

# Comportement en temps long des fluides visqueux bidimensionnels

L.Miguel Rodrigues

Institut Fourier

7 décembre 2007

# Inconnues et variables.

Espace :  $x \in \mathbf{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x^\perp = (-x_2, x_1)$ .

Temps :  $t \geq 0$ .

# Inconnues et variables.

Espace :  $x \in \mathbf{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x^\perp = (-x_2, x_1)$ .

Temps :  $t \geq 0$ .

Densité :  $\rho(t, x) > 0$ .

Vitesse :  $u(t, x) \in \mathbf{R}^2$ .

# Inconnues et variables.

Espace :  $x \in \mathbf{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x^\perp = (-x_2, x_1)$ .

Temps :  $t \geq 0$ .

Densité :  $\rho(t, x) > 0$ .

Vitesse :  $u(t, x) \in \mathbf{R}^2$ .

Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 .$$

# Bilan de force.

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) =$$

## Bilan de force.

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u - \nabla p .$$

$\lambda, \mu$  coefficients de viscosité,  $\mu > 0$ ,  $\lambda + 2\mu > 0$ .

$p(t, x) \in \mathbf{R}$  pression.

# Un modèle compressible.

Loi d'état :

$$p = P(\rho)$$

avec  $P$  une fonction régulière strictement croissante.

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u - \nabla(P(\rho)) \end{cases} .$$

# Modèle incompressible.

Incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0 .$$



# Modèle incompressible.

Incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0 .$$

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \frac{1}{\rho} (\mu \Delta u - \nabla p) \end{cases} .$$

# Modèle incompressible.

Incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0 .$$

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \frac{1}{\rho} (\mu \Delta u - \nabla p) \end{cases} .$$

Détermination de la pression :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\mu}{\rho} \Delta u - (u \cdot \nabla) u \right) .$$

## Modèle incompressible : formulation tourbillon.

Tourbillon :  $\omega(t, x) \in \mathbf{R}$ ,

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 .$$

## Modèle incompressible : formulation tourbillon.

Tourbillon :  $\omega(t, x) \in \mathbf{R}$ ,

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 .$$

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} (\mu \nabla \omega + \nabla^\perp p) \right) \end{cases} ,$$

## Modèle incompressible : formulation tourbillon.

Tourbillon :  $\omega(t, x) \in \mathbf{R}$ ,

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 .$$

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} (\mu \nabla \omega + \nabla^\perp p) \right) \end{cases} ,$$

avec  $u = K_{BS} \star \omega$ ,

## Modèle incompressible : formulation tourbillon.

Tourbillon :  $\omega(t, x) \in \mathbf{R}$ ,

$$\omega = \text{rot } u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 .$$

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \text{div} \left( \frac{1}{\rho} (\mu \nabla \omega + \nabla^\perp p) \right) \end{cases} ,$$

avec  $u = K_{BS} \star \omega$ , et

$$\text{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \text{div} \left( \frac{\mu}{\rho} \Delta u - (u \cdot \nabla) u \right) .$$

Densité constante :  $\rho \equiv \rho_*$ .

Formulation vitesse :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \frac{1}{\rho_*} (\mu \Delta u - \nabla p)$$

avec  $\Delta p = -\rho_* \operatorname{div}((u \cdot \nabla) u)$ .

Formulation tourbillon :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \frac{\mu}{\rho_*} \Delta \omega$$

avec  $u = K_{BS} \star \omega$ .

# Tourbillon d'Oseen.

Posons  $\nu = \mu/\rho_*$ .



