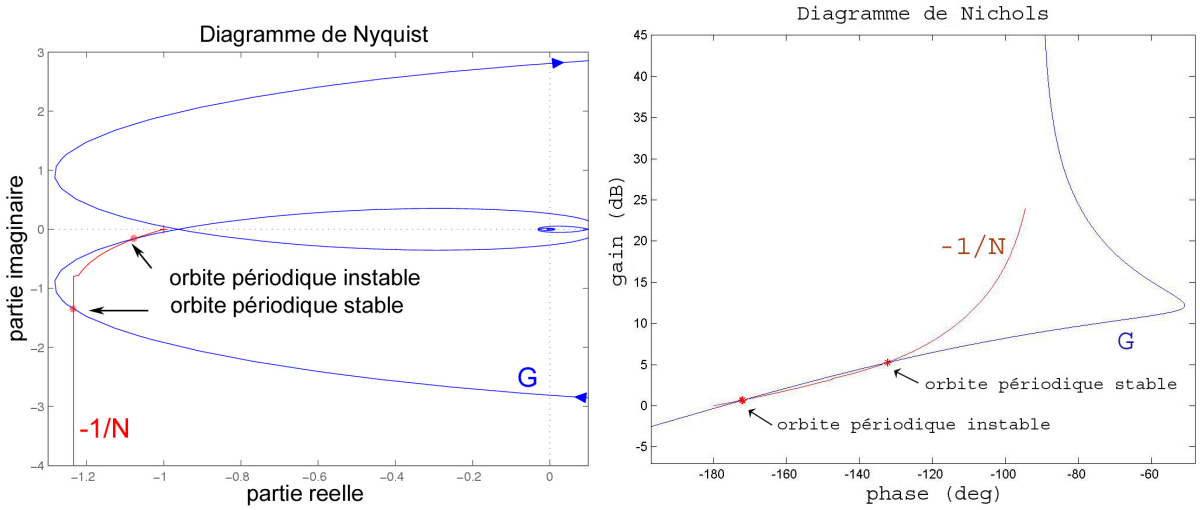



FIG. 10.4. Diagramme de Nyquist et de Nichols pour un gain pilote $K_{pil} = 3.9$

Comme les courbes s'intersectent en deux points, il y a deux cycles limites. Le critère de Loeb permet d'affirmer que le point d'intersection supérieur sur la figure (10.4) correspond à une orbite périodique instable et celui inférieur à une orbite périodique stable. Les valeurs de la pulsation $\omega$ aux points critiques en lesquels $G(j\omega) = -1/N(X)$ sont $3.8rad/s$ et $2.5rad/s$. Quant aux valeurs du rapport $X = \frac{A\omega}{V_L}$ telles que $-1/N(X) = G(j\omega)$, elles sont de 1.3 et 2.3.

Or l'amplitude $A$ des cycles est donnée, dans le cas du limiteur en vitesse, par la formule $A = \frac{V_L X}{\omega}$. Les enseignements de la méthode du premier harmonique permettent de conclure qu'il existe un **cycle instable** de **pulsation** $\omega = 3.8rad/s$ et d'**amplitude** $A = 0.1rad$ et un **cycle stable** de **pulsation** $\omega = 2.5rad/s$ et d'**amplitude** $A = 0.25rad$. En particulier, une information importante est que l'orbite périodique instable est à l'intérieur de celle qui est stable.

Pour vérifier cette affirmation, des simulations temporelles dont les valeurs initiales sont à l'intérieur et à l'extérieur du cycle limite instable sont effectuées. Vu la disposition des éléments, comme l'amplitude de l'état d'entrée de la non-linéarité est de $A = 0.1rad$ pour ce qui est du cycle instable, la valeur-couperet d'initialisation de $\theta$ est $\delta_s(0)/K_{pil} = A/K_{pil} \approx 0.1/3.9 \approx 0.025$.

Une première simulation, de condition initiale $\theta(0) = 0.02rad$ dans le cycle instable, est faite et présentée dans (10.5).

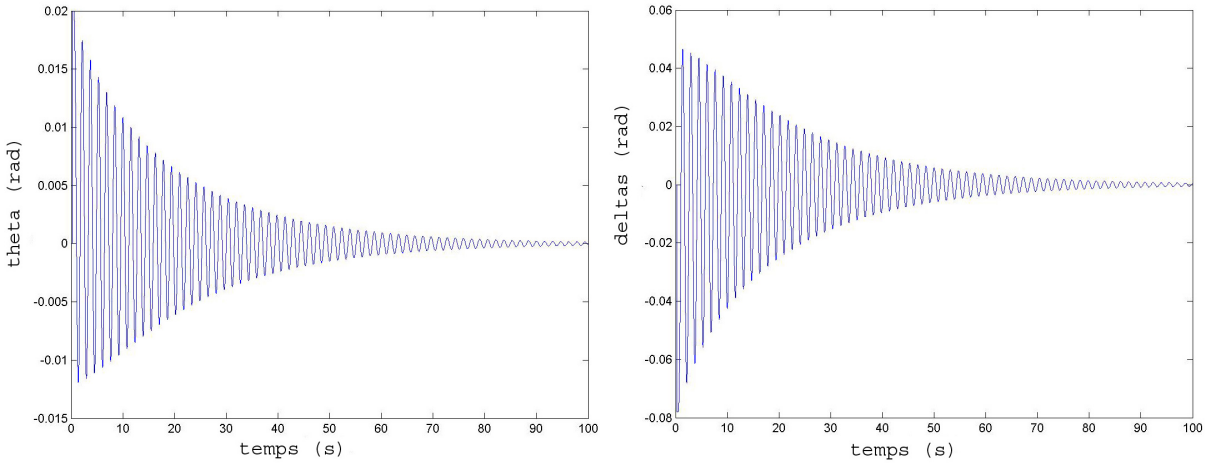



FIG. 10.5. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.02rad$ et $K_p = 3.9$

Le système converge vers le point d'équilibre à l'origine, comme le prédit l'analyse précédente. Pour compléter les vérifications concrètes, une autre simulation temporelle est réalisée en se plaçant cette fois-ci en dehors du cycle instable et en prenant une condition initiale $\theta(0) = 0.03rad$.

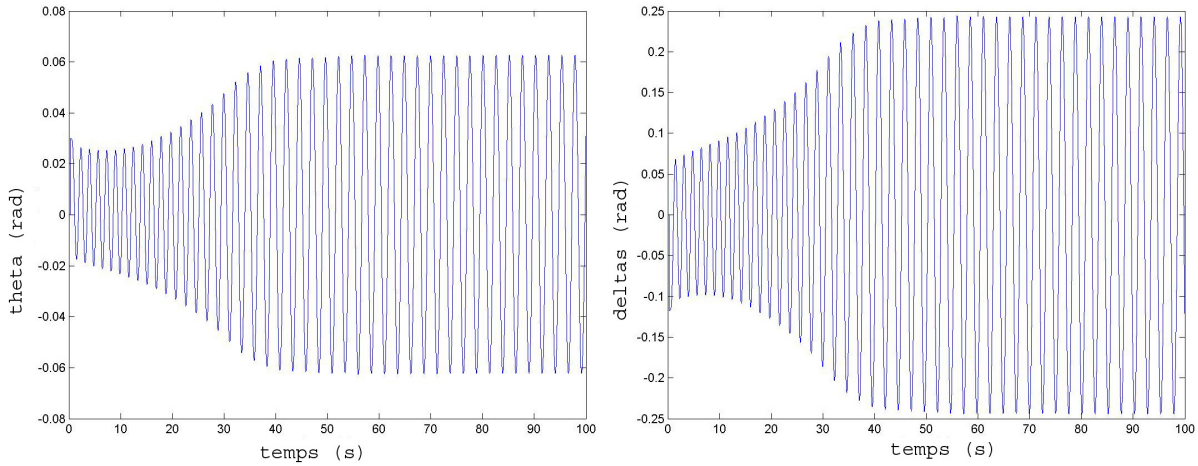



FIG. 10.6. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.03rad$ et $K_p = 3.9$

Le système tend bien vers une orbite périodique dont l'amplitude au niveau de la servo-commande (variable $\delta_s$) est de l'ordre de $0.25rad$, équivalente à celle pressentie dans les calculs préliminaires. Il y a effectivement dans cette configuration un couplage "pilote-véhicule-élément déclenchant" qui donne lieu à des oscillations entretenues lors d'une telle manœuvre.

Dès lors que l'existence de PIO a été mise en évidence dans une situation où la nervosité du pilote était fixée, l'étape suivante est de pouvoir dresser un inventaire des différents types de comportement de l'appareil et des cas possibles de PIO.

Comme tâche initiale de l'analyse globale du dispositif, il est nécessaire de résoudre l'équation d'auto-oscillations. En notant $H$ la fonction de transfert décrivant la réponse de l'aéronef dans le plan longitudinal et $N(A, \omega)$ l'approximation du premier harmonique de la non-linéarité, les

solutions éventuelles de $K_{pil}H(j\omega)N(A,\omega)+1=0$ sont recherchées. Une routine programmée dans l'environnement matlab procède au calcul des courbes du gain pilote $K_{pil}$ en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$.

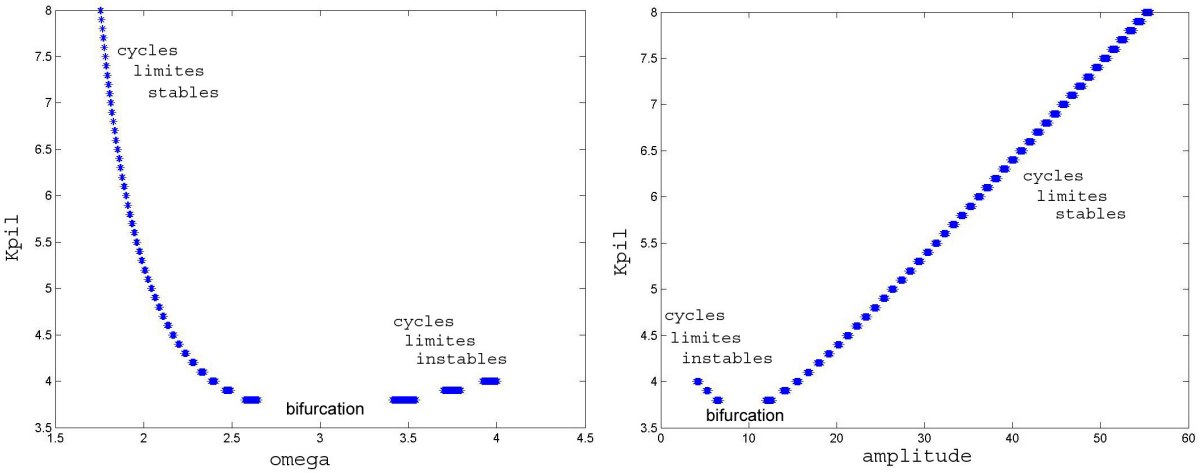



FIG. 10.7. Courbes du gain pilote $K_{pil}$ en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$

De l'examen des tracés de la figure (10.7), il ressort qu'il peut être distingué **trois plages de valeurs du gain pilote** $K_{pil}$ pour lesquelles le nombre de cycles limites diffère.

- Pour $K_{pil} < 3.72$, il n'y a **aucun cycle limite**.

- Pour $3.72 < K_{pil} < 4.1$, il y a **deux cycles limites** et le critère de Loeb permet d'affirmer que le cycle d'amplitude la plus faible et de pulsation la plus grande est **instable** alors que l'autre est **stable**.

- Pour $K_{pil} > 4.1$, il n'y a qu'**un unique cycle limite stable**.

Le diagramme de Nyquist associé à $K^*_{pil} = 3.72$ montre que les graphes de $K^*_{pil} \cdot H$ et $-1/N$ sont tangents, ce qui est une indication que $K^*_{pil}$ est bien la valeur critique pour laquelle apparaissent les cycles limites. De même, sur le diagramme de Nyquist associé à $K^{**}_{pil} = 4.1$, le graphe de $K^{**}_{pil}H$ passe par le point $(-1,0)$, ce qui signifie que le cycle limite associé est voué à disparaître. La figure (10.8) illustre ces constations.

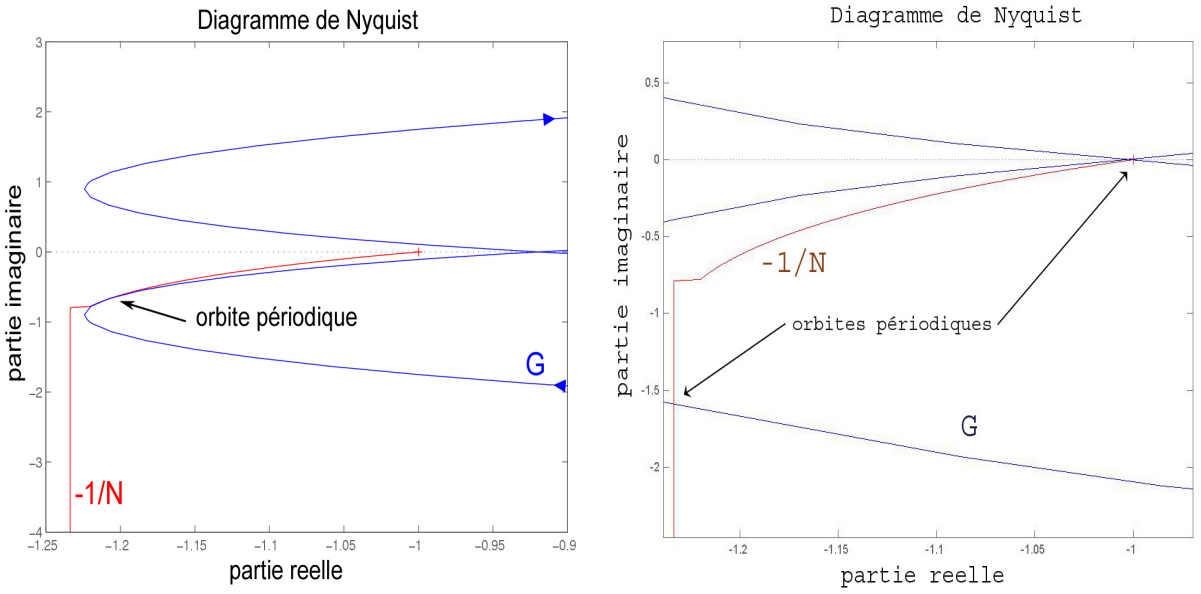



FIG. 10.8. Diagrammes de Nyquist pour $K_{pil} = 3.72$ et $K_{pil} = 4.1$

Dans cette partie de l'analyse, l'attention se focalise aux environs de $K^*_{pil}$. Une simulation temporelle est tout d'abord effectuée pour $K_{pil} = 3.7 < K^*_{pil}$ et sa valeur initiale $\theta(0) = 0.1rad$ est sélectionnée grande afin qu'elle converge de façon certaine vers le cycle limite éventuel, s'il y en a un.

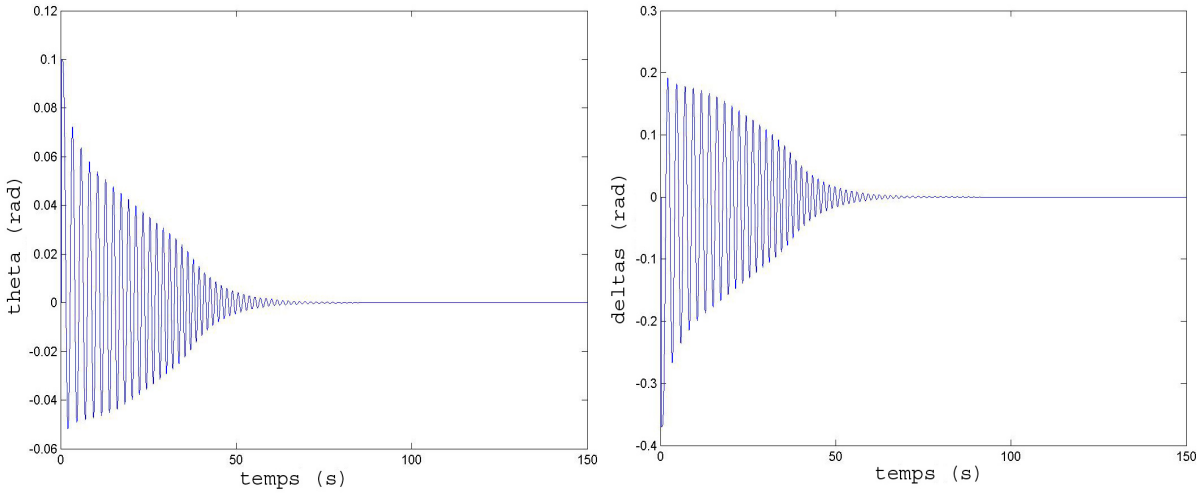



FIG. 10.9. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.1rad$ et $K_{pil} = 3.7$

La simulation converge vers le point d'équilibre à l'origine, en accord avec les prévisions de l'investigation initiale.

La configuration dans laquelle l'étude se poursuit est celle où $K_{pil} = 3.76 > K^*_{pil}$. La simulation, dont la valeur initiale de $\theta(0) = 0.1rad$ est choisie grande afin de ne pas manquer un éventuel cycle limite, donne :

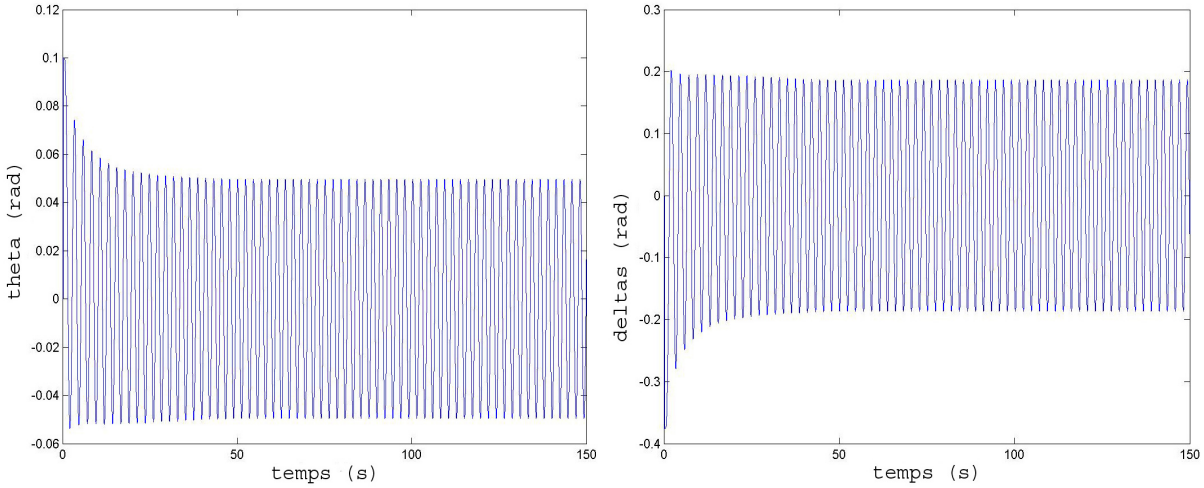



FIG. 10.10. Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.1rad$ et $K_{pil} = 3.76$

Il s'agit d'une situation pour laquelle il y a un couplage aéronef-pilote, comme prévu. Afin d'accrocher des orbites périodiques avec Simulink, il faut néanmoins choisir un gain pilote légèrement plus élevé que la valeur critique théorique $K^*_{pil}$.

### 10.1.4 Conclusion sur l'étude du premier cas de PIO

Pour ce qui est de l'interprétation mathématique des résultats, en la valeur $K^*_{pil}$, il y a création (ou destruction suivant l'appelation qui évoque le mieux l'évènement) d'une orbite périodique stable et d'une orbite périodique instable. C'est un phénomène que la théorie des bifurcations dénomme une **bifurcation nœud-selle d'orbites périodiques**.

Le prototype d'hélicoptère ADOCS est susceptible de rencontrer des oscillations induites par le pilote et ceci peut surprendre parce que l'appareil a été réalisé en respectant des normes de qualités de vol de niveau 1. Comme la plage de gain pilote s'étend de 1, pour les pilotes calmes, à 10, pour les personnes très excitées, la valeur de bifurcation, qui est de $K^*_{pil} = 3.72$, indique que le pilote n'a besoin d'être que moyennement nerveux pour que le phénomène se produise, le danger est donc réel.

**Transition :** Un premier cas de PIO affectant un hélicoptère a été étudié et modélisé avec le schéma classique "aéronef-pilote-élément déclenchant" dans une configuration la plus simple possible. Les travaux d'analyse sont étayés en abordant un cas plus complet et complexe dans la suite.

## 10.2 Deuxième cas : le pilote automatique complet du concept ADOCS

### 10.2.1 Présentation

Dans cette partie, l'architecture du pilote automatique du concept ADOCS est examinée. Une présentation en est donnée avant d'évaluer l'influence, sur l'apparition éventuelle de pom-

page piloté, des non-linéarités présentes dans la chaîne de commande.

Les nouveaux hélicoptères sont de plus en plus manœuvrables, sont amenés à effectuer des missions de plus en plus diversifiées et sont dotés de systèmes avioniques qui font partie intégrante de l'aéronef et en constitue un élément-clef. Le concept ADOCS a été développé dans cette optique et est le fruit d'une étude approfondie. Cette dernière comprend le dimensionnement du manche et la définition des propriétés requises concernant les lois de contrôle pour les vols à faible vitesse et à faible altitude. Plus globalement, elle cherche à concevoir un pilote automatique pour l'ensemble du domaine de vol et à les valider grâce à des simulations pilotées sur un démonstrateur.

M. B. Tischler décrit les caractéristiques de l'appareil et du pilote automatique dans son rapport technique sur le système de commande numérique d'un hélicoptère de combat [Tischler 1987] dont le schéma (10.11) expose les éléments constitutifs et le tableau (10.1) les variables associées. Le prototype est construit en modifiant un hélicoptère Black Hawk UH-60 et une description de son comportement longitudinal est donnée dans la suite de cette partie.

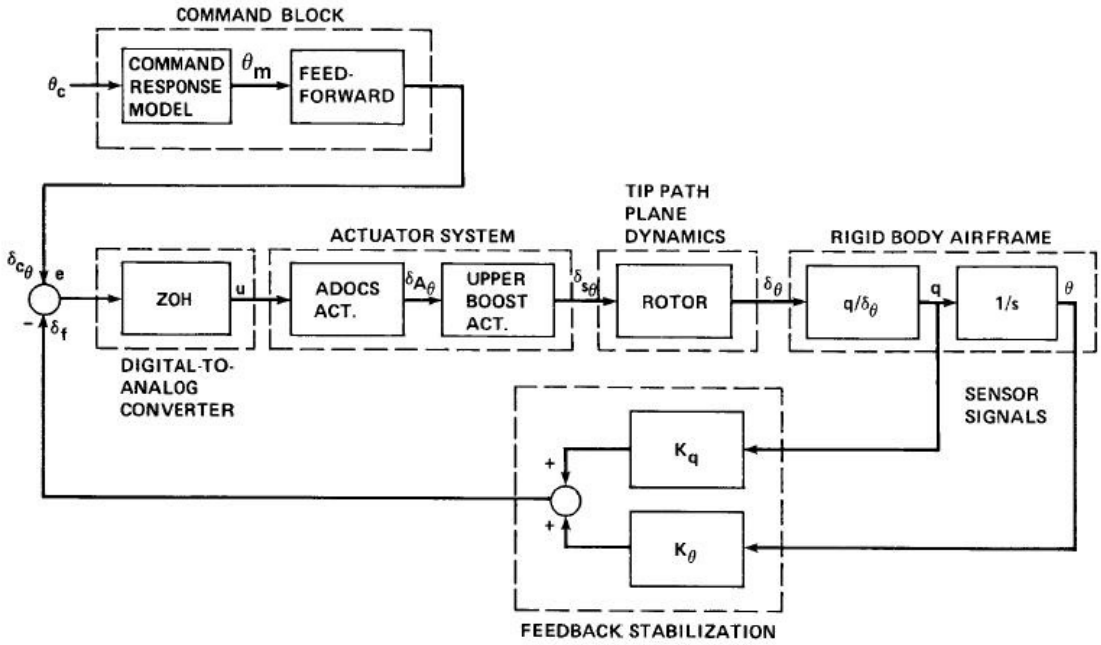



FIG. 10.11. Chaîne simplifiée de commande en tangage de l'ADOCS [Tischler 1987]

| variables | unité | désignation | état de |
|---|---|---|---|
| $\theta_c$ | rad | | consigne |
| $\theta_m$ | rad | | modèle de commande |
| $\delta_{c_\theta}$ | inch | commande du pas cyclique longitudinal exigée | feedforward |
| $e$ | inch | écart entre la consigne et la commande | erreur |
| $u$ | inch | commande du pas cyclique longitudinal effective | commande transmise |
| $\delta_{A_\theta}$ | inch | commande filtrée par la servocommande ADOCS | actionneur ADOCS |
| $\delta_{s_\theta}$ | inch | angle du pas cyclique longitudinal | plateau cyclique |
| $\delta_\theta$ | rad | angle du plan rotor | rotor |
| $q$ | $rad/s$ | vitesse de tangage | |
| $\theta$ | $rad$ | assiette longitudinale (angle de tangage) | hélicoptère |

TAB. 10.1. Variables de la chaîne de commande de l'ADOCS

Ci-après, chacun des blocs est passé en revue. Leur portrait est brossé, des formules et des valeurs numériques concrètes sont explicitées.

