



**HAL**  
open science

**Comportement asymptotique de problèmes posés dans  
des cylindres. Problèmes d'unicité pour des systèmes de  
Boussinesq**  
Nicolas Bruyere

► **To cite this version:**

Nicolas Bruyere. Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres. Problèmes d'unicité pour des systèmes de Boussinesq. Mathématiques [math]. Université de Rouen, 2007. Français. NNT: . tel-00199798

**HAL Id: tel-00199798**

**<https://theses.hal.science/tel-00199798>**

Submitted on 19 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

présentée par

Nicolas BRUYÈRE

**Discipline** : Mathématiques Appliquées  
**Spécialité** : Analyse numérique

## Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres. Problèmes d'unicité pour les systèmes de Boussinesq.

Date de soutenance : 17 Décembre 2007

### Composition du Jury

Président	: M. CHIPOT,	Professeur, Université de Zürich
Rapporteurs	: M. CHIPOT,	Professeur, Université de Zürich
	J.I. DÍAZ,	Professeur, Université de Madrid
Examineurs	: C. BERNARDI,	Directeur de Recherche CNRS, Paris VI
	M.F. BIDAUT-VÉRON,	Professeur, Université de Tours
	N. MIR,	Professeur, Université de Rouen
Directeurs de Thèse	: D. BLANCHARD,	Professeur, Université de Rouen
	O. GUIBÉ,	Maître de conférences, Université de Rouen

Thèse préparée à l'Université de Rouen  
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR-CNRS 6085



# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Dominique Blanchard et Olivier Guibé. Ce fut un réel plaisir de travailler sous leur direction pendant ces trois années. Leur culture mathématique, leurs qualités pédagogiques et leur capacité à susciter la curiosité m'ont dirigé vers eux à la fin de mon DEA. Leur complicité a permis un encadrement efficace, et j'ai pu compter sur chacun d'eux lors de mes difficultés aussi bien d'ordre mathématique qu'administratif. Cette double présence m'a d'autant plus stimulé dans mes recherches, et je dois également saluer une de leurs qualités communes, un optimisme (réaliste) qui dans les périodes de doute m'a toujours redonné confiance et poussé à ne pas baisser les bras. Pour toutes ces raisons, je ne regrette en rien de les avoir choisis pour m'encadrer.

Je tiens à remercier ensuite Michel Chipot et Jesus Ildefonso Díaz d'avoir accepté la tâche de rapporter ma thèse. Leurs travaux ont initié respectivement chacune des deux parties de ma thèse, c'est donc pour moi un honneur qu'ils aient bien voulu en évaluer le contenu. Je suis d'autant plus honoré que Michel Chipot ait accepté de présider le jury.

Je voudrais également remercier Christine Bernardi, Marie-Françoise Bidaut-Véron et Nordine Mir d'avoir bien voulu faire partie du jury.

J'en viens maintenant à ceux qui m'ont donné goût aux mathématiques et qui m'ont donné l'envie de poursuivre dans cette voie. Il est sans doute difficile de savoir à quel moment le déclic s'est produit, mais j'estime, sans nul doute, que l'un des principaux responsables est Bernard Tambosco, mon professeur de mathématiques de mes trois années de lycée, qui par ses talents de pédagogue, sa rigueur (ses blagues de matheux aussi), a suscité une vocation enfouie en moi. Je ne le remercierai jamais assez.

Puis à l'université, un peu plus nombreux, je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers Olivier Alvarez qui s'investissait remarquablement dans l'enseignement et qui a toujours été présent et patient pour les nombreuses questions que j'ai pu lui poser. Son changement de voie a amputé l'université d'un enseignant exceptionnel. Qu'il soit heureux dans ses nouvelles fonctions. Puis en vrac, je voudrais exprimer mes remerciements à Olivier Benois, Dominique Blanchard, Ahmed Bouziad, Patrizia Donato, Léo Glange-tas, Olivier Guibé, Laurent Legris, Stéphane Legros, Vincent Masselin, Nordine Mir, Paul Raynaud de Fitte, Jean-Marie Strelcyn, Lucien Verney qui à un moment ont tous plus ou moins contribué à mon épanouissement mathématique et/ou m'ont soutenu dans ce que j'ai entrepris.

Bien que mon travail de thèse ait reposé essentiellement sur les mathématiques, il a fallu aussi savoir gérer le cadre administratif dans lequel il s'inscrit. Je veux donc tout d'abord

remercier notre actuel directeur Gérard Grancher qui malgré ses nombreuses tâches sait être disponible pour écouter les doctorants. Merci également à Edwige Auvray (la nouvelle Catherine Bourlon avec des lunettes) et Marguerite Losada pour leur présence, leur efficacité et leur patience. Je veux également saluer le travail d'Isabelle Lamitte qui gère remarquablement la bibliothèque et qui j'espère ne m'en veut pas trop de remettre systématiquement les ouvrages en retard. Enfin, mille mercis à Marc Jolly qui a réalisé l'impression et la reliure de cette thèse et sur qui j'ai toujours pu compter.

Je veux également remercier Claude Dellacherie, Élise Janvresse et Thierre de La Rue pour l'organisation de l'atelier des doctorants. J'y ai beaucoup appris autant sur le plan mathématique, sur la façon de communiquer que sur le plan culinaire.

La thèse c'est aussi la camaraderie. Je voudrais saluer ici tous ceux qui ont partagé ou partagent encore mon bureau : Abdelatif, Ali, Bruno et Ouerdia. Ainsi que les autres doctorants avec qui j'ai occupé de bons moments au RU, en salle de convivialité ou au soleil sur la terrasse : Étienne, Houda, Islam, les deux Olivier, Lahcen, Lamia, Patrice, Vincent.

Enfin, je veux remercier mes parents qui m'ont toujours supporté (dans les deux sens du terme), toute ma famille qui m'a toujours encouragé. Et une pensée spéciale pour Anaïs qui est contrainte de vivre au quotidien, entre autres, les euphories et les désillusions qui bercent la vie d'un doctorant... Tout ça mérite bien un 12 Avril !

# Résumé

La thèse est composée de deux parties indépendantes.

Dans la première partie, on étudie le comportement asymptotique de problèmes elliptiques et paraboliques à données  $L^1 + W^{-1,p'}$  (respectivement  $L^1 + L^p(0, T; W^{-1,p'})$  dans le cas parabolique), dans des domaines devenant infiniment grands. En utilisant le cadre des solutions renormalisées et les résultats de régularité des solutions pour de telles données, on prouve, sous certaines hypothèses structurelles sur les variables d'espace, des résultats de convergence dans les espaces de régularité des solutions.

Dans la seconde partie, dans le cas de la dimension 2, on étudie des systèmes de type Boussinesq. Ces systèmes dérivent de modèles de mécanique des fluides et consistent en un couplage des équations de Navier-Stokes incompressibles et de l'équation de la chaleur. On s'intéresse essentiellement aux questions d'unicité de la solution, particulièrement délicate à prouver du fait du couplage très non linéaire entre les équations. On travaille dans le cadre des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes et dans le cadre des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques pour l'équation de la chaleur. On établit tout d'abord des résultats de régularité pour ces équations puis on montre plusieurs résultats d'existence et d'unicité de la solution du système pour de petites données.

**Mots-clés** : problèmes elliptiques et paraboliques, comportement asymptotique dans des cylindres infinis, systèmes de Boussinesq, solutions renormalisées, équations de Navier-Stokes, résultats d'unicité.

# Abstract

The thesis is divided in two independent parts.

In the first part, we investigate the asymptotic behaviour of elliptic and parabolic problems with  $L^1 + W^{-1,p'}$  data (respectively with  $L^1 + L^p(0, T; W^{-1,p'})$  data in the parabolic case), in domains becoming unbounded. Using the framework of renormalized solutions and the regularity results of the solutions for such data, we prove, under structural conditions on space variables, convergence results in spaces containing the solutions.

In the second part, in the 2-dimensional case, we study Boussinesq type systems. These systems derive from fluid mechanics models and couple incompressible Navier-Stokes equations and heat equation. We focus our attention on studying the uniqueness of the solution, which is intricate because of the very nonlinear coupling of the equations. We consider weak solutions for the Navier-Stokes equations and renormalized solutions are used for the heat equation. We state regularity results for these equations and then we prove few existence and uniqueness results of the solution of the system for small data.

**Keywords** : elliptic and parabolic problems, asymptotic behaviour in infinite cylinders, Boussinesq systems, renormalized solutions, Navier-Stokes equations, uniqueness results.



# Table des matières

Introduction	iii
<b>I Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres</b>	<b>1</b>
<b>1 Problèmes elliptiques</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Définition des solutions renormalisées	6
1.3 Le cas fortement monotone	7
1.3.1 Les espaces de Lorentz	9
1.3.2 Estimations sur les solutions renormalisées	9
1.3.3 Comportement asymptotique de $u_l$	11
1.4 Le cas strictement monotone	22
<b>2 Problèmes paraboliques</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction	35
2.2 Définition des solutions renormalisées	37
2.3 Le cas fortement monotone	44
2.3.1 Régularité des solutions renormalisées	46
2.3.2 Comportement asymptotique de $u_l$	51
2.4 Le cas strictement monotone	67
<b>II Problèmes d'unicité pour les systèmes de Boussinesq</b>	<b>87</b>
<b>3 Le système</b>	<b>89</b>
<b>4 Équations de Navier-Stokes - Équation de la chaleur</b>	<b>93</b>
4.1 Équations de Navier-Stokes	93
4.1.1 Solutions faibles	93
4.1.2 Solutions plus régulières	95
4.2 Équation de la chaleur	100
4.2.1 Solutions renormalisées	100



4.2.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	102
4.2.3	Régularité de la solution renormalisée . . . . .	112
4.2.4	Solutions plus régulières . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Existence et unicité pour le système</b>	<b>127</b>
5.1	Solutions faibles-renormalisées, solutions faibles . . . . .	127
5.2	Données plus régulières pour l'équation de la chaleur . . . . .	129
5.3	Données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes . . . . .	139
5.4	Système avec énergie de dissipation . . . . .	142

# Introduction

Cette thèse se décompose en deux parties indépendantes. Dans une première partie on étudie le comportement asymptotique de la solution de problèmes elliptiques et paraboliques dans des domaines devenant infiniment grands. Puis dans une seconde partie, on étudie des systèmes de type Boussinesq en s'attachant plus particulièrement à l'étude de l'unicité de la solution.

## Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres

De nombreux problèmes physiques, stationnaires ou non, sont posés dans des domaines cylindriques de la forme  $\Omega_l = ]-l, l[^q \times \omega$  où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{N-q}$ . Si le cylindre est grand dans plusieurs directions (ici  $l$  grand) et si les données satisfont une dépendance particulière en les variables  $(x_1, x_2) \in ]-l, l[^q \times \omega$ , alors la solution est presque identique dans toutes les sections du domaine ramenant ainsi l'étude du problème initial à un problème en dimension inférieure. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de la solution de deux types de problèmes, les problèmes elliptiques, de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x, Du_l)] = \mu & \text{dans } \Omega_l \\ u_l = 0 & \text{sur } \partial\Omega_l \end{cases}$$

et les problèmes paraboliques

$$\begin{cases} \frac{\partial u_l}{\partial t} - \operatorname{div}[a(t, x, Du_l)] = \mu & \text{dans } (0, T) \times \Omega_l \\ u_l = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_l \\ u_l(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega_l \end{cases}$$

où  $a$  est un opérateur de type Leray-Lions à croissance  $p$ , strictement monotone et  $\mu, u_0$  sont des fonctions ne dépendant que de la variable de  $\omega$ .

Ce problème a été très largement étudié dans le cas variationnel par Chipot, Rougirel et Xie (voir [18], [19], [21], [22], [23], [44]). Ils ont montré que si l'opérateur vérifie les conditions structurelles suivantes

$$a(x, \xi) = \begin{pmatrix} a_1^1(x, \xi) \\ a_2^1(x, \xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^2(x_2, \xi) \\ a_2^2(x_2, \xi) \end{pmatrix}$$

( $a$  et  $a_j^i$  dépendent de  $t$  dans le cas parabolique), alors la solution  $u_l$  converge, en un sens à préciser, vers  $v$  la solution du problème  $(N - q)$ -dimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a_2^2(x, Dv)] = \mu & \text{dans } \omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

dans le cas elliptique, et

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}[a_2^2(t, x, Dv)] = \mu & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\omega \\ v(t = 0) = u_0 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

dans le cas parabolique. Ce résultat est numériquement intéressant car il stipule que quand le cylindre est grand dans la direction  $x_1$ , alors il est raisonnable d'approcher  $u_l$ , solution d'un problème  $N$ -dimensionnel par  $v$  solution d'un problème  $(N - q)$ -dimensionnel.

Dans le cas elliptique variationnel, c'est-à-dire pour  $\mu \in W^{-1,p'}(\omega)$ , Chipot, Rougirel et Xie (voir [18], [19], [21], [22], [23]) ont montré que si  $a$  est fortement monotone et vérifie une condition de Lipschitz, alors pour tout  $l_0 > 0$ ,  $2 \leq p < \frac{2q}{q-1}$  ( $\frac{2q}{q-1} = +\infty$  si  $q = 1$ ),  $u_l$  converge vers  $v$  dans  $W^{1,p}(\Omega_{l_0})$ , avec l'évaluation des vitesses de convergence suivante

$$\|Du_l - Dv\|_{L^p(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \text{pour } \bar{\alpha}(p, q) < \alpha < 0,$$

où  $\bar{\alpha}(p, q)$  est explicite par rapport à  $p$  et  $q$  (voir Théorème 1.3.1).

Dans le cas parabolique variationnel, c'est-à-dire pour  $\mu \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega_l))$ , Chipot et Rougirel (voir [18], [20]) ont montré (voir Théorème 2.3.1), que pour  $p = 2$ , si  $a$  est fortement monotone et vérifie une condition de Lipschitz, alors pour tout  $l_0 > 0$ ,  $u_l$  converge vers  $v$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega_{l_0}))$ , avec l'évaluation des vitesses de convergence suivante

$$\|Du_l - Dv\|_{L^2(Q_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0.$$

Dans cette thèse, nous étendons les résultats obtenus par Chipot, Rougirel et Xie au cas de problèmes à données moins régulières, typiquement  $L^1 + W^{-1,p'}$  pour les problèmes elliptiques et  $L^1 + L^{p'}(W^{-1,p'})$  pour les problèmes paraboliques. Dans ce cas, on n'a pas en général de solution d'énergie finie et on a recours à la notion de solutions renormalisées introduite par DiPerna et Lions (voir [29], [30]) pour l'étude des équations de Boltzmann, puis adaptée au cas des équations elliptiques non linéaires par Lions et Murat (voir [35], [38], [37]). On pourra également consulter [3], [14] pour des résultats d'existence et d'unicité de solutions entropiques, équivalentes aux solutions renormalisées pour des données  $L^1 + W^{-1,p'}$ . Cette notion de solution a ensuite été adaptée au cas des équations paraboliques par Blanchard et Murat pour le cas de données  $L^1$  (voir [6]). Le cadre des solutions renormalisées permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour un second membre dans  $L^1 + L^{p'}(W^{-1,p'})$  et un opérateur de type  $a(t, x, u, Du)$  (voir [7]) et aussi pour des problèmes non linéaires d'évolution où la nonlinéarité porte également sur le terme parabolique  $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$  (voir [9]). Dans le cas du problème de Stefan, c'est-à-dire où  $b$  présente des sauts, typiquement  $b$  est un graphe monotone, Blanchard et Porretta ont

proposé, dans [8], une nouvelle formulation tenant compte du peu de régularité de  $b$ . C'est cette nouvelle formulation, équivalente à l'originale dans le cas où  $b$  est l'identité que nous utiliserons dans notre travail car elle s'avère plus aisée à manipuler.

On étendra également les résultats de convergence déjà connus dans le cas variationnel, en montrant que pour des données  $f$  (et  $u_0$ ) positives alors on peut obtenir des résultats de convergence en s'affranchissant des conditions sur  $p, q$ .

La première partie I de cette thèse est ainsi scindée en deux chapitres.

Dans le Chapitre 1 on étudie le cas elliptique en considérant tout d'abord le cas d'un opérateur fortement monotone à donnée  $L^1(\omega) + W^{-1,p'}(\omega)$ . Les résultats dans le cas elliptique peuvent être trouvés dans [17]. Dans ce cas, on rappelle que l'on n'a pas a priori  $u_l \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$  donc aucune chance d'avoir convergence dans cet espace. En revanche d'après la définition des solutions renormalisées, les troncatures  $T_k(u_l)$  sont dans  $W_0^{1,p}(\Omega_l)$ . On rappelle également des résultats de régularité des solutions renormalisées dans les espaces de Lorentz et on montre finalement que pour tout  $l_0 > 0$ , pour tout  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  ( $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  si  $q = 1$ ), pour tout  $1 < r < \bar{r}(p, q, N)$  et pour tout  $\bar{\alpha}(r, p, q, N) < \alpha < 0$ ,

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha),$$

où  $\bar{r}(p, q, N)$  et  $\bar{\alpha}(r, p, q, N)$  sont explicitement calculés (voir Théorème 1.3.8). On montre également que  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega_{l_0})$ , pour les mêmes valeurs de  $p$  (voir Théorème 1.3.9).

Ensuite on cherche à s'affranchir des hypothèses reliant  $p, q, N$ , aussi bien dans le cas variationnel que dans le cas renormalisé. En contrepartie, dans le cas d'un opérateur strictement monotone, si on suppose  $\mu$  positif, on montre alors, par des techniques reposant sur le principe du maximum que pour tout  $l_0$ , pour tout  $1 < p < +\infty$ ,  $u_l$  converge vers  $v$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega_{l_0})$  dans le cas variationnel (voir Théorème 1.4.1) et  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega_{l_0})$  dans le cas renormalisé (voir Théorème 1.4.3).

Enfin dans le Chapitre 2, on étudie le cas parabolique. Les résultats sont similaires au cas elliptique, mais avec des difficultés techniques supplémentaires dues au caractère parabolique du problème.

On étudie dans un premier temps le cas d'un opérateur fortement monotone à donnée  $L^1((0, T) \times \omega) + L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\omega))$ . Dans ce cas, par définition des solutions renormalisées on a, en particulier,  $T_k(u_l) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\omega))$  et on établit également des résultats de régularité des solutions renormalisées de problèmes paraboliques dans les espaces de Lorentz. On montre alors que pour tout  $l_0 > 0$ , pour tout  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  ( $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  si  $q = 1$ ), pour tout  $1 < s < \bar{s}(p, q, N)$  et pour tout  $\bar{\alpha}(s, p, q, N) < \alpha < 0$ ,

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_{l_0}))} + \| |Du_l - Dv| \|_{L^{s,\infty}(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha),$$

où  $\bar{s}(p, q, N)$  et  $\bar{\alpha}(s, p, q, N)$  sont explicitement calculés (voir Théorème 2.3.4). On montre également que  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ , pour les mêmes valeurs de  $p$  (voir Théorème 2.3.5).

Puis on s'affranchit des hypothèses reliant  $p, q, N$ , dans le cas variationnel comme dans le

cas renormalisé pour un opérateur strictement monotone, en supposant par ailleurs  $\mu$ ,  $u_0$  positifs. On montre alors, par des techniques reposant sur le principe du maximum que pour tout  $l_0$ , pour tout  $1 < p < +\infty$ ,  $u_l$  converge vers  $v$  dans  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_{l_0}))$  dans le cas variationnel (voir Théorème 2.4.1) et  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_{l_0}))$  dans le cas renormalisé (voir Théorème 2.4.2).

## Problèmes d'unicité pour les systèmes de Boussinesq

Dans la Partie II, on étudie des systèmes non linéaires d'évolution dérivant de modèle de mécanique des fluides et décrivant l'écoulement de fluide newtonien visqueux lorsque des phénomènes thermiques sont pris en compte. Ces systèmes, dits de Boussinesq s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (1a)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = |Du|^2 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (1c)$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1d)$$

$$u = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \quad (1e)$$

où  $T > 0$  et  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ . Les inconnues sont :

- la vitesse du fluide,  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^2$
- la pression  $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$
- la température  $\theta : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'équation (1a) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Tandis que l'équation (1c) est l'équation de conservation de l'énergie, où l'énergie est ici une fonction linéaire de la température. La viscosité du fluide est supposée constante égale à 1. Dans le cas de fluides compressibles, la densité n'est, a priori, pas constante. Cependant, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on peut se ramener à supposer qu'elle est constante sauf dans les termes de force de gravité. Cela justifie l'équation (1b) et la présence du terme  $F(\theta)$  dans l'équation (1a), où  $F(\theta)$  est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité qui dépendent de la température. Le second membre de (1c), représente l'énergie de dissipation. On impose pour  $u$  et  $\theta$  des conditions de types Dirichlet (1e) et les conditions initiales (1d). On pourra trouver la justification de ces hypothèses dans [4], [16] et [43]. Le système de Boussinesq (1) résulte donc d'un couplage fortement non linéaire des équations de Navier Stokes (équations (1a) et (1b)) et de l'équation de la chaleur (équation (1c)).

Des systèmes non linéaires similaires ont été étudiés dans [1], [2], [24], [27], [28], [34]. Dans [24] et [34], Climent, Fernández-Cara et Lions montrent des résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes où le second membre des équations de Navier-Stokes est supposé constant. Tandis que dans [27], Díaz et Galiano s'intéressent à des systèmes où l'énergie de dissipation est nulle. Enfin dans [1] et [2], Attaoui et Blanchard considèrent des systèmes

plus généraux que (1), où l'énergie interne est une fonction non linéaire de la température,  $b(\theta)$ , où  $b$  est croissante continue, ou discontinue dans le cas de système Boussinesq-Stefan, et où la viscosité est non constante dépendant non-linéairement de la température  $\theta$ . Les deux auteurs s'intéressent essentiellement à l'existence de solutions.

On s'intéresse ici essentiellement aux questions d'unicité des solutions du système (1). Celle-ci est délicate à prouver du fait du couplage très non linéaire entre les équations. Il y a d'ailleurs peu de résultats d'unicité tant dans le domaine de la mécanique des fluides que la mécanique des solides. On pourra consulter [1], [2], [24], [27] pour des résultats partiels. On se place dans le cas de la dimension 2, cas où l'on a existence et unicité de la solution faible,  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , des équations de Navier-Stokes. L'énergie de dissipation  $|Du|^2$  est alors un élément de  $L^1(Q_T)$ . On est donc amené à travailler dans le cadre des solutions renormalisées pour l'équation de la chaleur. Nous utiliserons la formulation des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques, introduite par Blanchard et Porretta dans [8], plus aisée à manipuler et qui permet de simplifier entre autres les preuves d'existence de solutions.

On suppose que  $u_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(Q_T)$  et  $\theta_0 \in L^1(Q_T)$ . On suppose que  $F$  est continue et vérifie une condition de croissance du type

$$|F(r)| \leq a + b|r|^\alpha, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes fixés et où  $\alpha$  est adapté selon les cas, mais qui impliquera au moins  $F(\theta) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . Pour étudier le système, on introduit alors la notion de solutions faibles-renormalisées (Définition 5.1.1). Même si des résultats d'existence de solutions faibles-renormalisées sont connus (voir [1], [2]), on redonnera selon les cas une démonstration, reposant sur le théorème du point fixe de Schauder, et utilisant la formulation renormalisée de Blanchard et Porretta et qui simplifient les preuves existantes.

Les outils essentiels pour parvenir à montrer l'unicité sont :

(i) savoir estimer la norme de la solution des équations de Navier-Stokes et de la chaleur en fonction de la norme des données, c'est à dire des estimations du type

$$\|u\| \leq C(\|g\| + \|u_0\|) \quad \|\theta\| \leq C(\|f\| + \|\theta_0\|) \quad (3)$$

où  $f$  et  $g$  sont des seconds membres fixes respectivement de l'équation de la chaleur et des équations de Navier-Stokes

(ii) savoir estimer la norme de la différence de deux solutions en fonction de la norme de la différence des données, c'est-à-dire des estimations du type

$$\|u_1 - u_2\| \leq C(\|g_1 - g_2\| + \|u_{0,1} - u_{0,2}\|) \quad (4)$$

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq C(\|f_1 - f_2\| + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|), \quad (5)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme associée à l'espace de régularité des fonctions en jeu. Cependant, une des difficultés essentielles réside dans le fait que  $u \cdot D\theta \notin L^1(Q_T)$ . On est donc amené à faire

des hypothèses plus fortes sur les données pour améliorer la régularité de  $u \cdot D\theta$ . Pour cela on adopte deux stratégies : améliorer  $u$  ou améliorer  $D\theta$ . On sera également amené dans un premier temps, pour simplifier, à remplacer l'énergie de dissipation par une source fixe  $f$ .

La deuxième partie de cette thèse est donc scindée en trois chapitres. Dans le Chapitre 3, on réintroduit le problème.

Pour bien comprendre le système, il faut bien comprendre chacune des équations qui le régit, c'est pourquoi dans le Chapitre 4, nous étudierons de manière distincte, les équations de Navier-Stokes puis l'équation de la chaleur. Dans une première partie (Section 4.1), on rappelle les résultats classiques d'existence et d'unicité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, puis on établit des résultats de régularité pour des données plus régulières en établissant les propriétés (i) et (ii) ci-dessus en s'appuyant sur des résultats de régularités de Gerhardt (voir [31]). On rappelle ou on établit ainsi les résultats de régularité suivants avec des estimations du type (3)

- si  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{L}_\sigma^2(Q_T)$  alors  $u \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathbf{L}^r(Q_T)$  pour tout  $1 \leq r < +\infty$  (Théorème 4.1.6)

Puis on établit les estimations du type (4), dans ces espaces de régularité (voir Théorème 4.1.11.)

Dans une seconde partie (Section 4.2), on montre tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution renormalisée de l'équation de la chaleur avec terme de convection où  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta(t = 0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution d'un tel problème sont déjà connues (voir [1], [2]), mais l'utilisation de la formulation des solutions renormalisées introduite par Blanchard et Porretta simplifie substantiellement la preuve.

On établit ensuite des résultats de régularité des solutions renormalisées en dimension  $N$  quelconque, en établissant les estimations du type (3) et (5) dans les cas suivants :

- $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$ ,  $\theta_0 \in L^m(\Omega)$ , où  $1 < m < 2$  (Théorème 4.2.11)
- $f \in L^m(Q_T)$ ,  $\theta_0 \in L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)$ , où  $1 < m < \frac{2N+4}{N+4}$  (Théorème 4.2.13),

dans des espaces découplés en temps et en espace du type  $L^\infty(0, T; L^\sigma(Q_T))$ ,  $L^r(0, T; L^q(Q_T))$ ,  $L^\kappa(0, T; L^\mu(Q_T))$ .

Puis dans le Chapitre 5, on applique les résultats du Chapitre 4 pour montrer l'unicité de la solution du système. On suppose dans un premier temps que l'énergie de dissipation est remplacée par une source fixe  $f$ .

Dans la Section 5.2, on considère  $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$  et  $\theta_0 \in L^m(\Omega)$ . On montre, par le théorème du point fixe de Schauder, l'existence de la solution faible-renormalisée du système (Théorème 5.2.1), en imposant une condition de croissance sur  $F$  de la forme (2) avec  $0 \leq \alpha < \frac{3m}{2}$ . Pour  $0 \leq \alpha \leq m$ , alors comme on sait que  $\theta \in L^{2m}(Q_T)$ , on a  $F(\theta) \in$

$L^2(Q_T)$ . En revanche pour  $m < \alpha < \frac{3m}{2}$ , on n'a plus  $F(\theta) \in L^2(Q_T)$ , on a alors recours aux estimations découplées en temps et en espace sur  $\theta$  pour assurer  $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Et on a dans ce cas  $u \cdot D\theta \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$ . On montre ensuite l'unicité pour des données suffisamment petites (voir Théorème 5.2.2), en supposant que  $F$  satisfait une condition de Lipschitz du type

$$|F(r) - F(s)| \leq L|r - s|(1 + |r|^\beta + |s|^\beta), \quad \forall r, s \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Dans la Section 5.3, on considère des données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes, à savoir  $u_0 \in \mathbf{W}^{2-2/s, s}(\Omega)$ ,  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $F$  de croissance plus faible,  $0 < \alpha < 1$ , pour avoir  $F(\theta) \in L^s(Q_T)$  ( $s > 2$ ). On montre tout d'abord l'existence de la solution faible renormalisée (voir Théorème 5.3.1), puis en imposant de plus une condition de Lipschitz du type (6) on montre l'unicité pour des données suffisamment petites (voir Théorème 5.3.2). Enfin dans la Section 5.4, on revient au système originel (1) avec énergie de dissipation. L'ajout d'une non linéarité rend la tâche plus délicate. On prend  $\theta_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_{0, \sigma}^1(\Omega)$ , alors dans ce  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$ , on est donc amené à considérer des solutions faibles pour l'équation de la chaleur et on montre l'existence de la solution faible (Théorème 5.4.1) pour

- $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} \leq \alpha < 2$ , pour des données suffisamment petites.

Puis on montre l'unicité pour des solutions suffisamment petites en imposant de plus une condition de Lipschitz du type (6) (Théorèmes 5.4.2).





## Première partie

# Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres



# Chapitre 1

## Problèmes elliptiques

### 1.1 Introduction

Dans toute cette partie, on pose  $\Omega_l = ]-l, l[ \times \omega$ , où  $\omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^{N-q}$  avec frontière  $\partial\omega$  lipschitzienne,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$ . On étudie le comportement asymptotique, quand  $l \rightarrow +\infty$ , du problème  $N$ -dimensionnel suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x, Du_l)] &= \mu & \text{dans } \Omega_l \\ u_l &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_l \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $u \mapsto -\operatorname{div}[a(x, Du)]$  est un opérateur monotone défini sur  $W_0^{1,p}(\Omega_l)$  à valeurs dans  $W^{-1,p'}(\Omega_l)$ . Ce problème a d'abord été étudié par Chipot, Rougirel et Xie dans [18], [19], [21], [22], [23], [44] dans le cas variationnel c'est à dire pour  $\mu \in W^{-1,p'}(\Omega_l)$ . En effet, les trois auteurs ont montré que sous certaines conditions, l'unique solution faible  $u_l \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$  du problème (1.1) converge en un sens à préciser, typiquement dans  $W^{1,p}(\Omega_{l_0})$  (où  $l_0$  est fixé), vers  $v$  l'unique solution faible du problème (1.8) (voir Théorème 1.3.1 dans le cas d'un opérateur  $a$  fortement monotone et Théorème 1.4.1 dans le cas d'un opérateur  $a$  strictement monotone).

Ici nous supposons que  $\mu \in L^1(\Omega_l) + W^{-1,p'}(\Omega_l)$ . Sous cette hypothèse d'une donnée peu régulière, le cas variationnel ne s'applique plus. On utilise alors la notion de solutions renormalisées introduite par DiPerna et Lions dans l'étude des équations de Boltzmann (voir [29], [30]) puis adaptée par Lions et Murat au cas des équations elliptiques (voir [35]). Comme les espaces dans lesquels la convergence de  $u_l$  vers  $v$  a lieu sont fortement reliés à la régularité de  $u_l$  et  $v$ , les résultats de convergence de Chipot, Rougirel et Xie ne s'appliquent plus. On montrera, dans le cas d'un opérateur  $a$  fortement monotone, sous des hypothèses reliant  $p, q$  et  $N$ , et sous certaines conditions sur  $a$  et  $\mu$ , la convergence de  $Du_l$  dans des espaces de Lorentz, on évaluera la vitesse de convergence (voir Théorème 1.3.8), puis on montrera la convergence des tronquées des gradients  $DT_k(u_l)$  dans  $W^{1,p}(\Omega_{l_0})$  (voir Théorème 1.3.9). Dans le cas d'un opérateur strictement monotone, et sous la condition  $\mu \geq 0$ , on s'affranchit des conditions sur  $p, q, N$  et on établit tout d'abord des résultats de convergence dans le cas variationnel (voir Théorème 1.4.1), résultats obtenus parallèlement

par Chipot et Xie dans [22] et [44]. Puis on généralise ces résultats au cas des solutions renormalisées (voir Théorème 1.4.3).

On note  $\Gamma_l$  le sous-ensemble de  $\partial\Omega_l$  défini par  $\Gamma_l = [-l, l]^q \times \partial\omega$ . Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_N) \in \Omega_l$  on notera  $x = (x_1, x_2)$  où  $x_1 \in ]-l, l[^q$  et  $x_2 \in \omega$ , et  $D_{x_1} = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_q})$ ,  $D_{x_2} = (\partial_{x_{q+1}}, \dots, \partial_{x_N})$ .

On note  $W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$  l'espace des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega_l)$  qui ont une trace nulle sur  $\Gamma_l$ . Puisque  $\Omega_l$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^N$  avec frontière lipschitzienne et puisque  $\text{mes}(\Gamma_l) > 0$ , par l'inégalité de Poincaré, on peut munir l'espace  $W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$  de la norme  $\|v\|_{W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)} = \|Dv\|_{L^p(\Omega_l)}$  (voir [45]).

On suppose que  $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  est une fonction de Carathéodory (c'est-à-dire  $a(x, \xi)$  est mesurable par rapport à  $x \in \mathbb{R}^N$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et continue par rapport à  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ). De plus, l'opérateur  $a$  est elliptique strictement monotone, c'est-à-dire

$$a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p, \quad (1.2)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , où  $\alpha$  est une constante,  $\alpha > 0$  et

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0, \quad (1.3)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \xi'$ . On suppose de plus que l'opérateur  $a$  satisfait les conditions structurelles

$$a(x, \xi) = a^1(x, \xi) + a^2(x_2, \xi) = \begin{pmatrix} a_1^1(x, \xi) \\ a_2^1(x, \xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^2(x_2, \xi) \\ a_2^2(x_2, \xi) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

où  $a^1, a^2$  sont des fonctions de Carathéodory satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$a^1(x, \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix}) = 0 \quad (1.5)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{N-q}$  ;

$$|a^1(x, \xi)| \leq \gamma_1 [b_1(x) + |\xi|^{p-1}], \quad |a^2(x_2, \xi)| \leq \gamma_2 [b_1(x_2) + |\xi|^{p-1}], \quad (1.6)$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , pour presque tout  $x \in K \times \omega$  pour la première inégalité et pour presque tout  $x_2 \in \omega$  pour la seconde inégalité où  $K$  est un sous-ensemble compact arbitraire de  $\mathbb{R}^q$  et  $b_1, b_2$  sont des fonctions positives respectivement dans  $L^{p'}(K \times \omega)$  et  $L^{p'}(\omega)$  pour tout  $K$  compact de  $\mathbb{R}^q$ , et  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des constantes positives avec  $\gamma_1$  dépendant de  $K$ .

On suppose que la donnée  $\mu = f - \text{div}_{x_2} g$  est telle que

$$f = f(x_2) \in L^1(\omega), \quad g = g(x_2) \in \left(L^{p'}(\omega)\right)^{N-q} \quad (1.7)$$

de telle sorte que  $\mu \in L^1(\omega) + W^{-1,p'}(\omega)$ . Ainsi  $\mu$  peut-être prolongé par  $\tilde{\mu}$  sur  $L^1(\Omega_l) + W^{-1,p'}(\Omega_l)$  en posant pour tout  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega_l) \cap L^\infty(\Omega_l)$

$$\tilde{\mu}(\phi) = \int_{\Omega_l} f \phi \, dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} \phi \, dx.$$

Puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté on notera  $\mu$  et son prolongement de la même façon.

Sous toutes ces hypothèses, on va montrer que,  $u_l$  la solution du problème (1.1) converge, en un sens à préciser, vers  $v$  la solution du problème  $N - q$ -dimensionnel

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a_2^2(x_2, Dv)] &= \mu & \text{dans } \omega \\ v &= 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (1.8)$$

**Remarque 1.1.1** D'un point de vue numérique, ce résultat de convergence est intéressant car dans le cas d'un cylindre très grand dans la direction  $x_1$ , il est raisonnable d'approximer  $u_l$  par  $v$ , ce qui permet de réduire la dimension du problème dont on veut calculer la solution.

**Remarque 1.1.2** On rappelle que si  $p > N - q$ , les injections de Sobolev donnent  $L^1(\omega) \subset W^{-1,p'}(\omega)$ . Ainsi, si  $\mu \in L^1(\omega)$  alors l'extension  $\mu \in W^{-1,p'}(\Omega_l)$  et donc dans ce cas le cas variationnel et les résultats de Chipot s'appliquent.

**Remarque 1.1.3** La condition structurelle (1.4) et les hypothèses (1.2), (1.3), (1.5) nous permettent de définir le problème (1.8) à partir du problème (1.1), dans le sens où l'opérateur  $a_2^2$  vérifie le même type d'hypothèses que l'opérateur  $a$ . En effet, on identifie  $a_2^2(x_2, \binom{0}{\xi_2})$  et  $a_2^2(x_2, \xi_2)$  et des hypothèses (1.2) et (1.5), on obtient

$$a_2^2(x_2, \xi_2) \cdot \xi_2 \geq \alpha |\xi_2|^p, \quad (1.9)$$

pour presque tout  $x_2 \in \omega$  et pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{N-q}$ ; et la stricte monotonie de  $a$  implique la stricte monotonie de  $a_2^2$ , c'est-à-dire

$$(a_2^2(x_2, \xi_2) - a_2^2(x_2, \xi_2')) \cdot (\xi_2 - \xi_2') > 0, \quad (1.10)$$

pour presque tout  $x_2 \in \omega$  et pour tout  $\xi_2, \xi_2' \in \mathbb{R}^{N-q}$ ,  $\xi_2 \neq \xi_2'$ .

**Remarque 1.1.4** Dans le cas linéaire,  $a(x, Du) = A(x)Du$ , les hypothèses vérifiées par  $A$  de Chipot and Rougirel dans [18], [19], [21] c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}(x_1, x_2) & A_{12}(x_2) \\ A_{21}(x_1, x_2) & A_{22}(x_2) \end{pmatrix}, \quad A \in (L^\infty(\mathbb{R}^q \times \omega))^{N^2}$$

$$A_{11} \in M_{q,q}, \quad A_{12} \in M_{q,N-q}, \quad A_{21} \in M_{N-q,q}, \quad A_{22} \in M_{N-q,N-q},$$

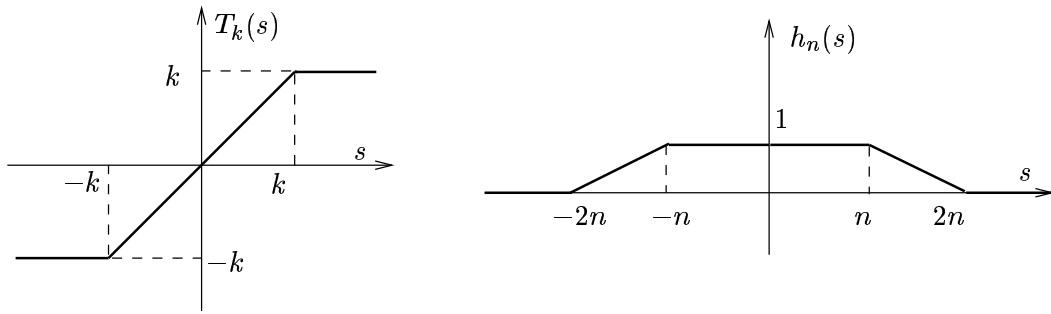
impliquent que  $a$  satisfait les conditions (1.2)–(1.6).

Dans le cas non linéaire, le  $p$ -Laplacien,  $-\operatorname{div}(a(x, Du)) = -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = -\Delta_p u$  satisfait les conditions (1.2)–(1.6).

## 1.2 Définition des solutions renormalisées

Le cadre des solutions renormalisées est un cadre adapté à l'étude des équations (1.1) et (1.8) pour des données peu régulières, ici  $\mu \in L^1 + W^{-1,p'}$ , car il permet de montrer l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions. Cette notion de solutions a d'abord été introduite par DiPerna et Lions, dans [29] et [30] pour l'étude des équations de Boltzmann. Il a ensuite été adapté à l'étude de certains problèmes elliptiques non linéaires, d'abord par Boccardo, Diaz, Giachetti et Murat dans [11] puis par Lions et Murat dans [35] dans le cas de second membre dans  $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$  (voir également [37] et [38]).

On introduit pour  $k > 0, n > 0$  les fonctions suivantes,  $T_k(s) = \max(-k, \min(k, s))$  et  $h_n(s) = 1 - \frac{|T_{2n}(s) - T_n(s)|}{n}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  (voir ci-dessous).



On rappelle que, selon [3] (Lemme 2.1), on peut définir le gradient de fonctions dont les troncatures sont dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition 1.2.1** Soit  $u$  une fonction mesurable définie sur  $\Omega$  finie presque partout et satisfaisant  $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$ . Alors il existe une unique fonction mesurable  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  telle que

$$DT_k(u) = v \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}} \quad p.p. \text{ dans } \Omega, \forall k > 0.$$

On désigne par  $Du$  le gradient de la fonction  $u$  et on pose  $Du = v$ .

**Définition 1.2.2** On dit que  $u_l$  finie presque partout sur  $\Omega_l$  est solution renormalisée du problème (1.1) si

$$T_k(u_l) \in W_0^{1,p}(\Omega_l), \quad \forall k > 0; \quad (1.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(x, Du_l) \cdot Du_l \, dx = 0; \quad (1.12)$$

et si pour tout  $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  à support compact,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[h(u_l)a(x, Du_l)] + h'(u_l)a(x, Du_l) \cdot Du_l &= fh(u_l) \\ -\operatorname{div}[gh(u_l)] + g \cdot Du_l h'(u_l) &\text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_l). \end{aligned} \quad (1.13)$$

De manière similaire on définit la solution renormalisée du problème (1.8).

**Définition 1.2.3** On dit que  $v$  finie presque partout sur  $\omega$  est solution renormalisée du problème (1.8) si

$$T_k(v) \in W_0^{1,p}(\omega), \quad \forall k > 0; \quad (1.11')$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v| \leq 2n\}} a_2^2(x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \, dx_2 = 0; \quad (1.12')$$

et si pour tout  $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  à support compact,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{x_2} [h(v) a_2^2(x_2, D_{x_2} v)] + a_2^2(x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v &= fh(v) \\ -\operatorname{div}_{x_2} [gh(v)] + g \cdot D_{x_2} v h'(v) &\text{ dans } \mathcal{D}'(\omega). \end{aligned} \quad (1.13')$$

D'après [14], [25], [37], on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 1.2.4** Sous les hypothèses (1.2)–(1.7), il existe une unique solution renormalisée  $u_l$  (resp.  $v$ ) du problème (1.1) (resp. (1.8)).

**Remarque 1.2.5** En prenant  $h = h_n$  et  $\phi = T_k(u_l)$  (resp.  $\phi = T_k(v)$ ) dans (1.13) (resp. (1.13')), en utilisant (1.2) et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient les estimations suivantes satisfaites par  $u_l$  et  $v$ , pour tout  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} |DT_k(u_l)|^p \, dx &\leq C \left( k \|f\|_{L^1(\Omega_l)} + \|g\|_{(L^{p'}(\Omega_l))^{N-q}}^{p'} \right) \\ &= C l^q \left( \|f\|_{L^1(\omega)} k + \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}}^{p'} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\int_{\omega} |DT_k(v)|^p \, dx_2 \leq C \left( \|f\|_{L^1(\omega)} k + \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}}^{p'} \right), \quad (1.15)$$

où  $C$  sont des constantes dépendant uniquement de  $\alpha$  et  $p$ .

### 1.3 Le cas fortement monotone

Dans cette partie, avec des hypothèses supplémentaires sur  $a$  et des conditions reliant  $p, q$  and  $N$ , on montre que,  $u_l$  et ses troncatures convergent vers  $v$ , dans un espace de Sobolev convenable. De plus, on évalue les vitesses de convergence. On suppose que  $p \geq 2$  et que  $a$  satisfait, en plus des conditions (1.2)–(1.6), l'hypothèse de forte monotonie suivante

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') \geq c_p |\xi - \xi'|^p, \quad (1.16)$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , et pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \xi'$ , où  $c_p$  est une constante positive. On suppose de plus que l'opérateur  $a$  satisfait la condition de Lipschitz suivante

$$|a_1^1(x, \xi)| + |a_1^2(x, \xi) - a_1^2(x, \xi')| \leq L |\xi - \xi'| (1 + |\xi|^{p-2} + |\xi'|^{p-2}) \quad (1.17)$$



pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ , tel que  $\xi' = \binom{0}{\xi_2}$ , où  $L$  est une constante positive.

On rappelle tout d'abord les résultats obtenus dans le cas variationnel (i.e.  $f = 0$ ) (voir [18], [19], [21], [23]). Sous les hypothèses (1.2)–(1.7), il existe une unique solution faible  $u_l \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$  (resp.  $v \in W_0^{1,p}(\omega)$ ) du problème (1.1), (resp. (1.8)), on a alors le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1** *On suppose les conditions (1.2)–(1.7), (1.16) et (1.17) vérifiées. Soit  $l_0$  un réel positif. Si  $p < \frac{2q}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ), alors*

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$$

avec les vitesses de convergence

$$\|Du_l - Dv\|_{L^p(\Omega_{l_0})}^p = O(l^\alpha), \quad \forall q - \frac{p}{p-2} < \alpha < 0 \text{ si } p > 2 \quad (1.18)$$

$$\|Du_l - Dv\|_{L^2(\Omega_{l_0})}^2 = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0 \quad \text{si } p = 2$$

**Remarque 1.3.2** Dans [23], le résultat pour  $p > 2$  ci-dessus est prouvée seulement dans le cas  $N = 2$ , mais les mêmes techniques s'appliquent pour  $N \geq 2$ .

**Remarque 1.3.3** Chipot et Xie ont amélioré dans [22], [44] le théorème ci-dessus dans le cas où l'opérateur est le  $p$ -Laplacien. En effet dans ce cas particulier, on utilise les propriétés du  $p$ -Laplacien, en particulier les inégalités du Lemme 1.2 dans [44], qui sont le point-clé de l'amélioration du Théorème 1.3.1. Les deux auteurs montrent alors que si  $p < \frac{2q}{q-2}$  (avec la convention  $\frac{2q}{q-2} = +\infty$  pour  $q = 1, 2$ ), alors

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$$

avec les vitesses de convergence

$$\|Du_l - Dv\|_{L^p(\Omega_{l_0})}^p = O(l^\alpha), \quad \forall q - \frac{2p}{p-2} < \alpha < 0 \text{ si } p > 2$$

$$\|Du_l - Dv\|_{L^2(\Omega_{l_0})}^2 = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0 \quad \text{si } p = 2.$$

D'après la remarque 1.1.2, dans le cas  $p > N - q$ , les résultats obtenus dans le cas variationnel s'appliquent. Ainsi, dans la suite, on peut se restreindre au cas  $p \leq N - q$ . Puisque que l'on considère des données  $L^1 + W^{-1,p'}$ , d'après la régularité de  $u_l$ , on ne peut s'attendre à avoir la convergence de  $u_l$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . En fait on montre que  $u_l$ ,  $v$  et leurs gradients appartiennent à des espaces de Lorentz convenables et on montre la convergence de  $u_l$  et  $v$  dans ces espaces de Lorentz. Après avoir rappelé dans une première partie quelques propriétés sur les espaces de Lorentz, on montre, dans la seconde partie, à partir des inégalités (1.14), (1.15), les estimations vérifiées par  $u_l$ ,  $v$  et leurs gradients dans les espaces de Lorentz. Enfin dans la troisième partie on montre la convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans un sens qui sera précisé.

### 1.3.1 Les espaces de Lorentz

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Pour  $1 < q < \infty$  l'espace de Lorentz  $L^{q,1}(\Omega)$  (voir [33],[36]) est l'espace des fonctions mesurables vérifiant

$$\|f\|_{L^{q,1}(\Omega)} = \int_0^{|\Omega|} [f^*(t)t^{\frac{1}{q}}] \frac{dt}{t} < +\infty, \quad (1.19)$$

muni de la norme défini par (1.19) et où  $f^*$  désigne le réarrangement décroissant de  $f$ , c'est-à-dire

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0 : \text{mes}\{x \in \Omega : |f(x)| > s\} < t\}, \quad t \in [0, |\Omega|].$$

Pour  $1 < r < \infty$  l'espace de Lorentz  $L^{r,\infty}(\Omega)$  (appelé aussi espace de Marcinkiewicz) est l'espace des fonctions mesurables vérifiant

$$\|f\|_{L^{r,\infty}(\Omega)} = \sup_{t>0} \{t[\text{mes}\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}]^{\frac{1}{r}}\} < +\infty, \quad (1.20)$$

muni de la norme définie par (1.20). Pour tout  $1 < s < r < \infty$ , les espaces de Lorentz vérifient les inclusions suivantes

$$L^{r,1}(\Omega) \subset L^{r,r}(\Omega) = L^r(\Omega) \subset L^{r,\infty}(\Omega) \subset L^{s,1}(\Omega).$$

L'espace  $L^{r,\infty}(\Omega)$  est l'espace dual de  $L^{r',1}(\Omega)$  avec  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ , et on a l'inégalité de Hölder généralisée

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^{r,\infty}(\Omega)} \|g\|_{L^{r',1}(\Omega)}, \quad \forall f \in L^{r,\infty}(\Omega), \forall g \in L^{r',1}(\Omega). \quad (1.21)$$

Plus généralement, si  $1 < p, q, r < \infty$  vérifient  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ , on a

$$\|fg\|_{L^{p,1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{q,\infty}(\Omega)} \|g\|_{L^{r,1}(\Omega)}, \quad \forall f \in L^{q,\infty}(\Omega), \forall g \in L^{r,1}(\Omega). \quad (1.22)$$

### 1.3.2 Estimations sur les solutions renormalisées

Nous introduisons une forme généralisée d'un résultat établi dans [3], [5].

**Lemme 1.3.4** *On suppose que  $1 < p \leq N$ . Soit  $w$  une fonction mesurable satisfaisant  $T_k(w) \in W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$ , pour tout  $k > 0$ , et telle que*

$$\int_{\Omega_l} |DT_k(w)|^p dx \leq Mk + L, \quad \forall k > 0,$$

où  $M$  et  $L$  sont des constantes données. Alors

$$\|w\|_{L^{s/p,\infty}(\Omega_l)}^{p-1} \leq C(M + |\Omega_l|^{1/s} L^{1/p'}),$$

avec  $s = p^*$  (où  $p^*$  est le conjugué de  $p$  défini par  $p^* = Np/(N - p)$ ) si  $p < N$ , avec  $s \in ]p, +\infty[$  si  $p = N$ , où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $p, N, \omega$  et indépendante de  $l$ ,

$$\| |Dw|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq C(M + |\Omega_l|^{1/r-1/p'} L^{1/p'}),$$

pour tout  $r \in ]1, N'[$  if  $p < N$  (où  $N' = N/(N - 1)$ ), pour tout  $r \in ]1, N'[$  si  $p = N$ , où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $p, N, \omega$  et indépendante de  $l$ .