# Tourbillon d'Oseen.

Posons  $\nu = \mu/\rho_*$ .

$$\rho^G(t, x) = \rho_* ,$$

# Tourbillon d'Oseen.

Posons  $\nu = \mu/\rho_*$ .

$$\rho^G(t, x) = \rho_* ,$$

$$\omega^G(t, x) = \frac{1}{t} G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) , \quad u^G(t, x) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} v^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) ,$$

# Tourbillon d'Oseen.

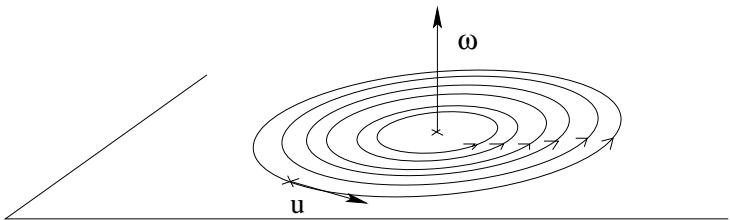
Posons  $\nu = \mu/\rho_*$ .

$$\rho^G(t, x) = \rho_* ,$$

$$\omega^G(t, x) = \frac{1}{t} G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) , \quad u^G(t, x) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} v^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) ,$$

avec

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} , \quad v^G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} \left(1 - e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}\right) .$$



# Tourbillons d'Oseen.

$$\partial_t \omega^G + \mathbf{u}^G \cdot \nabla \omega^G = \nu \Delta \omega^G .$$

# Tourbillons d'Oseen.

$$\partial_t \omega^G = \nu \Delta \omega^G .$$

# Tourbillons d'Oseen.

$$\partial_t \omega^G = \nu \Delta \omega^G .$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $(\rho^G, \alpha \omega^G)$  est une solution des équations incompressibles.

$\nu \alpha$  circulation de la vitesse à l'infini.

$|\alpha|$  nombre de Reynolds de circulation.

Théorème.

Si  $(\rho_*, \omega)$  est une solution avec  $\omega_0$  mesure finie, alors



## Théorème.

Si  $(\rho_*, \omega)$  est une solution avec  $\omega_0$  mesure finie, alors

- pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \rightarrow 0$$

## Théorème.

Si  $(\rho_*, \omega)$  est une solution avec  $\omega_0$  mesure finie, alors

- pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \rightarrow 0$$

avec  $\alpha = \nu^{-1} \omega_0(\mathbf{R}^2)$ ;

## Théorème.

Si  $(\rho_*, \omega)$  est une solution avec  $\omega_0$  mesure finie, alors

- pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \rightarrow 0$$

avec  $\alpha = \nu^{-1} \omega_0(\mathbf{R}^2)$ ;

- pour  $2 < q \leq +\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|u(t) - \alpha u^G(t)\|_q \rightarrow 0 .$$

# Plan :

- 1 Densité constante : un temps explicite.
- 2 Incompressible : stabilité des tourbillons d'Oseen.
- 3 Compressible : solutions d'énergie finie.

## Densité constante : paramètres.

Nombre de Reynolds de circulation :

$$R = \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)| dx.$$

## Densité constante : paramètres.

Nombre de Reynolds de circulation :

$$R = \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)| dx.$$

Localisation :  $x_0 \in \mathbf{R}^2$ ,  $t_0 > 0$ ,

$$D = \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)| \exp\left(\frac{|x - x_0|^2}{8\nu t_0}\right) dx < \infty.$$

# Densité constante : un temps explicite.

## Théorème 1.

Il existe des constantes universelles  $K_1, K_2, r > 0$  telles que toute solution  $(\rho_*, \omega)$  vérifie, pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{\nu} \left\| \omega(t, \cdot) - \alpha \omega^G(t + t_0, \cdot - x_0) \right\|_1 \leq \frac{K_1 e^{K_2 R^2} D}{(\ln(1 + t/t_0))^r},$$

avec, comme précédemment,

$$\alpha = \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x) dx .$$

# Plan :

- 1 Densité constante : un temps explicite.
- 2 Incompressible : stabilité des tourbillons d'Oseen.
- 3 Compressible : solutions d'énergie finie.



# Système incompressible.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} (\mu \nabla \omega + \nabla^\perp p) \right) \end{cases},$$

avec  $u = K_{BS} \star \omega$ , et

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\mu}{\rho} \Delta u - (u \cdot \nabla) u \right).$$

## Quelques simplifications.

Revenons à  $x_0 = (0, 0)$ .