La dynamique du fuselage par rapport au rotor se caractérise par la fonction de transfert suivante obtenue en combinant les six équations de la mécanique du vol gouvernant l'UH-60 :

$$\frac{\theta}{\delta_\theta} = \frac{M_{\delta_\theta}\left[\zeta_\theta, \omega_\theta\right]\left(1/T_\theta\right)}{\left(1/T_p\right)\left(1/T_{sp_1}\right)\left(1/T_{sp_2}\right)\left[\zeta_p, \omega_p\right]} \tag{10.1}$$

où

$$\begin{aligned}
M_{\delta_\theta} &= -0.329 rad/sec^2/inch \\
\left[\zeta_\theta, \omega_\theta\right] &= [0.766, 0,0209] \\
1/T_\theta &= 0.272 rad/sec \\
1/T_p &= -0.091 rad/sec \\
1/T_{sp_1} &= 0.262 rad/sec \\
1/T_{sp_2} &= 0.58 rad/sec \\
\left[\zeta_p, \omega_p\right] &= [0.146, 0.214]
\end{aligned}$$

Chaque facteur du dénominateur correspond à un mode naturel du corps rigide représentant l'hélicoptère. Le mode de fréquence la plus basse $(1/T_p)$ est associé à un mouvement couplé latéral/longitudinal de translation. Il est divergent mais comme la constante de temps de doublement de l'amplitude est grande, ce n'est pas gênant. Le second mode apériodique $\left(1/T_{sp_1}\right)$ qualifie un mouvement vertical et l'amortissement induit par la présence du rotor. Les autres termes rendent compte du mouvement dominant de l'aéronef en tangage qui consiste en des oscillations des vitesses d'avancement et de tangage. Le facteur du second ordre $[\zeta_p, \omega_p]$ est lié au mouvement périodique de la phugoïde. Par ailleurs, en ne gardant que le mode $1/T_E = -1/M_q = -0.519$ qui est l'amortissement en tangage, la dynamique du corps rigide (du fuselage) se simplifie éventuellement en

$$\frac{\theta}{\delta_\theta} = \frac{M_{\delta_\theta}}{s\left(s + 1/T_E\right)} \tag{10.2}$$

En ce qui concerne le système rotor, il peut être représenté par la fonction de transfert :

$$\frac{\delta_\theta}{\delta_{s_\theta}} = \frac{-42957.8(14.8)}{[0.28, 51.7]\,[0.96, 15.4]} \qquad inch/inch \tag{10.3}$$

Elle décrit le couplage rotor/fuselage et les modes du second ordre représentent la réponse du plan d'extrémité de pales aux variations du pas cyclique longitudinal.

Quant à la dynamique de la servocommande ADOCS, elle est du deuxième ordre :

$$\frac{\delta_{A_\theta}}{u} = \frac{89^2}{[0.8, 89]} \qquad inch/inch \tag{10.4}$$

et celle des plateaux cycliques dénommés "upper boost actuator" du premier ordre :

$$\frac{\delta_{s_\theta}}{\delta_{A_\theta}} = \frac{76.9}{(76.9)} \qquad inch/inch \tag{10.5}$$

Toutes les deux ont des fréquences élevées et induisent des retards de transmission de la dynamique dans la chaîne de commande.

En outre, les gains de la boucle de rétro-action par rapport à la vitesse et à l'angle de tangage sont calculés et valent :

$$K_q = 16.0 \qquad inch/rad/sec \tag{10.6}$$

$$K_\theta = 34.0 \qquad inch/rad \tag{10.7}$$

En ce qui concerne la pré-commande dénommée "feedforward" en anglais, sa fonction de transfert correspond à l'inverse de la dynamique de l'aéronef (cf. fig (10.12)), dont la dynamique est simplifiée i.e. les pôles de partie réelle positive sont éliminés et qui inclut la boucle de rétro-action. La pré-commande vérifie :

$$F(s) = P^{-1}(s) + H(s) \text{ soit } \frac{\delta_{c_\theta}}{\theta_m} = (16s + 34) + \frac{s\,(s + 0.58)}{0.329} \qquad inch/rad$$

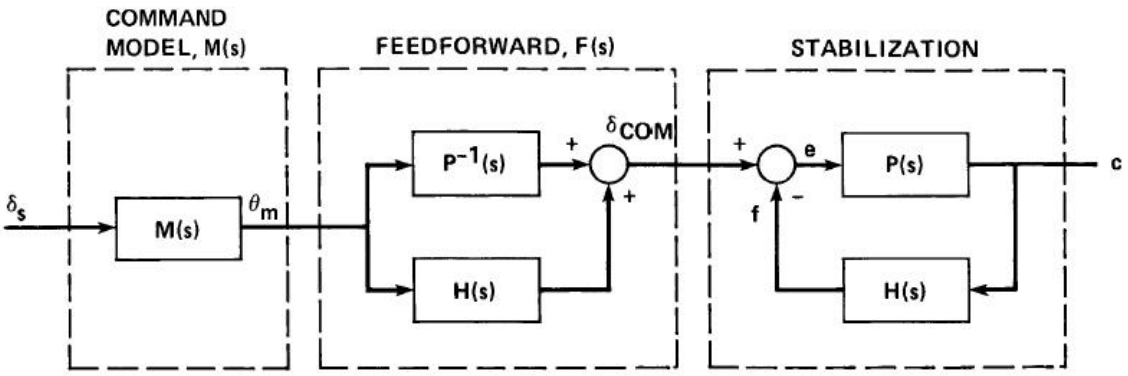



FIG. 10.12. Suivi d'une consigne du concept ADOCS

Finalement, avec les notations de la figure (10.11),

$$\frac{\delta_{c_\theta}}{\theta_m} = 3.04\,[0.87, 3.35] \qquad inch/rad \tag{10.8}$$

Le modèle de commande en attitude, quant à lui, est un second ordre et vérifie les exigences en bande passante des normes de qualités de vol :

$$\frac{\theta_m}{\theta_c} = \frac{2.0^2}{[0.75, 2.0]} \qquad inch/inch \tag{10.9}$$

Les mouvements du manche sont filtrés avant d'être transmis. Les caractéristiques sont un compromis entre l'atténuation désirée et le retard de phase. Le filtre a comme fonction de transfert :

$$G_F(s) = \frac{40^2}{[0.6, 40]} \tag{10.10}$$

Il est à noter que des retards existent dans la chaîne de tangage et aggravent les PIO éventuels. A titre indicatif, voici une liste des différentes contributions.

| Elément | ms |
|---|---|
| Stick sampling skew | 17 |
| Stick prefilter | 32 |
| Notch filter | 40 |
| Zero-order hold | 17 |
| ADOCS actuator | 18 |
| Upper boost actuator | 13 |
| Rotor | 64 |
| Rigid body dynamics | 12 |
| Total | 213 |

### 10.2.2 Première non-linéarité : la sensibilité non-linéaire du manche

La force du pilote qui agit sur le manche est transformée en valeur numérique de consigne ou de commande. La fonction qui convertit la force exercée sur le manche en valeur de consigne a un gradient non-linéaire (croissant) afin de fournir une commande adaptée à l'appareil et d'exiger des variations importantes quand le manche se rapproche de la butée. Comme première configuration est étudié le cas simplifié où cette fonction présente (seulement) une zone morte au voisinage de la position neutre et sature quand la position du manche est trop grande (mais pas de gradients différents entre la zone morte et la saturation).

Les données concrètes de l'élément non-linéaire sélectionné pour cette application sont les suivantes. Le manche a une zone morte qui s'étend jusqu'à 0.1, une saturation à partir de 1.1 et une pente de 2.

Comme le montre l'illustration (10.13), il y a deux non-linéarités, la zone morte et la butée, qui, l'une et l'autre, peuvent donner naissance à un cycle limite.

Pour caractériser l'influence de la sensibilité non-linéaire du manche, la nervosité du pilote est d'abord fixée et l'examen cherche à déterminer l'existence éventuelle de pompage piloté. Par la suite, l'espoir est de brosser un portrait global des différentes configurations qui peuvent être rencontrées en fonction de la modélisation du pilote. Un diagramme synoptique du système étudié est fourni par le schéma Simulink© (10.14).

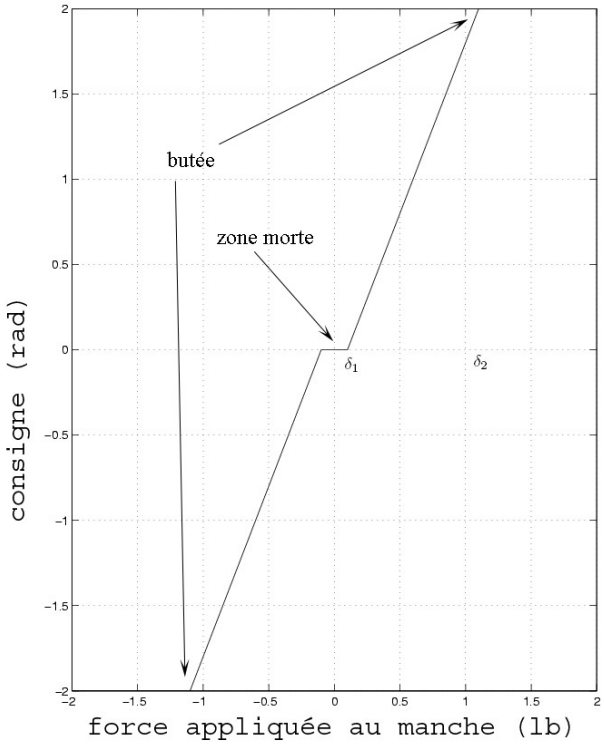



FIG. 10.13. Sensibilité non-linéaire du manche

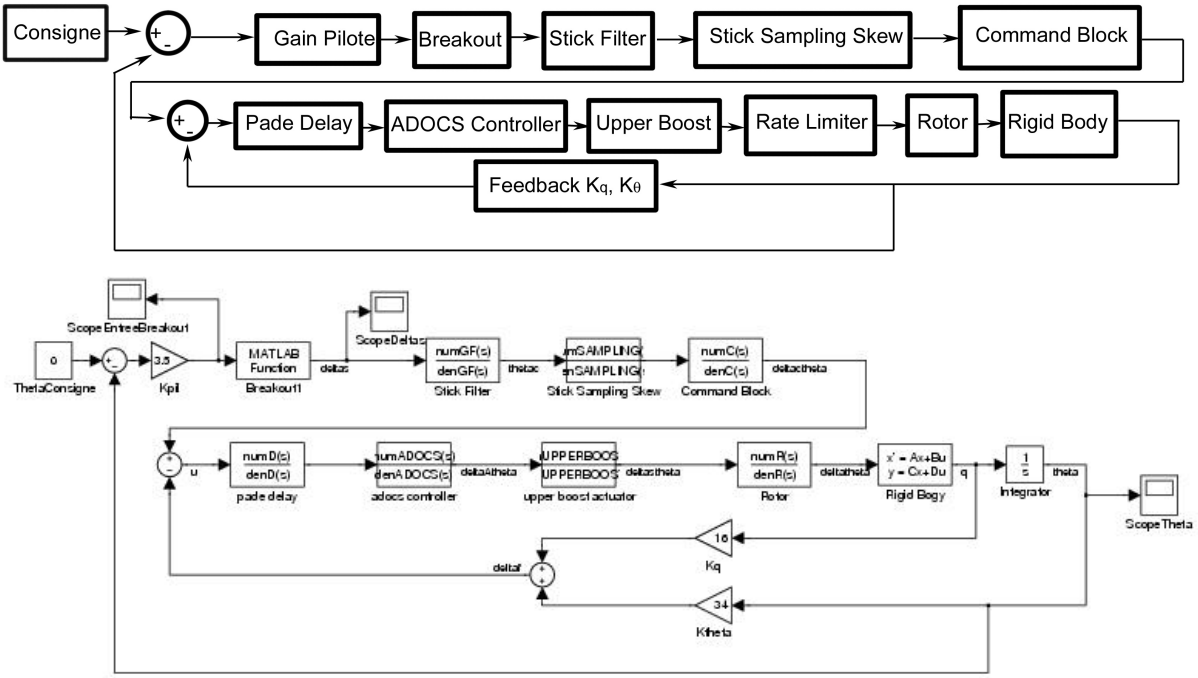



FIG. 10.14. Schéma Simulink de l'ADOCS avec une zone morte et une saturation entre le manche et l'hélicoptère

L'analyse utilise la méthode du premier harmonique. En appelant $f$ le premier harmonique de la saturation unitaire (cf. l'annexe C), $\delta_1$ la valeur en laquelle finit la zone morte, $\delta_2$ la position en laquelle le manche sature et $m$ la pente entre les amplitudes des signaux de sortie et d'entrée quand la position est comprise entre $\delta_1$ et $\delta_2$, le premier harmonique $N(A)$ de la sensibilité non-linéaire du manche a pour expression :

$$N(A) = m \cdot (f(\delta_2/A) - f(\delta_1/A))$$

et pour représentation graphique :

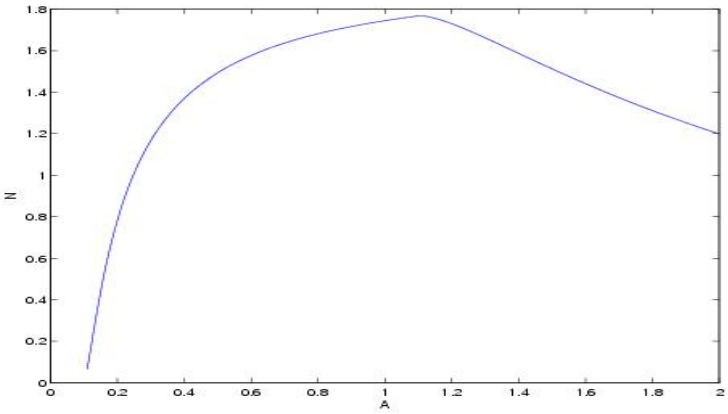



FIG. 10.15. Graphe du premier harmonique de la sensibilité non-linéaire du manche

D'une part, la fonction $N$ part de 0, croît jusqu'à son maximum puis décroît jusqu'à 0, d'où il suit que $-1/N$ part de $-\infty$ pour atteindre son maximum puis décroît jusqu'à $-\infty$. D'autre part, $N$ est une fonction à valeurs réelles. L'auto-oscillation se produit donc, le cas échéant, quand le graphe de la dynamique de l'aéronef et du pilote coupe l'axe réel et une idée des configurations possibles se conçoit ainsi : il y a deux orbites périodiques ou rien.

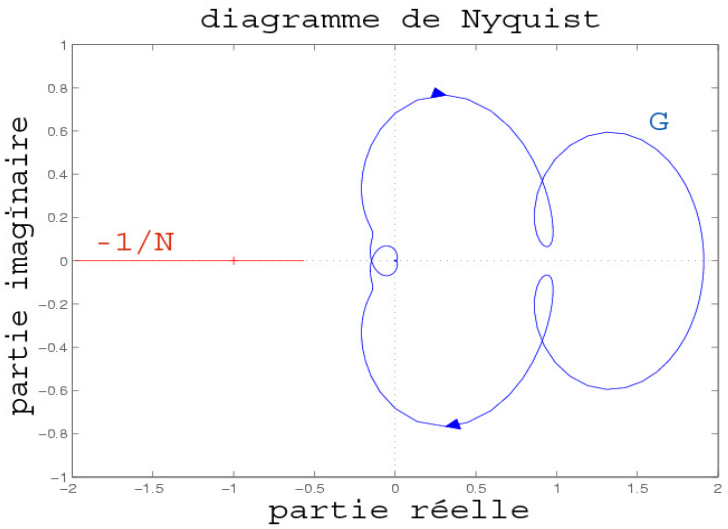



FIG. 10.16. Diagramme de Nyquist de la partie linéaire $G$ du prototype ADOCS et de la sensibilité non-linéaire du manche $-1/N$ dans la configuration choisie pour la section (10.2.2)

Un pilote moyennement nerveux est choisi et modélisé par un gain pur $K_{pil} = 6$. Sachant que le diagramme de Nyquist de $K_{pil} \cdot G$ s'obtient par translation suivant l'axe réel du diagramme de Nyquist de $G$, l'observation de ce dernier conduit à envisager qu'il y a deux intersections entre la courbe représentative de la partie linéaire de l'aéronef $K_{pil} \cdot G$ et celle de la partie non-linéaire $-1/N$. Il existe donc **deux cycles limites** et le critère de Loeb permet de statuer que celui d'amplitude la plus grande est **stable** et celui d'amplitude la plus petite est **instable**. Deux simulations temporelles sont effectuées en guise de tests, une dont la condition initiale est à l'intérieur du cycle limite instable et une autre dont la condition initiale est à l'extérieur.

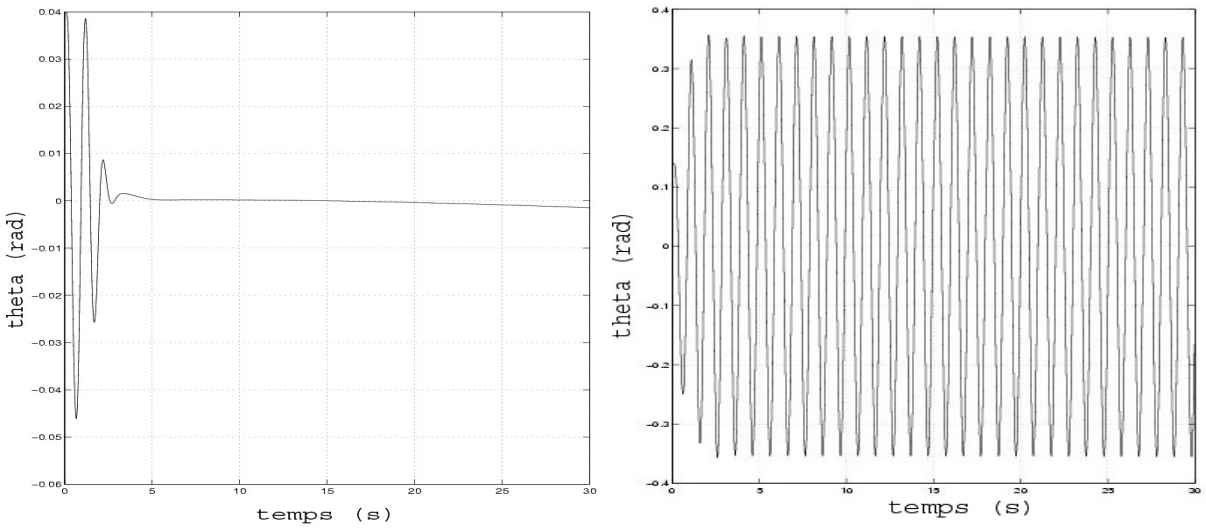



FIG. 10.17. Simulations temporelles de $\theta$ pour $K_{pil} = 6$ et de conditions initiales $\theta(0) = 0.04rad$ ou $\theta(0) = 0.14rad$

Le comportement prédit est vérifié. La première simulation converge vers le point d'équilibre stable à l'origine et la deuxième s'enroule sur le cycle limite stable. La sensibilité non-linéaire du manche est bien responsable de PIO.

L'examen cherche par la suite à caractériser l'influence de la non-linéarité sur le comportement du système pilote-véhicule en fonction de la nervosité du pilote. Pour cela, il faut résoudre l'équation d'auto-oscillations qui informe de l'existence de cycles limites éventuels, de leur amplitude et de leur pulsation respectives.

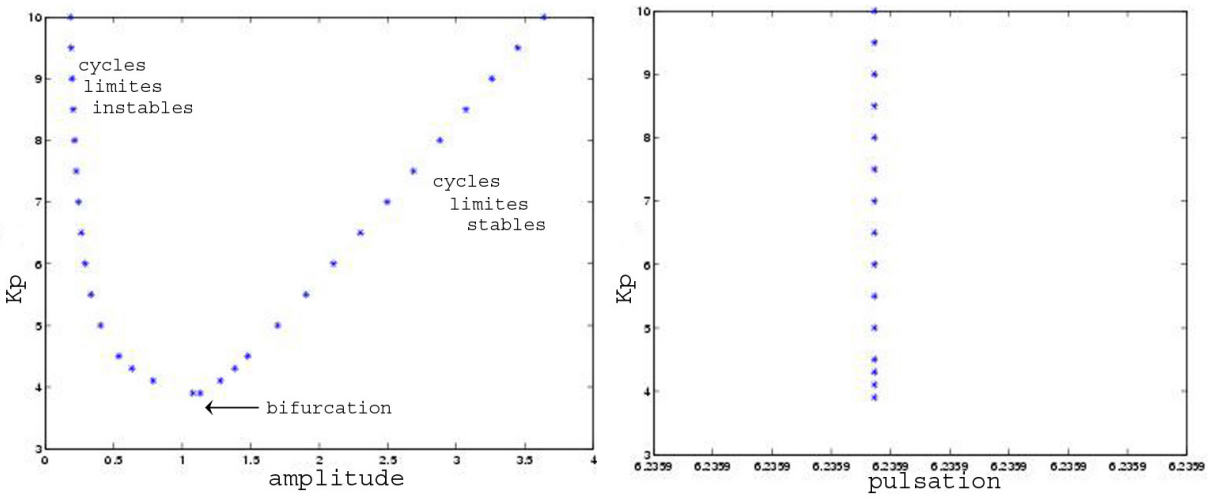



FIG. 10.18. Gain pilote en fonction de l'amplitude et de pulsation des oscillations

La pulsation des cycles limites est toujours la même et pour des gains pilote inférieurs à $K^*_{pil} = 3.9$, il n'existe pas de phénomène de PIO. Deux simulations temporelles sont faites avec des pilotes qui ne sont pas assez nerveux $\left(K_{pil} < K^*_{pil}\right)$ ou trop nerveux $\left(K_{pil} > K^*_{pil}\right)$. Pour ces dernières, une condition initiale grande est sélectionnée afin de capturer le cycle limite éventuel s'il existe.

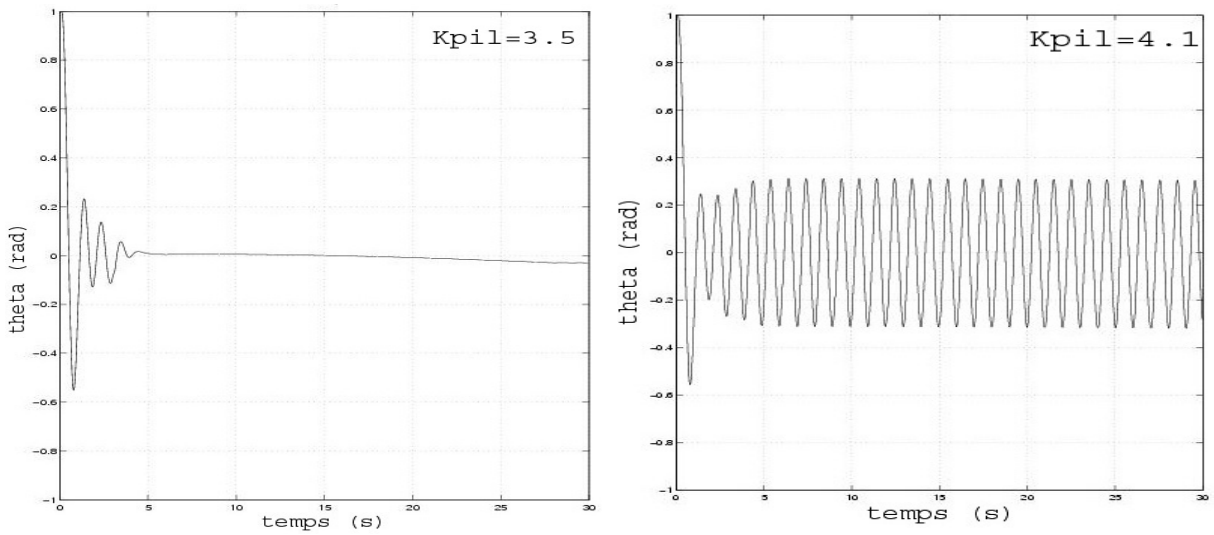



FIG. 10.19. Simulations temporelles de $\theta$ de condition initiale $\theta(0) = 1.0rad$ et pour des gains pilote $K_{pil} = 3.5$ ou $K_{pil} = 4.1$

Les prévisions sur l'existence ou non d'un cycle limite s'avèrent exactes. La figure (10.19) confirme que même une nervosité de pilotage moyenne peut générer du pompage piloté (PIO). Les recherches accomplies concluent qu'un mauvais dimensionnement de la fonction de sensibilité, de la saturation ou de la zone morte du manche est donc dangereux : une **bifurcation nœud-selle de cycles limites** peut apparaître (avec des pilotes relativement peu nerveux) qui modifie le comportement du système et engendre des **oscillations indésirables**.

### 10.2.3 Deuxième non-linéarité : la limitation en vitesse de l'actionneur

L'actionneur associé aux plateaux cycliques ("upper boost actuator") présente des limitations mécaniques. Il ne peut atteindre l'état demandé qu'avec une vitesse maximale de $10inch/sec$ [Tischler 1987, page 75]. Cette restriction peut donner lieu à du PIO. Mais, comme le limiteur se trouve dans la boucle de rétro-action ("feedback"), et non plus dans la pré-commande ("feed-forward"), son influence est beaucoup plus déstabilisante. C'est pourquoi pour étudier cette non-linéarité, dans la configuration choisie (10.20), les différents retards et le filtre du manche sont supprimés afin de rendre le système le plus stable possible. Dans la même optique, les gains de la boucle de retour sont réduits et valent $K_\theta = 14.52, K_q = 9.19$.

Pour cette étude, il est demandé au pilote de suivre une consigne sinusoïdale. Le modèle de pilote choisi est précognitif synchrone et est déterminé par la théorie du "crossover". Le pilote est modélisé par un gain pur de $K_p = 1$, ce qui correspond à une phase de "crossover" de $-130^\circ$ et à un opérateur nerveux. En effet, la sensibilité du gain pilote est ajustée de telle sorte que l'angle de "crossover" du système pilote-aéronef en boucle ouverte prenne des valeurs allant de $-90^\circ$ (pilote peu nerveux) à $-130^\circ$ (pilote nerveux) pour une manœuvre se développant sur l'axe de tangage et de $-110^\circ$ à $-160^\circ$ pour les mouvements latéraux [Gilbreath 2001, page 2-18].