**Démonstration** — On suit la preuve de [5] (Lemme A.1). La différence essentielle est que l'on prend  $w \in W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$  au lieu de  $w \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$ , donc les constantes de Sobolev et de Poincaré dépendent, a priori, de  $\Omega_l$ , mais, grâce à la géométrie de  $\Omega_l = ]-l, l[ \times \omega$ , ces constantes sont indépendantes de  $l$ . Pour tout  $k, r > 0$ , on a

$$k^r \text{mes}\{x \in \Omega_l : |w| > k\} \leq \int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx. \quad (1.23)$$

Si  $p < N$ , on prend  $r \in [p, p^*]$ , donc par interpolation

$$\int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx \leq \|T_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^{r\theta} \|T_k(w)\|_{L^{p^*}(\Omega_l)}^{r(1-\theta)}, \quad (1.24)$$

où  $\theta$  est tel que  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$ . Par l'inégalité de Poincaré dans la direction  $x_2$ , on a

$$\|T_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)} \leq C(\omega) \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}, \quad (1.25)$$

où  $C(\omega)$  est une constante positive dépendant uniquement de  $\omega$ , donc indépendante de  $l$ . Par l'inégalité de Sobolev, on a

$$\|T_k(w)\|_{L^{p^*}(\Omega_l)} \leq C(\omega, p, N) \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}, \quad (1.26)$$

où  $C(\omega, p, N)$  est une constante dépendant uniquement de  $\omega, p, N$ , et indépendante de  $l$  grâce à la géométrie de  $\Omega_l$ . De (1.24), (1.25) et (1.26) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx &\leq C(p, N, \omega) \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^r \\ &\leq C(p, N, \omega) (Mk + L)^{r/p}. \end{aligned}$$

Dans le cas  $p = N$ , on prend  $r \in [p, +\infty[$ , l'inégalité de Sobolev donne

$$\|T_k(w)\|_{L^r(\Omega_l)} \leq C(r, N, \omega) \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)},$$

où  $C(r, N, \omega)$  est une constante positive dépendant uniquement de  $r, N, \omega$  et indépendante de  $l$ . Il découle alors

$$\int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx \leq C(r, N, \omega) (Mk + L)^{r/p}.$$

Par conséquent, d'après (1.23), il vient

$$k^r \text{mes}\{x \in \Omega_l : |w| > k\} \leq C(r, N, \omega) (Mk + L)^{r/p}.$$

La suite de la preuve est identique à la preuve du Lemme A.1 de [5].

□

**Remarque 1.3.5** La nouveauté dans le Lemme 1.3.4 réside dans le fait que l'on a montré que la constante de l'estimation est indépendante de  $l$ , grâce à la géométrie du domaine. C'est un fait essentiel, car, rappelons-le, le paramètre  $l$  est destiné à tendre vers  $+\infty$ .

On applique alors ce lemme aux estimations de la remarque 1.2.5 pour obtenir la proposition suivante.

**Proposition 1.3.6** *Les fonctions  $u_l$  et  $v$  satisfont les estimation suivantes :*

$$\| |Du_l|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq C \left( l^q \|f\|_{L^1(\omega)} + l^{q/r} \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}} \right);$$

$$\| |Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq C \left( l^q \|f\|_{L^1(\omega)} + l^{q/r} \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}} \right);$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ .

**Démonstration** — Comme  $T_k(u_l)$  et  $T_k(v)$  appartiennent à  $W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$ , d'après les estimations (1.14) et (1.15) on peut prendre  $w = u_l$  ou  $w = v$  dans le Lemme 1.3.4, on obtient

$$\| |Du_l|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq C \left( l^q \|f\|_{L^1(\omega)} + l^{q/p'} \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}} |\Omega_l|^{1/r-1/p'} \right)$$

et le fait que  $|\Omega_l| = l^q |\omega|$  donne le résultat.

□

**Remarque 1.3.7** Comme  $r > 1$ , on a d'une part  $\frac{q}{r} < q$ . D'autre part  $l$  est destiné à tendre vers  $+\infty$ , on peut donc supposer que  $l \geq 1$ , ainsi  $l^{q/r} < l^q$  et les estimations ci-dessus donnent

$$\| |Du_l|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq Cl^q \left( \|f\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}} \right), \quad (1.27)$$

$$\| |Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)} \leq Cl^q \left( \|f\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{(L^{p'}(\omega))^{N-q}} \right). \quad (1.28)$$

### 1.3.3 Comportement asymptotique de $u_l$

Au vu de la régularité des solutions renormalisées (voir (1.11), (1.11') et la remarque 1.3.7), on montre dans le Théorème 1.3.8 ci-dessous que  $Du_l$  converge vers  $Dv$  dans les espaces de Lorentz auxquels ils appartiennent, et dans le Théorème 1.3.9 que  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ , quand  $l$  tend vers  $+\infty$ .

**Théorème 1.3.8** *On suppose que les hypothèses (1.2)–(1.7), (1.16), (1.17) sont vérifiées. Soit  $l_0$  un réel positif. Si  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ), alors on a*

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad (1.29)$$

pour tout  $1 < r < \bar{r}(p, q, N)$  et pour tout  $\bar{\alpha}(p, q, N, r) < \alpha < 0$ , où

$$\bar{r}(p, q, N) = \min \left( \frac{N}{N-1}, \frac{1}{2 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p-1}} \right), \quad \text{si } p \leq N - q$$

et

$$\bar{\alpha}(p, q, N, r) = \begin{cases} q - \frac{p-1}{p-2} + q \frac{p-1}{p-2} (1 - \frac{1}{r}) & \text{si } p > 2, \\ -\infty & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

**Théorème 1.3.9** *On suppose que les hypothèses (1.2)–(1.7), (1.16), (1.17) sont vérifiées. Soit  $l_0$  un réel positif. Si  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ), alors on a*

$$T_k(u_l) \rightarrow T_k(v) \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}), \quad \forall k \geq 0.$$

**Remarque 1.3.10** Dans le cas  $p > 2$ , la condition  $r < \bar{r}(p, q, N)$  est équivalente à  $q - \frac{p-1}{p-2} + q \frac{p-1}{p-2} (1 - \frac{1}{r}) < 0$  et donc, en particulier,  $\bar{\alpha}(p, q, N, r) < 0$  et la condition  $\bar{\alpha}(p, q, N, r) < \alpha < 0$  est cohérente.

**Remarque 1.3.11** Dans le cas  $p > 2$ , la vitesse de convergence dans (1.29) et l'espace de Lorentz dans lequel la convergence a lieu dépendent de  $r$ . Plus précisément, plus l'espace de Lorentz est petit, plus la vitesse de convergence est faible.

**Remarque 1.3.12** Grâce à l'inégalité de Hölder généralisée (1.21), le Théorème 1.3.8 implique la convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans des espaces de Sobolev. En effet, pour tout  $l_0 > 0$ , on a

$$\| Du_l - Dv \|_{L^s(\Omega_{l_0})} = O(l^{\frac{\alpha}{p-1}})$$

pour tout  $s < (p-1) \frac{N}{N-1}$ , avec les mêmes conditions sur  $p, \alpha$ . Ainsi par l'inégalité de Poincaré, on obtient la convergence dans les espaces de Sobolev  $W^{1,s}(\Omega)$ . En particulier, on en déduit un résultat qui sera utile dans la preuve du Théorème 1.3.9,

$$\| Du_l - Dv \|_{L^{p-1}(\Omega_{l_0})} \rightarrow 0$$

quand  $l \rightarrow +\infty$ , pour tout  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$ .

**Remarque 1.3.13** On peut donner des informations plus précises sur  $\bar{r}(p, q, N)$ . Supposons  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ). Si  $p = 2$ , alors  $\bar{r}(2, q, N) = \frac{N}{N-1}$ . Si  $2 < p \leq N - q$ , alors pour  $q = 1$ ,

$$\bar{r}(p, 1, N) = \frac{N}{N-1}$$

et pour tout  $q \geq 2$ ,

$$\bar{r}(p, q, N) = \frac{N}{N-1}, \quad \text{si } 2 < p \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{N}} + 1;$$

$$\bar{r}(p, q, N) = \frac{1}{2 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p-1}}, \quad \text{si } \frac{1}{1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{N}} + 1 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}.$$

Et dans le cas  $2 \leq p < \frac{1}{1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{N}} + 1$ ,  $r$  peut atteindre la valeur  $\bar{r}(p, q, N)$ .

**Démonstration du Théorème 1.3.8**— La preuve s'effectue en deux étapes. Dans l'étape 1, en adaptant les techniques développées par Chipot et Rougirel (voir [18], [19], [21]) au cadre des solutions renormalisées, on obtient une estimation sur  $DT_k(u_l - v)$  dans  $\Omega_{l_1}$ , où  $l_1 > 0$  (voir l'inégalité (1.32) ci-dessous). En utilisant (1.32), l'étape 2 est consacrée à la preuve d'une estimation sur  $D(u_l - v)$  dans un espace de Lorentz approprié.

**Étape 1.** Dans cette étape, on introduit une fonction régulière  $\rho \in C^1(\mathbb{R}^q)$  telle que

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho = 1 \quad \text{dans } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^q, \quad \rho = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^q \setminus [-1, 1]^q \quad (1.30)$$

$$|D_{x_1} \rho| \leq \Lambda \quad (1.31)$$

où  $\Lambda$  est une constante positive,  $\Lambda \geq 2$ . On prouve alors l'estimation suivante

$$\int_{\Omega_{l_1/2}} |DT_k(u_l - v)|^p dx \leq C \frac{k}{l_1} \int_{\Omega_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx \quad (1.32)$$

pour tout  $0 < l_1 < l$  et où  $C$  est une constante positive dépendant uniquement de  $c_p$ ,  $L$ ,  $\Lambda$ , où  $c_p$  et  $L$  sont définis dans (1.16) et (1.17).

Soit  $0 < l_1 < l$ . On utilise la fonction test  $T_k(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(v))h_n(v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$  dans (1.13) avec  $h = h_n$ . Comme  $\text{supp}(h_n) = [-2n, 2n]$ , on a

$$h_n(u_l)h_n(v)T_k(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(v)) = h_n(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v),$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot DT_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot Du_l h'_n(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot Dv h'_n(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ & \quad + \frac{1}{l_1} \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right)h_n(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v) dx \\ & = \int_{\Omega_l} fT_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}T_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ & + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}v h'_n(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}u_l h'_n(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v)\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \end{aligned} \quad (1.33)$$

que nous écrivons de manière synthétique

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_5.$$

Maintenant, par un résultat de Chipot dans [18] (Proposition 3.1), si  $\phi \in W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$ , alors  $\phi(x_1, \cdot) \in W_0^{1,p}(\omega)$  pour presque tout  $x_1 \in (-l, l)^q$ . Par conséquent, pour presque tout  $x_1 \in (-l, l)^q$ , on peut utiliser la fonction test  $T_k(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(v))(x_1, \cdot)h_n(u_l(x_1, \cdot)) \in W_0^{1,p}(\omega)$  dans (1.13') avec  $h = h_n$ , on obtient (en utilisant de nouveau le fait que  $T_{2n}$  disparaît),

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}T_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v) dx \\ & \quad + \int_{\omega} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}u_l h_n'(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v) dx \\ & \quad + \int_{\omega} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}v h_n'(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v) dx \\ & = \int_{\omega} fT_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v) dx + \int_{\omega} g \cdot D_{x_2}T_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v) dx \\ & \quad + \int_{\omega} g \cdot D_{x_2}v h_n'(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v) dx + \int_{\omega} g \cdot D_{x_2}u_l h_n'(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v) dx \end{aligned}$$

pour presque tout  $x_1 \in (-l, l)^q$ . En multipliant l'égalité ci-dessus par  $\rho(\frac{x_1}{l_1})$  et en intégrant sur  $(-l, l)^q$ , il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_l} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}T_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 \\ & \quad + \int_{\Omega_l} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}u_l h_n'(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 \\ & \quad + \int_{\Omega_l} a_2^2(x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}v h_n'(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 \\ & = \int_{\Omega_l} fT_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}T_k(u_l - v)h_n(u_l)h_n(v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 \\ & \quad + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}v h_n'(v)h_n(u_l)T_k(u_l - v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}u_l h_n'(u_l)h_n(v)T_k(u_l - v)\rho(\frac{x_1}{l_1}) dx_2 \end{aligned} \tag{1.34}$$

que nous écrivons de manière synthétique

$$J_1 + J_2 + J_3 = J_4.$$

Puisque  $J_4 = I_5$  on a  $I_1 - J_1 + I_2 + I_3 + I_4 - J_2 - J_3 = 0$ .

Comme  $v$  ne dépend pas de  $x_1$ , c'est-à-dire  $D_{x_1}v = 0$ , la condition structurelle (1.5) implique que

$$a^1(x, Dv) = 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega_l.$$

Donc, d'après la condition structurelle (1.4)

$$a(x, Dv) \cdot DT_k(u_l - v) = a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} T_k(u_l - v) + a_2^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_2} T_k(u_l - v) \quad \text{p.p. dans } \Omega_l.$$

Il découle alors

$$\begin{aligned} I_1 - J_1 &= \int_{\Omega_l} [a(x, Du_l) - a(x, Dv)] \cdot DT_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_l} a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} T_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \end{aligned} \quad (1.35)$$

Comme  $v$  ne dépend pas de  $x_1$ , on a

$$a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} T_k(u_l - v) h_n(v) = D_{x_1} \cdot (a_1^2(x_2, Dv) T_k(u_l - v) h_n(v)). \quad (1.36)$$

Alors, en utilisant (1.36) dans le dernier terme de (1.35) et en appliquant la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned} I_1 - J_1 &= \int_{\Omega_l} [a(x, Du_l) - a(x, Dv)] \cdot DT_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_l} a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} u_l h_n'(u_l) h_n(v) T_k(u_l - v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{l_1} \int_{\Omega_l} a_1^2(x_2, Dv) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) dx. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Remarquons que l'intégrale sur la frontière  $\Gamma_l$  découlant de la formule de Green est égale à 0 car la fonction  $\rho$  y est nulle.

On va montrer que  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  et  $\int_{\Omega_l} a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} u_l h_n'(u_l) h_n(v) T_k(u_l - v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx$  tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet, comme  $|h_n(v) T_k(u_l - v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)| \leq k$  et  $|h_n'(s)| = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{n \leq |s| \leq 2n\}}$  presque partout dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$|I_2| \leq \frac{k}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(x, Du_l) \cdot Du_l dx,$$

donc de la convergence des énergies (1.12), il découle que  $I_2$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De manière similaire, on montre que  $J_3$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour ce qui est des autres termes, par (1.6), l'inégalité de Hölder et le fait que  $|T_k(u_l - v) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)| \leq k$ , on obtient

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \left[ \left( \int_{\Omega_l} b_1^{p'} dx \right)^{1/p'} \left( \int_{\Omega_l} |Dv|^p h_n'(v) dx \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{n} \int_{\{|u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p dx \right)^{1/p'} \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v| \leq 2n\}} |Dv|^p dx \right)^{1/p'} \right] \end{aligned}$$



où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . Comme d'après (1.14)

$$\frac{1}{n} \int_{\{|u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p dx \leq Cl^q \left( \|f\|_{L^1(\omega)} + \frac{1}{n} \|g\|_{L^{p'}(\omega)} \right)$$

et  $b_1 \in L^{p'}(\Omega_l)$ , on obtient

$$|I_3| \leq C \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v| \leq 2n\}} |Dv|^p dx \right)^{1/p'}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . Par conséquent, la condition d'ellipticité (1.2) et la convergence des énergies (1.12') entraînent que  $I_3$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De manière similaire,  $J_2$  et  $\int_{\Omega_l} a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} u_l h_n'(u_l) h_n(v) T_k(u_l - v) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx$  tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi  $I_1 - J_1 + I_4$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En rappelant la condition structurelle (1.4) et le fait que  $\rho(\frac{x_1}{l_1})$  est indépendant de  $x_2$ , on obtient

$$a(x, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{l_1}) = a_1^1(x, Du_l) \cdot D_{x_1} \rho(\frac{x_1}{l_1}) + a_1^2(x, Du_l) \cdot D_{x_1} \rho(\frac{x_1}{l_1}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 - J_1 + I_4 &= \int_{\Omega_l} [a(x, Du_l) - a(x, Dv)] \cdot DT_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx \\ &\quad + \frac{1}{l_1} \int_{\Omega_l} a_1^1(x_2, Du_l) \cdot (D_{x_1} \rho)(\frac{x_1}{l_1}) T_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) dx \\ &\quad + \frac{1}{l_1} \int_{\Omega_l} (a_1^2(x_2, Du_l) - a_1^2(x_2, Dv)) \cdot (D_{x_1} \rho)(\frac{x_1}{l_1}) T_k(u_l - v) h_n(u_l) h_n(v) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, la forte monotonie (1.16), la condition de Lipschitz (1.17) de l'opérateur  $a$ , le fait que  $\text{supp}(\rho(\frac{\cdot}{l_1})) \subset [-l_1, l_1]^q$ ,  $|h_n| \leq 1$  et  $Du_l, Dv \in (L^{p-1}(\Omega_l))^N$  impliquent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} |DT_k(u_l - v)|^p h_n(u_l) h_n(v) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx \\ \leq \epsilon(n) + C \frac{k}{l_1} \int_{\Omega_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx \end{aligned}$$

où  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Finalement, comme  $\rho(\frac{x_1}{l_1}) = 1$  sur  $(-l_1/2, l_1/2)^q$ , en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , l'inégalité (1.32) découle du lemme de Fatou.

**Étape 2.** Comme  $T_k(u_l - v) \in W_{\Gamma_{l_1/2}}^{1,p}(\Omega_{l_1/2})$ , pour tout  $k > 0$ , on peut appliquer le Lemme 1.3.4 à l'estimation (1.32), on obtient

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1/2})} \leq \frac{C}{l_1} \int_{\Omega_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}),$$

pour tout  $r \in ]1, N']$ , car  $p \leq N - q$  implique  $p < N$ . Par l'inégalité de Hölder (1.22) dans les espaces de Lorentz, avec

$$\frac{1}{p-1} \frac{1}{r} + \frac{p-2}{p-1} \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) = 1$$

et en utilisant le fait que  $\|w^s\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} = \|w\|_{L^{ps,\infty}(\Omega)}^s$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1/2})} \leq \\ & \frac{C}{l_1} \| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1})}^{\frac{1}{p-1}} \|1 + |Du_l|^{p-1} + |Dv|^{p-1}\|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1})}^{\frac{p-2}{p-1}} \|1\|_{L^{\frac{r}{r-1},1}(\Omega_{l_1})}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Des estimations (1.27), (1.28), de l'identité  $\|1\|_{L^{s,1}(\Omega)} = |\Omega|^{\frac{1}{s}}$  et du fait que  $l_1 \leq l$ , il découle alors

$$\begin{aligned} & \|1 + |Du_l|^{p-1} + |Dv|^{p-1}\|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1})}^{\frac{p-2}{p-1}} \\ & \leq C \left( \|1\|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)}^{\frac{p-2}{p-1}} + \| |Du_l|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)}^{\frac{p-2}{p-1}} + \| |Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)}^{\frac{p-2}{p-1}} \right) \\ & \leq C \left( l^{\frac{q}{r} \frac{p-2}{p-1}} + l^q \frac{p-2}{p-1} \right), \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Ainsi, en utilisant de nouveau  $\|1\|_{L^{s,1}(\Omega)} = |\Omega|^{\frac{1}{s}}$ , l'inégalité (1.38) devient

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1/2})} \leq \frac{C l^{q \frac{p-2}{p-1} + q(1-\frac{1}{r})}}{l_1} (1 + l^{q(\frac{1}{r}-1) \frac{p-2}{p-1}}), \| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l_1})}^{\frac{1}{p-1}} \quad (1.39)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$  et  $l_1$ . On peut désormais prouver l'estimation (1.29).

Dans le cas  $p = 2$ , puisque  $1 + l^{q(\frac{1}{r}-1) \frac{p-2}{p-1}} = 2$ , en prenant  $l_1 = l/2^{k-1}$  et en itérant l'inégalité (1.39), on obtient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l/2^k})} \leq C l^{k(q(1-\frac{1}{r})-1)} \| |Du_l - Dv| \|_{L^{r,\infty}(\Omega_l)}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$  ( $C$  dépend de  $k$ ). Des estimations (1.27) et (1.28) il découle alors que

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{r,\infty}(\Omega_{l/2^k})} \leq C l^{k(q(1-\frac{1}{r})-1)+q}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Par conséquent, si

$$q\left(1 - \frac{1}{r}\right) - 1 < 0 \quad (1.40)$$

en prenant  $\alpha < 0$  arbitraire, alors pour  $k$  assez grand  $k(q(1-\frac{1}{r})-1)+q < \alpha$ . La condition (1.40) est toujours satisfaite si  $q = 1$ , et pour  $q \geq 2$  cette condition est équivalente à

$r < \frac{1}{1-1/q}$ . Donc si on prend  $l_0 > 0$ , alors pour  $l$  grand,  $l_0 < l/2^k$  et pour  $r$  satisfaisant (1.40), on obtient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^r, \infty(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0.$$

Passons maintenant au cas  $p > 2$ . Pour  $l_1 = l/2^{k-1}$ , en itérant l'inégalité (1.39), il vient pour  $l \geq 1$

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^r, \infty(\Omega_{l/2^k})} \leq Cl^{(q\frac{p-2}{p-1} + q(1-\frac{1}{r})-1) \left( \frac{1 - \frac{1}{(p-1)^k}}{1 - \frac{1}{p-1}} \right)} \| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^r, \infty(\Omega_l)}^{\frac{1}{(p-1)^k}}. \quad (1.41)$$

De cette dernière inégalité et des estimations (1.27) et (1.28) il vient alors

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^r, \infty(\Omega_{l/2^k})} \leq Cl^{q - \frac{p-1}{p-2} + q\frac{p-1}{p-2}(1-\frac{1}{r}) + \frac{1}{(p-1)^k} (q(\frac{1}{r}-1)\frac{p-1}{p-2} + \frac{p-1}{p-2})}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . La convergence de  $\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^r, \infty(\Omega_{l/2^k})}$  vers 0 nécessite d'avoir la condition

$$q - \frac{p-1}{p-2} + q\frac{p-1}{p-2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) < 0 \quad (1.42)$$

En effet, si (1.42) est vérifiée, alors en prenant  $\alpha$  tel que  $q - \frac{p-1}{p-2} + q\frac{p-1}{p-2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) < \alpha < 0$ , alors pour  $k$  assez grand, on a  $q - \frac{p-1}{p-2} + q\frac{p-1}{p-2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{(p-1)^k} \left( q \left(\frac{1}{r} - 1\right) \frac{p-1}{p-2} + \frac{p-1}{p-2} \right) - \alpha < 0$ . Pour tout  $q \geq 1$ , la condition (1.42) est équivalente à  $r < \frac{1}{2-1/(p-1)-1/q}$ . En rappelant que  $1 < r < N'$ , on obtient  $q\frac{p-2}{p-1}(1 - \frac{1}{r}) > 0$ , ainsi (1.42) est vérifiée si et seulement si les deux conditions suivantes

$$\begin{cases} q - \frac{p-1}{p-2} < 0 & \text{i.e. } p < \frac{2q-1}{q-1} \\ 1 < r < \min \left( N', \frac{1}{2-1/(p-1)-1/q} \right) \end{cases}.$$

sont satisfaites. Finalement, en prenant  $l_0 > 0$ , alors pour  $l$  assez grand,  $l_0 < l/2^k$ , ainsi pour  $p > 2$  et  $r$  satisfaisant (1.42) il vient

$$\| |Du_l - Dv|^{p-1} \|_{L^r, \infty(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \forall q - \frac{p-1}{p-2} + q\frac{p-1}{p-2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) < \alpha < 0.$$

□

**Remarque 1.3.14** Par le Théorème 1.3.8 et l'inégalité (1.32), on a également le résultat de convergence suivant : pour tout  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ) et pour  $l_0 > 0$

$$T_k(u_l - v) \rightarrow 0 \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}), \quad \forall k > 0,$$

avec les mêmes vitesses de convergence que celles du Théorème 1.3.8.

**Démonstration du Théorème 1.3.9**— La preuve s'effectue en deux étapes. Dans l'étape 1, on obtient une estimation sur  $T_k(u_l)$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$  et on établit la convergence faible des troncatures. Dans l'étape 2, grâce à la convergence ponctuelle des gradients, on montre la convergence forte des troncatures.

**Étape 1.** En utilisant  $T_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.13), avec  $h = h_n$ , et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot DT_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx + \frac{1}{2l_0} \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot (D\rho)(\frac{x_1}{2l_0})T_k(u_l) dx \\ = \int_{\Omega_l} fT_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2}T_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Comme  $\text{supp}(\rho(\frac{x_1}{2l_0})) \subset [-2l_0, 2l_0]^q$ , les intégrations se font sur l'ensemble  $\Omega_{2l_0}$ . De (1.2), (1.6), (1.30), (1.31) et de l'inégalité de Young, on obtient pour  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2l_0}} |DT_k(u_l)|^p \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \leq C(l_0, \Lambda) \left( k \int_{\Omega_{2l_0}} (b_1 + b_2 + |Du_l|^{p-1}) dx + \right. \\ \left. k \int_{\Omega_{2l_0}} |f| dx + C_\epsilon \int_{\Omega_{2l_0}} |g|^{p'} dx + \epsilon \int_{\Omega_{2l_0}} |DT_k(u_l)|^p \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \right). \end{aligned}$$

Finalement, en prenant  $\epsilon$  suffisamment petit, et en utilisant le fait que  $\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = 1$  sur  $] -l_0, l_0[^q$  et que  $Du_l$  est borné dans  $(L^{p-1}(\Omega_{2l_0}))^N$  (voir remarque (1.3.12)), il vient

$$\int_{\Omega_{l_0}} |DT_k(u_l)|^p dx \leq C_1 k + C_2 \quad (1.44)$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes indépendantes de  $l$ . Puisque  $T_k(u_l)$  est borné dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ , uniformément par rapport à  $l$ , et puisque  $u_l$  converge fortement vers  $v$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p-1}(\Omega_{l_0})$  on déduit que  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  faiblement dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . De plus, la convergence de  $Du_l$  vers  $Dv$  dans  $L^{p-1}(\Omega_{l_0})$  implique que, quitte à extraire une sous-suite,  $Du_l$  converge presque partout vers  $Dv$ . Comme  $DT_k(u_l) = \mathbb{1}_{\{|u_l| < k\}} Du_l$ , par un résultat prouvé dans [10] (Lemma 3.2), qui affirme que pour presque tout  $k > 0$

$$\mathbb{1}_{\{|u_l| < k\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{|v| < k\}} \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0},$$

on déduit que pour presque tout  $k > 0$

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(v) \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0},$$

et donc pour presque tout  $k > 0$

$$a(x, DT_k(u_l)) \rightarrow a(x, DT_k(v)) \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0}.$$

Maintenant, par la condition (1.6) sur l'opérateur  $a$  et l'estimation (1.44), on a

$$\int_{\Omega_{l_0}} |a(x, DT_k(u_l))|^{p'} \leq C \quad (1.45)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Donc il existe  $\xi_k \in (L^{p'}(\Omega_{l_0}))^N$  tel que, à une sous-suite près

$$a(x, DT_k(u_l)) \rightharpoonup \xi_k \text{ faiblement dans } \left(L^{p'}(\Omega_{l_0})\right)^N. \quad (1.46)$$

De plus, le théorème de Vitali, l'estimation (1.45) et la convergence ponctuelle de  $DT_k(u_l)$  impliquent

$$a(x, DT_k(u_l)) \rightarrow a(x, DT_k(v)) \text{ fortement dans } (L^q(\Omega_{l_0}))^N, \quad \forall q < p'.$$

Donc on peut identifier  $\xi_k = a(x, DT_k(v))$ , et par unicité de  $v$ , toute la suite, dans (1.46), converge.

**Étape 2.** On suppose que  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$ . On fait tendre  $l$  vers  $+\infty$  dans (1.43). Par le Lemme 1.3.4 et l'estimation (1.44), on a

$$|Du_l|^{p-1} \text{ est borné dans } L^q(\Omega_{2l_0}); \quad \forall q < \frac{N}{N-1}.$$

De l'hypothèse (1.6), il découle que

$$a(x, Du_l) \text{ est borné dans } (L^q(\Omega_{2l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{N}{N-1}. \quad (1.47)$$

Ainsi,  $a(x, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0})T_k(u_l)$  est équiintégrable dans  $L^1(\Omega_{2l_0})$ . En effet, en prenant  $1 < q < \frac{N}{N-1}$ , alors si  $q'$  est le conjugué de  $q$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , pour tout  $A \subset \Omega_{2l_0}$

$$\begin{aligned} \int_A \left| a(x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l) \right| dx &\leq C \left( \int_A |a(x, Du_l)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} |A|^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C \|a(x, Du_l)\|_{(L^q(\Omega_{2l_0}))^N} |A|^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\Lambda, l_0, k, N$  et indépendante de  $l$ . De plus, d'après la remarque 1.3.12, à une sous-suite près,  $Du_l$  converge vers  $Dv$  presque partout dans  $\Omega_{2l_0}$ , cela entraîne que

$$a(x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l) \rightarrow a(x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(v) \quad \text{p.p. dans } \Omega_{2l_0}.$$

Par conséquent, par le Théorème de Vitali,  $a(x, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0})T_k(u_l)$  converge vers  $a(x, Dv) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0})T_k(v)$  fortement dans  $L^1(\Omega_{2l_0})$ . Ainsi, cette convergence, les conditions (1.4), (1.5)

et l'indépendance de  $v$  par rapport à  $x_1$ , impliquent

$$\begin{aligned}
\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(u_l) dx &= \int_{\Omega_{2l_0}} a(x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) dx \\
&= \int_{\Omega_{2l_0}} a_1^2(x_2, Dv) \cdot D_{x_1} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) dx \\
&= \int_{\Omega_{2l_0}} D_{x_1} \cdot \left( a_1^2(x_2, Dv) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) \right) dx \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.48}$$

car on intègre tout d'abord dans la direction  $x_1$  en utilisant le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = 0$  hors de  $(-2l_0, 2l_0)^q$ . En ce qui concerne le terme de droite de (1.43), comme  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  faiblement dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$  et presque partout dans  $\Omega_{l_0}$ , le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\begin{aligned}
\lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Omega_l} f T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx \right] \\
= \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

En utilisant  $T_k(v)$  comme fonction test dans (1.13'), avec  $h = h_n$ , en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , puis en multipliant par  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  et en intégrant sur  $] -l, l[^q$ , il vient

$$\int_{\Omega_l} a_2^2(x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = \int_{\Omega_l} f T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \tag{1.50}$$

Ainsi, d'après (1.43), (1.48), (1.49) et (1.50) il découle

$$\begin{aligned}
\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx \\
= \int_{\Omega_{2l_0}} a_2^2(x_2, D_{x_2} T_k(v)) \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

où, en fait,

$$a_2^2(x_2, D_{x_2} T_k(v)) \cdot D_{x_2} T_k(v) = a(x, DT_k(v)) \cdot DT_k(v) \quad \text{dans } \Omega_{2l_0}$$

dû à l'indépendance de  $v$  par rapport à  $x_1$  et d'après les conditions structurelles (1.4) et (1.5). En utilisant la forte monotonie de  $a$ , de façon classique on obtient alors

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(v) \quad \text{fortement dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}).$$

□

## 1.4 Le cas strictement monotone

Dans cette section on suppose que  $\mu$  est positif, c'est-à-dire

$$\int_{\omega} f \phi \, dx_2 + \int_{\omega} g \cdot D_{x_2} \phi \, dx_2 \geq 0; \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\omega), \quad \phi \geq 0. \quad (1.52)$$

De plus on suppose que  $a^1 = 0$  c'est-à-dire

$$a(x, \xi) = a^2(x_2, \xi). \quad (1.53)$$

En particulier,  $a$  est indépendant de  $x_1$ . Tout d'abord on établit le résultat suivant dans le cas variationnel,

**Théorème 1.4.1** *On suppose que les hypothèses (1.2)–(1.7), (1.52), (1.53),  $f = 0$  sont vérifiées. Alors pour tout  $1 < p < +\infty$  et pour tout  $l_0 > 0$ , on a*

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}) \text{ quand } l \rightarrow +\infty.$$

**Remarque 1.4.2** Ces résultats ont été obtenus indépendamment par Chipot et Xie dans [22] et [44], dans le cas où  $a$  est le  $p$ -Laplacien, et en utilisant les mêmes techniques reposant sur le principe du maximum.

Ainsi, dans le cas  $f \neq 0$ , on peut se restreindre au cas  $p \leq N - q$ , car comme nous l'avons déjà signalé si  $p > N - q$ ,  $L^1(\omega) \subset W^{-1,p'}(\omega)$  et alors le cas variationnel s'applique.

**Théorème 1.4.3** *On suppose que les hypothèses (1.2)–(1.7), (1.52), (1.53) sont vérifiées. Alors pour tout  $1 < p \leq N - q$  et pour tout  $l_0 > 0$ , on*

$$T_k(u_l) \rightarrow T_k(v) \text{ dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}) \text{ quand } l \rightarrow +\infty.$$

On commence en prouvant les propriétés suivantes vérifiées par  $u_l$  et  $v$  et qui utilisent fortement le fait que  $\mu \geq 0$  et l'hypothèse (1.53) et dont les preuves reposent essentiellement sur le principe du maximum.

**Proposition 1.4.4** *Sous les hypothèses du Théorème 1.4.1 ou du Théorème 1.4.3, pour tout  $l \leq l'$ , on a*

$$0 \leq u_l \leq u_{l'} \leq v \text{ p.p. dans } \Omega_l.$$

Par conséquent, à une sous-suite près, notée également  $u_l$ , on a

$$u_l \rightarrow u_\infty \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^q \times \omega$$

où  $u_\infty$  est une fonction mesurable finie presque partout définie sur  $\mathbb{R}^q \times \omega$ . La fonction  $u_\infty$  satisfait la proposition suivante.

**Proposition 1.4.5** *La fonction  $u_\infty$  est indépendante de  $x_1$ .*

**Démonstration de la Proposition 1.4.4**— On prouve cette proposition dans le cas  $f \neq 0$ . En effet, si  $f = 0$  alors  $-\operatorname{div}(g) \in W^{-1,p'}(\omega)$  et la solution renormalisée est solution faible.

- Puisque  $\mu \geq 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_l)$ , alors  $u_l \geq 0$  presque partout dans  $\Omega_l$ .
- Soit  $l < l'$ . Comme  $T_{2n}(u_l)$  et  $T_{2n}(u_{l'})$  sont des fonctions positives appartenant à  $W_0^{1,p}(\Omega_l)$  et  $W_0^{1,p}(\Omega_{l'})$  respectivement, on a  $(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(u_{l'}))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$ , (où  $x^+ = \max(0, x)$ ). Donc on peut utiliser  $T_k^+(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(u_{l'}))h_n(u_l)$  (resp.  $T_k^+(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(u_{l'}))h_n(u_{l'})$ ), comme fonction test dans (1.13) écrite avec  $u_l$  (resp. écrite avec  $u_{l'}$ ), avec  $h = h_n$ . En soustrayant ces résultats et en utilisant le fait que puisque  $\operatorname{supp}(h_n) = [-2n, 2n]$ , alors

$$h_n(u_l)h_n(u_{l'})T_k^+(T_{2n}(u_l) - T_{2n}(u_{l'})) = h_n(u_l)h_n(u_{l'})T_k^+(u_l - u_{l'}),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Du_{l'})] \cdot DT_k^+(u_l - u_{l'}) h_n(u_l)h_n(u_{l'}) dx \\ & + \int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Du_{l'})] \cdot Du_l h_n'(u_l)T_k^+(u_l - u_{l'})h_n(u_{l'}) dx \\ & + \int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Du_{l'})] \cdot Du_{l'} h_n'(u_{l'})T_k^+(u_l - u_{l'})h_n(u_l) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

On montre désormais que le second et le troisième terme de (1.54) tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet, pour le second terme

$$\left| \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l h_n'(u_l)T_k^+(u_l - u_{l'})h_n(u_{l'}) dx \right| \leq \frac{k}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l dx$$

qui tend vers 0 d'après (1.12). D'après (1.6) et l'inégalité de Hölder, il découle alors que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_{l'}) \cdot Du_l h_n'(u_l)T_k^+(u_l - u_{l'})h_n(u_{l'}) dx \right| \\ & \leq C \int_{\Omega_l} (b_2(x_2) + |Du_{l'}|^{p-1}) |Du_l| |h_n'(u_l)| h_n(u_{l'}) dx \\ & \leq C \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p dx \right)^{1/p} \\ & + C \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p dx \right)^{1/p} \left( \frac{1}{n} \int_{\{|u_{l'}| \leq 2n\}} |Du_{l'}|^p dx \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 d'après (1.2), (1.12) et (1.14). Des arguments similaires montrent que le troisième terme dans (1.54) tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, on a

$$\int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Du_{l'})] \cdot DT_k^+(u_l - u_{l'}) h_n(u_l)h_n(u_{l'}) dx = \epsilon(n)$$



où  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme d'après (1.3) l'intégrande ci-dessus est positif et puisque  $h_n(u_l)h_n(u_{l'})$  converge vers 1 presque partout dans  $\Omega_l$ , le lemme de Fatou implique

$$\int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Du_{l'})] \cdot [Du_l - Du_{l'}] \mathbf{1}_{\{0 \leq u_l - u_{l'} \leq k\}} dx = 0.$$

Donc, la stricte monotonie (1.3) de  $a$  implique que  $Du_l = Du_{l'}$  converge presque partout dans  $\{0 \leq u_l - u_{l'} \leq k\} \cap \Omega_l$  pour tout  $k > 0$ . De plus  $(u_l - u_{l'})^+ \in W_{\Gamma_l}^{1,p-1}(\Omega_l)$ , donc  $(u_l - u_{l'})^+ = 0$  presque partout dans  $\Omega_l$  c'est-à-dire  $u_l \leq u_{l'}$  sur  $\Omega_l$ .

• De manière similaire, si l'on prend  $v$  au lieu de  $u_{l'}$ , on montre que

$$u_l \leq v \text{ p.p. dans } \Omega_l.$$

□

**Démonstration de la Proposition 1.4.5**— On commence par introduire quelques notations. On fixe  $l > 0$ . Pour tout  $-l \leq t \leq l$ , on pose  $\Omega_{2l}^t = ]-2l+t, 2l+t[ \times ]-2l, 2l[^{q-1} \times \omega$  et on introduit la fonction  $v_{2l}^t$  définie sur  $\Omega_{2l}^t$  par

$$v_{2l}^t(x) = u_{2l}(x - te_1) \text{ p.p. dans } \Omega_{2l}^t$$

où  $e_1$  désigne le vecteur unité  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Comme  $\Omega_l \subset \Omega_{2l}^t$  et après quelques calculs qui utilisent fortement le fait que (1.53), d'après (1.12), (1.13) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v_{2l}^t| \leq 2n\} \cap \Omega_l} a(x_2, Dv_{2l}^t) \cdot Dv_{2l}^t dx = 0$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[h(v_{2l}^t)a(x_2, Dv_{2l}^t)] + h'(v_{2l}^t)a(x_2, Dv_{2l}^t) \cdot Dv_{2l}^t &= fh(v_{2l}^t) \\ -\operatorname{div}[gh(v_{2l}^t)] + g \cdot Dv_{2l}^t h'(v_{2l}^t) &\text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_l) \end{aligned} \quad (1.55)$$

pour tout  $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  à support compact. De manière grossière, cela signifie que  $v_{2l}^t$  est une solution renormalisée de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x, Dv_{2l}^t)] &= \mu & \text{dans } \Omega_l \\ v_{2l}^t &= 0 & \text{sur } \Gamma_l. \end{cases}$$

Par des techniques déjà utilisées dans la preuve de la Proposition 1.4.4, en utilisant (1.4) et (1.55), on montre que

$$\int_{\Omega_l} [a(x_2, Du_l) - a(x_2, Dv_{2l}^t)] \cdot [Du_l - Dv_{2l}^t] \mathbf{1}_{\{0 \leq u_l - v_{2l}^t \leq k\}} dx = 0.$$

Il découle alors que  $u_l \leq v_{2l}^t$  presque partout dans  $\Omega_l$ . En faisant tendre  $l$  vers  $\infty$  dans cette inégalité, cela implique

$$u_\infty(x) \leq u_\infty(x - te_1) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$u_\infty(x) = u_\infty(x - te_1) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette égalité implique que  $u_\infty$  est indépendante de  $x_1$ . De manière identique, on obtient pour tout  $i = 1, \dots, q$

$$u_\infty(x) = u_\infty(x - te_i) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . Ces égalités impliquent que  $u_\infty$  est indépendant de  $x_1$ . □

**Démonstration du Théorème 1.4.1**— La preuve s'effectue en trois étapes. Dans l'étape 1, on obtient une estimation sur  $u_l$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$  qui implique la convergence faible de  $u_l$  vers  $u_\infty$ . L'étape 2 est consacrée à la preuve de la convergence forte. Enfin dans l'étape 3, on montre que  $u_\infty$  et  $v$  satisfont la même équation dans  $\mathbb{R}^q \times \omega$ , et par unicité on identifie  $u_\infty$  et  $v$ .

**Étape 1.** En utilisant  $\rho^p(\frac{x_1}{2l_0})u_l$  comme fonction test dans (1.1), d'après (1.2), (1.6) avec la Proposition 1.4.4, on obtient

$$\alpha \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \leq \|g\|_{(L^{p'}(\Omega_{2l_0}))^{N-q}} \left( \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^{p^2}(\frac{x_1}{2l_0}) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\Lambda}{2l_0} \int_{\Omega_{2l_0}} (b_2 + |Du_l|^{p-1}) v \rho^{p-1}(\frac{x_1}{2l_0}) dx.$$

Comme  $p > 1$  alors  $p^2 > p$  et donc  $\rho^{p^2} \leq \rho^p$  car  $0 \leq \rho \leq 1$ . L'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^{p-1} v \rho^{p-1}(\frac{x_1}{2l_0}) dx \leq \left( \int_{\Omega_{2l_0}} v^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

De cette dernière inégalité il découle,

$$\int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \leq C \left( \left( \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \right)^{\frac{1}{p'}} + 1 \right)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Ainsi, comme  $\frac{1}{p} < 1$ ,  $\frac{1}{p'} < 1$  on obtient

$$\int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p(\frac{x_1}{2l_0}) dx \leq C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Et puisque  $\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = 1$  sur  $] -l_0, l_0[$ , il découle que

$$\int_{\Omega_{l_0}} |Du_l|^p dx \leq C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Ainsi, à une sous-suite près, notée également  $u_l$ , on obtient

$$u_l \rightarrow u_\infty \quad \text{faiblement dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}); \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega_{l_0}); \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0}. \quad (1.56)$$

**Étape 2.** Avec les convergences (1.56) et la stricte monotonie de l'opérateur  $a$ , on peut adapter les techniques utilisées dans [13],[15] pour montrer qu'à une sous-suite près,  $Du_l \rightarrow Du_\infty$  presque partout dans  $\Omega_{l_0}$ . On utilise alors  $u_l \rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \frac{1}{2l_0} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) u_l dx \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned} \quad (1.57)$$

D'après (1.6),  $a(x_2, Du_l)$  est borné dans  $(L^{p'}(\Omega_{l_0}))^N$  donc converge faiblement dans cet espace, la convergence presque partout des gradients  $Du_l$  vers  $Du_\infty$  permet d'identifier la limite et donc d'obtenir

$$a(x_2, Du_l) \rightarrow a(x, Du_\infty) \quad \text{faiblement dans } \left(L^{p'}(\Omega_{l_0})\right)^N.$$

Ainsi,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) u_l dx = \int_{\Omega_{2l_0}} a_1^2(x_2, Du_\infty) \cdot (D_{x_1}\rho)\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) u_\infty dx = 0. \quad (1.58)$$

Pour le second membre de (1.57), on a

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \quad (1.59)$$

Ainsi, en rapprochant (1.57), (1.58) et (1.59) il vient

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx.$$

D'autre part, en utilisant  $u_\infty \rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \frac{1}{2l_0} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) u_\infty dx \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Finalement en passant à la limite dans (1.60), il découle

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \quad (1.61)$$

Par conséquent, d'après la convergence (1.61) et puisque  $a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  est une suite de fonctions positives qui converge presque partout vers  $a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$ , une application classique du Lemme de Fatou donne

$$a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \rightarrow a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega_{2l_0}).$$

Et le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = 1$  sur  $\Omega_{l_0}$  implique

$$a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rightarrow a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega_{l_0}).$$

Cela entraîne que  $a(x_2, Du_l) \cdot Du_l$  est équiintégrable dans  $L^1(\Omega_{l_0})$ . Alors la condition d'ellipticité

$$\alpha |Du_l|^p \leq a(x_2, Du_l) \cdot Du_l, \quad \text{p.p. } x \in \Omega_l,$$

implique que  $Du_l$  est  $p$ -équiintégrable. Par conséquent, d'après la convergence presque partout de  $Du_l$ , le théorème de Vitali entraîne que

$$Du_l \rightarrow Du_\infty \quad \text{fortement dans } (L^p(\Omega_{l_0}))^N.$$

**Étape 3.** En utilisant  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \omega)$  comme fonction test (1.1) et en faisant tendre  $l$  vers  $+\infty$ , il vient

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot D\psi dx = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \psi dx. \quad (1.62)$$

En fait, pour  $l > 0$ , on peut prendre  $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$ , dans (1.62), en prolongeant  $\psi$  par 0 sur  $(\mathbb{R}^q \times \omega) \setminus \Omega_l$ . Ainsi, on prend  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ ,  $\phi \geq 0$ , on utilise  $\psi = \phi(u_\infty - v)$  comme fonction test dans (1.62),  $u_\infty - v$  comme fonction test dans (1.8), on multiplie par  $\phi$  et on intègre sur  $\mathbb{R}^q$ , puis on soustrait ces deux égalités pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a_1^2(x_2, Du_\infty) - a_1^2(x_2, Dv)) \cdot D_{x_1} \phi(u_\infty - v) dx \\ + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a_2^2(x_2, Du_\infty) - a_2^2(x_2, Dv)) \cdot D_{x_2} (u_\infty - v) \phi dx = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Puisque les fonctions  $u_\infty$  et  $v$  sont indépendantes de  $x_1$ , le théorème de la divergence implique que le premier terme de (1.63) est nul. Par conséquent, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a_2^2(x_2, Du_\infty) - a_2^2(x_2, Dv)) \cdot D_{x_2} (u_\infty - v) \phi dx = 0.$$

Par la stricte monotonie (1.10) de  $a_2^2$ , on conclut que  $u_\infty = v$  presque partout sur  $\omega$ .

□

**Remarque 1.4.6** Il est essentiel de savoir qu'a fortiori  $u_\infty$  est indépendant de  $x_1$ , car cela permet de traiter le premier terme de (1.63).

**Démonstration du Théorème 1.4.3**— Pour simplifier la démonstration on supposera que  $g = 0$ . La preuve s'effectue en trois étapes. Dans l'étape 1, on obtient une estimation sur  $T_k(u_l)$  dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$  qui implique la convergence faible de  $T_k(u_l)$  vers  $T_k(u_\infty)$ . L'étape 2 est consacrée à la preuve de la convergence forte des troncatures. Enfin, dans l'étape 3, on montre que  $u_\infty$  et  $v$  satisfont les mêmes équations dans  $\mathbb{R}^q \times \omega$ , et par unicité on identifie  $u_\infty$  et  $v$ .

**Étape 1.** D'après la preuve du Théorème 1.3.9 (voir (1.44)), on sait que pour tout  $l_0 > 0$ ,  $k > 0$ ,  $T_k(u_l)$  est borné dans  $W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . Ainsi, à une sous-suite près, encore noté  $u_l$ , on obtient

$$T_k(u_l) \rightarrow w_k \quad \text{faiblement dans } W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}); \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega_{l_0}); \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0} \quad (1.64)$$

où  $w_k \in W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . Avec le fait que  $u_l \rightarrow u_\infty$  presque partout, par continuité de  $T_k$ , on identifie  $w_k = T_k(u_\infty)$  et donc  $T_k(u_\infty) \in W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . avec l'estimation

$$\int_{\Omega_{l_0}} |DT_k(u_\infty)|^p dx \leq C_1 k + C_2, \quad (1.65)$$

pour tout  $l_0 > 0$ , pour tout  $k > 0$  et où  $C_1, C_2$  sont des constantes positives indépendantes de  $l$ .

**Étape 2.** Tout d'abord, avec l'estimation (1.65) et la stricte monotonie de l'opérateur  $a$ , on adapte les techniques utilisées dans [13], [15] au cadre des solutions renormalisées pour montrer que  $Du_l$  converge presque partout vers  $Du_\infty$ . Ainsi comme  $a(x_2, Du_l)$  est borné dans  $(L^q(\Omega_{l_0}))^N$  (voir (1.47)), pour tout  $q < \frac{N}{N-1}$  et d'après le théorème de Vitali, il découle

$$a(x_2, Du_l) \rightarrow a(x_2, Du_\infty) \quad \text{dans } (L^q(\Omega_{l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{N}{N-1}. \quad (1.66)$$

Utilisons  $T_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.13) avec  $h = h_n$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot DT_k(u_\infty)h_n(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx + \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l h'_n(u_l)T_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \\ & + \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D_{x_1}\rho(\frac{x_1}{2l_0})h_n(u_l)T_k(u_\infty) dx = \int_{\Omega_l} f h_n(u_l)T_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx. \end{aligned} \quad (1.67)$$

On fait d'abord tendre  $l$  vers  $+\infty$  puis  $n \rightarrow +\infty$  dans (1.67).