## Quelques simplifications.

Revenons à  $x_0 = (0, 0)$ .

Supposons que les données initiales sont fixées à  $t = t_0$ , avec  $t_0 = 1$ .

## Quelques simplifications.

Revenons à  $x_0 = (0, 0)$ .

Supposons que les données initiales sont fixées à  $t = t_0$ , avec  $t_0 = 1$ .

Supposons également  $\rho_\star = 1$  et  $\mu = 1$ .

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .



# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1) \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1) \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ,  $G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1)) \in L^2(\mathbf{R}^2)$

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1) \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ,  $G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1)) \in L^2(\mathbf{R}^2)$   
avec  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_2 \leq \varepsilon$ ,  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_\infty \leq \varepsilon$ ,  
 $\|G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1))\|_2 \leq \varepsilon$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1) \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ,  $G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1)) \in L^2(\mathbf{R}^2)$   
avec  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_2 \leq \varepsilon$ ,  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_\infty \leq \varepsilon$ ,  
 $\|G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1))\|_2 \leq \varepsilon$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}} \nabla(\rho_0 - 1) \in L^r(\mathbf{R}^2)$ ,

# Stabilité des tourbillons : hypothèses.

## Théorème 2.

Soient  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $0 < s < 1$  et  $r > \max(4, 2/s)$ .

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , si

- $\rho_0 - 1 \in H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\omega_0 - \alpha \omega^G(1) \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1) \in L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ,  $G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1)) \in L^2(\mathbf{R}^2)$   
avec  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_2 \leq \varepsilon$ ,  $\|G^{-\frac{1}{2}}(\rho_0 - 1)\|_\infty \leq \varepsilon$ ,  
 $\|G^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 - \alpha \omega^G(1))\|_2 \leq \varepsilon$ ,
- $G^{-\frac{1}{2}} \nabla(\rho_0 - 1) \in L^r(\mathbf{R}^2)$ ,

avec  $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} \omega_0$ ,

# Stabilité des tourbillons : conclusion.

## Théorème 2.

alors il existe une unique solution  $(\rho, \omega)$ , de condition initiale  $(\rho_0, \omega_0)$  à l'instant  $t = 1$ ,

# Stabilité des tourbillons : conclusion.

## Théorème 2.

alors il existe une unique solution  $(\rho, \omega)$ , de condition initiale  $(\rho_0, \omega_0)$  à l'instant  $t = 1$ , et, pour  $t \geq 1$ ,

- pour  $2 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|\rho(t) - 1\|_p \leq K \varepsilon ;$$

- pour  $1 \leq p \leq 2$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \leq K \varepsilon ;$$



# Stabilité des tourbillons : conclusion.

## Théorème 2.

alors il existe une unique solution  $(\rho, \omega)$ , de condition initiale  $(\rho_0, \omega_0)$  à l'instant  $t = 1$ , et, pour  $t \geq 1$ ,

- pour  $2 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|\rho(t) - 1\|_p \leq K \varepsilon ;$$

- pour  $1 \leq p \leq 2$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \leq \frac{K \varepsilon}{t^\gamma} ;$$

# Stabilité des tourbillons : conclusion.

## Théorème 2.

alors il existe une unique solution  $(\rho, \omega)$ , de condition initiale  $(\rho_0, \omega_0)$  à l'instant  $t = 1$ , et, pour  $t \geq 1$ ,

- pour  $2 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|\rho(t) - 1\|_p \leq K \varepsilon ;$$

- pour  $1 \leq p \leq 2$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|\omega(t) - \alpha \omega^G(t)\|_p \leq \frac{K \varepsilon}{t^\gamma} ;$$

- pour  $2 < q < \infty$ ,

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|u(t) - \alpha u^G(t)\|_q \leq \frac{K_q \varepsilon}{t^\gamma} .$$

# Plan :

- 1 Densité constante : un temps explicite.
- 2 Incompressible : stabilité des tourbillons d'Oseen.
- 3 Compressible : solutions d'énergie finie.