Pour ce qui est du système examiné ici, il est composé de l'hélicoptère et du pilote en boucle fermé. Quant aux bifurcations rencontrées, elles vont donner lieu à des sauts en amplitude et en phase de la réponse périodique. C'est une conséquence du fait que, contrairement à un système linéaire, un système non-linéaire peut posséder, pour une pulsation et une amplitude de consigne

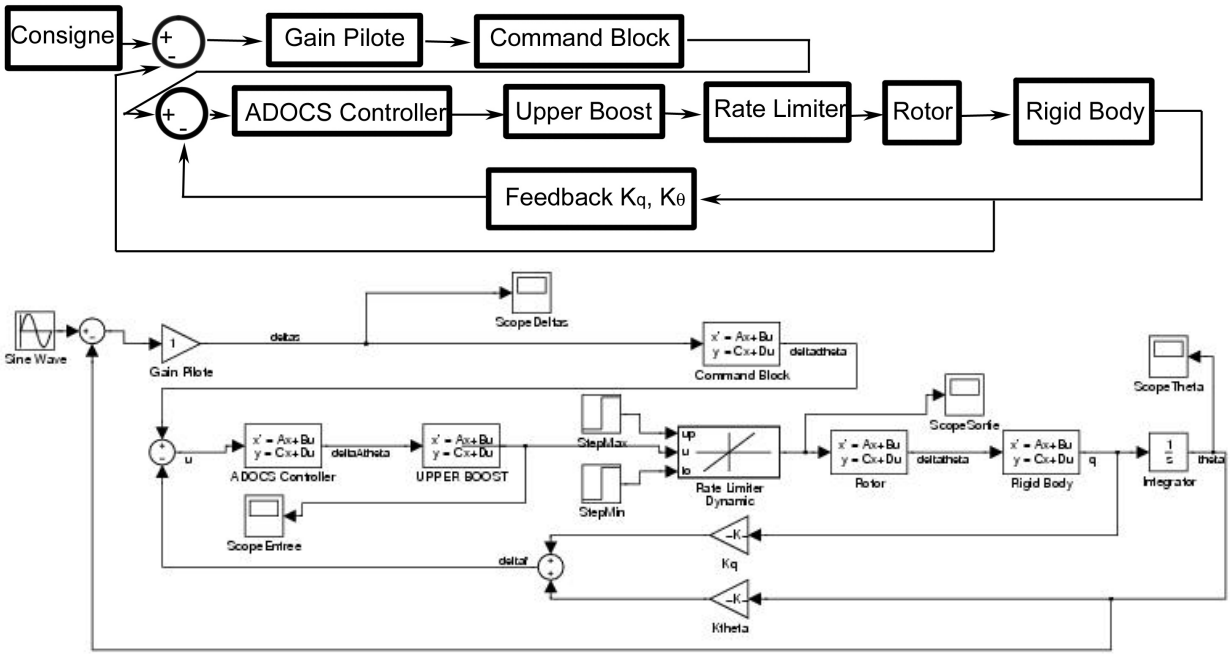



FIG. 10.20. Schéma Simulink de l'ADOCS avec un actionneur limité en vitesse

données, plusieurs orbites périodiques solutions.

En ce qui concerne la non-linéarité du pilote automatique passée à la loupe, tant que les taux de variations à l'entrée du limiteur en vitesse sont inférieurs à la valeur-plafond, le système répond de façon linéaire. Quand la pulsation de la consigne augmente (son amplitude restant fixe), la borne peut être atteinte et la pulsation correspondante est notée $\hat{\omega}_{onset}$. De façon générale [Hanke 2003], quand la pulsation $\omega$ dépasse $1.862\hat{\omega}_{onset}$, le limiteur en vitesse est complètement saturé. L'effet principal du limiteur en vitesse est de rajouter un retard de phase, ce qui se produit de façon visible dès que $\omega > 1.38\hat{\omega}_{onset}$. Il peut éventuellement se produire un saut de phase i.e. un brusque surplus de retard dans l'établissement de l'état du système à la valeur de la consigne, mais l'effet n'est vraiment perceptible que si la phase additionnelle est importante et que la perte d'amplitude ne l'est pas. Ce phénomène de saut est dénommé résonance non-linéaire ou "jump resonance" en anglais et est une conséquence de la multiplicité des orbites périodiques solutions du système et des sauts d'état associés lors du brusque passage de l'une à l'autre de ces solutions périodiques pour certaines pulsations de la consigne.

Pour calculer l'amplitude $A$ et le déphasage $\phi$ de l'état d'entrée du limiteur en vitesse dont le premier harmonique est $N(A, \phi)$, il faut résoudre l'équation suivante qui détermine sa dynamique en fonction de la consigne $\theta_c$ et qui est issue de l'écriture de la fonction de transfert (quasi-linéaire) correspondant au dispositif (10.20) :

$$(1 + Rotor \cdot RigidBody \cdot N(A, \phi) \cdot Actuator \cdot (K_p \cdot Command + Feedback)) \cdot A \exp(j\phi)$$
$$= Actuator \cdot Command \cdot \theta_c$$

Les équations à annuler correspondent aux parties réelle et imaginaire de l'expression ci-dessus. Les solutions sont déterminées par continuation du problème implicite dont les variables

sont $A$, $\phi$ et le module de $\theta_c$.

Dans un premier volet de l'analyse, la continuation calcule l'amplitude et le déphasage $(A, \phi)$ du signal d'entrée du limiteur en vitesse $x$ en fonction de l'amplitude de la consigne $|\theta_c|$. La situation choisie est celle pour laquelle la consigne est une sinusoïde de pulsation $\omega = 2rad/s$ et la nervosité du pilote est donnée par le gain $K_p = 1$.

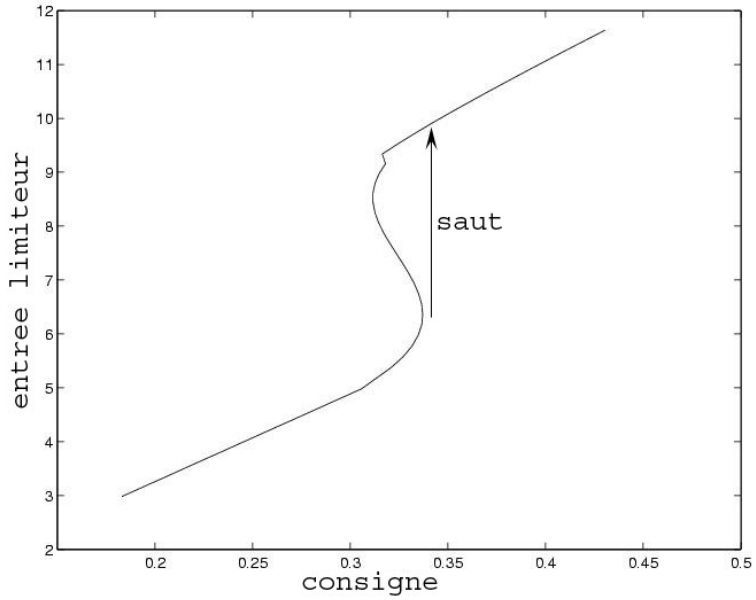



FIG. 10.21. Amplitude du signal d'entrée de l'actionneur limité en vitesse en fonction de l'amplitude de la consigne

L'aspérité observée est due au raccord réalisé entre les différentes formules du gain complexe (qui correspondent aux différentes phases de fonctionnement de la non-linéarité). Sur la figure (10.21), il y a un **saut en amplitude quand la consigne passe de** $0.33rad$ **à** $0.34rad$ : l'amplitude de l'état d'entrée de la non-linéarité s'élève brusquement de 6 à 10 environ et il existe une orbite de retournement. Les simulations temporelles associées à ces deux cas sont réalisées i.e. l'une avant la bifurcation et l'autre après cette dernière.

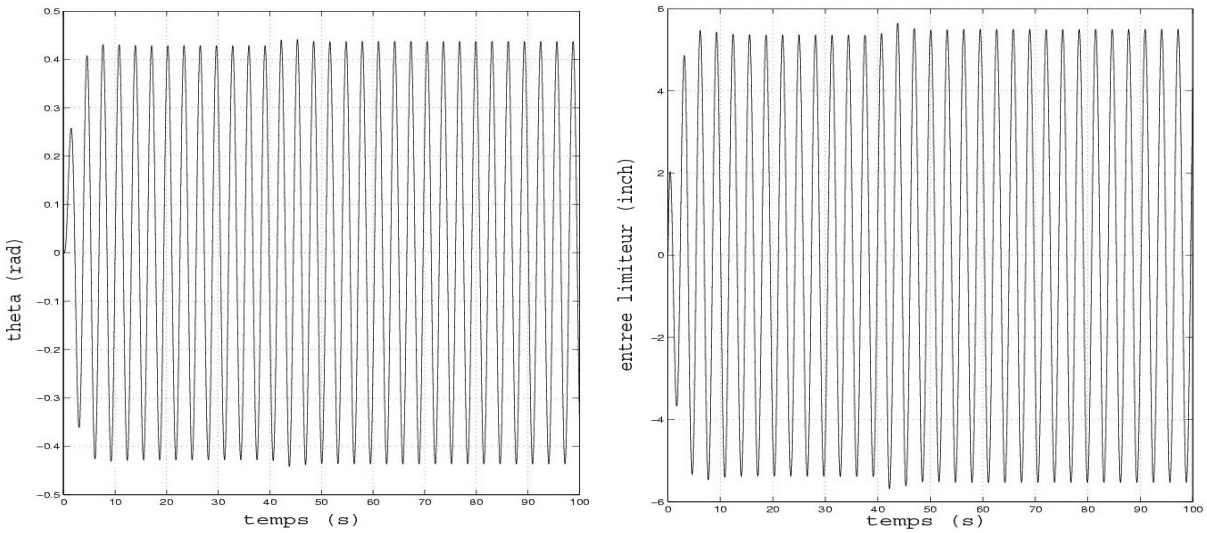



FIG. 10.22. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $K_p = 1$ et $|\theta_c| = 0.33rad$

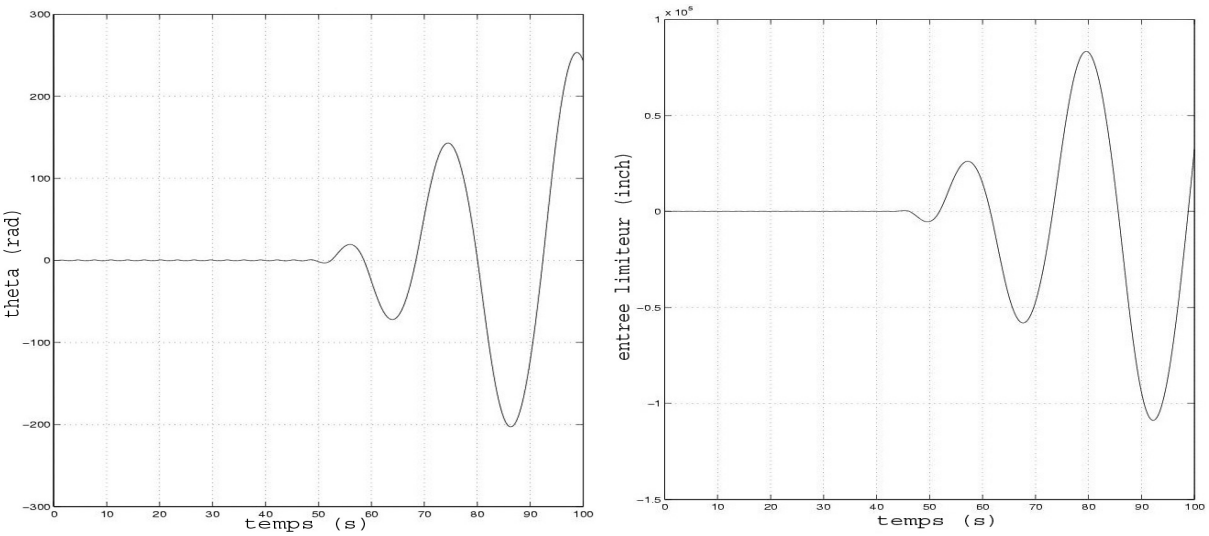



FIG. 10.23. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $K_p = 1$ et $|\theta_c| = 0.34rad$

Pour éviter un certain nombre de problèmes numériques liés à l'utilisation d'un limiteur en vitesse, celui-ci n'est rendu actif qu'après $40s$. En effet, les variations brusques au début de la simulation font saturer complètement la discontinuité et le régime permanent théorique n'arrive plus à être atteint. Cependant, à cause de l'instabilité numérique forte induite par la présence d'une saturation dans une boucle fermée, les simulations divergent dans cette situation. Le changement violent de leur comportement laisse penser que la prédiction du saut se révèle, quant à elle, quand même vérifiée.

Après avoir dans un premier temps illustré le cas d'un saut lors d'un balayage en amplitude de la consigne, la suite des travaux menés cherche à mettre en évidence la possibilité d'un saut lors d'un balayage en pulsation de la consigne. Pour y arriver, la méthodologie utilisée provient

de [Gilbreath 2001] qui calcule l'amplitude et la phase $(A, \phi)$ de la solution en fonction de la pulsation de la consigne en minimisant la norme de :

$$(1 + Rotor \cdot RigidBody \cdot N(A, \phi) \cdot Actuator \cdot (K_p \cdot Command + Feedback)) \cdot A \exp(j\phi)$$
$$-Actuator \cdot Command \cdot \theta_c$$

En effet, la norme de cette dernière a souvent une valeur-plancher nulle, ce qui permet en cherchant le minimum ou les minima de retrouver indirectement la/les solution(s) de l'équation. La fonctionnelle présente plusieurs puits qui sont des minima locaux. Quand le minimum global passe d'un puit à un autre, il se produit alors un phénomène de saut. L'implémentation pratique se base sur l'exploitation de la routine *fminsearch* de matlab.

Avec une consigne d'amplitude $|\theta_c| = 20\pi/180rad$, une limitation en vitesse de $R = 50inch/s$ et une nervosité du pilote telle que $K_p = 2$, le **saut a lieu lorsque la pulsation vaut** $\omega = 2.65rad/s$. Le diagramme de Nichols (10.24) présente le système linéaire (en bleu) et le système non-linéaire équivalent en boucle ouverte (en vert).

Comme le passage de la fonction de transfert du système en boucle ouverte $H_{BO}$ à celle du système en boucle fermé $H_{BF}$ s'effectue par la relation $H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1+H_{BO}}$, la fonction de transfert en boucle ouverte équivalente du système non-linéaire (quasi-linéaire pour l'application présente) s'obtient grâce à la formule $H_{BO} = \frac{H_{BF}}{1-H_{BF}}$. Cette dernière permet de calculer la deuxième courbe (verte) à partir de la résolution de l'équation ci-dessus.

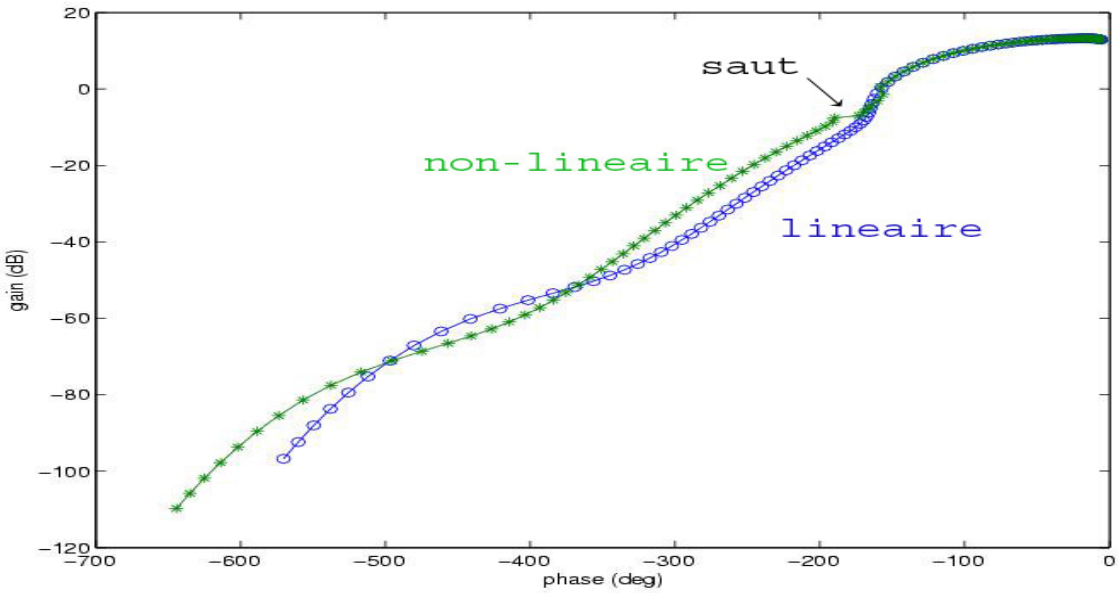



FIG. 10.24. Diagramme de Nichols pour $|\theta_c| = 20\pi/180rad$ et $R = 50inch/s$

Des simulations temporelles sont accomplies avant et après la bifurcation pour confirmer ou infirmer la prévision théorique.

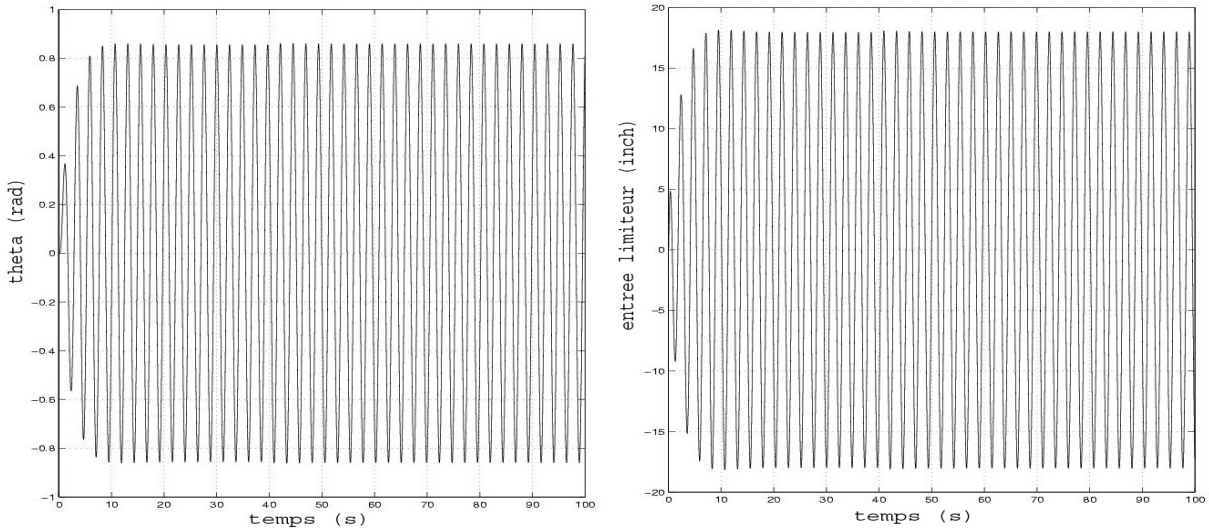



FIG. 10.25. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 2.6 rad/s$

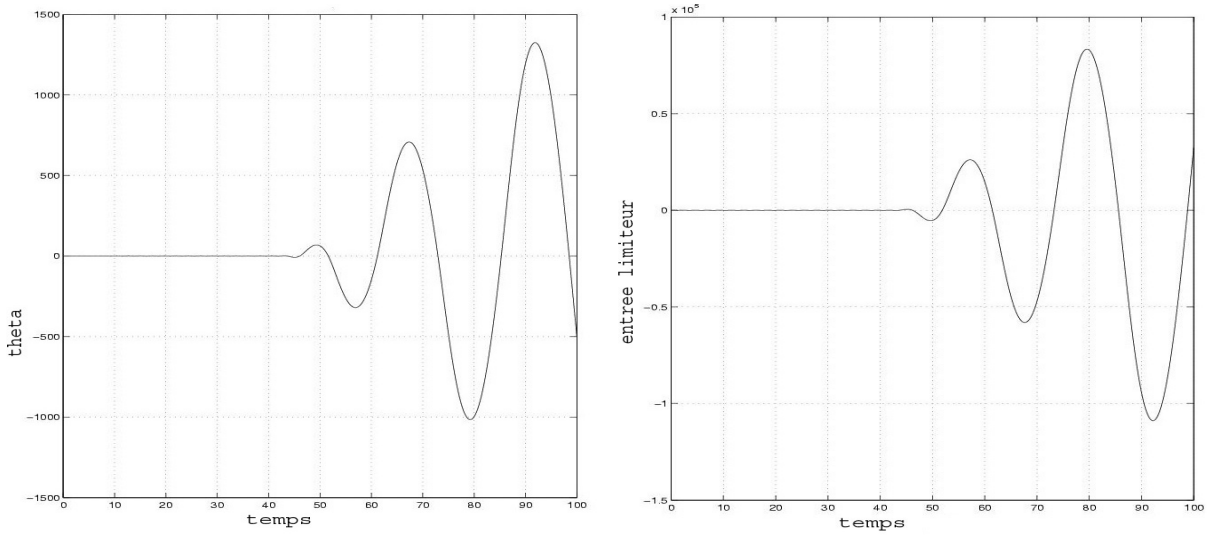



FIG. 10.26. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 2.7 rad/s$

Bien que la deuxième saturation diverge, la différence d'évolution constatée indique que le phénomène de saut ("jump resonance") s'est bien produit et est retrouvé après l'intégration temporelle de Simulink avec un algorithme de Runge et Kutta d'ordre 4 et de pas de temps constant égal à $10^{-2}$.

Pour illustrer la résonance non-linéaire, comme les simulations temporelles n'ont pu être menées à bien car de tels systèmes sont trop sensibles, l'examen d'un cas proche de celui du pilote-dans-la-boucle est exécuté. Il s'agit de la configuration dans laquelle le pilote fournit à l'hélicoptère une consigne sinusoïdale sans tenir compte de l'assiette longitudinale de l'appareil.

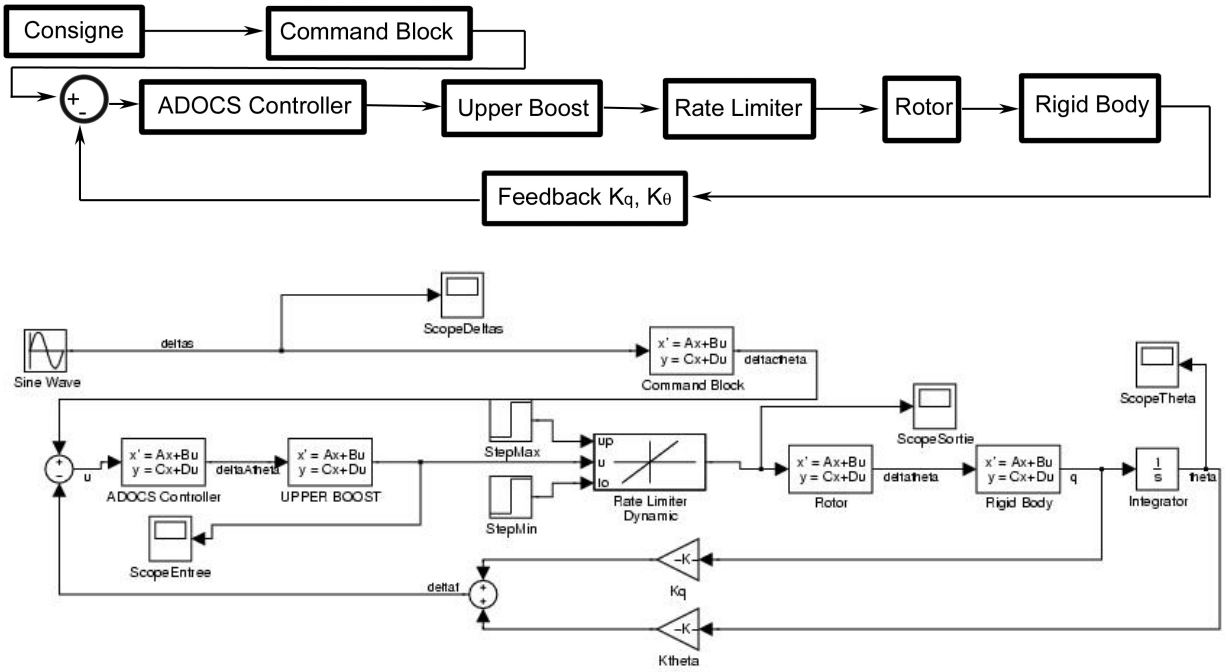



FIG. 10.27. Schéma du dispositif dans lequel le pilote agit en boucle ouverte

Au cours de l'analyse, les diagrammes de Nichols des systèmes linéaire et non-linéaire sont comparés dans le cas où la consigne est d'amplitude $20\frac{\pi}{180}rad$ (et la limitation en vitesse est de $R = 10inch/s$). La comparaison met en évidence l'**existence d'un saut** (principalement de phase) **en une pulsation critique** $\omega \approx 3.27rad/s$.

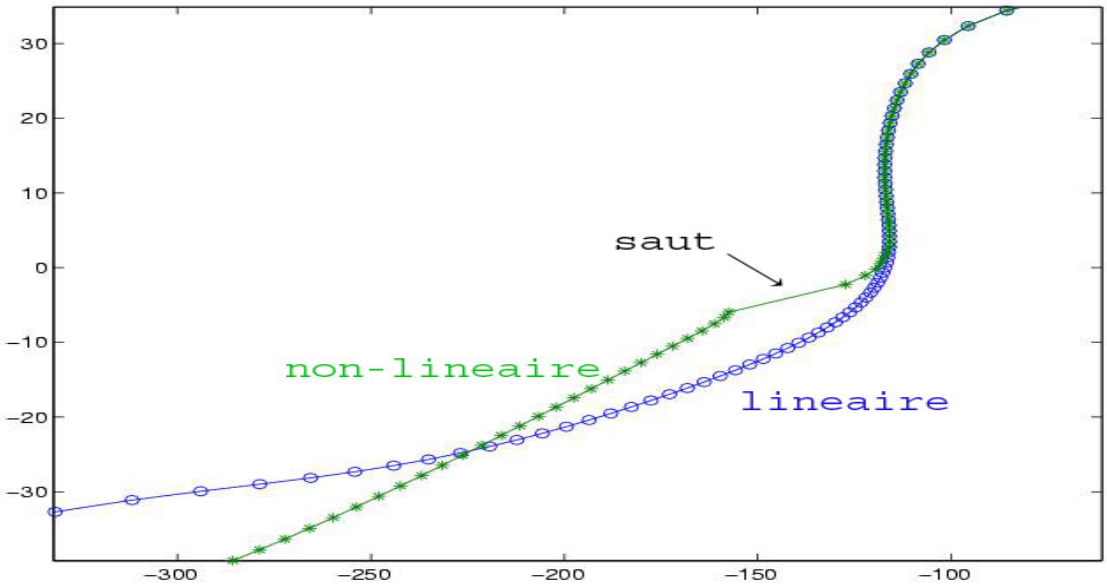



FIG. 10.28. Diagramme de Nichols pour $|\theta_c| = 20\pi/180rad$ et $R = 10inch/sec$

Pour ce nouveau dispositif, deux configurations sont simulées, une avant et une après la bifurcation.