En ce qui concerne le premier terme de (1.67), d'une part, d'après la convergence (1.66) et le théorème de Lebesgue, il vient

$$h_n(u_l)a(x_2, Du_l) \rightarrow h_n(u_\infty)a(x_2, Du_\infty) \quad \text{dans } (L^q(\Omega_{l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{N}{N-1}.$$

D'autre part, d'après (1.6) et (1.44) et en utilisant le fait que  $\text{supp}(h_n) = [-2n, 2n]$ , on a

$$h_n(u_l)a(x_2, Du_l) = h_n(u_l)a(x_2, DT_{2n}(u_l))$$

borné dans  $(L^{p'}(\Omega_{2l_0}))^N$ . Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite,

$$h_n(u_l)a(x_2, Du_l) \rightharpoonup h_n(u_\infty)a(x_2, Du_\infty) \quad \text{faiblement dans } (L^{p'}(\Omega_{l_0}))^N.$$

Il découle

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot DT_k(u_\infty)h_n(u_l)\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_{2n}(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty)h_n(u_\infty)\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned}$$

Comme pour  $n \geq \frac{k}{2}$ ,  $a(x_2, DT_{2n}(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) = a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty)$ , le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot DT_k(u_\infty)h_n(u_l)\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty)\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \quad (1.68) \end{aligned}$$

Par le théorème de Lebesgue encore, comme  $u_\infty$  est finie presque partout, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} f h_n(u_l) T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \quad (1.69)$$

Puis, par la convergence (1.66), l'indépendance de  $u_\infty$  par rapport à  $x_1$  et le théorème de la divergence, on a

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D_{x_1} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) h_n(u_l) T_k(u_\infty) \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, Du_\infty) \cdot D_{x_1} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) h_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \\ = \int_{\Omega_{2l_0}} D_{x_1} \cdot \left[ a(x_2, Du_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) h_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \right] = 0. \quad (1.70) \end{aligned}$$

Enfin, en ce qui concerne le deuxième terme de (1.67), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l h'_n(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx = 0. \quad (1.71)$$

En effet, on prend  $\frac{1}{n}(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l))\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.13) avec  $h = h_m$ , et on fait tendre  $m$  vers  $+\infty$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l))\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \\ & \quad + \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0}) \frac{1}{n}(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l)) dx \\ & \quad = \int_{\Omega_l} f \frac{1}{n}(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l))\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Par des arguments déjà utilisés, on obtient

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0}) \frac{1}{n}(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l)) dx = 0. \quad (1.73)$$

Comme  $u_l \rightarrow u_\infty$  presque partout dans  $\mathbb{R}^q \times \omega$ ,  $\frac{1}{n}(T_{2n}(r) - T_n(r))$  converge vers 0 et  $u_\infty$  est finie presque partout, alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} f \frac{1}{n}(T_{2n}(u_l) - T_n(u_l))\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \\ & \quad = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} f \frac{1}{n}(T_{2n}(u_\infty) - T_n(u_\infty))\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

En regroupant (1.72), (1.73), (1.74) et en utilisant le fait que  $\frac{1}{n}(T'_{2n}(u_l) - T'_n(u_l)) = \mathbb{1}_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}}$  on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx = 0,$$

puis du fait que  $|h'_n| = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}}$ , la convergence (1.71) découle. Finalement, en regroupant (1.67), (1.68), (1.69), (1.70) et (1.71), il vient

$$\int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx = \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx. \quad (1.75)$$

Maintenant, en utilisant  $T_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (1.13), avec  $h = h_n$ , et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , il vient

$$\int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot DT_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx + \frac{1}{2l_0} \int_{\Omega_l} a(x, Du_l) \cdot (D\rho)(\frac{x_1}{2l_0}) T_k(u_l) dx = \int_{\Omega_l} f T_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx.$$

Par des arguments déjà utilisés, on a

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l)\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(u_\infty)\rho(\frac{x_1}{2l_0}). \quad (1.76)$$

Puis, de (1.75) et (1.76) on obtient

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = \int_{\Omega_{2l_0}} a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right). \quad (1.77)$$

Par conséquent d'après la convergence (1.77) et puisque  $a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  est une suite de fonctions positives qui converge presque partout vers  $a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$ , une application classique du lemme de Fatou donne

$$a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \rightarrow a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega_{2l_0}).$$

Et le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = 1$  sur  $\Omega_{l_0}$  implique

$$a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rightarrow a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega_{l_0}).$$

Il découle que  $a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l)$  est équiintégrable dans  $L^1(\Omega_{l_0})$ . La condition d'ellipticité

$$\alpha |DT_k(u_l)|^p \leq a(x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l), \quad \text{p.p. } x \in \Omega_l,$$

implique alors que  $DT_k(u_l)$  est  $p$ -équiintégrable. Par conséquent, d'après la convergence presque partout de  $DT_k(u_l)$ , le théorème de Vitali entraîne que

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(u_\infty) \quad \text{fortement dans } (L^p(\Omega_{l_0}))^N. \quad (1.78)$$

**Étape 3.** On prouve maintenant que  $u_\infty$  est, de manière grossière, solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(x_2, Du_\infty)] = f & \text{dans } \mathbb{R}^q \times \omega \\ u_\infty = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^q \times \partial\omega. \end{cases}$$

Tout d'abord, d'après (1.65), pour tout  $l_0 > 0$ ,  $T_k(u_\infty) \in W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})$ . Ensuite, soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \omega)$ ,  $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  à support compact inclus dans  $[-k, k]$ , où  $k > 0$ . Puisque  $\operatorname{supp}(\phi)$  est compact, pour  $l$  assez grand  $h(u_\infty)\phi \in W_0^{1,p}(\Omega_l)$ , donc on peut utiliser  $h(u_\infty)\phi$  comme fonction test dans (1.13), avec  $h = h_n$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) h_n(u_l) \phi \, dx + \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_l h'_n(u_l) h(u_\infty) \phi \, dx \\ + \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D\phi h_n(u_l) h(u_\infty) \, dx = \int_{\Omega_l} f h(u_\infty) h_n(u_l) \phi \, dx. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Pour le premier terme, d'après l'étape 1,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) h_n(u_l) \phi \, dx &= \int_{\Omega_l} a(x_2, DT_{2n}(u_l)) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) h_n(u_l) \phi \, dx \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, DT_{2n}(u_\infty)) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) h_n(u_\infty) \phi \, dx \end{aligned} \quad (1.80)$$



quand  $l$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) h_n(u_l) \phi dx \\ = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) \phi dx. \end{aligned} \quad (1.81)$$

D'après la convergence des énergies (1.12), le deuxième terme de (1.79) converge vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par la convergence forte de  $a(x, Du_l)$  dans  $(L^q(\Omega_{l_0}))^N$ , pour tout  $q < \frac{N}{N-1}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} a(x_2, Du_l) \cdot D\phi h_n(u_l) h(u_\infty) dx = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot D\phi h(u_\infty) dx. \quad (1.82)$$

De (1.79), (1.80), (1.81) et (1.82), on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot D\phi h(u_\infty) dx + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty h'(u_\infty) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f h(u_\infty) \phi dx.$$

pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \omega)$ , c'est-à-dire

$$-\operatorname{div}[a(x_2, Du_\infty) h(u_\infty)] + h'(u_\infty) a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty = f h(u_\infty) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q \times \omega). \quad (1.83)$$

De plus, d'après (1.6), (1.71), (1.78) et le théorème de Vitali, pour tout  $l_0 > 0$ , on a,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega_{l_0} \cap \{n \leq |u_\infty| \leq 2n\}} a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty dx = 0. \quad (1.84)$$

Il reste à prouver que  $u_\infty = v$ . Pour cela, soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ , on utilise  $\phi T_k(T_{2n}(u_\infty) - T_{2n}(v)) h_n(v)$  comme fonction test dans (1.83) avec  $h = h_n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot DT_k(u_\infty - v) h_n(v) h_n(u_\infty) \phi dx \\ + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty h'_n(u_\infty) h_n(v) T_k(u_\infty - v) \phi dx \\ + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Du_\infty) \cdot Dv h_n(u_\infty) h'_n(v) T_k(u_\infty - v) \phi dx \\ + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_1^2(x_2, Du_\infty) D_{x_1} \phi h_n(u_\infty) h_n(v) T_k(u_\infty - v) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f \phi T_k(T_{2n}(u_\infty) - T_{2n}(v)) h_n(u_\infty) h_n(v) dx. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Comme  $u_\infty$  et  $v$  ne dépendent pas de  $x_1$ , le théorème de la divergence implique que le quatrième terme de (1.85) est nul. On utilise  $T_k(T_{2n}(u_\infty) - T_{2n}(v)) h_n(u_\infty)$  comme fonction

test dans (1.13') avec  $h = h_n$ , on multiplie par  $\phi$  et on intègre sur  $\mathbb{R}^q$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Dv) \cdot DT_k(u_\infty - v) h_n(v) h_n(u_\infty) \phi \, dx \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Dv) \cdot Dv h_n(u_\infty) h'_n(v) T_k(u_\infty - v) \phi \, dx \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(x_2, Dv) \cdot Du_\infty h'_n(u_\infty) h_n(v) T_k(u_\infty - v) \phi \, dx \\
& \qquad \qquad = \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f \phi T_k(T_{2n}(u_\infty) - T_{2n}(v)) h_n(u_\infty) h_n(v) \, dx. \quad (1.86)
\end{aligned}$$

Par des arguments déjà utilisés, d'après (1.12'), (1.15), (1.65), (1.84), tous les termes de (1.85) et (1.86) exceptés le premier et le dernier terme tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ensuite, en soustrayant (1.85) et (1.86), il vient

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a(x_2, Du_\infty) - a(x_2, Dv)) \cdot DT_k(u_\infty - v) h_n(v) h_n(u_\infty) \phi \, dx = \epsilon(n) \quad (1.87)$$

où  $\epsilon(n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, par le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a(x_2, Du_\infty) - a(x_2, Dv)) \cdot DT_k(u_\infty - v) \phi \, dx = 0.$$

La stricte monotonie de l'opérateur  $a$  permet de conclure que  $u_\infty = v$ .

□



# Chapitre 2

## Problèmes paraboliques

### 2.1 Introduction

Comme dans la partie précédente, on pose  $\Omega_l = ]-l, l[^q \times \omega$ , où  $\omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^{N-q}$  avec frontière  $\partial\omega$  lipschitzienne,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $T > 0$ , on pose également  $Q_l = (0, T) \times \Omega_l$  et  $Q = (0, T) \times \omega$ . On étudie le comportement asymptotique, quand  $l \rightarrow +\infty$ , du problème parabolique  $N$ -dimensionnel suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_l}{\partial t} - \operatorname{div}[a(t, x, Du_l)] = \mu & \text{dans } (0, T) \times \Omega_l \\ u_l = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_l \\ u_l(t = 0) = u_0 & \text{dans } \Omega_l \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $u \mapsto -\operatorname{div}[a(t, x, Du)]$  est un opérateur monotone défini sur  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$  à valeurs dans  $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega_l))$ . Ce problème a été initialement étudié par Chipot [18] dans le cas variationnel.

On rappelle que l'on note  $\Gamma_l$  le sous-ensemble de  $\partial\Omega_l$  défini par  $\Gamma_l = [-l, l]^q \times \partial\omega$ . Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_N) \in \Omega_l$  on notera  $x = (x_1, x_2)$  où  $x_1 \in ]-l, l[^q$  et  $x_2 \in \omega$ , et  $D_{x_1} = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_q})$ ,  $D_{x_2} = (\partial_{x_{q+1}}, \dots, \partial_{x_N})$ .

On note  $W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)$  l'espace des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega_l)$  qui ont une trace nulle sur  $\Gamma_l$ , muni de la norme  $\|v\|_{W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l)} = \|Dv\|_{L^p(\Omega_l)}$ .

Les conditions vérifiées par l'opérateur  $a$  sont similaires à celle de la section précédente, excepté qu'il faut prendre en compte la dépendance de  $a$  par rapport à  $t \in (0, T)$ . On suppose que  $a : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  est une fonction de Carathéodory (c'est-à-dire  $a(t, x, \xi)$  est mesurable par rapport à  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et continue par rapport à  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ ). De plus, l'opérateur  $a$  est elliptique strictement monotone, c'est-à-dire

$$a(t, x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p, \quad (2.2)$$

pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , où  $\alpha$  est une constante,  $\alpha > 0$ ;

$$(a(t, x, \xi) - a(t, x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0, \quad (2.3)$$

pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \xi'$ ; et  $a$  satisfait les conditions structurelles

$$a(t, x, \xi) = a^1(t, x, \xi) + a^2(t, x_2, \xi) = \begin{pmatrix} a_1^1(t, x, \xi) \\ a_2^1(t, x, \xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^2(t, x_2, \xi) \\ a_2^2(t, x_2, \xi) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

où  $a^1, a^2$  sont des fonctions de Carathéodory satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$a^1(t, x, \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix}) = 0 \quad (2.5)$$

pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$  et pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{N-q}$ ;

$$|a^1(t, x, \xi)| \leq \gamma_1 [b_1(t, x) + |\xi|^{p-1}], \quad |a^2(t, x_2, \xi)| \leq \gamma_2 [b_2(t, x_2) + |\xi|^{p-1}], \quad (2.6)$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times K \times \omega$  pour la première inégalité et pour presque tout  $(t, x_2) \in Q$  pour la seconde inégalité où  $K$  est un sous-ensemble mesurable borné arbitraire de  $\mathbb{R}^q$ ,  $b_1, b_2$  sont des fonctions positives respectivement dans  $L^{p'}((0, T) \times K \times \omega)$  et  $L^{p'}(Q)$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des constantes positives avec  $\gamma_1$  dépendant de  $K$ .

Pour ce qui est des données, on suppose qu'elles sont indépendantes de  $x_1$ , à savoir, la condition initiale vérifie

$$u_0 = u_0(x_2) \in L^1(\omega), \quad (2.7)$$

tandis que le second membre satisfait

$$f = f(t, x_2) \in L^1(Q), \quad g = g(t, x_2) \in \left(L^{p'}(Q)\right)^{N-q} \quad (2.8)$$

ainsi  $\mu = f - \operatorname{div}(g)$  peut être prolongé par  $\tilde{\mu}$  sur  $L^1(Q_l) + L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega_l))$  en posant pour tout  $\phi \in L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega_l)) \cap L^\infty(\Omega_l)$

$$\tilde{\mu}(\phi) = \int_{\Omega_l} f \phi \, dx \, dt + \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} \phi \, dx \, dt.$$

Puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté on notera  $\mu$  et son prolongement de la même façon.

Le but de cette partie est de montrer que  $u_l$ , la solution du problème (2.1) converge, en un sens à préciser, vers  $v$  la solution du problème  $N - q$ -dimensionnel

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a_2^2(t, x_2, Dv)] &= \mu & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ v &= 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\omega \\ v(t=0) &= v_0 & \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.9)$$

**Remarque 2.1.1** La condition structurelle (2.4) et les hypothèses (2.2), (2.3), (2.5) nous permettent de définir le problème (2.9) à partir du problème (2.1). En effet, on identifie  $a_2^2(t, x_2, \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix})$  et  $a_2^2(t, x_2, \xi_2)$  et des hypothèses (2.2) et (2.5), on obtient

$$a_2^2(t, x_2, \xi_2) \cdot \xi_2 \geq \alpha |\xi_2|^p, \quad (2.10)$$

pour presque tout  $(t, \mathbf{x}_2) \in Q$  et pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{N-q}$ ; et la stricte monotonie de  $a$  implique la stricte monotonie de  $a_2^2$ , c'est-à-dire

$$(a_2^2(t, \mathbf{x}_2, \xi_2) - a_2^2(t, \mathbf{x}_2, \xi_2')) \cdot (\xi_2 - \xi_2') > 0, \quad (2.11)$$

pour presque tout  $(t, \mathbf{x}_2) \in Q$  et pour tout  $\xi_2, \xi_2' \in \mathbb{R}^{N-q}$ ,  $\xi_2 \neq \xi_2'$ .

## 2.2 Définition des solutions renormalisées

Comme les données ici sont peu régulières, on travaille dans le cadre des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques. Avec cette notion de solutions, il y a existence, unicité et stabilité des solutions. Les solutions renormalisées, initialement introduites pour des problèmes elliptiques, ont été adaptées au cas des équations paraboliques non linéaires par Blanchard et Murat (voir [6]) dans le cas de données  $L^1$  avec un opérateur de type Leray-Lions. Le cadre des solutions renormalisées permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour un second membre dans  $L^1 + W^{-1,p'}$  et un opérateur de type  $a(t, x, u, Du)$  (voir [7]) et aussi pour des problèmes non linéaires d'évolution où la nonlinéarité est portée par le terme parabolique  $\frac{\partial b(\theta)}{\partial t}$  (voir [9]). Dans le cas du problème de Stefan, c'est-à-dire où  $b$  présente des sauts, typiquement  $b$  est un graphe monotone, Blanchard et Poretta ont proposé dans [8] une nouvelle formulation des solutions renormalisées, tenant compte du peu de régularité de  $b$ . C'est cette nouvelle formulation, équivalente à la version originale dans le cas de  $b$  égal à l'identité, que nous utiliserons dans tout notre travail car elle s'avère plus aisée à manipuler.

On rappelle tout d'abord les lemmes d'intégration par parties suivants introduits par Blanchard et Poretta dans [8] pour les problèmes de Stefan et adaptés ici à notre étude.

**Lemme 2.2.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ . Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne croissante et  $\tilde{G}$  sa primitive s'annulant en 0 c'est-à-dire*

$$\tilde{G}(r) = \int_0^r G(\rho) d\rho.$$

*Soient deux fonctions  $w \in L^1(Q_T)$  et  $w_0 \in L^1(\Omega)$ . Si  $G(w) \in L^\infty(Q_T)$ ,  $\tilde{G}(w) \in L^1(Q_T)$ ,  $G(w_0) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\tilde{G}(w_0) \in L^1(\Omega)$ , alors*

$$\int_{Q_T} (w - w_0) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(w(x, \tau)) d\tau \right) dx dt \leq \int_{Q_T} \xi_t \left( w \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(w) d\tau - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(w) w d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \tilde{G}(w) d\tau \right) dx dt + \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{G}(w_0) dx,$$

*pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}(Q_T)$  tel que  $\xi \geq 0$ ,  $\xi(T) = 0$ .*

**Lemme 2.2.2** Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne croissante et  $\tilde{G}$  sa primitive s'annulant en 0. Soient deux fonctions  $w \in L^1(Q_T)$  et  $w_0 \in L^1(\Omega)$ , on suppose  $w(t, x) = w_0$  pour  $t < 0$ . Si  $G(w) \in L^\infty(Q_T)$ ,  $\tilde{G}(w) \in L^1(Q_T)$ ,  $G(w_0) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\tilde{G}(w_0) \in L^1(\Omega)$ , alors

$$\int_{Q_T} (w - w_0) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_{t-h}^t G(w(x, \tau)) d\tau \right) dx dt \geq \int_{Q_T} \xi_t \left( w \frac{1}{h} \int_{t-h}^t G(w) d\tau - \frac{1}{h} \int_{t-h}^t G(w) w d\tau + \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \tilde{G}(w) d\tau \right) dx dt + \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{G}(w_0) dx,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}(Q_T)$  tel que  $\xi \geq 0$ ,  $\xi(T) = 0$ .

**Lemme 2.2.3** Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne et  $\tilde{G}$  sa primitive s'annulant en 0. Soient deux fonctions  $w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  et  $w_0 \in L^\infty(\Omega)$  telles que  $w_t \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$  et  $w(0) = w_0$  dans  $W^{-1,p'}(\Omega)$ . Alors on a

$$-\langle w_t, G(w) \xi \rangle = \int_{Q_T} \xi_t \tilde{G}(w) dx dt + \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{G}(w_0) dx,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}(Q_T)$  tel que  $\xi(T) = 0$ .

On rappelle ensuite la définition de solutions renormalisées, introduite dans [8], et adaptée ici aux problèmes (2.1) et (2.9).

**Définition 2.2.4** On dit que la fonction mesurable  $u_l$  finie presque partout sur  $Q_l$  est une solution renormalisée du problème (2.1) si

$$T_k(u_l) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l)), \quad \forall k > 0; \quad (2.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l dx dt = 0; \quad (2.13)$$

et si pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, T) \times \bar{\Omega}_l)$  tel que  $S'(\theta)\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_l} \varphi_t S(u_l) dx dt - \int_{\Omega_l} \varphi(0) S(u_0) dx + \int_{Q_l} S''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_l} S'(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot D\varphi dx dt = \int_{Q_l} f S'(u_l) \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi S'(u_l) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l S''(u_l) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De manière similaire on définit la solution renormalisée du problème (2.9).

**Définition 2.2.5** On dit que la fonction mesurable  $v$  finie presque partout sur  $Q$  est une solution renormalisée du problème (2.9) si

$$T_k(v) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\omega)), \quad \forall k > 0; \quad (2.12')$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v| \leq 2n\}} a_2^2(t, x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \, dx_2 \, dt = 0; \quad (2.13')$$

et si pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\omega})$  tel que  $S'(\theta)\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\omega))$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_Q \varphi_t S(v) \, dx_2 \, dt - \int_\omega \varphi(0) S(v) \, dx_2 + \int_Q S''(v) a_2^2(t, x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \varphi \, dx_2 \, dt \\ & + \int_Q S'(v) a_2^2(t, x_2, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} \varphi \, dx_2 \, dt = \int_Q f S'(v) \varphi \, dx_2 \, dt \\ & + \int_Q g \cdot D_{x_2} \varphi S'(v) \, dx_2 \, dt + \int_Q g \cdot D_{x_2} v S''(v) \varphi \, dx_2 \, dt. \end{aligned} \quad (2.14')$$

**Remarque 2.2.6** Comme  $S'$  est à support compact,  $\text{supp}(S') \subset [-M, M]$  alors l'équation (2.14) doit être comprise de la manière suivante

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_I} \varphi_t S(u_I) \, dx \, dt - \int_{\Omega_I} \varphi(0) S(u_0) \, dx + \int_{Q_T} S''(u_I) a(t, x, DT_M(u_I)) \cdot DT_M(u_I) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{Q_T} S'(u_I) a(t, x, DT_M(u_I)) \cdot D\varphi \, dx \, dt = \int_{Q_T} f S'(u_I) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{Q_I} g \cdot D_{x_2} \varphi S'(u_I) \, dx \, dt + \int_{Q_I} g \cdot D_{x_2} T_M(u_I) S''(u_I) \varphi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

D'après (2.12),  $T_M(u_I) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_I))$ , par la régularité de  $S$  et  $\varphi$  et d'après (2.6), tous les termes de (2.15) sont donc bien définis. De la même manière on montre que l'égalité (2.14') est bien définie.

**Remarque 2.2.7** Les conditions (2.13) et (2.13') sont équivalentes aux conditions

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{n \leq |u_I| \leq n+1\}} a(t, x, Du_I) \cdot Du_I \, dx \, dt = 0, \quad (2.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{n \leq |v| \leq n+1\}} a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \, dx_2 \, dt = 0. \quad (2.17)$$

**Remarque 2.2.8** Dans (2.14), on peut prendre  $\varphi \in W^{1,\infty}(Q_T)$  avec  $\varphi(T) = 0$ .

**Remarque 2.2.9** Dans la formulation originale introduite par Blanchard et Murat dans [6], (2.14) est remplacé par

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(u_I)}{\partial t} - \text{div}(S'(u_I) a(t, x, Du_I)) + S''(u_I) a(t, x, Du_I) \cdot Du_I \\ & = f S'(u_I) - \text{div}_{x_2}(g S'(u_I)) + g \cdot D_{x_2} u_I S''(u_I) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \end{aligned} \quad (2.18)$$



$$S(u_l(t=0)) = S(u_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.19)$$

pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact.

L'avantage de considérer la nouvelle formulation est que le terme parabolique est intégré à l'aide du Lemme 2.2.2, la condition initiale est alors intégrée dans l'équation. La formulation est ainsi plus aisée à manipuler, notamment pour obtenir des estimations sur des fonctions de  $\theta$  en prenant des fonctions  $S$  et  $\varphi$  *ad hoc*. Les remarques sont tout a fait identiques pour l'équation en  $v$  et l'identité (2.14'). On a bien évidemment équivalence entre les deux formulations comme montré dans la proposition suivante.

**Proposition 2.2.10** *La formulation de solution renormalisée de la Définition 2.2.4 est équivalente à la formulation classique.*

**Démonstration** — Il suffit de démontrer que (2.14) est équivalent à (2.18) et (2.19). Supposons que (2.14) est vérifié, alors l'équation au sens des distributions (2.18) est clairement vérifiée en prenant des fonctions  $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$  dans (2.14) car alors  $\varphi(0) = 0$ . Pour retrouver la condition initiale, remarquons tout d'abord que par l'équation (2.14) on a

$$S(u_l) \in C([0, T]; W^{-1,s}(\Omega)) \quad \text{pour tout } s < \min(2, N/(N-1)). \quad (2.20)$$

En effet d'après (2.18),  $\frac{\partial S(u_l)}{\partial t}$  est dans  $L^1(Q_T) + L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega_l))$ , et de plus  $S(u_l) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ . Et comme pour  $s < \min(p/(p-1), N/(N-1))$ ,  $L^1(\Omega)$  et  $W^{-1,p'}(\Omega)$  s'injectent dans  $W^{-1,s}(\Omega)$ , il s'ensuit que  $S(u_l) \in W^{1,1}(0, T; W^{-1,s}(\Omega))$  et donc  $S(u_l) \in C([0, T]; W^{-1,s}(\Omega))$ . Montrons maintenant (2.19), on prend  $\varphi(t, x) = \psi(x)\xi_\delta(t)$ , où  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  et  $\xi_\delta(t) = (1 - t/\delta)^+$  (où  $\delta > 0$  destiné à tendre vers 0) dans (2.14). Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\Omega_l} \psi S(u_l) dx dt - \int_{\Omega_l} \psi S(u_0) dx + \int_0^\delta \int_{\Omega_l} S''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \psi \xi_\delta dx dt \\ + \int_0^\delta \int_{\Omega_l} S'(u_l) a(t, x, Du_l) D\psi \xi_\delta dx dt = \int_0^\delta \int_{\Omega_l} f S'(\theta) \psi \xi_\delta dx dt \\ + \int_0^\delta \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} \psi S'(u_l) \xi_\delta dx dt + \int_0^\delta \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} u_l S''(u_l) \psi \xi_\delta dx dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre  $\delta$  vers 0. Comme  $\xi_\delta$  tend vers 0 avec  $|\xi_\delta| \leq 1$ , par le théorème de Lebesgue les cinq dernières intégrales tendent vers 0, et donc on a d'une part

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\Omega} \psi S(u_l) dx dt = \int_{\Omega} \psi S(u_0) dx dt = \langle S(u_0), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)}. \quad (2.21)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\Omega} \psi S(u_l) dx dt &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \langle S(u_l), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)} \\ &= \langle S(u_l(t=0)), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

car le fait que  $S(u_l) \in W^{1,1}(0, T; W^{-1,s}(\Omega_l))$  implique que l'application  $t \in [0, T] \mapsto \langle S(u_l), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)}$  est continue. En rapprochant (2.21) et (2.22), il vient

$$\langle S(u_0), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)} = \langle S(u_l(t=0)), \psi \rangle_{W^{-1,s}(\Omega_l), W_0^{1,s'}(\Omega_l)}$$

pour tout  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  donc  $S(u_l(t=0)) = S(u_0)$ .

Supposons maintenant (2.18) et (2.19) vérifiés. Soit  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact et soit  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$  tel que  $S'(u_l)\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ , en prenant  $S = S_n$  dans (2.18) et en prenant  $S'(u_l)\varphi$  comme fonction test dans (2.18) il vient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial S_n(u_l)}{\partial t}, S'(u_l)\varphi \right\rangle + \int_{Q_l} S'_n(u_l) S'(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot D\varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{Q_l} S'_n(u_l) S''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_l} S''_n(u_l) S'(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi \, dx \, dt \\ & = \int_{Q_l} f S'_n(u_l) S'(u_l) \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi S'(u_l) S'_n(u_l) \, dx \, dt + \\ & \qquad \qquad \qquad \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l S''_n(u_l) S'(u_l) \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

On utilise le Lemme 2.2.3 pour traiter le terme parabolique, il vient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial S_n(u_l)}{\partial t}, S'(u_l)\varphi \right\rangle &= - \int_{\Omega_l} S((S_n(u_0))\varphi(0)) \, dx - \int_{Q_l} S(S_n(u_l))\varphi_t \, dx \, dt \\ &= - \int_{\Omega_l} S(u_0)\varphi(0) \, dx - \int_{Q_l} S(u_l)\varphi_t \, dx \, dt \end{aligned}$$

car pour  $n$  assez grand  $S \circ S_n = S$ ,  $S'$  étant à support compact. Par la convergence des énergies (2.13) et du fait que  $|S''_n(r)| = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n \leq |r| \leq 2n\}}$  on a

$$\int_{Q_l} S''_n(\theta) S'(\theta) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi \, dx \, dt \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs,

$$\left| \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l S''_n(u_l) S'(u_l) \varphi \, dx \, dt \right| \leq C \left( \int_{Q_l} g \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

et donc par la condition d'ellipticité (2.2) et la convergence des énergies, il découle

$$\left| \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l S''_n(u_l) S'(u_l) \varphi \, dx \, dt \right| \rightarrow 0.$$

Tous les autres termes passent aisément à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  en utilisant le théorème de Lebesgue et le fait que  $S'_n$  converge vers 1. On a donc montré (2.14).

□

D'après [8], on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 2.2.11** *Sous les hypothèses (2.2)–(2.8), il existe une unique solution renormalisée  $u_l$  (resp.  $v$ ) du problème (2.1) (resp. (2.9)).*

**Remarque 2.2.12** A partir de la formulation renormalisée vérifiée par  $u_l$  et  $v$ , on obtient les estimations suivantes, pour tout  $k > 0$ ,

$$\|u_l\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_l))} \leq C l^q \left( \|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{(L^{p'}(Q))^{N-q}}^{\frac{p'}{2}} \text{mes}(\omega)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (2.23)$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^1(\omega))} \leq C \left( \|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{(L^{p'}(Q))^{N-q}}^{\frac{p'}{2}} \text{mes}(\omega)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (2.24)$$

$$\int_{Q_l} |DT_k(u_l)|^p dx dt \leq C l^q \left[ k (\|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)}) + \|g\|_{(L^{p'}(Q))^{N-q}}^{p'} \right], \quad (2.25)$$

$$\int_Q |DT_k(v)|^p dx_2 dt \leq C \left[ k (\|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)}) + \|g\|_{(L^{p'}(Q))^{N-q}}^{p'} \right], \quad (2.26)$$

où  $C$  sont des constantes dépendant uniquement de  $\alpha$ ,  $p$  et  $q$ . En effet pour obtenir, par exemple, l'estimation (2.25), soit  $s \in (0, T)$ , on prend  $S'(r) = T_k(r)h_n(r)$  et  $\varphi(t) = \min\left(\frac{(s+\delta-t)^+}{\delta}, 1\right)$  ( $\delta > 0$  destiné à tendre vers 0) dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k h_n}(u_l) dx dt + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l h_n'(u_l) T_k(u_l) \varphi dx dt \\ & \quad + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l T_k'(u_l) h_n(u_l) \varphi dx dt = \int_{Q_l} f T_k(u_l) h_n(u_l) \varphi dx dt \\ & \quad + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l T_k'(u_l) h_n(u_l) \varphi dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l h_n'(u_l) T_k(u_l) \varphi dx dt + \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k h_n}(u_0) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

où

$$\widetilde{T_k h_n}(r) = \int_0^r T_k h_n(\rho) d\rho.$$

On fait tout d'abord tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Comme  $h_n$  converge presque partout vers 1, on obtient immédiatement par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que  $\widetilde{T_k h_n}$  converge presque partout vers  $\widetilde{T_k}$ , où  $\widetilde{T_k}(r) = \int_0^r T_k(\rho) d\rho$ . Par le lemme de Fatou, il vient alors

$$\frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k}(u_l) dx dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k h_n}(u_l) dx dt. \quad (2.28)$$

De plus comme  $0 \leq \widetilde{T}_k h_n(r) \leq |r|$ , et que  $u_0 \in L^1(\Omega_l)$ , par le théorème de convergence dominée de Lebesgue il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k h_n(u_0) dx = \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_0) dx. \quad (2.29)$$

De façon immédiate, comme  $|\varphi T_k| \leq k$ , de la convergence des énergies (2.13), le deuxième terme du membre de gauche de (2.27) tend vers 0. Puis la convergence de  $h_n$  vers 1 et le lemme de Fatou permettent de traiter aisément le dernier terme du membre de gauche de (2.27). Concernant le second terme du membre de droite de (2.27), on a par l'inégalité de Hölder et en utilisant le fait que  $|h'_n(u_l)| = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{n \leq u_l \leq 2n\}}$

$$\left| \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l h'_n(u_l) T_k(u_l) \varphi dx dt \right| \leq \|g\|_{L^{p'}(Q_l)} \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} |Du_l|^p dx dt \right)^{1/p}, \quad (2.30)$$

qui converge vers 0 en utilisant l'ellipticité (2.2) de l'opérateur  $a$  et la convergence des énergies (2.13). Pour les autres termes du second membre de (2.27), on utilise le fait que  $h_n$  converge presque partout vers 1 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En rapprochant (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) et les remarques ci-dessus, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_l) dx dt + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l T'_k(u_l) \varphi dx dt \\ \leq \int_{Q_l} f T_k(u_l) \varphi dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} T_k(u_l) \varphi dx dt + \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_0) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

On fait maintenant tendre  $\delta$  vers 0 dans (2.31). En utilisant le fait que  $\varphi$  tend alors presque partout vers 1 et est borné presque partout par 1, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_l)(s) dx + \int_0^s \int_{\Omega_l} a(t, x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) dx dt \\ \leq \int_0^s \int_{\Omega_l} f T_k(u_l) dx dt + \int_0^s \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} T_k(u_l) dx dt + \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_0) dx, \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En utilisant maintenant la condition d'ellipticité (2.2), l'inégalité de Young sur le deuxième terme du second membre et le fait que  $\widetilde{T}_k(r) \leq k|r|$ , de (2.32) il découle

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_l)(s) dx + \int_0^s \int_{\Omega_l} |DT_k(u_l)|^p dx dt \\ \leq C \left[ k \left( \|f\|_{L^1(Q_l)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega_l)} \right) + \|g\|_{(L^{p'}(Q_l))^{N-q}}^{p'} \right], \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $\alpha, p$ . Comme  $f, u_0$  et  $g$  sont indépendants de  $x_1 \in [-l, l]^q$ , on obtient immédiatement (2.25), ce qui fournit la constante  $l^q$ . Pour montrer (2.23), en observant que  $\widetilde{T}_k(r) \geq k|r| - k^2/2$ , on a pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega_l} |u_l|(s) dx &\leq \frac{k^2}{2} \text{mes}(\Omega_l) + \int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k(u_l) dx \\ &\leq \frac{k^2}{2} \text{mes}(\Omega_l) + Mk + L \quad \text{p.p. } s \in (0, T) \end{aligned}$$

où on a posé  $M = C (\|f\|_{L^1(Q_l)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega_l)})$  et  $L = C \|g\|_{(L^{p'}(Q_l))^{N-q}}^{p'}$  et où on a utilisé (2.33). En posant  $k = L^{1/2} / \text{mes}(\Omega_l)^{1/2}$ , il vient

$$\int_{\Omega_l} |u_l|(s) \leq M + \frac{3}{2} L^{1/2} \text{mes}(\Omega_l)^{1/2}, \quad \text{p.p. } s \in (0, T).$$

En utilisant les expressions de  $L$  et  $M$ , et le fait que  $f, u_0$  et  $g$  sont indépendants de  $x_1 \in [-l, l]^q$ , on obtient finalement

$$\|u_l\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))} \leq Cl^q \left( \|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{(L^{p'}(Q))^{N-q}}^{\frac{p'}{2}} \text{mes}(\omega)^{\frac{1}{2}} \right).$$

ce qui donne l'estimation (2.23). De la même manière on montre les estimations (2.24) et (2.26).  $\square$

### 2.3 Le cas fortement monotone

Dans cette partie, on montre qu'avec des hypothèses supplémentaires sur  $a$  et des conditions reliant  $p, q$  et  $N$ ,  $u_l$  et ses troncatures convergent vers  $v$ , dans un espace de Sobolev convenable, avec vitesse de convergence. On suppose que  $p \geq 2$  et que  $a$  satisfait, en plus des conditions (2.2)–(2.6), l'hypothèse de forte monotonie suivante

$$(a(t, x, \xi) - a(t, x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') \geq c_p |\xi - \xi'|^p, \quad (2.34)$$

pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ , et pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \xi'$ , où  $c_p$  est une constante positive. On suppose de plus que l'opérateur  $a$  satisfait la condition de Lipschitz suivante

$$|a_1^1(t, x, \xi)| + |a_1^2(t, x, \xi) - a_1^2(t, x, \xi')| \leq L |\xi - \xi'| (1 + |\xi|^{p-2} + |\xi'|^{p-2}) \quad (2.35)$$

pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ , pour tout  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ , tel que  $\xi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2' \end{pmatrix}$ , où  $L$  est une constante positive.

Tout d'abord, rappelons que Chipot et Rougirel ont étudié le comportement asymptotique de la solution du problème (1.1) dans le cadre variationnel (voir [18], [20]). Plus

précisément, dans le cas d'un opérateur linéaire, c'est-à-dire  $a$  de la forme  $a(t, x, \xi) = A(t, x)\xi$  où  $A$  est une matrice vérifiant les conditions de structures suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}(t, x_1, x_2) & A_{12}(t, x_2) \\ A_{21}(t, x_1, x_2) & A_{22}(t, x_2) \end{pmatrix}, \quad A \in (L^\infty(\mathbb{R}^q \times \omega))^{N^2} \quad (2.36)$$

$$A_{11} \in M_{q, q}, \quad A_{12} \in M_{q, N-q}, \quad A_{21} \in M_{N-q, q}, \quad A_{22} \in M_{N-q, N-q}. \quad (2.37)$$

Remarquons qu'alors  $a$  satisfait les hypothèses (2.2)–(2.6), (2.34), (2.35) avec  $p = 2$ . Sous les hypothèses (2.7), (2.8), (2.36), (2.37) il existe une unique solution faible  $u_l \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$  (resp.  $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\omega))$ ) du problème (2.1), (resp. (2.9)). Ils ont alors montré le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1** *On suppose les conditions (2.7), (2.8), (2.36), (2.37) vérifiées. Soit  $l_0$  un réel positif. Alors*

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,2}(\Omega_{l_0})) \text{ et dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))$$

avec les vitesses de convergence

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))} + \|Du_l - Dv\|_{L^2(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0$$

Maintenant pour un opérateur plus général satisfaisant les hypothèses (2.2)–(2.6), avec des techniques similaires à la démonstration du théorème précédent et aux démonstrations effectuées dans le cas elliptique pour montrer le Théorème 1.3.1, on montre aisément les résultats suivants.

**Théorème 2.3.2** *On suppose les conditions (1.2)–(2.8), (2.34) et (2.35) vérifiées. Soit  $l_0$  un réel positif. Si  $p < \frac{2q}{q-1}$  (avec la convention  $\frac{2q}{q-1} = +\infty$  pour  $q = 1$ ), alors*

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})) \text{ et dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))$$

avec les vitesses de convergence

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))}^2 + \|Du_l - Dv\|_{L^p(\Omega_{l_0})}^p = O(l^\alpha), \quad \forall q - \frac{p}{p-2} < \alpha < 0 \text{ si } p > 2$$

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))} + \|Du_l - Dv\|_{L^2(\Omega_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad \forall \alpha < 0 \text{ si } p = 2.$$

Dans le cas de données  $L^1 + L^{p'}(W^{-1,p'})$ , on montre que  $u_l$  et son gradient sont dans des espaces de Lorentz et que la convergence de  $u_l$  a lieu dans ces espaces des Lorentz, avec évaluation des vitesses de convergences. On montrera également que les troncatures  $T_k(u_l)$  convergent vers  $T_k(v)$  dans  $W^{1,p}(\Omega_{l_0})$ .

### 2.3.1 Régularité des solutions renormalisées

**Lemme 2.3.3** *On suppose que  $1 < p < +\infty$ . Soit  $w$  une fonction mesurable telle que  $w \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))$  et  $T_k(w) \in L^p(0, T; W_{\Gamma_l}^{1,p}(\Omega_l))$ , pour tout  $k > 0$ , et telle que*

$$\int_{Q_l} |DT_k(w)|^p dx dt \leq Mk + L, \quad \forall k > 0,$$

où  $M$  et  $L$  sont des constantes données. Alors

$$\|w\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} \leq C \left( \|w\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_l))}^{\frac{1+s-p}{s}} \left( M^{\frac{1}{s}} + L^{\frac{1}{s+1}} \text{mes}(Q_l)^{\frac{1}{s(s+1)}} \right) + L^{\frac{1}{s+1}} \text{mes}(Q_l)^{\frac{1}{s(s+1)}} \right),$$

où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $p, N, \omega$  et indépendante de  $l$ , et où

$$\begin{cases} s \in [p-1, p + \frac{p}{N} - 1] & \text{si } p < N \\ s \in [p-1, p[ & \text{si } p = N \\ s \in [p-1, p] & \text{si } p > N. \end{cases} \quad (2.38)$$

Le gradient  $Dw$  satisfait

$$\|Dw\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} \leq C \left( \|w\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_l))}^{\frac{1+s-p}{s}} M^{\frac{1}{s}} + L^{\frac{1}{p}} \text{mes}(Q_l)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{p}} \right),$$

où  $C$  est une constante dépendant uniquement de  $p, N, \omega$  et indépendante de  $l$ , et avec

$$\begin{cases} s \in [p-1, p - \frac{N}{N+1}] & \text{si } p < N \\ s \in [p-1, \frac{p^2}{p+1}[ & \text{si } p = N \\ s \in [p-1, \frac{p^2}{p+1}] & \text{si } p > N. \end{cases} \quad (2.39)$$

**Démonstration** — Pour démontrer ce lemme, on adapte la preuve du Lemme (1.3.4) au cas parabolique. La démonstration se fait en deux étapes. Dans une première étape on établit des estimations sur  $w$  en distinguant trois cas  $p < N, p = N, p > N$ . Tandis que dans la seconde étape on s'intéresse au gradient  $Dw$ .

**Étape 1 : estimations sur  $w$ .**

Le but est de démontrer dans les trois cas l'inégalité

$$\int_{Q_l} |T_k(w)|^r dx dt \leq C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_l))}^{r-p} (Mk + L). \quad (2.40)$$

avec

$$\begin{cases} r \in [p, p + \frac{p}{N}] & \text{si } p < N \\ r \in [p, p + 1[ & \text{si } p = N \\ r \in [p, p + 1] & \text{si } p > N. \end{cases}$$

**1er cas :**  $p < N$ . Par l'inégalité d'interpolation, on a

$$\|T_k(w)\|_{L^r(\Omega_l)} \leq \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^\alpha \|T_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^\beta \|T_k(w)\|_{L^{p^*}(\Omega_l)}^\gamma$$

où

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{p^*}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré et l'injection de Sobolev, il découle alors

$$\|T_k(w)\|_{L^r(\Omega_l)} \leq C(N, p, \omega) \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^\alpha \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^{1-\alpha}, \quad (2.41)$$

où  $C(p, N, \omega)$  ne dépend pas de  $l$  grâce à la géométrie de  $\Omega_l$ . En élevant (2.41) à la puissance  $r$ , en intégrant sur  $(0, T)$  et en posant  $\alpha = 1 - \frac{p}{r}$ , il vient alors

$$\int_{Q_l} |T_k(w)|^r dx dt \leq C(N, p, \omega) \|T_k(w)\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} \int_{Q_l} |DT_k(w)|^p dx dt.$$

D'où, par hypothèse

$$\int_{Q_l} |T_k(w)|^r dx dt \leq C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} (Mk + L). \quad (2.42)$$

D'après les conditions reliant  $\alpha, \beta, \gamma, r, p$  et  $N$ , on a, après calculs

$$r = \frac{p + \frac{p}{N}}{1 + \frac{\beta}{N}}, \quad \text{où } \beta \text{ décrit } [0, 1],$$

donc  $r$  décrit  $[p, p + \frac{p}{N}]$ .

**2ème cas :**  $p = N$ , soit  $\rho \geq p$ , par l'inégalité d'interpolation, on a

$$\|T_k(w)\|_{L^r(\Omega_l)} \leq \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^\alpha \|T_k(w)\|_{L^\rho(\Omega_l)}^\beta$$

où

$$\alpha + \beta = 1, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{\rho}.$$

D'après l'injection de Sobolev, il découle alors

$$\|T_k(w)\|_{L^r(\Omega_l)} \leq C(N, p, \omega) \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^\alpha \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^{1-\alpha}, \quad (2.43)$$

où  $C(p, N, \omega)$  ne dépend pas de  $l$  grâce à la géométrie de  $\Omega_l$ . Cette inégalité étant la même que l'inégalité (2.41), on montre alors de la même façon l'inégalité (2.40), mais cette fois-ci avec

$$r = 1 + p - \frac{p}{\rho}, \quad \text{où } \rho \geq p$$

**3ème cas :**  $p > N$ , on a d'une part pour  $0 \leq \rho \leq r$ ,

$$\int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx \leq \|T_k(w)\|_{L^\infty(\Omega_l)}^{r-\rho} \int_{\Omega_l} |T_k(w)|^\rho dx.$$

D'autre part, par l'inégalité d'interpolation on a

$$\|T_k(w)\|_{L^\rho(\Omega_l)} \leq \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^\alpha \|T_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^\beta,$$



où  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient

$$\alpha + \beta = 1, \quad \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{p} = \frac{1}{\rho}.$$

Et donc en combinant ces deux dernières inégalités, et en utilisant les inégalités de Sobolev et Poincaré il découle

$$\int_{\Omega_l} |T_k(w)|^r dx \leq C(N, p, \omega) \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^{\rho\alpha} \|DT_k(w)\|_{L^p(\Omega_l)}^{r-\rho+\rho\beta},$$

où  $C(N, p, \omega)$  ne dépend pas de  $l$  grâce à la géométrie de  $\Omega_l$ . On pose  $r - \rho + \rho\beta = p$ , et on intègre l'inégalité ci-dessus sur  $[0, T]$ , il vient

$$\int_{Q_l} |T_k(w)|^r dx dt \leq C(N, p, \omega) \|T_k(w)\|_{L^1(\Omega_l)}^{\rho\alpha} (Mk + L).$$

Par un simple calcul on montre que  $\rho\alpha = r - p$ , de sorte que l'inégalité ci-dessus est du même type que l'inégalité (2.40). On montre dans ce cas que

$$r = \frac{p(p\alpha + 1)}{p\alpha + (1 - \alpha)}, \quad \text{où } \alpha \in [0, 1],$$

de sorte que  $r \in [p, p + 1]$ .