# Système compressible.

Quantité de mouvement :  $m(t, x) \in \mathbf{R}^2$ ,  $m = \rho u$ .

# Système compressible.

Quantité de mouvement :  $m(t, x) \in \mathbf{R}^2$ ,  $m = \rho u$ .

Système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0 \\ \partial_t + \operatorname{div} \left( m \otimes \frac{m}{\rho} \right) = \mu \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right) + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \left( \frac{m}{\rho} \right) - \nabla (P(\rho)) \end{cases} .$$

Densité constante :  $\alpha = 0$ .

$\rho_0 \equiv \rho_*$ ,  $\omega_0$  petit et localisé.

Densité constante :  $\alpha = 0$ .

$\rho_0 \equiv \rho_*$ ,  $\omega_0$  petit et localisé.

Alors l'asymptotique est donnée, lorsque  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ , par

$$\beta_1 \omega^{F_1}(t, x) + \beta_2 \omega^{F_2}(t, x)$$

## Densité constante : $\alpha = 0$ .

$\rho_0 \equiv \rho_*$ ,  $\omega_0$  petit et localisé.

Alors l'asymptotique est donnée, lorsque  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ , par

$$\beta_1 \omega^{F_1}(t, x) + \beta_2 \omega^{F_2}(t, x)$$

avec, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\omega^{F_i}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\nu} t^{3/2}} F_i\left(\frac{x}{\sqrt{\nu} t}\right)$$

où

$$F_i(\xi) = \partial_i G(\xi) = -\frac{\xi_i}{2} G(\xi),$$



## Densité constante : $\alpha = 0$ .

$\rho_0 \equiv \rho_*$ ,  $\omega_0$  petit et localisé.

Alors l'asymptotique est donnée, lorsque  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ , par

$$\beta_1 \omega^{F_1}(t, x) + \beta_2 \omega^{F_2}(t, x)$$

avec, pour  $i = 1, 2$ ,

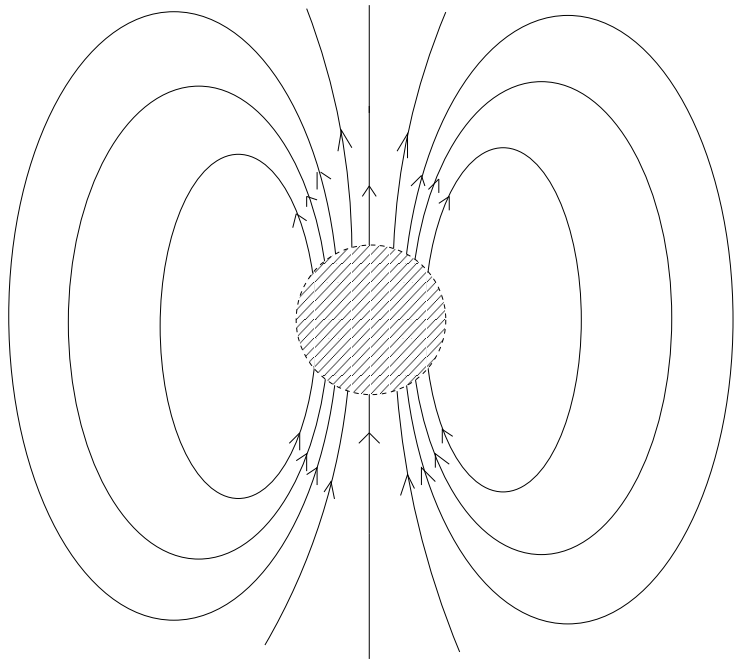
$$\omega^{F_i}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\nu} t^{3/2}} F_i\left(\frac{x}{\sqrt{\nu} t}\right)$$

où

$$F_i(\xi) = \partial_i G(\xi) = -\frac{\xi_i}{2} G(\xi) ,$$

et, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\beta_i = -\frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} x_i \omega_0(x) dx .$$



## Remarque et notations.

On note, pour  $i = 1, 2$ ,  $u^{F_i} = K_{BS} \star \omega^{F_i}$ , et

$$u^{\beta_1, \beta_2} = \beta_1 u^{F_1} + \beta_2 u^{F_2} .$$

Si  $u_0$  est intégrable, alors  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ .