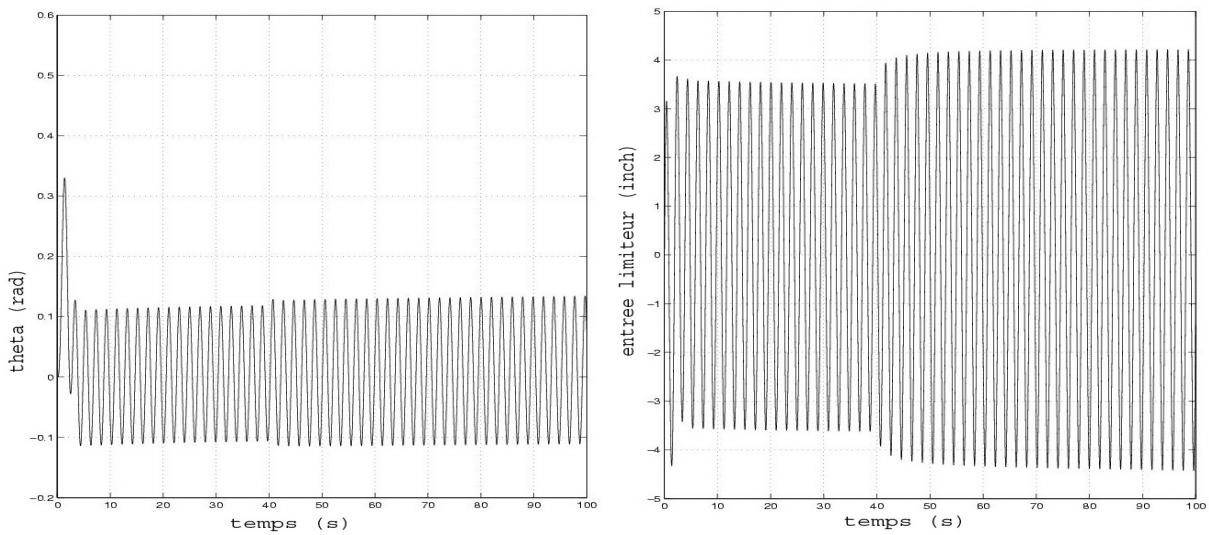



FIG. 10.29. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 3.2 rad/s$

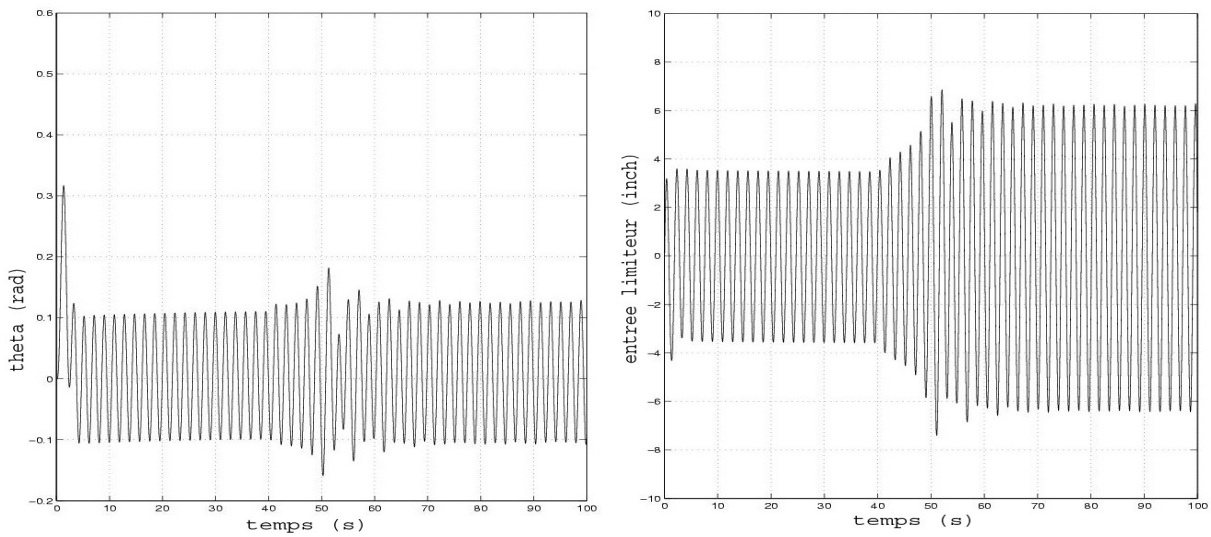



FIG. 10.30. Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 3.3 rad/s$

Le saut est bien observable et est responsable entre autres d'une augmentation soudaine de l'amplitude des oscillations à l'entrée du limiteur en vitesse. Par contre, l'influence sur $\theta$ ne semble pas critique et la bifurcation de cycles limites n'est donc pas ici très dangereuse.

### 10.2.4 Conclusion sur l'étude du deuxième cas de PIO

Pour ce qui est des conséquences de la sensibilité non-linéaire du manche, les changements de comportement du couple aéronef-pilote sont dus à une bifurcation nœud-selle d'orbites périodiques. Cette dernière peut apparaître même avec des pilotes peu nerveux si la zone morte ou

la butée est mal dimensionnée. Alors, le pilote n'arrive plus à stabiliser l'état de l'appareil à la valeur de consigne et le système oscille (i.e. converge vers un cycle limite stable).

Pour la configuration dans laquelle une servocommande est limitée en vitesse, l'hélicoptère-prototype ADOCS rencontre, dans la terminologie anglophone, des "handling qualities cliffs" c'est-à-dire des changements abrupts de ses qualités de vol. Les sauts ("jump resonances") prédits par l'analyse non-linéaire sont bien observés, même si les simulations temporelles ont souvent du mal à être réalisées quand la saturation en vitesse est active. C'est d'ailleurs un des avantages de l'analyse non-linéaire qui permet de prédire ces phénomènes, alors que les simulations temporelles (instables numériquement) peinent à les révéler.

## 10.3 Conclusion générale sur l'étude des oscillations induites par le pilote de l'hélicoptère

Au cours de l'étude du PIO, d'une part, un pilote automatique complet d'hélicoptère a été programmé avec l'environnement Simulink. D'autre part, des configurations ont été choisies et ont servi de base afin de mettre en place la méthodologie en utilisant notamment la méthode du premier harmonique (et en développant des routines informatiques avec matlab). Finalement, le "derivative rate limiter" de la pré-commande, la sensibilité non-linéaire du manche et la limitation en vitesse des variations du plateau cyclique (la servocommande "upper boost") peuvent tous donner lieu à des oscillations induites par le pilote. Les différentes bifurcations qui peuvent se produire ont été analysées, que ce soient les **bifurcations nœuds-selles de cycles limites** dans le cas d'une consigne fixe ou les phénomènes de résonance non-linéaire (**sauts d'orbites périodiques**) dans les configurations où la consigne est sinusoïdale (i.e. cas des oscillations forcées). Les prévisions faites avec la méthode du premier harmonique se sont avérées en accord avec les résultats de simulations temporelles.

Pour ce type de problèmes, plusieurs questions peuvent se poser au concepteur et la théorie des systèmes dynamiques est un outil pour y chercher une réponse. La première interrogation concerne les valeurs numériques des limites en vitesse qui doivent être choisies pour éviter les changements abrupts de comportement du système [Chapa 1999, Liebst *et al.* 2002]. La deuxième relève de la façon de construire un dispositif "anti-windup" adapté afin de garantir les propriétés de robustesse du PA malgré la mauvaise réaction et la sensibilité (d'un intégrateur) vis-à-vis des saturations (éventuelles de l'actionneur) [Biannic *et al.* 2006].

# Conclusion générale et perspectives

# Conclusion

## Bilan des travaux effectués

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont porté sur l'analyse par la théorie des bifurcations de la dynamique du vol des aéronefs à voilure tournante. La mécanique du vol des hélicoptères est complexe et fortement non-linéaire. Cependant, pour l'instant, peu d'études ont été faites exploitant les méthodologies d'analyse non-linéaire sur ce genre d'aéronefs, contrairement aux avions pour lesquels de nombreuses investigations ont été menées. Le mérite de cette thèse est de contribuer à explorer cette voie.

Pour réaliser cet objectif, comme il s'agissait d'un travail initiateur, une première phase de mise en place était nécessaire. D'une part, des travaux informatiques ont consisté à coupler le code HOST de mécanique du vol d'EUROCOPTER avec le code ASDOBI d'analyse des systèmes différentiels ordinaires par la théorie des bifurcations de l'ONERA. D'autre part, des travaux de modélisation ont été entrepris afin de développer un modèle (analytique) de mécanique du vol des hélicoptères complètement dédié et adapté à cette application. Les travaux préliminaires ont aussi requis d'expliciter la formulation mathématique des problèmes abordés et mis en évidence que la description classique par un système d'équations différentielles n'est pas suffisante : il faut rajouter des équations algébriques. Pour un hélicoptère, la modélisation d'un cas de vol se traduit par un système algébro-différentiel.

Plusieurs phénomènes issus de la mécanique du vol des aéronefs à voilure tournante ont été examinés et illustrent les différents types de bifurcation. Il s'agit de phénomènes toujours d'actualité dans le domaine de la recherche tant par leur importance pour la maîtrise du vol que par la complexité à les modéliser et à les analyser.

Tout d'abord, les travaux se sont intéressés au phénomène d'anneaux tourbillonnaires qui est, du point de vue mathématique, une conséquence d'une bifurcation de valeur propre réelle (ou plus précisément d'un point de retournement). Le tracé du diagramme de bifurcation (lieu des points d'équilibre) montre que la dynamique sous-jacente est celle d'un hystérésis. En outre, le lieu des points de bifurcation constitue un nouveau critère de prédiction de la région d'instabilité lié à l'état d'anneaux tourbillonnaires. La corrélation entre les essais en vol et la présence d'une bifurcation est bonne sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir des coefficients empiriques dans ce critère. Une comparaison des résultats obtenus vis-à-vis de ceux d'autres critères a été faite et les écarts éventuels ont été de plus justifiés. Cette partie a donné lieu à deux communications dans des congrès [Prasad *et al.* 2004, Chen *et al.* 2006] et une publication dans le *Journal of the American Helicopter Society* [Basset *et al.* 2007] en commun avec le professeur J. V. R. Prasad et le doctorant C. Chen du Georgia Institute of Technology (Atlanta, GA, USA).

Ensuite, l'attention s'est concentrée sur le cas du roulis hollandais qui est un mouvement naturel de tout aéronef et dont le changement de stabilité est lié à l'existence d'une bifurcation

de Hopf. Son étude a dévoilé que cette dernière donne naissance à des orbites périodiques stables et que la bifurcation de Hopf associée peut donc être qualifiée de supercritique dans le cas de l'hélicoptère examiné. Par ailleurs, les évolutions asymptotiques théoriques de l'amplitude et de la pulsation des orbites périodiques en fonction du paramètre de contrôle se sont également révélées corroborées par comparaison avec les simulations non-linéaires du modèle analytique.

Pour finir, l'analyse a eu pour objet l'étude du couplage aéronef-pilote. Des configurations pour lesquelles apparaissent des oscillations périodiques ont été diagnostiquées et des bifurcations nœuds-selles ainsi que des sauts de cycles limites ont été observés. Leur "dangerosité" a été évaluée en fonction de critères de mécanique du vol propres à la théorie des oscillations induites par le pilote [AGARD 2000, Duda *et al.* 2000].

Les différents écueils rencontrés au cours de ce périple ont en outre montré l'importance de disposer de modèles validés et adaptés aux outils d'analyse non-linéaire. Des phases de mise en équation des problèmes abordés, d'évaluation des éléments actifs capitaux et d'identification des valeurs caractéristiques se sont aussi avérées essentielles.

## Perspectives

Plusieurs pistes peuvent prolonger l'étude entreprise dans cette thèse.

D'autres volets de la dynamique du vol non-linéaire pourraient bénéficier des éclairages apportés par les méthodes d'analyse mises en œuvre dans cette thèse. Par exemple, le cas de l'hélicoptère auquel une charge est suspendue pourrait faire l'objet d'une analyse complétant celles déjà menées par K. Sibilski et ses collègues [Buler *et al.* 2001] ou R. G. Bedford & M. H. Lowenberg [Bedford et Lowenberg 2004].

Pour ce genre de travaux, deux aspects indispensables du problème doivent être accomplis conjointement : les développements méthodologiques et la modélisation au sens large, c'est-à-dire la mise au point de modèles pour la description de phénomènes encore mal maîtrisés ainsi que la collecte bibliographique d'informations éparses. Le modèle analytique simplifié de la mécanique du vol de l'hélicoptère utilisé dans cette thèse pour l'étude du roulis hollandais pourrait avec profit être appliqué à l'étude d'autres phénomènes. Mais surtout il devrait être utile pour aller plus loin dans les investigations analytiques et en tant qu'outil ou banc d'essai pour la mise au point de méthodes d'analyse des dynamiques non-linéaires. En outre, la théorie des bifurcations se prête bien aux études de mécanique analytique quand il s'agit de prédire et d'expliquer les comportements qui proviennent de non-linéarités.

Dans la continuité de ce qui a été réalisé sur les oscillations induites par le pilote, d'une part, un travail de synthèse pour diagnostiquer les non-linéarités inhérentes à la dynamique du vol propre à l'hélicoptère donnant lieu à ce genre de phénomènes pourrait être accompli et une analyse par la théorie des bifurcations pourrait alors fournir des résultats intéressants. D'autre part, dans une approche plus orientée vers les problématiques de l'automatique, le calcul et l'optimisation du bassin d'attraction permettrait l'élaboration d'un dispositif efficace afin de remédier à l'existence d'oscillations induites par le pilote dues à la saturation (des intégrateurs présents au niveau) des servocommandes (dispositif "anti-windup" [Biannic *et al.* 2006]).

Par ailleurs, l'évaluation et l'aide à la mise au point de pilotes automatiques est un autre vaste domaine d'investigation à explorer, les nombreux travaux réalisés portant sur les avions témoignent du potentiel de la méthodologie, comme par exemple [Avanzini et de Matteis 1996,

Goman et Khramtsovsky 1998, Sinha et Ananthkrishnan 2002, Sinha *et al.* 2004].

D'une façon plus générale, étant donné que beaucoup d'outils ont été développés et appliqués avec succès dans le cas des avions, les méthodologies d'analyse non-linéaire et de commande robuste mériteraient, par exemple, d'être étudiées et adaptées plus systématiquement dans le domaine des hélicoptères.

# Annexes

# Annexe A

# Eléments de théorie des bifurcations

## A.1 Présentation

La **théorie des bifurcations** étudie les changements de type topologique des trajectoires solution d'un système dynamique. Dans cette optique, elle porte principalement son attention sur les états d'équilibre et les orbites périodiques qui sont aussi les états asymptotiques [Guckenheimer et Holmes 2002, Perko 1996].

Elle examine leurs caractéristiques comme leur multiplicité ou leur stabilité et surtout les changements qui se produisent pour les valeurs critiques de paramètres de contrôle en lesquelles la théorie dit qu'il y a **bifurcation**. En ce qui concerne l'analyse non-linéaire, elle inclut aussi les informations complémentaires que la caractérisation du régime transitoire et du bassin d'attraction apportent.

Les systèmes dynamiques observés ont pour expression mathématique générique :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, U) \\ X(t=0) = X_0 \end{cases}$$

Cette dernière fait intervenir le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ des $n$ variables d'état, le vecteur $U \in \mathbb{R}^p$ des $p$ paramètres de contrôle et la fonction $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ constituée de $n$ fonctions non-linéaires de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le problème a pour condition initiale $X_0$. $F$ étant indépendante du temps $t$, il s'agit d'un système **autonome**.

Le théorème de Cauchy affirme l'existence et l'unicité de la solution de cette catégorie de problèmes et permet par là de construire la fonction $\Phi$ appelée **flot** et notée $\Phi_t(X_0) = \Phi(t, X_0) = X(t)$ qui à un vecteur $X_0$ associe le vecteur obtenu après intégration du système au cours d'un temps $t$.

## A.2 Ensemble limite

Les points d'équilibre (dénommés aussi points fixes) correspondent aux points tels que :

$$\frac{dX}{dt}(X_e, U_e) = F(X_e, U_e) = 0$$

et les orbites périodiques aux trajectoires pour lesquelles il existe $0 < T < \infty$ tel que :

$$\forall t, X(t+T) = X(t)$$

Ces états limites peuvent être **stables** i.e. pour de petites perturbations autour de cet état, le système y retourne ou **instables** c'est-à-dire que toute perturbation fait quitter cet état au système.

Plus précisément, un état limite $X_e$ est qualifié de **stable** si une solution $X(t)$ qui se situe à côté de $X_e$ reste proche de $X_e$ pour tout temps $t$. Si, de plus, $X(t) \to X_e$ lorsque $t \to \infty$, alors $X_e$ est dit **asymptotiquement stable**.

Les propriétés de stabilité d'un point d'équilibre dépendent du spectre de la matrice jacobienne

$$D_X F = \left( \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$$

et celles d'une orbite périodique, du spectre de la matrice de monodromie qui fait intervenir le flot $\Phi$

$$D_X \Phi = \frac{\partial \Phi(X,T)}{\partial X}$$

la terminologie suivante est introduite au niveau d'un point d'équilibre. Soit $\bar{X}$ un point d'équilibre et $D_X F\left(\bar{X}\right)$ la matrice jacobienne en ce point. Au système différentiel non-linéaire

$$\dot{X} = F(X) \tag{A.1}$$

correspond le système linéaire

$$\dot{X} = D_X F(\bar{X}) \cdot X \tag{A.2}$$

L'analyse de la stabilité du système linéaire permet de conclure quant à celle du système non-linéaire comme l'affirme le théorème de Hartman-Grobman.

**Théorème 4 (Hartman-Grobman)** *Si $D_X F\left(\bar{X}\right)$ n'a pas de valeurs propres nulles ou imaginaires pures, alors il y a un homéomorphisme $h$ défini sur un voisinage $U$ de $\bar{X}$ dans $\mathbb{R}^n$ faisant correspondre localement les orbites du flot non-linéaire $\Phi_t$ de (A.1), à ceux du flot linéaire $e^{D_X F\left(\bar{X}\right)}$ de (A.2). L'homéomorphisme préserve le sens des orbites et peut aussi être choisi pour préserver la paramétrisation en temps.* □

Quand $D_X F\left(\bar{X}\right)$ n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle, $\bar{X}$ est appelé point fixe **hyperbolique** ou **non-dégénéré** et le comportement asymptotique de la solution près de celui-ci tout comme sa stabilité sont entièrement déterminés grâce à une linéarisation.

Par ailleurs, la **variété locale stable** et la **variété locale instable** de $\bar{X}, W^s_{loc}\left(\bar{X}\right)$ et $W^i_{loc}\left(\bar{X}\right)$ se définissent comme suit :

$$\begin{aligned} W^s_{loc}\left(\bar{X}\right) &= \left\{X \in U | \Phi\left(\bar{X}\right) \to \bar{X} \text{ quand } t \to +\infty\right\} \\ W^i_{loc}\left(\bar{X}\right) &= \left\{X \in U | \Phi\left(\bar{X}\right) \to \bar{X} \text{ quand } t \to -\infty\right\} \end{aligned}$$

$W^s_{loc}\left(\bar{X}\right), W^i_{loc}\left(\bar{X}\right)$ sont des analogues non-linéaires aux espaces propres $E^s$ et $E^i$ du problème linéaire (A.2).

**Théorème 5 (Théorème de la variété stable)** *Supposons que $\dot{X} = F(X)$ a un point fixe hyperbolique $\bar{X}$. Alors il existe des variétés locales stable et instable $W^s_{loc}\left(\bar{X}\right), W^i_{loc}\left(\bar{X}\right)$, de mêmes dimensions $n_s, n_i$ que celles des espaces propres $E^s, E^i$ du système linéarisé (A.2), et tangentes en $\bar{X}$ respectivement à $E^s, E^i$. $W^s_{loc}\left(\bar{X}\right), W^i_{loc}\left(\bar{X}\right)$ sont aussi régulières que la fonction $F$.* □

Quand un point fixe a une valeur propre de partie réelle nulle, il existe une variété $W^c$ tangente à l'espace propre $E^c$ associé aux valeurs propres de partie réelle nulle et invariante par le flot $\Phi$. Pour poursuivre l'étude d'un tel point d'équilibre, la dimension du problème peut être réduite grâce au théorème suivant.

**Théorème 6 (Théorème de la variété centrale)** *Soit $F$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule à l'origine $(F(0) = 0)$ et soit $A = D_X F(0)$. Décomposons le spectre constitué des valeurs propres $\lambda$ de $A$ en trois parties, $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_i$ avec :*

$$\mathbb{R}(\lambda) \begin{cases} < 0 \ si \ \lambda \in \sigma_s \\ = 0 \ si \ \lambda \in \sigma_c \\ > 0 \ si \ \lambda \in \sigma_i \end{cases}$$

*Soient $E^s, E^c$ et $E^i$ les espaces propres (généralisés) de respectivement $\sigma_s, \sigma_c$ et $\sigma_i$. Alors il existe des variétés invariantes $W^s$ et $W^i$ de classe $\mathcal{C}^r$, stable et instable, tangentes à $E^s$ et $E^i$ en 0 et une variété centrale $W^c$ de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ tangente à $E^c$ en 0. Les variétés $W^s, W^i$ et $W^c$ sont toutes invariantes par le flot $\Phi$ de $F$. Les variétés stable et instable sont uniques, mais $W^c$ ne l'est pas nécessairement.* □

Le théorème de la variété centrale implique que le système soit topologiquement équivalent à :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y} \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{z} \end{aligned}$$

où $\tilde{f}$ est un champ de vecteur et $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W^c \times W^s \times W^i$ sont les composantes d'un vecteur sur les variétés centrale, stable et instable.

Pour simplifier, il est supposé dans la suite qu'il n'y a pas de variété instable. Le système peut se réécrire sous forme de blocs diagonaux :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y) \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y) \quad \text{où } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{A.3}$$

$B$ et $C$ sont des matrices $n \times n$ et $m \times m$ dont les valeurs propres sont respectivement de parties réelles nulles et négatives, $f$ et $g$ sont des fonctions dont les dérivées partielles premières sont nulles à l'origine.

La variété centrale est tangente à $E^c$ (d'équation $y = 0$), elle se représente donc comme un graphe local :

$$\begin{aligned} W^c &= \{(x, y) \,|y = h(x)\} \quad \text{avec } h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ h(0) &= 0 \\ Dh(0) &= 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Sur $E^c$, le système s'exprime alors :

$$\dot{x} = Bx + f(x, h(x)) \tag{A.5}$$

Dans ce cas, il existe aussi un théorème d'équivalence entre les problèmes non-linéaire et réduit.

**Théorème 7** *Si l'origine $x = 0$ de (A.5) est localement asymptotiquement stable (respectivement instable), alors l'origine de (A.3) est aussi localement asymptotiquement stable (respectivement instable).* □

Le formalisme de la théorie des bifurcations précise que la **forme normale** d'un champ analytique de vecteurs résulte de la simplification de son expression (sur la variété centrale).

Pour ce qui est du système dynamique (A.1), aux valeurs critiques du paramètre de contrôle, il y a soit des **bifurcations locales** quand des changements de types de trajectoires-solutions s'observent et se produisent au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique, soit des **bifurcations globales** si les modifications de trajectoires-solutions mettent en jeu des propriétés plus globales. Ces dernières apparaissent par exemple quand la variété stable d'un point fixe n'est pas transverse à la variété instable (du même ou d'un autre point fixe) i.e. les espaces tangents des variétés n'engendrent pas un espace dont la dimension est égale à la somme de leur dimension.

L'intérêt se focalisera sur les bifurcations locales dont les configurations de base sont présentées. Celles relevant des points d'équilibre seront d'abord abordées et les cas pour lesquels le spectre contient une valeur propre nulle se distingueront de ceux ayant un couple de valeurs propres imaginaires pures. L'exposé se limitera aux bifurcations de codimension 1 (la codimension d'une bifurcation étant la dimension la plus petite d'un espace de paramètres contenant une telle bifurcation). Ensuite, ce seront les bifurcations affectant les cycles limites qui seront décrites. Au cours de cette thèse, ces différents types de bifurcations sont illustrés et analysés dans le même ordre de progression tout au long de l'étude pratique de la dynamique du vol des hélicoptères.

## A.3 Bifurcations réelles de points d'équilibre

Parmi les bifurcations réelles de codimension 1, la bifurcation nœud-selle, la bifurcation transcritique et la bifurcation-fourche sont à distinguer comme l'illustre la figure (A.1).

La **bifurcation transcritique** fait apparaître une non-linéarité au premier degré polynomial possible $x^2$. Sa forme normale est :

$$\dot{x} = u \cdot x - x^2 \tag{A.6}$$

Il y a deux points fixes : $x = 0$ et $x = u$, échangeant leur stabilité en $u = 0$. Pour $u < 0$, le premier est stable et le deuxième instable. Tandis que pour $u > 0$, leur stabilité est inversé.

La **bifurcation fourche** présente une symétrie dans son expression algébrique du type $x \to -x$. La non-linéarité en $x^2$ disparaît et c'est le terme en $x^3$ qui prend la relève. En un tel point de bifurcation, la stabilité du point d'équilibre trivial change et une nouvelle paire de points d'équilibre (symétriques) apparaît. Sa forme générique est :

$$\dot{x} = u \cdot x \pm x^3 \tag{A.7}$$

Le comportement physique dépend du signe de $x^3$. La bifurcation fourche peut être **super-critique** ou **sous-critique** :

– supercritique : elle correspond au cas où le signe de $x^3$ est négatif. Pour $u < 0$, la solution $x = 0$ est stable et unique. Pour $u > 0$, la solution $x = 0$ devient instable et deux nouvelles solutions $x = \pm\sqrt{u}$ stables font leur apparition.
– sous-critique : elle est obtenue quand le signe de $x^3$ est négatif. Pour $u < 0$, la solution $x = 0$ est stable, mais il y a aussi deux solutions instables $x = \pm\sqrt{-u}$. Quand $u > 0$, il n'y a qu'une unique solution $x = 0$ qui est instable.

Dans le cas de la **bifurcation nœud-selle**, deux nouvelles solutions naissent à partir d'une situation où il n'y en a aucune. Elle a pour expression générique :

$$\dot{x} = u - x^2 \tag{A.8}$$

La bifurcation nœud-selle n'est pas une bifurcation qui déstabilise une solution déjà existante. En fait, elle donne naissance à de nouvelles solutions alors qu'aucun état asymptotique n'existait auparavant.