Dans les trois cas, grâce à (2.40), on déduit que pour tout  $k > 0$

$$\begin{aligned} k^r \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |w| > k\}) &\leq \int_{Q_l} |T_k(w)|^r dx dt \\ &\leq C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} (Mk + L). \end{aligned} \quad (2.44)$$

On déduit alors une estimation dans les espaces de Lorentz. En effet, de (2.44), il vient

$$k^{r-1} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |w| > k\}) \leq C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} (M + Lk^{-1}). \quad (2.45)$$

De l'inégalité

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^{r-1, \infty}(Q_l)}^{r-1} &\leq \sup_{0 < k \leq k_0} k^{r-1} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |w| > k\}) \\ &\quad + \sup_{k > k_0} k^{r-1} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |w| > k\}) \end{aligned}$$

et de (2.45), il découle

$$\|w\|_{L^{r-1, \infty}(Q_l)}^{r-1} \leq k_0^{r-1} \text{mes}(Q_l) + C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} (M + Lk_0^{-1}).$$

En posant  $k_0 = L^{1/r} \text{mes}(Q_l)^{-1/r}$ , on établit alors l'inégalité

$$\|w\|_{L^{r-1, \infty}(Q_l)}^{r-1} \leq C(N, p, \omega) \left[ \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} \left( M + L^{1-\frac{1}{r}} \text{mes}(Q_l)^{\frac{1}{r}} \right) + L^{1-\frac{1}{r}} \text{mes}(Q_l)^{\frac{1}{r}} \right].$$

**Étape 2 : estimations sur  $Dw$ .**

Soient  $\lambda$  et  $k$  deux réels positifs. On a

$$\begin{aligned} \lambda^p \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda, |w| \leq k\}) &\leq \int_{\{|w| \leq k\}} |Dw|^p dx dt \\ &= \int_{Q_l} |DT_k(w)|^p dx dt \\ &\leq Mk + L. \end{aligned} \quad (2.46)$$

En effectuant la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\}) &\leq \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda, |w| \leq k\}) \\ &\quad + \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda, |w| > k\}), \end{aligned}$$

et en utilisant (2.44) et (2.46), il vient

$$\text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\}) \leq \frac{Mk + L}{\lambda^p} + C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} \frac{Mk + L}{k^r}. \quad (2.47)$$

On décompose  $k$  en  $k = a + b$ , où  $a, b > 0$  seront déterminés ultérieurement. Comme  $k^{1-r} \leq a^{1-r}$  et  $k^{-r} \leq b^{-r}$ , (2.47) devient

$$\begin{aligned} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\}) &\leq \left( \frac{Ma}{\lambda^p} + C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} Ma^{1-r} \right) \\ &\quad + \left( \frac{Mb}{\lambda^p} + C(N, p, \omega) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{r-p} Lb^{-r} \right) + \frac{L}{\lambda^p}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$a = \lambda^{\frac{p}{r}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{1-\frac{p}{r}}, \quad b = M^{-\frac{1}{1+r}} \lambda^{\frac{p}{1+r}} L^{\frac{1}{1+r}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{r-p}{1+r}}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\}) &\leq C(N, p, \omega) \left( \frac{M \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{1-\frac{p}{r}}}{\lambda^{p-\frac{p}{r}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^{\frac{r}{1+r}}}{\lambda^{\frac{pr}{1+r}}} L^{\frac{1}{1+r}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{r-p}{1+r}} + \frac{L}{\lambda^p} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

On élève à la puissance  $1/(p - \frac{p}{r})$  l'inégalité (2.48) et on multiplie par  $\lambda$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda \text{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\})^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} &\leq C(N, p, \omega) \left[ M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} \right. \\ &\quad \left. + M^{\frac{r}{1+r} \frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{r-p}{1+r} \frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \frac{L^{\frac{1}{1+r} \frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{pr}{(1+r)(p-\frac{p}{r})-1}}} + \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{p}{p-\frac{p}{r}}-1}} \right]. \end{aligned}$$

Ce qui après calculs s'écrit

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\})^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} &\leq C(N, p, \omega) \left[ M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} \right. \\ &\quad \left. + \left( M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} \right)^{\frac{r}{r+1}} \left( \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}} \right)^{\frac{1}{1+r}} + \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Comme  $\frac{r}{1+r} + \frac{1}{1+r} = 1$ , par l'inégalité de Young, on a,

$$\left( M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} \right)^{\frac{r}{r+1}} \left( \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}} \right)^{\frac{1}{1+r}} \leq M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} + \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}}.$$

En injectant cette dernière inégalité dans (2.49), on en déduit alors

$$\lambda \operatorname{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\})^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \leq C(N, p, \omega) \left( M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} + \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}} \right). \quad (2.50)$$

La décomposition suivante

$$\begin{aligned} \|Dw\|_{L^{p-\frac{p}{r}, \infty}(Q_l)} &\leq \sup_{0 < \lambda \leq \lambda_0} \lambda \operatorname{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\})^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \\ &\quad + \sup_{\lambda > \lambda_0} \lambda \operatorname{mes}(\{(t, x) \in Q_l : |Dw| > \lambda\})^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}, \end{aligned}$$

injectée dans l'inégalité (2.50) permet d'obtenir que

$$\|Dw\|_{L^{p-\frac{p}{r}, \infty}(Q_l)} \leq \lambda_0 \operatorname{mes}(Q_l)^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} + C(N, p, \omega) \left( M^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}} \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{1-\frac{p}{r}}{p-\frac{p}{r}}} + \frac{L^{\frac{1}{p-\frac{p}{r}}}}{\lambda_0^{\frac{1}{r-1}}} \right).$$

Finalement en posant  $\lambda_0 = L^{1/p} \operatorname{mes}(Q_l)^{-1/p}$ , on en déduit que

$$\|Dw\|_{L^{p-\frac{p}{r}, \infty}(Q_l)} \leq C(N, p, \omega) \left( \|w\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_l))}^{\frac{r-p}{rp-p}} M^{\frac{r}{rp-p}} + L^{\frac{1}{p}} \operatorname{mes}(Q_l)^{\frac{1}{p} \frac{1}{r-1}} \right),$$

où on rappelle que

$$\begin{cases} r \in [p, p + \frac{p}{N}] & \text{si } p < N \\ r \in [p, p + 1[ & \text{si } p = N \\ r \in [p, p + 1] & \text{si } p > N. \end{cases}$$

□

### 2.3.2 Comportement asymptotique de $u_l$

**Théorème 2.3.4** *Supposons que les conditions (2.2)–(2.8), (2.34), (2.35) sont vérifiées. Soit un  $l_0$  un réel positif. Si  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention que  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  si  $q = 1$ ), alors on a*

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_{l_0}))} + \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_0})} = O(l^\alpha), \quad (2.51)$$

pour tout  $p-1 < s < \bar{s}(p, q, N)$  et pour tout  $\bar{\alpha}(p, q, N, s) < \alpha < 0$ , où

$$\bar{s}(p, q, N) = \min \left( p - \frac{N}{N+1}, \frac{q(p^2 - 3p + 3)}{q(p-1) + 1} \right),$$

de plus  $s$  peut atteindre la valeur  $\bar{s}(p, q, N)$  si  $p < N$  ou  $p > N$ . Et

$$\bar{\alpha}(s, p, q, N) = \begin{cases} \frac{2+s-p}{p-2} \left[ \frac{q}{s} (s-p+1 + (p-2)(2+s-p)) - 1 \right] & \text{si } p > 2, \\ -\infty & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

**Théorème 2.3.5** *Supposons que les conditions (2.2)–(2.8), (2.34), (2.35) sont vérifiées. Si  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$  (avec la convention que  $\frac{2q-1}{q-1} = +\infty$  si  $q = 1$ ), alors pour tout  $l_0 > 0$  on a*

$$\begin{aligned} T_k(u_l) &\rightarrow T_k(v) \quad \text{dans } L^p \left( 0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}) \right), \quad \forall k \geq 0, \\ u_l &\rightarrow v \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0})). \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.6** Dans le cas  $p > 2$ , la condition  $s < \bar{s}(p, q, N)$  est équivalente  $\bar{\alpha}(s, p, q, N) < 0$  donc la condition sur  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}(s, p, q, N) < \alpha < 0$  est cohérente.

**Remarque 2.3.7** Dans le cas  $p > 2$ , la vitesse de convergence dans (2.51) et l'espace de Lorentz dans lequel la convergence a lieu dépendent de  $s$ . Plus précisément, plus l'espace de Lorentz est petit plus la vitesse de convergence est faible.

**Remarque 2.3.8** Grâce à l'inégalité de Hölder généralisée (1.21), le Théorème 2.3.4 implique la convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans des espaces de Sobolev. En effet, pour tout  $l_0 > 0$ , on a alors

$$\|Du_l - Dv\|_{L^s(Q_{l_0})} = O(l^\alpha),$$

où  $s$  et  $\alpha$  vérifient les mêmes conditions que dans le Théorème 2.3.5. Ainsi par l'inégalité de Poincaré, on obtient la convergence dans les espaces de Sobolev  $L^s(0, T; W^{1,s}(\Omega))$ . En particulier, on mentionne un résultat qui sera utile dans la preuve du Théorème 2.3.5,

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{p-1}(Q_{l_0})} \rightarrow 0$$

quand  $l \rightarrow +\infty$ , pour tout  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$ .

**Remarque 2.3.9** On peut donner quelques précisions sur les paramètres  $p, q, N$ . Tout d'abord comme  $p < \frac{2q-1}{q-1}$ , alors si  $p \geq N$ , cela implique que  $q = 1$  et dans ce cas on a

$$\bar{s}(p, q, N) = p - \frac{N}{N+1}.$$

**Démonstration du Théorème 2.3.4**— La stratégie est similaire à celle du cas elliptique avec des difficultés supplémentaires du fait que l'on traite ici un problème parabolique. Elle est effectuée en deux étapes. Dans une première étape, en combinant les techniques développées par Chipot dans le cas parabolique (voir [18]) avec le cadre des solutions renormalisées on montre l'estimation (2.54). Dans la deuxième étape, en appliquant le Lemme 2.3.3 à l'estimation (2.54) on montre des estimations vérifiées par  $D(u_l - v)$  dans les espaces de Lorentz.

**Étape 1.** Dans cette étape, on introduit une fonction régulière  $\rho \in C^1(\mathbb{R}^q)$  telle que

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho = 1 \quad \text{dans} \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^q, \quad \rho = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^q \setminus [-1, 1]^q \quad (2.52)$$

$$|D_{x_1} \rho| \leq \Lambda \quad (2.53)$$

où  $\Lambda$  est une constante positive,  $\Lambda \geq 2$ . On démontre alors les estimations suivantes

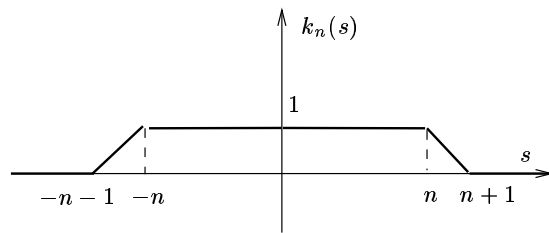
$$\int_{Q_{l_1/2}} |DT_k(u_l - v)|^p dx dt \leq C \frac{k}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt, \quad (2.54)$$

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_1/2}))} \leq \frac{C}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt, \quad (2.55)$$

pour tout  $0 < l_1 < l$  et où  $C$  est dans chacune de ces inégalités une constante positive dépendant uniquement de  $c_p$ ,  $L$ ,  $\Lambda$ , avec  $c_p$  et  $L$  définis dans (2.34) et (2.35).

Les inégalités (2.54) et (2.55) s'obtiennent par des techniques d'unicité, en prenant  $T_k(u_l - v)\rho(\frac{x_1}{l_1})$  formellement dans la différence des équations (2.1) et (2.9), et en utilisant les hypothèses (2.2)–(2.5), (2.35).

Soit  $0 < l_1 < l$ . Soit  $\xi \in W^{1, \infty}((0, T))$ ,  $\xi \geq 0$  et  $\xi(T) = 0$ . On introduit les fonctions suivantes,  $k_n(r) = 1 - |T_{n+1}(r) - T_n(r)|$  et  $Z_n(r) = \int_0^r k_n(\rho) d\rho$ .



Pour  $h > 0$ , on pose

$$\varphi(t, x) = \xi(t) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_l(\tau, x)) - Z_n(v(\tau, x))) d\tau.$$

En prenant  $\varphi$  défini ci-dessus et  $S = Z_n$  dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(u_0)) \varphi_t dx dt + \int_{Q_l} Z_n''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} Z_n'(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot D\varphi dx dt = \int_{Q_l} f Z_n'(u_l) \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi Z_n'(u_l) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (2.56)$$

De même, en fixant  $x_1 \in [-l, l]^q$ , on prend  $\varphi(\cdot, x_1, \cdot)$  comme fonction test dans (2.14'), on multiplie par  $\rho(\frac{x_1}{l})$  et on intègre sur  $[-l, l]^q$ , il découle

$$\begin{aligned} - \int_{Q_l} (Z_n(v) - Z_n(u_0)) \varphi_t dx dt + \int_{Q_l} Z_n''(v) a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} Z_n'(v) a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} \varphi dx dt = \int_{Q_l} f Z_n'(v) \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi Z_n'(v) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} v Z_n''(v) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (2.57)$$

En faisant la différence de (2.56) et (2.57), on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(v)) \varphi_t dx dt + \int_{Q_l} Z_n''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi dx dt \\ - \int_{Q_l} Z_n''(v) a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \varphi dx dt + \int_{Q_l} Z_n'(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot D\varphi dx dt \\ - \int_{Q_l} Z_n'(v) a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} \varphi dx dt = \int_{Q_l} f (Z_n'(u_l) - Z_n'(v)) \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi (Z_n'(u_l) - Z_n'(v)) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi dx dt \\ - \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} v Z_n''(v) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.58)$$

que l'on écrit  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = I_6 + I_7 + I_8 + I_9$ . Nous allons maintenant faire tendre  $h$  vers 0 puis  $n$  vers  $+\infty$  dans (2.58). Comme  $\varphi$  est bornée uniformément en  $h$ , on montre dans un premier temps que

$$|I_2| + |I_3| + |I_6| + |I_8| + |I_9| \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

quand  $h$  tend vers 0 puis  $n$  tend vers  $+\infty$ . En effet, tout d'abord, d'après les convergences des énergies (2.16), (2.17) et le fait que  $|Z_n''(r)| = \mathbf{1}_{\{n \leq |r| \leq n+1\}}$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} |I_2| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \int_{Q_l} Z_n''(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \varphi dx dt \right| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} |I_3| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \int_{Q_l} Z_n''(v) a_2^2(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} v \varphi dx dt \right| = 0 \end{aligned}$$

et aussi, en utilisant la coercivité (2.2) de  $a$ ,

$$\begin{aligned} I_8 = \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt &\leq C \|g\|_{L^{p'}(Q_l)} \left( \int_{\{n \leq |u_l| \leq n+1\}} |Du_l|^p \, dx \, dt \right)^p \\ &\leq C \|g\|_{L^{p'}(Q_l)} \left( \int_{\{n \leq |u_l| \leq n+1\}} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l \, dx \, dt \right)^p \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . De la même façon

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} I_9 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} v Z_n''(v) \varphi \, dx \, dt = 0.$$

Enfin comme  $Z_n'(u_l) - Z_n'(v)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $\infty$  et est bornée presque partout par 2, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} I_6 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} f(Z_n'(u_l) - Z_n'(v)) \varphi \, dx \, dt = 0.$$

Ainsi (2.59) est démontrée.

Pour passer à la limite dans les autres termes de (2.58), on utilise le fait que pour  $\eta \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega_l))$ ,

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \eta \, d\tau \rightarrow \eta \text{ fortement dans } L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega_l)) \quad (2.60)$$

quand  $h \rightarrow 0$ . Pour traiter le premier terme  $I_1$  de (2.58) on utilise tout d'abord le Lemme 2.2.1 et on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(v)) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \, d\tau \right) \, dx \, dt \\ & \geq - \int_{Q_l} \xi_t \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \left( (Z_n(u_l) - Z_n(v)) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \, d\tau \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (Z_n(u_l) - Z_n(v)) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \, d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \tilde{T}_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \, d\tau \right) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Puis de la convergence (2.60), il découle

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(u_0)) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \, d\tau \right) \, dx \, dt \\ \geq - \int_{Q_l} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Concernant le terme  $I_7$ , toujours d'après la convergence (2.60), quand  $h \rightarrow 0$  on a

$$\int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi(Z'_n(u_l) - Z'_n(v)) dx dt \rightarrow \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))(Z'_n(u_l) - Z'_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt. \quad (2.63)$$

Enfin pour les termes restants  $I_4$  et  $I_5$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} I_4 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} Z'_n(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot D\varphi dx dt \\ &= \int_{Q_l} Z'_n(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt \\ &\quad + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z'_n(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi dx dt, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} I_5 &= \lim_{h \rightarrow 0} - \int_{Q_l} Z'_n(v) a(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} \varphi dx dt \\ &= - \int_{Q_l} Z'_n(v) a(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.65)$$

En injectant (2.59), (2.62), (2.63), (2.64) et (2.65) dans (2.58) il découle

$$\begin{aligned} &- \int_{Q_l} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_l} Z'_n(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt \\ &\quad + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z'_n(u_l) a(t, x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi dx dt \\ &\quad - \int_{Q_l} Z'_n(v) a(t, x, D_{x_2} v) \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt \\ &= \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))(Z'_n(u_l) - Z'_n(v)) \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi dx dt + \epsilon(n), \end{aligned} \quad (2.66)$$

que l'on écrit  $J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = J_5 + \epsilon(n)$ , où  $\epsilon(n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Reste à faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans (2.66). Comme  $v$  est indépendant de  $x_1$ , alors  $D_{x_1} v = 0$  et de la condition structurelle (2.5) il découle

$$a^1(t, x, Dv) = 0, \quad \text{p.p. dans } Q_l.$$

Donc, d'après la condition structurelle (2.4) pour presque tout  $(t, x) \in Q_l$ , on a

$$\begin{aligned} &a(t, x, Dv) \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \\ &= a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_1} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) + a_2^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)). \end{aligned}$$



On a alors

$$J_2 + J_4 = \int_{Q_l} [Z'_n(u_l)a(t, x, Du_l) - Z'_n(v)a(t, x, Dv)] \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))\xi\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx dt \\ + \int_{Q_l} Z'_n(v)a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_1}T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))\xi\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx dt. \quad (2.67)$$

Comme  $v$  ne dépend pas de  $x_1$ , on a

$$a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_1}T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))Z'_n(v) = D_{x_1} \cdot (a_1^2(x_2, Dv)T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))Z'_n(v)). \quad (2.68)$$

Alors, en utilisant (2.68) dans le dernier terme de (2.67) et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$J_2 + J_4 = \int_{Q_l} [Z'_n(u_l)a(t, x, Du_l) - Z'_n(v)a(t, x, Dv)] \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))\xi\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) dx dt \\ - \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z'_n(v)a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot (D_{x_1}\rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right)T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))\xi dx dt. \quad (2.69)$$

Remarquons que l'intégrale sur la frontière  $\Gamma_l$  découlant de la formule de Green est égale à 0 car la fonction  $\rho$  y est nulle. On décompose le premier terme du second membre de (2.69) de la manière suivante

$$\int_{Q_l} [Z'_n(u_l)a(t, x, Du_l) - Z'_n(v)a(t, x, Dv)] \cdot DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)\xi dx dt \\ = \int_{Q_l} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(v)| \leq k\}} (a(t, x, DZ_n(u_l)) - a(t, x, DZ_n(v))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(v))\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)\xi dx dt \\ + \int_{Q_l} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(v)| \leq k\}} (Z'_n(u_l)a(t, x, Du_l) - a(t, x, DZ_n(u_l))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(v))\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)\xi dx dt \\ + \int_{Q_l} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(v)| \leq k\}} (Z'_n(v)a(t, x, Dv) - a(t, x, DZ_n(v))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(v))\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)\xi dx dt \\ = L_1 + L_2 + L_3. \quad (2.70)$$

En observant que d'après la définition de  $Z_n$  on a  $Z'_n(u_l)a(Du_l) = a(DZ_n(u_l))$  presque partout sauf sur l'ensemble  $\{(t, x); n \leq |u_l(t, x)| \leq n+1\}$  et en utilisant la convergence des énergies on montre, (voir [6] pour les détails), que  $L_2$  et  $L_3$  tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'autre part, d'après la forte monotonie (2.34) de l'opérateur  $a$  on a

$$L_1 \geq c_p \int_{Q_l} |DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))|^p \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)\xi dx dt. \quad (2.71)$$

Pour ce qui est de  $J_3$ , en rappelant la condition structurelle (2.4) et le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right)$  est indépendant de  $x_2$ , on obtient

$$a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) = a_1^1(t, x, Du_l) \cdot D_{x_1}\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) + a_1^2(t, x, Du_l) \cdot D_{x_1}\rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right).$$

Ainsi

$$J_3 = \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} a_1^1(t, x, Du_l) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) Z_n'(u_l) \xi \, dx \, dt \\ + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} a_1^2(t, x_2, Du_l) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) Z_n'(u_l) \xi \, dx \, dt. \quad (2.72)$$

Par conséquent, à l'aide de (2.70), (2.71) et (2.72), on déduit que

$$J_2 + J_3 + J_4 \geq c_p \int_{Q_l} |DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))|^p \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi \, dx \, dt \\ + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z_n'(u_l) a_1^1(t, x, Du_l) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi \, dx \, dt \\ + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} (Z_n'(u_l) a_1^2(t, x_2, Du_l) - Z_n'(v) a_1^2(t, x_2, Dv)) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi \, dx \, dt. \quad (2.73)$$

Pour traiter le dernier terme de (2.73), on effectue la décomposition

$$Z_n'(u_l) a_1^2(t, x_2, Du_l) - Z_n'(v) a_1^2(t, x_2, Dv) \\ = Z_n'(u_l) (a_1^2(t, x_2, Du_l) - a_1^2(t, x_2, Dv)) + (Z_n'(u_l) - Z_n'(v)) a_1^2(t, x_2, Dv). \quad (2.74)$$

D'après la croissance (2.6) et les régularités du Lemme 2.3.3,  $a_1^2(t, x_2, Dv)$  appartient à  $L^1(Q_l)$  donc comme  $Z_n'(u_l) - Z_n'(v) \rightarrow 0$ , par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_l} (Z_n'(u_l) - Z_n'(v)) a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi \, dx \, dt = 0. \quad (2.75)$$

Et donc en regroupant (2.73), (2.74) et (2.75), il vient

$$J_2 + J_3 + J_4 \geq \int_{Q_l} |DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))|^p \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi \, dx \, dt \\ + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z_n'(u_l) a_1^1(t, x_2, Du_l) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi \, dx \, dt \\ + \frac{1}{l_1} \int_{Q_l} Z_n'(u_l) (a_1^2(t, x_2, Du_l) - a_1^2(t, x_2, Dv)) \cdot (D_{x_1} \rho)\left(\frac{x_1}{l_1}\right) T_k(Z_n(u_l) - Z_n(v)) \xi \, dx \, dt + \epsilon(n), \quad (2.76)$$

où  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par l'inégalité de Young, pour  $\eta > 0$ , on a

$$|J_5| \leq C(\eta) \int_{Q_l} |g|^{p'} |Z_n'(u_l) - Z_n'(v)|^{p'} \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi \, dx \, dt \\ + \eta \int_{Q_l} |DT_k(Z_n(u_l) - Z_n(v))|^p \rho\left(\frac{x_1}{l_1}\right) \xi \, dx \, dt \quad (2.77)$$

Comme  $|Z'_n(u_i) - Z'_n(v)|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le premier terme du second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En injectant (2.76) et (2.77) dans (2.66) et en prenant  $\eta$  suffisamment petit dans (2.77), on en déduit que

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_i} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt + C \int_{Q_i} |DT_k(Z_n(u_i) - Z_n(v))|^p \rho(\frac{x_1}{l_1}) \xi dx dt \\ & \leq \left| \frac{1}{l_1} \int_{Q_i} a_1^1(t, x_2, Du_i) \cdot (D_{x_1} \rho)(\frac{x_1}{l_1}) T_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) Z'_n(u_i) \xi dx dt \right| \\ & + \left| \frac{1}{l_1} \int_{Q_i} Z'_n(u_i) (a_1^2(t, x_2, Du_i) - a_1^2(t, x_2, Dv)) \cdot (D_{x_1} \rho)(\frac{x_1}{l_1}) T_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) \xi dx dt \right| + \epsilon(n). \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $c_p$  et indépendante de  $l$ .

La condition de Lipschitz (2.35) de l'opérateur  $a$ , le fait que  $|Z'_n| \leq 1$ ,  $Du_i, Dv \in (L^{p-1}(Q_i))^N$  et  $|D_{x_1} \rho| \leq \Lambda$  impliquent

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_i} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt + \int_{Q_i} |DT_k(Z_n(u_i) - Z_n(v))|^p \rho(\frac{x_1}{l_1}) \xi dx dt \\ & \leq C \frac{k}{l_1} \int_{Q_{i_1}} |Du_i - Dv| (1 + |Du_i|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) \xi dx dt + \epsilon(n), \quad (2.78) \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Comme  $\tilde{T}_k(r) \leq k|r|$  et comme  $Z_n$  est lipschitzienne alors  $\tilde{T}_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) \leq k|u_i - v| \in L^1(Q_i)$  et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_i} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_i) - Z_n(v)) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt = \int_{Q_i} \xi_t \tilde{T}_k(u_i - v) \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt. \quad (2.79)$$

Par la limite s.c.i.-faible de la norme, on a

$$\int_{Q_i} |DT_k(u_i - v)|^p \xi \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_i} |DT_k(Z_n(u_i) - Z_n(v))|^p \xi \rho(\frac{x_1}{l_1}) dx dt. \quad (2.80)$$

Par conséquent, (2.79), (2.80) permettent de passer à la limite dans (2.78) quand  $n \rightarrow +\infty$  et en utilisant le fait que  $\text{supp}(\rho(\frac{\cdot}{l_1})) \subset [-l_1, l_1]^q$  avec  $\rho(\frac{x_1}{l_1}) = 1$  sur  $(-l_1/2, l_1/2)^q$ , il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{i_1/2}} \xi_t \tilde{T}_k(u_i - v) dx dt + \int_{Q_{i_1/2}} |DT_k(u_i - v)|^p \xi dx dt \\ & \leq C \frac{k}{l_1} \int_{Q_{i_1}} |Du_i - Dv| (1 + |Du_i|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) \xi dx dt. \quad (2.81) \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve de (2.54), il nous faut choisir une suite de fonctions  $\xi$  particulières. Soit  $s \in (0, T)$  et  $\delta > 0$  (destiné à tendre vers 0). Avec  $\xi(t) = \min(\frac{(s+\delta-t)^+}{\delta}, 1)$  dans (2.81)

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_{l_1/2}} \tilde{T}_k(u_l - v) dx dt + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_{l_1/2}} |DT_k(u_l - v)|^p \xi dx dt \\ \leq C \frac{k}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt. \end{aligned}$$

Faire tendre  $h$  vers 0 entraîne alors que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{l_1/2}} \tilde{T}_k(u_l - v)(s) dx + \int_0^s \int_{\Omega_{l_1/2}} |DT_k(u_l - v)|^p dx dt \\ \leq C \frac{k}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt, \end{aligned}$$

pour presque tout  $s \in (0, T)$ . Ainsi l'estimation (2.54) est montrée.

Pour montrer l'estimation (2.55), on divise l'inégalité (2.54) par  $k$  pour obtenir

$$\int_{\Omega_{l_1/2}} \frac{\tilde{T}_k}{k}(u_l - v)(s) dx \leq \frac{C}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt.$$

En faisant tendre  $k$  vers 0, l'estimation (2.55) découle alors du lemme de Fatou et du fait que  $\frac{\tilde{T}_k}{k}(\cdot)$  converge presque partout vers  $|\cdot|$ .

**Étape 2.** On applique alors le Lemme 2.3.3 en utilisant les estimations (2.54) et (2.55), il vient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1/2})} \leq C(N, p, \omega) \left( \frac{1}{l_1} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt \right)^{\frac{2-p+s}{s}}, \quad (2.82)$$

où  $s$  vérifie les conditions

$$\begin{cases} s \in [p-1, p - \frac{N}{N+1}] & \text{si } p < N \\ s \in [p-1, \frac{p^2}{p+1}] & \text{si } p = N \\ s \in [p-1, \frac{p^2}{p+1}] & \text{si } p > N. \end{cases} \quad (2.83)$$

Par l'inégalité de Hölder dans les espaces de Lorentz (1.22), avec

$$\frac{1}{s} + \frac{p-2}{s} + \frac{s-p+1}{s} = 1,$$

et en utilisant également le fait que  $\|w^r\|_{L^{s,\infty}(\Omega)} = \|w\|_{L^{rs,\infty}(\Omega)}^r$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_{l_1}} |Du_l - Dv| (1 + |Du_l|^{p-2} + |Dv|^{p-2}) dx dt \\ \leq \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1})} \|1 + |Du_l| + |Dv|\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1})}^{p-2} \|1\|_{L^{\frac{s}{s-p+1},\infty}(Q_{l_1})}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

D'après le Lemme 2.3.3, les estimations de la remarque 2.2.12 et l'identité  $\|1\|_{L^{r,1}(\Omega)} = r \operatorname{mes}(\Omega)^{1/r}$ , on a

$$\begin{aligned} \|Du_l\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} &\leq \left[ l^q \left( \|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)} + \|g\|_{L^{p'}(Q)}^{\frac{p'}{2}} \operatorname{mes}(\omega)^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1+s-p}{s}} \\ &\quad \times \left[ l^q (\|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\omega)}) \right]^{\frac{1}{s}} + \left( l^q \|g\|_{L^{p'}(Q)} \right)^{\frac{1}{p}} \operatorname{mes}(Q_l)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\|Du_l\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} \leq C \left( \omega, \|f\|_{L^1(Q)}, \|u_0\|_{L^1(\omega)}, \|g\|_{L^{p'}(Q)} \right) \left( l^{\frac{q(2+s-p)}{s}} + l^{\frac{q}{s}} \right). \quad (2.85)$$

De plus,  $l$  est destiné à tendre vers  $+\infty$ , on peut donc supposer  $l \geq 1$ . Or comme  $s \geq p-1$ , alors  $\frac{1}{s} \leq \frac{2+s-p}{s}$  et donc  $l^{\frac{q}{s}} \leq l^{\frac{q(2+s-p)}{s}}$ , qui injecté dans (2.85) donne

$$\|Du_l\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} \leq C \left( \omega, \|f\|_{L^1(Q)}, \|u_0\|_{L^1(\omega)}, \|g\|_{L^{p'}(Q)} \right) l^{\frac{q(2+s-p)}{s}}. \quad (2.86)$$

Pour ce qui est de  $Dv$ , on a  $\|Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} = \operatorname{mes}([-l, l]^q)^{\frac{1}{s}} \|Dv\|_{L^{s,\infty}(Q)}$ , donc d'après le Lemme 2.3.3 et les estimations de la remarque 2.2.12 il vient

$$\|Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} \leq C \left( \omega, \|f\|_{L^1(Q)}, \|u_0\|_{L^1(\omega)}, \|g\|_{L^{p'}(Q)} \right) l^{\frac{q}{s}}. \quad (2.87)$$

Puis en utilisant l'identité  $\|1\|_{L^{s,\infty}(Q_l)} = \operatorname{mes}(Q_l)^{1/s}$ , en combinant (2.86), (2.87) et le fait que  $l^{\frac{q}{s}} \leq l^{\frac{q(2+s-p)}{s}}$ , il vient

$$\|1 + |Du_l| + |Dv|\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1})}^{p-2} \leq C \left( \omega, \|f\|_{L^1(Q)}, \|u_0\|_{L^1(\omega)}, \|g\|_{L^{p'}(Q)} \right) l^{\frac{q(p-2)(2+s-p)}{s}}. \quad (2.88)$$

Enfin en rapprochant (2.82), (2.84) et (2.88) et en utilisant l'identité  $\|1\|_{L^{r,\infty}(\Omega)} = \operatorname{mes}(\Omega)^{1/r}$ , il vient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1/2})} \leq C \left( \frac{l^{\frac{q}{s}(s-p+1+(p-2)(2+s-p))}}{l_1} \right)^{\frac{2+s-p}{s}} \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1})}. \quad (2.89)$$

Dans le cas  $p = 2$ , l'inégalité (2.89) s'écrit

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1/2})} \leq C \left( \frac{l^{\frac{q}{s}(s-1)}}{l_1} \right) \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_1})}.$$

On prend  $l_1 = l/2^{k-1}$  et on itère l'inégalité précédente, on obtient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq C l^{k(q(1-\frac{1}{s})-1)} \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_l)}.$$

Et donc en utilisant (2.86) et (2.87) dans l'inégalité précédente il vient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq C l^{k(q(1-\frac{1}{s})-1) + \frac{q}{s}}.$$

Soit  $\alpha < 0$ . On suppose

$$q \left(1 - \frac{1}{s}\right) - 1 < 0, \quad (2.90)$$

on peut alors trouver  $k$  assez grand tel que  $k(q(1 - \frac{1}{s}) - 1) + \frac{q}{s} < \alpha$ . La condition (2.90) est toujours satisfaite si  $q = 1$  et pour  $q \geq 2$  elle est équivalente à  $s < \frac{1}{1-1/q}$ . Si on prend  $l_0 > 0$ , pour  $l$  assez grand,  $l_0 < l/2^k$ , d'où

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_0})} \leq \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq Cl^\alpha, \quad (2.91)$$

ce qui conclut le cas  $p = 2$ .

On passe au cas  $p > 2$ . On itère (2.89) en prenant  $l_1 = l/2^{k-1}$ , il vient

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq Cl^{\beta \frac{2+s-p}{s}} \left( \frac{1 - (\frac{s+2-p}{s})^k}{1 - \frac{s+2-p}{s}} \right) \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_l)}^{\frac{2+s-p}{s}}, \quad (2.92)$$

où

$$\beta = \frac{q}{s}(s - p + 1 + (p - 2)(2 + s - p)) - 1. \quad (2.93)$$

Puis en injectant (2.86) et (2.87) dans (2.92), et en utilisant le fait que  $l^{\frac{q}{s}} \leq lq^{\frac{2+s-p}{s}}$ , il vient

$$\begin{aligned} \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} &\leq Cl^{\beta \frac{2+s-p}{p-2}} \left(1 - \left(\frac{s+2-p}{s}\right)^k\right) \times l^{\frac{q(2+s-p)}{s} \left(\frac{2+s-p}{s}\right)^k} \\ &= Cl^{\beta \frac{2+s-p}{p-2} - \left(\beta \frac{2+s-p}{p-2} - \frac{q(2+s-p)}{s}\right) \left(\frac{s+2-p}{s}\right)^k}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

En utilisant l'expression de  $\beta$  (2.93), on a après un simple calcul

$$\beta \frac{2+s-p}{p-2} - \frac{q(2+s-p)}{s} = -q \frac{(s-p+1)^2}{p-2}.$$

En injectant l'identité ci-dessus dans (2.94), il découle

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq Cl^{\beta \frac{2+s-p}{p-2} + q \frac{(s-p+1)^2}{p-2} \left(\frac{s+2-p}{s}\right)^k},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . La convergence vers 0 du terme de droite de l'inégalité ci-dessus nécessite d'avoir

$$\beta = \frac{q}{s}(s - p + 1 + (p - 2)(2 + s - p)) - 1 < 0, \quad (2.95)$$

et dans ce cas alors  $\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})}$  tend vers 0 quand  $l$  tend vers  $+\infty$ . De plus si on prend  $\alpha$  tel que  $\frac{q}{s}(s - p + 1 + (p - 2)(2 + s - p)) - 1 < \alpha < 0$ , alors comme  $\frac{s+2-p}{s} < 1$ , pour  $k$  assez grand, il vient

$$\beta \frac{2+s-p}{p-2} + q \frac{(s-p+1)^2}{p-2} \left(\frac{s+2-p}{s}\right)^k < \alpha < 0.$$

Soit maintenant  $l_0$  fixé. Alors pour  $l$  assez grand  $l_0 < l/2^k$ , et donc

$$\|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l_0})} \leq \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{l/2^k})} \leq Cl^\alpha \quad (2.96)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . La condition (2.95) implique après calcul que

$$s < \frac{q(p^2 - 3p + 3)}{q(p-1) - 1}. \quad (2.97)$$

Cette dernière inégalité couplée avec l'inégalité  $s \geq p - 1$  implique que

$$p < \frac{2q-1}{q-1}, \quad \text{avec la convention } \frac{2q-1}{q-1} = +\infty \text{ pour } q = 1.$$

Pour montrer enfin la convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))$ , on combine (2.55) et (2.84) en prenant  $l_1 = 2l_0$  pour obtenir

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))} \leq \frac{1}{2l_0} \|Du_l - Dv\|_{L^{s,\infty}(Q_{2l_0})} \|1 + |Du_l| + |Dv|\|_{L^{s,\infty}(Q_{2l_0})}^{p-2} \|1\|_{L^{\frac{s}{s-p+1}, \infty}(Q_{2l_0})}$$

où  $s$  vérifie la condition (2.97). Comme  $Du_l$  converge vers  $Dv$  dans  $L^{s,\infty}(Q_{l_0})$  alors  $Du_l$  est borné dans cet espace de sorte que

$$\|1 + |Du_l| + |Dv|\|_{L^{s,\infty}(Q_{2l_0})}^{p-2} \|1\|_{L^{\frac{s}{s-p+1}, \infty}(Q_{2l_0})} \leq C(l_0).$$

Et donc d'après (2.91) ou (2.96), il vient

$$\|u_l - v\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))} \leq Cl^\alpha$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . □

**Démonstration du Théorème 2.3.5**— La preuve se déroule en deux étapes. Dans l'étape 1, on établit la convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(Q_{l_0}))$  et une estimation sur  $T_k(u_l)$  dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ , de laquelle découle la convergence faible des troncatures. Dans l'étape 2, on montre la convergence forte des troncatures à l'aide de la convergence ponctuelle des gradients.

**Étape 1.** On suppose que  $2 \leq p < \frac{2q-1}{q-1}$ . Soit  $l_0$  fixé. La convergence de  $u_l$  vers  $v$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(Q_{l_0}))$  découle directement du Théorème 2.3.4. On montre maintenant l'estimation sur  $T_k(u_l)$  dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . Soit  $s \in (0, T)$ . On pose  $\xi(t) = \min\left(\frac{(s+\delta-t)^+}{\delta}, 1\right)$ . On prend  $S'(r) = T_k(r)h_n(r)$  et  $\varphi(t, x) = \psi(t)\rho\left(\frac{x}{2l_0}\right)$  ( $\delta > 0$  destiné à tendre vers 0) dans

(2.14), ce qui donne l'égalité

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k h_n}(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l h'_n(u_l) T_k(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot Du_l T'_k(u_l) h_n(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& + \frac{1}{l_0} \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) T_k(u_l) h_n(u_l) \xi dx dt = \int_{Q_l} f T_k(u_l) h_n(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l T'_k(u_l) h_n(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l h'_n(u_l) T_k(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad \quad \quad + \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k h_n}(u_0) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx
\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{T_k h_n}(r) = \int_0^r T_k h_n(\rho) d\rho \geq 0.$$

On fait tout d'abord tendre  $n$  vers  $+\infty$ . De manière similaire à la preuve des estimations de la remarque 2.2.12, il découle alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k}(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt + \int_0^{t+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \frac{1}{l_0} \int_0^{s+\delta} \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) T_k(u_l) \xi dx ds \leq \int_{Q_l} f T_k(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad \quad \quad + \int_{Q_l} g \cdot DT_k(u_l) \xi \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt + \int_{\Omega_l} \widetilde{T_k}(u_0) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx. \quad (2.98)
\end{aligned}$$

pour presque tout  $s \in (0, T)$ . On fait maintenant tendre  $\delta$  vers 0 dans (2.98). En utilisant le fait que  $\xi$  tend presque partout vers 1 et est borné presque partout par 1, le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que  $\text{supp}(\rho(\frac{x_l}{2l_0})) \subset [-2l_0, 2l_0]^q$  impliquent que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T_k}(u_l)(s) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \frac{1}{l_0} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) T_k(u_l) dx dt = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad \quad \quad + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx dt + \int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T_k}(u_0) \rho\left(\frac{x_l}{2l_0}\right) dx. \quad (2.99)
\end{aligned}$$

En utilisant la condition d'ellipticité (2.2), les conditions de croissance (2.6), l'inégalité de Young sur le deuxième terme du second membre, l'inégalité  $\widetilde{T_k}(r) \leq k|r|$  et le fait que



$\rho(\frac{x_l}{2l_0}) = 1$  sur  $[-l_0, l_0]^q$ , de (2.99) il découle pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\int_{\Omega_{l_0}} \widetilde{T}_k(u_l)(s) dx + \int_{Q_{l_0}} |DT_k(u_l)|^p dx dt \leq C \left[ k \int_{Q_{2l_0}} (b_1 + b_2 + |Du_l|^{p-1}) dx dt + k \left( \|f\|_{L^1(Q_{2l_0})} + \|u_0\|_{L^1(\Omega_{2l_0})} \right) + \|g\|_{(L^{p'}(Q_{2l_0}))^{N-q}}^{p'} \right], \quad (2.100)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$  et de  $s$ . Ainsi  $T_k(u_l)$  est borné dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ , uniformément par rapport à  $l$ , et puisque par la remarque 2.3.8,  $u_l$  converge fortement vers  $v$  dans  $L^{p-1}(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p-1}(\Omega_{l_0}))$  on déduit que  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  faiblement dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . De plus, la convergence de  $Du_l$  vers  $Dv$  dans  $(L^{p-1}(Q_{l_0}))^N$  implique que, quitte à extraire une sous-suite,  $Du_l$  converge presque partout vers  $Dv$ . Comme  $DT_k(u_l) = \mathbb{1}_{\{|u_l| < k\}} Du_l$ , par un résultat démontré dans [10] (Lemma 3.2), qui affirme que pour presque tout  $k > 0$

$$\mathbb{1}_{\{|u_l| < k\}} \rightarrow \mathbb{1}_{\{|v| < k\}} \quad \text{p.p. dans } \Omega_{l_0},$$

on déduit que pour presque tout  $k > 0$

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(v) \quad \text{p.p. dans } Q_{l_0},$$

et donc pour presque tout  $k > 0$

$$a(t, x, DT_k(u_l)) \rightarrow a(t, x, DT_k(v)) \quad \text{p.p. dans } Q_{l_0}.$$

Par la condition (2.6) sur l'opérateur  $a$  et l'estimation (2.100), on a

$$\int_{Q_{l_0}} |a(t, x, DT_k(u_l))|^{p'} dx dt \leq C \quad (2.101)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Donc il existe  $\xi_k \in (L^{p'}(\Omega_{l_0}))^N$  tel que, à une sous-suite près

$$a(t, x, DT_k(u_l)) \rightharpoonup \xi_k \text{ faiblement dans } \left( L^{p'}(Q_{l_0}) \right)^N. \quad (2.102)$$

De plus, le théorème de Vitali, l'estimation (2.101) et la convergence ponctuelle de  $DT_k(u_l)$  impliquent

$$a(t, x, DT_k(u_l)) \rightarrow a(t, x, DT_k(v)) \text{ fortement dans } (L^q(Q_{l_0}))^N, \quad \forall q < p'.$$

Donc on peut identifier  $\xi_k = a(t, x, DT_k(v))$ , et par unicité de  $v$ , toute la suite, dans (2.102), converge.

**Étape 2.** On démontre dans cette étape la convergence

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, DT_k(v)) \cdot DT_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Ainsi on aura le résultat demandé. Pour ce faire on reprend l'égalité (2.99) et on fait tendre  $l$  vers  $+\infty$ . D'après le Théorème 2.3.4,  $u_l$  converge vers  $v$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{2l_0}))$  et  $\widetilde{T}_k$  est  $k$ -lipschitzienne alors  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{2l_0}))$ , on en déduit alors

$$\int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T}_k(u_l)(s) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T}_k(v)(s) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx, \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \quad (2.104)$$

Pour ce qui est du second terme de (2.99), par le Lemme 2.3.3 et l'estimation (2.100), on a

$$|Du_l|^{p-1} \text{ est borné dans } L^q(Q_{2l_0}); \quad \forall q < \frac{p - N/(N+1)}{p-1}. \quad (2.105)$$

De la croissance (2.6), il découle alors que

$$a(t, x, Du_l) \text{ est borné dans } (L^q(Q_{2l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{p - N/(N+1)}{p-1}.$$

Ainsi,  $a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l)$  est équiintégrable dans  $L^1(Q_{2l_0})$ . En effet, en prenant  $1 < q < \frac{p-N/(N+1)}{p-1}$ , alors si  $q'$  est le conjugué de  $q$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , pour tout  $A \subset Q_{2l_0}$

$$\begin{aligned} \int_A \left| a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l) \right| dx dt &\leq C \left( \int_A |a(t, x, Du_l)|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} |A|^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C \|a(t, x, Du_l)\|_{(L^q(Q_{2l_0}))^N} |A|^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\Lambda, l_0, k, N$  et indépendante de  $l$ . De plus, d'après la remarque 2.3.8, à une sous-suite près,  $Du_l$  converge vers  $Dv$  presque partout dans  $Q_{2l_0}$ , cela entraîne que

$$a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l) \rightarrow a(t, x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(v) \quad \text{p.p. dans } Q_{2l_0}.$$

Par conséquent, par le Théorème de Vitali,  $a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l)$  converge vers  $a(t, x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(v)$  fortement dans  $L^1(Q_{2l_0})$ . Cette convergence implique d'une part

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(u_l) dx dt = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)T_k(v) dx dt.$$

D'autre part les conditions (2.4), (2.5) et l'indépendance de  $v$  par rapport à  $x_1$ , impliquent

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, Dv) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) dx dt &= \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a_1^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_1} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) dx dt \\ &= \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} D_{x_1} \cdot \left( a_1^2(t, x_2, Dv) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(v) \right) dx dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

car on intègre tout d'abord dans la direction  $x_1$  puis on utilise le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = 0$  hors de  $(-2l_0, 2l_0)^q$ . Par conséquent,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_l} a(t, x, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(u_l) dx dt = 0. \quad (2.106)$$

En ce qui concerne le terme de droite de (2.99), comme  $T_k(u_l)$  converge vers  $T_k(v)$  faiblement dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{2l_0}}^{1,p}(\Omega_{2l_0}))$  et presque partout dans  $Q_{2l_0}$ , alors

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^s \int_{\Omega_l} f T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_0^s \int_{\Omega_l} g \cdot D_{x_2} T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \right] \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (2.107)$$

On obtient l'analogie de la relation (2.99), avec  $v$  à la place de  $u_l$ , en utilisant  $S'(r) = T_k(r)h_n(r)$  et  $\varphi(t, x) = \xi(t)$  dans (2.14'), puis en multipliant le résultat obtenu par  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  et en intégrant sur  $[-l, l]^q$ , il vient alors après avoir passé à la limite en  $n$  puis en  $\delta$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T}_k(v)(s) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a_2^2(t, x_2, D_{x_2} T_k(v)) \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} f T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_{\Omega_{2l_0}} \widetilde{T}_k(u_0) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.108)$$

D'autre part d'après l'indépendance de  $v$  par rapport à  $x_1$  et d'après les conditions structurelles (2.4) et (2.5), on a

$$a_2^2(t, x_2, D_{x_2} T_k(v)) \cdot D_{x_2} T_k(v) = a(t, x, DT_k(v)) \cdot DT_k(v) \quad \text{dans } Q_{2l_0} \quad (2.109)$$

Ainsi, d'après (2.99), (2.104), (2.106), (2.107), (2.108) et (2.109), il découle

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, DT_k(v)) \cdot DT_k(v) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \end{aligned}$$

Ce qui constitue la convergence (2.103) voulue. Enfin, en utilisant la forte monotonie de  $a$ , de façon classique on obtient alors

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(v) \quad \text{fortement dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})).$$

□

## 2.4 Le cas strictement monotone

A l'image du cas elliptique, on cherche à s'affranchir des hypothèses sur  $p, q, N$  des théorèmes 2.3.4 et 2.3.5. En contrepartie, on suppose dans cette section que  $\mu$  et  $u_0$  sont positifs, c'est-à-dire

$$\int_Q f \phi \, dx_2 + \int_Q g \cdot D_{x_2} \phi \, dx_2 \geq 0; \quad \forall \phi \in C_c^\infty(Q), \quad \phi \geq 0, \quad (2.110)$$

$$u_0 \geq 0. \quad (2.111)$$

On suppose également que  $a^1 = 0$ , c'est-à-dire

$$a(t, x, \xi) = a^2(t, x_2, \xi). \quad (2.112)$$

En particulier,  $a$  est indépendant de  $x_1$ .

On montre alors des résultats de convergence similaires à ceux obtenus dans le cas elliptique. Tout d'abord dans le cas variationnel, on montre le résultat suivant

**Théorème 2.4.1** *On suppose que les hypothèses (2.2)–(2.8), (2.110), (2.112),  $f = 0$  sont vérifiées. Alors pour tout  $1 < p < +\infty$ , pour tout  $1 < q < +\infty$  et pour tout  $l_0 > 0$ , on a*

$$u_l \rightarrow v \text{ dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})), \text{ dans } L^q(0, T; L^2(\Omega_{l_0})) \text{ quand } l \rightarrow +\infty.$$

Puis dans le cadre des solutions renormalisées, on a

**Théorème 2.4.2** *On suppose que les hypothèses (2.2)–(2.8), (2.110), (2.112) sont vérifiées. Alors pour tout  $1 < p < +\infty$ , pour tout  $1 < q < +\infty$  et pour tout  $l_0 > 0$ , on*

$$T_k(u_l) \rightarrow T_k(v) \text{ dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})), \text{ dans } L^q(0, T; L^1(\Omega_{l_0})) \text{ quand } l \rightarrow +\infty.$$

Pour montrer ces deux théorèmes on suit le même plan que dans le cas elliptique. Pour commencer, on prouve les propriétés suivantes vérifiées par  $u_l$  et  $v$  qui utilisent fortement le fait que  $\mu, u_0$  sont positifs, et l'hypothèse (2.112) et dont les preuves reposent essentiellement sur le principe du maximum.

**Proposition 2.4.3** *Sous les hypothèses du Théorème 2.4.1 ou du Théorème 2.4.2, pour tout  $l \leq l'$ , on a*

$$0 \leq u_l \leq u_{l'} \leq v \text{ p.p. dans } Q_l.$$

Par conséquent, à une sous-suite près, notée également  $u_l$ , on a

$$u_l \rightarrow u_\infty \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega$$

où  $u_\infty$  est une fonction mesurable finie presque partout définie sur  $(0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega$ . La fonction  $u_\infty$  satisfait la proposition suivante.

**Proposition 2.4.4** *La fonction  $u_\infty$  est indépendante de  $x_1$ .*

**Démonstration de la Proposition 2.4.3**— On prouve cette proposition dans le cas renormalisée c'est-à-dire  $f \neq 0$ . En effet, si  $f = 0$  alors  $-\operatorname{div}(g) \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\omega))$  et la solution renormalisée est aussi une solution faible.