## Théorème 3 : hypothèses.

### Théorème 3.

Il existe des constantes strictement positives  $\varepsilon_0$  et  $K$  telles que si

## Théorème 3 : hypothèses.

### Théorème 3.

Il existe des constantes strictement positives  $\varepsilon_0$  et  $K$  telles que si

- $|\rho_0 - \rho_\star|_{H^5} \leq \varepsilon_0$ ,  $|m_0|_{H^5} \leq \varepsilon_0$  ;

## Théorème 3 : hypothèses.

### Théorème 3.

Il existe des constantes strictement positives  $\varepsilon_0$  et  $K$  telles que si

- $\|\rho_0 - \rho_\star\|_{H^5} \leq \varepsilon_0, \|m_0\|_{H^5} \leq \varepsilon_0$  ;
- $\|(1 + |\cdot|) \operatorname{rot} m_0\|_1 \leq \varepsilon_0$  ;

## Théorème 3 : hypothèses.

### Théorème 3.

Il existe des constantes strictement positives  $\varepsilon_0$  et  $K$  telles que si

- $\|\rho_0 - \rho_\star\|_{H^5} \leq \varepsilon_0, \|m_0\|_{H^5} \leq \varepsilon_0$  ;
- $\|(1 + |\cdot|) \operatorname{rot} m_0\|_1 \leq \varepsilon_0$  ;
- $\|\rho_0 - \rho_\star\|_1 \leq \varepsilon_0,$   
 $\|m_0 - K_{BS} \star \operatorname{rot} m_0\|_1 \leq \varepsilon_0$  ;

## Théorème 3 : conclusion.

### Théorème 3.

alors  $(\rho, m)$ , l'unique solution classique correspondante, vérifie



## Théorème 3 : conclusion.

### Théorème 3.

alors  $(\rho, m)$ , l'unique solution classique correspondante, vérifie

- pour  $t \geq 0$ , pour  $2 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|\rho(t) - \rho_\star\|_p \leq \frac{K}{(1+t)^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2p}}};$$

## Théorème 3 : conclusion.

### Théorème 3.

alors  $(\rho, m)$ , l'unique solution classique correspondante, vérifie

- pour  $t \geq 0$ , pour  $2 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|\rho(t) - \rho_\star\|_p \leq \frac{K}{(1+t)^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2p}}} ;$$

- pour  $2 < p \leq \infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$t^{1-\frac{1}{p}} \|m(t) - \rho_\star u^{\beta_1, \beta_2}\|_p \rightarrow 0$$

avec, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\beta_i = -\frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} x_i \operatorname{rot} \left( \frac{m_0}{\rho_\star} \right) dx .$$

## Supplément : variables auto-similaires.

$$\begin{cases} \partial_\tau b + \left( (v - \frac{1}{2} \xi) \cdot \nabla \right) b = 0 \\ \partial_\tau \tilde{w} - (\mathcal{L} - \alpha \Lambda) \tilde{w} + (\tilde{v} \cdot \nabla) \tilde{w} = \operatorname{div} ( b (\nabla w + \nabla^\perp \Pi) ) \end{cases}$$

où  $\mathcal{L}$  et  $\Lambda$  sont les opérateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f &= \Delta f + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla f + f, \\ \Lambda f &= v^G \cdot \nabla f + (K_{BS} \star f) \cdot \nabla G, \end{aligned}$$

$\tilde{v} = K_{BS} \star \tilde{w}$  et  $\nabla \Pi$  obtenu en résolvant

$$\operatorname{div} ((1 + b) \nabla \Pi) = \operatorname{div} ((1 + b) \Delta v - (v \cdot \nabla) v),$$

avec

$$w = \alpha G + \tilde{w}, \quad v = K_{BS} \star w = \alpha v^G + \tilde{v}.$$