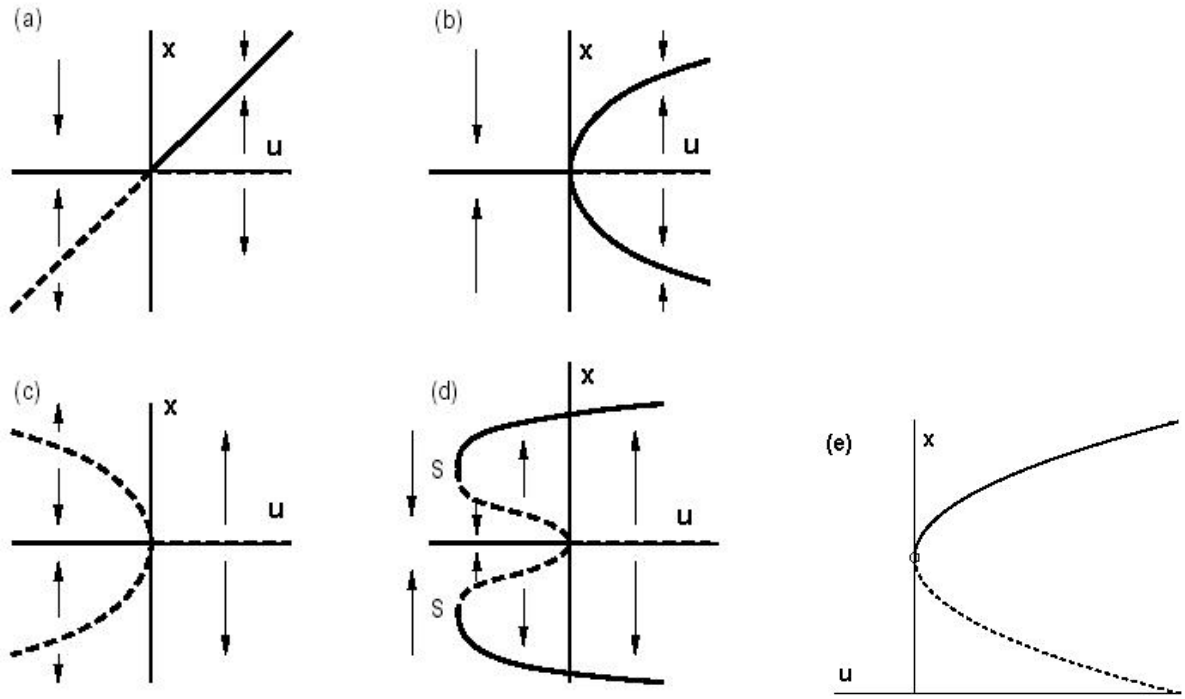



FIG. A.1. Bifurcations réelles : (a) transcritique ; (b) fourche supercritique ; (c) fourche sous-critique ; (d) fourche sous-critique + bifurcations nœuds-selles $S$ (e) nœud-selle

## A.4 Bifurcations complexes de points d'équilibre

Dans une situation où la matrice jacobienne $D_X F(X, u_0)$ a une paire simple de valeurs propres imaginaires pures $\pm i\omega$, le théorème des fonctions implicites assure l'unicité du point d'équilibre solution. Néanmoins les dimensions des variétés stable et instable changent quand la paire de valeurs propres complexes traverse l'axe imaginaire en la valeur du paramètre de contrôle $u_0$. Les propriétés qualitatives du système peuvent changer : une orbite périodique peut commencer à exister.

La forme normale d'un tel système est :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(du + a\left(x^2+y^2\right)\right)x - \left(\omega + cu + b\left(x^2+y^2\right)\right)y \\ \dot{y} &= \left(\omega + cu + b\left(x^2+y^2\right)\right)x + \left(du + a\left(x^2+y^2\right)\right)y \end{aligned} \tag{A.9}$$

Ce système peut être transformé en l'exprimant dans les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left(du + ar^2\right)r \\ \dot{\theta} &= \omega + cu + br^2 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Le théorème suivant permet de décrire la phénoménologie d'une telle configuration.

**Théorème 8 (Hopf)** *Supposons que le système* $\dot{X} = F(X,u), X \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ *a un point d'équilibre* $(X_0, u_0)$ *en lequel les propriétés suivantes sont satisfaites :*

*(H1)* $D_X F(X_0, u_0)$ *a une paire simple de valeurs propres imaginaires pures et aucune autre valeur propre de partie réelle nulle.*

*Alors (H1) implique qu'il existe une courbe régulière de points d'équilibre* $(X(u), u)$ *avec* $X(u_0) = X_0$. *Les valeurs propres* $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ *de* $D_X F(X(u), u_0)$ *qui sont imaginaires pures en* $u = u_0$ *varient régulièrement avec* $u$. *Si, de plus,*

$$\text{(H2)}\ \frac{d}{du}\mathbb{R}\left(\lambda(u)\right)_{u=u_0} = d \neq 0$$

*alors il existe une unique variété centrale de dimension* 3 *passant par* $(X_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *et un système régulier de coordonnées (préservant les plans* $u = const.$*) pour lequel le développement de Taylor à l'ordre* 3 *sur la variété centrale est donné par (A.9). Si* $a \neq 0$, *il existe une surface de solutions périodiques dans la variété centrale qui a une tangence quadratique avec l'espace propre de* $\lambda(u_0), \bar{\lambda}(u_0)$ *et proche de la paraboloïde du second ordre* $u = -(a/d)\left(x^2+y^2\right)$. *Si* $a < 0$, *alors ces solutions périodiques sont des cycles limites stables, tandis que si* $a > 0$, *les solutions périodiques sont répulsives.* □

Quand les **orbites périodiques** créées au niveau du point de bifurcation sont **stables**, la bifurcation de Hopf est qualifiée de **supercritique** et quand elles sont **instables**, la bifurcation de Hopf est qualifiée de **sous-critique**.

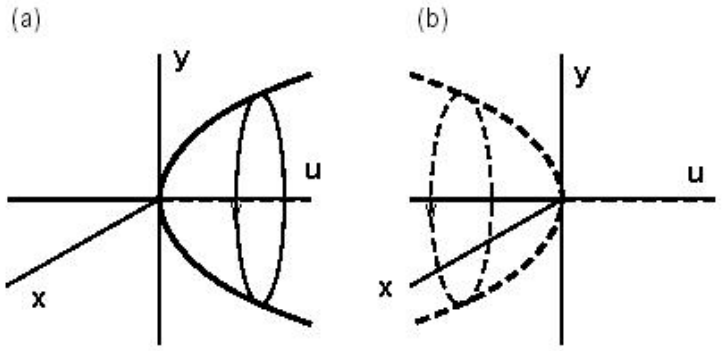



FIG. A.2. Bifurcations de Hopf : (a) supercritique ; (b) sous-critique

## A.5 Bifurcations de cycles limites

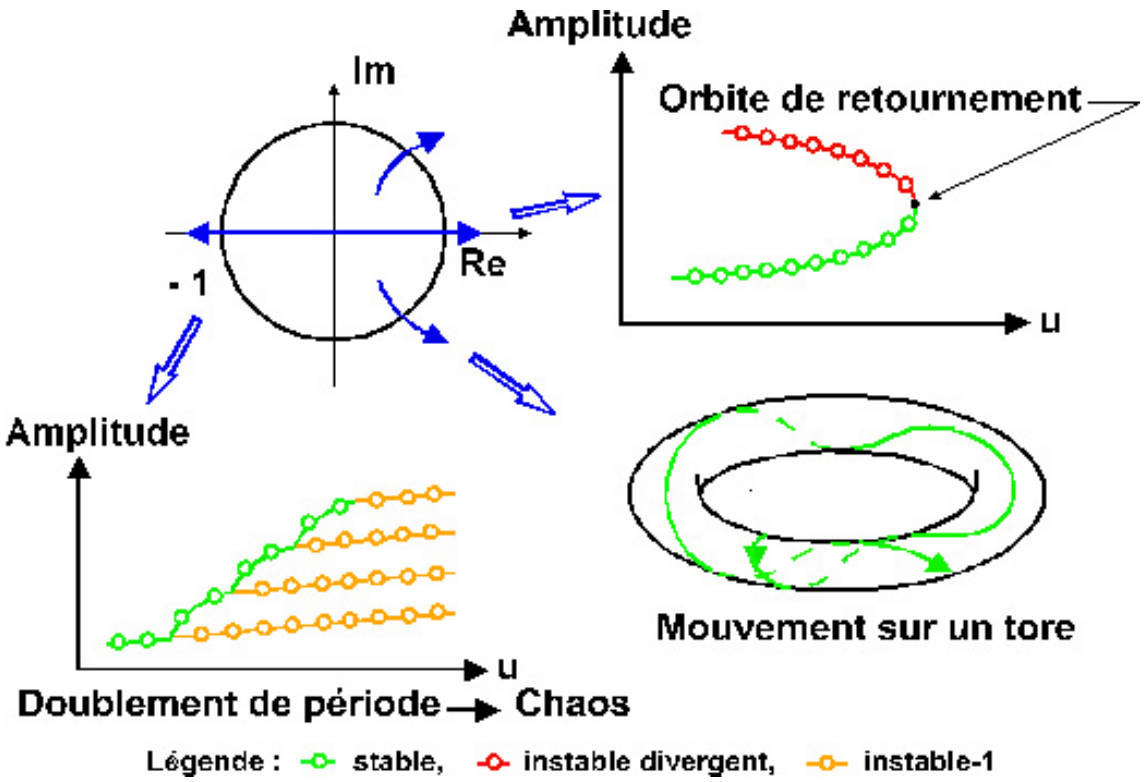



FIG. A.3. Valeurs propres de la matrice de monodromie et bifurcations d'orbites périodiques (d'après la notice d'ASDOBI de P. Guicheteau)

Le type de bifurcations d'orbites périodiques dépend de la façon dont la(les) valeur(s) propre(s) de la matrice de monodromie traverse(nt) le cercle unité.

- si elle vaut $+1$, il y a une orbite de retournement c'est-à-dire une bifurcation nœud-selle de cycles limites donnant lieu à la création (ou à la destruction) de deux orbites périodiques dont l'une est stable et l'autre instable.
- si elle traverse le cercle unité en $-1$, une bifurcation de doublement de période se produit. L'orbite périodique de période $T$ change de stabilité et une orbite périodique de stabilité identique de période $2T$ est créée.
- si deux valeurs propres complexes conjuguées traversent le cercle unité, l'orbite périodique change de stabilité et un tore entourant cette dernière apparaît.

L'étude des cycles limites se base sur l'application de premier retour $P$. Elle consiste à choisir un hyperplan transverse (voire orthogonal) à l'orbite périodique et à déterminer quel est le premier point $P(x)$ de la trajectoire qui coupe cet hyperplan en fonction de différentes conditions intiales $x$. La théorie des systèmes dynamiques dénomme cet hyperplan section de Poincaré.

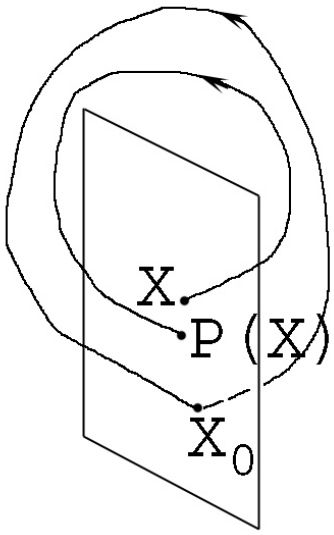



FIG. A.4. Application du premier retour

**Transition :** Après avoir exposé la théorie générale et la terminologie propre au domaine des systèmes dynamiques et des bifurcations, la section suivante va s'attacher à développer une méthode spécifique : la méthode des projections.

## A.6 Méthode des projections

La méthode des projections examine le comportement transitoire d'un système au voisinage d'une bifurcation et repose sur l'analyse de la projection du mouvement dans l'espace engendré par le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à la(aux) valeur(s) propre(s) de partie réelle nulle (cf. [Iooss et Joseph 1981] ou [Guicheteau 1985]).

Soit $(X_0, u_0)$ le point critique du système différentiel $\dot{X} = F(X, u)$. En appelant $Q$ la matrice jacobienne de $F$, $h$ la partie non-linéaire et $\Delta X = X - X_0$, le système peut s'écrire :

$$\Delta\dot{X} = Q\Delta X + h(\Delta X) \tag{A.11}$$

Si la matrice jacobienne avait une valeur propre réelle nulle, la méthodologie serait semblable et même plus simple à mettre en œuvre. Toutefois, le cas abordé est celui où elle a un couple de valeurs propres complexes imaginaires pures conjuguées $\pm i\omega$ parce qu'il est l'objet d'investigations dans la partie 9.1 de cette thèse.

Soient $X_1 = \xi + i\mu$ et $X_2 = \xi - i\mu$ les vecteurs propres à droite de $Q^T$ i.e. les transposées des vecteurs propres à gauche de $Q$. La projection du système sur la variété centrale (l'espace vectoriel engendré par $\xi$ et $\mu$) avec les variables :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \langle \xi | \Delta X \rangle \\ \varepsilon_2 &= \langle \mu | \Delta X \rangle \end{aligned} \tag{A.12}$$

donne :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\omega \cdot \varepsilon_2 + \langle \xi | h(\Delta X) \rangle \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \omega \cdot \varepsilon_1 + \langle \mu | h(\Delta X) \rangle \end{aligned} \tag{A.13}$$

Dans le nouveau repère contenant les vecteurs $\xi$ et $\mu$ comme vecteurs de base, la réécriture du système fournit le système équivalent :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X}_r &= P \Delta X_r + B\varepsilon + h_r(\Delta X_r, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\omega \cdot \varepsilon_2 + \langle \xi | h(\Delta X) \rangle \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \omega \cdot \varepsilon_1 + \langle \mu | h(\Delta X) \rangle \end{aligned} \tag{A.14}$$

où $\varepsilon$ correspond au couple $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ et $[X_r, \varepsilon]$ aux coordonnées dans le nouveau repère.

Or, les équations qui caractérisent la variété centrale ont un développement de Taylor qui commence par :

$$\Delta X_i = a_{i,1} \cdot \varepsilon_1 + a_{i,2} \cdot \varepsilon_2 \tag{A.15}$$

et dont les facteurs sont le résultat du calcul matriciel :

$$\begin{aligned} a_{i,1} &= -\left[\omega^2 I + P^2\right]^{-1} \cdot [PB_{i,1} + \omega B_{i,2}] \\ a_{i,2} &= -\left[\omega^2 I + P^2\right]^{-1} \cdot [PB_{i,2} - \omega B_{i,1}] \end{aligned} \tag{A.16}$$

L'objectif des manipulations algébriques reste, quant à lui, d'essayer de déterminer les coefficients du développement de Taylor de

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 + \omega \cdot \varepsilon_2 &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{i,j} \varepsilon_1^{i-1} \varepsilon_2^{j-1} \\ \dot{\varepsilon}_2 - \omega \cdot \varepsilon_1 &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{i,j} \varepsilon_1^{i-1} \varepsilon_2^{j-1} \end{aligned} \tag{A.17}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 0 \\ \beta_{1,1} &= \beta_{1,2} = \beta_{2,2} = 0 \end{aligned}$$

Finalement, la nature de la bifurcation de Hopf et la stabilité des cycles limites créés sont révélées par le signe du coefficient "cubique" (dénommé suivant [Guckenheimer et Holmes 2002]) qui se calcule par combinaison des coefficients de la forme normale de $F$ :

$$S = 3 \cdot (\alpha_{4,1} + \beta_{1,4}) + \alpha_{2,3} + \beta_{3,2} \tag{A.18}$$

- Si $S < 0$, le cycle est *stable* et la bifurcation de Hopf *supercritique*.
- Si $S > 0$, le cycle est *instable* et la bifurcation de Hopf *sous-critique*.

**Transition :** Une fois tous les éléments théoriques fournis et étayés, il est intéressant de passer en revue quelques-unes des implémentations informatiques effectives d'algorithmes et de logiciels.

## A.7 Différents codes de calcul disponibles pour l'analyse des systèmes différentiels par la théorie des bifurcations

Les codes numériques dédiés à l'analyse par la théorie des bifurcations sont nombreux. Ils sont tous basés sur un algorithme de continuation dont l'objectif est la résolution d'un problème de $n$ équations et $(n+1)$ variables. Ils sont pour la plupart programmés en Fortran, mais certains ont été développés en C/C++ et d'autres sous l'environnement Matlab. Parmi ceux-ci figurent ASDOBI de Guicheteau, AUTO de Doedel et Kernevez qui est par ailleurs inclus dans le logiciel XppAut de Ermentrout, BIFPACK de Stengel, DDE-BIFTOOL de Engelborghs, KRIT de Goman et Khramtsovsky, PATH de Kass-Petersen, CONTENT de Kuznetsov et Levitin et MATCONT de Govaerts, Dhooge et Kuznetsov.

Il existe des différences dans les implémentations de chacun de ces logiciels. Quelques-unes des stratégies qui ont été adoptées sont exposées.

Dans sa programmation d'AUTO [Doedel 1997], Doedel se base sur l'algorithme de continuation de la pseudo-abscisse curviligne de Keller. Elle consiste à résoudre l'équation en $(u_1, \lambda_1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} G(u_1, \lambda_1) & = & 0 \\ (u_1 - u_0)^* \dot{u}_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)\dot{\lambda}_0 - \Delta s & = & 0 \\ \dot{u}_0^* \dot{u}_1 + \dot{\lambda}_0^* \dot{\lambda}_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Des itérations de Newton permettent de converger sur la courbe-solution :

$$\begin{pmatrix} (G_u^1)^\nu & (G_\lambda^1)^\nu \\ \dot{u}_0^* & \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u_1^{(\nu)} \\ \Delta \lambda_1^{(\nu)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G(u_1^\nu, \lambda_1^\nu) \\ (u_1^\nu - u_0)^* \dot{u}_0 + (\lambda_1^\nu - \lambda_0)\dot{\lambda}_0 - \Delta s \end{pmatrix}$$

Le système linéaire à traiter dans la procédure de Newton qui intervient lors de la continuation est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & c \\ b^* & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}$$

où $A$ est une matrice creuse dont la décomposition $LU$ peut être trouvée à relativement moindre coût. La résolution du sytème linéaire se rapproche, dans ce cas, de celle d'un problème de valeurs aux bords.

Quant à MATCONT [Dhooge *et al.* 2003], son algorithme de continuation procède de la façon suivante. En partant d'un problème implicite $F(x) = 0$ où la fonction $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ est régulière, le programme cherche tout d'abord un vecteur $v^{(i)} \in \mathbb{R}^{N+1}$ tangent à la courbe au point $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et qui satisfait

$$D_x F\left(x^{(i)}\right) v^{(i)} = 0$$

Il effectue ensuite une prédiction du point suivant qui est sur la tangente :

$$X^0 = x^{(i)} + h_i v^{(i)}$$

Elle est corrigée en cherchant le point $x^{(i+1)}$ solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(x) & = & 0 \\ v^T\left(x - X^0\right) & = & 0 \end{array} \right.$$

où $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ satisfait $D_x F(x) v = 0$. Ce sont des corrections de *Moore-Penrose* exploitant la *pseudo-inverse* $A^+$ d'une matrice $A$ qui permettent de trouver un point de la courbe :

$$A^+ = A^T \left(AA^T\right)^{-1}$$

Les itérations de quasi-Newton s'expriment :

$$X^{k+1} = X^k - D_x F^+ \left(X^k\right) F\left(X^k\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

où le vecteur $V^k$ a pour approximation :

$$D_x F\left(X^{k-1}\right) V^k = 0, \quad V^0 = v^{(i)}$$

Après avoir discouru des diverses implémentations des algorithmes de continuation, un exposé de quelques lignes est donné sur l'algorithme programmé dans ASDOBI afin de raffiner l'évaluation d'un point de bifurcation de Hopf.

Lors du calcul de la courbe d'équilibre par continuation, un test sur le changement éventuel de stabilité du point d'équilibre est effectué : quand le point stable devient instable oscillant ou vice-versa, l'algorithme estime qu'une bifurcation de Hopf a été franchie. Pour raffiner son estimation de la bifurcation de Hopf, ASDOBI applique une méthode de dichotomie dont les principes sont expliqués dans la suite.

Soient $x_1$ et $x_2$ les deux points du diagramme de bifurcation calculé par continuation pour lesquels il y a changement de signe de la partie réelle et notons $is_1$ et $is_2$ les indices de stabilité respectifs de ces deux points.

Un algorithme de quasi-Newton est appliqué en l'initialisant au point $\frac{x_1+x_2}{2}$ afin de trouver un point d'équilibre, solution de $F(X) = 0$, qui se situe à peu près au milieu de $x_1$ et de $x_2$. Le point sur lequel l'algorithme converge se désigne $x_{1/2}$ et son indice de stabilité $is_{1/2}$ est calculé. Si $is_{1/2} = is_1$, $x_1$ est remplacé par $x_{1/2}$ et si $is_{1/2} = is_2$, c'est $x_2$ qui est remplacé par $x_{1/2}$. Les opérations sont réitérées de nouveau en déterminant $x_{1/2}$ et $is_{1/2}$.

Une bonne estimation du point de bifurcation de Hopf est considérée obtenue et les itérations s'arrêtent lorsque la valeur propre $\lambda$ est telle que $|\mathbb{R}(\lambda)| \leq \epsilon$ i.e. que l'estimation est assez proche du point de bifurcation de Hopf.

Dans la formulation mathématique des différents lieux à calculer, il y a aussi des différences entre les logiciels. Par exemple, pour caractériser le lieu des points de bifurcation de Hopf, Roose et Hlavacek utilisent la formulation suivante [Roose et Hlavacek 1985] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(X,u) & = & 0 \\ \left[(D_X F(X,u))^2 + \omega^2 Id\right] p & = & 0 \\ p^T p & = & 1 \\ v^T p & = & 0 \end{array} \right.$$

où $(X, p, u, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

La première équation correspond à la caractérisation d'un point d'équilibre, la deuxième provient du fait qu'en un point $(X_0, u_0)$ de bifurcation de Hopf, la jacobienne $D_X F(X_0, u_0)$ admet un couple de valeurs propres conjuguées imaginaires pures $\pm i\omega_0$ et la troisième est issue de considérations d'othogonalité entre certains espaces propres.

Dans AUTO, la formulation utilisée (proche) est, quant à elle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(X,u) & = & 0 \\ D_X F(X,u)\,\phi - i\omega\phi & = & 0 \\ \phi^*\phi_0 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

où $(X, u, \omega, \phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ et $\phi_0$ correspond à une solution de référence comme le dernier point calculé.

Force est de constater que chaque logiciel a sa manière d'exprimer et de calculer les courbes-solutions. Les choix effectués dans l'implémentation d'ASDOBI sont un compromis entre simplicité de formulation et pragmatisme dans la résolution numérique.

Les critiques des industriels [Macmillen et Thompson 1998] sont cependant toujours les mêmes. Même si les outils développés sont intéressants et offrent des possibilités concrètes d'analyse, un logiciel dédié à la théorie des bifurcations et répondant aux exigences du monde industriel comme la robustesse informatique ou l'aisance dans la paramétrisation n'est toujours pas disponible : ce sont tous des codes "universitaires".

# Annexe B

# Modélisation et prédiction de l'état d'anneaux tourbillonnaires

**Introduction :** Dans ses travaux de thèse [Jimenez 2002], J. Jimenez a contribué à modéliser le champ des vitesses induites en état d'anneaux tourbillonnaires et à prévoir la frontière de l'enveloppe de vol de l'appareil avec cette zone critique. Ses résultats ont été réutilisés pour disposer d'un modèle de vitesse induite analytique qui permette d'analyser (du point de vue de la théorie des bifurcations) la mécanique du vol des hélicoptères en vols de descente. J'expose dans ce chapitre quelques-uns de ces éléments.

## B.1 Modélisation des vitesses induites en état d'anneaux tourbillonnaires

L'objectif est de proposer un modèle réaliste mais nécessitant peu de puissance de calcul afin de pouvoir être inclus dans un code de mécanique du vol.

En dehors du VRS, la vitesse induite se calcule par la théorie de la quantité de mouvement. Le rotor est assimilé à un disque plein créant une différence de pression entre ses deux faces. Il en résulte une force $\overrightarrow{F_n}$ normale au disque rotor, la poussée. Cette force accélère l'air le long d'une veine fluide, depuis l'infini amont où l'air possède une vitesse initiale $\vec{V}$, jusqu'à l'infini aval où l'air possède la vitesse $\vec{V'}$, une fois qu'elle a été accélérée.

La figure (B.1) présente le volume défini par le cylindre dont les génératrices sont les lignes de courant passant par l'extrémité du disque rotor. Aux extrémités de ce volume se trouvent deux surfaces $S1$ et $S2$ parallèles au plan du disque rotor. Elle sont supposées se situer l'une à l'infini amont et l'autre à l'infini aval du disque rotor. Un bilan de quantité de mouvement est appliqué à ce volume et l'équation suivante peut être établie :

$$\int\int\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{u} dV + \int\int_{S(t)} \rho \vec{u} \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n})\, dS = \int\int\int_{V(t)} \rho \overrightarrow{f}\, dV + \int\int_{S(t)} \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} dS$$

$\vec{f}$ représente les forces volumiques, $\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n}$ le tenseur des contraintes et $dq = \rho\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n})\, dS$ le débit massique élémentaire.

Dans le cas d'un écoulement permanent et en négligeant les forces volumiques, (ce qui est légitime compte tenu que les forces dues au poids de l'air sont négligeables par rapport à celles exercées par le rotor,) le bilan s'exprime :

$$\int\int_{S(t)} \vec{u} \cdot dq = \int\int_{S(t)} \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = \text{ force exercée par le rotor sur le fluide } = -\vec{F_n}$$

C'est le théorème d'Euler (de la quantité de mouvement).