- Puisque  $\mu \geq 0$  dans  $\mathcal{D}'(Q_l)$  et  $u_0 \geq 0$ , alors  $u_l \geq 0$  presque partout dans  $Q_l$ .
- Soit  $l < l'$ . Comme  $Z_n(u_l)$  et  $Z_n(u_{l'})$  sont des fonctions positives appartenant à  $L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega_l))$  et  $L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega_{l'}))$  respectivement, on a  $(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))^+ \in L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega_l))$ , (où  $x^+ = \max(0, x)$ ). Soit  $\xi$  une fonction de  $W^{1, \infty}((0, T))$  telle que  $\xi(T) = 0$  et  $\xi \geq 0$ . On peut donc prendre

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \, d\tau \\ \left( \text{resp. } \varphi &= \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \, d\tau \right) \end{aligned}$$

et  $S = S_n$  dans (2.14) (resp. dans (2.14) avec  $u_{l'}$  à la place de  $u_l$ ). On obtient alors une relation similaire à (2.58) où l'on remplace  $v$  par  $u_l$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \varphi_t \, dx \, dt + \int_{Q_l} (Z_n'(u_l) a(t, x_2, Du_l) - Z_n'(u_{l'}) a(t, x_2, Du_{l'})) \cdot D\varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{Q_l} Z_n''(u_l) a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \varphi \, dx \, dt - \int_{Q_l} Z_n''(u_{l'}) a(t, x_2, Du_{l'}) \cdot Du_{l'} \varphi \, dx \, dt \\ & = \int_{Q_l} f(Z_n'(u_l) - Z_n'(u_{l'})) \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi (Z_n'(u_l) - Z_n'(u_{l'})) \, dx \, dt \\ & \quad + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt - \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_{l'} Z_n''(u_{l'}) \varphi \, dx \, dt, \quad (2.113) \end{aligned}$$

On fait tendre  $h$  vers 0 puis  $n$  vers  $+\infty$  dans (2.113). Tout d'abord comme  $\varphi$  est uniformément borné en  $h$  et  $|Z_n''(r)| = \mathbb{1}_{\{n \leq |r| \leq n+1\}}$ , alors par la convergence des énergies il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l Z_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt = 0 \quad (2.114)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} a(t, x_2, Du_{l'}) \cdot Du_{l'} Z_n''(u_{l'}) \varphi \, dx \, dt = 0. \quad (2.115)$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'ellipticité (2.2) de l'opérateur on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt \right| \\ & \leq C \left( \int_{Q_l} |g|^{p'} \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq u_\infty \leq 2n\}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Alors par la convergence des énergies, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l Z_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt = 0, \quad (2.116)$$

et de la même façon

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_{l'} Z_n''(u_{l'}) \varphi \, dx \, dt = 0. \quad (2.117)$$

Ensuite, comme  $\varphi$  est uniformément borné en  $h$  et  $(Z_n'(u_l) - Z_n'(u_{l'}))$  converge presque partout vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f(Z_n'(u_l) - Z_n'(u_{l'})) \varphi \, dx \, dt. \quad (2.118)$$

Pour ce qui est du premier terme de (2.113), par le Lemme 2.2.1 et en utilisant la convergence (2.60), il vient

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \, d\tau \right) \, dx \, dt \\ \geq - \int_{Q_l} \xi_t \tilde{T}_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{T}_k(r) \leq k|r|$  et  $Z_n$  est lipschitzienne alors  $\tilde{T}_k(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \leq k|u_l - u_{l'}| \in L^1(Q_l)$  et ainsi par le théorème de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} - \int_{Q_l} (Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \, d\tau \right) \, dx \, dt \\ \geq - \int_{Q_l} \xi_t \tilde{T}_k^+(u_l - u_{l'}) \, dx \, dt. \quad (2.119) \end{aligned}$$

Pour ce qui est du quatrième terme de (2.113), la convergence (2.60) implique

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_l} [Z_n'(u_l) a(t, x_2, Du_l) - Z_n'(u_{l'}) a(t, x_2, Du_{l'})] \cdot D\varphi \, dx \, dt \\ & = \int_{Q_l} [Z_n'(u_l) a(t, x_2, Du_l) - Z_n'(u_{l'}) a(t, x_2, Du_{l'})] \cdot DT_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})) \xi \, dx \, dt. \quad (2.120) \end{aligned}$$

On décompose alors le second membre de (2.120) de la manière suivante

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_t} [Z'_n(u_l)a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) - Z'_n(u_{l'})a(t, \mathbf{x}_2, Du_{l'})] \cdot DT_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))\xi \, dx \, dt \\
&= \int_{Q_t} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})| \leq k\}} (a(t, \mathbf{x}_2, DZ_n(u_l)) - a(t, \mathbf{x}_2, DZ_n(u_{l'}))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))\xi \, dx \, dt \\
&+ \int_{Q_t} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})| \leq k\}} (Z'_n(u_l)a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) - a(t, \mathbf{x}_2, DZ_n(u_l))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))\xi \, dx \, dt \\
&+ \int_{Q_t} \mathbb{1}_{\{|Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'})| \leq k\}} (Z'_n(u_{l'})a(t, \mathbf{x}_2, Du_{l'}) - a(t, \mathbf{x}_2, DZ_n(u_{l'}))) \cdot D(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))\xi \, dx \, dt \\
&= L_1 + L_2 + L_3.
\end{aligned}$$

En observant que d'après la définition de  $Z_n$  on a  $Z'_n(u_l)a(Du_l) = a(DZ_n(u_l))$  presque partout sauf sur l'ensemble  $\{(t, x); n \leq |u_l(t, x)| \leq n+1\}$  et en utilisant la convergence des énergies et la croissance (2.6), on montre, (voir [6] pour les détails), que  $L_2$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De même on montre que  $L_3$  tend vers 0. Il en résulte donc, d'après la stricte monotonie (2.3) de l'opérateur  $a$  appliquée au terme  $L_1$ , l'inégalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_t} [Z'_n(u_l)a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) - Z'_n(u_{l'})a(t, \mathbf{x}_2, Du_{l'})] \cdot D\varphi \, dx \, dt \geq 0. \quad (2.121)$$

Enfin par la convergence (2.60), il vient

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_t} g \cdot D_{x_2} \varphi(Z'_n(u_l) - Z'_n(u_{l'})) \, dx \, dt \\
&= \int_{Q_t} g \cdot D_{x_2} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))(Z'_n(u_l) - Z'_n(u_{l'})) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Puis par un raisonnement classique dans la preuve de l'unicité des solutions renormalisées (voir par exemple [14]), on montre grâce à la convergence des énergies que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} g \cdot D_{x_2} T_k^+(Z_n(u_l) - Z_n(u_{l'}))(Z'_n(u_l) - Z'_n(u_{l'})) \, dx \, dt = 0,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_t} g \cdot D_{x_2} \varphi(Z'_n(u_l) - Z'_n(u_{l'})) \, dx \, dt = 0. \quad (2.122)$$

Finalement en injectant les convergences (2.114), (2.115), (2.116), (2.117), (2.118), (2.119), (2.121), (2.122) dans (2.113), il vient

$$- \int_{Q_t} \xi_t \widetilde{T}_k^+(u_l - u_{l'}) \, dx \, dt \leq 0.$$

Et donc en prenant  $\xi(t) = T - t$ , il vient

$$\int_{Q_t} \widetilde{T}_k^+(u_l - u_{l'}) dx dt \leq 0.$$

Par conséquent  $\widetilde{T}_k^+(u_l - u_{l'}) = 0$  presque partout dans  $Q_l$ , c'est-à-dire  $u_l \leq u_{l'}$  presque partout dans  $Q_l$ .

• Enfin, de manière similaire à ce qui est fait au dessus, en considérant  $v$  à la place de  $u_{l'}$ , on montre que  $u_l \leq v$  presque partout dans  $Q_l$ .

□

**Démonstration de la Proposition 2.4.4**— On procède de manière tout à fait similaire au cas elliptique. On introduit alors les mêmes notations. On fixe  $l > 0$  et pour tout  $-l \leq h \leq l$ , on définit  $Q_{2l}^h = (0, T) \times ]-2l + h, 2l + h[ \times ]-2l, 2l[^{q-1} \times \omega$  et on introduit la fonction  $v_{2l}^h$  définie sur  $Q_{2l}^h$  par

$$v_{2l}^h(t, x) = u_{2l}(t, x - he_1) \text{ p.p. dans } Q_{2l}^h$$

où  $e_1$  désigne le vecteur unité  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Comme dans le cas elliptique, après de simples calculs utilisant essentiellement (2.13), (2.14), (2.112), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |v_{2l}^h| \leq 2n\} \cap Q_l} a(t, x_2, Dv_{2l}^h) \cdot Dv_{2l}^h dx dt &= 0, \\ - \int_{Q_l} \varphi_t S(v_{2l}^h) dx dt - \int_{\Omega_l} \varphi(0) S(u_0) dx + \int_{Q_l} S''(v_{2l}^h) a(t, x_2, Dv_{2l}^h) \cdot Dv_{2l}^h \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} S'(v_{2l}^h) a(t, x_2, Dv_{2l}^h) \cdot D\varphi dx dt &= \int_{Q_l} f S'(v_{2l}^h) \varphi dx dt \\ + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi S'(v_{2l}^h) dx dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} v_{2l}^h S''(v_{2l}^h) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.123)$$

pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega}_l)$  tel que  $S'(v_{2l}^h) \varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ . De manière approximative, cela signifie que  $v_{2l}^h$  est une solution renormalisée de

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{2l}^h}{\partial t} - \operatorname{div}[a(t, x_2, Dv_{2l}^h)] = \mu & \text{dans } (0, T) \times \Omega_l \\ v_{2l}^h = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_l \\ v_{2l}^h(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega_l. \end{cases}$$

Par des arguments déjà utilisées dans la preuve de la Proposition 2.4.3, essentiellement des techniques d'unicité, en utilisant (2.4) et (2.123), on montre que

$$\int_{\Omega_l} \widetilde{T}_k^+(u_l - v_{2l}^h) dx = 0, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$



Il en découle alors que  $u_l \leq v_{2l}^h$  presque partout dans  $Q_l$ . En faisant tendre  $l$  vers  $\infty$  dans cette inégalité, cela implique

$$u_\infty(t, x) \leq u_\infty(t, x - he_1) \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$u_\infty(t, x) = u_\infty(t, x - he_1) \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

De manière identique, on obtient pour tout  $i = 1, \dots, q$

$$u_\infty(t, x) = u_\infty(t, x - he_i) \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega; \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . Ces égalités impliquent que  $u_\infty$  est indépendant de  $x_1$ .  $\square$

**Démonstration du Théorème 2.4.1**— La preuve se décompose en trois étapes. Dans l'étape 1, on donne une estimation de  $u_l$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))$  et dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ , on en déduit alors la convergence de  $u_l$  vers  $u_\infty$  dans des espaces convenables. Dans l'étape 2, on montre que  $u_l$  converge vers  $u_\infty$  fortement dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . Enfin dans la dernière étape, on montre par un raisonnement d'unicité que  $u_\infty = v$ .

**Étape 1.** On prend  $\rho^p(\frac{x_1}{2l_0})u_l$  comme fonction test dans (2.1), d'après (2.2), (2.6) avec la Proposition 2.4.3, on obtient pour presque tout  $s \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} |u_l|^2(s) \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \alpha \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ \leq \|g\|_{(L^{p'}(Q_{2l_0}))^{N-q}} \left( \int_{Q_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^{p^2}\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ + \frac{\gamma_2 p \Lambda}{2l_0} \int_{Q_{2l_0}} (b_2 + |Du_l|^{p-1}) v \rho^{p-1}\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_{\Omega_l} |u_0|^2 \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Comme  $p > 1$  alors  $p^2 > p$  et donc  $\rho^{p^2} \leq \rho^p$  car  $0 \leq \rho \leq 1$ . L'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_{Q_{2l_0}} |Du_l|^{p-1} v \rho^{p-1}\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \leq \left( \int_{Q_{2l_0}} v^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

On applique alors l'inégalité de Young dans (2.124), il vient alors

$$\int_{\Omega_l} |u_l|^2(s) \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx + \alpha \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} |Du_l|^p \rho^p\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \leq C, \quad \text{p.p. } s \in (0, T),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$  et de  $s$ . Puisque  $\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = 1$  dans  $[-l_0, l_0]^q$ , il découle que

$$\int_{\Omega_{l_0}} |u_l|^2(s) dx + \int_0^s \int_{\Omega_{l_0}} |Du_l|^p dx dt \leq C, \quad \text{p.p. } s \in (0, T),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $l$ . Par conséquent  $u_l$  est bornée dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$  et dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))$ . Ainsi, à une sous-suite près, notée également  $u_l$ , on obtient

$$u_l \rightharpoonup u_\infty \quad \text{faiblement dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})); \quad \text{p.p. dans } Q_{l_0}. \quad (2.125)$$

Et comme  $u_l \rightarrow u_\infty$  presque partout dans  $Q_{l_0}$  avec  $u_l$  borné dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{l_0}))$  alors par le théorème de Vitali, pour tout  $1 < q < +\infty$ .

$$u_l \rightarrow u_\infty \quad \text{fortement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega_{l_0})). \quad (2.126)$$

**Étape 2.** Avec les convergences (2.125) et la stricte monotonie de l'opérateur  $a$ , on peut adapter les techniques utilisées dans [13], [15] pour montrer qu'à une sous-suite près,  $Du_l \rightarrow Du_\infty$  presque partout dans  $Q_{l_0}$ . On va montrer que  $Du_l$  est  $p$ -équiiintégréable dans  $Q_{l_0}$ . Pour cela on utilise  $u_l \rho(\frac{x_1}{2l_0})$  comme fonction test dans (2.1) pour obtenir pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2l_0}} u_l^2(s) \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx dt \\ + \frac{1}{2l_0} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot D\rho(\frac{x_1}{2l_0}) u_l dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx dt + \int_{\Omega_{2l_0}} u_0^2 \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx. \end{aligned} \quad (2.127)$$

D'après la Proposition 2.4.3, pour presque tout  $s$ ,  $u_l^2(s, \cdot) \leq v^2(s, \cdot)$ , or  $v^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))$  donc  $v(s, \cdot) \in L^1(\Omega_{l_0})$ . Et comme  $u_l$  converge presque partout vers  $u_\infty$  alors par le théorème de Lebesgue

$$\int_{\Omega_{2l_0}} u_l^2(s) \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx \rightarrow \int_{\Omega_{2l_0}} u_\infty(s)^2 \rho(\frac{x_1}{2l_0}) dx, \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \quad (2.128)$$

D'après (2.6),  $a(t, x_2, Du_l)$  est borné dans  $(L^{p'}(Q_{l_0}))^N$  donc converge faiblement dans cet espace, la convergence presque partout des gradients  $Du_l$  vers  $Du_\infty$  permet d'identifier la limite et donc d'obtenir

$$a(t, x_2, Du_l) \rightharpoonup a(t, x, Du_\infty) \quad \text{faiblement dans } (L^{p'}(Q_{l_0}))^N. \quad (2.129)$$

Ainsi, en utilisant également les conditions structurelles (2.4) et (2.5)

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot (D\rho)(\frac{x_1}{2l_0}) u_l dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a_1^2(t, x_2, Du_\infty) \cdot (D_{x_1} \rho)(\frac{x_1}{2l_0}) u_\infty dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Pour le second membre de (2.127), comme  $Du_l$  converge vers  $Du_\infty$  faiblement dans  $(L^p(Q_{2l_0}))^N$ , on a

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \quad (2.131)$$

Ainsi, en rapprochant (2.127), (2.128), (2.130) et (2.131) il vient, pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ &= \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_{\Omega_{2l_0}} u_0^2 \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx - \int_{\Omega_{2l_0}} u_\infty^2(s) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.132)$$

D'autre part, on prend  $u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  comme fonction test dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^s \left\langle \frac{\partial u_l}{\partial t}, u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \right\rangle dt + \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\ &+ \frac{1}{2l_0} \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot (D\rho)\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) u_\infty dx dt = \int_0^s \int_{\Omega_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Comme  $\frac{\partial u_l}{\partial t} = \operatorname{div}(a(t, x_2, Du_l)) - \operatorname{div}(g)$  et comme  $a(t, x_2, Du_l)$  est borné dans  $(L^{p'}(Q_{l_0}))^N$  alors  $\frac{\partial u_l}{\partial t}$  est borné dans  $L^{p'}\left(0, T; \left(W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})\right)'\right)$ , donc converge faiblement dans cet espace. Grâce à la convergence (2.125), on identifie cette limite comme étant  $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$ . On en déduit alors

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\langle \frac{\partial u_l}{\partial t}, u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \right\rangle dt &\rightarrow \int_0^s \left\langle \frac{\partial u_\infty}{\partial t}, u_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \right\rangle dt \\ &= \int_{\Omega_{2l_0}} u_\infty^2 \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx - \int_{\Omega_{2l_0}} u_0^2 \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx. \end{aligned}$$

Les autres termes de (2.133) passent aisément à la limite en utilisant la convergence (2.129). Le résultat obtenu combiné avec (2.132) donne finalement (on prend  $s = T$ )

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt = \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt. \quad (2.134)$$

Par conséquent, d'après la convergence (2.134) et puisque  $a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  est une suite de fonctions positives qui converge presque partout vers  $a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$ , une application classique du Lemme de Fatou donne

$$a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \rightarrow a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \quad \text{fortement dans } L^1(Q_{2l_0}).$$

Et le fait que  $\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = 1$  sur  $Q_{l_0}$  implique

$$a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rightarrow a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \quad \text{fortement dans } L^1(Q_{l_0}).$$

Cela entraîne que  $a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l$  est équiintégrable dans  $L^1(Q_{l_0})$ . Alors la condition d'ellipticité

$$\alpha |Du_l|^p \leq a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l, \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_l,$$

implique que  $Du_l$  est  $p$ -équiintégrable sur  $Q_{l_0}$ . Par conséquent, d'après la convergence presque partout de  $Du_l$ , le théorème de Vitali entraîne que

$$Du_l \rightarrow Du_\infty \quad \text{fortement dans } (L^p(Q_{l_0}))^N.$$

**Étape 3.** Soit  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ ,  $\psi \geq 0$ , alors la fonction  $\psi(u_\infty - v) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$  pour un certain  $l > 0$ , on peut donc l'utiliser comme fonction test dans (2.1). On fait tendre également  $l$  vers  $+\infty$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\langle \frac{\partial u_\infty}{\partial t}, (u_\infty - v)\psi \right\rangle dt + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D((u_\infty - v)\psi) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2}(u_\infty - v)\psi dx dt, \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Or d'après les conditions structurelles (2.4), (2.5) et (2.112),

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D((u_\infty - v)\psi) dx dt = \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_1^2(t, x_2, Du_\infty) \cdot D_{x_1}((u_\infty - v)\psi) dx dt \\ + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_2^2(t, x_2, Du_\infty) \cdot D_{x_2}((u_\infty - v)\psi) dx dt \end{aligned} \quad (2.136)$$

et le premier terme du second membre de l'égalité ci-dessus est nul car  $u_\infty$  et  $v$  sont indépendants de  $x_1$ . D'autre part, on prend  $u_\infty - v$  comme fonction test dans (2.9), on multiplie par  $\psi$  et on intègre sur  $\mathbb{R}^q$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, (u_\infty - v)\psi \right\rangle dt + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_2^2(t, x_2, Dv) \cdot D_{x_2}((u_\infty - v)\psi) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2}(u_\infty - v)\psi dx dt, \quad \text{p.p. } s \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.137)$$

En soustrayant maintenant (2.135) et (2.137) et en utilisant également (2.136), il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (u_\infty - v)^2 \psi dx + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a_2^2(t, x_2, Du_\infty) - a_2^2(t, x_2, Dv)) \cdot D_{x_2}(u_\infty - v)\psi dx dt = 0.$$

Et par la stricte monotonie (2.3) de  $a$  et du fait que  $\psi \geq 0$ , il vient  $(u_\infty - v)^2 = 0$ , c'est-à-dire  $u_\infty = v$  pour presque tout  $(t, x_2) \in (0, T) \times \omega$ .

□

**Démonstration du Théorème 2.4.2**— Pour simplifier la démonstration on supposera que  $g = 0$  mais elle reste bien évidemment valable pour  $g \neq 0$ . La preuve s'effectue en trois étapes. Dans l'étape 1, on obtient des estimations sur  $T_k(u_l)$  dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$  et sur  $u_l$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))$  ce qui en particulier implique la convergence faible de  $T_k(u_l)$  vers  $T_k(u_\infty)$ . L'étape 2 est consacrée à la preuve de la convergence forte des troncatures. Enfin, dans l'étape 3, on montre que  $u_\infty = v$  en établissant que  $u_\infty$  et  $v$  satisfont les mêmes équations dans  $\mathbb{R}^q \times \omega$ , et par unicité on identifie  $u_\infty$  et  $v$ .

**Étape 1.** D'après la preuve du Théorème 2.3.5 (voir (2.100)), on sait que pour tout  $l_0 > 0$ ,  $k > 0$ ,  $T_k(u_l)$  est borné dans  $L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . Ainsi, à une sous-suite près, encore notée  $u_l$ , on obtient

$$T_k(u_l) \rightarrow w_k \quad \text{faiblement dans } L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0})); \quad \text{p.p. dans } Q_{l_0} \quad (2.138)$$

où  $w_k \in L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . Avec le fait que  $u_l \rightarrow u_\infty$  presque partout dans  $Q_{l_0}$ , par continuité de  $T_k$ , on identifie  $w_k = T_k(u_\infty)$  et donc  $T_k(u_\infty) \in L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ . De (2.100) et de l'inégalité  $\tilde{T}_k(r) \geq k|r| - \frac{k^2}{2}$ , on déduit également que  $u_l$  est borné dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega_{l_0}))$ . Donc d'après la convergence presque partout de  $u_l$  vers  $u_\infty$  et le théorème de Vitali, on en déduit la convergence

$$u_l \rightarrow u_\infty \quad \text{fortement dans } L^q(0, T; L^1(\Omega_{l_0})), \quad \forall 1 < q < +\infty.$$

**Étape 2.** Tout d'abord, avec les convergences (2.138) et la stricte monotonie de l'opérateur  $a$ , on adapte les techniques utilisées dans [13], [15] au cadre des solutions renormalisées pour montrer que  $Du_l$  converge presque partout vers  $Du_\infty$ . Ainsi comme  $a(t, x_2, Du_l)$  est borné dans  $(L^q(Q_{l_0}))^N$  (voir (2.105)), pour tout  $q < \frac{p-N/(N+1)}{p-1}$ , alors d'après le théorème de Vitali, il découle

$$a(t, x_2, Du_l) \rightarrow a(t, x_2, Du_\infty) \quad \text{dans } (L^q(Q_{l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{p-N/(N+1)}{p-1}. \quad (2.139)$$

Soit  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$ , tel que  $\xi \geq 0$  et  $\xi(T) = 0$ . On utilise  $\varphi = \xi \rho(\frac{x_1}{2l_0}) \frac{1}{h} \int_{t-h}^t T_k(u_\infty) d\tau$  et  $S = S_n$  dans (2.14), en posant  $u_\infty(t) = u_{0,j}$  pour  $t < 0$ , où  $u_{0,j}$  est une suite de fonctions de  $C_c^\infty(\omega)$  convergeant vers  $u_0$ . On obtient, en utilisant également le fait que  $\text{supp}(\rho(\frac{x_1}{2l_0})) \subset [-2l_0, 2l_0]^q$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{2l_0}} (S_n(u_l) - S_n(u_0)) \varphi_t dx dt + \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot D\varphi S'_n(u_l) dx dt \\ & \quad + \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l S''_n(u_l) \varphi dx dt = \int_{Q_{2l_0}} f S'_n(u_l) \varphi dx dt \\ & \quad + \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l S''_n(u_l) \varphi dx dt + \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} \phi S'_n(u_l) dx dt. \quad (2.140) \end{aligned}$$

On fait tout d'abord tendre  $l \rightarrow +\infty$ , puis  $h \rightarrow 0$  et enfin  $n \rightarrow +\infty$  dans (2.140). Tout d'abord pour le premier terme de (2.140), comme d'après la Proposition 2.4.3,  $|S_n(u_l)| \leq v \in L^1(Q_{2l_0})$  et  $S_n(u_l) \rightarrow S_n(u_\infty)$  presque partout dans  $Q_{2l_0}$ , et comme  $\varphi_t$  est bornée uniformément en  $l$  alors le théorème de Lebesgue implique que quand  $l \rightarrow +\infty$

$$- \int_{Q_{2l_0}} (S_n(u_l) - S_n(u_0))\varphi_t dx dt \rightarrow - \int_{Q_{2l_0}} (S_n(u_\infty) - S_n(u_0))\varphi_t dx dt.$$

En observant que pour  $2n \geq k$ ,  $T_k \circ S_n = T_k$ , alors par le Lemme 2.2.2 et en utilisant la convergence

$$\frac{1}{h} \int_{t-h}^t \eta d\tau \rightarrow \eta \text{ fortement dans } L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l)) \quad (2.141)$$

pour toute fonction  $\eta \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ , il vient

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \left( - \int_{Q_{2l_0}} (S_n(u_\infty) - S_n(u_0))\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_{t-h}^t T_k(u_\infty) d\tau \right) dx dt \right) \\ \leq - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t (\tilde{T}_k(S_n(u_\infty)) - \tilde{T}_k(S_n(u_0)))\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \quad (2.142) \end{aligned}$$

Enfin, comme d'après la Proposition 2.4.3, on a  $\tilde{T}_k(S_n(u_l)) \leq k|v| \in L^1(Q_{2l_0})$  et comme  $S_n(r) \rightarrow r$ , alors le théorème de Lebesgue permet de passer à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans le second membre de (2.142) pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{j \rightarrow +\infty} \limsup_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \left( - \int_{Q_{2l_0}} (S_n(u_l) - S_n(u_0))\varphi_t dx dt \right) \\ \leq - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t (\tilde{T}_k(u_l) - \tilde{T}_k(u_0))\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \quad (2.143) \end{aligned}$$

Notons que tous les autres termes de (2.140) sont indépendants de  $j$ , on n'aura donc pas à traiter la convergence  $j \rightarrow +\infty$ . Pour ce qui est du second terme de (2.140), d'après la convergence (2.139) et le théorème de Lebesgue on a

$$S'_n(u_l)a(t, x_2, Du_l) \rightarrow S'_n(u_\infty)a(t, x_2, Du_\infty) \quad \text{dans } (L^q(Q_{2l_0}))^N; \quad \forall q < \frac{p - N/(N+1)}{p-1}.$$

D'autre part, d'après (2.6), (2.100) et en utilisant le fait que  $\text{supp}(S'_n) = [-2n, 2n]$ , on a

$$S'_n(u_l)a(t, x_2, Du_l) = S'_n(u_l)a(t, x_2, DT_{2n}(u_l))$$

borné dans  $(L^{p'}(Q_{2l_0}))^N$ . Ainsi quitte à extraire une sous-suite,

$$S'_n(u_l)a(t, x_2, Du_l) \rightharpoonup S'_n(u_\infty)a(t, x_2, Du_\infty) \quad \text{faiblement dans } (L^{p'}(Q_{2l_0}))^N,$$

et donc

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot D\varphi S'_n(u_l) dx dt = \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot D\varphi S'_n(u_\infty) dx dt.$$

Ensuite, d'après la définition de  $\varphi$ , et en utilisant la convergence (2.141), on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot D\varphi S'_n(u_\infty) dx dt &= \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot DT_k(u_\infty) S'_n(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\ &+ \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) S'_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Or d'après les conditions de structure (2.4) et (2.5) de l'opérateur  $a$ , et le fait que  $u_\infty$  est indépendant de  $x_2$

$$a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) S'_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \xi = D_{x_1} \cdot \left( a_1^2(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) S'_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \xi \right),$$

donc par la formule de Green

$$\int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) S'_n(u_\infty) T_k(u_\infty) \xi dx dt = 0.$$

Pour l'autre terme du second membre de (2.144), on utilise le fait que pour  $n \geq \frac{k}{2}$ ,  $a(t, \mathbf{x}_2, Du_\infty) \cdot DT_k(u_\infty) S'_n(u_\infty) = a(t, \mathbf{x}_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty)$ , pour obtenir finalement

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot D\varphi S'_n(u_l) dx dt \\ = \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Par le théorème de Lebesgue et la convergence (2.141), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} f S'_n(u_l) \varphi dx dt = \int_{Q_{2l_0}} f T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \quad (2.146)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} \phi S'_n(u_l) dx dt = \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \quad (2.147)$$

Pour traiter les termes restants de (2.140), on montre tout d'abord que pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$ , tel que  $\xi(T) = 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt = 0. \quad (2.148)$$

Pour cela on prend  $S' = \frac{1}{n}(T_{2n} - T_n)h_m$  et  $\varphi = \xi\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  dans (2.1), on fait tendre  $m$  vers  $+\infty$  et on obtient, en utilisant le fait que  $S_n''(r) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{n \leq |r| \leq 2n\}}$

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t \frac{1}{n} \left( (\tilde{T}_{2n}(u_l) - \tilde{T}_n(u_l)) - (\tilde{T}_{2n}(u_0) - \tilde{T}_n(u_0)) \right) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\
& \quad + \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \frac{1}{n} (T_{2n}(u_l) - T_n(u_l)) \xi dx dt \\
& = \int_{Q_{2l_0}} f \frac{1}{n} (T_{2n}(u_l) - T_n(u_l)) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt + \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \quad (2.149)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, puis l'ellipticité (2.2) de l'opérateur  $a$ , on a pour  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} g \cdot D_{x_2} u_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt & \leq C_\epsilon \frac{1}{n} \int_{Q_{2l_0}} |g|^{p'} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\
& \quad + \epsilon \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \quad (2.150)
\end{aligned}$$

On prend  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , on injecte (2.150) dans (2.149) et on fait tendre  $l$  vers  $+\infty$ , par des arguments de convergence déjà vus, essentiellement basés sur la Proposition 2.4.3, la convergence (2.139) et le Théorème de Lebesgue, il vient alors

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t \frac{1}{n} \left( (\tilde{T}_{2n}(u_\infty) - \tilde{T}_n(u_\infty)) - (\tilde{T}_{2n}(u_0) - \tilde{T}_n(u_0)) \right) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt \\
& \quad + \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\
& \quad + \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \frac{1}{n} (T_{2n}(u_\infty) - T_n(u_\infty)) \xi dx dt \\
& = \int_{Q_{2l_0}} f \frac{1}{n} (T_{2n}(u_\infty) - T_n(u_\infty)) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt + C \frac{1}{n} \int_{Q_{2l_0}} |g|^{p'} \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \quad (2.151)
\end{aligned}$$

On fait tendre maintenant  $n$  vers  $+\infty$  dans (2.151). En utilisant le fait que  $\frac{1}{n}(\tilde{T}_{2n} - \tilde{T}_n)$  et  $\frac{1}{n}(T_{2n} - T_n)$  tendent vers 0 presque partout, avec

$$\left| \frac{1}{n} (\tilde{T}_{2n}(r) - \tilde{T}_n(r)) \right| \leq |r|, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1}{n} (T_{2n} - T_n) \right| \leq 1,$$

et que  $u_\infty \in L^1(Q_{2l_0})$  alors par le théorème de Lebesgue toutes les intégrales de (2.151) tendent vers 0, excepté la deuxième pour donner finalement la convergence (2.148) voulue.



Revenons à l'égalité (2.140). Pour le troisième terme, d'après la convergence (2.148) qui vient d'être montrée, le fait que  $|\varphi| \leq k$  et que  $S_n''(u_l) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\}}$  on a clairement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot Du_l S_n''(u_l) dx dt = 0. \quad (2.152)$$

Enfin pour l'avant-dernier terme de (2.140) on a par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} u_l S_n''(u_l) \varphi dx dt \\ & \leq \frac{k}{p'} \frac{1}{n} \int_{Q_{2l_0}} g^{p'} dx dt + \frac{k}{p} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_l| \leq 2n\} \cap Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot Du_l \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt, \end{aligned}$$

et donc par la convergence (2.148)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} g \cdot Du_l S_n''(u_l) \varphi dx dt = 0. \quad (2.153)$$

□

En injectant finalement les convergences (2.143), (2.145), (2.146), (2.147), (2.152) et (2.153) dans (2.140), il découle

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t (\tilde{T}_k(u_\infty) - \tilde{T}_k(u_0)) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\ & \geq \int_{Q_{2l_0}} f T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt + \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Maintenant on prend  $S'(r) = T_k(r) h_n(r)$  et  $\varphi = \xi \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right)$  dans (2.14), et on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t (\tilde{T}_k(u_l) - \tilde{T}_k(u_0)) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, Du_l) \cdot D\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) T_k(u_l) \xi dx dt \\ & \quad + \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\ & = \int_{Q_{2l_0}} f T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt + \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \end{aligned}$$

On fait tendre  $l$  vers  $+\infty$  et par des arguments déjà rencontrés auparavant il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{2l_0}} \xi_t (\tilde{T}_k(u_\infty) - \tilde{T}_k(u_0)) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) dx dt + \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, \mathbf{x}_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt \\ & = \int_{Q_{2l_0}} f T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt + \int_{Q_{2l_0}} g \cdot D_{x_2} T_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (2.155)$$

En combinant alors (2.154) et (2.155), il découle

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi \, dx \, dt \\ \leq \int_{Q_{2l_0}} a(t, x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la convergence précédente et puisque  $a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi$  est une suite de fonctions positives qui converge presque partout vers  $a(t, x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi$  dans  $Q_{2l_0}$ , une application standard du lemme de Fatou donne

$$a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi \rightarrow a(t, x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) \xi, \quad \text{dans } L^1(Q_{2l_0}).$$

Le fait que  $\rho\left(\frac{x_1}{2l_0}\right) = 1$  dans  $Q_{l_0}$  implique

$$a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \xi \rightarrow a(t, x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty) \xi, \quad \text{dans } L^1(Q_{l_0}).$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$  tel que  $\xi \geq 0$  et  $\xi(T) = 0$ . Quitte à reconsidérer les équations (2.1) et (2.9) pour  $t \in (0, T')$ , où  $T' > T$ , et à prendre  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T'))$  avec  $\xi = 1$  sur  $(0, T)$  et  $\xi(T') = 0$ , on montre alors que

$$a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l) \rightarrow a(t, x_2, DT_k(u_\infty)) \cdot DT_k(u_\infty), \quad \text{dans } L^1(Q_{l_0}).$$

Cela entraîne que  $a(t, x_2, DT_k(u_l)) \cdot DT_k(u_l)$  est équiintégrable dans  $L^1(Q_{l_0})$ . La condition d'ellipticité

$$\alpha |DT_k(u_l)|^p \leq a(t, x_2, Du_l) \cdot DT_k(u_l), \quad \text{p.p. } (t, x_2) \in (0, T) \times \omega$$

implique alors que  $DT_k(u_l)$  est  $p$ -équiintégrable. Par conséquent, la convergence presque partout de  $DT_k(u_l)$ , le théorème de Vitali entraînent que pour tout  $l_0 > 0$ , pour tout  $k > 0$

$$DT_k(u_l) \rightarrow DT_k(u_\infty) \quad \text{fortement dans } (L^p(Q_{l_0}))^N. \quad (2.156)$$

**Étape 3.** On prouve tout d'abord que  $u_\infty$  est, de manière grossière, solution renormalisée de

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\infty}{\partial t} - \operatorname{div}[a(t, x_2, Du_\infty)] = f - \operatorname{div}_{x_2} g & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega \\ u_\infty = 0 & \text{sur } (0, T) \times \mathbb{R}^q \times \partial\omega \\ u_\infty(t=0) = u_0 & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Tout d'abord d'après (2.138),  $T_k(u_\infty) \in L^p(0, T; W_{\Gamma_{l_0}}^{1,p}(\Omega_{l_0}))$ , pour tout  $l_0 > 0$ . Soit  $\psi \in C_c^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega)$  et  $Z \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $Z'$  à support compact. Comme  $\operatorname{supp}(\psi)$  est compact dans  $[0, T) \times \mathbb{R}^q \times \omega$ , alors pour  $l$  suffisamment grand  $\psi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega_l))$ . On peut donc alors prendre  $\varphi = \psi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Z'(u_\infty) \, d\tau$  et  $S = S_n$  dans (2.14), pour obtenir

$$\begin{aligned} - \int_{Q_l} \varphi_t (S_n(u_l) - S_n(u_0)) \, dx \, dt + \int_{Q_l} a(t, x_2, Du_l) \cdot Du_l S_n''(u_l) \varphi \, dx \, dt \\ + \int_{Q_l} a(t, x_2, Du_l) \cdot D\varphi S_n'(u_l) \, dx \, dt = \int_{Q_l} f S_n'(u_l) \varphi \, dx \, dt \\ + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} u_l S_n''(u_l) \, dx \, dt + \int_{Q_l} g \cdot D_{x_2} \varphi S_n'(u_l) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

On fait tout d'abord tendre  $l$  vers  $+\infty$ , puis  $h$  vers 0 et enfin  $n$  vers  $+\infty$ . Par des arguments similaires à ceux utilisés pour passer à la limite dans l'égalité (2.140) (où  $T_k$  est remplacé par  $Z'$  et  $\xi\rho(\frac{x_1}{2l_0})$  par  $\psi$ ), on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \psi_t (Z(u_\infty) - Z(u_0)) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty Z''(u_\infty) \psi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D\psi Z'(u_\infty) dx dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f Z'(u_\infty) \psi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \psi Z'(u_\infty) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} u_\infty Z''(u_\infty) \psi dx dt. \end{aligned} \quad (2.157)$$

On obtient l'inégalité inverse, en prenant  $\varphi = \psi \frac{1}{h} \int_{t-h}^t Z'(u_\infty) d\tau$  et  $S = S_n$  dans (2.14), et donc on a l'égalité

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \psi_t (Z(u_\infty) - Z(u_0)) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty Z''(u_\infty) \psi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D\psi Z'(u_\infty) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f Z'(u_\infty) \psi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \psi Z'(u_\infty) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} u_\infty Z''(u_\infty) \psi dx dt, \end{aligned} \quad (2.158)$$

pour tout  $\psi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^q \times \omega)$  et  $Z \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $Z'$  à support compact. Enfin, d'après (2.148), en utilisant la convergence (2.156) et le fait que  $\rho(\frac{x_1}{2l_0}) = 1$  sur  $[-l_0, l_0]^q$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_i| \leq 2n\} \cap Q_{l_0}} a(t, x_2, Du_i) \cdot Du_i \xi dx dt = 0, \quad (2.159)$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$  tel que  $\xi \geq 0$  et  $\xi(T) = 0$ . Encore une fois, quitte à reconsidérer les équations (2.1) et (2.9) pour  $t \in (0, T')$ , où  $T' > T$ , et à prendre  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T'))$  avec  $\xi = 1$  sur  $(0, T)$  et  $\xi(T') = 0$ , alors de (2.159) il découle la convergence des énergies

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |u_i| \leq 2n\} \cap Q_{l_0}} a(t, x_2, Du_i) \cdot Du_i dx dt = 0. \quad (2.160)$$

Ce qui implique en particulier avec l'équation (2.158), de manière classique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{n \leq |u_i| \leq n+1\} \cap Q_{l_0}} a(t, x_2, Du_i) \cdot Du_i dx dt = 0. \quad (2.161)$$

Reste à prouver maintenant que  $u_\infty = v$ . Pour cela on utilise des techniques d'unicité. Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ ,  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$  tel que  $\phi \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $\xi(T) = 0$ . On pose

$$\varphi = \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(S_n(u_\infty) - S_n(v)) d\tau.$$

On prend  $Z = Z_n$  (on rappelle que  $Z'_n = 1 - |T_{n+1} - T_n|$ ) et  $\psi(t, x) = \phi(x_1)\varphi(t, x_2)$  dans (2.158). Puis on prend  $S = Z_n$  et  $\varphi$  dans (2.14'), on multiplie par  $\phi$ , on intègre sur  $\mathbb{R}^q$  et enfin on fait la différence de ces deux identités pour obtenir

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \varphi_t (Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \phi \, dx \, dt + \\
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty Z_n''(u_\infty) \varphi \phi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_2^2(t, x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}v Z_n''(v) \varphi \phi \, dx \, dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (a(t, x_2, Du_\infty) Z_n'(u_\infty) - a(t, x_2, Dv) Z_n'(v)) \cdot D\varphi \phi \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D\phi Z_n'(u_\infty) \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f(Z_n'(u_\infty) - Z_n'(v)) \varphi \phi \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \varphi (Z_n'(u_\infty) - Z_n'(v)) \phi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} u_\infty Z_n''(u_\infty) \varphi \phi \, dx \, dt \\
& \quad - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} v Z_n''(v) \varphi \phi \, dx \, dt. \quad (2.162)
\end{aligned}$$

D'après les conditions de structure (2.4) et (2.5), l'indépendance de  $u_\infty, v$  par rapport à  $x_1$  et les formules de Green, on obtient

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot D\phi Z_n'(u_\infty) \varphi \, dx \, dt = 0.$$

On fait tendre  $h$  vers 0 puis  $n$  vers  $+\infty$ . Tout d'abord comme  $\varphi$  est uniformément borné en  $h$  avec  $\text{supp}(\varphi) \subset [0, T] \times \Omega_{l_0}$  pour  $l_0$  assez grand, et  $|Z_n''(r)| = \mathbf{1}_{\{n \leq |r| \leq n+1\}}$ , alors par la convergence des énergies il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty Z_n''(u_\infty) \varphi \phi \, dx \, dt = 0 \quad (2.163)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} a_2^2(t, x_2, D_{x_2}v) \cdot D_{x_2}v Z_n''(v) \varphi \phi \, dx \, dt = 0. \quad (2.164)$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'ellipticité (2.2) de l'opérateur on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} u_\infty Z_n''(u_\infty) \varphi \phi \, dx \, dt \\
& \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} |g|^{p'} \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \frac{1}{n} \int_{\{n \leq u_\infty \leq 2n\}} a(t, x_2, Du_\infty) \cdot Du_\infty \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Alors par la convergence des énergies, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} u_\infty Z_n''(u_\infty) \varphi \phi \, dx \, dt = 0. \quad (2.165)$$

De même

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} v Z_n''(v) \varphi \phi \, dx \, dt = 0. \quad (2.166)$$

Ensuite, comme  $\varphi$  est uniformément borné en  $h$  et  $(Z_n'(u_\infty) - Z_n'(v))$  converge presque partout vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  alors par le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} f(Z_n'(u_\infty) - Z_n'(v)) \varphi \phi \, dx \, dt. \quad (2.167)$$

Pour ce qui est du premier terme de (2.162), par le Lemme 2.2.1 et en utilisant la convergence (2.60), il vient

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \, d\tau \right) \phi \, dx \, dt \\ \geq - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \xi_t \tilde{T}_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \phi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Comme  $0 \leq \tilde{T}_k(r) \leq k|r|$  et  $Z_n$  est lipschitzienne alors  $\tilde{T}_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \leq k|u_\infty - v| \in L^1(Q_t)$  et donc par le théorème de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{h \rightarrow 0} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} (Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \, d\tau \right) \phi \, dx \, dt \\ \geq - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \xi_t \tilde{T}_k(u_\infty - v) \phi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Pour ce qui est du quatrième terme de (2.162), la convergence (2.60) implique

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} [Z_n'(u_\infty) a(t, x_2, Du_\infty) - Z_n'(v) a(t, x_2, Dv)] \cdot D\varphi \phi \, dx \, dt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} [Z_n'(u_\infty) a(t, x_2, Du_\infty) - Z_n'(v) a(t, x_2, Dv)] \cdot DT_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \xi \phi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.170)$$

On décompose le second membre de (2.170) de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} [Z_n'(u_\infty) a(t, x_2, Du_\infty) - Z_n'(v) a(t, x_2, Dv)] \cdot DT_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \xi \phi \, dx \, dt \\ = \int_{\{|Z_n(u_\infty) - Z_n(v)| \leq k\}} (a(t, x_2, DZ_n(u_\infty)) - a(t, x_2, DZ_n(v))) \cdot D(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \xi \phi \, dx \, dt \\ + \int_{\{|Z_n(u_\infty) - Z_n(v)| \leq k\}} (Z_n'(u_\infty) a(t, x_2, Du_\infty) - a(t, x_2, DZ_n(u_\infty))) \cdot D(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \xi \phi \, dx \, dt \\ + \int_{\{|Z_n(u_\infty) - Z_n(v)| \leq k\}} (Z_n'(v) a(t, x_2, Dv) - a(t, x_2, DZ_n(v))) \cdot D(Z_n(u_\infty) - Z_n(v)) \xi \phi \, dx \, dt \\ = L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned}$$

En observant que d'après la définition de  $Z_n$  on a  $Z'_n(u_\infty)a(Du_\infty) = a(DZ_n(u_\infty))$  presque partout sauf sur l'ensemble  $\{(t, x); n \leq |u_\infty(t, x)| \leq n+1\}$  et en utilisant la convergence des énergies on montre, (voir [6] pour les détails), que  $L_2$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De même on montre que  $L_3$  tend vers 0. Il en résulte donc, d'après la stricte monotonie (2.3) de l'opérateur  $a$  appliquée au terme  $L_1$ , l'inégalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} [Z'_n(u_\infty)a(t, x_2, Du_\infty) - Z'_n(v)a(t, x_2, Dv)] \cdot D\varphi \phi \, dx \, dt \geq 0. \quad (2.171)$$

Enfin par la convergence (2.60), il vient

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \varphi (Z'_n(u_\infty) - Z'_n(v)) \phi \, dx \, dt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v))(Z'_n(u_\infty) - Z'_n(v)) \phi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Puis par un raisonnement classique dans la preuve de l'unicité des solutions renormalisées (voir par exemple [14]), on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} T_k(Z_n(u_\infty) - Z_n(v))(Z'_n(u_\infty) - Z'_n(v)) \phi \, dx \, dt = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} g \cdot D_{x_2} \varphi (Z'_n(u_\infty) - Z'_n(v)) \phi \, dx \, dt = 0. \quad (2.172)$$

Finalement, en injectant (2.163), (2.164), (2.165), (2.166), (2.167), (2.169), (2.171) et (2.172) dans (2.162) il vient

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \xi_t \tilde{T}_k(u_\infty - v) \phi \, dx \, dt \leq 0,$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}((0, T))$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$  tels que  $\xi(T) = 0$  et  $\phi \geq 0$ . On choisit alors  $\xi(t) = T - t$ , pour obtenir

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^q \times \omega} \tilde{T}_k(u_\infty - v) \phi \, dx \, dt \leq 0,$$

et donc comme  $\tilde{T}_k \geq 0$ , alors  $\tilde{T}_k(u_\infty - v) = 0$ , c'est-à-dire  $u_\infty = v$ .



## Deuxième partie

# Problèmes d'unicité pour les systèmes de Boussinesq





# Chapitre 3

## Le système

Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$ . On étudie le système de Boussinesq suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (3.1a)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = |Du|^2 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (3.1c)$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1d)$$

$$u = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \quad (3.1e)$$

Pour tout  $t \in (0, T)$ , on pose  $Q_t = (0, t) \times \Omega$ . Le système de Boussinesq est un système non linéaire d'évolution dérivant de modèles de mécanique des fluides. Les inconnues sont :

- la vitesse du fluide,  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^N$
- la pression  $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$
- la température  $\theta : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'équation (3.1a) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Tandis que l'équation (3.1c) est l'équation de conservation de l'énergie, où l'énergie est ici une fonction linéaire de la température. La viscosité du fluide est supposée constante égale à 1. Dans le cas de fluides compressibles, la densité n'est a priori pas constante. Cependant, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on peut se ramener à supposer qu'elle est constante sauf dans les termes de force de gravité. Cela justifie l'équation (3.1b) et la présence du terme  $F(\theta)$  dans l'équation (3.1a), où  $F(\theta)$  est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité qui dépendent de la température. Le second membre de (3.1c), représente l'énergie de dissipation. On impose pour  $u$  et  $\theta$  des conditions de types Dirichlet (3.1e et les conditions initiales (3.1d)). On pourra trouver la justification de ces hypothèses dans [43] et [4]. Le système de Boussinesq (3.1) résulte donc d'un couplage fortement non linéaire des équations de Navier Stokes (équations (3.1a) et (3.1b)) et de l'équation de la chaleur (équation (3.1c)).

Des systèmes non linéaires similaires ont étudiés dans [1], [2], [24], [27], [34]. Dans [24], Climent, Fernández-Cara et Lions montrent des résultats d'existence et d'unicité pour des

systèmes où le second membre des équations de Navier-Stokes est supposé constant. Tandis que dans [27], Díaz et Galiano s'intéressent à des systèmes où l'énergie de dissipation est nulle. Enfin dans [1] et [2], Attaoui et Blanchard considèrent des systèmes plus généraux que (3.1), où l'énergie interne est une fonction non linéaire de la température,  $b(\theta)$ , où  $b$  est croissante continue ou discontinue dans le cas de système Boussinesq-Stefan et où la viscosité est non constante dépendant non-linéairement de la température  $\theta$ . Les deux auteurs s'intéressent essentiellement à l'existence de solutions, l'unicité étant particulièrement délicate.

On s'intéresse ici essentiellement aux questions d'unicité des solutions du système (3.1). Celle-ci est délicate à prouver du fait du couplage très non linéaire entre les équations. Il y a d'ailleurs peu de résultats d'unicité tant dans le domaine de la mécanique des fluides que la mécanique des solides. On pourra consulter [1], [2], [24], [27] pour des résultats partiels. On se place dans le cas de la dimension 2, cas où l'on a existence et unicité de la solution faible,  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , des équations de Navier-Stokes. L'énergie de dissipation  $|Du|^2$  est alors un élément de  $L^1(Q_T)$ . On est donc amené à travailler dans le cadre des solutions renormalisées pour l'équation de la chaleur. Cette notion de solutions introduite pour l'étude de l'équation de Boltzmann par DiPerna et Lions (voir [29], [30]), puis adaptée ensuite aux équations elliptiques et paraboliques à données peu régulières (voir par exemple [6], [35], [38], [37]), s'avère particulièrement efficace car elle permet de montrer l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions de ces équations. Pour notre part, nous utiliserons la formulation des solutions renormalisées pour des problèmes paraboliques, introduite par Blanchard et Porretta dans [8], plus aisée à manipuler et qui permet de simplifier entre autres les preuves d'existence de solutions.

On suppose que  $u_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(Q_T)$  et  $\theta_0 \in L^1(Q_T)$ . On suppose également que  $F$  est continue et vérifie une condition de croissance, que l'on adaptera selon les cas (suivant la régularité de  $\theta$ ), mais qui impliquera au moins  $F(\theta) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . Pour étudier le système, on introduit alors la notion de solutions faibles-renormalisées (Définition 5.1.1). Même si des résultats d'existence de solutions faibles-renormalisées sont connus (voir [1], [2]), on redonnera selon les cas une démonstration, reposant sur le théorème du point fixe de Schauder, et utilisant la formulation renormalisée de Blanchard et Porretta et qui simplifient les preuves existantes.

Pour ce qui est de l'unicité, une des difficultés essentielles réside dans le fait que  $u \cdot D\theta \notin L^1(Q_T)$ . On est donc amené à faire des hypothèses plus fortes sur les données pour améliorer la régularité de  $u \cdot D\theta$ . Les outils essentiels pour y parvenir sont :

- (i) savoir estimer la norme de la solution des équations de Navier-Stokes et de la chaleur en fonction de la norme des données
- (ii) savoir estimer la norme de la différence de deux solutions en fonction de la norme de la différence des données.

L'objectif étant d'améliorer la régularité de  $u \cdot D\theta$ , on adoptera deux stratégies, on améliore  $u$  ou on améliore  $D\theta$ . On sera également amené dans un premier temps, pour simplifier, à remplacer l'énergie de dissipation par une source fixe  $f$ .

C'est pourquoi nous étudierons tout d'abord de manière distincte, dans le Chapitre 4, les équations de Navier-Stokes puis l'équation de la chaleur. Dans une première partie

---

(Section 4.1), on rappellera les résultats classiques d'existence et d'unicité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, puis on établira des résultats de régularité pour des données plus régulières en établissant les propriétés (i) et (ii) ci-dessus en s'appuyant sur des résultats de régularités de Gerhardt (voir [31]). Puis dans une seconde partie (Section 4.2), on établira des résultats de régularité de solutions renormalisées dans le cas où la source  $f$  est dans  $L^1(0, T; L^m(\Omega))$  et  $\theta_0$  dans  $L^m(Q_T)$  ( $m > 1$ ) en adaptant les techniques de [10] et [26] pour obtenir des régularités sur  $\theta$  découplées en temps en en espace.

Puis dans le Chapitre 5, on applique les résultats du Chapitre 4 pour parvenir à notre objectif. On suppose dans un premier temps que l'énergie de dissipation est remplacée par une source fixe. Dans la Section 5.2, on montre l'unicité pour des données petites en considérant des données plus régulières pour l'équations de la chaleur, typiquement  $f \in L^1(L^m)$  et  $\theta_0 \in L^m$ , avec  $m > 1$ , (voir Théorèmes 5.2.1 et 5.2.2) et dans la Section 5.3 en considérant des données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes, en prenant  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ ,  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $F$  de croissance plus faible (voir Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2). Enfin dans la Section 5.4, on revient au système originel (3.1) avec énergie de dissipation. Et en prenant  $\theta_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ , alors  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$  et on montre dans ce cas l'existence avec des conditions sur la croissance  $\alpha$  de  $F$  (Théorème 5.4.1). On montre ensuite l'unicité de la solution faible si les solutions sont petites (Théorème 5.4.2).



# Chapitre 4

## Équations de Navier-Stokes - Équation de la chaleur

### 4.1 Équations de Navier-Stokes

Dans cette section, on rappelle les outils nécessaires, les résultats d'existence, d'unicité, de régularité des solutions des équations de Navier-Stokes incompressible. Puis on établit des résultats de régularités pour des données plus régulières. On rappelle que  $T > 0$  et que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  avec  $N = 2$  ou  $3$ .

#### 4.1.1 Solutions faibles

On rappelle les équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + \nabla p = g & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où les inconnues sont

- $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$  la vitesse,
- $p(t, x)$  la pression,

et les données

- $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_N(t, x)) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  la force,
- $u_0(x) = (u_{0,1}(x), \dots, u_{0,N}(x)) \in L^2(\Omega)$  la vitesse initiale.

On définit les espaces suivants, classiques dans la théorie des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{c,\sigma}^\infty(\Omega) &= \{u \in (C_c^\infty(\Omega))^N ; \operatorname{div}(u) = 0\} \\ \mathbf{L}^p(\Omega) &= (L^p(\Omega))^N, \quad \mathbf{L}_\sigma^p(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}} \\ \mathbf{W}^{p,s}(\Omega) &= (W^{p,s}(\Omega))^N \\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) &= (H_0^1(\Omega))^N, \quad \mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))' \\ \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega) &= \overline{\mathbf{C}_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}} = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) ; \operatorname{div}(u) = 0\} \\ \mathbf{L}_\sigma^2(Q_T) &= L^2(0, T; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Comme la dimension  $N \leq 4$ , on peut définir sur  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  la forme trilinéaire

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} u \cdot Dv w \, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) w_j \, dx.$$

Si  $u \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ ,  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  alors, par les formules de Green,  $b(u, v, v) = 0$ . Dans la suite on omettra la pression  $p$  dans les équations (4.1), celle-ci se retrouvant a posteriori par le lemme de De Rham (voir [42]).

**Définition 4.1.1** *On dit que  $u$  est solution faible de (4.1), si*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)), \\ u(t=0) &= u_0, \end{aligned}$$

et si pour presque tout  $t \in (0, T)$ , pour tout  $v \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + b(u, u, v) = \langle g, v \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)}.$$

On rappelle, dans le cas  $N = 2$  le théorème d'existence et d'unicité suivant (voir [42]).

**Théorème 4.1.2** *Supposons  $N = 2$ . Il existe une unique solution faible  $u$  de (4.1), qui satisfait de plus  $u \in C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$  et l'égalité d'énergie*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2(t) \, dx + \int_{Q_t} |Du|^2 \, dx \, ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 \, dx \\ &+ \int_0^t \langle g(s), u(s) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \, ds, \quad p.p. \, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On a de plus le principe de contraction,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2(t) \, dx + \int_{Q_t} |Du_1 - Du_2|^2 \, dx \, ds \\ \leq C \left( \int_0^t \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 \, dx \, ds + \int_{\Omega} |u_{0,1} - u_{0,2}|^2 \right), \quad p.p. \, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\|u_2\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|g_2\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$  et où  $u_1, u_2$  sont respectivement les solutions faibles de (4.1) pour les données  $(g_1, u_{0,1}), (g_2, u_{0,2})$ .

On rappelle ici les inégalités de Gagliardo-Nirenberg qui nous seront utiles à de multiples endroits dans la suite.

**Lemme 4.1.3** *Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $v$  une fonction de  $W_0^{m,q}(O) \cap W_0^{1,q}(O) \cap L^\rho(O)$  avec  $m \geq 1, q \geq 1, \rho \geq 1$ . Alors il existe une constante positive  $C(q, \rho, N, \gamma)$  telle que*

$$\|v\|_{L^\gamma(O)} \leq C(q, \rho, N, \gamma) \|D^m v\|_{L^q(O)}^\alpha \|v\|_{L^\rho(O)}^{1-\alpha},$$

pour tout  $\alpha$  et  $\gamma$  satisfaisant

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 1 \leq \gamma < +\infty, \quad \frac{1}{\gamma} = \alpha \left( \frac{1}{q} - \frac{m}{N} \right) + \frac{1-\alpha}{\rho}.$$

**Démonstration** — Voir [39]

□

**Remarque 4.1.4** On rappelle que dans le cas  $N = 2$ , la solution  $u$  des équations de Navier-Stokes est dans  $\mathbf{L}^4(Q_T)$ . De plus, en combinant l'égalité d'énergie (4.2) et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir Lemme 4.1.3), on obtient l'estimation

$$\|u\|_{\mathbf{L}^4(Q_T)} \leq C(\Omega) (\|g\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.4)$$

**Remarque 4.1.5** Si on considère des seconds membres  $g_1, g_2$  dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$  alors le principe de contraction devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2(t) dx + \int_{Q_t} |Du_1 - Du_2|^2 dx ds \\ \leq C \left( \int_{Q_t} |g_1 - g_2|^2 dx ds + \int_{\Omega} |u_{0,1} - u_{0,2}|^2 \right), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\|u_2\|_{L^2(Q_T)}$  et  $\|g_2\|_{L^2(Q_T)}$ .

## 4.1.2 Solutions plus régulières

Pour les besoins de l'étude de l'unicité du système de Boussinesq on est amené à considérer des solutions plus régulières pour les équations de Navier-Stokes. Pour cela on prend des données  $u_0, g$  plus régulières, typiquement  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et  $g \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ , et un ouvert plus régulier c'est-à-dire  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Dans ce cas, les résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles s'appliquent. On montrera des résultats de régularité supplémentaires en utilisant et en adaptant les résultats de Gerhardt, dans [31], et Solonnikov, dans [41], pour montrer les dépendances exactes de la norme des solutions en fonction de la norme des données et pour montrer les contractions nécessaires pour prouver l'unicité



du système.

Rappelons les résultats de Gerhardt qui nous intéresseront. Tout d'abord un résultat de régularité.

**Théorème 4.1.6** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Supposons que  $u_0 \in \mathbf{W}^{2-2/s,s}(\Omega)$  avec  $\operatorname{div}(u_0) = 0$  et  $u_0 = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $g \in \mathbf{L}^s(Q_T)$  pour  $s \geq 2$ . Alors les équations (4.1) admettent une unique solution faible  $u$  et une unique distribution  $p$  qui satisfont de plus pour  $s \geq 2$*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^s(Q_T), \quad u \in L^s(0, T; \mathbf{W}^{2,s}(\Omega)), \quad Dp \in \mathbf{L}^s(Q_T)$$

avec les estimations

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^s(Q_T)} + \|u\|_{L^s(0,T;\mathbf{W}^{2,s}(\Omega))} + \|Dp\|_{\mathbf{L}^s(Q_T)} \leq C \left( \|g\|_{\mathbf{L}^s(Q_T)} + \|u_0\|_{\mathbf{W}^{2-2/s,s}(\Omega)} \right) \quad (4.6)$$

où  $C$  dépend de  $r, \partial\Omega, T$  et des quantités

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} |g|^2 dx \right)^{1/2} dt, \quad \int_{\Omega} |u_0|^2 dx.$$

Dans le cas  $s > 2$ ,  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ , on a alors de plus,  $u \in \mathbf{L}^\infty(Q_T)$  avec l'estimation

$$\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(Q_T)} \leq k_0 + C(s) \|g\|_{\mathbf{L}^s(Q_T)} \left( \int_{Q_T} |u|^4 dx dt \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}} k_0^{-4(\frac{1}{2} - \frac{1}{s})}, \quad (4.7)$$

où  $k_0$  est une constante arbitraire supérieure à  $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$ .

**Démonstration** — Voir Théorème 2 et Lemme 5 dans [31].

□

Dans le cas  $s = 2$ , Gerhardt précise la dépendance de la solution par rapport aux données.

**Théorème 4.1.7** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Supposons que  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  avec  $\operatorname{div}(u_0) = 0$  et  $u_0 = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $g \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ . Alors, on a les estimations suivantes*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + \|u\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|Dp\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \leq C_1 \left( \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|g\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \right) \left( 1 + (\|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|g\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)})^2 \exp \left( C_2 \left( \|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^4 + \|g\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}^4 \right) \right) \right), \quad (4.8)$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes ne dépendant que de  $\Omega$ .

Rappelons ensuite la contraction établie par Gerhardt dans le cas de données plus régulières.

**Théorème 4.1.8** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Supposons que  $u_{0,1}, u_{0,2} \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$  et  $g_1, g_2 \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ . Alors les solutions  $u_1, u_2$  de (4.1) pour ces données satisfont*

$$\left\| \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))} \leq C \left( \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right) \quad (4.9)$$

où  $C$  dépend de  $\Omega, T$  et des quantités

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} |g_i|^2 dx \right)^{1/2} dt, \quad \int_{\Omega} |u_{0,i}|^2 dx, \quad \int_{\Omega} |Du_{0,i}|^2 dx, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

**Démonstration** — Voir Théorème 7 dans [31]. □

On établit dans la suite des résultats de régularité et de contraction dans le cas  $s = 2$  c'est-à-dire dans le cas de données  $g \in \mathbf{L}^2(Q_T)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

**Proposition 4.1.9** *Supposons les hypothèses du Théorème 4.1.6 vérifiées pour  $s = 2$ . Alors  $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ , avec l'estimation*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 \leq \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx + \|u\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{\mathbf{W}^{1,2}(Q_T)}^2. \quad (4.10)$$

De plus  $u \in \mathbf{L}^r(Q_T)$ , pour tout  $2 \leq r < \infty$  avec

$$\|u\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)} \leq C(r, \Omega) \|u\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))}^{\frac{2}{r}} \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{r-2}{r}}. \quad (4.11)$$

où  $C(r)$  ne dépend que de  $r$  et de  $\Omega$ .

**Démonstration** — Soit  $h > 0$  (destiné à tendre vers 0). On pose pour tout  $(t, x) \in Q_T$

$$u_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t u(\tau, x) d\tau,$$

où on a posé  $u(\tau, x) = u_0(x)$  pour  $\tau < 0$ . Ainsi, pour presque tout  $(t, x) \in Q_T$

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t-h, x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau$$

et donc,

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)). \quad (4.12)$$

Comme  $u \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{W}^{1,2}(Q_T)$ , on a, de plus, les convergences suivantes,

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))\text{-fort} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(Q_T)\text{-fort.} \quad (4.14)$$

Une application des formules de Green donne

$$\int_{Q_t} -\Delta u_h \cdot \frac{\partial u_h}{\partial t} dx ds = \int_{Q_t} Du_h \cdot D \left( \frac{\partial u_h}{\partial t} dx ds \right), \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

le terme de bord étant nul d'après (4.12). Et en utilisant le fait que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} |Du_h|^2 \right) = Du_h \cdot D \left( \frac{\partial u_h}{\partial t} \right).$$

il vient

$$\int_{Q_t} -\Delta u_h \cdot \frac{\partial u_h}{\partial t} dx ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_h|^2(t) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_h|^2(t=0) dx, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.15)$$

Maintenant, on veut faire tendre  $h$  vers 0 dans l'égalité (4.15), pour montrer que cette égalité est vérifiée si on remplace  $u_h$  par  $u$ . D'après les convergences (4.13) et (4.14), on a pour le membre de gauche de (4.15)

$$\int_{Q_t} -\Delta u_h \cdot \frac{\partial u_h}{\partial t} dx ds \longrightarrow \int_{Q_t} -\Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx ds.$$

Traitons le premier terme de droite de (4.15), d'après la convergence (4.13),  $Du_h \rightarrow Du$  dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$ . Il en résulte que pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,  $Du_h(t) \rightarrow Du(t)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  et donc

$$\int_{\Omega} |Du_h|^2(t) dx \longrightarrow \int_{\Omega} |Du|^2(t) dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Pour ce qui est du dernier terme de (4.15), observons tout d'abord que pour presque tout  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ ,

$$Du_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t Du(\tau, x) d\tau.$$

Et comme, on a posé  $u(\tau, x) = u_0$  pour  $\tau < 0$ , alors  $Du_h(t=0) = Du_0$ . On peut donc passer à la limite dans (4.15) pour obtenir

$$\int_{Q_t} -\Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2(t) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.16)$$

Une application de l'inégalité de Young sur le membre de gauche de (4.16) donne alors pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} |Du|^2(t) dx \leq \int_{\Omega} |Du_0|^2 dx + \|u\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}^2. \quad (4.17)$$

Ce qui montre l'inégalité (4.10). Pour ce qui est de l'inégalité (4.11), c'est une conséquence directe de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (Lemme 4.1.3). En effet, en appliquant ce résultat, il vient pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\|u\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)} \leq C(r, q, \Omega) \|D^2 u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^\alpha \|u\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad (4.18)$$

où  $q, r, \alpha$  sont définis par

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 1 \leq r, q < \infty, \quad \frac{1}{r} = \alpha \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\alpha}{q}. \quad (4.19)$$

En utilisant l'injection de Sobolev  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega)$ , en élevant l'inégalité (4.18) à la puissance  $r$  et en intégrant sur  $[0, T]$  il vient

$$\|u\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)}^r \leq C(r, q, \Omega) \int_0^T \|D^2 u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{r\alpha} \|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^{r(1-\alpha)} dt.$$

On choisit alors  $\alpha$  tel que  $r\alpha = 2$ , de sorte que

$$\|u\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)}^r \leq C(r, q, \Omega) \|u\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))}^2 \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{r-2}.$$

En combinant les relations (4.19) et  $r\alpha = 2$ , il vient  $r = 2q$ ,  $q$  étant arbitraire positif on a le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 4.1.10** Dans la démonstration précédente on a utilisé que les régularités de  $u$

$$u \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(Q_T),$$

le fait que  $u(t=0) = u_0$  dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$  et  $Du_0 \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ . On n'a pas utilisé que  $u$  vérifiait les équations de Navier-Stokes.

On établit maintenant le résultat de contraction suivant.

**Théorème 4.1.11** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Soient  $u_1, u_2$  les solutions des équations de Navier-Stokes, respectivement, pour les données  $g_1, g_2 \in \mathbf{L}^2(Q_T)$  et  $u_{0,1}, u_{0,2} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Alors pour tout  $r \geq 2$*

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)} \leq C \left( \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \right). \quad (4.20)$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $\Omega, T, r, \|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \|g_i\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}$ .

**Démonstration** — Tout d'abord d'après la contraction (4.9) du Théorème 4.1.8, on a

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))} + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{W}^{1,2}(Q_T)} \\ \leq C \left( \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} + \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $\|g_i\|_{L^2(Q_T)}$ ,  $\|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$  de  $\Omega$  et de  $T$ . Alors par la Proposition 4.1.9 et la remarque 4.1.10,  $u_1 - u_2 \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  et  $u_1 - u_2 \in \mathbf{L}^r(Q_T)$  pour tout  $r \geq 2$  avec les estimations

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^2 &\leq \int_{\Omega} |Du_{0,1} - Du_{0,2}|^2 dx \\ &\quad + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{W}^{1,2}(Q_T)}^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)} \leq C(r, \Omega) \|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))}^{\frac{2}{r}} \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{1-\frac{2}{r}}. \quad (4.23)$$

En combinant (4.21), (4.22) et (4.23) on obtient le résultat.  $\square$

## 4.2 Équation de la chaleur

### 4.2.1 Solutions renormalisées

Dans cette partie, on se place dans le cas  $N \geq 1$  quelconque. On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta(t = 0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.24)$$

où

- $f \in L^1(Q_T)$ ,  $\theta_0 \in L^1(\Omega)$
- $u \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  avec  $\operatorname{div}(u) = 0$ .

Dans le cas où il n'y a pas de terme de convection  $u \cdot D\theta$ , et dans le cas plus général où l'opérateur est de type Leray-Lions, la résolution de ce type d'équation est très connue. Elle fait appel à la notion de solutions renormalisées des problèmes paraboliques, introduite dans la Section 2.2, bien adaptée à ce type de problème car il y a existence, unicité et stabilité des solutions. Une définition de solutions renormalisées pour le problème (4.24) s'inspirant de la formulation classique de Blanchard et Murat (dans [6]), est introduite par Attaoui et Blanchard (voir [1], [2]). Cependant, ici nous introduisons une autre formulation, équivalente à la première, dérivant de la définition des solutions renormalisées de Blanchard et Porretta dans [8], car elle s'avère plus aisée à manipuler. En particulier, la preuve de l'existence d'une solution est substantiellement simplifiée.

Avant toute chose, on rappelle quelques notations et définitions usuelles. On note  $T_k(r)$  la fonction troncature à la hauteur  $k$  définie par  $T_k(r) = \min(\max(r, -k), k)$ , et  $h_n(r) = 1 - \frac{1}{n}|T_{2n}(r) - T_n(r)|$ . Les fonctions  $\tilde{T}_k$ ,  $S_n$  sont les primitives de  $T_k$  et  $h_n$ , respectivement, s'annulant en 0, c'est-à-dire définies par

$$\tilde{T}_k(r) = \int_0^r T_k(\rho) d\rho, \quad S_n(r) = \int_0^r h_n(\rho) d\rho.$$

**Définition 4.2.1** On dit que  $\theta$  finie presque partout sur  $Q_T$  est solution renormalisée du problème (4.24) si

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)); \quad (4.25)$$

$$T_k(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \forall k \geq 0; \quad (4.26)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |\theta| \leq 2n\}} |D\theta|^2 dx dt = 0; \quad (4.27)$$

pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$  tel que  $S'(\theta)\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0) dx + \int_{Q_T} S''(\theta) |D\theta|^2 \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} S'(\theta) D\theta \cdot D\varphi dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DS(\theta) \varphi dx dt = \int_{Q_T} f S'(\theta) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

**Remarque 4.2.2** On rappelle que dans (4.28), on peut prendre  $\varphi \in W^{1,\infty}(Q_T)$  avec  $\varphi(T) = 0$ .

**Remarque 4.2.3** Comme  $S'$  est à support compact,  $\text{supp}(S') \subset [-M, M]$  alors l'équation (4.28) doit être comprise de la manière suivante

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0) dx + \int_{Q_T} S''(\theta) |DT_M(\theta)|^2 \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} S'(\theta) DT_M(\theta) \cdot D\varphi dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DT_M(\theta) S'(\theta) \varphi dx dt = \int_{Q_T} f S'(\theta) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Par (4.26),  $T_M(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et par la régularité de  $S$  et  $\varphi$  tous les termes de (4.29) sont donc bien définis.

**Remarque 4.2.4** On peut introduire une formulation équivalente à la Définition (4.2.1) dérivée de la formulation classique introduite par Blanchard et Murat dans [6]. Pour cela on remplace (4.28) par

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial t} - \text{div}(S'(\theta) D\theta) + S''(\theta) |D\theta|^2 + u \cdot DS(\theta) = f S'(\theta) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \quad (4.30)$$

$$S(\theta(t=0)) = S(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.31)$$

pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact. On a bien évidemment équivalence entre les deux formulations comme montré dans la proposition suivante.

**Proposition 4.2.5** La formulation de solution renormalisée de la Définition 4.2.1 est équivalente à la formulation classique.

**Démonstration** — La démonstration est similaire à la démonstration de la Proposition (2.2.10). □

### 4.2.2 Existence et unicité de la solution

**Théorème 4.2.6** *Le problème (4.24) admet une unique solution renormalisée.*

**Démonstration** — La preuve s'effectuera en six étapes. Tout d'abord nous montrons, par point fixe, un résultat d'existence pour le problème approché de (4.24) suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta^\epsilon}{\partial t} - \Delta \theta^\epsilon + u \cdot D\theta^\epsilon = f^\epsilon & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta^\epsilon(t=0) = \theta_0^\epsilon & \text{dans } \Omega \\ \theta^\epsilon = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $f^\epsilon = T_{1/\epsilon}(f)$ ,  $\theta_0^\epsilon = T_{1/\epsilon}(\theta_0)$ .

On montre ensuite que la solution  $\theta^\epsilon$  du problème approché (4.32) est solution renormalisée. Puis dans une troisième étape on établit des estimations a priori sur les solutions  $\theta^\epsilon$  de ce problème. Dans une quatrième étape, on montre la convergence forte des troncatures  $T_k(\theta^\epsilon)$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Dans l'étape 5, on passe à la limite dans le problème approché, pour en déduire l'existence de la solution renormalisée. Enfin dans la sixième étape, on montre l'unicité.

#### Étape 1 : existence et unicité de (4.32)

Pour cela on régularise le  $u$ , il existe  $u_j \in \mathbf{L}^\infty(Q_T)$ ,  $\operatorname{div}(u_j) = 0$  telle que  $u_j$  converge vers  $u$  dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$  (cf. [34]), et on cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_j^\epsilon}{\partial t} - \Delta \theta_j^\epsilon + u_j \cdot D\theta_j^\epsilon = f^\epsilon & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta_j^\epsilon(t=0) = \theta_0^\epsilon & \text{dans } \Omega \\ \theta_j^\epsilon = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.33)$$

puis à faire tendre  $j$  vers  $+\infty$ .

Afin d'alléger les notations, on omet les  $\epsilon$  et les  $j$ . Remarquant de plus que  $\operatorname{div}(u_j) = 0$  implique que  $u_j \cdot D\theta^\epsilon = \operatorname{div}(u_j \theta^\epsilon)$ , on est donc ramené à la résolution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta \vartheta = g - \operatorname{div}(v \vartheta) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \vartheta(t=0) = \vartheta_0 & \text{dans } \Omega \\ \vartheta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.34)$$

où  $v \in \mathbf{L}^\infty(Q_T)$ ,  $\operatorname{div}(v) = 0$ ,  $g \in L^\infty(Q_T)$ ,  $\vartheta_0 \in L^\infty(\Omega)$ .

Pour résoudre (4.34), on utilise le théorème de point fixe de Schauder. Pour cela on pose, pour  $\delta > 0$  (destiné à tendre vers 0), l'application

$$\Phi_\delta : \hat{\vartheta} \in L^2(Q_T) \longmapsto \vartheta^\delta \in L^2(Q_T)$$

où  $\vartheta^\delta$  est l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta^\delta}{\partial t} - \Delta \vartheta^\delta = g - \operatorname{div}(v T_{1/\delta}(\hat{\vartheta})) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \vartheta^\delta(t=0) = \vartheta_0 & \text{dans } \Omega \\ \vartheta^\delta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.35)$$

Comme  $\operatorname{div}(v T_{1/\delta}(\hat{\vartheta})) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , c'est là l'intérêt d'écrire ce terme sous forme divergencielle, le problème ci-dessus admet une unique solution faible  $\vartheta^\delta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , donc l'application  $\Phi_\delta$  est bien définie. Reste à montrer que  $\Phi_\delta$  est compacte, continue et laisse invariant une boule de  $L^2(Q_T)$ .

**$\Phi_\delta$  compacte** : soit  $(\hat{\vartheta}_n)$  une suite bornée dans  $L^2(Q_T)$ . Si on pose  $\vartheta_n^\delta = \Phi_\delta(\hat{\vartheta}_n)$ , alors on a l'estimation classique

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\vartheta_n^\delta|^2(t) dx + \int_{Q_t} |D\vartheta_n^\delta|^2 dx ds \leq C \left( \int_{Q_t} |g|^2 dx ds \right. \\ \left. + \int_{Q_t} |T_{1/\delta}(\hat{\vartheta}_n)|^2 dx ds + \int_{\Omega} |\vartheta_0|^2 dx \right), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.36)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . Ainsi

- $\vartheta_n^\delta$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
- $\frac{\partial \vartheta_n^\delta}{\partial t} = \Delta \vartheta_n^\delta + g - \operatorname{div}(v T_{1/\delta}(\hat{\vartheta}_n))$  borné dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

donc par un lemme de type Aubin-Simon (cf. [40]),  $\vartheta_n^\delta$  est compact dans  $L^2(Q_T)$ .

**$\Phi_\delta$  continue** : soit  $(\hat{\vartheta}_n)$  une suite convergeant dans  $L^2(Q_T)$  vers  $\hat{\vartheta}$ . Alors en faisant la différence des équations en  $\vartheta_n^\delta$  et  $\vartheta^\delta$ , et en prenant  $\vartheta_n^\delta - \vartheta^\delta$  comme fonction test il vient

$$\int_{Q_T} |D\vartheta_n^\delta - D\vartheta^\delta|^2 dx dt \leq C \|v\|_{L^\infty(Q_T)} \int_{Q_T} |\hat{\vartheta}_n - \hat{\vartheta}|^2 dx dt.$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . Par Poincaré,  $(\vartheta_n^\delta)$  converge vers  $\vartheta^\delta$  dans  $L^2(Q_T)$ .

**$\Phi_\delta$  préserve une boule de  $L^2(Q_T)$**  : de l'estimation (4.36) et de l'inégalité  $|T_{1/\delta}| \leq 1/\delta$ , il vient

$$\int_{Q_T} |D\vartheta_n^\delta|^2 dx dt \leq C (\|g\|_{L^2(Q_T)}, \|\vartheta_0\|_{L^2(\Omega)}, \delta).$$

Donc par l'inégalité de Poincaré,  $\Phi_\delta$  préserve une boule de  $L^2(Q_T)$ . Par le théorème de point fixe de Schauder, l'application  $\Phi_\delta$  admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe  $\vartheta^\delta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  solution faible de

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta^\delta}{\partial t} - \Delta \vartheta^\delta = g - \operatorname{div}(v T_{1/\delta}(\vartheta^\delta)) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \vartheta^\delta(t=0) = \vartheta_0 & \text{dans } \Omega \\ \vartheta^\delta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.37)$$



On veut faire tendre  $\delta$  vers 0 dans (4.37). En prenant  $\vartheta^\delta$  comme fonction test dans (4.37) et en observant que par la formule de Stokes

$$\int_{Q_T} v T_{1/\delta}(\vartheta^\delta) \cdot D\vartheta^\delta = 0, \quad \text{car } \operatorname{div}(u) = 0,$$

on obtient l'estimation suivante

$$\int_{Q_T} |D\vartheta^\delta|^2 dx dt \leq C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$ . Ainsi

- $\vartheta^\delta$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
- $\frac{\partial \vartheta^\delta}{\partial t} = \Delta \vartheta^\delta + g - \operatorname{div}(v T_{1/\delta}(\vartheta))$  borné dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

donc par un lemme de type Aubin-Simon (cf. [40]), il existe  $\vartheta$  tel que

$$\vartheta^\delta \text{ converge vers } \vartheta \text{ dans } L^2(Q_T), \text{ dans } C(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

On peut donc passer à la limite dans (4.37), on a donc résolu le problème (4.34) i.e. le problème (4.33). Reste à faire  $j \rightarrow \infty$  dans (4.33). On procède comme ci-dessus, c'est à dire que l'on prend  $\theta_j^\epsilon$  comme fonction test dans (4.33), pour obtenir l'estimation

$$\int_{Q_T} |D\vartheta_j^\epsilon|^2 dx dt \leq C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $j$ . Et donc

- $\vartheta_j^\epsilon$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
- $\frac{\partial \vartheta_j^\epsilon}{\partial t} = \Delta \vartheta_j^\epsilon + f^\epsilon - \operatorname{div}(u_j \vartheta_j^\epsilon)$  borné dans  $L^1(Q_T) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \subset L^1(0, T; W^{-1,s}(\Omega))$  où  $s < \min(2, N/(N-1))$ .

Par un lemme de type Aubin-Simon, il existe  $\theta^\epsilon \in L^2(Q_T) \cap C([0, T]; W^{-1,s}(\Omega))$  tel que

$$\theta_j^\epsilon \rightarrow \theta^\epsilon \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et dans } C([0, T]; W^{-1,s}(\Omega)).$$

On peut donc passer à la limite quand  $j \rightarrow \infty$  dans (4.33), on a ainsi montré l'existence d'une solution de (4.32).

Pour ce qui est de l'unicité, on montre un principe de contraction. En effet, si  $\theta^\epsilon, \theta^\eta$  sont deux solutions de (4.32) pour des données  $f^\epsilon, f^\eta, \theta_0^\epsilon, \theta_0^\eta$ , alors on prend  $\frac{1}{\delta} T_\delta(\theta^\epsilon - \theta^\eta)$  comme fonction test dans la différence des équations, en utilisant le fait que par la formule de Stokes

$$\int_{Q_T} u \cdot D(\theta^\epsilon - \theta^\eta) \frac{1}{\delta} T_\delta(\theta^\epsilon - \theta^\eta) = 0 \text{ car } \operatorname{div}(u) = 0$$

et que  $|\frac{1}{\delta} T_\delta| \leq 1$ , il vient pour presque tout  $t \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\delta} \tilde{T}_\delta(\theta_1^\epsilon - \theta_2^\epsilon)(t) dx \leq \|f^\epsilon - f^\eta\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0^\epsilon - \theta_0^\eta\|_{L^1(\Omega)}$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, il découle pour presque tout  $t \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} |\theta_1^\epsilon - \theta_2^\epsilon|(t) dx \leq \|f^\epsilon - f^\eta\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0^\epsilon - \theta_0^\eta\|_{L^1(\Omega)} \quad (4.38)$$

Ce qui achève l'étape 1.

### Étape 2 : $\theta^\epsilon$ est solution renormalisée de (4.32)

On va essentiellement montrer que  $\theta^\epsilon$  vérifie l'égalité (4.28) de la Définition (4.2.1) des solutions renormalisées dans le but de la passer à la limite dans l'étape 5.

Soit  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact,  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ . La fonction  $S'(\theta^\epsilon)\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  est admissible comme fonction test dans (4.32). D'après le Lemme (2.2.3)

$$\left\langle \frac{\partial \theta^\epsilon}{\partial t}, S'(\theta^\epsilon)\varphi \right\rangle = - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta^\epsilon) dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0) dx.$$

Il découle

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta^\epsilon) dx dt - \int_{\Omega} \varphi S(\theta_0) dx dt + \int_{Q_T} S''(\theta^\epsilon) |D\theta^\epsilon|^2 \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} D\theta^\epsilon \cdot D\varphi S'(\theta^\epsilon) dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DS(\theta^\epsilon)\varphi dx dt = \int_{Q_T} f^\epsilon S'(\theta^\epsilon)\varphi dx dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Remarque 4.2.7** On n'a pas utilisé le fait que  $S'$  est à support compact, l'inégalité (4.39) est vraie pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ . De plus, par densité, on montre que l'on peut prendre  $\varphi \in W^{1,\infty}(Q_T)$ ,  $\varphi(T) = 0$ .

### Étape 3 : estimations sur $\theta^\epsilon$

Pour passer à la limite dans (4.39) on aura besoin des estimations suivantes.

**Lemme 4.2.8** Pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\int_{Q_T} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt \leq (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) k, \quad \forall k > 0 \quad (4.40)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\epsilon} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |\theta^\epsilon| \leq 2n\}} |D\theta^\epsilon|^2 = 0. \quad (4.41)$$

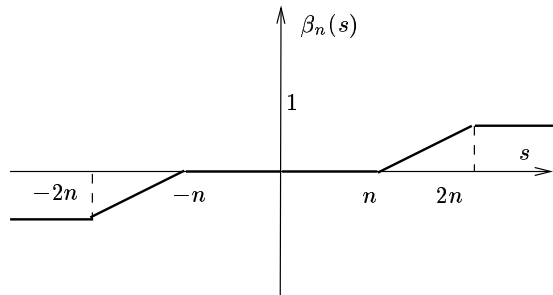
**Démonstration** — Soit  $\delta > 0$  (destiné à tendre vers 0). On prend  $S'(r) = T_k(r)$ , et  $\phi = \min\left(\frac{(T-\delta-t)^+}{\delta}, 1\right)$  dans (4.39), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \int_{T-2\delta}^{T-\delta} \int_{\Omega} \tilde{T}_k(\theta^\epsilon) dx dt + \int_0^{T-2\delta} \int_{\Omega} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt + \int_0^{T-2\delta} \int_{\Omega} u \cdot D\theta^\epsilon T_k(\theta^\epsilon)\varphi dx dt \\ & = \int_{\Omega} \tilde{T}_k(\theta_0^\epsilon) dx + \int_{Q_T} f T_k(\theta^\epsilon)\varphi dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est indépendant de  $x$  et  $\operatorname{div}(u) = 0$ , la formule de Stokes implique que le troisième terme de l'égalité ci-dessus est nul. De plus  $0 \leq \tilde{T}_k(r) \leq |r|$  et  $|\varphi| \leq 1$ , on en déduit,

$$\int_0^{T-2\delta} \int_{\Omega} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt \leq (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) k. \quad (4.42)$$

Laissons  $\delta$  tendre vers 0, on obtient alors (4.40). De la même manière, pour montrer (4.41), on prend  $S'(r) = \beta_n(r) = \frac{1}{n}(T_{2n}(r) - T_n(r))$ .



Et on prend  $\varphi$  comme précédemment, et on fait tendre  $\delta$  vers 0 pour obtenir

$$\frac{1}{n} \int_{\{n \leq |\theta^\epsilon| \leq 2n\}} |D\theta^\epsilon|^2 dx dt = \int_{\{|\theta_0^\epsilon| \geq n\}} |\theta_0| dx + \int_{\{|\theta^\epsilon| \geq n\}} |f| dx dt. \quad (4.43)$$

D'autre part (4.40) et l'inégalité de Poincaré donnent

$$n^2 \operatorname{mes}\{|\theta^\epsilon| > n\} = \int_{\{|\theta^\epsilon| \geq n\}} |T_n(\theta^\epsilon)|^2 dx dt \leq C \int_{Q_T} |DT_n(\theta^\epsilon)|^2 dx dt \leq Cn$$

ce qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\epsilon} \operatorname{mes}\{|\theta^\epsilon| > n\} = 0.$$

D'autre part, par définition de  $\theta_0^\epsilon$ ,  $|\theta_0^\epsilon| \leq |\theta_0|$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\epsilon} \operatorname{mes}\{|\theta_0^\epsilon| > n\} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\epsilon} \operatorname{mes}\{|\theta_0| > n\} = 0.$$

car  $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ . Ces deux dernières convergences donnent alors (4.41). □

De plus on a les convergences suivantes.

**Lemme 4.2.9** *Il existe une fonction  $\theta$  mesurable, finie presque partout telle que, quitte à extraire une sous-suite, on a*

$$\theta^\epsilon \rightarrow \theta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \text{ et p.p. dans } Q_T$$

$$T_k(\theta^\epsilon) \rightarrow T_k(\theta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\text{-faible, dans } L^2(Q_T)\text{-fort, et p.p. dans } Q_T.$$

**Démonstration** — De la contraction (4.38), on déduit que  $(\theta^\epsilon)$  est une suite de Cauchy dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ , donc il existe une fonction  $\theta$  mesurable telle que

$$\theta^\epsilon \rightarrow \theta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)).$$

D'autre part de l'estimation (4.40) découle

$$T_k(\theta^\epsilon) \rightarrow T_k(\theta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\text{-faible, } L^2(Q_T)\text{-fort et presque partout.}$$

□

#### Étape 4 : convergence forte des troncatures $T_k(\theta^\epsilon)$

On montre dans cette étape

$$T_k(\theta^\epsilon) \rightarrow T_k(\theta) \text{ dans } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega))\text{-fort pour tout } 0 < \tau < T.$$

On a déjà par l'étape précédente la convergence faible, reste à montrer la convergence des énergies. Soit  $\xi \in C_c^\infty([0, T])$ . Dans un premier temps, on prend  $S'(r) = T_k(r)$ ,  $\varphi = \xi$  dans (4.39), il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta^\epsilon) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0^\epsilon) dx + \int_{Q_T} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 \xi dx dt \\ & + \int_{Q_T} D\theta^\epsilon \cdot D\xi S'(\theta^\epsilon) dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DT_k(\theta^\epsilon) \xi dx dt = \int_{Q_T} f T_k(\theta^\epsilon) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

On remarque que le quatrième et le cinquième terme de (4.44) sont nuls car  $\xi$  est indépendant de  $x$ , et en utilisant la formule de Stokes pour le cinquième terme. On fait maintenant tendre  $\epsilon$  vers 0 dans (4.44). On utilise pour cela les convergences du Lemme 4.2.9. Comme  $\theta^\epsilon$  et  $\theta_0^\epsilon$  convergent presque partout vers  $\theta$  et  $\theta_0$  respectivement, et du fait que  $\tilde{T}_k$  est Lipschitzienne alors on a

$$- \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta^\epsilon) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0^\epsilon) dx \longrightarrow - \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0) dx.$$

Pour ce qui est du second membre de (4.44), le théorème de Lebesgue implique

$$\int_{Q_T} f T_k(\theta^\epsilon) \xi dx dt \longrightarrow \int_{Q_T} f T_k(\theta) \xi dx dt.$$

On déduit alors de ces convergences et de l'égalité (4.44)

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Q_T} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 \xi dx dt &= \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta) dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0) dx + \int_{Q_T} f T_k(\theta) \xi dx dt. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dans un second temps, on prend  $S = S_n$ ,  $\varphi = \xi_h^1 \int_{t-h}^t T_k(\theta(\tau)) d\tau$ , où on aura posé  $\theta(x, t) = \theta_0$  pour  $t < 0$ .  $\phi$  est ainsi une moyenne en temps de  $T_k(\theta)$ , ce qui fait de  $\varphi$  une fonction test admissible dans (4.39). Il vient alors

$$\begin{aligned} - \|\varphi\|_{L^\infty(Q_T)} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |\theta^\epsilon| \leq 2n\}} |D\theta^\epsilon|^2 dx dt &\leq - \int_{Q_T} \varphi_t S_n(\theta^\epsilon) dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega} \varphi(0) S_n(\theta_0^\epsilon) dx + \int_{Q_T} D\theta^\epsilon \cdot D\varphi S_n'(\theta^\epsilon) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_T} u \cdot D\varphi S_n(\theta^\epsilon) dx dt - \int_{Q_T} f^\epsilon S_n'(\theta^\epsilon) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.46)$$

où l'on a utilisé  $u \cdot DS_n(\theta^\epsilon) = \operatorname{div}(uS_n(\theta^\epsilon))$ . On fait tendre  $\epsilon$  vers 0 dans l'inégalité ci-dessus. Comme  $S_n$  est lipschitzienne et que

$$\theta^\epsilon \rightarrow \theta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \text{ et } \theta_0^\epsilon \rightarrow \theta_0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \varphi_t S_n(\theta^\epsilon) dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0) S_n(\theta_0^\epsilon) dx &\rightarrow \int_{Q_T} \varphi_t S_n(\theta) dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0) S_n(\theta_0) dx \\ &= \int_{Q_T} \varphi_t (S_n(\theta) - S_n(\theta_0)) dx dt \quad \text{car } \varphi(T) = 0. \end{aligned}$$

et

$$\int_{Q_T} u \cdot D\varphi S_n(\theta^\epsilon) dx dt \rightarrow \int_{Q_T} u \cdot D\varphi S_n(\theta) dx dt \quad (4.47)$$

Une simple application du théorème de Lebesgue donne

$$\int_{Q_T} f^\epsilon S_n'(\theta^\epsilon) \varphi dx dt \rightarrow \int_{Q_T} f S_n'(\theta) \varphi dx dt. \quad (4.48)$$

Enfin, d'après la convergence faible des troncatures  $T_{2n}(\theta^\epsilon)$  du Lemme 4.2.9, il vient

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} D\theta^\epsilon \cdot D\varphi S_n'(\theta^\epsilon) dx dt &= \int_{Q_T} DT_{2n}(\theta^\epsilon) \cdot D\varphi S_n'(\theta^\epsilon) dx dt \\ &\rightarrow \int_{Q_T} DT_{2n}(\theta) \cdot D\varphi S_n'(\theta) dx dt \end{aligned} \quad (4.49)$$

En rassemblant les convergences (4.47), (4.47), (4.48), (4.49) avec (4.46) il vient

$$\begin{aligned} - \|\varphi\|_{L^\infty(Q_T)} \omega(n) &\leq - \int_{Q_T} \varphi_t (S_n(\theta) - S_n(\theta_0)) dx + \int_{Q_T} DT_{2n}(\theta) \cdot D\varphi S_n'(\theta) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_T} u \cdot D\varphi S_n(\theta) dx dt - \int_{Q_T} f S_n'(\theta) \varphi dx dt \end{aligned} \quad (4.50)$$

où on a posé

$$\omega(n) = \sup_{\epsilon} \frac{1}{n} \int_{\{|n \leq |\theta^\epsilon| \leq 2n\}} |D\theta^\epsilon|^2 dx dt.$$

D'après le Lemme 2.2.1 d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} \varphi_t(S_n(\theta) - S_n(\theta_0)) &\leq - \int_{Q_T} \xi_t \left[ S_n(\theta) \frac{1}{h} \int_{t-h}^t T_k(\theta(\tau)) d\tau - \frac{1}{h} \int_{t-h}^t S_n(\theta) T_k(\theta) d\tau \right] dx dt \\ &\quad - \int_{Q_T} \xi_t \left[ \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \tilde{T}_k(S_n(\theta)) d\tau \right] dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(S_n(\theta_0)) dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Quand  $h$  tend vers 0, on a

$$\frac{1}{h} \int_{t-h}^t T_k(\theta(\tau)) d\tau \rightarrow T_k(\theta) \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\text{-fort.}$$

Et comme  $|S_n| \leq 3n/2$  alors  $|\tilde{T}_k(S_n(\theta))| \leq \tilde{T}_k(3n/2)$  et donc

$$\frac{1}{h} \int_{t-h}^t \tilde{T}_k(S_n(\theta)) d\tau \rightarrow \tilde{T}_k(S_n(\theta)) \text{ dans } L^\infty(Q_T)\text{-faible-}^*.$$

Grâce à ces deux convergences, on peut passer à la limite quand  $h \rightarrow 0$  dans (4.50) et (4.51), il découle

$$\begin{aligned} - \|\varphi\|_{L^\infty(Q_T)} \omega(n) &\leq - \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(S_n(\theta)) dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(S_n(\theta_0)) dx + \int_{Q_T} DT_{2n}(\theta) \cdot DT_k(\theta) S'_n(\theta) \xi dx dt \\ &\quad + \int_{Q_T} u \cdot DT_k(\theta) S_n(\theta) \xi dx dt - \int_{Q_T} f S'_n(\theta) \xi T_k(\theta) dx dt. \end{aligned} \quad (4.52)$$

On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , d'après le Lemme 4.2.8,  $\omega(n) \rightarrow 0$ . D'autre part pour tout  $r$ ,  $S_n(r) \rightarrow r$ ,  $\tilde{T}_k(S_n(r)) \leq k|r|$ , le théorème de Lebesgue entraîne donc

$$- \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(S_n(\theta)) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(S_n(\theta_0)) dx \rightarrow - \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0) dx.$$

Pour  $2n \geq k$ ,  $DT_{2n}(\theta) \cdot DT_k(\theta) = |DT_k(\theta)|^2$ . De plus  $S'_n(\theta) \rightarrow 1$ , avec  $|S'_n| \leq 1$ , le théorème de Lebesgue entraîne alors

$$\int_{Q_T} DT_{2n}(\theta) \cdot DT_k(\theta) S'_n(\theta) \xi dx dt \rightarrow \int_{Q_T} |DT_k(\theta)|^2 \xi dx dt.$$

Par ailleurs, pour  $2n \geq k$  on a également  $S_n(\theta) DT_k(\theta) = T_k(\theta) DT_k(\theta) = \frac{1}{2} D(T_k(\theta)^2)$ , donc comme  $\operatorname{div}(u) = 0$  et  $\xi$  est indépendant de  $x$ , par la formule de Stokes

$$\int_{Q_T} u \cdot DT_k(\theta) S_n(\theta) \xi dx dt = 0.$$

En regroupant ces convergences, il vient alors

$$0 \leq - \int_{Q_T} \xi_t \tilde{T}_k(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \xi(0) \tilde{T}_k(\theta_0) dx + \int_{Q_T} |DT_k(\theta)|^2 \xi dx dt - \int_{Q_T} f \xi T_k(\theta) dx dt. \quad (4.53)$$

En rapprochant (4.45) et (4.53), il vient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Q_T} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 \xi dx dt \leq \int_{Q_T} |DT_k(\theta)|^2 \xi dx dt, \quad \forall \xi \in C_c^\infty([0, T]).$$

Soit  $0 < \tau < T$ , en posant  $\xi(t) = \min\left(\frac{(-t+\delta+\tau)^+}{\delta}, 1\right)$ , et en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , il vient

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt \leq \int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta)|^2 dx dt. \quad (4.54)$$

D'autre part d'après le Lemme 4.2.9, on a a fortiori

$$T_k(\theta^\epsilon) \rightarrow T_k(\theta) \text{ dans } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega))\text{-faible}$$

et donc par faible semi-continuité-inférieure de la norme,

$$\int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta)|^2 dx dt \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt$$

ce qui rapproché à (4.54) donne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta^\epsilon)|^2 dx dt = \int_0^\tau \int_{\Omega} |DT_k(\theta)|^2 dx dt,$$

c'est-à-dire la convergence des énergies pour les troncatures. Ce qui achève cette étape.

### Étape 5 : passage à la limite dans (4.39)

Comme  $S$  est lipschitzienne et que

$$\theta^\epsilon \rightarrow \theta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \text{ et } \theta_0^\epsilon \rightarrow \theta_0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

alors quand  $\epsilon > 0$

$$\int_{Q_T} \varphi_t S(\theta^\epsilon) dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0^\epsilon) dx \rightarrow \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta) dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0) dx.$$

Soit  $M > 0$ ,  $\tau > 0$  tels que  $\text{supp}(S') \subset [-M, M]$ , et  $\text{supp}(\varphi) \subset [0, \tau] \times \bar{\Omega}$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} S''(\theta^\epsilon) |D\theta^\epsilon|^2 \varphi dx dt &= \int_0^\tau \int_{\Omega} S''(\theta^\epsilon) |DT_M(\theta^\epsilon)|^2 \varphi dx dt \\ &\rightarrow \int_0^\tau \int_{\Omega} S''(\theta) |DT_M(\theta)|^2 \varphi dx dt \end{aligned}$$

car  $S''(\theta^\epsilon)$  converge vers  $S''(\theta)$  presque partout et est uniformément borné et par la convergence forte des troncatures vue à l'étape 4.

Ensuite,  $S'(\theta^\epsilon)$  converge vers  $S'(\theta)$  presque partout et est uniformément borné par 1, ce qui avec la convergence faible des troncatures

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} D\theta^\epsilon \cdot D\varphi S'(\theta^\epsilon) dx dt &= \int_{Q_T} DT_M(\theta^\epsilon) \cdot D\varphi S'(\theta^\epsilon) dx dt \rightarrow \int_{Q_T} DT_M(\theta) \cdot D\varphi S'(\theta) dx dt, \\ \int_{Q_T} u \cdot DS(\theta^\epsilon)\varphi dx dt &= \int_{Q_T} u \cdot DT_M(\theta^\epsilon)S'(\theta^\epsilon)\varphi dx dt \rightarrow \int_{Q_T} u \cdot DT_M(\theta)S'(\theta)\varphi dx dt. \end{aligned}$$

Enfin la convergence de  $f^\epsilon$  vers  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  entraîne

$$\int_{Q_T} f^\epsilon S'(\theta^\epsilon)\varphi dx dt \rightarrow \int_{Q_T} f S'(\theta)\varphi dx dt.$$

En rassemblant toutes ces convergences il vient

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0)S(\theta_0) dx dt + \int_{Q_T} S''(\theta)|D\theta|^2\varphi dx dt \\ + \int_{Q_T} D\theta \cdot D\varphi S'(\theta) dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DS(\theta)\varphi dx dt = \int_{Q_T} f S'(\theta)\varphi. \end{aligned}$$

Ce qui achève l'étape 5.

### Étape 6 : unicité

Pour montrer l'unicité on utilise la formulation classique des solutions renormalisées introduite dans la remarque 4.2.4 qui, d'après la Proposition 4.2.5 est équivalente à la formulation de la Définition 4.2.1. Soient  $\theta^1, \theta^2$ , deux solutions renormalisées pour des données  $f^1, f^2, \theta_0^1, \theta_0^2$ . Faisons la différence des deux équations (4.30), en prenant  $\varphi = T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2))$  comme fonction test et  $S = S_n$ , il vient pour presque tout  $s \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \tilde{T}_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2))(s) dx + \int_0^s \int_{\Omega} |DT_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2))|^2 dx dt \\ &+ \int_0^s \int_{\Omega} S_n''(\theta^1)|D\theta^1|^2 T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt - \int_0^s \int_{\Omega} S_n''(\theta^2)|D\theta^2|^2 T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt \\ &= \int_0^s \int_{\Omega} f(S_n'(\theta^1) - S_n'(\theta^2))T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt + \int_{\Omega} \tilde{T}_k(S_n(\theta_0^1) - S_n(\theta_0^2)) dx \quad (4.55) \end{aligned}$$

Remarquons que le terme de convection disparaît car

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_{\Omega} u \cdot (DS_n(\theta^1) - DS_n(\theta^2))T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt \\ = \int_0^s \int_{\Omega} u \cdot D\tilde{T}_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt = 0 \end{aligned}$$



par la formule de Stokes. On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Comme  $|S_n''(r)| = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n \leq |r| \leq 2n\}}$ , de la convergence des énergies des solutions renormalisées (4.27), on tire

$$\int_0^s \int_{\Omega} (S_n''(\theta^1) |D\theta^1|^2 - S_n''(\theta^2) |D\theta^2|^2) T_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2)) dx dt \rightarrow 0.$$

Pour le premier terme de (4.55), comme  $\tilde{T}_k(S_n(r_1) - S_n(r_2)) \leq k|r_1 - r_2|$  et  $\theta^1(s, \cdot), \theta^2(s, \cdot) \in L^1(\Omega)$  pour presque tout  $s \in (0, T)$ , alors par le théorème de Lebesgue et le fait que  $S_n(r)$  converge vers  $r$ , alors on a d'une part

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_k(S_n(\theta^1) - S_n(\theta^2))(s) dx \rightarrow \int_{\Omega} \tilde{T}_k(\theta^1 - \theta^2)(s) dx.$$

D'autre part

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_k(S_n(\theta_0^1) - S_n(\theta_0^2))(s) dx \leq k \int_{\Omega} |\theta_0^1 - \theta_0^2| dx.$$

Le deuxième terme de (4.55) est positif, et enfin pour le premier terme du second membre une application immédiate du théorème de Lebesgue donne finalement, pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_k(\theta^1 - \theta^2)(s) dx \leq k \left( \int_{Q_T} |f^1 - f^2| dx dt + \int_{\Omega} |\theta_0^1 - \theta_0^2| dx \right). \quad (4.56)$$

Enfin, en divisant l'inégalité précédente par  $k$  et en utilisant le fait que  $\frac{\tilde{T}_k}{k}$  tend vers  $|\cdot|$  presque partout, le lemme de Fatou implique pour presque tout  $s \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} |\theta^1 - \theta^2|(s) dx \leq k \left( \int_{Q_T} |f^1 - f^2| dx dt + \int_{\Omega} |\theta_0^1 - \theta_0^2| dx \right). \quad (4.57)$$

L'unicité découle immédiatement de (4.57). □

### 4.2.3 Régularité de la solution renormalisée

Dans le cas de données  $L^1$ , on peut préciser la régularité de la solution renormalisée dans les espaces de Lebesgue. En effet du fait que  $T_k(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , pour tout  $k \geq 0$ , les résultats de régularité classiques dûs à Boccardo et Gallouët (voir [12]) montre que  $\theta \in L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  pour tout  $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$ . On peut affiner ce résultat en montrant la dépendance de la solution par rapport aux données de l'équation. En effet, du fait que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |DT_k(\theta)|^2 dx dt &\leq k(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}), \quad \forall k \geq 0 \\ \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} &\leq \|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

on peut montrer (voir par exemple [[32]], Lemme 3.1) la proposition suivante.