**Théorème 9 (Théorème d'Euler)** *Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide, la variation de quantité de mouvement due au passage du fluide à travers la surface frontière $S(t)$ délimitant le volume $V(t)$ est égale à la somme des forces extérieures appliquées au fluide contenu dans $V(t)$.*
□

La variation de débit massique, pour sa part, est nulle : cette surface n'est constituée que par les lignes de courant de la veine fluide. Ce débit est constant à travers les surfaces $S1$ et $S2$ et il est égal à $D_m$. La variation de quantité de mouvement n'est due qu'à la variation de vitesses entre les deux surfaces. Il résulte que le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$-\vec{F_n} = -D_m \cdot \left(\vec{V'} - \vec{V}\right)$$

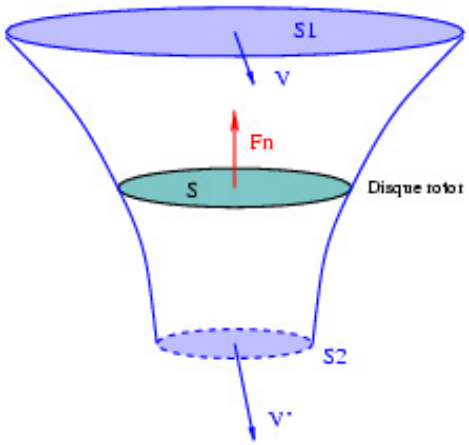



FIG. B.1. Ecoulement dans un disque plein

D'après la théorie de Froude et par construction de la vitesse induite, il est connu que :

$$\left(\vec{V'} - \vec{V}\right) = 2\vec{V_i}$$

La relation entre la poussée du rotor et la vitesse induite s'écrit alors :

$$\vec{F_n} = 2D_m\vec{V_i}$$

Le débit massique d'air traversant le rotor s'exprime au niveau du rotor

$$D_m = 2\rho\pi R^2 V_t \text{ avec } V_t = \sqrt{V_x^2 + (V_Z + V_i)^2}$$

Sur l'axe perpendiculaire au plan du disque rotor, la force obtenue est :

$$F_Z = 2\rho\pi R^2 V_t V_i$$

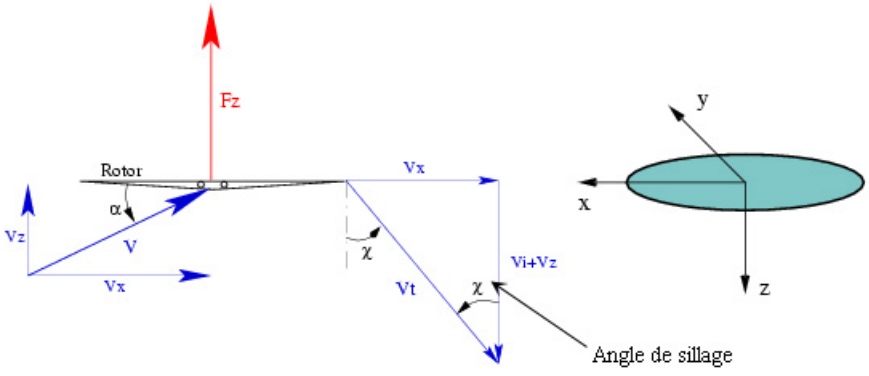



FIG. B.2. Vitesses de l'air à travers un disque rotor en vol de descente à forte pente

La valeur de la vitesse induite en stationnaire découle du fait qu'en vol stationnaire la portance compense exactement le poids de l'appareil $F_Z = mg$ :

$$V_{i_0} = \sqrt{\frac{F_Z}{2\pi\rho R^2}}$$

Les paramètres adimensionnés par $V_{i_0}$ sont ainsi : $\bar{\nu} = \frac{V_i}{V_{i_0}}, \bar{\mu} = \frac{V_X}{V_{i_0}}, \bar{\eta} = \frac{V_Z}{V_{i_0}}$.

L'équation donnant la vitesse induite moyenne normalisée $\bar{\nu}$ en fonction des conditions de vol $\bar{\mu}$ (vitesse d'avancement normalisée) et $\bar{\eta}$ (vitesse de descente normalisée) s'écrit donc :

$$1 = \bar{\nu}^2 \left[\bar{\mu}^2 + (\bar{\nu} + \bar{\eta})^2\right]$$

Pour le cas du vol en palier i.e. $\bar{\eta} = 0$, cette équation implicite peut se résoudre :

$$\bar{\nu} = \sqrt{\frac{\sqrt{\bar{\mu}^4 + 4} - \bar{\mu}^2}{2}}$$

Quant au cas de la descente verticale où $\bar{\mu} = 0$, les solutions sont :

$$\begin{cases} \bar{\nu} & = & \frac{-\bar{\eta}+\sqrt{\bar{\eta}^2+4}}{2} & \forall\bar{\eta} \\ \bar{\nu} & = & \frac{-\bar{\eta}+\sqrt{\bar{\eta}^2-4}}{2} & \bar{\eta} \leq -2 \\ \bar{\nu} & = & \frac{-\bar{\eta}-\sqrt{\bar{\eta}^2-4}}{2} & \bar{\eta} \leq -2 \end{cases}$$

S'il n'existe pas de solution analytique dans le cas général, il est possible de tracer $\bar{\nu} = f(\bar{\eta})$ à $\bar{\mu}$ fixé en écrivant l'équation de la façon suivante : $\bar{\eta} = -\bar{\nu} \pm \sqrt{\frac{1}{\bar{\nu}^2} - \bar{\mu}^2}$ pour $\bar{\nu} \cdot \bar{\mu} \leq 1$. Le tracé suivant correspond aux solutions où $\bar{\nu} > 0$ :

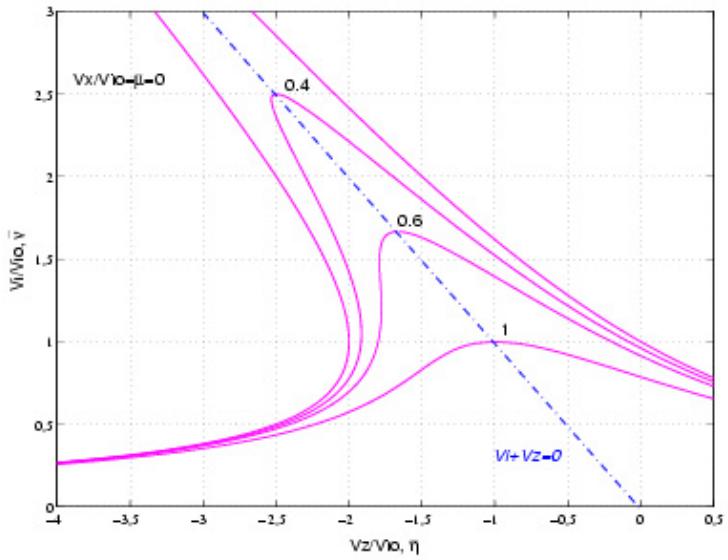



FIG. B.3. Vitesse induite normalisée donnée par la théorie de la quantité de mouvement pour différentes vitesses d'avancement

Pour chaque vitesse d'avancement, il y a une courbe de vitesses induites fonction du taux de descente de l'appareil. La théorie de Froude (basée sur la théorie de la quantité de mouvement) donne cependant deux valeurs différentes pour la vitesse induite dans le cas d'une descente à forte pente, ce qui pose le problème d'équilibres multiples et de transition entre les régimes de fonctionnement stable (branches hélico et moulinet-frein). En outre, la théorie de la quantité de mouvement ne peut plus être appliquée dans le cas où le rotor est en VRS (descentes à des vitesses intermédiaires entre les modes de fonctionnement de types hélicoptère ou éolienne appelé descente en moulinet-frein). En effet, l'hypothèse d'existence d'un écoulement d'air entre l'infini amont et l'infini aval clairement délimité par un volume de veine fluide tel que présenté sur la figure (B.1) n'est plus valide. Pour certaines conditions de vitesse de descente, le rotor descend dans son propre sillage dont la structure tubulaire s'effondre. Les interactions entre les écoulements descendant dans le sillage et ascendant en dehors conduisent à la formation de tourbillons annulaires ou toriques à la périphérie du rotor (d'où le nom "état d'anneaux tourbillonnaires"). Ces interactions dues aux gradients adverses de vitesse axiale ne sont pas prises en compte par la théorie de la quantité de mouvement de même que leurs conséquences notamment un surcroît de vitesse induite lié à la recirculation de l'air à travers le rotor. Celui-ci "mouline" dans son propre sillage sans pouvoir "prendre appui" sur lui, ce qui conduit à un effondrement de la portance, à des vibrations, des pertes de contrôle, bref à une instabilité d'origine aérodynamique.

Pour étudier le comportement de l'appareil en Vortex Ring State, un modèle simplifié, développé durant la thèse de J. Jimenez [Jimenez 2002], est utilisé. Les principales caractéristiques de ce modèle dont l'étude se sert (chapitre 8), sont les suivantes.

Ce modèle se base tout d'abord sur les valeurs de vitesse induite données par la théorie de la quantité de mouvement i.e. sur l'équation $1 = \bar{\nu}^2 \left[\bar{\mu}^2 + (\bar{\nu} + \bar{\eta})^2\right]$. La solution implicite a deux branches : la branche hélico et la branche moulinet-frein.

Dans un premier temps, un raccord des deux branches est effectué afin d'avoir un modèle. Les valeurs de vitesse induite sont donc interpolées entre les deux branches physiques issues de

la théorie de QDM. Le raccord est réalisé de façon à assurer la continuité et la dérivabilité sur l'ensemble des vitesses de descente. La fonction interpolatrice est un polynôme $P(\bar{\eta})$ de degré 3. Elle vérifie aux points de raccord :

- Par continuité : $P(\bar{\eta}_1) = \bar{\nu}_1$ et $P(\bar{\eta}_2) = \bar{\nu}_2$
- Par dérivabilité : $\frac{dP}{d\bar{\eta}}(\bar{\eta}_1) = \left(\frac{dP}{d\bar{\nu}}\right)(\bar{\eta}_1)$ et $\frac{dP}{d\bar{\eta}}(\bar{\eta}_1) = \left(\frac{dP}{d\bar{\nu}}\right)(\bar{\eta}_2)$

Les valeurs des vitesses induites normalisées sont connues aux points de raccord grâce à la relation de QDM. Par ailleurs, les dérivées ont pour expression, après quelques calculs occultés ici :

$$\frac{d\bar{\nu}}{d\bar{\eta}} = \frac{\bar{\nu}^3 \cdot \sqrt{1/\bar{\nu}^2 - \bar{\mu}^2}}{-\bar{\nu}^3 \cdot \sqrt{1/\bar{\nu}^2 - \bar{\mu}^2} \pm 1}$$

Enfin, le polynôme interpolateur vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} P(\bar{\eta}_1) & = & a \cdot \bar{\eta}_1^3 + b \cdot \bar{\eta}_1^2 + c \cdot \bar{\eta}_1 + d & = & \bar{\nu}_1 \\ P(\bar{\eta}_2) & = & a \cdot \bar{\eta}_2^3 + b \cdot \bar{\eta}_2^2 + c \cdot \bar{\eta}_2 + d & = & \bar{\nu}_2 \\ \frac{dP}{d\bar{\eta}_1}(\bar{\eta}_1) & = & 3a \cdot \bar{\eta}_1^2 + 2b \cdot \bar{\eta}_1 + c & = & \left(\frac{d\bar{\nu}}{d\bar{\eta}}\right)_1 \\ \frac{dP}{d\bar{\eta}_2}(\bar{\eta}_2) & = & 3a \cdot \bar{\eta}_2^2 + 2b \cdot \bar{\eta}_2 + c & = & \left(\frac{d\bar{\nu}}{d\bar{\eta}}\right)_2 \end{cases}$$

Il résulte de tout ceci une extension de la théorie de la quantité de mouvement donnant une solution unique pour toutes les vitesses de descente.

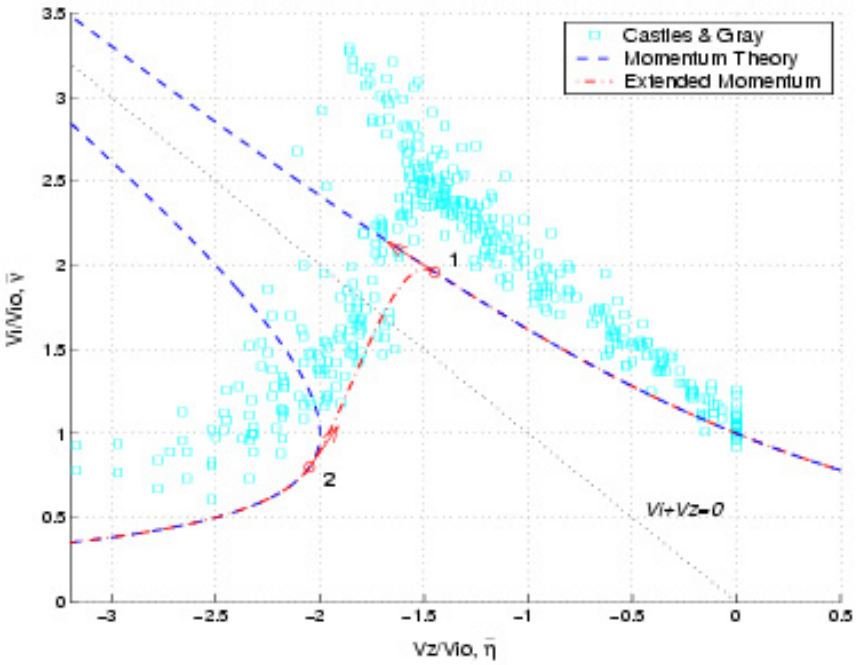



FIG. B.4. Vitesse induite normalisée et interpolée issue de la théorie de la quantité de mouvement. Comparaison avec des données issues d'essais en soufflerie [Jimenez 2002, page 154]

Les bifurcations sur la courbe d'équilibre de la vitesse induite moyenne à travers le rotor en descente ont été étudiés dans [Basset 2002]. Le modèle développé dans [Jimenez 2002] est conçu de sorte à éviter ces repliements. Ce choix a été motivé par le besoin de faciliter la recherche

d'équilibre par la méthode classique de Newton-Raphson implantée dans le code HOST. Certes, des résultats expérimentaux tels que ceux de Castles & Gray présentés sur la figure (B.4) montrent que pour certains taux de descente ($\frac{V_Z}{V_{i0}}$ environ entre $-1.7$ et $-2.1$), deux solutions de vitesse induite moyenne peuvent exister. Cependant, les essais en vol sur l'hélicoptère Dauphin qui ont servi de base à la modélisation développée dans [Jimenez 2002] montrent que l'existence de points de retournement sur la courbe d'équilibre de $V_{i_m}$ en fonction de $V_Z$ n'est pas une condition nécessaire à l'apparition du VRS. Au niveau de la mécanique du vol, le principal symptôme du VRS, qui est l'augmentation soudaine de la vitesse de descente du fait de l'effondrement de la portance, apparaît dès lors qu'un repliement existe sur la courbe d'équilibre $V_Z = f\,(DT0)$. Cette condition nécessaire est obtenue lorsque le modèle de $V_{i_m}$ comporte un terme non-linéaire de surcroît de vitesse induite en descente. Il s'agit de la seconde partie du modèle qui vise à tenir compte des recirculations d'air qui ont lieu en descente et qui sont responsables d'un accroissement des vitesses induites sur le rotor. Ce surplus de la forme :

$$\begin{cases} \bar{\nu}_{at} = A_0 \times \cos\left(\frac{V_Z - V_{Z_0}}{V_{Z_0}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \text{ lorsque } |V_Z - V_{Z_0}| < V_{Z_0} \\ \bar{\nu}_{at} = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

est donc rajouté de telle sorte que le modèle soit la somme d'un terme provenant de l'extension de la théorie de la *q*uantité *d*e *m*ouvement ($\bar{\nu}_{qdm}$) et d'un terme rendant compte du surcroît en descente ($\bar{\nu}_{at}$ dont l'indice évoque les *a*nneaux *t*ourbillonnaires reponsables du phénomène) :

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_{qdm} + \bar{\nu}_{at}$$

Enfin, les valeurs obtenues sont multipliées par le coefficient $\frac{k}{b} \approx 1.1$ qui permet classiquement de tenir compte des pertes de portance en bout de pales et de la répartition non-uniforme de la vitesse induite sur le disque rotor.

**Transition :** Au-delà de la modélisation de la vitesse induite dans le Vortex Ring State, un objectif important est de déterminer la zone dans laquelle il apparaît afin de pouvoir définir des limitations à l'enveloppe de vol de l'hélicoptère.

## B.2 Enveloppe de l'état d'anneaux tourbillonnaires

Une méthode analytique permettant de déterminer la frontière d'apparition du VRS est l'œuvre de Wolkowitch [Wolkovitch 1972].

Le sillage est modélisé par un cylindre tourbillonnaire constitué de tourbillons marginaux lâchés par le rotor et d'intensité uniforme. Les vitesses de l'air à l'intérieur et à l'extérieur du sillage ne sont pas les mêmes car à l'intérieur, l'air a été accélérée par le rotor. Le cylindre de vorticité formé par l'ensemble de ces tourbillons isole le sillage du rotor de l'extérieur. Pour certaines conditions de vitesses, les tourbillons marginaux ne sont plus entraînés loin du rotor et s'accumulent à sa périphérie. Le rotor évolue alors dans une zone de turbulence créée par cette accumulation du sillage en dessous de lui-même.

Ce critère permet à Wolkowitch de décider si le rotor est entré en Vortex Ring State. Il conduit à l'établissement d'une zone d'occurrence de l'état d'anneaux tourbillonnaires. Wolkowitch établit des limites haute et basse de valeurs de $V_Z$ pour lesquelles apparaissent le VRS. Il suppose que la vitesse de descente des tourbillons d'extrémité de pale est égale à la moyenne des vitesses à l'intérieur ($\bar{\nu} + \bar{\eta}$) et à l'extérieur ($\bar{\eta}$) du sillage, soit : $\frac{\bar{\nu}}{2} + \bar{\eta}$, comme le montre la figure (B.5).

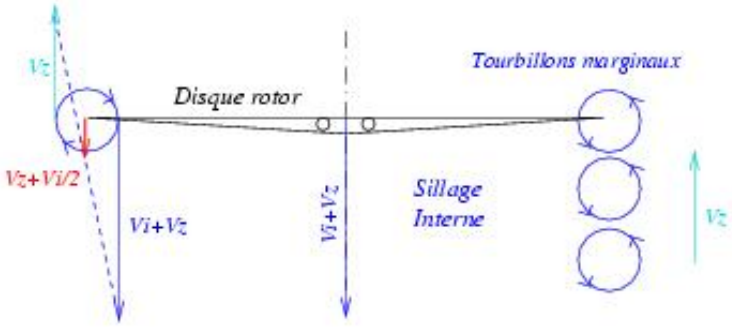



FIG. B.5. Modèle de l'écoulement proposé par Wolkowitch

Cette condition définit la limite haute de la région de VRS. Elle est atteinte si la vitesse de convection des tourbillons au niveau du rotor est nulle c'est-à-dire que les tourbillons restent bloqués dans son voisinage. Le taux de descente critique correspondant est alors : $\bar{\eta}_{crit} = \frac{-\bar{\nu}}{2}$.

La limite basse du VRS correspond, quant à elle, aux forts taux de descente. L'écoulement à travers le rotor est inversé et l'air circule à travers le rotor du bas vers le haut (fonctionnement type d'une éolienne). Dans ces conditions, les tourbillons émis par le rotor ne sont plus bloqués au niveau du disque rotor mais à une certaine distance au-dessus.

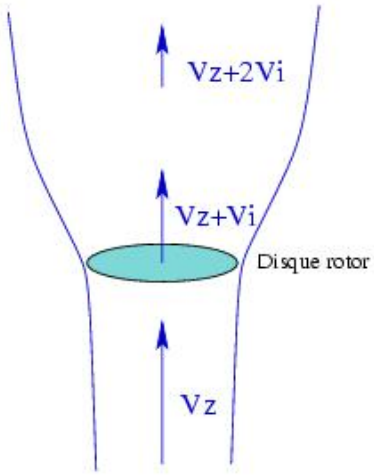



FIG. B.6. Flux d'air dans un disque rotor plein

La théorie de Froude enseigne que l'air est accéléré depuis le rotor où sa vitesse normalisée vaut $\bar{\eta} + \bar{\nu}$ jusqu'à l'infini aval où sa vitesse normalisée vaut $\bar{\eta} + 2\bar{\nu}$. Ainsi, en une section du sillage donnée, la vitesse induite moyenne est-elle égale à $k \cdot \bar{\nu}$, le coefficient $k$ valant 1 au niveau du disque rotor et 2 à l'infini aval, et la vitesse axiale des tourbillons marginaux est $\bar{\eta} + \frac{k \cdot \bar{\nu}}{2}$. Pour déterminer la frontière de sortie (limite basse) de VRS, Wolkowitch propose, de manière empirique, une gamme de valeurs telle que : $1.4 \leq k \leq 1.6$.

Les limites haute et basse obtenues par Wolkowitch sont représentées sur les diagrammes (B.7).

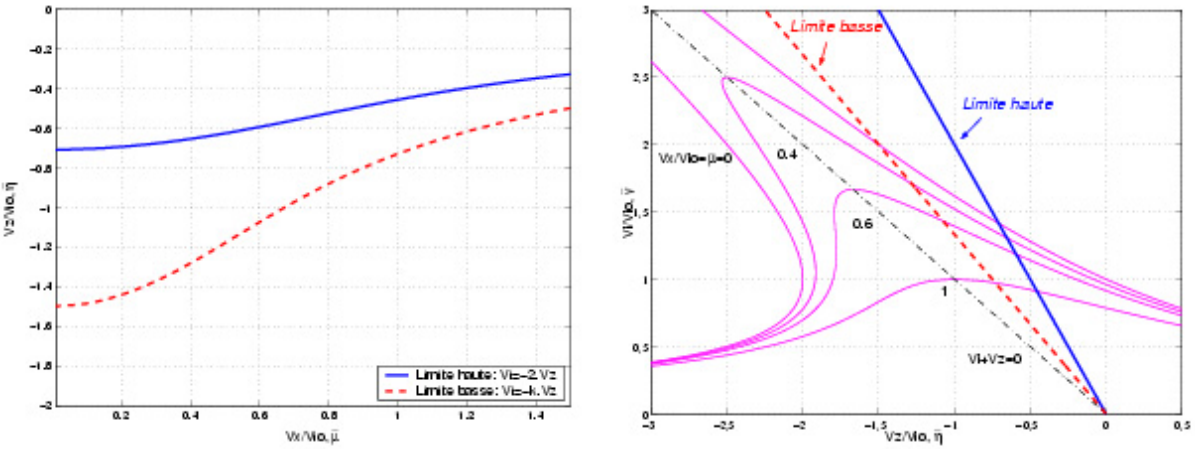



FIG. B.7. Limite basse et limite haute du VRS selon le modèle de Wolkowitch

Wolkowitch a développé un critère physique intéressant pour déterminer le domaine d'apparition du VRS. Si ce critère physique est pertinent aux faibles valeurs de la vitesse d'avancement $\bar{\mu}$, ce dernier doit être amélioré pour tenir compte de la disparition des instabilités et de l'éjection des tourbillons loin du rotor au-delà d'une certaine valeur de $\bar{\mu}$.

Le critère a été étendu dans [Jimenez 2002] en faisant intervenir l'angle $\chi$ d'inclinaison du sillage qui dépend directement de la vitesse d'avancement comme le montre le modèle d'écoulement du flux d'air à travers le rotor illustré par la figure (B.8).

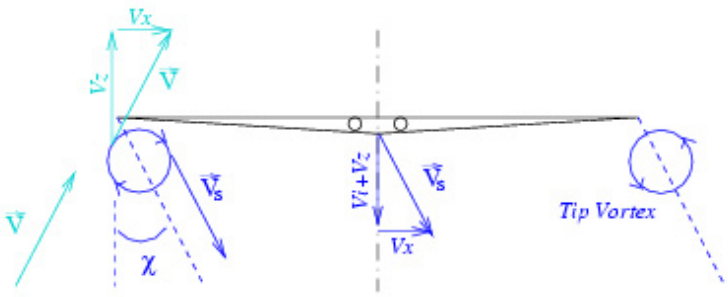



FIG. B.8. Modèle de l'écoulement tenant compte de l'angle du sillage [Jimenez *et al.* 2001]

La vitesse de déplacement des tourbillons marginaux $V_{tv}$ est égale à la moyenne de la vitesse de l'air à l'extérieur du sillage et de celle à l'intérieur accélérée par le rotor :

$\bar{V}_{tv} = \frac{1}{2}\left(\vec{V} + \vec{V}_S\right) = \begin{pmatrix} V_{tv_x} \\ V_{tv_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ \frac{\vec{V}_i}{2} + \vec{V}_z \end{pmatrix}$, ce qui donne en normalisant $\bar{V}_{tv} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \frac{\bar{\nu}}{2} + \bar{\eta} \end{pmatrix}$

Le disque rotor se trouve en VRS lorsque la vitesse de convection des tourbillons marginaux $V_{tv}$ n'est pas suffisamment importante et que les tourbillons ne s'éloignent pas assez rapidement du disque rotor :

$$\|\vec{V}_{tv}\| = \sqrt{\left(V_{tv_x}^2 + V_{tv_z}^2\right)} < \varepsilon$$

Cependant, les influences des vitesses normale et parallèle au plan rotor sont mises sur un pied d'égalité alors que leurs contributions vis-à-vis de l'existence de l'état d'anneaux tourbillonnaires ne sont pas du tout les mêmes comme le montre la figure (B.9).

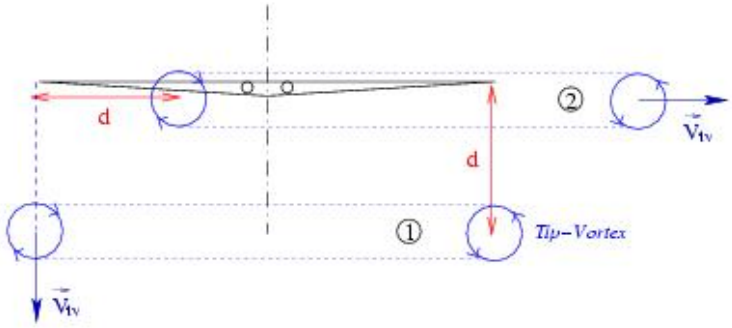



FIG. B.9. Différence physique entre les écoulements normal et parallèle au plan rotor [Jimenez *et al.* 2001]

Après un intervalle de temps $\Delta t$, deux anneaux tourbillonnaires élémentaires, qui se déplacent à la même vitesse suivant l'axe normal au rotor et suivant l'axe parallèle à celui-ci, ont tous les deux parcouru une même distance $d$. Mais tandis que l'anneau de type 1 n'est plus en interaction avec le disque rotor, l'anneau de type 2 l'est encore. Le critère doit tenir compte de cette dissymétrie :

$$\begin{cases} V_{tv_x} \leq \varepsilon_x \\ V_{tv_z} \leq \varepsilon_z \\ \text{où } \varepsilon_z < \varepsilon_x \end{cases}$$

Il est finalement formulé comme suit, avec $\varepsilon_x = k \cdot \varepsilon_z = k \cdot \varepsilon$ où $k > 1$ :

$$\sqrt{\left(\frac{V_{tv_x}}{k}\right)^2 + V_{tv_z}^2} \leq \varepsilon$$

En comparant la zone de VRS donnée par les résultats issus d'essais en vol avec les zones de VRS obtenues pour différentes valeurs de $k$ et $\epsilon$, il apparaît que prendre $k = 4$ et $\varepsilon = 0.25$ permet d'obtenir une bonne approximation.