**Proposition 4.2.10** *Supposons  $f \in L^1(Q_T)$  et  $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ , alors la solution renormalisée  $\theta$  du problème (4.24) vérifie les estimations suivantes*

$$\|\theta\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C(N, q, \Omega, T) (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}), \quad \forall 1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$$

$$\|\theta\|_{L^p(Q_T)} \leq C(N, p, \Omega, T) (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}), \quad \forall 1 \leq p < \frac{N+2}{N}.$$

#### 4.2.4 Solutions plus régulières

Pour les besoins de l'étude du système on sera amené à considérer des solutions plus régulières de l'équation de la chaleur. Pour cela on prend des données  $f$  et  $\theta_0$  plus régulières. On traitera deux cas

$$f \in L^1(0, T; L^m(\Omega)) \text{ et } \theta_0 \in L^m(\Omega) \text{ où } 1 < m < 2$$

$$f \in L^m(Q_T) \text{ et } \theta_0 \in L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega) \text{ où } 1 < m < \frac{2N+4}{N+4}.$$

Tout d'abord, comme tous les espaces précédents sont inclus dans  $L^1(Q_T)$  et  $L^1(\Omega)$ , les résultats vu précédemment s'appliquent, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution renormalisée du problème (4.24). Ensuite on va montrer que l'unique solution renormalisée est plus régulière que dans le cas de données  $L^1$ . En effet, en adaptant les techniques de Boccardo, Dall'Aglio, Orsina, Gallouët, (cf. [10], [26]), on montre que la solution satisfait des régularités découplées en temps et en espace, de plus on établit des estimations de la norme de  $\theta$  en fonction de la norme des données, essentielles dans l'étude de l'existence et de l'unicité du système.

**Théorème 4.2.11** *On suppose*

$$f \in L^1(0, T; L^m(\Omega)) \text{ et } \theta_0 \in L^m(\Omega) \text{ où } 1 < m < 2.$$

*Alors l'unique solution renormalisée du problème (4.24), vérifie :*

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^m(\Omega)), \quad \theta \in L^r(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), \quad \theta \in L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$$

*pour tous  $r, q, \kappa$  et  $\mu$  satisfaisant*

$$\frac{2}{r} + \frac{N}{q} = 1 + \frac{N}{m}, \quad 1 \leq r, q < 2, \quad \frac{2}{\kappa} + \frac{N}{\mu} = \frac{N}{m}, \quad 1 \leq \kappa, \mu < \infty, \quad (4.58)$$

*avec les estimations*

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))} \leq C_1 (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad C_1 = C_1(m) \quad (4.59)$$

$$\|D\theta\|_{(L^r(0,T;L^q(\Omega)))^N} \leq C_2 (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad C_2 = C_2(m, r, q) \quad (4.60)$$

$$\|\theta\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))} \leq C_3 (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad C_3 = C_3(m, \kappa, \mu) \quad (4.61)$$

$$\|\theta\|_{L^{\frac{m(N+2)}{N}}(Q_T)} \leq C_4 (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad C_4 = C_4(m). \quad (4.62)$$

**Remarque 4.2.12** Les constantes  $C_i$  dans le théorème ci-dessus sont indépendantes de  $u$ , car  $\operatorname{div}(u) = 0$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Donc dans les estimations le terme de convection  $u \cdot D\theta$  disparaît à l'aide de la formule de Stokes.

**Théorème 4.2.13** *On suppose*

$$f \in L^m(Q_T) \text{ et } \theta_0 \in L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega) \text{ où } 1 < m < \frac{2N+4}{N+4}.$$

Alors l'unique solution renormalisée du problème (4.24), vérifie :

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)), \quad \theta \in L^r(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), \quad \theta \in L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$$

pour tous  $r, q, \kappa$  et  $\mu$  satisfaisant

$$\frac{2}{r} + \frac{N}{q} = \frac{N+2-m}{m}, \quad 1 \leq r, q < 2, \quad \frac{2}{\kappa} + \frac{N}{\mu} = \frac{N+2-2m}{m}, \quad 1 \leq \kappa, \mu < \infty,$$

avec les estimations

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega))} \leq C_1 \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right), \quad C_1 = C_1(m) \quad (4.63)$$

$$\|D\theta\|_{(L^r(0, T; L^q(\Omega)))^N} \leq C_2 \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right), \quad C_2 = C_2(m, r, q) \quad (4.64)$$

$$\|\theta\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} \leq C_3 \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right), \quad C_3 = C_3(m, \kappa, \mu) \quad (4.65)$$

$$\|\theta\|_{L^{\frac{m(N+2)}{N+2-2m}}(Q_T)} \leq C_4 \left( \|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right), \quad C_4 = C_4(m). \quad (4.66)$$

**Démonstration du Théorème 4.2.11**— On établit les estimations à partir de la formulation renormalisée vérifiée par  $\theta$ . La démonstration se déroule en deux étapes. La première étape est consacrée à la preuve de l'estimation suivante

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^m(\Omega))}^m + \int_{Q_T} |D\theta|^2 |\theta|^{m-2} dx ds \leq C(m) \left( \|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)} \right)^m. \quad (4.67)$$

Dans la deuxième étape à partir de l'inégalité ci-dessus, et l'utilisation des inégalités de Hölder et Gagliardo-Nirenberg on montre les estimations voulues.

### Étape 1 : preuve de l'estimation (4.67)

Soit  $a > 0$ , on définit

$$\psi(r) = ((a + |r|)^{m-1} - a^{m-1}) \operatorname{sgn}(r).$$

La fonction  $\psi$  vérifie certaines propriétés que nous établissons dans le lemme suivant

**Lemme 4.2.14** On pose  $\psi_k(r) = \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho) d\rho$  et  $\tilde{\psi}(r) = \int_0^r \psi(\rho) d\rho$ . On a tout d'abord

$$\tilde{\psi}(T_k(r)) \leq \psi_k(r) \leq \tilde{\psi}(r) \quad (4.68)$$

et pour tout  $0 < c_m < 1$  il existe  $d_m \in \mathbb{R}$  indépendante de  $a$  telle que

$$c_m \frac{(a + |r|)^m}{m} + d_m a^m \leq \tilde{\psi}(r) \leq \frac{(a + |r|)^m}{m}. \quad (4.69)$$

On reporte la démonstration de ce lemme à la suite de la preuve de ce théorème.

Soit  $h > 0$ , et  $t \in (0, T)$ , on prend  $S'(r) = (\psi \circ T_k)(r)h_n(r)$ ,  $\varphi(s) = \min\left(\left(\frac{t-s+h}{h}\right)^+, 1\right)$  comme fonctions test dans (4.28), on remarque que  $\varphi$  est indépendant de  $x$  donc  $D\varphi = 0$  et que

$$S''(r) = h'_n(r)(\psi \circ T_k)(r) + h_n(r)\psi'(T_k(r))T'_k(r),$$

il vient donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta) dx ds + \int_0^{t+h} \int_{\Omega} |D\theta|^2 h'_n(\theta)(\psi \circ T_k)(\theta)\varphi dx ds \\ & + \int_0^{t+h} \int_{\Omega} h_n(\theta)\psi'(T_k(\theta))T'_k(\theta)|D\theta|^2\varphi dx ds + \int_0^{t+h} \int_{\Omega} u \cdot D\psi_{n,k}(\theta)\varphi dx ds \\ & = \int_0^{t+h} \int_{\Omega} f(\psi \circ T_k)(\theta)h_n(\theta)\varphi dx ds + \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta_0) dx. \end{aligned} \quad (4.70)$$

où on a posé

$$\psi_{n,k}(r) = \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho)h_n(\rho) d\rho.$$

Remarquons que le quatrième terme de (4.70), le terme de convection, est nul en utilisant la formule de Stokes, le fait  $\operatorname{div}(u) = 0$  et que  $\varphi$  est indépendant de  $x$ . En utilisant le fait que  $\psi'(r) = (m-1)(a+|r|)^{m-2}$ , l'inégalité  $|(\psi \circ T_k)(\theta)| \leq (a + |T_k(\theta)|)^{m-1}$  et en faisant tendre  $h$  vers 0, il découle pour presque tout  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta(t)) dx + \int_{Q_t} |D\theta|^2 h'_n(\theta)(\psi \circ T_k)(\theta) dx ds + \int_{Q_t} h_n(\theta)(m-1) \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds \\ & \leq \int_{Q_t} |f|(a + |T_k(\theta)|)^{m-1} dx ds + \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta_0) dx. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Ensuite on fait tendre  $n$  vers l'infini dans (4.71). Le troisième terme de (4.71) se traite par le lemme de Fatou, car l'intégrande est positive et  $h_n$  converge vers 1, donc

$$\int_{Q_t} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} h_n(\theta) \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds.$$

De la convergence des énergies (4.27), en utilisant le fait que  $|h'_n(\theta)| = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n \leq |\theta| \leq 2n\}}$  et que  $|\psi(T_k)| \leq \psi(k)$ , il vient

$$\left| \int_{Q_t} |D\theta|^2 h'_n(\theta)(\psi \circ T_k)(\theta) dx ds \right| \leq \frac{\psi(k)}{n} \int_{\{n \leq |\theta| \leq 2n\}} |D\theta|^2 dx ds \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, pour  $n \leq m$ ,  $h_n \leq h_m$ , on déduit donc

$$\psi_{n,k}(r) = \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho) h_n(\rho) d\rho \leq \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho) h_m(\rho) d\rho = \psi_{m,k}(r),$$

et comme  $h_n$  converge vers 1, et  $|\psi \circ T_k| \leq \psi(k)$ , le théorème de Lebesgue, assure donc que  $\psi_{n,k}(r)$  converge, en croissant, vers  $\psi_k(r) = \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho) d\rho$ . Par le théorème de Beppo-Levi, on déduit les convergences restantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta(t)) dx &\longrightarrow \int_{\Omega} \psi_k(\theta(t)) dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ \int_{\Omega} \psi_{n,k}(\theta_0) dx &\longrightarrow \int_{\Omega} \psi_k(\theta_0) dx. \end{aligned}$$

En reportant toutes ces convergences dans (4.71), et en appliquant l'inégalité de Hölder au second membre, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_k(\theta)(t) dx + (m-1) \int_{Q_t} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds &\leq \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} \\ &\times \|(a + |T_k(\theta)|)^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;L^{m'}(\Omega))} + \int_{\Omega} \psi_k(\theta_0) dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.72)$$

En appliquant le Lemme 4.2.14 et l'inégalité de Young sur le premier terme du second membre de (4.72), il vient

$$\begin{aligned} \frac{c_m}{m} \int_{\Omega} (a + |T_k(\theta)(t)|)^m dx + a^m d_m \text{mes}(\Omega) + (m-1) \int_{Q_T} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds \\ \leq \frac{C(\epsilon)}{m} \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}^m + \frac{\epsilon}{m'} \|a + |T_k(\theta)|\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))}^m \\ + \frac{1}{m} \int_{\Omega} (a + |T_k(\theta_0)|)^m dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Et donc en prenant  $\epsilon$  suffisamment petit, il découle

$$\begin{aligned} \|a + |T_k(\theta)|\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))}^m + a^m d_m \text{mes}(\Omega) + \int_{Q_T} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^{2-m}} dx ds \\ \leq C(m) \left( \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}^m + \int_{\Omega} (a + |T_k(\theta_0)|)^m dx \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$

où  $C(m)$  est une constante dépendant de  $m$  (qui explose quand  $m$  tend vers 1). En faisant maintenant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , le lemme de Fatou pour les termes de gauche de (4.73) et le fait que  $(a + |T_k(\theta_0)|)^m \leq (a + |\theta_0|)^m$ , entraînent

$$\begin{aligned} \|a + |\theta|\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))}^m + a^m d_m \text{mes}(\Omega) + \int_{Q_T} \frac{|D\theta|^2}{(a + |\theta|)^{2-m}} dx ds \\ \leq C(m) \left( \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}^m + \int_{\Omega} (a + |\theta_0|)^m dx \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Enfin on fait tendre  $a$  vers 0, une application du lemme de Fatou et de l'inégalité  $x^m + y^m \leq 2(x + y)^m$  montre l'inégalité voulue

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))}^m + \int_{Q_T} |D\theta|^2 |\theta|^{m-2} dx ds \leq C(m) (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})^m. \quad (4.75)$$

### Étape 2 : régularité de $\theta$

Remarquons tout d'abord que de (4.75), on peut déduire immédiatement la régularité  $L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$  de  $\theta$ ,

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^m(\Omega))} \leq C(m) (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad (4.76)$$

où  $C(m)$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ .

Soit  $1 \leq q < 2$ , une simple application de l'inégalité de Hölder donne, pour presque tout  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\theta|^q dx &= \int_{\Omega} (|D\theta|^2 |\theta|^{m-2})^{\frac{q}{2}} |\theta|^{(2-m)\frac{q}{2}} dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |D\theta|^2 |\theta|^{m-2} dx \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_{\Omega} |\theta|^{(2-m)\frac{q}{2-q}} dx \right)^{\frac{2-q}{2}}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Soit  $1 \leq r < 2$ , on élève (4.77) à la puissance  $r/q$ , on intègre sur  $[0, T]$  et on applique Hölder, il vient

$$\int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt \leq \left( \int_{Q_T} |D\theta|^2 |\theta|^{m-2} dx dt \right)^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} |\theta|^{(2-m)\frac{q}{2-q}} dx \right)^{\frac{r(2-q)}{q(2-r)}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}}.$$

Et donc en utilisant l'estimation (4.75) obtenue à la première étape, il découle

$$\begin{aligned} \int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt &\leq C(m, r) (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \\ &\|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})^{\frac{mr}{2}} \left( \int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{(2-m)r}{2-q}}(\Omega)}^{\frac{(2-m)r}{2-q}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

On applique maintenant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, rappelée dans le Lemme 4.1.3 pour estimer le terme de droite de l'inégalité ci dessus. On prend  $\rho = m$  et  $\gamma = (2 - m)q/(2 - q)$  dans le lemme, il vient

$$\|\theta(t)\|_{L^{\frac{(2-m)q}{2-q}}(\Omega)} \leq C(m, q) \|D\theta\|_{L^q(\Omega)}^\alpha \|\theta(t)\|_{L^m(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \quad (4.79)$$

et où  $\alpha$  est défini par

$$\frac{2-q}{(2-m)q} = \alpha \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{m} \right) + \frac{1-\alpha}{m}. \quad (4.80)$$

On élève (4.79) à la puissance  $r/\alpha$  et on intègre sur  $[0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{(2-m)q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{r}{\alpha}} dt &\leq C(m, q, r) \int_0^T \|D\theta\|_{L^q(\Omega)}^r \|\theta(t)\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{r(1-\alpha)}{\alpha}} dt \\ &\leq C(m, q, r) \|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^m(\Omega))}^{\frac{r(1-\alpha)}{\alpha}} \int_0^T \|D\theta\|_{L^q(\Omega)}^r dt. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Pour rapprocher les relations (4.78) et (4.81), on pose

$$\frac{r}{\alpha} = \frac{(2-m)r}{2-r}. \quad (4.82)$$

On utilise de plus l'estimation  $L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$  obtenue en (4.76), on en déduit

$$\int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt \leq C(m, q, r) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})^{\frac{r^2}{2}} \left( \int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt \right)^{1-\frac{r}{2}}.$$

D'où l'estimation voulue sur  $D\theta$

$$\|D\theta\|_{(L^r(0, T; L^q(\Omega)))^N} \leq C(m, q, r) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}). \quad (4.83)$$

On vérifie par un simple calcul, en réinjectant (4.80) dans (4.82), que  $r$  et  $q$  vérifient les conditions désirées

$$\frac{2}{r} + \frac{N}{q} = 1 + \frac{N}{m}, \quad \text{avec } 1 \leq r, q < 2. \quad (4.84)$$

Notons que cette dernière relation et le fait que  $r$  et  $q$  sont strictement inférieurs à 2 impliquent que  $m < 2$ . Enfin, il nous reste à montrer les estimations sur  $\theta$  dans  $L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$ . Pour cela, on injecte l'estimation (4.83) dans l'inégalité (4.81), et on utilise l'estimation  $L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$  (4.76), il découle

$$\int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{(2-m)q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{(2-m)r}{2-r}} dt \leq C(m, q, r) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})^{\frac{(2-m)r}{2-r}} \quad (4.85)$$

En posant

$$\kappa = \frac{(2-m)r}{2-r}, \quad \mu = \frac{(2-m)q}{2-q},$$

de (4.85) on déduit

$$\|\theta\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} \leq C(m, \kappa, \mu) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}).$$

Avec les conditions (4.84), on montre que les paramètres  $\kappa$  et  $\mu$  vérifient

$$\frac{2}{\kappa} + \frac{N}{\mu} = \frac{N}{m}, \quad \text{avec } 1 \leq \kappa, \mu < +\infty.$$

Et en prenant  $\kappa = \mu$ , on obtient l'estimation (4.62). Ce qui achève la preuve du théorème.

□

Revenons à la preuve du Lemme 4.2.14.

**Démonstration du lemme 4.2.14**— Montrons tout d'abord (4.68). Pour  $-k \leq r \leq k$ ,  $T_k(r) = r$ , donc on a trivialement  $\tilde{\psi}(T_k(r)) = \psi_k(r) = \tilde{\psi}(r)$ . Pour  $r \geq k$ ,

$$\begin{aligned}\psi_k(r) &= \int_0^k \psi(\rho) d\rho + \int_k^r \psi(k) d\rho \\ &= \tilde{\psi}(k) + (r - k)\psi(k) \\ &= \tilde{\psi}(T_k(r)) + (r - k)\psi(k).\end{aligned}$$

Comme  $(r - k)\psi(k) \geq 0$ , on a la première inégalité  $\tilde{\psi}(T_k(r)) = \tilde{\psi}(k) \leq \psi_k(r)$ . Pour la seconde inégalité, pour  $k \leq r$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(r) &= \int_0^k \psi(\rho) d\rho + \int_k^r \psi(\rho) d\rho \\ &= \tilde{\psi}(k) + \int_k^r \psi(\rho) d\rho \\ &\geq \tilde{\psi}(k) + (r - k)\psi(k) \text{ car } \psi(r) \geq \psi(k) \\ &= \psi_k(r).\end{aligned}$$

Par des arguments de parité on établit le cas  $r \leq -k$  et (4.68) est démontrée.

Passons à la preuve de (4.69). Par une intégration immédiate on montre que  $\tilde{\psi}(r) = \frac{1}{m}(a + |r|)^m - a^{m-1}|r|$ , on en déduit donc la deuxième inégalité. Pour la première inégalité, on pose  $0 < c_m < 1$  et on écrit

$$\tilde{\psi}(r) = c_m \frac{(a + |r|)^m}{m} + (1 - c_m) \frac{(a + |r|)^m}{m} - a^{m-1}|r|.$$

En faisant une recherche d'extrema, on montre que le minimum de la fonction

$$r \mapsto (1 - c_m) \frac{(a + |r|)^m}{m} - a^{m-1}|r| \tag{4.86}$$

est  $d_m a^m$  où

$$d_m = 1 + \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \frac{1}{(1 - c)^{\frac{1}{m}}}.$$

Ce qui achève la preuve.

□

Comme annoncé au début, avec les régularités obtenues dans le théorème précédent on montre



**Proposition 4.2.15** Soit  $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ , et soit  $\theta$  vérifiant les régularités du Théorème 4.2.11. Alors  $u \cdot D\theta \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$  avec l'estimation

$$\|u \cdot D\theta\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} \leq C(m, \sigma) \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} \times (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$$

pour tout  $\sigma \geq 2/(2-m)$ .

**Démonstration** — Soient  $\sigma, \tau$  deux réels, d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_0^T \left( \int_\Omega |u \cdot D\theta|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} dt \leq \left( \int_0^T \left( \int_\Omega |u|^{m\sigma} dx \right)^{\frac{\tau}{m\sigma}} dt \right)^{\frac{1}{\tau}} \times \left( \int_0^T \left( \int_\Omega |D\theta|^{m\sigma'} dx \right)^{\frac{\tau'}{m\sigma'}} dt \right)^{\frac{1}{\tau'}} \quad (4.87)$$

où  $\sigma', \tau'$  sont les conjugués de  $\sigma$  et  $\tau$  c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1, \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} = 1.$$

Sous la condition  $m\sigma > 2$ , l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (cf. Lemme 4.1.3) implique

$$\|u\|_{L^{m\sigma}(\Omega)} \leq C(\sigma, m) \|Du\|_{(L^2(\Omega))^N}^{1-\frac{2}{m\sigma}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{m\sigma}}.$$

En élevant à la puissance  $\tau$  et en intégrant sur  $[0, T]$ , il vient

$$\int_0^T \left( \int_\Omega |u|^{m\sigma} dx \right)^{\frac{\tau}{m\sigma}} dt \leq \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{2\tau}{m\sigma}} \int_0^T \|Du\|_{(L^2(\Omega))^N}^{\tau(1-\frac{2}{m\sigma})} dt.$$

En posant  $\tau = \frac{2m\sigma}{m\sigma-2}$ , il découle

$$\left( \int_0^T \left( \int_\Omega |u|^{m\sigma} dx \right)^{\frac{\tau}{m\sigma}} dt \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq C(m, \sigma) \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} \quad (4.88)$$

D'autre part, en prenant  $\sigma > 2/(2-m)$  (qui implique par ailleurs  $m\sigma > 2$ ), alors  $m\sigma' < 2$ . De plus, de l'égalité  $\tau = \frac{2m\sigma}{m\sigma-2}$ , un calcul immédiat donne

$$\frac{1}{m\sigma'} + \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \text{ et } 1 \leq \tau' < 2.$$

Et donc en utilisant les estimations (4.60) du Théorème 4.2.11 entraînent

$$\left( \int_0^T \left( \int_\Omega |D\theta|^{m\sigma'} dx \right)^{\frac{\tau'}{m\sigma'}} dt \right)^{\frac{1}{\tau'}} \leq C(m, \sigma) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}). \quad (4.89)$$

En injectant (4.88) et (4.89) dans (4.87), on obtient le résultat voulu.

□

**Remarque 4.2.16** La proposition précédente est essentielle dans la démonstration de l'unicité du système initial, car si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux solutions de l'équation de la chaleur avec terme de convection, pour des données  $(f_1, \theta_{0,1}, u_1)$  et  $(f_2, \theta_{0,2}, u_2)$ , alors  $\theta_1 - \theta_2$  est solution d'une équation dont le second membre est dans  $L^1(0, T; L^m(\Omega))$  et ainsi on obtient des estimations sur  $\theta_1 - \theta_2$  à partir du Théorème 4.2.11 comme on le montre dans le corollaire qui suit.

**Corollaire 4.2.17** Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les solutions du problème (4.24), respectivement pour les données  $(f_1, \theta_{0,1}, u_1)$  et  $(f_2, \theta_{0,2}, u_2)$ . Alors on a les estimations

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(0, T; L^m(\Omega))} \leq C_1 \left( \|f_1 - f_2\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|(u_1 - u_2) \cdot D\theta_1\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|_{L^m(\Omega)} \right), \quad C_1 = C_1(m) \quad (4.90)$$

$$\|D\theta_1 - D\theta_2\|_{(L^r(0, T; L^q(\Omega)))^N} \leq C_2 \left( \|f_1 - f_2\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|(u_1 - u_2) \cdot D\theta_1\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|_{L^m(\Omega)} \right), \quad C_2 = C_2(m, r, q) \quad (4.91)$$

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} \leq C_3 \left( \|f_1 - f_2\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|(u_1 - u_2) \cdot D\theta_1\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|_{L^m(\Omega)} \right), \quad C_3 = C_3(m, \kappa, \mu). \quad (4.92)$$

avec  $\kappa, \mu, q, r$  vérifiant les conditions (4.58) du Théorème 4.2.11.

**Démonstration** — En faisant la différence des équations en  $\theta_1$  et  $\theta_2$  on montre que  $\theta_1 - \theta_2$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial t} - \Delta(\theta_1 - \theta_2) + u_2 \cdot D(\theta_1 - \theta_2) = f_1 - f_2 + (u_2 - u_1) \cdot D\theta_1 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ (\theta_1 - \theta_2)(t = 0) = \theta_{0,1} - \theta_{0,2} & \text{dans } \Omega \\ \theta_1 - \theta_2 = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.93)$$

Or d'après la Proposition 4.2.15,  $(u_2 - u_1) \cdot D\theta_1 \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$ , donc l'équation (4.93) est exactement du type de l'équation de la chaleur avec terme de convection (4.24) étudiée depuis le début. On peut donc appliquer les estimations du Théorème 4.2.11, ce qui donne le résultat voulu.

□

**Remarque 4.2.18** On peut énoncer un principe de contraction sur  $\theta$  dans un espace de Lebesgue. C'est une conséquence directe de l'estimation (4.92), pour  $s = t = 2m$

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^{2m}(Q_T)} \leq C(m) \left( \|f_1 - f_2\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|(u_1 - u_2) \cdot D\theta_1\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_{0,1} - \theta_{0,2}\|_{L^m(\Omega)} \right). \quad (4.94)$$

Passons maintenant à la démonstration du Théorème 4.2.13.

**Démonstration du Théorème 4.2.13**— La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème précédent. On mettra donc l'accent sur les points différents. On montre dans une première étape que pour  $0 < \lambda < 1$  (déterminé ultérieurement)

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^{2-\lambda}(\Omega))}^{2-\lambda} + \int_{Q_T} |D\theta|^2 |\theta|^{-\lambda} dx dt \leq C(m, \lambda) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right). \quad (4.95)$$

Dans la deuxième étape à partir de l'inégalité ci-dessus, et l'utilisation des inégalités de Hölder et Gagliardo-Nirenberg, on montre l'estimation de  $\theta$  dans  $L^\sigma(Q_T)$ , où  $\sigma$  sera déterminé. Enfin dans la dernière étape, à partir de l'estimatin  $L^\sigma(Q_T)$ , on déduit les estimations découlées sur  $\theta$  et  $D\theta$ .

### Étape 1 : preuve de l'estimation (4.95)

À l'image de la preuve du Théorème 4.2.11, pour  $a > 0$  et  $0 < \lambda < 1$ , on définit

$$\psi(r) = ((a + |r|)^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) \operatorname{sgn}(r).$$

Comme précédemment, on pose  $\psi_k(r) = \int_0^r (\psi \circ T_k)(\rho) d\rho$  et  $\tilde{\psi}(r) = \int_0^r \psi(\rho) d\rho$ . On a des résultats analogues à ceux du Lemme 4.2.14, c'est-à-dire pour tout  $r \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\psi}(T_k(r)) \leq \psi_k(r) \leq \tilde{\psi}(r) \quad (4.96)$$

et il existe  $0 < c_\lambda < 1$  et  $d_\lambda$  deux constantes indépendantes de  $a$  telles que

$$c_\lambda \frac{(a + |r|)^{2-\lambda}}{2-\lambda} + d_\lambda a^{2-\lambda} \leq \tilde{\psi}(r) \leq \frac{(a + |r|)^{2-\lambda}}{2-\lambda}. \quad (4.97)$$

En prenant  $S'(r) = (\psi \circ T_k)(r) h_n(r)$ ,  $\varphi(t) = \min\left(\left(\frac{t-s+h}{h}\right)^+, 1\right)$  comme fonctions test dans (4.28), en faisant tendre  $h$  vers 0 et  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient l'analogie de la formule (4.72),

$$\int_{\Omega} \psi_k(\theta(t)) dx + (1-\lambda) \int_{Q_t} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^\lambda} dx ds \leq \|f\|_{L^m(Q_T)} \|(a + |T_k(\theta)|)^{1-\lambda}\|_{L^{m'}(Q_T)} + \int_{\Omega} \psi_k(\theta_0) dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (4.98)$$

En utilisant les propriétés (4.96), (4.97) sur  $\psi$ , , il vient

$$\begin{aligned} & \frac{c_\lambda}{2-\lambda} \int_{\Omega} (a + |T_k(\theta)(t)|)^{2-\lambda} dx + a^{2-\lambda} d_\lambda \operatorname{mes}(\Omega) + (1-\lambda) \int_{Q_t} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(a + |T_k(\theta)|)^\lambda} dx ds \\ & \leq \|f\|_{L^m(Q_T)} \|(a + |T_k(\theta)|)^{1-\lambda}\|_{L^{m'}(Q_T)} + \frac{1}{2-\lambda} \int_{\Omega} (a + |T_k(\theta_0)|)^{2-\lambda} dx, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.99)$$

En faisant tendre  $a$  vers 0, le Lemme de Fatou pour les termes de gauche de (4.99) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les termes de droite, car  $a + |T_k| \leq a + k$ , il vient

$$\begin{aligned} \|T_k(\theta)\|_{L^\infty(0,T;L^{2-\lambda}(\Omega))}^{2-\lambda} + \int_{Q_T} \frac{|DT_k(\theta)|^2}{(|T_k(\theta)|)^\lambda} dx dt \\ \leq C(m, \lambda) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|T_k(\theta)\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} + \|T_k(\theta_0)\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.100)$$

On fait maintenant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , le lemme de Fatou pour les termes de gauche de (4.100) et le fait que  $|T_k(r)| \leq |r|$  pour les termes de droite, entraînent

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^{2-\lambda}(\Omega))}^{2-\lambda} + \int_{Q_T} |D\theta|^2 |\theta|^{-\lambda} dx dt \\ \leq C(m, \lambda) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.101)$$

### Étape 2 : régularité $L^\sigma(Q_T)$ de $\theta$

Soient  $1 \leq r, q < 2$ , par l'inégalité de Hölder et l'estimation (4.101) on obtient l'inégalité analogue à l'inégalité (4.78)

$$\begin{aligned} \int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt \leq C(m, \lambda, r) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} \right. \\ \left. + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right)^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{\lambda q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{\lambda r}{2-r}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, rappelé dans le Lemme 4.1.3, nous donne l'analogie de la formule (4.81)

$$\int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{\lambda q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{\lambda r}{2-r}} dt \leq C(m, q, r) \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^{2-\lambda}(\Omega))}^{\frac{r(\lambda-2+r)}{2-r}} \int_0^T \|D\theta\|_{(L^q(\Omega))^N}^r dt. \quad (4.103)$$

avec l'égalité

$$\frac{N}{q} + \frac{2}{r} = 1 + \frac{N}{2-\lambda}. \quad (4.104)$$

En injectant, (4.101) et (4.102) dans (4.103) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{\lambda q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{\lambda r}{2-r}} dt \leq C(m, \lambda, q, r) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} \right. \\ \left. + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right)^{\frac{r(\lambda-2+r)}{(2-\lambda)(2-r)} + \frac{r}{2}} \left( \int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{\lambda q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{\lambda r}{2-r}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^T \|\theta\|_{L^{\frac{\lambda q}{2-r}}(\Omega)}^{\frac{\lambda r}{2-r}} dt \leq C(m, \lambda, q, r) \times \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)} \right)^{\frac{\lambda r}{(2-\lambda)(2-r)}}. \quad (4.105)$$

On veut traiter le terme  $\|\theta\|_{L^{m'(1-\lambda)}(Q_T)}^{1-\lambda}$ . Pour cela on suppose  $r = q$ , donc d'après (4.104) il vient

$$\frac{N+2}{q} = 1 + \frac{N}{2-\lambda} \quad (4.106)$$

Et on définit  $\lambda$  par

$$m'(1-\lambda) = \frac{\lambda q}{2-q} \quad (4.107)$$

qui rapproché avec (4.106) donne après calcul

$$\lambda = \frac{Nm - 2(N+2)(m-1)}{N+2-2m}. \quad (4.108)$$

En posant

$$\sigma = m'(1-\lambda) = \frac{\lambda q}{2-q} = \frac{m(N+2)}{N+2-2m} \quad (4.109)$$

et en utilisant (4.106), (4.107), (4.108) l'inégalité (4.105) devient

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^\sigma &\leq C(N, m, \lambda, q) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^{1-\lambda} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)} \right)^{\frac{N+2}{N}} \\ &\leq C(N, m, \lambda, q) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)}^{\frac{N+2}{N}} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^{(1-\lambda)\frac{N+2}{N}} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{(2-\lambda)\frac{N+2}{N}} \right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

En remarquant qu'un simple calcul donne

$$\frac{1}{\sigma \frac{N}{N+2}} + \frac{1}{m' \frac{N}{N+2}} = 1,$$

l'inégalité de Young et le fait que  $m'(1-\lambda) = \sigma$  donnent

$$\|f\|_{L^m(Q_T)}^{\frac{N+2}{N}} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^{(1-\lambda)\frac{N+2}{N}} \leq C_\varepsilon \frac{N+2}{N\sigma} \|f\|_{L^m(Q_T)}^\sigma + \varepsilon \frac{N+2}{Nm'} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^\sigma. \quad (4.111)$$

En injectant (4.111) dans (4.110), et prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit, et en remarquant également que

$$(2-\lambda) \frac{N+2}{N} = \sigma$$

il vient

$$\|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^\sigma \leq C(N, m) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)}^\sigma + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^\sigma \right).$$

Et enfin comme

$$2 - \lambda = \frac{Nm}{N + 2 - 2m} \quad (4.112)$$

il découle

$$\|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)} \leq C(N, m) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right). \quad (4.113)$$

### Étape 3 : régularités découplées de $\theta$

Le réel  $\lambda$  est défini par (4.108), comme dans l'étape précédente, . Revenons à l'inégalité (4.105), les relations (4.109) entraînent

$$\|\theta\|_{L^{\frac{\lambda r}{2-r}}(0, T; L^{\frac{\lambda q}{2-q}}(\Omega))} \leq C(N, m, q, r) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} \|\theta\|_{L^\sigma(Q_T)}^{1-\lambda} + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^{2-\lambda} \right)^{\frac{N+2}{N} \frac{1}{\sigma}}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Young (4.111) et en injectant l'inégalité (4.113), il découle pour tout  $1 \leq r, q < 2$  satisfaisant (4.104)

$$\|\theta\|_{L^{\frac{\lambda r}{2-r}}(0, T; L^{\frac{\lambda q}{2-q}}(\Omega))} \leq C(N, m, q, r) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)}^\sigma + \|\theta_0\|_{L^{2-\lambda}(\Omega)}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Enfin, si on pose

$$\kappa = \frac{\lambda r}{2-r}, \quad \mu = \frac{\lambda q}{2-q}$$

d'après (4.104) et le fait que  $1 \leq r, q < 2$ ,  $\kappa$  et  $\mu$  vérifient les relations

$$\lambda = \frac{Nm - 2(N+2)(m-1)}{N+2-2m}, \quad m \leq \kappa, \mu < \infty, \quad \frac{2}{\kappa} + \frac{N}{\mu} = \frac{N+2-2m}{m}.$$

Par conséquent on obtient l'estimation voulue

$$\|\theta\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} \leq C(N, m, \kappa, \mu) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right). \quad (4.114)$$

Pour l'estimation découplée sur  $D\theta$ , il suffit d'injecter (4.114) dans (4.102) et d'appliquer l'inégalité de Young comme précédemment pour obtenir

$$\|D\theta\|_{(L^r(0, T; L^q(\Omega)))^N} \leq C(N, m, r, q) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right).$$

Des relations (4.104) et (4.108), on montre qu'on a bien

$$\frac{N}{q} + \frac{2}{r} = \frac{N+2}{m} - 1.$$

Enfin pour ce qui est de l'estimation  $L^\infty(0, T; L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega))$ , il suffit d'injecter (4.113) dans (4.95) et d'utiliser l'inégalité de Young et les relations (4.109) pour trouver

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega))} \leq C(m) \left( \|f\|_{L^m(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^{\frac{Nm}{N+2-2m}}(\Omega)} \right).$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □



# Chapitre 5

## Existence et unicité pour le système

Dans ce dernier chapitre on définit tout t'abord la notion de solution faible-renormalisée pour le système (5.1), puis en utilisant les résultats de régularité du chapitre précédent on montre des résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles-renormalisées. On suppose dans un premier temps que l'énergie de dissipation est remplacée par une source fixe. Dans la Section 5.2, on montre l'unicité pour des données petites en considérant des données plus régulières pour l'équations de la chaleur, typiquement  $f \in L^1(L^m)$  et  $\theta_0 \in L^m$ , avec  $m > 1$ , (voir Théorèmes 5.2.1 et 5.2.2) et dans la Section 5.3 en considérant des données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes, en prenant  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ ,  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $F$  de croissance plus faible (voir Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2). Enfin dans la Section 5.4, on revient au système originel (5.1) avec énergie de dissipation. Et en prenant  $\theta_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ , alors  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$  et on montre dans ce cas l'existence avec des conditions sur la croissance  $\alpha$  de  $F$  (Théorème 5.4.1). On montre ensuite l'unicité de la solution faible pour des solutions petites (Théorème 5.4.2).

### 5.1 Solutions faibles-renormalisées, solutions faibles

On rappelle que l'on étudie le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = |Du|^2 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t=0) = u_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0, \quad \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Fort d'une connaissance plus précise de la formulation des solutions de l'équation de la chaleur pour des données peu régulières et des équations de Navier-Stokes, on peut introduire la notion de solution faible-renormalisée pour le système (5.1).



**Définition 5.1.1 (Solutions faibles-renormalisées)** *On dit que le couple de fonctions mesurables  $(u, \theta)$  est solution faible-renormalisée du problème (5.1) si  $u$  vérifie*

$$u \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)) \quad (5.2)$$

et si pour presque tout  $t \in (0, T)$ , pour tout  $v \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + b(u, u, v) = \langle F(\theta), v \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)}; \quad (5.3)$$

et si  $\theta$  est une fonction mesurable finie presque partout et vérifiant

$$T_k(\theta) \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad \forall k \geq 0; \quad (5.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \leq |\theta| \leq 2n\}} |D\theta|^2 dx dt = 0; \quad (5.5)$$

pour tout  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  avec  $S'$  à support compact, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$  tel que  $S'(\theta)\varphi \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \varphi_t S(\theta) dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0) S(\theta_0) dx + \int_{Q_T} S''(\theta) |D\theta|^2 \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} S'(\theta) D\theta \cdot D\varphi dx dt + \int_{Q_T} u \cdot DS(\theta) \varphi dx dt = \int_{Q_T} |Du|^2 S'(\theta) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dans la Section 5.4, on sera amené à considérer des solutions faibles pour le système (5.1). On introduit alors la définition

**Définition 5.1.2 (Solutions faibles)** *On dit que le couple de fonctions  $(u, \theta)$  est solution faible du problème (5.1) si  $u$  vérifie*

$$\begin{aligned} u & \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)), \\ u(t=0) & = u_0, \end{aligned}$$

et si pour presque tout  $t \in (0, T)$ , pour tout  $v \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)} + b(u, u, v) = \langle F(\theta), v \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)};$$

et si  $\theta$  vérifie

$$\begin{aligned} \theta & \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta & = |Du|^2 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T). \\ u(t=0) & = u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

## 5.2 Données plus régulières pour l'équation de la chaleur

Dans toute cette partie, on se place dans le cas de la dimension 2 ( $N = 2$ ). On fait également l'hypothèse que l'énergie de dissipation dans l'équation de la chaleur est remplacée par un terme fixe donné  $f$ . C'est-à-dire que l'on étudie le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\theta) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t=0) = u_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0, \quad \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

On sait que si  $f$  est dans  $L^1(Q_T)$  et  $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ , d'après les résultats de régularité de l'équation de la chaleur on ne peut pas espérer mieux que  $D\theta \in (L^q(Q_T))^2$  pour tout  $q < 4/3$ . Dans ces conditions, en considérant  $u$  solution faible, alors  $u \in \mathbf{L}^4(Q_T)$  et donc le terme de convection  $u \cdot D\theta$  n'est pas dans  $L^1(Q_T)$ , ce qui pose problème pour l'unicité. On suppose donc  $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$  et  $\theta_0 \in L^m(\Omega)$  pour mettre à profit les résultats de régularité obtenus dans la Section 4.2.4. On a montré alors, dans la Proposition 4.2.15 que dans ce cas  $u \cdot D\theta \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$ . On établit tout d'abord un résultat d'existence, pour une fonction  $F$  de croissance  $0 < \alpha < \frac{3m}{2}$ . On remarque, que l'ensemble des valeurs  $\alpha$  admissibles est plus grand que dans le cas  $f \in L^1(Q_T)$ , où  $0 < \alpha < \frac{3m}{2}$ , démontré dans [2]. Ensuite on montre l'unicité de la solution faible-renormalisée dans le cas où  $F$  satisfait une condition de type Lipschitz.

**Théorème 5.2.1** *On suppose que  $f \in L^1(0, T; L^m(\Omega))$ ,  $\theta_0 \in L^m(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ . Soit  $0 \leq \alpha < \frac{3m}{2}$ . On suppose que  $F$  est continue et vérifie l'hypothèse de croissance*

$$|F(r)| \leq a + b|r|^\alpha, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

où  $a, b$  sont des constantes pouvant dépendre de  $\alpha$ .

Alors, il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème (5.7) au sens de la Définition 5.1.1.

**Théorème 5.2.2** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. On suppose de plus que  $F$  vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

$$|F(r) - F(s)| \leq L|r - s|(1 + |r|^\beta + |s|^\beta), \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

où  $\beta$  satisfait  $\max(0, \alpha - 1) \leq \beta < \frac{3m}{2} - 1$ .

Alors, pour  $\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}$  suffisamment petit, il y a unicité de la solution faible-renormalisée du problème (5.7).

**Remarque 5.2.3** Attaoui et Blanchard ont montré dans [2] que le résultat d'existence du Théorème 5.2.1 est aussi valable pour  $m = 1$ . Pour ce qui est de l'unicité dans ce cas, comme nous l'avons déjà noté la difficulté réside dans le fait que le terme de convection  $u \cdot D\theta \notin L^1(Q_T)$ .

**Remarque 5.2.4** La condition de Lipschitz (5.9) (avec  $s = 0$ ) implique que  $F$  satisfait la condition de croissance

$$|F(r)| \leq A + B|r|^{\beta+1}, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}, \quad (5.10)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Pour que cette inégalité soit cohérente avec la condition de croissance (5.8) sur  $F$ , on doit avoir  $\alpha \leq \beta + 1$ . C'est pour cette raison que l'on suppose  $\max(0, \alpha - 1) \leq \beta < \frac{3m}{2} - 1$ .

**Démonstration du Théorème 5.2.1**— On démontre l'existence en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. Pour cela on définit le procédé suivant. On fixe  $\hat{\theta}$  dans un espace  $L$ , typiquement  $L$  sera un espace de Lebesgue précisé plus loin, de telle sorte que  $F(\hat{\theta})$  soit dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$  ou dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . Le choix de  $L$  dépend donc de la croissance  $\alpha$  de  $F$ . Ainsi, on associe à  $\hat{\theta}$ , l'unique solution  $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega))$  des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\hat{\theta}) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Enfin, pour ce  $u$ , on pose  $\theta$ , l'unique solution renormalisée de l'équation de la chaleur de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta(t = 0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.12)$$

On choisira alors aussi  $L$  en fonction des résultats de régularité connus sur  $\theta$  de sorte que  $\theta \in L$ . On a donc défini l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : L &\longrightarrow L \\ \hat{\theta} &\longmapsto \theta. \end{aligned}$$

Pour montrer l'existence d'un point fixe, par Schauder, il faut montrer que  $\Psi$  est continue, compacte et préserve un convexe fermé borné. Un point fixe  $\theta$  pour cette application sera donc tel que  $(u, \theta)$  est solution faible-renormalisée (5.7). Le choix de  $L$  dépend essentiellement de  $\alpha$ , c'est pour cela que l'on distingue trois cas

- $0 \leq 2\alpha \leq 1$  : point fixe dans  $L = L^1(Q_T)$

- $1 < 2\alpha < 2m$  : point fixe dans  $L = L^{2\alpha}(Q_T)$
- $2m \leq 2\alpha < 3m$  : point fixe dans  $L = L^r(0, T; L^q(\Omega))$ , en utilisant les régularités découplées (4.61) de la solution de l'équation de la chaleur montrées dans le Théorème 4.2.11

**1er cas** :  $0 \leq 2\alpha \leq 1$ . Dans ce cas  $L = L^1(Q_T)$ , on fixe donc  $\hat{\theta}$  dans  $L^1(Q_T)$ . D'après l'hypothèse de croissance (5.8) sur  $F$ ,

$$F(\hat{\theta}) \in \mathbf{L}^{1/\alpha}(Q_T) \subset \mathbf{L}^2(Q_T)$$

car  $2\alpha \leq 1$ . Par définition des solutions renormalisées, on a  $\theta \in L^1(Q_T)$ , donc l'application  $\Psi$  est dans ce cas bien définie. Montrons qu'elle est continue, compacte et préserve une boule de  $L^1(Q_T)$ .

**$\Psi$  continue** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(Q_T)$  convergeant fortement vers  $\hat{\theta}$ . D'après le principe de contraction énoncé dans le Corollaire 4.2.17 et la Proposition 4.2.15

$$\begin{aligned} \|\theta_n - \theta\|_{L^{2m}(Q_T)} &\leq C(m) \|(u_n - u) \cdot D\theta_n\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} \\ &\leq C(m, \sigma) \|u_n - u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u_n - u\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} \\ &\quad \times (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}). \end{aligned}$$

Puis par Hölder et le principe de contraction (4.3) pour les solutions des équations de Navier-Stokes, il vient

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^1(Q_T)} \leq C \left( \int_{Q_T} |F(\hat{\theta}_n) - F(\hat{\theta})|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad (5.13)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $m$ ,  $\|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)}$ ,  $\|u_0\|_{L^2(Q_T)}$  et indépendante de  $n$ . Or  $\hat{\theta}_n$  converge vers  $\hat{\theta}$  dans  $L^1(Q_T)$ , donc par la croissance et la continuité de  $F$ ,  $F(\hat{\theta}_n)$  converge vers  $F(\hat{\theta})$  dans  $\mathbf{L}^{1/\alpha}(Q_T)$  donc dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$ . Et donc d'après (5.13),  $\theta_n$  converge vers  $\theta$  dans  $L^1(Q_T)$ , et la continuité de  $\Psi$  est montrée.

**$\Psi$  compacte** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions bornée ds  $L^1(Q_T)$ . Alors  $F(\hat{\theta}_n)$  bornée dans  $\mathbf{L}^{1/\alpha}(Q_T)$  donc dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$ . Pour tout  $n$ ,  $u_n$  vérifie les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + u_n \cdot Du_n + Dp_n = F(\hat{\theta}_n) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u_n) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u_n(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.14)$$

Par conséquent, par les estimations classiques sur les équations de Navier-Stokes,  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  et dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . En ce qui concerne la suite

$(\theta_n)$ , pour tout  $n$ ,  $\theta_n$  est solution renormalisée de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n + u_n \cdot D \theta_n = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta_n(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega. \end{cases} \quad (5.15)$$

D'après les estimations (4.60) du Théorème 4.2.11, pour tout  $1 \leq q, r < 2$  avec  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$

- $\theta_n$  est bornée dans  $L^r(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$
- $\frac{\partial \theta_n}{\partial t} = f + \Delta \theta_n - u_n \cdot D \theta_n$  est bornée dans  $L^1(0, T; L^m(\Omega)) + L^r(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$

donc par un lemme de compacité de type Aubin-Simon ([40]), on a en particulier, l'existence d'une fonction mesurable  $\vartheta$  telle qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{p.p. dans } Q_T.$$

De cette convergence ponctuelle et du fait que d'après (4.62),  $(\theta_n)$  est bornée dans  $L^{2m}(Q_T)$ , le théorème de Vitali implique alors qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{dans } L^q(Q_T) \quad \text{pour tout } 1 \leq q < 2m.$$

En particulier

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{dans } L^1(Q_T).$$

Ce qui montre la compacité.

**$\Psi$  préserve une boule** : on a d'après l'estimation  $L^{2m}(Q_T)$  de  $\theta$  et l'inégalité de Hölder,

$$\|\theta\|_{L^1(Q_T)} \leq C(m) (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$$

où  $C(m)$  est une constante indépendante de  $\hat{\theta}$ . Donc clairement,  $\Psi$  préserve la boule de  $L^1(Q_T)$  de centre 0 et de rayon  $C(m)(\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$ .

Par le théorème de Schauder, l'application  $\Psi$  admet donc un point fixe. Ce qui achève le premier cas.

**2ème cas** :  $1 < 2\alpha < 2m$ . Dans ce cas  $L = L^{2\alpha}(Q_T)$ , et la démonstration est similaire au cas précédent. Tout d'abord, si  $\hat{\theta} \in L^{2\alpha}(Q_T)$  alors par la croissance de  $F$ ,  $F(\hat{\theta}) \in L^2(Q_T)$  et d'après les estimations (4.62),  $\theta \in L^{2m}(Q_T)$ , a fortiori  $\theta \in L^{2\alpha}(Q_T)$ , donc l'application  $\Psi$  est dans ce cas bien définie. Reste à montrer qu'elle est continue, compacte et préserve une boule.

**$\Psi$  continue** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions de  $L^{2\alpha}(Q_T)$  convergeant fortement vers  $\hat{\theta}$ . Comme dans le premier cas on obtient :

$$\begin{aligned} \|\theta_n - \theta\|_{L^{2m}(Q_T)} &\leq C(m, \sigma) \|u_n - u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u_n - u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} \\ &\quad \times (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}). \end{aligned}$$

Puis par Hölder et le principe de contraction (4.3) pour les solutions des équations de Navier-Stokes, il vient

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^{2\alpha}(Q_T)} \leq C(\alpha, m) \left( \int_{Q_T} |F(\widehat{\theta}_n) - F(\widehat{\theta})|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad (5.16)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\alpha, m, \|F(\widehat{\theta})\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(Q_T)}$  et indépendante de  $n$ . Or  $\widehat{\theta}_n$  converge vers  $\widehat{\theta}$  dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$ , donc par la croissance et la continuité de  $F, F(\widehat{\theta}_n)$  converge vers  $F(\widehat{\theta})$  dans  $L^2(Q_T)$ . Et donc d'après (5.16),  $\theta_n$  converge vers  $\theta$  dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$ , et la continuité de  $\Psi$  est montrée.

**$\Psi$  compacte** : soit  $(\widehat{\theta}_n)$  une suite de fonctions bornée dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$ . Alors  $F(\widehat{\theta}_n)$  bornée dans  $L^2(Q_T)$ . Pour tout  $n, u_n$  vérifie les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + u_n \cdot Du_n + Dp_n = F(\widehat{\theta}_n) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u_n) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u_n(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Par conséquent, par les estimations classiques sur les équations de Navier-Stokes,  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  et dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . D'autre part,  $\theta_n$  est solution renormalisée de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n + u_n \cdot D\theta_n = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta_n(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, une application immédiate d'un lemme de type Aubin-Simon donne l'existence d'une fonction mesurable  $\vartheta$  telle qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{p.p. dans } Q_T.$$

De cette convergence ponctuelle et du fait que d'après (4.62),  $(\theta_n)$  est bornée dans  $L^{2m}(Q_T)$ , le théorème de Vitali implique alors qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \text{ dans } L^q(Q_T) \text{ pour tout } 1 \leq q < 2m.$$

En particulier, comme  $2\alpha < 2m$

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \text{ dans } L^{2\alpha}(Q_T).$$

Ce qui montre la compacité.

**$\Psi$  préserve une boule** : on a d'après l'estimation  $L^{2m}(Q_T)$  de  $\theta$  et l'inégalité de Hölder,

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q_T)} \leq C(m, \alpha) (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$$

où  $C(m, \alpha)$  est une constante indépendante de  $\hat{\theta}$ . Donc clairement,  $\Psi$  préserve la boule de  $L^{2\alpha}(Q_T)$  de centre 0 et de rayon  $C(m, \alpha)(\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$ .

Par le théorème de Schauder, l'application  $\Psi$  admet donc un point fixe. Ce qui achève le second cas.

**3ème cas :**  $2m < 2\alpha < 3m$ . Dans ce cas  $L = L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$ , où  $\kappa_0, \mu_0$  sont deux réels vérifiant

$$\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\mu_0} > \frac{1}{m}, \quad \kappa_0 = 2\alpha, \quad \mu_0 = q\alpha \text{ où } q > 1. \quad (5.17)$$

On mettra à profit les estimations (4.61) découplées en temps et en espace du Théorème 4.2.11. Remarquons qu'en remplaçant  $\kappa_0, \mu_0$  par leur expression, la première égalité de la condition (5.17) équivaut à

$$\frac{1}{q} > \frac{\alpha}{m} - \frac{1}{2} \quad (5.18)$$

et comme  $q > 1$ , cela impose  $\alpha < \frac{3m}{2}$  c'est-à-dire  $2\alpha < 3m$ , comme annoncé au début de ce troisième cas. Et la condition  $2\alpha > 2m$ , implique que  $q < 2$ . La différence essentielle dans cette étape est que  $F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . En effet si  $\hat{\theta} \in L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$  où  $\kappa_0, \mu_0$  vérifient les conditions (5.17), alors par la croissance de  $F$

$$F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega)) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \quad (5.19)$$

car  $1 < q < 2$ . On peut donc définir  $u$  solution faible des équations de Navier-Stokes (5.11). Et donc d'après les estimations (4.61) du Théorème 4.2.11,  $\theta \in L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$  pour tout  $\kappa, \mu$  vérifiant

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}, \quad 1 < \kappa, \mu < +\infty.$$

On observe facilement, que l'on peut choisir  $\kappa, \mu$  tels que  $\kappa_0 < \kappa$  et  $\mu_0 < \mu$ . Par suite,  $\theta \in L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$  et donc  $\Psi$  est bien définie. Reste à montrer comme précédemment que  $\Psi$  est continue, compacte et préserve une boule. Ceci se fait de manière similaire aux deux premiers cas sauf qu'au lieu d'utiliser les estimations  $L^{2m}(Q_T)$  sur  $\theta$  on utilise les estimations découplées en temps et en espace  $L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$ .

**$\Psi$  continue :** soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions de  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$  convergeant fortement vers  $\hat{\theta}$ . D'après le principe de contraction, énoncé dans le Corollaire 4.2.17, et la Proposition 4.2.15

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))} \leq C(\kappa, \mu, \sigma) \|u_n - u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u_n - u\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}),$$

où  $\kappa, \mu$  vérifient  $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}$ ,  $1 \leq \kappa, \mu < +\infty$  et pour tout  $\sigma \geq 2/(2-m)$ . Puis par Hölder, le fait que  $\kappa_0 < \kappa$  et  $\mu_0 < \mu$ , et le principe de contraction (4.5) pour les solutions des

équations de Navier-Stokes, il vient

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^{\kappa_0}(0,T;L^{\mu_0}(\Omega))} \leq C(\kappa, \mu, \kappa_0, \mu_0) \left( \int_0^T \|F(\hat{\theta}_n) - F(\hat{\theta})\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \quad (5.20)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\kappa, \kappa_0, \mu, \mu_0, \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(Q_T)}$  et indépendante de  $n$ . Or  $\hat{\theta}_n$  converge vers  $\hat{\theta}$  dans  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$ , donc par la croissance, la continuité de  $F$ , et la définition (5.17) de  $\kappa_0, \mu_0$ ,  $F(\hat{\theta}_n)$  converge vers  $F(\hat{\theta})$  dans  $L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$ , et l'injection de  $L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$  dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  (car  $q > 1$ ) entraîne donc

$$F(\hat{\theta}_n) \longrightarrow F(\hat{\theta}) \text{ dans } L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)).$$

En rapprochant cette convergence et (5.20), il vient  $\theta_n$  converge vers  $\theta$  dans  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$ , et la continuité de  $\Psi$  est montrée.

**$\Psi$  compacte** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions bornée ds  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$ . Alors par la croissance de  $F$ ,  $F(\hat{\theta}_n)$  bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$  donc dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . Pour tout  $n$ ,  $u_n$  vérifie les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + u_n \cdot Du_n + Dp_n = F(\hat{\theta}_n) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u_n) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u_n(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Par conséquent, par les estimations classiques sur les équations de Navier-Stokes,  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  et dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . D'autre part,  $\theta_n$  est solution renormalisée de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n + u_n \cdot D\theta_n = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta_n(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme dans les cas précédents, une application immédiate d'un lemme de type Aubin-Simon donne l'existence de  $\vartheta$  mesurable tel qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{p.p. dans } Q_T.$$

D'autre part, d'après les estimations (4.61) du Théorème 4.2.11,  $(\theta_n)$  est bornée dans  $L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$ , pour tout  $\kappa, \mu$  vérifiant  $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}$ ,  $1 \leq \kappa, \mu < +\infty$ . De plus on observe facilement, que l'on peut choisir  $\kappa, \mu$  tels que  $\kappa_0 < \kappa$  et  $\mu_0 < \mu$ . Par conséquent, le théorème de Vitali implique alors qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \text{ dans } L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega)).$$



Ce qui montre la compacité.

**$\Psi$  préserve une boule** : on a d'après l'estimation  $L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$  du Théorème 4.2.11 sur  $\theta$  et l'inégalité de Hölder, avec le fait que  $\kappa_0 < \kappa$  et  $\mu_0 < \mu$

$$\|\theta\|_{L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))} \leq C(\kappa, \mu, \kappa_0, \mu_0, m) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$$

où  $C(\kappa, \mu, \kappa_0, \mu_0, m)$  est une constante indépendante de  $\hat{\theta}$ . Donc clairement,  $\Psi$  préserve la boule de  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$  de centre 0 et de rayon  $C(\kappa, \mu, \kappa_0, \mu_0, m)(\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})$ .

Par le théorème de Schauder, l'application  $\Psi$  admet donc un point fixe. Ce qui achève le troisième cas et la démonstration du théorème. □

**Remarque 5.2.5** Dans la démonstration du théorème précédent, on a distingué plusieurs cas selon que  $F(\hat{\theta}) \in \mathbf{L}^2(Q_T)$  ou  $F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . Comme  $\mathbf{L}^2(Q_T) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ , on aurait pu regrouper tous les cas en un seul où  $F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . On a choisi cette présentation car les deux premiers cas, c'est-à-dire  $0 \leq \alpha < 2m$ , sont plus simples et ne nécessitent pas les régularités découplées en temps en espace sur les solutions de l'équation de la chaleur avec terme de convection. Ces régularités deviennent néanmoins indispensables pour atteindre  $2m \leq \alpha < 3m$ , car dans ce cas, (5.19) montre que  $F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$  pour  $q < 2$  et donc  $F(\hat{\theta}) \notin \mathbf{L}^2(Q_T)$ . Remarquons également que dans le cas  $\alpha = m$ , on a  $F(\hat{\theta}) \in \mathbf{L}^2(Q_T)$  quand  $\hat{\theta} \in L^{2m}(Q_T)$ . Cependant, il semble que l'on ne puisse traiter ce cas en utilisant la régularité  $L^{2m}(Q_T)$  et qu'il faille utiliser les régularités découplées et le fait que  $F(\hat{\theta}) \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ . En effet, pour la compacité de l'application, si  $\hat{\theta}_n$  est borné dans  $L^{2m}(Q_T)$ , on peut montrer comme dans les deux premiers cas que, à une sous-suite près,  $\theta_n$  converge presque partout et est borné dans  $L^{2m}(Q_T)$ , ce qui ne suffit pas pour montrer qu'à une sous-suite près,  $\theta_n$  converge fortement dans  $L^{2m}(Q_T)$ .

**Remarque 5.2.6** Le cas  $0 < \alpha \leq m/2$  peut être fait par approximation de  $F$ . En effet dans un premier temps on montre par point fixe le résultat pour  $F$  borné (i.e.  $\alpha = 0$ ). Ensuite on pose  $F_\epsilon = F \circ T_{1/\epsilon}$ , on applique le résultat précédent pour  $F_\epsilon$  qui est borné, et grâce aux estimations classiques sur les équations de Navier-Stokes et l'estimation  $L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$ , (4.59) du Théorème 4.2.11, sur les solutions de l'équation de la chaleur, on peut passer à la limite en  $\epsilon$  dans le problème approché.

**Démonstration du Théorème 5.2.2**— De manière classique on suppose qu'il existe deux solutions faibles renormalisées  $(u_1, \theta_1)$  et  $(u_2, \theta_2)$  pour des données identiques  $f, \theta_0, u_0$ . Puis on utilise les contractions établies pour la différence des solutions des équations de Navier-Stokes (estimation (4.5)) et de l'équation de la chaleur (Corollaire 4.2.17).

Tout d'abord d'après l'estimation (4.61) du Théorème 4.2.11, les fonctions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  appartiennent à  $L^{\kappa_0}(0, T; L^{\mu_0}(\Omega))$  pour tous  $\kappa_0$  et  $\mu_0$  satisfaisant

$$\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\mu_0} \geq \frac{1}{m}, \quad 0 < \kappa_0, \mu_0 < +\infty.$$

Donc, la croissance de  $F$  implique que  $F(\theta_1) - F(\theta_2)$  appartient à  $L^{\frac{\kappa_0}{\alpha}}(0, T; \mathbf{L}^{\frac{\mu_0}{\alpha}}(\Omega))$ . Soit  $q > 1$ . En prenant  $\kappa_0 = 2\alpha$  et  $\mu_0 = q\alpha$ , il découle que  $F(\theta_1) - F(\theta_2)$  appartient à  $L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))$  pour tout  $q$  vérifiant

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{q} \geq \frac{\alpha}{m}, \quad q > 1. \quad (5.21)$$

Ensuite, d'une part, on utilise l'estimation (4.91) sur  $\theta_1 - \theta_2$  dans  $L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))$ , qui combinée avec la Proposition 4.2.15 donne, pour tout  $\sigma \geq \frac{2}{2-m}$  et pour tous  $\kappa, \mu$  tels que  $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}$

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} &\leq C(m, \kappa, \mu) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^{\frac{2}{m\sigma}} \|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))}^{\frac{m\sigma-2}{m\sigma}} \\ &\quad \times (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

D'autre part, du fait que  $F(\theta_1) - F(\theta_2) \in L^2(0, T; \mathbf{L}^q(Q_T)) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  (car  $q > 1$ ) et d'après l'estimation (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))} + \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \\ \leq C (\|u_0\|_{L^2(Q_T)}, \|F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))}) \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

De plus, d'après l'injection  $\mathbf{L}^q(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  (car  $q > 1$ ) et la croissance de  $F$ , on a

$$\begin{aligned} \|F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))} &\leq \|F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))} \\ &\leq \|a + b|\theta_2|^\alpha\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))} \\ &\leq aT^{\frac{1}{2}}\Omega^{\frac{1}{q}} + b\|\theta_2\|_{L^{2\alpha}(0, T; \mathbf{L}^{q\alpha}(\Omega))}^\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que la relation (5.21) implique  $\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{q\alpha} \geq \frac{1}{m}$  et l'estimation (4.61), il vient

$$\|F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))} \leq aT^{\frac{1}{2}}\Omega^{\frac{1}{q}} + bC(\alpha, q) (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)})^\alpha. \quad (5.24)$$

Puis en combinant (5.22), l'estimation (5.23) satisfaite par  $u_1 - u_2$  et l'estimation (5.24), on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0, T; L^\mu(\Omega))} &\leq C_1 \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))} \\ &\quad \times (\|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}), \end{aligned} \quad (5.25)$$

où

$$C_1 = C(m, a, b, q, \alpha, \text{mes}(Q_T), \kappa, \mu, \|f\|_{L^1(0, T; L^m(\Omega))}, \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Reste maintenant à estimer  $\|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))}$ . L'injection  $L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega)) \subset L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  et la condition de Lipschitz (5.9) sur  $F$  impliquent

$$\begin{aligned} \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))} &\leq C(\Omega, q) \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))} \\ &\leq C(\Omega, q, L) \|\theta_1 - \theta_2\| (1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta) \|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega))}. \end{aligned}$$

On applique maintenant l'inégalité de Hölder, avec les exposants définis par

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{1}{q}, \quad (5.26)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} &\leq C(\Omega, q, L) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))} \\ &\quad \times \|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Puis on estime le dernier terme du membre de droite de (5.27). L'inégalité triangulaire implique

$$\begin{aligned} \|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))} &\leq \|1\|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))} \\ &\quad + \| |\theta_1|^\beta \|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))} + \| |\theta_2|^\beta \|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit l'inégalité

$$\begin{aligned} \|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^{\bar{\kappa}}(0,T;L^{\bar{\mu}}(\Omega))} &\leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{\bar{\mu}}} T^{\frac{1}{\bar{\kappa}}} \\ &\quad + \|\theta_1\|_{L^{\beta\bar{\kappa}}(0,T;L^{\beta\bar{\mu}}(\Omega))}^\beta + \|\theta_2\|_{L^{\beta\bar{\kappa}}(0,T;L^{\beta\bar{\mu}}(\Omega))}^\beta. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ensuite, en utilisant la relation  $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}$  et en additionnant les relations (5.26), un calcul immédiat donne

$$\frac{1}{\beta\bar{\kappa}} + \frac{1}{\beta\bar{\mu}} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{m} \right).$$

Or, puisque  $\max(0, \alpha - 1) \leq \beta < \frac{3m}{2} - 1$ , il est facile de voir que pour  $q$  suffisamment proche de 1, on a

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{m} \right) \geq \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \geq \frac{\alpha}{m}.$$

Les relations ci-dessus et les résultats de régularité (4.61) du Théorème 4.2.11 impliquent que pour  $i = 1, 2$

$$\|\theta_i\|_{L^{\beta\bar{\kappa}}(0,T;L^{\beta\bar{\mu}}(\Omega))} \leq C(\alpha, \beta, \bar{\kappa}, \bar{\mu}, m, q) \left( \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)} \right). \quad (5.29)$$

Finalement, en regroupant (5.25), (5.27), (5.28) et (5.29), il découle

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))} &\leq C(m, a, b, \kappa, \mu, q, L, \alpha, \beta, \text{mes}(Q_T), \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}, \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad \times \left( \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)} \right) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\kappa(0,T;L^\mu(\Omega))}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $\|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}$  suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} C(m, a, b, \kappa, \mu, q, L, \alpha, \beta, \text{mes}(Q_T), \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))}, \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \\ \times \left( \|f\|_{L^1(0,T;L^m(\Omega))} + \|\theta_0\|_{L^m(\Omega)} \right) < 1, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\mu(\Omega))} \leq 0,$$

c'est-à-dire  $\theta_1 = \theta_2$ . Cela entraîne  $F(\theta_1) = F(\theta_2)$ , et donc d'après l'unicité de la solution faible des équations de Navier-Stokes (en dimension 2), on obtient  $u_1 = u_2$ . Ce qui montre le théorème. □

### 5.3 Données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes

On se place toujours dans le cas de la dimension  $N = 2$  et on fait l'hypothèse que l'énergie de dissipation dans l'équation de la chaleur est remplacée par un terme fixe donné  $f$ . On étudie donc le système (5.7). Comme dans la section qui précède, on cherche à avoir  $u \cdot D\theta$  plus régulier (au moins dans  $L^1(Q_T)$ ). Contrairement à la partie précédente on prend  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  et  $\theta_0$  dans  $L^1(\Omega)$ , tandis que l'on prend des données plus régulières pour les équations de Navier Stokes. Typiquement on prend  $F$  à croissance sous linéaire, c'est à dire une croissance  $\alpha < 1$  pour avoir  $F(\theta) \in L^s(Q_T)$ ,  $s > 2$  et  $u_0$  dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . On fait de plus l'hypothèse que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^2$ . Avec ces hypothèses, on montre que  $u \cdot D\theta \in L^q(Q_T)$  pour tout  $1 \leq q < 4/3$ . L'existence de la solution du système est garantie par le résultat dû à Attaoui et Blanchard (voir [2]). Ensuite, grâce à la régularité supplémentaire obtenue sur  $u$  par les résultats de la Section 4.1.2, on montre l'unicité de la solution faible renormalisée pour des données petites dans le cas où  $F$  satisfait une condition de type Lipschitz.

**Théorème 5.3.1** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$ ,  $f \in L^1(Q_T)$ ,  $\theta_0 \in L^1(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  avec  $\operatorname{div}(u_0) = 0$ . Soit  $0 < \alpha < 1$ . On suppose que  $F$  est continue et vérifie la condition de croissance*

$$|F(r)| \leq a + b|r|^\alpha, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}, \quad (5.30)$$

où  $a, b$  sont des constantes pouvant dépendre de  $\alpha$ .

Alors, il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème (5.7) au sens de la Définition 5.1.1.

**Théorème 5.3.2** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Soit  $0 \leq \beta < 1/2$ . On suppose que  $F$  vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

$$|F(r) - F(s)| \leq L|r - s|(1 + |r|^\beta + |s|^\beta), \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{R}. \quad (5.31)$$

Si

$$(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) \left( a \operatorname{mes}(\Omega)^{\frac{1}{s}} T^{\frac{1}{s}} + b \|f\|_{L^1(Q_T)}^\alpha + b \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}^\alpha + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right)$$

est suffisamment petit, alors il y a unicité de la solution faible-renormalisée du problème (5.7).

**Démonstration du Théorème 5.3.1**— C'est une conséquence du résultat d'existence de la solution faible-renormalisée établie dans [2] où Attaoui et Blanchard définissent une notion de solution faible-renormalisée à l'image de la Définition (5.1.1) mais en utilisant la notion de solution renormalisée classique, et de la Proposition 2.2.10 qui établit l'équivalence entre la notion de solutions renormalisées classiques et celle de Blanchard-Poretta (Définition 4.2.1).

□

**Démonstration du Théorème 5.3.2**— On suppose qu'il existe deux solutions faibles-renormalisées  $(u_1, \theta_1)$  et  $(u_2, \theta_2)$  pour des mêmes données  $f, \theta_0, u_0$ . Dans un premier temps, en faisant la différence des équations on montre que  $\theta_1 - \theta_2$  satisfait une équation de la chaleur avec terme de convection, et avec un second membre dans  $L^q(Q_T)$  pour tout  $q < 4/3$ . Ensuite dans un second temps, en utilisant les résultats de contraction du Théorème 4.1.11, pour les équations de Navier-Stokes, et les estimations du Théorème 4.2.13 pour obtenir une contraction sur  $\theta_1 - \theta_2$ , on montre l'unicité pour des données petites. En faisant la différence des équations en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ,  $\theta_1 - \theta_2$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial(\theta_1 - \theta_2)}{\partial t} - \Delta(\theta_1 - \theta_2) + u_2 \cdot D(\theta_1 - \theta_2) = (u_2 - u_1) \cdot D\theta_1 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ (\theta_1 - \theta_2)(t = 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \theta_1 - \theta_2 = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (5.32)$$

D'autre part d'après les résultats de régularité de la Proposition 4.2.10,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  appartiennent à  $L^p(Q_T)$ , pour tout  $1 \leq p < 2$ , donc d'après la croissance de  $F$ ,  $F(\theta_1)$  et  $F(\theta_2)$  appartiennent à  $\mathbf{L}^s(Q_T)$  pour tout  $\frac{1}{\alpha} \leq s < \frac{2}{\alpha}$ . Comme  $\alpha < 1$ , alors  $\frac{2}{\alpha} > 2$ , donc en particulier  $F(\theta_1)$  et  $F(\theta_2)$  appartiennent à  $\mathbf{L}^2(Q_T)$ . Le Théorème 4.1.11 implique alors que  $u_1 - u_2 \in \mathbf{L}^r(Q_T)$  pour tout  $r \geq 2$  avec l'estimation

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)} \leq C_1 \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)} \quad (5.33)$$

où  $C_1$  est une constante qui dépend de  $\Omega, T, r, \|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \|F(\theta_i)\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$ . De plus, comme d'après la Proposition 4.2.10,  $D\theta_1 \in \mathbf{L}^{\bar{q}}(Q_T)$  pour tout  $\bar{q} < 4/3$  avec

$$\|D\theta_1\|_{\mathbf{L}^{\bar{q}}(Q_T)} \leq C(\bar{q}) (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}), \quad (5.34)$$

alors

$$(u_2 - u_1) \cdot D\theta_1 \in L^q(Q_T), \quad \forall q < 4/3.$$

Ainsi comme  $\theta_1 - \theta_2$  vérifie l'équation (5.32), l'estimation (4.66) du Théorème 4.2.13 implique que pour tout  $q < 4/3$

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}(Q_T)} &\leq C(q) \|(u_2 - u_1) \cdot D\theta_1\|_{L^q(Q_T)} \\ &\leq C(q) \|u_2 - u_1\|_{\mathbf{L}^r(Q_T)} \|D\theta_1\|_{\mathbf{L}^{\bar{q}}(Q_T)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

où  $\bar{q}$  et  $r$  sont définis par

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{q}.$$

Si  $q < 4/3$ , il est possible de prendre  $\bar{q} < 4/3$  et  $r \geq 2$  qui vérifie la relation précédente (prendre par exemple  $\bar{q} = 2/3 + q/2$  et  $r = q(4/3 + q)/(4/3 - q)$ ). En injectant (5.33) et (5.34) dans (5.35) et en posant  $\sigma = 2q/(q - 2)$ , il vient

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)} \leq C_2 \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(Q_T)} (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) \quad (5.36)$$

où  $C_2$  est une constante qui dépend de  $\Omega$ ,  $T$ ,  $\sigma$ ,  $r$ ,  $\|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ ,  $\|F(\theta_i)\|_{L^2(Q)}$ . L'inégalité précédente est vérifiée pour tout  $2 \leq \sigma < 4$  car  $q$  décrit  $[1, 4/3[$  et donc  $\sigma = 2q/(2 - q)$  décrit  $[2, 4[$ . D'après la croissance de  $F$ , le fait que  $2\alpha < 2$  et la Proposition 4.2.10, on a pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|F(\theta_i)\|_{L^2(Q_T)} &\leq a \operatorname{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + b \|\theta_i\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^\alpha \\ &\leq C(\alpha) (a \operatorname{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} + b \|f\|_{L^1(Q_T)}^\alpha + b \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}^\alpha) \end{aligned} \quad (5.37)$$

En combinant (5.36), (5.37) et en utilisant la condition de Lipschitz (5.31) sur  $F$  et l'inégalité de Hölder, il vient pour tout  $2 \leq \sigma < 4$

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)} &\leq C_3 (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) \\ &\quad \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)} \|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^\gamma(Q_T)}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où  $\gamma$  est défini par

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}, \quad (5.39)$$

et où  $C_3$  est une constante qui dépend de  $\Omega$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $\|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\|f\|_{L^1(Q_T)}$ ,  $\|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}$ . D'après l'inégalité triangulaire, et le fait que  $\|1\|_{L^\gamma(Q_T)} = \operatorname{mes}(Q_T)^{1/\gamma}$ , il vient

$$\|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^\gamma(Q_T)} \leq \operatorname{mes}(Q_T)^{1/\gamma} + \|\theta_1\|_{L^{\beta\gamma}(Q_T)}^\beta + \|\theta_2\|_{L^{\beta\gamma}(Q_T)}^\beta.$$

Pour pouvoir estimer les deux derniers termes de l'inégalité précédente, il faut, pour utiliser les estimations de la Proposition 4.2.10, que  $\beta\gamma < 2$ . Comme  $\sigma < 4$ , la relation (5.39) implique que  $\gamma > 4$ . Et  $\gamma$  tend vers 4 quand  $\sigma$  tend vers 4. Or, par hypothèse,  $\beta < 1/2$  donc pour  $\sigma$  suffisamment proche 4, on a  $\beta\gamma < 2$  et en utilisant les estimations de la Proposition 4.2.10, il vient

$$\|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^\gamma(Q_T)} \leq \operatorname{mes}(Q_T)^{1/\gamma} + C(\beta, \gamma) (\|f\|_{L^1(Q_T)}^\beta + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}^\beta).$$

Et donc en injectant l'inégalité précédente dans (5.38), il découle

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)} &\leq C_4 \left( \operatorname{mes}(Q_T)^{1/\gamma} + C(\beta, \gamma) (\|f\|_{L^1(Q_T)}^\beta + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}^\beta) \right) \\ &\quad (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

où  $C_4 = C_4(\Omega, T, \sigma, a, b, \alpha, \|u_{0,i}\|_{\mathbf{H}_0^1(\omega)}, \|f\|_{L^1(Q_T)}, \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)})$ . L'inégalité (5.40) entraîne que pour  $\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}$  est suffisamment petit, alors

$$C_4 \left( \operatorname{mes}(Q_T)^{1/\gamma} + C(\beta, \gamma) (\|f\|_{L^1(Q_T)}^\beta + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}^\beta) \right) (\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}) < 1, \quad (5.41)$$

Et donc,

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\sigma(Q_T)} \leq 0,$$

c'est-à-dire  $\theta_1 = \theta_2$ . Et donc  $u_1 = u_2$  car  $F(\theta_1) = F(\theta_2)$ .

□

## 5.4 Système avec énergie de dissipation

Comme dans les parties précédentes on se place dans le cas de la dimension 2. On retourne à l'étude du système (5.1) avec d'énergie de dissipation. Le problème étant le même que dans les sections précédentes, à savoir  $u \cdot D\theta \notin L^1(\Omega)$ , on considère de nouveau des données plus régulières pour les équations de Navier-Stokes, à savoir  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et une hypothèse de croissance *ad hoc* sur  $F$ . Les résultats de régularité montrés en Section 4.1.2 impliquent alors que  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$ . On montre alors, par point fixe, un résultat d'existence de solution faible pour des données petites, puis, en imposant une condition de Lipschitz sur  $F$  on montre l'unicité pour des solutions suffisamment petites.

**Théorème 5.4.1** *On suppose que  $\theta_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ . Soit  $0 \leq \alpha < 2$ . On suppose que  $F$  est continue et vérifie la condition de croissance*

$$|F(r)| \leq a + b|r|^\alpha, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}, \quad (5.42)$$

où  $a, b$  sont des constantes pouvant dépendre de  $\alpha$ .

Si l'une des conditions suivantes est satisfaite

- $0 \leq 2\alpha \leq 1$
- $1 < 2\alpha < 4$ , avec  $a, \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}$  et  $b$  assez petits,

alors, il existe au moins une solution faible du problème (5.1) au sens de la Définition 5.1.2.

**Théorème 5.4.2** *On suppose que  $\theta_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u_0 \in \mathbf{H}_{0,\sigma}^1(\Omega)$ . Soient  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ . On suppose que  $F$  est continue et vérifie la condition de croissance*

$$|F(r)| \leq a + b|r|^\alpha, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}, \quad (5.43)$$

où  $a, b$  sont des constantes pouvant dépendre de  $\alpha$ .

On suppose de plus que  $F$  vérifie la condition de Lipschitz suivante :

$$|F(r) - F(s)| \leq L|r - s|(1 + |r|^\beta + |s|^\beta), \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

Alors, il y a unicité de la solution faible du problème (5.1) pour des solutions suffisamment petites. Plus précisément, il existe  $R > 0$  tel que si  $(u_1, \theta_1)$  et  $(u_2, \theta_2)$  sont deux solutions faibles de (5.1) satisfaisant

$$\theta_1, \theta_2 \in B_{L^4(Q_T)}(0, R) \quad (5.45)$$

$$Du_1, Du_2 \in B_{(L^4(Q_T))^2}(0, R) \quad (5.46)$$

$$D\theta_1, D\theta_2 \in B_{L^2(Q_T)}(0, R) \quad (5.47)$$

alors  $\theta_1 = \theta_2$  et  $u_1 = u_2$ .

**Démonstration du Théorème 5.4.1**— On distinguera trois cas,  $0 \leq 2\alpha < 1$ ,  $1 \leq 2\alpha < 2$  et  $2 \leq 2\alpha < 4$ . Pour les premier et deuxième cas on utilise les résultats d'existence des solutions faibles-renormalisées établis par Attaoui et Blanchard (dans [1], [2]). Tandis que pour le troisième cas, on montre l'existence par des techniques reposant sur le théorème de point fixe de Schauder, en mettant à profit les résultats de régularité, de la Section 4.1.2, pour les équations de Navier-Stokes.

**1er cas :**  $0 \leq 2\alpha \leq 1$ . D'après le résultat d'existence de Attaoui et Blanchard (voir [1], [2]), le problème (5.1) admet au moins une solution faible-renormalisée. Comme  $\theta$  est solution renormalisée de l'équation de la chaleur avec second membre  $|Du|^2$  au moins dans  $L^1(Q_T)$  alors d'après les résultats de régularité classiques on a  $\theta \in L^p(Q_T)$  pour tout  $1 \leq p < 2$  (voir Proposition (4.2.10)). La croissance de  $F$  implique alors  $F(\theta) \in \mathbf{L}^{\frac{2}{\alpha}}(Q_T) \subset \mathbf{L}^2(Q_T)$ . Par conséquent, avec la donnée initiale  $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , il découle  $u \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  (Théorème ) et donc par les inégalités de Gagliardo-Nirenberg il vient  $Du \in (\mathbf{L}^4(Q_T))^2$  c'est-à-dire  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$ . Ainsi  $\theta$  est solution renormalisée de l'équation de la chaleur avec données  $L^2$ , donc  $\theta$  est solution faible de cette équation et par conséquent  $(u, \theta)$  est solution faible du système (5.1).

**2ème cas :**  $1 \leq 2\alpha < 2$ . Encore une fois, d'après Attaoui et Blanchard (voir [1], [2]), pour  $a^2 \text{mes}(Q_T)^2 + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}$  et  $b$  assez petits, le problème (5.1) admet au moins une solution faible-renormalisée. Comme dans le premier cas, on a  $\theta \in L^p(Q_T)$  pour tout  $1 \leq p < 2$  et donc la croissance de  $F$  implique que  $F(\theta) \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ , et par les mêmes arguments que précédemment  $(u, \theta)$  est alors solution faible du problème (5.1).

**3ème cas :**  $2 \leq 2\alpha < 4$ . On démontre l'existence en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. Pour cela, on fixe  $\hat{\theta}$  dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$ , de telle sorte qu'avec l'hypothèse de croissance (5.42) sur  $F$ ,  $F(\hat{\theta})$  soit dans  $\mathbf{L}^2(Q_T)$ . On associe alors à  $\hat{\theta}$ , l'unique solution  $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$  des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot Du + Dp = F(\hat{\theta}) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \text{div}(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

D'après les résultats de régularité de Gerhardt (cf. Théorème 4.1.6) et la Proposition 4.1.9, on a de plus

$$u \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)).$$

Les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (voir Lemme 4.1.3) impliquent alors que  $Du \in (\mathbf{L}^4(Q_T))^2$ , de sorte que  $|Du|^2 \in L^2(Q_T)$ . On pose donc  $\theta$ , l'unique solution faible de



l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot D\theta = |Du|^2 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

On a de manière classique,  $\theta \in L^4(Q_T)$ , et donc, a fortiori,  $\theta \in L^{2\alpha}(Q_T)$  (car  $\alpha < 2$ ). On a donc défini l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : L^{2\alpha}(Q_T) &\longrightarrow L^{2\alpha}(Q_T) \\ \hat{\theta} &\longmapsto \theta. \end{aligned}$$

Pour montrer l'existence d'un point fixe, par Schauder, il faut montrer que  $\Psi$  est continue, compacte et préserve un convexe fermé borné. Un point fixe  $\theta$  pour cette application sera donc tel que  $(u, \theta)$  est solution faible de (5.1).

**$\Psi$  continué** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions de  $L^{2\alpha}(Q_T)$  convergeant fortement vers  $\hat{\theta}$ . En faisant la différence des équations en  $\theta_n$  et  $\theta$ , et en prenant  $\theta_n - \theta$  comme fonction test, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\theta_n - \theta|^2 dx + \int_{Q_t} |D\theta_n - D\theta|^2 dx ds &\leq \int_{Q_t} |Du_n - Du| |Du_n + Du| |\theta_n - \theta| dx ds \\ &+ \int_{Q_t} |u_n - u| |D\theta_n| |\theta_n - \theta| dx ds, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (5.48)$$

On rappelle que d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg,

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^4(Q_T)} \leq C(\Omega) \|\theta_n - \theta\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^{\frac{1}{2}} \|\theta_n - \theta\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.49)$$

Il découle donc de (5.48) et de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} \|\theta_n - \theta\|_{L^4(Q_T)} &\leq C(\Omega) \left( \|Du_n - Du\|_{(L^2(Q_T))^2} \| |Du_n| + |Du| \|_{L^4(Q_T)} \right. \\ &\quad \left. + \|u_n - u\|_{L^4(Q_T)} \|D\theta_n\|_{L^2(Q_T)} \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

En estimant les termes  $\|Du_n - Du\|_{(L^2(Q_T))^2}$ ,  $\|u_n - u\|_{L^4(Q_T)}$  à l'aide de la contraction (4.5) et des inégalités de Gagliardo-Nirenberg, l'inégalité (5.50) devient

$$\begin{aligned} \|\theta_n - \theta\|_{L^4(Q_T)} &\leq C \left( \Omega, \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \|F(\hat{\theta}_n) - F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)} \\ &\quad \times \left( \|Du_n\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|Du\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|D\theta_n\|_{L^2(Q_T)} \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

D'après l'estimation (4.6) du Théorème 4.1.6 et les inégalités de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\begin{aligned} \|Du_n\|_{(L^4(Q_T))^2} &\leq C \left( \|F(\hat{\theta}_n)\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \\ &\quad \times \left( 1 + \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|F(\hat{\theta}_n)\|_{L^2(Q_T)} \right)^2 \exp \left( C \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|F(\hat{\theta}_n)\|_{L^2(Q_T)}^4 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \|Du\|_{(L^4(Q_T))^2} &\leq C \left( \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \\ &\times \left( 1 + \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)} \right)^2 \exp \left( C \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)}^4 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

D'autre part, d'après les estimations classiques sur l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \|D\theta_n\|_{L^2(Q_T)} &\leq C \| |Du_n|^2 \|_{L^2(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C \|Du_n\|_{(L^4(Q_T))^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Or  $(\hat{\theta}_n)$  converge dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$  donc est borné dans cet espace, il résulte de la croissance (5.42) sur  $F$  que  $(F(\hat{\theta}_n))$  est borné dans  $L^2(Q_T)$ . Par conséquent, en combinant (5.51), (5.52), (5.53), (5.54), il vient

$$\|\theta_n - \theta\|_{L^4(Q_T)} \leq C \|F(\hat{\theta}_n) - F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . Cette dernière inégalité, la croissance (5.42) de  $F$ , la convergence de  $\hat{\theta}_n$  vers  $\hat{\theta}$  dans  $L^{2\alpha}(Q_T)$  et le fait que  $2\alpha < 4$  impliquent alors que

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ dans } L^{2\alpha}(Q_T).$$

Ce qui prouve la continuité de  $\Psi$ .

**$\Psi$  compacte** : soit  $(\hat{\theta}_n)$  une suite de fonctions bornée ds  $L^{2\alpha}(Q_T)$ . Alors, par la croissance (5.42) de  $F$ ,  $F(\hat{\theta}_n)$  bornée dans  $L^2(Q_T)$ . Pour tout  $n$ ,  $u_n$  vérifie les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + u_n \cdot Du_n + Dp_n = F(\hat{\theta}_n) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(u_n) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u_n(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.55)$$

Par conséquent, par les estimations du Théorème 4.1.6 et de la Proposition 4.1.9 et les inégalités de Gagliardo-Nirenberg, on déduit que  $Du_n$  est bornée dans  $(L^4(Q_T))^2$  ie  $|Du_n|^2$  bornée dans  $L^2(Q_T)$ . Les fonctions  $\theta_n$  sont solutions faibles de

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} - \Delta \theta_n + u_n \cdot D\theta_n = |Du_n|^2 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta_n(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \\ \theta_n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après des estimations classiques sur les solutions faibles de l'équation de la chaleur, et en écrivant  $u_n \cdot D\theta_n = -\operatorname{div}(u_n \theta_n)$ , il vient

- $\theta_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
- $\frac{\partial \theta_n}{\partial t} = |Du_n|^2 + \Delta \theta_n - \operatorname{div}(u_n \theta_n)$  est bornée dans  $L^2(Q_T) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,

où on a utilisé que  $u_n$  et  $\theta_n$  sont dans  $L^4(Q_T)$  et donc  $-\operatorname{div}(u_n\theta_n) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Par un lemme de compacité de type Aubin-Simon ([40]), on a donc, en particulier, l'existence d'une fonction  $\vartheta$  mesurable telle qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{p.p. dans } Q_T.$$

De cette convergence ponctuelle et du fait que,  $(\theta_n)$  est bornée dans  $L^4(Q_T)$ , le théorème de Vitali implique alors qu'à une sous-suite près

$$\theta_n \longrightarrow \vartheta \quad \text{dans } L^{2\alpha}(Q_T)$$

car  $2\alpha < 4$ . Ce qui montre la compacité.

**$\Psi$  préserve une boule** : d'après les estimations classiques sur la solution de l'équation de la chaleur et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (Lemme 4.1.3), on a

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^4(Q_T)} &\leq C(\Omega) \left( \| |Du|^2 \|_{L^2(Q_T)} + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &= C(\Omega) \left( \|Du\|_{(L^4(Q_T))^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

D'autre part l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (Lemme 4.1.3) et les résultats de régularité du Théorème 4.1.6 et de la Proposition 4.1.9 donnent

$$\|Du\|_{(L^4(Q_T))^2} \leq C_1(\Omega) \left( \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right) \Psi \left( \|F(\hat{\theta})\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

où  $\psi$  est une fonction définie de la manière suivante

$$\Psi(s) = (1 + s^2) \exp(C(\Omega)s^4). \quad (5.57)$$

L'hypothèse de croissance (5.42) sur  $F$  entraîne alors

$$\begin{aligned} \|Du\|_{(L^4(Q_T))^2} &\leq C(\Omega) \left( a \operatorname{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + b \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^\alpha + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \right) \\ &\quad \times \Psi \left( a \operatorname{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + b \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^\alpha + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

En combinant (5.56) et (5.58), il vient

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^4(Q_T)} &\leq C(\Omega) \left( a^2 \operatorname{mes}(Q_T) + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + b^2 \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^{2\alpha} \right) \\ &\quad \times \Psi^2 \left( a \operatorname{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + b \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^\alpha + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et comme  $2\alpha < 4$ , par Hölder,

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q_T)} &\leq C(\alpha, \Omega) \left( a^2 \operatorname{mes}(Q_T) + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + b^2 \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^{2\alpha} \right) \\ &\quad \times \Psi^2 \left( a \operatorname{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + b \|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)}^\alpha + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Si l'on peut trouver  $R$  tel que

$$C(\alpha, \Omega) \left( a^2 \text{mes}(Q_T) + \|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + b^2 R^{2\alpha} \right) \times \Psi^2 \left( a \text{mes}(Q_T)^{\frac{1}{2}} + bR^\alpha + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \leq R, \quad (5.60)$$

alors d'après (5.59), un tel  $R$  vérifie

$$\|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(Q_T)} \leq R \implies \|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q_T)} \leq R,$$

c'est-à-dire  $\Psi$  préserve la boule de  $L^{2\alpha}(Q_T)$  de rayon  $R$ . Remarquons enfin que pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , alors l'inégalité (5.60) est vérifiée pour des données  $a$ ,  $\|u_0\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ ,  $b$ ,  $\|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}$  suffisamment petites. □

**Démonstration du Théorème 5.4.2**— Soient  $(u_1, \theta_1)$ ,  $(u_2, \theta_2)$  deux solutions faibles du système (5.1). En faisant la différence des équations en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , et en prenant  $\theta_1 - \theta_2$  comme fonction test il vient,

$$\int_{\Omega} |\theta_1 - \theta_2|^2 dx + \int_{Q_t} |D\theta_1 - D\theta_2|^2 dx ds \leq \int_{Q_t} |Du_1 - Du_2| |Du_1 + Du_2| |\theta_1 - \theta_2| dx ds + \int_{Q_t} |u_1 - u_2| |D\theta_1| |\theta_1 - \theta_2| dx ds, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (5.61)$$

Par des calculs identiques à ceux effectués pour trouver (5.51), on obtient

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)} \leq C(\Omega, \|F(\theta_1)\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(Q_T)} \times (\|Du_1\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|Du_2\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|D\theta_1\|_{L^2(Q_T)}). \quad (5.62)$$

La condition de Lipschitz (5.44) sur  $F$ , l'inégalité de Hölder et le fait que  $\beta \leq 1$  impliquent alors

$$\begin{aligned} \|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_{L^2(Q_T)} &\leq L \|(\theta_1 - \theta_2)(1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta)\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C(L) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)} \|1 + |\theta_1|^\beta + |\theta_2|^\beta\|_{L^4(Q_T)} \\ &\leq C(L, \Omega) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)} \left( 1 + \|\theta_1\|_{L^4(Q_T)}^\beta + \|\theta_2\|_{L^4(Q_T)}^\beta \right). \end{aligned}$$

En injectant cette dernière inégalité dans (5.62), il découle

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)} \leq C(L, \Omega, \|F(\theta_1)\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \left( 1 + \|\theta_1\|_{L^4(Q_T)}^\beta + \|\theta_2\|_{L^4(Q_T)}^\beta \right) \times (\|Du_1\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|Du_2\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|D\theta_1\|_{L^2(Q_T)}) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)}. \quad (5.63)$$

Pour des solutions suffisamment petites, c'est-à-dire  $\|\theta_i\|_{L^4(Q_T)}$ ,  $\|Du_i\|_{(L^4(Q_T))^2}$ ,  $\|D\theta_i\|_{L^2(Q_T)}$  assez petits, on a clairement

$$C(L, \Omega, \|F(\theta_1)\|_{L^2(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \left(1 + \|\theta_1\|_{L^4(Q_T)}^\beta + \|\theta_2\|_{L^4(Q_T)}^\beta\right) \times (\|Du_1\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|Du_2\|_{(L^4(Q_T))^2} + \|D\theta_1\|_{L^2(Q_T)}) < 1. \quad (5.64)$$

Dans ce cas, alors d'après (5.63), il vient

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(Q_T)} \leq 0,$$

c'est-à-dire,  $\theta_1 = \theta_2$ . Et donc on en déduit l'unicité des solutions si les solutions sont suffisamment petites.

□

**Remarque 5.4.3** Contrairement aux résultats d'unicité obtenus dans les sections précédentes (Théorème 5.2.2, Théorème 5.3.2), on obtient ici l'unicité pour des solutions petites alors que précédemment on a montré l'unicité pour des données petites. Cela résulte du fait que dans le cas d'un système avec énergie de dissipation, le couplage fort entre les équations rend délicat l'estimation des solutions à partir des données.

# Bibliographie

- [1] A. Attaoui. *Existence de solutions faibles et faibles-renormalisées pour des systèmes non linéaires de Boussinesq*. PhD thesis, Université de Rouen, 2007.
- [2] A. Attaoui and D. Blanchard. Weak-renormalized solutions for a nonlinear Boussinesq system. *In preparation*.
- [3] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, and J. L. Vasquez. An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 22 :241–273, 1995.
- [4] C. Bernardi, B. Métivet, and B. Pernaud-Thomas. Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par élément finis. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(7) :871–921, 1995.
- [5] M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, and M. M. Porzio. Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(1), 2003. Corrected reprint of *J. Math. Pures Appl. (9)* **81** (2002), no. 6, 533–566.
- [6] D. Blanchard and F. Murat. Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with  $L^1$  data : existence and uniqueness. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 127(6) :1137–1152, 1997.
- [7] D. Blanchard, F. Murat, and H. Redwane. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems. *J. Differential Equations*, 177(2) :331–374, 2001.
- [8] D. Blanchard and A. Porretta. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. *J. Differential Equations*, 210(2) :383–428, 2005.
- [9] D. Blanchard and H. Redwane. Renormalized solutions for a class of nonlinear evolution problems. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 77(2) :117–151, 1998.
- [10] L. Boccardo, A. Dall’Aglio, T. Gallouët, and L. Orsina. Nonlinear parabolic equations with measure data. *J. Funct. Anal.*, 147(1) :237–258, 1997.
- [11] L. Boccardo, J. I. Diaz, D. Giachetti, and F. Murat. Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms. *J. Differential Equations*, 106(2) :215–237, 1993.
- [12] L. Boccardo and T. Gallouët. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Anal.*, 87(1) :149–169, 1989.

- [13] L. Boccardo and T. Gallouët. Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(3-4) :641–655, 1992.
- [14] L. Boccardo, T. Gallouët, and L. Orsina. Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(5) :539–551, 1996.
- [15] L. Boccardo and F. Murat. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. *Nonlinear Anal.*, 19(6) :581–597, 1992.
- [16] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [17] N. Bruyère. Limit behaviour of a class of nonlinear elliptic problems in infinite cylinders. *Adv. Differential Equations*, 12(10) :1081–1114, 2007.
- [18] M. Chipot.  *$\ell$  goes to plus infinity*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [19] M. Chipot and A. Rougirel. Sur le comportement asymptotique de la solution de problèmes elliptiques dans des domaines cylindriques tendant vers l’infini. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(6) :435–440, 2000.
- [20] M. Chipot and A. Rougirel. On the asymptotic behaviour of the solution of parabolic problems in cylindrical domains of large size in some directions. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(3) :319–338, 2001.
- [21] M. Chipot and A. Rougirel. On the asymptotic behaviour of the solution of elliptic problems in cylindrical domains becoming unbounded. *Commun. Contemp. Math.*, 4(1) :15–44, 2002.
- [22] M. Chipot and Y. Xie. Some issues on the  $p$ -Laplace equations in cylindrical domains. To appear in the proceedings of the Suzdal conference, 2006, Suzdal (Russia).
- [23] M. Chipot and Y. Xie. On the asymptotic behaviour of the  $p$ -Laplace equation in cylinders becoming unbounded. In *Nonlinear partial differential equations and their applications*, volume 20 of *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, pages 16–27. Gakkōtoshō, Tokyo, 2004.
- [24] B. Climent and E. Fernández-Cara. Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8(4) :603–622, 1998.
- [25] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, and A. Prignet. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 28(4) :741–808, 1999.
- [26] A. Dall’Aglia and L. Orsina. Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data. *Differential Integral Equations*, 5(6) :1335–1354, 1992.
- [27] J. I. Díaz and G. Galiano. Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 11(1) :59–82, 1998.

- [28] J. I. Díaz, J.-M. Rakotoson, and Schmidt P.G. A parabolic system involving a quadratic gradient term related to the boussinesq approximation. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 101(1) :113–118, 2007.
- [29] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)*, 130(2) :321–366, 1989.
- [30] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.
- [31] C. Gerhardt.  $L^p$ -estimates for solutions to the instationary Navier-Stokes equations in dimension two. *Pacific J. Math.*, 79(2) :375–398, 1978.
- [32] O. Guibé. *Existence de solutions pour des systèmes couplés non linéaires elliptiques ou d'évolution*. PhD thesis, Université de Rouen, 1998.
- [33] R. A. Hunt. On  $L(p, q)$  spaces. *Enseignement Math. (2)*, 12 :249–276, 1966.
- [34] P-L Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.
- [35] P.-L. Lions and F. Murat. Solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires. *To appear*.
- [36] G. G. Lorentz. Some new functional spaces. *Ann. of Math. (2)*, 51 :37–55, 1950.
- [37] F. Murat. Equations elliptiques non linéaires avec second membre  $L^1$  ou mesure. *Actes du 26ème congrès d'analyse numérique (Les Karellis, Juin 1994)*, pages A12–A24.
- [38] F. Murat. Soluciones renormalizadas de edp elipticas no lineales. *Cours à l'université de Seville, Mars 1992*.
- [39] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 13 :115–162, 1959.
- [40] J. Simon. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146 :65–96, 1987.
- [41] V. A. Solonnikov. Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 70 :213–317, 1964.
- [42] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and Numerical Analysis.
- [43] R. Temam and A. Miranville. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2005.
- [44] Y. Xie. *On Asymptotic Problems in Cylinders and Other Mathematical issues*. PhD thesis, University of Zürich, 2006.
- [45] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*. Springer-Verlag, New York, 1980.