## Conclusion

Les modèles analytiques de vitesse induite en état d'anneaux tourbillonnaires et de prédiction de la zone critique proposés (ou améliorés) par J. Jimenez sont pertinents et valides afin de reproduire le comportement de l'hélicoptère dans une telle situation. Ils seront exploités dans l'étude du VRS menée au cours du chapitre 8.

# Annexe C

# Approximations du premier harmonique de quelques non-linéarités

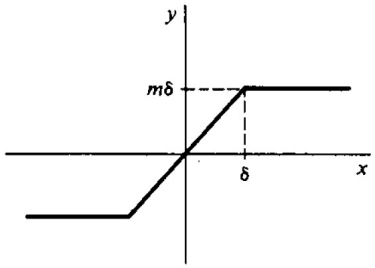
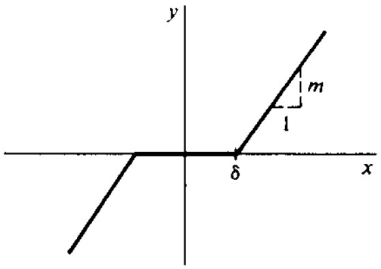
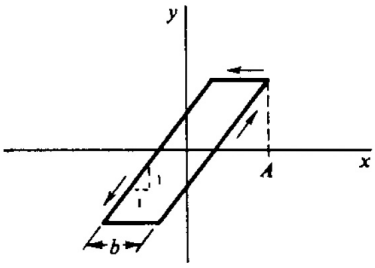
Au cours de l'étude sur les oscillations induites par le pilote (section 4.3 et chapitre 10), la méthode du premier harmonique est utilisée. L'objectif de ce chapitre est de donner les approximations du premier harmonique de quelques-unes des non-linéarités usuelles. Par ailleurs, ces dernières se dénomment également "gains complexes équivalents" ou "describing functions" en anglais. Des détails sur les fondements (et les limitations) de la méthode du premier harmonique peuvent être trouvés entre autres dans les manuels dédiés à l'analyse ou à l'automatique non-linéaires, par exemple [Viault et Boucher 1983, Fossard et Ortiz 2002, Ljung et Glad 2000]. Grosso modo, les hypothèses de la méthode du premier harmonique sont qu'une fonction de transfert non-linéaire dépend de l'amplitude (et de la pulsation) de l'entrée d'un système (bouclé) contrairement à une fonction de transfert classique qui ne dépend que de la pulsation du système.

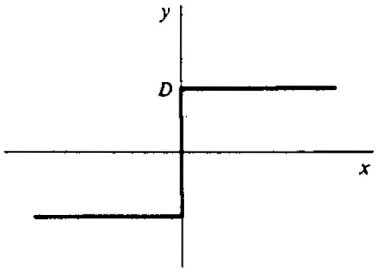
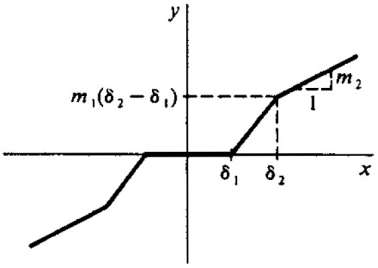
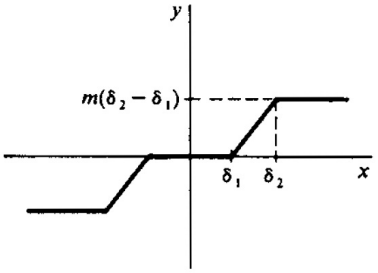
La méthode du premier harmonique prédit l'amplitude et la phase d'une sinusoïde obtenue dans un système non-linéaire bouclé sur lui-même. Plusieurs hypothèses limitent l'exploitation de la méthode. D'une part, le système non-linéaire doit pouvoir se décomposer en une non-linéarité séparable suivie d'une fonction de transfert linéaire. Cette propriété est appelée l'**hypothèse de séparabilité**. D'autre part, il est nécessaire que les harmoniques d'ordre supérieur à un soient négligeables et donc que la partie linéaire se comporte comme un **filtre passe-bas**.

L'expression des gains complexes équivalents (des éléments linéaires par morceaux essentiellement) exploite souvent l'approximation du premier harmonique de la saturation unitaire. Pour cette dernière, la notation suivante est adoptée :

$$f\left(\frac{\delta}{A}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\frac{\delta}{A} + \frac{\delta}{A}\sqrt{1-\left(1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2\right)}\right] \text{ pour } \frac{\delta}{A} \leq 1 \\ 1 \text{ pour } \frac{\delta}{A} > 1 \end{cases}$$

Dans la liste suivante, le gain complexe équivalent est noté $N(A)$ ou $N(A,\omega)$.

| saturation | |
|---|---|
| $N(A) = mf\left(\dfrac{\delta}{A}\right)$ |  |
| **zone morte** | |
| $N(A) = m\left[1 - f\left(\dfrac{\delta}{A}\right)\right]$ |  |
| **backlash** | |
| $N(A) = \dfrac{1}{2}\left[1 + f\left(1 - \dfrac{b}{A}\right)\right] - i\dfrac{1}{\pi}\left[2\dfrac{b}{A} - \left(\dfrac{b}{A}\right)^2\right]$ si $A \geq \dfrac{b}{2}$ |  |

| relais | |
|---|---|
| $N(A) = \dfrac{4D}{\pi A}$ |  |
| **changements de gain et zone morte** | |
| $N(A) = -m_1 f\left(\dfrac{\delta_1}{A}\right) + (m_1 - m_2)\, f\left(\dfrac{\delta_2}{A}\right) + m_2$ |  |
| **limiteur avec zone morte** | |
| $N(A) = m\left(f\left(\dfrac{\delta_2}{A}\right) - f\left(\dfrac{\delta_1}{A}\right)\right)$ |  |

# Annexe D

# Mail d'acceptation d'une publication

Le *Journal of the American Helicopter Society* a accepté une publication sur ce thème. Les co-auteurs sont le doctorant Chang Chen et le professeur J. V. R. Prasad du Georgia Institute of Technology, l'ingénieur de recherche P.-M. Basset de l'ONERA. Un extrait du mail d'acceptation est fourni ci-dessous.

```
Re: JAHS Title "Prediction of VRS Boundary of a Helicopter in
Descent Flight." Manuscript Number: JAHS-1362-Jun-2006

I am pleased to inform you that your paper has been accepted to the
Journal of the American Helicopter Society subject to major
revisions.

Yours sincerely,

Richard Brown Associate Editor, AHS Journal
```

# Bibliographie


[AGA 1994] (1994). *Active Control Technology : Applications and Lessons Learned*, numéro CP-560, Turin. AGARD.

[AGA 1996] (1996). *Advances in Rotorcraft Technology*, numéro CP-592, Ottawa. AGARD.

[ADS 2000] (2000). *ADS-33E-PRF, Aeronautical Design Standard, Performance Specification, Handling Qualities Requirement for Military Rotorcraft.*

[Cer 2004] (2004). *Certification of Transport Category Rotorcraft.* Federal Aviation Administration.

[Fir 2007] (2007). Fire Scout VTUAV. `http://www.northropgrumman.com/unmanned/firescout/overview.html`.

[AGARD 1993] AGARD (1993). *Non Linear Dynamics and Chaos.* Numéro LS-191. North Atlantic Treaty Organization.

[AGARD 1995] AGARD (1995). *Flight Vehicle Integration Panel Workshop on Pilot Induced Oscillations.* Numéro AR-335. North Atlantic Treaty Organization.

[AGARD 2000] AGARD (2000). *Flight Control Design - Best Practices.* Numéro RTO-TR-029. North Atlantic Treaty Organization.

[Alcala *et al.* 2004] I. Alcala, F. Gordillo et J. Aracil (2004). Phase compensation design for prevention of PIO due to actuator rate saturation. Dans *American Control Conference*, Boston, Massachusetts.

[Amato *et al.* 2000] F. Amato, R. Iervolino, M. Pandit, S. Scala et L. Verde (2000). Analysis of Pilot-in-the-Loop Oscillations Due to Position and Rate Saturations. Dans *Conference on Decision and Control*, Sydney.

[Amato *et al.* 1999] F. Amato, R. Iervolino, S. Scala et L. Verde (1999). Actuator Design for Aircraft Robustness Versus Category II PIO. Dans *7th Mediterranean Conference on Control and Automation.*

[Anderson 1998] M. R. Anderson (1998). Pilot-Induced Oscillations Involving Multiple Nonlinearities. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5).

[Anderson et Page 1995] M. R. Anderson et A. B. Page (1995). Multivariable Analysis of Pilot-in-the-Loop Oscillations. Dans *Guidance, Navigation and Control Conference*, Baltimore.

[Avanzini et de Matteis 1996] G. Avanzini et G. de Matteis (1996). Bifurcation Analysis of a Highly Augmented Aircraft Model. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, San Diego.

[Avanzini et de Matteis 1997] G. Avanzini et G. de Matteis (1997). Bifurcation Analysis of a Highly Augmented Aircraft Model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(4).

[Basset 1995] P.-M. Basset (1995). *Contributions à l'amélioration d'un modèle de simulation de la mécanique du vol des hélicoptères.* Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[Basset 1996] P.-M. Basset (1996). Modeling of the dynamic inflow on the main rotor and the tail components in helicopter flight mechanics. Dans *22nd European Rotorcraft Forum*, Brighton.

[Basset 2002] P.-M. Basset (2002). Study of the Vortex Ring State using Bifurcation Theory. Dans *American Helicopter Society 58th Annual Forum.*

[Basset et Brocard 2004] P.-M. Basset et M. Brocard (2004). A Fenestron Model for Improving the Helicopter Yaw Dynamics Flight Simulation. Dans *30th European Rotorcraft Forum*, Marseille.

[Basset *et al.* 2007] P.-M. Basset, C. Chen, J. V. R. Prasad et S. Kolb (2007). Prediction of Vortex Ring State Boundary of a Helicopter in Descent Flight by Nonlinear Flight Dynamics Simulation. *Journal of the American Helicopter Society.*

[Basset *et al.* 2001] P.-M. Basset, O. Heuze, J. V. R. Prasad et M. Hamers (2001). Finite State Rotor Induced Flow Model For Interferences and Ground Effect. Dans *57th AHS international forum*, Washington.

[Basset et Omari 1999] P.-M. Basset et A. El Omari (1999). A rotor vortex wake model for helicopter flight mechanics and its application to the prediction of the pitch-up phenomenon. Dans *25th European Rotorcraft Forum*, Rome.

[Bedford et Lowenberg 2003] R. G. Bedford et M. H. Lowenberg (2003). Use of Bifurcation Analysis in the design and Analysis of Helicopter Flight Control Systems. Dans *29th European Rotorcraft Forum*, Friedrichshafen.

[Bedford et Lowenberg 2004] R. G. Bedford et M. H. Lowenberg (2004). Bifurcation Analysis of Rotorcraft Dynamics With An Underslung Load. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference & Exhibit*, Rhode Island.

[Benoit *et al.* 2000] B. Benoit, A.-M. Dequin, P.-M. Basset, B. Gimonet, W. Grünhagen et K. Kampa (2000). HOST, a General Helicopter Simulation Tool for Germany & France. Dans *American Helicopter Society 56th Annual Forum*, Virginia Beach.

[Biannic 2000] J.-M. Biannic (2000). An LFT Framework for Limit-Cycle Analysis. Dans *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Denver.

[Biannic *et al.* 2006] J.-M. Biannic, S. Tarbouriech et D. Farret (2006). A practical approach to performance analysis of saturated systems with application to fighter aircraft flight controllers. Dans *5th IFAC Symposium ROCOND*, Toulouse.

[Boulet 1982] J. Boulet (1982). *Histoire de l'hélicoptère racontée par ses pionniers 1907-1956.* France-Empire.

[Buler *et al.* 2001] W. Buler, L. Loroch, K. Sibilski, Z. Winczura et A. Zyluk (2001). Nonlinear Dynamics of Helicopter with Slung Load Analysis by Continuation Methods. Dans *AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, numéro 2001-0110, Reno.

[Chapa 1999] M. J. Chapa (1999). A Nonlinear Pre-Filter to Prevent Departure And/Or Pilot-Induced Oscillations (PIO) Due To Actuator Rate Limiting. Master's thesis, Air Force Institute of Technology.

[Chen 2006] C. Chen (2006). *Development of a Simplified Inflow Model for a Helicopter Rotor in Descent Flight.* PhD thesis, Georgia Institute of Technology.

[Chen *et al.* 2006] C. Chen, J. V. R. Prasad, P.-M. Basset et S. Kolb (2006). Prediction of VRS Boundaries of Helicopters in Descent Flights. Dans *American Helicopter Society 62nd Annual Forum*, Phoenix.

[Cummings 2004] P. A. Cummings (2004). Continuation Methods for Qualitative Analysis of Aircraft Dynamics. Rapport Technique NASA/CR-2004-213035, National Institue of Aerospace.

[de Groot et Pavel 2006] S. de Groot et M. D. Pavel (2006). New Insights Pilot Behaviour During Hazardous Rotorcraft Pilot Induced Oscillations. Dans *American Helicopter Society 62nd Annual Forum*, Phoenix.

[Dhooge *et al.* 2003] A. Dhooge, W. Govaerts et Y. A. Kuznetsov (2003). MATCONT : a MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2).

[Doedel 1997] E. Doedel (1997). Lecture Notes on Numerical Analysis of Bifurcation Problems. Hamburg.

[Duda 1995] H. Duda (1995). Effects of rate limiting elements in flight control systems - a new PIO criterion. Dans *Guidance, Navigation and Control Conference*, Baltimore.

[Duda 1997] H. Duda (1997). Prediction of Pilot-in-the-Loop Oscillations Due to Rate Saturation. *Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*, 20(3).

[Duda et Duus 1997] H. Duda et G. Duus (1997). New Handling Qualities Database on PIO due to Rate Saturation. Rapport Technique, DLR.

[Duda *et al.* 2000] H. Duda, G. Duus, G. Hovmark et L. Forssell (2000). New Flight Simulator Experiments on Pilot-Involved Oscillations due to Rate Saturation. *Journal of Guidance, Control, And Dynamics*, 23(2).

[Duda *et al.* 1997] H. Duda, G. Hovmark et L. Forssell (1997). Prediction of Category II Aircraft-Pilot Couplings - New Experimental Results. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, New Orleans.

[Duus et Duda 1999] G. Duus et H. Duda (1999). Analysis of the HAVE LIMITS Database using the OLOP Criterion. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference And Exhibit*, Portland.

[Dzygadlo *et al.* 1997] Z. Dzygadlo, G. Kowaleczko et K. Sibilski (1997). Numerical Investigation of Helicopter Dynamics in Extreme Flight Conditions. Dans *23rd European Rotorcraft Forum*, Dresden.

[Engelborghs *et al.* 2002] K. Engelborghs, T. Luzyanina et D. Roose (2002). Numerical Bifurcation Analysis of Delay Differential Equations Using DDE-BIFTOOL. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 28(1).

[Fossard et Ortiz 2002] A. J. Fossard et F. Ortiz (2002). *Saturation en vitesse et en vitesse-position.* Techniques de l'ingenieur.

[Gavrilets *et al.* 2001] V. Gavrilets, B. Mettler et E. Feron (2001). Nonlinear Model for a Small-Size Acrobatic Helicopter. Dans *AIAA GNC Conference*, Montreal.

[Gavrilets *et al.* 2003] V. Gavrilets, B. Mettler et E. Feron (2003). Dynamic Model for a Miniature Aerobatic Helicopter. Rapport Technique LIDS-P-2580, MITLIDS.

[Gelb et Velde 1968] A. Gelb et W. E. Vander Velde (1968). *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design.* McGraw-Hill.

[Gilbreath 2001] G. P. Gilbreath (2001). Prediction Of Pilot-Induced Oscillations (PIO) Due To Actuator Rate Limiting Using The Open-Loop Onset Point (OLOP) Criterion. Master's thesis, Air Force Institute of Technology.

[Gilmore 1981] R. Gilmore (1981). *Catastrophe theory for scientists and engineers.* Wiley-Interscience.

[Goman et Khramtsovsky 1997] M. G. Goman et A. V. Khramtsovsky (1997). Global stability analysis of nonlinear aircraft dynamics. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, New Orleans.

[Goman et Khramtsovsky 1998] M. G. Goman et A. V. Khramtsovsky (1998). Application of continuation and bifurcation methods to the design of control systems. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2277–2295.

[Goman *et al.* 1997] M. G. Goman, G. I. Zagainov et A. V. Khramtsovsky (1997). Application of Bifurcation Methods to Nonlinear Flight Dynamics Problem. *Progress in Aerospace Scineces*, 33 : 539–586.

[Guckenheimer et Holmes 2002] J. Guckenheimer et P. Holmes (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.

[Guicheteau 1979] P. Guicheteau (1979). Utilisation de la théorie des bifurcations en mécanique du vol. Rapport Technique, ONERA.

[Guicheteau 1981] P. Guicheteau (1981). Application de la théorie des bifurcations à l'étude des pertes de contrôle sur avion de combat. Dans *AGARD/FMP Combat Aircraft Manœuvrability*, Florence.

[Guicheteau 1985] P. Guicheteau (1985). Etude du comportement transitoire d'un avion au voisinage de points de bifurcation. Dans *Unsteady Aerodynamics-Fundamentals & Applications to Aircraft Dynamics*, numéro CP-386, Göttingen. AGARD.

[Guicheteau 1987] P. Guicheteau (1987). Prédiction par les bifurcations du comportement à grande incidence de l'alpha-jet (Modèle M2). Rapport Technique, ONERA.

[Guicheteau 1990] P. Guicheteau (1990). Bifurcation Theory in Flight Dynamics, An Application to a Real Combat Aircraft. Dans *ICAS*, Stockholm.

[Guicheteau 1993a] P. Guicheteau (1993). *Non-Linear Flight Dynamics*, Chapitre 5. Dans [AGARD 1993].

[Guicheteau 1993b] P. Guicheteau (1993). *Stability Analysis through Bifurcation Theory (1)*, Chapitre 3. Dans [AGARD 1993].

[Guicheteau 1993c] P. Guicheteau (1993). *Stability Analysis through Bifurcation Theory (2)*, Chapitre 4. Dans [AGARD 1993].

[Guicheteau 1998] P. Guicheteau (1998). Bifurcation Theory : A Tool for Nonlinear Dynamics. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2182–2202.

[Guicheteau et Guittard 1984] P. Guicheteau et B. Guittard (1984). Application de la théorie des bifurcations à la mécanique du vol (IV). Qualification des bifurcations et protection contre les pertes de contrôle. Rapport Technique, ONERA.

[Guicheteau et Khac 1989] P. Guicheteau et M. Do Khac (1989). Prédiction par les bifurcations du comportement dynamique de l'alpha-jet avec le modèle M3. Analyse des orbites périodiques. Rapport Technique, ONERA.

[Hamel 1996] P. G. Hamel (1996). Rotorcraft - Pilot Coupling A Critical Issue for Highly Augmented Helicopters ? Dans [AGA 1996].

[Hanke 1995] D. Hanke (1995). *Handling Qualities Analysis on Rate Limiting Elements in Flight Control Systems*, Chapitre 11. Dans [AGARD 1995].

[Hanke 2003] D. Hanke (2003). Flight test evaluation and data analysis of rate limiting induced PIO's. Dans *Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, Austin.

[Hui et Tobak 1984] W. H. Hui et M. Tobak (1984). Bifurcation Analysis of Aircraft Pitching Motions About Large Mean Angles of Attack. *Journal of Guidance*, 7(1).

[Hui et Tobak 1985] W. H. Hui et M. Tobak (1985). Bifurcation Theory Applied to Aircraft Motions. Rapport Technique TM-86704, NASA.

[Iooss et Joseph 1981] G. Iooss et D. D. Joseph (1981). *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag.

[Jahnke 1990] C. C. Jahnke (1990). *Application of Dynamical Systems theory to Nonlinear Aircraft Dynamics*. PhD thesis, California Institute of Technology.

[Jahnke 1998] C. C. Jahnke (1998). On the roll-coupling instabilities of high-performance aircraft. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2223–2239.

[Jahnke et Culick 1988] C. C. Jahnke et F. E. C. Culick (1988). Application of Dynamical Systems Theory to Nonlinear Aircraft Dynamics. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, numéro 88-4372, Minneapolis.

[Jeram 2004] G. J. Jeram (2004). *Open Platform for Limit Protection with Carefree Maneuver Applications*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology.

[Jeram et Prasad 2003] G. J. Jeram et J. V. R. Prasad (2003). Fuzzy Logic Detector for Aircraft Pilot Coupling and Pilot Induced Oscillations. Dans *American Helicopter Society 59th Annual Forum*, Phoenix.

[Jimenez 2002] J. Jimenez (2002). *Etude expérimentale et numérique du comportement d'un hélicoptère en descente à forte pente : modélisation de l'état d'anneaux tourbillonnaires*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[Jimenez *et al.* 2001] J. Jimenez, A. Desopper, A. Taghizad et L. Binet (2001). Induced velocity model in steep descent and vortex-ring state prediction. Dans *57th European Rotorcraft Forum*, Moscow.

[Jimenez *et al.* 2002] J. Jimenez, A. Taghizad et A. Arnaud (2002). Helicopter Flight Tests in Steep Descent : Vortex Ring State Analysis And Induced Velocity Models Improvement. Dans *CEAS/TRA3 Conference*, Cambridge.

[Johnson 2002] D. A. Johnson (2002). Suppression Of Pilot-Induced Oscillation (PIO). Master's thesis, Air Force Institute of Technology.

[Johnson 1994] W. Johnson (1994). *Helicopter Theory*. Dover.

[Johnson 2004] W. Johnson (2004). Model for Vortex Ring State Influence on Rotorcraft Flight Dynamics. Dans *AHS 4th Decennial Specialist's Conference on Aeromechanics*, San Francisco.

[Johnson *et al.* 2006] W. Johnson, G. K. Yamauchi et M. E. Watts (2006). Designs and Technology Requirements for Civil Heavy Lift Rotorcraft. Dans *American Helicopter Society Vertical Lift Aircraft Design Conference*, San Francisco.

[Kampa *et al.* 1997] K. Kampa, B. Enenkl, G. Polz et G. Roth (1997). Aeromechanic Aspects in the Design of the EC135. Dans *23rd European Rotorcraft Forum*, Dresden.

[Kelley 2005] C. T. Kelley (2005). Arclength Continuation and Bifurcation.

[Klyde et Mitchell 2003] D. H. Klyde et D. G. Mitchell (2003). Investigating the Role of Rate Limiting in Pilot Induced Oscillations. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Austin.

[Klyde et Mitchell 2005] D. H. Klyde et D. G. Mitchell (2005). A PIO Case Study - Lessons Learned through Analysis. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference & Exhibit*, San Francisco.

[Kubicek et Marek 1983] M. Kubicek et M. Marek (1983). *Computational Methods in Bifurcation Theory and Disspative Structures*. Springer-Verlag.

[Landis et Glusman 1987a] K. H. Landis et S. I. Glusman (1987). Development of ADOCS Controllers and Control Laws, Vol 1 - Executive Summary. Rapport Technique CR-177339, NASA.

[Landis et Glusman 1987b] K. H. Landis et S. I. Glusman (1987). Development of ADOCS Controllers and Control Laws, Vol 2 - Literature Review and Preliminary Analysis. Rapport Technique CR-177339, NASA.

[Landis et Glusman 1987c] K. H. Landis et S. I. Glusman (1987). Development of ADOCS Controllers and Control Laws, Vol 3 - Simulation Results And Recommandations. Rapport Technique CR-177339, NASA.

[Lefort et Hamann 1999] P. Lefort et J. Hamann (1999). *L'hélicoptère : théorie et pratique.* Chiron.

[Levine et Barlow 1993] W. S. Levine et J. Barlow (1993). Techniques for Designing Rotorcraft Control Systems. Rapport Technique CR-192960, NASA.

[Liebst 1998] B. S. Liebst (1998). The dynamics, prediction and control of wing rock in high-performance aircraft. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2257–2276.

[Liebst *et al.* 2002] B. S. Liebst, M. J. Chapa et D. B. Leggett (2002). Nonlinear Prefilter to Prevent Pilot-Induced Oscillations due to Actuator Rate Limiting. *Journal of Guidance, Control And Dynamics*, 25(4).

[Littleboy et Smith 1997] D. M. Littleboy et P. R. Smith (1997). Bifurcation Analysis of a High Incidence Aircraft with Nonlinear Dynamic Inversion Control. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Washington D.C.

[Ljung et Glad 2000] L. Ljung et T. Glad (2000). *Control Theory : Multivariable and Nonlinear Methods.* Taylor & Francis.

[Lowenberg 1997] M. H. Lowenberg (1997). Bifurcation analysis as a tool for post-departure stability enhancement. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, New Orleans.

[Lowenberg 1998] M. H. Lowenberg (1998). Bifurcation analysis of multiple-attractor flight dynamics. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2297–2319.

[Lowenberg et Champneys 1998] M. H. Lowenberg et A.R. Champneys (1998). Shil'nikov homoclinic dynamics and the escape from roll autorotation in an F-4 model. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2241–2256.

[Luo *et al.* 2003] C.-C. Luo, C.-C. Kung, P.-W. Chang, C.-D. Yang et Y.-H. Chang (2003). Linear Helicopter Model for Global Flight Envelope Control. *Journal of C.C.I.T.*, 32(1).

[Macmillen et Thompson 1998] F. B. Macmillen et J. M. T. Thompson (1998). Bifurcation analysis in the flight dynamics design process ? A view from the aircraft industry. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2321–2333.

[Mahale et Ananthkrishnan 2006] A. Mahale et N. Ananthkrishnan (2006). Analytical Criterion for Onset of Departure in Inertia-Coupled Roll Maneuvers of Airplanes. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, Keystone.

[Marsden et McCracken 1976] J. E. Marsden et M. McCracken (1976). *The Hopf Bifurcation and Its Application.* Springer-Verlag.

[Marusak *et al.* 2000] A. Marusak, J. Pietrucha et K. Sibilski (2000). Prediction of Aircraft Critical Flight Regimes Using Continuation & Bifurcation Methods. Dans *38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, numéro 2000-0976, Reno.

[McRuer 1994] D. McRuer (1994). Active Control Technology And Interdisciplinary Interactions. Dans [AGA 1994].

[McRuer 1974] D. T. McRuer (1974). *Mathematical Models of Human Pilot Models*, volume 188. AGARD.

[McRuer 1995] D. T. McRuer (1995). Pilot-Induced Oscillations and Human Dynamic Behaviour. Rapport Technique CR-4683, NASA.

[McRuer 1997] D. T. McRuer (1997). *Aviation Safety And Pilot Control - Understanding and Preventing Unfavorable Pilot-Vehicle Interactions*. National Academy Press.

[McRuer *et al.* 1989] D. T. McRuer, W. T. Clement, P. M. Thompson et R. E. Magdaleno (1989). Minimum Flying Qualities - Volume II : Pilot Modeling For Flying Qualities Applications. Rapport Technique, Wright Research & Development Center.

[Mehra *et al.* 1977] R. K. Mehra, W. C. Kessel et J. C. Carroll (1977). Global Stability and Control Analysis of Aircraft at High Angles of Attack. Rapport Technique, ONR.

[Mehra et Prasanth 1998] R. K. Mehra et R. K. Prasanth (1998). Application of Nonlinear Global Analysis and System Identification to Aircraft-Pilot Coupled Oscillations. Dans *IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste.

[Michea 1992] B. Michea (1992). *Etude des sillages de rotors d'hélicoptère en vol d'avancement et de leur influence sur les performances du rotor. (Interaction Pale-Tourbillon)*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6.

[Mitchell et Klyde 2004] D. G. Mitchell et D. H. Klyde (2004). Recommanded Practices for Exposing Pilot-Induced Oscillations or Tendencies in the Development Process. Dans *AIAA USAF Developmental Test and Evaluation Summit*, Woodland Hills.

[Moore 1999] B. H. Moore (1999). Dead Air. Rotor & Wing.

[Ockier et Pausder 1994] C. J. Ockier et H.-J. Pausder (1994). Experiences with ADS-33 Helicopter Specification Testing and Contributions to Refinement Research. Dans [AGA 1994].

[Padfield 1996] G. D. Padfield (1996). *Helicopter Flight Dynamics*. Blackwell Science Ltd.

[Paranjape *et al.* 2007] A. Paranjape, N. K. Sinha et N. Ananthkrishnan (2007). Use of Bifurcation and Continuation Methods for Aircraft Trim and Stability Analysis - A State-of-the-Art. Dans *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno.

[Patel et Littleboy 1998] Y. Patel et D. Littleboy (1998). Piloted simulation tools for aircraft departure analysis. *Philosophical Transactions : Mathematical and Engineering Sciences, Nonlinear flight Dynamics of High performance Aircraft*, 356 : 2203–2221.

[Perhinschi et Prasad 1995] M. G. Perhinschi et J. V. R. Prasad (1995). Analytical Investigation of Helicopter Handling qualities Criterion Using a Structural Pilot Model. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Baltimore.

[Perko 1996] L. Perko (1996). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.

[Prasad *et al.* 2004] J. V. R. Prasad, C. Chen, P.-M. Basset et S. Kolb (2004). Simplified Modelling And Non-Linear Aanalysis Of A Helicopter Rotor In Vortex Ring State. Dans *30th European Rotorcraft Forum*, Marseille.

[Prouty 1992] R. W. Prouty (1992). The Peculiarities of the Dutch Roll. Rotor & Wing International.

[Raletz 1990] R. Raletz (1990). *Théorie élémentaire de l'hélicoptère*. Cepadues.

[Rezgui *et al.* 2006] D. Rezgui, P. C. Bunniss et M. H. Lowenberg (2006). The Stability of Rotor Blade Flapping Motion in Autorotation using Bifurcation and Continuation Analysis. Dans *32d European Rotorcraft Forum*, Maastricht.

[Richardson *et al.* 2006] T. Richardson, M. Lowenberg, M. diBernardo et G. Charles (2006). Design of a Gain-Scheduled Flight Control System Using Bifurcation Analysis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(2) : 444–453.

[Rollet 1994] Rollet (1994). *Giravions*. Ecole de l'Air.

[Roose et Hlavacek 1985] D. Roose et V. Hlavacek (1985). A Direct Method for the Computation of Hopf Bifurcation Points. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 45 : 879–894.

[Rundqwist et Ståhl-Gunnarson 1996] L. Rundqwist et K. Ståhl-Gunnarson (1996). Phase Compensation of Rate Limiters in Unstable Aircraft. Dans *IEEE International Conference on Control Applications*, Dearborn.

[Rundqwist *et al.* 1997] L. Rundqwist, K. Ståhl-Gunnarsson et J. Enhagen (1997). Rate Limiters with Phase Compension in JAS 39 GRIPEN. Dans *European Control Conference*, Brussels.

[Schroeder *et al.* 1999] J. A. Schroeder, W. W. Y. Chung et R. A. Hess (1999). Spatial Frequency and Platform Motion Effects on Helicopter Altitude Control. Dans *AIAA*.

[Schroeder *et al.* 1998] J. A. Schroeder, W. W. Y. Chung, D. T. Tran, S. Laforce et N. J. Bengford (1998). Pilot-Induced Oscillation Prediction with Three Levels of Simulation Motion Dispacement. Dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Boston.

[Serr *et al.* 1999] C. Serr, J. Hamm, F. Toulmay, G. Polz, H. J. Langer, M. Simoni, M. Bonetti, A. Russo, A. Vozella, C. Young, J. Stevens, A. Desopper et D. Papillier (1999). Improved Methodology for Take-Off and Landing Operational Procedures - The RESPECT program. Dans *25th European Rotorcraft Forum*, Rome.

[Sibilski 1998] K. Sibilski (1998). Bifurcation Analysis of a Helicopter Non-Linear Dynamics. Dans *24th European Rotorcraft Forum*, Marseille.

[Sibilski 1999] K. Sibilski (1999). Non-Linear Flight Mechanics of a Helicopter Analysis by Application of a Continuation Methods. Dans *25th European Rotorcraft Forum*, Rome.

[Sienel *et al.* 1996a] W. Sienel, T. Bünte et J. Ackermann (1996). PARADISE - PArametric Robust Analysis and Design Interactive Software Environment : A Matlab-Based Robust Control Toolbox. Dans *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, Dearborn.

[Sienel *et al.* 1996b] W. Sienel, T. Bünte et J. Ackermann (1996). Robust Control Goes PARADISE. Dans *EURACO-Workshop ; Control of nonlinear systems : Theory and Applications*, Algarve.

[Sinha et Ananthkrishnan 2002] N. K. Sinha et N. Ananthkrishnan (2002). Use of the extended bifurcation analysis method for flight control law design. Dans *AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno.

[Sinha *et al.* 2004] N. K. Sinha, M. Jangid et N. Ananthkrishnan (2004). Automated Gain Scheduling Using Continuation Techniques. Dans *IFAC conference of Nonlinear Control Systems*, Stuttgart.

[Sollier 1997] L. Sollier (1997). Notice d'utilisation simplifiée du code de calcul des bifurcations ASDOBI et de son interface graphique. Rapport Technique RT 66/5148 SN, ONERA.

[Thom 1972] R. Thom (1972). *Stabilité structurelle et morphogénèse*. InterEditions.

[Tischler 1987] M. B. Tischler (1987). Digital Control of Highly Augmented Combat Rotorcraft. Technical Memorandum 88346, NASA.

[Tischler *et al.* 1989] M. B. Tischler, J. W. Flechter, P. M. Morris et G. T.Tucker (1989). Applications of Flight Control System Methods to an Advanced Combat Rotorcraft. Technical Memorandum 101054, NASA.

[Toulmay 1987] F. Toulmay (1987). Modèle d'étude de l'aérodynamique du rotor (M.E.T.A.R.) formulation et application au S.A. 349 pales GV. Rapport Technique, Aérospatiale Division Hélicoptère.

[Viault et Boucher 1983] D. Viault et P. Boucher (1983). *Méthode du premier harmonique*. Techniques de l'ingenieur.

[Wanner 1983] J.-C. Wanner (1983). Dynamique du vol et pilotage des avions. Rapport Technique, ONERA.

[Witte 2004] J. B. Witte (2004). An Investigation Relating Longitudinal Pilot-Induced Oscillation Tendency Rating To Describing Function Predictions For Rate-Limited Actuators. Master's thesis, Air Force Institute of Technology.

[Wolkovitch 1972] J. Wolkovitch (1972). Analytical prediction of vortex-ring boundaries for helicopters in steep descents. *Journal of the American Helicopter Society*, 17.

[Wu et Perng 2004] B.-F. Wu et J.-W. Perng (2004). Gain-Phase Margin Analysis of Pilot-Induced Oscillations for Limit-Cycle Prediction. *Journal of Guidance, Control, And Dynamics*, 27(1).

[Yudilevitch et Levine 1994] G. Yudilevitch et W. S. Levine (1994). Techniques for Designing Rotorcraft Control Systems. Rapport Technique CR-196192, NASA.

# Table des figures


1.1 Gyroplane de L. Breguet et P.Richet (en haut) & Hélicoptère de P. Cornu (en bas) 21
1.2 Flettner Fl 282 Kolibri . . . . . 22
1.3 Focke-Achgelis FA 223 Drache . . . . . 22
1.4 Sikorsky R-4B . . . . . 22
1.5 Différents éléments d'un hélicoptère . . . . . 24
1.6 Profil d'une pale : incidence $\alpha$, calage géométrique de la section de pale $\theta_p$, angle de l'écoulement $\varphi = \arctan\left(\frac{Cx_a}{Cz_a}\right)$ . . . . . 24
1.7 Mécanisme gouvernant le rotor . . . . . 25
1.8 Pièces constitutives du rotor . . . . . 25
1.9 Plan dissymétrique décrit par les pales [Lefort et Hamann 1999] . . . . . 25
1.10 Pale avançante et pale reculante [Lefort et Hamann 1999] . . . . . 25
1.11 Pilote et commandes de l'hélicoptère . . . . . 26
1.12 Commandes d'un hélicoptère . . . . . 26
1.13 Hélicoptère EC 135 d'Eurocopter et son fenestron . . . . . 26
1.14 Fenestron d'un hélicoptère Dauphin . . . . . 26
1.15 Trièdres terrestre et appareil . . . . . 27
1.16 Trièdres aérodynamique et appareil . . . . . 27
1.17 Axes et principales variables de mécanique du vol d'un hélicoptère . . . . . 28

2.1 Avion avec ses variables caractéristiques et son système d'axes [Mehra *et al.* 1977, page 45] . . . . . 31
2.2 Bifurcation du mouvement spiral [Guicheteau 1998] . . . . . 35

3.1 Manœuvres de suivi de terrain . . . . . 37

4.1 Sillage d'un disque rotor . . . . . 45
4.2 Disque rotor de l'hélicoptère en vol stationnaire . . . . . 46
4.3 Disque rotor en vol à faible taux de descente . . . . . 46
4.4 Disque rotor en vol à des taux de descente moyens . . . . . 47
4.5 Disque rotor (en autorotation) à des taux de descente importants . . . . . 47
4.6 Disque rotor (en moulinet-frein) à des taux de descente très importants . . . . . 48
4.7 Différentes phases de l'écoulement d'air à travers un disque rotor dans un diagramme représentant le taux de vitesse induite en fonction du taux de chute [Rollet 1994] . . . . . 48
4.8 Essais en vol du Dauphin et modélisation des limites du domaine de VRS . . . . 50
4.9 Roulis hollandais d'un avion et d'un hélicoptère [Prouty 1992] . . . . . 52
4.10 Analyse de la stabilité du roulis hollandais de l'hélicoptère EC 135 [Kampa *et al.* 1997] 54
4.11 Wright Flyer . . . . . 55
4.12 Modèle structurel de pilote humain [Perhinschi et Prasad 1995] . . . . . 57
4.13 Fonction de transfert de la boucle fermée en fonction de celle de la boucle ouverte 58

4.14 Symbole d'un limiteur en vitesse . . . . . 60
4.15 Schéma équivalent d'un limiteur en vitesse . . . . . 61
4.16 Limiteur en vitesse saturé : signal sinusoïdal transformé en signal triangulaire . . 62
4.17 Gain du premier harmonique du limiteur en vitesse $N(X)$ . . . . . 64
4.18 Phase du premier harmonique du limiteur en vitesse $N(X)$ . . . . . 64
4.19 Diagramme de Nyquist de $-1/N(X)$ . . . . . 64
4.20 Diagramme de Nichols de $-1/N(X)$ . . . . . 64
4.21 Avion de recherche : le X-15 . . . . . 65
4.22 Dépouillement du vol de l'arrondi à l'atterrissage du X-15 [Klyde et Mitchell 2003] 66
4.23 Réponse à un échelon unitaire en boucle ouverte . . . . . 67
4.24 Réponse à un échelon unitaire en boucle fermée . . . . . 67
4.25 Schéma du X-15 identifié en tangage . . . . . 67
4.26 Schéma Simulink du X-15 identifié en tangage . . . . . 68
4.27 Diagramme de Nyquist et de Nichols pour un gain pilote $K_p = 5$ . . . . . 68
4.28 Fichier Simulink utilisé pour les simulations temporelles . . . . . 69
4.29 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 0.9deg$ et $K_p = 5$ . . . . . 70
4.30 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 1.2deg$ et $K_p = 5$ . . . . . 70
4.31 Courbes du gain pilote $K_p$ en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$ . . . 71
4.32 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 10deg$ et $K_p = 2.5$ . . . . . 72
4.33 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_c$ pour $\theta(0) = 10deg$ et $K_p = 2.8$ . . . . . 72
4.34 Schéma équivalent du X-15 pour une analyse avec PARADISE . . . . . 73
4.35 Zone de stabilité de Hurwitz . . . . . 73

5.1 Courbe-solution ayant des plis . . . . . 77
5.2 Différentes étapes de l'algorithme de continuation . . . . . 77
5.3 Continuation des orbites périodiques . . . . . 81
5.4 Architecture d'un modèle du HOST . . . . . 84
5.5 Parcours cinématique et parcours efforts dans le HOST . . . . . 85
5.6 Initialisation des modèles du HOST . . . . . 85
5.7 Différentes phases d'un calcul HOST . . . . . 86
5.8 Modèles de rotor et de sillage disponibles dans le HOST . . . . . 90
5.9 Hélicoptère Dauphin 6075 du CEV d'Istres . . . . . 91

6.1 Modèle ressort équivalent de la souplesse en battement du rotor [Padfield 1996] . 101
6.2 Notations au niveau de la section de pale [Padfield 1996] . . . . . 101
6.3 Comparaison d'un vol en palier simulé avec le modèle analytique ou EUROPA . . 109
6.4 Comparaison d'un vol de montée simulé avec le modèle analytique ou EUROPA . 109

7.1 Variables de la mécanique du vol de l'hélicoptère . . . . . 114
7.2 Couplage du code HOST avec le code ASDOBI . . . . . 117

8.1 Lois implicites pour imposer le cas de vol . . . . . 122
8.2 Comparaison des courbes de points d'équilibre obtenues par balayage avec le HOST (à gauche) ou par continuation avec ASDOBI (à droite) . . . . . 123
8.3 Diagramme de bifurcation caractéristique du VRS . . . . . 124
8.4 Lieu des points de bifurcation projetés sur l'espace des commandes . . . . . 126
8.5 Diagramme de bifurcation et simulation temporelle associée . . . . . 127
8.6 Surface d'équilibre . . . . . 128
8.7 Zone du VRS . . . . . 129
8.8 Explication de la frontière inférieure du VRS . . . . . 130
8.9 Vitesse induite moyenne . . . . . 131

8.10 Flux moyen d'air . . . . . 131
8.11 Pas collectif . . . . . 131
8.12 Frontière du VRS . . . . . 131
8.13 Comparaison du lieu des points de bifurcation pour différents modèles . . . . . 135
8.14 Domaines de VRS pour différents régimes du rotor . . . . . 137
8.15 Domaines de VRS prenant en compte divers types d'interactions . . . . . 138

9.1 Lieu des points de bifurcation de Hopf en fonction de la vitesse d'avancement $V_{H0}$ et de la masse . . . . . 141
9.2 Lieu des points de bifurcation de Hopf en fonction de la vitesse d'avancement $V_{H0}$ et de l'efficacité de la dérive . . . . . 141
9.3 Simulation inverse $DTS \rightarrow \Theta$ pour $VH < VH_{critique}$ . . . . . 145
9.4 Simulation inverse $DTS \rightarrow \Theta$ pour $VH > VH_{critique}$ . . . . . 145
9.5 Simulation à $V_H = 20km/h$ avec feedback et $\Delta DDN = 15\%$ . . . . . 146
9.6 Simulation à $V_H = 20km/h$ avec feedback et $\Delta DDN = 20\%$ . . . . . 147
9.7 Simulation à $V_H = 30km/h$ et d'excitation latérale initiale $\Delta DDN = 10\%$ . . . . 147
9.8 Simulation à $V_H = 25km/h$ et d'excitation latérale initiale $\Delta DDN = 10\%$ . . . . 148
9.9 Simulation temporelle pour une vitesse d'avancement grande de $V_H = 140km/h$ . 150
9.10 Simulation temporelle pour une vitesse d'avancement faible de $V_H = 33km/h$ . . 151
9.11 Simulation pour une vitesse d'avancement $V_H = 46km/h$ et de perturbation initiale $\Delta R_{hel} = .1rad/s$ . . . . . 152
9.12 Simulation pour une vitesse d'avancement $V_H = 46km/h$ et de perturbation initiale sur le bloc $\{V_{hel}, P_{hel}, R_{hel}, \phi\}$ . . . . . 152
9.13 Portrait de phase des simulations du bloc latéral pour une vitesse d'avancement de $V_H = 46km/h$ . . . . . 153
9.14 Enveloppe des cycles limites . . . . . 155
9.15 Rayon des cycles limites . . . . . 156
9.16 Pulsation des cycles limites . . . . . 156

10.1 Prototype ADOCS de démonstration : l'UH-60 Black Hawk [Tischler *et al.* 1989] 160
10.2 Chaîne de commande en tangage de l'ADOCS [Tischler *et al.* 1989] . . . . . 160
10.3 Fichier Simulink représentant la réponse de l'ADOCS en tangage . . . . . 161
10.4 Diagramme de Nyquist et de Nichols pour un gain pilote $K_{pil} = 3.9$ . . . . . 162
10.5 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.02rad$ et $K_p = 3.9$ . . . . . 163
10.6 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.03rad$ et $K_p = 3.9$ . . . . . 163
10.7 Courbes du gain pilote $K_{pil}$ en fonction de la pulsation $\omega$ et de l'amplitude $A$ . . 164
10.8 Diagrammes de Nyquist pour $K_{pil} = 3.72$ et $K_{pil} = 4.1$ . . . . . 165
10.9 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.1rad$ et $K_{pil} = 3.7$ . . . . . 165
10.10 Simulations temporelles de $\theta$ et $\delta_s$ pour $\theta(0) = 0.1rad$ et $K_{pil} = 3.76$ . . . . . 166
10.11 Chaîne simplifiée de commande en tangage de l'ADOCS [Tischler 1987] . . . . . 167
10.12 Suivi d'une consigne du concept ADOCS . . . . . 169
10.13 Sensibilité non-linéaire du manche . . . . . 171
10.14 Schéma Simulink de l'ADOCS avec une zone morte et une saturation entre le manche et l'hélicoptère . . . . . 171
10.15 Graphe du premier harmonique de la sensibilité non-linéaire du manche . . . . . 172
10.16 Diagramme de Nyquist de la partie linéaire $G$ du prototype ADOCS et de la sensibilité non-linéaire du manche $-1/N$ dans la configuration choisie pour la section (10.2.2) . . . . . 173
10.17 Simulations temporelles de $\theta$ pour $K_{pil} = 6$ et de conditions initiales $\theta(0) = 0.04rad$ ou $\theta(0) = 0.14rad$ . . . . . 173

10.18 Gain pilote en fonction de l'amplitude et de pulsation des oscillations . . . . . 174
10.19 Simulations temporelles de $\theta$ de condition initiale $\theta(0) = 1.0rad$ et pour des gains pilote $K_{pil} = 3.5$ ou $K_{pil} = 4.1$ . . . . . 175
10.20 Schéma Simulink de l'ADOCS avec un actionneur limité en vitesse . . . . . 176
10.21 Amplitude du signal d'entrée de l'actionneur limité en vitesse en fonction de l'amplitude de la consigne . . . . . 177
10.22 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $K_p = 1$ et $|\theta_c| = 0.33rad$ . . . . . 178
10.23 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $K_p = 1$ et $|\theta_c| = 0.34rad$ . . . . . 178
10.24 Diagramme de Nichols pour $|\theta_c| = 20\pi/180rad$ et $R = 50inch/s$ . . . . . 179
10.25 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 2.6rad/s$ . 180
10.26 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 2.7rad/s$ . 180
10.27 Schéma du dispositif dans lequel le pilote agit en boucle ouverte . . . . . 181
10.28 Diagramme de Nichols pour $|\theta_c| = 20\pi/180rad$ et $R = 10inch/sec$ . . . . . 181
10.29 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 3.2rad/s$ . 182
10.30 Simulations temporelles de $\theta$ et de l'état d'entrée du limiteur pour $\omega = 3.3rad/s$ . 182

A.1 Bifurcations réelles : (a) transcritique ; (b) fourche supercritique ; (c) fourche sous-critique ; (d) fourche sous-critique + bifurcations nœuds-selles $S$ (e) nœud-selle . 197
A.2 Bifurcations de Hopf : (a) supercritique ; (b) sous-critique . . . . . 198
A.3 Valeurs propres de la matrice de monodromie et bifurcations d'orbites périodiques (d'après la notice d'ASDOBI de P. Guicheteau) . . . . . 199
A.4 Application du premier retour . . . . . 200

B.1 Ecoulement dans un disque plein . . . . . 206
B.2 Vitesses de l'air à travers un disque rotor en vol de descente à forte pente . . . . 207
B.3 Vitesse induite normalisée donnée par la théorie de la quantité de mouvement pour différentes vitesses d'avancement . . . . . 208
B.4 Vitesse induite normalisée et interpolée issue de la théorie de la quantité de mouvement. Comparaison avec des données issues d'essais en soufflerie [Jimenez 2002, page 154] . . . . . 209
B.5 Modèle de l'écoulement proposé par Wolkowitch . . . . . 211
B.6 Flux d'air dans un disque rotor plein . . . . . 211
B.7 Limite basse et limite haute du VRS selon le modèle de Wolkowitch . . . . . 212
B.8 Modèle de l'écoulement tenant compte de l'angle du sillage [Jimenez *et al.* 2001] . 212
B.9 Différence physique entre les écoulements normal et parallèle au plan rotor [Jimenez *et al.* 2001] 213

## Résumé

Cette étude consiste à explorer les possibilités offertes par la théorie des bifurcations pour l'analyse concrète de la dynamique du vol des hélicoptères.

Un état de l'art permet de montrer en quoi la méthodologie a fait ses preuves dans le cas de la mécanique du vol des avions et présente quelques phénomènes fortement non-linéaires issus du domaine des hélicoptères.

Dans un premier temps, il s'agit de mettre en place la problématique. Des travaux informatiques aboutissent au couplage du code HOST de mécanique du vol des hélicoptères d'EUROCOPTER et du code ASDOBI d'analyse des systèmes dynamiques de l'ONERA. Un modèle analytique d'hélicoptère complètement dédié et adapté à cette application est également développé. Par ailleurs, il est mis en évidence que la bonne formulation mathématique des problèmes évoqués est celle d'un système algébro-différentiel.

Dans un second temps, trois cas illustratifs de la démarche sont étudiés. Tout d'abord, l'instabilité aérodynamique liée à la formation d'anneaux tourbillonnaires à la périphérie du rotor dans certains cas de vol est analysée et des bifurcations de valeur propre réelle sont diagnostiquées. Un nouveau critère pour délimiter la région d'instabilité est donné par le calcul du lieu des points de ces bifurcations. Ensuite, le cas du roulis hollandais est examiné montrant que la bifurcation de Hopf (supercritique) sous-jacente s'avère donner naissance à des cycles limites stables. Enfin, l'étude porte son attention sur le couplage aéronef-pilote. Des oscillations induites par le pilote sont constatées pour la chaîne de commande choisie. Des bifurcations nœuds-selles de cycles limites et des sauts d'orbites périodiques correspondent aux changements brusques de qualités de vol observés.



**Mots-clefs :** systèmes dynamiques, théorie des bifurcations, mécanique du vol, hélicoptère, état d'anneaux tourbillonnaires, roulis hollandais, oscillations induites par le pilote.



## Abstract

This study aims at exploring the interest of using bifurcation theory to analyse concretely helicopter flight dynamics.

A state-of-the-art allows to show how the methodology was applied with success in the case of fixed-wings aircrafts flight dynamics and presents some phenomenons highly nonlinear coming from the helicopter world.

The first step is to set up the issue. Informatical works end up with the coupling of the HOST code of helicopter flight mechanics from EUROCOPTER and the ASDOBI code of dynamical systems analysis from ONERA. An analytical helicopter model absolutely dedicated and adapted to this application is also developed. Moreover, it is shown that the required mathematical formulation of the evoked problems is based on a differential algebraic system representation.

In a second step, three illustrative cases of this approach are studied. Firstly, the aerodynamic instability due to the vortex rings formation at the rotor periphery in some flight cases is analysed and bifurcations of real eigenvalues are diagnosed. A new criterion to delimit the region of instability is given by the calculation of the locus of these bifurcations. Then, the case of the Dutch roll is examined showing that the underlying (supercritical) Hopf bifurcation turns out to give rise to stable limit cycles. Finally, the study is interested in aircraft-pilot coupling. Pilot induced oscillations are determined for the chosen command channel. Saddle-node bifurcations of limit cycles and jumps of periodical orbits corresponds to the handling qualities cliffs observed.



**Keywords :** dynamical systems, bifurcation theory, flight mechanics, rotorcraft, vortex ring state, dutch roll, pilot induced oscillations